

И. Н. ИВАНЦЕВ

АВТОМАТИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ

ТЕОРИЯ
И ПРАКТИКА
СИСТЕМ

М. Д. П. Г. И. З.

12-67-K
12-67-K
12-67-K

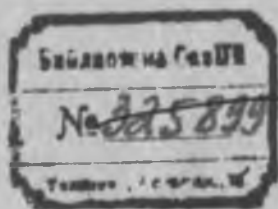
Н. Н. ИВАЩЕНКО
канд. техн. наук

621.398
и-24

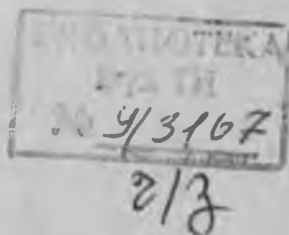
АВТОМАТИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ

ТЕОРИЯ И ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМ

*Допущено Министерством высшего образования СССР
в качестве учебного пособия
для высших технических учебных заведений*



МАШГИЗ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Машгиз 1958

В книге изложена общая теория и элементы систем автоматического регулирования и рассмотрены наиболее часто применяемые в производственных процессах регулирующие устройства различных физических величин (давления, температуры, скорости, напряжения и т. п.).

Первая часть книги посвящена статике систем регулирования и описанию основных принципиальных схем и их элементов. Кроме того, рассмотрены вопросы терминологии и классификации систем автоматического регулирования и изложены особенности различных объектов регулирования.

Вторая часть посвящена современным методам, применяемым для решения различных вопросов, связанных с переходными режимами систем регулирования, устойчивостью этих систем и анализом качества регулирования.

В книге кратко освещены вопросы статистической динамики, некоторые методы исследования нелинейных систем и теории оптимальных процессов.

Книга составлена в соответствии с программой курса „Автоматического регулирования“ МВО СССР и предназначена для студентов высших технических учебных заведений. Книга также может быть использована инженерно-техническими работниками, занимающимися вопросами теории и проектирования производственной автоматики.

Рецензент член-корреспондент АН СССР Б. Н. Петров

Редактор канд. техн. наук А. М. РУБИНЧИК

Редакция литературы по машиностроению и приборостроению
Зав. редакцией инж. Н. В. ПОКРОВСКИЙ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время подготовка высококвалифицированных инженеров для нашего народного хозяйства уже невозможна без наличия в учебных планах дисциплин, связанных с изучением автоматизации производственных процессов.

Эти дисциплины должны занять такое же место в общинженерной подготовке и формировании технического сознания молодого инженера, как курсы по сопротивлению материалов, теоретической механике и других основных технических дисциплин.

Особенное значение имеет изучение молодыми специалистами автоматического регулирования, являющегося основой автоматизации производственных процессов.

Данное учебное пособие дает основные сведения по теории и элементам систем автоматического регулирования применительно к программам втузов МВО. Кроме этого, в книге нашли отражение новейшие вопросы и направления, возникшие в последнее время в автоматическом регулировании, как например, оптимальное и экстремальное регулирование, динамика прерывистого регулирования и т. п.

Книга состоит из двух частей. В первой части рассматриваются элементы систем автоматического регулирования, вторая часть посвящена динамике систем автоматического регулирования.

Автор с благодарностью воспримет все замечания и пожелания, способствующие улучшению как существа, так и качества изложения данного материала.

ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. ОСНОВНАЯ ТЕРМИНОЛОГИЯ И ОСНОВЫ КЛАССИФИКАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Всякий, требующий регулирования, рабочий процесс имеет одну или несколько величин, которые для правильного хода процесса должны поддерживаться постоянными или изменяться по некоторому определенному закону.

Так, например, нормальная работа авиадвигателя требует, чтобы скорость вращения, давление наддува и состав смеси, поступающей в цилиндры, поддерживались для данного режима на определенном уровне, а при переходе с одного режима на другой принимали бы другие, соответствующие этому режиму, значения. Температура масла и температура охлаждающей жидкости должны при этом оставаться для всех режимов постоянными.

Процесс, принуждающий избранные величины принимать установленные значения при различных возмущениях и изменениях рабочего режима, называется регулированием, а избранные величины — регулируемыми величинами.

Если регулирование происходит без всякого участия человека, мы имеем автоматическое регулирование. Регулирующие устройства, осуществляющие такое регулирование, носят название автоматических регуляторов.

В дальнейшем мы будем говорить только об автоматическом регулировании.

Задача поддержания постоянного значения величины в ряде случаев, как известно, может быть решена применением стабилизаторов. Автоматический регулятор отличается от стабилизатора тем, что он практически реагирует на все виды возмущений и изменений рабочего режима, тогда как стабилизатор отвечает только на какой-либо один вид возмущений. Кроме того, в отличие от стабилизатора авторегулятор может выполнять операцию изменения регулируемой величины по заданному закону, чего стабилизатор сделать не в состоянии.

Тот объект, в котором необходимо регулировать рабочий процесс, называется объектом регулирования. Регулируемый объект вместе с регулятором составляет систему регулирования.

н и я, которая может быть разделена на две части — регулируемую и регулирующую. Регулирующая часть представляет совокупность автоматического регулятора и механизма, с помощью которого регулятор воздействует на тот параметр рабочего процесса, за счет изменения которого поддерживается установленное значение регулируемой величины. Те параметры, на которые мы воздействуем для того, чтобы заставить регулируемую величину принимать предписанные ей значения, называют параметрами регулирования.

В состав регулирующей части системы регулирования следует включить также регулирующий орган, который непосредственно производит изменение параметра регулирования. Однако в большинстве случаев регулирующий орган конструктивно входит в состав регулируемого объекта, почему часто его рассматривают совместно с регулируемой частью системы.

Для иллюстрации приведенной терминологии обратимся к примеру, где в качестве объекта регулирования взят паровой турбогенератор, работающий на электрическую сеть. Здесь регулируемой величиной является угловая скорость агрегата, регулирующим органом — дроссельный клапан, параметром регулирования будет расход пара через дроссельный клапан. В дальнейшем наряду с термином регулирующая система мы будем пользоваться и другим термином-регулятор, вкладывая в оба понятия одинаковое содержание. Основную часть регулирующей системы при этом будем называть собственно регулятором.

В зависимости от того закона, которому должна следовать регулируемая величина в зоне регулирования при различных установившихся режимах, регуляторы имеют различные устройства.

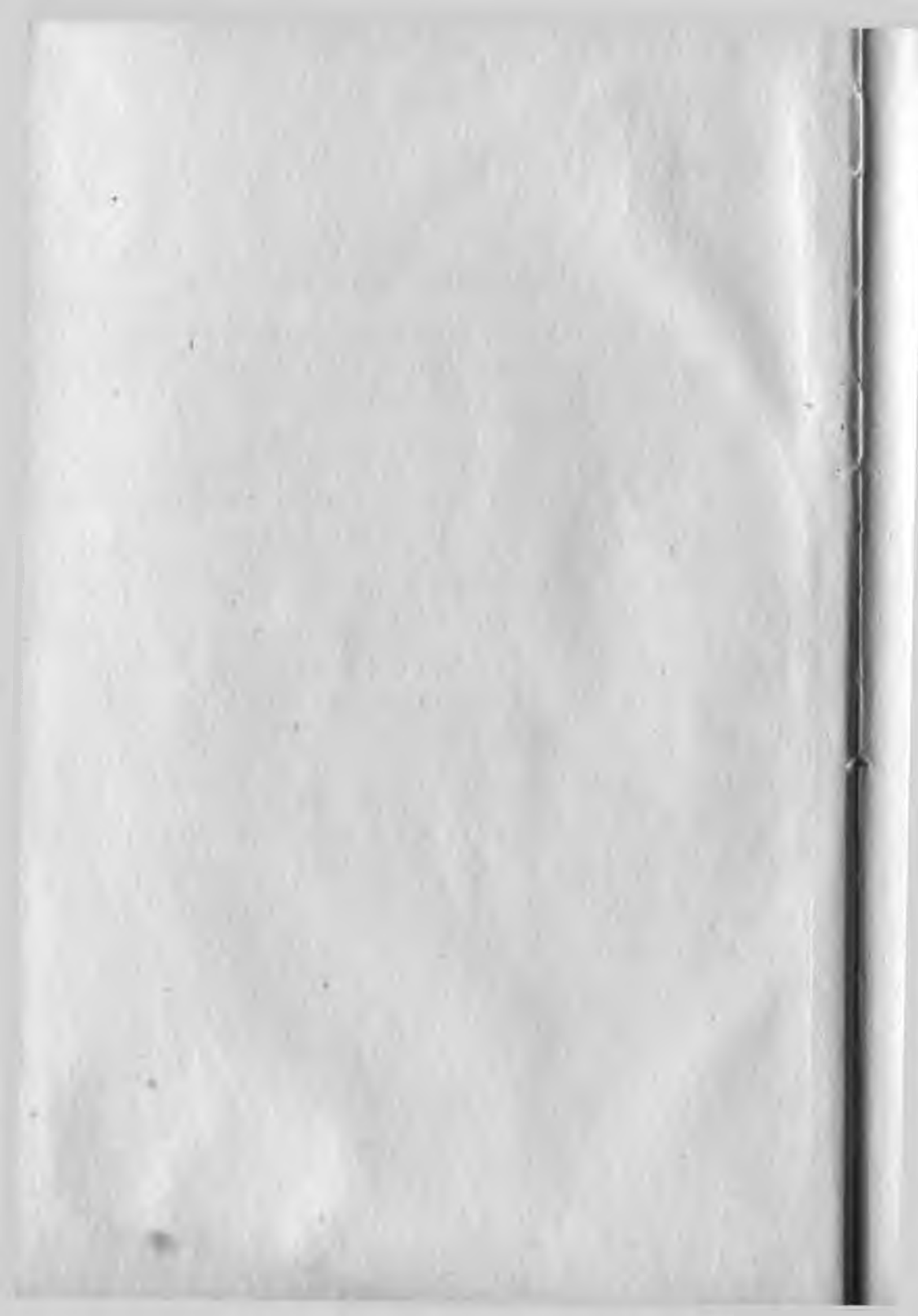
Обозначим предписанное значение регулируемой величины y . Эта величина в общем случае по заданию может быть функцией времени и некоторых параметров, зависящих или независимых от регулируемого рабочего процесса.

В большинстве случаев значение регулируемой величины устанавливается постоянной или зависимой от одного параметра, определяющего режим рабочего процесса. Такой параметр часто называют нагрузкой системы регулирования. При регулировании угловой скорости силового двигателя его нагрузка представляет независимый параметр, по отношению к которому может устанавливаться значение регулируемой величины. При регулировании давления пара в магистрали-нагрузкой регулятора является расход пара из этой магистрали.

Функциональная зависимость регулируемой величины от ее независимых переменных в условиях равновесного состояния называется регулировочной характеристикой системы регулирования.

В общем случае, когда регулируемая величина зависит от времени и других переменных параметров ω_1 , ω_2 , уравнение регулировочной характеристики имеет вид:

$$y = F(t, \omega_1, \omega_2). \quad (I-1)$$



1. КРАТКИЙ ОЧЕРК РАЗВИТИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Потребность в автоматическом регулировании возникла одновременно с появлением первой машины двигателя. Первая паровая машина была построена замечательным русским механиком-изобретателем И. И. Ползуновым в 1765 г. на 19 лет ранее Джемса Уатта. Работы по построению этой машины привели изобретателя к созданию первого работоспособного автоматического поплавкового регулятора уровня воды в паровом котле. Принцип регулирования поплавком и в настоящее время широко применяется в ряде схем автоматики. Но основная заслуга Ползунова состоит в том, что он первый применил принцип регулирования по отклонению регулируемой величины. Этот принцип впоследствии получил название принципа Ползунова.

Талантливый изобретатель Иван Петрович Кулибин, механик Академии наук (1735—1818 гг.), хорошо известен, как первый в России изобретатель различных автоматических устройств. Кулибин создал ряд оригинальных механизмов, в которых впервые появились элементы автоматики. Одним из самых интересных автоматов были известные часы Кулибина. В механизм часов был встроен крохотный театр-автомат, который действовал через определенные промежутки времени.

Следует отметить также работы Черепановых, построивших на Урале в первой половине XIX в. первый русский паровоз, где изобретатели создали оригинальное регулирование хода машины.

В 1874 г., когда появились электрические дуговые лампы, встал вопрос об устройстве автоматического регулирования горения, сводившийся к задаче поддержания горячей дуги по мере сгорания угольных электродов. Эта задача была успешно решена русским ученым В. И. Чиколевым, создавшим оригинальный регулятор для дуговых ламп, основанный на дифференциальном принципе.

Однако, по мере развития техники и применения регуляторов с малой степенью неравномерности, появилась необходимость в теоретической разработке вопросов регулирования. Возникновение колебаний и неустойчивости систем прямого регулирования требовало правильного теоретического объяснения этих явлений и разработок по их устранению. Кроме того, по мере роста мощности паровых машин приходилось увеличивать размеры центробежных масс регуляторов для обеспечения передвижения регулирующего органа. В связи с этим возникла необходимость применения непрямого

регулирования, что в свою очередь вызвало потребность в теоретической разработке возникших при этом вопросов.

Основоположником теории автоматического регулирования следует считать профессора И. А. Вышнеградского, опубликовавшего в 1877—1878 гг. свои труды о регуляторах прямого и непрямого действия. Работы Вышнеградского впервые дали правильное теоретическое объяснение причин возникновения колебаний и неустойчивости в системах регулирования и раскрыли ошибки, допущенные в регулирующих устройствах того времени.

Необходимо отметить, что еще до Вышнеградского в 1871 г. академик Чебышев опубликовал свою работу «О центробежном уравнителе», которая представляет первую серьезную работу по теории регуляторов. Заслуга И. А. Вышнеградского состоит в том, что он первым разработал начала линейной теории регулирования, рассмотрел задачу устойчивости прямого регулирования и первый дал критерий апериодической устойчивости.

Достойным продолжателем дела И. А. Вышнеградского был словацкий инж. Стодола. Он рассмотрел систему непрямого регулирования с жесткой обратной связью, а также ввел понятие о постоянной времени, применяемое и теперь при составлении уравнений движения систем регулирования.

Следует также отметить и других зарубежных ученых: Уатта, Максвелла, Винера и других, которые своими работами много внесли в развитие теории автоматического регулирования.

В России продолжателем Вышнеградского явился крупнейший русский ученый Н. Е. Жуковский, создавший первый систематический курс по теории регулирования хода машин.

В этот же период времени были опубликованы работы выдающегося математика — ученика Чебышева А. М. Ляпунова. Он дал решение общей задачи устойчивости движения, которая до настоящего времени является основой при разработке задач автоматического регулирования сложных нелинейных систем.

Работами Чебышева, Вышнеградского, Жуковского, Ляпунова и указанных выше заграничных ученых заканчивается первый этап в развитии теории регулирования, который характеризуется тем, что эта теория ограничивалась практическими потребностями техники регулирования хода машин и сама строилась на этой базе.

После революции быстрый рост применения автоматики и автоматического регулирования в самых разнообразных областях современной техники не только для регулирования хода отдельных машин, но и для обслуживания сложных технологических процессов потребовал дальнейшего углубления теории автоматического регулирования.

Современная теория автоматического регулирования анализирует не только вопросы регулирования хода машин, но в первую очередь вопросы, связанные с работой и проектированием современных схем автоматического регулирования (электрических, релей-

ных, электронных, телемеханических, гидродинамических и др.), применяемых в разных областях техники.

Здесь мы должны отметить работы ряда наших ученых. Работы чл.-корр. Академии наук СССР И. И. Вознесенского, который разработал теорию «автономного регулирования».

Значительные теоретические исследования в области нелинейных систем автоматического регулирования проделаны академиком А. А. Андроновым.

Большое значение для современной теории автоматического регулирования имеют работы советского ученого А. В. Михайлова и зарубежного ученого — Найквиста. Михайлов установил новые критерии устойчивости, основанные на частотных характеристиках систем регулирования и ввел типизацию звеньев по их динамическим свойствам.

Существенное значение для развития современной теории регулирования имеют работы академика В. С. Кулебакина.

Введение частотных методов значительно ускорило дальнейшее развитие современной теории. Здесь большая заслуга принадлежит советскому ученому В. В. Солодовникову.

В. В. Солодовников разработал ряд методов анализа качества регулирования, имеющих практическое значение для инженерных расчетов. Кроме этого, он дал метод приближенного построения переходного процесса по частотной вещественной характеристике и применил логарифмические частотные характеристики для анализа устойчивости и качества регулирования.

Большая заслуга в развитии теории регулирования принадлежит Я. З. Цыпкину, создавшему теорию и методы расчета импульсных цепей. Я. З. Цыпкин распространил приемы операционного исчисления на ступенчатые функции и разностные уравнения и на базе частотных методов построил теорию прерывистого и релейного регулирования.

Следует указать, что наряду с отмеченными выше учеными внесли вклад в развитие теории регулирования и другие работники науки: М. А. Айзерман, З. Ш. Блох, Н. Д. Моисеев, Е. Г. Дудников, С. Г. Герасимов, Б. Н. Петров, А. В. Щегляев, М. В. Семенов, В. Д. Пивань, Ю. Г. Корнилов, Б. И. Доманский, В. Л. Лоссиевский, Т. Н. Соколов, Г. Н. Никольский, П. В. Гримберг, Ю. И. Неймарк и другие.

В результате успешного развития техники по автоматическому регулированию СССР первым в мире смог осуществить запуск искусственных спутников Земли.

2. ЗНАЧЕНИЕ АВТОМАТИЗАЦИИ ДЛЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА

Для всех отраслей современного народного хозяйства характерно широкое использование автоматизации производственных процессов.

Автоматизация производственных процессов создает технические и экономические преимущества: снижает численность обслуживаю-

Системы автоматического регулирования целесообразно классифицировать по наиболее характерным признакам, объединяющим системы в отдельные группы. В зависимости от рода признака, который положен в основу, мы придем к различным видам классификации.

Прежде всего, необходимо остановиться на принципах автоматического регулирования. Громадное большинство систем регулирования построено на принципе регулирования по отклонению регулируемой величины от заданного значения. Это, так называемый, принцип Ползунова. При этом отклонение регулируемой величины вызывает действие регулирующего органа, которое должно быть так направлено, чтобы уменьшать это отклонение и в конечном итоге полностью его ликвидировать.

Другой принцип регулирования есть регулирование по возмущению. В этом случае применяются различные мероприятия в схеме автоматического регулирования, парализующие влияние возмущающего воздействия. В то время, как при регулировании по отклонению действие регулирующего органа происходит независимо от того, по какой причине произошло изменение регулируемой величины, практическое осуществление второго принципа в полном объеме затрудняется тем, что возмущение может происходить от разных причин. Так, например, напряжение электрического генератора может изменяться от колебания числа оборотов приводного двигателя, либо от изменения величины и характера нагрузки, не говоря о других второстепенных причинах. Поэтому при регулировании по второму принципу обычно ограничиваются рассмотрением возмущающих воздействий, вызванных основной причиной, например, изменением нагрузки. В этом случае такое регулирование называется регулированием по нагрузке.

Совместное применение обоих принципов осуществляется в так называемом комбинированном регулировании. Это регулирование в ряде случаев при построении сложных систем оказалось эффективным и привело к получению высококачественных систем автоматического регулирования.

В дальнейшем рассмотрим следующие виды классификации:

- а) по функциональной зависимости регулируемой величины от времени и других параметров;
- б) по способу воздействия чувствительного элемента на регулируемый орган;
- в) по характеру воздействия регулирующего органа на объект.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ПО ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТИ РЕГУЛИРУЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ

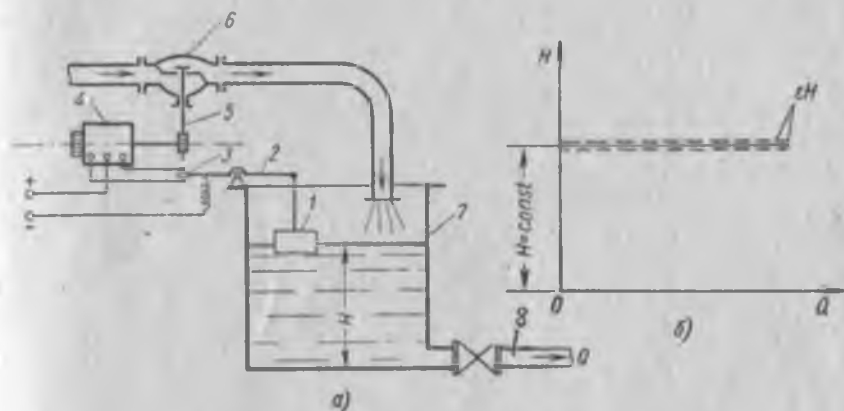
В этом случае различают следующие виды регулирования: астатическое и статическое регулирование, программное регулирование, следящие и копирующие системы.

а) Астатическое и статическое регулирование

Астатическое регулирование. Регулируемая величина в зоне регулирования для всех равновесных состояний остается строго постоянной с точностью до нечувствительности регулятора.

Уравнение регулировочной характеристики в этом случае будет:

$$y = \text{const} = C. \quad (1-2)$$



Фиг. 1. Схема астатического регулятора уровня.

Практически всегда имеется некоторая нечувствительность регулятора и уравнение (1-2) принимает вид

$$y = C + \epsilon C = C(1 + \epsilon). \quad (1-3)$$

Здесь ϵ определяет величину нечувствительности регулятора. Такой вид регулирования называется астатическим.

Для иллюстрации сказанного об астатическом регулировании рассмотрим ниже несколько примеров.

На фиг. 1, а представлена схема астатического регулятора уровня. На схеме (фиг. 1, а) поплавков 1 с помощью рычага 2 воздействует на контактный переключатель 3, направляющий ток в обмотки возбуждения электродвигателя 4 постоянного тока. Электродвигатель вращает шпиндель 5 дроссельного клапана 6 и изменяет его открытие. Жидкость, поступающая в резервуар 7 через дроссельный клапан, расходуется по трубе 8. В зависимости от направления тока возбуждения электродвигатель может вращаться в ту или другую сторону.

При повышении уровня против установленного поплавков замыкает нижний контакт и мотор уменьшает открытие дроссельного клапана. При понижении уровня происходит замыкание верхнего контакта, электродвигатель получает обратное вращение, открытие дроссельного клапана увеличивается. Таким образом, поплавков стре-

щего персонала, повышает качество продукции, увеличивает производительность агрегатов, снижает расход энергии и материалов, уменьшает брак и отходы производства, снижает аварийность и существенно повышает эффективность ведения технологического процесса.

Помимо всего этого, в ряде случаев невозможно использовать новую технику без применения автоматики, особенно там, где имеют место высокие давления, температуры и скорости.

Развитие автоматики в значительной мере определяет возможность завоевания космического пространства и использование атомной энергии.

О высокой эффективности автоматизации в области экономики труда, повышения точности производства, улучшения качества продукции и резкого сокращения производственного цикла свидетельствуют многие общезвестные примеры и неоспоримые данные. Так, автоматизация гидроэлектростанций позволяет уменьшить численность дежурного персонала по меньшей мере в 2—3 раза. Днепровская гидроэлектростанция с персоналом до 1941 г. в 290 чел. обслуживается ныне лишь шестью дежурными в смену.

В машиностроении замена обычных токарных станков автоматами увеличивает выработку рабочих в 3—4 раза. Автоматические поточные линии для производства деталей тракторов, автомобилей, с.-х машин позволяют сократить примерно в 5—10 раз количество рабочих и во столько же раз сократить рабочее время на обработку изделий.

Созданный автоматический завод по производству автомобильных поршней, где все процессы, начиная с подачи сырья и кончая упаковкой, полностью механизированы, увеличил производительность труда более чем в 5 раз по сравнению с неавтоматизированным производством. Такое же увеличение производительности труда получилось при автоматизации цеха по изготовлению шарикоподшипников.

Широко применяется автоматизация и в металлургическом производстве. Автоматизировано управление тепловым процессом ряда доменных, мартеновских и электрических печей, что позволило повысить коэффициент использования объема печей. Автоматизация прокатного стана позволила резко увеличить скорость прокатки до 1500 м/мин вместо прежней скорости 60 м/мин при работе без автоматики.

Автоматизация процессов производства также играет большую роль в авиации. Здесь основное назначение автоматических устройств — освобождение летчика от функций управления авиадвигателями, что позволяет ему направить внимание на выполнение основных функций. Для облегчения работы летчика по вождению самолета применяются автоматические устройства, называемые автопилотами. Назначение автопилота — автоматически поддерживать заданный курс самолета. Современные самолеты снабжены большим количеством автоматических устройств, особенно само-

леты, имеющие несколько авиадвигателей. Все автоматические устройства здесь должны иметь общую координацию управления.

В условиях социалистического производства значение автоматизации технологических процессов особенно возрастает. Внедрение автоматики в социалистическом хозяйстве ведет к увеличению роста общего благосостояния страны и материального благополучия трудящихся.

Автоматизация дает наибольший эффект при плановом ведении хозяйства.

Средства автоматики освобождают обслуживающий персонал от выполнения трудоемких и тяжелых физических работ, позволяют сократить продолжительность рабочего дня и создают условия для уничтожения разницы между физическим и умственным трудом.

Основными научными задачами автоматизации является разработка теории, принципов построения и применения систем автоматического управления, исследование свойств и характеристик объектов автоматизации и разработка теории и принципов построения технических средств автоматики и телемеханики, включая управление вычислительными машинами.

3. СТРУКТУРА РАЗЛИЧНЫХ УСТРОЙСТВ АВТОМАТИЗАЦИИ

Следует ясно различать понятия «механизация» и «автоматизация». Механизацией мы называем применение в производственном процессе машин и механических приспособлений, заменяющих мускульный труд. Механизация может быть частичная или полная. При полной механизации на обслуживающем персонале остается оперативное управление производственными процессами.

Автоматизация заменяет ручное управление производственного процесса механическим управлением, выполняемым автоматически без участия персонала. Степень автоматизации отдельных производственных процессов может быть различной. При частичной автоматизации часть операций по управлению процессом осуществляется вручную. При полной автоматизации все операции управления совершаются автоматически без участия обслуживающего персонала.

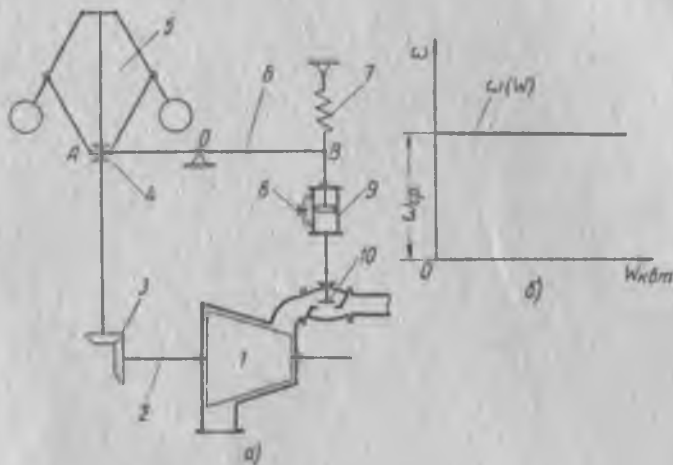
Современная автоматизация обычно представляет комплекс различных автоматических или механических устройств, где каждое имеет свои отличительные признаки.

Принята следующая классификация этих устройств:

Дистанционное управление. Дистанционное управление предназначается для ручного управления на расстоянии регулирующими и запорными органами или отдельными механизмами. При автоматизации дистанционное управление применяется либо в качестве самостоятельного устройства (при частичной автоматизации), либо в качестве устройства, действующего параллельно с автоматическим на одни и те же органы как резерв при отключении автоматики.

мится все время поддерживать равновесие между притоком и расходом жидкости.

Установившийся режим (равновесное состояние) наступает, когда контактный переключатель 3 разомкнут. Этому отвечает определенный уровень жидкости в резервуаре, если отвлечься от нечувствительности регулятора. Величина нечувствительности здесь определяется расстоянием между контактами переключателя и отношением плеч рычага 2. Выбирая надлежащим образом это отношение, мы



Фиг. 2. Схема астатического регулирования скорости.

можем свести отклонение уровня от установленного значения к практически пренебрежимой величине.

Графическое изображение регулировочной характеристики в функции расхода Q жидкости через дроссельный клапан представлено на фиг. 1, б.

На фиг. 2 дана схема астатического регулирования скорости. По схеме фиг. 2, а — здесь центробежный регулятор 5 получает вращение от главного вала 2 паровой турбины 1 через редуктор 3. Муфта 4 регулятора действует на рычаг 6, другой конец которого B соединен со штоком дроссельного клапана 10 через изодромное устройство. Последнее состоит из пружины 7 и катаракта 9. Катаракт представляет цилиндр, заполненный вязкой жидкостью. Поршень разделяет цилиндр на две полости, соединенные между собой трубкой малого диаметра и снабженной дросселем 8. Движение поршня внутри цилиндра может происходить только по мере перетекания вязкой жидкости из одной полости в другую. Смещение муфты 4, вызванное изменением скорости системы, передается клапану 10 и одновременно происходит растяжение или сжатие пружины 7. Клапан перемещается в новое положение. Под действием реакции пружины масло перетекает из одной полости цилиндра катаракта

в другую, в результате чего пружина разгружается, муфта возвращается в исходное положение, а клапан занимает положение, соответствующее новой нагрузке.

Равновесное состояние характеризуется прекращением движения дроссельного клапана и муфты вдоль оси регулятора. Это может иметь место только, когда пружина катаракта полностью разгружена и поршень неподвижен. Отсюда следует, что осевая длина пружины при всех режимах равновесия остается строго постоянной. Это значит, что точка *В* рычага *б* при всех установившихся режимах занимает в пространстве одно и то же место, чему будет отвечать одно и то же положение муфты регулятора. В свою очередь отсюда следует постоянство угловой скорости регулятора и машины с точностью до нечувствительности регулятора. Последняя определяется величиной сил трения муфты, в шарнирах регулятора и рычага, а также штока клапана.

Зависимость угловой скорости машины от ее нагрузки при установившихся режимах, если пренебречь нечувствительностью регулятора, представится прямой линией, параллельной оси абсцисс, как показано на фиг. 2, б.

Регуляторы, снабженные изодромным устройством, называются изодромными регуляторами.

Из приведенных примеров видно, что астатический регулятор не имеет определенной связи между положением регулирующего органа и значением регулируемой величины. Здесь регулирующий орган переставляется каждый раз в такое положение, при котором регулируемая величина возвращается при всякой нагрузке к заданному значению.

При астатическом регулировании регулируемая величина сохраняет постоянное значение, независимое от параметров режима.

Статическое регулирование. Астатические регуляторы склонны к колебаниям и в большинстве случаев не обладают без вспомогательных устройств требуемой устойчивостью. Наряду с астатическими регуляторами, которые имеют регулировочную характеристику вида $y = \text{const}$, нашли широкое применение регуляторы, где в пределах зоны регулирования допускается при разных режимах некоторое отклонение регулируемой величины от заданного значения. Такое регулирование называется статическим регулированием.

Регулировочная характеристика статического регулятора при наличии одного переменного параметра выражается уравнением

$$y = C + \Delta(x). \quad (1-4)$$

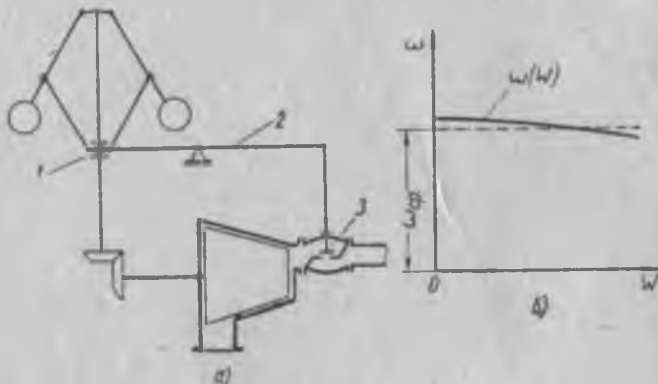
Здесь C — заданное (среднее) значение регулируемой величины и $\Delta(x)$ — функция от переменного параметра (нагрузки), определяющая отклонение регулируемой величины от ее среднего значения в пределах зоны регулирования при равновесном состоянии.

Для практического применения имеют значение только те регуляторы, в которых числовое значение функции $\Delta(x)$ во всей зоне регулирования мало сравнительно с C .

Для суждения об относительном отклонении регулируемой величины от среднего (заданного) значения вычисляют отношение

$$\delta = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{y_{\text{ср}}} = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{C} \quad (1-5)$$

Это отношение носит название степени или коэффициента неравномерности регулятора, или статической ошибки регулирования.



Фиг. 3. Схема статического регулятора скорости.

Помимо отклонения регулируемой величины от среднего значения из-за неравномерности регулирования, имеет всегда место некоторое отклонение из-за нечувствительности регулятора, вызываемое обычно трением в кинематических парах.

С учетом нечувствительности регулировочная характеристика выражается уравнением

$$y = C + \Delta(x) + \epsilon C. \quad (1-6)$$

Величина ϵ в общем случае является переменной.

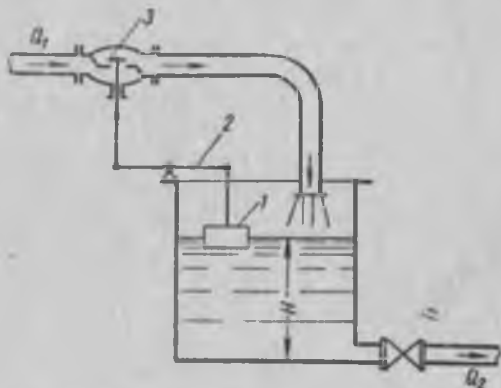
Ниже дано несколько примеров статического регулирования.

На фиг. 3, а представлена схема статического регулятора скорости.

В этом случае регулятор отличается от изодромного регулятора скорости на фиг. 2 отсутствием изодрома. Рычаг 2 соединен непосредственно со штоком дроссельного клапана. Подъем муфты 1 вверх при увеличении угловой скорости машины вызывает сокращение открытия клапана 3; в свою очередь ход муфты вниз приводит к увеличению этого открытия. Равновесное состояние наступает, когда прекращается движение дроссельного клапана. При этом также останавливается движение муфты регулятора вдоль его оси вследствие жесткой кинематической связи с клапаном. Каждому поло-

жению дроссельного клапана при равновесном состоянии отвечает особое положение муфты регулятора и, следовательно, своя определенная угловая скорость машины. Так как каждому открытию клапана соответствует определенная нагрузка W машины, то регулировочная характеристика $\omega(W)$ в описанном случае будет иметь вид, как показано на фиг. 3, б. Регулируемая величина будет уменьшаться с увеличением нагрузки. Угловая скорость машины в пределах зоны регулирования получает некоторую неравномерность, причем величина отклонения от среднего значения зависит от нагрузки.

На фиг. 4 представлен еще один пример статического регулирования уровня.



Фиг. 4. Статическое регулирование уровня.

В отличие от регулятора уровня описанного выше на фиг. 1 здесь поплавки 1 действует непосредственно на дроссельный клапан 3 с помощью рычага 2. При повышении уровня поплавки всплывают и уменьшают проход клапана до тех пор, пока не установится равновесие между притоком и расходом жидкости. При падении уровня открытие клапана увеличивается. Каждому расходу жидкости при установившемся режиме отвечает определенное открытие клапана и значение уровня в баке. Здесь мы имеем типичный случай статического регулирования. Допустим, что расход Q жидкости пропорционален подъему h клапана из крайнего нижнего положения, т. е. $Q = qh$, где q — коэффициент пропорциональности. Наибольшей высоты $H_{\max}$ уровень в баке достигает при закрытом клапане. При открытии клапана, равном h , высота уровня будет $H = H_{\max} - kh$, где k — отношение плеч рычага 2.

Отсюда

$$H = H_{\max} - \frac{k}{q} Q. \quad (I-7)$$

Это уравнение представляет зависимость высоты уровня при равновесном состоянии от расхода Q жидкости потребителем, т. е. регулировочную характеристику. Регулировочная характеристика представляет прямую наклонную линию.

Следует отметить, что приведенная выше на фиг. 3, б регулировочная характеристика будет иметь вид такой при абсолютно чувствительном регуляторе (идеальный случай). При наличии сил трения

в кинематических парах регуляторов вместо однозначной кривой мы будем иметь регулировочную характеристику в виде полосы.

Из приведенных примеров следует основной признак статического регулирования. У статического регулятора всегда имеется при установившемся режиме определенная зависимость между положением регулирующего органа и значением регулируемой величины. В связи с этим регулируемая система со статическим регулятором обладает всегда некоторой степенью неравномерности в зоне регулирования или, как принято говорить, статической ошибкой.

Несмотря на то, что статические регуляторы ухудшают качество регулировочной характеристики, вследствие появления элемента неравномерности, статическое регулирование нашло в практике широкое применение. Это объясняется большой простотой конструкции статических регуляторов, а также тем, что они обеспечивают более устойчивую работу в переходных режимах. Эти регуляторы применимы во всех тех случаях, где может быть допущена в технологическом процессе некоторая степень неравномерности регулируемой величины.

б) Программное регулирование

Когда предписанное значение регулируемой величины должно изменяться во времени по заранее установленному закону, регулирование называется программным.

Автоматические регуляторы, осуществляющие такое регулирование, называются программными регуляторами. Такие регуляторы применяются в разных областях техники, например, для регулирования процесса в печах термической обработки изделий, для регулирования нагрузки электросистемы по заданному графику и др.

Регулировочная характеристика программного регулятора представляется некоторой функцией времени

$$u = \varphi(t). \quad (1-8)$$

С учетом нечувствительности регулятора это уравнение должно быть написано в виде

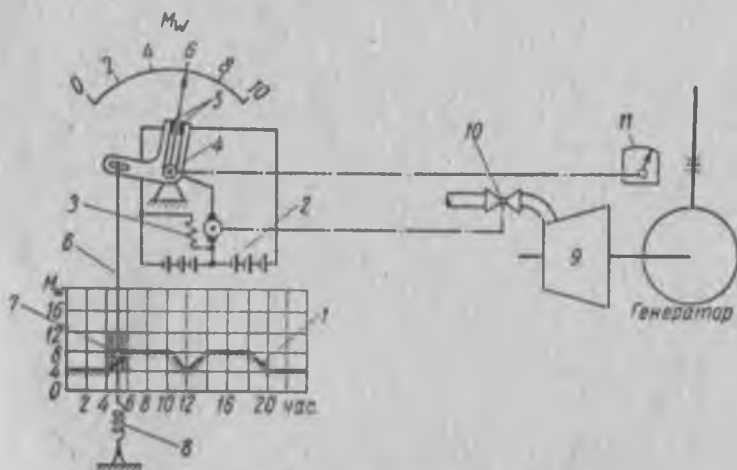
$$u = \varphi(t) \pm \Delta, \quad (1-9)$$

где Δ — поправка на нечувствительность.

В качестве примера рассмотрим программный регулятор мощности, схематически изображенный на фиг. 5.

Регулирующее устройство состоит из задающего программного устройства 1, представляющего профиль предписанного суточного графика нагрузки, и собственно регулятора 4. С помощью пружины 8, тяги 6 и ролика 7, катящегося по профилю, при перемещении последнего часовым механизмом справа налево, предписанное задание передается регулятору. Регулятор представляет коленчатый рычаг 4

с прорезью, внутри которой помещается стрелка, сидящая на одной общей оси со стрелкой ваттметра 11, или просто представляющая стрелку ваттметра, который отмечает фактическую нагрузку турбогенератора. Верхняя часть прореза снабжена контактами 5. При замыкании стрелкой одного или другого контакта рычага включается вспомогательный электродвигатель 3, который получает питание от батареи 2 или другого источника. Электродвигатель 3 действует



Фиг. 5. Программный регулятор мощности.

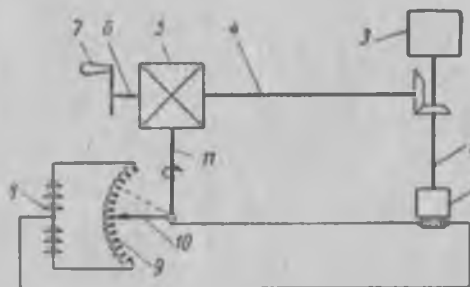
на регулирующий орган (дроссельный клапан) 10 турбины 9. Другой конец рычага 4 связан с тягой 6 ролика 7. Размеры тяги и рычага рассчитаны так, что ось прорези регулятора всегда устанавливается в соответствии с предписанной нагрузкой силового агрегата. При несоответствии между предписанной и фактической нагрузкой стрелка регулятора будет замыкать тот или другой контакт, что вызовет включение реверсивного мотора 3 и соответствующую перестановку клапана 10.

Равновесное состояние будет иметь место при отсутствии рассогласования между фактической и предписанной мощностями с точностью до нечувствительности регулятора. Последняя зависит от расстояния между контактами рычага. При рассогласовании между заданным и фактическим значением регулируемой величины установившийся режим нарушается и в системе регулирования возникает переходное состояние, при котором регулировочная характеристика $y = \varphi(t)$ не соблюдается.

Когда мы говорим о регулировочной характеристике программного регулятора $y = \varphi(t)$, то предполагаем, что скорость изменения заданного значения регулируемой величины мала сравнительно со скоростью протекания переходного процесса.

в) Следящие и копирующие системы

Следящей системой называется такая система регулирования, которая поддерживает регулируемую величину на заданном значении, причем это значение изменяется по некоторому закону, вообще заранее неизвестному. Следящая система в общем случае контролирует рассогласование значений двух параметров каких-либо элементов системы. Один из этих элементов является управляющим или командным, другой — управляемым или исполнительным. Регулирующее



Фиг. 6. Следящая система управления угловым перемещением:

1 — электродвигатель; 2 — управляемая (исполнительная) ось; 3 — нагрузка на исполнительную ось; 4 — вторичная исполнительная ось; 5 — дифференциальный элемент; 6 — командная ось; 7 — управляющая рукоятка; 8 — аккумуляторная батарея; 9 — реостат-потенциометр; 10 — контактный рычаг реостата; 11 — дифференциальная ось.

устройство вступает в действие, как только появляется рассогласование командного и исполнительного элементов. Следящие системы, применяемые для обработки изделий по заданным моделям или шаблонам, называются копирующими системами или автоматическими копировальными устройствами.

Регулировочная характеристика следящей или копирующей системы может быть представлена в виде некоторой функции

$$y = \varphi(z), \quad (I-10)$$

где z — переменный параметр, вообще независимый от параметров системы.

При этом предполагается, что скорость изменения предписанного значения регулируемой величины мала сравнительно со скоростью изменения в переходном режиме. Обратимся к примерам.

На фиг. 6 дан пример следящей системы управления угловым перемещением.

Основным устройством следящей системы является дифференциальный элемент, который имеет назначение измерять рассогласование (ошибку) между угловыми перемещениями командной 6 и исполнительной 4 осями.

Дифференциальный элемент может иметь различное устройство. На фиг. 6 приведена схема следящей системы с использованием механического дифференциала в качестве измерителя рассогласования. Как известно из механики, угловая скорость $\omega_{\text{диф}}$ дифференциальной оси 11 определяется по формуле

$$\omega_{\text{диф}} = \frac{1}{2} k (\omega_1 - \omega_2), \quad (I-11)$$

где ω_1 и ω_2 — угловые скорости соответственно командной 6 и исполнительной 4 осей, а k — передаточное число механизма.

Из этой формулы вытекает также формула углового перемещения оси 11

$$\varphi_{\text{диф}} = \frac{1}{2} k (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (1-12)$$

Допустим, что в начальный момент система неподвижна. При этом рычаг 10 должен находиться в среднем положении, иначе на зажимах электромотора будет иметься напряжение. Пусть командная рукоятка 7 повернется на угол φ_1 от начального положения. Так как в первый момент $\varphi_2 = 0$, то дифференциальная ось в свою очередь повернется из среднего положения на угол $\varphi_{\text{диф}} = \frac{1}{2} k \varphi_1$.

Это вызовет появление напряжения у двигателя 1 и его вращение. Последнее должно быть выбрано таким образом, чтобы рассогласование между угловыми перемещениями командной и исполнительной осей при работе системы уменьшалось. Так как рычаг 10 связан передачей с дифференциальной осью 11, то вращение оси 4 приведет к обратному постепенному приближению рычага 10 к его среднему положению.

По мере увеличения угла φ_2 , отработанного осью 4, угол $\varphi_{\text{диф}}$ уменьшается. При $\varphi_{\text{диф}} = 0$ напряжение на зажимах двигателя упадет до 0, двигатель остановится, система придет в равновесие. При этом исполнительная ось повернется на угол $\varphi_2 = \varphi_1$, т. е. на угол, заданный командным органом. Это равенство выполняется с точностью до нечувствительности следящей системы. Величина нечувствительности зависит от силы трения в кинематических парах и величины нагрузки.

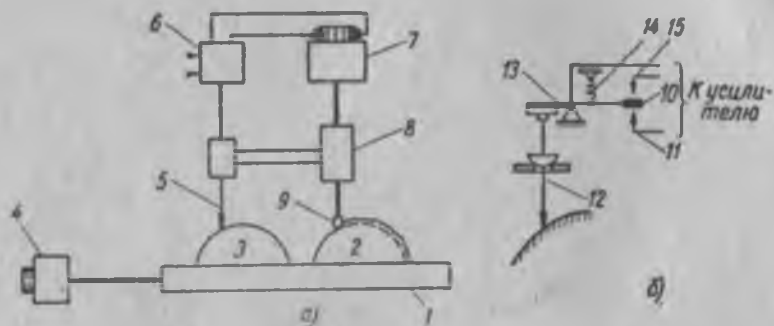
До сих пор мы рассматривали случай, работы следящей системы, когда командная ось после поворота на заданный угол φ_1 останавливается. Исполнительная ось при этом отрабатывает угол $\varphi_2 = \varphi_1$, после чего также останавливается. Описанная выше следящая система может работать и при непрерывном вращении командной оси. Если эта ось вращается с постоянной угловой скоростью, то исполнительная ось по достижении установившегося режима будет вращаться с той же скоростью. Однако теперь рычаг 10 не будет находиться в среднем положении, а отклонится от него на некоторый угол, определяемый величиной приведенного момента трения и нагрузки системы.

На фиг. 7 представлена принципиальная схема автоматического копирующего устройства.

Основным элементом копирующей системы является копировальный прибор. Имеется много различных конструкций копировальных приборов. Мы рассмотрим самое простое устройство, приведен-

ное на фиг. 7, б. Прибор состоит из копирующего пальца 12 со шпинделем, которым он упирается в рычаг 13, рычага с контактом 10 и пружины 14, стремящейся всегда прижать копирующий палец к модели. Корпус копирующего прибора жестко связан с бабкой режущего инструмента.

Когда платформа 1 (см. фиг. 7, а) получает горизонтальную подачу, копирующий палец 12, соприкасаясь с поверхностью модели по мере ее движения, замыкает верхний 15 или нижний 11 контакты копирующего прибора. Провода от копирующего прибора идут к усилителю 6. В зависимости от замыкания того или дру-



Фиг. 7. Схема автоматического копирующего устройства.

а) схема: 1 — платформа станка, на которой закреплены для обработки изделие и модель; 2 — изделие; 3 — модель; 4 — двигатель, обеспечивающий постоянную горизонтальную подачу платформы; 5 — копирующий прибор; 6 — усилитель; 7 — электродвигатель вертикальной подачи; 8 — бабка режущего инструмента; 9 — режущий инструмент; б) Копирующий прибор; 10 — контакт; 11 — нижний контакт копирующего прибора; 12 — копирующий палец; 13 — рычаг; 14 — пружина; 15 — верхний контакт копирующего прибора.

того контакта усилитель подает на зажимы двигателя 7 напряжения разных знаков, что обеспечивает соответствующее движение бабки 8 и связанной с ней режущего инструмента 9 (вертикальная подача). Корпус копирующего прибора 5 и бабка 8 жестко связаны, благодаря чему вертикальная подача резца одновременно передается копирующему пальцу, что вызывает его отход от поверхности модели или приближение к ней, смотря по направлению подачи.

Равновесие системы наступает при отсутствии рассогласования между положениями копирующего пальца и режущего инструмента. При этом двигатель 7 неподвижен, а фреза 9 продолжает вращаться, получая движение от отдельного двигателя.

Из приведенных примеров выясняется сущность действия следящей и копирующей систем. Во всех этих системах неизменным элементом является измерительный орган, который определяет величину рассогласования между положениями командного и исполнительного органов. При наличии рассогласования система приходит в движение, стремясь свести это рассогласование (ошибку) к нулю.

Следящие системы нашли широкое применение в различных отраслях техники. Так, например, они применяются в корабельном деле в устройствах рулевого управления, в авиации, в радиотехнике, в военном деле, на крупных механических заводах при обработке изделий по шаблону или модели и во многих других областях.

3. КЛАССИФИКАЦИЯ ПО СПОСОБУ ВОЗДЕЙСТВИЯ ЧУВСТВИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА НА РЕГУЛИРУЮЩИЙ ОРГАН

В этом случае обычно различают два вида регулирования: прямое и косвенное.

а) Прямое регулирование

Выше мы отмечали, что всякая система регулирования состоит из регулируемой части (объекта регулирования) и регулирующей (регулятора). Последняя во всех случаях должна иметь чувствительный элемент, который измеряет отклонение регулируемой величины от предписанного значения, и, так называемый, регулирующий орган, назначение которого состоит в изменении какого-либо параметра, для восстановления заданного значения регулируемой величины после отклонения.

В простейших регуляторах скорости чувствительный элемент непосредственно приводит в действие регулирующий орган, например, дроссельный клапан. Системы регулирования, где чувствительный элемент воздействует непосредственно на изменение положения регулирующего органа, называются системами прямого регулирования, а регуляторы — регуляторами прямого действия.

В регуляторах прямого действия энергия, необходимая для перестановки регулирующего органа, поступает от чувствительного элемента. Если последний не в состоянии развить ту мощность, которая требуется регулирующим органам для его перестановки, регулирующая система не может работать. Это весьма ограничивает область применения прямого регулирования, так как чувствительный элемент имеет обычно малые габариты, что вызывается требованием достижения определенной степени чувствительности, а это создает в свою очередь трудность получения усилий, достаточных для перемещения регулирующего органа. Кроме того, реакция регулирующего органа на чувствительный элемент сильно повышает нечувствительность последнего, в результате чего ухудшается качество регулирования.

Примерами регуляторов прямого действия могут служить регуляторы, представленные на фиг. 3 и 4.

На фиг. 3 показан регулятор скорости. Здесь чувствительным элементом является маятниковый центробежный регулятор, муфта которого с помощью рычага 2 воздействует на дроссельный клапан 3. Последний представляет регулирующий орган.

На фиг. 4 дан регулятор уровня. Чувствительным элементом здесь служит поплавок 1. При всплывании или опускании поплавка с помощью рычага 2 действует на регулирующий клапан 3.

б) Непрямое регулирование

Когда мощность чувствительного элемента недостаточна, чтобы обеспечить перестановку регулирующего органа, а также в тех случаях, когда требуется иметь высокую чувствительность измерительного элемента, необходимо применять системы **н е п р я м о г о р е г у л и р о в а н и я**.

В системах непрямого регулирования для перестановки регулирующего органа используют вспомогательные механизмы, действующие от постороннего источника энергии, или за счет энергии регулируемого объекта. При этом чувствительный элемент воздействует только на управляющий орган вспомогательного механизма. Это резко сокращает нагрузку чувствительного элемента и позволяет выполнять его требуемой степени чувствительности и малых габаритов. Вспомогательный механизм, исполняющий задачу перестановки регулирующего органа, носит название **с е р в о м о т о р а** или **и с п о л н и т е л ь н о г о м е х а н и з м а**.

В ряде регулирующих устройств, особенно электрических, применяется несколько иная схема регулирования. Здесь сигналы чувствительного элемента или датчика поступают на усилитель, где усиливаются за счет вспомогательного источника энергии и далее используются для непосредственной перестановки регулирующего органа, или для приведения в действие исполнительного механизма (сервомотора).

Нетрудно видеть, что обе указанные схемы по существу сходны между собой. Если условиться управляющий орган сервомотора рассматривать как некоторый усилитель, обе схемы регулирования полностью совпадают. Поэтому во многих трудах по теории регулирования сервомоторы относятся к категории усилителей.

Релейное регулирование. Среди весьма разнообразных схем непрямого регулирования следует выделить такие схемы, в которых чувствительный элемент воздействует на электрическое или другое реле. Последнее срабатывает и подключает исполнительный механизм к вспомогательному источнику энергии, или отключает его от этого источника, смотря по характеру срабатывания реле. Подключение к источнику энергии может быть непосредственное или через промежуточный аппарат, если подключаемая мощность превосходит допустимое значение для контактов реле. Такое регулирование носит название релейного регулирования. Релейное регулирование следует рассматривать как один из видов непрямого регулирования.

Все описанные выше схемы непрямого регулирования имеют один общий признак их объединяющий, это способность усиливать мощность сигналов чувствительного элемента, или датчика, за счет энергии вспомогательного источника. Коэффициент усиления по мощности, т. е. отношение мощности на входе исполнительного механизма (сервомотора) к мощности на выходе чувствительного элемента может достигать больших значений. Так, например, если мощность

чувствительного элемента равна $0,01 \text{ вт}$, а исполнительного механизма 1 кВт , то коэффициент усиления по мощности будет 10^5 . Ниже, на фиг. 8 и 9, даны примеры непрямого регулирования.

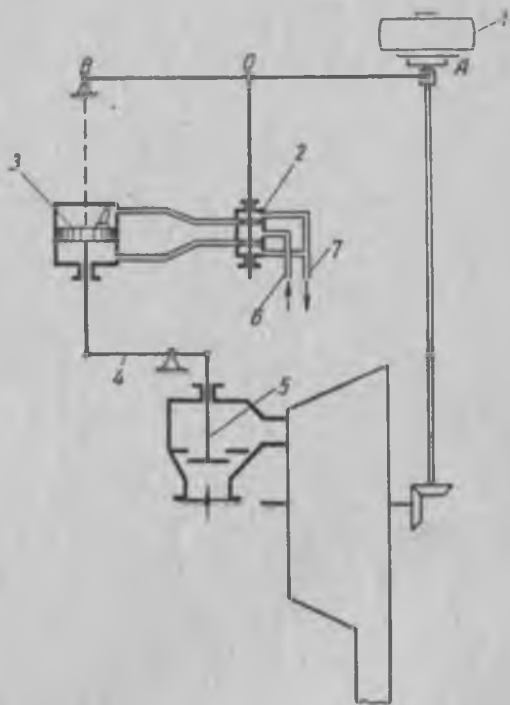
На фиг. 8 изображен схематический регулятор скорости с гидравлическим (масляным) сервомотором. Центробежный маятниковый регулятор 1 составляет чувствительный элемент системы. Смещение муфты регулятора передается управляющему органу 2 сервомотора. Управляющий орган здесь имеет форму золотника, который направляет масло в ту или другую полость цилиндра 3 сервомотора.

Нагнетаемое насосом (на фиг. не показан) масло поступает к золотнику по трубке 6. Поршень золотника, открывая канал для подачи масла в ту или другую полость цилиндра сервомотора, одновременно сообщает противоположную полость со сливной трубкой 7. Таким образом, смещение поршня золотника из среднего положения (оба канала одновременно перекрыты) вызывает перемещение поршня сервомотора и связанного с ним рычага 4 регулирующего органа 5.

Перемещение золотника требует весьма небольших усилий так как силы давления при любом положении поршня золотника уравновешены. Поршень сервомотора вследствие различных давлений среды в верхней и нижней полостях цилиндра развивает большое усилие, которое используется для перестановки регулирующего органа.

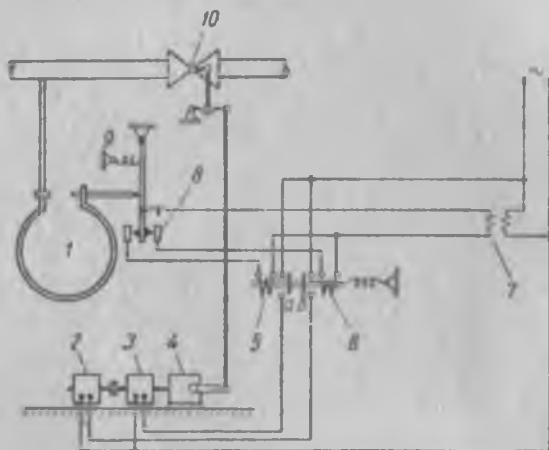
Для изменения установленного значения регулируемой величины обычно изменяют натяжение пружины центробежного регулятора (на фиг. не показано).

На фиг. 9 дана схема релейного регулятора давления. Здесь чувствительным элементом или датчиком является контактный манометр 1, который состоит из манометрической трубки и электрических контактов, замыкающихся и размыкающихся при деформации трубки. Пока обе пары контактов разомкнуты, вся система не-



Фиг. 8. Регулятор скорости с гидравлическим сервомотором.

подвижна. При замыкании какой-либо пары первичных контактов 8 срабатывает одно из реле 5 или 6. Исполнительный механизм состоит из двух спаренных электродвигателей 2 и 3 и редуктора 4. Электродвигатели однофазные, обмотки их подключены так, что они, будучи возбуждены, вращаются в разные стороны. Редуктор 4 с помощью рычажной передачи производит перестановку регулирующего клапана 10. Реле 5 и 6 заблокированы таким образом, что при замыкании одного другое размыкается. Вследствие этого электро-



Фиг. 9. Реле-механический регулятор давления.

двигатели 2 и 3 никогда не включаются одновременно. При срабатывании реле 5 замыкаются контакты а, начинает вращаться двигатель 3 и редуктор получает вращение в определенном направлении. При срабатывании реле 6 возбуждается двигатель 2, при этом редуктор вращается в противоположном направлении. Для питания реле применено пониженное напряжение, для чего установлен понижающий трансформатор 7.

Изменение уставки регулируемой величины здесь производится за счет изменения натяжения пружины 9.

4. КЛАССИФИКАЦИЯ ПО ХАРАКТЕРУ ВОЗДЕЙСТВИЯ РЕГУЛИРУЮЩЕГО ОРГАНА НА ОБЪЕКТ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Непрерывное, прерывистое и шаговое регулирование. Выше предполагалось, что чувствительный элемент находится непрерывно в действии и все время связан с регулирующим органом непосредственно или через исполнительный механизм. Регулирующий орган непрерывно следует за отклонением регулируемого параметра в соответствии с сигналами чувствительного элемента. Такое регулирование называется *непрерывным*. Здесь чувствительный элемент непрерывно воздействует на регулирующий орган в течение всего

времени, пока имеется рассогласование между фактическим и предписанным значениями регулируемой величины.

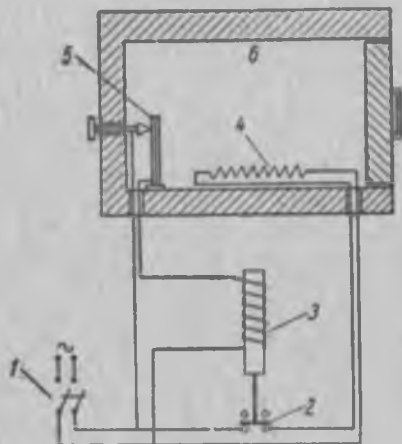
В настоящее время наряду с непрерывными регуляторами находят применение для целей автоматизации также регуляторы прерывистого действия. Эти регуляторы характеризуются тем, что их регулирующий орган при непрерывном изменении регулируемой величины сам перемещается лишь с перерывами, через некоторые промежутки времени. Различают два основных вида регулирования: позиционное и шаговое.

Если регулирующий орган может занимать только два крайних фиксированных положения, из которых одно отвечает минимальному, другое максимальному значению регулируемой величины, то это будет позиционное регулирование. Здесь регулирующий орган при перемещении из одного положения в другое не останавливается в промежуточных положениях, а проходит мимо них. Перемещения регулирующего органа из одной позиции в другую происходит тогда, когда регулируемая величина выходит за установленные пределы, или, как иногда говорят значение регулируемого параметра выходит за ширину заданной нейтральной зоны.

Если же регулирующий импульс, поступающий от чувствительного элемента в цепь регулирования, прерывается через некоторые промежутки времени, обычно следующие друг за другом периодически, то при прекращении регулирующего воздействия прекращается перемещение регулирующего органа. Таким образом, при этой схеме имеет место периодическая прерывистость всего процесса регулирования. Такое регулирование называется шаговым регулированием.

Позиционные регуляторы прерывистого действия обычно применяются в комбинации с контактными гальванометрами или промежуточными реле. Поэтому такие регуляторы можно рассматривать так же как релейные регуляторы.

В качестве примера позиционного регулятора прерывистого действия на фиг. 10 показан схематически релейный регулятор температуры в нагревательной печи. Здесь нагревание печи осуществляется с помощью нагревательного сопротивления 4, подключаемого к сети с помощью рубильника 1.



Фиг. 10. Релейный регулятор температуры в нагревательной печи.

Управление включением в процессе регулирования выполняется электромагнитным исполнительным механизмом 3, который замыкая или размыкая контакты 2, включает или отключает ток нагревания печи. Чувствительный элемент здесь выполнен в виде температурного реле 5, которое представляет по существу биметаллическую пластинку. Последняя при достижении установленного предела температуры в печи изгибается и замыкает контакт 5, в результате чего возбуждается обмотка электромагнита 3, сердечник втягивается и размыкаются контакты 2. Поступление тока нагревания в печь 6 прекращается. Когда температура в печи понизится настолько, что контакт 5 разомкнется, обмотка электромагнита 3 обесточится, сердечник упадет и вновь замкнет контакты 2, вследствие чего ток нагревания станет опять поступать в печь. Здесь исполнительный орган может замыкать только две позиции: «включено» и «выключено». Такие регуляторы называются *д в у х п о з и ц и о н н ы м и*.

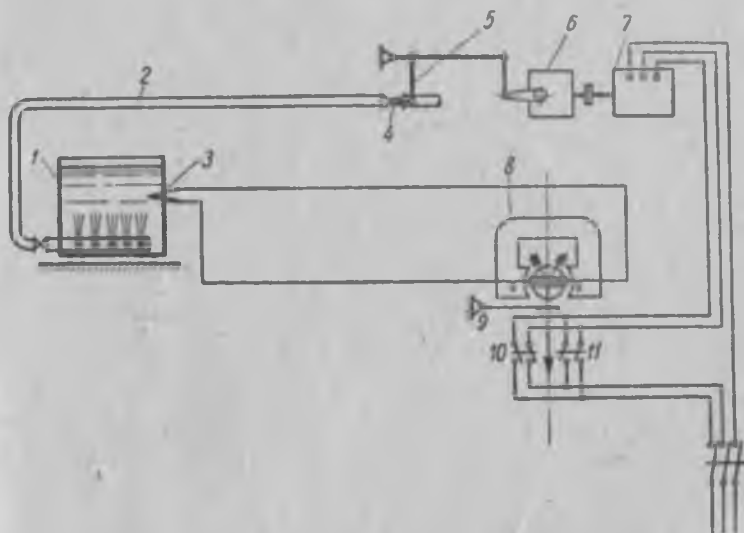
Двухпозиционные регуляторы могут успешно применяться для регулирования объектов, обладающих малым запаздыванием своего действия, значительной емкостью и небольшой чувствительностью. В других случаях они не могут обеспечить удовлетворительного качества регулирования вследствие больших переходных отклонений температуры от предписанного значения.

Чтобы по возможности избежать этого недостатка, применяют *м н о г о п о з и ц и о н н ы е* регуляторы. Последние характеризуются тем, что регулирующий орган может занимать в состоянии покоя лишь несколько фиксированных положений, каждое из которых отвечает определенной области отклонения регулируемой величины. Чаше других встречаются трехпозиционные регуляторы, которые обеспечивают более качественное регулирование, чем двухпозиционные.

Пример прерывистого регулирования дан на фиг. 11, где представлена схема регулирования температуры с помощью контактного нуль-гальванометра.

Здесь нагревающей средой является пар, который подается по трубе 2 в бак с нагреваемой жидкостью. Расход жидкости из бака пополняется от источника холодной воды (на фиг. не показано). Чувствительным элементом здесь служит термопара 3, которая соединяется с контактным гальванометром 8. Последний так отрегулирован вместе с термопарой, что при температуре в баке 1, отвечающей предписанному значению, стрелка гальванометра находится внутри зоны нечувствительности. При этом падающая дужка 9 гальванометра не может замкнуть ртутных переключателей 10 и 11, так как стрелка не выходит за ширину нейтральной зоны. При отклонении температуры печи за установленные пределы стрелка гальванометра (или милливольтметра) выходит за ширину нейтральной зоны, отклоняясь в ту или другую сторону. Теперь падающая дужка 9, нажимая на стрелку, замыкает один из переключателей 10 или 11, смотря по тому, в какую сторону отклонится стрелка. Это в свою

очередь вызовет подключение к сети электродвигателя 7 и исполнительный механизм придет в действие. Результатом будет поворот редуктора 6 и перестановка регулирующего клапана 4 с помощью системы рычагов 5. Работа электродвигателя 7 прекратится, как только падающая дужка приподнимется и освободит стрелку и переключатели 10 и 11. Более детальная схема нуль-гальванометра

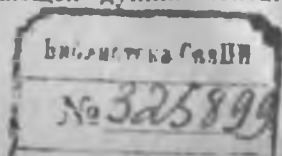


Фиг. 11. Схема регулирования температуры с помощью контактного нуль-гальванометра.

приведена ниже в главе IV. Таким образом, вся регулирующая система будет работать периодически в те отрезки времени, когда дужка контактного гальванометра будет находиться в опущенном состоянии. Здесь мы имеем типичное прерывистое периодическое регулирование (шаговое регулирование).

Практический интерес к регуляторам прерывистого действия основан на простоте их конструкции, особенно релейных регуляторов. Там, где релейные регуляторы не могут обеспечить требуемой точности регулирования, находят широкое применение периодические прерывистые регуляторы с контактным гальванометром или милливольтметром. С помощью таких регуляторов удастся получить очень большие коэффициенты усиления по мощности, которые при непрерывном регулировании достижимы лишь со значительным усложнением всего регулирующего устройства. Основной областью их применения является регулирование температуры с использованием в качестве чувствительных элементов терморпар, которые, как известно, обладают весьма незначительной мощностью.

Выше мы предполагали, что время регулирования в течение одного цикла работы падающей дужки контактного гальванометра



остается постоянным и независимым от отклонения регулируемой величины. Однако в настоящее время выпускаются гальванометры такой конструкции, в которых это время пропорционально отклонению регулируемой величины. Такие регуляторы называются *пропорциональными шаговыми регуляторами*.

Классификация по другим признакам. Приведенная выше классификация систем автоматического регулирования касается только общего вида регулирования и не затрагивает других особенностей автоматических регуляторов. Между тем эти регуляторы при одном и том же виде регулирования могут различаться своим назначением, видом используемой энергии, особенностью применяемой аппаратуры и пр.

В связи с этим автоматические регуляторы могут классифицироваться также по другим признакам, отличным от указанных выше.

Отметим только следующие классификации, как наиболее часто встречающиеся:

а) классификация по назначению регуляторов (регуляторы скорости, давления, напряжения, расхода и т. п.);

б) классификация по роду энергии, применяемой для приведения в движение исполнительного механизма (регуляторы гидравлические, пневматические, электрические и др.);

в) классификация по особенностям применяемой аппаратуры (регуляторы электромагнитные, вибрационные, электронные и др.).

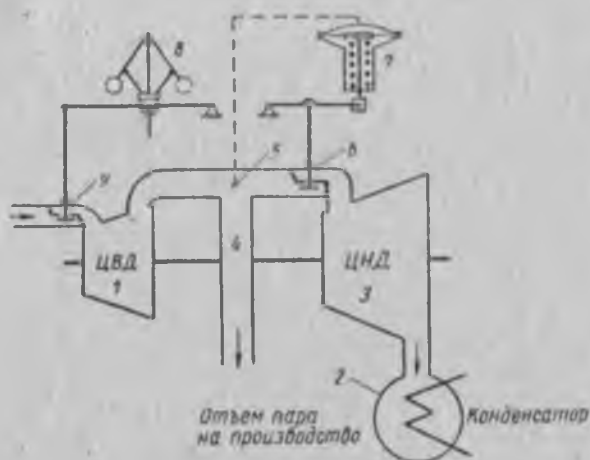
5. ОДНОВРЕМЕННОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ НЕСКОЛЬКИХ ПАРАМЕТРОВ, НЕСВЯЗАННОЕ И СВЯЗАННОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ

В зависимости от особенностей технологического процесса встречаются случаи, когда требуется одновременное регулирование двух или нескольких величин, которые между собой взаимно связаны. Такой случай, например, мы имеем при регулировании турбин с промежуточным отбором пара на производство, где требуется автоматическое регулирование двух взаимосвязанных величин: угловой скорости машины и давления пара в камере отбора.

При автоматическом регулировании процесса горения в топке котла мы встречаемся со случаем, когда при изменении нагрузки котла регулирование должно протекать таким образом, что при одновременном воздействии регулирующих органов на подачу топлива и подачу воздуха в топку поддерживаются неизменными величина избытка воздуха и разрежение в топочной камере, а также давление пара на выходе из котла в магистраль.

На фиг. 12 дана схема несвязанного регулирования двух величин. Здесь представлен случай регулирования турбины с отбором пара на производство. Задача решена установкой независимых регуляторов скорости и давления. Такое регулирование называется *несвязанным*.

Как показывают опытные и теоретические исследования, при несвязанном регулировании изменение только одной электриче-



Фиг. 12. Схема несвязанного регулирования двух величин:

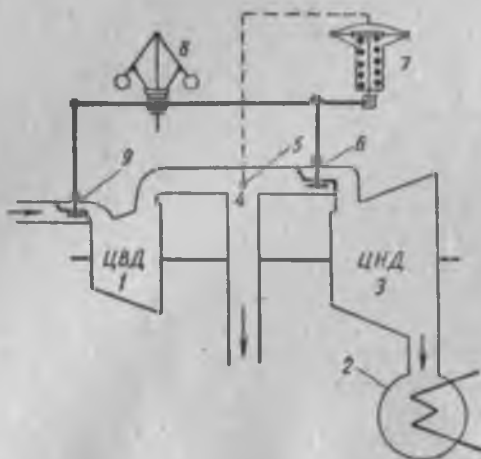
1 — ЦВД — цилиндр высокого давления турбины; 2 — конденсатор; 3 — ЦНД — цилиндр низкого давления турбины; 4 — камера отбора пара; 5 — точка замера давления; 6 — регулирующий клапан ЦНД; 7 — регулятор давления в камере отбора пара; 8 — регулятор скорости; 9 — регулирующий клапан ЦВД.

ской нагрузки приводят в действие оба регулятора. Равным образом при изменении только одной тепловой нагрузки также будут действовать оба регулятора. Несвязанное регулирование не может обеспечить качественного постоянства угловой скорости агрегата даже при неизменной мощности. Это является крупным недостатком несвязанного регулирования.

Для улучшения качества регулирования было предложено установить связь между регуляторами, которая бы ослабляла влияние одного регулятора на другой.

Регулирование с такой связью между регуляторами называется **связанным регулированием**.

На фиг. 13 представлена схема связанного регулирования двух величин. Здесь показан предыдущий случай турбины с отбором пара



Фиг. 13. Схема связанного регулирования двух величин.

(см. фиг. 12), причем между регуляторами установлена с помощью рычагов кинематическая связь. Обозначения на фиг. 13 совпадают с принятыми обозначениями на фиг. 12.

Можно пойти еще дальше в совершенствовании связанной схемы регулирования, если подобрать связь между регуляторами так, чтобы каждый регулятор управлял машиной самостоятельно, без вмешательства другого регулятора. Такое регулирование носит название *связанного автономного регулирования*. Автономное регулирование является наиболее совершенным связанным регулированием.

Вопрос об определении условий автономности будет рассмотрен ниже.

6. СКОРОСТЬ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Действие автоматических регуляторов может протекать с постоянной или переменной скоростью перемещения регулирующего органа. В зависимости от характера скорости регулирующего органа различают регуляторы, работающие с постоянной скоростью регулирования и с пропорциональной скоростью регулирования. У регуляторов первой группы скорость регулирования изменяет только свой знак при изменении знака отклонения регулируемой величины от ее заданного значения. Примером регулирования с постоянной скоростью могут служить регуляторы, у которых в качестве сервомоторов работают электродвигатели трехфазного тока, как показано например на фиг. 11.

У этих регуляторов скорость перемещения регулирующего органа не зависит от величины отклонения регулируемого параметра. Регуляторы с постоянной скоростью наиболее часто встречаются в схемах релейного регулирования.

У регуляторов с пропорциональной скоростью регулирования скорость перемещения регулирующего органа примерно пропорциональна отклонению регулируемой величины от ее заданного значения. Примером таких регуляторов могут служить регуляторы с гидравлическими или пневматическими сервомоторами (см. фиг. 8).

В некоторых случаях скорость регулирования выполняется пропорциональной скорости отклонения регулируемой величины (т. е. ее первой производной). Так, например, регуляторы прямого действия иногда имеют перемещение регулирующего органа пропорциональным отклонению регулируемого параметра, что соответствует указанной пропорциональности скоростей регулирования и отклонения.

В некоторых случаях применяют регуляторы со ступенчатым изменением скорости регулирования. Эти регуляторы обеспечивают медленное движение регулирующего органа в зоне малых отклонений регулируемой величины и быстрое движение при больших отклонениях. Это — так называемые регуляторы с форсировкой скорости регулирования.

Преимуществом регуляторов с пропорциональной скоростью регулирования является лучшее качество регулирования. К их недостаткам можно отнести трудности практического выполнения для многих электрических регуляторов.

Преимущество регуляторов с постоянной скоростью регулирования заключается в простоте их исполнения, возможности применять в качестве сервомоторов электродвигатели серийного производства. Однако это идет за счет некоторого ухудшения качества регулирования сравнительно с регуляторами пропорциональной скорости.

Выше мы указали, что под скоростью регулирования понимается скорость движения регулирующего органа. В некоторых трудах по регулированию под скоростью регулирования понимают скорость изменения подачи регулируемой среды. В общем случае, когда расход регулируемой среды через регулирующий орган не пропорционален его перемещению, обе указанные скорости будут отличаться друг от друга.

7. КОРРЕКТИРУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА

Всякая система автоматического регулирования, как уже было отмечено выше, состоит из двух основных частей: объекта регулирования и регулирующего устройства или регулятора. В простых случаях в состав регулятора входят измерительный элемент, усилитель и исполнительный механизм. Однако такое простое устройство в большинстве случаев не обеспечивает устойчивой работы системы, а также требуемых качественных показателей процесса регулирования. Поэтому в общую схему автоматического регулирования вводят корректирующие устройства, назначение которых состоит в стабилизации процесса регулирования, а также создания такого процесса, который удовлетворял бы по своим качественным показателям поставленным требованиям.

Корректирующее устройство путем различных дополнительных воздействий на рабочий процесс системы изменяет протекание процесса регулирования. Эти воздействия могут быть пропорциональны регулируемой величине, или какому-либо другому избранному параметру, или пропорциональны скорости изменения избранных параметров, а в некоторых случаях и ускорению.

Иногда требуется, чтобы дополнительное воздействие корректирующего устройства было пропорционально интегральному значению изменения избранного параметра за заданный промежуток времени.

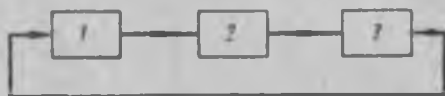
Наконец, корректирующее воздействие может представлять алгебраическую сумму указанных выше воздействий.

К корректирующим устройствам относятся так называемые вспомогательные связи.

Чтобы уяснить понятие и значение связей, заметим, что мы можем любую систему автоматического регулирования разделить на звенья

таким образом, что каждое звено будет нести определенную функцию в цепи регулирования. Схема регулирования, составленная из таких звеньев с определенным назначением, называется функциональной структурной схемой регулирования.

При составлении структурной схемы нас интересует не конструктивное устройство звена, а только выполняемая им функция в системе регулирования. Поэтому может оказаться, что две системы регулирования с различным конструктивным устройством элементов будут иметь однотипные структурные схемы.



Фиг. 14. Структурная схема регулятора без обратной связи:

1 — регулятор; 2 — сервомотор; 3 — объект регулирования.

При изучении динамических свойств регулирующих систем деление на звенья производится под несколько другим углом зрения. Здесь в основу кладутся динамические свойства звеньев. Структурная схема в

этом случае называется динамической структурной схемой.

При исследовании систем автоматического регулирования с помощью структурных схем принимается, что все звенья системы обладают свойством направленного действия, т. е. передают воздействия только в одном направлении и что обратная реакция последующего звена на предыдущее отсутствует или ею можно пренебречь. Громадное большинство реальных звеньев удовлетворяет этому условию. Благодаря этому уравнения звена получаются одинаковыми, рассматриваем ли мы звено отдельно или включенным в систему.

Звенья системы регулирования воздействуют друг на друга в определенной последовательности и по определенному закону. Устройства, соединяющие отдельные звенья системы и выполняющие передачу воздействия от одного звена к другому, называются связями.

Когда регулируется одна величина, основу структурной схемы составляет замкнутая цепочка звеньев, последовательно действующих друг на друга. Примером может служить не прямое регулирование с сервомотором, представленное на фиг. 8. Здесь двигатель воздействует на чувствительный элемент 1 (собственно регулятор), чувствительный элемент на золотник сервомотора и в результате на поршень сервомотора 3, сервомотор на регулирующий клапан 5 и через него на двигатель. Структурная схема в этом случае изображается, как показано на фиг. 14, если регулирующий орган и двигатель сочетать в одном звене.

Направления воздействий звеньев друг на друга показаны стрелками.

Такая структурная схема, которая представляет одну замкнутую цепочку звеньев, последовательно действующих друг на друга, называется одноконтурной структурной схемой. Все связи такой

схемы представляют главные связи. Особенностью главных связей является то, что при нарушении какой-либо одной из таких связей регулирующее действие всей системы прекращается.

В качестве главных связей обычно применяются рычаги, редукторные и зубчатые передачи, электрические провода и кабели, гидравлические и пневматические передачи и др.

В более сложных системах регулирования, кроме главных связей, встречаются вспомогательные. Назначение вспомогательных связей — улучшить качество регулирования и сделать переходный процесс устойчивым или, как принято говорить, стабилизировать систему. По своему основному назначению вспомогательные связи являются корректирующими устройствами. В некоторых случаях встречаются вспомогательные связи, которые не выполняют своей основной задачи — стабилизации переходного процесса, а вызваны особенностью конструкции звеньев и их связей.

К вспомогательным связям относятся обратные связи и дифференцирующие элементы. Обратные связи являются наиболее распространенным способом стабилизации переходного процесса.

Различают жесткие и гибкие, или издромные связи.

Жесткая связь. Жесткая обратная связь отличается тем, что на вход усилителя, помимо сигналов чувствительного элемента, подаются сигналы связи, пропорциональные перемещению регулирующего органа. При этом действие связи прекращается, как только кончается перестановка регулирующего органа. Как правило, сигналы от обратной связи противоположны по своему действию сигналам от чувствительного элемента. Если обозначить сигнал от чувствительного элемента через x_1 , а от регулирующего органа через x_2 , то усилитель получит регулирующий сигнал

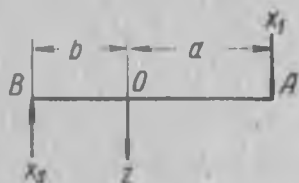
$$z = k_1 x_1 - k_2 x_2, \quad (1-13)$$

где k_1 и k_2 — коэффициенты пропорциональности.

Такая связь называется отрицательной обратной связью в противоположность положительной, или форсирующей, обратной связи, когда сигналы x_1 и x_2 складываются. Последний случай обычно встречается в усилительных системах. В регулирующих системах, как правило, применяется отрицательная обратная связь.

Для осуществления жесткой обратной связи применяют рычаги, а также гидравлические, пневматические и электрические передачи.

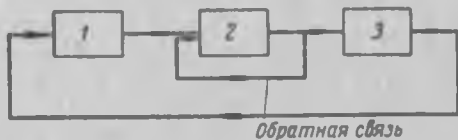
Для примера укажем на дифференциальный рычаг, изображенный на схеме рычажной обратной связи (фиг. 15).



Фиг. 15. Схема рычажной обратной связи.

Сигнал x_1 от чувствительного элемента, воспринимаемый в точке A рычага, передается в точку O , где принимает значение, равное $x_1 \frac{a+b}{b} = k_1 x_1$; $k_1 = \frac{a+b}{b}$

С другой стороны, сигнал x_s в точке B от регулирующего органа или от выходного звена исполнительного механизма передается в точку O , принимая значение, равное $x_s \frac{a+b}{a} = k_s x_s$, где $k_s = \frac{a+b}{a}$, причем действие этого сигнала противоположно действию первого. Регулирующий сигнал на входе усилителя будет $z = k_1 x_1 - k_s x_s$.



Фиг. 16. Структурная схема регулятора с жесткой обратной связью:

1 — регулятор; 2 — сервомотор; 3 — объект регулирования.

Если на фиг. 8 удалить неподвижный шарнир B и соединить конец B рычага AOB штоком $ВД$ с поршнем сервомотора 3 (показано на фигуре пунктиром), то мы получим регулятор скорости с сервомотором и жесткой обратной связью. Структурная схема этого регулятора изображена на фиг. 16.

Здесь, как и на схеме фиг. 14, регулирующий орган составляет одно звено с двигателем.

Кроме дифференциального рычага для осуществления жесткой обратной связи, применяют механический и электрический дифференциалы, электрические мостовые схемы, магнито-электрические приборы с двумя рамками и другие приспособления. Механизмы и устройства обратной связи будут рассмотрены ниже в главе V.

Гибкая обратная связь. Гибкая обратная связь характеризуется тем, что сигналы, подаваемые связью на вход усилителя дополнительно к сигналам от чувствительного элемента, зависят не только от перемещения регулирующего органа, но и от скорости этого перемещения. Действие обратной связи здесь не прекращается, как только окончилась перестановка регулирующего органа, а продолжается некоторое время.

Если обозначить сигнал от чувствительного элемента через x_1 , а перемещение регулирующего органа через x_s , то сигнал на входе усилителя при гибкой обратной связи будет

$$z = k_1 x_1 - \left(k_s x_s + k_{s1} \frac{dx_s}{dt} \right). \quad (1-14)$$

где k_1 , k_s и k_{s1} — коэффициенты пропорциональности.

Если $k_{s1} = 0$, мы имеем чистую гибкую связь.

Ниже на фиг. 17 приведена наиболее часто встречающаяся схема гибкой изодромной обратной связи, применяемая в регуляторах скорости и др.

Воздействие x_1 от чувствительного элемента воспринимается на конце A рычага AOB . Перемещение x_s регулирующего органа передается цилиндру катаракта. Пусть конец B рычага AOB имеет перемещение u . На основании предыдущего (форм. 1-13) можно написать, что сигнал на усилитель в точке O рычага определится как разность

$$z = k_1 x_1 - k_u u, \quad (1-15)$$

где k_1 и k_u — коэффициенты пропорциональности, зависящие от плеч рычага. Направления, указанные на рисунке стрелками, приняты за положительные.

Смещение u есть функция x_s . Для установления зависимости u от x_s допустим, что коэффициент жесткости пружины равен f и сопротивление катаракта при единичной скорости равно k_0 . Если пренебречь инерцией поршня катаракта и рычагов, можем написать

$$k_0 (x'_s - u') = fu, \quad (1-16)$$

так как в этом случае упругая сила пружины должна уравновешивать сопротивление катаракта. Последнее определяется величиной относительной скорости поршня $(x_s - u)' = x'_s - u'$ по отношению к цилиндру, если известно значение k_0 . Полученная зависимость может быть представлена в виде

$$u' + au = x'_s, \quad (1-17)$$

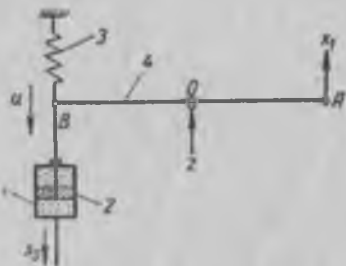
где $a = \frac{f}{k_0}$.

Отсюда видно, что u есть функция x'_s , т. е. скорости регулирующего органа.

Пример применения обратной изодромной связи показан на фиг. 18, где дана схема регулирования дизелем.

Действие системы регулирования понятно из чертежа. Регулятор скорости 8 представляет чувствительный элемент системы. Он действует на управляющий элемент сервомотора — золотник 9, вследствие чего поршень сервомотора 4 приходит в движение под давлением масла, поступающего из нагнетательной трубы в цилиндр. Сервомотор переставляет рейку 3 топливного насоса 2. Топливный насос имеет две связи с системой регулирования: сервомотор производит перестановку рейки насоса, число оборотов насоса пропорционально числу оборотов двигателя.

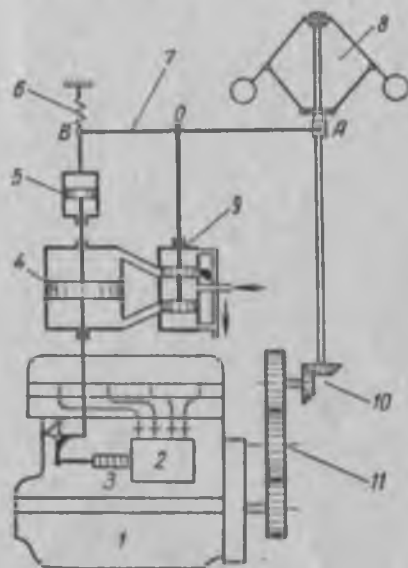
Обратная связь исполнительного механизма с чувствительным элементом осуществлена с помощью дифференциального рычага 7



Фиг. 17. Схема гибкой изодромной обратной связи:

1 — масляный катаракт; 2 — поршень катаракта; 3 — пружина; 4 — дифференциальный рычаг.

и изодрома 5 с пружиной 6. Как было описано выше (см. фиг. 2), действие изодрома основано на перетекании масла в цилиндре катаракта из одной полости в другую и на действии реакции пружины. Допустим, что вследствие мгновенного уменьшения нагрузки дви-



Фиг. 18. Схема регулирования дизеля с обратной изодромной связью:

1 — двигатель; 2 — топливный насос; 3 — рейка топливного насоса; 4 — цилиндр сервомотора; 5 — катаракт изодрома; 6 — пружина изодрома; 7 — дифференциальный рычаг; 8 — регулятор скорости; 9 — золотник сервомотора; 10—11 — зубчатая передача от вала двигателя.

нейтральное положение. После прекращения движения поршня сервомотора точка В под воздействием реакции пружины 6 начнет двигаться в обратную сторону, что вызовет постепенную разгрузку пружины по мере перетекания масла в катаракте, поворот рычага АВ относительно точки О и перемещение муфты А в исходное положение. Если после указанного процесса положение регулирующего органа не соответствует новой нагрузке, то процесс повторится снова.

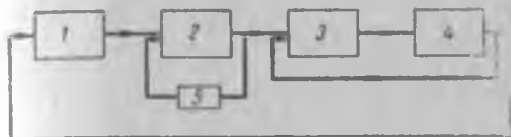
Равновесие системы наступает тогда, когда сила упругости пружины равна нулю и поршень сервомотора неподвижен. Этому отвечает только одно определенное положение дифференциального рычага 7 и, следовательно, одна определенная угловая скорость вала регулятора и двигателя. Здесь мы имеем случай астатического или изодромного, регулирования скорости.

гателя, его скорость увеличилась и муфта регулятора А получила некоторое смещение вверх. Рычаг АВ при этом повернется вокруг точки В и золотник сервомотора сместится вверх из своего нейтрального положения. Масло под давлением поступит в верхнюю полость цилиндра сервомотора 4 и его поршень, двигаясь вниз, переставит регулирующий орган в новое положение, при котором подача горючего уменьшится.

Одновременно с этим будут перемещаться вниз поршень и цилиндр катаракта 5, поскольку при быстром движении поршня относительно цилиндра возникает большое сопротивление при перетекании масла. Такое движение вызовет смещение вниз точки В и растяжение пружины 6, причем рычаг АВ будет поворачиваться вокруг точки А, и, смещая золотник, уменьшать открытие масляных каналов. Движение поршня сервомотора 4 остановится, когда будут полностью перекрыты эти каналы, т. е. когда золотник займет свое

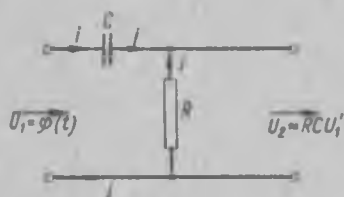
Структурная схема издромного регулятора скорости дизеля представлена на фиг. 19.

Как видно, здесь кроме обратной издромной связи, назначением которой является стабилизация переходного процесса, имеется еще вспомогательная связь между двигателем и топливным насосом, появившаяся как результат конструктивной особенности топливного насоса. Если этот насос выполнить с самостоятельным приводом, независимым от основного двигателя, отмеченная выше вспомогательная связь исчезает. Следует также отметить, что воздействия на входе топливного насоса, поступающие от сервомотора и от двигателя, суммируются.



Фиг. 19. Структурная схема издромного регулятора скорости дизеля:

1 — регулятор; 2 — сервомотор; 3 — топливный насос; 4 — двигатель; 5 — издром.



Фиг. 20. Схема дифференцирующего электрического контура RC .

Дифференцирующие элементы. Другим способом стабилизации переходного процесса является введение в цепь системы дифференцирующих элементов. Под дифференцирующим элементом мы понимаем такое вспомогательное звено, выходная величина которого является производной от входной величины. При этом порядок производной может быть различным в зависимости от поставленного требования. Суммируя воздействие от чувствительного элемента с воздействием выхода дифференцирующего вспомогательного звена, мы подаем полученное суммарное воздействие на вход последующего звена в цепи регулирования, обычно усилительного звена.

В качестве примера дифференцирующего элемента остановимся на электрическом контуре RC , который довольно часто применяется в схемах автоматического регулирования. Схема контура показана на фиг. 20.

Контур состоит из активного сопротивления R и емкости C . На вход контура включена э. д. с. U_1 , являющаяся некоторой функцией времени

$$U_1 = \varphi(t).$$

Как известно, сила тока i , протекающего в контуре, определяется из уравнения

$$U_1 = iR + \frac{1}{C} \int i dt = U_R + U_C. \quad (1-18)$$

где U_R и U_C — падения напряжения на зажимах сопротивления R

и емкости C . Выберем R настолько малым, что U_R во много раз меньше U_C

$$U_R \ll U_C,$$

так что U_R можно пренебречь сравнительно с U_C .

Тогда можем написать

$$U_1 \approx U_C; U_1 \approx \frac{1}{C} \int i dt. \quad (1-19)$$

Отсюда $\frac{dU_1}{dt} = \frac{i}{C}$ или $i = C \frac{dU_1}{dt}$.

Напряжение U_2 , снимаемое с активного сопротивления, будет

$$U_2 \approx Ri = RC \frac{dU_1}{dt} = RC U_1'. \quad (1-20)$$

Таким образом, выходное напряжение контура RC пропорционально первой производной от входного напряжения U_1 по времени.

О других устройствах дифференцирующих элементов, а также о применении их в схемах автоматического регулирования будет сказано более подробно ниже, в соответствующих главах.

8. НАСТРОЙКА РЕГУЛЯТОРА

Современные автоматические регуляторы должны иметь кроме основных элементов, обеспечивающих процесс регулирования, еще дополнительные элементы для управления регулятором, или для его настройки. Во время эксплуатации нередко встречается необходимость менять предписанное значение регулируемой величины. Так например, если на электрическую сеть работает один турбогенератор с регулятором скорости, имеющим некоторую степень неравномерности, приходится для поддержания постоянства частоты сети прибегать к ручному подрегулированию во время работы. Для этого регулятор должен иметь особое дополнительное приспособление, называемое механизмом настройки.

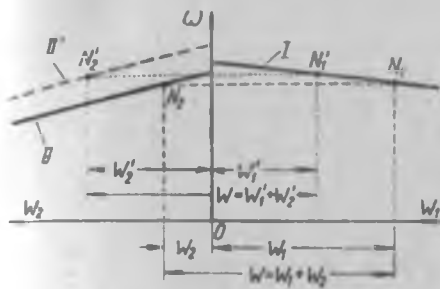
Учитывая, что большинство регуляторов и их элементов выпускаются заводами-изготовителями в серийном порядке и с соблюдением установленных стандартов, необходимо также снабжать регуляторы особыми приспособлениями, позволяющими быстро настроить после монтажа систему регулирования в конкретных условиях.

На электрических станциях при параллельной работе на сеть нескольких электрических генераторов вопрос снабжения двигателей регуляторами скорости с механизмом настройки имеет особо важное значение.

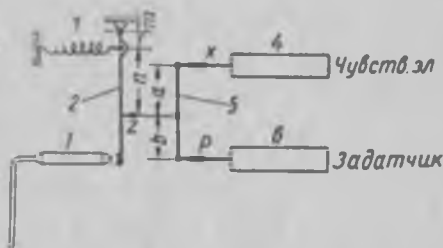
Это требование вызывается необходимостью иметь возможность распределять нагрузку между двигателями по желанию.

Для уяснения этого вопроса обратимся к фиг. 21, где представлен график распределения нагрузки между параллельно работающими генераторами.

На фиг. 21 представлены регулировочные характеристики угловой скорости $\omega = \varphi(W)$ в зависимости от нагрузки для двух турбогенераторов, работающих параллельно на сеть. Так как при параллельной работе угловые скорости двигателей (при одинаковом числе полюсов у генераторов) должны быть строго одинаковы, то нагрузка



Фиг. 21. График распределения нагрузки между параллельно работающими генераторами.



Фиг. 22. Схема включения задатчика.

сети распределится между двигателями в зависимости от наклона регулировочных характеристик I и II и их взаимного расположения на графике. Это показано на фигуре пунктиром. При этом может оказаться, что менее мощный турбогенератор, но с более пологой регулировочной характеристикой будет нагружен больше, чем другой, более мощный, но имеющий крутую характеристику. При наличии у регуляторов механизмов настройки мы можем сместить характеристику II в положение II' , как показано на фигуре, и получить более благоприятное распределение нагрузок между двигателями (см. линию $N_2'N_1'$).

Таким образом, механизм настройки необходим при параллельной работе турбогенераторов для распределения между ними нагрузки по желанию обслуживающего персонала.

Кроме того, механизм настройки у регуляторов скорости требуется еще и для синхронизации подключаемого турбогенератора с сетью или с другим турбогенератором.

Из всего сказанного вытекает значение дополнительных устройств, именуемых механизмами настройки, или задатчиками в тех случаях, когда их роль ограничивается только уставкой предписанного значения регулируемой величины.

Для уяснения принципа устройства задатчика рассмотрим схему, показанную на фиг. 22, где дана часть схемы пневматической системы регулирования, включающая сопло 1 , дроссельную заслонку 2 , пружину 3 , чувствительный элемент 4 и задатчик 6 . Передача от

чувствительного элемента и задатчика на заслонку 2 выполнена с помощью дифференциального рычага 5. Обозначим:

x — воздействие, передаваемое от чувствительного элемента на дифференциальный рычаг;

p — уставка задатчика;

z — результирующее воздействие на заслонку;

F — сила упругости пружины 3.

Значение z будет

$$z = x \frac{a+b}{b} + p \frac{a+b}{a} \quad (1-21)$$

Равновесие заслонки, если пренебречь реакцией струи сопла 1, выражается уравнением

$$z(m+n) = Fm, \quad (1-22)$$

где m и n — размеры по фиг. 22.

При $p = \text{const}$ и $F = \text{const}$ равновесие возможно только при одном значении x .

Из полученных формул видно, что устанавливая различные уставки p задатчика, мы будем тем самым изменять предписанное значение величины, которое система регулирования должна поддерживать постоянным.

На фиг. 5 приведена принципиальная схема программного регулятора мощности для электрических станций. Задатчиком этого регулятора является шаблон суточного графика нагрузки 1, изготовленный из жести и накрученный на барабан, который при помощи часового механизма делает один оборот за сутки. Особый указатель 7 в форме ролика или штифта, прижимаемый пружиной 8, скользит по шаблону и меняет уставку коленчатого рычага 4.

Во многих регуляторах скорости настройка достигается изменением упругости дополнительной пружины, действующей непосредственно на передаточный рычаг, соединяющий муфту регулятора с элементом управления сервомотора.

В регуляторах давления механизм настройки обычно также сводится к изменению предварительного натяга основной пружины регулятора. В электрических регуляторах, а также в регуляторах температуры, работающих по электрическим схемам, задатчиком в большинстве случаев служит переменное сопротивление, позволяющее изменять общее сопротивление цепи задатчика и чувствительного элемента.

9. РЕГУЛИРОВАНИЕ ПО ЗАМКНУТОМУ И РАЗОМКНУТОМУ ЦИКЛАМ

Всякая система автоматического регулирования может быть представлена в общем случае принципиальной схемой, изображенной на фиг. 23.

Здесь: O — объект регулирования;

R — регулирующая часть системы (регулятор);

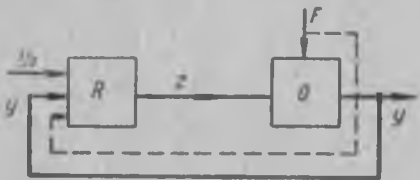
F — возмущающее воздействие на объект регулирования;

y — регулируемая величина;

y_0 — заданное значение регулируемой величины (воздействие задатчика);

z — воздействие регулятора на объект.

Величина y_0 может иметь постоянное значение или быть какой-либо заданной функцией времени и каких-либо параметров. Регулятор измеряет рассогласование $y_0 - y$, преобразует и усиливает его и создает в конечном итоге регулирующее воздействие z на объект. Задача регулятора заключается в том, чтобы в установившемся режиме обеспечить равенство $y = y_0$ (астатическое регулирование), или удержать разность $y_0 - y = \Delta y$ (статическое регулирование) в заданных пределах. Здесь Δy есть статическая ошибка регулирования.



Фиг. 23. Принципиальная схема автоматического регулирования.

Системы автоматического регулирования обладают одним общим признаком — все их главные связи вместе со звеньями составляют замкнутую цепь. Структурные схемы таких систем называются структурными схемами замкнутого цикла.

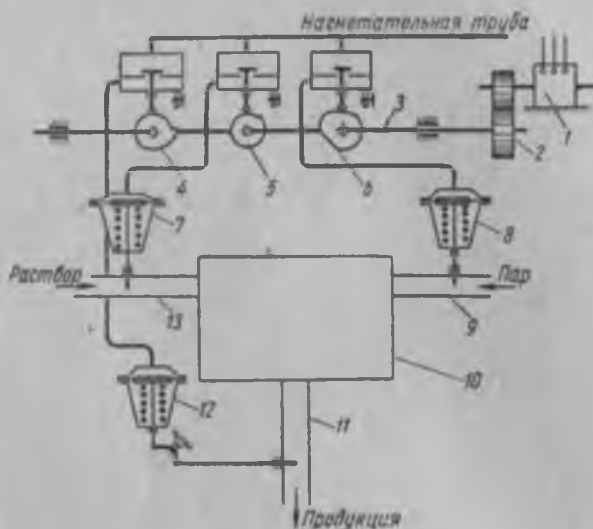
При регулировании по принципу отклонения регулируемой величины выход объекта должен быть связан со входом регулятора, чтобы можно было измерить рассогласование и выработать соответствующее регулирующее воздействие. Такая связь является по существу обратной связью. В отличие от вспомогательных обратных связей, о которых шла речь в разделе 8 настоящей главы, мы будем называть ее главной обратной связью от объекта.

В случае регулирования по «возмущению» замкнутый характер системы также сохраняется, так как теперь вход регулятора должен быть связан с возмущающим воздействием (на схеме фиг. 23 показано пунктиром). Это необходимо для выработки регулятором регулирующего воздействия на объект, исходя из значений возмущающего и задающего воздействий в данный момент времени.

Как следует из сказанного, системы замкнутого цикла характеризуются общим признаком, состоящим в том, что управляющее или регулирующее воздействие есть функция результата этого воздействия на объект (регулируемую величину).

Наряду с системами замкнутого цикла мы встречаем системы, в которых управляющее воздействие не зависит от результата этого воздействия на регулируемую величину объекта. Такие системы называются системами разомкнутого цикла.

Чтобы оттенить разницу между системами, работающими по замкнутому и разомкнутому циклам, представим себе простейшую систему, состоящую из последовательного соединения звеньев — задатчика с регулятором, исполнительного механизма и объекта с прибором, измеряющим регулируемую величину. Допустим, что оператор для управления объектом дает различные уставки задатчику. Регулирующее воздействие регулятора в этом случае не яв-



Фиг. 24. Схема автоматического управления технологическим процессом в варочном котле.

ляется функцией результата этого воздействия на объект, поскольку оператор по своему усмотрению изменяет уставки задатчика. Такая система работает по разомкнутому циклу.

Если мы свяжем измерительный прибор с задатчиком таким образом, чтобы регулятор вырабатывал воздействие в зависимости от разности между показанием прибора и заданным значением регулируемой величины, мы получим систему, работающую по замкнутому циклу.

Разомкнутая система представляет по существу передаточную цепь, в которой входящим импульсом первого звена является воздействие задатчика, передаваемое регулятором после надлежащей обработки, объекту регулирования. Системы, работающие по разомкнутому циклу, нашли применение в области автоматического управления сложными технологическими процессами в разных отраслях промышленности, где основной задачей системы является передача командного импульса от задатчика к аппаратам управления. Пример такого управления показан на фиг. 24, где представлена схема

автоматического управления технологическим процессом в варочном котле 10.

Вопрос решается применением специального задатчика и регуляторов давления 7, 8, 12, приспособленных для изменения проходного сечения труб 9, 11, 13 в соответствии с требованием технологического процесса.

Задатчик представляет собой вал 3, приводимый в движение электродвигателем 1 через редуктор 2. На валу закреплены три кулачка 4, 5, 6, действующих на соответствующие клапаны. Каждый клапан сообщает верхнюю полость коробки задатчика с нижней. В зависимости от положения клапана в нижних коробках задатчиков устанавливаются определенные давления воздуха, тогда как в верхних полостях всегда поддерживается постоянное давление воздуха за счет поступления по нагнетательной трубе. Из нижних коробок давление воздуха по трубкам передается в верхние камеры регуляторов давления.

Здесь регуляторы давления прямого действия одновременно являются исполнительными механизмами. Каждый регулятор меняет проходное сечение трубы, на которой он установлен.

Задаваясь надлежащими профилями кулачков вала 3 задатчика и выбрав угловую скорость вращения этого вала в соответствии с продолжительностью одного цикла технологического процесса, мы можем обеспечить надлежащее протекание этого процесса автоматически.

Здесь мы имеем типичное программное регулирование. Требуемые величина и время открытия проходного сечения каждой трубы устанавливаются регуляторами в соответствии с командами задатчиков.

В рассматриваемом примере мы имеем три независимые друг от друга разомкнутые цепочки регулирования, регулирующих отдельные операции, составляющие один общий цикл технологического процесса.

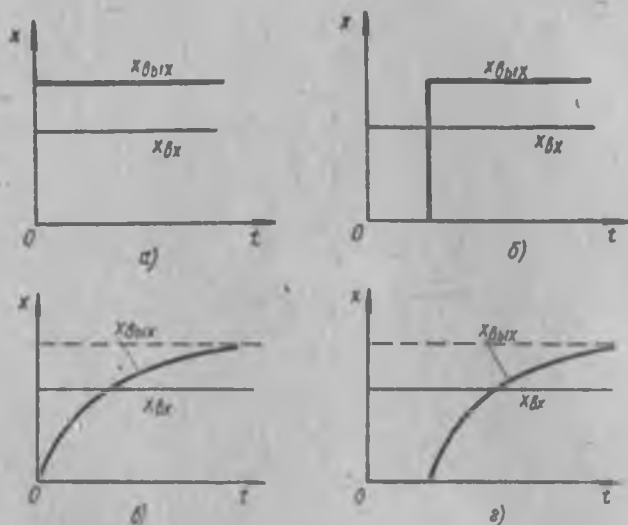
10. ЗАПАЗДЫВАНИЕ В ЭЛЕМЕНТАХ РЕГУЛЯТОРА

При анализе причин запаздывания в системах автоматического регулирования различают два вида запаздывания сигналов: передаточное или постоянное запаздывание и запаздывание, вызываемое инерционными свойствами звена. Виды запаздывания сигналов показаны на фиг. 25.

Рассмотрим отдельное звено в системе. Если отсутствуют оба вида запаздывания, сигнал, поступающий на вход звена, мгновенно передается на выход без искажения формы сигнала, как это показано на фиг. 25, а для случая мгновенного изменения нагрузки. Изменяется только амплитуда сигнала в соответствии с коэффициентом усиления звена.

При наличии передаточного запаздывания сигнал поступает на выход звена с некоторым запаздыванием, но без искажения своей формы (фиг. 25, б).

При инерционном запаздывании нарастание сигнала на выходе до его полного значения требует некоторого времени, хотя реакция на входной сигнал передается на выход мгновенно (фиг. 25, в). Такое



Фиг. 25. Виды запаздывания сигналов.

нарастание выходного сигнала может вызвать задержку действия тех последующих звеньев системы, например, реле, которые начинают работать только тогда, когда поступающий сигнал достигает некоторого порога.

При наличии обоих видов запаздывания появление сигнала на выходе звена задерживается, как показано на фиг. 25, г, и, кроме того, имеет место указанное выше нарастание сигнала.

Инерционное запаздывание в теории автоматического регулирования рассматривается как время, необходимое для протекания переходного процесса. Поэтому в дальнейшем под запаздыванием мы будем понимать только запаздывание первого вида.

Причины запаздывания в системе в целом можно разделить на две группы.

К первой группе относятся те причины, которые связаны со свойствами объекта регулирования.

Ко второй группе относятся причины, вытекающие из конструктивных особенностей или качества изготовления всех остальных элементов регулирующей системы.

Здесь можно отметить следующие основные запаздывания; 1 — запаздывание чувствительного элемента или датчика; 2 — запазды-

вание передачи сигналов от чувствительного элемента до регулирующего органа; 3 — запаздывание управляющего устройства.

Запаздывание чувствительного элемента заключается в том, что при непрерывном изменении регулируемой величины существует разница между действительным значением регулируемой величины в данный момент и тем значением, которое измерено чувствительным элементом и передано следующему звену регулирующей цепи. В качестве примера можно указать на запаздывание термопар, заключенных в защитные чехлы. В этом случае действительное значение температуры в объекте может значительно отличаться от значения, измеренного при помощи термопары в данный момент.

Запаздывание передачи сигналов, или импульсов, зависит от сопротивления и длины импульсных трасс. В электрических трассах этим запаздыванием обычно можно пренебрегать, но в гидравлических и пневматических трассах запаздывание в некоторых случаях принимает большие значения. Скорость передачи регулирующего импульса в рабочей среде обычно равна скорости движения этой среды. Запаздывание увеличивается с увеличением длины трассы и ее сопротивления.

Запаздывания управляющих устройств и регулирующих органов могут вызываться наличием люфтов в сочленениях подвижных элементов. Если управляющее устройство оформлено в виде реле, то запаздывание может появиться за счет большого времени срабатывания реле.

В большинстве случаев запаздывание отрицательно сказывается на работе автоматического регулятора, поэтому стараются устранить это влияние, если оно велико, путем введения обратной связи, переходом на позиционное регулирование или другими мерами.

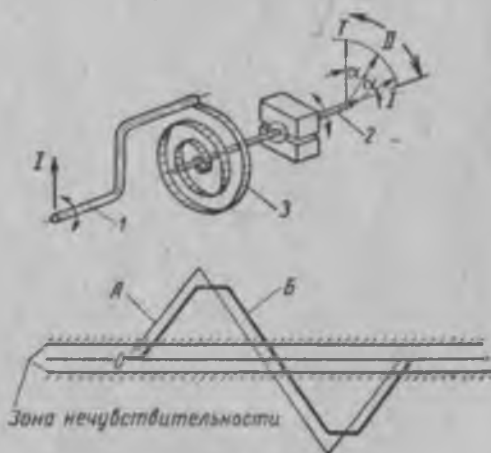
11. ВЛИЯНИЕ ТРЕНИЯ И ЛЮФТОВ. ЗОНА НЕЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РЕГУЛЯТОРА

Основное влияние трения и люфтов заключается в появлении зоны нечувствительности, что приводит к неоднозначности регулировочной характеристики. Вообще все характеристики системы при наличии сухого трения и люфтов теряют свою однозначность.

Перемещению элементов регулятора противодействуют силы трения, для преодоления которых требуется некоторое минимальное значение воздействия, передаваемого от предыдущего звена. Если это воздействие меньше указанного минимального значения, подвижная система регулятора не может придти в движение, так как противодействие сил трения больше движущей силы, вызванной возмущением. Таким образом, появляется некоторая зона отклонения регулируемого параметра от заданного значения, в пределах которой регулятор не воздействует на процесс. Это, так называемая, зона нечувствительности регулятора.

Для иллюстрации сказанного обратимся к фиг. 26, на которой изображена схема передачи углового перемещения со спиральной пружиной.

Возмущающее воздействие от оси 1 передается оси 2 через пружину 3. Допустим, что угловое перемещение оси 1 представлено колебаниями, изображенными ломаной линией А. Установим на осях 1 и 2 указатели I и II угловых перемещений. Указатель I



Фиг. 26. Схема передачи углового перемещения со спиральной пружиной.

будет следовать диаграмме А. Указатель II в начале движения оси 1 будет оставаться неподвижным, пока упругая сила пружины не преодолеет момент сил трения. В дальнейшем указатель II будет следовать за движением указателя I, но отставать от него на некоторый угол α , отвечающий моменту сил трения. Когда ось 1 получит наибольшее угловое отклонение и изменит направление вращения, ось 2 остановится и будет оставаться неподвижной до тех пор, пока угол закручивания пружины опять не создаст момент

вращения, могущий преодолеть момент сил трения. В дальнейшем ось 2 будет двигаться за осью 1, но уже в другом направлении, причем указатель II будет отставать от указателя I на угол α .

Диаграмма угловых отклонений оси 2 представится ломаной линией Б, как показано на фиг. 26.

Таким образом, силы трения изменяют выходное значение сигналов, уменьшая несколько их амплитуду.

Движение оси 2 может начаться только, если отклонение оси 1 вышло за пределы зоны нечувствительности. Начавшись, оно будет продолжаться до остановки оси 1, но с периодическими перерывами при перемене направления вращения оси 1.

Рассмотрим теперь влияние люфта на передачу сигнала, для чего обратимся к фиг. 27, где дана схема передачи углового перемещения с помощью рычагов.

Допустим, что в начале возмущения рычаг оси 1 находится в середине развилки 3, раствор которой больше толщины рычага. При наличии люфта в развилке ось 2 начнет двигаться только после того, как рычаг коснулся одной стороны развилки. В дальнейшем развилка увлекается рычагом и ось 2 следует за осью 1. При изменении направления вращения оси 1 развилка и ось 2 останавливаются. Они начнут движение в другом направлении после того, как рычаг

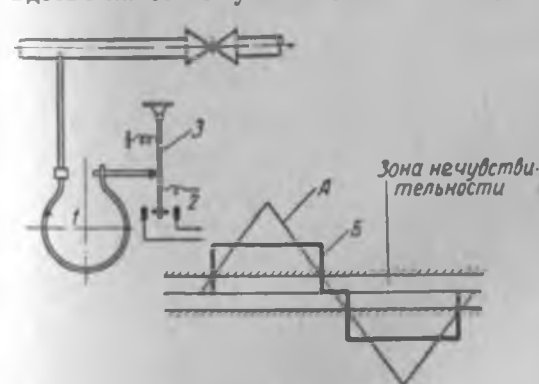
выберет люфт и коснется другой стороны развилки. В дальнейшем ось 2 будет следовать за осью 1.

Если возмущающее воздействие представляет угловое перемещение, изменяющееся по диаграмме А, то угловое перемещение оси 2 выразится диаграммой Б.

Движение оси 2 может начаться только тогда, когда угловое отклонение оси 1 (возмущение) вышло за пределы зоны нечувствительности.

Сравнивая фиг. 27 и 26, можно заключить, что сухое трение и люфт оказывают аналогичное влияние на передачу сигналов регулирования, если ограничиваться рассмотрением случаев статики. Рассмотрим еще влияние зазоров между контактами при релейном регулировании.

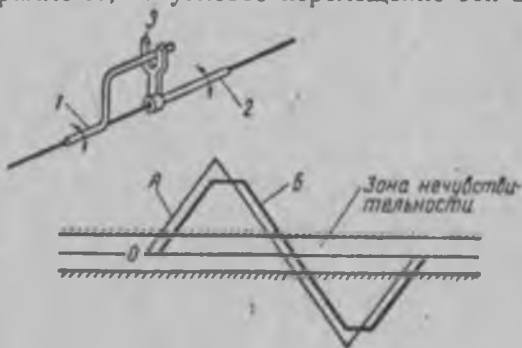
На фиг. 28 показана схема передачи воздействия с помощью реле.



Фиг. 28. Схема передачи воздействия с помощью реле.

наличие некоторого отклонения регулируемой величины от заданного значения. Только при замыкании правых или левых контактов сервомотор придет в движение. Таким образом, здесь мы также имеем зону нечувствительности, величина которой определяется расстоянием между контактами и отношением плеч рычага 3.

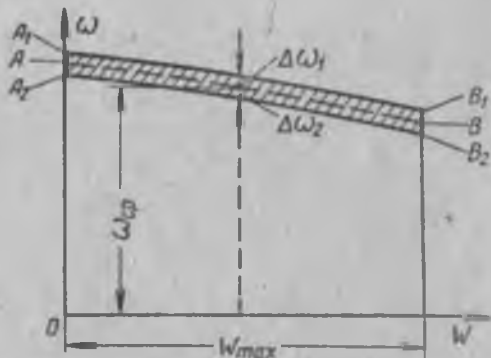
Диаграмма Б на фиг. 28 представляет скорость электродвигателя, связанного с регулирующим органом.



Фиг. 27. Схема передачи углового перемещения с помощью рычагов.

Из всех приведенных примеров видно, что нечувствительность регулятора вызывается сухим трением и наличием люфтов в подвижной системе регулятора, а также величиной расстояния между контактами при релейном регулировании.

При наличии нечувствительности регулятора регулировочная характеристика всякой регулирующей системы уже не будет представляться в общем случае кривой линией, а будет некоторой полосой вдоль этой линии. Ширина этой полосы в каждой точке регулировочной характеристики определяется степенью нечувствительности регулятора.



Фиг. 29. Регулировочная характеристика системы регулирования с учетом влияния нечувствительности регулятора.

На фиг. 29 показана для примера регулировочная характеристика системы регулирования с учетом влияния нечувствительности регулятора.

Здесь кривая АВ есть функция $\omega = \varphi(W)$ угловой скорости от нагрузки в идеальном случае при отсутствии трения и люфтов. Действительная регулировочная характеристика представится полосой $A_1B_1B_2A_2$.

Если $\Delta\omega_1$ есть максимальная величина положительного отклонения регулируемого параметра в зоне нечувствительности и $\Delta\omega_2$ — максимальная величина отрицательного отклонения, то отношением $\epsilon = \frac{\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2}{\omega_{cp}}$ оценивают степень нечувствительности регулятора на заданном интервале регулирования. Значение ω_{cp} определяется как среднее арифметического максимального и минимального значений величины ω в зоне регулирования

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}.$$

В некоторых случаях за степень нечувствительности регулятора принимают среднее значение указанного отношения, т. е.

$$\epsilon = \frac{(\Delta\omega_1 + \Delta\omega_2)_{cp}}{\omega_{cp}}.$$

12. ЭКСТРЕМАЛЬНОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ

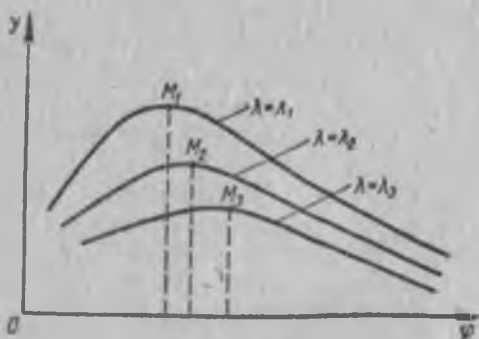
Задача регулятора всякой системы автоматического регулирования состоит в том, чтобы своим воздействием на регулируемый орган объекта заставлять регулируемую величину принимать значения, устанавливаемые задатчиком, или отличающиеся от значений задатчика на малую величину (статическую ошибку).

Однако при управлении производственными процессами в целях достижения наиболее экономического режима или по другим соображениям нередко требуется один или несколько показателей процесса поддерживать на наивысшем или наименьшем уровне, практически достижимом при непрерывно изменяющихся условиях работы объекта регулирования. Такое регулирование на экстремум не может автоматически выполняться обычной системой регулирования.

Чтобы выполнить указанную задачу, оператор должен на основании данных о зависимости регулируемой величины от переменных параметров производственного процесса через некоторые промежутки времени определять величину экстремума и устанавливать ее на задатчике, т. е. непрерывно изменять настройку регулятора.

Пусть, например, регулируемый параметр y представляет функцию двух переменных параметров φ и λ рассматриваемого производственного процесса

$$y = y(\varphi, \lambda),$$



Фиг. 30. Семейство функции $y = y(\varphi, \lambda)$ с переменным экстремумом.

причем эта функция имеет экстремальный характер. Она может быть представлена семейством графиков $y = y(\varphi)$ при $\lambda = \text{const}$, как показано на фиг. 30.

Вследствие изменения в ходе производственного процесса параметра λ характеристика $y = y(\varphi)$ будет смещаться и изменяться по форме, что вызывает в свою очередь изменение величины экстремума.

Таким образом задача экстремального регулирования состоит в том, чтобы непрерывно изменять уставку регулятора с таким расчетом, чтобы поддерживать регулируемую величину, или другой показатель, на наивысшем уровне в условиях непрерывного изменения возмущающих воздействий.

Само собой понятно, что система ручного экстремального регулирования будет неизбежно медленно реагировать на изменение условий, так как оператору необходимо время, чтобы рассчитать на основании текущих показателей процесса и возмущающих воздействий требуемую в данный момент уставку регулятора. В сложных случаях даже квалифицированный оператор не будет в состоянии обеспечить удовлетворительное регулирование процесса. Поэтому вполне понятна актуальность задачи построения систем автоматического экстремального регулирования

Эта задача замены оператора автоматом может быть решена применением в качестве управляющего механизма современных электронных цифровых машин, которые кроме элементов счета имеют элементы логического действия, что позволяет с помощью этих машин решать довольно сложные задачи управления. Однако, как показывают первые образцы экстремальных регуляторов, практика их построения пошла по несколько иному пути.

В целях упрощения используется не весь комплекс счетной машины, а лишь отдельные элементы логического действия, которые упрощаются и приспособляются к конкретным условиям экстремального регулирования.

В построенных образцах экстремальных регуляторов задача решена применением непрерывного автоматического поиска экстремума регулируемой величины. Приспосабливая надлежащим образом устройство автоматического поиска к обычной системе автоматического регулирования, мы можем превратить ее в систему автоматического экстремального регулирования.

Устройства автоматического поиска весьма различны как по принципу своего действия, так и по конструктивному исполнению.

Например, в систему экстремального регулятора, разработанного в Институте электротехники АН УССР, встроен командный генератор, который непрерывно вращается и замыкает по очереди ряд электрических цепей. Первый контакт включает цепь реле, производящего запись регулируемой величины y_1 в момент времени t_1 . Второй контакт включает на небольшое время исполнительный двигатель, который регулирует величину y . Система делает первый шаг изменения регулирующего воздействия. Третий контакт производит запись второго значения регулируемой величины y_2 . Четвертый контакт включает элемент сравнения. Если $y_2 > y_1$, то для достижения максимума система в следующем цикле делает еще один шаг в том же направлении.

Если $y_2 < y_1$, то происходит переключение поляризованного реле и исполнительный двигатель включается на обратный ход.

Таким образом, значение регулируемого параметра при изменяющихся условиях режима автоматически поддерживается вблизи своего максимума¹.

13. САМОНАСТРАИВАЮЩИЕСЯ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Дальнейшим шагом в деле развития автоматики управления производственными процессами является задача построения так называемых самонастраивающихся систем. Рассмотренные выше экстремальные регуляторы представляют частный случай таких систем.

¹ Интересующихся более детально вопросом экстремального регулирования отсылаем к книгам Ц я н ь С ю э-С э н ь, Техническая кибернетика, И в а х н е н-ко А. Г., Электроавтоматика, Гостехиздат, УССР, Киев, 1956.

Для нормальной работы обычной системы автоматического регулирования требуется, чтобы параметры и характеристики системы были подобраны в соответствии с характеристиками объекта регулирования и действующих внешних воздействий (задатчика и возмущения).

Однако в действительности нередко встречаются случаи, когда характеристика объекта или задающего и возмущающего воздействий резко изменяются в процессе регулирования. Наглядным примером может служить полет самолета в условиях обледенения. Образование ледяной корки на поверхности крыла и фюзеляжа приводит к изменению формы этих частей самолета, что в свою очередь вызывает большие изменения аэродинамических свойств самолета.

Такие резкие изменения характеристики управляемого объекта или характера возмущающего и задающего воздействий могут расстроить систему автоматического регулирования, которая хорошо работает в нормальных условиях.

В связи с такими случаями и возникла задача построения систем автоматического регулирования, которые сами автоматически приспособлялись бы к меняющимся условиям работы. Такие системы называются самонастраивающимися.

Если обычная система автоматического регулирования состоит из двух основных частей — объекта регулирования и регулирующей или управляющей части с измерительным элементом, то в самонастраивающейся системе кроме основного управляющего устройства имеется еще дополнительное управляющее устройство, которое воздействует на основное устройство и корректирует его выходной сигнал.

На фиг. 31 показана принципиальная схема самонастраивающейся системы регулирования.

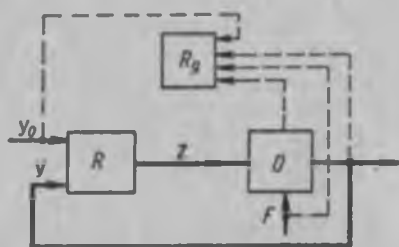
На фигуре обозначено:

O — объект регулирования;

R — регулирующая часть системы (основная);

R_d — дополнительное управляющее устройство.

Дополнительное управляющее устройство воспринимает данные о состоянии регулируемой величины и других параметров системы, а также от возмущающего и задающего воздействий и на основании этих данных вырабатывает корректирующее воздействие на основную управляющую часть системы. Как вытекает из характера задачи дополнительного управляющего устройства, последнее в про-



Фиг. 31. Принципиальная схема самонастраивающейся системы регулирования.

стных случаях должно иметь в своем составе элементы логического действия и автоматического поиска.

В сложных случаях дополнительное устройство превращается в управляющую машину типа электронной цифровой машины с программным управлением, приспособленной к конкретным требованиям системы.

Следует отметить, что идеи построения самонастраивающихся систем, так же как и экстремального регулирования, являются новыми в области автоматизации производственных процессов.

В настоящее время имеется пока еще незначительное число выполненных систем этого рода. Для прочного внедрения в промышленность новых методов регулирования и управления необходимы дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования в этой области, а также конструктивная разработка типовых образцов.

14. ПРИМЕНЕНИЕ СЧЕТНО-РЕШАЮЩИХ МАШИН В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Современное развитие средств вычислительной техники, особенно создание быстродействующих электронных цифровых машин, сделало возможным использование этих машин в качестве управляющих устройств в различных системах автоматического управления и регулирования производственных процессов. Помимо того, что применение управляющих машин сокращает количество обслуживающего персонала и повышает производственные скорости и качество продукции, особое значение приобретают эти машины для тех производственных процессов, где имеется опасность для жизни и здоровья людей.

Благодаря тому, что электронная цифровая машина имеет в своем устройстве наряду с элементами счета элементы логического действия, эта машина может быть использована для целей автоматического управления. Управляющая машина, получая непрерывно данные о действительном состоянии управляемого объекта, а также о возмущающих и задающих воздействиях, должна вырабатывать надлежащие команды управления. Если задача управления сравнительно простая, то вместо целого комплекса элементов, составляющих управляющую машину, могут быть использованы лишь отдельные ее элементы, приспособленные к конкретной схеме управления.

Так как электронные цифровые машины представляют устройства дискретного действия то, в тех случаях, когда эти машины используются как управляющие, они должны иметь дополнительные элементы, перерабатывающие непрерывные входные данные в дискретные числа.

Основная работа управляющих машин заключается в выборе тех действий, которые отвечают определенным условиям. В выра-

ботке команд управляющих машин большое место занимают логические операции, которые служат для разделения поступающей информации по определенным признакам, для установления соответствия между заданием и исполнением, для расшифровки кодов сложных операций и других разнообразных действий.

Необходимым условием возможности применения электронных цифровых машин для автоматического управления процессом является наличие полного математического описания этого процесса. Исключения представляют самонастраивающиеся системы.

При этом условии мы можем представить процесс как совокупность нескольких определенных однозначных правил, определяющих поведение системы в различных состояниях. Дальнейшая задача заключается в увязке этих правил с элементами счета и логических действий управляющей машины.

Применение цифровых вычислительных устройств в системах автоматического регулирования может иметь следующие формы выполнения:

1. Цифровое вычислительное устройство выполняется как командное устройство, которое на основании входных данных вырабатывает управляющий сигнал, поступающий в систему автоматического регулирования.

2. Цифровое вычислительное устройство выполняется как регулирующее устройство. В этом случае управляющая часть системы заменяется цифровым вычислительным устройством. Последнее анализирует данные, поступающие из системы о ходе процесса и в соответствии с заложенным законом регулирования вырабатывает регулирующие сигналы, подаваемые к исполнительному органу.

3. Цифровое вычислительное устройство вводится в систему автоматического регулирования для обработки информации. Это устройство принимает информацию о регулируемой величине и другие данные и выдает на выходе переработанную информацию, которая в дальнейшем используется оператором для управления процессом.

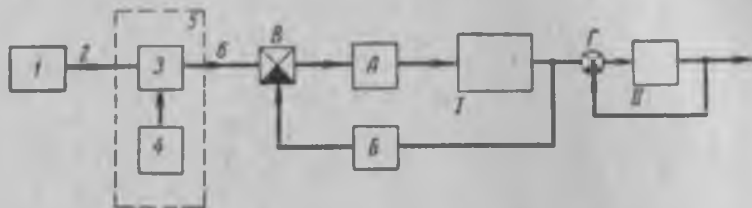
Для иллюстрации сказанного о применении счетно-решающих устройств в системах автоматического регулирования приведем в качестве примера автоматизированный вертикально-фрезерный станок, описанный в статье Симкина М. М., опубликованной в журн. «Автоматика и телемеханика» № 2, т. XVII.

Станок предназначен для изготовления авиационных деталей. Функциональная схема автоматизированного вертикально-фрезерного станка представлена на фиг. 32.

Программа задается на бумажной перфорированной ленте. При составлении программы на ленте в двоичном коде пробиваются координатные данные опорных точек траектории фрезы относительно изделия и времени, в течение которого фреза должна переместиться от одной опорной точки до другой. Перемещение фрезы относительно изделия достигается в результате трех основных движений рабочих органов станка: стола, головки и бабки, для управления

которыми применены три однотипные системы программного регулирования, синхронизированные между собой.

Работа каждой системы разбивается на ряд временных интервалов соответственно пробивке на перфорированной ленте. В промежутках между опорными точками работа системы управляется интерполирующим устройством 5. Интерполяция линейная. В течение каждого интервала на входы трех каналов управления от интерполирующего устройства поступают импульсы, частота повторения которых устанавливается в распределителе импульсов 3 кодами



Фиг. 32. Функциональная схема автоматизированного вертикально-фрезерного станка;

1 — задающее устройство; 2 — двоичные коды; 3 — распределитель импульсов; 4 — генератор импульсов; 5 — интерполирующее устройство; 5 — серии импульсов; А — преобразователь дискретных данных в непрерывные; Б — преобразователь непрерывных данных в дискретные; Б — устройство алгебраического суммирования дискретных данных; Г — устройство алгебраического суммирования непрерывных данных; Г — декодирующий контур следящей системы, в которой серии импульсов преобразуются в углы поворота оси сельсина-датчика; II — контур силовой сельсинной следящей системы.

соответствующих координатных данных. Каждый импульс перемещает рабочий орган станка на 0,013 мм. Подача рабочего органа определяется частотой повторения импульса. Число импульсов, поданных в канал в течение заданного интервала времени, определяет перемещение рабочего органа за указанный интервал.

В пределах каждого интервала частота повторения импульса остается неизменной, вследствие чего скорость подачи рабочего органа в пределах интервала также постоянна. Частота повторения в каждом канале может изменяться только с наступлением другого интервала. Установлена строгая синхронизация импульсных посылок (серий) во всех трех каналах, что обеспечивает перемещение фрезы между соседними опорными точками по прямой линии, т. е. линейную интерполяцию.

Статическая ошибка не превышает 0,013 мм. Устройство управления имеет 250 электронных ламп и 175 электромеханических реле. Для привода рабочих органов станка применены электродвигатели мощностью 0,55 квт.

Предельные габариты обрабатываемых изделий 1500 × 750 × × 700 мм.

ГЛАВА II

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОБЪЕКТОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ

На процесс регулирования оказывают существенное влияние как свойства регулирующей части системы, так и самого объекта регулирования.

Ниже мы остановимся на основных свойствах регулируемых объектов.

1. АККУМУЛИРУЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ОБЪЕКТА

Рабочий процесс всякого объекта регулирования связан с притоком, расходом, преобразованием некоторой материальной среды или энергии. Эта среда называется регулируемой средой, если на ее протекание влияет положение регулирующего органа.

Многие объекты обладают способностью аккумулировать рабочую среду, запастись ее внутри объекта. Такая способность называется аккумулирующей способностью или емкостью объекта.

Чем меньше емкость объекта, тем больше скорость изменения регулируемой величины при нарушении баланса между притоком и расходом рабочей среды и, следовательно, тем сложнее регулирование. Напротив, большая емкость объекта облегчает задачу регулятора.

Приведем несколько примеров объектов, обладающих аккумулирующей способностью:

1. При регулировании уровня жидкости в каком-либо резервуаре аккумулирующая способность объекта зависит от величины емкости резервуара. Чем больше эта емкость, тем медленнее будет изменяться уровень при нарушении баланса между притоком и расходом.

При регулировании скорости турбогенератора роль емкости будет характеризовать момент инерции вращающихся частей. Чем больше этот момент инерции, тем медленнее изменяется скорость агрегата при изменении нагрузки.

3. При регулировании давления в паровом котле аккумулирующая способность котла зависит от его водяного объема. Чем больше этот объем, тем меньше скорость изменения давления в котле при колебании паровой нагрузки.

4. При регулировании температуры жидкости в каком-либо баке емкость объекта зависит от массы жидкости в баке и ее теплоемкости.

В общем случае любой процесс регулирования потока может быть представлен балансом рабочей среды или энергии.

Обозначим:

Q_1 — приток рабочей среды в единицу времени;

Q_2 — расход этой среды в единицу времени;

ΔQ — расход среды, идущий на изменение запаса внутри регулируемого объекта.

Баланс регулируемой среды

$$Q_1 - Q_2 = \Delta Q \quad (II-1)$$

В целях большей общности выводов перейдем к безразмерным величинам. Введем отношения:

$$q_1 = \frac{Q_1}{Q_0}; \quad q_2 = \frac{Q_2}{Q_0}; \quad \Delta q = \frac{\Delta Q}{Q_0}, \quad (II-2)$$

где Q_0 — базисное значение расхода рабочей среды.

Обычно за значение Q_0 принимается максимальное или номинальное значение этого расхода, но в общем случае может быть принято любое значение.

Уравнение баланса в безразмерных единицах примет вид

$$q_1 - q_2 = \Delta q. \quad (II-3)$$

При $\Delta q > 0$ запас аккумулированного количества рабочей среды в объекте увеличивается, при $\Delta q < 0$ уменьшается, при $\Delta q = 0$ запас сохраняется без изменения. Величина Δq определяет значение возмущающего воздействия в безразмерном выражении. Чем больше Δq , тем быстрее будет изменяться регулируемая величина.

Обозначим произвольное значение регулируемой величины через R . Если R_0 — выбранное базисное значение регулируемого параметра, то безразмерное выражение регулируемой величины будет

$$r = \frac{R}{R_0}. \quad (II-4)$$

Скорость изменения r будет зависеть от возмущающего воздействия Δq .

В общем случае эта зависимость выражается некоторой функцией $\varphi(\Delta q)$

$$\frac{dr}{dt} = \varphi(\Delta q). \quad (II-5)$$

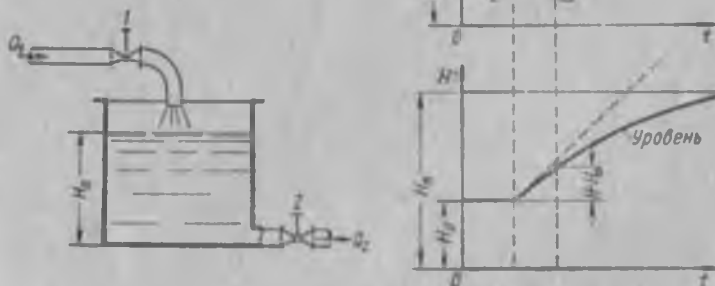
В большинстве практических случаев можно принимать с достаточной точностью эту зависимость линейной.

Тогда

$$\frac{dr}{dt} = \nu \Delta q. \quad (11-6)$$

Здесь ν — коэффициент пропорциональности. Он представляет скорость изменения регулируемой величины без воздействия регулятора на объект при относительном возмущении Δq , равном 1. Этот коэффициент иногда называют чувствительностью объекта к возмущению.

Если функция $\varphi(\Delta q)$ не может быть по причине большой погрешности заменена линейной, то коэффициент ν будет переменной величиной, зависящей от Δq .



Фиг. 33. Объект регулирования, обладающий емкостью.

Емкость объекта определяется как запас рабочей среды внутри объекта. Обычно вместо емкости пользуются так называемым «коэффициентом емкости», который представляет отношение емкости к соответствующему значению регулируемой величины.

Если емкость объекта определяется величиной C , а соответствующее значение регулируемой величины есть R , то отношение

$$\frac{C}{R} = c \quad (11-7)$$

называют коэффициентом емкости. Величина c может быть постоянной или переменной величиной. В тех случаях, когда коэффициент емкости есть переменная величина, значение c определяют как отношение $\frac{\Delta C}{\Delta R}$ изменения емкости к соответствующему изменению регулируемого параметра.

Для уяснения физического значения введенных понятий «чувствительности объекта к возмущению» и «коэффициента емкости» обратимся к примеру, представленному на фиг. 33.

На фигуре показан резервуар, в котором регулируемой величиной является уровень воды. Когда приток Q_1 равен расходу Q_2 ,

то уровень остается постоянным. Допустим, что высота уровня при этом будет $H = H_n$.

При нарушении равенства $Q_1 = Q_2$ будет иметь место следующее уравнение:

$$H - H_n = \frac{(Q_1 - Q_2)t}{F}, \quad (11-8)$$

где F — площадь резервуара.

Найдем коэффициент c емкости.

Для нашего случая

$$C = HF \text{ и } R = H; c = \frac{HF}{H} = F. \quad (11-9)$$

Это значит, что коэффициент емкости в нашем примере определяется площадью резервуара.

Так как Q_1 и Q_2 приток и расход рабочей среды даны в единицу времени, то изменение регулируемой величины в единицу времени, т. е. скорость ее изменения будет

$$\frac{dR}{dt} = \frac{H - H_n}{t} = \frac{Q_1 - Q_2}{F}. \quad (11-10)$$

Вводя относительные значения $r = \frac{R}{R_0}$; $q_1 = \frac{Q_1}{Q_0}$; $q_2 = \frac{Q_2}{Q_0}$

и $\Delta q = q_1 - q_2$, найдем

$$\frac{dr}{dt} = \Delta q r; \quad \frac{\Delta q Q_0}{F R_0} = \Delta q r. \quad (11-11)$$

Отсюда «чувствительность объекта к возмущению»

$$\gamma = \frac{1}{F} \cdot \frac{Q_0}{R_0} \text{ сек}^{-1} \quad (11-12)$$

обратно пропорциональна площади поперечного сечения резервуара, т. е. коэффициенту емкости.

Чем больше площадь резервуара, тем больше коэффициент емкости объекта и тем меньше его чувствительность к возмущениям.

В нашем примере коэффициент емкости имеет размерность м^2 . Вообще же его размерность может быть разная.

2. САМОВЫРАВНИВАНИЕ

Самовыравниванием называется такое свойство объекта, вследствие которого возникшее несоответствие между притоком и расходом рабочей среды самостоятельно без участия регулятора стремится к нулю, а регулируемая величина к новому установившемуся значению.

Всякий объект обладает свойством самовыравнивания, когда приток или расход рабочей среды при бездействии регулятора зависит от регулируемой величины. Если такая зависимость отсутствует, то отсутствует и самовыравнивание.

В самом деле допустим, что в общем случае приток и расход являются функциями регулируемой величины H , т. е.

$$Q_1 = \varphi_1(H) \text{ и } Q_2 = \varphi_2(H); \quad Q_1 - Q_2 = \Delta Q. \quad (II-13)$$

Продифференцируем по H

$$\frac{\partial Q_1}{\partial H} - \frac{\partial Q_2}{\partial H} = \pm \left| \frac{\partial \Delta Q}{\partial H} \right|.$$

Знак — указывает, что ΔQ убывает с увеличением H .

Введем базисные значения: для притока и расхода Q_0 и для регулируемой величины H_0 .

Положим $\frac{\Delta Q}{Q_0} = \Delta q$ и $\frac{H}{H_0} = r$.

Тогда

$$\frac{\partial Q_1}{\partial H} - \frac{\partial Q_2}{\partial H} = \frac{Q_0}{H_0} \cdot \frac{\partial \Delta q}{\partial r}$$

или

$$\frac{\partial (Q_1 - Q_2)}{\partial H} = \frac{Q_0}{H_0} \cdot \frac{\partial \Delta q}{\partial r}. \quad (II-14)$$

Рассмотрим случаи:

1. Δq не зависит от r , т. е. самовыравнивание отсутствует. В этом случае

$$\frac{\partial \Delta q}{\partial r} = 0 \text{ и } Q_1 - Q_2 = \text{const.}$$

Это значит, что разность между притоком Q_1 и расходом Q_2 не зависит от регулируемой величины и все время остается постоянной.

Если мы имеем дело с регулированием уровня жидкости в резервуаре, то при $Q_1 > Q_2$, т. е., когда приток всегда превышает расход, высота уровня H будет неограниченно расти, а при $Q_1 < Q_2$ будет уменьшаться до нуля.

II. Δq зависит от r , но $\frac{\partial \Delta q}{\partial r} < 0$. Допустим для упрощения, что $\frac{\partial \Delta q}{\partial r}$ равно некоторому постоянному отрицательному значению:

$$\frac{\partial \Delta q}{\partial r} = -m, \text{ где } m > 0.$$

Тогда

$$Q_1 - Q_2 = (Q_1 - Q_2)_0 - \frac{mQ_0}{H_0} (H - H_0),$$

где индекс 0 отвечает началу процесса самовыравнивания. Здесь мы видим, что разность между притоком и расходом будет уменьшаться по мере увеличения значения H . Когда Q_1 и Q_2 сравняются, наступит новое положение равновесия. Такое самовыравнивание называется положительным. Здесь новое положение равновесия после возмущения может быть достигнуто без помощи регулятора.

III. Δq зависит от r , но $\frac{\partial \Delta q}{\partial r} > 0$.

Аналогично предыдущему случаю найдем

$$Q_1 - Q_2 = (Q_1 - Q_2)_0 + \frac{mQ_0}{H_0} (H - H_0).$$

Здесь разность $Q_1 - Q_2$ будет увеличиваться с увеличением H . Нового положения равновесия, как и в первом случае, нельзя достигнуть без помощи регулятора.

Из изложенного следует, что производная $\frac{\partial \Delta q}{\partial r}$ характеризует процесс самовыравнивания. Величина $-\frac{\partial \Delta q}{\partial r}$ называется степенью самовыравнивания объекта. Обозначим ее θ

$$\theta = -\frac{\partial \Delta q}{\partial r}. \quad (II-15)$$

В частном случае, когда $\theta = \text{const}$, можем написать $\Delta q = A - \theta r$, где A — постоянная интегрирования.

Исключая A , получим

$$\Delta q = \Delta q_0 - \theta (r - r_0). \quad (II-16)$$

Индекс 0 относится к начальным значениям величин Δq и r . Рассмотрим два примера:

1. Работа объекта без самовыравнивания.
2. Работа объекта с самовыравниванием.

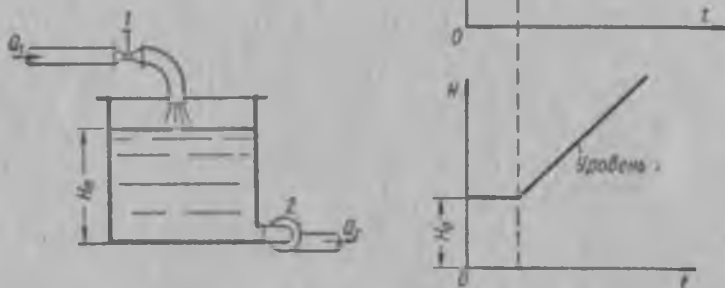
На фиг. 34 изображен случай работы объекта без самовыравнивания и регулятора.

Приток воды поступает в резервуар через задвижку 1. Вода расходуется из резервуара насосом 2, который работает с постоянным числом оборотов, поэтому расход не зависит от высоты уровня в резервуаре. Пока имеет место равенство $Q_1 = Q_2$ уровень воды не изменяется. Допустим, что он при этом равен H_0 . Положим теперь, что приток Q_1 увеличился. Это легко может быть достигнуто увеличением открытия задвижки 1.

Поскольку Q_2 осталось неизменным, а новое значение притока превышает Q_2 , то уровень воды в резервуаре будет непрерывно повышаться. Установившийся режим никогда не будет достигнут.

На фиг. 33 изображен другой случай, когда объект обладает самовыравниванием и работает без регулятора.

Здесь приток воды, поступающий через задвижку 1, сливается в резервуар. Расход воды из резервуара производится через задвижку 2. При постоянном открытии задвижек 1 и 2 приток Q_1 будет неизменным, тогда как расход Q_2 будет зависеть от высоты H уровня воды в резервуаре. Как известно из гид-



Фиг. 34. Объект регулирования без самовыравнивания и регулятора.

равлики, расход через отверстие при истечении в атмосферу определяется формулой

$$Q_2 = \mu f \sqrt{2gH}. \quad (11-17)$$

Здесь: f — действующая площадь прохода задвижки;

μ — коэффициент расхода, отнесенный к этой площади;

H — высота уровня над центром отверстия.

Допустим, что при высоте уровня $H = H_0$ имеет место установившийся режим, т. е. достигнут баланс притока и расхода жидкости

$$Q_1 = Q_2 = Q_0.$$

Увеличим в некоторый момент открытие задвижки 1, что приведет к увеличению притока Q_1 и нарушению баланса. Уровень в резервуаре начнет повышаться, однако при этом станет увеличиваться расход Q_2 . Поскольку Q_1 остается неизменным, разность $Q_1 - Q_2$ постепенно уменьшается и стремится к нулю. Уровень воды в резервуаре в свою очередь будет стремиться к новому установившемуся значению H_k .

В общем случае увеличение расхода $Q_2 - Q_0$ является функцией изменения высоты уровня $H - H_0$.

Примем, что зависимость $Q_2 - Q_0$ от разности уровней $H - H_0$ выражается формулой

$$Q_2 - Q_0 = C \sqrt{H - H_0},$$

где C — некоторая постоянная величина.

Отсюда следует (см. фиг. 33)

$$\Delta Q = Q_1 - Q_2 = (Q_1 - Q_0) - (Q_2 - Q_0) = \Delta Q_0 - C \sqrt{H - H_0}.$$

Здесь $\Delta Q_0 = Q_1 - Q_0$ есть приращение притока в начальный момент возмущения.

Перейдем к безразмерным величинам, положив

$$\Delta q = \frac{\Delta Q}{Q_0} \text{ и } r = \frac{H}{H_0};$$

$$\Delta q = \Delta q_0 - \frac{C \sqrt{H_0}}{Q_0} \sqrt{r - r_0}.$$

Определим теперь степень самовыравнивания

$$\dot{\theta} = - \frac{\partial \Delta q}{\partial r} = \frac{C \sqrt{H_0}}{2 Q_0 \sqrt{r - r_0}}.$$

В рассматриваемом случае величина θ зависит от регулируемой величины r .

Если в диапазоне регулирования r меняется незначительно, то можем принять, что

$$r \approx \frac{r_0 + r_k}{2} \text{ и } \theta \approx \frac{C \sqrt{H_0}}{\sqrt{2} Q_0 \sqrt{r_k - r_0}},$$

где r_k — новое установившееся значение величины r .

Уравнение процесса самовыравнивания без воздействия регулятора можем легко определить, если объединим уравнения

$$r' = \nu \Delta q \text{ и } \Delta q = \Delta q_0 - \theta (r - r_0).$$

Путем исключения Δq получим

$$r' = \nu \Delta q_0 - \nu \theta (r - r_0). \quad (II-18)$$

Это уравнение можно представить в виде:

$$(r - r_0)' + \nu \theta (r - r_0) = \nu \Delta q_0. \quad (II-19)$$

Решение этого уравнения

$$r = r_0 + \frac{\Delta q_0}{\theta} [1 - e^{-\nu \theta t}]. \quad (II-20)$$

В этой формуле:

r_0 — начальное значение регулируемой величины в момент времени $t = 0$;

r — значение регулируемой величины в момент времени t ;

Δq_0 — значение возмущающего воздействия в момент времени $t = 0$;

θ — степень самовыравнивания объекта, принимаемая за постоянную величину;

γ — чувствительность объекта к возмущению;

t — время, прошедшее от начала возмущения.

Полученное выше решение дает представление о влиянии степени самовыравнивания объекта на процесс самовыравнивания.

При $\theta = 0$, если раскрыть неопределенность $\frac{1 - e^{-\theta t}}{\theta}$, найдем

$$r = r_0 + \Delta q \gamma t. \quad (11-21)$$

Здесь r с течением времени неограниченно возрастает. При $\theta > 0$ (положительное самовыравнивание) регулируемый параметр при отсутствии регулятора с течением времени стремится к некоторому установившемуся значению.

При

$$t \rightarrow \infty \quad r = r_0 + \frac{\Delta q \gamma}{\theta}. \quad (11-22)$$

При

$$\theta \rightarrow \infty \quad r = r_0.$$

При $\theta < 0$ (отрицательное самовыравнивание) величина r с течением времени становится отрицательной и неограниченно возрастает по модулю.

При $\gamma = 0 \quad r = r_0$.

В этом случае, т. е. при наличии бесконечно большой емкости у объекта возмущение не оказывает никакого влияния. Регулируемый параметр остается неизменным.

Из сказанного можно заключить о влиянии самовыравнивания объекта на работу регулятора. При положительном самовыравнивании работа автоматического регулятора облегчается совпадающим действием самовыравнивания, причем если степень самовыравнивания велика можно обойтись даже без применения регулятора.

При отсутствии самовыравнивания и особенно при отрицательном самовыравнивании обеспечить устойчивую работу регулирующей системы без применения регулятора невозможно.

В качестве примеров объекта с самовыравниванием укажем на следующие:

1. Силовой двигатель, приводящий в движение вентилятор или турбогазоводувку. Здесь нагрузка на двигатель со стороны вентилятора зависит от угловой скорости вращения. При регулировании

скорости мы будем иметь объект с положительным самовыравниванием.

2. Плотина, у которой регулируется высота водослива. Расход воды через плотину зависит от высоты водослива, приток является независимой величиной. Здесь мы также имеем объект с положительным самовыравниванием.

3. Газопровод с дроссельной заслонкой. Регулируется давление за дроссельным органом. Расход газа потребителем зависит от давления газа. Чем больше давление, тем меньше расход. Приток газа определяется разностью давлений в газгольдере и за дроссельным органом на стороне потребления. При постоянстве давления в газгольдере приток есть функция регулируемой величины. Чем больше давление за дроссельным органом, тем меньше приток. Самовыравнивание объекта в данном случае составляется как разность самовыравнивания притока и расхода $\theta = \theta_n - \theta_p$. Как видим, в этом примере самовыравнивание объекта может быть положительным или отрицательным в зависимости от того, какое из неравенств $\theta_n > \theta_p$ или $\theta_n < \theta_p$ будет иметь место.

Для иллюстрации всего вышесказанного обратимся к примеру.

Пример. Определить чувствительность объекта χ и степень самовыравнивания объекта θ , который представляет резервуар с водой по фиг. 33. Площадь резервуара 20 м^2 . Наполнение резервуара водой через задвижку 1 происходит в соответствии с кривой $r(t)$ фиг. 35. Для нашего примера примем масштабы по осям координат:

Масштаб по оси t	1 мм — 4 мин.
Масштаб по оси r	1 мм — 0,05 м
Установившийся расход до возмущения . . .	$Q_{10} = Q_{20} = 30 \text{ м}^3/\text{час}$
Расход после воздействия возмущения . . .	$Q_{1k} = 40 \text{ м}^3/\text{час}$

Решение. Из диаграммы на фиг. 35 имеем

$$r_n = H_0 = 2,45 \text{ м.}$$

Примем за базисные значения

$$Q_0 = 0,5 \text{ м}^3/\text{мин}$$

$$H_0 = 3 \text{ м.}$$

По формуле (II-12)

$$\chi = \frac{1}{F} \cdot \frac{Q_0}{R_0} = \frac{1}{20} \cdot \frac{0,5}{3} = 0,0083 \text{ мин}^{-1}.$$

Высота уровня H_{1k} , отвечающая расходу Q_{1k} при установившемся режиме, определится из уравнения

$$\frac{Q_{10}^2}{Q_{1k}^2} = \frac{H_0}{H_k}; \quad H_k = H_0 \frac{Q_{1k}^2}{Q_{10}^2} = 2,45 \cdot \frac{16}{9} = 4,36 \text{ м.}$$

Возмущающее воздействие Δq_0 в безразмерных единицах

$$\Delta q_0 = \frac{Q_{1k} - Q_{10}}{Q_0} = \frac{10}{30} = 0,333.$$

Изменение регулируемой величины

$$r_k - r_0 = \frac{H_k - H_0}{H_0} = \frac{4,36 - 2,45}{3} = 0,64.$$

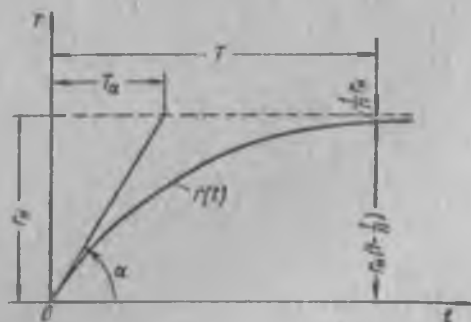
Значение θ вычисляем по формуле (11-22)

$$\theta = \frac{\Delta q_0}{r_k - r_0} = \frac{0,333}{0,64} = 0,52.$$

3. ВРЕМЯ РАЗГОНА ОБЪЕКТА. ПОСТОЯННАЯ ВРЕМЕНИ ОБЪЕКТА

Из формулы (11-20) следует, что для объекта с емкостью и самовыравниванием полное теоретическое время разгона объекта, считая с момента появления возмущающего воздействия до нового установившегося положения, бесконечно велико. Для сравнения различных объектов с точки зрения их времени разгона такой показатель не имеет смысла.

Поэтому принято называть полным временем разгона объекта продолжительность процесса самовыравнивания при начальном возмущающем воздействии, равном единице, в течение ко-



Фиг. 35. График разгона объекта, обладающего самовыравниванием.

торого начиная от нуля, регулируемая величина достигает $(1 - \frac{1}{n})$ части своего номинального значения.

Для иллюстрации сказанного обратимся к фиг. 35, на которой изображен график разгона объекта, обладающего самовыравниванием.

Здесь кривая $r(t)$ представляет изменение относительного значения регулируемой величины в процессе самовыравнивания при возмущающем воздействии, равном 1. Время T определяет продолжительность процесса до того момента, когда регулируемая величина будет отличаться от своего установившегося значения на $\frac{1}{n}$ часть последнего.

Обычно принимают $n = 100$. Тогда время разгона представит время, необходимое для достижения регулируемым параметром 99% своего номинального значения.

Для каждого объекта время разгона имеет свое физическое значение. Так, например, временем разгона объекта будет:

1. Время, необходимое для достижения установившегося режима с заданной температурой электропечи после ее зажигания.

2. Время, необходимое для разгона турбогенератора из неподвижного состояния до номинального числа оборотов при полностью открытом регулирующем клапане.

3. Время, необходимое для подъема до номинального значения давления пара в паровом котле, находящемся в начальный момент в холодном состоянии, при подаче в топку количества топлива, отвечающего номинальной нагрузке котла.

4. Время разгона электродвигателя до достижения им номинальных оборотов и равновесного состояния после его пуска.

Наряду со временем разгона объекта T в динамике регулирования встречается еще понятие «постоянной времени объекта». Под постоянной времени понимается время разгона объекта при отсутствии самовывравнивания. Для определения этого времени T_a следует провести касательную к кривой разгона $r(t)$ в начальной точке и определить точку пересечения этой касательной с прямой номинального значения регулируемой величины (см. фиг. 35).

Для объектов, не имеющих самовывравнивания, значения времени разгона T и постоянной времени T_a совпадают. Если известно значение γ — чувствительности объекта к возмущению, то величина T_a легко определяется по формуле

$$T_a = \frac{1}{\gamma} \text{ сек.}$$

В общем случае T отличается от T_a постоянным числовым множителем. В самом деле, из уравнения

$$r = r_0 + \frac{\Delta q_0}{\theta} (1 - e^{-\theta t}),$$

при $r_0 = 0$ найдем

$$r = r_n (1 - e^{-\theta t}). \quad (\text{II-23})$$

При $t = T$

$$r = r_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = r_n (1 - e^{-\theta T}); \quad \frac{1}{n} = e^{-\theta T}. \quad (\text{II-24})$$

Отсюда

$$T = \frac{1}{\theta} \ln n. \quad (\text{II-25})$$

С другой стороны

$$(r')_{t=0} = r_n \theta = \text{tg } \alpha.$$

Из фиг. 35

$$r_n = T_a \operatorname{tg} \alpha = T_a r_n \psi \theta,$$

отсюда

$$T_a = \frac{1}{\psi \theta}. \quad (II-26)$$

Сравнивая T и T_a , получим

$$T = T_a \ln n. \quad (II-27)$$

При

$$n = 100 \quad T = 4,6 T_a.$$

Выше было установлено, что когда объект регулирования обладает постоянными коэффициентами самовыравнивания и чувствительности к возмущениям, то неустановившийся режим объекта при работе без регулятора может быть выражен дифференциальным уравнением первого порядка (II-19). Однако у большинства объектов регулирования, особенно электрических объектов, указанные выше коэффициенты самовыравнивания и чувствительности к возмущениям нельзя считать постоянными, в связи с чем уравнение неустановившегося режима объекта регулирования значительно усложняется.

Поэтому в таких случаях предпочитают выражать уравнения переходного режима с помощью других параметров, которые лучше приближаются к постоянным величинам в зоне регулирования. К таким параметрам относятся постоянные времени и коэффициенты усиления.

Рассмотрим для примера в качестве объекта регулирования электродвигатель постоянного тока. Допустим, что регулируемой величиной является скорость вращения двигателя, что обычно имеет место на практике. Предположим, что двигатель с независимым возбуждением, т. е. магнитный поток возбуждения $\Phi = \text{const}$. При работе двигателя без регулятора справедлива следующая система уравнений для произвольного момента времени*:

$$\left. \begin{aligned} 1) \quad M_d - M_c &= \frac{GD^2}{375} n'; \\ 2) \quad V &= e + iR + Li'; \\ 3) \quad e &= C_a \Phi n \\ 4) \quad M_d &= C_m \Phi i. \end{aligned} \right\} \quad (II-28)$$

* См. М. В. Мееров, Введение в динамику автоматического регулирования электрических машин, АН СССР, 1966.

Здесь: M_d — движущий момент двигателя;
 M_c — момент сопротивления;
 GD^2 — маховой момент двигателя;
 n — число оборотов, в минуту;
 V — напряжение на зажимах двигателя;
 e — противодействующая э. д. с. двигателя;
 R — омическое сопротивление якоря;
 L — индуктивность цепи якоря;
 i — ток в цепи якоря;
 C_M и C_e — коэффициенты пропорциональности.
 При установившемся режиме

$$n = \text{const}; M_c = M_d \text{ и } i = \text{const}.$$

Рассмотрим какой-либо установившийся режим

$$n = n_0; M_c = M_d = C_M \Phi i_0; i = i_0$$

и допустим, что этот режим нарушен вследствие мгновенного увеличения нагрузки на некоторую величину ΔM_c . При этом изменят свои значения скорость вращения n_0 и сила тока i_0 . Положим, что $n = n_0 - \Delta n$ и $i = i_0 + \Delta i$. Знаки отвечают условию уменьшения скорости и увеличения тока в цепи якоря при увеличении нагрузки.

Система уравнений (11-28) после несложных преобразований может быть приведена к виду:

$$\left. \begin{aligned} C_M \Phi \Delta i + \frac{GD^2}{375} \Delta n' &= \Delta M_c \\ C_e \Phi \Delta n - R \Delta i - L \Delta i' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11-29)$$

Исключая из этих двух уравнений Δi и $\Delta i'$, придем к уравнению

$$\frac{GD^2 L}{375 C_M C_e \Phi^2} \Delta n'' + \frac{GD^2 R}{375 C_M C_e \Phi^2} \Delta n' + \Delta n = \frac{\Delta M_c R}{C_M C_e \Phi^2}. \quad (11-30)$$

Нетрудно установить, что коэффициенты при $\Delta n''$, $\Delta n'$ и ΔM_c представляют некоторые постоянные величины, причем размерность их такова: при $\Delta n''$ — сек².; при $\Delta n'$ — сек. и при ΔM_c — отвлеченное число.

Это позволяет представить уравнение (II-30) в следующем виде:

$$T_{\mu} T_{\lambda} \Delta n'' + T_{\mu} \Delta n' + \Delta n = K \Delta M_c, \quad (\text{II-31})$$

где $T_{\mu} = \frac{GD^2 \cdot R}{375 C_{\mu} C_{\phi}^2}$ — электромеханическая постоянная времени двигателя;

$T_{\lambda} = \frac{L}{R}$ — постоянная времени якоря;

$K = \frac{R}{C_{\mu} C_{\phi}^2}$ — коэффициент усиления двигателя.

Полученное дифференциальное уравнение (II-32) устанавливает зависимость во времени между изменением скорости вращения двигателя и мгновенным скачком нагрузки при работе без регулятора. Постоянными параметрами объекта здесь являются постоянные времени T_{μ} и T_{λ} и коэффициент усиления K .

ГЛАВА III

ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ДАТЧИКИ АВТОМАТИЧЕСКИХ РЕГУЛИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Любая система автоматического регулирования кроме объекта регулирования состоит из ряда элементов, которые классифицируются по роду выполняемой ими функции.

Несмотря на весьма большое разнообразие регулирующих устройств, число таких элементов невелико.

Можно выделить следующие основные элементы авторегулирующих устройств по роду их назначения:

- 1) чувствительные элементы и датчики;
- 2) усилители и преобразователи;
- 3) исполнительные органы;
- 4) регулирующие органы;
- 5) элементы обратной связи;
- 6) дифференцирующие элементы.

Помимо этого, в ряде случаев, когда датчики удалены от исполнительных органов, требуется еще применение дистанционных передатчиков.

В зависимости от вида используемого источника энергии элементы автоматики могут быть гидравлическими, пневматическими или электрическими.

Назначение чувствительного элемента — реагировать на отклонение регулируемой величины от установленного значения и преобразовывать это отклонение в вид удобный для дальнейшего использования в системе автоматического регулирования. Как правило, чувствительный элемент должен не только реагировать на знак отклонения, но и измерять величину этого отклонения, т. е. выполнять функцию измерения. Поэтому часто чувствительные элементы называют измерительными элементами.

Физическая природа регулируемых величин весьма разнообразна, как разнообразны и чувствительные элементы, измеряющие их отклонения. Но в большинстве случаев на выходе чувствительного элемента мы имеем либо механическую величину (перемещение, силу), либо электрическую величину (напряжение, ток, электрическое сопротивление, сдвиг фаз и пр.).

Чувствительные элементы, применяемые в автоматических системах регулирования, должны удовлетворять следующим требо-

ваниям: 1) быть надежными при работе элементов во всех условиях, которые могут иметь место при регулируемом технологическом режиме; 2) иметь требуемую чувствительность; 3) иметь допустимые габариты и вес; 4) иметь допустимую инерцию; 5) быть мало-чувствительными по отношению к внешним влияниям.

Во многих случаях для облегчения конструктивного выполнения системы автоматического регулирования от чувствительного элемента требуется иметь на выходе электрическую величину. Эта задача решается присоединением к чувствительному элементу приспособления, преобразующего неэлектрическую выходную величину в электрическую.

Такие чувствительные элементы с преобразованием измеряемой величины в электрическую называют датчиками.

Вообще говоря, всякий чувствительный элемент, в котором одновременно измеряемая величина преобразовывается в другую физическую величину, более удобную для ее передачи в цепь регулирующего устройства, или более удобную для усиления, согласно принятой на практике терминологии, называют датчиком.

Следует, однако, отметить, что очень часто не делают различия между понятиями чувствительный элемент и датчик.

Наиболее широкое распространение получили электрические датчики, т. е. чувствительные элементы с преобразованием измеряемой неэлектрической величины в электрическую.

Чувствительные элементы имеют весьма разнообразные конструктивные устройства, зависящие в основном от физической природы измеряемой величины и принципа, принятого для измерения ее отклонения.

Чувствительные элементы обычно классифицируются по измеряемой ими величине. Различают чувствительные элементы уровня, давления, температуры, скорости, расхода, напряжения, тока, освещенности и т. п.

Датчики получают свои названия с одной стороны по измеряемой величине чувствительного элемента и с другой — по параметру, в который преобразовываются сигналы чувствительного элемента. Например, индуктивные датчики давления, реостатные датчики расхода и т. п. Нередко одно из наименований классификации опускается: датчики скорости, датчики числа импульсов, датчики расхода и т. п.

Несколько особо в этой классификации стоят контактные датчики и сельсины.

Контактный датчик преобразует линейное перемещение чувствительного элемента в электрический толчок или импульс.

Сельсины преобразуют угловое рассогласование двух осей в электрическое напряжение.

Основным показателем чувствительного элемента является его чувствительность.

Чувствительностью называется отношение изменения Δy выходной величины к изменению Δx входной величины элемента

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

или в пределе

$$k = \frac{dy}{dx} \quad (III-1)$$

Таким образом чувствительность является первой производной от функции, выражающей зависимость выходной величины от входной.

В указанном выше виде значение чувствительности будет иметь размерность, зависящую от физической природы входной и выходной величин элемента.

Нередко чувствительность определяют как отношение

$$k = \frac{\Delta y}{y_0} : \frac{\Delta x}{x_0} = \frac{x_0}{y_0} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (III-2)$$

где x_0 и y_0 — выбранные базисные значения входа и выхода элемента.

В этом случае чувствительность всегда будет безразмерным числом. Нетрудно видеть, что чувствительность элемента совпадает с его коэффициентом усиления.

В дальнейшем при исследовании динамики систем автоматического регулирования и разложения их на звенья отношение изменения выходной величины звена к изменению входной в безразмерных единицах при установившемся режиме называется коэффициентом усиления звена.

Таким образом, чувствительность измерительного элемента совпадает с его коэффициентом усиления.

Понятие чувствительности элемента не следует смешивать с понятием нечувствительности, под которым обычно понимается наименьшее значение входной величины, способное вызвать изменение на выходе элемента. Величина нечувствительности зависит от сил трения и люфтов в кинематических парах элемента, зазоров в электрических контактах и других причин.

При выборе чувствительного элемента, кроме заданной чувствительности, в ряде случаев требуется, чтобы элемент обладал допустимой инерцией. С понятием инерции чувствительного элемента обычно связывается представление о некотором запаздывании измерения значения регулируемого параметра в данный момент времени.

Такое запаздывание может вызываться существенной массой частей элемента, если выходной величиной являются перемещение или скорость. При измерении температуры запаздывание вызывается тепловой инерцией элемента, которая главным образом зависит

от массы элемента и теплопроводности перегородок между элементом и средой, температура которой измеряется.

При наличии в элементе электрической емкости или самоиндукции выходной параметр будет сдвинут по фазе относительно входного, если такими параметрами будут ток и напряжение.

Таким образом, требование допустимой инерционности чувствительного элемента по существу сводится к установлению допустимого запаздывания измерения регулируемого параметра, что в каждом отдельном случае определяется характером технологического процесса, подлежащего регулированию.

При исследовании динамических свойств системы автоматического регулирования инерционность чувствительного элемента играет такую же роль, как инерционные свойства всякого другого звена системы, о чем излагается во второй части книги.

Ниже рассматриваются чувствительные элементы, наиболее часто встречающиеся в системах автоматического регулирования.

1. ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ УРОВНЯ

а) Поплавки

Поплавковые регуляторы являются простейшими регуляторами уровня жидкости. Поплавок выполняется в виде пустотелого шара, или тела другой формы.

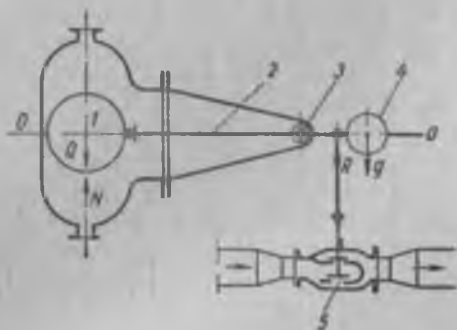
На фиг. 36 показана схема поплавкового регулятора уровня.

Чувствительным элементом регулятора является поплавок 1. При всплывании поплавка действует на рычаг 2, который переставляет регулирующий клапан 5 и увеличивает или уменьшает расход жидкости. Поплавок должен создавать при изменении уровня жидкости подъемную силу, достаточную для перемещения регулирующего органа.

Допустим, что противовес 4 так подобран и установлен, что при закрытом клапане 5 уровень воды держится на линии OO и поплавок погружен наполовину. Из условия равновесия рычага около точки опоры 3, если пренебречь трением в кинематических парах, следует:

$$(Q - N) c_1 = Rc_2 + Gc_3, \quad (III-3)$$

$$N = \frac{2}{3} \pi r^2 \gamma. \quad (III-4)$$



Фиг. 36. Схема поплавкового регулятора уровня.

Здесь: Q — вес поплавка;
 r — радиус поплавка;
 γ — удельный вес жидкости;
 N — сила реакции жидкости;
 R — вес клапана, включая силу сопротивления подъему;
 G — вес противовеса;
 c_1, c_2, c_3 — плечи сил Q, R и G .
 Имеем

$$N = Q - R \frac{c_3}{c_1} - G \frac{c_3}{c_1}. \quad (\text{III-5})$$

Это уравнение остается справедливым для всякого другого положения клапана при установившемся режиме.

Допустим, что R остается постоянным для всех положений клапана.

Тогда сила всплывания N будет также постоянной для любого установившегося режима.

Отсюда следует, что уровень жидкости должен проходить всегда через центр поплавка. По мере подъема клапана поплавок будет опускаться.

При подъеме клапана из закрытого положения на высоту H центр поплавка и уровень жидкости опустятся на величину $h = Hi$, где $i = \frac{c_2}{c_1}$ есть отношение плеч c_2 и c_1 рычага 2.

Чувствительность элемента определяется отношением

$$\frac{H}{h} = \frac{1}{i} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (\text{III-6})$$

Меняя отношение этих плеч, мы можем выбрать желаемую степень чувствительности. Усилие R от поплавка на клапан будет

$$R = \left[Q - \frac{2}{3} \pi r^2 \gamma - G \frac{c_3}{c_1} \right] \frac{c_1}{c_2}. \quad (\text{III-7})$$

Задавая R, Q и G , а также отношения плеч рычага, определим радиус r поплавка.

При более точных расчетах следует учитывать также влияние трения в кинематических парах.

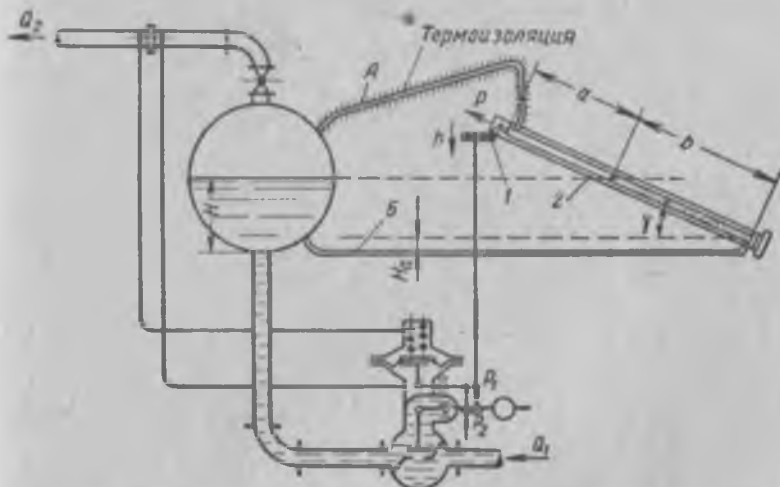
При переходных режимах в приведенное выше уравнение равновесия поплавка добавляются силы инерции масс поплавка, противовеса и клапана, а также сила сопротивления жидкости при движении поплавка.

Недостатком поплавков является их способность с течением времени изменять вес вследствие различных отложений, покрывающих поверхность поплавка.

б) Термостатные трубки

Пример термостатной трубки в качестве чувствительного элемента уровня показан на фиг. 37, где изображена схема двухимпульсного регулятора питания парового котла.

Термостатная трубка 2 представляет собой цельнотянутую стальную трубку длиной около 2 м и диаметром 19 мм. Трубка устано-



Фиг. 37. Схема двухимпульсного регулятора питания парового котла.

влена около барабана котла в наклонном положении. Верхний конец термостатной трубки соединен с паровым пространством котла трубкой *A*, нижний с водяным пространством котла трубкой *Б*.

В целях уменьшения конденсации пара в подводящей трубке *A* и улучшения охлаждения воды в трубке *B* первая трубка хорошо изолируется, тогда как вторая прокладывается без всякой изоляции. Нижний конец трубки фиксирован, т. е. неподвижно укреплен, таким образом все расширение трубки передается верхнему концу, который воздействует на рычаг *I*. Нижняя часть термостатной трубки заполнена водой сравнительно невысокой температуры, а верхняя часть насыщенным паром. Вследствие хорошей отдачи тепла через стенки трубки температура водяной части трубки невелика и колеблется в небольших пределах. Температура паровой части трубки определяется температурой насыщенного пара рабочего давления.

Обозначим:

H — уровень воды в котле;

H_a — разность отметок по высоте фиксированной точки термостатной трубки и нижней точки барабана котла;

l_0 — длина термостатной трубки при 0°C ;

b_0 — длина водяной части трубки при 0°C ;
 α — коэффициент термического расширения трубки;
 t_n и t_0 — температура паровой и водяной части трубки.
 Длина трубки в рабочем состоянии

$$l = (l_0 - b_0) (1 + \alpha t_n) + b_0 (1 + \alpha t_0). \quad (\text{III-8})$$

Высота воды в барабане котла

$$H = H_a + b_0 (1 + \alpha t_0) \sin \gamma, \quad (\text{III-9})$$

где γ — угол наклона трубки к горизонту.

Исключая b_0 , получим

$$\frac{H - H_a}{(1 + \alpha t_0) \sin \gamma} = \frac{l_0 (1 + \alpha t_n) - l}{\alpha (t_n - t_0)}, \quad (\text{III-10})$$

Отсюда изменение уровня

$$\Delta H = -\Delta l \frac{(1 + \alpha t_n) \sin \gamma}{\alpha (t_n - t_0)}. \quad (\text{III-11})$$

Изменение уровня воды в котле ΔH и длины трубки Δl противоположны по знаку.

Удлинение трубки, измеренное на другом конце рычага l , обозначим Δh . Если отношение плеч этого рычага равно k , то $\Delta h = k \Delta l$

$$\Delta H = -\Delta h \frac{(1 + \alpha t_n) \sin \gamma}{\alpha \cdot k (t_n - t_0)}. \quad (\text{III-12})$$

Абсолютная чувствительность термостатной трубки к изменению уровня воды в котле

$$\left| \frac{\Delta h}{\Delta H} \right| = \frac{\alpha \cdot k (t_n - t_0)}{(1 + \alpha t_n) \sin \gamma}. \quad (\text{III-13})$$

Таким образом, эта чувствительность тем больше, чем больше отношение плеч рычага l , разность температур t_n и t_0 , коэффициент температурного расширения материала трубки α и чем меньше угол γ наклона трубки.

По данным опыта удлинение стальной термостатной трубки составляет приблизительно 0,014 мм на 1 мм изменения высоты уровня в барабане котла. Отношение плеч рычага l может достигать до 20. Средняя чувствительность стальной термостатной трубки для паровых котлов с давлением пара 30—35 атм составляет около 0,20 мм/мм.

Преимущество термостатной трубки перед поплавками состоит в отсутствии салников в чувствительном элементе, а также относительно большом перестановочном усилии, которое развивает чувствительный элемент.

Термостатные трубки обладают тепловой инерцией, вследствие чего подаваемый ими регулирующий импульс запаздывает относительно изменения уровня. Запаздывание тем значительнее, чем больше скорость изменения высоты уровня.

2. ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДАВЛЕНИЯ

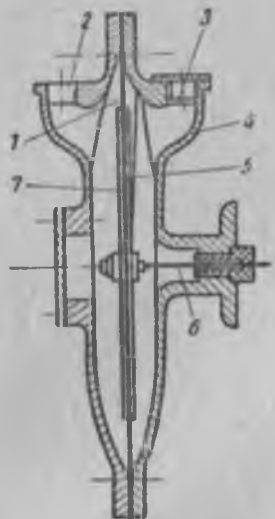
а) Плоские мембраны

Плоские мембраны, особенно в комбинации с пружинами, нашли широкое применение в качестве чувствительных элементов в регуляторах давления. Плоские мембраны без пружин применяются для малых давлений, обычно не превышающих 200 мм водяного столба.

В качестве примера такой мембранный чувствительный элемент давления показан на фиг. 38. Мембрана представляет кожаный диск 1, зажатый по окружности между двумя половинками корпуса 4, в котором размещается мембрана. Кожа мембраны подвергается, как правило, специальной обработке для придания ей требуемых качеств. В центральной части мембрана зажимается между двумя алюминиевыми дисками 7 и 5, посредством которых, с помощью втулки и гаек, крепится хвостовик штока 6. Штуцеры 2 и 3 служат для подачи измеряемого давления. Если измеряется давление в одной точке, то используется один штуцер для подачи этого давления в камеру мембраны, другой штуцер при этом соединяется с атмосферой. При измерении разности давлений используются оба штуцера, при этом давления по обе стороны мембраны будут различны. На шток будет передаваться сила, пропорциональная разности этих давлений.

При определении усилия, передаваемого плоской мембраной на ее шток, обычно пренебрегают упругостью самой мембраны, считая что она остается плоской. На фиг. 39 показаны три варианта выполнения мембраны: а) мембрана не имеет штока (свободная мембрана); б) мембрана имеет шток, подпирающий ее в центральной точке; в) мембрана с диском, подпертым в центральной точке.

Для систем автоматического регулирования имеют значение случаи «б» и «в». Для этих случаев установлено, что зависимость между усилием Q на штоке мембраны, избыточным давлением p



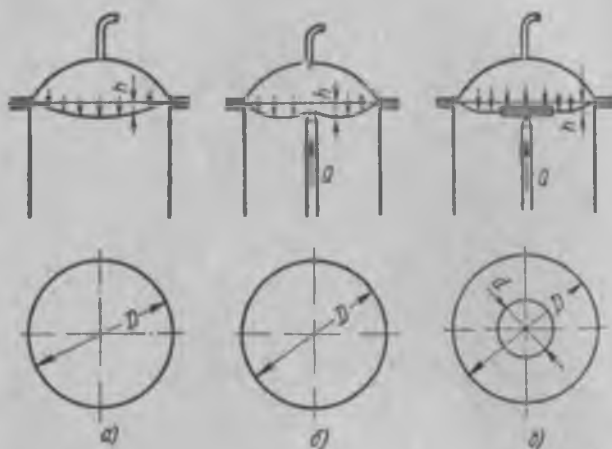
Фиг. 38. Мембранный чувствительный элемент давления.

в полости мембраны и деформацией h в центре мембраны выражается формулой

$$Q = Ap - Bh, \quad (\text{III-14})$$

где для мембраны со штоком

$$A = \frac{\pi D^2}{12}; \quad B = 2\pi\tau \quad (\text{III-15})$$



Фиг. 39. Варианты выполнения мембраны.

и для мембраны с диском и штоком

$$A = \frac{\pi}{12} (D^2 + Dd + d^2); \quad B = 2\pi\tau \frac{D}{D-d}. \quad (\text{III-16})$$

Здесь: D — диаметр мембраны;

d — диаметр диска;

τ — горизонтальное натяжение мембраны, приходящееся на единицу длины окружности фланца.

Чувствительность мембраны

$$\frac{dQ}{dp} = A - B \frac{dh}{dp}. \quad (\text{III-17})$$

Плоские мембраны из эластичных материалов применяются обычно до давления 1000 мм водяного столба. При более высоких давлениях следует переходить к металлическим гофрированным мембранам. В качестве материала для таких мембран применяются латунь, бронза, томпак, монельметалл, нержавеющая сталь и другие сплавы.

На фиг. 40 приведен случай регулирования давления газа, когда усилие, развиваемое мембраной 1, используется непосредственно с помощью рычага для перестановки регулирующего органа 2.

Плоские мембраны очень часто применяются в комбинации с пружинами. В этом случае мембрана играет роль диафрагмы, отделяющей полость давления регулируемой среды от остальной части регулятора. При расчете пружин здесь обычно принимают, что усилие Q , передаваемое от мембраны на пружину, равно Ar .

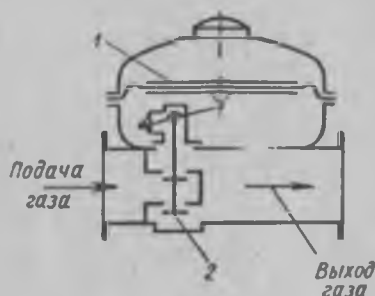
$$Q = Ar, \quad (\text{III-18})$$

где коэффициент A вычисляется по приведенным выше формулам.

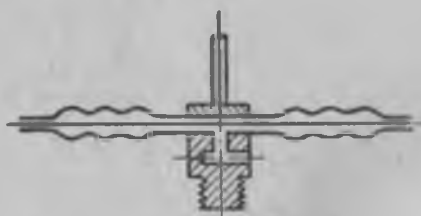
б) Гармониковые мембраны и сильфоны

При давлениях выше 1,5 *ата* работоспособность плоской гофрированной металлической мембраны становится неудовлетворительной, так как с увеличением давления увеличивается толщина мембраны и, как следствие этого, уменьшается ее чувствительность.

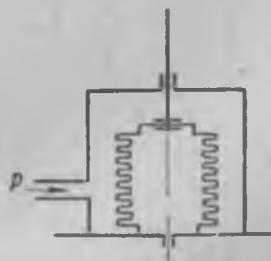
В этом случае целесообразно применить мембранную коробку, как показано на фиг. 41. Последняя устроена из двух плоских гофри-



Фиг. 40. Мембранный регулятор давления газа прямого действия.



Фиг. 41. Мембранная коробка.



Фиг. 42. Сильфонная мембрана.

рованных мембран и имеет деформацию, почти в два раза превышающую деформацию одной плоской мембраны той же прочности и при прочих равных условиях.

Дальнейшее увеличение работоспособности достигается применением составных металлических мембран, собранных из отдельных мембранных коробок. Такие мембраны носят название гармониковых мембран. Область их применения до 40 *ата*. Вместо составных гармониковых мембран применяют, особенно при больших давлениях, бесшовные волнистые трубки, как показано на фиг. 42,

называемые обычно сиффонами. Сиффон представляет собой волнистую трубку небольшой длины с одним заделанным концом. Благодаря наличию волн трубка получается прочнее как при внутренних, так и внешних давлениях и может быть выполнена малой толщины. С другой стороны наличие волн и малая толщина обеспечивают большую упругость.

Сиффоны и гармониковые мембраны рассчитываются по приближенным формулам, полученным из экспериментальных данных. Приведем для примера ниже одну из таких формул, применяемую для приближенного расчета сиффонов диаметром $D < 150$ мм.

$$h \approx \frac{1}{25 \cdot 10^3} \frac{Q D^2 \pi \left(1 - \frac{D_0}{D}\right)^2}{\delta^{2.5} (1 + 0.013 s^2)},$$

где h — осевая деформация сиффона в мм;

Q — нагрузка на сиффон в кг;

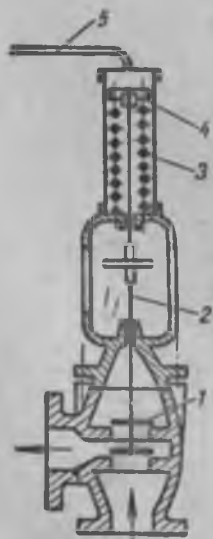
D — наружный диаметр сиффона по выступам волн в мм;

D_0 — внутренний диаметр сиффона по впадинам волн в мм;

δ — толщина стенки в мм;

s — шаг волны в мм;

n — число волн.



Фиг. 43. Регулятор давления с цилиндрической пружиной.

Материалом для изготовления сиффонов обычно является томпак. Область применения сиффонов обширна, они могут применяться вместо гармониковых мембран, а также для высоких давлений до 120 атм.

в) Цилиндрические пружины

Пример применения цилиндрической пружины в качестве чувствительного элемента давления приведен на фиг. 43.

Давление регулируемой среды по трубке 5 поступает в полость цилиндра над поршнем 4. Сила, действующая на поршень, сжимает пружину 3 и производит перестановку регулирующего клапана 1. Пружина стремится всегда поднять клапан. Пренебрегая массой поршня 4, штока 2 и клапана 1, можем условия равновесия представить уравнением

$$\frac{\pi D^2}{4} p + G_0 = F_0 + f(h_{\max} - h). \quad (\text{III-19})$$

Здесь: D — диаметр поршня;

p — давление (избыточное) регулируемой среды над поршнем;

G_0 — суммарный вес поршня, штока и клапана;

F_0 — сила упругости пружины в верхнем рабочем положении поршня при полностью открытом клапане;

f — коэффициент жесткости пружины;

h — подъем клапана из закрытого положения;

$h_{\max}$ — максимальный рабочий подъем клапана.

Коэффициент жесткости пружины f обычно подсчитывается по формуле

$$f = \frac{Gd^4}{64nR^3} \text{ кг/см}, \quad (\text{III-20})$$

где G — модуль сдвига в кг/см^2 для стали 800 000 кг/см^2 ;

d — диаметр проволоки в см ;

R — средний радиус витка в см ;

n — число витков.

При малых отклонениях от положения равновесия будет справедливо уравнение

$$\frac{\pi D^2}{4} \Delta p = -f \Delta h. \quad (\text{III-21})$$

Знак минус указывает, что с увеличением давления p подъем клапана уменьшается.

Чувствительность элемента

$$\left| \frac{\Delta h}{\Delta p} \right| = \frac{\pi D^2}{4f} \text{ см}^2/\text{кг} \quad (\text{III-22})$$

пропорциональна квадрату диаметра поршня и обратно пропорциональна коэффициенту жесткости пружины.

г) Манометрические пружины

Манометрическая пружина представляет собой упругую трубу обычно овального сечения, изогнутую по дуге окружности. Трубка запаивается с одного конца, другой конец фиксируется. Под действием давления сечение трубки стремится стать круглым, вместо овального. При этом трубка несколько распрямляется и ее запаянный конец перемещается. Перемещение последнего передается измерительной стрелке или электрическому датчику, как показано на фиг. 44.

Угловая деформация (угол раскручивания) манометрической пружины может быть вычислена по формуле

$$\Delta \varphi = \varphi_0 \frac{\pi ab}{EI} \left[1 - \left(\frac{b}{a} \right)^2 \right] R_0^2 \Delta p = B \Delta p. \quad (\text{III-23})$$

Здесь: φ_0 — полный угол скручивания в радианах (см. рис. 44);

a и b — размеры сечения манометрической пружины в см ;

E — модуль упругости материала пружины в кг/см^2 ;

I — момент инерции поперечного сечения пружины в см^4 ;

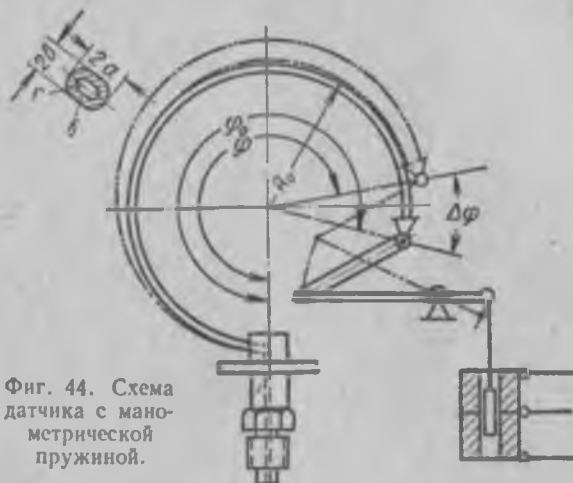
R_0 — средний радиус пружины до нагрузки в см ;

Δp — давление, отвечающее угловой деформации $\Delta \varphi$ в кг/см^2 .

Чувствительность элемента .

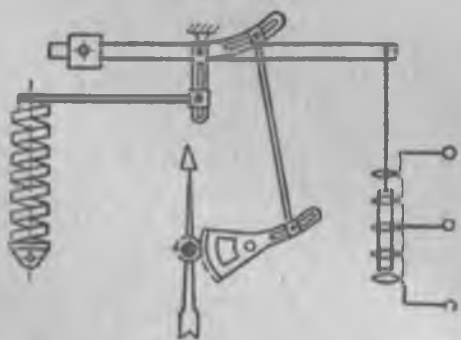
$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta p} = B \text{ см}^2/\text{кг}. \quad (\text{III-24})$$

Недостатком трубчатых пружин является развиваемый ими небольшой вращающий момент и малое перемещение конца пружины.



Фиг. 44. Схема датчика с манометрической пружиной.

Поэтому часто применяют чувствительные элементы давления с геликоидальной пружиной. Эту пружину можно рассматривать как целый ряд трубчатых пружин, соединенных последовательно между



Фиг. 45. Схема датчика с геликоидальной пружиной.

собой. Геликоидальные пружины удобны для приведения в действие электрических датчиков. Преимуществом этих пружин по сравнению с трубчатыми является большой вращающий момент и большая угловая деформация. Схема соединения геликоидальной пружины с электрическим датчиком и индикаторной стрелкой дана на фиг. 45.

Число витков у геликоидальных пружин составляет от 2,5 до 7. Полный угол раскручивания обычно равен 60° .

Угловая деформация $\Delta \varphi$ определяется по экспериментальным данным. С небольшой погрешностью можно определять $\Delta \varphi$ по формуле:

$$\Delta \varphi = \frac{\Delta p \varphi_0 R_0^2 (1 - a^2)}{2 E \pi r C} .$$

Здесь дополнительно к принятым выше обозначениям:

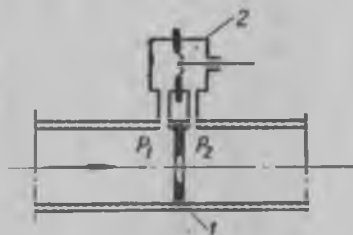
- r — внутренний радиус закругления поперечного сечения пружины в см;
- δ — толщина пружины в см;
- σ — коэффициент материала пружины (безразмерная величина);
- C — опытный коэффициент (безразмерная величина).

3. ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ РАСХОДА

Рассмотрим пример чувствительного элемента, применяемого при регулировании расхода газов и жидкостей и состоящего из диафрагмы, вставляемой в трубопровод на пути потока регулируемой среды и измерительного элемента, определяющего перепад давления. Схема такого устройства показана на фиг. 46.

Диафрагма 1 создает перепад давлений $p_1 - p_2$, который и воспринимается измерительным элементом 2. Этим элементом может быть мембрана, дифференциальный манометр, кольцевые весы, колокол.

Все эти элементы измеряют перепад давлений, вызванный при протекании регулируемой среды через диафрагму. Этот перепад, как правило, невелик. Расход среды, проходящей через диафрагму, если измерен перепад давления, определяется по формуле



Фиг. 46. Диафрагма в качестве чувствительного элемента расхода.

$$Q = \mu F \sqrt{2g\gamma p_u} = A \sqrt{p_u}. \quad (III-25)$$

где

Q — расход регулируемой среды в кг/сек;

μ — коэффициент расхода, зависящий от физической природы среды и определяемый по опытным таблицам;

$p_u = p_1 - p_2$ — перепад давления в кг/см²;

F — проходное сечение диафрагмы в см²;

γ — удельный вес среды в кг/см³;

$g = 981$ см/сек².

Мембранный чувствительный элемент был рассмотрен выше.

Приборы типа дифференциального манометра, кольцевых весов и колокола, если в них используется для измерения перепада давления жидкость, построены на принципе сообщающихся сосудов или U-образной трубки.

Поскольку перепад давлений, как указано выше, невелик, в качестве рабочей жидкости могут применяться различные жидкости. Чаще всего применяется ртуть. Рабочая жидкость разделяет прибор на две полости, которые сообщаются трубками с диафрагмой, встроенной в трубопровод в месте измерения. Та полость прибора, которая

соединена со штуцером диафрагмы большего давления, называется плюсовой, а другая с меньшим давлением — минусовой. На чертежах полости и штуцера обозначаются знаками $+$ и $-$.

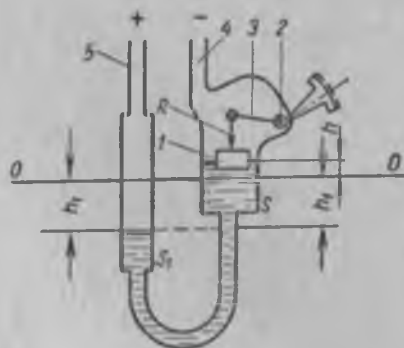
Под действием разности давлений ртуть перетекает из положительной полости в отрицательную, пока не установится равновесие. Разность уровней рабочей жидкости с помощью поплавков, рычагов, датчиков, передается к регулирующим звеньям цепи автоматического регулирования.

Если вместо рабочей жидкости в приборе для измерения перепада давления используется мембрана, деформация последней передается указанным выше способом в систему регулирования.

а) Дифференциальные манометры

Принципиальная схема ртутного дифференциального манометра показана на фиг. 47.

Когда перепад давления в коленах 4 и 5 дифманометра равен нулю, уровень ртути в обоих коленах располагается на одной общей



Фиг. 47. Схема дифференциального манометра.

линии $O-O$, называемой нулевой линией. При увеличении давления ртуть вытесняется из левого колена и переходит в правое. При этом поплавок 1 всплывает и вызывает смещение рычага 3 и валика 2, выведенного из корпуса прибора. Для правильной работы прибора необходимо, чтобы давление в левом колене было больше, чем в правом (на фиг. условно обозначено $+$ и $-$).

На фиг. 47 обозначено:

G — вес поплавка;

R — сила сопротивления всплыванию

поплавка, создаваемая трением передаточного механизма;

S и S_1 — площади сечения правого и левого колена;

$p_a = p_1 - p_2$ — перепад давления в дифманометре;

γ — удельный вес ртути.

Количество ртути, вытесненной из левого колена, всегда равно количеству, поступившей в правое колено. Отсюда уравнение равенства объемов

$$h_1 S_1 = h S - \frac{R + G}{\gamma}. \quad (\text{III-26})$$

Кроме того, из условия равновесия давлений при установившемся режиме имеем:

$$p_a = (h + h_1) \gamma. \quad (\text{III-27})$$

Исключая из полученных уравнений переменную h_1 , придем к уравнению:

$$p_u = h_1^2 \left(1 + \frac{S}{S_1} \right) - \frac{R + G}{S_1} = Ah - B, \quad (III-28)$$

где A и B — константы дифманометра.

Отсюда следует, что между перепадом давления p_u и всплыванием поплавка h существует линейная зависимость.

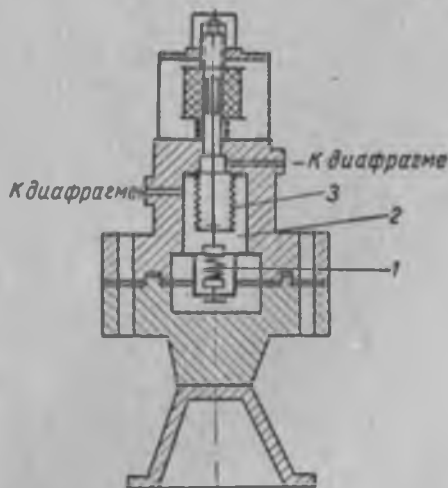
Чувствительность элемента определяется как производная $\frac{dh}{dQ}$, где Q — регулируемый расход:

$$\frac{dh}{dQ} = \frac{S_1}{S + S_1} \sqrt{\frac{2p_u}{g\gamma}} \times \\ \times \frac{1}{\mu F \gamma} \text{ м-сек, кг.} \quad (III-29)$$

На фиг. 48 показан дифманометр системы ВТИ. Здесь отсутствуют поплавки и ртуть. Для измерения импульса применена сильфонная мембрана с пружиной. Кроме того, дифманометр снабжен индукционным датчиком, позволяющим передавать регулирующие импульсы по электрическим проводам к усилителю и исполнительному механизму, удаленными на произвольное расстояние.

Устройство дифманометра, показанного на фиг. 48, основано на использовании сильфонной мембраны 3, которая разделяет рабочую камеру 2 на две изолированные друг от друга полости. Одна полость сообщается с плюсовым штуцером диафрагмы, другая с минусовым. Благодаря этому на мембрану передается разность давлений. Сжатию мембраны противодействует пружина 1, работающая на растяжение.

Поплавковые дифференциальные манометры, схема которых изображена на фиг. 47, применяются главным образом для измерения расхода пара и жидкостей. Эти приборы выпускаются нашими заводами для перепада давлений от 40 до 1000 мм ртутного столба. Благодаря простой конструкции, надежности в работе и точности измерения они получили большое распространение в промышленности.

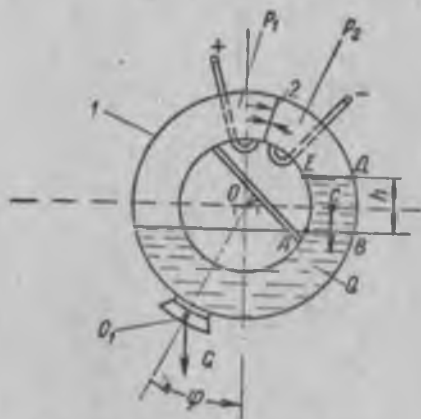


Фиг. 48. Схема дифференциального манометра ВТИ с индукционным датчиком.

б) Кольцевые весы

В кольцевых весах вместо U-образной трубки применено полое кольцо, поворачивающееся около своей оси, благодаря этому можно избежать вывода из полости прибора рычагов, передающих в систему колебания уровня рабочей жидкости.

Кольцевые весы, схема которых показана на фиг. 49, состоят из полого металлического кольца 1, разделенного сверху перегородкой 2. Кольцо наполнено до



Фиг. 49. Схема кольцевых весов.

середины рабочей жидкостью (ртутью или водою) и подвешивается на опору с помощью трехгранного ножа. Благодаря этому кольцо может свободно качаться около своей опоры, поворачиваясь на некоторый угол. Внизу кольца укреплен груз. Если обе полости кольца находятся под одним и тем же давлением, кольцо будет в равновесии. Если давление в левой полости p_1 больше давления p_2 в правой полости, то рабочая жидкость перетекает из левой в правую полость. Равновесие кольца нарушается. Кольцо под влиянием момента M , создаваемого

несбалансирующим весом Q жидкости, будет вращаться по часовой стрелке, пока сумма противодействующего момента груза и момента сопротивления вращению M_c не сравняется с движущим моментом.

Теория кольцевых весов как измерительного элемента устанавливает, что его чувствительность может быть определена из формулы

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta p_u} = \frac{S_0 R_0}{G R_1 \cos \varphi} \text{ см}^2/\text{кг}, \quad (\text{III-30})$$

где R_0 — средний радиус кольца;

S_0 — сечение кольцевой трубки;

R_1 — радиус центра тяжести груза;

p_u — перепад давления;

G — противовес;

O_1 — центр тяжести противовеса;

C — центр тяжести несбалансированной части $ABDE$ рабочей жидкости, перешедшей в минусовую полость;

Q — вес этой жидкости;

h — высота столба несбалансированной части жидкости;

φ — угол отклонения противовеса.

Кольцевые весы пригодны для измерения перепадов давления от 30 до 200 мм ртутного столба. Они применяются для измерения и регулирования расходов жидкости и пара.

в) Колокола

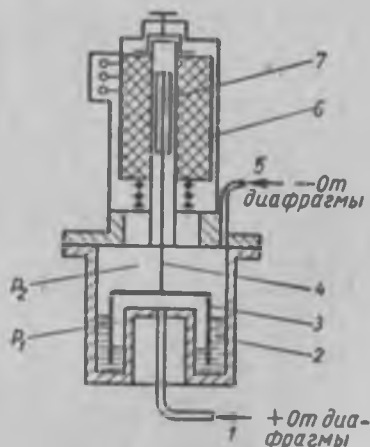
В приборах колокольного типа принцип сообщающихся сосудов осуществляется с помощью колокола, плавающего в рабочей жидкости.

Схематическое устройство колокола, связанного с индукционным датчиком, показано на фиг. 50.

В рабочей жидкости плавает колокол. Если удельный вес жидкости меньше удельного веса материала колокола, то последний снабжается еще пустотелым поплавком. В пространство под колоколом поступает рабочая среда с давлением перед диафрагмой, а пространство над колоколом сообщается либо с атмосферой, либо с пространством за диафрагмой. При измерении перепада давлений большее давление подается под колокол, меньшее в пространство над колоколом. Подъем колокола продолжается до тех пор, пока подъемная сила за счет разности давлений снизу и сверху не уравновесится увеличивающимся весом всплывшей части колокола и поплавок и втягивающим усилием индукционного датчика.

Чувствительность колокола тем больше, чем больше площадь поплавок и чем меньше производная $\frac{d(T + Q)}{dh}$, где Q — сила реакции жидкости, действующая на колокол; T — тяговое усилие катушки индукционного датчика; h — высота всплывания.

Колокольные приборы чаще всего применяются для давлений до 550 мм водяного столба, но возможно применение и для более высоких давлений. Перепад давлений не превышает 30 мм столба.



Фиг. 50. Схема колокола с индукционным датчиком:

- 1 — плюсовая трубка от диафрагмы; 2 — рабочая жидкость; 3 — колокол; 4 — шток колокола; 5 — минусовая трубка от диафрагмы; 6 — катушка индукционного датчика; 7 — якорь; P_1 — P_2 — давления под колоколом и над колоколом.

4. ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ТЕМПЕРАТУРЫ

а) Контактные термометры

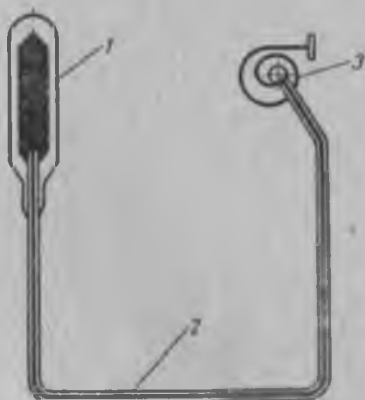
Ртутные контактные термометры служат для измерения температуры и одновременно для преобразования отклонения температуры от заданного значения в электрическую величину. В капилляр тер-

мометра впаиваются два электрических контакта: один на делении шкалы, соответствующем предельному верхнему значению температуры, другой ниже. При замыкании контактов включается реле, которое уменьшает подачу тепла в резервуар. При снижении температуры контакты термометра размыкаются и реле отключается. Процесс подъема температуры начинается снова.

В некоторых схемах регулирования пользуются термометрами с тремя контактами. Работа контактов термометров рассчитана на напряжение 4—6 в при силе тока в 1 а. Точность показания таких термометров $\pm 2^\circ$.

б) Манометрические термометры

Схема такого термометра дана на фиг. 51. Чувствительный баллон 1 помещается в нагреваемую среду, температура которой подлежит регулированию. Баллон 1, соединительный капилляр 2 и винтовая трубчатая пружина 3 заполнены газом или жидкостью, обычно кипящей при низкой температуре. Работа такого чувствительного элемента основана на принципе изменения давления газов в замкнутой герметичной системе, подвергаемой нагреванию или охлаждению.



Фиг. 51. Схема манометрического термометра.

Манометрические термометры по их заполнителям разделяются на: 1) газонаполненные; 2) паровые; 3) ртутные.

Наиболее распространены газовые термометры.

При повышении температуры термобаллона упругость пара или газа в манометрической измерительной системе также повышается, винтовая трубчатая (геликондальная) пружина начинает раскручиваться. Движение пружины при помощи рычажной системы передается электрическому датчику (см. фиг. 45).

Изменение давления газа прямо пропорционально изменению температуры. Это вытекает из закона Клапейрона

$$pV = RT.$$

Здесь p — давление газа;

V — объем манометрической измерительной системы;

R — газовая постоянная;

T — абсолютная температура.

Пренебрегая объемом капилляра и винтовой пружины, можем принять, что V равно объему V_0 термобаллона.

Тогда чувствительность термобаллона будет

$$\frac{dp}{dT} = \frac{R}{V_0} \text{ кг/см}^3 \text{ } ^\circ\text{C}. \quad (\text{III-31})$$

Чувствительность элемента в целом найдется как произведение чувствительности термобаллона на чувствительность геликоидального измерительного элемента.

Если чувствительный элемент составлен из нескольких элементов, включенных последовательно друг за другом, причем каждый из них имеет свою чувствительность, то общая чувствительность определяется как произведение чувствительностей отдельных элементов.

Максимальная длина соединительного капилляра выпускается заводами до 60 м. Однако в тех случаях, когда нельзя допускать значительного запаздывания действия регулятора, длину капилляра не следует брать более 5 м.

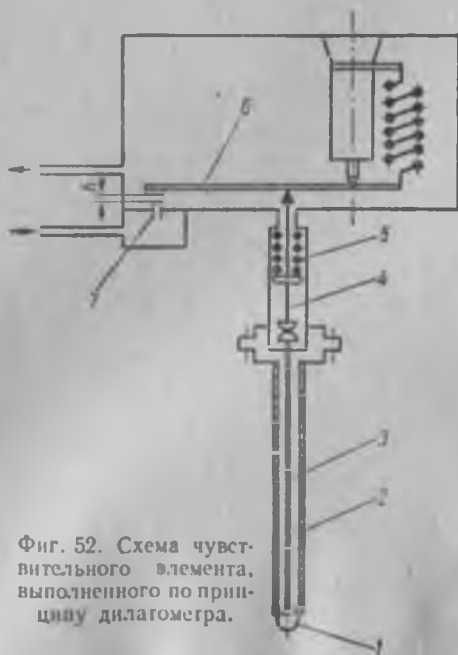
в) Биметаллические элементы

Действие биметаллического элемента основано на изгибании пластинки, составленной из двух металлов, имеющих разные температурные коэффициенты линейного расширения. При повышении температуры биметаллическая пластинка изгибается и замыкает контакт электрической цепи, по которой может быть подан регулирующий импульс.

г) Дилатометры

Принцип дилатометра основан также на использовании разности линейного расширения двух металлов с различными температурными коэффициентами расширения. На фиг. 52 показан чувствительный элемент, выполненный по принципу дилатометра.

Внешняя трубка 2 термопатрона изготавливается из материала с большим коэффициентом линейного расширения, а внутренний стержень 3 из материала с малым коэффициентом расширения. Стержень 3 под действием пружины 5 находится в постоянном контакте с наконечником трубки 1 и промежуточным штоком 4. Термобаллон 2 погру-



Фиг. 52. Схема чувствительного элемента, выполненного по принципу дилатометра.

жен в регулируемую среду. При колебаниях температуры этой среды длина внешней трубки изменяется более, чем длина стержня 3. Благодаря действию пружины 5 разность удлинений внешней трубки и стержня 3 передается через шток 4 рычагу 6.

Остальное устройство, приведенное схематически на фиг. 52, не относится непосредственно к чувствительному элементу. Оно показывает один из возможных вариантов передачи усилия от чувствительного элемента типа dilatометра в общую цепь регулирования. При повышении температуры рычаг уменьшает открытие сопла 7, а при понижении увеличивает, что вызывает изменение расхода жидкости, протекающей через сопло 7 и, как следствие, изменение давления в подводящей трубке.

Чувствительность элемента выражается формулой

$$\frac{dh}{dt} = kL(\alpha - \beta) \text{ мм/град.} \quad (III-32)$$

Здесь: α и β — температурные коэффициенты линейного расширения трубки 2 и стержня 3;

L — длина стержня 3;

k — отношение плеч рычага 6;

h — величина открытия сопла;

t — температура.

д) Термопары

Термопары представляют собой два проводника, выполненных из разных металлов или сплавов. Проводники сварены на одном конце. Этот конец называется рабочим концом или горячим спаем. Он помещается в месте замера температуры, подлежащей регулированию. Два свободных конца присоединяются к измерительному прибору, как показано на фиг. 53, а, или включаются в систему регулирования.

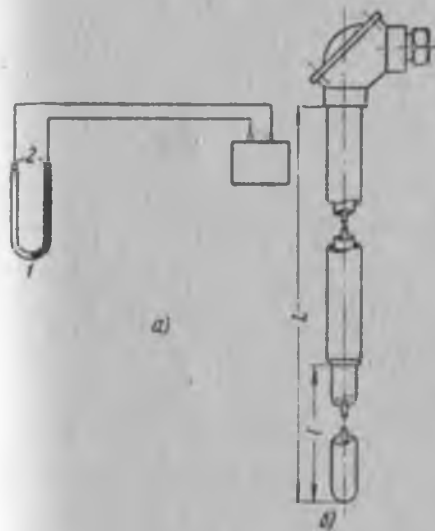
При нагревании горячего спая 1, вследствие разности температур горячего спая и холодных спаев (свободных концов) 2, возникает термоэлектродвижущая сила, изменение которой используется как регулирующий импульс температуры в системах автоматического регулирования. На фиг. 53, б дан общий вид термопары, где L — общая длина, l — нагреваемая часть термопары.

На фиг. 54 даны кривые термоэлектродвижущих сил некоторых термопар в милливольтх. Как видно из диаграмм, термопары разных типов при одной и той же температуре развивают различные электродвижущие силы, причем абсолютные их значения невелики. Из диаграмм также следует, что зависимость между выходной и входной величинами термопары близки к линейной, поэтому чувствительность термопар можно считать приблизительно постоянной на всем диапазоне регулирования. Величину чувствительности термопары легко определить для любого интервала регулирования по кривым фиг. 54 или по таблицам, даваемым в каталогах заводами-

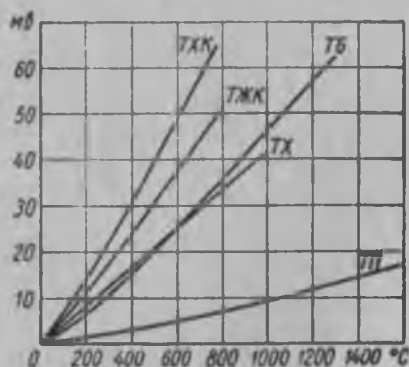
изготовителями. Так, например, для термопары ТХ даются значения т. э. д. с. при $700^{\circ} - 29,14$ мв и при $600^{\circ} - 24,90$ мв. Отсюда чувствительность $\frac{29,14 - 24,90}{100^{\circ}} = 0,0424$ мв/ $^{\circ}\text{C}$.

Термопары всех типов для защиты от механических повреждений монтируются в защитные чехлы. Общий вид собранной термопары показан на фиг. 53,б.

Для правильной работы термопары и передачи ее показаний в регулирующую цепь необходимо, чтобы на всем протяжении от го-



Фиг. 53. Схема и общий вид термопары.



Фиг. 54. Кривые электродвижущих сил различных термопар.

ловки термопары до регулирующей цепи отсутствовали контакты разных металлов. Поэтому присоединение термопар должно производиться специальными, так называемыми, компенсационными проводами, которые подбираются для каждого типа термопары особо.

е) Термометры сопротивления

Термометр сопротивления представляет собой чувствительный элемент, состоящий из медной или платиновой проволоки, намотанной на каркас и заключенной в защитную оболочку. Действие его основано на изменении величины электрического сопротивления при отклонении от заданного значения температуры среды, в которую помещен термометр сопротивления.

Обозначим: R_0 — электрическое сопротивление элемента при $t = 0^{\circ}\text{C}$;

β — температурный коэффициент электрического сопротивления.

Тогда при температуре t величина сопротивления элемента

$$R_t = R_0 (1 + \beta t).$$

Выходной величиной чувствительного элемента является его электрическое сопротивление.

Чувствительность элемента

$$\frac{dR_t}{dt} = R_0 \beta \text{ ом/}^\circ\text{C.} \quad (\text{III-33})$$

При $R_0 = 10 \text{ ом}$ и $\beta = 0,0039$

$$\frac{dR_t}{dt} = 0,039 \text{ ом/}^\circ\text{C.}$$

5. ЧУВСТВИТЕЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СКОРОСТИ

В качестве чувствительных элементов угловой скорости обычно применяются так называемые центробежные регуляторы. Эти регуляторы весьма разнообразны по своей конструкции. Поэтому разберем только наиболее типичные из них.

а) Центробежный маятниковый регулятор с продольной пружиной

Чувствительный элемент этого типа изображен на фиг. 55, а.

Муфта 1 развита в пустотелый цилиндр. На нем помещен стакан с пружиной 4. Внутри цилиндра на шпонке вала 2 регулятора насажена ступица 7, на которой смонтированы коленчатые рычаги 3 с центробежными грузами 5. Передача движения от рычага к муфте осуществлена с помощью серег 6. При вращении регулятора центробежные грузы сжимают пружину и смещают муфту вверх.

Сила, действующая на муфту неподвижного регулятора, при центробежных грузах приведенных в положения, занимаемые ими при работе регулятора, называется статической силой регулятора.

Статическая сила регулятора в этом случае будет

$$E = Q + (F_0 + fh) + 2P \frac{v_{cy}}{v_n}. \quad (\text{III-34})$$

Здесь: Q — вес муфты;

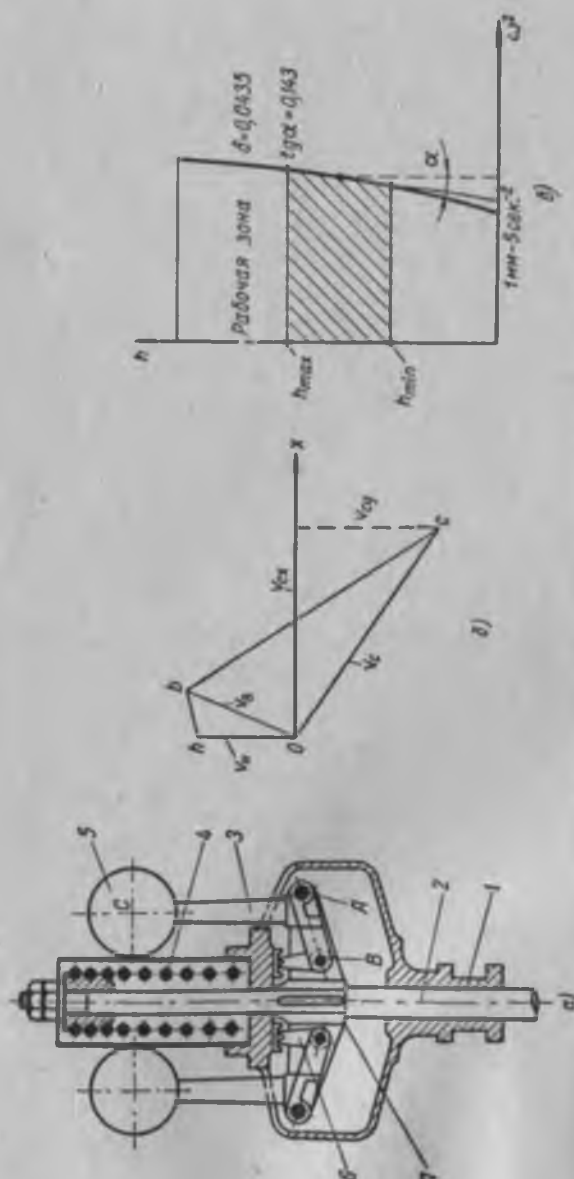
F_0 — начальная сила упругости пружины в нижнем положении муфты при $h = 0$;

f — коэффициент жесткости пружины;

$P \frac{v_{cy}}{v_n}$ — приведенный вес одного центробежного груза;

v_n — скорость муфты при ее движении вдоль вала регулятора в переходном режиме;

v_{cx} и v_{cy} — проекции на горизонтальную и вертикальную оси скорости центра тяжести центробежных грузов в переходном режиме;



Фиг. 55. Центробежный магнитный регулятор скорости с продольной пружиной.

P — вес одного центробежного груза;

h — подъем муфты из крайнего нижнего рабочего положения;

r_c — расстояние центра тяжести центробежного груза от вертикальной оси регулятора.

Отношения $\frac{v_{cx}}{v_n}$ и $\frac{v_{cy}}{v_n}$ находятся из плана скоростей фиг. 55, б при переходном режиме.

Уравнение равновесия муфты регулятора при установившемся режиме будет

$$A\omega^2 = E,$$

где

$$A = \frac{2P}{g} r_c \frac{v_{cx}}{v_n}$$

Отличие регуляторов этого типа от регуляторов с тяжелой муфтой состоит в том, что здесь основной составляющей, определяющей величину E , является начальная сила упругости F_0 пружины, а не вес муфты. Вес муфты Q берется возможно малым, также невелико значение P . Для грубого расчета можно пренебречь этими величинами сравнительно с F_0 .

Тогда уравнение равновесия муфты представится в виде

$$A\omega^2 = F_0 + fh. \quad (\text{III-35})$$

Если величину A можно с некоторой погрешностью принять в зоне регулирования постоянной величиной, то квадрат угловой скорости

$$\omega^2 = \frac{F_0 + fh}{A}$$

представляет линейную функцию от h .

Допустим, что начало отсчета выбрано так, что $\omega_{\min}$ наступает при $h = 0$. Тогда (фиг. 55, в)

$$\omega_{\min}^2 = \frac{F_0}{A}; \quad \omega_{\max}^2 = \frac{F_0 + fh_{\max}}{A}.$$

Отсюда

$$\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2 = 2\omega_{cp}^2 = \frac{fh_{\max}}{A},$$

где

$$\omega_{cp} = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{2}$$

и

$$\delta = \frac{fh_{\max}}{2E_{cp}}. \quad (\text{III-36})$$

Таким образом, в регуляторах описанного типа начальная сила упругости пружины определяет в основном минимальное рабочее значение угловой скорости вала регулятора, а коэффициент жесткости пружины — степень неравномерности.

Чувствительность регулятора в средней точке зоны регулирования:

$$\frac{dh}{d\omega} \approx \frac{2A_{cp}\omega_{cp}}{f} \approx \frac{h_{\max}}{\delta\omega_{cp}} \quad (\text{III-37})$$

Пример. В качестве примера рассмотрим регулятор на фиг. 55 со следующими данными: $AB = 115$ мм; $AC = 230$ мм; $BC = 272$ мм; $Q = 30$ кг; $2P = 18$ кг; $F_0 = 50$ кг; $f = 13,12$ кг/см.

Зададимся несколькими контрольными положениями регулятора, построим для них планы скоростей (см. фиг. 56) и составим табл. 1.

Таблица 1

Таблица контрольных положений регулятора

№ контрольного положения	r_c в мм	h в мм	$\frac{v_{cy}}{v_H}$	$\frac{v_{cx}}{v_H}$	$\frac{F_0 + fh}{Q}$	$\frac{2P}{Q} \frac{v_{cy}}{v_H}$	$\frac{E}{Q}$	$\frac{A}{Q}$ в сек ²	ω^2 в сек ⁻²
1	170	0	0,007	2,02	1,67	0,004	2,674	0,02101	127
2	190	11	0,233	2,00	2,15	0,14	3,29	0,02320	142
3	210	21,5	0,40	1,96	2,61	0,24	3,85	0,02509	153
4	230	31,5	0,55	1,93	3,04	0,33	4,37	0,02721	161
5	250	42	0,725	1,92	3,50	0,435	4,94	0,02938	167
6	270	52,5	0,985	1,905	3,96	0,59	5,55	0,03143	176
7	290	63	1,25	1,92	4,42	0,75	6,17	0,03398	181

На основании таблицы построена регулировочная характеристика, которая показана на фиг. 55, в. Рабочая зона принята от $h = 21,5$ до $h = 42$. Степень неравномерности в пределах зоны

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}} = 0,0435 (4,35\%);$$

$$\omega_{\max} = \sqrt{167} = 12,92; \quad \omega_{\min} = \sqrt{153} = 12,37.$$

Чувствительность элемента в середине зоны

$$\frac{dh}{d\omega} \approx \frac{h_{\max}}{\delta\omega_{cp}} = \frac{42 - 21,5}{0,0435 \cdot 12,645} = 34,6 \text{ мм/сек}^{-1}$$

б) Плоский центробежный регулятор

Плоский центробежный регулятор скорости показан на фиг. 57. В отличие от центробежных маятниковых регуляторов, где выходной величиной регулятора было линейное перемещение муфты, здесь выходной величиной является угол поворота φ эксцентрика.

Регулятор представляет цилиндрический корпус, насаженный на вал регулятора. Центробежные массы 1 шарнирно связаны с корпусом в точках 2. Тягами 5 массы 1 связываются с эксцентриком 7. Пружины 4 одним концом 6 прикреплены к корпусу и другим 3 к центробежным массам 1.

При вращении регулятора центробежные силы растягивают пружины и грузы, перемещаясь, поворачивают эксцентрик посредством тяг.

Вместо статической силы E центробежных конических регуляторов в случае плоских регуляторов рассматривают статический момент вращения M_E , приложенный к эксцентрику. Этот момент создается под воздействием только пружин, так как равнодействующая сил веса обеих масс проходит через центр эксцентрика и не создает момента вращения.

При установившемся режиме, если пренебречь моментом сопротивления повороту эксцентрика, будет справедливо уравнение

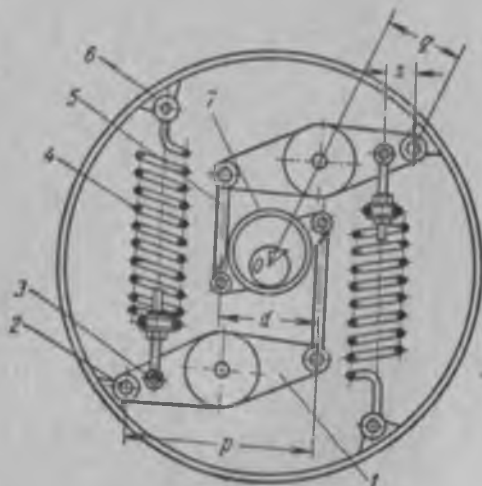
$$C\omega^2 = M_E, \quad (\text{III-38})$$

так как сила инерции вызываемая угловым ускорением регуляторного вала, в этом режиме равна нулю.

Здесь:

$$C = \frac{2P}{g} r_c \frac{q}{p} d \text{ и } M_E = F \cdot \frac{s}{p} d,$$

где P — вес одного центробежного груза;
 r_c — расстояние центра тяжести груза до оси регулятора;
 s, p, d, q — размеры, указанные на фиг. 57;
 F — сила упругости пружины.



Фиг. 57. Плоский центробежный регулятор скорости.

б) Плоский центробежный регулятор

Плоский центробежный регулятор скорости показан на фиг. 57.

В отличие от центробежных маятниковых регуляторов, где выходной величиной регулятора было линейное перемещение муфты, здесь выходной величиной является угол поворота φ эксцентрика.

Регулятор представляет цилиндрический корпус, насаженный на вал регулятора. Центробежные массы 1 шарнирно связаны с корпусом в точках 2. Тягами 5 массы 1 связываются с эксцентриком 7. Пружины 4 одним концом 6 прикреплены к корпусу и другим 3 к центробежным массам 1.

При вращении регулятора центробежные силы растягивают пружины и грузы, перемещаясь, поворачивают эксцентрик посредством тяг.

Вместо статической силы E центробежных конических регуляторов в случае плоских регуляторов рассматривают статический момент вращения M_E , приложенный к эксцентрику. Этот момент создается под воздействием только пружин, так как равнодействующая сил веса обеих масс проходит через центр эксцентрика и не создает момента вращения.

При установившемся режиме, если пренебречь моментом сопротивления повороту эксцентрика, будет справедливо уравнение

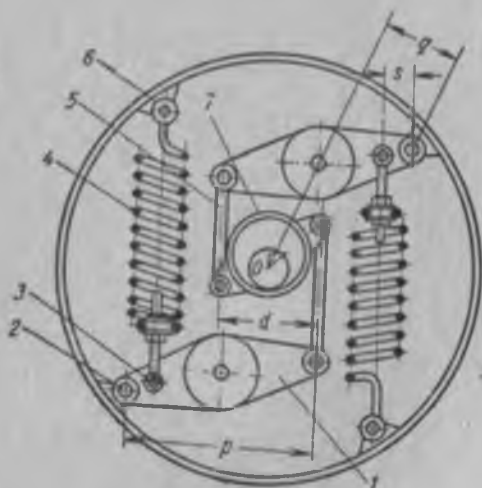
$$C\omega^2 = M_E, \quad (\text{III-38})$$

так как сила инерции вызываемая угловым ускорением регуляторного вала, в этом режиме равна нулю.

Здесь:

$$C = \frac{2P}{g} r_c \frac{q}{p} d \text{ и } M_E = F \cdot \frac{s}{p} d,$$

где P — вес одного центробежного груза;
 r_c — расстояние центра тяжести груза до оси регулятора;
 s, p, d, q — размеры, указанные на фиг. 57;
 F — сила упругости пружины.



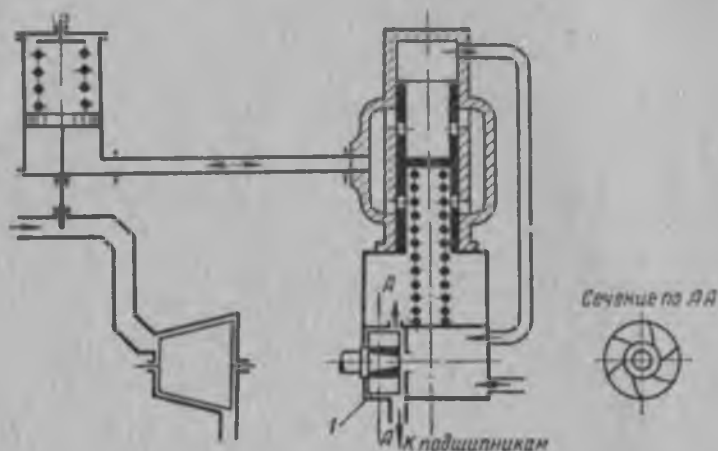
Фиг. 57. Плоский центробежный регулятор скорости.

По аналогии с коническими регуляторами чувствительность плоского регулятора может быть выражена приближенной формулой

$$\frac{d\varphi}{d\omega} \approx \frac{\varphi_{\max}}{\omega_{\text{ср}}} \quad (\text{III-39})$$

в) Гидродинамический регулятор скорости

Чувствительный элемент гидродинамического регулятора скорости представляет собой центробежный масляный насос, который



Фиг. 58. Чувствительный элемент на схеме гидродинамического регулятора скорости.

на выходе создает давление масла, используемое в схеме регулирования для перемещения управляющего органа (золотника) сервомотора. На схеме гидродинамического регулятора скорости (фиг. 58) чувствительный элемент обозначен цифрой 1. Выходной величиной элемента является давление масла на внешней окружности лопаток.

Обозначим через: p_0 — давление масла в камере всасывания;

p — давление на выходе;

γ — удельный вес масла;

r_0 — наименьший радиус лопаток;

r_1 — наибольший радиус лопаток.

При холостом режиме насоса будет справедливо соотношение

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{\omega^2}{2g} (r_1^2 - r_0^2), \quad (\text{III-40})$$

где ω — угловая скорость вала насоса.

Положим, что

$$p - p_0 = p_u \text{ и } \frac{1}{2g} (r_1^2 - r_0^2) = k. \quad (\text{III-41})$$

Тогда

$$p_u = k\omega^2,$$

т. е. рабочее давление, развиваемое чувствительным элементом, пропорционально квадрату угловой скорости.

При расходе масла через насос давление на выходе будет меньше давления p вследствие потерь напора при всасывании и создании скорости масла на выходе. Чтобы учесть уменьшение давления, вводят поправочный коэффициент λ , который определяется по экспериментальным данным и конструктивным размерам насоса.

В связи с этим можем написать, что:

$$p_u = \lambda k \omega^2, \quad (\text{III-42})$$

причем $\lambda < 1$.

Если степень неравномерности для угловой скорости равна δ , то

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}} = \frac{(\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2) \lambda k}{2\omega_{cp}^2 \lambda k} = \frac{p_{u \max} - p_{u \min}}{2p_{u \text{ cp}}}.$$

Назовем отношение $\frac{p_{u \max} - p_{u \min}}{p_{u \text{ cp}}}$ степенью неравномерности давления δ_p .

Тогда

$$\delta_p = 2\delta, \quad (\text{III-43})$$

т. е. степень неравномерности давления в 2 раза больше степени неравномерности скорости.

Чувствительность элемента выражается формулой

$$\frac{dp_u}{d\omega} = 2\lambda k \omega \approx 2\lambda k \omega_{cp}.$$

6. ФОТОЭЛЕМЕНТЫ

Фотоэлементы представляют чувствительные элементы, реагирующие на изменение светового потока. При освещении поверхности некоторых металлов, или полупроводников, световая энергия, проникая в поверхностные слои вещества, сообщает электронам дополнительную энергию, благодаря чему некоторые электроны вылетают из своих орбит. При этом наблюдаются следующие явления:

1. Освободившиеся электроны покидают освещенное вещество. Это явление называется внешним фотоэффектом, а фотоэлементы, устроенные на этом принципе, — фотоэлементами с внешним фотоэффектом.

2. Освободившиеся электроны остаются в веществе, повышая его электропроводность. Фотоэлементы, использующие это явление, называются фотосопротивлениями.

3. Освободившиеся электроны из слоя освещенного вещества переходят в слой другого, неосвещенного вещества, отделенного тонким изоляционным слоем от освещенного.

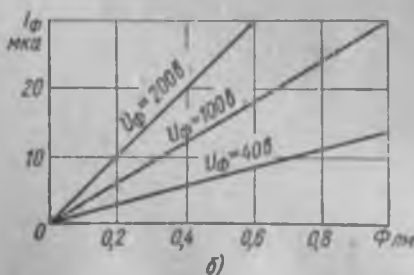
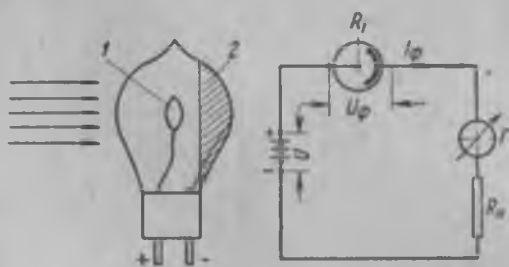
Фотоэлементы, основанные на этом свойстве, называются фотоэлементами с запирающим слоем.

Достоинствами фотоэлементов являются их простота, малые габариты, большая чувствительность, малая инерционность. К их недостаткам относится малая величина фототока, т. е. тока, вызываемого действием световых лучей, что требует применения усилителей.

а) Фотоэлементы с внешним фотоэффектом (фиг. 59)

На фиг. 59, а показан общий вид фотоэлемента.

Фотоэлемент имеет вид вакуумного или газонаполненного прибора. В последнее время фотоэлементы выпускаются с сурьмяноце-



Фиг. 59. Фотоэлемент с внешним фотоэффектом.

зиевым катодом и заполняются аргоном. Анод 1 фотоэлемента имеет форму круглой пластинки, катод 2 выполнен в виде фоточувствительного слоя, нанесенного на внутренней поверхности стекла. На схеме фиг. 59, а обозначено: R_n — нагрузочное сопротивление; Γ — гальванометр; U — батарея.

На фиг. 59, б приведены световые характеристики $I_\phi = f(\Phi)$ фотоэлемента, т. е. зависимость фототока I_ϕ от величины светового потока Φ (случай газонаполненного фотоэлемента). Как видно из графиков, величина фототока I_ϕ сильно зависит при прочих равных условиях от величины напряжения U_ϕ , приложенного

к фотоэлементу, которое необходимо, как и в электронных лампах, для удаления вылетающих под действием света электронов. Вакуумные фотоэлементы уже при небольших анодных напряжениях

насыщаются и величина фототока в зоне насыщения не зависит от величины этого напряжения.

Чувствительность $\xi = \frac{dI_\phi}{d\Phi}$ фотозлементов отечественного производства приблизительно составляет при вакуумных 20 микроампер/люмен, а при газонаполненных 120.

При работе фотозлемента на сопротивление R_n чувствительность его уменьшается по закону

$$\xi_0 = \frac{\xi_c}{1 + \frac{R_n}{R_i}}, \quad (\text{III-44})$$

где ξ_c — чувствительность фотозлемента при отсутствии сопротивления (статическая);

ξ_0 — чувствительность фотозлемента при наличии сопротивления (динамическая);

$R_i = \frac{\partial U_\phi}{\partial I_\phi}$ — внутреннее сопротивление элемента;

R_n — сопротивление нагрузки.

б) Фотосопротивления

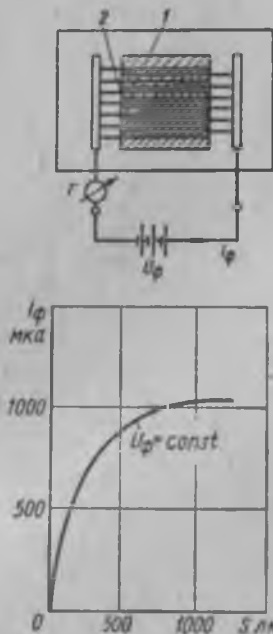
Устройство фотосопротивления схематически изображено на фиг. 60. Здесь: Γ — гальванометр; U_ϕ — батарея; 1 — слой селена; 2 — металлическая решетка.

Тонкий слой селена 1 нанесен на решетку 2 из проводников. Вместо селена применяют также сернистый таллий. При изменении освещенности решетки меняется электрическое сопротивление фотозлемента и величина тока I_ϕ в электрической цепи.

Примерная характеристика фотосопротивления, т. е. зависимость фототока от освещенности S его поверхности, при постоянном напряжении $U_\phi = \text{const}$ показана на той же фиг. 60.

Существенным недостатком фотосопротивлений как чувствительных элементов регулирования является нелинейность характеристики. Наибольшая чувствительность получается при малых освещенностях, при увеличении освещенности чувствительность падает. Кроме того, наблюдаются значительная инерционность, температурная погрешность и частотная погрешность от частоты колебаний светового потока.

Величина чувствительности $\frac{dI_\phi}{dS}$ может быть определена из характеристики как тангенс угла наклона кривой к оси S .

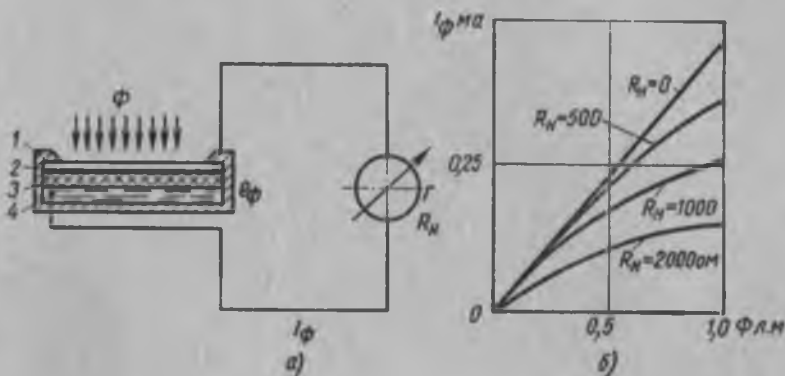


Фиг. 60. Фотосопротивление.

в) Фотоэлементы с запирающим слоем (фиг. 61)

Эти фотоэлементы иногда называются вентильными фотоэлементами. Наибольшее применение имеют селеновые и меднозакисные фотоэлементы. Принцип устройства селенового фотоэлемента показан на фиг. 61, а.

Элемент состоит из тонкой пленки золота 1, запирающего слоя 2, селенового слоя 3 и стальной подкладки 4. Запирающий слой образуется на границе соприкосновения селена с пленкой золота. Этот



Фиг. 61. Схема фотоэлемента с запирающим слоем.

слой обладает детекторным свойством и не позволяет электронам, выбитым световым потоком, возвращаться обратно. Контактные зажимы элемента соединены со слоями 1 и 4. Световой поток проходит через пленку золота и создает вентильный фотоэффект, заключающийся в том, что электроны из освещенного слоя переходят в неосвещенный слой, отделенный изоляционным запирающим слоем. Вследствие этого возникает разность потенциалов ϵ_ϕ , которая используется для получения тока I_ϕ в нагрузочном сопротивлении.

Световые характеристики при различных нагрузочных сопротивлениях R_n приведены на фиг. 61, б.

Чем больше R_n , тем больше нарушается линейный характер характеристики.

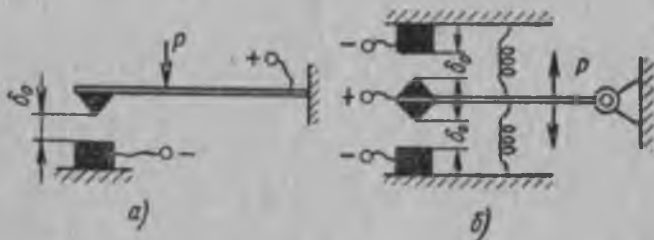
7. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛИ

Выше уже отмечалось, что чувствительный элемент, измеряющий неэлектрическую величину, и одновременно преобразующий ее в электрическую называется датчиком. В дальнейшем мы рассмотрим некоторые типовые преобразовательные устройства указанного назначения, которые будем условно называть датчиками.

а) Контактные датчики

Контактные датчики обычно встречаются в релейных системах регулирования. Контактные датчики преобразуют линейное перемещение чувствительного элемента в электрический импульс, который используется либо для приведения в движение непосредственно исполнительного механизма, либо для приведения в действие его управляющего органа.

На фиг. 62 схематически показаны два типа контактных датчиков.



Фиг. 62. Контактные датчики.

На фиг. 62, а показан датчик из двух контактов: неподвижного и подвижного. Подвижный контакт расположен на контактной пружине. Это — односторонний контактный датчик. На фиг. 62, б показан двусторонний датчик. Здесь имеются два неподвижных контакта и один подвижной, который может входить попеременно в соприкосновение с неподвижными контактами. Эти датчики могут быть применены также для преобразования усилия P чувствительного элемента в электрический импульс. Нечувствительность контактного датчика определяется величиной начального зазора δ_0 между контактами. Пока выходная величина чувствительного элемента не преодолест зазор δ_0 между контактами датчик бездействует.

б) Реостатные датчики

Реостатные датчики или датчики сопротивления преобразуют выходное перемещение чувствительного элемента в постоянный или переменный ток за счет изменения величины своего электрического сопротивления. На фиг. 63 и 64 показаны схемы реостатных датчиков.

Реостат на фиг. 63 преобразует угловое перемещение α в величину r электрического сопротивления между клеммами 0 и 1 на выходе. Допустим, что реостат 3 имеет равномерную намотку по окружности и пусть на единицу длины окружности приходится ρ ом.

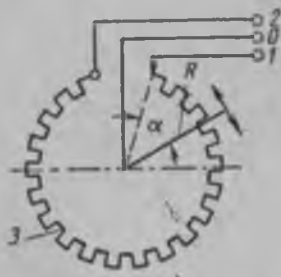
Если радиус контактной рукоятки R , то величина электрического сопротивления r на выходе между клеммами 0 и 1 будет

$$r = R \alpha \rho. \quad (\text{III-45})$$

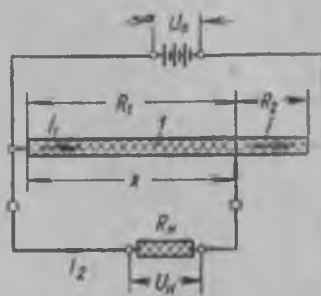
Чувствительность датчика

$$\frac{dr}{d\alpha} = R\rho \text{ ом/радиан.} \quad (\text{III-46})$$

На фиг. 64 дана схема датчика сопротивления с прямолинейным перемещением движка. Здесь входная величина x , выходная U_n , напряжение, снимаемое с постоянного сопротивления R_n . U_0 — напряжение батареи; R_0 — полное сопротивление потенциометра; R_1 и R_2 — сопротивления частей, на которые движок делит полное



Фиг. 63. Схема реостатного датчика.



Фиг. 64. Схема реостатного датчика.

сопротивление потенциометра; i_1 и i_2 — токи в сопротивлениях R_1 и R_2 ; i — ток от батареи; l_0 — длина потенциометра.

Потенциометр l выполнен в виде калиброванного проводника с движком.

Согласно схеме потенциометра (фиг. 64) напишем следующие уравнения:

$$i = i_1 + i_2; R_1 = R_0 \frac{x}{l_0}$$

$$i_1 : i_2 = R_n : R_1; U_0 = i(R_0 - R_1) + i_2 R_n;$$

$$U_n = i_2 R_n.$$

Решая эти уравнения относительно U_n , найдем

$$U_n = U_0 \frac{R_1}{R_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{R_2 R_1}{R_0 R_n}} \quad (\text{III-47})$$

Наибольшее значение произведения

$$R_2 R_1 = \frac{R_0^2}{4}.$$

Если R_n много больше R_0 ($R_n \gg R_0$), то

$$U_n \approx U_0 \frac{R_1}{R_0} = U_0 \frac{x}{l_0}, \quad (\text{III-48})$$

т. е. выходная величина пропорциональна входной.

Чувствительность датчика

$$\frac{dU_n}{dx} = \frac{U_0}{l_0} \text{ в/см.} \quad (\text{III-49})$$

К группе реостатных датчиков следует отнести угольные датчики, которые позволяют передаваемые на них усилия преобразовывать в электрические сопротивления или напряжения.

На фиг. 65 показан угольный датчик.

На фиг. 65, а дано устройство простейшего угольного датчика. Датчик собирается из графитовых дисков в виде столбика. На концах столбика монтируются контактные диски и упорные конструкции, на которые передается давление на диски.

Электрическое сопротивление такого столбика складывается из переходных контактных сопротивлений между угольными дисками и собственных сопротивлений дисков. Если столбик из угольных дисков подвергнуть сжатию, переходное сопротивление датчика уменьшается. На фиг. 65, б представлена характеристика угольного датчика, т. е. кривая зависимости сопротивления датчика от приложенного усилия. Величина сопротивления R датчика может быть с некоторым приближением выражена зависимостью

$$R = R_1 + \frac{1}{kP}, \quad (\text{III-50})$$

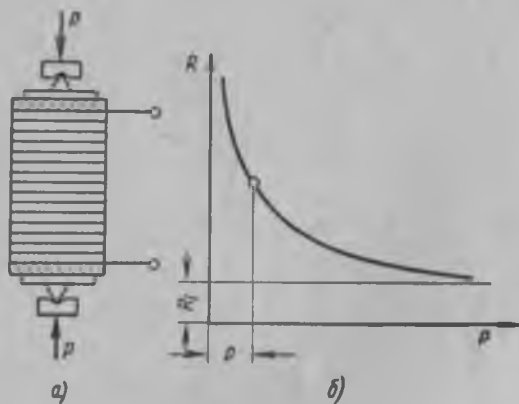
где R_1 — постоянная величина, определяемая по диаграмме R, P (фиг. 65, б);

P — приложенное к датчику усилие;

k — постоянный коэффициент, определяемый из опыта.

Чувствительность элемента

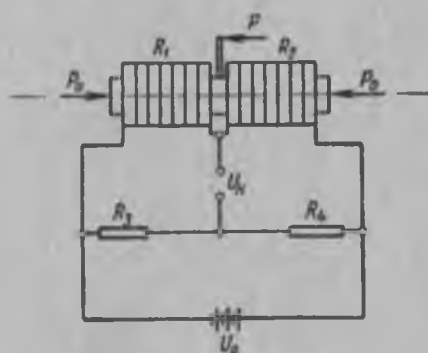
$$\left| \frac{dR}{dP} \right| = \frac{1}{kP^2} \text{ ом/кгс.} \quad (\text{III-51})$$



Фиг. 65. Угольный датчик.

Для повышения чувствительности датчика применяют дифференциальное включение столбиков. Такая схема показана на фиг. 66.

Датчик состоит из двух столбиков, предварительно сжатых давлением P_0 . Входное давление действует таким образом, что сжатие одного столбика увеличивается, другого уменьшается. Оба столбика



Фиг. 66. Дифференциальный угольный датчик.

тельный неуравновешенный мост, выходной величиной которого является напряжение диагонали U_n . Если обозначить сопротивления столбиков R_1 и R_2 и положить $R_3 = R_4$, то U_n может быть представлено выражением

$$U_n = U_0 \frac{R_2 - R_1}{2(R_1 + R_2)}. \quad (III-52)$$

Допустим, что сопротивления R_1 и R_2 выражаются данными выше формулами (III-50).

Тогда

$$R_2 - R_1 = \frac{1}{k} \left[\frac{1}{P_0 - P} - \frac{1}{P_0 + P} \right] = \frac{2P}{k(P_0^2 - P^2)}.$$

$$R_2 + R_1 = \frac{2P_0}{k(P_0^2 - P^2)}.$$

Отсюда

$$U_n = U_0 \frac{P}{2P_0}.$$

Чувствительность элемента

$$\frac{dU_n}{dP} = \frac{U_0}{2P_0} \text{ в/кз.} \quad (III-53)$$

Недостатками угольных датчиков являются нелинейность характеристики, нестабильность сопротивления, наличие явления, аналогичного гистерезису.

в) Индуктивные датчики (фиг. 67)

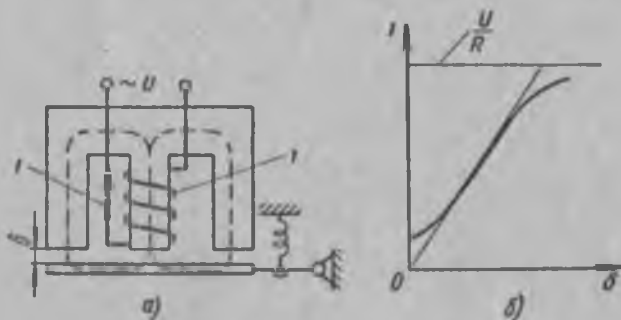
Действие индуктивных датчиков основано на изменении индуктивного сопротивления катушки датчика при перемещении стального якоря.

Схема простейшего индуктивного датчика показана на фиг. 67, а.

Входной величиной датчика является воздушный зазор δ , выходной — ток I при заданном напряжении U

$$I = \frac{U}{z}.$$

Здесь $z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$ — кажущееся сопротивление катушки I датчика.



Фиг. 67. Индуктивный датчик.

Индуктивность L катушки может быть вычислена по приближенной формуле

$$L = \frac{0,2\pi\omega^2 S}{\delta} \cdot 10^{-9} \text{ генри}, \quad (\text{III-54})$$

где ω — число витков катушки
и S — сечение магнитопровода.

Активное сопротивление R обмотки много меньше индуктивного ωL

$$R \ll \omega L.$$

Поэтому без большой погрешности можно считать, что

$$z \approx \omega L = \frac{0,2\pi\omega^3 S}{\delta} \cdot 10^{-9} \text{ ом}. \quad (\text{III-55})$$

$$I = \frac{U}{z} = \frac{U\delta 10^9}{0,2\pi\omega^3 S} \text{ а}. \quad (\text{III-56})$$

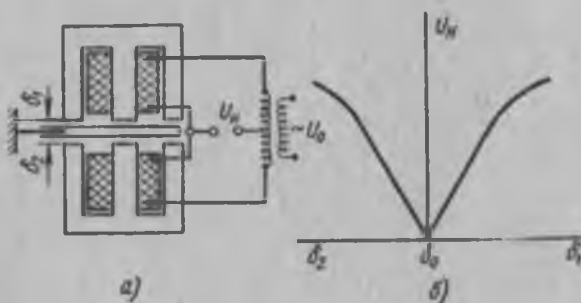
Чувствительность элемента

$$\frac{dI}{d\delta} = \frac{U \cdot 10^9}{0,2\pi\omega^3 S} \text{ а/см}. \quad (\text{III-57})$$

Примерная характеристика индуктивного элемента показана на фиг. 67, б. Линейность характеристики сохраняется только в пределах некоторой зоны. Линейность нарушается, когда активное сопротивление становится сравнимым с индуктивным.

Параметры индуктивного датчика должны выбираться так, чтобы в пределах зоны регулирования характеристика датчика $I(\delta)$ представляла участок прямой линии, проходящей через начало координат.

Недостатком индуктивных датчиков является сильная зависимость их от частоты напряжения U . Индуктивные датчики применяются для частот не выше 5000 гц, так как при высоких частотах резко растут потери на перемагничивание и индуктивное сопротивление обмотки. Два одинаковых индуктивных датчика можно соединить по дифференциальной схеме, как показано на фиг. 68, при этом



Фиг. 68. Дифференциальный индуктивный датчик.

мы получим так называемый дифференциальный индуктивный датчик. Схема такого датчика дана на фиг. 68, а.

Для среднего положения якоря такого датчика

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_0 \text{ и } U_n = 0.$$

При отклонении якоря от среднего положения на выходе датчика появляется напряжение U_n , которое растет по мере увеличения этого отклонения. Для двух отклонений одинаковых по величине, но различных по знаку, значения U_n отличаются только фазами, которые противоположны.

На фиг. 68, б показана характеристика дифференциального датчика.

Чувствительность датчика $\frac{dU_n}{d\delta}$ может быть вычислена по характеристике как тангенс угла между касательной к кривой $U_n(\delta)$ и осью δ .

Преимуществами дифференциального индуктивного датчика перед простым являются: вдвое большая чувствительность и значительно меньшая погрешность от колебаний температуры и напряжения питания.

г) Емкостные датчики

У емкостных датчиков входной величиной является линейное или угловое перемещение, а выходной — электрическая емкость.

Примеры емкостных датчиков даны на фиг. 69.

На фиг. 69, а показан плоский конденсатор.

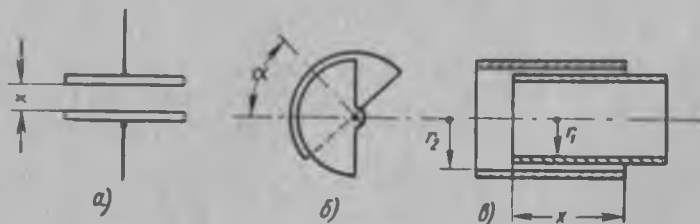
Емкость такого конденсатора определяется по известной формуле

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi x},$$

где ϵ — диэлектрическая постоянная;

S — активная площадь конденсатора в см^2 ;

x — расстояние между пластинками в см .



Фиг. 69. Емкостные датчики.

Изменяя расстояние x между пластинами, мы будем изменять емкость датчика.

Чувствительность датчика

$$\left| \frac{dC}{dx} \right| = \frac{\epsilon S}{4\pi x^2} \text{ см/см.} \quad (\text{III-58})$$

На фиг. 69, б показан емкостный датчик с угловым перемещением α .

Емкость такого конденсатора

$$C = \frac{\epsilon S}{4\pi d} \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} \right) \text{ см.}$$

Здесь: S — активная площадь конденсатора при $\alpha = 0$ в см^2 ;

d — расстояние между пластинами в см .

Чувствительность датчика

$$\left| \frac{dC}{d\alpha} \right| = \frac{S\epsilon}{4\pi^2 d} \text{ см/радиан.} \quad (\text{III-59})$$

На рис. 69, в показан цилиндрический емкостный датчик. Емкость такого конденсатора зависит от осевого перемещения x внутреннего цилиндра и выражается формулой

$$C = \frac{\epsilon x}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Здесь: x — величина перекрытия внутреннего цилиндра наружным в см;

r_1 — радиус внутреннего цилиндра в см;

r_2 — радиус внешнего цилиндра в см.

Чувствительность датчика

$$\frac{dC}{dx} = \frac{\epsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \text{ см/см.} \quad (\text{III-60})$$

Необходимо отметить, что использование емкостных датчиков на частоте 50 гц без большого усиления невозможно вследствие того, что они представляют большое сопротивление для прохождения тока.

К недостаткам емкостных датчиков относятся: а) необходимость усиления регулирующего импульса; б) необходимость иметь напряжение высокой частоты и в) влияние паразитных емкостей.

Сравнивая описанные выше датчики, отметим следующее:

1. Индуктивные датчики, основанные на изменении индуктивного сопротивления катушки, преобразовывают линейное перемещение измерительного органа в электрическую величину. Они нашли большое применение при измерении и регулировании давления и расхода различных жидкостей и газов благодаря простоте своей конструкции и возможности непосредственного использования тока промышленной частоты (50 гц).

2. Емкостные датчики, основанные на изменении емкости, в противоположность индуктивным датчикам, мало чувствительны при частоте тока 50 гц и требуют при этой частоте усилительных устройств. При высоких частотах порядка тысячи герц и более они обладают хорошей чувствительностью.

Изменение емкости достигается регулированием расстояния между пластинами датчика, изменением их рабочей поверхности, либо диэлектрических свойств среды, в которой находятся пластины датчика.

Основной областью применения емкостных датчиков является измерение малых толщин и промежутков, а также показателей тех величин, которые влияют на диэлектрические свойства среды.

3. Датчики сопротивления применяются для преобразования неэлектрических величин, когда измерительный орган чувствительного элемента совершает линейное или вращательное движение,

а также в тех случаях, когда сопротивление датчика может изменяться от изменения параметров среды, в которой помещен датчик. Особо следует отметить угольные датчики, которые преобразуют силу давления на шайбы датчика в электрическую величину.

д) Датчики скорости

В качестве электрических датчиков скорости обычно применяются тахометрические динамо. Схема такого датчика показана на фиг. 70.

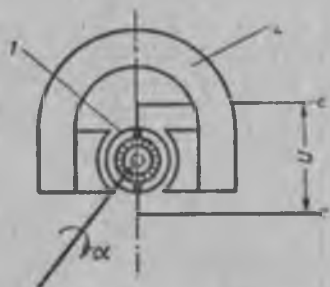
Якорь 1 динамомашины постоянного тока вращается в поле постоянного магнита 2. Напряжение U , снимаемое с коллектора машины, пропорционально угловой скорости ω

$$U = A\omega,$$

где A — коэффициент пропорциональности.

Чувствительность датчика

$$\frac{dU}{d\omega} = A \text{ вольт} \cdot \text{сек.} \quad (\text{III-61})$$



Фиг. 70. Датчик скорости.

К электрическим датчикам вообще могут быть отнесены все чувствительные элементы, у которых на выходе получается электрическая величина, как, например, термопары, термометры сопротивления и др.

е) Сельсины

В современных следящих системах наибольшее применение для измерения рассогласования между входной и выходной величинами имеют сельсины. Использование сельсин как измерителя рассогласования можно уяснить из схемы, показанной на фиг. 71.

Если обмотку ротора одиночного сельсина питать однофазным переменным током синусоидального напряжения

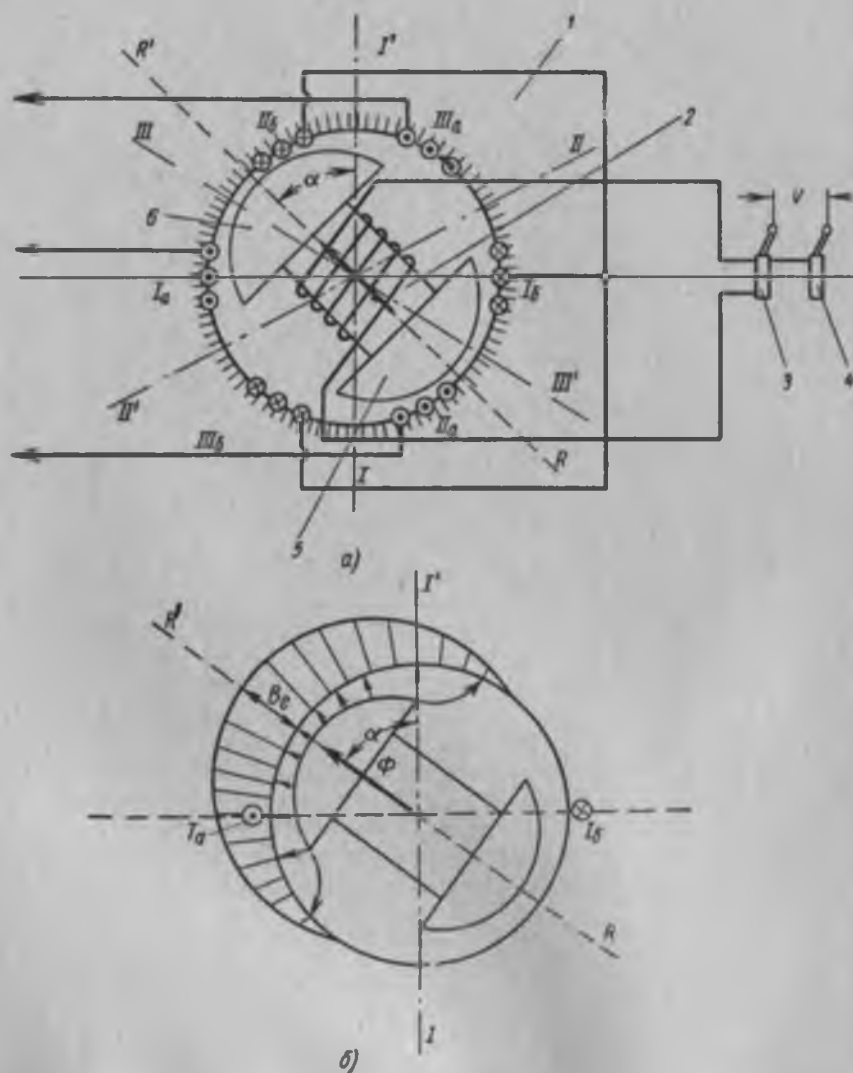
$$V = V_{\max} \cos 2\pi ct,$$

то в статоре при неподвижном роторе индуцируется серия напряжений, совпадающих по фазе, но отличающихся величиной своих амплитуд, которые представляют функцию угла установки ротора. Эти напряжения будут выражаться так:

$$E_I = -E_{\max} \cos \alpha \cdot \cos 2\pi ct$$

$$E_{II} = -E_{\max} \cos \left(\alpha - \frac{2\pi}{3} \right) \cos 2\pi ct$$

$$E_{III} = -E_{\max} \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{3} \right) \cos 2\pi ct.$$



Здесь: α — угол, отмечающий положение ротора относительно статора (на фиг. 71 угол между осями RR' и $I-I'$).

Если ротор вращается с угловой скоростью $\omega_p = 2\pi c_p$, то на зажимах сельсина при разомкнутой внешней цепи статора появятся напряжения:

$$E_I = E_{aI} + E_{bI} = -E_{\max} \cos 2\pi c t \cos (\alpha_0 + 2\pi c_p t) + \\ + \frac{c_p}{c} E_{\max} \sin 2\pi c t \sin (\alpha_0 + 2\pi c_p t).$$

$$E_{II} = E_{aII} + E_{bII} = -E_{\max} \cos 2\pi c t \cos \left(\alpha_0 - \frac{2\pi}{3} + 2\pi c_p t \right) + \\ + \frac{c_p}{c} E_{\max} \sin 2\pi c t \sin \left(\alpha_0 - \frac{2\pi}{3} + 2\pi c_p t \right)$$

$$E_{III} = E_{aIII} + E_{bIII} = -E_{\max} \cos 2\pi c t \cos \left(\alpha_0 + \frac{2\pi}{3} + 2\pi c_p t \right) + \\ + \frac{c_p}{c} E_{\max} \sin 2\pi c t \sin \left(\alpha_0 + \frac{2\pi}{3} + 2\pi c_p t \right).$$

Здесь α_0 — начальный угол установки ротора.

В обмотке каждой фазы статора индуцируются две электродвижущие силы E_a и E_b . Все электродвижущие силы имеют одинаковую основную частоту c и одинаковую частоту модуляции c_p . Электродвижущие силы E_a индуцируются пульсирующим магнитным потоком, а E_b — вращением ротора.

Электродвижущие силы группы «а» имеют одну и ту же амплитуду и фазу по основной частоте c , сдвинуты они по фазе друг по отношению к другу на $\frac{2\pi}{3}$ по частоте модуляции c_p . Электродвижущие силы группы «б», аналогично группе «а», имеют одинаковую амплитуду и фазу по основной частоте и отличаются фазой по частоте модуляции.

На фиг. 72 построены электродвижущие силы E_{aI} , E_{bI} и E_I для случая $\alpha_0 = 0$ и $\frac{c_p}{c} = 0,04$.

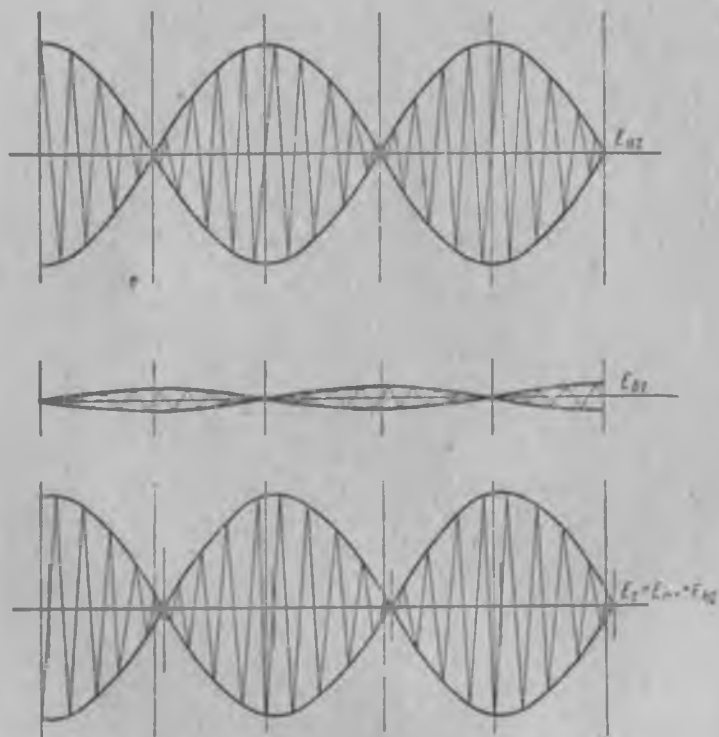
Как видно при малых значениях $\frac{c_p}{c}$, влиянием электродвижущих сил E_b можно пренебречь.

В дальнейшем для упрощения вычислений пренебрежем этими электродвижущими силами и будем принимать

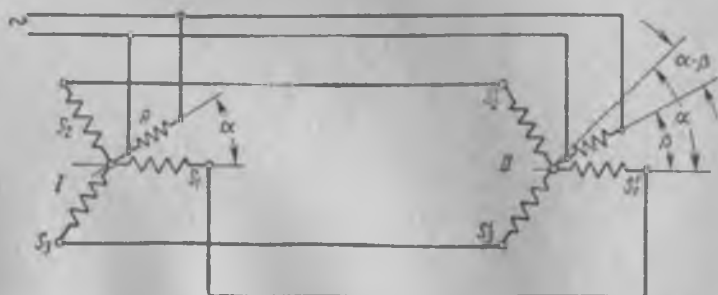
$$E_I \approx E_{aI}; \quad E_{II} \approx E_{aII}; \quad E_{III} \approx E_{aIII}.$$

Как известно из электротехники, при работе спаренных сельсинов — датчика и приемника (включенных, как показано на фиг. 73), сельсин, работающий в качестве датчика, развивает момент вращения M_c , действующий на ротор приемника и равный

$$M_c = M_{\max} \sin (\alpha - \beta).$$



Фиг. 72. Электродвижущая сила статора сельсина, модулированная частотой ошибки.



Фиг. 73. Схема включения двух сельсинов, датчика и приемника.

Здесь: α и β — углы, определяющие положение роторов относительно своих статоров (см. фиг. 73);

$M_{\max}$ — опрокидывающий момент сельсина, определяемый размерами сельсина и его магнитными и электрическими данными.

В свою очередь, сельсин-приемник будет воздействовать на сельсин-датчик с моментом

$$M_c = M_{\max} \sin(\beta - \alpha).$$

Таким образом, при включении двух одинаковых сельсинов так, как указано на фиг. 73, между ними возникает взаимодействие, выражающееся в том, что моменты вращения первого и второго сельсина равны и противоположны по направлению. Если угол β больше α , то момент II сельсина стремится уменьшить угол β , а момент I увеличить угол α . Оба момента стремятся уравнять углы β и α . При $\beta = \alpha$ моменты обращаются в нуль. Отсюда следует, что момент вращения сельсинов имеет синхронизирующий характер, почему его называют синхронизирующим. Если на валу второго сельсина действует некоторый момент нагрузки M_r , например, момент трения или другого сопротивления, то равновесие наступает при условии что:

$$M_r = M_{\max} \sin(\alpha - \beta). \quad (III-62)$$

Отсюда

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{M_r}{M_{\max}}.$$

Это значит, что при повороте ротора сельсина-датчика на угол α , ротор сельсина-приемника повернется на угол β . Угол β принято называть углом отработки. Таким образом, сельсин-приемник при наличии на его валу нагрузки всегда отрабатывает меньший угол, чем задается сельсин-датчиком. Величина ошибки зависит от момента нагрузки M_r .

Рассмотрим теперь случай, когда ротор сельсина-датчика равномерно вращается с угловой скоростью ω_{p1} , причем отношение $\frac{\omega_{p1}}{c} = \frac{\omega_{p1}}{\omega}$ мало, если c — основная частота.

Для вычисления момента M_c можно пользоваться предыдущей формулой, в которой теперь α и β будут переменными величинами. Для произвольного момента времени

$$\alpha = \alpha_0 + \omega_{p1}t.$$

Для установившегося режима, когда движение сельсинов установится, можем написать:

$$M_r = M_{\max} \sin(\alpha_0 + \omega_{p1}t - \beta).$$

Отсюда

$$\alpha_0 + \omega_{p1} t - \beta = \arcsin \frac{M_r}{M_{\max}} = \theta. \quad (\text{III-63})$$

При малых значениях θ можно принимать $\theta \approx \frac{M_r}{M_{\max}}$. Дифференцируя уравнение $\alpha_0 + \omega_{p1} t - \beta = \theta$, получим

$$\omega_{p1} = \frac{d\beta}{dt} = \omega_{p2}; \quad \beta = (\alpha_0 + \omega_{p1} t) = \theta. \quad (\text{III-64})$$

Величина ω_{p2} есть угловая скорость сельсина-приемника. Полученная формула позволяет заключить, что ротор сельсина-приемника в установившемся режиме вращается с той же скоростью, что и ротор сельсина-датчика. Но отработанный угол приемника меньше соответствующего угла датчика на величину ошибки θ . Если сельсин-датчик и сельсин-приемник работают не только с одной угловой скоростью, но имеют к тому же равенство заданных и отработанных углов, говорят, что сельсины работают синфазно. Обычно погрешность синфазности в установившемся режиме не превосходит угловой ошибки θ . Чтобы уменьшить погрешность синфазности, необходимо уменьшать по возможности момент M_r , т. е. момент трения и других сопротивлений вращению ротора сельсина. При $M_r = 0$ $\theta = 0$, сельсины работают синфазно.

В переходном режиме движение ротора сельсина-приемника выражается дифференциальным уравнением:

$$M_c = I \frac{d^2\beta}{dt^2} + M_r$$

Здесь: M_c — синхронизирующий момент;

β — угол поворота ротора сельсина;

I — момент инерции ротора;

M_r — момент на валу сельсина от сил трения и других сопротивлений вращению.

Современные сельсины-приемники для устранения колебаний в переходном режиме и ускорения процесса затухания, как правило, снабжаются демпферной обмоткой, или другими демпфирующими устройствами. Эта обмотка развивает демпферный момент M_d , пропорциональный скорости ротора сельсина и направленный против движения

$$M_d = D \frac{d\beta}{dt},$$

В этом случае уравнение переходного режима будет

$$M_c = I \frac{d^2\beta}{dt^2} + D \frac{d\beta}{dt} + M_r$$

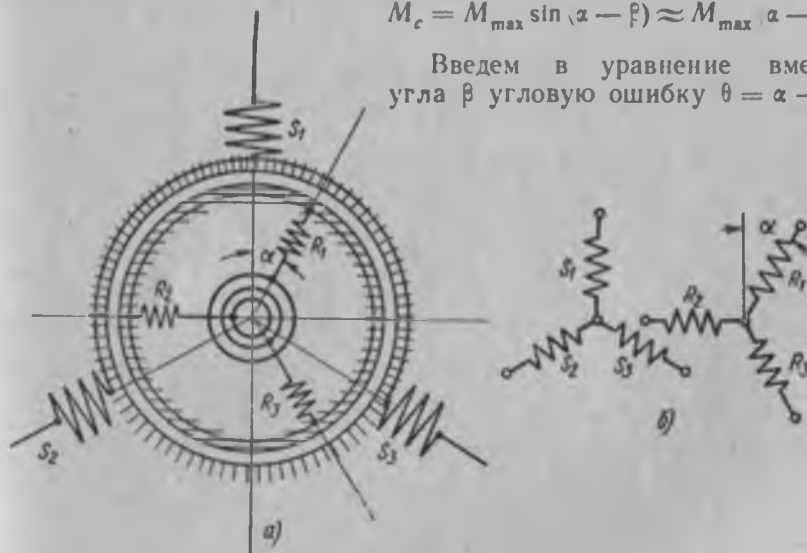
Если нагрузка на валу сельсина представляет только сухое трение, то $M_r = \pm M_T$ и уравнение переходного режима примет вид:

$$M_c = I \frac{d^2\beta}{dt^2} + D \frac{d\beta}{dt} \pm M_T.$$

Рассмотрим переходный процесс в области, близкой к установившемуся режиму. Тогда можно принять, что

$$M_c = M_{\max} \sin(\alpha - \beta) \approx M_{\max} (\alpha - \beta).$$

Введем в уравнение вместо угла β угловую ошибку $\theta = \alpha - \beta$.



Фиг. 74. Схема дифференциального сельсина.

$$\text{Имеем } \beta = \alpha - \theta; \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\theta}{dt}; \quad \frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} - \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Подставляя эти значения, приходим к уравнению:

$$\frac{I}{M_{\max}} \theta'' + \frac{D}{M_{\max}} \theta' + \theta = \frac{I}{M_{\max}} \alpha'' + \frac{D}{M_{\max}} \alpha' \pm \frac{M_T}{M_{\max}}.$$

$$\text{Для случая } \alpha = \text{const}; \quad \theta_{\text{уст}} = \pm \frac{M_T}{M_{\max}} \quad \text{при } \alpha = \omega t; \quad \theta_{\text{уст}} = \frac{D\omega}{M_{\max}} \pm \frac{M_T}{M_{\max}}.$$

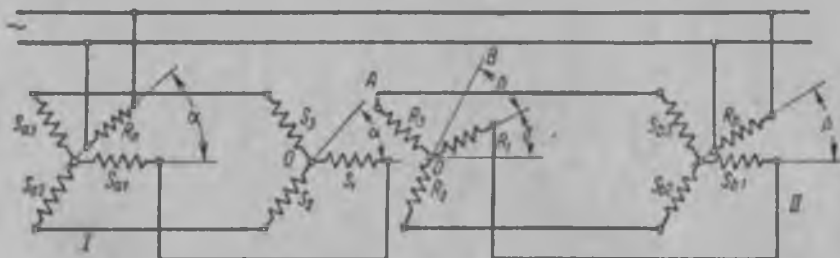
Отсюда следует, что величина $\pm \frac{M_T}{M_{\max}}$ определяет величину зоны нечувствительности сельсина-приемника.

Дифференциальные сельсины. Схема дифференциального сельсина изображена на фиг. 74.

Существенным отличием этого сельсина от рассмотренных выше является исполнение ротора с распределенной равномерно по окруж-

ности барабана трехфазной обмоткой, соединенной в звезду. На фиг. 74 схематично каждая фаза ротора, как и статора, показана отдельной обмоткой. Вывод от ротора сделан через контактные кольца, укрепленные на валу ротора и изолированные друг от друга. Электрическая схема дифференциального сельсина показана справа на той же фигуре.

Для уяснения работы дифференциального сельсина допустим, что к статору нашего сельсина подводится серия напряжений от двух простых сельсинов I и II, как показано на фиг. 75.



Фиг. 75. Схема включения дифференциального сельсина.

Допустим, что роторы R_a и R_b неподвижны и зафиксированы в своих положениях под углами α и β к осям обмоток первой фазы.

Аналогично можно показать, что если пренебречь активным сопротивлением обмоток сельсинов, то значение момента вращения M_c дифференциального сельсина будет

$$M_c = M_{\max} \sin(\alpha - \beta \pm \delta), \quad (III-65)$$

где δ — угол отработки дифференциального сельсина.

Если отсутствуют трение и нагрузка на валу дифференциального сельсина, равновесие при установившемся режиме возможно только при $\alpha - \beta \pm \delta = 0$, т. е. при

$$\delta = \pm(\alpha - \beta). \quad (III-66)$$

Таким образом, угол отработки δ дифференциального сельсина равен разности углов α и β простых сельсинов при условии, что включение сельсинов выполнено по схеме, изображенной на фиг. 75.

При наличии нагрузки M_r на валу ротора сельсина, или наличия трения, угол отработки δ будет меньше на величину угловой ошибки θ , которая может быть вычислена из формулы:

$$\sin(\alpha - \beta \pm \delta) = \frac{M_r}{M_{\max}} = \sin \theta;$$

$$\alpha - \beta \pm \delta = \arcsin \frac{M_r}{M_{i \max}} = \theta;$$

$$\delta = \pm(\alpha - \beta - \theta). \quad (III-67)$$

Предположим теперь, что сельсины I и II равномерно вращаются с угловыми скоростями ω_a и ω_b .

Если эти скорости незначительны по сравнению со скоростью $\omega = 2\pi c$, где c — основная частота, то может быть использована полученная выше формула:

$$\delta = \pm (\alpha - \beta - \theta).$$

Дифференцируя это уравнение по времени, найдем, что для установившегося режима:

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega_d =$$

$$= \pm (\omega_a - \omega_b), \quad (III-63)$$

т. е. угловая скорость ω_d дифференциального сельсина в установившемся режиме равна разности угловых скоростей простых сельсинов, включенных по схеме, показанной на фиг. 76. Что касается угла δ , отработанного дифференциальным сельсином за время t , то этот угол определяется выражением

$$\delta_t = \pm [(\omega_a - \omega_b)t + \alpha_0 - \beta_0 - \theta]. \quad (III-69)$$

При равенстве скоростей ω_a и ω_b обоих сельсинов и равенстве начальных углов α_0 и β_0 отработанный угол дифференциального сельсина

$$\delta_t = \pm \theta \quad (III-70)$$

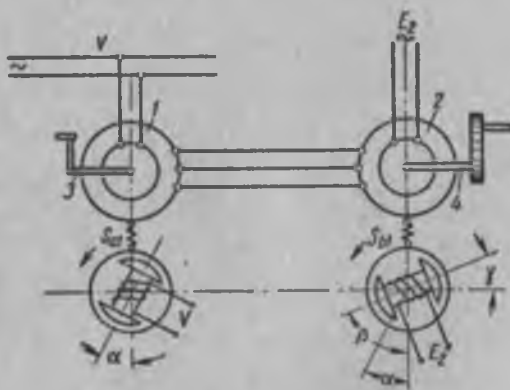
будет равен угловой погрешности θ .

Из сказанного выше следует, что дифференциальный сельсин, включенный по указанной выше схеме, может служить для измерения рассогласования угла или скорости в следящих системах, т. е. исполнять роль чувствительного элемента.

Сельсин-трансформатор. Назначение сельсин-трансформатора — создавать выходное напряжение, которое по величине и знаку однозначно определяется углом отклонения сельсина-датчика, или углом рассогласования между сельсинами.

Схема включения сельсин-трансформатора изображена на фиг. 76.

Сельсин-датчик насажен на командную ось 3, а сельсин-трансформатор на исполнительную ось 4. Напряжение на зажимах обмотки ротора сельсина 2 является выходным напряжением.



Фиг. 76. Схема включения сельсин-трансформатора:

1 — сельсин-датчик; 2 — сельсин-трансформатор; 3 — командная ось; 4 — исполнительная ось.

Допустим, что роторы обоих сельсинов неподвижны и образуют с первой фазой статоров S_{a1} и S_{b1} соответственно углы α и β (см. фиг. 76).

Можно показать, что в обмотке ротора сельсин-трансформатора 2 индуцируется напряжение

$$E_2 = E_{2\max} \cos \omega t \cos (\beta - \alpha).$$

$$\text{При } \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$E_2 = E_{2\max} \cos \omega t \sin \alpha. \quad (111-71)$$

Таким образом, при неподвижном роторе $\beta = \frac{\pi}{2}$ выходное напряжение сельсин-трансформатора пропорционально синусу угла α поворота ротора сельсина-датчика.

Закрепим ротор сельсин-трансформатора на исполнительной оси таким образом, чтобы при неподвижной оси обмотки фаз ротора были смещены относительно соответствующих обмоток статора, на угол 90° в сторону вращения.

При повороте исполнительной оси на угол β , обмотка ротора будет смещена относительно обмотки статора S_{b1} на угол $\beta + \frac{\pi}{2}$.

Тогда выходное напряжение будет:

$$E_2 = E_{2\max} \cos \omega t \cos \left(\beta + \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = E_{2\max} \cos \omega t \sin (\alpha - \beta), \quad (111-72)$$

т. е. пропорционально синусу угла рассогласования между командной и исполнительной осями.

Если оба сельсина вращаются соответственно со скоростями ω_a и ω_b , то углы β и α становятся переменными величинами:

$$\alpha = \alpha_0 + \omega_a t \text{ и } \beta = \beta_0 + \omega_b t.$$

Предыдущая формула примет вид

$$E_2 = E_{2\max} \cos \omega t \cos [\beta_0 - \alpha_0 - (\omega_a - \omega_b) t].$$

$$\text{При } \beta_0 - \alpha_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$E_2 = E_{2\max} \cos \omega t \sin (\omega_a - \omega_b) t, \quad (111-73)$$

В этом случае выходное напряжение E_2 будет иметь частоту модуляции, зависящую от разности угловых скоростей сельсина-датчика и сельсина-трансформатора. При $\omega_a = \omega_b$ значение E_2 обращается в 0.

Погрешность сельсинов. Точность дистанционной передачи сельсинами угловых перемещений зависит от моментов трения и нагрузки на валу сельсина-приемника, зубчатого строения ротора,

а также от качества выполнения сельсинов, в частности от точности балансировки роторов и идентичности параметров сельсина-датчика и приемника.

Установлены следующие стандартные классы точности сельсинов (табл. 2).

Таблица 2

Класс точности	I	II	III	IV
Максимально-допустимая ошибка	$\pm 0.75^\circ$	$\pm 1.5^\circ$	$\pm 2.5^\circ$	$\pm 5^\circ$

Точность сельсинной передачи зависит, как было указано выше, от отношения $\frac{M_r}{M_{\max}}$. Уменьшая с одной стороны момент трения M_r на валу сельсина, а с другой выбирая надлежащие размеры и электрические параметры сельсина, от которых зависит значение опрокидывающего момента $M_{\max}$, можно достигнуть желаемой степени точности.

Выше было установлено, что синхронизирующий момент сельсина

$$M_{\text{синхр}} = M_{\max} \sin(\alpha - \beta)$$

при прочих равных условиях зависит от угла рассогласования $\theta = \alpha - \beta$.

При $\theta = 0$ и $\theta = 180^\circ$ синхронизирующий момент равен нулю. Таким образом, возможны два положения равновесия. Однако равновесие при $\theta = 180^\circ$ будет неустойчиво, так как при незначительном уменьшении угла 180° появляется синхронизирующий момент, заставляющий систему уменьшить θ до нуля, а при увеличении синхронизирующий момент стремится повернуть систему до $\theta = 360^\circ$.

Если рассогласование превысит 180° , ротор сельсина-приемника начнет стремиться к положению $\theta = 360^\circ$, называемому ложным нулем, так как при этом отработанные углы датчика и приемника могут резко отличаться друг от друга. Для устранения этого недостатка можно применять системы с двумя шкалами: грубая шкала управляется одной сельсинной передачей угла, в которой рассогласование на 360° исключается устройством ограничителей, и точная шкала, приводимая в действие другой сельсинной передачей. Эта шкала работает в пределах рассогласования осей первой шкалы.

Влияние погрешности сельсинов на точность передачи угла может быть значительно уменьшена путем введения редуктора между валом сельсина и валом механизма. Пусть, например, передача между главной и промежуточной исполнительными осями будет $k > 1$. Это зна-

чит, что отработанному углу β главной оси отвечает угол $k\beta$ промежуточной. Если заданное значение угла поворота главной оси будет α , то поворот сельсина-датчика должен быть $k\alpha$.

Угловая ошибка сельсинной передачи θ

$$\theta = k\alpha - k\beta = k(\alpha - \beta).$$

Угловая ошибка главной оси $\alpha - \beta = \frac{\theta}{k}$.

В соответствии со сказанным для уменьшения угловой ошибки применяют устройство двух сельсинных передач. Параллельно основной сельсинной передаче включается другая ускоренная передача, причем сельсин-трансформатор этой передачи соединяется редуктором с управляемым механизмом. Обе передачи должны быть так отрегулированы, чтобы нулевому рассогласованию отвечали нулевые напряжения на выходных обмотках обеих систем. Переключение одной системы на другую производится специальным переключающим устройством релейного типа.

При рассмотрении приближенной теории сельсина имели в виду малую частоту модуляции ϵ_p сравнительно с несущей частотой ϵ . Число периодов $\epsilon = 50$ гц при двухполюсном сельсине отвечает 3000 об/мин. Опыт показывает, что при скорости вращения роторов сельсинов до 500 в минуту пользование приведенными выше формулами дает погрешность не выше 5%.

ГЛАВА IV

УСИЛИТЕЛИ, ИСПОЛНИТЕЛЬНЫЕ МЕХАНИЗМЫ, РЕЛЕ

1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Регулирующие сигналы, получаемые от чувствительных элементов или датчиков, в большинстве случаев недостаточны по мощности, чтобы привести непосредственно в движение регулирующий орган. Это обстоятельство приводит к необходимости применения усилителей. Выходная мощность датчика во многих случаях составляет величину порядка 1×10^{-4} *вт*, тогда как мощность, требуемая для движения исполнительного механизма, может быть равна нескольким киловаттам. В ряде случаев, усилители наряду с функцией усиления мощности, выполняют функцию преобразования выходной величины чувствительного элемента в другой вид, более удобный для целей работы системы автоматического регулирования. Усилители выполняются либо как самостоятельные элементы, либо входят в состав исполнительных механизмов (сервомоторов) и являются в таком случае их неотъемлемой частью. Наибольшее распространение получил второй вид усилителей. Все исполнительные механизмы, являясь вспомогательными двигателями, имеют управляющий элемент (золотник, струйную трубку, управляющую обмотку возбуждения и пр.).

Следует отметить, что в технической литературе управляющие элементы серводвигателей часто рассматриваются как самостоятельные усилители. Это нельзя считать правильным, так как усиление мощности зависит не только от размеров золотника, но и размеров сервомотора. Однако с точки зрения математической теории автоматического регулирования такое выделение управляющих элементов исполнительных механизмов как самостоятельных усилителей можно признать целесообразным.

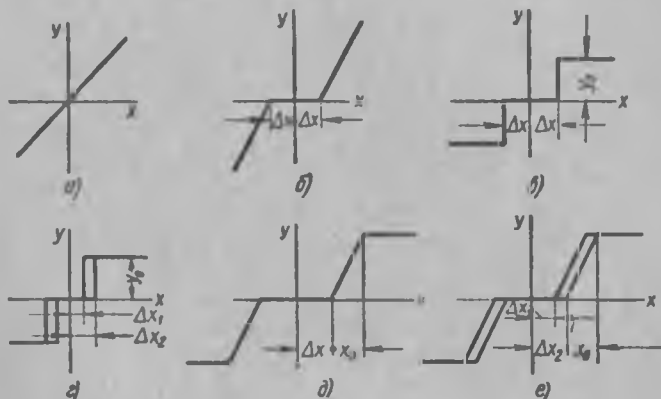
2. УСИЛИТЕЛИ

Основным показателем усилителя является его коэффициент усиления по мощности. Под этим коэффициентом понимается отношение мощности на выходе усилителя к мощности на его входе.

Для усилителей, выполняющих одновременно роль управляющих элементов серводвигателей, коэффициент усиления представляет отношение выходной мощности серводвигателя к выходной мощности датчика, или чувствительного элемента.

Помимо усиления мощности, усилители часто выполняют функцию усиления других входных величин, как например, усиление перемещения, скорости и т. п.

Усилительные устройства регуляторов отличаются большим разнообразием. Различают усилители: по величине выходной мощности; по виду вспомогательной энергии, подводимой к усилителю; по коэффициенту усиления; по принципу действия; по форме характеристики, выражающей зависимость между выходной и входной величинами.



Фиг. 77. Основные виды характеристик усилителей.

Выходные мощности усилителей, применяемых в системах автоматического регулирования, колеблются от долей ватт до десятка и более киловатт.

При малых значениях выходной мощности (до 100 *вт*) применяются обычно электронные усилители с различными схемами включения. При большей мощности на выходе пользуются всеми другими видами усилителей.

По виду используемой вспомогательной энергии усилители разделяются на гидравлические, пневматические, электрические и комбинированные.

Возможный коэффициент усиления по мощности, в зависимости от принципа действия и конструкции усилителя, может колебаться от 10 до 10^7 . Большое усиление мощности можно получить от релейных, золотниковых, струйных усилителей, а также от усилителей дроссельного типа.

Форма характеристики, выражающей зависимость между выходной y и входной x величинами усилителя при установившемся режиме, может иметь разнообразные виды.

Различают следующие основные виды этих характеристик, схематически изображенных на фиг. 77.

На фиг. 77, а показан линейный усилитель, у которого выходная величина пропорциональна входной на всем интервале регулирования.

На фиг. 77, б показан нелинейный усилитель, у которого в пределах рабочей зоны регулирования не соблюдается пропорциональность между входом и выходом.

Нелинейные усилители можно разделить на следующие группы.

1) нелинейные усилители с зоной нечувствительности (фиг. 77, б);
2) усилители релейного типа (фиг. 77, в), характеризующиеся тем, что выходной сигнал их равен нулю до тех пор, пока $x < \Delta x$, но при $x > \Delta x$ выходной сигнал сразу достигает постоянного значения y , которое остается постоянным при дальнейшем увеличении x ;

3) усилители релейного типа с различными значениями тока срабатывания и возврата реле (фиг. 77, г). Здесь диаграмма имеет форму петли гистерезиса;

4) усилители с зоной нечувствительности и насыщением (фиг. 77, д). Такую характеристику можно, например, иметь для сервомотора с золотником, у которого ход больше величины открытия окон, вследствие чего имеет место перекрытие окон золотника;

5) усилители с зоной нечувствительности, насыщением и петлей гистерезиса (фиг. 77, е). Такой случай может иметь место при наличии, например, сухого трения или люфта в механизме усилителя.

Все приведенные характеристики, кроме указанной на фиг. 77, а, отличаются нелинейностью, что большей частью относится к недостаткам усилителя. Кроме этого недостатка, некоторые усилители обладают свойством запаздывания. Наибольшим запаздыванием отличаются магнитные усилители.

Электронные усилители, струйные реле и гидравлические золотники при обычных размерах и скоростях можно считать безынерционными с весьма незначительной погрешностью.

Исполнительные механизмы. Исполнительные механизмы регуляторов, часто называемые сервомоторами, предназначены для управления регулирующими органами. В качестве сервомоторов применяются электродвигатели постоянного или переменного тока, электромагниты, двигатели внутреннего сгорания, гидромоторы поршневые или ротационные, пневмодвигатели и др.

По виду вспомогательной энергии, используемой сервомоторами, последние делятся на электрические, гидравлические, пневматические и комбинированные.

По конструктивному признаку сервомоторы различаются на поршневые, с поступательным и вращательным движением поршня, электромагнитные, мембранные, электромоторные и комбинированные.

Основными показателями сервомоторов, характеризующими их регулируемую способность, являются: коэффициент усиления по мощности, скорость на выходе, развиваемое усилие на выходе, линейное или угловое перемещение на выходе.

По скорости сервомоторы делятся на две основные группы: сервомоторы с постоянной скоростью и сервомоторы с пропорциональной скоростью. В последнем случае имеется в виду, что выходная скорость сервомотора приблизительно пропорциональна входной величине, т. е. сигналу датчика. К первой группе принадлежат почти все электромоторные исполнительные механизмы переменного тока, если их электродвигатели не включены по специальной схеме.

Ко второй группе могут быть отнесены гидравлические и пневматические серводвигатели.

Если рассматривать на выходе сервомотора его линейное или угловое перемещение в зависимости от входной величины, то возможны два случая при установившихся режимах:

1. Выходная величина представляет некоторую функцию от входной $y = F(x)$. Это будут сервомоторы со статической характеристикой.

2. Производная выходной величины по времени (скорость выхода) есть функция входной $\frac{dy}{dt} = f(x)$.

Такие сервомоторы называются астатическими.

Гидравлические сервомоторы в пределах рабочего диапазона, или на значительной его части, имеют характеристику, близкую к линейной.

Регулирующие органы. Регулирующие органы предназначены для непосредственного воздействия на регулируемую среду, поступающую в объект регулирования. Цель этого воздействия—количественное или качественное изменение этой среды для поддержания заданного значения регулируемого параметра.

Всякий регулирующий орган характеризуется следующими показателями: величиной перестановочного усилия, необходимого для перемещения регулирующего органа, скоростью его перемещения и характеристикой изменения расхода регулируемой среды от перемещения регулирующего органа.

Как правило, регулирующий орган тесно связан с объектом регулирования и, во многих случаях, конструктивно встроен в объект (например, у всех силовых двигателей). Конструктивная форма регулирующего органа зависит, главным образом, от природы регулируемой среды и устройства объекта регулирования. Мы не будем касаться здесь описания конструкций регулирующих органов, поскольку они в большинстве случаев общеизвестны.

Требования к усилителям, сервомоторам и регулирующим органам. К современному усилителю предъявляются в основном следующие требования:

1. Усилитель должен иметь требуемый коэффициент усиления по мощности и другим параметрам, если он является одновременно преобразователем.

2. Характеристика усилителя должна быть в большинстве случаев возможно ближе к линейной.

3. Усилитель должен иметь допустимую нечувствительность.

4. Запаздывающее действие усилителя должно быть минимальным и не превышать допустимых пределов.

5. Влияние на работу усилителя гистерезиса, вызванного сухим трением, люфтом, разностью между током срабатывания реле и током возврата, должно быть незначительным.

Соответственно к сервомоторам предъявляются требования, вытекающие из того, что сервомоторы являются исполнительными органами, которые должны точно и своевременно выполнять перестановку регулирующего органа в соответствии с поступающими сигналами от чувствительного элемента. В основном эти требования следующие:

1. Мощность сервомотора должна обеспечивать при всех режимах перестановку регулирующего органа с заданной скоростью.

2. Линейное или угловое перемещение сервомотора на выходе должно быть согласовано с соответствующим перемещением регулирующего органа.

3. Характеристика сервомотора должна быть по возможности пропорциональной входному сигналу.

4. Отношение кинетической энергии движущихся частей к мощности сервомотора должно быть возможно минимальным.

От регулирующих органов требуется в основном иметь по возможности линейную характеристику изменения поступления в объект регулируемой среды в зависимости от перемещения регулирующего органа.

Ниже рассмотрены наиболее часто встречающиеся в авторегулирующих системах типы усилителей и сервомоторов.

3. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ И ПНЕВМАТИЧЕСКИЕ УСИЛИТЕЛИ И СЕРВОМОТОРЫ

Эта группа усилителей и сервомоторов характеризуется применением в качестве вспомогательного источника энергии жидкости под давлением или сжатого воздуха. Энергия этой среды вводится в систему усилителя и серводвигателя, чем и достигается усиление по мощности.

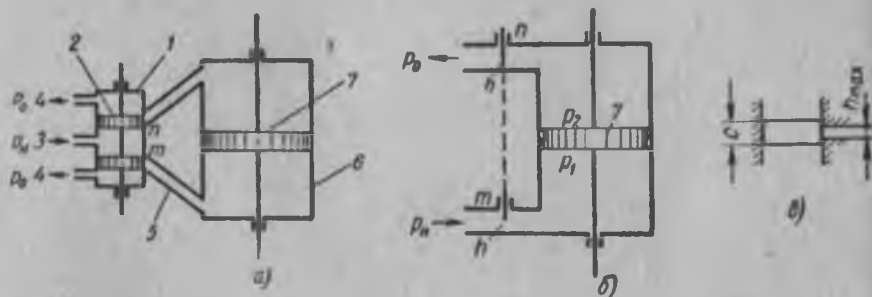
Все усилители этой группы могут быть разделены на три основных вида: золотники, струйные трубки и дроссели переменного сечения.

а) Золотники

Отсечной золотник. Схема сервомотора двустороннего действия с отсечным золотником показана на фиг. 78.

К цилиндрическому золотнику 1 по трубе 3 (фиг. 78, а) подводится вспомогательная среда (масло, вода, воздух) под давлением. Подвижная часть золотника представляет двойной поршень, который выполнен таким образом, что в среднем нейтральном положении

он закрывает одновременно оба окна (m и n) каналов 5, сообщающих полость золотника с цилиндром 6 сервомотора, или, как принято говорить, отсекает поступление рабочей среды в цилиндр сервомотора. Такие золотники носят название отсечных золотников. При смещении поршня золотника вверх от своего нейтрального положения верхняя полость цилиндра сервомотора сообщается через золотник с напорной трубой 3, а нижняя со сливной трубой 4. Благодаря разности давления по обе стороны поршня 7 последний будет двигаться вниз. При смещении поршня золотника 2 вниз из своего нейтрального положения поршень 7 получает обратное движение. Работу серво-



Фиг. 78. Схема сервомотора двустороннего действия с отсечным золотником.

мотора и золотника рассмотрим на упрощенной эквивалентной схеме, изображенной на фиг. 78, б. Здесь золотник заменен двумя задвижками (m и n), жестко связанными между собой, которые работают одновременно и совершенно идентично. Схема изображает работу сервомотора при движении вверх. При обратном движении следует поменять роли верхней и нижней подводящих труб.

Обозначим:

p_n — давление в напорной трубе 3;

p_0 — давление в сливных трубах 4;

p_1 — давление в нижней полости сервомотора;

p_2 — давление в верхней полости сервомотора;

S — рабочая площадь поршня сервомотора;

h — смещение задвижек m и n и смещение поршня золотника;

q — площадь проходного сечения канала золотника при смещении h и площадь проходного сечения, открытого задвижкой, при том же смещении;

R — перестановочная сила, которую считаем постоянной по величине и направлению на всем диапазоне регулирования.

Расход рабочей среды через задвижку m :

$$Q_m = \mu q \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (p_n - p_1)} \text{ м}^3/\text{сек}, \quad (IV-1)$$

где $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$ — ускорение силы тяжести;
 γ — удельный вес рабочей среды;
 μ — коэффициент расхода, зависящий от гидравлического сопротивления золотника и определяемый опытным путем.

Расход через задвижку n напишется по аналогии:

$$Q_n = \mu q \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (p_2 - p_0)}. \quad (IV-2)$$

Предполагаем, что скорость движения поршня сервомотора такова, что не происходит разрыва струи рабочей жидкости, а также отрыва поршня от нее.

Тогда для несжимаемых жидкостей $Q_m = Q_n$.

Отсюда

$$p_n - p_1 = p_2 - p_0 \text{ или } p_1 + p_2 = p_n + p_0. \quad (IV-3)$$

Если пренебречь массой поршня γ , то уравнение равновесия представится в виде:

$$(p_1 - p_2) S = R. \quad (IV-4)$$

При этом предполагаем, что вес поршня включен в состав R .

Уравнения (IV-3 и 4) дают возможность определить значения p_1 и p_2

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2} (p_n + p_0) + \frac{1}{2} \frac{R}{S}, \\ p_2 &= \frac{1}{2} (p_n + p_0) - \frac{1}{2} \frac{R}{S} \end{aligned} \right\} \quad (IV-5)$$

и по ним расход жидкости $Q_m = Q_n = Q$.

Анализируя формулу расхода, мы видим, что расход пропорционален площади открытия q окна золотника.

Из уравнения расхода $Q = v \cdot S$ вытекает, что скорость поршня

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{Cq}{S}; \quad C = \mu \sqrt{\frac{g}{\gamma} \left(p_n - p_0 - \frac{R}{S} \right)} \quad (IV-6)$$

также пропорциональна площади открытия золотникового окна.

В тех случаях, когда q изменяется пропорционально смещению h золотника, мы имеем сервомотор со скоростью движения, пропорциональной отклонению регулируемой величины. При отсутствии указанного условия эта пропорциональность будет лишь приближенной.

Выходная мощность сервомотора $W_{\text{вых}}$

$$W_{\text{вых}} = vR = Cq(p_1 - p_2). \quad (IV-7)$$

При полном открытии окон золотника можем принять

$$p_1 \approx p_n \text{ и } p_2 \approx p_0.$$

$$W_{\text{вых}} = C q_{\text{max}} (p_n - p_0) \text{ кг} \cdot \text{м/сек.} \quad (\text{IV-8})$$

Подбирая значения C , q_{max} и p_n , можно получить величину $W_{\text{вых}}$ до 100 *квт*. С другой стороны, входная мощность, расходуемая на движение золотника, обычно хорошо уравновешенного, составляет несколько ватт. Коэффициент усиления по мощности может достигнуть значения 10^5 . Усиление линейного перемещения в этих сервомоторах невелико и может быть доведено до 10.

До сих пор мы предполагали, что высота поршня золотника равна высоте канала h_{max} . При практическом выполнении в целях получения более плотной отсечки применяется некоторое перекрытие канала. Высота поршня берется

$$c = h_{\text{max}} + 2\Delta,$$

где Δ — перекрытие канала с одного края.

Величину Δ для малых золотников берут равной $\Delta = 0,05 \text{ мм}$, для больших — $\Delta = 0,3\text{--}0,5 \text{ мм}$.

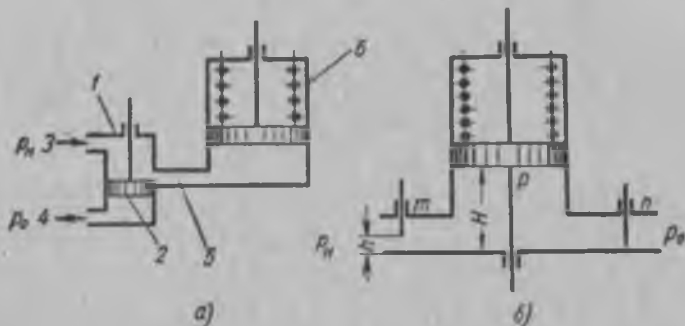
Применять большие значения Δ не рекомендуется во избежание запаздывания в обработке входного сигнала и увеличения степени нечувствительности, так как поршень золотника начинает открывать канал только после того, как отклонение на входе превзойдет значение Δ .

В обычно применяемых системах автоматического регулирования золотники можно подключать непосредственно к чувствительному элементу. Для перемещения малых золотников требуется усилие порядка 50—100 г, а для больших 2—3 кг. Величина хода для малых золотников берется 2—5 мм, а для больших 10 мм и выше. Отметим следующие модификации золотников сервомоторов.

Отсечной золотник с сервомотором одностороннего действия. Схема этого сервомотора дана на фиг. 79.

Здесь золотник 1 (фиг. 79, а) в отличие от предыдущего случая имеет одинарный поршень 2 и соответственно один канал 5 соединяет золотник с цилиндром сервомотора. В полости, не имеющей сообщения с золотником, находится пружина 6. При среднем нейтральном положении поршня золотника окно канала 5 перекрыто и поршень сервомотора неподвижен. При смещении поршня 2 вниз полость цилиндра сервомотора сообщается через золотник с напорной трубой 3, поршень сервомотора поднимается. При смещении поршня золотника вверх происходит обратный процесс, при котором полость цилиндра сервомотора сообщается со сливной трубкой 4. Работа сервомотора в данном случае может быть представлена упрощенной

эквивалентной схемой, представленной на фиг. 79, б, где золотник заменен двумя задвижками m и n , из которых одна закрыта. Задвижки работают попеременно.



Фиг. 79. Схема сервомотора одностороннего действия с отсечным золотником.

В этом случае давление p под поршнем и наибольшая выходная мощность $W_{\text{вых}}$ вычисляются по формулам

$$p = p_0 + \frac{F_0 + fH - R}{S}, \quad (\text{IV-9})$$

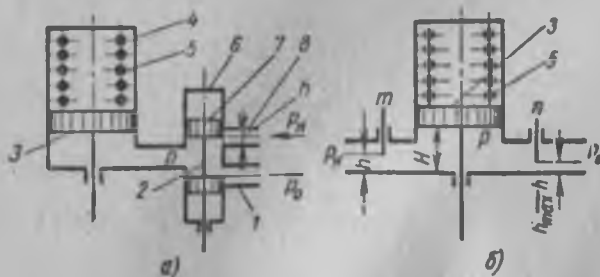
$$W_{\text{вых}} = F_0 \frac{C_0 q_{\text{max}}}{S}, \quad (\text{IV-10})$$

где $C_0 = \mu \sqrt{\frac{2H}{\gamma}} (p_n - p_0)$;

H — путь поршня от нижнего положения;

F_0 — сила упругости пружины при $H = 0$;

f — коэффициент жесткости пружины.



Фиг. 80. Схема проточного золотника с сервомотором.

Проточный золотник. Схема проточного золотника с сервомотором показана на фиг. 80.

Здесь золотник $б$ выполняется в отличие от предыдущих случаев проточным (фиг. 80, а). Цилиндр сервомотора 4 соединен с полостью 2

золотника, через которую протекает рабочая среда. Эта полость всегда сообщается с напорной 8 и сливной 1 трубами за исключением крайних положений золотника, когда проход одной из труб закрывается.

В зависимости от положения поршня 7 золотника в его камере 2 устанавливается разное давление рабочей среды. Это давление передается под поршень 3 сервомотора и заставляет последний занять положение, при котором имеет место равновесие между силой упругости пружины 5 и силой давления на него рабочей среды.

Работа сервомотора в данном случае может быть представлена на упрощенной схеме, показанной на фиг. 80, б, где золотник заменен двумя задвижками (m и n). Последние связаны между собой таким образом, что если подъем одной задвижки равен h , то подъем другой $h_{\max} - h$, где $h_{\max}$ есть наибольший подъем каждой задвижки.

В этом случае давление p под поршнем вычисляется по формуле

$$p = p_0 + (p_n - p_0) \frac{h}{h_{\max}}, \quad (\text{IV-11})$$

а наибольшая выходная мощность по формуле (IV-10).

б) Струйные трубки

Струйные трубки в качестве усилителей и одновременно управляющих элементов сервомоторов нашли наряду с золотниками, распространение в системах автоматического регулирования.

Принцип их действия основан на том, что скоростной напор струи жидкости, вытекающей из мундштука струйной трубки, превращается при ее отклонении от среднего положения в переменное давление рабочей жидкости в отходящих от сопла трубках. Устройство струйного усилителя можно видеть на фиг. 81, где изображена схема регулятора давления со струйной трубкой.

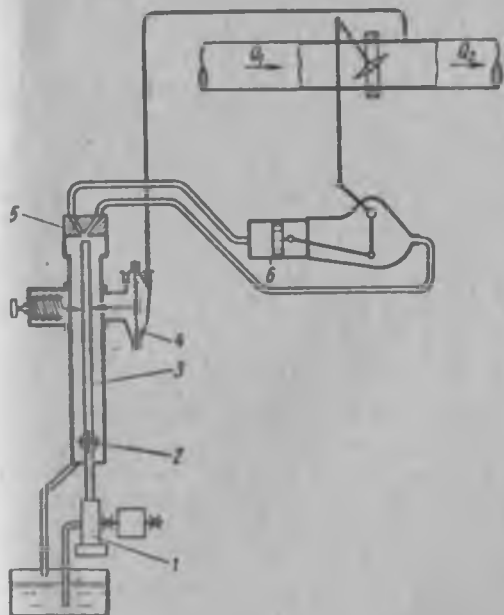
Здесь струйная трубка 3 вращается около полой цапфы 2, в которую рабочая жидкость подается под давлением насосом 1. Вытекающая из наконечника трубки струя жидкости попадает в оба канала приемного сопла 5, где скоростной напор струи превращается в давление, передаваемое через жидкость в цилиндр сервомотора 6. Смещение струйной трубки вызывается действием на нее чувствительного элемента давления 4.

На фиг. 82 показана отдельно струйная трубка с приемным соплом.

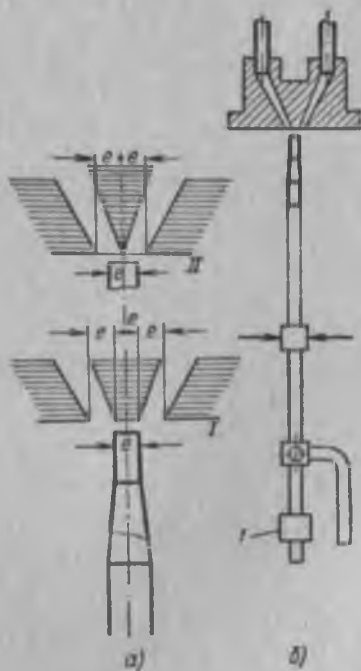
Сопло может быть выполнено либо по эскизу I, либо по эскизу II, приведенных на фиг. 82, а. В первом случае расстояние между кромками каналов приемного сопла делается равным размеру e струйной трубки, во втором случае — эти кромки сходятся вместе. При отклонении струйной трубки влево в случае выполнения по первому эскизу давление в левом канале возрастает с увеличением отклонения, а в правом канале остается постоянным и равным дав-

лению в камере струйной трубки. При отклонении вправо если каналов меняются.

При выполнении по эскизу II по мере смещения струйной трубки влево давление в правом канале сопла будет падать, а в левом возрастать. При перемене направления смещения изменение давления в кана-



Фиг. 81. Схема регулятора давления со струйной трубкой.



Фиг. 82. Струйная трубка с приемным соплом.

лах приемного сопла будет происходить в обратном порядке. В большинстве случаев предпочитают выполнение переменного сопла по второму эскизу.

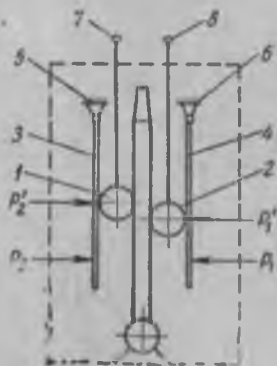
Струйные трубки обычно снабжаются противовесом 1 (фиг. 82, б), имеющим назначение компенсировать влияние веса трубки на ее отклонения под действием чувствительного элемента.

Рабочей жидкостью обычно служит чистое масло, подаваемое насосом под давлением 4—8 атм. Расход масла через струйную трубку при ее нормальных размерах составляет 300—500 л в час. Максимальное отклонение конца струйной трубки обычно составляет 1—2 мм.

На струйную трубку действуют усилие от чувствительного элемента и усилие от противодействующей пружины. Для изменения соотношения между усилиями, приложенными к трубке, т. е. для возможности настройки, в ряде случаев усилия передаются на

трубку не непосредственно, а с помощью так называемого корректорного устройства. Последнее схематично показано на фиг. 83.

Корректорное устройство состоит из промежуточных подвесок 3 и 4, вращающихся около опор 5 и 6 и корректорных камней 1 и 2, положение которых по длине трубки может быть в некоторых пределах изменено за счет смещения опор 7 и 8. От усилий P_1 и P_2 , возникающих от чувствительного элемента и пружины, приложенных к подвескам 3 и 4, образуются усилия P'_1 и P'_2 , которые непосредственно передаются трубке.



Фиг. 83. Схема корректорного устройства.

Точный теоретический расчет струйных трубок сложен. Для упрощения расчета примем следующие условия:

1. Расход Q рабочей жидкости через струйную трубку имеет постоянное значение, независящее от положения трубки.

2. Расход Q распределяется между правым и левым каналами сопла без потерь, т. е.

$$Q = Q_1 + Q_2,$$

где Q_1 — количество жидкости, попадающее в правый, а Q_2 — в левый каналы.

3. Весь скоростной напор жидкости в канале сопла превращается в давление без потерь.

4. Толщиной стенок трубки пренебрегаем.

5. Количество жидкости, попадающее из трубки в каждый канал, определяется по закону пропорциональности

$$Q_1 = Q \frac{\frac{1}{2}e \pm h}{e} \text{ и } Q_2 = Q \frac{\frac{1}{2}e \mp h}{e},$$

где h — отклонение конца трубки от среднего положения, причем $h < 0,5e$.

e — размер выходного отверстия трубки в плоскости отклонения. Верхние знаки для отклонения в одну сторону, нижние — в другую.

Обозначим отношение $\frac{h}{\frac{1}{2}e} = \epsilon$, причем $\epsilon < 1$.

Тогда

$$Q_1 = Q(1 + \epsilon) \text{ и } Q_2 = Q(1 - \epsilon).$$

Пусть входное сечение сопла будет S_e .

Рассмотрим отклонение струйной трубки. Входная скорость рабочей жидкости в канале

$$v_1 = \frac{Q_1}{S_c} = \frac{Q}{S_c} (1 + \epsilon). \quad (\text{IV-12})$$

То же в другом

$$v_2 = \frac{Q_2}{S_c} = \frac{Q}{S_c} (1 - \epsilon). \quad (\text{IV-13})$$

Считая, что скоростной напор струи полностью превращается в давление, найдем, согласно известному в гидравлике уравнению Бернулли, что давление в первом канале будет

$$p_1 = p_0 + \frac{v_1^2}{2g} \gamma = p_0 + \frac{Q^2 \gamma}{2g S_c^2} (1 + \epsilon)^2.$$

То же во втором

$$p_2 = p_0 + \frac{Q^2 \gamma}{2g S_c^2} (1 - \epsilon)^2.$$

p_0 — давление в камере струйной трубки.

Разность давлений в каналах сопла будет:

$$p_1 - p_2 = \frac{Q^2 \gamma}{S_c^2 g} \cdot 2\epsilon. \quad (\text{IV-14})$$

Наибольшая разность достигается при $\epsilon = 1$

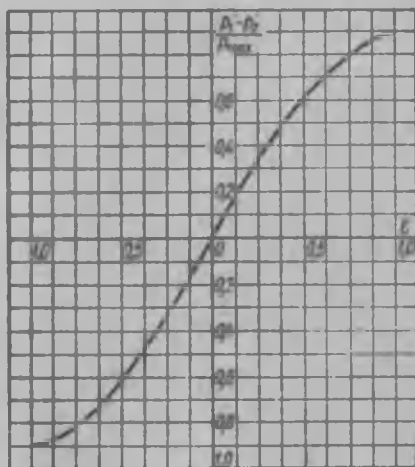
$$p_{\max} = (p_1 - p_2)_{\max} = \frac{2Q^2 \gamma}{S_c^2 g}; \quad \frac{p_1 - p_2}{p_{\max}} = \epsilon. \quad (\text{IV-15})$$

Таким образом, в идеальных условиях разность давлений в каналах сопла имеет линейную зависимость от смещения струйной трубки. В реальных условиях эта зависимость точно не соблюдается.

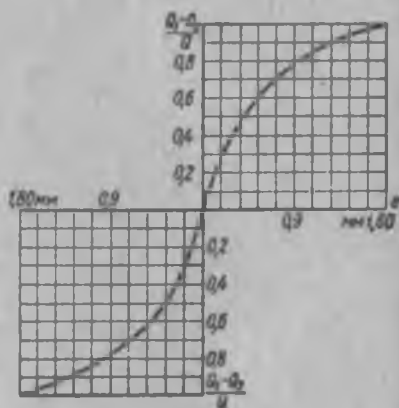
На фиг. 84 приведена диаграмма зависимости $\frac{p_1 - p_2}{p_{\max}}$ от смещения ϵ для реально выполненных струйных трубок.

На фиг. 85 приведена диаграмма отношения разности расходов $Q_1 - Q_2$ в каналах сопла к общему расходу Q жидкости через трубку в зависимости от линейного смещения струйной трубки.

Наибольшая разность давлений $p_1 - p_2$ в реальных условиях меньше теоретических значений вследствие потерь давления на 8—15%.



Фиг. 84. Диаграмма зависимости разности давлений в каналах приемного сопла от смещения струйной трубки.



Фиг. 85. Диаграмма зависимости разности расходов жидкости в каналах сопла от линейного смещения струйной трубки.

Теоретическая максимальная выходная мощность может быть определена из выражения:

$$W_{\text{вых}} = Q p_{\text{max}} \text{ кгм/сек} = \frac{21}{8} \cdot \frac{Q^3}{S_c^2} \text{ кгм/сек.} \quad (\text{IV-16})$$

С помощью струйных трубок можно получить коэффициент усиления до 10^4 .

в) Дроссели переменного сечения

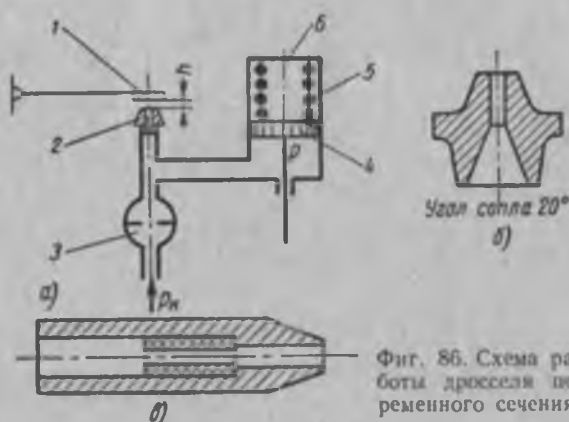
Принцип работы дросселей переменного сечения может быть уяснен из фиг. 86.

Усилитель состоит из двух дросселей:

- 1) дросселя 3 с постоянным гидравлическим сопротивлением;
- 2) дросселя 2 с переменным гидравлическим сопротивлением, изменяющимся при смещении заслонки 1 относительно сопла дросселя 2.

Рабочая жидкость под постоянным давлением p_n подается насосом в усилитель через дроссель 3 и дроссель 2 на слив. В зависимости от положения заслонки 1 между дросселями устанавливается давление p , которое распространяется под поршень сервомотора 4 и застав-

ляет его перемещаться, пока не установится равновесие между силой упругости пружины 5, помещенной в цилиндре сервомотора 4,



Фиг. 86. Схема работы дросселя переменного сечения.

и силой давления рабочей среды на поршень. Здесь мы имеем аналогию с проточным золотником.

Сохраняя принятые выше обозначения, можно установить следующую формулу для давления под поршнем:

$$p = \frac{p_n + p_0 \lambda}{1 + \lambda}, \quad (\text{IV-17})$$

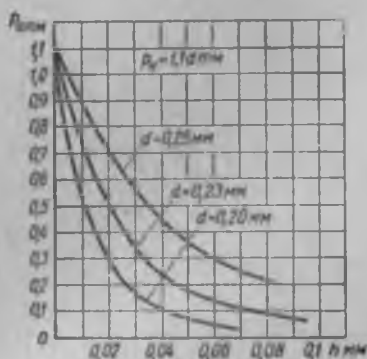
где $\lambda = \frac{q}{q_m}$ — отношение площадей проходов переменного и постоянного дросселей.

Таким образом, давление p под поршнем в пределах зоны регулирования изменяется от $p_{\min}$ до p_n , где $p_{\min}$ вычисляется по формуле $p_{\min} = p_0 + \frac{F_0 - R}{S}$.

На фиг. 86, б показано коническое сопло, которое при изменении зазора между соплом и заслонкой от 0 до 0,2 мм изменяет давление перед дросселем от 2 атм до 0.

На фиг. 86, в показано сопло для пневматических систем со сменной втулкой.

На фиг. 87 приведена диаграмма давления на входе этого сопла при различных диаметрах внутреннего отверстия сменной втулки и давлении $p_n = 1,1$ атм в зависимости от удаления заслонки.



Фиг. 87. Диаграмма давления на выходе сопла со сменной втулкой в зависимости от удаления заслонки и диаметров отверстий сменной втулки.

Теоретическая максимальная выходная мощность дроссельного усилителя может быть легко определена для случая $p_{\min} = p_0$

$$W_{\max} = F_0 v_{\max} = \frac{C_0 F_0 q m}{S} \text{ кгм/сек.} \quad (\text{IV-18})$$

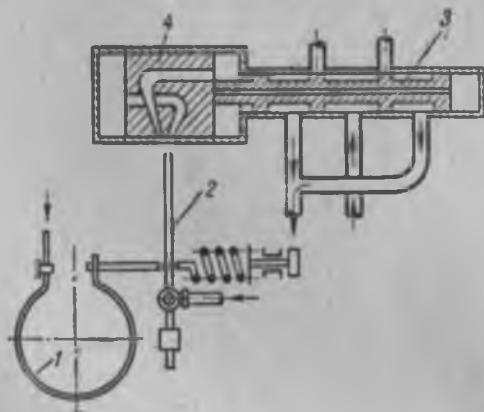
Дроссельным усилителем можно достигнуть коэффициента усиления до 10^6 .

Конструктивное выполнение дроссельных усилителей может быть весьма различно. Дроссели могут иметь форму задвижек, или заслонок поступательных и поворотных, сопел с заслонками, дроссельных игл, разделительных заслонок и пр.

4. КОМБИНИРОВАННЫЕ УСИЛИТЕЛИ

Комбинированные усилители представляют последовательное сочетание двух или трех усилителей описанных выше типов.

Для примера рассмотрим усилитель, схематически изображенный на фиг. 88.



Фиг. 88. Комбинированный усилитель:
струйная трубка — отсечной золотник.

Как видно, он состоит из двух простых усилителей — струйной трубки 2 и отсечного золотника 3. Чувствительный элемент 1 (манометрическая трубка) воздействует на струйную трубку 2, при этом сопло 4 которой выполнено в форме вспомогательного поршня. При отклонении струйной трубки происходит также сдвиг поршня 4 и связанного с ним золотника 3.

5. СЕРВОМОТОРЫ

Гидравлические и пневматические поршневые сервомоторы по своей конструкции и принципу действия делятся на две основные группы: 1 — с поступательным и 2 — с вращательным движением поршня.

Кроме этих видов, применяются иногда мембранные сервомоторы, многопоршневые сервомоторы с вращательным движением вала и ротационные шестеренчатые сервомоторы.

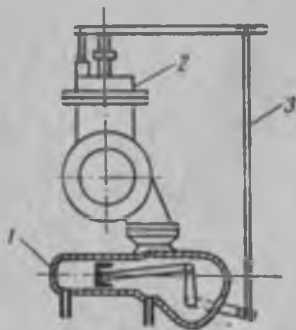
Остановимся на поршневых сервомоторах. На фиг. 78 показана схема поршневого сервомотора двустороннего действия с отсечным золотником в качестве управляющего элемента. На фиг. 81 приведен сервомотор также двустороннего действия, где вместо золотника

применена струйная трубка. Передача от сервомотора к регулирующему органу может быть весьма различной и зависит от конструкции регулирующего органа и объекта регулирования.

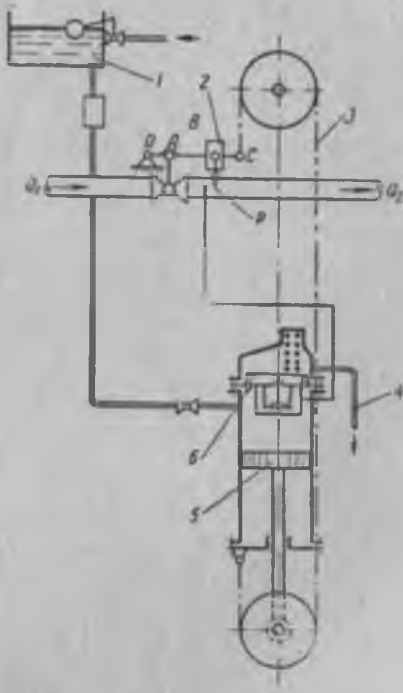
На фиг. 89 изображена передача от сервомотора 1 к регулирующему клапану 2.

Как видно, передача состоит из системы рычагов и тяг. Для возможности корректировки работы сервомотора при первоначальной установке на концах рычагов сделан ряд отверстий, что позволяет изменять в некоторых пределах положение тяги 3.

На фиг. 90 показано применение поршневого сервомотора одностороннего действия с дросселем переменного сопротивления.



Фиг. 89. Схема передачи от сервомотора к регулирующему клапану.

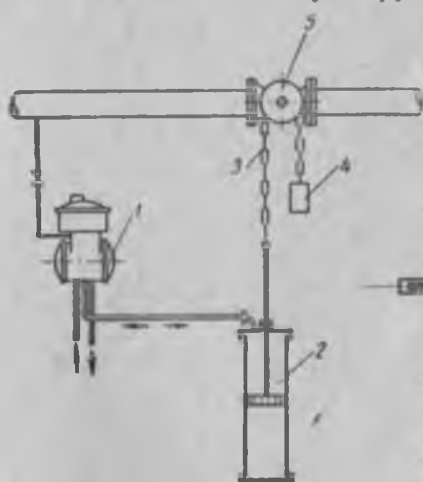


Фиг. 90. Схема сервомотора одностороннего действия с дросселем переменного сопротивления.

ния в качестве управляющего элемента. Рабочей жидкостью является вода, поступающая из бака 1, уровень в котором поддерживается постоянным. Ход поршня 3 сервомотора вниз происходит под действием давления жидкости на поршень, когда момент силы, передаваемой через трос 3, будет больше момента контргруза 2 рычага OC относительно точки O . Обратный ход поршня происходит под действием контргруза 2, когда сила давления жидкости на поршень уменьшается настолько, что момент контргруза 2 становится больше момента силы тяги троса 3 относительно той же точки опоры рычага OC . Отработанная жидкость выталкивается через сопло 6 в сливную трубу 4.

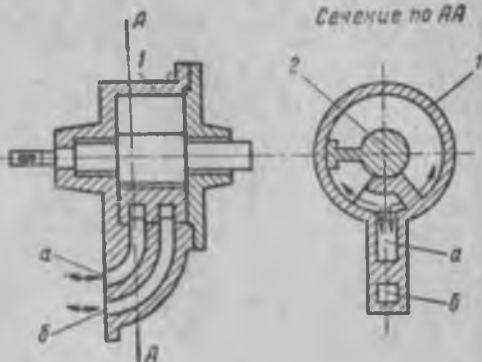
На фиг. 91 показана схема сервомотора одностороннего действия другой конструкции с цепной передачей к регулирующему органу.

Здесь управляющий элемент 1 (он же усилитель) конструктивно отделен от цилиндра сервомотора 2. Движение поршня сервомотора передается к регулирующему клапану 5 с помощью цепи 3 и груза 4. Ход поршня вниз происходит под действием давления жидкости, обратный ход под действием контргруза 4. Оработанная жидкость выталкивается в сливную трубу через управляющий элемент 1.



Фиг. 91. Схема сервомотора с цепной передачей к регулирующему органу.

На фиг. 92 приведена схема сервомотора с вращающимся поршнем:



Фиг. 92. Схема сервомотора с вращающимся поршнем.

Здесь внутри цилиндра 1 находится вращающийся поршень 2. Поршень разделяет цилиндр на две полости, которые сообщаются с каналами а и б. Эти каналы с помощью золотника (на фигуре не показан) попеременно подключаются к напорной и сливной трубам, что заставляет поршень поворачиваться то в одну, то в другую сторону.

В тех случаях, когда усилие для перестановки регулирующего клапана невелико, можно применять мембранные сервомоторы.

На фиг. 40 мембрана 1 с помощью рычажной передачи управляет регулирующим клапаном 2. Если мембрана является сама чувствительным элементом регулятора, то мы имеем регулятор прямого действия. Если в пространство над мембраной поступает вспомогательная среда, например воздух, давление которого устанавливается особым чувствительным элементом, то в этом случае мембрана играет роль сервомотора.

6. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ УСИЛИТЕЛИ

Электрические усилители отличаются от пневматических и гидравлических тем, что они конструктивно выполняются отдельно от сервомоторов и не являются их управляющими элементами.

По принципу действия и своему устройству электрические усилители делятся на магнитные, электромашинные, электронные и тиристорные.

К электрическим усилителям относятся также релейные усилители, которые будут рассмотрены отдельно.

а) Магнитные усилители

В последнее время магнитные усилители в области автоматики находят все большее применение. Принцип их действия основан на зависимости ферромагнитных материалов при переменном токе от величины подмагничивающего действия постоянного поля.

Схема простейшего магнитного усилителя показана на фиг. 93.

Магнитный усилитель состоит из двух дросселей I и II с подмагничиванием постоянным током. Обмотки I и 2 переменного тока обоих дросселей намотаны на оба сердечника так, что направления переменных магнитных потоков во внутренних сердечниках противоположны. Вследствие этого электродвижущие силы, индуктированные в обмотке 3 постоянного тока переменными магнитными потоками Φ , будут взаимно компенсироваться.

Входной величиной усилителя является напряжение E обмотки 3 постоянного тока, либо ток i , протекающий по этой обмотке. Эта обмотка называется управляющей или подмагничивающей. Выходной величиной магнитного усилителя является переменный ток в обмотках I, 2 и нагрузочном сопротивлении R_n . Величина этого тока равна:

$$I = \frac{U}{z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad (\text{IV-19})$$

где R — сумма активного сопротивления обмоток I, 2 и нагрузки R_n .

U — напряжение цепи переменного тока;

$\omega(L_1 + L_2) = \omega L$ — сумма реактивных сопротивлений обмоток I, 2

$$L_1 = L_2 = \frac{0,4 \pi \omega^2 S}{l} \mu \cdot 10^{-8}, \quad (\text{IV-20})$$

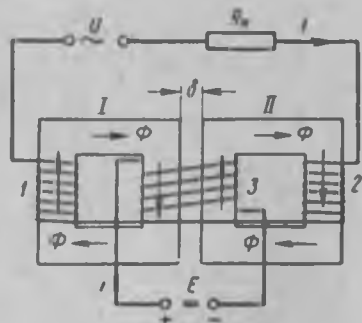
где L_1 и L_2 — индуктивности обмоток I и 2;

ω — число витков обмотки I или 2;

l — длина средней линии сердечника;

S — площадь сечения сердечника;

μ — коэффициент магнитной проницаемости сердечника



Фиг. 93. Схема простейшего магнитного усилителя.

Протекающий по обмотке управления постоянный ток меняет насыщение сердечника. При этом с увеличением силы тока уменьшается магнитная проницаемость, отчего реактивное сопротивление катушек 1 и 2 уменьшается, а величина тока I растет.

На фиг. 94 показана зависимость значения тока I от величины постоянного тока подмагничивания i .

Коэффициент усиления по току определяется как отношение

$$k_i = \frac{\Delta I}{\Delta i} = \frac{dI}{di}. \quad (IV-21)$$

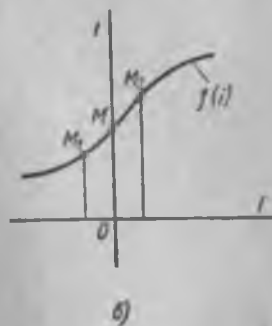
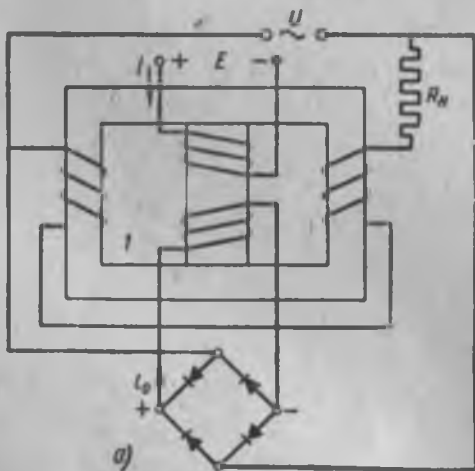
Усиление по мощности будет

$$k_w = \frac{dI}{di} \cdot \frac{U}{E} = \frac{\partial P}{\partial P_0}.$$

Фиг. 94. Зависимость тока I от величины тока подмагничивания i .

Затрачивая небольшую мощность P_0 на подмагничивание, мы можем управлять более значительной мощностью P на выходе. На фиг. 95 показана схема магнитного усилителя с большим коэффициентом усиления.

Для получения большего коэффициента усиления следует обеспечи-



Фиг. 95. Схема магнитного усилителя со вспомогательной обмоткой постоянного подмагничивания.

вать работу магнитного усилителя на наиболее крутом участке $M_1 M_2$ характеристики в рабочей точке M фиг. 95, б. В этом случае вводится вспомогательная обмотка постоянного подмагничивания, создающая ампервитки, отвечающие рабочей точке M характерн-

стики $I = f(i)$. В обмотке же управления ток изменяется только в пределах $-\Delta i < i < \Delta i$. Такая схема магнитного усилителя изображена на фиг. 95.

Здесь I является вспомогательной обмоткой постоянного подмагничивания, получающей питание от селенового или купроксного выпрямителя (фиг. 95, а).

В качестве материала для сердечников магнитных усилителей применяются трансформаторная сталь или пермаллой. Необходимо отметить, что коэффициент усиления по мощности зависит не только от качества материала сердечника, но и от частоты тока. С увеличением частоты усиление увеличивается. Так, при частоте 50 гц в магнитных усилителях из трансформаторной стали можно получить коэффициент усиления по мощности 50—200 и из пермаллоя 100—1000. При частоте 500 гц коэффициенты усиления соответственно увеличиваются и можно получить усиление для трансформаторной стали 100—800 и для пермаллоя 200—2000. Поэтому в магнитных усилителях обычно применяют повышенную частоту от 400 до 3000 гц.

Два сердечника, изображенные на фиг. 93, можно объединить в один трехстержневый. Однако при этом конструкция магнитопровода получается менее рациональной, так как сечение крайних стержней при этом приходится увеличивать вдвое. Чтобы избежать этого при практическом выполнении трехстержневого магнитного усилителя, средний стержень разрезают пополам и собирают его так, что между двумя его половинками остается воздушный зазор δ . Управляющая обмотка наматывается, как показано на фиг. 93, сразу на обе половинки внутреннего стержня.

Магнитный усилитель с обратной связью. Для получения большего усиления применяются магнитные усилители с обратной связью. Схема и характеристика магнитного усилителя с обратной связью показаны на фиг. 96.

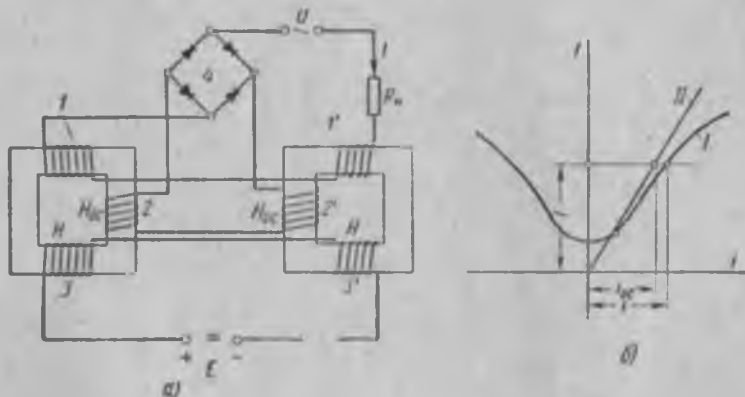
Переменный выходной ток I , проходящий через основные обмотки 1 и $1'$ (фиг. 96, а), выпрямляется с помощью выпрямителя 4 и поступает в обмотку $2-2'$ обратной связи, которая создает дополнительное подмагничивание с напряженностью $H_{ос}$, пропорциональной выходной величине I . Обмотка $3-3'$ является управляющей или подмагничивающей.

Дополнительное подмагничивание увеличивает еще более выходной ток I , что при одинаковом входном значении тока i обеспечивает увеличение коэффициента усиления устройства.

На фиг. 96, б даны характеристики магнитного усилителя без обратной связи (кривая I) и катушки обратной связи (прямая II).

Прямая II представляет зависимость намагничивающего тока $i_{ос}$ катушки обратной связи от выходного тока I . Для получения выходного тока I при отсутствии обратной связи требуется ток подмагничивания i . При наличии обратной связи значительная часть необходимого тока подмагничивания создается катушкой обратной связи,

именно i_{oc} . Остальная часть подмагничивающего тока $i - i_{oc}$, меньшая сравнительно с первой частью, должна создаваться управляющей обмоткой. Это приводит к увеличению коэффициента усиления. В магнитных усилителях с обратной связью можно получить коэффициент усиления мощности при частоте 50 гц: при сердечнике из трансформаторной стали до 1000; при сердечнике из пермаллоя 3000—10 000.



Фиг. 96. Схема и характеристики магнитного усилителя и катушки обратной связи.

При более высоких частотах можно получить значительно больший коэффициент усиления.

Дифференциальные магнитные усилители. Для увеличения крутизны характеристики $I = f(i)$ и придания ей симметричной формы относительно тока i применяют дифференциальные магнитные усилители. Схема такого усилителя изображена на фиг 97.

Усилитель состоит из двух идентичных магнитных усилителей, показанных на фиг. 97 а, получающих питание от трансформатора 1.

На фиг. 97, а обозначено:

w_1 — основные управляющие обмотки постоянного подмагничивания;

w_2 — дроссельные обмотки переменного тока;

I_1, I_2 — переменные токи в ветвях усилителя;

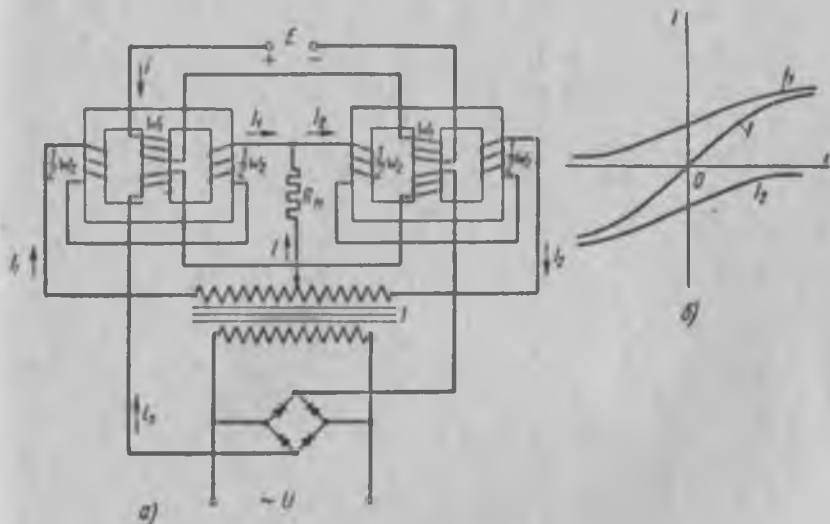
I — переменный ток в нагрузочном сопротивлении R_n .

Остальные обозначения совпадают с принятыми для фиг. 95. Управляющие и вспомогательные обмотки усилителей включены последовательно, а дроссельные обмотки параллельно. Благодаря этому через нагрузочное сопротивление R_n протекает разность токов I_1 и I_2 этих усилителей. Результирующая характеристика $I = f(i)$ получается как разность характеристик

$$I = I_1 - I_2 = f_1(i) - f_2(i) = f(i)$$

эта характеристика изображена на фиг. 97, б.

Дифференциальные магнитные усилители, как было отмечено, имеют более крутую характеристику зависимости тока нагрузки от тока подмагничивания, что имеет следствием значительно больший коэффициент усиления, чем у простых магнитных усилителей. Кроме того, в отличие от магнитных усилителей другого типа эта характеристика у дифференциальных усилителей проходит через начало координат и симметрична (симметрия II рода) относительно тока подмагничивания.



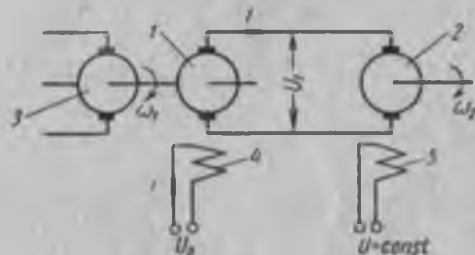
Фиг. 97. Схема дифференциального магнитного усилителя.

Благодаря этому при нулевом токе подмагничивания ток нагрузки также равен нулю, при изменении направления подмагничивающего тока ток нагрузки изменяет свою фазу на обратную. Дифференциальные магнитные усилители наряду с другими типами магнитных усилителей допускают соединение в каскад, что позволяет получить большие коэффициенты усиления. Благодаря указанным свойствам дифференциальные магнитные усилители часто применяются в системах автоматического регулирования. Существенным недостатком дифференциальных магнитных усилителей наряду с другими типами является их инерционность. Причина инерционности заключается в значительной индуктивности управляющей обмотки.

б) Электромашинные усилители

При малой мощности сервомоторов (электрических) для их управления обычно применяют мостовую схему с потенциометром. Для сервомоторов мощностью от 200 *вт* и выше до нескольких десятков

киловатт целесообразно применять электромашинные усилители. Различают два основных типа электромашинных усилителей: 1 — генератор постоянного тока с независимым возбуждением, 2 — специальный электромашинный усилитель с поперечным возбуждением и двумя парами щеток.



Фиг. 98. Схема электромашинного усилителя.

Схема электромашинного усилителя первого типа показана на фиг. 98.

Здесь сервомотором служит двигатель постоянного тока 2 с независимым возбуждением 5. Если угловая скорость двигателя ω_2 , а магнитный поток обмотки возбуждения Φ_2 мкс, то противодействующая электродвижущая сила якоря, если пренебречь реакцией якоря, будет:

$$e = C_2 \Phi_2 \omega_2,$$

где

$$C_2 = \frac{p_2 N_2}{2\pi a_2}. \quad (IV-22)$$

Здесь p_2 — число пар полюсов;

N_2 — число проводов обмотки якоря;

a_2 — число пар параллельных ветвей;

C_2 — постоянная электродвигателя, зависящая от параметров обмотки якоря;

ω_2 — угловая скорость сервомотора.

Обозначим дополнительно:

r_2 — сопротивление обмотки якоря;

I — сила тока якоря.

Если напряжение на зажимах якоря равно U_1 , то имеем следующее уравнение для определения угловой скорости сервомотора:

$$U_1 = e + Ir_2 = C_2 \Phi_2 \omega_2 + Ir_2,$$

$$\omega_2 = \frac{U_1 - Ir_2}{C_2 \Phi_2}.$$

Обычно Ir_2 очень мало сравнительно с U_1 , поэтому

$$\omega_2 \approx \frac{U_1}{C_2 \Phi_2}. \quad (IV-23)$$

Таким образом, при $\Phi_2 = \text{const}$ угловая скорость ω_2 сервомотора будет пропорциональна напряжению U_1 на зажимах якоря.

Электромашинный усилитель 1 имеет в качестве выходной величины напряжение U_1 и входной — управляющее напряжение U_0 на зажимах обмотки возбуждения 4. Генератор 1 приводится во вращение с постоянной угловой скоростью ω_1 вспомогательным двигателем 3 соответствующей мощности.

Напряжение U_1 , если пренебречь потерей напряжения в обмотке якоря, будет:

$$U_1 = C_1 \Phi_1 \omega_1,$$

где

$$C_1 = \frac{p_1 N_1}{2\pi a_1} \cdot 10^{-8}. \quad (\text{IV-24})$$

Здесь Φ_1 — магнитный поток обмотки возбуждения 4 зависит от напряжения U_0 . Если магнитная цепь ненасыщена, то можно принимать: $\Phi_1 = qU_0$, где q — коэффициент пропорциональности.

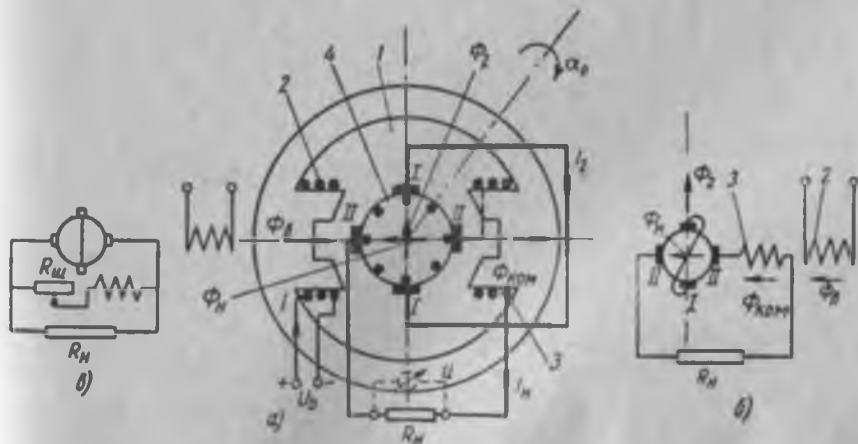
Коэффициент усиления по напряжению будет

$$k_u = \frac{\Delta U_1}{\Delta U_0} = C_1 q \omega_1, \quad (\text{IV-25})$$

а усиление по мощности выразится:

$$k_w = C_1 q \omega_1 \frac{I}{i}, \quad (\text{IV-26})$$

где I и i — выходной и входной токи усилителя.



Фиг. 99. Схема электромашинного усилителя с поперечным полем.

Электромашинный усилитель с поперечным полем. Схема электромашинного усилителя с поперечным полем дана на фиг. 99.

Здесь, так же как и в предыдущем случае, электромашинный усилитель представляет генератор постоянного тока 1 (фиг. 99, а),

вращаемый вспомогательным двигателем. Обмотка возбуждения 2 питается от независимого источника и является управляющей обмоткой усилителя. Напряжение на зажимах этой обмотки U_c или ток i_c представляют входную величину усилителя. Якорь 4 имеет две пары щеток: продольную и поперечную. Поперечные щетки 1—1' расположены под углом 90° к направлению потока Φ_c от управляющей обмотки возбуждения.

Пояснительная схема включения обмоток показана на фиг. 99, б. Продольные щетки совпадают с направлением потока Φ_c . Поперечные щетки замкнуты накоротко. Поток возбуждения Φ_c индуктирует в коротко-замкнутой цепи щеток 1—1' ЭДС E_1 , которая создает в этой цепи ток I_2 . Чтобы ограничить этот ток по величине, поток Φ_c должен быть сравнительно мал. Ток I_2 создает мощный магнитный поток реакции Φ_2 , направление которого с помощью специальных вырезов в полюсах статора ориентировано вдоль оси щеток 1—1'. При вращении якоря на главных (продольных) щетках 11—11' индуктируется электродвижущая сила усилителя E_2 . Если внешняя цепь замкнута на сопротивление R_n , то в этой цепи возникает ток I_n , который в свою очередь создает свой магнитный поток реакции Φ_n . Существование потока реакции Φ_n нельзя допустить по следующим соображениям: 1 — магнитный поток Φ_n может полностью компенсировать управляющий поток Φ_c , что сведет действие усилителя к нулю; 2 — магнитный поток Φ_n исказит зависимость выходного напряжения U от управляющего.

Поэтому на главных полюсах усилителя помещается компенсационная обмотка 3, которая полностью компенсирует поток Φ_n , создавая равный и противоположный по направлению поток $\Phi_{\text{комп}}$.

После сказанного нетрудно написать основные уравнения, выражающие зависимость между переменными и постоянными параметрами электромашинного усилителя.

Электродвижущая сила E_1 в короткозамкнутой цепи поперечных щеток будет:

$$E_1 = C_1 \Phi_c \omega_0 \approx C_1 q_c U_c \omega_0, \quad (\text{IV-27})$$

где C_1 — постоянная якоря;

ω_0 — угловая скорость якоря усилителя;

q_c — коэффициент пропорциональности между магнитным потоком Φ_c и напряжением U_c .

Ток I_2 в короткозамкнутой цепи поперечных щеток:

$$I_2 = \frac{E_1}{R_n} = \frac{C_1 q_c U_c \omega_0}{R_n}, \quad (\text{IV-28})$$

где R_n — сопротивление обмотки якоря.

Магнитный поток Φ_2 :

$$\Phi_2 = I_2 k_2 = \frac{C_1 q_2 U_b \omega_0 k_2}{R_n} = q U_b \omega_0. \quad (IV-29)$$

где k_2 — коэффициент пропорциональности между потоком Φ_2 и током I_2

$$q = \frac{C_1 q_2 k_2}{R_n}.$$

Электродвижущая сила E_2 электромашинного усилителя на щетках (II—II):

$$E_2 = C_2 \Phi_2 \omega_0 \approx C_2 q U_b \omega_0^2. \quad (IV-30)$$

Напряжение на выходных зажимах усилителя:

$$U = E_2 - I_n R_n.$$

Если пренебречь потерей напряжения в обмотке якоря, то

$$U \approx C_2 q U_b \omega_0^2. \quad (IV-31)$$

Коэффициент усиления по напряжению:

$$k_u = \frac{\Delta U}{\Delta U_b} = C_2 q \omega_0^2. \quad (IV-32)$$

Коэффициент усиления по мощности:

$$k_w = C_2 q \omega_0^2 \frac{I_n}{I_a}. \quad (IV-33)$$

Здесь была рассмотрена схема электромашинного усилителя с последовательным включением компенсирующей обмотки и нагрузочного сопротивления R_n . Встречаются также схемы электромашинных усилителей с параллельным включением этой обмотки с нагрузочным сопротивлением, как показано на фиг. 99, в. Установочное сопротивление R_y позволяет отрегулировать требуемое число ампервитков компенсационной обмотки и обеспечить полную компенсацию.

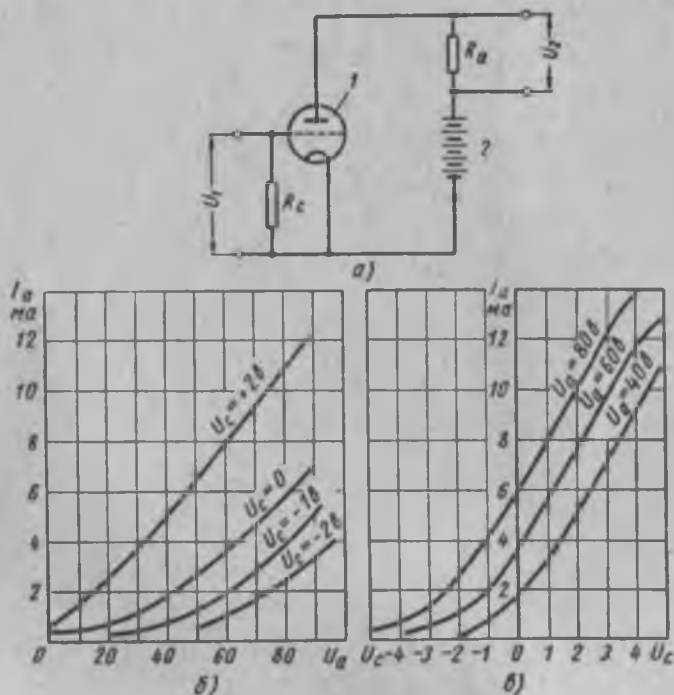
Коэффициент усиления по мощности, которого можно достигнуть в электромашинных усилителях с поперечным полем, составляет от 1000 до 10 000. Выходная мощность имеет пределы от 100 *вт* до 25 *квт*.

Электромашинный усилитель по существу имеет два каскада усиления: от цепи возбуждения к поперечным щеткам и от поперечных щеток к главным щеткам.

Следует отметить, что для правильной работы электромашинного усилителя полная компенсация потока реакции Φ_n должна быть тщательно выдержана. Недокомпенсация приводит к уменьшению усиления, перекомпенсация — к самовозбуждению и потере управления электромашинным усилителем.

в) Электронные усилители

Особенностью электронных усилителей является их высокая чувствительность к входной величине, они способны улавливать весьма малые входные мощности. Поэтому применение электронных



Фиг. 100. Схема однокаскадного электронного усилителя постоянного тока.

усилителей особенно целесообразно в тех случаях, когда чувствительные элементы или датчики имеют очень малую выходную мощность, порядка нескольких микроватт.

В системах автоматического регулирования находят применение электронные усилители как постоянного, так и переменного тока, однокаскадные или многокаскадные.

Схема и характеристики простого однокаскадного электронного усилителя постоянного тока приведены на фиг. 100.

На фиг. 100, а показана схема усилителя, где 1 — электронная лампа и 2 — анодная батарея; R_c — сеточное сопротивление; U_1 — входное напряжение усилителя; U_2 — выходное напряжение усилителя; R_a — сопротивление нагрузки; E_a — напряжение анодной батареи.

В нашем случае напряжение на аноде U_a будет:

$$U_a = E_a - I_a R_a = E_a - U_z,$$

если I_a — анодный ток.

С другой стороны, напряжение на сетке U_c равно U_1 . Коэффициент усиления в рассматриваемом случае будет:

$$\frac{\Delta U_z}{\Delta U_c} = \frac{\Delta I_a R_a}{\Delta U_c} = S R_a = \frac{S_0 R_i R_a}{R_i + R_a}. \quad (\text{IV-34})$$

Коэффициент усиления тем больше, чем больше крутизна характеристики S_0 и чем больше внутреннее сопротивление R_i лампы.

Входная мощность электронных усилителей может иметь величину порядка нескольких микроватт, тогда как предельная выходная мощность составляет 200—300 *вт*. Коэффициент усиления по мощности достигает порядка 10^6 — 10^7 .

Электронные усилители, кроме того, отличаются практически безынерционностью.

Трехэлектродная лампа, применяемая в качестве усилителя, имеет следующие показатели:

1. Статические анодные характеристики (фиг. 100, б)

$$I_a = f(U_a) \text{ при } U_c = \text{const}; \quad (\text{IV-35})$$

где I_a — анодный ток;

U_c — сеточное напряжение;

U_a — анодное напряжение.

2. Статические анодно-сеточные характеристики (фиг. 100, в)

$$I_a = \varphi(U_c) \text{ при } U_a = \text{const}. \quad (\text{IV-36})$$

3. Крутизну характеристики, под которой понимается отношение приращения анодного тока ΔI_a к приращению напряжения на сетке

$$S_0 = \frac{\Delta I_a}{\Delta U_c} \text{ или в пределе } S_0 = \frac{\partial I_a}{\partial U_c}. \quad (\text{IV-37})$$

4. Коэффициент усиления, представляющий отношение:

$$\mu_0 = \frac{\Delta U_a}{\Delta U_c} \text{ или в пределе } \mu_0 = \frac{\partial U_a}{\partial U_c}. \quad (\text{IV-38})$$

5. Внутреннее сопротивление лампы

$$R_i = \frac{\Delta U_a}{\Delta I_a} \approx \frac{\partial U_a}{\partial I_a}. \quad (\text{IV-39})$$

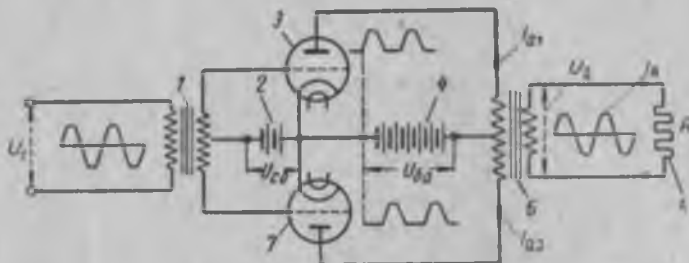
Между этими величинами существует зависимость:

$$S_0 R_i = \mu_0.$$

При отсутствии нагрузки в анодной цепи ($R_a = 0$)

$$\Delta I_a = S_0 \Delta U_c = \frac{\mu_0}{R_i} \Delta U_c. \quad (IV-40)$$

При нагрузке R_a отношение $\frac{\Delta I_a}{\Delta U_c}$, т. е. крутизна характеристики, уменьшится вследствие наличия сопротивления R_a .



Фиг. 101. Схема электронного усилителя переменного тока.

Теперь

$$\Delta I_a = \frac{\mu_0}{R_a + R_i} \Delta U_c \quad (IV-41)$$

или

$$\Delta I_a = S \Delta U_c,$$

где

$$S = \frac{\mu_0}{R_a + R_i} = S_0 \cdot \frac{R_i}{R_a + R_i},$$

так называемая динамическая крутизна характеристики.

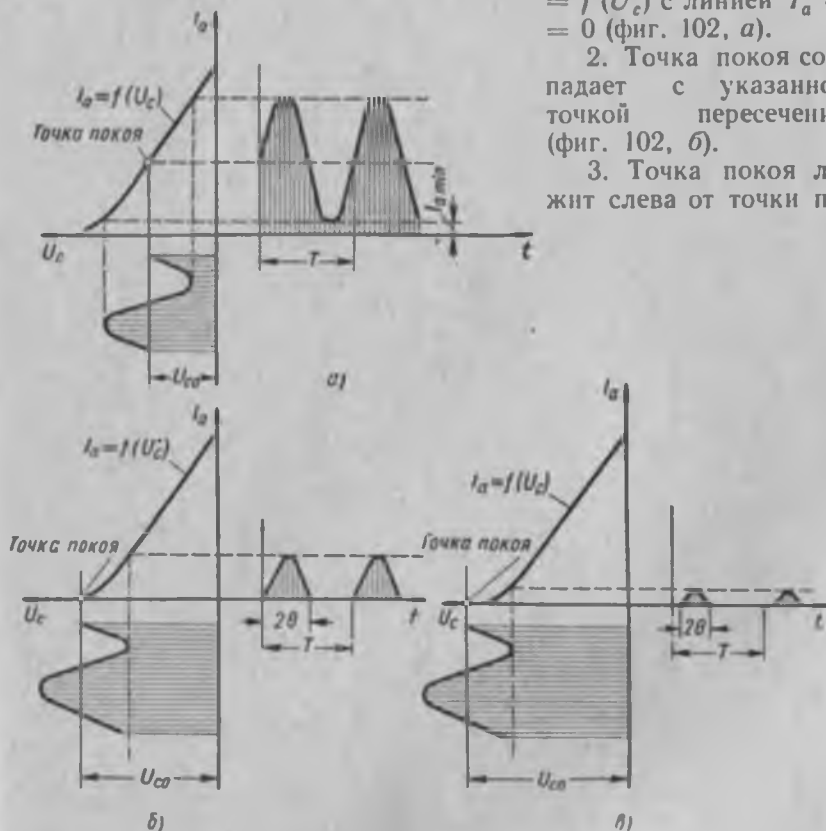
Электронный усилитель переменного тока. На фиг. 101 показана схема электронного усилителя переменного тока. Здесь дана двухтактная схема усиления. Входной регулирующий сигнал в виде переменного напряжения поступает на трансформатор 1, вторичные зажимы которого соединены с сетками ламп 2 и 3. Средняя точка вторичной обмотки присоединена к минусу сеточной батареи смещения 2, чем создается отрицательное напряжение на сетке, равное U_{co} . Аноды ламп присоединены к первичным зажимам анодного трансформатора 6, у которого средняя точка первичной обмотки соединена с плюсом анодной батареи 4, дающей напряжение U_{oa} . Вторичная обмотка трансформатора включена на сопротивление R нагрузки 5. Входной величиной является напряжение U_1 , выходной U_2 , сила тока нагрузки I_R , силы токов в цепи анодов будут I_{a1} , I_{a2} .

В усилителях переменного тока различают три случая отрицательного смещения напряжения (см. фиг. 102):

1. Точка покоя, определяемая величиной отрицательного смещения U_{co} , лежит вправо от точки пересечения характеристики $I_a = f(U_c)$ с линией $I_a = 0$ (фиг. 102, а).

2. Точка покоя совпадает с указанной точкой пересечения (фиг. 102, б).

3. Точка покоя лежит слева от точки пе-



Фиг. 102. Три случая отрицательного смещения напряжения на сетке.

ресечения характеристики $I_a = f(U_c)$ с линией $I_a = 0$ (фиг. 102, в).

На фиг. 102 показаны диаграммы усиления для всех трех случаев, причем предположено, что изменение напряжения на сетке происходит по синусоидальному закону.

В автоматическом регулировании обычно применяют только первые два случая смещения.

Для двухтактной схемы усиления на фиг. 101 необходима установка отрицательного сеточного смещения U_{co} по второму случаю. При этом каждое плечо усилителя будет пропускать и усиливать только одну полуволну входного напряжения U_1 . Проходя через трансформатор б, эти полуволны складываются в общее выходное напряжение U_2 , представляющее полную волну переменного тока.

Если отказаться в рассматриваемом случае от двухтактной схемы усиления и ограничиться одной электронной усилительной лампой, то мы получим на выходе только одну полуволну переменного тока.

Коэффициент усиления в рассматриваемом случае представляет отношение

$$\frac{\Delta U_2}{\Delta U_1}.$$

Напряжение U_c на сетке каждой лампы будет

$$U_c = U_{co} \pm \frac{1}{2} k_1 U_1.$$

Напряжение на анодах U_a :

$$U_a = U_{ao} \pm \frac{1}{2} \frac{U_2}{k_2}.$$

Здесь k_1 и k_2 — коэффициенты трансформации трансформаторов I и II .

Имеем

$$\Delta U_c = \pm \frac{1}{2} k_1 \Delta U_1 \text{ и } \Delta U_a = \pm \frac{1}{2} \frac{\Delta U_2}{k_2}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta U_2}{\Delta U_1} = \frac{k_1 k_2 \Delta U_a}{\Delta U_c} = S_0 R_{\Sigma} k_1 k_2. \quad (IV-42)$$

Электронные усилители применяются в системах автоматического управления и регулирования для выполнения функции усиления сигнала какой-либо величины. Электронный усилитель представляет по существу трехэлектродную вакуумную лампу, называемую триодом. Действие усилителя основано на том, что изменение напряжения на сетке изменяет ток анода во много раз более, чем изменение напряжения на самом аноде. Кроме того, электронные лампы могут соединяться каскадом, что весьма значительно увеличивает усиление. Коэффициент усиления при соединении каскадом будет определяться как произведение коэффициентов усиления отдельных электронных ламп, составляющих каскад.

Электронные усилители обладают большой чувствительностью. Эту чувствительность принято характеризовать коэффициентом чувствительности, который представляет отношение мощности в милливаттах, отдаваемой лампой в нагрузочном сопротивлении, к квадрату напряжения на входе в вольтах. Эта величина для обычных усилительных ламп колеблется от 2 до 5.

Недостатком электронных усилителей является их малая выходная мощность.

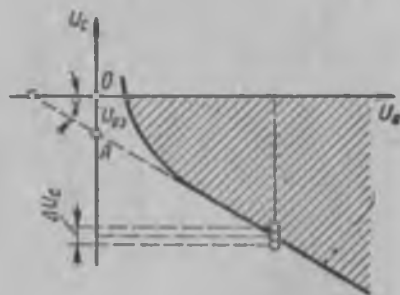
г) Тиратронные усилители

Электронные усилители имеют максимальную выходную мощность в 300 *вт*, поэтому для получения значительных выходных мощностей, превышающих 300 *вт*, применяют тиратронные усилители.

Тиратронами принято называть трехэлектродные газонаполненные электронные лампы. Колбы этих ламп заполняются инертным газом (неоном, аргоном), либо парами ртути. Вследствие наличия в тиратроне газа процессы, происходящие в лампе, существенно меняются по сравнению с обычными электронными лампами. Здесь в процессе ионизации молекул газа, в результате их столкновения с быстро движущимися под действием потенциала анода электронами, ток тиратрона может достигать нескольких ампер. Это позволяет использовать тиратроны для управления значительно более мощными процессами. При входной мощности 10^{-3} *вт*, выходная мощность тиратрона может иметь величину порядка 2—3 *квт* и более, что дает коэффициент усиления по мощности порядка 2×10^6 .

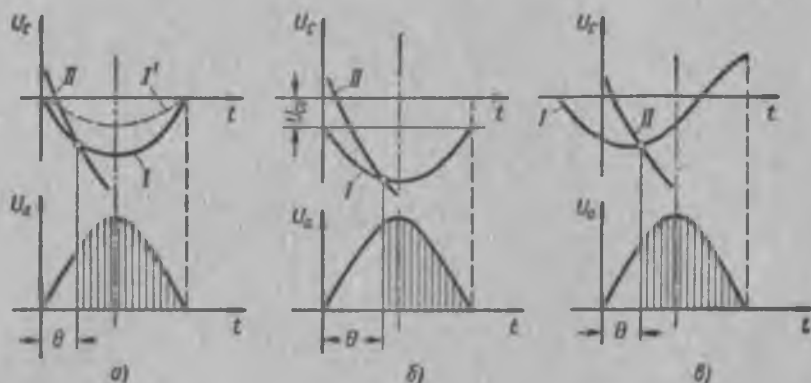
Процесс ионизации газа требует известного времени, так как тиратроны обладают некоторой инерционностью. Время, потребное на зажигание тиратрона, составляет 10^{-6} сек., а время гашения — 10^{-4} сек. Практическое влияние этой инерционности сказывается только при использовании тиратронов на токах высокой частоты. При обычных частотах тиратроны можно рассматривать как безынерционные приборы. Начало работы тиратрона, называемое моментом его зажигания, определяется потенциалами анода и сетки относительно катода. Зажигание происходит при определенной разности напряжений на электродах, называемой потенциалом зажигания. Характерной особенностью тиратрона является возможность управления началом его зажигания, основанной на том, что для каждого заданного анодного напряжения существует такой потенциал сетки, ниже которого тиратрон не зажигается, или, как говорят, тиратрон заперт. Только при напряжении сетки выше этого потенциала, называемого критическим, тиратрон будет работать, или иначе говоря, будет отперт. Характеристика или кривая зажигания, показанная на фиг. 103, представляет собой зависимость критического потенциала сетки (выше которого тиратрон отперт) от анодного напряжения.

При любой комбинации значений U_a и U_c , отвечающей точке выше кривой зажигания (заштрихованная площадь), тиратрон зажи-



Фиг. 103. Характеристика зажигания тиратрона.

гается. Для точек (U_a , U_c), лежащих ниже кривой зажигания, тиратрон заперт. При постоянном анодном напряжении $U_a = \text{const}$ зажигания тиратрона можно достичь уменьшением отрицательного потенциала на сетке, причем процесс зажигания происходит скачком при переходе U_c через точку, лежащую на характеристике зажигания. Это позволяет использовать тиратрон как реле.



Фиг. 104. Три способа регулирования угла зажигания тиратрона.

Характеристика зажигания может быть приближенно выражена на рабочем участке уравнением прямой:

$$U_{cs} = U_{os} + DU_a. \quad (\text{IV-43})$$

Коэффициент $D = \frac{\Delta U_{cs}}{\Delta U_a} = \text{tg } \gamma$ называется коэффициентом управления тиратрона.

Уравнение анодной цепи зажженного тиратрона будет:

$$U_a = I_a R + U_T.$$

Здесь: U_T — падение напряжения на тиратроне, которое не зависит от величины анодного тока и равно постоянной величине, определяемой типом и устройством тиратрона. Эта величина колеблется от 15 до 25 вольт. R — сопротивление в цепи анода.

Начало зажигания, или как принято говорить, фаза зажигания, определяется точкой пересечения кривой сеточного напряжения I с кривой зажигания II , как это показано на фиг. 104.

Напряжение на сетке является переменной величиной по времени, поскольку сетка включена и цепь переменного тока, но сетка может иметь различное напряжение U_{cs} отрицательного смещения, как изображено на фиг. 102.

Регулирование момента зажигания или угла зажигания θ производится одним из следующих способов: 1 — изменением амплитуды сеточного напряжения, 2 — наложением отрицательного напряжения смещения U_{cs} и 3 — изменением фазы кривой сеточного напряжения.

При втором способе кривая сеточного напряжения смещается вдоль оси ординат, при фазовом регулировании — вдоль оси абсцисс.

На фиг. 104 показаны все три способа регулирования угла зажигания.

На фиг. 104, а показан случай изменения амплитуды сеточного напряжения. Здесь даны две кривые этого напряжения I и I' с разными амплитудами.

На фиг. 104, б показан случай управления углом зажигания посредством изменения напряжения смещения U_{c0} на сетке.

На фиг. 104, в показано управление углом зажигания путем изменения фазы сеточного напряжения.

На фиг. 105 даны диаграммы выходного тока тиратрона при одноконтной и двухтактной схемах включения.

Здесь: θ — угол зажигания;

U_a — анодное напряжение;

$U_{TГ}$ — напряжение, при котором тиратрон гаснет;

I_T — выходной ток тиратрона;

I_{Tcp} — среднее значение выходного тока;

I — диаграмма напряжения U_a на аноде;

II — диаграмма выходного тока I_T тиратрона при одноконтной схеме;

III — диаграмма выходного тока I_T тиратрона при двухтактной схеме.

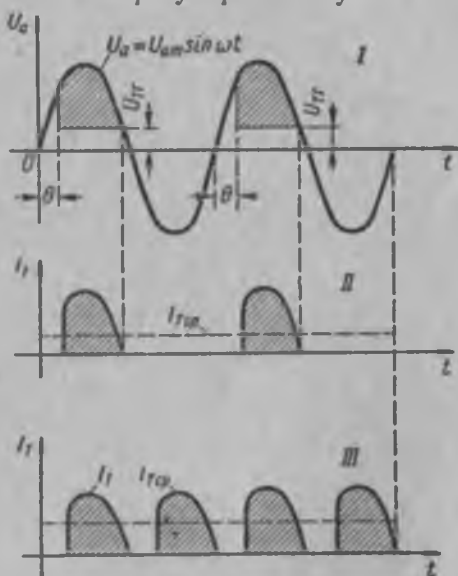
Изменяя тем или другим способом угол зажигания θ , мы будем влиять на величину среднего значения выходного тока тиратрона.

На фиг. 106 дана схема тиратронного усилителя с изменением фазы сеточного напряжения фазорегулятором.

Изменяя угол поворота фазорегулятора, мы будем изменять напряжение U_{max} на зажимах анодного сопротивления 2. Входной величиной здесь является угол поворота фазорегулятора.

На фиг. 107 дана схема тиратронного усилителя с мостовой схемой изменения фазы сеточного потенциала по отношению к анодному напряжению тиратрона.

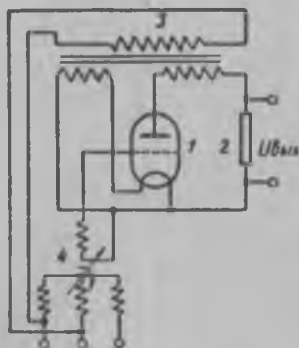
Здесь вместо фазорегулятора предыдущей схемы применен мост, составленный из активного сопротивления R в одном плече и емко-



Фиг. 105. Диаграммы выходного тока тиратрона при одноконтной и двухтактной схемах включения.

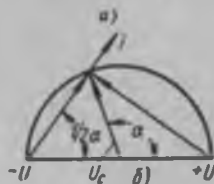
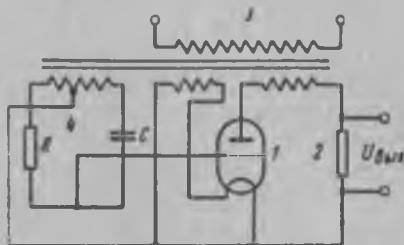
сти C в другом (фиг. 107, а), подключенным ко вторичной обмотке трансформатора со средней точкой. Если пренебречь сеточным током, то диагональ моста можно рассматривать разомкнутой, т. е. считать мост ненагруженным.

В этом случае векторная диаграмма напряжений моста представится, как изображено на фиг. 107, б. Диаграмма представляет собой типовую векторную диаграмму мостового фазорегулятора.



Фиг. 106. Схема тиратронного усилителя с изменением фазы сеточного напряжения фазорегулятором:

1 — тиратрон; 2 — нагрузочное сопротивление в анодной цепи; 3 — трансформатор с обмотками анодного напряжения и накала; 4 — фазорегулятор.



Фиг. 107. Схема тиратронного усилителя с мостовой схемой изменения фазы сеточного напряжения.

Здесь $2U$ есть напряжение вторичной обмотки трансформатора моста, как показано на фиг. 107, а. Вектор U_c представит напряжение разомкнутой диагонали, т. е. напряжение на сетке. Этот вектор остается постоянным по величине, но фаза его α изменяется с изменением сопротивления плеча R моста

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{R=C}. \quad (\text{IV-44})$$

При изменении R от ∞ до 0 диапазон смещения фазы составит 180° .

Это дает возможность регулировать выходное напряжение $U_{\text{вых}}$ тиратрона с помощью сопротивления R . Входной величиной здесь является сопротивление R моста.

Как было уже отмечено, тиратроны могут регулировать в больших пределах выходной ток путем изменения амплитуды, фазы или смещения сеточного напряжения. Кроме того, тиратрон является одновременно и выпрямителем переменного в постоянный ток.

С другой стороны, выходная мощность тиратронов, выпускаемых заводами, достигает до 3 квт, что в несколько раз превосходит выход-

ную мощность электронных приборов вакуумного типа. Все эти особенности позволили тиратронам получить широкое применение в промышленности в области автоматического управления электроприводами, а также в системах автоматического регулирования.

7. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ РЕЛЕЙНЫЕ УСИЛИТЕЛИ

Электрические релейные усилители (реле) в отличие от электрических усилителей, рассмотренных выше, являются одновременно и управляющими элементами сервомоторов. Поэтому они применяются всегда в комплексе с соответствующими сервомоторами.

Включение релейных усилителей в общую схему автоматического регулирования показано на фиг. 138.

Так как устройству и расчету реле, нашедших большое применение в автоматике, посвящена многочисленная литература, то здесь мы дадим только основные сведения о реле.

Электрическое реле в общем случае представляет промежуточный элемент, приводящий в действие одну или несколько управляемых электрических цепей. Основными параметрами, характеризующими работу реле, являются:

1. **Мощность срабатывания** — электрическая мощность на входе реле, при которой реле замыкает (размыкает) управляемую цепь.

2. **Время срабатывания** — интервал времени от момента подачи на вход реле регулирующего импульса до начала работы управляемого сервомотора, точнее до начала воздействия на управляемую цепь.

3. **Мощность управления** — электрическая мощность управляемой цепи.

Вследствие инерционности управляющей цепи и реле входной сигнал реле будет возрастать и убывать не мгновенно, а по некоторой кривой. В связи с этим различают следующие этапы работы реле:

1. **Срабатывание реле.** Реле приходит в действие (трогается) только тогда, когда величина регулирующего сигнала достигнет некоторого значения, называемого сигналом срабатывания. Время срабатывания реле складывается из времени трогания и времени движения реле. Время трогания представляет отрезок времени от момента появления регулирующего сигнала до момента трогания реле, а время движения — от момента трогания до начала воздействия на управляемую цепь.

2. **Работа реле.** После того как реле сработало, управляемая цепь и сервомотор находятся под воздействием реле до момента прекращения выходного сигнала. Время работы реле зависит от скорости работы сервомотора и регулирующего органа, а также от параметров объекта регулирования.

3. **Возврат реле.** После прекращения регулирующего сигнала проходит некоторое время, пока реле прекратит свое воздействие на

управляемую цепь и возвратится в начальное положение. Этот отрезок времени называется временем отпускания реле.

Отношение величины регулирующего сигнала на входе, при котором реле отпускает, к тому значению сигнала, при котором реле срабатывает, называется коэффициентом возврата реле

$$k_{\text{возв}} = \frac{x_{\text{от}}}{x_{\text{сраб}}} \quad (\text{IV-45})$$

Этот коэффициент, как правило, менее единицы.

Если реле рассматривается как усилитель, то отношение мощности управления $W_{\text{упр}}$ к мощности $W_{\text{сраб}}$ срабатывания представит коэффициент усиления по мощности

$$k_w = \frac{W_{\text{упр}}}{W_{\text{сраб}}} \quad (\text{IV-46})$$

Это отношение часто называют также коэффициентом управления.

Реле, применяемые в системах автоматического регулирования, по принципу действия можно разделить на следующие типы: электромагнитные нейтральные, электромагнитные поляризованные, магнитноэлектрические, электронные и тиратронные.

В помещенной ниже табл. 3 дается сравнение этих типов по основным показателям.

Таблица 3

Сравнительные показатели основных типов реле

Тип реле	Мощность срабатывания вт $W_{\text{сраб}}$	Мощность управления вт $W_{\text{упр}}$	Время срабатывания сек. $t_{\text{сраб}}$	Коэффициент усиления по мощности k_w
Электромагнитное нейтральное . . .	10^{-3} — 10^{-2}	10^{-3} — 10^{-1}	10^{-3} — $2 \cdot 10^{-1}$	10^3 — 10^4
Электромагнитное поляризованное	$5 \cdot 10^{-3}$ — $5 \cdot 10^{-1}$	10 — 20	10^{-3} — $15 \cdot 10^{-3}$	40 — 2000
Магнитноэлектриче- ское	10^{-9} — 10^{-6}	10^{-1} — 2	10^{-3} — $5 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^4$ — 10^5
Электронное реле . .	10^{-12} — 10^{-8}	10^{-3} — 10^3	10^{-9} — 10^{-8}	10^6 — 10^{10}
Тиратронное реле	10^{-6} — 10^{-3}	10^3 — 10^5	10^{-6} — 10^{-5}	10^6

По времени срабатывания реле разделяются на
 безынерционные, если $t_{\text{сраб}} < 0,001$ сек.
 быстродействующие при $t_{\text{сраб}} < 0,05$ сек.
 нормальные при $t_{\text{сраб}}$ от 0,05 до 0,15 сек.
 замедленные при $t_{\text{сраб}}$ от 0,15 до 1 сек.

Остановимся кратко на описании основных типов реле, применяемых в системах автоматического регулирования, причем опустим

электромагнитные и магнитоэлектрические реле, описания которых даются во всех курсах электротехники. Отметим только следующее:

1. Электромагнитные нейтральные реле могут выполняться как для постоянного, так и для переменного тока. Нейтральными они называются потому, что не отзываются на перемену направления постоянного тока или изменения фазы переменного тока. Реле этого типа имеют большое число разновидностей.

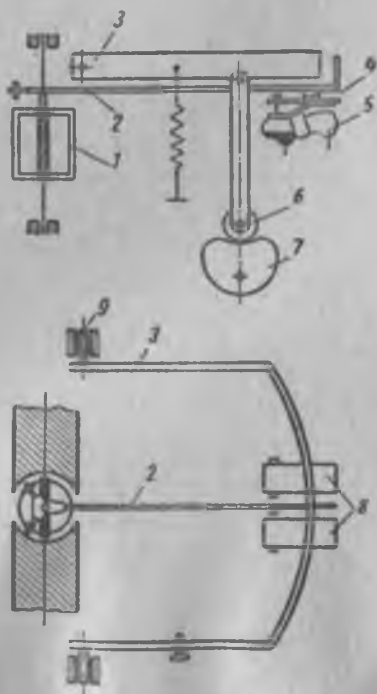
2. Электромагнитные поляризованные реле реагируют на полярность управляющего сигнала и отличаются высокой чувствительностью, малым временем срабатывания и большим коэффициентом усиления.

3. Магнитоэлектрические реле являются наиболее чувствительными среди электромеханических реле. Они также реагируют на полярность управляющего сигнала. Благодаря высокой чувствительности они получили широкое распространение в схемах автоматического управления с электрическими датчиками.

а) Контактный нуль-гальванометр с падающей дужкой

К релейным усилителям следует отнести также контактный нуль-гальванометр с падающей дужкой. Устройство такого контактного гальванометра показано на фиг. 108.

Контактный нуль-гальванометр отличается от реле тем, что замыкание управляющей цепи сервомотора здесь выполняется не измерительным элементом, а особым приспособлением—падающей дужкой. Падающая дужка работает независимо от измерительного устройства. Рамка 1, вращающаяся в междужелезном пространстве, связана со стрелкой 2 прибора. Рамка и стрелка устанавливаются в положении, отвечающем отклонению чувствительного элемента. Над стрелкой располагается падающая дужка 3. Она с помощью эксцентрика 7 и ролика 6 совершает периодическое движение вверх и вниз, вращаясь около осей 9. Эксцентрик 7 приводится от вспомогательного моторчика, не показанного на схеме. При подъеме дужки вверх стрелка гальванометра может свободно перемещаться. Она устанавливается в положении, отвечающем регулирующему импульсу чувствитель-



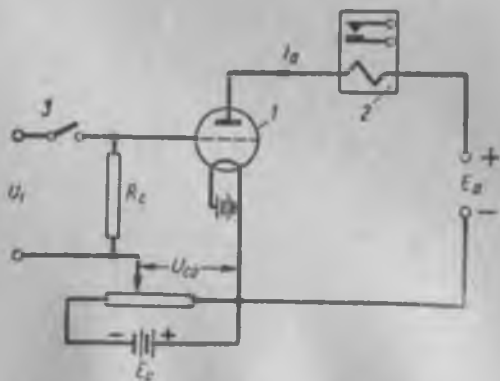
Фиг. 108. Контактный нуль-гальванометр.

ного элемента, но в пределах, ограниченных специальными упорами (на фигуре не показано), установленными на столиках 8. Столики могут раздвигаться. При опускании дужки вниз последняя захватывает стрелку и прижимает ее к столику выступом 4, вследствие чего столик наклоняется и поворачивает ртутный выключатель 5. При этом замыкается электрическая цепь, управляющая сервомотором. В зависимости от того, над каким из столиков 8 будет находиться стрелка 2 в момент опускания дужки 8, в работу включается тот или другой ртутный выключатель 5 и соответственно в ту или другую сторону пойдет сервомотор. Если в момент опускания дужки стрелка гальванометра 2 будет находиться в нулевом положении или будет иметь незначительное отклонение в пределах зоны нечувствительности, столики 8 работать не будут, вследствие чего сервомотор останется в покое.

Период колебаний дужки устанавливается обычно в пределах от 10 сек. до 1 мин. Включение ртутного переключателя продолжается пока опущена дужка. Это составляет примерно 30—50% времени полного периода колебаний дужки. Ртутные выключатели разрывают мощность порядка до 0,5 *квт*. Контактный нуль-гальванометр осуществляет периодическое прерывное регулирование. В промежутках времени, когда дужка находится сверху, регулирования не происходит, регулирующие импульсы датчика остаются без ответа.

б) Электронные реле

Электронное реле обычно состоит из электромагнитного реле 2 и трехэлектродной лампы 1, исполняющей роль усилителя. Схема такого реле показана на фиг. 109.



Фиг. 109. Схема электронного реле.

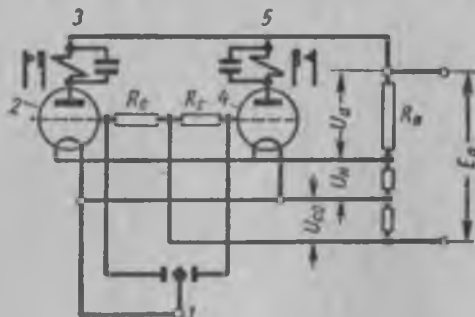
Если теперь на сетке уменьшить отрицательное смещение, анодный ток увеличится и станет больше тока срабатывания реле.

Реле срабатывает. Благодаря тому, что электронная лампа в описанной схеме является усилителем, регулирующий сигнал U_1 , подаваемый на сетку лампы, может быть очень небольшой величины. Мощность срабатывания такого реле на входе составляет $10^{-8} — 10^{-12}$ вт, а мощность управления до 100 вт и более. Это дает коэффициент усиления по мощности до $10^{10} — 10^{12}$.

Так как электронная лампа имеет малое собственное время срабатывания, то практически время срабатывания электронного реле определяется параметрами электромагнитного реле.

На фиг. 110 дана другая схема электронного реле, так называемого реле с сеточным контактом.

Здесь в цепь сетки включен подвижный контакт 1. При среднем положении этого контакта обе лампы 2 и 4 заперты отрицательным смещением U_{co} . При замыкании подвижного контакта, например, с одним неподвижным, лампа 2 отпирается и анодный ток I_a проходит



Фиг. 110. Схема электронного реле с сеточным контактом.

через обмотку реле 3, вследствие чего реле срабатывает. При замыкании с другим неподвижным контактом срабатывает реле 5. Вместо двух электронных ламп может быть применена одна лампа — двойной триод, что несколько упрощает схему реле.

Применение схемы сеточного контакта позволяет получить следующие преимущества.

1. Так как сеточное напряжение мало, зазор между контактами может быть выполнен весьма малым, порядка десятка долей миллиметра и менее, что позволяет применять очень чувствительные датчики.

2. Вследствие большой величины сопротивления сеточной цепи изменение величины переходного сопротивления контакта не оказывает влияния на работу электронного реле.

Кроме описанных выше схем электронных реле, встречаются и другие, например мостовая, бесконтактная (триггер) и фазочувствительная схемы.

в) Тиратронные реле

Из характеристики зажигания тиратрона (фиг. 103) видно, что небольшое уменьшение отрицательного потенциала на сетке вблизи области зажигания может зажечь тиратрон. Эта особенность используется для применения тиратрона в качестве реле. Выходной ток тиратрона направляется при этом в обмотку электромагнитного реле или, при достаточной мощности, — непосредственно для пита-

ния управляющей обмотки двигателя постоянного тока, исполняющего роль сервомотора. Возможно также включение на соленоидный привод, если последний используется в качестве сервомотора.

Принципиальные схемы тиратронных реле несколько отличаются от схем электронных реле. Основное отличие состоит в том, что при управлении тиратроном с помощью сеточного напряжения управляющее действие сетки прекращается после зажигания тиратрона. Погасить зажженный тиратрон увеличением отрицательного смещения на сетке нельзя. Это объясняется тем, что при горении тиратрона вокруг его сетки образуется облако из положительных ионов, нейтрализующее потенциал сетки в горящем тиратроне. Поэтому в релейной схеме должна быть предусмотрена возможность как зажигания, так и гашения тиратрона. При постоянном анодном напряжении гашение производится разрывом анодной цепи с помощью электромагнитных реле, работающих на разрыв контактов. При переменном анодном напряжении такое устройство не требуется, так как тиратрон погаснет в ближайший полупериод, когда анодное напряжение станет отрицательным.

Тиратронные усилители и тиратронные реле находят широкое применение в различных схемах автоматического управления и регулирования производственными процессами, например, при автоматическом управлении электродами дуговых печей, копировальными станками, движением материала в технологических процессах, многодвигательными приводами бумажных машин.

8. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СЕРВОМОТОРЫ. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СХЕМЫ ВКЛЮЧЕНИЯ

В качестве электрических сервомоторов могут применяться любые электродвигатели, а также электромагнитные приводы типа соленоидов.

Мы не будем останавливаться на рассмотрении конструкций и характеристик различных типов электродвигателей, применяемых в системах автоматического регулирования, поскольку это составляет предмет специального курса электротехники. Отметим лишь некоторые специальные схемы включения электродвигателей, которые применяются в тех случаях, когда по условиям регулирования скорость сервомотора должна изменяться в больших пределах. Рассмотрим здесь три основные схемы: Леонарда (мотор-генератор), с гидромuftой и тиратронами.

а) Схема Леонарда (мотор-генератор)

Эта схема совпадает со схемой усилителя, показанной на фиг. 98. В качестве сервомотора взят двигатель 2 постоянного тока с независимым постоянным возбуждением 5. Якорь двигателя 2 питается от генератора постоянного тока 1, имеющего также независимое возбуждение 4. Генератор 1 приводится в движение вспомогательным двигателем 3, работающим с постоянной угловой скоростью.

Из формулы (IV-23) следует, что угловая скорость сервомотора 2 определяется выражением:

$$\omega_2 = \frac{U_1}{C_2 \Phi_2},$$

где U_1 — напряжение генератора;
 Φ_2 — поток возбуждения сервомотора;
 C_2 — постоянный параметр двигателя.
 С другой стороны

$$U_1 = C_1 \Phi_1 \omega_1 = C_1 q \omega_1 U_b,$$

где U_b — напряжение на зажимах обмотки возбуждения 4;
 C_1 и q — постоянные параметры генератора.

Отсюда

$$\omega_2 = \frac{C_1 q \omega_1}{C_2 \Phi_2} U_b = \text{const} U_b, \quad (\text{IV-47})$$

т. е. угловая скорость сервомотора пропорциональна входному напряжению, изменяя которое, мы можем получить желаемое значение ω_2 .

б) Схема с гидромуфтой

Эта схема показана на фиг. 111. Здесь электродвигатель 1 соединен передачей с регулирующим органом 2 через гидромуфту 3. Электродвигатель при всех режимах нагрузки вращается с постоянной угловой скоростью. При изменении эксцентрицитета гидромуфты изменяется в больших пределах скорость регулирования. Подключение привода 4 гидромуфты к механизму, управляемому чувствительным элементом или датчиком, устанавливает зависимость между скоростью регулирования и отклонением чувствительного элемента.

Из теории гидромуфт известно, что выходная угловая скорость вала гидромуфты определяется по формуле

$$\omega_M = A \omega_2 \cdot \frac{e_1}{e_2}, \quad (\text{IV-48})$$

где ω_M — выходная угловая скорость гидромуфты;
 ω_2 — постоянная угловая скорость электродвигателя;
 e_1 и e_2 — эксцентрицитеты гидромуфты;
 A — постоянный параметр гидромуфты.

Если эксцентрицитет e_2 сделать постоянным, а e_1 регулируемым, то угловая скорость ω_M будет изменяться прямо пропорционально e_1 .

При противоположном включении, когда e_1 постоянно, а регулируется e_2 , ω_M изменяется обратно пропорционально.

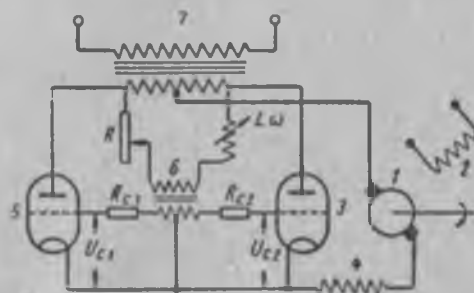


Фиг. 111. Схема включения серводвигателя с гидромуфтой.

В зависимости от конструкции гидромукты предел регулирования с помощью изменения отношения эксцентрицитетов может доходить до 1 : 20 и более.

в) Схема с тиратронами

Эта схема приведена на фиг. 112. Здесь в качестве сервомотора взят электродвигатель 1 постоянного тока с независимым постоянным возбуждением 2. Якорь получает питание от двухтактной тиратронной схемы (тиратроны 3 и 5) с однофазным трансформатором 7. Управление зажиганием тиратронов происходит путем изменения фазы сеточного напряжения с помощью моста, составленного из активного сопротивления R и индуктивного ωL . Изменения индуктивности L или активного сопротивления R производит изменение фазы вторичного напряжения сеточного трансформатора 6 и, как следствие, изменение фазы сеточного напряжения тиратронов и угла зажигания. В зависимости от угла зажигания будет изменяться величина среднего анодного тока, протекающего через якорь, а вместе с ним и число оборотов сервомотора. Дроссель 4 сглаживает пульсацию тока якоря.



Фиг. 112. Схема включения серводвигателя с тиратронами.

Изменение индуктивности или сопротивления должно осуществляться автоматически от воздействия чувствительного элемента или датчика.

С помощью такой схемы можно достигнуть предела изменения скорости 1 : 30 и более. Выходная мощность таких приводов обычно не превосходит 10—15 квт.

ГЛАВА V

ЭЛЕМЕНТЫ ОБРАТНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИХ СВЯЗЕЙ

1. ВВЕДЕНИЕ

В главе I было отмечено, что системы автоматического регулирования снабжаются корректирующими устройствами, обеспечивающими устойчивость процесса регулирования, а также получение желаемых качественных показателей этого процесса.

К числу корректирующих устройств относятся обратные и дифференцирующие связи.

Всякая обратная связь характеризуется тем, что на вход рассматриваемого звена поступает дополнительное воздействие, представляющее функцию выхода этого звена, или некоторого другого избранного звена системы, расположенного по ходу цепочки звеньев.

Таким образом, результирующая функция z на входе исследуемого звена будет:

$$z = x_1 \pm f(y), \quad (V-1)$$

где x_1 — выход смежного предыдущего звена;

$f(y)$ — дополнительное воздействие от некоторого избранного звена с выходом y .

Знак плюс отвечает положительной и знак минус — отрицательной обратной связи. Если функция $f(y)$ может быть представлена некоторой алгебраической функцией от y , то такая связь называется жесткой обратной связью. Чаще всего в реальных системах автоматического регулирования применяется связь, когда $f(y)$ пропорциональна значению y , т. е. $f(y) \approx k_1 y$. Жесткая отрицательная связь ослабляет действие предыдущего звена, положительная усиливает его.

Физическое осуществление указанной зависимости производится с помощью рычагов, кулачков, лекал, а также пневматических или гидравлических устройств. Электрические звенья жесткой обратной связи осуществляются с помощью трансформаторов, сопротивлений, электронных приборов и других устройств.

В зависимости от конструктивного устройства различают следующие виды жесткой обратной связи: рычажные, рычажно-пневматические, рычажно-гидравлические, кулачковые и лекальные, электромеханические и др.

Если функция $f(y)$ может быть представлена в виде некоторой алгебраической функции от скорости изменения величины y , т. е. от первой производной $\frac{dy}{dt}$, то такая обратная связь называется г и б к о й. Чаще всего применяется гибкая связь, когда функция $f(y)$ пропорциональна первой производной от y , т. е. $f(y) \approx k_2 \frac{dy}{dt}$. Включение гибкой связи может быть сделано двумя способами:

- 1) когда гибкая связь ослабляет действие основного сигнала при возрастании величины y и усиливает при ее убывании;
- 2) когда гибкая связь усиливает действие основного сигнала при возрастании y и ослабляет при убывании.

Различают два случая гибкой обратной связи. В первом случае результирующая входная функция z исследуемого звена будет

$$z = x_1 - k_2 \frac{dy}{dt}. \quad (V-2)$$

Это — так называемая чистая гибкая связь или обратная связь по производной.

В другом случае функция z имеет более сложный вид:

$$z = x_1 - k_1 y - k_2 \frac{dy}{dt}. \quad (V-3)$$

Такую связь называют гибкой связью со статизмом.

В некоторых случаях зависимость функции $f(y)$ от y имеет более сложный вид. Эта зависимость выражается в общем виде дифференциальным уравнением

$$d_{oc}(p) f(y) = k_{oc}(p) y,$$

где $d_{oc}(p)$ и $k_{oc}(p)$ — выходной и входной операторы звена обратной связи.

Если $d_{oc}(p)$ и $k_{oc}(p)$ представляют полиномы первой степени, то такая связь называется и з о д р о м н о й, причем здесь различают два вида такой связи. Чистая изодромная связь описывается уравнением

$$T_1 \frac{df(y)}{dt} + f(y) = \beta T_1 \frac{dy}{dt}, \quad (V-4)$$

и изодромная связь со статизмом выражается уравнением:

$$T_1 \frac{df(y)}{dt} + f(y) = \beta T_1 \frac{dy}{dt} + \mu y. \quad (V-5)$$

Физическое осуществление функции $f(y)$ указанных видов достигается с помощью масляных и воздушных катарактов, дросселей, электрических мостов с подогревом сопротивлений и других устройств, указанных ниже.

Нетрудно видеть, что в функцию $f(y)$ можно ввести и другие составляющие, например составляющую, пропорциональную ускорению избранной величины

$$f(y) = k_1 y + k_2 \frac{dy}{dt} + k_3 \frac{d^2 y}{dt^2}. \quad (V-6)$$

Изменяя значения коэффициентов пропорциональности k_1 , k_2 и k_3 , а также их знаки мы можем довольно близко подойти к желаемому виду дополнительного воздействия обратной связи.

В тех случаях, когда в целях корректирования хотят поставить процесс регулирования в зависимость не только от величины и знака сигналов какого-либо элемента, но также от скорости нарастания этих сигналов, применяют дифференцирующие связи. Функция z результирующего воздействия на входе рассматриваемого звена в этом случае будет

$$z = x + k_1 \frac{dx}{dt}.$$

Дифференцирующие связи усиливают действие регулятора на отклонение регулируемой величины при возрастании последней и уменьшают при ее убывании.

В более сложных системах автоматического регулирования иногда вводят дифференцирующую связь по второй производной. В этом случае

$$z = x + k_1 \frac{dx}{dt} + k_2 \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Способы, применяемые для физического осуществления функции дифференцирования, те же, что были упомянуты выше для случаев гибкой связи.

В электрических схемах автоматического регулирования для указанной цели применяются контур RC , комбинация термпар, таходинамо и другие способы, как указано ниже.

В некоторых случаях удобно применять плоский регулятор скорости и акселерометр.

Приводим ниже примеры обратных и дифференцирующих связей, наиболее часто встречающихся в системах автоматического регулирования.

2. ЭЛЕМЕНТЫ ЖЕСТКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

а) Рычажная связь

Наиболее распространена рычажная обратная жесткая связь с помощью так называемого дифференциального рычага.

Схема этой связи показана на фиг. 113.

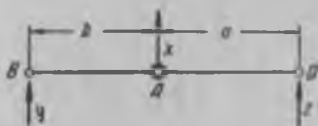
Пусть x — основное воздействие от предыдущего звена;

z — значение результирующего воздействия на входе рассматриваемого звена;

y — дополнительное воздействие от одного из последующих звеньев;

a и b — плечи рычага, как показано на фиг. 113.

Если x и y являются малыми линейными перемещениями точек A и B , то при $y = 0$



$$z = x \frac{a+b}{b}. \quad (V-7)$$

При $y \neq 0$

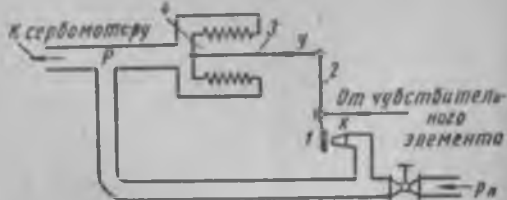
Фиг. 113. Схема рычажной обратной связи.

$$z = x \frac{a+b}{b} - y \frac{a}{b}. \quad (V-8)$$

Эти формулы остаются справедливыми и в том случае, если плечо a расположено по одну сторону от шарнира A с плечом b . При этом следует только величину a взять со знаком минус.

б) Рычажно-пневматическая связь

Схема такой связи показана на фиг. 114. Здесь импульс x от чувствительного элемента подается на рычаг 2. Изменение положения отражательной заслонки 1 вызывает изменение давления воздуха p перед сервомотором. Обратная связь осуществляется через сильфон 4 и рычаг 3. Нетрудно видеть, что смещение заслонки 1 будет равно



$$z = k_1 x - k_2 y, \quad (V-9)$$

Фиг. 114. Схема рычажно-пневматической обратной связи.

где k_1 и k_2 — отношение плеч рычага 2, как указано в формуле (V-8) и y — воздействие обратной связи (функция давления p).

в) Рычажно-гидравлическая связь

В тех случаях, когда объект регулирования и исполнительный механизм удалены настолько от регулятора, что осуществление обратной связи с помощью рычажной передачи затруднительно, применяют рычажно-гидравлическую обратную связь. Схема такой связи дана на фиг. 115.

Так как рабочая жидкость сервомотора практически несжимаема, то перемещение поршня обратной связи всегда пропорционально перемещению H поршня сервомотора или равно этому перемещению

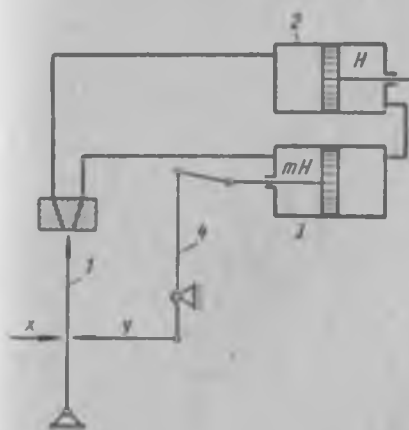
при равенстве площадей поршней. Поэтому регулирующее воздействие на струйную трубку будет

$$z = x - kmH, \quad (V-10)$$

где m — передаточное отношение ходов поршней сервомотора обратной связи;

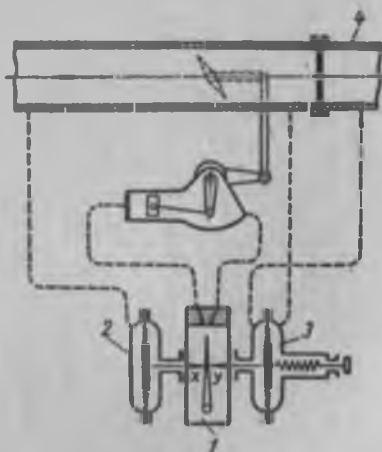
а k — передаточное отношение плеч рычага 4.

На фиг. 116 показана жесткая рычажно-гидравлическая обратная связь, выполненная в зависимости от расхода регулируемой жидко-



Фиг. 115. Схема рычажно-гидравлической обратной связи:

1 — струйная трубка; 2 — цилиндр сервомотора; 3 — цилиндр обратной связи; 4 — рычаг обратной связи.



Фиг. 116. Рычажно-гидравлическая обратная связь в зависимости от расхода регулируемой жидкости.

сти. На струйную трубку 1 передается воздействие x от чувствительного элемента 2 и воздействие y от элемента 3 обратной связи, отклонения которого являются функцией расхода среды, протекающей по трубе 4.

г) Кулачковая и рычажная связь

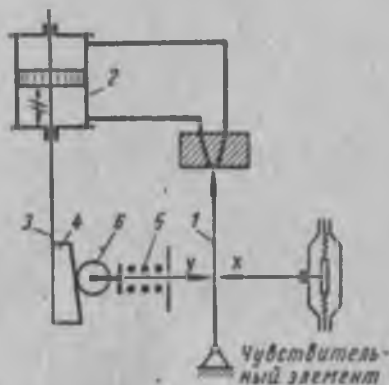
Схема такой связи изображена на фиг. 117. Здесь управляющим элементом сервомотора 2 является струйная трубка 1. Шток 3 сервомотора несет на одном из концов лекало 4, которое при движении поршня вверх смещает ролик 6 вправо, сжимает пружину 5 и создает воздействие y обратной связи на струйную трубку. При движении поршня вниз сжатие пружины уменьшается, ролик 6 сдвигается влево, воздействие y на струйную трубку уменьшается. Сме-

шение ролика 6 находится в линейной зависимости от смещения поршня сервомотора H .

Грнем, что $y = kH$, где k — коэффициент пропорциональности. Тогда результирующее воздействие в входе струнной трубки будет

$$z = x - kH, \quad (V-11)$$

где x — воздействие от чувствительного элемента.



Фиг. 117. Схема левальной обратной связи.

д) Электрическая мостовая обратная связь

В электрических схемах автоматического регулирования широкое распространение получила обратная связь, выполняемая по мостовой схеме.

Принципиальная схема электрической мостовой связи изображена на фиг. 118.

Здесь x — воздействие от чувствительного элемента;

y — воздействие от обратной связи;

R и R_2 — постоянные сопротивления моста.

Примем $R_1 = R_2 = R$, а также $R_x = xA$ и $R_y = yB$, где

A и B — постоянные коэффициенты.

Тогда при $i_{\text{вых}} = 0$

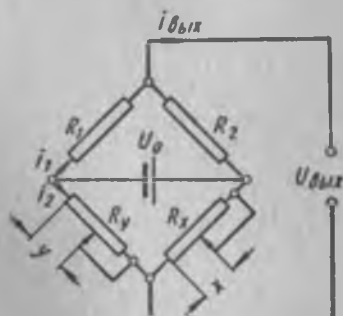
$$\begin{aligned} U_{\text{вых}} &= \frac{1}{2} U_0 \frac{Ax - By}{Ax + By} = \\ &= \frac{1}{2} i_2 (Ax - By). \end{aligned} \quad (V-12)$$

При равновесии $R_y = R_x$. Допустим, что для одного из положений равновесия $R_x = R_y = R$.

Если выбрать величину R достаточно большой, а отклонения R_x и R_y от R на всем диапазоне регулирования сделать незначительными, то $R_x + R_y \approx 2R$ и

$$U_{\text{вых}} \approx \frac{U_0}{4R} (Ax - By). \quad (V-13)$$

Таким образом, с помощью мостовой схемы, мы можем получить желаемое сложение воздействий основной и обратной связей с таким же результатом, как и при других описанных выше способах.



Фиг. 118. Схема электрической мостовой обратной связи.

е) Электромеханическая обратная связь

Модифицируя мостовую схему, мы можем осуществить сложение в желаемом направлении двух или нескольких линейных перемещений с помощью электрического устройства, изображенного на фиг. 119.

Здесь Tp — однофазный трансформатор с двумя вторичными обмотками;

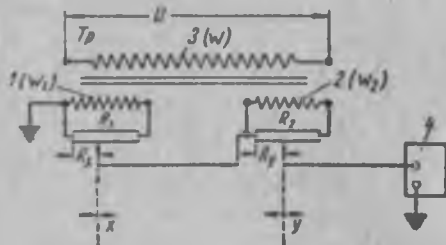
1, 2 — вторичные обмотки трансформатора;

3 — первичная обмотка трансформатора;

4 — усилитель;

R_1, R_2 — активные сопротивления, на которые замкнуты вторичные обмотки.

Линейные выходные перемещения x, y произвольных звеньев системы передаются движкам реостатов R_1, R_2 . Установленные движками сопротивления R_x, R_y включают в цепь электронного или другого усилителя, как показано на фигуре. Если первичное напряжение трансформатора будет U , а числа витков первичной и вторичных обмоток будут соответственно $w, w_1, w_2, w_3 \dots$, то на входе усилителя мы будем всегда иметь потенциал z :



Фиг. 119. Схема электромеханической обратной связи.

$$z = U \frac{w_1}{w} \cdot \frac{R_x}{R_1} \pm U \frac{w_2}{w} \cdot \frac{R_y}{R_2} \pm \dots \quad (V-14)$$

Если сделать значения установленных движками сопротивлений R_x, R_y пропорциональными линейным перемещениям x, y , то

$$z = \frac{U}{w} \left(\frac{Aw_1}{R_1} x \pm \frac{Bw_2}{R_2} y \pm \dots \right). \quad (V-15)$$

Изменение знака сложения легко достигается переключением на реостате концов вторичной обмотки трансформатора (перемена фазы на 180°). Применяя указанную схему включения, мы имеем возможность осуществлять обратную связь не только от одного, но и от нескольких звеньев цепи с установкой желаемого коэффициента воздействия по каждой связи в отдельности.

Такой способ включения обратной связи применяется, например, в регуляторах турбокомпрессоров для наддува в авиационных двигателях.

ж) Электронная обратная связь

Пример электронной обратной связи показан на схеме фиг. 120 для случая электронного усилителя.

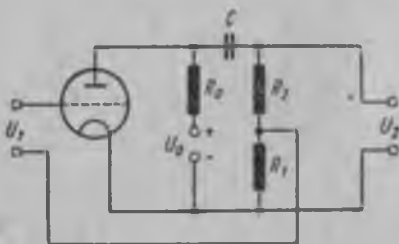
Здесь U_1 — входное напряжение, поступающее от чувствительного элемента или датчика;

U_2 — выходное напряжение усилителя;

R_1 и R_2 — сопротивления обратной связи;

R_a — нагрузочное сопротивление в цепи анода;

C — разделительная емкость.



Фиг. 120. Схема электронной обратной связи.

Как видно из схемы, выходной импульс усилителя вычитается из импульса, подаваемого на сетку лампы.

Напряжение между сеткой и катодом будет

$$U_c = U_1 - U_2 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = U_1 - U_2 \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1}}. \quad (V-16)$$

Выбирая отношение $\frac{R_2}{R_1}$, мы установим желаемое воздействие обратной связи выхода на сеточное напряжение.

3. ЭЛЕМЕНТЫ ГИБКОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

а) Гидромеханическая изодромная связь

Схема такой связи показана на фиг. 121. Здесь связь рычага OAB с продолжением штока сервомотора осуществлена через масляный демпфер (катаракт), причем точка B рычага связана с пружиной 1 . Цилиндр катаракта 2 соединен жестко со штоком поршня сервомотора, а поршень катаракта 3 шарнирно с точкой B рычага AOB .

Если пренебречь силами инерции поршня масляного катаракта, условие его равновесия выражается уравнением

$$fy = kv_k.$$

Здесь y — смещение точки B рычага AOB из положения равновесия, характеризуемого нулевым значением силы упругости пружины 1 ;

f — коэффициент жесткости пружины;

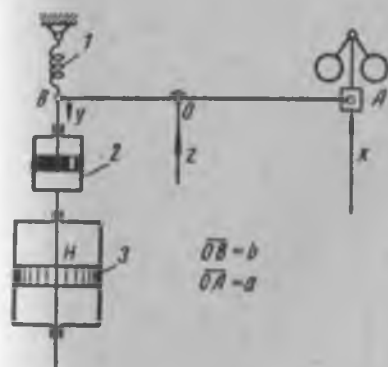
$v_k = \frac{d(H-y)}{dt}$ — относительная скорость поршня и цилиндра катаракта, где H — ход поршня;

k — сопротивление катаракта при единичной относительной скорости.

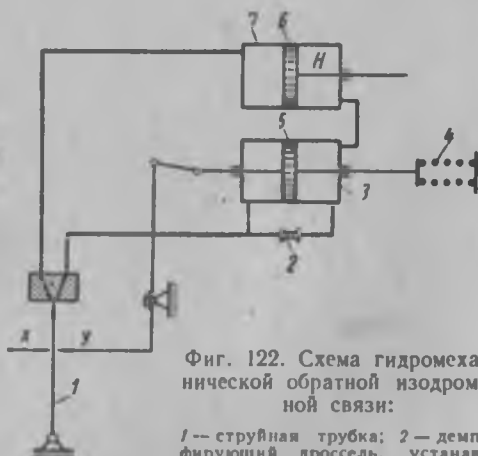
Отсюда

$$y = v_k \frac{k}{T}. \quad (V-17)$$

Работа масляного катаракта была описана ранее в главе I. Здесь мы не будем подробно останавливаться на этом. Отметим только следующее. Работу изодромной связи можно разделить на два этапа. Первый этап начинается смещением муфты регулятора при изменении скорости его вала. Поршень сервомотора приходит в движение, действует на катаракт и сжимает или растягивает пружину.



Фиг. 121. Схема гидромеханической обратной изодромной связи.



Фиг. 122. Схема гидромеханической обратной изодромной связи:

1 — струйная трубка; 2 — демпфирующий дроссель, устанавливающий сопротивление катаракта; 3 — цилиндр обратной связи, действующий как масляный катаракт; 4 — пружина; 5 — поршень обратной связи; 6 — поршень сервомотора; 7 — сервомотор.

жину 1. Это движение поршня продолжается до тех пор, пока золотник не перекроет каналы масла, что вызовет остановку сервомотора. Во втором этапе пружина силой упругости действует на катаракт и по мере перетекания масла в цилиндре катаракта с одной стороны поршня по другую возвращает муфту регулятора в первоначальное положение.

Обратная изодромная связь действует только в направлении от поршня сервомотора к муфте регулятора. И действительно, если сдвинуть под действием посторонней силы муфту регулятора, то это смещение муфты вследствие большого сопротивления катаракта при перетекании масла не будет передаваться на поршень сервомотора, а вызовет только поворот рычага АВ.

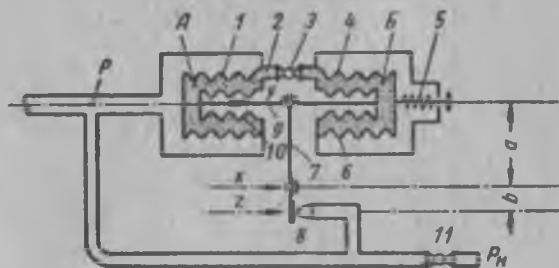
Модификация описанной выше изодромной связи, применяемая в регуляторах давления, представлена на фиг. 122.

Приведенная здесь гидромеханическая обратная связь действует так же, как и связь с масляным катарактом и пружиной, описанная

выше и изображенная на фиг. 121. Такая связь применяется в тех случаях, когда объект регулирования и сервомотор удалены от регулятора настолько, что выполнение одной рычажной связи не рационально.

б) Сифонная гибкая связь с дросселем

Схема такой связи изображена на фиг. 123. Принцип действия этой связи не отличается от описанной выше. Здесь полости *A* и *B* между сифонными мембранами 1—10 и 4—6 заполнены жидкостью и сообщаются между собой соединительной трубкой 2 с дросселем 3, с помощью которого можно устанавливать желаемую величину воздействия обратной связи.



Фиг. 123. Схема сифонной гибкой связи с дросселем.

Мембрана 4 находится под постоянным давлением пружины 5. Сифонные мембраны 10 и 6 соединены штоком 9, связанным шарнирно с дроссельным рычагом 7, имеющим на конце заслонку 8; на рычаг 7 передается воздействие x от чувствительного элемента и воздействие y от штока 9 обратной связи. Последнее воздействие является функцией производной по времени от давления воздуха p перед сервомотором.

Обозначим через:

- S_1 — расчетную площадь наружных сифонов;
- S_2 — расчетную площадь внутренних сифонов;
- S_3 — поперечное сечение соединительной трубы 2;
- v — скорость перетекания жидкости из полости *A* в полость *B* по трубе 2;
- p — абсолютное давление снаружи сифона 1;
- p_0 — абсолютное давление снаружи сифона 4, равное атмосферному;
- f — коэффициент жесткости пружины 5;
- y — деформацию внутренних сифонов;
- u_1 и u_2 — деформации наружных сифонов;
- p_1 и p_2 — абсолютные давления в полостях *A* и *B*;
- f_1 и f_2 — коэффициенты жесткости сифонов наружных и внутренних;
- p_n — давление воздуха перед дросселем 11 постоянного сопротивления.

Для определения зависимости давления p от деформации y внутренних сильфонов напишем следующие уравнения:

1. Уравнение несжимаемости жидкости внутри полостей А и Б

$$S_1 u_1 - S_2 y = S_1 u_2 - S_2 y. \quad (V-18)$$

Отсюда $u_1 = u_2 = u$.

2. Уравнение равновесия штока 7 (силами инерции пренебрегаем)

$$p_1 S_2 - f_2 y = p_2 S_2 + f_2 y; \quad y = \frac{S_2 (p_1 - p_2)}{2f_2}. \quad (V-19)$$

3. Уравнение изменения объема полости А

$$S_1 u - S_2 y = \int_0^t S_3 v dt$$

или

$$S_1 u' = S_2 y' = S_3 v.$$

4. Уравнение давлений:

а) левого сильфона

$$p S_1 = p_1 S_1 + u f_1;$$

б) правого сильфона

$$p_0 S_1 + f u = p_2 S_1 - u f_1.$$

Отсюда

$$p_1 - p_2 = p - p_0 - u \frac{f + 2f_1}{S_1}. \quad (V-20)$$

5. Скорость перетекания v .

Гидродинамическое сопротивление дросселя перетеканию через него вязкой жидкости может быть принято пропорциональным скорости перетекания.

Пусть k есть сопротивление дросселя при единичной скорости перетекания, отнесенное к полному поперечному сечению соединительной трубы.

Тогда

$$(p_1 - p_2) S_3 = k v. \quad (V-21)$$

Исключая из всех уравнений v , u , $p_1 - p_2$, придем к уравнению, устанавливающему зависимость y от p :

$$A y' + y = B p', \quad (V-22)$$

где $A = \frac{k [m^2 (f + 2f_1) + 2f_2]}{2f_2 (f + 2f_1) n^2}$ сек.

$$B = \frac{S_2 k}{2f_2 (f + 2f_1) n^2} \text{ м}^2 \cdot \text{сек/кг}.$$

Здесь

$$m = \frac{S_2}{S_1} \quad \text{и} \quad n = \frac{S_3}{S_1}.$$

Результирующее воздействие на отражательную заслонку δ выразится уравнением согласно формуле (V-8)

$$z = x \frac{a+b}{b} - y \frac{b}{a},$$

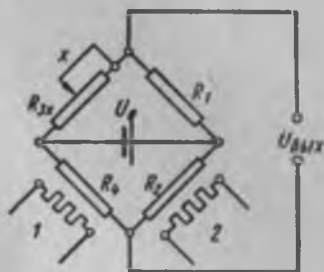
где y в свою очередь определяется из уравнения (V-22).

Если n и f взять достаточно большими, а k и m достаточно малыми, то коэффициент A по сравнению с коэффициентом I при y может быть сделан пренебрежимо малым и мы можем считать, что $y \approx Br'$.

Сильфонная гибкая связь встречается в схемах пневматических регуляторов температуры.

в) Мостовая гибкая обратная связь

В электрических схемах применяется иногда мостовая гибкая связь, где действие пружины и катаракта заменяется подогревом плеч моста вспомогательным током. Принципиальная схема такой связи показана на фиг. 124.



Фиг. 124. Схема мостовой гибкой обратной связи.

Мост составлен из постоянного сопротивления R_1 переменного сопротивления R_{3x} , зависящего от импульсов чувствительного элемента, и постоянных сопротивлений R_2 и R_4 обратной связи, помещенных внутри нагревательных элементов 1 и 2.

Условие равновесия моста выражается уравнением

$$R_{3x}R_2 = R_1R_4. \quad (V-23)$$

Пока регулируемая величина равна заданной, напряжение $U_{вх}$ равно нулю.

При отклонении регулируемой величины от заданного значения плечо R_{3x} изменяется, баланс моста нарушается, на выходе появляется напряжение $U_{вх}$, которое подается на усилитель. Приводится в движение сервомотор и одновременно включается греющий ток в один из подогревателей, именно тот, от действия которого обеспечивается быстрейшее сбалансирование моста.

При увеличении R_{3x} подогревается R_4 , при уменьшении R_{3x} подогревается R_2 . При наступлении равновесия моста сервомотор остановится и подача тока к нагревателю прекратится. Однако процесс регулирования еще не закончен. Вследствие охлаждения

нагретого плеча обратной связи баланс моста нарушится еще раз, сервомотор включится и доведет регулируемую величину до установленного значения. Этот процесс может повториться несколько раз, пока регулируемая величина не войдет в зону нечувствительности. Такая связь применяется, например, в регуляторах температуры типа ВТИ.

4. ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

а) Электрический дифференцирующий элемент

Примером электрического дифференцирующего элемента может служить контур RC , показанный на фиг. 20 и рассмотренный ранее в главе I.

Схема более совершенного дифференцирующего устройства показана на фиг. 125. Здесь в схему введен электронный усилитель.

Обозначим через

- i_1 — входной ток;
- i_2 — ток обратной связи;
- i — сеточный ток;
- U_1 — входное напряжение;
- U_2 — выходное напряжение;
- R — сопротивление связи;
- C — емкость;
- e_c — напряжение на сетке;
- k — коэффициент усиления электронного усилителя.

Для электрической схемы, изображенной на фигуре, справедливо уравнение

$$i_1 = C \frac{d(U_1 - e_c)}{dt}; \quad i_2 = \frac{U_2 - e_c}{R}$$

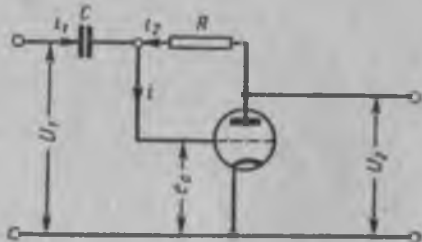
$$U_2 = -ke_c; \quad i = i_1 + i_2.$$

Сеточный ток обычно мал. Можно подобрать значения R и C так, чтобы значением i можно было пренебречь. В этом случае

$$C \frac{d(U_1 - e_c)}{dt} + \frac{U_2 - e_c}{R} \approx 0. \quad (\text{V-24})$$

Исключая e_c , придем к уравнению

$$U_2 = -RC \frac{k}{k+1} \cdot \frac{dU_1}{dt} - RC \frac{1}{1+k} \cdot \frac{dU_2}{dt}. \quad (\text{V-25})$$



Фиг. 125. Схема дифференцирующего устройства.

Если коэффициент усиления k достаточно велик, то вторым членом правой части уравнения (V-25) можно пренебречь, и мы получим

$$U_2 \approx -RC \frac{dU_1}{dt}, \text{ так как } \frac{k}{k+1} \approx 1. \quad (\text{V-26})$$

Степень точности зависит от величины коэффициента k .

Для получения воздействия по второй производной достаточно построить контур с двумя каскадами дифференцирования.

Если входное и выходное напряжения первого каскада будут U_1 и U_{12} , а второго соответственно U_{12} и U_2 , то должны иметь место уравнения

$$U_{12} \approx R_1 C_1 \frac{dU_1}{dt};$$

$$U_2 \approx R_2 C_2 \frac{dU_{12}}{dt},$$

где R_1 , R_2 , C_1 и C_2 — активные сопротивления и емкости первого и второго каскадов.

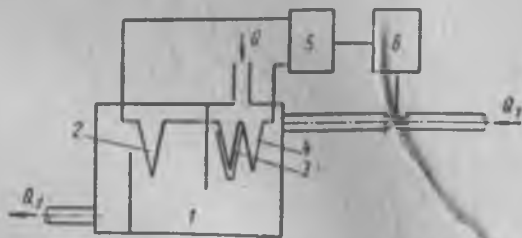
Исключая напряжение U_{12} , получим

$$U_2 \approx R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 U_1}{dt^2}. \quad (\text{V-27})$$

Отсюда следует, что контур из двух последовательных каскадов дифференцирования обеспечивает на выходе воздействие, пропорциональное второй производной от входного сигнала.

б) Тепловой дифференцирующий элемент

Схема такого элемента приведена на фиг. 126. Объектом регулирования на схеме является бак 1, в который поступает греющая



Фиг. 126. Схема теплового дифференцирующего элемента.

среда Q_1 и нагреваемая Q . На выходе из бака требуется поддерживать постоянную температуру θ . Для этой цели в баке помещены три термопары 2, 3 и 4. Первая термопара представляет собой нормальный чувствительный элемент, который измеряет температуру среды на выходе. Для измерения скорости изменения регулируемой

величины применена комбинация из двух тождественных термопар 3 и 4, расположенных рядом и включенных навстречу, из которых одна имеет термоизоляционный чехол. Характеристики двух последних термопар должны быть одинаковы между собой, но могут быть отличны от термопары 2. Наличие термоизоляционного чехла увеличивает тепловую инерцию термопары.

Пользуясь теорией теплопередачи, можно показать, что при нарушении установившегося значения температуры две указанные термопары будут создавать на выходе э.д.с., которую с достаточной для практики точностью можно принимать пропорциональной скорости изменения температуры, т. е. производной от температуры по времени.

В результате на входе усилителя 5 мы будем иметь э. д. с. е, равную

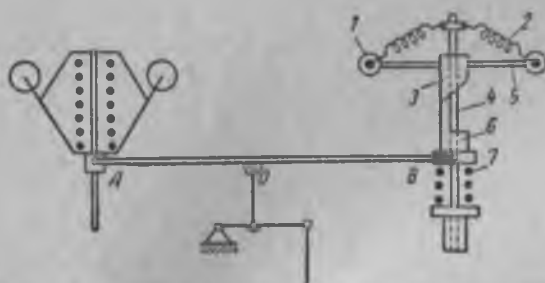
$$e = \alpha \theta + \beta \theta', \quad (V-28)$$

где α и β — коэффициенты пропорциональности.

Воздействие усилителя 5 передается сервомотору 6, управляющему открытием клапана. Вместо электрических термопар могут быть применены газовые термопары, включенные по аналогичной схеме.

в) Дифференцирующие элементы скорости

Акселерометры. В качестве дифференцирующего элемента может быть применен акселерометр (измеритель углового ускорения). Схема акселерометра дана на фиг. 127 совместно с регулятором



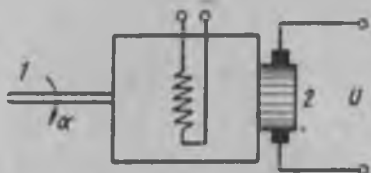
Фиг. 127. Схема акселерометра и регулятора скорости.

скорости. Он состоит из центробежных грузов 1, насаженных на коромысло 5, пружины 7 и муфты 6 с винтовым скосом, к которому прилегает скос втулки 3 коромысла 5. При установившейся скорости вала 4 акселерометра коромысло 5 с грузами 1 и втулкой 3 неподвижно относительно муфты 6.

При этом на муфту 6 через винтовой скос передается усилие, определяемое по закону наклонной плоскости по весу грузов 1 и натяжению пружин 2. Это усилие уравнивается силой упругости пружины 7. Регулируя натяжение пружин 2, мы можем уста-

повить желаемое давление на муфту 6 и ее положение на валу 4 при установившейся скорости этого вала.

При изменении угловой скорости коромысло 5 с грузами 1 поворачивается относительно вала 4 акселерометра на угол, пропорциональный ускорению. При этом появляется дополнительное усилие на муфту, вызванное силами инерции масс 1. Направление этого усилия зависит от знака изменения скорости. Дополнительное усилие вызывает смещение муфты 6 в ту или другую сторону от установившегося положения, смотря по знаку ускорения. Когда скорость вала 4 установится, дополнительное усилие на муфту исчезнет и вся система акселерометра возвратится в первоначальное положение.



Фиг. 128. Схема таходинамо, используемая в качестве дифференцирующего элемента.

На фиг. 127 муфта регулятора скорости связана с муфтой 6 акселерометра. Такое устройство носит название тахоакселерометра. Точка O рычага AB получает перемещение,

равное сумме двух составляющих: одной приблизительно пропорциональной квадрату угловой скорости $\alpha \omega^2$, другой — пропорциональной первой производной по времени $\beta \frac{d\omega}{dt}$.

Регулирующее перемещение точки O будет

$$z = \alpha \omega^2 + \beta \omega'. \quad (V-29)$$

Тахометрическая динамомашина в качестве дифференцирующего элемента. Схема таходинамо представлена на фиг. 128. Здесь входной величиной является угловое перемещение α вала 1, выходной напряжение U на щетках коллектора 2 таходинамо. Обмотка возбуждения питается от источника с постоянным напряжением.

В этом случае выходное напряжение U будет

$$U = C \frac{d\alpha}{dt}, \quad (V-30)$$

где C — константа таходинамо.

Из формулы следует, что выходная величина звена пропорциональна первой производной по времени от входной величины.

ГЛАВА VI

СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ, СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ И СТАТИКА

1. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ

В предыдущих главах II, III, IV и V были рассмотрены отдельные элементы систем автоматического регулирования. Из этих элементов, комбинируя их сочетания, можно построить систему регулирования, которая будет выполнять поставленную перед ней задачу.

Выше в главе I было указано, что система регулирования для ее исследования может быть разложена на отдельные части или звенья таким образом, что каждое звено несет определенную функцию в цепи регулирования. Схема системы, составленная из таких звеньев, называется функциональной структурной схемой системы регулирования. В зависимости от выполняемой функции звеньям присваиваются соответствующие названия: объект регулирования, чувствительный элемент или датчик, усилитель, управляющий элемент сервомотора, сервомотор или исполнительный механизм, релейное звено, звено обратной связи, дифференцирующее звено, задающее звено или задатчик, преобразовательное звено и другие.

В главе I также указывалось, что при исследовании систем автоматического регулирования условно предполагается, что все звенья системы обладают направленностью действия. Громадное большинство реальных систем удовлетворяет этому условию. Так например, в центробежном регуляторе скорости изменение скорости вращения вала регулятора приводит к перемещению муфты, но перемещение муфты посторонним воздействием не может изменить скорости вращения этого вала.

Свойство направленности действия звеньев позволяет установить для каждого звена «вход» и «выход» и на структурной схеме отметить стрелками направление воздействий, передаваемых от выхода одного звена на вход другого.

Для примера приведем ниже несколько типовых функциональных структурных схем.

На фиг. 129 представлена простейшая структурная схема системы прямого регулирования.

На фигуре обозначено:

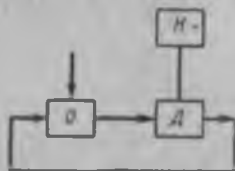
O — объект регулирования;

Д — чувствительный элемент или датчик;

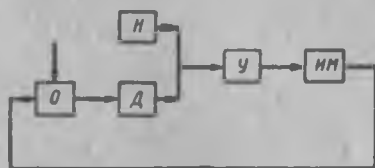
Н — задатчик или элемент настройки.

Чувствительный элемент *Д* получает воздействие от объекта регулирования и от задатчика *Н*. Выработанное на выходе звена *Д* результирующее воздействие передается непосредственно регулирующему органу объекта *O*.

На фиг. 130 изображена структурная схема системы непрямого регулирования.



Фиг. 129. Структурная схема системы прямого регулирования.



Фиг. 130. Структурная схема системы непрямого регулирования.

На фигуре обозначено:

У — управляющий элемент сервомотора;

ИМ — сервомотор.

Остальные обозначения совпадают с принятыми на предыдущей фигуре.

Здесь датчик *Д* и задатчик *Н* соединены параллельно в отличие от схемы фиг. 129. Их воздействия суммируются при передаче на вход звена *У*, представляющего управляющий элемент сервомотора. Воздействие от сервомотора передается непосредственно объекту *O* регулирования.

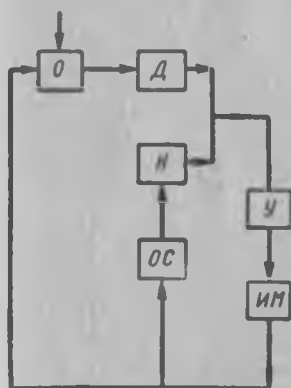
На фиг. 131 представлена структурная схема системы регулирования с обратной связью. Здесь: *ОС* — звено обратной связи от выхода сервомотора *ИМ* к управляющему звену *У*. Остальные обозначения совпадают с принятыми выше.

Особенностью приведенной схемы является то, что воздействие звена обратной связи передается на вход звена *У* не непосредственно, а через задатчик *Н*, который параллельно соединен с датчиком *Д*. Таким образом, на вход управляющего элемента передается воздействие, представляющее функцию воздействий *Д*, *Н* и *ОС*.

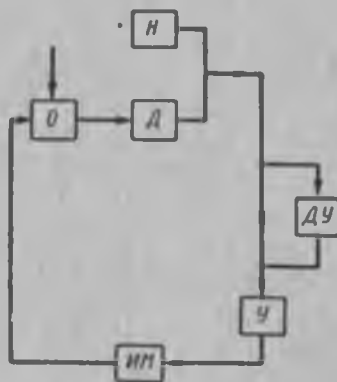
На фиг. 132 изображена структурная схема системы регулирования с дифференцирующим звеном. Здесь: *ДУ* — дифференцирующее звено. Остальные обозначения совпадают с принятыми выше.

Согласно структурной схеме, воздействие датчика *Д* суммируется с воздействием элемента настройки *Н* и передается на вход управляющего звена *У*. Кроме того, на вход *У* передается дополнительное слагаемое, представляющее выходное воздействие звена *ДУ*.

Последнее преобразовывает воздействие на входе, по заданному закону дифференцирования, в выходное воздействие. Таким образом, на вход управляющего звена будет передана алгебраическая сумма воздействий звеньев D , H и DY .



Фиг. 131. Структурная схема системы регулирования с обратной связью.



Фиг. 132. Структурная схема системы регулирования с дифференцирующим звеном.

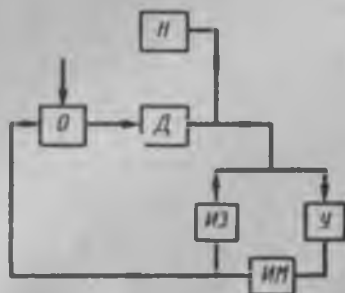
На фиг. 133 дана структурная схема системы регулирования с изодромной обратной связью. Здесь: $ИЗ$ — изодромное звено. Остальные обозначения — как было принято выше.

Согласно схеме, датчик D воспринимает воздействия от задатчика H и объекта регулирования O и вырабатывает результирующее воздействие, передаваемое на вход управляющего элемента Y .

Кроме того, на вход управляющего элемента Y поступает воздействие от изодромного звена $ИЗ$, осуществляющего обратную изодромную связь от выхода сервомотора $ИМ$ на вход управляющего элемента Y . Воздействие от сервомотора передается непосредственно регулируемому органу объекта O .

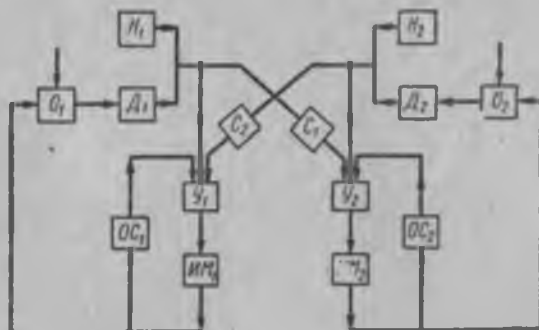
На фиг. 134 изображена структурная схема системы связанного регулирования двух величин.

Как следует из схемы, система связанного регулирования двух величин состоит из двух самостоятельных систем регулирования, соединенных дополнительными связями C_1 и C_2 . На вход управляющего элемента Y_1 первой системы кроме воздействий от звеньев



Фиг. 133. Структурная схема системы регулирования с изодромной обратной связью.

своей системы передается воздействие звена C_2 от датчика D_2 второй системы. Аналогично на вход управляющего элемента U_2 поступает воздействие от датчика D_1 первой системы. Таким образом, на управляющий элемент каждой системы передается алгебраическая сумма воздействий обоих датчиков D_1 и D_2 , а также воздействие звена обратной связи и элемента настройки.



Фиг. 134. Структурная схема системы связанного регулирования двух величин:

O_1 и O_2 — объекты регулирования; D_1 и D_2 — чувствительные элементы; N_1 и N_2 — задатчики; U_1 и U_2 — управляющие элементы сервомоторов; $ИМ_1$ и $ИМ_2$ — сервомоторы; OC_1 и OC_2 — звенья обратной связи; C_1 и C_2 — звенья дополнительных связей.

Во всех приведенных выше структурных схемах чувствительный элемент имеет непосредственное соединение с усилителем или управляющим элементом. В системах с электрическими датчиками такое соединение не всегда осуществимо.

Ниже рассмотрены основные схемы включения электрических датчиков в систему автоматического регулирования.

2. ОСНОВНЫЕ СХЕМЫ ВКЛЮЧЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ДАТЧИКОВ В СИСТЕМУ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Все электрические датчики, несмотря на большое разнообразие измеряемых ими величин, имеют на выходе ограниченное число величин по своей физической природе. Обычно на выходе датчика фигурируют электрическое сопротивление, сила тока, напряжение, емкость и самоиндукция.

Принятые схемы включения электрических датчиков в системы автоматического регулирования также немногочисленны.

Ниже мы рассмотрим следующие наиболее распространенные схемы включения: непосредственного включения на усилитель, мостовую, дифференциальную, компенсационную и релейную схемы.

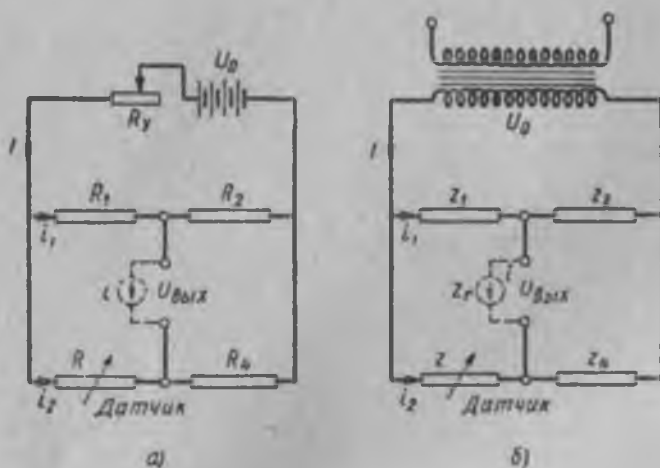
а) Непосредственное включение на усилитель

Наиболее простым включением датчика в систему автоматического регулирования при непрямом регулировании является включение непосредственно на усилитель. Такое включение на усилитель обычно применяется, если выходными величинами датчика будут ток или напряжение.

Если выходной величиной датчика является электрическое сопротивление, целесообразно применять мостовую или дифференциальную схему включения датчика в регулируемую систему, так как при непосредственном включении на усилитель усложняется схема включения.

б) Мостовая схема (фиг. 135)

Принципиальная мостовая схема постоянного тока приведена на фиг. 135, а.



Фиг. 135. Мостовые схемы включения датчиков.

Здесь: R_1, R_2, R_4 — постоянные сопротивления плеч моста;
 R — выходное сопротивление датчика;
 R_y — установочное сопротивление, включенное в диагональ моста вместе с источником напряжения;
 $U_{\text{вых}}$ — выходное напряжение моста;
 i — ток гальванометра (выходной ток моста);
 U_0 — напряжение батареи;
 I — ток от батареи;
 i_1, i_2 — токи в ветвях.

Для определения $U_{\text{см.х}}$ рассмотрим систему уравнений, выведенных в электротехнике для неуравновешенного моста:

$$I = i_1 + i_2;$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{R + R_4}{R_1 + R_2};$$

$$U_0 = IR_y + (R_1 + R_2) i_1;$$

$$U_{\text{см.х}} = i_1 R_2 - i_2 R_4.$$

Исключая из этих уравнений все токи и решая относительно $U_{\text{см.х}}$, найдем:

$$U_{\text{см.х}} = U_0 \frac{RR_2 - R_1 R_4}{R_y(R + R_1 + R_2 + R_4) + (R_1 + R_2)(R + R_4)}. \quad (\text{VI-1})$$

Обычно постоянные сопротивления неуравновешенного моста подбираются таким образом, что $R_1 = R_2 = R_4 = R_0$ и, кроме того, при совпадении регулируемой величины с заданным значением $R = R_0$ $U_{\text{см.х}} = 0$. При отклонении регулируемой величины от заданного значения, когда $R = R_0 + \Delta R$ $U_{\text{см.х}}$ получает значение

$$U_{\text{см.х}} = \Delta U_{\text{см.х}} = U_0 \frac{\Delta R}{R_y \left(4 + \frac{\Delta R}{R_0} \right) + 2R_0 \left(2 + \frac{\Delta R}{R_0} \right)} \approx U_0 \frac{\Delta R}{4(R_y + R_0)}.$$

При этом предполагается, что ΔR много меньше R_0 . Отсюда чувствительность моста по напряжению:

$$\frac{\Delta U_{\text{см.х}}}{\Delta R} = \frac{U_0}{4(R_y + R_0)} \text{ вольт/ом}. \quad (\text{VI-2})$$

Если выходной величиной моста является ток i , проходящий через контактный гальванометр, то при $R_y = 0$ величина тока определится из системы уравнений

$$\begin{cases} U_0 = i_1 R_1 + (i_1 - i) R_2 \\ U_0 = i_2 R + (i_2 + i) R_4 \\ 0 = i_1 R_1 + i R_r - i_2 R_4. \end{cases}$$

Здесь R_r — сопротивление гальванометра. Отсюда

$$i = U_0 \frac{RR_2 - R_1 R_4}{R_r(R_1 + R_2)(R + R_4) + R_1 R_2(R + R_4) + RR_4(R_1 + R_2)}. \quad (\text{VI-3})$$

При $R_1 = R_2 = R_4 = R_0 = R$; $i = 0$.

При $R = R_0 + \Delta R$; $i = \Delta i = \frac{U_0}{R_0} \frac{\Delta R}{4(R_r + R_0)}.$

Чувствительность моста по току будет

$$\frac{\Delta I}{\Delta R} = \frac{U_n}{R_0} \cdot \frac{1}{4(R_f + R_0)} \text{ амп./ом.} \quad (\text{VI-4})$$

На фиг. 135, б показан мост на переменном токе.

Здесь z_1, z_2, z_4 — полные сопротивления плеч моста;

z — сопротивление на выходе датчика;

z_f — сопротивление гальванометра;

U_0 — напряжение на зажимах трансформатора.

Как известно из теории электротехники, равновесие моста переменного тока имеет место при $zz_2 = z_1z_4$.

При этом $U_{вых} = 0$.

Здесь сопротивления z, z_1, z_2, z_4 представлены в комплексной форме:

$$z = r + jx; \quad z_1 = r_1 + jx_1 \text{ и т. д.,}$$

где $r, r_1, \dots$ активные и $x, x_1, \dots$ реактивные сопротивления плеч моста, а $j = \sqrt{-1}$.

Из равенства $(r + jx)(r_2 + jx_2) = (r_1 + jx_1)(r_4 + jx_4)$ следует два условия равновесия моста

$$\begin{cases} rr_2 - xx_2 = r_1r_4 - x_1x_4 \\ xr_2 + rx_2 = r_1x_4 + x_1r_4. \end{cases}$$

Обычно, учитывая трудность соблюдения обоих требований в практических условиях, принимают либо $r_1 = r_2 = r_4 = r = 0$, либо $x = x_1 = x_2 = x_4 = 0$.

Тогда вместо двух условий равновесия моста мы будем иметь одно условие

$$xx_2 = x_1x_4 \text{ или } rr_2 = r_1r_4. \quad (\text{VI-5})$$

Значения чувствительности по напряжению и по току для моста переменного тока могут быть получены методом, примененным выше для постоянного тока.

При $z_1 = z_2 = z = z_0$ и $z = z_0 + \Delta z$ чувствительность по напряжению будет:

$$\frac{\Delta U_{вых}}{\Delta z} = \frac{U_n}{4z_0} \quad (\text{VI-6})$$

и чувствительность по току

$$\frac{\Delta I}{\Delta z} = \frac{U_n}{z_0} \cdot \frac{1}{4(z_f + z_0)}. \quad (\text{VI-7})$$

В последних двух формулах все значения входящих величин берутся вначале в комплексной форме, а затем переходят к отношению модулей.

в) Дифференциальная схема включения датчика

Дифференциальная схема включения датчика дана на фиг. 136. Здесь обозначено:

z_0 — полное сопротивление одного плеча дифференциальной схемы;

z — выходное сопротивление датчика (второе плечо схемы);

U_0 — вторичное напряжение трансформатора;

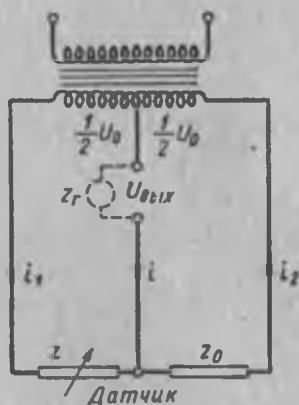
$U_{\text{вых}}$ — напряжение на выходе схемы;

z_r — сопротивление гальванометра;

i_1, i_2 — токи в сопротивлениях;

i — ток в гальванометре.

Для определения $U_{\text{вых}}$ имеем систему уравнений:



$$\begin{cases} i_1 = i_2 \\ U_0 = i_1 z + i_2 z_0 \\ U_{\text{вых}} = \frac{1}{2} U_0 - i_1 z = \frac{1}{2} U_0 \frac{z_0 - z}{z + z_0} \end{cases}$$

При $z = z_0$ $U_{\text{вых}} = 0$.

При $z = z_0 + \Delta z$.

Фиг. 136. Дифференциальная схема включения датчика.

$$U_{\text{вых}} = \Delta U_{\text{вых}} = \frac{1}{2} U_0 \frac{\Delta z}{2z_0 + \Delta z} \approx U_0' \frac{\Delta z}{4z_0}.$$

Чувствительность по напряжению:

$$\frac{\Delta U_{\text{вых}}}{\Delta z} = U_0' \frac{1}{4z_0} \text{ вольт/ом.} \quad (\text{VI-8})$$

Если выходной величиной дифференциальной схемы является ток i в приборе, подключенном к $U_{\text{вых}}$, то система уравнений, определяющая ток i , будет

$$\begin{cases} i_1 + i = i_2 \\ \frac{1}{2} U_0 = i_1 z - i z_r \\ \frac{1}{2} U_0 = i z_r + i_2 z_0 \end{cases}$$

Отсюда

$$i = \frac{1}{2} U_0' \frac{z - z_0}{z_0 z_r + z(z_r + z_0)}.$$

При $z = z_0$ $i = 0$.

При $z = z_0 + \Delta z$ $i = \Delta i \approx \frac{1}{2} U_0' \frac{\Delta z}{z_0 z_r + z_0(z_r + z_0)}.$

Чувствительность схемы по току выразится уравнением

$$\frac{\Delta i}{\Delta z} = \frac{U_x}{2z_0} \frac{1}{2z_f + z_0} \text{ а.мВ/ом.} \quad (\text{VI-9})$$

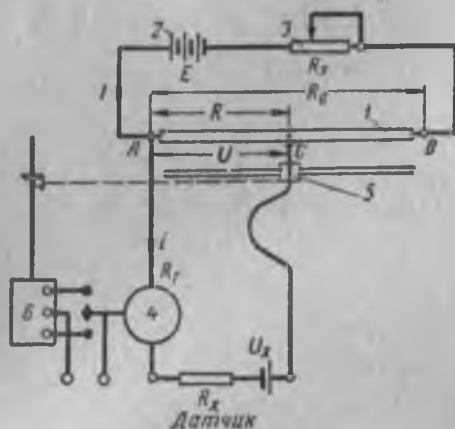
Сравнивая значения чувствительности мостовой и дифференциальной схем, можно отметить, что при одинаковых условиях чувствительность по напряжению обеих схем одинакова, чувствительность по току различна. Эта чувствительность зависит от отношения сопротивлений гальванометра и датчика. Если сопротивление датчика много больше сопротивления гальванометра, то при дифференциальной схеме можно достигнуть чувствительности почти в 2 раза большей. Преимуществом мостовой схемы является возможность применения нелинейных сопротивлений, которые включаются в одно из плеч моста. Это расширяет сферу использования мостовых схем в системах автоматического регулирования.

г) Компенсационная схема

Компенсационная схема включения датчика имеет широкое распространение при регулировании температуры с помощью термпар. На фиг. 137 дана принципиальная схема компенсационного включения.

Принцип компенсации заключается в том, что выходное напряжение U_x датчика уравнивается равным и противоположным по знаку падением напряжения на реохорде 1. Величина этого падения напряжения может быть установлена с высокой степенью точности. Уравнивающее падение напряжения снимается с реохорда 1 с помощью движка 5. Реохорд включен в замкнутую цепь постоянного тока из батареи 2 и установочного сопротивления 3, регулируя которое можно установить желаемое падение напряжения на единицу длины реохорда.

Момент компенсации устанавливается по отсутствию тока в контактном гальванометре 4. Последний снабжен контактами, которые при отклонении гальванометра замыкают цепь двигателя 6 для хода в ту или другую сторону. Если выходное напряжение датчика U_x уравновешено падением напряжения на реохорде, то ток в гальва-



Фиг. 137. Компенсационная схема включения датчика.

нометре равен нулю и двигатель 6 неподвижен. При отклонении выходного напряжения U_x датчика от установившегося значения баланс равновесия в компенсационной схеме нарушается и в гальванометре 4 появляется ток. Двигатель приходит в движение и представляет регулирующий орган в сторону восстановления равновесия системы. Одновременно с помощью дополнительной передачи двигатель перемещает движок 5 в сторону уравнивания нового напряжения датчика с падением напряжения на реохорде. Процесс регулирования заканчивается при наступлении компенсации.

Обозначим через

R_0 — общее сопротивление реохорда;

R — сопротивление реохорда на участке AC;

R_y — сопротивление в цепи батареи 2;

R_r — сопротивление гальванометра;

R_x — сопротивление датчика;

I — сила тока в цепи батарей;

i — сила тока в цепи гальванометра;

U_x — электродвижущая сила датчика;

U — напряжение на сопротивлении R при разомкнутой цепи датчика ($i = 0$).

Сила тока i в приборе может быть определена методом суперпозиции, полагая поочередно $U_x = 0$ и $U_0 = 0$.

Приведем готовый результат из курса электротехники

$$i = \frac{U_x - U}{R_i + R_r + R_x}. \quad (\text{VI-10})$$

Сопротивление R_i представляет результирующее сопротивление цепи батареи 2. Оно определяется как сопротивление двух параллельных ветвей R и $R_0 - R + R_y$,

$$R_i = \frac{R(R_0 - R + R_y)}{R_0 + R_y}.$$

При $U_x = U$ ток i в гальванометре равен нулю.

Положим $U_x = U = \Delta U_x$.

Тогда $i = \Delta i = \frac{\Delta U_x}{R_i + R_r + R_x}$.

Чувствительность компенсационной схемы выразится уравнением

$$\frac{\Delta i}{\Delta U_x} = \frac{1}{R_i + R_x + R \left[1 - \frac{R}{R_0 + R_y} \right]} \text{ амп/вольт}. \quad (\text{VI-11})$$

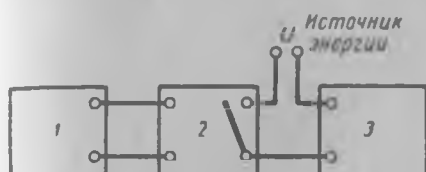
Наименьшее значение чувствительности будет при $R = \frac{1}{2} (R_0 + R_y)$, а наибольшее по краям реохорда. Компенсационная схема включения датчика позволяет достигнуть большей точности измерения сравнительно с другими схемами, так как в момент измерения ток

не проходит через измерительный прибор, что устраняет погрешности, связанные с потерей напряжения в контактах и зажимах. Существенным недостатком включения датчика по компенсационной схеме является необходимость автоматического перемещения движка 5, что усложняет устройство систем автоматического регулирования

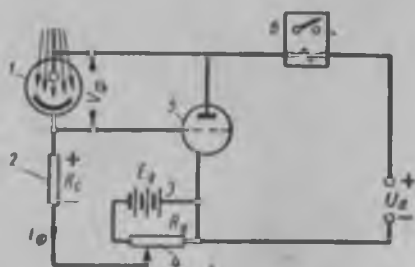
д) Релейная схема

Релейные схемы включения датчиков находят большое применение в системах автоматического регулирования, так как с помощью их могут быть достигнуты большие коэффициенты усиления по мощности. Принцип релейной схемы регулирования показан на фиг. 138.

Выходная величина датчика 1 (ток или напряжение) подается в первичную цепь реле 2. Когда отклонение на выходе датчика до-



Фиг. 138. Релейная схема включения датчика.



Фиг. 139. Схема включения фотодатчика при работе на постоянном токе.

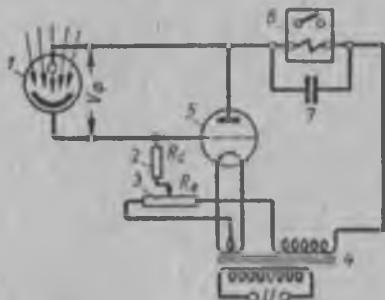
стигнет установленного значения, реле 2 срабатывает и замыкает контакты вторичной цепи. Вторичная цепь составляется из источника энергии постоянного или переменного тока, контактов реле и исполнительного механизма 3. При замыкании контактов реле ток от источника энергии поступает к исполнительному механизму и приводит его в движение. При значительной мощности исполнительного механизма контакты реле могут оказываться недостаточными для прохода через них тока. В этом случае первичное реле воздействует на вторичное — промежуточное реле, большей мощности, или на аппарат управления, которые включают исполнительный механизм по команде первичного реле. Когда отклонение датчика уменьшится и войдет в пределы нечувствительности, контакты реле 2 разомкнутся, цепь питающая исполнительный механизм разорвется и механизм остановится.

В некоторых случаях регулирующий сигнал от датчика бывает настолько слаб, что он должен быть предварительно усилен, прежде чем его можно подать в первичную цепь реле.

В качестве примеров таких случаев приведем схемы включения фотоэлементов на постоянном и переменном токе.

На фиг. 139 приведена схема включения фотодатчика при работе на постоянном токе.

При освещении фотоэлемента 1 появляется фототок I_{ϕ} . Этот фототок создает с помощью сопротивления смещения 2 R_c положительный потенциал на сетке и отпирает электронную лампу 5. Анодный ток лампы действует на первичную обмотку реле 6 и заставляет его сработать. Реле 6 управляет исполнительным механизмом. При отсутствии фототока электронная лампа 5 заперта постоянным отрицательным напряжением, получаемым от батареи смещения 3. Переменное сопротивление 4 монтируется для настройки фотодатчика таким образом, чтобы реле 6 срабатывало при освещении фотодатчика.



Фиг. 140. Схема включения фотодатчика при работе на переменном токе.

На фиг. 140 приведена другая схема включения фотодатчика 1 при работе на переменном токе. Эта схема принципиально не отличается от предыдущей схемы. Здесь вместо источника постоянного тока применен трансформатор 4, который обеспечивает нужное напряжение на аноде лампы 5. Смещение потенциала сетки и настройка фотодатчика достигается установкой сопротивлений 3 и 2.

Реле 6 шунтировано конденсатором 7, который пропускает через себя переменную составляющую анодного тока, направляя постоянную составляющую через первичную обмотку реле. Это устраняет вибрацию контактов реле.

Чувствительность релейных схем зависит от чувствительности релейного элемента. Она определяется отношением мощности срабатывания реле к мощности управления. Порогом чувствительности релейной схемы является наименьшая мощность срабатывания, при которой реле действует. В табл. 3 приведены значения мощностей срабатывания и управления для основных типов реле.

3. СТАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Установившееся состояние равновесия звена может быть описано некоторым уравнением

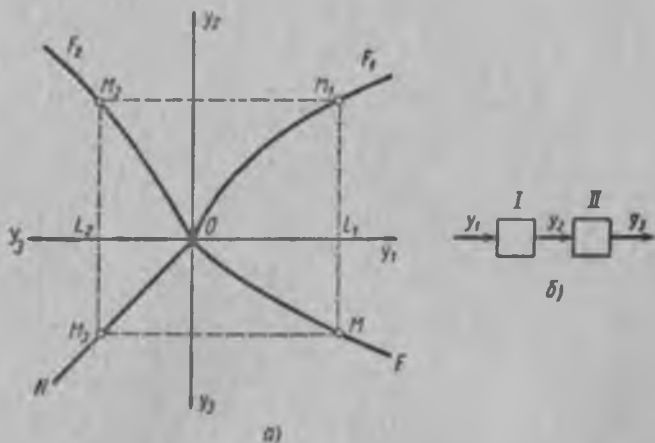
$$y_{\text{вых}} = f(y_{\text{вх}}).$$

где $y_{\text{вых}}$ — воздействие звена на выходе;

$y_{\text{вх}}$ — воздействие на входе при установившемся состоянии равновесия системы. Это уравнение называется статической характеристикой звена.

Если эта зависимость может быть представлена линейной функцией $y_{\text{вых}} = a + ky_{\text{вх}}$, то звено называется линейным. Возможны случаи, когда $y_{\text{вых}}$ не зависит от $y_{\text{вх}}$. Это будет состояние безраз-

личного равновесия звена. Такое звено называется астатическим, оно не имеет статической характеристики. Как мы видим из структурных схем, звенья могут соединяться последовательно, параллельно и иметь обратные связи. При последовательном соединении двух звеньев со статическими характеристиками $y_2 = F_1(y_1)$ и $y_3 = F_2(y_2)$ результирующую характеристику этой группы звеньев



Фиг. 141. Построение результирующей статической характеристики двух звеньев.

$y_3 = F(y_1)$ можно определить графическим путем, как показано на фиг. 141. На фигурах 141, а, б обозначено:

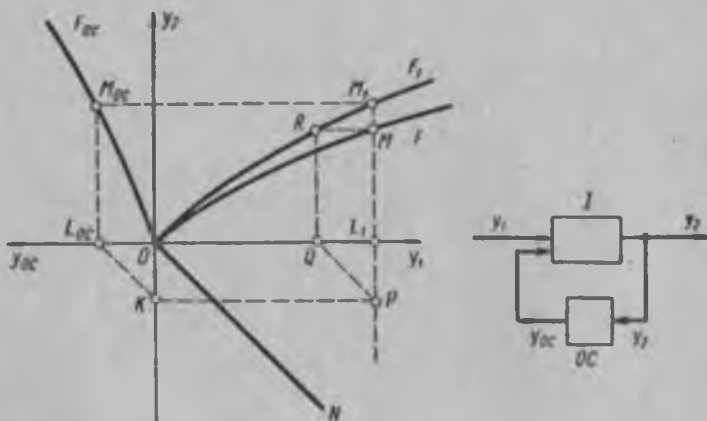
- I и II — два последовательно соединенных звена;
- y_1, y_2, y_3 — воздействия звеньев на входе и выходе;
- F_1, F_2 — графики статических характеристик первого и второго звеньев;
- F — график результирующей статической характеристики группы двух звеньев.

Расположим кривые статических характеристик первого звена $F_1(y_1)$ в системе координат y_1Oy_2 и второго $F_2(y_2)$ в системе y_2Oy_3 , как представлено на фигуре. Для построения искомой характеристики выберем систему координат y_1Oy_3 и проведем биссектрису ON координатного угла y_2Oy_3 . Далее возьмем произвольную точку M_1 на кривой F_1 , отвечающую какому-либо значению $y_1 = OL_1$. Переносим эту точку по горизонтали в точку M_2 на кривой F_2 , проводим из M_2 вертикальную линию M_2M_3 до пересечения с биссектрисой ON и переносим точку M_3 по горизонтали в точку M на продолжение ординаты M_1L_1 . Построенная точка M будет принадлежать искомой характеристике F . Производя аналогичное построение для других точек кривой F_1 , построим кривую F . При параллельном соединении двух звеньев со статическими характеристиками $y_{21} = F_1(y_1)$

и $y_{22} = F_2(y_1)$ результирующая характеристика этой группы двух звеньев найдется как сумма $y_{21} + y_{22}$

$$y_2 = F(y_1) = y_{21} + y_{22} = F_1(y_1) + F_2(y_1).$$

Если звено имеет обратную связь, то результирующая характеристика звена может быть найдена графически, как показано на фиг. 142.



Фиг. 142. Построение статической характеристики звена с обратной связью.

Допустим, что кривая F_1 изображает статическую характеристику звена $y_2 = F_1(y_1)$ в системе координат $y_1 O y_2$ при отсутствии обратной связи, а кривая F_{oc} статическую характеристику $y_{oc} = F_{oc}(y_2)$ звена обратной связи в системе координат $y_{oc} O y_2$. Предположим также, что обратная связь отрицательна.

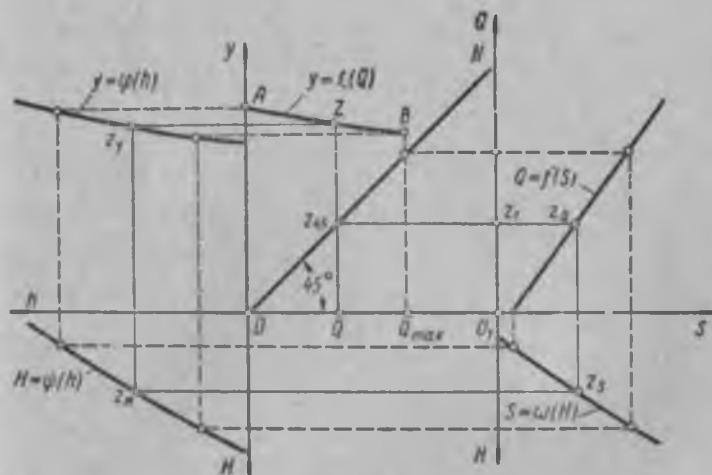
На фигуре обозначено:

- I — звено системы;
- OC — звено обратной связи;
- y_1, y_2, y_{oc} — воздействия звеньев;
- F_1 — статическая характеристика звена I без обратной связи;
- F_{oc} — статическая характеристика звена обратной связи;
- F — результирующая статическая характеристика звена I с учетом обратной связи.

Для построения искомой характеристики проведем предварительно биссектрису координатного угла ON . Берем на кривой F_1 произвольную точку M_1 , отвечающую значению $y_1 = OL_1$. Переносим эту точку по горизонтали в точку M_{oc} кривой F_{oc} . Далее проектируем точку M_{oc} на горизонтальную координатную ось в точку L_{oc} и проводим линию $KL_{oc} \parallel ON$. Точку K пересечения линии KL_{oc}

с вертикальной координатной осью переносим по горизонтали в точку P , лежащую на вертикали M_1L_1 . Далее из точки P проводим линию $PQ \parallel ON$ и из точки Q линию $QR \parallel M_1L_1$. Переносим точку R по горизонтали до встречи с ординатой M_1L_1 найдем точку M искомой характеристики.

Производя аналогичные построения для других точек кривой F_1 , построим результирующую характеристику $F(y_1)$ звена с обратной связью.



Фиг. 143. Графический способ построения регулировочной характеристики системы.

Применяя изложенные выше приемы построения результирующих характеристик группы звеньев при последовательном и параллельном соединениях, а также для звеньев с обратными связями, мы можем построить статическую характеристику для системы регулирования в целом. Такая статическая характеристика, представляющая зависимость регулируемой величины от нагрузки объекта, называется регулировочной характеристикой системы.

Ниже на фиг. 143 показан графический способ построения регулировочной характеристики системы, по характеристикам чувствительного элемента, сервомотора и объекта регулирования.

Допустим, что характеристика чувствительного элемента представлена в координатных осях (y, h) кривой

$$y = \varphi(h),$$

где y — регулируемый параметр

и h — выходная величина чувствительного элемента.

Примем, что структурная схема системы регулирования состоит из звеньев: чувствительный элемент, исполнительный механизм, объект регулирования.

Пусть диаграмма $H = \psi(h)$ определяет зависимость перемещения исполнительного механизма от выходной величины h чувствительного элемента.

Построим далее в координатных осях SO_1H , как показано на фиг. 143, кривую $S = \omega(H)$ зависимости открытия S регулирующего органа от перемещения H исполнительного механизма.

Допустим, что характеристика регулирующего органа $Q = f(S)$, представляющая зависимость расхода или притока регулируемой среды от открытия S регулирующего органа, нам известна и изображена в системе координат QO_1S диаграммой $Q = f(S)$.

После сделанных подготовительных построений производим построение интересующей нас регулировочной характеристики системы. Прежде всего, устанавливаем ширину зоны регулирования, т. е. предельные значения расхода $Q_{\max}$ и $Q_{\min}$ регулируемой среды, и переносим эти точки последовательно на кривые $Q = f(S)$, $S = \omega(H)$, $H = \psi(h)$ и $y = \varphi(h)$, как показано на фиг. 143. В нашем случае принято $Q_{\min} = 0$. Далее проводим прямую — ON из точки O под углом 45° к горизонтальной оси.

Пользуясь этой прямой, определяем начальную A и конечную B точки искомой характеристики, как показано на фигуре. Эти точки уже позволяют вычислить степень неравномерности нашей регулировочной характеристики по формуле

$$\delta = \frac{2(y_A - y_B)}{y_A + y_B} \quad (\text{VI-12})$$

Кривая $y = \xi(Q)$ (регулировочная характеристика) легко строится по точкам. Задаваясь произвольным значением Q , откладываем $O_1Z_1 = Q$ и отмечаем точку Z_1 на оси ординат O_1Q . Далее переносим эту точку последовательно на кривые $Q = f(S)$, $S = \omega(H)$, $H = \psi(h)$ и $y = \varphi(h)$, как показано на фигуре, а также на прямую ON в точку Z_{45} . Проводя из точек Z_{45} и Z_1 прямые параллельно осям координат, определим искомую точку Z регулировочной характеристики, отвечающую точке Z_1 на оси O_1Q , или что то же значению OQ на горизонтальной оси OO_1 .

При астатическом регулировании регулировочная характеристика $y = \xi(Q)$ превратится в прямую линию, параллельную оси OQ . Это следует из того, что в астатических системах регулирующий орган занимает различные положение при одном и том же значении регулируемой величины.

Так, например, в регуляторе скорости, изображенном на фиг. 2 главы I, изодромное устройство при каждом новом состоянии равновесия системы всегда возвращает муфту регулятора в первоначальное положение.

Если статическая характеристика $S = \omega(H)$ на фиг. 143 превратится в прямую линию, параллельную горизонтальной оси координат O_1S , т. е. значение H сделается независимым от S , то регулировочная характеристика $y = \xi(Q)$ станет прямой AB , параллельной оси OQ .

4. СТАТИКА СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Раздел теории регулирования, анализирующий зависимости между параметрами системы в равновесном состоянии, называется статикой систем регулирования в отличие от динамики, рассматривающей вопросы, связанные с переходным режимом.

Равновесное состояние характеризуется следующими условиями:

- 1) отклонение регулируемой величины от заданного значения равно нулю или некоторому постоянному значению;
- 2) между притоком и расходом регулируемой среды устанавливается баланс;
- 3) регулирующий орган, изменяющий приток или расход регулируемой среды, неподвижен;
- 4) сервомотор находится в покое;
- 5) управляющий элемент сервомотора находится в положении, при котором обеспечивается неподвижность сервомотора.

Исходя из этих условий, можно найти зависимости между параметрами системы регулирования при равновесном состоянии, а также кривую зависимости регулируемой величины от расхода или притока рабочей среды, т. е. регулировочную характеристику системы.

В зависимости от того, должна ли система авторегулирования поддерживать постоянное значение регулируемого параметра точно или приближенно, мы различаем астатическое и статическое регулирование.

Если при астатическом регулировании, как уже было отмечено, регулируемая величина всегда возвращается в процессе регулирования к своему начальному или заданному значению, то при статическом регулировании регулятор не приводит регулируемый параметр после изменения нагрузки к заданному значению, т. е. существует так называемая остаточная неравномерность, или статическая ошибка.

В первом случае регулировочная характеристика представляет прямую линию, параллельную оси расхода рабочей среды.

При статическом регулировании регулировочная характеристика в общем случае имеет вид кривой линии.

Для суждения о величине неравномерности в случае статического регулирования служит степень или коэффициент неравномерности, представляющий отношение

$$\delta = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{y_{\text{ср}}}$$

где $y_{\max}$, $y_{\min}$ и $y_{\text{ср}}$ — максимальное, минимальное и среднее значения регулируемого параметра в зоне регулирования.

Во всех случаях статического регулирования представляется важным знать степень неравномерности регулировочной характеристики в пределах зоны регулирования. Каждый технологический процесс требует для нормальной работы соблюдения допустимого верхнего значения степени неравномерности регулируемого параметра. В некоторых случаях представляется необходимым для обеспечения устойчивости процесса не допускать снижения степени неравномерности меньше некоторого минимального предела.

Степень неравномерности статической регулирующей системы зависит, главным образом, от степени неравномерности чувствительного элемента или датчика и от ширины зоны регулирования, а также в некоторой мере от характеристик сервомотора и регулирующего органа.

В астатических системах выбор степени неравномерности чувствительного элемента не играет существенной роли, так как остаточная неравномерность компенсируется действием изодрома, или упругой обратной связи.

Выбор степени неравномерности регулировочных характеристик для силовых двигателей имеет особо важное значение в случае параллельной работы электрических генераторов, как об этом было сказано выше.

Регулировочные характеристики силовых двигателей в этом случае должны быть близки друг к другу как по форме, так и по своему наклону. Кроме того, регуляторы этих двигателей должны иметь приспособления для смещения регулировочных характеристик на ходу путем изменения настройки регулятора.

Таким образом, в каждом конкретном случае должна быть определена регулировочная характеристика системы регулирования в пределах рабочей зоны и проверена ее степень неравномерности и форма.

В программных регуляторах предписанное значение регулируемого параметра само является переменной величиной и функцией времени. Здесь следует различать два случая:

1) когда скорость изменения предписанного программой значения настолько незначительна, что ею можно пренебречь сравнительно со скоростью переходного процесса;

2) когда скорость изменения регулируемой величины по программе сравнима со скоростью переходного процесса.

В первом случае можно условно рассматривать равновесные состояния для каждого значения регулируемой величины по программе. Вместо одной регулировочной характеристики здесь мы будем иметь семейство таких характеристик для каждой точки программы.

Во многих случаях, с достаточной точностью можно определить значения регулируемого параметра по статическим зависимостям в системах регулирования.

Так например, в копирующих системах, где чувствительным элементом является копируемый палец, который скользит по поверх-

ности модели, изменение регулируемого параметра можно определить с помощью статических уравнений только в том случае, если скорость его скольжения по модели настолько незначительна, что ею можно пренебречь сравнительно со скоростью переходного процесса. Во втором случае изменение регулируемой величины может быть описано только уравнениями динамики.

Статика систем регулирования нескольких величин имеет свои особенности.

При одновременном автоматическом регулировании двух и более параметров, как об этом было сказано выше в главе I, можно иметь *н е с в я з а н н о е*, либо *с в я з а н н о е* регулирование. В первом случае система имеет несколько независимых друг от друга регуляторов (по числу регулируемых параметров), каждый со своим чувствительным элементом. Во втором случае эти регуляторы имеют между собой связь, которая может быть механическая, гидравлическая или электрическая. Однако не всякая установленная связь дает хорошие результаты.

Для обеспечения совершенной схемы одновременного регулирования нескольких параметров, зависимых друг от друга, эта связь должна быть так подобрана, чтобы каждый регулятор действовал самостоятельно, не вызывая действия другого.

Рассматривая каждый регулятор со своим измерительным элементом, регулирующим органом и объектом регулирования как отдельную замкнутую систему регулирования, устанавливаем, что эти системы взаимодействуют друг с другом. Изменение одной регулируемой величины вызывает изменение других, переходный процесс в одной системе вызывает переходные процессы в других. Регулирование будет называться *а в т о н о м н ы м*, если при действии регулятора одной величины полностью исключаются отклонения других регулируемых величин как в установившемся, так и в переходном режимах.

Условия, которым должна удовлетворять связь между регуляторами, для обеспечения указанного требования, представляют условия автономности, на основании которых выбирается эта связь.

Условия автономности различны для равновесного состояния и для переходного режимов. Для хорошей работы системы должны быть соблюдены условия автономности для обоих режимов. Ниже, на примере, показано нахождение условий автономности для равновесного состояния при двух регулируемых параметрах.

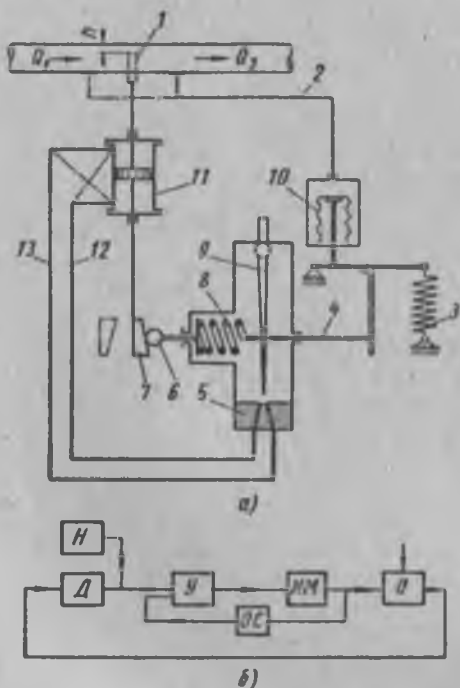
В зависимости от вида регулируемого параметра различают регуляторы: уровня, давления и разрежения, скорости, температуры, расхода и количества, пропорции или соотношения, напряжения, мощности, частоты, влажности, громкости звука, шага винта у самолетов, регуляторы горения и другие.

Необходимо отметить, что приведенный перечень регуляторов не исчерпывает полностью всех видов, какие могут встретиться на

практике. Приведем ниже несколько принципиальных схем автоматического регулирования.

а) Регуляторы давления с жесткой обратной связью (фиг. 144)

На фиг. 144, а представлен схематично регулятор давления со струйной трубкой и жесткой обратной связью. Чувствительный



Фиг. 144. Схема регулятора давления со струйной трубкой и жесткой обратной связью.

кала, а также направление движения поршня сервомотора для правильной работы регулятора должны быть так согласованы, чтобы действие обратной связи было направлено против воздействия чувствительного элемента на струйную трубку.

Равновесное состояние может иметь место только при неподвижном поршне сервомотора и неподвижной струйной трубке в нейтральном положении, а также при равенстве притока и расхода регулируемой среды.

Допустим, что усилие P_s толкателя 4, передаваемое от чувствительного элемента 10 на струйную трубку, имеет линейную зависимость от давления p в точке замера. При сжатой пружине 3 эта зависимость может быть представлена формулой

$$P_s = \mu p + P_{os}, \quad (VI-13)$$

где μ — коэффициент пропорциональности, а P_{os} — сила упругости пружины 3 при $p = 0$. Аналогично примем, что сила упругости P_c пружины 8 обратной связи вблизи нейтрального положения струйной трубки линейно зависит от открытия h регулирующего органа, т. е. положим, что

$$P_c = P_{oc} - \lambda h. \quad (VI-14)$$

Здесь λ — коэффициент пропорциональности, а P_{oc} — сила упругости пружины 8 при $h = 0$.

Знак минус перед h взят с учетом угла наклонной плоскости локала.

При установившемся режиме должно иметь место равенство усилий

$$P_c = P_p$$

Если допустить, что $Q = \alpha h$, где α — коэффициент пропорциональности, то из уравнения $P_p = P_c$ имеем:

$$\mu p + P_{os} = P_{oc} - \frac{\lambda Q}{\alpha}.$$

Вводя обозначения $p_0 = \frac{P_{oc} - P_{os}}{\mu}$; $\beta = \frac{\lambda}{\alpha\mu}$, найдем

$$p = p_0 - \beta Q. \quad (VI-15)$$

Регулировочная характеристика в этом случае будет представлять наклонную прямую. Давление p убывает с увеличением Q .

Сказанное будет справедливо только для регуляторов давления «после себя». Если точка замера давления взята до регулирующего органа (см. пункт 1 на фигуре), т. е. мы имеем дело с регулятором давления «до себя», для правильной работы регулятора нужно поменять местами подключение трубок 13 и 12 к цилиндру сервомотора и изменить направление наклона плоскости обратной связи как показано на фиг. 144, а пунктиром.

В этом случае сила упругости P_c пружины обратной связи будет выражаться формулой:

$$P_c = P_{oc} + \lambda h$$

и уравнение регулировочной характеристики примет вид:

$$p = p_0 + \beta Q, \quad (VI-16)$$

т. е. будет иметь возрастающий характер.

Система может быть разложена на звенья:

D — чувствительный элемент, состоящий из сильфона 10 и системы рычагов;

H — задатчик;

$У$ — управляющий элемент, представляющий струйную трубку 9;

$ИМ$ — сервомотор 11;

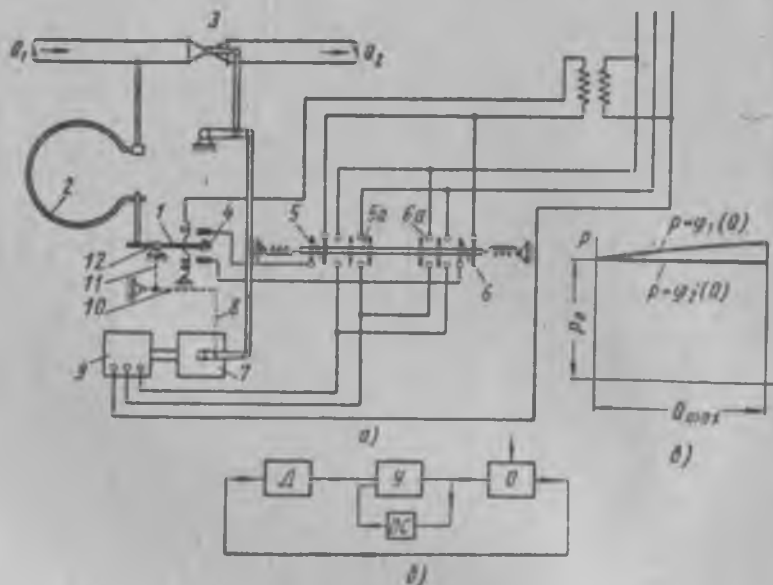
ОС — звено обратной связи, которое составляется из лекала 7, ролика 6 и пружины 8;

О — объект регулирования.

Структурная схема системы регулирования изображена на фиг. 144, б.

б) Релейный регулятор давления (фиг. 145)

Па фиг. 145, а дана схема релейного регулятора давления. Чувствительный элемент регулятора представляет манометрическую



Фиг. 145. Схема релейного регулятора давления.

трубку Бурдона 2, у которой один конец закреплен, а другой давит на рычаг 1. Рычаг снабжен контактным устройством 4. Если давление в точке замера отвечает заданному значению, то рычаг 1 занимает нейтральное положение, при котором оба контакта — верхний и нижний — разомкнуты. При этом обмотки 5 и 6 обесточены и электродвигатель 9 отключен от сети. Если давление среды в точке замера отклоняется от заданного значения, рычаг 1 также отклоняется от нейтрального положения и замыкает, смотря по направлению отклонения, верхнюю или нижнюю пару контактов. При этом посылается ток в реле 5 или 6. При срабатывании реле замыкаются вторичные контакты реле 5а или 6а, в результате чего электрический сервомотор подключается к сети и приходит в движение в ту или другую сторону, смотря по тому, через контакты какого реле он получает ток из сети. Вращение электродвигателя 9 приводит в движение

редуктор 7, систему рычагов и в конечном итоге регулирующий орган 3. Для введения обратной связи применяют дополнительную систему рычагов 8, 10 и 11, как показано на фигуре пунктиром, при этом при движении редуктора смещается точка 12 опоры рычага 1. Направление смещения должно быть таково, чтобы рычаг 1 из отклоненного положения стремился занять нейтральное положение.

При равновесном состоянии рычаг 1 находится в нейтральном положении, контакты 4 разомкнуты, обмотки 5 и 6 обесточены, вторичные контакты реле 5а и 6а разомкнуты. Сервомотор отключен от сети, редуктор и клапан 3 неподвижны.

При отсутствии обратной связи опора 12 рычага 1 остается неподвижной. В этом случае установившийся режим возможен только при одном значении p регулируемого параметра, именно таком, при котором контактный рычаг 1 находится в нейтральном положении. В этом случае регулировочная характеристика будет прямой, параллельной оси Q — расхода рабочей среды. При наличии обратной связи положение опоры 12 рычага 1 будет изменяться. Вследствие жесткой рычажной связи каждому открытию регулирующего клапана 3 отвечает свое положение опоры 12. Если при увеличении расхода рабочей среды Q опора рычага 1 будет смещаться вниз, давление p при установившемся режиме увеличивается. При смещении опоры вверх давление p будет уменьшаться. В первом случае регулировочная характеристика $p = \varphi_1(Q)$ будет возрастающая, во втором $p = \varphi_2(Q)$ убывающая. Для нашего случая регулятора «до себя» — устойчивая будет, как показано выше, только возрастающая характеристика.

Структурная схема регулятора приведена на фиг. 145, б, где звено $\bar{D}$ — чувствительный элемент 2; звено $\bar{U}$ — усилитель, состоящий из электромотора 9, редуктора 7, всего релейного устройства и рычажной передачи к регулирующему органу. Релейное устройство рассматривается как управляющий элемент исполнительного механизма аналогично золотнику или струйной трубке; звено O — объект регулирования с регулирующим органом. В случае надобности в регулируемую систему может быть встроено звено OC обратной связи, как показано пунктиром.

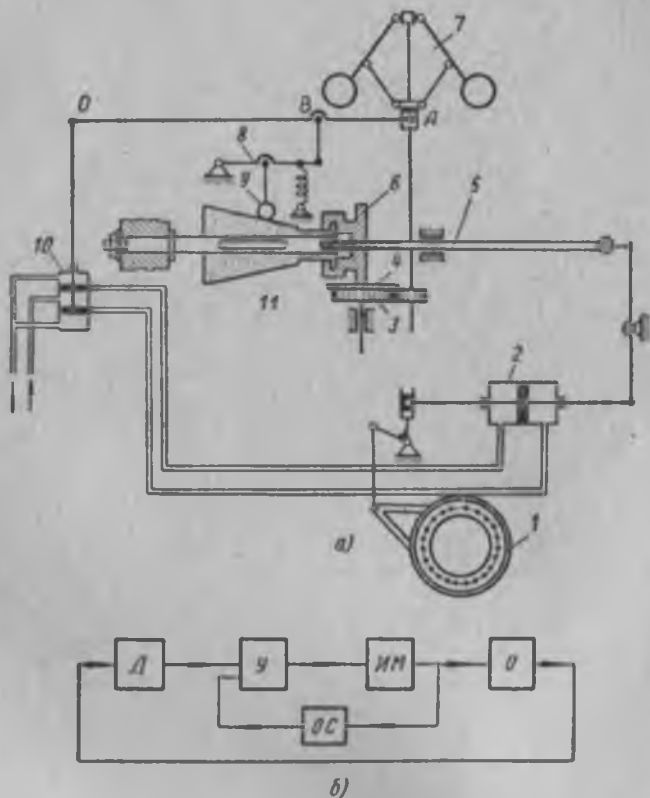
в) Регулятор скорости с гибкой обратной связью (фиг. 146)

На фиг. 146, а дана схема регулятора скорости с гибкой обратной связью, применяемого для автоматического регулирования гидротурбин.

При равновесном состоянии ролик изодрома 6 соприкасается с центром диска 4, вследствие чего ролик неподвижен. Также неподвижен клин обратной связи 11, на который опирается ролик 9 рычага 8. При нарушении равновесия поршень золотника смещается из нейтрального положения. Сервомотор 2 приводит в действие регулирующий орган и одновременно смещает шпindel 5, а вместе с ним фрикционный ролик 6 и лекало 11. При этом ролик 9 приподнимает

или опускает рычаг 8, смотря по тому, в какую сторону сдвинут шпindel 5.

Смещение рычага 8 вызовет, в свою очередь, движение рычага OA около точки A и движение поршня золотника, который начнет при-



Фиг. 146. Схема регулятора скорости с гибкой обратной связью:

1 — регулирующий орган турбины; 2 — сервомотор; 3 — зубчатая передача между осью регулятора и осью изодрома; 4, 6 — фрикционный ролик и диск изодрома; 5 — шпindel обратной связи; 7 — центробежный регулятор; 8 — рычаг обратной связи; 9 — ролик рычага (8); 10 — золотник сервомотора; 11 — лекало, или клин обратной связи.

крывать каналы масла. По мере движения поршня сервомотора наступит момент, когда золотник полностью перекроет каналы масла и поршень сервомотора остановится. Вместе с ним прекратит свое поступательное движение шпindel 5. Вследствие смещения фрикционного ролика 6 из центрального положения он придет во вращение и будет передвигаться по неподвижному шпинделю 5 в направлении к центру диска 4 до тех пор, пока не придет в центр этого диска и не остановится. При этом лекало 11 и рычаг 8 возвратятся в свое начальное положение. Таким образом, при всех равновесных состояниях

точки O и B будут занимать неизменное положение в пространстве, в результате чего угловая скорость двигателя будет оставаться постоянной.

Структурная схема системы изображена на фиг. 146, б.

Здесь: $\mathcal{D}$ — чувствительный элемент, представляющий маятниково-центростремительный регулятор 7;

$\mathcal{Y}$ — золотник сервомотора 10;

$ИМ$ — сервомотор 2;

$ОС$ — звено обратной изодромной связи, состоящее из шпинделя 5, фрикционного ролика 6, лекала 11, ролика 9 и рычага 8;

O — объект регулирования.

г) Автономное связанное регулирование двух параметров

В турбинах с отбором пара требуется одновременное регулирование двух и более параметров, обычно скорости ротора и давления пара в камере отбора. В соответствии с этим требованием турбина снабжается двумя регуляторами и двумя группами парораспределительных органов. Одна группа регулирующих клапанов располагается перед цилиндром высокого давления, вторая — перед цилиндром низкого давления.

Ниже приведем пример связанного регулирования скорости турбины и давления пара в камере отбора и определение статических условий автономности регулирования.

На фиг. 147 показана схема связанного регулирования скорости турбогенератора и давления в камере отбора для варианта применения с дифференциальным рычагом.

Кинематическая связь между регуляторами осуществлена с помощью рычага O_1AO_2B . Чувствительные элементы действуют на поршни золотников с помощью тяг 18 и 19. В свою очередь, втулки золотников перемещаются штоками сервомоторов с помощью рычагов 8 и 9. Положение втулок в пространстве однозначно связано с положением поршней сервомоторов и, следовательно, регулирующих клапанов. Каждому положению регулирующего клапана отвечает определенное положение своей золотниковой втулки в пространстве. Поскольку золотники отсечного типа, то установившийся режим возможен только при нейтральном положении поршней золотников относительно втулок, т. е. тогда, когда полностью перекрыты проходные окна к цилиндрам сервомоторов. Поэтому, при установившемся режиме положения точек O_1 и O_2 связующего рычага определяются только положением регулирующих клапанов 4 и 5. Перемещения точек A , O_1 , B , O_2 не могут быть произвольны. Эти перемещения во всех случаях удовлетворяют зависимостям, которые вытекают из условия расположения точек A , O_1 , B , O_2 на одной прямой.

Для вывода этих зависимостей условимся отсчитывать смещения точек A , O_1 , B и O_2 от наивысшего положения рычага O_1 , A , O_2 , B ,

Уравнение прямой $O_1A'O_2B'$ в общем случае может быть представлено уравнением

$$y = mx + n.$$

Подставляя значения координат отдельных точек этой прямой, получим:

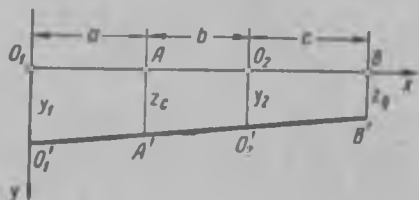
$$y_1 = n$$

$$z_c = ma + n$$

$$y_2 = m(a + b) + n$$

$$z_\delta = m(a + b + c) + n.$$

Исключая из этих уравнений m и n , придем к следующим зависимостям:



Фиг. 148. Схема дифференциального рычага.

$$y_1 = z_c \frac{a + b + c}{b + c} - z_\delta \frac{a}{b + c}; \quad (\text{VI-17})$$

$$y_2 = z_c \frac{c}{b + c} + z_\delta \frac{b}{b + c}. \quad (\text{VI-18})$$

Из полученных зависимостей вытекает, что смещения точек O_1 и O_2 определяются как алгебраическая сумма смещений, получаемых точками O_1 и O_2 отдельно от элемента скорости при неподвижной точке B и от элемента давления при неподвижной точке A . Обозначим отношения:

$$\frac{a + b + c}{b + c} = 1 + \alpha; \quad \frac{a}{b + c} = \alpha.$$

$$\frac{c}{b + c} = 1 - \beta; \quad \frac{b}{b + c} = \beta.$$

Тогда

$$y_1 = z_c(1 + \alpha) - z_\delta \alpha. \quad (\text{VI-19})$$

$$y_2 = z_c(1 - \beta) + z_\delta \beta. \quad (\text{VI-20})$$

Полученные соотношения справедливы для любой линии отсчета при условии соблюдения знаков.

Эти соотношения называются условиями кинематической связи между регуляторами.

При связанном регулировании регулятор скорости одновременно перемещает оба золотника, что вызывает действие обоих регулирующих клапанов.

Обозначим через

W — общую электрическую нагрузку турбогенератора;
 W_1, W_2 — соответствующие нагрузки цилиндров высокого и низкого давлений;

G_1, G_2 — расходы пара в цилиндрах;

G — расход пара в камере отбора (тепловая нагрузка).

Если, например, увеличилась электрическая нагрузка $W = W_1 + W_2$ агрегата при неизменной тепловой нагрузке $G = G_1 - G_2$, регулятор скорости перемещает одновременно поршни обоих золотников 12 и 13. Однако, если при этом увеличение расхода пара ΔG_1 части высокого давления не равно увеличению ΔG_2 части низкого давления, изменится давление в камере отбора и придет в действие регулятор давления.

Аналогичный процесс происходит при увеличении тепловой нагрузки на ΔG_2 при неизменной электрической нагрузке $W = W_1 + W_2$. Регулятор давления перемещает одновременно поршни обоих золотников 12 и 13, причем поршень 12 вниз, а 13 вверх. При этом мощность цилиндра высокого давления увеличится на ΔW_1 , а цилиндра низкого давления уменьшится на ΔW_2 . Если $\Delta W_1 \neq \Delta W_2$, то общее значение мощности W изменится, двигатель изменит свою скорость и в действие вступит регулятор скорости.

Для обеспечения совершенной схемы регулирования связи между регуляторами должны быть подобраны так, чтобы при изменении одной электрической нагрузки регулятор скорости один без вмешательства регулятора давления мог бы переводить турбину с одного режима на другой, а также чтобы при изменении одной тепловой нагрузки регулятор давления один без регулятора скорости переводил турбину на другой режим. Такое регулирование называется связанным автономным регулированием.

Для достижения автономного регулирования должны быть выполнены дополнительные требования, которые накладываются на кинематическую связь между регуляторами и на некоторые элементы регулирующей системы. Ниже мы рассмотрим условия, которые вызываются требованиями статики регулирующего устройства. Эти условия называются статическими условиями автономности.

Условия, налагаемые требованиями динамики автономных устройств, будут изложены ниже во II части «Динамика регулирующих устройств».

Для того чтобы статические условия автономности были выполнены, нужно соблюдение равенства $\Delta G_1 = \Delta G_2$ изменения расхода пара в части высокого и низкого давления при колебаниях электрической нагрузки и равенства $\Delta W_1 + \Delta W_2 = 0$ для общей мощности агрегата при колебаниях тепловой нагрузки.

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= \frac{e}{d} \\ k_2 &= \frac{f}{d} \end{aligned} \right\} \text{отношения плеч рычагов 8 и 9;}$$

$H_{1\max}$ — максимальный ход поршня сервомотора 6 и клапана 4;
 $H_{2\max}$ — максимальный ход поршня сервомотора 7 и клапана 5.
 $\left. \begin{matrix} s_{1\max} \\ s_{2\max} \end{matrix} \right\}$ — максимальные перемещения золотников 16 и 17.

Пусть расходы пара G_1 и G_2 соответственно через части высокого и низкого давления представляют некоторые функции от подъема клапанов:

$$G_1 = f_1(H_1),$$

$$G_2 = f_2(H_2).$$

Допустим также, что между мощностями и расходом пара существует линейная зависимость

$$W_1 = AG_1 + W_{10},$$

$$W_2 = BG_2 + W_{20}, \quad (VI-21)$$

где A, B, W_{10}, W_{20} — постоянные числа, зависящие от конструкции турбины и клапанов.

Для малых отклонений можно написать:

$$\Delta G_1 = \frac{\partial f_1}{\partial H_1} \Delta H_1, \quad \Delta W_1 = A \Delta G_1,$$

$$\Delta G_2 = \frac{\partial f_2}{\partial H_2} \Delta H_2; \quad \Delta W_2 = B \Delta G_2.$$

При подъеме клапана 4 на высоту ΔH_1 точка O_1 опустится на величину $\Delta H_1 k_1$. Соответственно точка O_2 опустится на величину $\Delta H_2 k_2$ при подъеме клапана 5 на величину ΔH_2 .

При изменении только электрической нагрузки точка B при автономном регулировании неподвижна.

Поэтому

$$\frac{\Delta H_1 k_1}{\Delta H_2 k_2} = \frac{a + b + c}{c}. \quad (VI-22)$$

Из условия $\Delta G_1 = \Delta G_2$ вытекает, что

$$\frac{\partial f_2}{\partial H_2} : \frac{\partial f_1}{\partial H_1} = \frac{k_2}{k_1} \frac{a + b + c}{c}. \quad (VI-23)$$

При изменении только тепловой нагрузки точка A при автономном регулировании неподвижна. В этом случае смещения точек O_1 и O_2 должны удовлетворять соотношению

$$\frac{\Delta H_1 k_1}{\Delta H_2 k_2} = -\frac{a}{b}.$$

Обозначим через

- W — общую электрическую нагрузку турбогенератора;
 W_1, W_2 — соответствующие нагрузки цилиндров высокого и низкого давлений;
 G_1, G_2 — расходы пара в цилиндрах;
 G — расход пара в камере отбора (тепловая нагрузка).

Если, например, увеличилась электрическая нагрузка $W = W_1 + W_2$ агрегата при неизменной тепловой нагрузке $G = G_1 - G_2$, регулятор скорости перемещает одновременно поршни обоих золотников 12 и 13. Однако, если при этом увеличение расхода пара ΔG_1 части высокого давления не равно увеличению ΔG_2 части низкого давления, изменится давление в камере отбора и придет в действие регулятор давления.

Аналогичный процесс происходит при увеличении тепловой нагрузки на ΔG_2 при неизменной электрической нагрузке $W = W_1 + W_2$. Регулятор давления перемещает одновременно поршни обоих золотников 12 и 13, причем поршень 12 вниз, а 13 вверх. При этом мощность цилиндра высокого давления увеличится на ΔW_1 , а цилиндра низкого давления уменьшится на ΔW_2 . Если $\Delta W_1 \neq \Delta W_2$, то общее значение мощности W изменится, двигатель изменит свою скорость и в действие вступит регулятор скорости.

Для обеспечения совершенной схемы регулирования связи между регуляторами должны быть подобраны так, чтобы при изменении одной электрической нагрузки регулятор скорости один без вмешательства регулятора давления мог бы переводить турбину с одного режима на другой, а также чтобы при изменении одной тепловой нагрузки регулятор давления один без регулятора скорости переводил турбину на другой режим. Такое регулирование называется связанным автономным регулированием.

Для достижения автономного регулирования должны быть выполнены дополнительные требования, которые накладываются на кинематическую связь между регуляторами и на некоторые элементы регулирующей системы. Ниже мы рассмотрим условия, которые вызываются требованиями статичности регулирующего устройства. Эти условия называются статическими условиями автономности.

Условия, налагаемые требованиями динамики автономных устройств, будут изложены ниже во II части «Динамика регулирующих устройств».

Для того чтобы статические условия автономности были выполнены, нужно соблюдение равенства $\Delta G_1 = \Delta G_2$ изменения расхода пара в части высокого и низкого давления при колебаниях электрической нагрузки и равенства $\Delta W_1 + \Delta W_2 = 0$ для общей мощности агрегата при колебаниях тепловой нагрузки.

Введем следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{e}{d} \\ h_2 &= \frac{j}{d} \end{aligned} \right\} \text{отношения плеч рычагов 8 и 9;}$$

$H_{1\max}$ — максимальный ход поршня сервомотора 6 и клапана 4;
 $H_{2\max}$ — максимальный ход поршня сервомотора 7 и клапана 5.
 $\left. \begin{matrix} s_{1\max} \\ s_{2\max} \end{matrix} \right\}$ максимальные перемещения золотников 16 и 17.

Пусть расходы пара G_1 и G_2 соответственно через части высокого и низкого давления представляют некоторые функции от подъема клапанов:

$$G_1 = f_1(H_1),$$

$$G_2 = f_2(H_2).$$

Допустим также, что между мощностями и расходом пара существует линейная зависимость

$$W_1 = AG_1 + W_{10},$$

$$W_2 = BG_2 + W_{20}, \quad (VI-21)$$

где A, B, W_{10}, W_{20} — постоянные числа, зависящие от конструкции турбины и клапанов.

Для малых отклонений можно написать:

$$\Delta G_1 = \frac{\partial f_1}{\partial H_1} \Delta H_1; \quad \Delta W_1 = A \Delta G_1,$$

$$\Delta G_2 = \frac{\partial f_2}{\partial H_2} \Delta H_2; \quad \Delta W_2 = B \Delta G_2.$$

При подъеме клапана 4 на высоту ΔH_1 точка O_1 опустится на величину $\Delta H_1 k_1$. Соответственно точка O_2 опустится на величину $\Delta H_2 k_2$ при подъеме клапана 5 на величину ΔH_2 .

При изменении только электрической нагрузки точка B при автономном регулировании неподвижна.

Поэтому

$$\frac{\Delta H_1 k_1}{\Delta H_2 k_2} = \frac{a + b + c}{c}. \quad (VI-22)$$

Из условия $\Delta G_1 = \Delta G_2$ вытекает, что

$$\frac{\partial f_2}{\partial H_2} : \frac{\partial f_1}{\partial H_1} = \frac{k_2}{k_1} \frac{a + b + c}{c}. \quad (VI-23)$$

При изменении только тепловой нагрузки точка A при автономном регулировании неподвижна. В этом случае смещения точек O_1 и O_2 должны удовлетворять соотношению

$$\frac{\Delta H_1 k_1}{\Delta H_2 k_2} = -\frac{a}{b}.$$

Из условия $\Delta W_1 + \Delta W_2 = 0$ вытекает, что

$$\frac{\Delta G_2}{\Delta G_1} = -\frac{A}{B} = -\frac{b}{a} \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{\frac{\partial f_2}{\partial H_2}}{\frac{\partial f_1}{\partial H_1}}$$

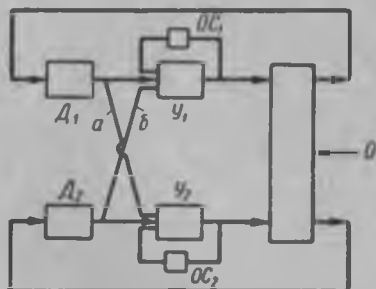
или

$$\frac{\partial f_2}{\partial H_2} \frac{\partial f_1}{\partial H_1} = \frac{A}{B} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{k_2}{k_1} \quad (\text{VI-24})$$

При автономном регулировании уравнения (VI-23) и (VI-24) должны быть тождественны.

Отсюда статическое условие автономности выразится

$$\frac{a+b+c}{c} \cdot \frac{b}{a} = \frac{A}{B} \quad (\text{VI-25})$$



Фиг. 149. Структурная схема связанного регулирования двух величин.

Таким образом, при автономном регулировании должны соблюдаться условия: кинематической связи, статические и динамические условия автономности (о последних будет сказано позже).

При соблюдении условий автономности регулировочная характеристика каждого регулятора будет независимой от другого регулятора. Построение регулировочных характеристик скорости и давления в этом случае ничем не отличается от способов, изложенных ранее. Однако здесь необходимо иметь в виду, что регулировочные характеристики как скорости, так и давления являются функциями двух независимых переменных, электрической и тепловой нагрузок

$$\omega = \varphi(W, G).$$

$$p = \psi(G, W). \quad (\text{VI-26})$$

Регулировочная характеристика скорости здесь будет по существу представлять семейство кривых $\omega = \varphi(W)$, построенных для ряда постоянных значений переменного параметра G , т. е. расхода пара в отборе. Аналогично регулировочная характеристика давления представит семейство кривых $p = \psi(G)$ при разных значениях $W = \text{const}$.

Структурная схема регулятора изображена на фиг. 149.

На схеме обозначено:

D_1 — чувствительный элемент скорости — центробежный регулятор 20;

D_2 — чувствительный элемент давления — регулятор давления 21;

$У_1$ — усилитель — сервомотор 6 с золотником 1;

$У_2$ — усилитель — сервомотор 7 с золотником 11;

$ОС_1$ — звено обратной связи — втулка 14 и рычаг 8;

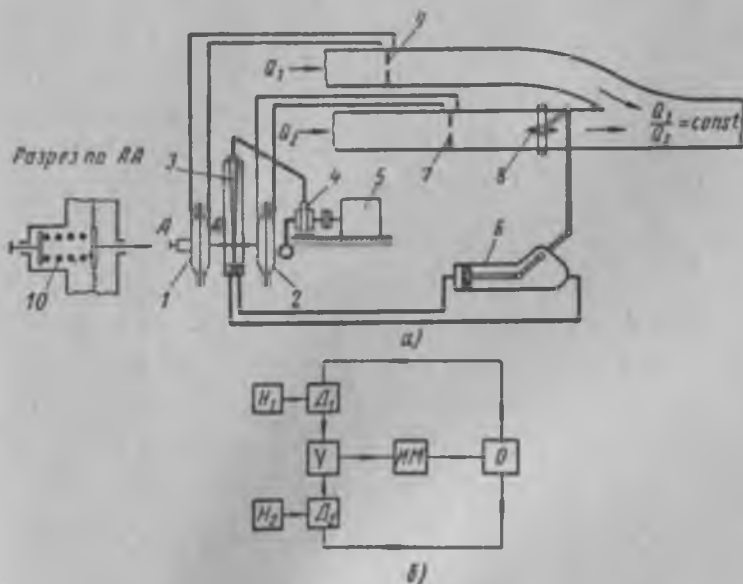
$ОС_2$ — звено обратной связи — втулка 15 и рычаг 9;

O — объект регулирования — ЦВД, ЦНД и камера отбора пара;

$a, б$ — дополнительные связи между регуляторами скорости и давления — рычаг O_1AO_2B .

д) Регуляторы соотношения расхода

При регулировании производственных процессов большое значение имеют регуляторы соотношения расхода газов, жидкостей и сыпучих тел. Ниже рассмотрен один из таких регуляторов.



Фиг. 150. Схема регулятора соотношения расхода газов.

Задачей регулятора является поддержание постоянного заданного отношения расходов двух газов.

Схема регулятора соотношения показана на фиг. 150.

Система имеет два чувствительных элемента 1 и 2 (фиг. 150, а), представляющих мембранные регуляторы давления. Обе полости каждой мембраны включены на перепад давления соответственно

двух диафрагм 9 и 7, измеряющих расход двух газов, подлежащих смешиванию в постоянной заданной пропорции.

Струйная трубка 3 находится одновременно под воздействием двух мембран 1 и 2, действующих навстречу друг другу. Отклонение струйной трубки вызывает действие сервомотора 6 и регулирующей заслонки 8. Давление вспомогательной жидкости, приводящей в движение исполнительный механизм, создается насосом 4 с электродвигателем 5. При установившемся режиме действие чувствительных элементов 1 и 2 уравнивается и струйная трубка занимает нейтральное положение. Допустим, что расход газа через диафрагму 9 равен Q_1 , а через диафрагму 7 — Q_2 . Усилие, передаваемое от мембраны 1 на струйную трубку, зависит от перепада давления на диафрагме и от натяга пружины 10 чувствительного элемента. Примем, что это усилие P_1 линейно зависит от расхода Q_1 . Тогда

$$P_1 = C_1 Q_1 + A_1,$$

где A_1 и C_1 — постоянные числа, зависящие от конструкции чувствительного элемента и диафрагмы.

Аналогично для мембраны 2 будем иметь

$$P_2 = C_2 Q_2 + A_2.$$

Из условия равновесия следует, что

$$C_1 Q_1 + A_1 = C_2 Q_2 + A_2.$$

Подберем начальные сжатия пружин обеих мембран так, чтобы $A_1 = A_2$. Тогда $C_1 Q_1 = C_2 Q_2$ или $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{C_2}{C_1} = \text{const}$.

Таким образом, установившийся режим будет иметь место только при одном постоянном значении отношения $\frac{Q_1}{Q_2}$, равном $\frac{C_2}{C_1}$. Изменяя значения постоянных величин C_2 и C_1 , мы можем настроить регулятор на любое заданное отношение $\frac{Q_1}{Q_2}$. Регулировочная характеристика регулятора представляет прямую параллельную горизонтальной оси.

Структурная схема регулятора изображена на фиг. 150, б. На схеме обозначено:

D_1, D_2 — мембранные чувствительные элементы давления 1 и 2;
 H_1, H_2 — элементы настройки — пружины 10;

$У$ — управляющий элемент — струйная трубка 3;

$ИМ$ — сервомотор 6;

$О$ — объект регулирования.

На фиг. 151 дана электрическая модификация регулятора соотношения. Здесь в качестве датчика применен электрический мост 1, (фиг. 151, а), одно из сопротивлений которого R_1 обладает свойством реагировать на изменение состава смеси газов.

Это сопротивление помещено внутри газопровода. Неуравновешенный ток моста поступает на усилитель 3 и далее к исполнительному механизму 4. Последний приводит в действие регулирующий орган 5.

Равновесное состояние возможно только при одном условии, когда электрический мост сбалансирован, т. е. при соблюдении равенства $R_3 R_{\lambda} = R_1 R_2$. Отсюда вытекает условие постоянства R_{λ} , а следовательно и пропорции газов в составе смеси.

Регулировочная характеристика имеет астатический характер.

Настройка регулятора осуществляется изменением величины плеча R_2 моста.

Структурная схема изображена на фиг. 151, б. На схеме обозначено:

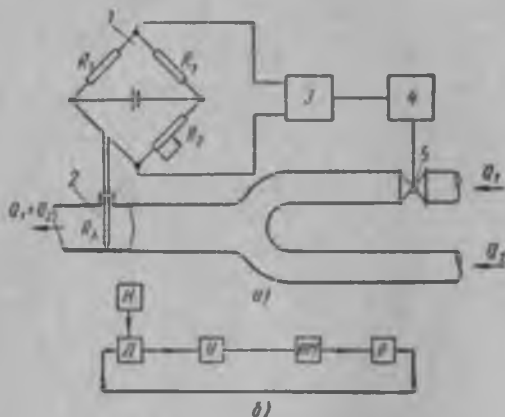
Д — датчик, состоящий из сопротивления R_{λ} и электрического моста 1;

Н — задатчик — переменное плечо R_2 моста;

У — усилитель 3;

ИМ — исполнительный механизм 4;

О — объект регулирования.



Фиг. 151. Схема регулятора соотношения.

е) Регуляторы температуры

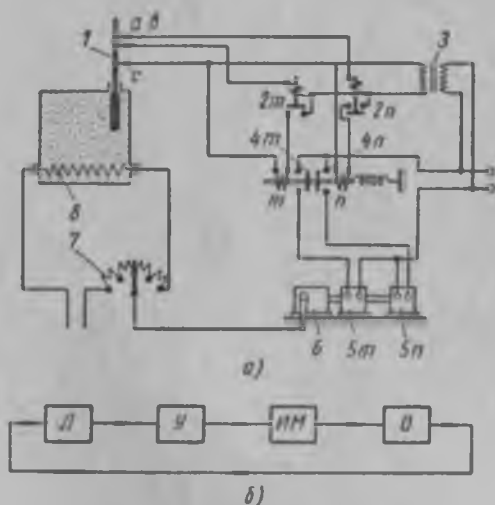
Автоматическое регулирование температуры находит большое практическое применение во многих технологических процессах, особенно в автоматическом регулировании тепловых процессов металлургического производства.

В зависимости от требований, которые предъявляются к регулятору температуры и качеству регулирования, регулирующие устройства имеют простые и сложные схемы. Ниже остановимся на двух часто встречающихся типовых схемах регулирования.

Релейный регулятор температуры (фиг. 152). На фиг. 152, а дана схема релейного регулятора температуры с контактным термометром.

Чувствительным элементом и датчиком здесь является контактный ртутный термометр 1. В положении, изображенном на фигуре, обмотка реле 2 не обесточена. При этом вторичные контакты 4 реле замкнуты и катушка 3 контактора 4 возбуждена. Работает двигатель 5 м, двигатель 5 н обесточен и вращается вхолостую.

Редуктор 6 перемещает контактную ручку реостата 7 в сторону уменьшения общего электрического сопротивления 8 цепи нагревания. По мере подъема температуры ртутный столбик замыкает контакты a и b , в результате чего реле 2 m возбуждается и разомкнет вторичные контакты. Катушка m обесточится, контактор разомкнет контакты 4 m и остановит двигатель 5 m . Сопротивление и ток в цепи нагревания будут оставаться неизменными до тех пор, пока температура



Фиг. 152. Схема релейного регулятора температуры.

Вследствие этого установившееся значение температуры не будет строго постоянно, а может иметь некоторые отклонения, не выходящие за пределы зоны, которую назовем зоной нечувствительности.

Отклонения температуры от среднего значения, а также ширина ΔT зоны нечувствительности зависит от расстояния между контактами a и b .

Если условиться за действительное значение регулируемого параметра принимать среднее значение температуры, то регулировочная характеристика регулятора представится прямой горизонтальной линией, т. е. будет иметь астатический характер.

Структурная схема регулятора дана на фиг. 152, б. На схеме обозначено:

Д — чувствительный элемент — контактный термометр 1;

У — управляющее звено, состоящее из релейного устройства и трансформатора 3;

ИМ — исполнительный механизм, в состав которого входят двигатели 5 m , 5 n и редуктор 6;

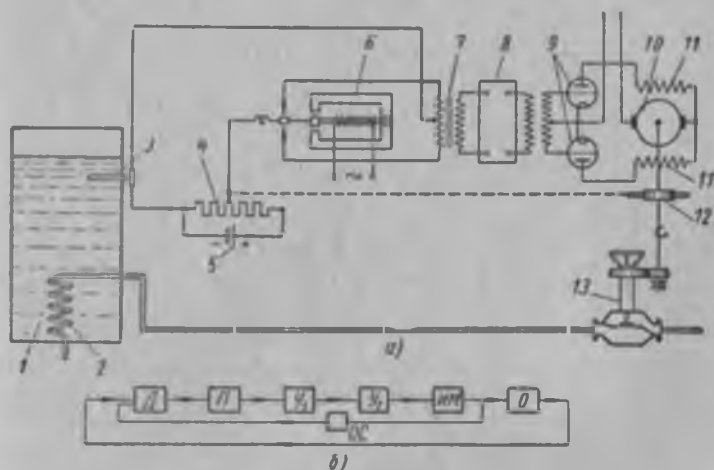
О — объект регулирования.

не поднимется и столбик ртути не замыкает контакт c . Тогда сработает реле 2 n , возбуждается катушка n контактора, замкнутся контакты n и придет во вращение мотор 5 n . Рычаг реостата 7 будет двигаться теперь в сторону увеличения общего сопротивления цепи нагревания и уменьшения силы тока этой цепи. Таким образом, процесс регулирования температуры будет протекать при постоянном переключении контактора с одного направления на другое, причем это будет иметь место и при равновесном состоянии.

ж) Электронный регулятор температуры (фиг. 153)

На фиг. 153, а представлена принципиальная схема электронного регулятора температуры.

Работа регулятора протекает следующим образом. При отклонении температуры нарушается равновесие между электродвижущей силой термопары 3 и падением потенциала на реохорде 4, вследствие чего во внешней цепи термопары появляется нескомпенсированный постоянный ток. Ввиду того, что для усиления целесообразнее



Фиг. 153. Схема электронного регулятора температуры:

1 — бак с нагреваемой жидкостью; 2 — датчик, через который проходит греющий пар; 3 — термопара; 4 — реохорд потенциометра; 5 — аккумуляторная батарея; 6 — преобразователь постоянного тока в переменный; 7 — трансформатор; 8 — усилитель напряжения; 9 — тиратронный усилитель мощности; 10 — электродвигатель исполнительного механизма; 11 — обмотка возбуждения двигателя; 12 — передача обратной связи; 13 — регулирующий орган.

применять переменный ток, в регулирующую схему включен преобразователь 6, который ток от термопары преобразовывает с помощью прерывателя в переменный ток, поступающий на трансформатор 7. Прерыватель действует от вспомогательного источника переменного тока. Якорь, поляризуемый постоянным магнитом, колеблется под воздействием обмотки возбуждения, питаемой переменным током. В связи с этим ток в одной половине обмотки входного трансформатора 7 идет в одном направлении, в другой в противоположном.

Во вторичной обмотке трансформатора 7 создается напряжение, которое в зависимости от знака небаланса постоянного тока будет по фазе совпадать с напряжением возбуждения или будет сдвинуто от него на 180° . Ток вторичной обмотки трансформатора 7 поступает на усилитель напряжения 8 и далее на тиратронный усилитель мощности 9. Исполнительный механизм 10 выполнен в виде двухфазного реверсивного электродвигателя, направление вращения которого

зависит от фазы тока входного трансформатора, т. е. от знака небаланса постоянного тока. Исполнительный механизм приводит действие регулирующий орган 13 и одновременно обратную связь 12.

При равновесном состоянии ток небаланса во внешней цепи термпары должен быть равен нулю. Так как при наличии передачи обратной связи движок реохорда кинематически связан с регулирующим клапаном, каждому положению клапана будет отвечать свое положение движка реохорда при установившемся режиме, а следовательно и свое значение температуры. Отсюда следует, что регулировочная характеристика описанного регулятора температуры будет зависеть от подъема клапана или от расхода пара, т. е. будет иметь статический характер.

Структурная схема регулятора дана на фиг. 153, б. На схеме принято:

Звено D — чувствительный элемент 3 с реохордой 4;

Звено P — вибропреобразователь 6;

U_1 — усилитель напряжения 8;

U_2 — управляющий элемент — электронное реле 9;

ИМ — исполнительный механизм — электродвигатель 10;

O — объект регулирования;

ОС — обратная связь — зубчатая передача 12 к реохорду 4.

При автоматическом регулировании технологических процессов в ряде случаев необходимо иметь возможность изменять в некоторых пределах степень неравномерности регулировочной характеристики регулятора. Особенно это имеет значение при регулировании тепловых процессов в металлургической промышленности. Выбор оптимального значения степени неравномерности характеристики может быть установлен только опытным путем, так как это связано с особенностями регулируемого процесса. Такой выбор степени неравномерности регулятора называется настройкой регулятора на процесс.

Учитывая указанную потребность, наша промышленность выпускает автоматические регуляторы температуры и отдельные узлы к ним, облегчающие настройку регулятора на процесс.

ДИНАМИКА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

ГЛАВА VII

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Исследование движения систем автоматического регулирования под действием возмущающих сил составляет основной вопрос динамики регулирования. Как известно, задачей всякой системы автоматического регулирования является поддержание равенства между действительным y и предписанным y_p значениями регулируемой величины.

Однако в реальных системах эта задача выполняется обычно с некоторой погрешностью

$$\Delta y = y_p - y, \quad (\text{VII-1})$$

которая должна быть настолько мала, насколько это требуется условиями работы системы. Отмеченная погрешность носит название ошибки системы регулирования. Лишь в некоторых частных случаях величина ошибки $\Delta y = 0$.

Изменение регулируемой величины вызывается возмущающими воздействиями, приложенными к системе, которые нарушают соответствие между действительным и установленным значениями этой величины. С другой стороны, задающее или управляющее воздействие регулятора изменяет регулируемую величину таким образом, чтобы было соблюдено условие $y \approx y_p$.

Движение системы регулирования определяется указанными воздействиями обоих видов. Это движение в общем случае может быть описано дифференциальным уравнением вида

$$F_1(y, y', y'' \dots) = F_2(w, w', \dots, s, s' \dots), \quad (\text{VII-2})$$

где y — регулируемая величина;

s — задающее воздействие;

w — возмущающее воздействие.

В некоторых случаях это уравнение принимает вид интегродифференциального уравнения.

Рассмотрим сперва системы регулирования, движение которых описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Такие системы называются линейными систе-

мами. Существенным свойством линейных систем является то, что для них справедлив принцип суперпозиции. Этот принцип заключается в том, что если к линейной системе приложено одновременно несколько возмущающих воздействий, то их совместный эффект равен сумме эффектов, вызванных каждым воздействием в отдельности.

Это дает нам право переписать уравнение (VII-2) в следующем виде:

$$F_1(y, y' \dots) = F_{21}(s, s' \dots) + F_{22}(w, w', \dots)$$

или, если ввести оператор

$$p = \frac{d}{dt},$$

то

$$F_1(p)y = F_{21}(p)s + F_{22}(p)w. \quad (\text{VII-3})$$

Задающее воздействие s , как правило, приложено к системе через чувствительный элемент, тогда как возмущающее воздействие w может быть приложено к любому звену системы и чаще всего к объекту регулирования.

Дальнейшее упрощение уравнения движения (VII-3) может быть получено, если ввести приведенное возмущающее воздействие w_p .

Значение w_p определяется из условия:

$$F_{21}(p)w_p = F_{22}(p)w, \quad (\text{VII-4})$$

т. е. w_p является одним из решений дифференциального уравнения (VII-4).

Уравнение (VII-3) после преобразования примет вид

$$F_1(p)y = F_{21}(p)[s + w_p]. \quad (\text{VII-5})$$

Отсюда следует, что уравнение движения (VII-3) не изменится, если возмущающее воздействие w , приложенное к некоторому звену системы, заменить приведенным воздействием w_p , приложенным к звену чувствительного элемента.

Это положение позволяет, не нарушая общности рассуждений, ограничиться рассмотрением дифференциального уравнения вида (VII-5) и, кроме того, считать задающее воздействие возмущающим в общем смысле.

Если преобразовать уравнение (VII-5) к безразмерной форме, введя отношения:

$$\lambda = \frac{y}{y_0} \text{ и } \varphi = \frac{s + w_p}{s_0},$$

то уравнение примет вид

$$D(p)\lambda = U(p)\varphi. \quad (\text{VII-6})$$

Здесь: y_0 и s_0 — базисные значения величин y и s

$D(p)$ и $U(p)$ — операторные полиномы.

В зависимости от вида возмущающих и задающего воздействий движение системы регулирования может иметь разный характер. Различают три основных случая:

В первом случае движение системы прекращается через некоторый промежуток времени (теоретически — бесконечно большой) от момента приложения возмущающего воздействия и система приходит в состояние покоя.

Во втором случае движение системы по истечении некоторого времени приобретает установившийся характер, в частности, переходит в установившееся колебательное движение.

В третьем случае движение системы не прекращается и не имеет установившегося состояния. К этому случаю относится также неустойчивое движение, когда регулируемая координата с течением времени неограниченно возрастает по абсолютной величине.

Всякую систему автоматического регулирования можно разложить на простейшие звенья, движения которых описываются дифференциальными уравнениями не выше второго порядка. Линейная система может состоять только из линейных звеньев, так как наличие хотя бы одного нелинейного звена приводит к системе уравнений, описывающих движение, среди которых есть нелинейное дифференциальное уравнение.

Физические величины, от которых зависят коэффициенты дифференциальных уравнений движения звена или системы, называются параметрами. Таковы, например, величины: масса, емкость, индуктивность, момент инерции и другие.

Схема системы, разложенной на простейшие звенья, называется структурной схемой. Эта схема не совпадает с рассмотренной выше функциональной структурной схемой, так как в основу типизации звеньев здесь положены другие признаки.

Для описания движения системы регулирования необходимо, прежде всего, установить, каким образом изменяется во времени выходная величина каждого звена системы при изменении входной величины, т. е. нужно составить уравнения звеньев. В тех случаях, когда звено имеет дополнительную связь с некоторыми другими звеньями, выходная величина будет функцией нескольких величин, или согласно терминологии, принятой в механике, нескольких обобщенных координат системы. Под обобщенными координатами в механике принято понимать те независимые величины, значения которых вполне определяют состояние системы в каждый момент времени. Полученное исходное уравнение звена при соблюдении условий устойчивости будет оставаться справедливым также для частного случая, когда время $t \rightarrow \infty$, т. е. для установившегося режима.

Если при составлении уравнений принимаются во внимание все факторы, влияющие на динамику процесса регулирования, то уравнения получаются сложными, по большей части нелинейными и трудно поддающимися интегрированию. Для изучения качественных задач динамики регулирования исходные уравнения отдельных

звеньев заменяют приближенными к ним линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Такая операция называется *линеаризацией*.

Исследования динамики систем автоматического регулирования показывают, что линеаризация не всегда законна с точки зрения устойчивости исследуемой системы.

Дело в том, что системы, движение которых точно описывается линейным дифференциальным уравнением, будучи устойчивы при малых отклонениях от положения равновесия, оказываются устойчивыми и в большом, т. е. при значительных конечных значениях отклонений.

Реальные системы, описываемые нелинейными дифференциальными уравнениями, в этом отношении существенно отличаются от линейных систем. Они могут быть неограниченно устойчивы, устойчивы в большом, устойчивы в малом или совсем неустойчивы.

Поэтому возникает вопрос, в какой мере и при каких условиях допустима линеаризация уравнений систем регулирования. На этот вопрос отвечают теоремы А. М. Ляпунова об устойчивости линеаризованных систем, изложенные в главе X.

Ниже остановимся на наиболее распространенном методе линеаризации — методе малых отклонений.

1. МЕТОД МАЛЫХ ОТКЛОНЕНИЙ

Здесь в основу линеаризации уравнений кладется формула разложения аналитической непрерывной функции в ряд Тейлора и принимается допущение, что движение звена происходит в пределах малых отклонений от некоторой точки, которая характеризует состояние звена в избранный момент времени или, как принято говорить, движение происходит в окрестности этой точки. Если система имеет положения равновесия или покоя, то движение рассматривается в окрестности одного из этих положений.

Отбрасывание в ряде Тейлора малостей второго и высших порядков приводит к искомому результату.

Рассмотрим случай линеаризации звена, когда зависимость между выходной и входной величинами представлена некоторым дифференциальным уравнением. Для упрощения вывода допустим, что рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка. В этом случае уравнение может быть записано в форме:

$$F(y, y', y'', x, x') = 0, \quad (\text{VII-7})$$

где x — входная, а y — выходная координаты звена. Пусть значения переменных в начальной точке, в окрестности которой мы исследуем отклонения, будут $y = y_0$, $x = x_0$ и соответственно $y' = y'_0$; $y'' = y''_0$ и $x' = x'_0$.

Для указанной точки уравнение (VII-7) примет вид:

$$F(y_0, y'_0, y''_0, x_0, x'_0) = 0. \quad (\text{VII-8})$$

При малых отклонениях от избранной точки будем иметь:

$$y = y_0 + \Delta y$$

$$x = x_0 + \Delta x$$

$$y' = y'_0 + \Delta y'$$

$$y'' = y''_0 + \Delta y'' \quad \text{и} \quad x' = x'_0 + \Delta x'.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (VII-7) и разлагая неявную функцию в ряд Тейлора, придем к уравнению:

$$\begin{aligned} & F(y'_0, y_0, y''_0, x_0, x'_0) + \Delta x \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_0 + \Delta x' \left[\frac{\partial F}{\partial x'} \right]_0 + \\ & + \Delta y \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_0 + \Delta y' \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right]_0 + \Delta y'' \left[\frac{\partial F}{\partial y''} \right]_0 + \\ & + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right]_0 + \frac{1}{2} (\Delta y)^2 \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right]_0 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что $\Delta y' = (\Delta y)'$ и $\Delta y'' = (\Delta y)''$.
В самом деле, положим, что

$$y' = z.$$

Тогда

$$\Delta z \approx \frac{dz}{dt} \Delta t = z' \Delta t = y'' \Delta t.$$

$$\text{Но } \Delta y \approx \frac{dy}{dt} \Delta t = y' \Delta t \quad \text{и} \quad (\Delta y)' = y'' \Delta t.$$

Отсюда

$$\Delta z = \Delta y' = (\Delta y)'.$$

Аналогично найдем $\Delta y'' = (\Delta y)''$.

Отбрасывая члены с малостями второго порядка и выше и учитывая уравнение (VII-8), получим уравнение малых отклонений в линеаризованном виде:

$$\begin{aligned} & \Delta x \left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_0 + (\Delta x)' \left[\frac{\partial F}{\partial x'} \right]_0 + \Delta y \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_0 + \\ & + (\Delta y)' \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right]_0 + (\Delta y)'' \left[\frac{\partial F}{\partial y''} \right]_0 = 0. \end{aligned} \quad (\text{V I-9})$$

Из рассмотренного примера линеаризации уравнения звена можно сделать вывод о применимости изложенного метода к уравнениям звеньев произвольного вида, если только функция

$$F(y, y', y'' \dots x, x' x'' \dots) = 0$$

представляет непрерывную аналитическую функцию в зоне регулирования.

2. БЕЗРАЗМЕРНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ

Полученное выше линеаризованное уравнение звена для малых отклонений имеет неудобную форму для практического применения.

Прежде всего, размерность членов уравнения весьма разнообразна, так как она зависит от физической природы величин, входящих в состав уравнения. Кроме того, сама форма ненаглядна и трудно поддается физическому толкованию. Поэтому обычно применяют так называемую безразмерную форму линеаризованных уравнений, которая имеет ряд достоинств.

Для получения безразмерной формы уравнения звена вместо абсолютных отклонений Δy , Δx рассматривают относительные отклонения, которые находятся как отношения абсолютных отклонений к некоторым заранее выбранным базисным значениям соответствующих параметров звена или системы.

За базисное значение может быть выбрано теоретически любое значение параметра, но обычно принимают либо максимальное значение, либо номинальное значение, отвечающее выбранному установившемуся режиму.

Допустим, что выбранные базисные значения параметров x , y будут соответственно λ , Y .

Введем отношения

$$\frac{\Delta x}{X} = \varphi; \quad \frac{\Delta y}{Y} = \lambda,$$

Нетрудно видеть, что:

$$\frac{(\Delta y)'}{Y} = \lambda', \quad \frac{(\Delta y)''}{Y} = \lambda'' \text{ и т. д.}$$

Подставляя в уравнение (VII-9) выражения Δy , Δx , $(\Delta y)'$. . . через безразмерные отношения φ , λ , λ' , придем к уравнению:

$$\lambda'' \frac{\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right]_a}{\left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_a} + \lambda' \frac{\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right]_a}{\left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_a} + \lambda = - \varphi \frac{X}{Y} \frac{\left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_a}{\left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_a} - \varphi' \frac{X}{Y} \frac{\left[\frac{\partial F}{\partial x'} \right]_a}{\left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_a}. \quad (\text{VII-10})$$

Анализируя уравнение (VII-10), видим, что отношение

$$-\frac{x}{Y} \frac{\left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]_0}{\left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_0} = u \quad (\text{VII-11})$$

может быть названо относительным коэффициентом усиления звена, так как оно представляет отношение $\frac{\lambda}{\varphi}$ при статическом изменении выходной и входной величин звена.

Из выражения (VII-11) вытекает, что относительный коэффициент u есть безразмерная величина в противоположность абсолютному коэффициенту усиления звена $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, размерность которого зависит от физической природы величин y и x .

Величина u зависит от параметров y_0 и x_0 , а также от выбора базисных значений X и Y .

Рассматривая уравнение (VII-10), убеждаемся, что коэффициенты при λ' и φ' имеют размерность времени, а коэффициент при λ'' — размерность сек².

Поэтому можем положить, что:

$$\frac{\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \right]_0}{\left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_0} = \bar{T}_1, \quad \frac{\left[\frac{\partial F}{\partial y''} \right]_0}{\left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_0} = \bar{T}_2, \quad -\frac{x}{Y} \frac{\left[\frac{\partial F}{\partial x'} \right]_0}{\left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]_0} = \bar{T}_{11}. \quad (\text{VII-12})$$

В связи с этим уравнение (VII-10) напишется в более удобной форме

$$\bar{T}_2^2 \lambda'' + \bar{T}_1 \lambda' + \lambda = u \varphi + \bar{T}_{11} \varphi'. \quad (\text{VII-13})$$

Величины $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$ являются постоянными для выбранного положения отсчета. Если это положение совпадает с положением покоя системы, то параметры x_0 и y_0 отвечают этому состоянию покоя.

Параметры $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$ называются постоянными времени звена. В данном случае, звено имеет две постоянных времени. В каждом конкретном случае можно дать физическое толкование значениям постоянных времени.

Постоянная времени $\bar{T}_{11}$ зависит от скорости изменения входной величины звена, а также от выбора базисных значений.

Форма уравнений (VII-13) характеризуется тем, что коэффициент при λ (выходная координата нашего звена) равен единице.

В ряде случаев удобнее применять безразмерное уравнение звена в другой форме, когда коэффициент при φ (входная координата звена) равен 1.

В этом случае наше уравнение примет вид

$$T_2^2 \lambda'' + T_1 \lambda' + \delta \lambda = -\varphi + T_{11} \varphi' \dots \quad (\text{VII-14})$$

где

$$\delta = \frac{1}{H}; \quad T_2 = T_2' \delta; \quad T_1 = T_1' \delta; \quad T_{11} = T_{11}' \delta.$$

Здесь T_2 и T_1 также рассматриваются как постоянные времени звена. Коэффициент δ есть величина, обратная коэффициенту усиления звена.

Уравнения звеньев, приведенные к безразмерной форме и такому виду, когда коэффициенты при выходной или входной величинах звена равны 1, называется нормализованными уравнениями. Уравнение может быть нормализовано по форме (VII-13) с коэффициентом 1 при выходной координате звена, либо по форме (VII-14) с коэффициентом 1 при входной величине звена.

В дальнейшем мы будем применять только уравнения, нормализованные по первой, либо по второй форме.

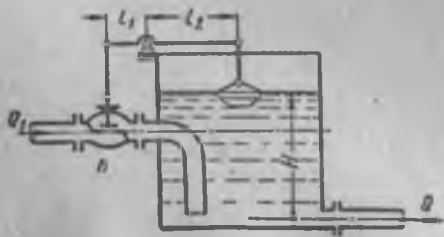
Указанный выше метод линеаризации уравнения звена при малых отклонениях от положения равновесия или от другой точки отсчета, применим для любого вида уравнения звена, если левая часть этого уравнения есть непрерывная аналитическая функция.

Для иллюстрации изложенного приведем два конкретных примера построения уравнений отдельных звеньев и вычисления их параметров.

3. ПРИМЕРЫ СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОТДЕЛЬНЫХ ЗВЕНЬЕВ

Пример 1. Звеном системы регулирования является поплавковый регулятор уровня, схема которого показана на фиг. 154.

Требуется составить уравнения звеньев и определить параметры системы, пренебрегая массой поплавка, рычага и клапана, трением в шарнирах и салнике клапана. Реакция протекающей струи жидкости на клапан уравновешена весом клапана.



Фиг. 154. Схема поплавкового регулятора уровня.

Приток жидкости Q_1 через клапан пропорционален подъему h клапана из закрытого положения.

Коэффициент пропорциональности равен $a = 30 \text{ л в сек/см}$.

Расход жидкости Q зависит от потребителя и может иметь произвольную величину, не превышающую $Q_{1\max} = ah_{\max}$. Значение $h_{\max} = 50 \text{ мм}$. Отношение плеч рычага

равно $\frac{l_1}{l_2} = k = 0,3$. При высоте уровня $H_{\max} = 1,5 \text{ м}$ клапан притока закрыт.

Площадь поперечного сечения бака $S = 4 \text{ м}^2$.

Система состоит из двух звеньев. Первое звено — объект регулирования (резервуар с жидкостью), второе звено — чувствительный элемент (поплавок с

рычагом). Входящие величины первого и второго звеньев соответственно Q и H , выходные H и h .

Уравнение первого звена определится из баланса расхода жидкости в бесконечно малый отрезок времени dt

$$Q_1 dt = Q dt + S dH.$$

$$Q_1 = Q + SH'.$$

$$ah = Q + SH'. \quad (I)$$

Уравнение второго звена, если пренебречь массой поплавка и рычага (погрешность не более 3%), определится зависимостью между координатами H и h .

$$h = (H_{\max} - H) k \dots \quad (II)$$

Отсюда уравнение системы

$$SH' + ahH + Q - ahH_{\max} = 0. \quad (III)$$

$$F(H, H', Q) = SH' + ahH + Q - ahH_{\max} = 0.$$

После линеаризации приходим к уравнению

$$\Delta H \left[\frac{\partial F}{\partial H} \right]_0 + (\Delta H)' \left[\frac{\partial F}{\partial H'} \right]_0 + \Delta Q \left[\frac{\partial F}{\partial Q} \right]_0 = 0.$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial H} \right]_0 = ak; \quad \left[\frac{\partial F}{\partial H'} \right]_0 = S \quad \left[\frac{\partial F}{\partial Q} \right]_0 = 1.$$

$$S(\Delta H)' + ak\Delta H = -\Delta Q.$$

Назначим базисные значения

$$H_{\text{баз}} = H_{\max}; \quad Q_{\text{баз}} = Q_{1\max} = ah_{\max}.$$

Введем отношения

$$\frac{\Delta H}{H_{\max}} = \lambda; \quad \frac{\Delta Q}{Q_{1\max}} = \varphi;$$

$$SH_{\max}\lambda' + ahH_{\max}\lambda = -ah_{\max}\varphi$$

$$T_1\lambda' + \delta\lambda = -\varphi.$$

Параметры системы

$$T_1 = \frac{SH_{\max}}{ah_{\max}}; \quad \delta = \frac{kH_{\max}}{h_{\max}}.$$

Числовое решение

$$T_1 = \frac{4 \cdot 1,5}{0,03 \cdot 5} = 40 \text{ сек.},$$

$$\delta = \frac{0,3 \cdot 1,5}{0,05} = 9.$$

Искомое уравнение

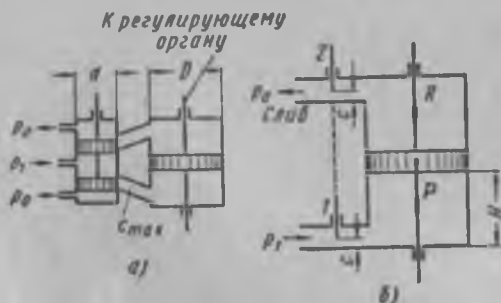
$$40\lambda' + 9\lambda = -\varphi.$$

Время T представляет время, необходимое для заполнения всего объема резервуара $SH_{\max}$ при полном открытии клапана притока и нулевом потреблении.

Пример 2. Определить параметры масляного двустороннего поршневого сервомотора с отсчетным золотником, изображенного схематически на фиг. 155, по следующим данным:

Диаметр поршня сервомотора	$D = 200 \text{ мм}$ (фиг. 155, а)
Диаметр поршня золотника	$d = 100 \text{ мм}$
Рабочий ход поршня сервомотора . . .	$H_{\max} = 70 \text{ см}$
Размер окон золотника по ходу поршня	$c_{\max} = 2 \text{ см}$
Давление масла в нагнетательном трубопроводе	$p_1 = 4 \text{ кг/см}^2$
Давление масла в сливном трубопроводе	$p_0 = 1 \text{ кг/см}^2$
Удельный вес масла	$\gamma = 900 \text{ кг/м}^3$
Полная проходная площадь сечения окон золотника	$q_0 = ac_{\max} = 10 \text{ см}^2, a = 5 \text{ см}$

Перестановочная сила R (сопротивление перемещения регулирующего органа) постоянна по величине и направлению и равна 100 кг.



Фиг. 155. Схема масляного двустороннего поршневого сервомотора с отсчетным золотником.

Вес поршня сервомотора со штоком $P = 25 \text{ кг}$.

При расчете пренебречь массой поршня, диаметром штока, потерями напора от вязкого трения в каналах и в окнах золотника.

Входная величина c — смещение золотника из нейтрального положения, выходная H — перемещение поршня сервомотора из нижнего положения.

Решение. Расчетная схема заданного сервомотора представлена на фиг. 155, б).

На этой схеме для упрощения золотник заменен двумя дросселями, которые работают одновременно и совершенно идентично.

Уравнение движения поршня сервомотора

$$S(p_{x1} - p_{x2}) = R + P,$$

где p_{x1} и p_{x2} — давление масла на поршень снизу и сверху;

S — площадь поршня сервомотора.

Расход масла через дроссель 1

$$Q_1 = \mu q \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (p_1 - p_{x1})}.$$

То же через дроссель 2

$$Q_2 = \mu q \sqrt{\frac{2g}{\gamma} (p_{x2} - p_0)}.$$

Здесь μ — коэффициент расхода через окна золотника (отвлеченное число); $q = ac$ — открытая площадь окна в см^2 .

Принимая, что масло абсолютно несжимаемо и что скорость движения поршня такова, что возможность разрыва струн масла исключена, имеем

$$Q_1 = Q_2 = S \frac{dH}{dt},$$

где $\frac{dH}{dt}$ — скорость поршня сервомотора.

Из равенства $Q_1 = Q_2$ следует, что

$$p_1 - p_{x1} = p_{x2} - p_0.$$

Кроме того,

$$p_{x1} - p_{x2} = \frac{R + P}{S}.$$

Решаем эти равенства относительно p_{x1} и p_{x2} :

$$p_{x1} = \frac{1}{2} \left[(p_1 + p_0) + \frac{R + P}{S} \right]; \quad p_{x2} = \frac{1}{2} \left[(p_1 + p_0) - \frac{R + P}{S} \right].$$

Подставляя значения p_{x1} и p_{x2} в выражения для Q_1 и Q_2 , приходим к уравнению

$$\mu a c \sqrt{\frac{g}{\gamma} \left[p_1 - p_0 - \frac{R + P}{S} \right]} = SH'.$$

Выражение $\sqrt{\frac{g}{\gamma} \left(p_1 - p_0 - \frac{R + P}{S} \right)}$ есть постоянная величина, зависящая от давлений p_1 и p_0 , а также от значения $\frac{R + P}{S}$.

Она имеет размерность скорости, обозначим ее через v_c .

Физический смысл v_c состоит в том, что v_c есть максимальная возможная скорость протекания масла через окна золотника при полном превращении предполагаемого напора в скорость

$$\mu a c v_c = SH' \text{ или } \mu a c v_c - SH' = F(c, H') = 0.$$

Это есть уравнение движения поршня. После линеаризации получим уравнение

$$\Delta c \left[\frac{\partial F}{\partial c} \right]_0 + (\Delta H)' \left[\frac{\partial F}{\partial H'} \right]_0 = 0.$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial c} \right]_0 = \mu a v_c; \quad \left[\frac{\partial F}{\partial H'} \right]_0 = -S; \quad \mu a v_c \Delta c - S (\Delta H)' = 0.$$

Примем за базисные значения $c_{0az} = c_{\max}$ и $H_{0az} = H_{\max}$.

Введем отношения

$$\frac{\Delta c}{c_{\max}} = \lambda; \quad \frac{\Delta H}{H_{\max}} = \eta.$$

Тогда

$$\frac{SH_{\max}}{\mu a v_c c_{\max}} \eta' = \lambda.$$

Коэффициент при τ_1' имеет размерность времени. Обозначим его T_s .

$$T_s = \frac{SH_{\max}}{\mu a v_c c_{\max}} \text{ сек.}$$

Уравнение движения поршня примет вид

$$T_s \tau_1' = \lambda.$$

Численное решение

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi 400}{4} = 314,2 \text{ см}^2.$$

Принимаем $\mu = 0,75$.

$$v_c = \sqrt{\frac{g}{\gamma} \left(p_1 - p_0 - \frac{R + P}{S} \right)} = \sqrt{\frac{981}{0,9 \cdot 10^3} \left(4 - 1 - \frac{125}{314,2} \right)} = 1680 \text{ см/сек}$$

Соответственно

$$T_s = \frac{314,2 \cdot 70}{0,75 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1680} = 1,74 \text{ сек.}$$

Уравнение сервомотора

$$1,74 \tau_1' = \lambda.$$

Постоянная времени T_s представляет время, которое требуется для того, чтобы заполнить весь объем цилиндра $SH_{\max}$ маслом при полностью открытых окнах золотника и при скорости протекания через них масла, равной v_c .

4. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПРОЦЕССА РЕГУЛИРОВАНИЯ

После того как все уравнения звеньев найдены и линеаризованы, дальнейшая задача состоит в построении общей системы уравнений, описывающих движение системы регулирования в целом.

При решении этой задачи необходимо ввести условия связей, существующих между звеньями.

Соединение звеньев может быть непосредственное, когда выходная величина одного звена равна входной следующего, либо с помощью различных устройств, как-то: рычагов, редукторных передач, трансформаторов и т. п.

В этом случае при составлении системы уравнений необходимо учесть зависимости между выходом и входом смежных звеньев. В громадном большинстве случаев эти зависимости представляются прямо-пропорциональными и могут быть выражены уравнением

$$y_{2ex} = a y_{1ex}, \quad (\text{VII-15})$$

где y_{1ex} и y_{2ex} — выходная и входная величины двух смежных звеньев, а a — коэффициент пропорциональности.

Если выражать входные и выходные величины звеньев в безразмерной форме и надлежащим образом выбирать базисные значения,

то будет иметь место равенство выходной и входной величин смежных звеньев.

В самом деле, введем отношения

$$\lambda_1 = \frac{y_{1\text{вых}}}{y_{1\text{в}}} \text{ и } \lambda_2 = \frac{y_{2\text{вых}}}{y_{2\text{в}}},$$

где $y_{1\text{в}}$ и $y_{2\text{в}}$ — базисные значения,

Тогда уравнение (VII-15) преобразуется в уравнение

$$\lambda_2 y_{2\text{в}} = a \lambda_1 y_{1\text{в}}.$$

Если выбрать базисные значения так, что $y_{2\text{в}} = a y_{1\text{в}}$, то уравнение (VII-15) примет вид

$$\lambda_2 = \lambda_1.$$

Нельзя дать всеобъемлющего правила для составления системы уравнений движения любого регулирующего устройства. Поэтому мы рассмотрим ниже только наиболее типичные случаи.

В помещенной ниже в конце главы табл. 4 даны уравнения отдельных звеньев, наиболее часто встречающихся в схемах автоматики.

При составлении уравнений движения системы можно пользоваться этой таблицей во всех случаях, когда в состав схемы входят звенья, аналогичные указанным в таблице.

а) Одноконтурные системы регулирования (фиг. 156)

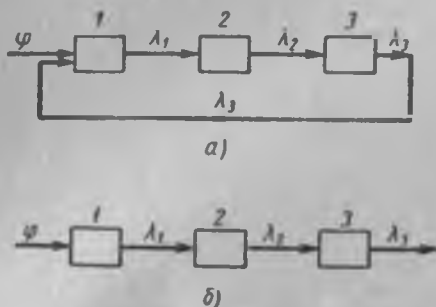
Одноконтурная система регулирования характеризуется наличием только одних главных связей между звеньями и отсутствием обратных и дополнительных связей. Обратная связь между объектом регулирования и чувствительным элементом является главной связью.

Допустим для примера, что наша система состоит из трех звеньев 1, 2 и 3, как показано на фиг. 156.

Обозначим выходные величины в безразмерном виде (обобщенные координаты) λ_1 , λ_2 и λ_3 соответственно первого, второго и третьего звеньев.

Примем также, что внешнее возмущающее воздействие φ поступает на первое звено.

Пусть звено 1 (фиг. 156. а) описывается дифференциальным уравнением 2-го порядка, а звенья 2 и 3 — дифференциальными уравнениями 1-го порядка.



Фиг. 156. Структурная схема одноконтурной системы регулирования.

Разомкнем систему, как показано на фиг. 156, б. Линеаризованные уравнения такой системы будут:

$$T_{21}\dot{\lambda}_1 + T_{11}\dot{\lambda}_1 + \delta_1\lambda_1 = \varphi; \quad (\text{VII-16})$$

$$T_{12}\dot{\lambda}_2 + \delta_2\lambda_2 = \lambda_1; \quad (\text{VII-17})$$

$$T_{13}\dot{\lambda}_3 + \delta_3\lambda_3 = \lambda_2. \quad (\text{VII-18})$$

Если мы замкнем систему, то уравнение первого звена изменится, так как теперь на вход системы будет поступать воздействие $\varphi - \lambda_3$.

Знак минус взят потому, что в системах регулирования главная обратная связь от объекта регулирования к чувствительному элементу отрицательная.

Остальные уравнения звеньев остаются при замыкании системы неизменными.

Совокупность дифференциальных уравнений, описывающих движение замкнутой системы регулирования, будет

$$\left. \begin{aligned} T_{21}\dot{\lambda}_1 + T_{11}\dot{\lambda}_1 + \delta_1\lambda_1 &= \varphi - \lambda_3 \\ T_{12}\dot{\lambda}_2 + \delta_2\lambda_2 &= \lambda_1 \\ T_{13}\dot{\lambda}_3 + \delta_3\lambda_3 &= \lambda_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII-19})$$

б) Системы с жесткой обратной связью

В качестве примера рассмотрим регулятор давления, схематически изображенный на фиг. 144.

Система состоит из чувствительного элемента, сервомотора со струйной трубкой с обратной связью и объекта регулирования с регулирующим органом.

Уравнение чувствительного элемента и струйной трубки найдем из условия равновесия струйной трубки. Пренебрегая массой трубки и рычагов, придем к уравнению равенства усилий (при одинаковых плечах), передаваемых на трубку от чувствительного элемента и пружины обратной связи.

Усилие P_1 , передаваемое на трубку от чувствительного элемента, определяется из уравнения моментов:

$$P_1c = pSa + (F_{10} + f_1x)b \dots \quad (\text{VII-20})$$

Усилие P_2 на струйную трубку от обратной связи

$$P_2 = F_{20} + f_2(x - kH). \quad (\text{VII-21})$$

Здесь p — избыточное давление в камере сиффона 10;

S — расчетная площадь сиффона;

a, b, c — плечи действующих усилий относительно точки вращения рычага сиффона (на фигуре не обозначены);

F_{10}, F_{20} — начальные силы упругости пружин 3 и 8 при $x = 0$ и $H = 0$;

x — смещение струйной трубки из нейтрального положения;

H — перемещение поршня сервомотора вверх из нижнего положения;

f_1 и f_2 — коэффициенты жесткости пружин 3 и 8, отнесенные к смещению трубки;

k — передаточное число лекала 7, т. е. отношение перемещений ролика и штока сервомотора.

Из условия $P_1 = P_2$ имеем:

$$pS \frac{a}{c} + (F_{10} + f_1 x) \frac{b}{c} = F_{20} + f_2 (x - kH).$$

Переходим к уравнению малых отклонений

$$\Delta p S \frac{a}{c} = \Delta x \left(f_2 - f_1 \frac{b}{c} \right) - \Delta H f_2 k.$$

В безразмерной форме это даст уравнение

$$\xi = m\eta - n\lambda, \quad (\text{VII-22})$$

$$\text{где } m = \frac{(f_2 - f_1 \frac{b}{c}) x_{\max}}{p_{\max} S \frac{a}{c}}; \quad n = \frac{k f_2 H_{\max}}{p_{\max} S \frac{a}{c}}; \quad \xi = \frac{\Delta p}{p_{\max}}; \quad \eta = \frac{\Delta x}{x_{\max}};$$

$\lambda = \frac{\Delta H}{H_{\max}}$ есть уравнение струйной трубки с обратной связью.

Уравнение сервомотора двустороннего действия согласно п. 6 табл. 4 будет

$$T_s \lambda' = \eta, \quad (\text{VII-23})$$

где T_s — время сервомотора.

Если принять, что расход регулируемой среды при отсутствии внешнего возмущения является функцией только величины открытия регулирующего клапана, то можем записать, что

$$Q_1 = \psi (H_{\max} - H).$$

Произведя линеаризацию, получим

$$\Delta Q_1 = \Delta (H_{\max} - H) \left[\frac{\partial \psi}{\partial (H_{\max} - H)} \right]_0 = \Delta H \left[\frac{\partial \psi}{\partial H} \right]_0.$$

В ряде случаев приходится величину Q , рассматривать как функцию двух переменных H и p .

Преобразуя полученное выше уравнение в безразмерную форму, найдем

$$\mu_1 = \lambda i, \quad (\text{VII-24})$$

где

$$\mu_1 = \frac{\Delta Q_1}{Q_{\max}} \quad \text{и} \quad i = \frac{H_{\max} \left[\frac{\partial \psi}{\partial H} \right]_0}{Q_{\max}}.$$

Если величину Q_1 можно принять пропорциональной величине открытия дроссельной заслонки I , то уравнение (VII-24) запишется в простом виде

$$\mu_1 = -\lambda \dots \quad (\text{VII-25})$$

Это и есть уравнение объекта регулирования.

Знак минус взят потому, что с увеличением λ величина μ_1 уменьшается. Давление за дроссельной заслонкой I определяется разностью расходов $Q_1 - Q_2$ среды и объемом V трубопровода от заслонки до потребителя. Если этот объем невелик, его влиянием на уравнение (VII-25) можно пренебречь. При длинных трубопроводах уравнение объекта регулирования должно быть изменено.

Когда регулируемая среда представляет газ, воздух или перегретый пар, зависимость давления в трубопроводе от V и $Q_1 - Q_2$ может быть выражена известными в термодинамике формулами

$$\frac{Q_1 - Q_2}{V} dt = d\gamma; \quad \frac{p}{\gamma} = RT_{\text{абс}}.$$

Здесь: γ — удельный вес газа;

$T_{\text{абс}}$ — абсолютная температура;

R — газовая постоянная;

V — объем трубопровода от дросселя I до потребителя

$$\frac{Q_1 - Q_2}{V} dt = \frac{dp}{RT_{\text{абс}}}, \quad \text{или} \quad p' = \frac{RT_{\text{абс}}}{V} (Q_1 - Q_2).$$

Производя линеаризацию и переходя к безразмерной форме, найдем

$$T_1 \xi' = \mu_1 - \mu_2, \quad (\text{VII-26})$$

где

$$T_1 = \frac{p_{\max} V}{RT_{\text{абс}} Q_{\max}}; \quad \mu_2 = \frac{\Delta Q_2}{Q_{\max}}.$$

Здесь T_1 — постоянная времени трубопровода.

Если внешнее возмущающее воздействие отсутствует, $\mu_2 = 0$, то уравнение (VII-26) примет вид

$$T_1 \xi' = \mu_1. \quad (\text{VII-27})$$

Уравнение объекта регулирования с учетом длинного трубопровода будет

$$T_1 \xi' = -\lambda - \mu_2. \quad (\text{VII-28})$$

Таким образом, система уравнения, описывающих движение нашего регулятора, представится в виде

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 m - \lambda n &= \xi \\ T_s \lambda' &= \eta \\ T_1 \xi' &= -\lambda - \mu_2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII-29})$$

в) Системы с гибкой связью

Рассмотрим систему регулирования числа оборотов двигателя с изодромным регулятором (фиг. 157). Регулятор схематически изображен на фиг. 157, а.

Система может быть разложена на следующие звенья:

1) чувствительный элемент, представляющий центробежный маятниковый регулятор скорости 1;

2) сервомотор 3 двустороннего действия с отсечным золотником 2;

3) изодромное устройство 4—5;

4) объект регулирования 7 с регулирующим органом 6.

Уравнение чувствительного элемента с учетом массы имеет вид

$$T_r^2 \eta'' + T_k \eta' + \delta \eta = \varphi, \quad (\text{VII-30})$$

где φ — отклонение скорости двигателя;
 η — смещение муфты регулятора;

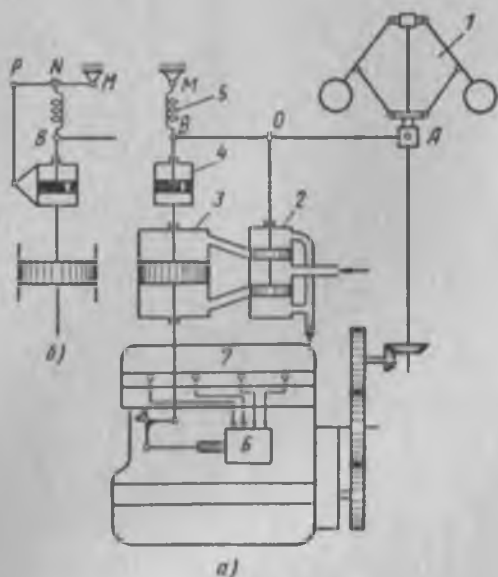
T_r, T_k — постоянные времени регулятора.

Уравнение сервомотора без обратной связи

$$T_s \lambda' = \sigma, \quad (\text{VII-31})$$

где σ — смещение золотника из нейтрального положения.

Изодромное устройство было описано выше в I части книги. Равновесие катаракта возможно только при соблюдении условий,



Фиг. 157. Схема изодромного регулятора скорости.

что скорость его поршня равна нулю и что сила упругости пружины 5 тоже равна нулю.

Обозначим перемещение точки В рычага AOB для произвольного момента времени через x .

Скорость перемещения точки B в пространстве, так же как и абсолютная скорость движения поршня катаракта будет равна x' .

Обозначим перемещение поршня сервомотора через H . Скорость цилиндра катаракта равна скорости поршня сервомотора H' .

Скорость поршня катаракта относительно цилиндра будет

$$H' - x',$$

и сила сопротивления движению поршня равна

$$k(H' - x'),$$

где k — коэффициент сопротивления катаракта.

Если пренебречь массой поршня катаракта, пружины и рычага, то уравнение равновесия катаракта будет

$$k(H' - x') = f x,$$

где x есть сила упругости пружины 5.

Введем отношения $\frac{\Delta H}{H_{\max}} = \lambda$; $\frac{\Delta x}{x_{\max}} = \xi$.

Тогда при малых отклонениях приходим к уравнению

$$k(H_{\max} \lambda' - x_{\max} \xi') = f x_{\max} \xi$$

$$T_1 \lambda' + \xi = \beta T_1 \lambda', \quad (\text{VII-32})$$

где

$$T_1 = \frac{k}{f} \text{ и } \beta = \frac{H_{\max}}{x_{\max}}.$$

Если пружину 5 подвесить не к неподвижной точке M , а к точке N рычага PM , как показано на фиг. 157, б, то уравнение изодрома несколько изменится. Деформация пружины теперь будет

$$x - iH,$$

где i — передаточное отношение плеч рычага PM

$$i = \frac{NM}{PM}.$$

В связи с этим исходное уравнение примет вид

$$k(H' - x') = f(x - iH).$$

Преобразовывая его, как и выше, получим

$$T_r \lambda' + \xi = \beta T_r \lambda' + i \beta \lambda \dots \quad (\text{VII-33})$$

Это есть уравнение изодрома с остаточной неравномерностью, величина которой определяется отношением i плеч рычага. Это отношение называется степенью статизма.

Уравнение связи между изодромом и золотником сервомотора определится по смещению золотника из нейтрального положения. Величина этого смещения находится как разность смещений, вызванных отдельно муфтой регулятора и изодромом.

Обозначим плечи рычага OAB соответственно

$$AO = a \text{ и } OB = b.$$

Тогда при подъеме муфты вверх на величину h смещение золотника вверх из нейтрального положения равно $h \frac{b}{a+b}$. При смещении точки B изодрома вниз на величину x золотник передвинется вниз на величину $x \frac{a}{a+b}$. Так как движение точек A и B рычага противоположны, то смещение золотника определится как разность

$$c = h \frac{b}{a+b} - x \frac{a}{a+b}. \quad (\text{VII-34})$$

Переходим к малым отклонениям:

$$\Delta c = \Delta h \frac{b}{a+b} - \Delta x \frac{a}{a+b}.$$

Введем отношения

$$\sigma = \frac{\Delta c}{c_{\max}}; \quad \eta = \frac{\Delta h}{h_{\max}}; \quad \xi = \frac{\Delta x}{x_{\max}}.$$

$$\sigma = \eta \frac{h_{\max}}{c_{\max}} \cdot \frac{b}{a+b} - \xi \frac{x_{\max}}{c_{\max}} \cdot \frac{a}{a+b}.$$

Так как движения точек A и B противоположны, то при $h_{\max}$ и $c_{\max}$ величина $x = 0$, а при $x_{\max}$ и $c_{\max}$ величина $h = 0$. При соблюдении этих условий из уравнения (VII-34) следует:

$$\frac{h_{\max}}{c_{\max}} = \frac{a+b}{b} \text{ и } \frac{x_{\max}}{c_{\max}} = \frac{a+b}{a}.$$

Уравнение связи между золотником и изодромом поэтому приводится к виду

$$\sigma = \eta - \xi. \quad (\text{VII-35})$$

В результате чего уравнение сервомотора с учетом обратной связи напишется так:

$$T_r \lambda' = \eta - \xi. \quad (\text{VII-36})$$

Уравнение объекта регулирования при отсутствии самовыравнивания

$$T_a \ddot{\varphi}' = -\mu, \quad (\text{VII-37})$$

где μ — изменение вращающего момента при изменении нагрузки двигателя;

T_a — постоянная времени машины.

Добавляя сюда уравнение связи между сервомотором и объектом регулирования

$$\lambda = \mu, \quad (\text{VII-38})$$

получим искомую систему уравнений, описывающих движение исследуемой системы регулирования с изодромным регулятором скорости:

$$\left. \begin{aligned} T_r^2 \ddot{\eta}'' + T_k \dot{\eta}' + \delta \eta &= \varphi \\ T_s \dot{\lambda}' &= \eta - \xi \\ T_i \dot{\xi}' + \xi &= \beta T_i \lambda' \\ \lambda &= \mu \\ T_a \ddot{\varphi}' &= -\mu \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII-39})$$

г) Связанные автономные системы регулирования

Рассмотрим систему регулирования паровой турбины с промежуточным отъемом пара, схематически изображенную на фиг. 147.

Система состоит из следующих звеньев:

1) чувствительного элемента скорости 20, представляющего центробежный маятниковый регулятор;

2) чувствительного элемента давления 21, представляющего обычный мембранный регулятор давления с пружиной;

3) сервомоторов 6 и 7 двустороннего действия с отсечными золотниками и жесткой обратной связью;

4) объекта регулирования с двумя регулируемыми параметрами, состоящего из двухвальной турбины с цилиндром высокого и цилиндром низкого давления, и парового объема между цилиндрами;

5) связей между чувствительными элементами.

Статика этой системы регулирования была рассмотрена выше в главе VI.

Сохраним ранее принятые обозначения:

z_c, z_d, y_1, y_2 — смещения точек соответственно A, B, O_1, O_2 ;

H_1, H_2 — перемещения поршней сервомоторов 6 и 7;

s_1, s_2 — открытия окон золотников 16 и 17.

Так как чувствительные элементы связаны общим рычагом AO_1BO_2 , точки A, O_1B и O_2 должны всегда находиться на одной прямой. Из этого условия вытекают уравнения связи, полученные выше (см. гл. VI):

$$y_1 = z_c(1 + \alpha) - z_d \alpha, \quad (\text{VII-40a})$$

$$y_2 = z_c(1 - \beta) + z_d \beta, \quad (\text{VII-40б})$$

где α и β — отношения плеч рычага

$$\alpha = \frac{a}{b+c}; \quad \beta = \frac{b}{b+c}.$$

Уравнения чувствительных элементов. Допустим, что чувствительный элемент скорости не имеет катаракта и приведенная масса муфты настолько мала, что ею можно пренебречь. Тогда уравнение этого элемента примет вид

$$\delta_1 \eta_1 = \varphi; \quad (\text{VII-41})$$

здесь: φ — отклонение скорости;

$\eta_1 = \frac{\Delta x_c}{z_{c\max}}$ — смещение муфты регулятора;

δ_1 — коэффициент неравномерности регулирования скорости.

Уравнение чувствительного элемента давления имеет аналогичную форму

$$\delta_2 \eta_2 = \xi; \quad (\text{VII-42})$$

здесь: ξ — отклонение давления в камере отбора;

$\eta_2 = \frac{\Delta x_n}{z_{o\max}}$ — деформация мембраны;

δ_2 — коэффициент неравномерности регулирования давления.

Уравнения сервомоторов. Уравнение первого сервомотора

$$T_{s1} \lambda_1' = \sigma_1, \quad (\text{VII-43})$$

где $\sigma_1 = \frac{\Delta s_1}{s_{1\max}}$ — относительная величина открытия окон золотника;

T_{s1} — время сервомотора;

λ_1 — перемещение поршня сервомотора.

Аналогично напишется уравнение второго сервомотора

$$T_{s2} \lambda_2' = \alpha_2; \quad (\text{VII-44})$$

здесь $\alpha_2 = \frac{\Delta s_2}{s_{2\max}}$ — относительная величина открытия окон золотника;

λ_2 — перемещение поршня сервомотора;

T_{s2} — время сервомотора.

Уравнения золотников. Каждый золотник получает движение от двух чувствительных элементов, а также от сервомотора через обратную связь.

Открытие окон первого золотника определяется как разность перемещений точки O_1 и втулки 14 от обратной связи

$$s_1 = y_1 - H_1 \frac{x}{d}.$$

Для малых отклонений

$$\Delta s_1 = \Delta y_1 - \Delta H_1 \frac{e}{d}; \quad \frac{e}{d} = \alpha_1.$$

Исключая Δy_1 с помощью уравнения (VII-40), найдем, что:

$$\Delta s_1 = \Delta z_c (1 + \alpha) - \Delta z_d \alpha - \Delta H_1 \alpha_1.$$

Введем отношения

$$\sigma_1 = \frac{\Delta s_1}{s_1 \max}; \quad \eta_1 = \frac{\Delta z_c}{z_c \max}; \quad \eta_2 = \frac{\Delta z_d}{z_d \max}; \quad \lambda_1 = \frac{\Delta H_1}{H_1 \max}.$$

Тогда

$$\sigma_1 = \eta_1 \frac{z_c \max (1 + \alpha)}{s_1 \max} - \eta_2 \frac{z_d \max \alpha}{s_1 \max} - \lambda_1 \frac{H_1 \max \alpha_1}{s_1 \max},$$

$$\sigma_1 = m_1 \eta_1 - n_1 \eta_2 - \lambda_1, \quad (\text{VII-45})$$

так как

$$\alpha_1 = \frac{e}{d} = \frac{s_1 \max}{H_1 \max}.$$

Открытие окон второго золотника определяется аналогично первому

$$s_2 = y_2 - H_2 \frac{f}{g}; \quad \frac{f}{g} = \beta_1.$$

$$\Delta s_2 = \Delta y_2 - \Delta H_2 \beta_1.$$

С помощью уравнения (VII-40б) исключаем Δy_2

$$\Delta s_2 = \Delta z_c (1 - \beta) + \Delta z_d \beta - \Delta H_2 \beta_1.$$

Вводя отношения

$$\sigma_2 = \frac{\Delta s_2}{s_2 \max}; \quad \lambda_2 = \frac{\Delta H_2}{H_2 \max},$$

придем к уравнению

$$\sigma_2 = \eta_1 \frac{z_c \max (1 - \beta)}{s_2 \max} + \eta_2 \frac{z_d \max \beta}{s_2 \max} - \lambda_2 \frac{H_2 \max \beta_1}{s_2 \max}$$

или

$$\sigma_2 = m_2 \eta_1 + n_2 \eta_2 - \lambda_2, \quad (\text{VII-46})$$

так как

$$\beta_1 = \frac{f}{g} = \frac{s_2 \max}{H_2 \max}.$$

Уравнение ротора. Допустим, что цилиндр высокого давления развивает момент вращения M_1 , а цилиндр низкого давления M_2 . Если при этом момент сил сопротивления равен M_c , то уравнение движения машины будет

$$M_1 + M_2 - M_c = I\omega',$$

где I — момент инерции ротора всей машины;

ω — угловая скорость вращения.

Момент вращения M_1 зависит от давления p в камере отбора и от подъема дроссельного клапана 4, который принимаем равным смещению H_1 поршня сервомотора 6.

$$M_1 = M_1(p, H_1).$$

Давление и температура пара перед дроссельным клапаном принимаются постоянными.

Аналогично момент M_2 будет представлен функцией $M_2 = M_2(p, H_2)$, зависящий от давления p в камере отбора и подъема дроссельного клапана 5. При этом давление в конденсаторе турбины принимается постоянным.

Перейдем к уравнению малых отклонений, причем допустим, что момент M_c сил сопротивления не изменяется, т. е. внешнее возмущающее воздействие со стороны механической нагрузки отсутствует, но колебания тепловой нагрузки (расход пара из камеры отбора) остаются.

$$\Delta M_1 + \Delta M_2 = I(\Delta\omega)'$$

$$I(\Delta\omega)' = \Delta p \left[\frac{\partial M_1}{\partial p} \right]_0 + \Delta H_1 \left[\frac{\partial M_1}{\partial H_1} \right]_0 + \Delta p \left[\frac{\partial M_2}{\partial p} \right]_0 + \\ + \Delta H_2 \left[\frac{\partial M_2}{\partial H_2} \right]_0 = \Delta p \left[\frac{\partial M}{\partial p} \right]_0 + \Delta H_1 \left[\frac{\partial M_1}{\partial H_1} \right]_0 + \Delta H_2 \left[\frac{\partial M_2}{\partial H_2} \right]_0,$$

где $M = M_1 + M_2$.

Введем отношения

$$\xi = \frac{\Delta p}{p_{\max}}; \quad \lambda_1 = \frac{\Delta H_1}{H_{1\max}}; \quad \lambda_2 = \frac{\Delta H_2}{H_{2\max}}; \quad \varphi = \frac{\Delta\omega}{\omega_{cr}};$$

тогда

$$\varphi' = \frac{\xi}{T_2} + \frac{\lambda_1}{T_1} + \frac{\lambda_2}{T_3}. \quad (\text{VII-47})$$

где

$$T_1 = \frac{I\omega_{cr}}{H_{1\max} \left[\frac{\partial M_1}{\partial H_1} \right]_0}; \quad T_2 = \frac{I\omega_{cr}}{H_{2\max} \left[\frac{\partial M_2}{\partial H_2} \right]_0}; \quad T_3 = \frac{I\omega_{cr}}{p_{\max} \left[\frac{\partial M}{\partial p} \right]_0}.$$

Уравнение камеры отбора (парового объема). Это уравнение определяется из условия баланса расхода пара. Обозначим через

G_1 — расход пара через дроссельный клапан ЦВД;

G_2 — расход пара через дроссельный клапан ЦНД;

G_0 — расход пара в отборе.

Уравнение баланса

$$(G_1 - G_2 - G_0) dt = V d\gamma,$$

где γ — удельный вес пара;

V — объем камеры отбора.

Предположим, что изменение давления пара в камере отбора пропорционально изменению удельного веса. Это всегда можно допустить с некоторым приближением, если участок политропы, по которой происходит процесс, заменить приближенной прямой

$$d\gamma = a dp$$

$$G_1 - G_2 - G_0 = Vap'.$$

Для малых отклонений имеем

$$\Delta G_1 - \Delta G_2 - \Delta G_0 = Va (\Delta p)'.$$

Заметим, что G_1 есть функция p и H_1 , а G_2 — функция p и H_2 ,

$$\Delta G_1 = \Delta p \left[\frac{\partial G_1}{\partial p} \right]_0 + \Delta H_1 \left[\frac{\partial G_1}{\partial H_1} \right]_0,$$

$$\Delta G_2 = \Delta p \left[\frac{\partial G_2}{\partial p} \right]_0 + \Delta H_2 \left[\frac{\partial G_2}{\partial H_2} \right]_0.$$

Допустим еще, что расход пара из отбора не меняется, т. е. отсутствует возмущающее воздействие для камеры отбора

$$\Delta G_0 = 0.$$

Тогда получим

$$\xi' = \frac{\lambda_1}{T_{10}} - \frac{\lambda_2}{T_{20}} + \frac{\xi}{T_{20}}, \quad (\text{VII-48})$$

где

$$T_{10} = \frac{Var_{\max}}{H_1 \max \left[\frac{\partial G_1}{\partial H_1} \right]_0}; \quad T_{20} = \frac{Var_{\max}}{H_2 \max \left[\frac{\partial G_2}{\partial H_2} \right]_0}; \quad T_{20} = \frac{V \cdot a}{\left[\frac{\partial (G_1 - G_2)}{\partial p} \right]_0}.$$

Таким образом, система уравнений описывающих процесс регулирования будет

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 \eta_1 &= \varphi \\ \delta_2 \eta_2 &= \xi \\ T_{s1} \lambda_1' &= \sigma_1 \\ T_{s2} \lambda_2' &= \sigma_2 \\ \sigma_1 &= \eta_1 m_1 - \eta_2 n_1 - \lambda_1 \\ \sigma_2 &= \eta_1 m_2 + \eta_2 n_2 - \lambda_2 \\ \varphi' &= \frac{\xi}{T_3} + \frac{\lambda_1}{T_1} + \frac{\lambda_2}{T_2} \\ \xi' &= \frac{\xi}{T_{20}} + \frac{\lambda_1}{T_{10}} + \frac{\lambda_2}{T_{20}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII-49})$$

Условия автономности регулирования. Условие автономности регулирования скорости требует, чтобы при $p = \text{const}$ регулирующая система получала импульс только от одного регулятора скорости.

В этом случае должно быть

$$\xi = 0; \quad \xi' = 0; \quad \eta_2 = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{T_{20}}{T_{10}}. \quad (\text{VII-50})$$

После преобразования вся система уравнений сведется к трем уравнениям

$$\left. \begin{aligned} T_{s1} \lambda_1' &= \frac{m_1}{\delta_1} \varphi - \lambda_1 \\ T_{s2} \frac{T_{20}}{T_{10}} \lambda_1' &= \frac{m_2}{\delta_2} \varphi - \lambda_1 \frac{T_{20}}{T_{10}} \\ \varphi' &= \lambda_1 \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} + \frac{T_{20}}{T_{10}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII-51})$$

Для того чтобы три уравнения с двумя неизвестными существовали совместно, необходимо и достаточно иметь пропорциональность коэффициентов двух уравнений

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{T_{s1}}{T_{s2}} \cdot \frac{T_{10}}{T_{20}} = \frac{T_{10}}{T_{20}}.$$

Отсюда условия автономности регулирования скорости будут

$$T_{s1} = T_{s2} \quad \text{и} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{T_{10}}{T_{20}}. \quad (\text{VII-52})$$

При автономном регулировании давления при $\omega = \text{const}$ система регулирования получает импульс только от регулятора давления

$$\varphi = 0; \quad \varphi' = 0; \quad \eta_1 = 0.$$

Система приводится к трем совместным дифференциальным уравнениям с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} T_{s1} \lambda_1' &= -\xi \frac{n_1}{b_3} - \lambda_1 \\ -T_{s2} \frac{T_2}{T_1} \lambda_1' &= \xi \frac{n_2}{b_2} + \frac{T_2}{T_1} \lambda_1 \\ \xi' &= \lambda_1 \left(\frac{1}{T_{10}} - \frac{T_2}{T_1 \cdot T_{20}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII-53})$$

При выводе этих уравнений принято допущение, что колебание давления в камере отбора невелико и что в связи с этими членами $\frac{\xi}{T_2}$ и $\frac{\xi}{T_{20}}$ можно пренебречь.

Для обеспечения совместности этих уравнений требуется соблюдения условия пропорциональности коэффициентов первых двух уравнений. Отсюда

$$T_{s1} = T_{s2} \quad \text{и} \quad \frac{n_1}{n_2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (\text{VII-54})$$

Таким образом, динамические условия автономности системы регулирования как скорости, так и давления требуют равенства постоянных времени сервомоторов.

Что касается дополнительных условий $\frac{m_1}{m_2} = \frac{T_{10}}{T_{20}}$ и $\frac{n_1}{n_2} = \frac{T_1}{T_2}$, то нетрудно убедиться в том, что если подставить вместо T_{10} , T_{20} , T_1 , T_2 , m_1 , m_2 их значения, то выполнение этих условий обеспечивается соблюдением статических условий автономности, выведенных ранее в главе VI.

Система уравнений, описывающих процесс регулирования в связанной системе регулирования двух параметров, при соблюдении условий автономности принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} T_{s1} \lambda_1' &= \frac{m_1}{b_1} \varphi - \lambda_1; \quad \varphi' = \lambda_1 \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \cdot \frac{T_{20}}{T_{10}} \right); \\ T_{s2} \lambda_2' &= \frac{n_2}{b_2} \xi - \lambda_2; \quad \xi' = -\lambda_2 \left(\frac{1}{T_{20}} + \frac{1}{T_{10}} \cdot \frac{T_1}{T_2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (\text{VII-55})$$

Эта система уравнений получена из уравнения VII-49 преобразованием, вытекающим из условий автономности. В реальных усло-

виях автономность, обычно, не удастся обеспечить полностью вследствие: 1) различия постоянных времени сервомоторов при их движении вверх и вниз; 2) наличия паровых объемов между клапанами; 3) нелинейности характеристик турбины и других причин.

Однако система связанного регулирования, в которой хотя бы приближенно выполняются условия автономности всех регулируемых параметров, обладает более высокими качествами регулирования сравнительно с другими системами.

В табл. 4 даны уравнения наиболее часто встречающихся звеньев.

Таблица 4

Уравнения наиболее часто встречающихся звеньев

№	Название звена	Уравнение звена	Обозначения
1	2	3	4
1	Двигатель без самовыравнивания	$T_a \varphi' = -\mu$ $T_a \dot{\varphi} = -\tau_i$	φ — угловая скорость μ — нагрузка τ_i — смещение муфты
2	Двигатель с самовыравниванием	$T_a \varphi' + \theta \varphi = -\mu$ $T_a \dot{\varphi} + \theta \dot{\varphi} = -\tau_i$	$\frac{T_a}{\theta}$ — постоянная времени машины θ — степень самовыравнивания
3	Сервомотор двустороннего действия с отсечным золотником без обратной связи и учета массы поршня	$T_s \lambda' = \tau_i$	T_s — постоянная времени сервомотора λ — перемещение поршня сервомотора
4	То же с жесткой обратной связью и коэффициентом обратной связи равным 1	$T_s \lambda' + \lambda = \tau_i$	τ_i — смещение золотника из среднего положения
5	Сервомотор одностороннего действия с пружиной и проточным золотником без учета массы поршня	$T_s \lambda' + \delta \lambda = -\tau_i$	δ — величина, обратная коэффициенту усиления звена
6	Сервомотор со струйной трубкой без обратной связи и без учета массы поршня	$T_s \lambda' = \sigma$	T_s — постоянная времени сервомотора σ — смещение струйной трубки λ — перемещение поршня

Продолжение табл. 4

№ 2	Название звена	Уравнение звена	Обозначения
1	2	3	4
7	То же с жесткой обратной связью и коэффициентом обратной связи, равным 1	$T_s \lambda' + \lambda = \sigma$	
8	Сервомотор с дросселем переменного сечения без учета массы поршня	$T_s \lambda' = -\sigma$	T_s — постоянная времени сервомотора λ — перемещение поршня сервомотора σ — смещение дросселя
9	Чувствительный элемент скорости без учета массы	$T_k \eta' + \delta \eta = \varphi$	φ — скорость η — смещение муфты T_k и T_r — постоянные времени чувствительного элемента
10	То же, но с учетом массы	$T_r^2 \eta'' + T_k \eta' + \delta \eta = \varphi$	δ — величина, обратная коэффициенту усиления звена (степень неравномерности)
11	Изодром без остаточной неравномерности и без учета массы	$T_i \xi' + \xi = \beta T_i \lambda'$	T_m и T_i — постоянные времени изодрома ξ — смещение изодрома
12	То же, но с учетом массы	$T_m^2 \xi'' + T_i \xi' + \xi = \beta T_i \lambda'$	λ — перемещение поршня сервомотора i — степень статизма
13	Изодром с остаточной неравномерностью и с учетом массы	$T_m^2 \xi'' + T_i \xi' + \xi = \beta T_i \lambda' + i \beta \lambda$	β — отношение хода поршня к ходу изодрома
14	Пневматическая емкость аккумулятора	$T_e v' = \mu_1 - \mu_2$	T_e — постоянная времени емкости v — давление в аккумуляторе μ_1 — приток воздуха μ_2 — расход воздуха

Продолжение табл. 4

№ звена	Название звена	Уравнение звена	Обозначения
1	2	3	4
15	Паровой котел как аккумулятор пара	$T_e v' = \mu_u - \mu_g$	T_e — постоянная времени котла v — давление пара в котле μ_u — приток пара μ_g — расход пара
16	Мембранный регулятор давления с пружиной (безынерционный)	$\delta \lambda = \mp \xi$	λ — подъем клапана ξ — давление δ — степень неравномерности давления
17	Электромашинный усилитель с полной компенсацией	$T_1 T_2 U_2'' + (T_1 + T_2) U_2' + U_2 = k U_1$	U_1 — напряжение управляющей обмотки U_2 — выходное напряжение T_1 и T_2 — постоянные времени управляющей обмотки и короткозамкнутой цепи k — коэффициент усиления
18	Магнитный усилитель	$\tau i' + i = k i_m$	k — коэффициент усиления τ — постоянная времени управляющей цепи i_m — ток управляющей цепи
19	Электронный усилитель	$e_a = K e_c$	i — выходной ток e_a — выходное напряжение e_c — сеточное напряжение K — коэффициент усиления
20	Сельсин как измерительный элемент рас- согласования	$e = K \delta$	e — выходное напряжение δ — угловое рас- согласование командной и исполни- тельной осей

Продолжение табл. 4

п/п 2	Название звена	Уравнение звена	Обозначения
1	2	3	4
21	Соленоид с пружиной	$T_2^2 x'' + T_1 x' + x = k\varphi$	x — смещение якоря φ — изменение напряжения на зажимах катушки соленоида T_2 и T_1 — постоянные времени k — коэффициент усиления

ГЛАВА VIII

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ И ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В настоящей главе рассматриваются методы решения и исследования линейных дифференциальных уравнений движения систем автоматического регулирования.

Решение дифференциального уравнения n -го порядка считается вполне известным, если в любой момент времени мы знаем не только значение неизвестной переменной, но и значения всех ее производных до $n-1$ -го порядка включительно. Чтобы получить такое решение, требуется не только интегрирование рассматриваемого дифференциального уравнения, но и знание в какой-либо момент времени, обычно в начальный момент отсчета $t = 0$, значений неизвестной переменной и всех ее указанных выше производных. Таким образом, исчерпывающее представление о движении системы регулирования дают интегрирование дифференциального уравнения движения и начальные условия этого движения.

Дифференциальное уравнение движения системы регулирования в безразмерной форме было дано в главе VII.

$$D(p)\lambda = U(p)\varphi, \quad (\text{VIII-1})$$

где λ — регулируемая величина;

φ — возмущающее воздействие;

$D(p)$ и $U(p)$ — выходной и входной операторы.

λ и φ представляют функции времени.

Как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение λ уравнения (VIII-1) находится как сумма двух решений λ_c и λ_s ,

$$\lambda = \lambda_c + \lambda_s, \quad (\text{VIII-2})$$

где λ_c — общее решение однородного уравнения

$$D(p)\lambda_c = 0, \quad (\text{VIII-3})$$

а λ_s — частное решение заданного уравнения

$$D(p)\lambda_s = U(p)\varphi.$$

Движение системы, определяемое составляющей λ_c , называется свободным движением, а составляющей λ_p — вынужденным движением.

Решение λ_c находится по корням характеристического уравнения $D(p) = 0$.

$D(p)$ представляет целый рациональный полином степени n (порядок дифференциального уравнения) с вещественными коэффициентами и потому в общем случае имеет вещественные и сопряженные комплексные корни. Общее решение λ_c уравнения (VIII-3) состоит из суммы слагаемых, где каждое слагаемое отвечает корню или группе одинаковых корней характеристического уравнения. Каждому однократному вещественному корню $p = p_k$ отвечает слагаемое вида

$$C_k e^{p_k t}, \quad (\text{VIII-4})$$

где C_k — постоянная интегрирования.

Если корень $p = p_k$ имеет кратность s , то группе равных корней p_k отвечает слагаемое

$$(C_1 + C_2 t + C_3 t^2 \dots C_s t^{s-1}) e^{p_k t} \quad (\text{VIII-5})$$

с постоянными интегрирования $C_1, C_2, \dots, C_s$.

Каждая пара комплексных сопряженных корней $\alpha_k \pm i\beta_k$ имеет в составе решения λ_c свою составляющую вида

$$e^{\alpha_k t} (C_k \cos \beta_k t + D_k \sin \beta_k t) \dots \quad (\text{VIII-6})$$

где C_k и D_k — постоянные интегрирования.

В случае кратности s комплексных сопряженных корней эта составляющая будет

$$e^{\alpha_k t} [(C_1 + C_2 t \dots C_s t^{s-1}) \cos \beta_k t + (D_1 + D_2 t \dots D_s t^{s-1}) \sin \beta_k t]. \quad (\text{VIII-7})$$

Таким образом, для нахождения интеграла уравнения (VIII-3) нужно найти корни характеристического уравнения $D(p) = 0$ и по ним составить сумму слагаемых описанного выше вида и затем определить постоянные интегрирования. При отсутствии кратных корней λ_c будет иметь вид

$$\lambda_c = \sum_{r=1}^k C_r e^{p_r t} + \sum_{q=1}^m e^{\alpha_q t} (C_q \cos \beta_q t + D_q \sin \beta_q t). \quad (\text{VIII-8})$$

Здесь k — число вещественных и m — число пар комплексных сопряженных корней, причем $k + 2m = n$ — порядку дифференциального уравнения.

Число постоянных интегрирования $C_1, C_2 \dots D_1, D_2$ во всех случаях должно быть равно n . Значение постоянных интегрирования определяются из начальных условий движения системы регулирования, которые для полной определенности движения должны быть

таковы, чтобы значения всех постоянных интегрирования определялись однозначно.

Обычно за начальные условия принимают значения переменной λ и всех ее производных до $n-1$ -го порядка включительно в начальный момент времени $t=0$.

Пользуясь уравнением (VIII-2), представим эти начальные условия в виде следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(0) &= \lambda_c(0) + \lambda_a(0) \\ \lambda^{(k)}(0) &= \lambda_c^{(k)}(0) + \lambda_a^{(k)}(0) \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-9})$$

где

$$\begin{aligned} \lambda^{(k)}(0) &= \left[\frac{d^k \lambda}{dt^k} \right]_{t=0}; \quad \lambda_c^{(k)}(0) = \left[\frac{d^k \lambda_c}{dt^k} \right]_{t=0}, \\ \lambda_a^{(k)}(0) &= \left[\frac{d^k \lambda_a}{dt^k} \right]_{t=0}. \end{aligned}$$

При исследовании движения систем автоматического регулирования под действием возмущающих сил принимается, что возмущающие силы начинают действовать на систему в момент $t=0$ (начало отсчета времени), при $t < 0$ эти воздействия отсутствуют. Однако система при $t < 0$ может находиться в состоянии движения и в момент $t=0$ состояние системы определяется значениями переменной λ и ее производных.

Рассматривая равенства (VIII-9) начальных условий в момент $t = -\epsilon$, где ϵ — бесконечно малое время, мы должны считать возмущающие воздействия отсутствующими, в связи с чем $\lambda_a(0) = \lambda_a(0) \dots = 0$.

В этом случае начальные условия определяются только состоянием системы в момент $t=0$ до приложения возмущающих сил. При $t = +\epsilon$ начальные условия движения будут уже другие, так как в равенствах (VIII-9) появляются дополнительные слагаемые $\lambda_a(0)$, $\lambda_a^{(1)}(0)$, ..., которые теперь не равны нулю. Эти слагаемые зависят от вида возмущающих воздействий или вида вынужденного движения.

Поэтому в дальнейшем мы будем различать два вида начальных условий при $t = -0$ и при $t = +0$. Первые начальные условия определяют состояние системы в момент $t=0$ до приложения возмущающих воздействий, вторые после приложения этих воздействий.

Если при исследовании движения систем автоматического регулирования первыми начальными условиями мы можем задаваться произвольно, то вторые должны быть увязаны с вынужденным движением и возмущающими воздействиями.

Примем для упрощения дальнейших рассуждений, что характеристическое уравнение $D(p) = 0$ имеет одни вещественные однократные корни.

Тогда общее решение дифференциального уравнения $D(p)\lambda = U(p)\varphi$ может быть представлено в виде

$$\lambda = \sum_{k=1}^n C_k e^{p_k t} + \lambda_s. \quad (\text{VIII-10})$$

Для определения постоянных интегрирования C_k имеем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \lambda(0) &= \sum_{k=1}^n C_k + \lambda_s(0) \\ \lambda^{(r)}(0) &= \sum_{k=1}^n p_k^r C_k + \lambda_s^{(r)}(0); \quad r = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-11})$$

Эта система линейная относительно C_k и к ней может быть применен принцип суперпозиции. Пользуясь этим принципом, мы находим каждую постоянную интегрирования C_k как алгебраическую сумму двух постоянных C_{k0} и C_{kn} , определяемых отдельно из уравнений

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^n C_{k0} + \lambda_s(0) \\ 0 &= \sum_{k=1}^n p_k^r C_{k0} + \lambda_s^{(r)}(0); \quad r = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-12})$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda(0) &= \sum_{k=1}^n C_{kn} \\ \lambda^{(r)}(0) &= \sum_{k=1}^n p_k^r C_{kn}; \quad r = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-13})$$

Соответственно этому свободное движение системы, определяемое решением λ_c , может быть разложено на две составляющих λ_{cn} и λ_{c0} :

$$\lambda_{cn} = \lambda_{cn} + \lambda_{c0}. \quad (\text{VIII-14})$$

Составляющая λ_{cn} определяет свободное движение системы при заданных начальных условиях в момент $t = 0$ при отсутствии возмущающих воздействий.

Вторая составляющая λ_{c0} представляет свободное движение системы при нулевых начальных условиях и при действии возмущающих сил.

Общее движение системы будет

$$\lambda = \lambda_{cn} + \lambda_{c0} + \lambda_s = \lambda_c + \lambda_s. \quad (\text{VIII-15})$$

В дальнейшем будем пользоваться следующей общепринятой терминологией.

Свободное движение системы, определяемое составляющей

$$\lambda_c = \lambda_{cn} + \lambda_{co},$$

рассматриваем как переходный процесс регулирования. Будем обозначать его через

$$\lambda_{пер} = \lambda_c = \lambda - \lambda_{ст} \quad (\text{VIII-16})$$

Составляющая λ_{co} представляет вынужденное движение системы под действием возмущающих сил. Если система имеет установившийся режим, то это движение будет называться движением установившегося режима или установившимся движением.

Общее решение λ определяет процесс регулирования системы в целом.

Из сказанного выше следует, что переходный процесс регулирования возникает как по причине приложенных к системе возмущающих воздействий, так и при наличии ненулевых начальных условий движения системы.

Остановимся на видах переходного процесса. Здесь различают следующие случаи.

1. Один из вещественных корней характеристического уравнения $D(p) = 0$ положительный. Этому корню отвечает входящее в состав $\lambda_{пер}$ слагаемое вида $C_k e^{p_k t}$, которое с течением времени неограниченно возрастает, в результате чего $\lambda_{пер} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Такой переходный процесс называется неустойчивым.

2. Вещественная часть одной пары мнимых сопряженных корней положительна. Слагаемое, отвечающее этой паре корней, имеет вид формулы (VIII-6). Такое движение представляет периодические колебания с неограниченно возрастающей с течением времени амплитудой. Поскольку это движение является одной из составляющих $\lambda_{пер}$, переходный процесс неустойчив.

3. Все вещественные корни, а также вещественные части комплексных сопряженных корней отрицательны.

В этом случае все составляющие $\lambda_{пер}$, включая и составляющие, относящиеся к кратным корням, с течением времени стремятся к нулю. Здесь $\lambda_{пер} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Такое уменьшение с течением времени абсолютных значений составляющих $\lambda_{пер}$ до нуля называется затуханием. При этом различают затухание апериодическое, когда затухание происходит без колебаний и колебательное, когда затухающая составляющая совершает периодические колебания с амплитудой, стремящейся к нулю.

Переходный процесс, когда $\lambda_{пер} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, называется устойчивым.

4. Один из вещественных корней равен 0. В этом случае в составе $\lambda_{пер}$ появляется постоянное слагаемое.

5. Характеристическое уравнение имеет одну пару сопряженных чисто мнимых корней (вещественная часть равна 0). При этом в составе $\lambda_{пер}$ появляется слагаемое, представляющее колебательное движение с постоянной амплитудой. Такие колебания называются незатухающими.

6. Характеристическое уравнение имеет нулевой корень кратности $s > 1$ или сопряженные чисто-мнимые корни с кратностью $s > 1$.

В этом случае переходный процесс неустойчив, так как одно из слагаемых $\lambda_{пер}$ будет неограниченно возрастать аperiodически или в виде колебаний с возрастающей амплитудой.

В дальнейшем мы будем рассматривать только системы, имеющие устойчивый переходный процесс регулирования.

В этом случае переходный процесс $\lambda_{пер}$ составляется из слагаемых, которые затухают с течением времени аperiodически или в форме колебаний с затухающей амплитудой. Если рассматривать аperiodически затухающее движение, как колебание с периодом $T = \infty$, мы можем говорить, что переходный процесс регулирования состоит из свободных колебаний системы.

Для суждения о качестве системы регулирования существенно знать величину погрешности регулирования. Ошибка регулирования определяется как разность

$$\Delta y = y_p - y,$$

где y_p — заданное и y действительное значения регулируемой величины.

В безразмерной форме это выражение примет вид

$$\Delta \lambda = \lambda_p - \lambda. \quad (\text{VIII-17})$$

Заменяя λ выражением $\lambda = \lambda_{пер} + \lambda_с$, представим значение погрешности $\Delta \lambda$ в другом виде

$$\Delta \lambda = \lambda_p - \lambda_с - \lambda_{пер}.$$

Обозначим разность $\lambda_p - \lambda_с$ через $\Delta \lambda_с$, а величину $-\lambda_{пер}$ через $\Delta \lambda_{пер}$. Тогда

$$\Delta \lambda = \Delta \lambda_{пер} + \Delta \lambda_с. \quad (\text{VIII-18})$$

Погрешность $\Delta \lambda_с = \lambda_p - \lambda_с$ называется установившейся погрешностью.

При постоянстве возмущающих сил погрешность $\Delta \lambda_с$ характеризует вид системы регулирования.

Если $\Delta \lambda_с = 0$ система называется астатической, а при $\Delta \lambda_с \neq 0$ статической.

Слагаемое $\Delta \lambda_{пер}$ называется переходной или динамической погрешностью. Величина $(\Delta \lambda_{пер})_{max}$ определяет дополнительную максималь-

пую погрешность, которая накладывается на $\Delta\lambda$, при переходном процессе. Если $\Delta\lambda_{пер} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то система называется устойчивой.

Анализ системы регулирования на базе построенного линейного дифференциального уравнения движения может быть произведен с помощью различных методов.

Прежде чем перейти к изложению применяющихся в настоящее время методов решения и исследования уравнений движения систем автоматического регулирования, необходимо остановиться кратко на видах возмущающих воздействий.

1. ВИДЫ ВОЗМУЩАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Величина и характер возмущающих воздействий зависит от того технологического процесса, один или несколько параметров которого подлежат автоматическому регулированию. Функция, оказывающая изменение во времени возмущающего воздействия на одно из звеньев регулятора, называется возмущающей функцией. Возмущающую функцию принято выражать в безразмерных единицах аналогично тому, как это делается в уравнениях малых отклонений, выбрав подходящее базисное значение возмущающего воздействия.

Хотя функциональная зависимость возмущающих воздействий от времени может быть весьма разнообразной, принято при исследовании и проверке устройств автоматического регулирования рассматривать только некоторые наиболее характерные случаи. Так, например, регуляторы скорости паровых и водяных турбин принято, как правило, испытывать на полный сброс нагрузки.

Наиболее характерные виды возмущающих воздействий указаны ниже.

а) Единичная толчкообразная функция

Единичная толчкообразная функция описывает мгновенный полный сброс или включение нагрузки (фиг. 158). На фиг. 158, а показана единичная толчкообразная функция, представляющая включение полной нагрузки, а на рис. 158, б — сброс полной нагрузки.

Единичный толчок при $t = 0$ принято обозначать символом $1(t)$. Функция $1(t)$ записывается так:

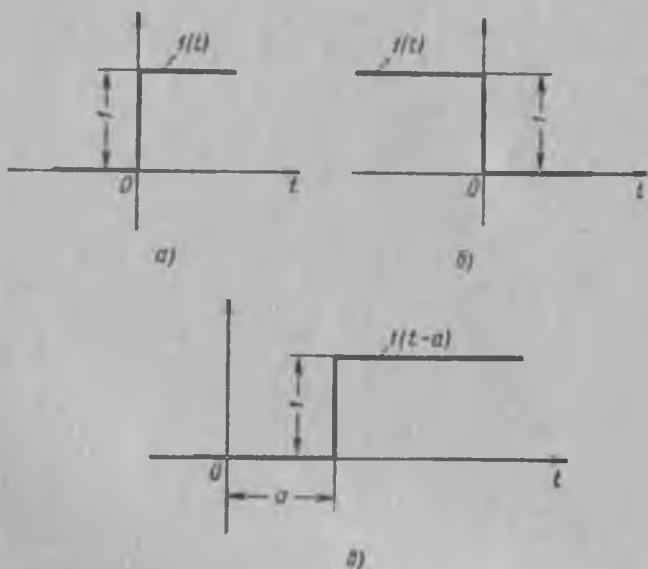
$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0 \\ 1 & \text{при } t \geq 0 \text{ при включении} \end{cases} \quad (\text{VIII-19})$$

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t < 0 \\ 0 & \text{при } t \geq 0 \text{ при сбросе.} \end{cases} \quad (\text{VIII-20})$$

Если единичный толчок происходит не в начальный момент времени, а с запозданием на a секунд, то возмущающая функция имеет вид, показанный на фиг. 158, в.

Такая функция записывается следующим образом:

$$1(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < a \\ 1 & \text{при } t > a. \end{cases} \quad (\text{VIII-21})$$



Фиг. 158. Единичная толчкообразная функция.

При включении толчка с опережением на a секунд запись примет вид

$$1(t+a) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < -a \\ 1 & \text{при } t > -a \end{cases}$$

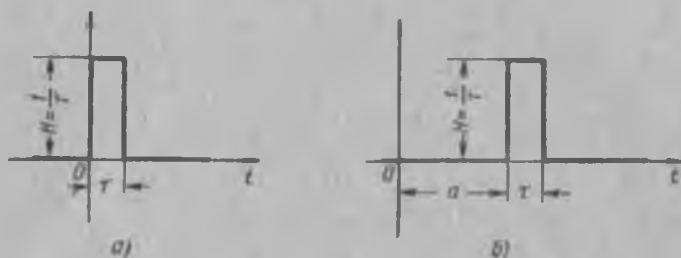
б) Функция единичного импульса первого порядка (фиг. 159)

Эта функция описывает кратковременное возмущающее воздействие, имеющее характер импульсного толчка. Графическое изображение этой функции дано на фиг. 159,а.

Такая функция обозначается через $\delta(t)$ или $1'(t)$ и записывается так:

$$\delta(t) = 1'(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{при } -\tau < t < \tau \\ 0 & \text{при } t > \tau \text{ и } t < 0. \end{cases} \quad (\text{VIII-22})$$

Если импульсный толчок происходит позже начального момента времени с запаздыванием на a секунд, то функция возмущающего



Фиг. 159. Функция единичного импульса первого порядка.

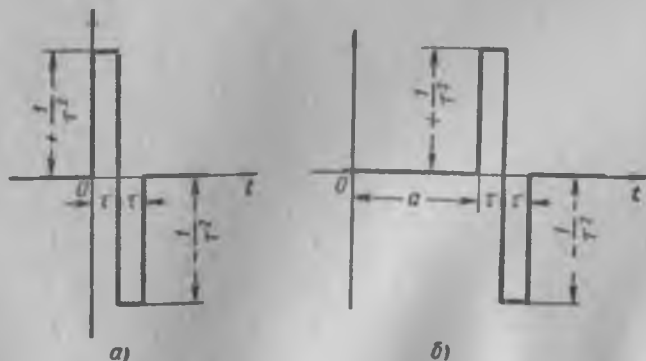
воздействия обозначается через $l'(t-a)$ и записывается так:

$$\delta(t-a) = l'(t-a) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} & \text{при } a < t < a + \tau \\ 0 & \text{при } t > a + \tau \text{ и } t < a. \end{cases} \quad (\text{VIII-23})$$

Графическое изображение функции $l'(t-a)$ дано на фиг. 159, б.

в) Функция единичного импульса второго порядка (фиг. 160)

Функция единичного импульса второго порядка описывает возмущающее воздействие, имеющее характер двустороннего импульс-



Фиг. 160. Функция единичного импульса второго порядка.

ного толчка с переменной направлением действия, как показано на фиг. 160, а, б.

Это возмущающее воздействие принято обозначать $l^*(t)$ и записывать:

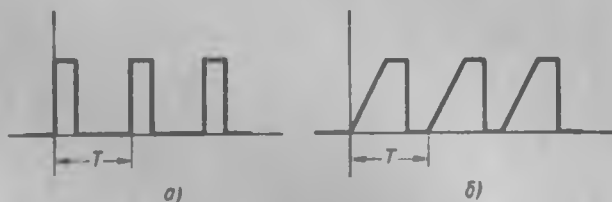
$$l^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau^2} \dots t < \tau \\ -\frac{1}{\tau^2} \dots \tau < t < 2\tau \\ 0 \dots t < 0 \text{ и } t > 2\tau \end{cases} \quad (\text{VIII-24})$$

Если начало импульсного толчка второго порядка запаздывает на a секунд, то это обозначается записью:

$$l^*(t-a) = \begin{cases} \frac{1}{\tau^2} \dots a < t < a + \tau \\ -\frac{1}{\tau^2} \dots a + \tau < t < a + 2\tau \\ 0 \dots t < a \text{ и } t > a + 2\tau \end{cases} \quad (\text{VIII-25})$$

г) Периодическая функция возмущающего воздействия (фиг. 161)

В ряде случаев технологический процесс сопровождается периодическими возмущающими воздействиями, повторяющимися



Фиг. 161. Графики периодических возмущающих воздействий.

через равные промежутки времени. Такой случай имеет всегда место, когда регулируемая среда расходуется периодически равными порциями.

На фиг. 161, а, б приведены графики периодических возмущающих воздействий.

Для периодических возмущающих воздействий справедлива запись:

$$\left. \begin{aligned} f(t) &= 0 \text{ при } t < 0 \\ f(t) &= f(t+T) \text{ при } t \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-26})$$

если T — период приложения возмущающего воздействия.

2. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПО ЛАПЛАСУ ДЛЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Применение преобразования Лапласа для решения дифференциальных уравнений движения систем автоматического регулирования существенно упрощает эту задачу, исключая необходимость определения постоянных интегрирования. Это основано на особых свойствах лапласовского изображения производных функции при различных начальных условиях. Сущность преобразования Лапласа кратко изложена в приложении I.

Процесс автоматического регулирования описывается системой уравнений отдельных звеньев и уравнениями связей между ними. Обычно систему разлагают на наиболее простые, элементарные звенья, порядок дифференциальных уравнений которых не превышает двух.

Рассмотрим одно такое звено.

Пусть уравнение звена будет

$$\bar{T}_2 \lambda_{\text{вмх}}'' + \bar{T}_1 \lambda_{\text{вмх}}' + \lambda_{\text{вмх}} = u \lambda_{\text{вх}}. \quad (\text{VIII-27})$$

Здесь: $\bar{T}_2, \bar{T}_1$ — постоянные времени звена;
 u — коэффициент усиления звена.

Введем дифференциальный оператор

$$p = \frac{d}{dt}.$$

Тогда уравнение запишется в форме

$$(\bar{T}_2 p^2 + \bar{T}_1 p + 1) \lambda_{\text{вмх}} = u \lambda_{\text{вх}}.$$

Обозначим через $d(p)$ полином $\bar{T}_2 p^2 + \bar{T}_1 p + 1$, что позволит записать уравнение (VIII-27) в виде

$$\diamond d(p) \lambda_{\text{вмх}} = u \lambda_{\text{вх}}. \quad (\text{VIII-28})$$

Полином $d(p)$ указывает порядок и комплекс действий дифференцирования, которые должны быть произведены над величиной $\lambda_{\text{вмх}}$. Этот полином называют выходным оператором звена.

Введение дифференциального оператора позволяет значительно сократить запись уравнений. Кроме того, с оператором $d(p)$ при преобразовании дифференциальных уравнений можно производить действия как с обычным алгебраическим многочленом.

а) Система без дополнительных связей

Допустим, что мы имеем несколько звеньев, уравнения движения которых соответственно будут:

$$\left. \begin{aligned} d_1(p) \lambda_{1\text{вмх}} &= u_1 \lambda_{1\text{вх}} \\ d_2(p) \lambda_{2\text{вмх}} &= u_2 \lambda_{2\text{вх}} \\ &\dots \dots \dots \\ d_n(p) \lambda_{n\text{вмх}} &= u_n \lambda_{n\text{вх}} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-29})$$

Если эти звенья соединены в последовательную разомкнутую одноконтурную цепочку (см. фиг. 162), то для описания процесса регулирования мы должны к указанной системе уравнений присоединить еще уравнения главных связей, поскольку другие связи по условию отсутствуют.

Введение уравнений главных связей между звеньями усложняет общую систему уравнений. Условимся в дальнейшем в целях упрощения относить главные связи в состав своих предшествующих звеньев. Тогда мы придем к более простой системе уравнений, при



Фиг. 162. Схема разомкнутой одноконтурной системы.

которой выход каждого звена подается непосредственно на вход последующего, т. е.

$$\lambda_{1 \text{ вх}} = \lambda_{2 \text{ вх}} = \lambda_1; \lambda_{2 \text{ вх}} = \lambda_{3 \text{ вх}} = \lambda_2 \text{ и т. д.}$$

Кроме того, коэффициенты усиления главных связей войдут в состав коэффициентов усиления соответствующих звеньев.

Уравнения (VIII-29) теперь могут быть записаны в следующем виде, если опустить индексы *вых* и *вх* и положить $\lambda_{1 \text{ вх}} = \varphi(t)$

$$\left. \begin{aligned} d_1(p) \lambda_1 &= u_1 \varphi(t) \\ d_2(p) \lambda_2 &= u_2 \lambda_1 \\ &\vdots \\ d_n(p) \lambda_n &= u_n \lambda_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-30})$$

Здесь в состав коэффициентов $u_1, u_2, \dots, u_n$ входят также коэффициенты усиления соответствующих главных связей.

Учитывая, что операторами $d_1(p), d_2(p)$ при преобразовании дифференциальных уравнений можно пользоваться как обычными алгебраическими полиномами, получим простым перемножением уравнений

$$d_1(p) d_2(p) \dots d_n(p) \lambda_n = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n \varphi(t). \quad (\text{VIII-31})$$

Полином

$$D(p) = d_1(p) \cdot d_2(p) \cdot \dots \cdot d_n(p) = \prod_{k=1}^{k=n} d_k(p),$$

представляющий произведение всех выходных операторов звеньев, называется выходным оператором разомкнутой одноконтурной системы.

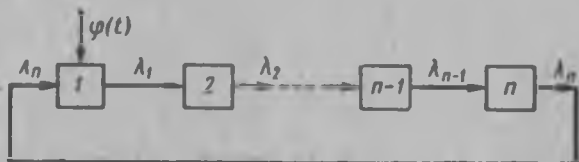
Величина $U_n = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$ есть коэффициент усиления системы. Этот коэффициент равен произведению коэффициентов усиления всех звеньев и всех главных связей между ними.

Дифференциальное уравнение

$$D(p) \lambda_n = U_n \varphi(t) \quad (\text{VIII-32})$$

представляет уравнение движения разомкнутой одноконтурной системы. Это уравнение позволяет определить значение выходной координаты системы по заданной функции возмущающего воздействия $\varphi(t)$, поступающего на вход первого звена цепи.

Если подать выход последнего звена нашей разомкнутой системы на вход первого звена, мы получим замкнутую систему регулирования (фиг. 163).



Фиг. 163. Схема замкнутой одноконтурной системы.

В этом случае система уравнений представится в следующем виде.

$$\left. \begin{aligned} d_1(p) \lambda_1 &= u_1 (\varphi - \lambda_n) \\ d_2(p) \lambda_2 &= u_2 \lambda_1 \\ &\vdots \\ d_n(p) \lambda_n &= u_n \lambda_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-33})$$

Знак минус перед λ_n в первом уравнении взят потому, что в системе автоматического регулирования главная обратная связь от объекта к чувствительному элементу отрицательная.

Уравнение системы регулирования теперь будет

$$[D(p) + U_n] \lambda_n = U_n \varphi \quad (\text{VIII-34})$$

или

$$\bar{D}(p) \lambda_n = U_n \varphi, \quad (\text{VIII-35})$$

где

$$\bar{D}(p) = D(p) + U_n,$$

есть выходной оператор замкнутой одноконтурной системы. Этот оператор, как следует из формулы, равен сумме выходного оператора и коэффициента усиления разомкнутой одноконтурной системы.

После того как проинтегрировано уравнение (VIII-35) и определена функция λ_n с учетом начальных условий, вычисление остальных функций $\lambda_{n-1}, \lambda_{n-2}, \dots, \lambda_1$ не представляет никаких затруднений. Из уравнения $d_n p \lambda_n = u_n \lambda_{n-1}$ функция λ_{n-1} находится простым дифференцированием по времени функции λ_n .

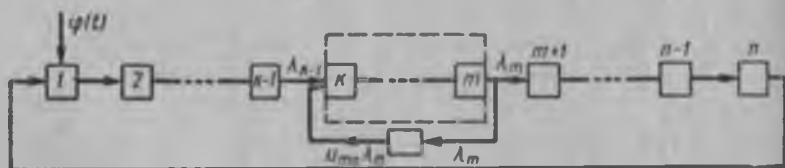
Аналогично вычисляется λ_{n-2} по λ_{n-1} и т. д.

б) Замкнутая система с жесткой обратной связью, шунтирующей несколько звеньев

Схема такой системы показана на фиг. 164.

Допустим, что выход звена m подается с помощью обратной связи на вход звена k . Согласно предыдущего, для всех звеньев, шунтированных обратной связью, можно написать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} d_k(p) \lambda_k &= u_k (\lambda_{k-1} \pm u_{mo} \lambda_m) \\ d_{k+1}(p) \lambda_{k+1} &= u_{k+1} \lambda_k \\ &\dots \dots \dots \\ d_m(p) \lambda_m &= u_m \lambda_{m-1}. \end{aligned} \quad (\text{VIII-36})$$



Фиг. 164. Схема замкнутой системы с жесткой обратной связью.

Здесь u_{mo} есть коэффициент усиления обратной связи. Знак плюс перед u_{mo} отвечает положительной, а минус отрицательной обратной связи. Исключая все переменные, кроме λ_m , найдем:

$$D_{km}(p) \lambda_m = U_{km} (\lambda_{k-1} \pm u_{mo} \lambda_m). \quad (\text{VIII-37})$$

Здесь

$$D_{km} = d_k(p) d_{k+1}(p), \dots, d_m(p)$$

$$U_{km} = u_k \cdot u_{k+1} \cdot \dots \cdot u_m.$$

Введем оператор группы шунтированных звеньев

$$\bar{D}_{km}(p) = D_{km}(p) \mp u_{mo} \cdot U_{km}. \quad (\text{VIII-38})$$

Тогда уравнение вспомогательной системы, составленной из звеньев, шунтированных обратной связью, вместе с этой связью будет

$$\bar{D}_{km}(p) \lambda_m = U_{km} \cdot \lambda_{k-1}. \quad (\text{VIII-39})$$

Уравнения остальных звеньев остаются без изменения.

Система уравнений, описывающих движение всей замкнутой системы, теперь представится в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} d_1(p) \lambda_1 &= u_1 (\varphi - \lambda_n) \\ d_2(p) \lambda_2 &= u_2 \lambda_1 \\ &\dots \dots \dots \\ d_{k-1}(p) \lambda_{k-1} &= u_{k-1} \lambda_{k-2} \\ \overline{D}_{km}(p) \lambda_m &= U_{km} \lambda_{k-1} \\ d_{m+1}(p) \lambda_{m+1} &= u_{m+1} \lambda_m \\ &\dots \dots \dots \\ d_n(p) \lambda_n &= u_n \lambda_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-40})$$

Исключая все переменные, кроме λ_n , придем, как и ранее для замкнутой системы без обратной связи, к результирующему уравнению нашей системы:

$$\overline{D}(p) \lambda_n = U_n \varphi,$$

причем здесь

$$\overline{D}(p) = d_1(p) d_2(p), \dots, d_{k-1}(p) \overline{D}_{km}(p) d_{m+1}(p), \dots, d_n(p) + U_n.$$

а

$$U_n = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot U_{km} \cdot \dots \cdot u_n.$$

Отсюда вытекает правило для построения уравнения динамики системы регулирования, отличающейся от одноконтурной наличием жесткой обратной связи. В этом случае нужно заменить обратную связь и все шунтированные ею звенья одним вспомогательным звеном и рассматривать всю заданную систему после сделанной замены как одноконтурную без обратной связи. Выходной оператор вспомогательного звена равен оператору той замкнутой одноконтурной системы, которая образуется из обратной связи и всех зашунтированных ею звеньев. Коэффициент усиления вспомогательного звена равен произведению коэффициентов усиления всех шунтированных звеньев и главных связей между ними.

Рассмотрим часто встречающийся случай, когда обратная связь шунтирует только одно звено

$$\overline{D}_{km}(p) = \overline{d}_k(p) = d_k(p) \mp u_{ko} u_k \quad (\text{VIII-41})$$

и

$$U_{km} = u_k.$$

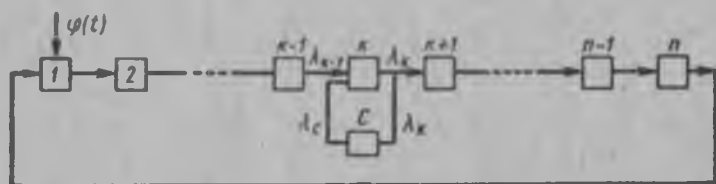
В остальном полученные выше выводы не изменяются.

В формуле (VIII-41) взят знак минус, так как в системах регулирования обратная связь обычно отрицательна.

в) Замкнутая система с гибкой обратной связью

Схема замкнутой системы с гибкой обратной связью изображена на фиг. 165.

Примем, что гибкая связь шунтирует звено номера k . Выше, в главе V, было определено, что воздействие гибкой связи представляет некоторую функцию от скорости изменения выходной величины звена $p\lambda_k = \frac{d\lambda_k}{dt}$. Звено гибкой связи не воспринимает значение переменной, а только скорость изменения этого значения.



Фиг. 165. Схема замкнутой системы с гибкой обратной связью.

Пусть воздействие этой связи осуществляется по закону, выраженному дифференциальным уравнением

$$d_c(p)\lambda_c = u_k p\lambda_k. \quad (\text{VIII-42})$$

Здесь на вход звена C поступает величина λ_k , а выходной координатой является λ_c . Оператор $d_c(p)$ является выходным оператором звена C гибкой связи.

Величина u_k представляет коэффициент пропорциональности к производной $p\lambda_k$.

Уравнение звена k с учетом обратной связи напишется в виде:

$$d_k(p)\lambda_k = u_k (\lambda_{k-1} \mp \lambda_c). \quad (\text{VIII-43})$$

Исключая λ_c , придем к уравнению

$$d_k(p)\lambda_k = u_k \left[\lambda_{k-1} \mp \frac{u_k p \lambda_k}{d_c(p)} \right].$$

Введем оператор

$$\bar{d}_k(p) = d_k(p) d_c(p) \pm u_k u_c p.$$

Тогда

$$\bar{d}_k(p)\lambda_k = u_{kc}(p)\lambda_{k-1},$$

где

$$u_{kc}(p) = u_k d_c(p). \quad (\text{VIII-44})$$

Отсюда следует, что и в этом случае можно задачу свести к случаю одноконтурной системы без обратной связи, если заменить обратную связь вместе с шунтированным звеном вспомогательным звеном, у которого выходной оператор $\bar{d}_k(p)$ определяется по

указанной выше формуле, а вместо коэффициента усиления взять оператор $u_{\kappa c}(p) = u_{\kappa} d_c(p)$, где $d_c(p)$ — выходной оператор звена гибкой связи.

Система уравнений, описывающих движение системы регулирования по схеме фиг. 165, будет:

$$\left. \begin{aligned} d_1(p) \lambda_1 &= u_1 (\varphi - \lambda_n) \\ d_2(p) \lambda_2 &= u_2 \lambda_1 \\ &\dots \dots \dots \\ \bar{d}_{\kappa}(p) \lambda_{\kappa} &= u_{\kappa} d_c(p) \lambda_{\kappa-1} \\ &\dots \dots \dots \\ d_n(p) \lambda_n &= u_n \lambda_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-45})$$

Исключая все переменные, кроме λ_n , приходим к уравнению

$$\bar{D}(p) \lambda_n = U_n d_c(p) \varphi = U(p) \varphi. \quad (\text{VIII-46})$$

Здесь

$$\bar{D}(p) = d_1(p) d_2(p) \dots \bar{d}_{\kappa}(p) \dots d_n(p) + U(p)$$

$$U(n) = u_1 \cdot u_2 \dots u_n \text{ и } U(p) = U_n d_c(p)$$

В результате вышеизложенного можно заключить, что во всех случаях уравнение движения системы регулирования приводится к виду

$$\bar{D}(p) \lambda_n = U_n \varphi(t),$$

либо к виду

$$\bar{D}(p) \lambda_n = U(p) \varphi(t).$$

Здесь $\bar{D}(p)$ — операторный полином замкнутой системы;

U_n — коэффициент усиления системы;

$U(p)$ — оператор усиления.

Пользуясь приведенным выше способом преобразования системы с дополнительными внутренними связями в эквивалентную одноконтурную, мы можем легко произвести исключение неизвестных и получить одно дифференциальное уравнение с одним неизвестным.

В тех случаях, когда желают избежать операции преобразования системы в одноконтурную, следует для исключения неизвестных пользоваться правилом Крамера.

Известно, что согласно правилу Крамера, каждое из неизвестных системы уравнений первой степени выражается частным двух определителей. В знаменателе стоит определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных, а в числителе определитель, полученный из первого путем замены коэффициентов определяемого неизвестного соответствующими свободными членами.

Допустим, что нам задана замкнутая система из четырех звеньев, причем звено № 3 имеет гибкую обратную связь и воз-

мушающее воздействие приложено на входе первого звена. В этом случае система уравнений будет:

$$\begin{aligned}d_1(p) \lambda_1 + u_1 \lambda_4 &= u_1 \varphi; \\d_2(p) \lambda_2 - u_2 \lambda_1 &= 0; \\d_3(p) \lambda_3 + u_3 u_c p \lambda_3 - u_3 \lambda_2 &= 0; \\d_4(p) \lambda_4 - u_4 \lambda_3 &= 0.\end{aligned}$$

Для решения этой системы относительно λ_4 нужно по правилу Крамера вычислить два определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_1(p) & 0 & 0 & u_1 \\ -u_2 & d_2(p) & 0 & 0 \\ 0 & -u_3 & d_3(p) + & 0 \\ 0 & 0 & +u_3 u_c p - & d_4(p) \\ & & -u_4 & \end{vmatrix} = d_1(p) d_2(p) [d_3(p) + u_3 u_c p] d_4(p) + U_4 = \bar{D}(p)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -d_1(p) & 0 & 0 & u_1 \varphi \\ -u_2 & d_2(p) & 0 & 0 \\ 0 & -u_3 & d_3(p) + & 0 \\ & & +u_3 u_c p & \\ 0 & 0 & -u_4 & 0 \end{vmatrix} = u_1 u_2 u_3 u_4 \varphi = U_4 \varphi.$$

Неизвестное λ_4 определяется по формуле $\lambda_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{U_4 \varphi}{\bar{D}(p)}$.

Отсюда

$$D(p) \lambda_4 = U_4 \varphi$$

При решении практических конкретных задач в большинстве случаев целесообразно пользоваться последним методом, прибегая к помощи определителей. При исследовании вопросов общего теоретического порядка более полезным может оказаться первый метод, позволяющий привести всякую структурную схему системы регулирования с обратными связями к одноконтурной схеме со звеньями без обратных связей.

г) Интегрирование уравнения $D(p) \lambda = U(p) \varphi(t)$ методом Лапласа

Дифференциальное уравнение $D(p) \lambda = U(p) \varphi(t)$, где $D(p)$ и $U(p)$ — операторные полиномы, представляет линейное неоднородное дифференциальное уравнение с произвольной заданной функцией времени в правой части. Как известно, интегрирование такого уравнения сводится к нахождению общего интеграла для однородного

уравнения $D(p)\lambda = 0$ и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

Полученные при интегрировании уравнения произвольные постоянные, как указано в начале главы, должны быть определены из начальных условий движения системы. Принимают, что состояние системы до приложения возмущающих воздействий нам известно. Параметрами, характеризующими это начальное состояние, являются обычно отклонение регулируемой величины от заданного значения и производные этой величины (скорость, ускорение и другие производные высших порядков). Число параметров, определяющих начальное состояние, равно порядку интегрируемого дифференциального уравнения.

Если до момента приложения возмущающего воздействия система регулирования находится в состоянии покоя, то все параметры, характеризующие начальное состояние системы в момент $t = 0$, равны нулю. Мы имеем так называемые нулевые начальные условия. Начальные условия будут ненулевыми, если система регулирования до момента приложения возмущающего воздействия ($t = -0$) находилась в движении. В начале главы указывалось, что необходимо различать начальные условия в момент ($t = -0$) до приложения и в момент ($t = +0$) после приложения возмущающих воздействий. Нулевые начальные условия до приложения возмущающего воздействия могут стать ненулевыми после приложения этого воздействия.

Определение постоянных интегрирования представляет во многих случаях громоздкую задачу, особенно при высоком порядке дифференциального уравнения. Трудности встречаются также при интегрировании уравнений обычным способом для некоторых видов возмущающих функций. Преобразование Лапласа значительно облегчает задачу интегрирования дифференциальных уравнений систем регулирования. Применение преобразования Лапласа позволяет полностью устранить все трудности, связанные с определением постоянных интегрирования и построением переходных процессов при различных видах возмущающих воздействий.

Поэтому преобразование Лапласа нашло широкое применение при интегрировании дифференциальных уравнений динамики систем регулирования.

В дальнейшем изложении мы будем часто прибегать к преобразованию Лапласа. В конце книги дано приложение I, где изложена сущность и некоторые основные свойства преобразования Лапласа.

Читателям, незнакомым с этим преобразованием, рекомендуется предварительно с ним ознакомиться, прежде чем приступить к чтению изложенного ниже материала.

Рассмотрим общий ход решения уравнения $D(p)\lambda(t) = U(p)\varphi(t)$ с помощью преобразования Лапласа.

Не нарушая общности выводов для сокращения письма, положим

$$D(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$$

мушающее воздействие приложено на входе первого звена. В этом случае система уравнений будет:

$$\begin{aligned}d_1(p) \lambda_1 + u_1 \lambda_4 &= u_1 \varphi; \\d_2(p) \lambda_2 - u_2 \lambda_1 &= 0; \\d_3(p) \lambda_3 + u_3 u_c p \lambda_3 - u_3 \lambda_2 &= 0; \\d_4(p) \lambda_4 - u_4 \lambda_3 &= 0.\end{aligned}$$

Для решения этой системы относительно λ_4 нужно по правилу Крамера вычислить два определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} d_1(p) & 0 & 0 & u_1 \\ -u_2 & d_2(p) & 0 & 0 \\ 0 & -u_3 & d_3(p) + & 0 \\ 0 & 0 & + u_3 u_c p - d_4(p) & \end{vmatrix} = d_1(p) d_2(p) [d_3(p) +$$

$$+ u_3 u_c p] d_4(p) + U_4 = \bar{D}(p)$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} -d_1(p) & 0 & 0 & u_1 \varphi \\ -u_2 & d_2(p) & 0 & 0 \\ 0 & -u_3 & d_3(p) + & 0 \\ 0 & 0 & + u_3 u_c p - d_4(p) & 0 \end{vmatrix} = -u_1 u_2 u_3 u_4 \varphi = U_4 \varphi.$$

Неизвестное λ_4 определяется по формуле $\lambda_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{U_4 \varphi}{\bar{D}(p)}$.

Отсюда

$$\bar{D}(p) \lambda_4 = U_4 \varphi$$

При решении практических конкретных задач в большинстве случаев целесообразно пользоваться последним методом, прибегая к помощи определителей. При исследовании вопросов общего теоретического порядка более полезным может оказаться первый метод, позволяющий привести всякую структурную схему системы регулирования с обратными связями к одноконтурной схеме со звеньями без обратных связей.

г) Интегрирование уравнения $D(p) \lambda = U(p) \varphi(t)$ методом Лапласа

Дифференциальное уравнение $D(p) \lambda = U(p) \varphi(t)$, где $D(p)$ и $U(p)$ — операторные полиномы, представляет линейное неоднородное дифференциальное уравнение с произвольной заданной функцией времени в правой части. Как известно, интегрирование такого уравнения сводится к нахождению общего интеграла для однородного

уравнения $D(p)\lambda = 0$ и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

Полученные при интегрировании уравнения произвольные постоянные, как указано в начале главы, должны быть определены из начальных условий движения системы. Принимают, что состояние системы до приложения возмущающих воздействий нам известно. Параметрами, характеризующими это начальное состояние, являются обычно отклонение регулируемой величины от заданного значения и производные этой величины (скорость, ускорение и другие производные высших порядков). Число параметров, определяющих начальное состояние, равно порядку интегрируемого дифференциального уравнения.

Если до момента приложения возмущающего воздействия система регулирования находится в состоянии покоя, то все параметры, характеризующие начальное состояние системы в момент $t = 0$, равны нулю. Мы имеем так называемые нулевые начальные условия. Начальные условия будут ненулевыми, если система регулирования до момента приложения возмущающего воздействия ($t = -0$) находилась в движении. В начале главы указывалось, что необходимо различать начальные условия в момент ($t = -0$) до приложения и в момент ($t = +0$) после приложения возмущающих воздействий. Нулевые начальные условия до приложения возмущающего воздействия могут стать ненулевыми после приложения этого воздействия.

Определение постоянных интегрирования представляет во многих случаях громоздкую задачу, особенно при высоком порядке дифференциального уравнения. Трудности встречаются также при интегрировании уравнений обычным способом для некоторых видов возмущающих функций. Преобразование Лапласа значительно облегчает задачу интегрирования дифференциальных уравнений систем регулирования. Применение преобразования Лапласа позволяет полностью устранить все трудности, связанные с определением постоянных интегрирования и построением переходных процессов при различных видах возмущающих воздействий.

Поэтому преобразование Лапласа нашло широкое применение при интегрировании дифференциальных уравнений динамики систем регулирования.

В дальнейшем изложении мы будем часто прибегать к преобразованию Лапласа. В конце книги дано приложение I, где изложена сущность и некоторые основные свойства преобразования Лапласа.

Читателям, незнакомым с этим преобразованием, рекомендуется предварительно с ним ознакомиться, прежде чем приступить к чтению изложенного ниже материала.

Рассмотрим общий ход решения уравнения $D(p)\lambda(t) = U(p)\varphi(t)$ с помощью преобразования Лапласа.

Не нарушая общности выводов для сокращения письма, положим

$$D(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3$$

II

$$U(p) = b_0 p + b_1.$$

Допустим сперва, что до момента возмущения наша система находилась в состоянии покоя. Это отвечает нулевым начальным условиями

$$\lambda(0) = \lambda'(0) = \lambda''(0) = 0.$$

Применим преобразование Лапласа к нашему уравнению. $D(p)$ и $U(p)$ суть дифференциальные операторы. Пользуясь формулами дифференцирования, преобразуем наше уравнение по Лапласу:

$$L[a_0 p^3 \lambda(t)] = a_0 z^3 \bar{\lambda}(z) - a_0 z^2 \lambda(0) - a_0 z \lambda'(0) - a_0 \lambda''(0) = a_0 z^3 \bar{\lambda}(z),$$

так как $\lambda(0) = \lambda'(0) = 0$ по условию.

Аналогично найдем:

$$L[a_1 p^2 \lambda(t)] = a_1 z^2 \bar{\lambda}(z)$$

$$L[a_2 p \lambda(t)] = a_2 z \bar{\lambda}(z)$$

$$L[a_3 \lambda(t)] = a_3 \bar{\lambda}(z).$$

Таким образом L -преобразование левой части уравнения дает

$$L[D(p)\lambda(t)] = (a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3) \bar{\lambda}(z) = D(z) \bar{\lambda}(z). \quad (\text{VIII-47})$$

Преобразование правой части уравнения производится аналогично, но с учетом начальных значений функции $\varphi(t)$. Эта функция описывает возмущающее воздействие и характеризуется тем, что она равна нулю при $t < 0$, так как возмущающие воздействия до момента $t = 0$ отсутствуют. В дальнейшем будем принимать, что начальные условия функции $\varphi(t)$ до момента возмущения равны нулю. Тогда аналогично левой части уравнения найдем:

$$L[U(p)\varphi(t)] = U(z) \bar{\varphi}(z). \quad (\text{VIII-48})$$

Таким образом, после L -преобразования наше уравнение примет вид

$$D(z) \bar{\lambda}(z) = U(z) \bar{\varphi}(z).$$

Отсюда изображение искомой функции

$$\bar{\lambda}(z) = \frac{U(z) \bar{\varphi}(z)}{D(z)}. \quad (\text{VIII-49})$$

Дальнейшая задача заключается в обратном преобразовании, т. е. определении функции оригинала $\lambda(t)$ по известному изображению $\bar{\lambda}(z)$. Обратное преобразование обычно производится с помощью

таблицы преобразований, причем функция $\bar{\lambda}(z)$ разбивается на более простые составляющие, для которых выражения оригинала известны.

Если к моменту возмущения система имела ненулевые начальные условия, то, производя преобразование исходного уравнения, мы должны учесть эти начальные условия.

В этом случае преобразование левой части приведет к уравнению

$$L[D(p)\lambda(t)] = (a_0 z^2 + a_1 z + a_2) \bar{\lambda}(z) - \\ - \lambda(0)(a_0 z^2 + a_1 z + a_2) - \lambda'(0)(a_0 z + a_1) - \lambda''(0)a_0.$$

Изображение правой части остается неизменным.

Наше уравнение примет вид

$$D(z)\bar{\lambda}(z) = U(z)\bar{\varphi}(z) + \lambda(0)D_2 + \lambda'(0)D_1 + \\ + \lambda''(0)D_0 = U(z)\bar{\varphi}(z) + Q_n(z). \quad (\text{VIII-50})$$

Здесь

$$Q_n(z) = \lambda(0)D_2 + \lambda'(0)D_1 + \lambda''(0)D_0.$$

Отсюда

$$\bar{\lambda}(z) = \frac{U(z)}{D(z)}\bar{\varphi}(z) + \frac{Q_n(z)}{D(z)} = \bar{\lambda}_0(z) + \bar{\lambda}_{cn}(z). \quad (\text{VIII-51})$$

Из вышеизложенного следует вывод, что движение всякой линейной системы регулирования может быть разложено на два независимых движения:

1 — движение системы при заданном внешнем возмущающем воздействии $\varphi(t)$ и нулевых начальных условиях

$$\bar{\lambda}_0(z) = \frac{U(z)}{D(z)}\bar{\varphi}(z); \quad (\text{VIII-52})$$

2 — движение системы при отсутствии возмущающего воздействия, но при наличии заданных начальных условий

$$\bar{\lambda}_{cn}(z) = \frac{Q_n(z)}{D(z)}. \quad (\text{VIII-53})$$

Приводя полученный вывод в соответствии с формулой (VIII-15) в начале главы следует отметить, что составляющая $\bar{\lambda}_0(z)$ есть изображение по Лапласу установившегося движения λ_{oc} и составляющей переходного процесса λ_{cn} , зависящей от возмущающих воздействий. В свою очередь $\bar{\lambda}_{cn}(z)$ изображает вторую составляющую переходного процесса λ_{cn} , зависящую от начальных условий.

При анализе систем автоматического регулирования обычно имеют дело с уравнениями отдельных звеньев, которые составляют систему уравнений, описывающих переходный процесс. Начальные

условия в этом случае устанавливаются для каждого звена. Но и здесь мы придем к тому же результату.

Полученный выше вывод позволяет анализ движения системы также разделить на два этапа:

1. Исследования поведения системы при заданном возмущающем воздействии и нулевых начальных условиях и

2. Исследование поведения системы при отсутствии возмущающих воздействий и наличии заданных начальных условий.

Наиболее характерным возмущающим воздействием принято считать включение или сброс нагрузки. В этом случае $\varphi(t) = 1(t)$. Рассмотрим переходный процесс при этом возмущающем воздействии и нулевых начальных условиях. Предварительно заметим, что L -изображение функции единичного толчка и ее производных имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} L[1(t)] &= \frac{1}{z} \\ L[1'(t)] &= 1 \\ L[1''(t)] &= z \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-54})$$

и вообще $L[1^{(m)}(t)] = z^{m-1}$.

Положим $D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n$

и $U(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m$, причем $m < n$.

Произведя L -преобразование уравнения

$$D(p) \lambda(t) = U(p) 1(t)$$

придем к уравнению вида

$$(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n) \bar{\lambda}(z) = b_0 z^{m-1} + b_1 z^{m-2} + \dots + b_{m-1} + \frac{b_m}{z},$$

или

$$D(z) \bar{\lambda}(z) = \frac{U(z)}{z};$$

отсюда

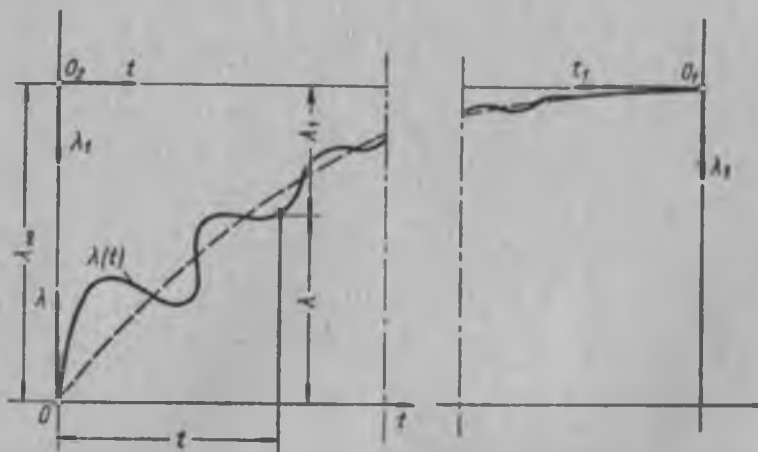
$$\bar{\lambda}(z) = \frac{U(z)}{zD(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n)}. \quad (\text{VIII-55})$$

Таким образом, во всякой линейной системе регулирования при внешнем возмущающем воздействии типа единичного толчка функция, описывающая движение системы, будет иметь L -изображение в виде дробной рациональной функции. Такая дробь, будучи разложена на простейшие дроби, легко поддается обратному преобразованию.

При исследовании поведения системы под действием возмущающих сил за начало координат принимается положение равновесия

системы, имеющее место до момента приложения возмущающего воздействия. При этом все начальные условия будут нулевыми. Новое положение равновесия для устойчивой системы наступит теоретически через бесконечно большое время $t = \infty$, так как функция отклонения $\lambda(t)$ будет асимптотически приближаться к своему новому значению λ_∞ , как показано на фиг. 166.

Практически новое положение равновесия наступает как только отклонение регулятора войдет в зону нечувствительности.



Фиг. 166. График отсчета изменений регулируемой величины в переходном процессе.

Для определения λ_∞ нет надобности определять конкретное выражение функции $\lambda(t)$, достаточно воспользоваться известным свойством L -преобразования, по которому

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 0} z \bar{f}(z).$$

Для случая возмущающего воздействия в форме единичного толчка произведение $z \bar{\lambda}(z)$ будет:

$$z \bar{\lambda}(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (\text{VIII-56})$$

Следует отметить, что это выражение имеет общий характер, оно справедливо также для единичного толчка и при ненулевых начальных условиях.

Изменяются только числовые значения коэффициентов $b_0, b_1, \dots, b_m$. Отсюда

$$\lambda_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \frac{b_m}{a_n}. \quad (\text{VIII-57})$$

Так как единичный толчок обычно представляет включение или сброс полной нагрузки, то величина λ_∞ может рассматриваться как остаточная неравномерность системы регулирования или статическая ошибка.

При изучении свободных колебаний системы, составляющих переходный процесс, исходят из уравнения малых отклонений от положения равновесия. При этом, как правило, за начало координат принимают новое положение равновесия O_1 . Для установления соответствия между изменениями λ и λ_1 регулируемой величины при отсчетах от старого O и нового O_1 положений равновесия принято отсчет времени в обоих случаях производить от момента приложения возмущающих воздействий. При этом начало O_1 второй системы координат переходит в точку O_2 (фиг. 166). Тогда соотношения изменений регулируемой величины и их производных при отсчете в старой и новой системах координат будут:

$$\lambda(t) + \lambda_1(t) = \lambda_\infty$$

$$\lambda^{(k)}(t) = \lambda_1^{(k)}(t). \quad (\text{VIII-58})$$

Для иллюстрации всего изложенного ниже приводится пример решения уравнения и построение графика переходного процесса.

Пример. Построить график переходного процесса системы регулирования при сбросе полной нагрузки и нулевых начальных условиях, если движение системы описывается следующими уравнениями звеньев:

1. Уравнение двигателя $T_a \lambda' + \theta \lambda = -\mu + 1(t)$.
2. Уравнение регулятора $T_r \eta'' + T_\kappa \eta' + \delta \eta = \lambda$.
3. Уравнение сервомотора с обратной связью $T_s \mu' + \mu = \eta$.

В этих уравнениях обозначено:

- λ — отклонение угловой скорости двигателя;
- η — смещение муфты регулятора;
- μ — перемещение поршня сервомотора (также изменение движущего момента машины);
- θ — коэффициент самовыравнивания нагрузки;
- T_a — постоянная времени двигателя;
- T_s — постоянная времени сервомотора;
- T_r и T_κ — постоянные времени регулятора;
- δ — степень неравномерности регулятора.

Числовые значения:

$$T_r^2 \approx 0; \quad T_\kappa = 0.025 \text{ сек.}; \quad T_s = 0.331 \text{ сек.};$$

$$T_a = 12 \text{ сек.}; \quad \delta = 0.10; \quad \theta = 0.$$

Начальные условия при $t = 0$:

$$\lambda(0) = \eta(0) = \eta'(0) = \mu(0) = 0.$$

Решение. Производим L -преобразование уравнений

$$(T_r^2 z^2 + T_\kappa z + \delta) \bar{\eta} = \bar{\lambda}$$

$$(T_s z + 1) \bar{\mu} = \bar{\eta}$$

$$T_a z \bar{\lambda} = -\bar{\mu} + \frac{1}{z}.$$

Решая эту систему уравнений относительно $\bar{\lambda}$, найдем

$$D(z) \bar{\lambda} = \frac{Q(z)}{z},$$

где

$$D(z) = (T_r^2 z^2 + T_\kappa z + \delta) (T_s z + 1) T_a z + 1$$

$$Q(z) = (T_r^2 z^2 + T_\kappa z + \delta) (T_s z + 1).$$

Подставляем значения постоянных параметров T_r , T_κ и др.

$$D(z) = 0,1(z^2 + 7z^2 + 12z + 10)$$

$$Q(z) = 0,0083(z^2 + 7z + 12)$$

$$\bar{\lambda}(z) = \frac{Q(z)}{zD(z)} = 0,083 \frac{z^2 + 7z + 12}{z(z^2 + 7z^2 + 12z + 10)} = 0,083 \frac{q(z)}{z d(z)}.$$

Для обратного преобразования функции $\bar{\lambda}$ необходимо дробь $\frac{q(z)}{z d(z)}$ представить в виде суммы простейших дробей.

Покажем ниже общий прием такого разложения.

Положим, что

$$\frac{q(z)}{z d(z)} = \frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{z - z_2} + \frac{A_3}{z - z_3},$$

где z_1 , z_2 , z_3 — однократные корни многочлена

$$d(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3).$$

Умножая обе части нашего уравнения на z и полагая $z = 0$, найдем

$$A_0 = \frac{q(0)}{d(0)}. \quad (\text{VIII-59})$$

Для определения A_1 умножим обе части на $z - z_1$ и положим $z = z_1$

$$\frac{q(z_1)}{z_1} \left[\frac{z - z_1}{d(z)} \right]_{z=z_1} = A_1.$$

Заметим, что

$$\lim_{z \rightarrow z_1} \left[\frac{z - z_1}{d(z)} \right] = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{1}{d'(z)} = \frac{1}{d'(z_1)}.$$

Отсюда

$$A_1 = \frac{q(z_1)}{z_1 d'(z_1)} \quad (\text{VIII-60})$$

Аналогично найдем:

$$A_2 = \frac{q(z_2)}{z_2 d'(z_2)}; \quad A_3 = \frac{q(z_3)}{z_3 d'(z_3)}.$$

Вычисляем корни уравнения $d(z) = 0$:

$$z^3 + 7z^2 + 12z + 10 = 0.$$

$$z_1 = -5; \quad z_2 = -1 + i; \quad z_3 = -1 - i.$$

Подставляя эти значения в формулы A_0, A_1, A_2, A_3 , найдем числовые значения

$$A_0 = 1,2$$

$$A_1 = -0,0235$$

$$A_2 = -0,147(4 - i)$$

$$A_3 = -0,147(4 + i)$$

$$\bar{\lambda}(z) = 0,083 \left[\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z - z_1} + \frac{A_2}{z - z_2} + \frac{A_3}{z - z_3} \right].$$

Оригинал по таблице L -изображений

$$\lambda(t) = 0,083 [A_0 + A_1 e^{z_1 t} + A_2 e^{z_2 t} + A_3 e^{z_3 t}] =$$

$$= 0,083 [1,2 - 0,0235 e^{-5t} - 0,147(4 - i) e^{(-1+i)t} - 0,147(4 + i) e^{(-1-i)t}].$$

Последние два члена, поскольку они представляют сумму двух сопряженных комплексных величин, могут быть преобразованы в вещественное выражение

$$-0,147 [(4 - i) e^{(-1+i)t} + (4 + i) e^{(-1-i)t}] =$$

$$= -0,147 e^{-t} [(4 - i) e^{it} + (4 + i) e^{-it}] =$$

$$= -0,147 e^{-t} [8 \cos t + 2 \sin t] = -1,21 e^{-t} \sin(t + \alpha); \quad \operatorname{tg} \alpha = 4; \quad \alpha = 1,326$$

$$\lambda(t) = 0,083 [1,2 - 0,0235 e^{-5t} - 1,21 e^{-t} \sin(t + 1,326)].$$

При $t = 0$, $\lambda(t) = 0$.

Установившееся значение $\lambda_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lim_{z \rightarrow 0} z \bar{\lambda}(z) = 0,083 \cdot 1,2 = 0,1$.

Это есть статическая погрешность.

Переходный процесс

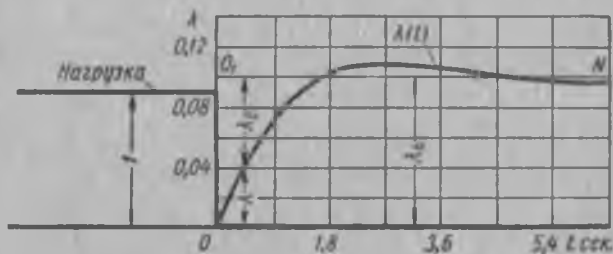
$$\lambda_c = \lambda(t) - \lambda_\infty = -0,083 [0,0235 e^{-5t} + 1,21 e^{-t} \sin(t + 1,326)].$$

Графическое изображение переходного процесса дано на фиг. 167.

Величина λ_c отсчитывается от линии O_1N .

Здесь мы имеем случай затухающего колебательного процесса.

В приведенном примере вместо начальных условий системы заданы начальные условия отдельных звеньев, входящих в систему. Такой способ задания начальных условий отвечает реальному поведению системы. Начальные значения регулируемой величины и ее производных



Фиг. 167. График переходного процесса.

водных в момент равный 0, определяются в этом случае по функции $\lambda(t)$, после того как решена система дифференциальных уравнений и вычислена функция $\lambda(t)$.

3. МЕТОД ЧАСТОТНОЙ ФУНКЦИИ

Метод частотной функции возник на базе теоретических исследований периодических функций в области электротехники и связи и представления их рядами Фурье. Будучи перенесен в теорию регулирования, он оказался весьма плодотворным.

Сущность этого метода состоит в следующем. Если на входе линейной разомкнутой системы регулирования приложить синусоидальное возмущающее воздействие, то на выходе системы при установившемся режиме мы получим функцию также синусоидальной формы той же частоты, но другой амплитуды и фазы, чем гармоника возмущения.

Представляя воздействие возмущения либо в виде дискретного ряда Фурье, либо в форме интеграла Фурье и применяя принцип суперпозиции, мы можем исследовать заданную систему и определить ее реакцию на разные виды возмущения, пользуясь отмеченным свойством синусоидального возмущающего воздействия.

Этот метод наглядно выявляет характер влияния отдельных параметров системы на переходный процесс и значительно упрощает расчеты. Особенно упрощаются расчеты при периодических возмущающих действиях.

Поскольку частотная функция системы тесно связана с передаточной функцией системы мы ознакомимся сперва с последней.

а) Передаточная функция системы

Как было показано выше, уравнение движения большинства разомкнутых систем регулирования в пределах малых отклонений от произвольного положения равновесия выражается в общем случае линейным дифференциальным уравнением вида

$$D(p)\lambda = U(p)\varphi(t).$$

Здесь $D(p)$ и $U(p)$ — дифференциальные операторные полиномы выхода и входа системы.

Произведем преобразование по Лапласу этого уравнения при нулевых начальных условиях. Уравнение примет вид

$$D(z)\bar{\lambda} = U(z)\bar{\varphi}.$$

Отсюда

$$\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\varphi}} = \frac{U(z)}{D(z)} = K(z) \quad \text{или} \quad \bar{\lambda} = K(z)\bar{\varphi}. \quad (\text{VIII-61})$$

Отношение $K(z)$ изображений по Лапласу выходной и входной величин системы при нулевых начальных условиях называется передаточной функцией этой системы (здесь рассматривается случай разомкнутой системы).

Обобщая определение передаточной функции как отношение изображений выхода и входа, мы будем в дальнейшем различать:

- а) передаточную функцию звена;
- б) передаточную функцию разомкнутой системы;
- в) передаточную функцию замкнутой системы.

В последнем случае под передаточной функцией понимается отношение изображения изменения регулируемого параметра к изображению возмущающего воздействия, вызвавшего это изменение.

Знание передаточной функции позволяет по изображению возмущающего воздействия легко определить изображение функции регулируемого параметра при движении системы, а переходя к оригиналу, и действительное выражение этого параметра.

В ряде трудов по автоматическому регулированию под передаточной функцией понимается отношение операторных полиномов входа и выхода системы, т. е. частное от деления оперативного полинома правой части уравнения на операторный полином левой.

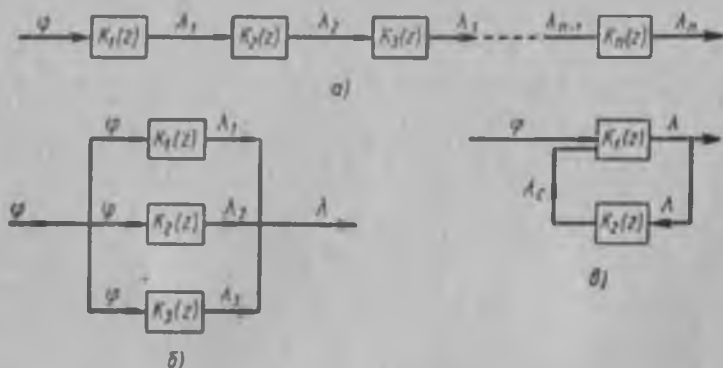
Такое определение передаточной функции представляет по существу замену Лапласовской переменной z в выражении $K(z)$ на оператор p .

б) Зависимость между передаточной функцией разомкнутой системы и передаточными функциями ее звеньев

Обычно система состоит из последовательного соединения звеньев, связанных таким образом, что выход каждого звена подается на вход последующего. Исключение представляет последнее звено, выход

которого является выходом системы. Такое соединение звеньев носит название последовательного соединения. При этом предполагается, что все звенья имеют детектирующий характер, т. е. каждое звено может воздействовать только на последующее, но не оказывает никакого воздействия на предыдущее. Обратные связи выделяются особо.

В некоторых схемах регулирования встречаются случаи параллельного соединения отдельных звеньев или комбинированного соединения (последовательно-параллельного).



Фиг. 168. Схемы для определения передаточной функции при последовательном и параллельном соединении звеньев.

Последовательное соединение. Схемы для определения передаточной функции при последовательном и параллельном соединении звеньев показаны на фиг. 168.

Допустим, что система состоит из n -последовательно соединенных звеньев (фиг. 168, а) и передаточные функции каждого звена соответственно равны:

$$K_1(z), K_2(z) \dots, K_n(z).$$

Пусть на вход первого звена подается возмущающее воздействие φ .

Уравнения звеньев будут:

первое звено

$$d_1(p) \lambda_1 = u_1(p) \varphi; \quad K_1(z) = \frac{u_1(z)}{d_1(z)};$$

второе звено

$$d_2(p) \lambda_2 = u_2(p) \lambda_1; \quad K_2(z) = \frac{u_2(z)}{d_2(z)}$$

.....

n -звено

$$d_n(p) \lambda_n = u_n(p) \lambda_{n-1}; \quad K_n(z) = \frac{u_n(z)}{d_n(z)}.$$

Исключая все переменные кроме λ_n и φ , придем к уравнению.

$$d_1(p) \cdot d_2(p) \dots d_n(p) \lambda_n = u_1(p) u_2(p) \dots u_n(p) \varphi$$

или

$$D(p) \lambda_n = U(p) \varphi.$$

Передаточная функция $K(z)$ системы:

$$\begin{aligned} K(z) &= \frac{U(z)}{D(z)} = \frac{u_1(z)}{d_1(z)} \cdot \frac{u_2(z)}{d_2(z)} \cdot \dots \cdot \frac{u_n(z)}{d_n(z)} = \\ &= K_1(z) K_2(z) \dots K_n(z) \dots \end{aligned} \quad (\text{VIII-62})$$

Таким образом, при последовательном включении звеньев передаточная функция разомкнутой системы равна произведению передаточных функций отдельных звеньев.

Параллельное соединение. На фиг. 168, б показана схема параллельного соединения трех звеньев. Возмущающее воздействие φ поступает на вход всех трех звеньев. Выходные значения складываются

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3.$$

Допустим, что уравнения звеньев будут соответственно:

$$d_1(p) \lambda_1 = u_1(p) \varphi; \quad K_1(z) = \frac{u_1(z)}{d_1(z)}$$

$$d_2(p) \lambda_2 = u_2(p) \varphi; \quad K_2(z) = \frac{u_2(z)}{d_2(z)}$$

$$d_3(p) \lambda_3 = u_3(p) \varphi; \quad K_3(z) = \frac{u_3(z)}{d_3(z)}.$$

Если рассматривать комплекс трех звеньев как одно звено с величиной φ на входе и λ на выходе можем для него написать уравнение:

$$D(p) \lambda = U(p) \varphi; \quad K(z) = \frac{U(z)}{D(z)}.$$

Производя преобразование Лапласа всех уравнений, получим

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{u_1(z)}{d_1(z)} \bar{\varphi}$$

$$\bar{\lambda}_2 = \frac{u_2(z)}{d_2(z)} \bar{\varphi}$$

$$\bar{\lambda}_3 = \frac{u_3(z)}{d_3(z)} \bar{\varphi}$$

$$\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 = \bar{\lambda} = \left[\frac{u_1(z)}{d_1(z)} + \frac{u_2(z)}{d_2(z)} + \frac{u_3(z)}{d_3(z)} \right] \bar{\varphi}.$$

Сравнивая с уравнением системы $\bar{\lambda} = \frac{U(z)}{D(z)} \bar{\varphi}$, определим зависимость между передаточными функциями:

$$K(z) = K_1(z) + K_2(z) + K_3(z). \quad (\text{VIII-63})$$

Таким образом, передаточная функция комплексного звена, состоящего из нескольких звеньев, включенных параллельно, равна сумме передаточных функций отдельных звеньев.

Звено с обратной связью. Звено с обратной связью изображено на фиг. 168, в. При этом рассматривается общий случай, когда воздействие λ_c обратной связи представляет функцию выходной величины звена λ . Преобразование в λ_c происходит во вспомогательном звене, которое мы называем звеном обратной связи.

Допустим, что передаточная функция основного звена равна $K_1(z)$ и звена обратной связи $K_2(z)$. Обратная связь в системах регулирования обычно отрицательная, т. е. действует против внешнего возмущающего воздействия. Поэтому можем написать следующие уравнения:

$$d_1(p) \lambda = u_1(p) [\varphi - \lambda_c] = u_1(p) \varphi - u_1(p) \lambda_c$$

$$d_2(p) \lambda_c = u_2(p) \lambda.$$

Исключая λ_c , придем к уравнению:

$$[d_1(p) d_2(p) + u_1(p) u_2(p)] \lambda = u_1(p) d_2(p) \varphi.$$

$$D(p) \lambda = U(p) \varphi.$$

Учитывая, что:

$$K_1(z) = \frac{u_1(z)}{d_1(z)}; \quad K_2(z) = \frac{u_2(z)}{d_2(z)}; \quad K(z) = \frac{U(z)}{D(z)},$$

получим

$$K(z) = \frac{K_1(z)}{1 + K_1(z) K_2(z)}. \quad (\text{VIII-64})$$

Отсюда следует, что передаточная функция комплексного звена, состоящего из основного звена и звена обратной связи, охватывающей основное звено, определяется по формуле

$$K = \frac{K_1}{1 + K_1 K_2},$$

где K_1 — передаточная функция основного звена и K_2 — звена обратной связи.

в) Передаточная функция замкнутой системы

Математическое выражение процесса регулирования в замкнутой системе может быть определено с помощью передаточной функции следующим образом.

Допустим, что рассматриваемая система в разомкнутом состоянии имеет передаточную функцию $K(z)$.

Воспользуемся формулой (VIII-34), представляющей уравнение замкнутой системы через дифференциальный оператор $D(p)$ и коэффициент усиления U_n

$$[D(p) + U_n] \lambda = U_n \varphi.$$

Согласно определению передаточной функции имеем: передаточную функцию замкнутой системы

$$K_s(z) = \frac{U_n}{D(z) + U_n}$$

и передаточную функцию разомкнутой системы

$$K(z) = \frac{U_n}{D(z)}.$$

Отсюда

$$K_s(z) = \frac{U_n}{D(z)} : \left[1 + \frac{U_n}{D(z)} \right] = \frac{K(z)}{1 + K(z)}. \quad (\text{VIII-65})$$

Следует отметить, что выражение передаточной функции замкнутой системы зависит от значения звена в системе, к которому приложено возмущающее воздействие. Формула (VIII-34) выведена в предположении, что возмущающее воздействие приложено к чувствительному элементу. Это обычно имеет место при перенастройке регулятора.

Если возмущение возникает в объекте регулирования (изменение нагрузки), то формула $K_s(z)$ имеет другое выражение. В этом случае целесообразно выделить из всей системы объект регулирования, а остальную часть системы рассматривать как регулятор.

Пусть передаточная функция объекта регулирования будет $K_0(z)$, а регулятора $K_p(z)$ (фиг. 169). Тогда на основании (VIII-62) можем написать:

$$K(z) = K_0(z) K_p(z).$$

С другой стороны в соответствии со схемой фиг. 169 имеем:

$$\bar{\lambda}_1 = [\bar{\varphi} - \bar{\lambda}_2] K_0(z)$$

$$\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}_1 K_p(z).$$

Исключая $\bar{\lambda}_2$, найдем

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{K_0(z) \bar{\varphi}}{1 + K_0(z) K_p(z)} = \frac{K_0(z)}{1 + K(z)} \bar{\varphi}.$$

Отношение $\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\varphi}}$ определяет передаточную функцию замкнутой системы при возмущении в объекте регулирования

$$K_s(z) = \frac{K_0(z)}{1 + K(z)}. \quad (\text{VIII-66})$$

г) Частотная функция системы

Вернемся к уравнению $D(p) \lambda = U(p) \varphi(t)$.

Допустим сперва, что возмущающая функция $\varphi(t)$ представляет гармоническую синусоидальную функцию $A_0 \sin \omega t$.

Общее решение нашего дифференциального уравнения, как известно, составляется из общего решения λ_c однородного уравнения

$$D(p) \lambda = 0$$

и частного решения λ_s исходного уравнения

$$D(p) \lambda = U(p) \varphi(t)$$

$$\lambda = \lambda_c + \lambda_s.$$

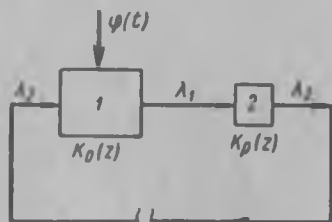
Поскольку решение λ_c было рассмотрено выше, остановимся теперь на отыскании частного решения неоднородного уравнения

$$D(p) \lambda = U(p) A_0 \sin \omega t. \quad (\text{VIII-67})$$

В этом случае целесообразно применить символический метод, используемый в технике переменных токов. Он состоит в замене тригонометрических функций показательными с чисто мнимым аргументом. Эта замена основана на том положении, что равенство двух функций комплексного переменного возможно только в том случае, если отдельно равны между собой их вещественные и мнимые части.

Соответственно этому можем записать, что

$$\sin \omega t = \operatorname{Im} e^{i\omega t} = \operatorname{Im} (\cos \omega t + i \sin \omega t). \quad (\text{VIII-68})$$



Фиг. 169. Схема для определения передаточной функции замкнутой системы.

Символ Im означает коэффициент при мнимом числе i . Соответственно символ Re означает вещественную часть комплекса:

$$Re e^{i\omega t} = \cos \omega t.$$

Выражение $Im e^{i\omega t}$ обычно принимают за символическое изображение $\sin \omega t$. Исходя из этого, сперва решают уравнение системы в символическом виде, а потом переходят к вещественной форме.

Найдем частное решение неоднородного уравнения:

$$D(p)\lambda = U(p) A_0 e^{i\omega t}.$$

Будем искать это решение в виде

$$\lambda = A e^{i(\omega t + \psi)},$$

где величины A и ψ подлежат определению.

Заметим, что

$$\begin{aligned} p\lambda &= \lambda' = Ai\omega e^{i(\omega t + \psi)} = i\omega\lambda \\ p^2\lambda &= \lambda'' = (i\omega)^2\lambda \text{ и т. д. } = (-\omega^2)\lambda e^{i(\omega t + \psi)} \end{aligned}$$

Подставляя результаты дифференцирования для определения A и ψ , приходим к уравнению

$$D(i\omega) A e^{i(\omega t + \psi)} = U(i\omega) A_0 e^{i\omega t}$$

или, разделив обе части на $e^{i\omega t}$

$$A e^{i\psi} = A_0 \frac{U(i\omega)}{D(i\omega)},$$

Комплексная функция $\frac{U(i\omega)}{D(i\omega)}$ называется частотной функцией системы. Условимся обозначать ее $K(i\omega)$.

Как нетрудно определить из предыдущих уравнений, частотная функция есть отношение при установившемся режиме выходной и входной величин системы, выраженных в символической форме, если входная величина совершает синусоидальные колебания. Частотная функция есть комплексная функция частоты « ω » входной синусоиды, поэтому ее иногда называют комплексным коэффициентом усиления системы.

Для определения A и ψ воспользуемся уравнением

$$A e^{i\psi} = A_0 K(i\omega)$$

и отделим в нем вещественные и мнимые части

$$A \cos \psi = A_0 Re K(i\omega)$$

$$A \sin \psi = A_0 Im K(i\omega).$$

отсюда

$$A = A_0 \sqrt{(ReK)^2 + (ImK)^2} = A_0 |K|$$

и

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{ImK}{ReK}; \quad \sin \psi = \frac{ImK}{|K|};$$

$$\cos \psi = \frac{ReK}{|K|}. \quad (\text{VIII-69})$$

Здесь $|K|$ — модуль частотной функции.

Найдем теперь интересующее нас решение λ_0 . Из полученного выше уравнения имеем:

$$\lambda = K(i\omega) A_0 e^{i\omega t}.$$

Если λ является частным решением уравнения $D(p)\lambda = U(p) A_0 e^{i\omega t}$, то λ_0 будет частным решением уравнения

$$D(p)\lambda_0 = U(p) A_0 \sin \omega t.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= Im\lambda = A_0 Im [K(i\omega) e^{i\omega t}] = A_0 (\cos \omega t ImK + \\ &+ \sin \omega t ReK) = A_0 |K| \sin(\omega t + \psi). \end{aligned} \quad (\text{VIII-70})$$

Общее решение уравнения

$$D(p)\lambda = U(p) A_0 \sin \omega t$$

будет

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_c + \lambda_0 = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots \\ &\dots C_n e^{p_n t} + A_0 |K| \sin(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (\text{VIII-71})$$

причем постоянные интегрирования определяются, как было указано в начале главы.

Анализируя полученное решение $\lambda = \lambda_c + \lambda_0$, приходим к следующим выводам.

1. Составляющая λ_c представляет переходную часть процесса. В устойчивых системах (все корни $p_1, p_2, \dots, p_n$ имеют вещественные части отрицательными) λ_c постепенно затухает и стремится к 0 при неограниченном возрастании времени $t \rightarrow \infty$.

2. Составляющая λ_0 представляет установившуюся выходную величину системы.

3. Установившаяся выходная величина λ_0 разомкнутой системы при синусоидальном возмущающем воздействии на входе представляет также синусоиду, но с другой амплитудой и сдвинутую по фазе относительно синусоиды возмущения.

Значение выходной амплитуды определяется как произведение входной амплитуды на модуль частотной функции

$$A = A_0 |K(i\omega)|. \quad (\text{VIII-72})$$

Сдвиг фаз ψ равен аргументу частотной функции

$$\psi = \arctg \frac{\text{Im} K(i\omega)}{\text{Re} K(i\omega)}. \quad (\text{VIII-73})$$

4. Частотная функция $K(i\omega)$ определяется по параметрам исходного дифференциального уравнения системы

$$D(p)\lambda = U(p)A_0 \sin \omega t.$$

Зная частотную функцию, можно сразу определить выходную синусоиду системы в установившемся режиме.

5. При заданной круговой частоте ω входной синусоиды частотная функция $K(i\omega)$ представляет комплексное число, модуль которого можно рассматривать как коэффициент усиления звена при круговой частоте ω , так как он равен отношению амплитуд синусоид на входе и выходе:

$$|K(i\omega)| = \frac{A}{A_0}. \quad (\text{VIII-74})$$

6. Отметим еще одно важное свойство частотной функции. Если подвергнуть общее уравнение разомкнутой системы $D(p)\lambda = U(p)\varphi$ преобразованию Лапласа, при нулевых начальных условиях, то уравнение примет вид $D(z)\bar{\lambda} = U(z)\bar{\varphi}$.

Отсюда

$$\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\varphi}} = \frac{U(z)}{D(z)} = K(z).$$

Но с другой стороны $\frac{U(i\omega)}{D(i\omega)} = K(i\omega)$ есть частотная функция. Таким образом частотная функция может быть получена из передаточной функции системы подстановкой

$$z = i\omega.$$

Применение метода частотной функции при произвольном возмущении основывается на двух положениях:

1. Возмущающая функция может быть разложена в гармонический ряд, конечный или бесконечный, дискретный или непрерывный.

2. Выходная функция разомкнутой системы при произвольном возмущающем воздействии на входе определяется как алгебраическая сумма составляющих выходов, вычисленных для отдельных гармоник ряда, в который разложена функция возмущения. Это справедливо только для линейных систем.

д) Разложение в гармонический ряд функции возмущения

Задача разложения функции возмущения в гармонический ряд решается согласно теории рядов Фурье.

Мы не будем останавливаться на изложении существа этой теории, предполагая ее достаточно известной. Приведем лишь основные выводы, которые могут быть для нас полезны.

Разложение произвольной периодической функции $f(t)$. Всякая периодическая функция $f(t)$ с периодом T_0 , удовлетворяющая условиям Дирихле*, разлагается в бесконечный дискретный ряд Фурье по формуле

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\omega_0 t. \quad (\text{VIII-75})$$

Здесь

n — порядок высшей гармоники;

A_n, B_n — коэффициенты Фурье;

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ — круговая частота основной гармоники;

T_0 — период основной гармоники, равный периоду функции.

В свою очередь коэффициенты A_n и B_n вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{1}{2}T_0}^{+\frac{1}{2}T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt \\ n &= 1, 2, 3, \dots \infty \\ B_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{1}{2}T_0}^{+\frac{1}{2}T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt \\ A_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{1}{2}T_0}^{+\frac{1}{2}T_0} f(t) dt. \end{aligned} \quad (\text{VIII-76})$$

Разложение в ряд периодической функции $f(t)$ состоит из постоянного слагаемого A_0 , основной гармоники ($n = 1$) и в общем случае бесконечного числа гармоник высшего порядка ($n = 2, 3, 4 \dots$).

* В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, Гостехиздат, 1949.

Значение выходной амплитуды определяется как произведение входной амплитуды на модуль частотной функции

$$A = A_0 |K(i\omega)|. \quad (\text{VIII-72})$$

Сдвиг фаз ψ равен аргументу частотной функции

$$\psi = \arctg \frac{\text{Im}K(i\omega)}{\text{Re}K(i\omega)}. \quad (\text{VIII-73})$$

4. Частотная функция $K(i\omega)$ определяется по параметрам исходного дифференциального уравнения системы

$$D(p)\lambda = U(p)A_0 \sin \omega t.$$

Зная частотную функцию, можно сразу определить выходную синусоиду системы в установившемся режиме.

5. При заданной круговой частоте ω входной синусоиды частотная функция $K(i\omega)$ представляет комплексное число, модуль которого можно рассматривать как коэффициент усиления звена при круговой частоте ω , так как он равен отношению амплитуд синусоид на входе и выходе:

$$|K(i\omega)| = \frac{A}{A_0}. \quad (\text{VIII-74})$$

6. Отметим еще одно важное свойство частотной функции. Если подвергнуть общее уравнение разомкнутой системы $D(p)\lambda = U(p)\varphi$ преобразованию Лапласа, при нулевых начальных условиях, то уравнение примет вид $D(z)\bar{\lambda} = U(z)\bar{\varphi}$.

Отсюда

$$\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\varphi}} = \frac{U(z)}{D(z)} = K(z).$$

Но с другой стороны $\frac{U(i\omega)}{D(i\omega)} = K(i\omega)$ есть частотная функция. Таким образом частотная функция может быть получена из передаточной функции системы подстановкой

$$z = i\omega.$$

Применение метода частотной функции при произвольном возмущении основывается на двух положениях:

1. Возмущающая функция может быть разложена в гармонический ряд, конечный или бесконечный, дискретный или непрерывный.

2. Выходная функция разомкнутой системы при произвольном возмущающем воздействии на входе определяется как алгебраическая сумма составляющих выходов, вычисленных для отдельных гармоник ряда, в который разложена функция возмущения. Это справедливо только для линейных систем.

д) Разложение в гармонический ряд функции возмущения

Задача разложения функции возмущения в гармонический ряд решается согласно теории рядов Фурье.

Мы не будем останавливаться на изложении существа этой теории, предполагая ее достаточно известной. Приведем лишь основные выводы, которые могут быть для нас полезны.

Разложение произвольной периодической функции $f(t)$. Всякая периодическая функция $f(t)$ с периодом T_0 , удовлетворяющая условиям Дирихле*, разлагается в бесконечный дискретный ряд Фурье по формуле

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\omega_0 t. \quad (\text{VIII-75})$$

Здесь

n — порядок высшей гармоники;

A_n, B_n — коэффициенты Фурье;

$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ — круговая частота основной гармоники;

T_0 — период основной гармоники, равный периоду функции.

В свою очередь коэффициенты A_n и B_n вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{1}{2}T_0}^{+\frac{1}{2}T_0} f(t) \cos n\omega_0 t dt \\ n &= 1, 2, 3, \dots \infty \\ B_n &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{1}{2}T_0}^{+\frac{1}{2}T_0} f(t) \sin n\omega_0 t dt \\ A_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{1}{2}T_0}^{+\frac{1}{2}T_0} f(t) dt. \end{aligned} \quad (\text{VIII-76})$$

Разложение в ряд периодической функции $f(t)$ состоит из постоянного слагаемого A_0 , основной гармоники ($n=1$) и в общем случае бесконечного числа гармоник высшего порядка ($n=2, 3, 4 \dots$).

* В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, Гостехиздат, 1949.

Для теоретических вычислений и выводов целесообразно пользоваться разложением Фурье в комплексной форме. Для этого достаточно сделать подстановку:

$$\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2i} (e^{in\omega_0 t} - e^{-in\omega_0 t})$$

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{in\omega_0 t} + e^{-in\omega_0 t}).$$

Тогда после преобразований разложение периодической функции в ряд Фурье примет вид

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega_0 t}, \text{ где } C_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{1}{2}T_0}^{+\frac{1}{2}T_0} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt, \quad (\text{VIII-77})$$

причем коэффициенты C_n здесь будут комплексными числами.

Разложение периодического возмущающего воздействия $\varphi(t)$. Функция периодического возмущающего воздействия $\varphi(t)$ отличается от периодической функции $f(t)$ тем, что при $t < 0$ она везде равна нулю. Поэтому коэффициенты C_n будут вычисляться для симметричных функций $\varphi(t)$ по формуле

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{1}{2}T_0} \varphi(t) e^{-in\omega_0 t} dt \quad (\text{VIII-78})$$

и

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega_0 t}. \quad (\text{VIII-79})$$

Разложение в гармонический ряд единичной толчкообразной функции. Чтобы получить разложение в гармонический ряд единичной толчкообразной функции с помощью предыдущей формулы, следует принять сперва $\varphi(t)$ за прямоугольник с периодом T_0 и амплитудой равной 1, а затем найти предел выражения $\varphi(t)$ при $T_0 \rightarrow \infty$.

Имеем

$$C_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{1}{2}T_0} e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{1}{2\pi ni} (1 - e^{-in\pi})$$

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi ni} (1 - e^{-in\pi}) e^{in\omega_0 t}.$$

Будем теперь увеличивать период нашей прямоугольной кривой, T_0 до ∞ .

В этом случае следует положить, что

$$\omega_0 \rightarrow d\omega; \quad n = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{d\omega}; \quad e^{-in\pi} \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\varphi(t) = 1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega} d\omega. \quad (\text{VIII-80})$$

Это представляет известный интеграл Фурье.

Таким образом, единичный толчок разлагается в непрерывный гармонический ряд со всеми значениями частот ω от $-\infty$ до $+\infty$ в противоположность периодической функции, ряд Фурье имеет значения частот ω , отвечающие только последовательным целым числам n от $-\infty$ до $+\infty$. Последний ряд называется дискретным в отличие от непрерывного. Амплитуды колебаний отдельных частот непрерывного ряда с увеличением ω уменьшаются.

е) Амплитудно-фазовая характеристика и ее построение

Для синусоидального возмущения частотная функция $K(i\omega)$ представляет только одно комплексное число, определяемое значением частоты ω . При произвольной возмущающей функции порождаются колебания с дискретным или непрерывным спектром частот. Частотная функция меняет свое значение скачками или непрерывно. В этом случае представляет интерес графическое изображение частотной функции. Рассматривая частотную функцию $K(i\omega)$ как вектор, характеризующий установившееся состояние системы для спектра частот от $\omega = -\infty$ до $\omega = +\infty$, мы можем построить годограф этого вектора в комплексной плоскости. Кривая, которую описывает конец этого вектора, носит название амплитудно-фазовой характеристики системы.

Построение амплитудно-фазовых характеристик основано на следующем.

Допустим, что комплексная частотная функция равна

$$K(i\omega) = \frac{U(i\omega)}{D(i\omega)} = \frac{m + in}{x + iy}.$$

Здесь выражения m , n , x , y суть некоторые функции частоты ω , которые легко могут быть вычислены из комплексных уравнений

$$U(i\omega) = m + in \quad \text{и} \quad D(i\omega) = x + iy.$$

Положим

$$K(i\omega) = \frac{m + in}{x + iy} = \omega + iv.$$

Отсюда

$$\omega = \frac{mx + ny}{x^2 + y^2}; \quad v = \frac{nx - my}{x^2 + y^2}.$$

Также

$$\omega^2 + v^2 = \frac{m^2 + n^2}{x^2 + y^2}.$$

С другой стороны имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega^2 + v^2}{\omega} &= \frac{m^2 + n^2}{mx + ny} \\ \frac{\omega^2 + v^2}{v} &= \frac{m^2 + n^2}{nx - my} \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-81})$$

Эти уравнения представляют два пучка окружностей: один с центрами на оси ω и радиусами r_ω .

$$r_\omega = \frac{m^2 + n^2}{2(mx + ny)} = \frac{\omega^2 + v^2}{2\omega};$$

другой с центрами на оси v и радиусами r_v

$$r_v = \frac{m^2 + n^2}{2(nx - my)} = \frac{\omega^2 + v^2}{2v}.$$

Для каждого значения частоты ω радиусы r_ω и r_v имеют свои числовые значения. Соответствующим окружностям обоих пучков отвечает одно и то же значение ω . Все окружности пересекаются в начале координат. Вторая точка пересечения соответствующих окружностей принадлежит амплитудно-фазовой характеристике.

Другой вариант построения амплитудно-фазовой характеристики заключается в построении пучка concentрических окружностей

$$\omega^2 + v^2 = \frac{m^2 + n^2}{x^2 + y^2} = r_0^2$$

с центром в начале системы координат (ω, v) и пучка прямых $\frac{v}{\omega} = \frac{nx - my}{mx + ny} = \operatorname{tg} \alpha$, проходящих через начало. Точки пересечения лучей с соответствующими окружностями будут искомыми точками амплитудно-фазовой характеристики.

Таким образом, построение амплитудно-фазовой характеристики сводится к построению вспомогательных окружностей с центрами на осях координат, или пучка прямых и concentрических окружностей. Для каждого значения ω вычисляются значения радиусов r_ω ,

r_v , r_0 и угла α — наклона прямой $\frac{v}{\omega}$ к оси ω .

Пример построения графика амплитудно-фазовой характеристики приведен ниже.

Пример. Построить амплитудно-фазовую характеристику для системы регулирования паровой турбины со структурной схемой по фиг. 170.

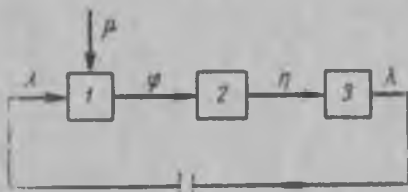
Уравнение турбины $T_a \varphi' = -\mu$

Уравнение регулятора $T_r^2 \eta'' + T_k \eta' + \delta \eta = \varphi$

Уравнение сервомотора $T_s \lambda' + \lambda = \eta$.

Числовые значения динамических параметров

$T_a = 20$ сек.; $T_s = 0.25$ сек.; $T_k = 0.05$ сек.; $T_r = 0.005$ сек.; $\delta = 0.05$.



Фиг. 170. Структурная схема к примеру.

Решение Рассмотрим уравнение разомкнутой системы с входной величиной μ и выходной λ .

Исключим из нашей системы все переменные кроме μ и λ . Для этого введем символ дифференциального оператора p и воспользуемся методом определителей

$$\Delta = \begin{vmatrix} T_a p & 0 & 0 \\ -1 & T_r^2 p^2 + T_k p + \delta & 0 \\ 0 & -1 & T_s p + 1 \end{vmatrix} = + T_a p (T_s p + 1) (T_r^2 p^2 + T_k p + \delta)$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} T_a p & 0 & -\mu \\ -1 & T_r^2 p^2 + T_k p + \delta & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\mu$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{\Delta_k}{\Delta} = - \frac{1}{T_a p (T_s p + 1) (T_r^2 p^2 + T_k p + \delta)} \mu = K(p) \mu$$

Здесь $K(p)$ есть передаточная функция системы.

Отсюда частотная функция

$$K(i\omega) = \frac{-1}{T_a i\omega (T_s i\omega + 1) (-T_r^2 \omega^2 + T_k i\omega + \delta)}$$

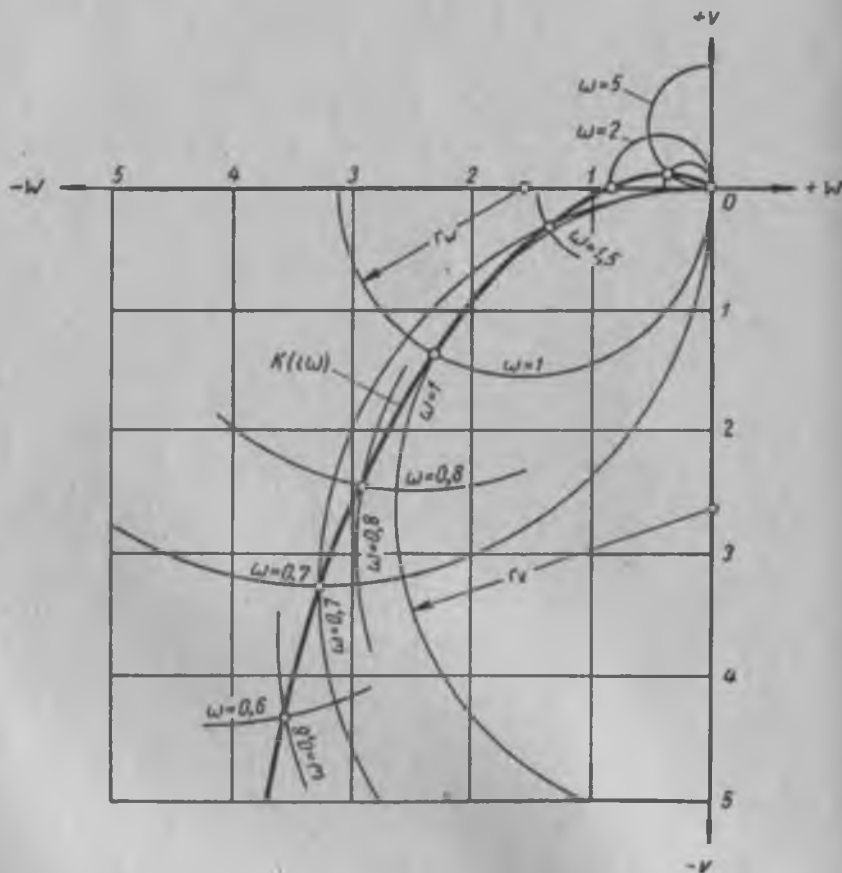
Подставив числовые значения, получим

$$K(i\omega) \approx \frac{-1}{i\omega (1 - 0.25\omega^2 + 1.25i\omega)} = \frac{16 | -5\omega + (4 - \omega^2)i |}{\omega (\omega^4 + 17\omega^2 + 16)}$$

$$K(i\omega) = \omega + i\nu$$

$$\omega = \frac{-80}{\omega^4 + 17\omega^2 + 16}; \quad \nu = \frac{16(4 - \omega^2)}{\omega^4 + 17\omega^2 + 16}$$

Совокупность уравнений $w = w(\omega)$ и $v = v(\omega)$ представляет параметрическое уравнение амплитудно-фазовой характеристики. Следует заметить, что кривая амплитудно-фазовой характеристики симметрична относительно оси w . Поэтому



Фиг. 171. Построение амплитудно-фазовой характеристики.

достаточно построить одну половину характеристики от $\omega = 0$ до $\omega = +\infty$, вторая половина будет симметрична с первой. Для графического построения достаточно вычислить радиусы r_w и r_v вспомогательных окружностей с центрами на осях w и v .

Имеем

$$r_w = \frac{w^2 + v^2}{2w} = -\frac{8}{5\omega^2}$$

$$r_v = \frac{w^2 + v^2}{2v} = -\frac{8}{\omega(4 - \omega^2)}$$

Отрицательные значения r_w и r_v показывают, что центры окружностей расположены на отрицательных полуосях системы координат.

Замечательные точки кривой:

При $\omega = 0$;	$\omega = -5$;	$\nu = -\infty$;	$r_\omega = -\infty$;	$r_\nu = -\infty$;
• $\omega = \pm 2$;	$\omega = -0.908$;	$\nu = 0$;	$r_\omega = -0.454$;	$r_\nu = \mp \infty$;
• $\omega = +\infty$;	$\omega = 0$;	$\nu = 0$;	$r_\omega = 0$;	$r_\nu = 0$.

Задаваясь разными значениями ω и вычисляя радиусы r_ω и r_ν , строим вспомогательные окружности. Точки пересечения их определяют точки искомой характеристики. На фиг. 171 приведено построение амплитудно-фазовой характеристики для рассмотренного примера.

Радиусы векторы амплитудно-фазовой характеристики определяют для соответствующего значения частоты ω значение модуля $|K(i\omega)|$ частотной функции. Зная модуль, мы можем вычислить амплитуду выходной гармоники частоты ω путем умножения на модуль амплитуды входной гармоники той же частоты.

ж) Обобщенные вещественная и мнимая частотные характеристики

Выше указано на возможность использования разложения возмущающей функции в ряд Фурье для нахождения решения дифференциального уравнения движения системы регулирования.

Если разложить возмущающую функцию $\varphi(t)$, приложенную к системе в какой-то момент времени, например $t = 0$, то каждый член разложения представит гармоническую функцию, существующую на всем протяжении времени $t < 0$. Движение соответствующее этому члену разложения является вынужденным движением.

Таким образом общее решение уравнения $\lambda = \lambda_s + \lambda_c$ определится как сумма вынужденных движений, соответствующих членам разложения функции $\varphi(t)$ в ряд Фурье. Здесь $\lambda_c = \lambda_{co}$, т. е. свободное движение возникло за счет приложения в момент $t = 0$ возмущения $\varphi(t)$.

Указанное решение справедливо для случая нулевых начальных условий при $t = -0$. Если начальные условия в момент $t = 0$ ненулевые, то следует добавить к полученному движению свободные колебания λ_{cn} , определяемые из уравнения $D(p)\lambda = 0$.

Общее решение в этом случае будет иметь вид:

$$\lambda_s + \lambda_{co} + \lambda_{cn} = \lambda_s + \lambda_c.$$

Более распространены методы основанные на использовании обобщенной передаточной функции системы, а также обобщенными вещественной и мнимой частотными функциями или характеристиками.

Движение всякой системы регулирования, допускающей линеаризацию своих звеньев, может быть выражено дифференциальным уравнением общего вида:

$$D(p)\lambda = U(p)\varphi(t)$$

как для разомкнутой, так и замкнутой системы.

Здесь $D(p)$ выходной и $U(p)$ — входной операторы.

Применяя преобразование Лапласа, мы можем найти изображение регулируемой величины λ простой операцией

$$L\lambda(t) = \frac{U(z)}{D(z)} Lz(t).$$

Отношение $\frac{L\lambda(t)}{Lz(t)}$ представляет, как было указано ранее, передаточную функцию, которую мы условились изображать символом $K(z)$. Эта передаточная функция не зависит от вида функции возмущения $\varphi(t)$, а зависит от параметров звеньев составляющих систему. Во многих случаях при решении общих вопросов целесообразно любое возмущающее воздействие при любых начальных условиях заменять единичным возмущающим воздействием при нулевых начальных условиях. В этом случае вместо передаточной функции мы должны ввести другую функцию $\Phi(z)$ под условием тождественности двух уравнений:

$$\begin{aligned} L\lambda(t) &= K(z) Lz(t) \\ L\lambda(t) &= \Phi(z) L1(t) = \frac{\Phi(z)}{z}. \end{aligned} \quad (\text{VIII-82})$$

Отсюда

$$\Phi(z) = zK(z) Lz(t).$$

Эту функцию называют обобщенной передаточной функцией в отличие от функции $K(z)$, которая носит название собственной передаточной функции. Существенное отличие функции $\Phi(z)$ от $K(z)$ заключается в том, что она учитывает внешнее возмущающее воздействие на систему.

При единичном возмущении $1(t)$ значение $\Phi(z)$ равно

$$\Phi(z) = zK(z) \frac{1}{z} = K(z).$$

По аналогии с тем, как функция $K(i\omega)$ была названа амплитудно-фазовой характеристикой, функцию $\Phi(i\omega)$ следует назвать обобщенной амплитудно-фазовой характеристикой. Разложим функцию $\Phi(i\omega)$ на вещественную и мнимую части

$$\Phi(i\omega) = Re(\omega) + iIm(\omega). \quad (\text{VIII-83})$$

Функция $Re(\omega)$ называется частотной вещественной, а функция $Im(\omega)$ — мнимой характеристиками системы. Эти функции обладают следующими свойствами. Представим комплексное выражение $Re(\omega) + iIm(\omega)$ в виде, как указано ниже, опустив для сокращения письма символ ω

$$\begin{aligned} \sqrt{Re^2 + Im^2} \left(\frac{Re}{\sqrt{Re^2 + Im^2}} + i \frac{Im}{\sqrt{Re^2 + Im^2}} \right) &= \\ &= \sqrt{Re^2 + Im^2} (\cos \theta + i \sin \theta). \end{aligned} \quad (\text{VIII-84})$$

Функция $Re(\omega)$ будет четной функцией, поскольку $\cos \theta$ сама по себе четная функция. Равным образом $Im(\omega)$ является нечетной функцией. Отсюда вытекают такие зависимости

$$\left. \begin{aligned} Re(\omega) &= Re(-\omega) \\ Im(\omega) + Im(-\omega) &= 0 \\ Im(0) &= 0; \quad Re(0) = \Phi(0). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-85})$$

Рассмотрим движение системы в общем случае, когда на систему действует возмущающее воздействие $\varphi(t)$ при ненулевых начальных условиях. Допустим, что для этого случая нам известна обобщенная передаточная функция $\Phi(z)$. Тогда согласно формуле (VIII-82) L — изображение величины $\lambda(t)$, характеризующей движение системы, определится из выражения

$$L\lambda(t) = \Phi(z) L1(t) = \frac{\Phi(z)}{z}$$

Для определения функции $\lambda(t)$ мы должны сделать обратное преобразование Лапласа

$$\lambda(t) = L^{-1} \frac{\Phi(z)}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\Phi(z) e^{zt}}{z} dz.$$

Положим $z = i\omega$. После введения нового переменного интеграл преобразуется и примет вид

$$\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(i\omega) e^{i\omega t}}{i\omega} d\omega.$$

Вставим теперь вместо $\Phi(i\omega)$ сумму $Re(\omega) + iIm(\omega)$

$$\lambda(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Re(\omega) e^{i\omega t}}{i\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im(\omega) e^{i\omega t}}{\omega} d\omega.$$

Подставим $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Re(\omega) \cos \omega t}{i\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Re(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Im(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что функции $\frac{Re(\omega) \cos \omega t}{\omega}$ и $\frac{Im(\omega) \sin \omega t}{\omega}$ нечетные, в связи с чем интегралы взятые от них в интервале $-\infty$ до $+\infty$ обращаются в нуль.

В свою очередь функции $\frac{Re(\omega) \sin \omega t}{\omega}$ и $\frac{Im(\omega) \cos \omega t}{\omega}$ четные, что позволяет ограничиться интегрированием на участке 0 до $+\infty$.

Учитывая сделанные замечания, получим:

$$\lambda(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Re(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Im(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (\text{VIII-86})$$

При исследовании движения систем регулирования обычно принимается, что процесс регулирования до момента $t = 0$ не имеет места и что движение системы отсутствует, т. е. при $t < 0$, $\lambda(t) = 0$. В рассматриваемом случае начальные условия движения учтены при определении обобщенной передаточной функции $\Phi(z)$.

Поэтому, подставляя $-t$ вместо t , получим:

$$\lambda(-t) = 0 = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Re(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Im(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega,$$

Отсюда

$$\int_0^{\infty} \frac{Im(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega = \int_0^{\infty} \frac{Re(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (\text{VIII-87})$$

Полученная формула устанавливает зависимость выходной функции $\lambda(t)$ от функции $Re(\omega)$ вещественной характеристики

$$\lambda(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Re(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega. \quad (\text{VIII-88})$$

На этой формуле основано построение кривой $\lambda(t)$, а также основные методы частотного анализа качества регулирования.

При приближенных вычислениях выходной функции $\lambda(t)$ по полученной формуле нередко требуется иметь дело с интегралами

$$\int_0^{\theta} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \text{ или } \int_0^{\theta} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega.$$

Эти интегралы носят название интегральных синусов и обозначаются

$$Si(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \text{ и } Si(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega.$$

Таблицы интегральных синусов $Si(x)$ даются в большинстве справочников. Основные свойства интегральных синусов:

1. Функция $Si(x)$ выражается рядом

$$Si(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} \dots$$

2. При $x \rightarrow \infty$ функция $Si(x)$ стремится к $\frac{\pi}{2}$.

3. Экстремумы функции $Si(x)$ имеют место при $x = k\pi$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

4. МЕТОД ПЕРЕХОДНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

а) Функция переходной проводимости и реакция системы на произвольное возмущение

Метод переходной проводимости, так же как и метод частотной функции, возник и развился в технике переменных токов при исследовании переходных процессов. Наряду с методом частотной функции он с успехом применяется для анализа движения систем регулирования.

Сущность метода переходной проводимости состоит в том, что для заданной разомкнутой системы регулирования определяется реакция на выходе при подаче на вход единичной толчкообразной функции в качестве возмущающего воздействия. Эта реакция определяется параметрами системы и представляет характерную для нее функцию, носящую название функции переходной проводимости или просто переходной функции. Зная эту функцию, мы можем без труда определить реакцию разомкнутой и замкнутой системы на возмущающее воздействие произвольного вида. Условимся обозначать переходную функцию звена, или разомкнутой системы, символом $\Lambda(t)$.

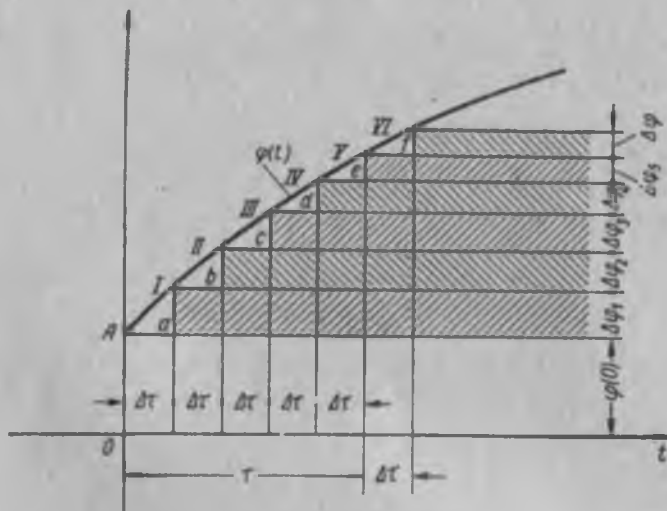
Допустим, что возмущающая функция $\varphi(t)$ действует с некоторого момента времени на входе нашей разомкнутой системы, как изображено на диаграмме фиг. 172.

Отложим по оси времени t , начиная от начала системы координат, малые отрезки времени Δt . Заменим возмущающую функцию $\varphi(t)$ приближенной к ней функцией, отвечающей ломаной кривой $Aalblc \dots fVI$.

Такая замена будет сопровождаться некоторой погрешностью, которая будет тем меньше, чем меньше $\Delta\tau$. В начальный момент времени $t = 0$ система получает толчок $\varphi(0)$.

В различные моменты времени t система получает соответственно различные дополнительные толчки:

при $t = \Delta\tau$ дополнительный толчок будет $\Delta\varphi_1$
 » $t = 2\Delta\tau$ » » » $\Delta\varphi_2$
 » $t = k\Delta\tau$ » » » $\Delta\varphi_k$



Фиг. 172. Определение реакции системы на возмущающее воздействие произвольного вида.

Каждый следующий дополнительный толчок отстает по времени от предыдущего на величину $\Delta\tau$.

Реакцию на выходе $\lambda(t)$ можно определить как сумму реакций от отдельных толчков (метод суперпозиции)

$$\lambda(t) = \varphi(0) \Lambda(t) + \Delta\varphi_1 \Lambda(t - \Delta\tau) + \Delta\varphi_2 \Lambda(t - 2\Delta\tau) \dots = \varphi(0) \Lambda(t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=n} \Delta\varphi_k \Lambda(t - k\Delta\tau) = \varphi(0) \Lambda(t) + \sum_{\Delta\tau} \frac{\Delta\varphi_k}{\Delta\tau} \Lambda(t - \tau) \Delta\tau.$$

Переходя к пределу, придем к выражению:

$$\lambda(t) = \varphi(0) \Lambda(t) + \int_0^t \varphi^*(\tau) \Lambda(t - \tau) d\tau. \quad (\text{VIII-89})$$

В этом выражении $\varphi'(\tau)$ представляет производную по времени функции возмущающего воздействия, а τ — переменную интегрирования.

Этот интеграл носит название интеграла Дюамеля.

Выражение уравнения (VIII-89) может быть также записано в другой форме:

$$\lambda(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \varphi(\tau) \Lambda(t-\tau) d\tau, \quad (\text{VIII-90})$$

в чем легко убедиться, дифференцируя интеграл по параметру t под знаком интеграла и применяя интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^t \varphi(\tau) \Lambda(t-\tau) d\tau &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} [\varphi(\tau) \Lambda(t-\tau)] d\tau + \\ &+ \varphi(t) \Lambda(0) = - \int_0^t \varphi(\tau) \Lambda'(t-\tau) d(t-\tau) + \varphi(t) \Lambda(0) = - \varphi(t) \Lambda(0) + \\ &+ \varphi(0) \Lambda(t) + \varphi(t) \Lambda(0) + \int_0^t \Lambda(t-\tau) \varphi'(\tau) d\tau = \varphi(0) \Lambda(t) + \\ &+ \int_0^t \Lambda(t-\tau) \varphi'(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{VIII-91})$$

Следовательно, если известна функция переходной проводимости разомкнутого контура системы, мы можем с помощью интеграла Дюамеля (VIII-89), или формулы (VIII-90), определить изменение во времени выходной величины (реакции системы) при возмущающем воздействии произвольного вида.

Необходимо отметить, что все данные выше формулы реакции системы выведены в предположении, что в момент подачи возмущающего воздействия на вход системы последняя находилась в покое. Если это не соблюдено, то к выражению реакции (VIII-66-67) должна быть добавлена составляющая $\lambda_{cn}(t)$, представляющая свободные колебания системы, зависящие от начальных условий. Эта составляющая была определена выше.

б) Связь между передаточной функцией системы и функцией переходной проводимости

Выше было приведено разложение единичного толчка в непрерывный гармонический ряд (интеграл Фурье).

$$1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\omega} d\omega$$

с непрерывным спектром всех значений частот ω от $-\infty$ до $+\infty$. Допустим, что частотная функция разомкнутой системы будет $K(i\omega)$ и на вход системы подано воздействие в форме единичного толчка, которое представим в виде интеграла Фурье. Рассмотрим бесконечно-малый участок частотного спектра $d\omega$ и будем считать, что на протяжении этого участка частота колебаний ω остается неизменной. Тогда элементарному возмущающему воздействию, равному $\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{i\omega t}}{\omega} d\omega$ будет отвечать элементарное колебание на выходе:

$$d\Lambda(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{K(i\omega)}{\omega} e^{i\omega t} d\omega, \quad (\text{VIII-92})$$

которое представляет дифференциал функции переходной проводимости в символическом изображении. Отсюда

$$\Lambda(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K(i\omega)}{\omega} e^{i\omega t} d\omega. \quad (\text{VIII-93})$$

Введем вместо $i\omega$ новую переменную интегрирования $z = i\omega$. Тогда

$$\Lambda(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{K(z)}{z} e^{zt} dz. \quad (\text{VIII-94})$$

Этот интеграл представляет обратное преобразование Лапласа для изображения, равного $\frac{K(z)}{z}$.

Таким образом

$$\Lambda(t) = L^{-1} \frac{K(z)}{z}. \quad (\text{VIII-95})$$

Эта формула устанавливает связь между переходной проводимостью системы и ее передаточной функцией. Переходная проводимость $\Lambda(t)$ представляет оригинал L -изображения, равного выражению $\frac{K(z)}{z}$, где $K(z)$ есть передаточная функция системы.

Определение функции переходной проводимости делается либо по формуле (VIII-95) с помощью таблицы L -преобразования, либо по формуле (VIII-94) с помощью теоремы о вычетах.

Ниже на примере будут показаны оба способа. Если известна функция переходной проводимости в зависимости от времени, то, найдя L -изображение этой функции и умножив его на комплексную

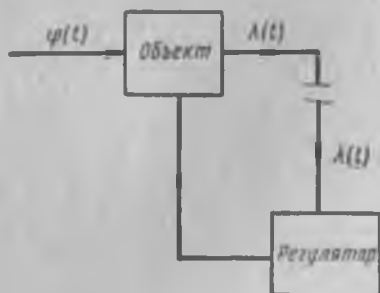
переменную z , получим частотную функцию $K(i\omega)$, после подстановки $z = i\omega$ в выражение $K(z)$

$$\left. \begin{aligned} K(z) &= zL \Lambda(t) = z\bar{\Lambda}(z) \\ K(i\omega) &= i\omega\bar{\Lambda}(i\omega). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-96})$$

В том случае, если переходная проводимость определена экспериментальным путем и выражена графиком в функции времени, возможно приближенное построение амплитудно-фазовой характеристики по графику переходной проводимости.

в) Определение процесса регулирования в замкнутой системе при произвольном возмущающем воздействии с помощью функции переходной проводимости

Представим, что система состоит из двух основных частей: объекта регулирования и регулятора в общем смысле этого слова. На фиг. 173 показана такая схема. На вход объекта поступает возмущающее воздействие и воздействие регулятора. Будем определять выходную величину объекта $\lambda(t)$ по методу суперпозиции как разность результатов отдельных воздействий от возмущающих сил и от регулятора. Кроме того, замкнутую систему будем рассматривать как разомкнутую, но при этом на вход регулятора подается выходная величина объекта.



Фиг. 173. Схема замкнутой системы.

Тогда

$$\lambda(t) = \lambda_{\varphi}(t) - \lambda_p(t), \quad (\text{VIII-97})$$

где λ_{φ} — выходная величина объекта при действии возмущающих сил и бездействия регулятора

и λ_p — выходная величина объекта при отсутствии возмущающих воздействий, но при работе регулятора.

Пусть переходная проводимость объекта будет $\Lambda_0(t)$, а всей системы в разомкнутом состоянии $\Lambda(t)$. Тогда результат воздействия может быть выражен с помощью интеграла Дюамеля;

$$\lambda_{\varphi}(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \varphi(\tau) \Lambda_0(t - \tau) d\tau,$$

$$\lambda_p(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \lambda(\tau) \Lambda(t - \tau) d\tau.$$

Отсюда

$$\lambda(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \bar{\varphi}(\tau) \Lambda_0(t-\tau) d\tau - \frac{d}{dt} \int_0^t \lambda(\tau) \Lambda(t-\tau) d\tau.$$

Произведем L -преобразование этого уравнения, принимая во внимание известную формулу преобразования, данную в приложении I.

$$L \int_0^t \bar{f}_1(t-\tau) \bar{f}_2(\tau) d\tau = \bar{f}_1(z) \bar{f}_2(z)$$

$$\bar{\lambda}(z) = z\bar{\varphi}(z) \bar{\Lambda}_0(z) - z\bar{\lambda}(z) \bar{\Lambda}(z).$$

Отсюд

$$\bar{\lambda}(z) = \frac{z\bar{\varphi}(z) \bar{\Lambda}_0(z)}{1 + z\bar{\Lambda}(z)}. \quad (\text{VIII-98})$$

Искомое значение выходной функции $\lambda(t)$ определится как оригинал L -преобразования

$$\lambda(t) = L^{-1} \bar{\lambda}(z) = L^{-1} \frac{z\bar{\varphi}(z) \bar{\Lambda}_0(z)}{1 + z\bar{\Lambda}(z)}.$$

Замечая, что

$$z\bar{\Lambda}_0(z) = K_0(z) \text{ и } z\bar{\Lambda}(z) = K(z),$$

придем к выведенному выше выражению оригинала через передаточные функции

$$\lambda(t) = L^{-1} \frac{K_0(z)}{1 + K(z)} \bar{\varphi}(z).$$

Все сказанное о функции переходной проводимости иллюстрируем ниже примером.

Пример. Определить функцию переходной проводимости системы, процесс регулирования которой в разомкнутом состоянии описывается уравнением

$$(A_0 p^4 + A_1 p^3 + A_2 p^2 + A_3 p + A_4) \lambda = \varphi(t),$$

где $p = \frac{d}{dt}$ — дифференциальный оператор.

$\varphi(t)$ — функция возмущения;

λ — выходная величина системы.

Характеристическое уравнение $D(p) = 0$ имеет корни

$$p_1 = -a_1; p_{2,3} = -a_2; p_{4,5} = -a_4 \pm ib_4.$$

Числовые выражения $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_4 = 3$, $b_4 = 1$, $A_0 = 1$.

1 способ. Для определения функции переходной проводимости положим $\varphi(t) = 1(t)$ и определим λ . Найденное λ будет искомой функцией $\Lambda(t)$.

Подвергнем наше уравнение L -преобразованию при нулевых начальных условиях

$$(A_0 z^6 + A_1 z^4 + A_2 z^3 + A_3 z^2 + A_4 z + A_5) \bar{\lambda} = L1(t) = \frac{1}{s}.$$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{A_0 z (z - p_1) (z - p_2)^2 (z - p_4) (z - p_5)};$$

$$\lambda = \Lambda(t) = \frac{1}{2\pi i A_0} \int_{-\infty-i\infty}^{+\infty} \frac{e^{zt} dz}{z (z - p_1) (z - p_2)^2 (z - p_4) (z - p_5)}.$$

Для вычисления этого интеграла прибегнем к методу вычетов.

В теории функций комплексного переменного доказывается, что интервал вида

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zt} Q(z) dz = 2\pi i \sum \text{Res} e^{zt} Q(z).$$

Здесь символ $\sum \text{Res}$ есть сумма вычетов подынтегральной функции $e^{zt} Q(z)$. Под вычетом понимается значение контурного интеграла функции вокруг полюса функции, разделенное на $2\pi i$. Полюсом функции называется значение комплексной переменной, при котором функция обращается в ∞ .

Если подынтегральная функция есть $f(z)$, то вычет в полюсе первого порядка $z = a$ вычисляется по формуле

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow a} f(z) (z - a).$$

Если $f(z)$ есть дробь $f(z) = \frac{\xi(z)}{\psi(z)}$, то

$$\text{Res } f(z) = \text{Res } \frac{\xi(z)}{\psi(z)} = \left[\frac{\xi(z)}{\psi'(z)} \right]_{z=a}.$$

Если подынтегральная функция $f(z)$ имеет полюс n -го порядка, то вычет в этом полюсе равен

$$\text{Res } f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [f(z) (z - a)^n]}{(n-1)!}.$$

После этих предварительных замечаний перейдем к решению интеграла

В нашем случае подынтегральная функция

$$f(z) = \frac{e^{zt}}{z (z - p_1) (z - p_2)^2 (z - p_4) (z - p_5)}.$$

Полюса функции

$$z_0 = 0, \quad z_1 = p_1, \quad z_{2,1} = p_2, \quad z_4 = p_4, \quad z_5 = p_5.$$

Определим вычеты функции $f(z)$ в полюсах:

1) полюс $z_0 = 0$

$$\operatorname{Res} f(z) = \frac{1}{-p_1 p_2 p_4 p_6} = 0,025;$$

2) полюс $z_1 = p_1$

$$\operatorname{Res} f(z) = \frac{e^{p_1 t}}{p_1 (p_1 - p_2)^2 (p_1 - p_4) (p_1 - p_6)} = -0,2e^{-t};$$

3) полюс $z_{1,2} = p_2$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} f(z) &= \lim_{z=p_2} \frac{d}{dz} [f(z) (z - p_2)^2] = \\ &= \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{zt}}{z(z - p_1)(z^2 + 2a_4 z + a_4^2 + b_4^2)} \right]_{z=p_2} = (0,125 + 0,25t)e^{-2t}; \end{aligned}$$

4) полюс $z_4 = p_4$

$$\operatorname{Res} f(z) = \left[\frac{e^{zt}}{z(z - p_1)(z - p_2)^2(z - p_6)} \right]_{z=p_4} = \frac{1+i}{40} e^{(-3+i)t};$$

5) полюс $z_6 = p_6$

$$\operatorname{Res} f(z) = \frac{1-i}{40} e^{-(3+i)t}$$

$$\sum \operatorname{Res} f(z) = 0,025 - 0,2e^{-t} + (0,125 + 0,25t)e^{-2t} + \frac{1}{20}e^{-3t}(\cos t - \sin t)$$

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{1}{2\pi i \cdot A_0} 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(z) = 0,025 - 0,2e^{-t} + 0,125(1 + 2t)e^{-2t} + \\ &+ 0,05e^{-3t}(\cos t - \sin t). \end{aligned}$$

II способ. В большинстве практических случаев функцию переходной проводимости целесообразно определять пользуясь таблицей L -изображений.

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{A_0 z (z - p_1) (z - p_2)^2 (z - p_4) (z - p_6)}.$$

Разложим дробь на сумму простейших дробей

$$\begin{aligned} \frac{1}{z(z - p_1)(z - p_2)^2(z - p_4)(z - p_6)} &= \frac{N_0}{z} + \frac{N_1}{z - p_1} + \frac{N_{21}}{(z - p_2)^2} + \\ &+ \frac{N_{22}}{z - p_2} + \frac{N_4}{z - p_4} + \frac{N_6}{z - p_6}. \end{aligned}$$

Определение всех коэффициентов $N_0, N_1, N_{21}, N_4, N_5$, кроме N_{31} , делается одним общим приемом — умножением обеих частей равенства на знаменатель дроби, числитель которой должен быть найден, и последующей подстановкой вместо z соответствующего корня.

Для нахождения N_0 умножаем обе части равенства на z и делаем подстановку $z = 0$

$$N_0 = \frac{1}{-p_1 p_2 p_4 p_5} = 0,025.$$

Аналогично найдем:

$$N_1 = \frac{1}{p_1 (p_1 - p_2)^2 (p_1 - p_4) (p_1 - p_5)} = -0,2,$$

$$N_{21} = \frac{1}{p_2 (p_2 - p_1) (p_2 - p_4) (p_2 - p_5)} = 0,25,$$

$$N_4 = \frac{1}{p_4 (p_4 - p_1) (p_4 - p_2)^2 (p_4 - p_5)} = \frac{1+i}{40}; \quad N_5 = \frac{1-i}{40}.$$

Для определения коэффициента N_{31} умножим обе части равенства на $(z - p_2)^2$, возьмем от обеих частей равенства производную $\frac{d}{dz}$ и сделаем подстановку $z = p_2$.

$$N_{31} = \left[\frac{d}{dz} \frac{1}{z (z - p_1) (z - p_4) (z - p_5)} \right]_{z=p_2} = 0,125.$$

Таким образом

$$\bar{\lambda} = \frac{0,025}{z} - \frac{0,2}{z+1} + \frac{0,25}{(z+2)^2} + \frac{0,125}{z+2} + 0,05 \frac{z+2}{(z+3)^2+1}.$$

Произведя обратное L -преобразование, найдем искомый оригинал

$$\Lambda(t) = 0,025 - 0,2e^{-t} + (0,25t + 0,125)e^{-2t} + 0,05\sqrt{2}e^{-3t}\sin(t + \psi)$$

$$\psi = \arctg \frac{1}{-1}; \quad \psi = 135^\circ.$$

Выражения функции $\Lambda(t)$, полученные обоими способами, совпадают, в чем можно убедиться, произведя преобразования с последним членом.

5. МЕТОД ЕДИНИЧНОГО ИМПУЛЬСА

Метод единичного импульса по своей идее аналогичен методу переходной проводимости.

В то время, как при методе переходной проводимости мы определяем реакцию системы на входной сигнал типа единичного толчка, при методе единичного импульса находят реакцию на единичный импульс. Эта реакция носит название импульсной переходной проводимости. Часто ее также называют функцией веса.

а) Единичная импульсная функция

В качестве единичной импульсной функции принимается функция $\delta(t) = 1'(t)$, изображенная на фиг. 159, а, б. Для дальнейшего изложения необходимо расширить представление об единичной импульсной функции. В теории функций под единичной импульсной функцией понимают такую функцию $\delta(t - t_0)$, которая равна нулю везде, кроме точки $t = t_0$, где она принимает бесконечно большее значение, причем должны соблюдаться следующие интегральные соотношения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = 1, \quad (\text{VIII-99})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \delta(t - t_0) dt = 0 \text{ при } t_1 > t_0 \quad (\text{VIII-100})$$

$$\text{или } t_2 < t_0.$$

т. е. когда точка t_0 не лежит в промежутке $t_2 - t_1$ интегрирования

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \delta(t - t_0) dt = \varphi(t_0) \quad (\text{VIII-101})$$

$$\text{при } t_1 < t_0 < t_2.$$

т. е. когда точка t_0 лежит в интервале $t_2 - t_1$

$$\int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \delta(t - t_0) dt = \frac{1}{2} \varphi(t_0) \text{ при } t_1 = t_0 \quad (\text{VIII-102})$$

$$\text{или } t_2 = t_0.$$

т. е. когда точка t_0 совпадает с одним из пределов интегрирования*.

б) Реакция звена на единичный импульс. Функция веса

Пользуясь свойством импульсной единичной функции, легко можно вычислить реакцию звена на единичное импульсное воздействие.

Допустим, что уравнение звена в неустановившемся режиме при указанном воздействии будет

$$D(p) \lambda(t) = \delta(t - t_0). \quad (\text{VIII-103})$$

* См. В. В. Солодовников, Введение в статическую динамику автоматического управления. ГТТИ, 1952.

Производя преобразование по Лапласу получим:

$$D(z) \bar{\lambda}(z) = L\delta(t - t_0) = \int_0^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-zt} dt = e^{-zt_0}.$$

Откуда

$$\bar{\lambda}(z) = \frac{e^{-zt_0}}{D(z)} \quad (\text{VIII-104})$$

и

$$\lambda(t) = L^{-1} \frac{e^{-zt_0}}{D(z)}. \quad (\text{VIII-105})$$

Функция $\lambda(t)$ в данном случае представляет искомую импульсную проводимость или функцию веса.

При

$$t_0 = 0 \quad \lambda(t) = L^{-1} \frac{1}{D(z)}.$$

Условимся обозначать функцию веса $W(t)$

$$W(t) = L^{-1} \frac{1}{D(z)}. \quad (\text{VIII-106})$$

Нетрудно видеть, что при $t_0 \neq 0$ функция веса будет равна

$$W(t - t_0), \text{ так как } L W(t - t_0) = e^{-zt_0} L W(t). \quad (\text{VIII-107})$$

Отсюда вытекает важное свойство импульсной проводимости. Значение функции веса зависит от момента t_0 действия импульса, причем эта зависимость выражается функцией $W(t - t_0)$, где $W(t)$ есть функция веса, когда действие импульса происходит в начальный момент времени.

в) Связь между функцией веса, передаточной функцией и функцией переходной проводимости

Между функцией веса $W(t)$ и переходной проводимостью $\Lambda(t)$ легко установить связь.

Рассмотрим в качестве функции возмущения единичный скачок. Реакция звена в этом случае равна функции переходной проводимости $\Lambda(t)$. С другой стороны единичный скачок мы можем рассматривать как сумму последовательных единичных импульсов продолжительностью $\Delta\tau$ (фиг. 174).

Это дает возможность вычислить реакцию на выходе, как сумму

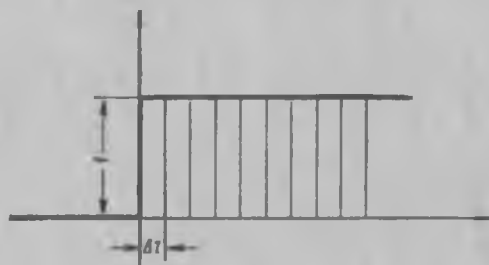
$$\sum_{\tau=0}^{\infty} W(t - \tau) \cdot 1 \cdot \Delta\tau.$$

Переходя к пределу $\Delta\tau \rightarrow 0$, получим

$$\Lambda(t) = \int_0^{\infty} W(t-\tau) d\tau. \quad (\text{VIII-108})$$

Из свойств единичной импульсной функции следует, что $W(t-\tau) = 0$ при $\tau > t$, поэтому пределы интегрирования могут быть изменены

$$\Lambda(t) = \int_0^t W(t-\tau) d\tau. \quad (\text{VIII-109})$$



Фиг. 174. Схема единичного толчка в виде суммы единичных импульсов.

Продифференцируем это уравнение по параметру t , применяя правила дифференцирования под знаком интеграла

$$\Lambda'(t) = \int_0^t W'(t-\tau) d\tau + W(0).$$

Замечая, что

$$\int_0^t W'(t-\tau) d\tau = - \int_0^t W'(t-\tau) d(t-\tau) = W(t) - W(0),$$

получим

$$\Lambda'(t) = W'(t). \quad (\text{VIII-110})$$

Таким образом, функция веса при действии единичного импульса в начальный момент времени равна первой производной по времени от переходной проводимости при единичном скачке.

Можно также установить связь между функцией веса и передаточной функцией.

Выше при изучении переходной проводимости была установлена формула

$$\Lambda(t) = L^{-1} \frac{K(z)}{z},$$

где $K(z)$ — передаточная функция.

Перепишем эту формулу в виде

$$z\Lambda(t) = K(z)$$

Заметим, что

$$z\Lambda(t) = L\Lambda'(t).$$

Это позволяет написать

$$L\Delta'(t) = LW(t) = K(z). \quad (\text{VIII-111})$$

Таким образом, передаточная функция всякого звена представляет лапласовское изображение функции веса того же звена или

$$W(t) = L^{-1}K(z). \quad (\text{VIII-112})$$

Если известна частотная функция $K(i\omega)$, делаем подстановку $z = i\omega$ и находим $K(z)$. Применяя к передаточной функции обратное преобразование Лапласа, найдем функцию веса.

Приведенные выше формулы позволяют без особого труда определить функцию веса $W(t)$, с помощью которой можно решить задачу вычисления реакции на входной сигнал.

г) Вычисление выходного сигнала с помощью функции веса

Применение функции веса $W(t)$ к вычислению выходной величины по заданному выражению входной функции $\varphi(t)$ может быть пояснено из фиг. 172. Мы можем себе представить, что действие непрерывной функции $\varphi(t)$ на входе складывается из суммарного действия ряда импульсов, непрерывно следующих друг за другом через промежутки времени $\Delta\tau$.

Величина каждого импульса $\varphi(t)\Delta\tau$.

Учитывая значение веса W единичной импульсной функции в каждый момент времени и произведя переход к пределу, мы можем выразить выходную функцию следующим интегралом:

$$\lambda(t) = \int_0^{\infty} \varphi(\tau) W(t - \tau) d\tau = \int_0^t \varphi(\tau) W(t - \tau) d\tau, \quad (\text{VIII-113})$$

так как

$$W(t - \tau) = 0 \text{ при } t < \tau.$$

Справедливость этой формулы подтверждается также выведенной выше формулой, выражающей $\lambda(t)$ через функцию переходной проходимости.

По этой формуле

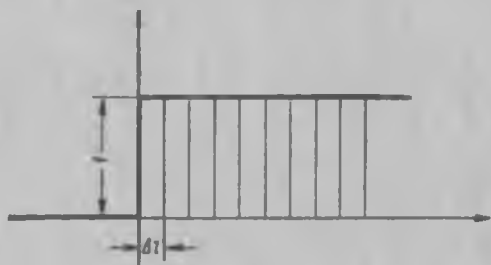
$$\lambda(t) = \varphi(0) A(t) + \int_0^t \varphi'(\tau) A(t - \tau) d\tau.$$

Переходя к пределу $\Delta\tau \rightarrow 0$, получим

$$\Lambda(t) = \int_0^t W(t-\tau) d\tau. \quad (\text{VIII-108})$$

Из свойств единичной импульсной функции следует, что $W(t-\tau) = 0$ при $\tau > t$, поэтому пределы интегрирования могут быть изменены

$$\Lambda(t) = \int_0^t W(t-\tau) d\tau. \quad (\text{VIII-109})$$



Фиг. 174. Схема единичного толчка в виде суммы единичных импульсов.

Продифференцируем это уравнение по параметру t , применяя правила дифференцирования под знаком интеграла

$$\Lambda'(t) = \int_0^t W'(t-\tau) d\tau + W(0).$$

Замечая, что

$$\int_0^t W'(t-\tau) d\tau = - \int_0^t W'(t-\tau) d(t-\tau) = W(t) - W(0).$$

получим

$$\Lambda'(t) = W'(t). \quad (\text{VIII-110})$$

Таким образом, функция веса при действии единичного импульса в начальный момент времени равна первой производной по времени от переходной проводимости при единичном скачке.

Можно также установить связь между функцией веса и передаточной функцией.

Выше при изучении переходной проводимости была установлена формула

$$\Lambda(t) = L^{-1} \frac{K(z)}{z},$$

где $K(z)$ — передаточная функция.

Перепишем эту формулу в виде

$$zL\Lambda(t) = K(z).$$

Заметим, что

$$zL\Lambda(t) = L\Lambda'(t).$$

Это позволяет написать

$$L\Delta'(t) = LW(t) = K(z). \quad (\text{VIII-111})$$

Таким образом, передаточная функция всякого звена представляет лапласовское изображение функции веса того же звена или

$$W(t) = L^{-1}K(z). \quad (\text{VIII-112})$$

Если известна частотная функция $K(i\omega)$, делаем подставку $z = i\omega$ и находим $K(z)$. Применяя к передаточной функции обратное преобразование Лапласа, найдем функцию веса.

Приведенные выше формулы позволяют без особого труда определить функцию веса $W(t)$, с помощью которой можно решить задачу вычисления реакции на входной сигнал.

г) Вычисление выходного сигнала с помощью функции веса

Применение функции веса $W(t)$ к вычислению выходной величины по заданному выражению входной функции $\varphi(t)$ может быть пояснено из фиг. 172. Мы можем себе представить, что действие непрерывной функции $\varphi(t)$ на входе складывается из суммарного действия ряда импульсов, непрерывно следующих друг за другом через промежутки времени $\Delta\tau$.

Величина каждого импульса $\varphi(t)\Delta\tau$.

Учитывая значение веса W единичной импульсной функции в каждый момент времени и произведя переход к пределу, мы можем выразить выходную функцию следующим интегралом:

$$\lambda(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\tau) W(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t \varphi(\tau) W(t - \tau) d\tau, \quad (\text{VIII-113})$$

так как

$$W(t - \tau) = 0 \text{ при } t < \tau.$$

Справедливость этой формулы подтверждается также выведенной выше формулой, выражающей $\lambda(t)$ через функцию переходной проводимости.

По этой формуле

$$\lambda(t) = \varphi(0) A(t) + \int_0^t \varphi'(\tau) A(t - \tau) d\tau.$$

Замечая, что интеграл $\int_0^t \varphi'(\tau) \Lambda(t-\tau) d\tau$ может быть разложен на сумму

$$\begin{aligned} \int_0^t \varphi'(\tau) \Lambda(t-\tau) d\tau &= \int_0^t \varphi(\tau) \Lambda(t-\tau) + \int_0^t \varphi(\tau) \Lambda'(t-\tau) d\tau = \\ &= -\varphi(0) \Lambda(t) + \varphi(t) \Lambda(0) + \int_0^t \varphi(\tau) \Lambda'(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Так как

$$\Lambda(t) = \int_0^t W(t-\tau) d\tau, \quad \text{то} \quad \Lambda(0) = 0.$$

После подстановки получим

$$\lambda(t) = \int_0^t \varphi(t) W(t-\tau) d\tau.$$

Функция веса $W(t)$ имеет большое значение в теории регулирования. Величина входного сигнала в момент времени $\tau < t$ сказывается на величине выхода в момент времени t с относительным весом $W(t-\tau)$, зависящим от времени t и интервала τ . Функция $W(t)$ не зависит от вида функции возмущения, а только от параметров звена или системы. Вид функции $W(t)$ позволяет судить о том, насколько сильно влияют значения возмущающего воздействия $\varphi(t)$ в различные моменты времени на переходный процесс.

Пример. Определить функцию веса для случая предыдущего примера. В этом примере функция переходной проводимости для единичного толчка была определена в виде:

$$\Lambda(t) = 0,25 - 0,2e^{-t} + (0,25t + 0,125)e^{-2t} + 0,05e^{-2t}(\cos t - \sin t).$$

Имеем:

$$W(t) = \Lambda'(t) = 0,2e^{-t} - 0,5te^{-2t} - 0,10e^{-2t}(2 \cos t - \sin t)$$

$$W(t-\tau) = 0,2e^{-(t-\tau)} - 0,5(t-\tau)e^{-2(t-\tau)} -$$

$$- 0,10e^{-3(t-\tau)}[2 \cos(t-\tau) - \sin(t-\tau)].$$

Метод единичного импульса нашел большое применение в теории автоматического регулирования, особенно в теории следящих систем и теории прерывистого регулирования. В последнем случае действие импульсов следует не непрерывно друг за другом, а с некоторым интервалом.

в. ОЦЕНКА ИЗЛОЖЕННЫХ МЕТОДОВ

Остановимся кратко на сравнительной оценке изложенных выше методов решения и исследования уравнений динамики систем автоматического регулирования.

Вообще говоря с точки зрения конечных результатов безразлично каким из этих методов пользоваться. При любом методе мы должны придти к одному и тому же конечному результату. Однако в ряде случаев целесообразно выбирать тот метод исследований, который быстрее приводит к цели.

Применение преобразования по Лапласу является наиболее общим методом и его следует применять во всех случаях, где другие методы не обеспечивают более простого или наглядного решения. Этот метод нашел применение при рассмотрении различных вопросов теории.

Метод переходной проводимости удобно применять, если известна переходная проводимость системы, которая может быть получена экспериментальным или другим путем. В этом случае не представляет больших затруднений найти реакцию системы на любой сигнал. Метод переходной проводимости также используется для определения экспериментальным путем постоянных параметров отдельных звеньев, что достигается сравнением опытных и расчетных проводимостей.

Метод частотной функции нашел широкое применение при расчетах и проектировании систем автоматического регулирования, особенно в электрических системах. Этот метод полнее других освещен в литературе, по нему имеются вспомогательные таблицы, которыми можно пользоваться при расчетах. Частотная функция дает более быстрый способ построения графика переходного процесса, чем другие методы, особенно для систем высокого порядка ($n > 5$). Для случаев периодических возмущающих воздействий метод частотной функции быстрее других методов приводит к математическому описанию процесса регулирования.

ГЛАВА IX

КЛАССИФИКАЦИЯ И АНАЛИЗ ПРОСТЕЙШИХ ЗВЕНЬЕВ

1. ОСНОВЫ КЛАССИФИКАЦИИ

Переходный процесс всякого звена может быть описан в общем случае дифференциальным уравнением

$$D(p) \lambda(t) = U(p) \varphi(t).$$

Здесь: $\varphi(t)$ — входная функция звена;

$\lambda(t)$ — выходная функция звена;

$D(p)$, $U(p)$ — операторные полиномы.

Выходная функция $\lambda(t)$ зависит от выражения входной функции $\varphi(t)$ и от структуры самого звена.

В дальнейшем мы будем предполагать, что дифференциальное уравнение звена дано в безразмерной форме. Это позволяет сравнивать структуру различных звеньев, отвлекаясь от их физической природы.

Принципы классификации звеньев. В основу классификации принимается порядок дифференциального уравнения звена. В зависимости от порядка уравнения звенья могут быть нулевого, первого, второго и более высоких порядков.

К простейшим звеньям относятся все звенья не выше второго порядка.

В настоящее время классификацию простейших звеньев производят либо по дифференциальному оператору $D(p)$ выхода звена, либо по виду передаточной функции $K(z)$.

Первая классификация рассматривает структуру звена с точки зрения его свободных колебаний без учета возмущающих воздействий. Однако такая классификация может быть полезна при решении различных вопросов, касающихся устойчивости звена.

Вторая классификация по передаточной функции более углубленная, она точнее учитывает характерные особенности звена.

Классификация по выходному оператору может быть уложена в 12 видов полинома $D(p)$, если придерживаться второй нормализованной формы дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \bar{T}_2^2 p^2 \pm \bar{T}_1 p \pm 1; \\ \bar{T}_2^2 p^2 \pm 1; \quad \bar{T}_2^2 p^2 \pm p; \\ \bar{T}_1 p \pm 1; \quad p^2; \quad p. \end{aligned}$$

Звенья, операторы которых имеют свободный член $(+1)$ положительным, называют статическими. Если свободный член отсутствует, звено называется астатическим. При отрицательном свободном члене (-1) звено классифицируется, как обладающее отрицательным статизмом.

Звено с выходным оператором типа $\bar{T}_1 p + 1$ называется одноконтным, так как одноконтные элементы имеют всегда уравнение типа $(\bar{T}_1 p + 1) \lambda = k \tau$.

Звено с оператором $\bar{T}_1 p - 1$ является неустойчивым, поскольку единственный корень характеристического уравнения всегда положителен, что, как было сказано в главе VIII, приводит к неустойчивому движению звена.

Звено, имеющее оператор $\bar{T}_2^2 p^2 + \bar{T}_1 p + 1$, носит название колебательного при условии, что $\bar{T}_1 < 2\bar{T}_2$. При $\bar{T}_1 > 2\bar{T}_2$ звено может быть разложено на два последовательно соединенных звена типа $\bar{T} p + 1$, т. е. на два одноконтных звена.

Звено, у которого выходной оператор имеет вид $\bar{T}^2 p^2 + 1$, называют консервативным. Особенность этого звена заключается в том, что оно порождает при возмущающих воздействиях незатухающие колебания, поскольку оба корня характеристического уравнения $\bar{T}^2 p^2 + 1 = 0$ являются чисто мнимыми числами (см. главу VIII).

Звено с оператором p есть интегрирующее звено, что вытекает из уравнения

$$p\lambda = k\tau, \quad \lambda = k \int \tau dt.$$

Особенностью этого звена является его свойство давать реакцию на выходе, пропорциональную значению интеграла от входной функции.

Звено с оператором p^2 может быть разложено на два последовательно соединенных интегрирующих звена.

Аналогичное звено, имеющее оператор $\bar{T}_2^2 p^2 + \bar{T}_1 p$ может быть представлено как последовательная комбинация из двух звеньев $\bar{T}_1 p$ и $\bar{T} p + 1$, где $\bar{T} = \frac{\bar{T}_2^2}{\bar{T}_1}$, т. е. как последовательное соединение астатического и одноконтного звеньев.

Перейдем теперь к классификации звеньев по передаточной функции.

Классификация звеньев до 2-го порядка включительно по виду передаточной функции приведена ниже в табл. 6 на стр. 344. Там же даны графики функции переходной проводимости, амплитудно-фазовой характеристики звена и функции беса.

Остановимся на анализе типовых звеньев. В дальнейшем будем обозначать, как принято выше, передаточную функцию $K(z)$, которая определяется как отношение L -изображений выходной и входной функции звена при нулевых начальных условиях.

2. УСИЛИТЕЛЬНОЕ БЕЗЫНЕРЦИОННОЕ ЗВЕНО

Уравнение звена

$$\delta \lambda = \varphi. \quad (IX-1)$$

Величина δ представляет обратное значение коэффициента усиления звена, равного $\frac{\lambda}{\varphi}$.

Передаточная функция звена

$$K(z) = \frac{L\lambda}{L\varphi} = \frac{1}{\delta}. \quad (IX-2)$$

Амплитудно-фазовая характеристика обращается в точку, расположенную на действительной оси на расстоянии, равном $\frac{1}{\delta}$ от начала.

Переходная проводимость звена

$$\Lambda(t) = \frac{1}{\delta} 1(t); \quad \Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \dots t < 0 \\ \frac{1}{\delta} & \dots t > 0. \end{cases} \quad (IX-3)$$

Вид функции переходной проводимости и амплитудно-фазовой характеристики изображены на фиг. 179.

Функция веса $W(t)$ определится как импульсный толчок 1-го порядка $\Lambda'(t)$.

3. АПЕРИОДИЧЕСКОЕ ЗВЕНО 1-го ПОРЯДКА

Уравнение звена

$$(T_1\rho + \delta)\lambda = \varphi \text{ при } \delta > 0. \quad (IX-4)$$

Передаточная и частотная функции

Передаточная функция

$$K(z) = \frac{L\lambda}{L\varphi} = \frac{1}{T_1 z + \delta}. \quad (IX-5)$$

Частотная функция

$$K(i\omega) = \frac{\delta - iT_1\omega}{\delta^2 + T_1^2\omega^2}. \quad (IX-6)$$

Модуль частотной функции

$$|K| = \frac{1}{\sqrt{\delta^2 + T_1^2 \omega^2}}.$$

Аргумент частотной функции

$$\psi = -\arctg \frac{T_1 \omega}{\delta}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика определится из уравнения

$$\frac{\delta - iT_1 \omega}{\delta^2 + T_1^2 \omega^2} = \omega + iv; \quad \omega = \frac{\delta}{\delta^2 + T_1^2 \omega^2};$$

$$v = \frac{-T_1 \omega}{\delta^2 + T_1^2 \omega^2}.$$

Исключая ω , найдем уравнение амплитудно-фазовой характеристики

$$\left(\omega - \frac{1}{2\delta}\right)^2 + v^2 = \frac{1}{4\delta^2}. \quad (\text{IX-7})$$

В системе координат (ω, v) это есть уравнение окружности радиуса $R = \frac{1}{2\delta}$. Окружность проходит через начало координат и имеет центр в точке $\left(\frac{1}{2\delta}, 0\right)$.

Функция переходной проводимости и функция веса. Функцию переходной проводимости или реакцию звена на единичное толчкообразное возмущение найдем с помощью преобразования Лапласа

$$(T_1 p + \delta) \lambda = 1(t) \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{z(T_1 z + \delta)} = \frac{1}{T_1} \cdot \frac{1}{z(z + a)}; \quad a = \frac{\delta}{T_1}.$$

$$(T_1 z + \delta) \bar{\lambda} = \frac{1}{z}$$

$$\lambda = \Lambda(t) = L^{-1} \frac{1}{T_1 z(z + a)} = \frac{1}{\delta} \left(1 - e^{-\frac{\delta t}{T_1}}\right). \quad (\text{IX-8})$$

Функция веса

$$W(t) = \Lambda'(t) = \frac{1}{T_1} e^{-\frac{\delta t}{T_1}}. \quad (\text{IX-9})$$

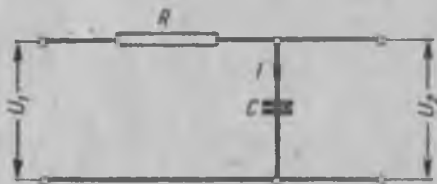
Функция переходной проводимости, функция веса и амплитудно-фазовая характеристика показаны на фиг. 179.

Максимальное отклонение выходной величины от исходного положения равновесия при возмущающем воздействии равном 1(t) и нулевых начальных условиях будет $\lambda_{\max} = \frac{1}{\delta}$, что отвечает зна-

чению $t = \infty$. Это отклонение соответствует новому положению равновесия.

Функция λ не имеет экстремумов в промежутке от $t = 0$ до $t = \infty$.

Пример. В качестве примера аperiodического звена, рассмотрим электрическую цепь из сопротивления R и емкости C , изображенную на схеме фиг. 175.



Фиг. 175. Схема электрической цепи к примеру.

За входную функцию звена $\varphi(t)$ примем напряжение U_1 на входе звена, за выходную $\lambda(t)$ — напряжение U_2 . В соответствии со схемой можем написать

$$I = \frac{1}{R} (U_1 - U_2), \quad I = C \frac{dU_2}{dt} = CU_2',$$

где I — сила тока цепи;

R — сопротивление;

C — емкость.

Исключая I , приходим к уравнению

$$T_1 U_2' + U_2 = U_1, \quad T_1 = RC,$$

которое имеет форму аperiodического звена первого порядка.

4. ИНТЕГРИРУЮЩЕЕ ЗВЕНО

Это звено принадлежит к звеньям астатического типа.

Звено описывается дифференциальным уравнением в безразмерной форме

$$T_1 \lambda' = \varphi. \quad (\text{IX-10})$$

Интегрирующее звено характеризуется тем, что скорость выходной величины пропорциональна возмущающему воздействию на входе.

Решение уравнения

$$\lambda = \frac{1}{T_1} \int_0^t \varphi dt. \quad (\text{IX-11})$$

Реакция звена на выходе представляет интеграл от входной функции, что послужило основанием для названия звена интегрирующим.

Передаточная и частотная функции

$$K(z) = \frac{1}{T_1 z}. \quad (\text{IX-12})$$

$$K(i\omega) = \frac{-i}{T_1 \omega} = w + iv; \quad w = 0; \quad v = -\frac{1}{T_1 \omega}. \quad (\text{IX-13})$$

Амплитудно-фазовая характеристика в прямоугольных координатах (w , v) представляет прямую линию, совпадающую с осью Ov в нижней полуплоскости.

Модуль частотной функции

$$\left. \begin{aligned} |K| &= \frac{1}{T_1 \omega} \\ \psi &= -\operatorname{arctg} \infty = -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX-14})$$

Аргумент

Переходная проводимость и функция веса. Переходная проводимость определяется с помощью преобразования Лапласа

$$\begin{aligned} T_1 \lambda' &= 1(t), \\ T_1 \bar{\lambda} &= \frac{1}{s}; \quad \bar{\lambda} = \frac{1}{T_1 s^2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\lambda = \Lambda(t) = \frac{1}{T_1} t. \quad (\text{IX-15})$$

Функция переходной проводимости представляет прямую линию с наклоном β к оси времени

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{T_1}.$$

С течением времени t реакция звена на единичное толчкообразное воздействие возмущения неограниченно возрастает.

Функция веса

$$W(t) = \Lambda'(t) = \frac{1}{T_1} \quad (\text{IX-16})$$

имеет постоянное значение.

Учитывая свойство интегрирующего звена давать реакцию, неограниченно возрастающую с течением времени, интегрирующее звено всегда применяют в совокупности с другими звеньями, или с приспособлениями, ограничивающими действие звена определенным пределом.

В качестве примера интегрирующего звена укажем на сервомотор со струйной трубкой без обратной связи, уравнение которого приведено в табл. 4 главы VII.

$$T_s \lambda' = \sigma.$$

5. АПЕРИОДИЧЕСКОЕ ЗВЕНО 2-ГО ПОРЯДКА

Дифференциальное уравнение апериодического звена 2-го порядка в безразмерной форме имеет вид

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + \delta) \lambda(t) = \varphi(t) \quad (\text{IX-17})$$

при условии соблюдения неравенства

$$\frac{1}{4\delta} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2 > 1.$$

Введем отношение $\rho = \frac{T_1}{2T_2V\delta}$. Это отношение есть безразмерная величина. Она носит название коэффициента демпфирования. Таким образом, апериодическое звено 2-го порядка выражается уравнением (IX-17) при условии, что $\rho^2 > 1$.

Нетрудно показать, что апериодическое звено 2-го порядка может быть разложено на два последовательно соединенных апериодических звена первого порядка.

В самом деле допустим, что имеется два таких звена с параметрами T_{11} , δ_1 и T_{12} , δ_2 .

Тогда справедлива система уравнений

$$(T_{11}\rho + \delta_1)\lambda_1(t) = \varphi(t).$$

$$(T_{12}\rho + \delta_2)\lambda(t) = \lambda_1(t).$$

Исключая $\lambda_1(t)$, приходим к уравнению

$$(T_{11} + \delta_1)(T_{12}\rho + \delta_2)\lambda(t) = \varphi(t).$$

Подберем значения параметров звеньев первого порядка так, чтобы соблюдались равенства:

$$T_{11} \cdot T_{12} = T_1^2; \quad \delta_2 T_{11} + \delta_1 T_{12} = T_1 \quad \delta_1 \delta_2 = \delta.$$

Тогда будет иметь место эквивалентность обоих случаев: апериодического звена 2-го порядка и двух последовательно включенных звеньев 1-го порядка.

Нетрудно видеть, что имеется множество решений, удовлетворяющих поставленной задаче.

Мы остановимся на одном решении, когда

$$\delta_1 = \delta \quad \text{и} \quad \delta_2 = 1.$$

Тогда

$$T_{11} = T_1 \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}}{2\rho} \quad \text{и} \quad T_{12} = T_1 \frac{\rho \mp \sqrt{\rho^2 - 1}}{2\rho\delta}.$$

Поскольку для апериодического звена 2-го порядка $\rho > 1$, разложение всегда возможно.

Таким образом, это звено по своим особенностям должно быть сходным со звеном 1-го порядка. Учитывая распространенность звена этого типа в системах автоматического регулирования, мы рассмотрим его несколько подробнее.

Функция переходной проводимости. Определим функцию переходной проводимости звена.

Полагая что $\varphi(t) = 1(t)$ и преобразуя это выражение по Лапласу, имеем $(T_2^2 z^2 + T_1 z + \delta)\bar{\lambda} = \frac{1}{z}$.

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{z(T_2^2 z^2 + T_1 z + \delta)}.$$

Корни трехчлена $T_2^2 z^2 + T_1 z + \delta$ при $\rho^2 > 1$ или $T_1^2 > 4\delta T_2^2$ и $\delta > 0$ будут всегда вещественными и отрицательными. Обозначим их соответственно $z_1 = -\alpha$; $z_2 = -\beta$, где

$$\alpha = \frac{T_1 + 2T_2 \sqrt{\delta(\rho^2 - 1)}}{2T_2^2};$$

$$\beta = \frac{T_1 - 2T_2 \sqrt{\delta(\rho^2 - 1)}}{2T_2^2}.$$

В связи с этим трехчлен $T_2^2 z^2 + T_1 z + \delta$ всегда может быть разложен на два множителя первой степени

$$T_2^2 z^2 + T_1 z + \delta = T_2^2 (z + \alpha)(z + \beta).$$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{T_2^2 (z + \alpha)(z + \beta)}.$$

Производим обратное преобразование

$$\lambda = \Lambda(t) = \frac{1}{T_2^2 \alpha \beta} \left[1 + \frac{\alpha e^{-\beta t} - \beta e^{-\alpha t}}{\beta - \alpha} \right] = \frac{1}{\delta} - A_1 e^{-\beta t} + A_2 e^{-\alpha t}, \quad (IX.18)$$

где

$$A_1 = \frac{T_2^2 \beta}{2\delta \sqrt{\delta(\rho^2 - 1)}}; \quad A_2 = \frac{T_2^2 \alpha}{2\delta \sqrt{\delta(\rho^2 - 1)}}.$$

Итак, реакция звена на единичное толчкообразное возмущающее воздействие состоит из двух слагаемых: установившегося значения, равного $\frac{1}{\delta}$, и переходной составляющей, состоящей из двух апериодически затухающих слагаемых, имеющих разные знаки.

Кривая переходной проводимости всегда имеет касание с осью абсцисс в начале координат.

Это следует из того, что

$$\left[\frac{d\lambda}{dt} \right]_{t=0} = [A_1 \beta e^{-\beta t} - A_2 \alpha e^{-\alpha t}]_{t=0} = 0.$$

С другой стороны, при $t = \infty$ $\Lambda(t) = \frac{1}{\delta}$. Из этого следует, что кривая $\Lambda(t)$ должна иметь точку перегиба.

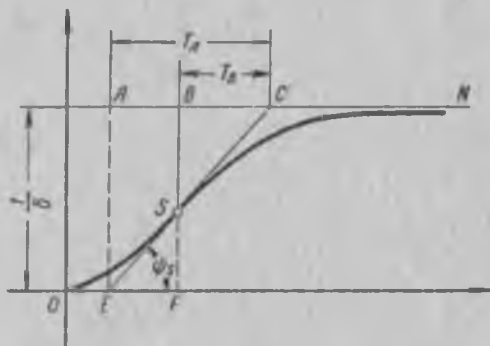
Это свойство функции переходной проводимости позволяет экспериментальным путем определить постоянные времени T_1 и T_2 звена, если заснята кривая $\lambda(t)$ и функции времени.

Пусть на фиг. 176 кривая OSN есть кривая $\lambda(t)$ и точка S ее точка перегиба.

Для точки перегиба S измерим отрезки

$$\overline{OF} = t_s; \quad \overline{AC} = T_A; \quad \overline{BC} = T_B; \quad \overline{SF} = m$$

и



$$\operatorname{tg} \psi_s = \frac{m}{T_A - T_B}.$$

Для точки перегиба должно быть

$$\left[\frac{d^2 \lambda}{dt^2} \right]_{t_s} = 0; \quad -A_2 \beta^2 e^{-\beta t_s} + A_1 \alpha^2 e^{-\alpha t_s} = 0.$$

Так как

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \text{то,}$$

$$\frac{e^{-\beta t_s}}{e^{-\alpha t_s}} = \frac{\alpha}{\beta}. \quad (\text{IX-19})$$

$$\operatorname{tg} \psi_s = \left[\frac{d\lambda}{dt} \right]_{t_s} = A_2 \beta e^{-\beta t_s} - A_1 \alpha e^{-\alpha t_s}.$$

$$\text{Кроме того, } \overline{SB} = \frac{1}{\delta} - m = -A_1 e^{-\alpha t_s} + A_2 e^{-\beta t_s}.$$

Из фигуры следует:

$$\operatorname{tg} \psi_s = \frac{\overline{SB}}{T_B}.$$

Тогда

$$\frac{1}{T_B} (A_1 e^{-\alpha t_s} - A_2 e^{-\beta t_s}) = -A_2 \beta e^{-\beta t_s} + A_1 \alpha e^{-\alpha t_s}. \quad (\text{IX-20})$$

Уравнение (IX-20) после преобразований примет вид

$$\frac{1}{T_B} = \frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\delta}{T_1}.$$

Отсюда

$$T_1 = \delta T_B. \quad (\text{IX-21})$$

Таким образом, постоянная времени звена T_1 равна времени T_B , умноженному на δ . Величина δ определяется по установившемуся значению кривой $\lambda(t)$.

Дальнейшее решение состоит в определении величин α и β .

исходя из уравнения $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \frac{\delta}{T_1}$, зависимости $A_2 - A_1 = \frac{1}{\delta}$ и выражения T_A , после чего вычисляется постоянная времени T_2 .

Кривая переходной проводимости затухает по апериодическому закону. При построении кривых переходных процессов целесообразно вместо постоянных времени T_1 и T_2 применять так называемые типовые значения постоянных времени, которые представляют обратные значения чисел α и β .

Будем обозначать эти величины соответственно $\bar{T}_1$ и $\bar{T}_2$,

$$\bar{T}_1 = \frac{1}{\alpha}; \quad \bar{T}_2 = \frac{1}{\beta}.$$

$$\bar{T}_1 \bar{T}_2 = \frac{1}{\alpha\beta}; \quad \bar{T}_1 + \bar{T}_2 = \frac{T_1}{\delta}.$$

Уравнение звена, выраженное через эти параметры, имеет вид

$$\bar{T}_1 \bar{T}_2 \lambda^2 + (\bar{T}_1 + \bar{T}_2) \lambda + 1 = \frac{1}{\delta} \varphi.$$

Выражение переходной проводимости теперь будет

$$\Lambda(t) = \frac{1}{\delta} + A_1 e^{-\frac{t}{\bar{T}_1}} - A_2 e^{-\frac{t}{\bar{T}_2}}, \quad (\text{IX-22})$$

Всякая составляющая вида $Ae^{-\frac{t}{T}}$, где T есть типовое время, затухает. Закон затухания можно проследить по табл. 5.

Таким образом, определив типовое время для рассматриваемой составляющей, откладываем его по оси времени равными интервалами. Значения ординат определяются по табл. 5.

Передаточная и частотная функции. Передаточную функцию звена определяем как отношение изображений выходной и входной функций

$$(T_2^2 z^2 + T_1 z + \delta) \bar{\lambda} = \bar{\varphi}; \quad K(z) = \frac{1}{T_2^2 z^2 + T_1 z + \delta}. \quad (\text{IX-23})$$

Частотная функция

$$K(i\omega) = \frac{1}{\delta - T_2^2 \omega^2 + iT_1 \omega} = \omega + i\nu = |K| e^{i\psi}. \quad (\text{IX-24})$$

$$\omega = \frac{\delta - T_2^2 \omega^2}{(\delta - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2} = \frac{A}{A^2 + B^2}; \quad \nu = \frac{-T_1 \omega}{(\delta - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2} = \frac{B}{A^2 + B^2}.$$

Таблица 5

t	$Ae^{-\frac{t}{T}}$
$t = 0$	A
$t = \bar{T}$	$0.3579A$
$t = 2\bar{T}$	$0.1353A$
$t = 3\bar{T}$	$0.0498A$
$t = 4\bar{T}$	$0.0183A$
$t = 5\bar{T}$	$0.0067A$
$t = 6\bar{T}$	$0.0025A$

Модуль частотной функции

$$|K| = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\delta - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}}.$$

Аргумент частотной функции

$$\psi = \arctg \frac{B}{A}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика изображена на фиг. 179
При

$$\omega = 0 \quad |K|_0 = \frac{1}{\delta}.$$

$$\omega = \infty \quad |K|_{\infty} = 0.$$

Максимум значения $|K|$ достигается, когда знаменатель дроби принимает минимальное значение.

Для нахождения экстремумов знаменателя решаем уравнение

$$-2(\delta - T_2^2 \omega^2) T_2^2 \omega + T_1^2 \omega = 0$$

$$\omega_1 = 0; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2} \sqrt{\delta - \frac{1}{2} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2}$$

$$|K|_{1\max} = \frac{1}{\delta} \text{ при } \omega_1 = 0; \quad |K|_{2\max} = \frac{T_2}{T_1 \sqrt{\delta(1 - \rho^2)}} \text{ при } \omega_2.$$

Для нашего случая, апериодического звена $\rho > 1$, второй экстремум отсутствует, так как ω принимает при этом не вещественное значение. Это указывает на то, что модуль $|K|$ для апериодического звена, у которого $\rho > 1$ с ростом частоты монотонно убывает, имея наибольшее значение при $\omega = 0$.

Построение амплитудно-фазовой характеристики производится методом пересечения двух окружностей или окружности и прямой, как было описано выше.

Уравнение пучка прямых

$$\frac{v}{\omega} = \frac{-T_1 \omega}{\delta - T_2^2 \omega^2} = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол наклона луча к оси ω .

Уравнение пучка окружностей

$$\omega^2 + \left(v + \frac{1}{2T_1 \omega} \right)^2 = \frac{1}{4T_1^2 \omega^2},$$

где ω — текущий параметр.

Все окружности и прямые проходят через начало координат.

Предельный случай ($\rho = 1$). Если $\rho = 1$, то $\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 - 4\delta = 0$.

Изображение выходной функции при единичном толчкообразном воздействии будет

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{T_2^2 z (z + \alpha)^2}, \quad (IX-25)$$

так как

$$\alpha = \beta = \frac{T_1}{2T_2}.$$

Оригинал выходной функции находим по таблице L -изображений

$$\lambda(t) = \Delta(t) = \frac{1}{\delta} [1 - (1 + \alpha t) e^{-\alpha t}] = N + (A + Bt) e^{-\alpha t}. \quad (IX-26)$$

Из формулы следует, что для предельного случая $\rho = 1$, реакция звена так же, как и для $\rho > 1$, состоит из двух слагаемых: установившейся составляющей и переходной составляющей.

В отличие от случая $\rho > 1$ переходная составляющая здесь имеет вид функции $(A + Bt)e^{-\alpha t}$. Характер затухания этой функции апериодический. Характерной особенностью кривой переходной производимости при $\rho = 1$ является постоянство отношения подкасательных T_A и T_B (176) независимо от значения параметров звена α и β .

В самом деле, из условия равенства нулю второй производной функции $\lambda(t)$, находим для точки перегиба (фиг. 176)

$$I_2 = \bar{O}F = \frac{1}{\alpha};$$

$$\bar{S}F = \lambda(t_s) = \frac{1}{\delta} (1 - 2e^{-1}); \quad \bar{B}S = \frac{2}{\delta} e^{-1};$$

$$T_A : T_B = \frac{1}{2} e = 1,359.$$

6. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ЗВЕНО

Уравнение этого звена ничем не отличается от уравнения апериодического звена 2-го порядка за исключением условия:

$$\rho < 1 \text{ или } \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 < 4\delta. \quad (IX-27)$$

Переходная проводимость и функция веса. Реакцию звена на единичное толчкообразное возмущающее воздействие определяем

как и для апериодического звена с помощью преобразования Лапласа

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{T_2^2 (z + \alpha)(z + \beta)}$$

Однако здесь α и β будут комплексными числами с положительной вещественной частью

$$\alpha = \frac{T_1 + 2iT_2\sqrt{\delta(1-\rho^2)}}{2T_2^2} = \nu + i\mu,$$

$$\nu = \frac{T_1}{2T_2^2},$$

$$\mu = \frac{\sqrt{\delta(1-\rho^2)}}{T_2}$$

$$\beta = \frac{T_1 - 2iT_2\sqrt{\delta(1-\rho^2)}}{2T_2^2} = \nu - i\mu; \quad (\text{IX-28})$$

L — изображение выходной функции после подстановки ν и μ примет вид

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{T_2^2 [(z + \nu)^2 + \mu^2]}$$

Оригинал находим обратным преобразованием

$$\lambda(t) = \Lambda(t) = \frac{1}{T_2^2} \left[\frac{1}{\nu^2 + \mu^2} + \frac{1}{\mu \sqrt{\nu^2 + \mu^2}} e^{-\nu t} \sin(\mu t - \psi) \right],$$

$$\psi = \arctg \frac{\mu}{\nu}; \quad \nu^2 + \mu^2 = \frac{\delta}{T_2^2}.$$

Положим, что

$$\mu = \omega_c \text{ и } \psi = \psi_c.$$

Тогда

$$\Lambda(t) = \frac{1}{\delta} + B e^{-\nu t} \sin(\omega_c t - \psi_c); \quad B = \frac{1}{\omega_c T_2 \sqrt{\delta}}. \quad (\text{IX-29})$$

Таким образом, реакция колебательного звена на единичное толчкообразное воздействие состоит из двух слагаемых: установившейся составляющей, равной $\frac{1}{\delta}$, и переходной составляющей.

Последняя представляет синусоиду с круговой частотой $\omega_c = \mu$ и с амплитудой $B e^{-\nu t}$, которая с течением времени затухает.

В начальный момент времени $t = 0$ значение переходной составляющей равно $-B \sin \psi_c = -\frac{1}{\delta}$, что отвечает условию $\lambda(0) = 0$.

Начальная амплитуда синусоиды при $t = 0$ будет

$$B = \frac{1}{\delta \sin \psi_c}.$$

Таким образом, функция переходной проводимости колебательного звена в отличие от аperiodического звена имеет колебательный характер с частотой

$$\omega_c = \mu = \frac{V \delta (1 - \delta)^2}{T_2}, \quad (\text{IX-30})$$

называемой частотой собственных колебаний звена.

Для суждения о скорости затухания переходного колебательного процесса вычисляют логарифмический декремент затухания.

Логарифм отношения двух смежных экстремумов затухающей кривой одного направления называется логарифмическим декрементом затухания.

Экстремумы переходной составляющей наступают в моменты времени, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0; \quad -\nu B e^{-\nu t} \sin(\omega_c t - \psi_c) + B e^{-\nu t} \omega_c \cos(\omega_c t - \psi_c) = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}(\omega_c t - \psi_c) = \frac{\omega_c}{\nu}. \quad (\text{IX-31})$$

Решая тригонометрическое уравнение (IX-31), найдем

$$\omega_c t - \psi_c = \operatorname{arctg} \frac{\omega_c}{\nu} + k\pi, \text{ где } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Подставим значение ψ_c :

$$\omega_c t = \operatorname{arctg} \frac{\omega_c}{-\nu} + \operatorname{arctg} \frac{\omega_c}{\nu} + k\pi; \quad t = \frac{k\pi}{\omega_c}.$$

Период собственных колебаний

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c}; \quad t = \frac{kT_c}{2} \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (\text{IX-32})$$

Таким образом, экстремумы одного направления следуют через период T_c .

Логарифмический декремент затухания d найдется из отношения

$$e^{-\nu k T_c}; e^{-\nu (k+1) T_c} = e^{\nu T_c} = e^d$$

$$d = \nu T_c = \ln e^{\nu T_c}. \quad (\text{IX-33})$$

По кривой переходной проводимости, полученной экспериментальным путем, мы можем определить динамические параметры звена T_1 , T_2 и δ .

Для этого выделяем из кривой $\Lambda(t)$ установившуюся составляющую $\frac{1}{\delta}$, измеряем расстояние между экстремумами и находим T_c , определяем отношение двух смежных экстремумов и вычисляем d . Из уравнения $d = \nu T_c$ и $\omega_c = \frac{2\pi}{T_c}$ находим ν и ω_c и далее T_1 и T_2 .

Функция веса имеет вид:

$$W(t) = Be^{-\nu t} [-\nu \sin(\omega_c t - \psi_c) + \omega_c \cos(\omega_c t - \psi_c)] = \\ = \frac{1}{\omega_c T_2^2} e^{-\nu t} \sin \omega_c t. \quad (\text{IX-34})$$

Таким образом, функция веса представляет затухающую синусоиду с круговой частотой ω_c .

Реакция звена на синусоидальное возмущающее воздействие. Уравнение звена $(T_2^2 p^2 + T_1 p + \delta) \lambda(t) = \sin \omega_c t$.

Производим преобразование Лапласа

$$(T_2^2 z^2 + T_1 z + \delta) \bar{\lambda} = \frac{\omega_c}{z^2 + \omega_c^2} \\ \bar{\lambda} = \frac{\omega_c}{T_2^2 (z^2 + \omega_c^2) (z + \alpha) (z + \beta)}$$

Здесь α и β представляют комплексные числа.

В связи с этим

$$\bar{\lambda} = \frac{\omega_c}{T_2^2 (z^2 + \omega_c^2) [(z + \nu)^2 + \mu^2]}$$

Для нахождения оригинала производим обратное L -преобразование

$$\lambda(t) = \frac{\omega_c}{T_2^2 \sqrt{(\nu^2 + \mu^2 - \omega_c^2) + 4\nu^2 \omega_c^2}} \left[\frac{1}{\omega_c} \sin(\omega_c t - \psi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu} e^{-\nu t} \sin(\mu t - \psi_c) \right].$$

В дальнейшем, как и выше, примем $\mu = \omega_c$.

Выходная функция примет вид

$$\lambda(t) = M \left[\sin(\omega_s t - \psi_s) + \frac{\omega_s}{\omega_c} e^{-\gamma t} \sin(\omega_c t - \psi_c) \right]. \quad (\text{IX-35})$$

$$M = \frac{1}{T_2^2 \sqrt{(\gamma^2 + \omega_c^2 - \omega_s^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_s^2}};$$

$$\psi_s = \arctg \frac{2\gamma \omega_s}{\gamma^2 + \omega_c^2 - \omega_s^2};$$

$$\psi_c = \arctg \frac{-2\gamma \omega_c}{\gamma^2 - \omega_c^2 + \omega_s^2}.$$

Анализируя полученную выходную функцию, заключаем, что реакция колебательного звена 2-го порядка на синусоидальное воздействие составляется из двух слагаемых:

а) установившейся составляющей — синусоиды с круговой частотой ω_s , равной частоте возмущающего воздействия. Эта синусоида имеет амплитуду M и отстает по фазе от возмущающего воздействия на угол ψ_s ;

б) переходной составляющей — затухающей синусоиды с частотой собственных колебаний звена ω_c . Начальное значение амплитуды при $t = 0$ равно $M \frac{\omega_s}{\omega_c}$.

Скорость затухания переходной составляющей определяется величиной γ , или логарифмическим декрементом затухания

$$d = \gamma T_c = \gamma \frac{2\pi}{\omega_c}.$$

Если при неизменных параметрах звена изменять частоту ω_s входной функции (возмущения), то при малых значениях γ и равенстве $\omega_s = \omega_c$ наступает резонанс. Резонанс выражается в том, что амплитуда колебаний принимает очень большое значение.

При $\omega_s \approx \omega_c$ и малом γ

$$M \approx \frac{1}{T_2^2 \sqrt{\gamma^2 + 4\gamma^2 \omega_s^2}} = \frac{1}{2\gamma T_2^2 \omega_s}.$$

На фиг. 177 представлены кривые зависимости коэффициента усиления $u = M$ от отношения $\frac{\omega_s}{\omega_c}$ для звена с параметрами $T_2 = 0,08$ и $\omega_c = 1$ сек.

Передаточная функция. Все сказанное выше о передаточной и частотной функциях и амплитудно-фазовой характеристике для апериодического звена 2-го порядка остается справедливым для колебательного звена

Предельный случай $\rho = 0$. При $\rho = 0$ исходное уравнение звена принимает вид

$$(T_2^2 p^2 + \delta) \lambda(t) = \varphi(t); T_1 = 0 \quad (IX-36)$$

$$\alpha = i\rho; \beta = -\rho; \nu = 0.$$

Звено, которое описывается таким уравнением, называется консервативным. Характерная особенность звена — незатухающий переходный процесс.

Переходная проводимость принимает вид

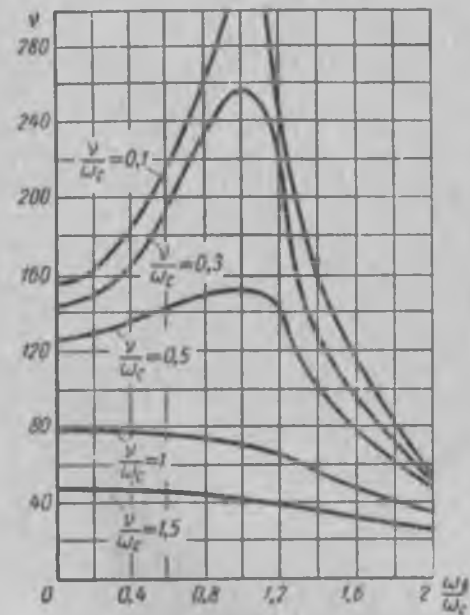
$$\Lambda(t) = \frac{1}{\delta} + B \sin(\omega_c t - \psi_c); \psi_c = \arctg \frac{\omega_c}{-\nu} = \frac{+3\pi}{2}$$

$$\Lambda(t) = \frac{1}{\delta} - B \cos \omega_c t. \quad (IX-37)$$

При синусоидальном возмущении $\varphi(t) = \sin \omega_s t$ выходную функцию найдем положив $\nu = 0$

$$\lambda(t) = M \sin \omega_s t + M \frac{\omega_s}{\omega_c} \sin \omega_c t.$$

$$M = \frac{1}{T_2^2 (\omega_c^2 - \omega_s^2)}.$$



Фиг. 177. Кривые зависимости коэффициента усиления от отношения $\frac{\omega_s}{\omega_c}$.

Здесь выходная функция составляется из двух синусоид: одной — с частотой вынужденных колебаний, вызванной возмущающим воздействием, другой — незатухающей, переходного процесса с частотой колебаний, равной частоте собственных колебаний.

При совпадении ω_s и ω_c наступает резонанс. Консервативное звено относится к группе неустойчивых звеньев.

Влияние демпфирования. Исходя из характера изменения модуля частотной функции, а также значения коэффициента ρ , называемого коэффициентом демпфирования, можно установить следующую качественную классификацию звеньев 2-го порядка (апериодических и колебательных).

1) Сильно-демпфированное звено $\rho > 1$. Переходная составляющая имеет апериодический характер при любой входной функции (возмущения). Модуль $|K|$ частотной функции монотонно убывает с ростом частоты. Наибольшее значение модуля $|K|_{\max}$ равно $\frac{1}{\delta}$ при $\omega = 0$.

Явление резонанса исключено.

2) А п е р и о д и ч е с к о е п р е д е л ь н о е д е м п ф и р о в а н и е $\rho = 1$. Реакция звена имеет аperiodическую составляющую при любом возмущении. Это предельный случай. При малейшем уменьшении отношения $\frac{T_1}{T_2}$ или увеличении δ характер переходного процесса изменяется и становится колебательным.

3) Н о р м а л ь н о - д е м п ф и р о в а н н о е з в е н о $1 > \rho > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Переходная составляющая реакции представляет функцию, имеющую колебательный затухающий характер при любом возмущающем воздействии. Колебания переходной составляющей происходят с частотой

$$\omega_c = \frac{\sqrt{\delta(1-\rho^2)}}{T_2},$$

называемой собственной частотой колебания и независимой от частоты возмущающих воздействий. Явление резонанса не имеет места

Модуль частотной функции с ростом ω монотонно убывает от 0, начиная с величины $|K|_{\max} = \frac{1}{\delta}$ при $\omega = 0$.

4) К р и т и ч е с к и д е м п ф и р о в а н н о е з в е н о $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Модуль частотной функции имеет экстремум $(K)_{\max} = \frac{1}{\delta}$ при $\omega = 0$. В остальном звено ведет себя как нормально демпфированное.

5) С л а б о - д е м п ф и р о в а н н о е з в е н о $\frac{\sqrt{2}}{2} > \rho > 0$. Модуль частотной функции в диапазоне частот от 0 до ∞ имеет максимум

$$|K|_{\max} = \frac{T_2}{T_1 \sqrt{\delta(1-\rho^2)}}.$$

Имеет место резонанс при $\omega_s^2 = \omega_c^2 - \nu^2$, или при $\omega_s = \frac{\sqrt{\delta}}{T_2}$.

При малых значениях отношения $\frac{T_1}{T_2}$, а также малых значениях δ^2 модуль $|K|_{\max}$ может принять очень большое значение.

6) Н е д е м п ф и р о в а н н о е з в е н о $\rho = 0$. Этот случай отвечает значению $T_1 = 0$.

Переходный процесс имеет незатухающий колебательный характер с частотой колебаний $\omega_c = \frac{\sqrt{\delta}}{T_2}$.

При равенстве $\omega_s = \omega_c$ наступает явление резонанса.

Из изложенного видно значение коэффициента демпфирования. Звено демпфировано, если в нем имеются элементы, создающие в цепи системы сопротивление пропорциональное первой степени скорости изменения выходной функции по времени, т. е. первой производной

выходной функции. Постоянная времени T_2 характеризует инерционные свойства звена, тогда как постоянная T_1 характеризует его демпферные свойства.

Звенья 2-го порядка (апериодические и колебательные) имеют широкое применение в системах автоматического регулирования.

7. АСТАТИЧЕСКОЕ ЗВЕНО 2-го ПОРЯДКА

Уравнение этого звена

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p) \lambda = \varphi \quad (IX-38)$$

представляет частный случай общего уравнения звена 2-го порядка при $\delta = 0$, что отвечает $\rho = \infty$. Однако, вследствие вырождения формул при $\rho = \infty$, мы не можем получить выражение выходной функции непосредственной подстановкой $\delta = 0$.

Нетрудно видеть, что это звено может быть разложено на два последовательно включенных простейших звена: на интегрирующее и апериодическое 1-го порядка. Такое разложение выполняется бесчисленным множеством способов. Укажем на один из них

$$T_1 p \lambda_1 = \varphi; (T_2 p + 1) \lambda = \lambda_1.$$

Здесь

$$T_{12} = \frac{T_2^2}{T_1}.$$

Поэтому мы не будем подробно останавливаться на свойствах этого звена. Приведем только основные данные без доказательства.

Переходная проводимость

$$\Lambda(t) = -\frac{T_2^2}{T_1^2} + \frac{1}{T_1} t + \frac{T_2^2}{T_1^2} e^{-at} = -A + Bt + Ae^{-at}. \quad (IX-39)$$

Функция переходной проводимости звена состоит из трех слагаемых: постоянной составляющей, равной $-\frac{T_2^2}{T_1^2}$, переходной составляющей Ae^{-at} апериодически затухающей с течением времени и переходной составляющей Bt , неограниченно возрастающей с течением времени.

Кривая переходной проводимости имеет касание с осью абсцисс в точке $t = 0$. Кроме того, она асимптотически приближается к наклонной прямой $\lambda = \frac{1}{T_1} t - \frac{T_2^2}{T_1^2}$, как показано на фиг. 179.

В самом деле, касательная к кривой в точке $t = \infty$ составляет с осью времени угол, который определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{T_1} - \alpha \frac{T_2^2}{T_1^2} e^{-\alpha t} \quad (\text{IX-40})$$

при $t = \infty \operatorname{tg} \beta_0 = \frac{1}{T_1}$.

Этим свойством кривой переходной проводимости пользуются для определения параметров T_1 и T_2 звена, если известна полученная экспериментальным путем кривая проводимости. Для этого проводим из наиболее удаленной на чертеже точки кривой касательную к ней в этой точке и определяем угол наклона β_0 касательной к оси времени. Тогда $T_1 = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_0}$. Замеряя отрезок t_0 наклонной прямой на оси времени, находим постоянную времени T_2 из равенства

$$t_0 = \frac{T_2^2}{T_1}.$$

Функция веса определится как производная переходной проводимости

$$W(t) = \frac{1}{T_1} (1 - e^{-\alpha t}). \quad (\text{IX-41})$$

Передаточная и частотная функции. Передаточная функция

$$K(z) = \frac{\lambda}{\varphi} = \frac{1}{T_2^2 z(z + \alpha)}. \quad (\text{IX-42})$$

Частотная функция

$$\left. \begin{aligned} K(i\omega) &= \frac{1}{iT_2^2 \omega(i\omega + \alpha)} = \omega + i\nu = |K| e^{i\psi} \\ \omega &= \frac{1}{T_2^2 (\omega^2 + \alpha^2)}; \quad \nu = \frac{-\alpha}{\omega T_2^2 (\omega^2 + \alpha^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX-43})$$

Модуль частотной функции

$$|K| = \sqrt{\omega^2 + \nu^2} = \frac{1}{\omega T_2 \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2}}. \quad (\text{IX-44})$$

Аргумент частотной функции $\psi = \operatorname{arctg} \frac{-\alpha}{\omega}$.

По мере роста частоты ω модуль монотонно убывает от $|K| = \infty$ при $\omega = 0$ до $|K| = 0$ при $\omega = \infty$.

При этом аргумент изменяется от $\psi = \frac{3\pi}{2}$ до $\psi = \pi$.

Общий вид амплитудно-фазовой характеристики показан на фиг. 179.

8. ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ ЗВЕНЬЯ

Характерным отличием дифференцирующих звеньев от других является наличие в уравнении звена члена с первой производной от входной функции.

Дифференцирующие звенья по своей структуре могут быть разделены на следующие основные виды:

- а) гибкое (изодромное) звено со статизмом;
- б) гибкое (изодромное) звено без статизма;
- в) собственно дифференцирующее звено.

Во всех уравнениях ниже символ p представляет дифференциальный оператор.

Рассмотрим отдельно каждую группу:

а) Гибкое (изодромное) звено со статизмом

Уравнение звена

$$(T_1 p + \delta) \lambda(t) = (\hat{T}_1 p + 1) \varphi(t). \quad (\text{IX-45})$$

Переходная проводимость вычисляется обычным приемом преобразования Лапласа при $\varphi(t) = 1(t)$

$$\bar{\lambda} = \frac{\hat{T}_1 z + 1}{z(T_1 z + \delta)} = \frac{\hat{T}_1}{T_1} \left[\frac{1}{z + \alpha} + \frac{\gamma}{z(z + \alpha)} \right]; \quad \alpha = \frac{\delta}{T_1}; \quad \gamma = \frac{1}{\hat{T}_1}. \quad (\text{IX-46})$$

Оригинал найдем по таблице L -изображений

$$\lambda(t) = \Lambda(t) = \frac{1}{\delta} - \left(\frac{1}{\delta} - \frac{\hat{T}_1}{T_1} \right) e^{-\alpha t} = A + B e^{-\alpha t}. \quad (\text{IX-47})$$

При $\frac{\hat{T}_1}{T_1} < \frac{1}{\delta}$ величина $\lambda(t)$ не превосходит значения $\frac{1}{\delta}$ и имеет вид, показанный на фиг. 179. При $t = \infty \Lambda(t) = \frac{1}{\delta}$.

При $\frac{\hat{T}_1}{T_1} > \frac{1}{\delta}$ $\Lambda(t)$ приобретает убывающий характер. Наибольшее значение $\Lambda(t) = \frac{\hat{T}_1}{T_1}$ будет при $t = 0$. Переходная проводимость имеет теперь вид, показанный на той же фиг. 179.

При $\frac{\hat{T}_1}{T_1} = \frac{1}{\delta}$ переходная составляющая исчезает и $\Lambda(t) = \frac{1}{\delta}$.

В этом случае звено ведет себя как обыкновенное усилительное звено.

Функция веса

$$W(t) = \frac{1}{T_1} \left(1 - \delta \frac{\hat{T}_1}{T_1} \right) e^{-\delta t}. \quad (\text{IX-48})$$

Передаточная функция

$$K(z) = \frac{\hat{T}_1 z + 1}{T_1 z + \delta}. \quad (\text{IX-49})$$

Частотная функция

$$K(i\omega) = \frac{i\hat{T}_1\omega + 1}{iT_1\omega + \delta} = w + iv = |K|e^{i\psi}$$

$$w = \frac{\delta + \hat{T}_1 T_1 \omega^2}{\delta^2 + T_1^2 \omega^2}; \quad v = \frac{\omega (\hat{T}_1 \delta - T_1)}{\delta^2 + T_1^2 \omega^2}.$$

Модуль частотной функции

$$|K| = \frac{\sqrt{1 + \hat{T}_1^2 \omega^2}}{\sqrt{\delta^2 + T_1^2 \omega^2}}. \quad (\text{IX-50})$$

Аргумент

$$\psi = \arctg \frac{\omega (\hat{T}_1 \delta - T_1)}{\delta + \hat{T}_1 T_1 \omega^2}. \quad (\text{IX-51})$$

$|K|$ не имеет экстремума на всем интервале от $\omega = 0$ до $\omega = \infty$.

Аргумент достигает максимума при минимуме выражения $\frac{\delta}{\omega} + \omega \hat{T}_1 T_1$, что имеет место при

$$\omega_m = \sqrt{\frac{\delta}{\hat{T}_1 T_1}}; \quad \psi_{\max} = \arctg \frac{\hat{T}_1 \delta - T_1}{2 \sqrt{\delta T_1 \hat{T}_1}}. \quad (\text{IX-52})$$

Амплитудно-фазовая характеристика представляет полуокружность радиусом $r = \frac{1}{2} \left| \frac{\hat{T}_1}{T_1} - \frac{1}{\delta} \right|$ с центром в точке, координаты которой $w = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\delta} + \frac{\hat{T}_1}{T_1} \right)$ и $v = 0$.

При $\hat{T}_1 > \frac{T_1}{\delta}$ аргумент $\psi > 0$, амплитудно-фазовая характеристика расположена в I квадранте системы координат.

При $\hat{T}_1 < \frac{T_1}{\delta}$ аргумент $\psi < 0$, амплитудно-фазовая характеристика расположена в IV квадранте.

Звенья указанного типа встречаются в изодромных устройствах с остаточной неравномерностью, а также в ряде электрических схем с ламповыми усилителями.

б) Гибкое (изодромное) звено без статизма

Уравнение звена

$$(T_1 p + 1) \lambda(t) = \hat{T}_1 p \varphi(t). \quad (\text{IX-53})$$

Переходная проводимость звена $\Lambda(t)$ находится решением уравнения $(T_1 p + 1) \lambda = \hat{T}_1 p \cdot 1(t)$; $\bar{\lambda} = \frac{\hat{T}_1}{T_1(\bar{s} + a)}$; $\alpha = \frac{1}{T_1}$.

Оригинал

$$\lambda(t) = \Lambda(t) = \frac{\hat{T}_1}{T_1} e^{-at}. \quad (\text{IX-54})$$

Переходная проводимость звена состоит из одной переходной составляющей затухающей по закону e^{-at} .

Функция веса

$$W(t) = -\frac{\hat{T}_1}{T_1^2} e^{-at}. \quad (\text{IX-55})$$

Передаточная функция звена

$$K(z) = \frac{\hat{T}_1 z}{T_1 z + 1}. \quad (\text{IX-56})$$

Частотная функция

$$K(i\omega) = \frac{i\hat{T}_1\omega}{iT_1\omega + 1} = \omega + i\nu = |K|e^{i\psi}.$$

$$\omega = \frac{T_1 \hat{T}_1 \omega^2}{1 + T_1^2 \omega^2}; \quad \nu = \frac{\hat{T}_1 \omega}{1 + T_1^2 \omega^2}. \quad (\text{IX-57})$$

Модуль частотной функции

$$|K| = \frac{\hat{T}_1 \omega}{\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2}}$$

Аргумент $\psi = \operatorname{arctg} \frac{1}{T_1 \omega}$.

При

$$\omega = 0 \quad |K| = 0 \quad \psi = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \infty \quad |K| = \frac{\hat{T}_1}{T_1}; \quad \psi = 0.$$

Амплитудно-фазовая характеристика представляет полуокружность в верхней полуплоскости с центром в точке, имеющей координаты $\omega = \frac{1}{2} \frac{\bar{T}_1}{T_1}$, $\nu = 0$ и с радиусом $r = \frac{1}{2} \frac{\bar{T}_1}{T_1}$.

в) Собственно-дифференцирующее звено

Уравнение звена

$$\lambda = \bar{T}_1 \varphi'. \quad (\text{IX-58})$$

Из этого уравнения видно, что выходная функция пропорциональна первой производной от воздействия возмущения. Для решения уравнения достаточно найти производную от этого воздействия.

Переходная проводимость в нашем случае будет

$$\Lambda(t) = \bar{T}_1 l'(t).$$

Если функция

$$\varphi(t) = l(t) = 1 \text{ при } t > 0,$$

то

$$\varphi'(t) = l'(t) = 0 \text{ при } t < 0.$$

Для момента времени $t = 0$

$$\varphi'(t) = l'(t) = \lim_{\Delta t} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \infty.$$

Хотя при $t = 0$ $\Lambda(0) = \infty$, однако импульс $\Lambda(0) \Delta t$ имеет конечное значение, равное $\bar{T}_1$.

В самом деле

$$\lim \Lambda(0) \Delta t = \bar{T}_1 \lim \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \Delta t = \bar{T}_1, \text{ так как } \Delta \varphi = 1. \quad (\text{IX-59})$$

Графическое представление переходной проводимости дано на фиг. 179.

Передаточная функция $K(z) = \bar{T}_1 z$.

Частотная функция $K(j\omega) = i\bar{T}_1 \omega$.

Амплитудно-фазовая характеристика представляет для $\omega = 0$ до $\omega = +\infty$ отрезок оси y в верхней полуплоскости.

Дифференцирующее и интегрирующее звенья взаимно обратимы.

Пусть, например, уравнение интегрирующего звена будет

$$T_1 \lambda_1 = \varphi_1,$$

а уравнение дифференцирующего

$$\lambda_2 = \bar{T}_1 \varphi_2'.$$

Если $\lambda_1 = \varphi_2$ и $T_1 = T_1$, то $\lambda_2 = \varphi_1$.

Дифференцирующие звенья применяются, главным образом, в корректирующих устройствах.

9. ЗВЕНЬЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ СТАТИЗМОМ

Звенья, отвечающие уравнениям

$$(T_1 p - \delta)\lambda = \varphi; (T_2^2 p^2 + T_1 p - \delta)\lambda = \varphi \text{ и } (T_2^2 p^2 - \delta)\lambda = \varphi \text{ при } \delta > 0,$$

получают название звеньев с отрицательным статизмом.

Все эти звенья имеют неустойчивый переходный процесс. Значения передаточной функции, функции переходной проводимости и функции веса для этих звеньев находятся из соответствующих формул звеньев с положительным статизмом, путем замены δ на $-\delta$. Неустойчивый характер переходного процесса для всех звеньев с отрицательным статизмом легко установить по их характеристическим уравнениям.

Для звена с уравнением $(T_1 p - \delta)\lambda = \varphi$ имеем $T_1 p - \delta = 0$; $p = \frac{\delta}{T_1} > 0$. Наличие положительного вещественного корня свидетельствует о неустойчивости процесса, так как выходная величина звена с течением времени будет неограниченно возрастать. Вопрос об устойчивости процесса будет рассмотрен в главе X.

Для звена, имеющего уравнение

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p - \delta)\lambda = \varphi,$$

характеристическое уравнение будет соответственно

$$T_2^2 p^2 + T_1 p - \delta = 0.$$

Его корни

$$p_{1,2} = \frac{-T_1 \pm \sqrt{T_1^2 + 4T_2^2\delta}}{2T_2^2}.$$

Так как $\sqrt{T_1^2 + 4T_2^2\delta} > T_1$, то один корень всегда будет > 0 , что приводит к неустойчивому переходному процессу. К тому же результату придем для звена с уравнением

$$(T_2^2 p^2 - \delta)\lambda = \varphi,$$

так как корни его характеристического уравнения $p_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{\delta}}{T_2}$.

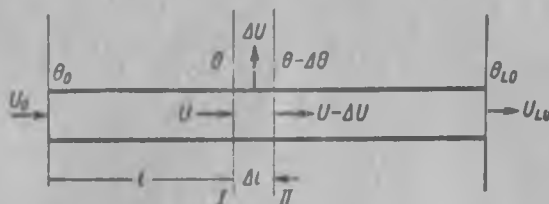
Один из корней будет всегда вещественным положительным.

Все звенья с отрицательным статизмом, а также консервативные и интегрирующие, несмотря на неустойчивый характер их переходного

процесса, встречаются в системах автоматического регулирования. Однако их использование возможно только в комбинации с корректирующими и стабилизирующими устройствами, обеспечивающими устойчивость системы в целом.

10. ЗВЕНЬЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

В практических условиях в ряде случаев приходится считаться с отставанием по времени передачи регулирующих воздействий от чувствительного элемента до регулирующего органа. Такое явление



Фиг. 178. Схема передачи тепла по длинному трубопроводу.

называется запаздыванием, а звенья системы регулирования, которым присуще запаздывание, называются звеньями с запаздыванием.

Запаздывание, например, наблюдается при передаче давления, тепла по длинным трубопроводам, когда точка замера удалена от регулирующего органа.

Для примера рассмотрим передачу тепла по длинному, хорошо изолированному трубопроводу, изображенному схематически на фиг. 178.

Обозначим:

θ_0 — температуру воды на входе;

θ — температуру воды в произвольном месте трубы;

θ_k — температуру воды на выходе;

U_0 — количество тепла, поступающего с водой на входе в единицу времени;

U — то же в произвольном сечении трубы в единицу времени;

l — расстояние произвольного сечения трубы от начала;

l_k — полную длину трубопровода.

Сечение трубы принимаем везде одинаковым, так же как и скорость движения жидкости.

Потеря тепла на участке Δl между двумя сечениями I и II

$$\Delta U = -\Delta\theta \frac{M}{\Delta t} Fc. \quad (IX-50)$$

Здесь: F — поперечное сечение трубы;
 c — теплоемкость передающей жидкости;
 $\frac{\Delta l}{\Delta t}$ — скорость движения жидкости

$$\frac{\Delta U}{\Delta l} = - \frac{\Delta \theta}{\Delta t} Fc$$

или в пределе

$$\frac{\partial U}{\partial l} = - Fc \frac{\partial \theta}{\partial t}; \quad (IX-61)$$

U и θ — суть функции двух независимых переменных l и t .

С другой стороны количество тепла, которое несет с собой жидкость, пропорционально температуре θ , если нет утечки жидкости $U = \theta \cdot k$.

Отсюда

$$\frac{\partial \theta}{\partial l} = - \frac{Fc}{k} \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (IX-62)$$

Произведем L -преобразование этого уравнения по переменной t . На основании правила дифференцирования по второй переменной можем написать

$$\frac{\partial}{\partial l} \bar{\theta}(l, z) = - \frac{Fc}{k} z \bar{\theta}(l, z).$$

Положим

$$\bar{\theta}(l, z) = y$$

$$\frac{\partial y}{\partial l} = - \frac{Fc}{k} z y; \quad \frac{\partial y}{y} = - \frac{Fc}{k} z dl.$$

Отсюда

$$y = \bar{\theta}(l, z) = A e^{-\frac{Fc}{k} z l}.$$

При $l = 0$; $\bar{\theta}(l, z) = \bar{\theta}(0, z) = A$.

При $l = \infty$ $\bar{\theta}(l, z) = 0$

$$\bar{\theta}(l, z) = \bar{\theta}(0, z) e^{-mlz} = \bar{\theta}(0, z) e^{-az}$$

$$a = ml; \quad m = \frac{Fc}{k}$$

a — имеет размерность времени.

Переходя от L -изображения к оригиналу, найдем

$$\theta(l, t) = \theta(0, t - a). \quad (\text{IX-63})$$

При $l = l_k$ имеем $\theta(l_k, t) = \theta(0, t - a)$, где $a = ml_k$. Отсюда вывод: выходная функция в конце трубы представляет неискаженную функцию на входе $\theta(0, t)$ с запаздыванием по времени на a секунд.

Время a определяется длиной трубы и скоростью распространения m воздействия возмущения.

Рассмотрим звено с запаздыванием.

Уравнение такого звена представится в виде

$$D(p) \lambda_1(t) = U(p) \varphi(t - a). \quad (\text{IX-64})$$

Сопоставим его с уравнением без запаздывания

$$D(p) \lambda_2(t) = U(p) \varphi(t).$$

Решаем параллельно оба уравнения, пользуясь преобразованием Лапласа

$$D(z) \bar{\lambda}_1 = U(z) e^{-az} \bar{\varphi}; \quad D(z) \bar{\lambda}_2 = U(z) \bar{\varphi}$$

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{U(z)}{D(z)} e^{-az} \bar{\varphi}; \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{U(z)}{D(z)} \bar{\varphi}$$

$$\lambda_1(t) = L^{-1} \frac{U(z)}{D(z)} e^{-az} \bar{\varphi}; \quad \lambda_2(t) = L^{-1} \frac{U(z)}{D(z)} \bar{\varphi}.$$

На основании свойств L -преобразований находим

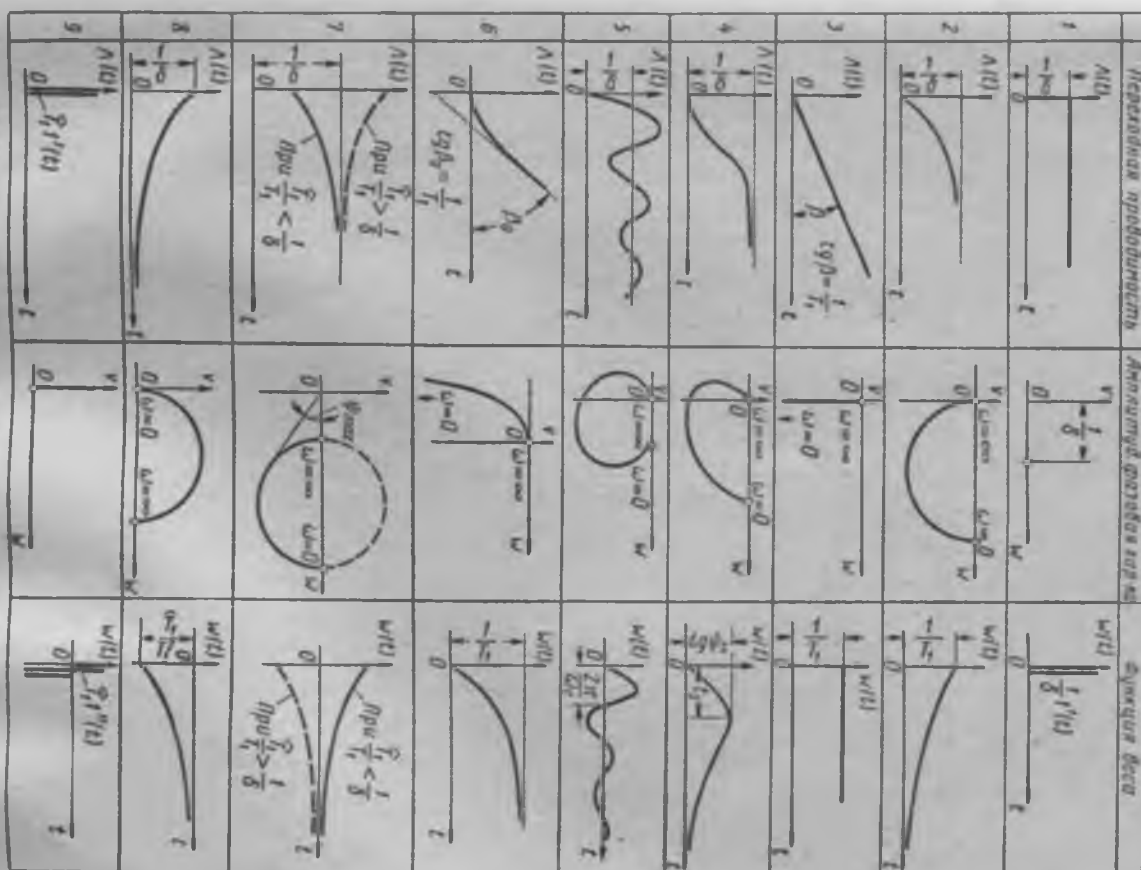
$$\lambda_1(t) = \lambda_2(t - a). \quad (\text{IX-65})$$

Отсюда определяем правило для интегрирования уравнения звена, обладающего запаздыванием:

1. Вначале интегрируем уравнение при отсутствии запаздывания.
2. В полученное выражение общего решения без запаздывания делаем подстановку $t - a$ вместо t , где a есть время запаздывания.
3. Определенное таким образом выражение представляет общее искоемое решение уравнения звена с запаздыванием. Это правило справедливо для звеньев любого порядка.

Основные показатели простейших звеньев

№ по пор.	Наименование звена	Типовое уравнение неустановившегося режима	Передаточная функция $K(z)$	Переходная проводимость $\Delta(t)$	Функция веса $W(t)$	
1	Безынерционное уси- тельное звено	$\delta \lambda = \varphi$	$\frac{1}{\delta}$	$\frac{1}{\delta} 1(t)$	$\frac{1}{\delta} 1'(t)$	
2	Апериодическое звено 1-го порядка	$(T_1 p + \delta) \lambda = \varphi$	$\frac{1}{T_1 z + \delta}$	$\frac{1}{\delta} \left(1 - e^{-\frac{\delta t}{T_1}} \right)$	$\frac{1}{T_1} e^{-\frac{\delta t}{T_1}}$	
3	Интегрирующее звено (астатическое)	$T_1 p \lambda = \varphi$	$\frac{1}{T_1 z}$	$\frac{1}{T_1} t$	$\frac{1}{T_1}$	
4	Апериодическое звено 2-го порядка	$(T_2^2 p^2 + T_1 p + \delta) \lambda = \varphi$ $\rho \geq 1$	$\frac{1}{T_2^2 z^2 + T_1 z + \delta}$	$\frac{1}{\delta} + A_1 e^{-\alpha t} - A_2 e^{-\beta t}$	$A_1 \beta e^{-\beta t} - A_2 \alpha e^{-\alpha t}$	
5	Колебательное звено	$(T_2^2 p^2 + T_1 p + \delta) \lambda = \varphi$ $\rho < 1$	$\frac{1}{T_2^2 z^2 + T_1 z + \delta}$	$\frac{1}{\delta} + B e^{-\nu t} \sin(\omega_c t - \phi_c)$	$\frac{e^{-\nu t}}{\omega_c T_2^2} \sin \omega_c t$	
6	Астатическое звено 2-го порядка	$(T_2^2 p^2 + T_1 p) \lambda = \varphi$	$\frac{1}{z(T_2^2 z + T_1)}$	$-A(1 - e^{-\alpha t}) + Bt$	$B - A \alpha e^{-\alpha t}$	
7	Дифференциру- ющие звенья	Гибкое (изотроп- ное) звено со статизмом	$(T_1 p + \delta) \lambda = (\bar{T}_1 p + 1) \varphi$	$\frac{\bar{T}_1 z + 1}{T_1 z + \delta}$	$A + B e^{-\alpha t}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{T_1} \left(1 - \delta \frac{\bar{T}_1}{T_1} \right)$
8		Гибкое (изотроп- ное) звено без статизма	$(T_1 p + 1) \lambda = \bar{T}_1 p \varphi$	$\frac{\bar{T}_1 z}{T_1 z + 1}$	$\frac{\bar{T}_1}{T_1} e^{-\alpha t}$	$-\frac{\bar{T}_1}{T_1^2} e^{-\alpha t}$
9		Собственно диф- ференцирующее звено	$\lambda = \bar{T}_1 p \varphi$	$\bar{T}_1 z$	$\bar{T}_1 \cdot 1'(t)$	$\bar{T}_1 \cdot 1''(t)$



Фиг. 179. Графики характеристик простейших звеньев. Приложение к табл. 6.

Пример. Определить реакцию колебательного звена 2-го порядка с запаздыванием на единичное толчкообразное воздействие.

Уравнение звена

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + \delta) \lambda = \varphi(t - a).$$

Интегрируем сперва уравнение

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + \delta) \lambda = 1(t).$$

Решение этого уравнения было дано выше (см. формулу IX-29)

$$\lambda_1 = \frac{1}{\delta} + B e^{-\gamma t} \sin(\omega_c t - \psi_c).$$

Делая подстановку $t - a$ вместо t получим искомый результат

$$\lambda = \frac{1}{\delta} + B e^{-\gamma(t-a)} \sin[\omega_c(t-a) - \psi_c].$$

В табл. 6 приводятся сводные данные основных показателей рассмотренных выше простейших звеньев, а на фиг. 179 даны графики характеристик этих звеньев.

ГЛАВА X

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Всякая система автоматического регулирования, которая подвергается действию возмущающих сил, отклоняется от заданного ей закона движения; при этом регулятор стремится вернуть систему к этому движению.

В результате под воздействием возмущающих сил с одной стороны и восстанавливающего действия регулятора с другой, возникает переходный процесс. При этом различают три основных случая:

1. Система регулирования не может восстановить требуемого движения после его нарушения возмущающими воздействиями и действительное движение будет удаляться от требуемого все дальше. Такой переходный процесс называется *расходящимся* и система — *неустойчивой*.

2. Система регулирования после нарушения движения возмущающими воздействиями с течением времени возвращается к заданному движению с точностью, отвечающей статической погрешности системы.

Такой переходный процесс будет *сходящимся* и система *устойчивой*. Здесь возмущенное движение системы приближается к заданному асимптотически.

3. Система регулирования после нарушения движения возмущающими воздействиями получает дополнительно к заданному движению еще установившееся периодическое движение, которое представляет незатухающие периодические колебания. Такой переходный процесс называется *незатухающим колебательным*, а система находящийся на границе асимптотической *устойчивости*. Если появившиеся колебания системы *устойчивы*, т. е. система возвращается к этим колебаниям всякий раз, как устраняются воздействия, отклонившие систему из ее состояния, то систему рассматривают как имеющую *устойчивые автоколебания*. Более подробно об этом виде движения сказано ниже, в главе XII.

Рассмотрим для примера систему регулирования скорости двигателя. Здесь заданным законом движения будет поддержание постоянства скорости.

При установившемся равновесном состоянии крутящий момент двигателя в точности равен моменту нагрузки, регулирующий клапан неподвижен, угловая скорость вала двигателя постоянна и равна предписанному значению (с точностью до статической погрешности).

При внезапном увеличении нагрузки скорость двигателя уменьшается, в действие приходит регулятор и регулирующий орган, который заставляет двигатель принять с течением времени новое равновесное состояние, отвечающее новой нагрузке и заданной скорости. Если толчок нагрузки носит кратковременный характер, двигатель в конечном результате возвращается к прежнему равновесному состоянию.

Так происходит процесс регулирования только в том случае, если система регулирования рассчитана правильно. Представим себе, что регулирующий орган под воздействием регулятора изменяет поступление горючего в цилиндры двигателя с перерегулированием.

Тогда при уменьшении скорости двигателя от увеличения нагрузки регулирующий орган откроет поступление горючего больше, чем требуется для новой нагрузки. Крутящий момент двигателя станет больше момента нагрузки. Скорость двигателя через некоторое время превысит заданную и регулятор опять придет в действие.

Регулирующий орган теперь сократит поступление горючего больше, чем требуется условием равновесия системы. Двигатель опять уменьшит скорость ниже заданной и процесс повторится снова. Таким образом, в системе могут появиться установившиеся колебания.

В реальных системах возможны такие случаи, когда возмущающие воздействия, не превосходящие некоторый предел, вызывают сходящийся переходный процесс, а при переходе возмущающих воздействий за этот предел система становится неустойчивой, или в системе возникают устойчивые незатухающие колебания.

В линейных системах, напротив, может быть только два положения. Либо система устойчива и, тогда после любого начального отклонения регулируемого параметра, последний с течением времени стремится к соответствующему положению равновесия. Либо система неустойчива, и тогда мы имеем расходящийся переходный процесс.

В частном случае, когда система находится на границе устойчивости, переходный процесс представляет незатухающие периодические колебания.

В главе VIII было указано, что представление о характере переходного процесса можно получить по корням характеристического уравнения системы. Однако алгебраические уравнения выше четвертой степени не решаются в радикалах.

Таким образом, возникает необходимость иметь признаки, которые без решения характеристического уравнения позволяли бы проверить устойчивость конкретной системы регулирования, а с другой стороны, определяли условия, необходимые и достаточные для того, чтобы переходные процессы в системе протекали устойчиво.

Такие признаки носят название «критерии устойчивости».

Выше было отмечено, что движение громадного большинства реальных систем описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, которые для упрощения исследования линеаризуются. Таким образом исследование реальной системы заменяется исследованием линеаризованной системы. При этом возникает вопрос о допустимости линеаризации с точки зрения правильного суждения об устойчивости реальной системы.

Исследованию вопросов устойчивости посвящено большое число трудов многих выдающихся ученых, среди которых первое место, бесспорно, принадлежит А. М. Ляпунову. При исследовании устойчивости динамических систем, обычно, задача решается при малых отклонениях регулируемых параметров от установившихся значений. Такое исследование принято называть исследованием в малом в отличие от исследования в большом, когда анализируется поведение системы при достаточно больших отклонениях регулируемой величины.

А. М. Ляпунов при исследовании устойчивости динамических систем пришел к следующим выводам относительно законности использования линеаризованных уравнений для суждения об устойчивости действительной системы в малом, которые мы приводим ниже без доказательств:

1. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет все корни с отрицательными вещественными частями, то действительная система будет устойчива. При этом никакие отброшенные при линеаризации уравнения члены второй и высших степеней отклонения регулируемого параметра не могут изменить устойчивость системы.

2. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то действительная система будет неустойчива. При этом никакие отброшенные при линеаризации члены второй и высших степеней отклонения регулируемого параметра не могут придать системе устойчивость.

3. Если характеристическое уравнение линеаризованной системы имеет хотя бы один нулевой корень или пару чисто мнимых сопряженных корней, то поведение действительной системы не может определяться ее линеаризованным уравнением. В этом случае отброшенные при линеаризации уравнения члены второй и высших степеней отклонения регулируемого параметра коренным образом изменяют описание динамического процесса реальной системы*.

Следует отметить, что приведенная теорема Ляпунова об устойчивости линеаризованных систем справедлива только тогда, когда у нелинейной системы функция, выражающая зависимость регулируе-

* Более подробно см. книгу Е. П. Попова, Динамика систем автоматического регулирования, Гостехиздат, 1954.

мой величины от переменных параметров, имеет конечные непрерывные и однозначные производные в окрестности точки, около которой исследуется процесс регулирования.

Если динамика системы точно описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, то устойчивость в малом обеспечивает неограниченную устойчивость системы, т. е. устойчивость в большом независимо от величины отклонения.

Относительно систем, движение которых описывается нелинейными дифференциальными уравнениями, этого сказать нельзя. Возможны случаи, когда система устойчивая в малом, оказывается неустойчивой в большом. Поэтому методы исследования устойчивости нелинейных систем существенно отличаются от методов исследования линейных систем.

Уравнение неустановившегося движения всякой линеаризованной системы регулирования, как было найдено в главе VIII, в общем случае может быть выражено дифференциальным уравнением вида

$$D(p)\lambda = U(p)\varphi(t), \quad (X-1)$$

где $D(p)$ и $U(p)$ — дифференциальные операторы;

$\varphi(t)$ — функция возмущающего воздействия и λ — регулируемая величина.

Общее решение такого уравнения находится как сумма двух решений: вынужденного и свободного движения системы. Последнее определяется по общему решению однородного уравнения $D(p)\lambda = 0$. Свободное движение зависит как от параметров системы регулирования, так и от характера возмущающих воздействий и начальных условий движения.

В развернутом виде уравнение свободного движения имеет вид

$$a_0 \frac{d^n \lambda}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} \lambda}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{d\lambda}{dt} + a_n \lambda = 0. \quad (X-2)$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Общее решение уравнения $D(p)\lambda = 0$ определится выражением

$$\lambda = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}, \quad (X-3)$$

где $p_1, p_2, \dots, p_n$ — корни характеристического уравнения и $C_1, C_2, \dots, C_n$ — постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий и возмущающих воздействий.

Такой вид решение имеет только при условии, что все корни $p_1, p_2, \dots, p_n$ характеристического уравнения различны. При наличии кратных корней решение отличается от приведенного.

Пусть, например, первые s корней будут равными между собой $p_1 = p_2 = \dots = p_s$.

Тогда искомое решение представится в виде

$$\lambda = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + \dots + C_s t^{s-1}) e^{p_1 t} + C_{s+1} e^{p_{s+1} t} \dots C_n e^{p_n t}. \quad (X-4)$$

Корни характеристического уравнения могут быть вещественными положительными, отрицательными или нулевыми, а также комплексными числами, причем в последнем случае только попарно сопряженными, поскольку все коэффициенты исходного уравнения вещественные числа.

Всякий член $C_k e^{p_k t}$ искомого решения, у которого корень имеет вещественное положительное значение ($p_k > 0$), с течением времени неограниченно растет. Если λ имеет в своем составе хотя бы один такой член, переходный процесс получается расходящимся. Напротив, при $p_k < 0$ член $C_k e^{p_k t}$ при $t \rightarrow \infty$ стремится к нулю.

Нетрудно также показать, что если в составе λ имеется член вида $C_s t^{s-1} e^{p_k t}$, то этот член при $p_k < 0$ также с течением времени затухает.

В самом деле:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} C_s t^{s-1} e^{p_k t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_s t^{s-1}}{e^{-p_k t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_s \frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} (t)^{s-1}}{\frac{d^{s-1}}{dt^{s-1}} (e^{-p_k t})} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_s (s-1)!}{(-p_k)^{s-1}} e^{p_k t} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Если корень p_k представляет комплексное число $\alpha + i\omega$, то должен существовать второй корень $p_{k+1} = \alpha - i\omega$ ему сопряженный. Также постоянные интегрирования C_k и C_{k+1} должны в общем случае быть сопряженными комплексными числами. Отсюда пара сопряженных корней, если положить $C_k = m - ni$ и $C_{k+1} = m + ni$, дает в составе λ член

$$\begin{aligned} C_k e^{p_k t} + C_{k+1} e^{p_{k+1} t} &= (m - ni) e^{(\alpha + i\omega) t} + (m + ni) e^{(\alpha - i\omega) t} = \\ &= R_k e^{\alpha t} \sin(\omega t + \psi), \end{aligned}$$

представляющий синусоидальное колебание с частотой ω и переменной амплитудой

$$R_k e^{\alpha t}.$$

Здесь

$$R_k = 2 \sqrt{m^2 + n^2}; \quad \psi = \arctg \frac{m}{n}.$$

При $\alpha > 0$ амплитуда колебаний с течением времени неограниченно возрастает.

При $\alpha < 0$ колебания постепенно затухают.

При $\alpha = 0$ мы приходим к незатухающим колебаниям с установившейся амплитудой.

Резюмируя все сказанное выше, приходим к выводу:

Система регулирования устойчива только в том случае, если все вещественные корни p_k характеристического уравнения системы и вещественные части α всех комплексных корней отрицательны.

Система неустойчива, если хотя бы один из корней имеет положительную вещественную часть. Если в декартовых координатах по оси абсцисс откладывать вещественные части, а по оси ординат коэффициенты при мнимых частях комплексных корней, то полученные в плоскости координат точки будут соответствовать каждая своему корню. Эта плоскость называется комплексной плоскостью корней, ось абсцисс — вещественной осью, а ось ординат — мнимой осью.

Пользуясь плоскостью корней, можно дать следующую общую формулировку условий устойчивости.

Чтобы рассматриваемая линейная или линеаризованная система автоматического регулирования была устойчива, необходимо и достаточно чтобы точки, соответствующие всем корням характеристического уравнения, были расположены в плоскости корней слева от мнимой оси.

Наличие одного нулевого корня ($p_k = 0$) или сопряженной пары чисто мнимых корней ($\alpha = 0$) свидетельствует о том, что система находится на границе устойчивости, причем случай $\alpha = 0$ сопровождается незатухающими колебаниями.

При наличии кратных нулевых корней, или кратных чисто мнимых корней, в составе регулируемой величины появляются члены вида

$$C_s t^{s-1}$$

или вида

$$R_s t^{s-1} \sin(\omega t + \psi),$$

где s — число кратности.

Эти члены с течением времени неограниченно возрастают и процесс приобретает неустойчивый характер.

Целесообразно привести еще критерий устойчивости — положительность коэффициентов характеристического уравнения, который представляет необходимое, но не всегда достаточное условие устойчивости системы. Допустим, что характеристическое уравнение имеет часть корней вещественных отрицательных; $-r_1, -r_2 \dots$, а остальные комплексные попарно сопряженные с отрицательной вещественной частью: $-\alpha_1 \pm i\omega_1, -\alpha_2 \pm i\omega_2 \dots$

Тогда характеристическое уравнение может быть представлено в виде

$$a_0(p + r_1)(p + r_2) \dots [(p + \alpha_1)^2 + \omega_1^2] [(p + \alpha_2)^2 + \omega_2^2] \dots = 0.$$

Нетрудно видеть, что все коэффициенты при p должны иметь один и тот же знак, совпадающий со знаком множителя a_0 . Так как этот коэффициент всегда может быть сделан равным $+1$, то отсюда вытекает необходимое условие устойчивости: все коэффициенты характеристического уравнения должны быть положительны, если $a_0 > 0$.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

При анализе системы автоматического регулирования, параметры которой известны, часто требуется выяснить, устойчива ли система. Для решения этой задачи пользуются критериями устойчивости, которые определяют условия, необходимые и достаточные для того, чтобы корни характеристического уравнения системы имели отрицательную вещественную часть. Такие критерии, которые позволяют проверить устойчивость системы, не прибегая к графическим построениям, а ограничиваясь лишь алгебраическими вычислениями над коэффициентами характеристического уравнения, называются алгебраическими критериями. Из различных критериев этого вида мы остановимся на критериях Рауса, Гурвица и Вышнеградского, причем изложение даем без доказательств.

а) Критерий устойчивости Рауса*

Критерий Рауса представляет правило, определяющее ряд последовательных алгебраических операций, необходимых для решения задачи проверки устойчивости системы.

Допустим, что характеристическое уравнение исследуемой системы будет

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} \dots a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Составим таблицу Рауса (табл. 7).

Закон составления таблицы следующий:

- 1) первая строка составляется из коэффициентов уравнения с четными индексами;
- 2) вторая строка — из коэффициентов с нечетными индексами;
- 3) третья строка получается перекрестным умножением первых двух строк и делением на первый элемент предыдущей строки;
- 4) все последующие строки получаются аналогичным способом из двух предыдущих строк.

Если указанная таблица построена, критерий Рауса формулируется так: для того, чтобы система автоматического регулирования

* Доказательство критерия Рауса — см. «Основы автоматического регулирования» под ред. Солодовникова, Машгиз, 1954.

Таблица 7

Таблица Рауса

№ строки	№ столбца			
	1	2	3	4
1	a_0	a_2	a_4	a_6
2	a_1	a_3	a_5	a_7
3	$a_{11} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$a_{22} = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$a_{33} = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$	a_{34}
4	$a_{41} = \frac{a_{11} a_2 - a_{31} a_1}{a_{31}}$	$a_{42} = \frac{a_{11} a_4 - a_{31} a_3}{a_{31}}$	$a_{43} = \frac{a_{11} a_6 - a_{31} a_5}{a_{31}}$	a_{44}
5	$a_{51} = \frac{a_{41} a_2 - a_{43} a_{31}}{a_{41}}$	$a_{52} = \frac{a_{41} a_4 - a_{43} a_{31}}{a_{41}}$	a_{53}	a_{54}
6	..	..	..	..

была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все элементы первого столбца таблицы, составленные из коэффициентов характеристического уравнения системы, были отличны от нуля и были положительны при условии, что коэффициент старшего члена уравнения

$$a_0 > 0.$$

Для иллюстрации сказанного рассмотрим пример.

Пример. Проверить устойчивость системы, имеющей характеристическое уравнение

$$T_a p (T_s p + 1) (T_r^2 p^2 + T_k p + \delta) + 1 = 0,$$

где

$$T_a = 10 \text{ сек.}; T_s = 0,25 \text{ сек.}; T_r = 0,005 \text{ сек.}; T_k = 0,05 \text{ сек.}; \delta = 0,04.$$

После подстановки имеем

$$0,0000625 p^4 + 0,12525 p^3 + 0,6 p^2 + 0,4 p + 1 = 0.$$

Составим таблицу Рауса (табл. 8).

Таблица 8

№ строк	№ столбца		
	1	2	3
1	0,0000625	0,6	1
2	0,12525	0,4	0
3	$\frac{0,075125}{0,12525} \approx 0,52$	1	0
4	$\frac{0,08275}{0,52} \approx 0,16$	0	0
5	1	0	0

Условия устойчивости выполнены.

б) Критерий устойчивости Гурвица

Критерий Гурвица получил широкое распространение благодаря его простоте. Критерий Гурвица основан на построении специальных определителей характеристического уравнения, называемых определителями Гурвица.

Пусть дано характеристическое уравнение системы

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

у которого коэффициент старшего члена $a_0 > 0$.

Определители Гурвица будут:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_1 a_3 \\ a_0 a_2 \end{vmatrix} \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_1 a_3 a_5 \\ a_0 a_2 a_4 \\ 0 a_1 a_3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad \text{вообще } \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 a_3 a_5 \dots 0 \\ a_0 a_2 a_4 \dots 0 \\ 0 a_1 a_3 \dots 0 \\ 0 a_0 a_2 \dots 0 \\ \vdots \\ 0 \dots \dots a_n \end{vmatrix} \quad (\text{X-5})$$

При составлении определителя Гурвица n -го порядка руководствуются следующим правилом:

1) выписывают по главной диагонали все коэффициенты от a_1 до a_n в порядке возрастания индексов;

2) дополняют все столбцы определителя вверх от диагонали коэффициентами с последовательно возрастающими, а вниз с последовательно убывающими индексами;

3) наибольший порядок определителя Гурвица равен степени характеристического уравнения;

4) на место коэффициентов, индексы которых больше n и меньше нуля, ставятся нули;

5) последний определитель $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$.

Критерий Гурвица формулируется следующим образом: для того, чтобы система автоматического регулирования была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все определители $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, составленные по коэффициентам характеристического уравнения системы до n -го порядка включительно, были положительны, при этом должно быть $a_0 > 0$ *.

При соблюдении критерия положительности коэффициентов характеристического уравнения проверка последнего определителя Гурвица Δ_n необязательна, так как из равенства $\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$ при $\Delta_{n-1} > 0$ всегда следует, что $\Delta_n > 0$.

Для иллюстрации сказанного и для сравнения критериев обратимся к предыдущему примеру.

Пример. Проверить устойчивость системы по характеристическому уравнению:

$$0,0000625p^4 + 0,12525p^3 + 0,6p^2 + 0,4p + 1 = 0$$

$$a_0 = 0,0000625 > 0$$

$$\Delta_1 = a_1 = 0,12525 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0,12525 & 0,4 \\ 0,0000625 & 0,6 \end{vmatrix} > 0 \quad \Delta_1 = \Delta_2 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0,12525 & 0,4 & 0 \\ 0,0000625 & 0,6 & 1 \\ 0 & 0,12525 & 0,4 \end{vmatrix} > 0$$

Все условия устойчивости Гурвица выполнены.

в) Критерий устойчивости Вышнеградского для систем третьего порядка

Критерий Вышнеградского касается только систем третьего порядка. Согласно этому критерию, система автоматического регулирования, имеющая характеристическое уравнение

$$a_0p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = 0; \quad a_0 > 0,$$

будет устойчива, если произведение двух вспомогательных параметров X и Y , являющихся некоторыми функциями коэффициентов характеристического уравнения, будет более 1. Иначе говоря, условие устойчивости выражается неравенством

$$XY > 1. \quad (X-6)$$

* Доказательство критерия Гурвица — см. Курош, «Курс высшей алгебры» Грехиздат, 1946.

Значения X и Y определяются выражениями

$$X = \frac{a_1}{\sqrt{a_2 a_0}}; \quad Y = \frac{a_2}{\sqrt{a_3 a_0}}.$$

Если $XY < 1$, система будет неустойчива *.

Нетрудно видеть, что критерий $XY > 1$ совпадает с критерием Гурвица. Произведя подстановку значений X и Y в неравенство Вышнеградского, найдем

$$\frac{a_1 a_2}{a_0 a_3} > 1$$

или

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.$$

3. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МИХАЙЛОВА

а) Годограф характеристического уравнения и его свойства

Критерий устойчивости Михайлова основывается на годографе характеристического уравнения системы. В зависимости от характера протекания годографа в комплексной плоскости выносятся суждения об устойчивости системы.

Допустим, что нам известно характеристическое уравнение, причем это уравнение приведено к виду, у которого коэффициент старшего члена равен 1.

$$p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Здесь коэффициент $a_1, \dots, a_n$ суть вещественные числа. Если определены корни $p_1, p_2, \dots, p_n$ характеристического уравнения, то левую часть его можно представить как произведение n множителей

$$(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) = 0.$$

Введем вспомогательную комплексную функцию

$$M(z) = (z - p_1) \dots (z - p_n),$$

где z — переменное комплексное число, причем для наших исследований ограничим z только чисто мнимыми значениями, для чего положим

$$z = i\omega; \quad M(z) = (i\omega - p_1)(i\omega - p_2) \dots (i\omega - p_n). \quad (X-7)$$

Здесь ω независимое вещественное переменное, могущее принимать любые значения $\omega = -\infty$ до $\omega = +\infty$.

* Более подробно об исследованиях Вышнеградского см. ниже: главы X и XI.

Раскрывая $M(z)$, получим

$$M(z) = (i\omega)^n + (i\omega)^{n-1}a_1 \dots a_{n-1}(i\omega) + a_n = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 \dots + \\ + i(a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + \dots) = x(\omega) + iy(\omega),$$

где

$$x(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 \dots$$

и

$$y(\omega) = a_{n-1}\omega - a_{n-3}\omega^3 + a_{n-5}\omega^5 \dots$$

Свойства функций $x(\omega)$ и $y(\omega)$. Каждый множитель $i\omega - p_k$, на которые разлагается функция $M(z)$, представляет в комплексной плоскости вктор. Обозначим его $\vec{R}_k$, а его модуль и аргумент соответственно R_k и φ_k

$$M(z) = \prod_{k=1}^n \vec{R}_k = \prod_{k=1}^n R_k e^{i\varphi_k} = e^{i\sum_{k=1}^n \varphi_k} \prod_{k=1}^n R_k = \\ = \left(\cos \sum_{k=1}^n \varphi_k + i \sin \sum_{k=1}^n \varphi_k \right) \prod_{k=1}^n R_k. \quad (X-8)$$

Сравнивая с выражением $M(z) = x(\omega) + iy(\omega)$, находим

$$x(\omega) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) R_1 R_2 \dots R_n,$$

$$y(\omega) = \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) R_1 R_2 \dots R_n.$$

Будем считать в дальнейшем, что условия устойчивости соблюдены, т. е. что все корни характеристического уравнения имеют отрицательные и не равные нулю вещественные части.

При этом условии ни один из модулей R_k ни при каком значении ω не обращается в 0. Таким образом, обращение функций $x(\omega)$ и $y(\omega)$ в нуль зависит только от суммы аргументов $\sum_{k=1}^n \varphi_k$.

Функция $x(\omega)$ обращается в 0, если $\sum_{k=1}^n \varphi_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — произвольное целое число или нуль.

В свою очередь $y(\omega)$ обратится в нуль, если $\sum_{k=1}^n \varphi_k = k\pi$.

Рассмотрим теперь, как изменяется аргумент φ_k вектора $\vec{R}_k = i\omega - p_k$ (см. фиг. 180) в зависимости от ω . Так как корень p_k имеет по условию заведомо отрицательную вещественную часть, то вектор $\vec{R}_k$ расположится в левой полуплоскости. Пусть он изображается отрезком $P_k A$, как показано на фигуре. Аргумент $\varphi_k =$

$= \angle ONA$. Если ω изменять от 0 до $+\infty$, то как нетрудно видеть на фигуре, аргумент φ_k изменяется от значения $+\gamma_k$ до $+90^\circ$. Здесь γ_k угол между вектором $\vec{p}_k$ и левой вещественной полуосью. Рассмотрим теперь вектор $\vec{R}_{k+1}$, отвечающий корню p_{k+1} , сопряженному с корнем p_k . Этот вектор $\vec{R}_{k+1} = P_{k+1}A$ показан на фигуре пунктиром.

Аргумент $\varphi_{k+1} = \angle MP_{k+1}A$. При изменении ω от 0 до $+\infty$ аргумент φ_{k+1} претерпевает изменения от $-\gamma_k$ до $+90^\circ$. Целесообразно при исчислении суммы аргумен-

тов $\sum \varphi_k$ для комплексных корней

определять сумму для каждой пары сопряженных корней, т. е. в нашем случае сумму $\varphi_k + \varphi_{k+1}$. Нетрудно установить, что эта сумма при изменении ω от 0 до $+\infty$ будет сама претерпевать изменение от 0 до π .

Если корень p_k вещественный отрицательный, то $\gamma_k = 0$ и аргумент φ_k вектора R_k будет увеличиваться от 0 до $+90^\circ$ при изменении ω от 0 до $+\infty$.

Таким образом, при соблюдении условий устойчивости и непрерывном изменении ω от 0 до $+\infty$ сумма

аргументов $\sum \varphi_k$ в свою очередь будет

непрерывно изменяться от 0 до $\frac{\pi}{2} n$,

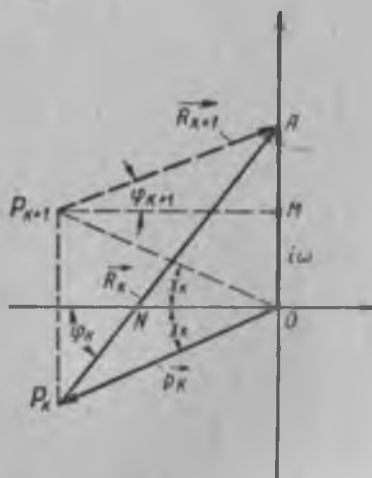
где n — степень характеристического уравнения.

Отсюда вытекают следующие свойства функций Михайлова $x(\omega)$ и $y(\omega)$:

1. Функция $x(\omega)$ должна обращаться в 0 на всем интервале $0 < \omega < +\infty$ при n четном $\frac{n}{2}$, а при n нечетном $\frac{n+1}{2}$ раз, т. е. когда сумма аргументов $\sum \varphi_k$ достигает значений $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots < \frac{\pi}{2} \cdot n$.

2. Функция $y(\omega)$ обращается в 0 на интервале $0 < \omega < \infty$ при n нечетном $\frac{n+1}{2}$, а при n четном $\frac{n+2}{2}$ раз, т. е. когда $\sum \varphi_k$ достигает значений $0, \pi, 2\pi, \dots < \frac{\pi}{2} n$.

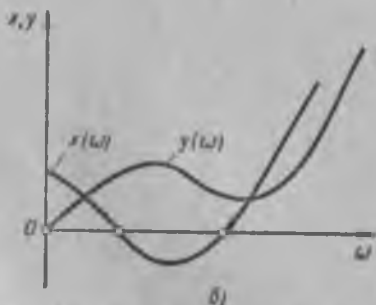
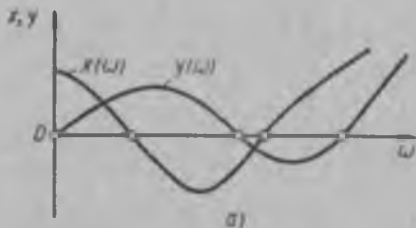
3. Функция $x(\omega)$ — четная, $y(\omega)$ — нечетная.



Фиг. 180. Векторная диаграмма множителя $i\omega - p_k$ функции $M(i\omega)$.

4. Графики функций $x(\omega)$ и $y(\omega)$ (фиг. 181), построенные в зависимости от переменной ω , должны иметь точки пересечения с осью последовательно чередующимися друг с другом, как показано на фиг. 181, а.

Можно показать, что если условие отрицательности вещественной части всех корней характеристического уравнения не соблюдено, то функции $x(\omega)$ и $y(\omega)$ теряют указанное выше свойство чередования нулей. На фиг. 181, б представлено такой случай, когда чередование нулей не соблюдается.



Фиг. 181. Графики функций $x(\omega)$ и $y(\omega)$.

Свойства годографа $M(i\omega)$. Функция $M(i\omega)$ в комплексной плоскости с осями координат (x, y) представится вектором, конец которого при изменении текущего параметра будет описывать кривую. Эта кривая носит название годографа характеристического уравнения системы, или годографа Михайлова.

Исходя из изложенных выше свойств функций $x(\omega)$ и $y(\omega)$, а также векторов $\vec{R}_k$, можно установить следующие свойства этого годографа:

1. Годограф представляет кривую, всегда симметричную относительно вещественной оси. Это вытекает из того, что $x(\omega)$ есть четная, а $y(\omega)$ — нечетная функции переменного ω . В связи с этим целесообразно строить только одну полуветвь годографа от $\omega = 0$ до $\omega = +\infty$.

2. При $\omega = 0$ годограф пересекает вещественную ось в точке, отстоящей от начала координат на расстоянии, равном a_n .

Это вытекает из того, что при $\omega = 0$; $x(\omega) = a_n$; $y(\omega) = 0$.

3. Максимальное возможное число пересечений полуветви годографа с вещественной осью равно $\frac{n}{2}$ при четном n и $\frac{n+1}{2}$ при нечетном n , если n — степень характеристического уравнения. Значения ω , отвечающие точкам пересечения годографа с вещественной осью, определяются из уравнения

$$y(\omega) = 0.$$

4. Максимальное возможное число пересечений полуветви годографа с мнимой осью равно $\frac{n}{2}$ при четном n и $\frac{n-1}{2}$ при нечет-

ном λ . Значения ω , отвечающие точкам пересечения годографа с мнимой осью, определяются из уравнения

$$x(\omega) = 0.$$

Каждый множитель $i\omega - p_k$, на которые разлагается функция $M(i\omega)$, представляет в комплексной плоскости вектор $\vec{R}_k$, имеющий начало в вершине P_k вектора $\vec{p}_k$ и конец A на мнимой оси (фиг. 180).

При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ вектор $\vec{R}_k$ изменяет свой аргумент от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, поворачиваясь против стрелки часов, если точка P_k находится влево от мнимой оси, и по стрелке часов, если точка P_k расположена справа от нее.

Как было показано выше,

$$M(z) = M(i\omega) = R_1 R_2 \dots R_n e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)}.$$

Пользуясь полученной формулой вектора $M(i\omega)$, описывающего годограф, мы можем без труда найти приращение его аргумента с ростом ω от $-\infty$ до $+\infty$.

Допустим, что из всех n корней характеристического уравнения k расположено в левой части полуплоскости и $n - k$ в правой. Тогда, принимая углы, описываемые вектором при повороте против стрелки часов за положительные, и по стрелке часов — за отрицательные, найдем, что полный угол поворота вектора $M(i\omega)$ при росте ω от $-\infty$ до $+\infty$, составит

$$\pi k - (n - k)\pi = \pi(2k - n).$$

При изменении ω от 0 до $+\infty$ приращение аргумента составит $\frac{\pi}{2}(2k - n)$.

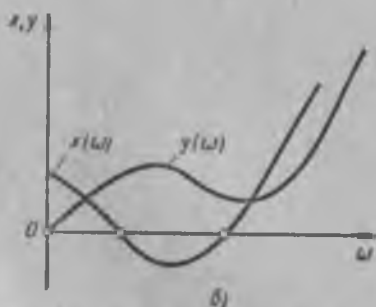
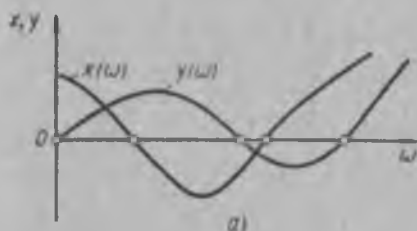
Если система устойчива, все корни характеристического уравнения должны располагаться слева от мнимой оси, что в нашем случае отвечает значению $k = n$. При этом приращение аргумента составит πn при росте ω от $-\infty$ до $+\infty$ и $\frac{\pi}{2}n$ при изменении ω от 0 до $+\infty$.

Отсюда следует, что при устойчивой системе вектор, описывающий годограф характеристического уравнения с ростом от 0 до $+\infty$, должен повернуться против стрелки часов от исходного положения на вещественной оси на угол $\frac{\pi n}{2}$, где n — степень характеристического уравнения. При этом вектор должен последовательно пересекать полуоси координат, проходя через n квадрантов.

Критерий Михайлова, основанный на указанном свойстве годографа, формулируется так: для того, чтобы система автоматического

4. Графики функций $x(\omega)$ и $y(\omega)$ (фиг. 181), построенные в зависимости от переменной ω , должны иметь точки пересечения с осью последовательно чередующимися друг с другом, как показано на фиг. 181, а.

Можно показать, что если условие отрицательности вещественной части всех корней характеристического уравнения не соблюдено, то функции $x(\omega)$ и $y(\omega)$ теряют указанное выше свойство чередования нулей. На фиг. 181, б представлен такой случай, когда чередование нулей не соблюдается.



Фиг. 181. Графики функций $x(\omega)$ и $y(\omega)$.

Свойства годографа $M(i\omega)$. Функция $M(i\omega)$ в комплексной плоскости с осями координат (x, y) представится вектором, конец которого при изменении текущего параметра будет описывать кривую. Эта кривая носит название годографа характеристического уравнения системы, или годографа Михайлова.

Исходя из изложенных выше свойств функций $x(\omega)$ и $y(\omega)$, а также векторов $\vec{R}_k$, можно установить следующие свойства этого годографа:

1. Годограф представляет кривую, всегда симметричную относительно вещественной оси. Это вытекает из того, что $x(\omega)$ есть

четная, а $y(\omega)$ — нечетная функции переменного ω . В связи с этим целесообразно строить только одну полуветвь годографа от $\omega = 0$ до $\omega = +\infty$.

2. При $\omega = 0$ годограф пересекает вещественную ось в точке, отстоящей от начала координат на расстоянии, равном a_n .

Это вытекает из того, что при $\omega = 0$; $x(\omega) = a_n$; $y(\omega) = 0$.

3. Максимальное возможное число пересечений полуветви годографа с вещественной осью равно $\frac{n}{2}$ при четном n и $\frac{n+1}{2}$ при нечетном n , если n — степень характеристического уравнения. Значения ω , отвечающие точкам пересечения годографа с вещественной осью, определяются из уравнения

$$y(\omega) = 0.$$

4. Максимальное возможное число пересечений полуветви годографа с мнимой осью равно $\frac{n}{2}$ при четном n и $\frac{n-1}{2}$ при нечет-

ном n . Значения ω , отвечающие точкам пересечения годографа с мнимой осью, определяются из уравнения

$$x(\omega) = 0.$$

Каждый множитель $i\omega - p_k$, на которые разлагается функция $M(i\omega)$, представляет в комплексной плоскости вектор $\vec{R}_k$, имеющий начало в вершине P_k вектора $\vec{p}_k$ и конец A на мнимой оси (фиг. 180).

При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ вектор $\vec{R}_k$ изменяет свой аргумент от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, поворачиваясь против стрелки часов, если точка P_k находится влево от мнимой оси, и по стрелке часов, если точка P_k расположена справа от нее.

Как было показано выше,

$$M(z) = M(i\omega) = R_1 R_2 \dots R_n e^{i(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)}.$$

Пользуясь полученной формулой вектора $M(i\omega)$, описывающего годограф, мы можем без труда найти приращение его аргумента с ростом ω от $-\infty$ до $+\infty$.

Допустим, что из всех n корней характеристического уравнения κ расположено в левой части полуплоскости и $n - \kappa$ в правой. Тогда, принимая углы, описываемые вектором при повороте против стрелки часов за положительные, и по стрелке часов — за отрицательные, найдем, что полный угол поворота вектора $M(i\omega)$ при росте ω от $-\infty$ до $+\infty$, составит

$$\kappa\pi - (n - \kappa)\pi = \pi(2\kappa - n).$$

При изменении ω от 0 до $+\infty$ приращение аргумента составит $\frac{\pi}{2}(2\kappa - n)$.

Если система устойчива, все корни характеристического уравнения должны располагаться слева от мнимой оси, что в нашем случае отвечает значению $\kappa = n$. При этом приращение аргумента составит πn при росте ω от $-\infty$ до $+\infty$ и $\frac{\pi}{2}n$ при изменении ω от 0 до $+\infty$.

Отсюда следует, что при устойчивой системе вектор, описывающий годограф характеристического уравнения с ростом от 0 до $+\infty$, должен повернуться против стрелки часов от исходного положения на вещественной оси на угол $\frac{\pi n}{2}$, где n — степень характеристического уравнения. При этом вектор должен последовательно пересекать полуоси координат, проходя через n квадрантов.

Критерий Михайлова, основанный на указанном свойстве годографа, формулируется так: для того, чтобы система автоматического

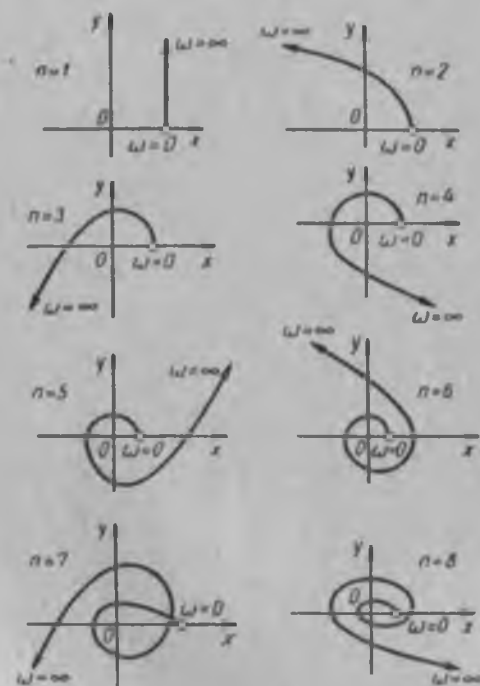
регулирования была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы вектор, описывающий годограф характеристического уравнения при $\omega =$

$= 0$, был направлен в положительную сторону вещественной оси, и с ростом ω от 0 до $+\infty$ поворачивался против стрелки часов с монотонным возрастанием аргумента на угол $\frac{\pi n}{2}$, где n — степень характеристического уравнения системы. При этом длина вектора при всех значениях ω должна быть отлична от нуля.

Годограф, удовлетворяющий требованиям критерия Михайлова, называется правильным в отличие от других годографов, которые не удовлетворяют этим требованиям.

Таким образом, система регулирования устойчива, если годограф ее характеристического уравнения имеет правильную форму.

На фиг. 182 показаны примерные годографы правильной формы характеристических уравнений до 8-й степени включительно.



Фиг. 182. Примеры правильных годографов характеристических уравнений до 8-й степени включительно.

6) Методы построения годографа Михайлова

Метод контрольных точек. При методе контрольных точек определяют из характеристического уравнения полиномы $x(\omega)$ и $y(\omega)$, задаются различными контрольными значениями параметра ω , вычисляют соответствующие значения x и y и по ним как по координатам строят точки годографа. В число контрольных точек должны обязательно входить все точки пересечения годографа с осями, которые определяются по корням уравнений $x(\omega) = 0$ и $y(\omega) = 0$. Во многих случаях построение кривой необязательно, вычисления могут ограничиться нахождением только точек пересечения годографа с осями; расположение этих точек позволяет судить об устойчивости системы.

Пример. Характеристическое уравнение представлено выражением

$$p^3 + 55p^2 + 700p + 11\,250 = 0.$$

Проверить устойчивость системы методом Михайлова.

Полагаем $p = i\omega$ и выделяем полиномы $x(\omega)$ и $y(\omega)$,

$$x(\omega) + iy(\omega) = (i\omega)^3 + 55(i\omega)^2 + 700(i\omega) + 11\,250;$$

$$x(\omega) = 11\,250 - 55\omega^2;$$

$$y(\omega) = \omega(700 - \omega^2).$$

Пересечение с действительной осью

$$y(\omega) = 0; \quad \omega_1 = 0; \quad x_1 = 11\,250.$$

$$\omega_2 = +\sqrt{700} = 26,46; \quad x_2 = 11\,250 - 55 \cdot 700 = -27\,250.$$

Пересечение с мнимой осью $x(\omega) = 0$

$$\omega_3 = +\sqrt{\frac{11\,250}{55}} = 14,3; \quad y_3 = 14,3(700 - 204,54) = 7085.$$

Отрицательные значения ω опущены, поскольку мы строим только одну ветвь годографа.

Задаемся различными контрольными значениями ω для построения годографа и вычисляем таблицу контрольных точек (табл. 9).

Таблица 9

Таблица контрольных точек

№ по пор.	ω	$x(\omega)$	$y(\omega)$	№ по пор.	ω	$x(\omega)$	$y(\omega)$
1	0	+ 11 250	0	5	20	-10 750	-6 000
2	5	+ 9 875	+3375	6	26,46	-27 250	0
3	10	+ 5 750	+6000	7	80	-38 250	-6 000
4	14,3	0	+7085	8	40	-76 750	-36 000

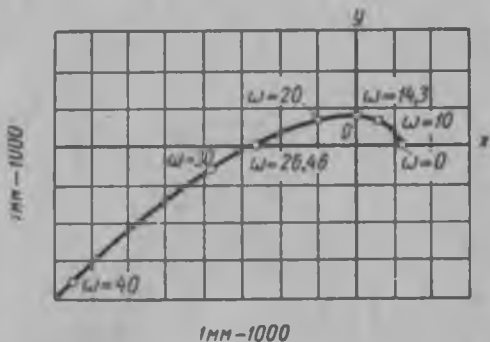
Такой годограф показан на фиг. 183. Он имеет правильную форму, что позволяет заключить об устойчивости системы.

Метод вспомогательных годографов. Этот метод основан на предварительном определении годографов отдельных звеньев системы и построении искомого годографа по этим вспомогательным годографам, применяя правила умножения и сложения векторов. Как известно из теории комплексных чисел, при умножении векторов перемножаются их модули и складываются аргументы.

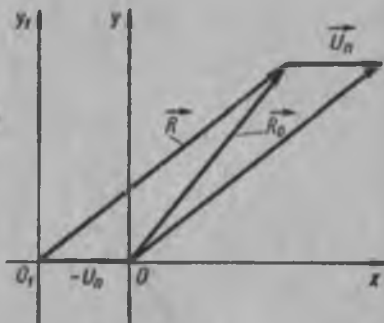
Выше было показано, что характеристический полином (левая часть характеристического уравнения) может быть в общем случае для одноконтурной системы представлен в виде:

$$D(p) = d_1(p) d_2(p), \dots, d_k(p) + U(n),$$

где $d_1(p)$, $d_2(p)$ — характеристические полиномы звеньев системы, а U_n — постоянное число, представляющее коэффициент усиления системы. Вместо p сделаем подстановку $i\omega$. Обозначим векторы вспомога-



Фиг. 183. Годограф Михайлова к примеру на стр. 363.



Фиг. 184. Построение векторного уравнения $\vec{R} = \vec{R}_0 + U_n$.

тельных годографов отдельных звеньев соответственно $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_k$. Тогда имеет место равенство для любой зафиксированной частоты

$$\vec{R} = \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 \cdot \dots \cdot \vec{r}_k + U_n, \quad (X-9)$$

если U_n рассматривать как вектор, направленный вдоль вещественной оси.

Произведение векторов $\vec{r}_1 \vec{r}_2 \dots$ может быть заменено одним вектором $\vec{R}_0$, модуль которого вычисляется как произведение модулей составляющих множителей, а аргумент — как сумма их аргументов

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + U_n. \quad (X-10)$$

Вектор $\vec{R}$ представляет искомый вектор, так как он описывает своим концом кривую общего годографа системы. Сложение $\vec{R}_0$ и вещественного числа U_n делается простым переносом мнимой оси, как показано на фиг. 184, на величину, равную U_n .

Полиномы $x(\omega)$ и $y(\omega)$ вектора $\vec{R}$, как легко видеть, будут связаны с полиномами $x_0(\omega)$ и $y_0(\omega)$ вектора $\vec{R}_0$ соотношениями

$$\left. \begin{aligned} x(\omega) &= x_0(\omega) + U_n \\ y(\omega) &= y_0(\omega) \end{aligned} \right\} \quad (X-11)$$

Из всего сказанного выше вытекает правило: чтобы построить годограф анализируемой системы, нужно построить предварительно вспомогательные годографы отдельных звеньев, входящих в систему, и далее перемножить эти годографы при одном и том же значении переменной ω , применяя правила операций с векторными величинами. Если в составе характеристического уравнения имеется постоянный член U_n , то кроме операции перемножения годографов, мнимую ось следует перенести влево на величину, равную U_n .

Если характеристическое уравнение системы отличается от описанного выше типа, то оно может быть всегда приведено к сумме или произведению нескольких вспомогательных годографов.

Покажем на примере применение этого способа.

Пример Построить годограф характеристического уравнения

$$T_1 p (T_2^2 p^2 + T_3 p + \delta) (T_4 p + 1) + 1 = 0$$

при следующих значениях параметров

$$T_1 = 5; \quad T_2 = 0,1; \quad T_3 = 1;$$

$$T_4 = 1; \quad \delta = 0,04;$$

$$5p(0,01p^2 + p + 0,04)(p + 1) + 1 = 0.$$

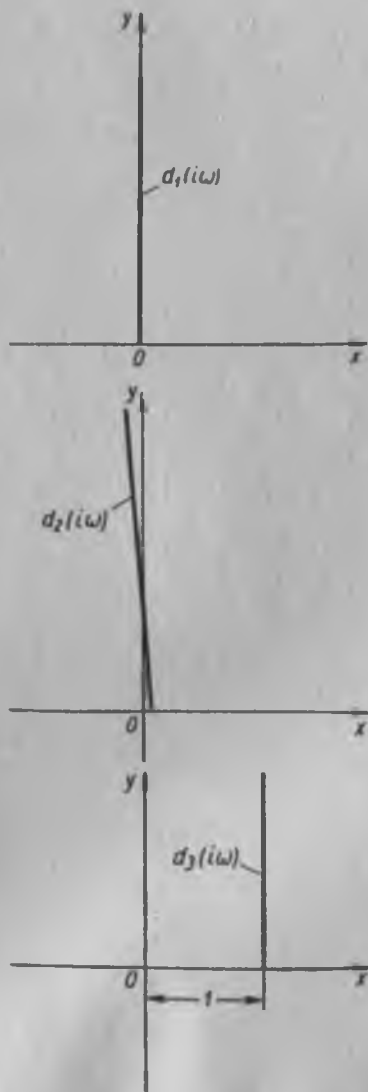
Введем следующие вспомогательные годографы

$$d_1(i\omega) = 5i\omega,$$

$$d_2(i\omega) = 0,04 - 0,01\omega^2 + i\omega;$$

$$d_3(i\omega) = 1 + i\omega.$$

Эти годографы легко построить, они изображены на фиг. 185.



Фиг. 185. Вспомогательные годографы к примеру на стр. 365.

Искомый вектор $\vec{R}$ находится из выражения:

$$\vec{R} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + 1 = \vec{R}_0 + 1.$$

Для получения $\vec{R}$ мы должны перемножить вспомогательные годографы и прибавить вещественное число 1, т. е. сдвинуть мнимую ось влево на 1. Перемножение годографов сделано в контрольных точках в помещенной ниже табл. 10, где вычислены модули и аргументы векторов вспомогательных годографов и их произведения.

Таблица контрольных точек

Таблица 10

№ по пор.	ω	$\vec{r}_1$		$\vec{r}_2$		$\vec{r}_3$		$\vec{R}_0$	
		$r_1 = 5\omega$	ψ_1	$r_2 = \sqrt{(0,04 - 0,01\omega^2)^2 + \omega^2}$	ψ_2	$r_3 = \frac{1}{1 + \omega^2}$	ψ_3	$R_0 = r_1 r_2 r_3$	$\psi_0 = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$
1	0	0	90°	0,2	0	1	0	0	90°
2	0,1	0,5	90°	0,107	68°10'	~1	5°40'	0,0535	163°50'
3	0,2	1	90°	0,204	78°40'	1,02	11°20'	0,208	180°
4	0,5	2,5	90°	0,5	85°42'	1,12	26°35'	1,4	202°17'
5	2	10	90°	2	90°	2,24	66°	44,8	246°
6	5	25	90°	5,004	92°36'	5,1	78°55'	638,01	261°31'
7	10	50	90°	10,046	95°30'	10,05	84°20'	5048,1	269°50'
8	11	55	90°	11,05	96°05'	11,04	84°50'	6710	270°55'
9	12	60	90°	12,08	96°40'	12,04	85°15'	8726,6	271°55'
10	∞	∞	90°	∞	180°	∞	90°	∞	360°

Построение искомого годографа сделано на фиг. 186. Для наглядности построение разделено на два участка и выполнено с разными масштабами. Годограф имеет неправильную форму. Система неустойчива. Если изменить параметры системы так, чтобы в характеристическом уравнении последний член сделать менее 0,208, то система делается устойчивой.

4. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ, ОСНОВАННЫЕ НА АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ

а) Введение

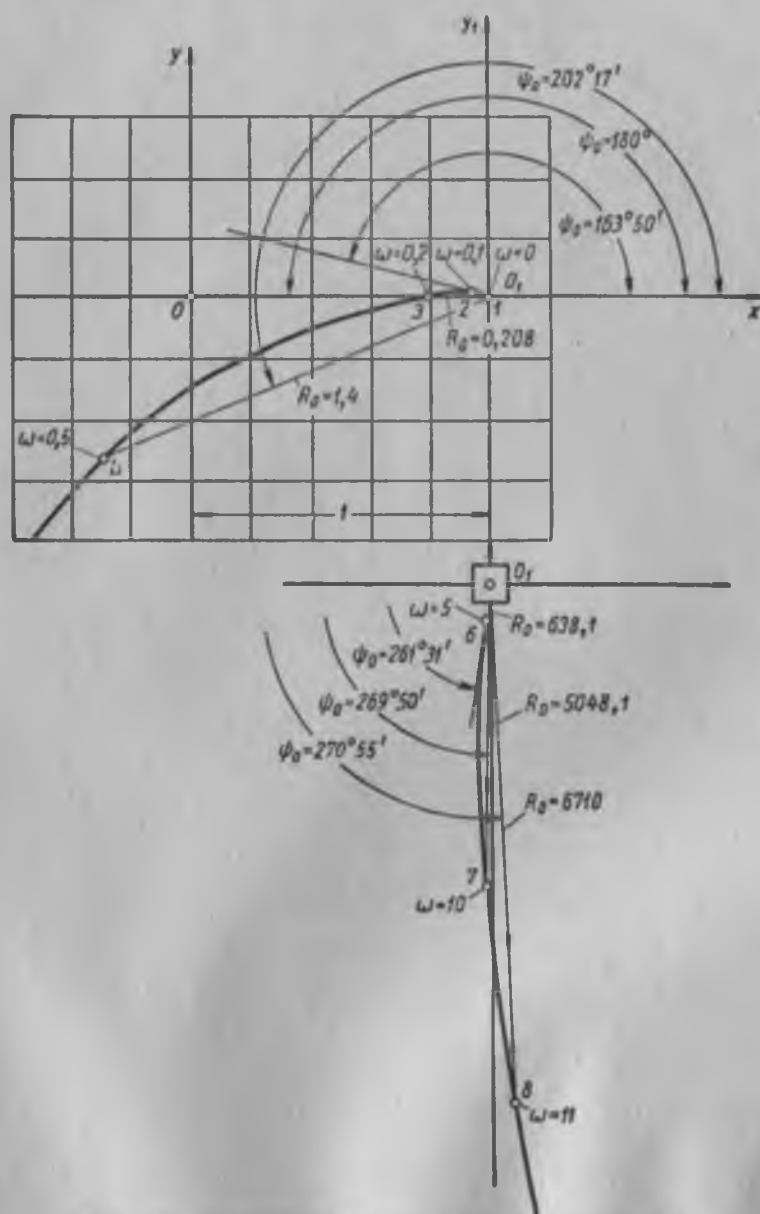
Выше в главе VIII было указано, что частотная функция $K(i\omega)$ может быть получена как отношение операторных полиномов уравнения системы

$$D(p)\lambda = U(p)\varphi$$

с заменой дифференциального оператора p на $i\omega$:

$$K(i\omega) = \frac{U(i\omega)}{D(i\omega)}.$$

Годограф вектора $K(i\omega)$ в комплексной плоскости является амплитудно-фазовой характеристикой разомкнутой системы. Знание



Фиг. 186. Годограф Михайлова к примеру на стр. 366.

этой характеристики позволяет судить об устойчивости также замкнутой системы, уравнение которой найдем, положив что

$$\lambda = -\varphi$$

$$[D(p) + U(p)] \lambda = 0.$$

Приведенный вид частотной характеристики не является единственно возможным.

Для суждения об устойчивости могут быть использованы и другие виды частотных характеристик: обратные амплитудно-фазовые, логарифмические амплитудные и фазовые характеристики.

б) Амплитудно-фазовые характеристики

Амплитудно-фазовая характеристика, являясь годографом вектора $K(i\omega)$, устанавливает связь между амплитудой на выходе разомкнутой системы и амплитудой возмущающего воздействия, а также определяет сдвиг фазы колебаний на выходе относительно входа при различных частотах. Вектор $K(i\omega)$ может быть представлен в виде

$$K(i\omega) = |K| e^{i\psi(\omega)} = R(\omega) e^{i\psi(\omega)},$$

где $R(\omega)$ — модуль и $\psi(\omega)$ аргумент. В дальнейшем мы будем обозначать модуль частотной функции через $R(\omega)$, так как функциональная зависимость модуля от ω отлична от зависимости $K(i\omega)$.

Как модуль, так и аргумент являются функциями частоты ω .

В связи с этим, мы можем рассматривать отдельно функции $R(\omega)$ и $\psi(\omega)$ как амплитудную и фазовую частотные характеристики. Амплитудно-фазовая характеристика представляет по существу кривую в полярной системе координат (R, ψ) тогда как амплитудная и фазовая частотные характеристики обычно строятся в прямоугольных системах (R, ω) , или (ψ, ω) . Для примера рассмотрим апериодическое звено первого порядка. Это звено выражается уравнением

$$(T_1 p + \delta) \lambda = \varphi.$$

Передаточная функция звена $K(z) = \frac{1}{T_1 z + \delta}$.

Отсюда частотная функция

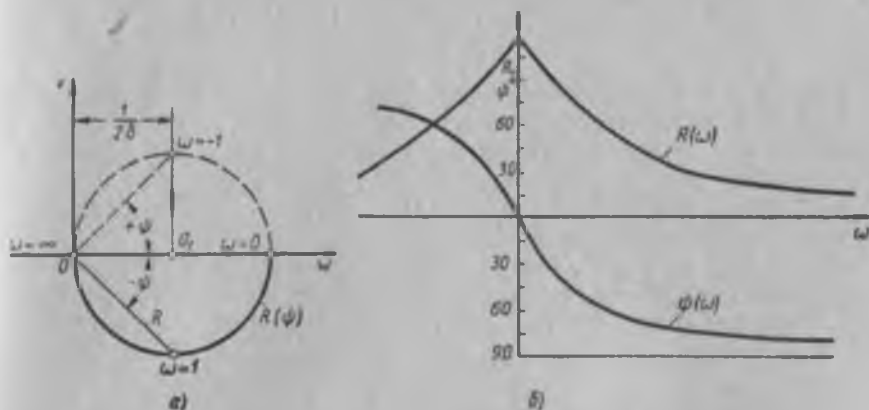
$$K(i\omega) = \omega + i\nu, \quad \omega = \frac{\delta}{T_1^2 \omega^2 + \delta^2}, \quad \nu = \frac{-T_1 \omega}{T_1^2 \omega^2 + \delta^2}.$$

Исключая текущий параметр ω , приведем к уравнению амплитудно-фазовой характеристики в прямоугольной системе координат (ω, ν)

$$\left(\omega - \frac{1}{2\delta}\right)^2 + \nu^2 = \frac{1}{4\delta^2}.$$

Это есть уравнение окружности радиуса, равного $\frac{1}{2\delta}$, проходящей через начало координат и с центром в точке $(\frac{1}{2\delta}, 0)$ на вещественной оси. Для значений ω от 0 до $+\infty$ действительна только нижняя полуокружность.

Амплитудно-фазовая и частотные характеристики аperiodического звена 1-го порядка показаны на фиг. 187.



Фиг. 187. Амплитудно-фазовая и частотные характеристики аperiodического звена 1-го порядка.

На фиг. 187, а изображена амплитудно-фазовая характеристика. В полярных координатах уравнение той же характеристики будет

$$R = \frac{1}{\delta} \cos \psi,$$

причем R равно модулю частотной функции $K(i\omega)$, а ψ углу сдвига фазы.

Для построения амплитудной характеристики вычислим значение модуля R

$$R = \sqrt{\omega^2 + v^2} = \frac{1}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + \delta^2}}.$$

Соответственно аргумент ψ определится из выражения

$$\psi = \arctg \frac{v}{\omega} = \arctg \frac{-T_1 \omega}{\delta}.$$

На фиг. 187, б показаны примерные графики амплитудной и фазовой частотных характеристик для аperiodического звена первого порядка.

Перейдем к вопросу о критерии устойчивости, основанном на амплитудно-фазовых характеристиках.

Характеристическое уравнение замкнутой системы описываемой уравнением

$$[D(p) + U(p)] \lambda = 0$$

будет

$$D(p) + U(p) = 0. \quad (X-12)$$

Заметим, что выражение

$$\frac{D(p) + U(p)}{D(p)} = 1 + \frac{U(p)}{D(p)} = 1 + K(p). \quad (X-13)$$

Здесь $K(p)$ есть передаточная функция разомкнутой системы, если считать p комплексной переменной z . Полином $D(p) + U(p)$ представляет левую часть характеристического уравнения замкнутой системы. Так как степень полинома $U(p)$ не выше степени $D(p)$, то суммарный полином $D(p) + U(p)$ имеет столько же корней, сколько их имеет полином $D(p)$.

Полином $D(p)$ в свою очередь представляет левую часть характеристического уравнения разомкнутой системы. Допустим, что полином $D(p)$ n -й степени. Тогда мы можем представить его в виде

$$D(p) = A(p - p_{11})(p - p_{12}) \dots (p - p_{1n}), \quad (X-14)$$

если $p_{11}, p_{12} \dots p_{1n}$ — корни этого полинома.

В свою очередь полином $D(p) + U(p)$ также может быть разложен на множители:

$$D(p) + U(p) = B(p - p_{21})(p - p_{22}) \dots (p - p_{2n}), \quad (X-15)$$

где $p_{21}, p_{22} \dots p_{2n}$ — его корни.

Таким образом выражение $1 + K(i\omega)$ представится в виде дроби

$$1 + K(i\omega) = \frac{B}{A} \frac{(i\omega - p_{21})(i\omega - p_{22}) \dots (i\omega - p_{2n})}{(i\omega - p_{11})(i\omega - p_{12}) \dots (i\omega - p_{1n})}.$$

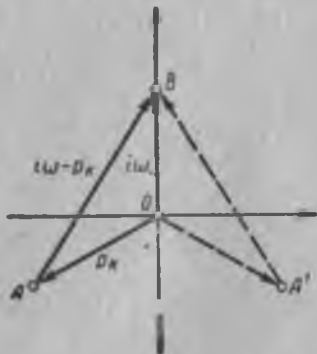
Построим произвольный двучлен $i\omega - p_k$ в комплексной плоскости. Допустим, что корень p_k располагается в левой полуплоскости, как указано на фиг. 188.

Нетрудно видеть, что если $\vec{OA} = p_k$ и $\vec{OB} = i\omega$, то $i\omega - p_k = \vec{AB}$. Если частоту ω изменять непрерывно от $-\infty$ до $+\infty$, то вектор $\vec{AB}$ изменит свой аргумент от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, повернувшись на 180° против часовой стрелки. Если корень p_k расположен в правой полуплоскости, вектор $\vec{AB}$ совершит поворот на 180° по стрелке часов.

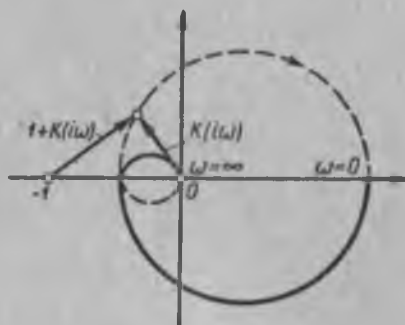
Когда замкнутая и разомкнутая системы устойчивы, то все корни $p_{21}, p_{22} \dots p_{2n}$ и $p_{11}, p_{12} \dots p_{1n}$ лежат слева от мнимой оси. Непре-

рывное изменение ω от $-\infty$ до $+\infty$ вызовет изменение аргумента числителя дроби $1 + K(i\omega)$ на величину $+n\pi$ и знаменателя также на величину $+n\pi$. Аргумент частного изменится при этом на разность $n\pi - n\pi = 0$, т. е. угол поворота вектора $1 + K(i\omega)$ будет равен нулю.

Отсюда можем сделать заключение: если разомкнутая система устойчива и ее амплитудно-фазовая характеристика $K(i\omega)$ не охватывает точки $(-1, 0)$, то должна быть устойчива также замкнутая



Фиг. 188. Векторная диаграмма составляющего произвольного множителя функции $1 + K(i\omega)$.



Фиг. 189. Амплитудно-фазовая характеристика устойчивой системы.

система, так как все корни замкнутой системы при указанном условии должны быть расположены слева от мнимой оси.

На фиг. 189 показан случай, когда амплитудно-фазовая характеристика $K(i\omega)$ не охватывает точки $(-1, 0)$. В этом случае вектор $1 + K(i\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$, т. е. при полном обходе по характеристике не изменяет своего аргумента. Напротив, при расположении точки $(-1, 0)$ внутри контура характеристики, при обходе по кривой — аргумент вектора $1 + K(i\omega)$ получит приращение, равное 2π .

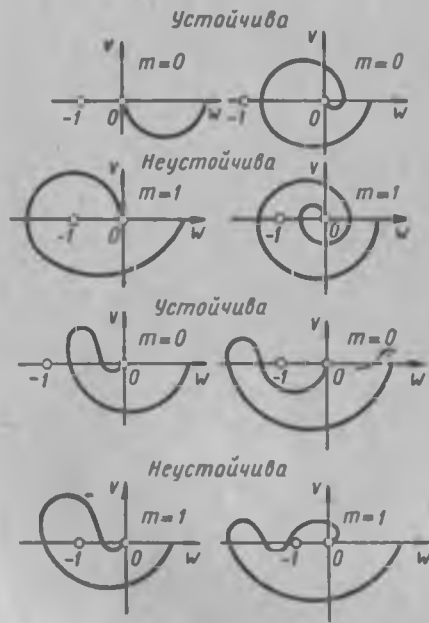
Рассмотрим теперь случай, когда замкнутая система устойчива, а разомкнутая неустойчива и имеет m корней вправо от мнимой оси. В этом случае аргумент числителя при изменении ω в диапазоне $-\infty$ до $+\infty$ изменится на $n\pi$, а аргумент знаменателя — на $(n - m)\pi - m\pi = (n - 2m)\pi$. В результате угол поворота вектора $1 + K(i\omega)$ составит

$$n\pi - \pi(n - 2m) = 2\pi m.$$

Отсюда, делая обратное заключение, приходим к выводу: что если разомкнутая система неустойчива и имеет m корней справа от мнимой оси, то замкнутая система будет устойчива только тогда, когда амплитудно-фазовая характеристика $K(i\omega)$ охватывает точку

$(-1, 0) + m$ раз. За положительный охват следует считать тот, который соответствует вращению вектора $1 + K(i\omega)$ против стрелки часов.

Более строгое доказательство и более глубокий анализ приводит к следующей формулировке амплитудно-фазового критерия устойчивости *:



Фиг. 190. Примеры типовых амплитудно-фазовых характеристик.

если характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет $m = 2h + \varepsilon$ (где $\varepsilon = 0$ или 1) корней, расположенных справа от мнимой оси, или на ней, но не более одного нулевого корня, то для того, чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика пересекала при $\omega = 0$ отрезок оси w между точками $w = -\infty$ и $w = -1$ сверху вниз на h раз больше, чем снизу вверх, и чтобы, кроме того, при $\varepsilon = 1$ характеристика при $\omega = 0$ пересекала этот отрезок оси w сверху вниз в точке $w = -\infty$.

Примеры наиболее часто встречающихся типовых амплитудно-фазовых характеристик устойчивых и неустойчивых систем приведены на фиг. 190. На фигуре все характеристики изображены в форме полуветвей для диапазона ω от 0 до $+\infty$.

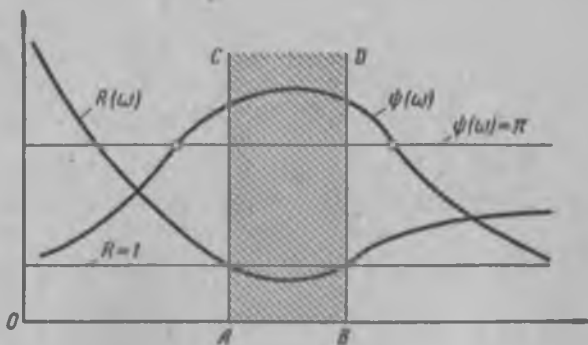
Если вместо амплитудно-фазовой характеристики построены отдельно амплитудная и фазовая характеристики разомкнутой системы, то по их взаимному расположению также можно судить об устойчивости замкнутой системы. При этом используется правило о числе переходов через отрезок $(-\infty, -1)$ вещественной оси.

Критерий для суждения об устойчивости по частотным характеристикам формулируется здесь следующим образом: замкнутая система устойчива, если разность между числом положительных и отрицательных переходов фазовой характеристики разомкнутой системы через линию $\phi(\omega) = \pm\pi$ во всех частях графика, в которых амплитудная характеристика проходит выше линии $R = 1$ (модуль = 1),

* См. Айзериан, Теория автоматического регулирования двигателей, ГТТИ, 1952.

равна половине числа корней характеристического уравнения разомкнутой системы, расположенных справа от мнимой оси.

Справедливость такой формулировки вытекает из того, что на отрезке $(-\infty, -1)$ модуль амплитудно-фазовой характеристики больше 1. С другой стороны, точке перехода характеристики через отрезок отвечает значение аргумента $\phi(\omega) = \pi$. Переходу амплитудно-фазовой характеристики сверху вниз соответствует теперь положительный переход фазо-частотной характеристики через ли-



Фиг. 191. Пример применения критерия устойчивости по частотным характеристикам.

нию $\phi(\omega) = \pi$, а переходу снизу вверх — отрицательный переход. Переход считается положительным, если имеет место возрастание аргумента и отрицательным, если аргумент убывает. Допустим, что амплитудная и фазовая частотные характеристики имеют вид, показанный на фиг. 191.

Отбросим сперва те части характеристики, где модуль меньше 1. Эта зона $ABCD$ на фигуре заштрихована. Она определяется точками пересечения амплитудной характеристики с линией $R = 1$. Далее определяем в незаштрихованной зоне число пересечений фазовой характеристики с линией $\phi(\omega) = \pi$ и знак этих пересечений. В рассматриваемом случае мы имеем один положительный и один отрицательный переход. Отсюда, согласно критерию устойчивости, заключаем, что замкнутая система будет устойчива, если все корни характеристического уравнения разомкнутой системы лежат влево от мнимой оси.

в) Обратные амплитудно-фазовые характеристики

В некоторых случаях предпочитают для суждения об устойчивости замкнутой системы пользоваться вместо частотной функции $K(i\omega)$ ее обратной функцией

$$N(i\omega) = \frac{1}{K(i\omega)} = \frac{D(i\omega)}{U(i\omega)}. \quad (X-16)$$

Годограф этой функции называется обратной амплитудно-фазовой характеристикой.

Аналогично тому, как был установлен критерий устойчивости замкнутой системы по амплитудно-фазовой характеристике, можно найти критерий по обратной амплитудно-фазовой характеристике, позволяющий судить об устойчивости исследуемой системы.

Во избежание повторения, мы не будем останавливаться на выводе и доказательстве этого критерия, а приведем готовую его формулировку.

Для того чтобы замкнутая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения разомкнутой системы были расположены слева от мнимой оси и чтобы обратная амплитудно-фазовая характеристика не пересекала отрезка вещественной оси между точками 0 и -1 .

г) Логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики

В ряде случаев при построении кривых зависимости амплитуды и фазы от частоты предпочитают вместо натуральных значений модуля и частоты применять их логарифмы, сохраняя натуральные значения только для аргумента. Таким образом, мы можем иметь логарифмическую амплитудную характеристику, где по оси абсцисс отложены логарифмы частоты ω и по оси ординат логарифмы модуля K амплитудно-фазовой характеристики. Также можно построить логарифмическую фазовую характеристику, если по оси абсцисс отложить логарифмы частоты, а по оси ординат натуральные значения аргумента.

Логарифмические характеристики обычно строятся в логарифмических координатных сетках двойных или одинарных (полулогарифмических). Основным преимуществом логарифмических характеристик является то, что они значительно легче допускают линейную аппроксимацию, чем натуральные характеристики. В результате логарифмирования эти характеристики приобретают некоторые асимптотические свойства, которые используются при приближенных расчетах и синтезе структурных схем. При этом точные характеристики заменяются приближенными асимптотами, составленными из прямолинейных отрезков.

Логарифмируя выражение частотной функции

$$K(i\omega) = R(\omega) e^{i\psi(\omega)},$$

напишем

$$\ln K(i\omega) = \ln R(\omega) + i\psi(\omega). \quad (X-17)$$

Вещественная часть натурального логарифма равна логарифму модуля, а мнимая — фазе частотной функции. При графических построениях логарифмических характеристик обычная логарифмическая единица «непер» считается слишком крупной для амплитуд.

Поэтому для исчисления логарифмов амплитуд введена более мелкая единица, которая в 20 раз меньше одной десятичной логарифмической единицы. Эта единица называется «децибел». В связи с этим на графиках принято откладывать не $\ln K(\omega)$, а пропорциональную ей величину $20 \lg K$ децибел, где символ $\lg$ обозначает десятичный логарифм.

Чтобы определить число децибел, соответствующее произвольному числу N , мы должны десятичный логарифм этого числа умножить на 20:

$$20 \lg N \text{ дцб.}$$

Для логарифмов частот используется другая логарифмическая единица — октава.

Октавой называется интервал частот, заключающийся между произвольным значением ω и ее удвоенным значением

$$\lg 2\omega - \lg \omega = \lg 2 + \lg \omega - \lg \omega = \lg 2.$$

Как видим, интервал, принятый за октаву, не зависит от абсолютной величины числа ω .

Если октава оказывается малой единицей, применяют декаду. Последняя представляет интервал частот, заключенный между произвольным значением ω и 10ω . Длина отрезка, изображающего декаду, равна $\lg 10 = 1$.

В связи с введенными логарифмическими единицами — децибел по оси ординат и октава по оси абсцисс — наклон кривых и отрезков прямых будет измеряться децибелами на октаву или децибелами на декаду.

Рассмотрим несколько логарифмических амплитудных и фазовых частотных характеристик и их асимптот.

Передачная функция $K_z = \frac{U(z)}{D(z)}$ обычно может быть представлена в форме дроби, у которой числитель и знаменатель разложены на множители из полиномов первой или второй степени z в зависимости от того, из каких звеньев составлена исследуемая система. В связи с этим амплитудно-фазовая характеристика может быть также представлена в виде

$$K(i\omega) = \frac{U_1(i\omega) \dots U_m(i\omega)}{D_1(i\omega) \dots D_n(i\omega)},$$

где $U_1 U_2 \dots D_1 D_2$ — соответствующие множители числителя и знаменателя.

Логарифмируя в децибелах, получим:

$$20 \lg K(i\omega) = 20 \lg U_1 + 20 \lg U_2 \dots - 20 \lg D_1 - 20 \lg D_2 \dots \quad (X-18)$$

Отсюда вытекает, что построение логарифмических как амплитудных, так и фазовых характеристик может быть выполнено путем построения соответствующих логарифмических характеристик отдельных звеньев и последующим их суммированием с соблюдением знаков.

Этот вывод справедлив также и для построения асимптотических характеристик. Приведем несколько типовых случаев построения логарифмических характеристик и их асимптот.

Пример. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики для системы, у которой передаточная функция

$$K(z) = \frac{T_1 z + 1}{z(T_2 z + 1)}$$

при отношении

$$\frac{T_1}{T_2} = q.$$

Амплитудно-фазовая характеристика

$$K(i\omega) = \frac{T_1 i\omega + 1}{i\omega(T_2 i\omega + 1)}.$$

Модуль

$$|K(i\omega)| = R(\omega) = \frac{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + 1}}{\omega \sqrt{T_2^2 \omega^2 + 1}}.$$

Преобразуем это выражение, введя постоянные значения

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1}; \quad \omega_2 = \frac{1}{T_2}; \quad \omega_2 = q\omega_1; \quad \lg \omega_2 - \lg \omega_1 = \lg q;$$

$$R(\omega) = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 + \omega_1^2}}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega^2 + \omega_2^2}}.$$

Логарифмируя в децибелах, найдем логарифмическую амплитудно-частотную характеристику

$$20 \lg R_{дБ} = -20 \lg \omega + 20 \lg \sqrt{\omega^2 + \omega_1^2} - 20 \lg \sqrt{\omega^2 + \omega_2^2} + 20 \lg q.$$

Задаваясь различными значениями ω и находя вычисленные значения $20 \lg R$ на диаграмму с логарифмической сеткой, получим искомую логарифмическую амплитудно-частотную характеристику.

Для построения логарифмической характеристики целесообразно ввести в качестве независимой переменной отношение $\frac{\omega}{\omega_1} = \xi$

$$20 \lg R = -20 \lg \xi + 20 \lg \sqrt{\xi^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{\xi^2 + q^2} + 20 \lg \omega_2 - 40 \lg \omega_1.$$

На фиг. 192 изображена логарифмическая амплитудная характеристика для $\omega_1 = 1$ и $q = 2$.

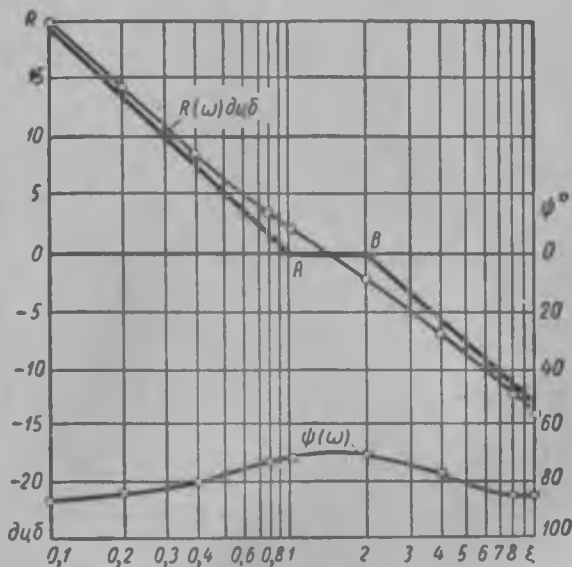
Для построения асимптотической характеристики разобьем весь диапазон частот на интервалы

$$\text{I } 0 < \omega < \omega_1$$

$$\text{II } \omega_1 < \omega < \omega_2$$

$$\text{III } \omega > \omega_2,$$

причем будем считать, что частоты ω_1 и ω_2 расположены в порядке их возрастания, т. е. $\omega_2 > \omega_1$.



Фиг. 192. Логарифмические амплитудная и фазовая характеристики к примеру на стр. 377.

Кроме того, предположим, что в первом интервале мы имеем дело с низкими частотами, такими, что ω много меньше ω_1 : $\omega \ll \omega_1$.

Во втором интервале будем предполагать, что частота ω много больше ω_1 и много меньше ω_2 : $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$.

В третьем интервале будем считать, что ω много больше ω_2 : $\omega \gg \omega_2$.

Сообразно со сделанными допущениями можно написать

$$20 \lg R_a = -20 \lg \omega + 20 \lg \omega_1 - 20 \lg \omega_2 + 20 \lg q = -20 \lg \omega \text{ при } 0 < \omega < \omega_1,$$

$$20 \lg R_a = -20 \lg \omega + 20 \lg \omega - 20 \lg \omega_2 + 20 \lg q = -20 \lg \omega_2 \text{ при } \omega_1 < \omega < \omega_2,$$

$$20 \lg R_a = -20 \lg \omega + 20 \lg \omega - 20 \lg \omega + 20 \lg \omega_2 - 20 \lg \omega_1 =$$

$$= -20 \lg \omega + 20 \lg q \text{ при } \omega > \omega_2.$$

Полученные уравнения представляют уравнения отрезков прямых, служащих асимптотами нашей логарифмической амплитудной характеристики.

Для определения наклонов этих отрезков произведем удвоение частоты и вычислим изменение амплитуд в децибелах:

I интервал: $-20 \lg 2\omega - (-20 \lg \omega) = -20 \lg 2 \approx -6 \text{ дцб}$.

Отсюда искомый наклон $= -6 \text{ дцб/октава}$.

II интервал: $-20 \lg \omega_1 - (-20 \lg \omega) = 0$.

Наклон $= 0 \text{ дцб/октава}$.

III интервал: $-20 \lg 2\omega + 20 \lg q - (-20 \lg \omega + 20 \lg q) = -20 \lg 2 \approx -6 \text{ дцб}$.

Наклон $= -6 \text{ дцб/октава}$.

Для нанесения асимптот на чертеже необходимо найти точки пересечения асимптот I и II интервалов и соответственно II и III интервалов.

Для этого решаем уравнения:

$$-20 \lg \omega_1 = -20 \lg \omega_1;$$

$$-20 \lg \omega_1 = -20 \lg \omega_2 + 20 \lg q;$$

$$\omega_2 = \omega_1; \quad \omega_2 = \omega_1.$$

Пользуясь этими решениями, наносим на чертеже точки A и B, координаты которых будут соответственно

$$[\lg \omega_1, -20 \lg \omega_1] \text{ и } [\lg \omega_2, -20 \lg \omega_1].$$

Из этих точек проводим прямые с наклоном -6 дцб/октава , как показано на фиг. 192. Это будут асимптоты логарифмической амплитудной характеристики. Наибольшая погрешность при замене характеристики ее асимптотами имеет место в точках A и B.

Величина этой погрешности в точке A

$$20 \lg R(\omega_1) - 20 \lg R_a(\omega_1) = 30 \lg 2 - 20 \lg \sqrt{5} = 2 \text{ дцб}$$

и в точке B

$$20 \lg R(\omega_2) - 20 \lg R_a(\omega_2) = -30 \lg 2 + 20 \lg \sqrt{5} \approx -2 \text{ дцб}.$$

Для построения логарифмической фазовой характеристики определим выражение аргумента по выражению частотной функции.

$$\text{Аргумент } \psi(i\omega) = \text{Arg} \left(\frac{1}{i\omega} \right) + \text{Arg} (T_1 i\omega + 1) - \text{Arg} (T_2 i\omega + 1) =$$

$$= -\frac{\pi}{2} + \arctg T_1 \omega - \arctg T_2 \omega = -\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{\omega}{\omega_1} - \arctg \frac{\omega}{\omega_2}.$$

Для построения фазовой характеристики целесообразно ввести отношение $\frac{\omega}{\omega_1} = \xi$.

Тогда фазовая характеристика представится уравнением

$$\psi(\omega) = -\frac{\pi}{2} + \arctg \xi - \arctg \frac{\xi}{q}.$$

На фиг. 192 нанесена в градусах логарифмическая фазовая частотная характеристика для $q = 2$.

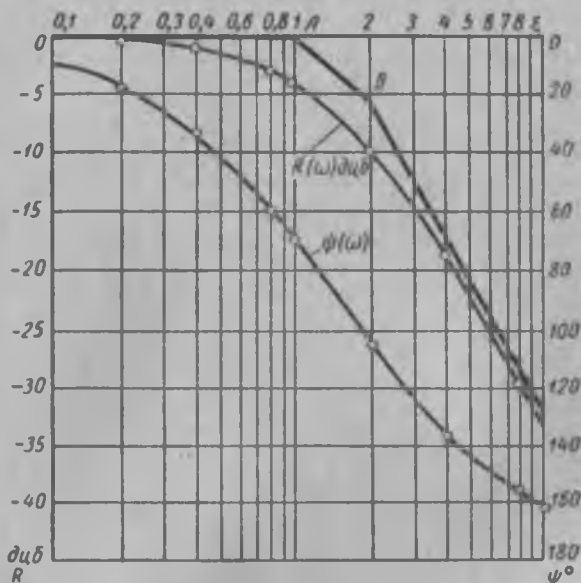
Пример. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики для системы, у которой передаточная функция задана в виде дроби $\frac{1}{(T_1 z + 1)(T_2 z + 1)}$ при отношении $\frac{T_1}{T_2} = q$.

Это есть передаточная функция системы, состоящей из двух апериодических звеньев первого порядка.

Полагая $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$ и $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$ и применяя способ, изложенный в предыдущем примере, найдем уравнение логарифмической амплитудной характеристики:

$$20 \lg R = 20 \lg q - 20 \lg \sqrt{\xi^2 + 1} - 20 \lg \sqrt{\xi^2 + q^2}, \text{ где } \xi = \frac{\omega}{\omega_1}.$$

На фиг. 193 дан график логарифмической амплитудной характеристики при $\omega_1 = 1$ и $q = 2$.



Фиг. 193. Логарифмические амплитудная и фазовая характеристики к примеру на стр. 379.

Асимптоты этой кривой будут при $\omega_1 < \omega_2$:

I интервал $0 < \omega < \omega_1$

$$20 \lg R_a = 0.$$

II интервал $\omega_1 < \omega < \omega_2$

$$20 \lg R_a = 20 \lg \omega_1 - 20 \lg \omega.$$

III интервал $\omega > \omega_2$

$$20 \lg R_a = 20 \lg \omega_1 + 20 \lg \omega_2 - 40 \lg \omega.$$

Наклон асимптот:

I интервал: наклон — 0 дцб/октава.

II интервал: $20 \lg \omega_1 - 20 \lg 2\omega - (20 \lg \omega_1 - 20 \lg \omega) \approx -6$ дцб, наклон = — 6 дцб/октава.

III интервал: $20 \lg \omega_1 + 20 \lg \omega_2 - 40 \lg 2\omega - (20 \lg \omega_1 + 20 \lg \omega_2 - 40 \lg \omega) \approx -12$ дцб, наклон = — 12 дцб/октава.

Точка пересечения A и B асимптот определяется из уравнений

$$20 \lg \omega_1 - 20 \lg \omega_x = 0; \quad \omega_x = \omega_1;$$

$$20 \lg \omega_1 - 20 \lg \omega_y = 20 \lg \omega_1 + 20 \lg \omega_2 - 40 \lg \omega_y;$$

$$\omega_y = \omega_2.$$

Исходя из этих точек и подсчитанных выше наклонов, построены на фиг. 193 отрезки асимптотических прямых.

Наибольшие отклонения асимптотической характеристики от точной будут в точках A и B .

Отклонение в точке A

$$20 \lg R(\omega_1) - 20 \lg R_a(\omega_1) = 10 \lg 2 - 20 \lg \sqrt{5} \approx -4 \text{ дцб}.$$

Отклонение в точке B :

$$20 \lg R(\omega_2) - 20 \lg R_a(\omega_2) = 10 \lg 2 - 20 \lg \sqrt{5} \approx -4 \text{ дцб}.$$

Логарифмическая фазовая характеристика определяется уравнением

$$\phi(\omega) = -\text{Arg}(T_1 i\omega + 1) - \text{Arg}(T_2 i\omega + 1) = -\arctg \xi - \arctg \frac{\xi}{q}.$$

На фиг. 193 нанесена логарифмическая фазовая характеристика для случая $q = 2$.

Пример. Построить логарифмические амплитудную и фазовую характеристики для колебательного звена.

Передаточная функция колебательного звена

$$K(z) = \frac{1}{T_1^2 z^2 + T_1 z + 1}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика

$$K(i\omega) = \frac{1}{-T_1^2 \omega^2 + T_1 i\omega + 1}.$$

В целях упрощения вычислений введем вспомогательные величины

$$\frac{T_1}{2T_2} = \rho \text{ (коэффициент демпфирования) и } \omega_2 = \frac{1}{T_2}.$$

Тогда

$$K(i\omega) = \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega^2 + 2\rho i\omega\omega_2}.$$

Модуль

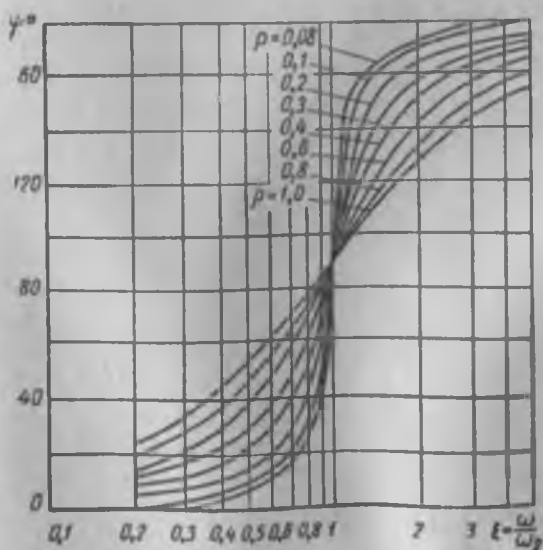
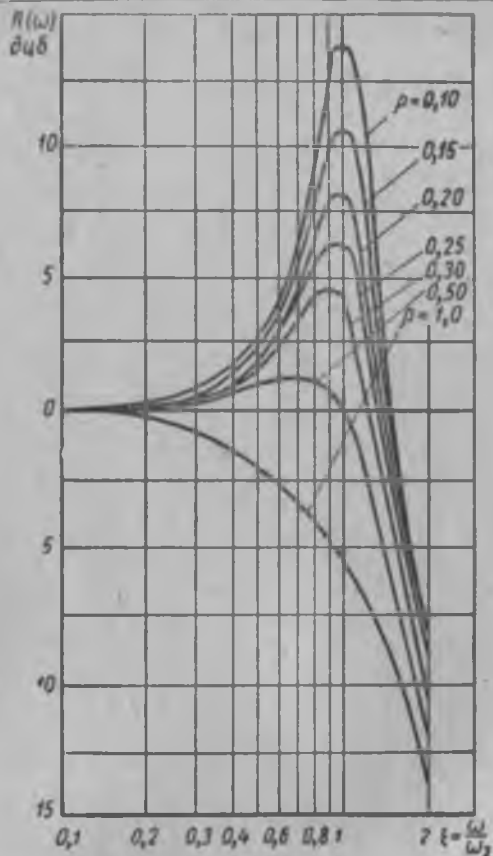
$$R = \frac{\omega_2^2}{V(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + (2\rho\omega\omega_2)^2}.$$

Модуль в децибелах

$$20 \lg R = 20 \lg \frac{\omega_2^2}{V(\omega_2^2 - \omega^2)^2 + (2\rho\omega\omega_2)^2} = -20 \lg V(1 - \xi^2)^2 + 4\xi^2\rho^2,$$

где $\xi = \frac{\omega}{\omega_2}$.

Фиг. 194. Семейство логарифмических амплитудных характеристик колебательных звеньев 2-го порядка при разных коэффициентах демпфирования ρ .



Фиг. 195. Семейство фазовых характеристик колебательных звеньев 2-го порядка при разных коэффициентах демпфирования ρ .

Аппроксимация отрезками прямых здесь обычно дает значительную погрешность, поэтому почти не применяется.

На фиг. 194 представлено семейство логарифмических амплитудных кривых колебательных звеньев, вычисленных для разных значений коэффициента демпфирования ρ .

Фазовая характеристика определяется по аргументу функции $K(i\omega)$

$$\psi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\xi\rho}{1-\xi^2}$$

На фиг. 195 дано семейство фазовых характеристик колебательного звена, вычисленных по приведенной выше формуле для разных значений ρ .

Критерий устойчивости по логарифмическим характеристикам. По логарифмическим амплитудным и фазовым характеристикам можно сделать заключение об устойчивости системы. В этом случае критерий устойчивости полностью совпадает с критерием, установленным для случая натуральных амплитудной и фазовой характеристик, за исключением того, что здесь вследствие исчисления модуля в логарифмическом масштабе (в децибелах) прямая линия $R = 1$ превращается в нулевую прямую (ось абсцисс), так как $20 \lg 1 = 0$.

Поэтому критерий устойчивости по логарифмическим характеристикам будет формулироваться следующим образом.

Замкнутая система устойчива, если разность между числом положительных и отрицательных переходов фазовой характеристики разомкнутой системы через линию $\psi(\omega) = \pm\pi$ во всех частях графика, в которых амплитудная логарифмическая характеристика проходит выше нулевой линии (оси абсцисс), равна половине числа корней характеристического уравнения разомкнутой системы, расположенных справа от мнимой оси.

5. ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ В ПЛОСКОСТИ ОДНОГО И ДВУХ ПАРАМЕТРОВ

а) Основные положения. Задача Вышнеградского

Рассмотренные выше критерии устойчивости позволяют проверить устойчивость системы в конкретных случаях, т. е. когда известны параметры всех звеньев, или коэффициенты характеристического уравнения. Во многих практических случаях, особенно при проектировании систем автоматического регулирования, требуется знать область изменения одного или нескольких параметров, внутри которой система остается устойчивой, а также границу устойчивости.

И. А. Вышнеградский впервые применил построение областей устойчивости при исследовании устойчивости системы регулирования паровой машины.

Вышнеградский изучал системы регулирования, описанные дифференциальным уравнением третьего порядка, которое может быть всегда приведено к виду с коэффициентом 1 при старшем члене

$$p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Условие устойчивости по Вышнеградскому выражается неравенством

$$a_1 a_2 - a_3 > 0,$$

что, как нетрудно убедиться, совпадает с критерием Гурвица.

Введем вспомогательные параметры Вышнеградского

$$X = \frac{a_1}{3\sqrt{a_2}}; \quad Y = \frac{a_2}{3\sqrt{a_3^2}}$$

Тогда получим известное неравенство Вышнеградского, представляющее критерий устойчивости

$$XY - 1 > 0. \quad (X-19)$$

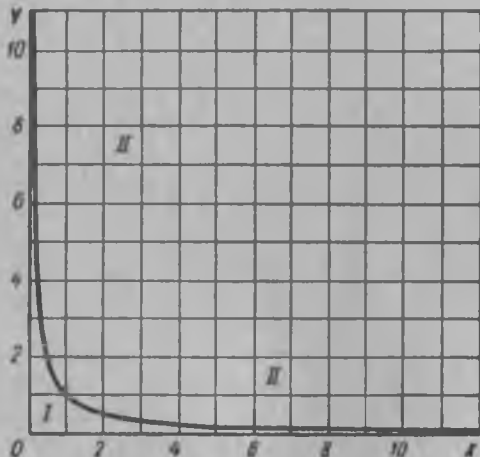
Для выделения области устойчивости построим в прямоугольной системе координат (X, Y) равнобокую гиперболу $XY = 1$, изображенную на фиг. 196.

Параметры X и Y Вышнеградского представляют вещественные положительные числа. Поэтому нас будет интересовать только ветвь гиперболы, расположенная в первом квадранте системы координат. Этот квадрант разделяется гиперболой $XY = 1$ на две области I и II, из которых первая отвечает условию $XY < 1$, т. е. неустойчивому состоянию системы, а вторая — условию $XY > 1$, при котором все корни характеристического уравнения имеют отрицательную вещественную часть. Это обеспечивает устойчивость системы.

Задача Вышнеградского решает вопрос о выделении областей устойчивости только для систем с характеристическим уравнением третьего порядка и потому она не решает общего вопроса о построении областей устойчивости.

Общая задача построения областей устойчивости основывается на выделении в пространстве коэффициентов характеристического уравнения областей, имеющих равное число корней с отрицательной вещественной частью.

Представим себе характеристическое уравнение порядка n , в котором заданы все коэффициенты, кроме одного, где последний может принимать произвольные вещественные значения. Зададимся различными значениями этого коэффициента и произведем в каждом отдельном случае проверку исследуемого характеристического урав-



Фиг. 196. Диаграмма Вышнеградского.

нения на устойчивость. Откладывая все значения переменного коэффициента на вещественной оси и особо отмечая точки, отвечающие условию устойчивости, мы выделим на вещественной оси участки или области значений исследуемого коэффициента соответствующих устойчивой системе. ρ

Пусть далее характеристическое уравнение имеет два неопределенных коэффициента. Выберем на плоскости две взаимно-перпендикулярные оси для этих коэффициентов уравнения. Проверим каждую произвольную пару значений переменных коэффициентов на устойчивость и строим на плоскости точку, отвечающую рассматриваемой паре значений. Таким образом, мы можем на плоскости выделить область переменных коэффициентов, которые будут соответствовать устойчивой системе. Выбранная плоскость носит название плоскости двух параметров, а область устойчивости области устойчивости в пространстве двух параметров.

Совершенно аналогично может быть поставлена задача о выделении области устойчивости n параметров, причем в этом случае мы должны рассматривать переменные параметры как координаты некоторого n мерного пространства.

Задача выделения области устойчивости решается сравнительно просто для случая второй и третьей степени характеристического уравнения. При более высоких степенях применяют способ разбиения пространства параметров на области, имеющие равное число корней с отрицательной вещественной частью. Этот способ был предложен Ю. И. Неймарком под названием «D-разбиение пространства параметров». Сущность этого метода состоит в следующем.

Пусть нам дано характеристическое уравнение с k корнями в левой полуплоскости. При непрерывном изменении некоторых или всех коэффициентов уравнения будут также непрерывно изменяться эти корни.

В силу непрерывной зависимости корней от коэффициентов уравнения переход корня из левой полуплоскости в правую или обратно может совершаться только через мнимую ось, либо через бесконечно удаленную точку. Последний случай имеет место, если коэффициент при старшем члене уравнения обращается в нуль, при этом понижается порядок уравнения.

Исключим временно этот случай, как представляющий случай вырождения заданного уравнения. Переход корня через мнимую ось соответствует в пространстве коэффициентов переходу точки переменных параметров через границу, разделяющую области с разным числом левых корней, т. е. корней, имеющих отрицательную вещественную часть. Отсюда вытекает способ построения этой границы. Для этого нужно положить в характеристическом уравнении $D(p) = 0$, $p = i\omega$ и для каждого значения ω найти совокупность всех возможных значений интересующих нас переменных параметров, при которых левая часть характеристического уравнения обращается в нуль. Геометрическое место точек, изображающих указанную

выше совокупность переменных параметров, в пространстве коэффициентов образует искомую границу.

После того как пространство коэффициентов разбито на области с одинаковым числом корней, лежащих слева от мнимой оси, задача сводится к нахождению такой области, где число этих корней наибольшее и равно степени характеристического уравнения. Если такая область находится, то эта область и будет искомой областью устойчивости по исследуемым параметрам. Если такой области нет, то система будет неустойчива при любых значениях переменных параметров.

Когда по условиям задачи возможно превращение в нуль коэффициента при старшем члене характеристического уравнения, т. е. переход корня в другую область через бесконечно удаленную точку, необходимо к полученным выше границам добавить еще поверхность $a_0 = 0$, где a_0 — коэффициент при старшем члене уравнения.

Если при изменении коэффициентов один из корней уравнения обращается в нуль, то это может иметь место только когда свободный член обращается в нуль. Переход корня через нуль может иметь место лишь в точках пересечения границы областей с поверхностью $a_n = 0$.

Приведенные выше рассуждения предполагают, что переменными параметрами являются некоторые или все коэффициенты характеристического уравнения. Нетрудно заключить, что все сказанное справедливо также и для любых других параметров, которые входят в состав этих коэффициентов или являются их функциями.

Ниже рассмотрим более подробно построение областей устойчивости по одному и двум параметрам.

б) Область устойчивости в комплексной плоскости одного параметра

Допустим, что интересующая нас система имеет характеристическое уравнение $D(p) = 0$.

Выделим в левой части этого уравнения исследуемый параметр. В качестве такого параметра может быть, как было указано выше, либо один из коэффициентов характеристического уравнения, либо какой-нибудь параметр одного из звеньев, входящих в состав системы регулирования. Обозначим этот параметр буквой T и будем рассматривать его, как переменную величину.

Характеристическое уравнение примет вид

$$D(p, T) = 0. \quad (X-20)$$

Положим $p = i\omega$ и решим уравнение относительно T . Тогда

$$T = f(i\omega) = x + iy,$$

где x и y — будут некоторые функции ω .

Зададимся каким-либо значением ω_1 и вычислим отвечающее ему значение параметра T_1 . Если вычисленный параметр T_1 подставить вместо переменного T в характеристическое уравнение

и решить последнее, то среди всех корней будет обязательно один, равный $i\omega_\lambda$. Этот корень лежит на мнимой оси.

Как известно, мнимая ось является границей, разделяющей плоскость корней на левую и правую полуплоскости, т. е. на зоны корней с отрицательными и положительными вещественными частями. Будем называть эти корни левыми и правыми. Левые корни отвечают требованиям устойчивости системы. Нахождение одного корня уравнения $D(p, T) = 0$ при $T = T_\lambda$ на мнимой оси показывает, что значение параметра $T = T_\lambda$ лежит на границе области устойчивости, так как незначительное изменение T может перевести этот корень равный $i\omega_\lambda$ в правую или левую полуплоскости от мнимой оси.

Представим себе, что значение ω изменяется непрерывно от $-\infty$ до $+\infty$ и для каждого взятого значения мы вычисляем соответствующую величину T .

Далее пользуются методом комплексной плоскости. Для этой цели будем рассматривать в общем случае параметр T как комплексную величину $T = x + iy$ с последующим выделением интересующих нас вещественных значений. Выбрав на плоскости оси координат x и y , вычисляем для каждого значения ω_λ координаты x_λ и y_λ , по которым строим изображение точки T_λ .

При непрерывном изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ точка T_λ опишет на плоскости в системе координат (x, y) кривую, которая представляет границу устойчивости при изменении параметра T .

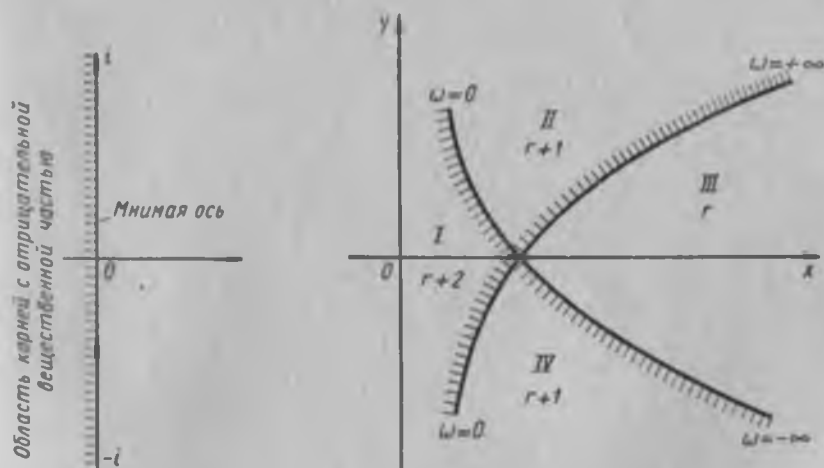
Эта кривая носит название границы D -разбиения по параметру T .

Особенностью этой кривой является то, что она всегда состоит из двух ветвей, симметричных относительно оси x . Поэтому достаточно построить только одну ветвь для ω от 0 до $+\infty$, вторая ветвь находится простым зеркальным изображением от оси x . Кривая D -разбиения может пересекать вещественную ось в одной или нескольких точках, которые являются границами D -разбиения для вещественных значений T .

Построение кривой D -разбиения еще не решает вопроса выделения области устойчивости. Последняя должна представлять совокупность точек плоскости, в которых все корни характеристического уравнения имеют отрицательную вещественную часть, в то время как кривая D представляет только совокупность точек, в которых характеристическое уравнение имеет, по крайней мере, один чисто мнимый корень вида $i\omega$.

Однако кривая D позволяет легко разбить всю плоскость параметра на области или зоны и с помощью свойств этой кривой определить в каждой зоне общее число r корней с отрицательной вещественной частью. Из всех этих областей выбирают область с наибольшим числом отрицательных корней, так как только эта область может быть областью устойчивости. Искомой областью будет та, у которой число отрицательных корней равно степени характеристического уравнения.

Изучая условия граничного перехода из одной зоны в другую, можем установить зоны с большим и меньшим числом корней, на которые разбита кривой D плоскость параметра. После этого производят штриховку одной стороны кривой. Назначение штриховки — установить ту сторону области, считая от кривой D -разбиения, где имеется больше отрицательных корней. При переходе через кривую с заштрихованной стороны на незаштрихованную число отрицатель-



Фиг. 197. Штриховка мнимой оси и кривой D -разбиения.

ных корней уменьшается на 1, при обратном переходе увеличивается на 1.

При этом следует иметь в виду, что штриховка должна производиться одинаково, как мнимой оси, так и кривой D -разбиения и притом с левой стороны по ходу изменения параметра ω от $-\infty$ до $+\infty$.

На фиг. 197 сделана штриховка мнимой оси и кривой D .

Плоскость параметра здесь разбивается кривой D на четыре зоны I, II, III и IV.

Допустим, что мы каким-либо образом установили, что в зоне III имеется число r отрицательных корней. Тогда нетрудно видеть, что число отрицательных корней

в зоне II будет $r + 1$

« IV « $r + 1$

« I « $r + 2$

Таково будет относительное распределение отрицательных корней в зонах.

Для определения абсолютного числа отрицательных корней нужно для какого-либо частного значения исследуемого параметра (обычно равного нулю, точка в начале координат и др.) непосредственно решить характеристическое уравнение и найти число инте-

ресующих нас корней. Определяя, к какой зоне относится принятое частное значение исследуемого параметра, мы устанавливаем для этой зоны абсолютное число отрицательных корней.

В дальнейшем задача сводится к вычислению числа корней во всех зонах с помощью нанесенной на кривую D штриховки и определению зоны, претендующей на область устойчивости, т. е. зоны с наибольшим числом отрицательных корней.

Последним этапом является проверка соответствия между числом отрицательных корней этой зоны и степенью характеристического уравнения. Если это соответствие имеет место, то зона с наибольшим числом отрицательных корней будет искомой областью устойчивости, в противном случае области устойчивости не существует.

Указанного определения абсолютного числа отрицательных корней путем решения характеристического уравнения можно не проводить, если характеристическое уравнение системы с частным значением исследуемого параметра взять для зоны с наибольшим числом отрицательных корней. Тогда, используя любой из алгебраических критериев, устанавливаем устойчива или неустойчива система при данном частном значении нашего параметра. Если система устойчива, то зона с наибольшим числом отрицательных корней будет искомой областью устойчивости. В противном случае области устойчивости не существует.

Рассмотрим пример.

Пример. Для системы регулирования скорости двигателя с сервомотором без обратной связи определить область устойчивости при изменении параметра θ — степени самовыравнивания объекта регулирования.

Параметры системы заданы следующими числами:

T_r (время регулятора) ≈ 0 .

T_k (время демпфера) $= 0,01$.

δ (степень неравномерности регулятора) $= 0,02$.

T_s (время сервомотора) $= 3$.

T_a (время двигателя) $= 10$.

Решение.

Уравнение регулятора

$$(T^2 p^2 + T_k p + \delta) \tau = \varphi.$$

Уравнение сервомотора без обратной связи

$$T_s p \mu = \eta.$$

Уравнение объекта регулирования при замкнутой системе

$$(T_a p + \theta) \varphi = -\mu.$$

Характеристическое уравнение системы

$$(T_r^2 p^2 + T_k p + \delta) T_s p (T_a p + \theta) + 1 = 0$$

При $T_r^2 \approx 0$ уравнение примет вид

$$T_s p (T_k p + \delta) (T_a p + \theta) + 1 = 0.$$

Решаем уравнение относительно исследуемого параметра

$$\theta = \frac{-1}{T_{\kappa p}(T_{\kappa p} + \delta)} - T_{\kappa p}$$

и делаем числовую подстановку параметров

$$\theta = \frac{-100}{3p(p+2)} - 10p.$$

После подстановки $p = i\omega$ выражение θ примет вид

$$\theta = x + iy; \quad x = \frac{100 \cdot}{3(\omega^2 + 4)};$$

$$y = \frac{200}{3\omega(\omega^2 + 4)} - 10\omega.$$

Вычисления для различных значений ω сведены в табл. 11.

На основании результатов вычислений на фиг. 198 построена одна ветвь кривой D -разбегания для ω от 0 до $+\infty$. Другая ветвь для ω от 0 до $-\infty$ найдена как зеркальное отображение от оси x .

Плоскость параметра θ разбивается на четыре зоны: I, II, III и IV.

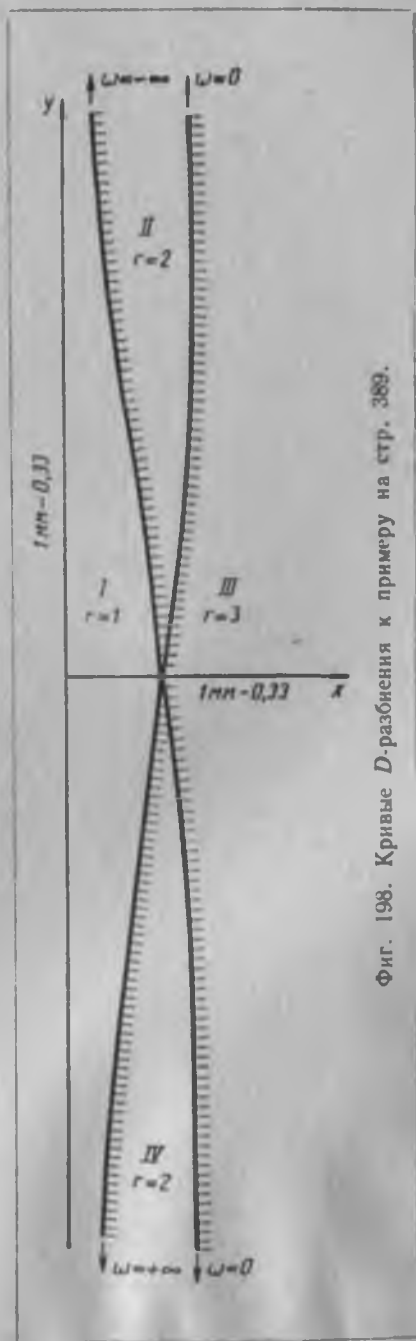
Число отрицательных корней r удобнее всего определить для I зоны, для чего полагаем $\theta = 0$ ($x = 0$, $y = 0$) и решаем характеристическое уравнение $0,3p^3 + 0,6p^2 + 1 = 0$.

Решение дает $p_1 = -2,52$ и $p_{2,3} =$

$$= +0,26 \pm \sqrt{0,26^2 - 1,32}.$$

Таким образом, число отрицательных корней в I зоне составит $r=1$. Пользуясь правилом перехода, определяем число отрицательных корней в остальных зонах. Областью наибольшего числа отрицательных корней является зона III, здесь $r=3$. Эта зона будет областью устойчивости, так как степень характеристического уравнения равна 3.

Из рассмотрения области устойчивости следует, что при надлежащем значении θ можно достичь устойчивой работы системы регулирования. Поскольку θ вещественная величина, область устойчивости для этого параметра представляет



Фиг. 198. Кривые D -разбегания к примеру на стр. 389.

Таблица 11

Вычисления для различных значений ω

№ по пор.	ω	$3(\omega^4 + 4)$	$3\omega(\omega^2 + 4)$	x	y
1	0	12	0	8,5	$+\sim$
2	$\sim$	$\sim$	$\sim$	0	$-\sim$
3	1,13	15,80	17,80	6,33	0
4	1	15	15	6,67	+3,3
5	2	24	48	4,16	-15,84
6	3	39	117	2,56	-28,29
7	5	87	435	1,15	-49,64
8	10	312	3120	0,32	-99,94

отрезок вещественной оси от точки $y = 0$, $x = 6,33$, $\omega = 1,13$ вправо до $x = +\infty$. Этот отрезок на фигуре показан жирной линией.

Наименьшее значение θ , при котором система становится устойчивой, будет $\theta_{\min} = 6,33$.

в) Область устойчивости в плоскости двух параметров

В отличие от случая одного параметра, где задача решалась в комплексной плоскости, здесь за пространство двух параметров принимается действительная плоскость с осями координат, на которых откладываются значения переменных параметров.

За переменные параметры могут быть приняты либо коэффициенты характеристического уравнения, либо параметры звеньев, от которых зависят коэффициенты уравнения.

Обозначим исследуемые параметры через T_x и T_y . Ограничимся случаем, когда T_x и T_y входят в характеристическое уравнение линейно, т. е. в уравнений нет ни произведения $T_x T_y$, ни членов T_x и T_y в степени выше первой.

Пусть $D(p) = 0$ будет характеристическое уравнение исследуемой системы, которое по выделении параметров T_x и T_y будет

$$D(p, T_x, T_y) = 0. \quad (X-21)$$

После подстановки $p = i\omega$ уравнения преобразуется в

$$D(i\omega, T_x, T_y) = x + iy = 0.$$

Здесь x и y представляют функции от текущего параметра ω , а также переменных параметров T_x и T_y . Для случая линейной зависимости от T_x и T_y мы можем написать

$$\begin{cases} x = T_x P_1(\omega) + T_y Q_1(\omega) + R_1(\omega) = 0, \\ y = T_x P_2(\omega) + T_y Q_2(\omega) + R_2(\omega) = 0, \end{cases} \quad (X-22)$$

здесь P_1 , Q_1 , R_1 , P_2 , Q_2 , R_2 суть функции текущего параметра ω .

Для всякого заданного значения $\omega = \omega_\lambda$ мы можем определить из системы уравнений (X-22) значения $T_x = T_{x\lambda}$ и $T_y = T_{y\lambda}$, при которых левые части уравнений обращаются в нуль. Это значит, что $i\omega_\lambda$ является корнем характеристического уравнения $D(p) = 0$ при $T_x = T_{x\lambda}$ и $T_y = T_{y\lambda}$. Точка M с координатами $T_x = T_{x\lambda}$ и $T_y = T_{y\lambda}$ в плоскости параметров T_x и T_y лежит на границе, делящей эту плоскость на две зоны. Выбор параметров T_x и T_y в одной зоне обеспечивает левые корни уравнения $D(p) = 0$, т. е. корни с отрицательной вещественной частью, и, следовательно, устойчивый переходный процесс. Выбор параметров в другой зоне приводит к неустойчивому процессу регулирования.

Решим систему уравнений (X-22) относительно T_x и T_y . Обозначим определители системы

$$\Delta = P_1(\omega) Q_2(\omega) - P_2(\omega) Q_1(\omega).$$

$$\begin{aligned} \Delta_x &= R_2(\omega) Q_1(\omega) - \\ &- R_1(\omega) Q_2(\omega). \end{aligned} \quad (X-23)$$

$$\Delta_y = R_1(\omega) P_2(\omega) - R_2(\omega) P_1(\omega).$$

$$\text{Тогда } T_x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad T_y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Задаваясь значением ω , вычисляем T_x и T_y и строим на плоскости точку M с координатами T_x, T_y .

Если ω изменяется непрерывно от $-\infty$ до $+\infty$, то точка M описывает на плоскости кривую, которая носит название кривой D -разбиения плоскости двух параметров (фиг. 199).

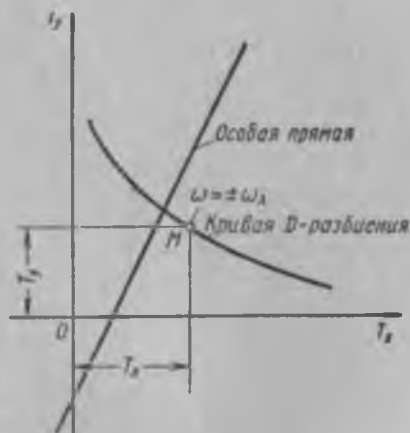
Эта кривая имеет следующие особенности:

1. Точки кривой, соответствующие равным по величине, но противоположным по знаку, значениям ω , например, $\omega = \omega_\lambda$ и $\omega = -\omega_\lambda$, всегда совпадают. Это вытекает из четности и нечетности функций P_1, Q_1, R_1 и P_2, Q_2, R_2 . Поэтому точка M кривой может быть отмечена двумя текущими параметрами $\omega = \pm \omega_\lambda$.

2. Может иметь место, что при некоторых значениях ω оба определителя Δ и Δ_x или Δ и Δ_y одновременно обращаются в 0 или ∞ .

При этом T_x или T_y принимает неопределенное значение $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

В этом случае точка M кривой D -разбиения превращается в прямую, которая носит название особой прямой. Таких прямых может быть несколько.



Фиг. 199. Кривая D -разбиения и особая прямая области устойчивости двух параметров.

Особые прямые представляют добавочные ветви кривой D -разбиения и поэтому должны все обязательно определяться, иначе разбиение плоскости двух параметров будет неполным.

3. Особые прямые могут появиться также в тех случаях, когда при изменении параметров T_x и T_y обращаются в нуль коэффициент старшего члена или свободный член характеристического уравнения.

Более детальный анализ D -разбиения плоскости двух параметров приводит к выводу, что для получения уравнений особых прямых нужно:

1) приравнять нулю коэффициент при старшем члене и свободный член характеристического уравнения, если они зависят от исследуемых переменных параметров T_x и T_y ;

2) найти значения ω , обращающие одновременно в нуль пару определителей Δ и Δ_x или Δ и Δ_y , и подставить поочередно все эти значения ω в уравнения системы (X-22). Если при этом придем к выражению вида $\text{const} = 0$, — это значит, что особая прямая проходит в бесконечности и нас не интересует.

После того как построена кривая D -разбиения и все ее ветви (особые прямые), плоскость двух параметров разбивается на зоны, производится штриховка границ и определяется область устойчивости, как указано было для случая одного параметра. Однако, правило штриховки здесь более сложное, чем при разбиении плоскости одного параметра, так как здесь ветви кривой для значений ω , отличающихся только знаками, совпадают и, кроме того, имеются особые прямые.

Ниже приводим практические правила штриховки, которые даются нами без доказательств*.

Правила штриховки. 1. Двигаясь по кривой D -разбиения по ходу изменения ω от $-\infty$ до $+\infty$, следует штриховать кривую слева, если $\Delta > 0$ и справа, если $\Delta < 0$.

Таким образом, при движении по кривой мы должны всегда иметь ввиду знак Δ .

Выполнение этого требования облегчается тем, что знак Δ может изменяться только при переходе через особую прямую или в бесконечности, а также при переходе ω через нуль.

2. Как указано было выше, кривая D при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ пробегается дважды, именно: один раз от $-\infty$ до 0 и другой — от 0 до $+\infty$. Поэтому кривая D -разбиения получает двойную штриховку с одной и той же стороны: одну при прямом ходе, другую при обратном, так как при переходе ω через 0 определитель Δ меняет свой знак. При переходе через такую кривую с заштрихованной стороны на незаштрихованную теряется два отрицательных корня, при обратном переходе приобретает два корня.

* См. Айзерман, Теория автоматического регулирования двигателей, стр. 171, ГТТИ, 1952.

3. Особые прямые штрихуются одинарной и двойной штриховками. Одинарная штриховка применяется для особых прямых, построенных для $\omega = 0$ и $\omega = \infty$. Двойной штриховкой штрихуются особые прямые, полученные для значений ω , отличных от нуля и ∞ , например, для $\omega = \omega_k > 0$.

Каждая из особых прямых штрихуется отдельно независимо от того, пересекает она остальные особые прямые или нет.

Штриховка особой прямой должна быть увязана со штриховкой кривой D -разбиения в той точке пересечения, для которой значение ω совпадает со значением ω особой прямой.

Увязка штриховки в этих точках пересечения или соприкосновения требует, чтобы стороны углов, образованных кривой и прямой были обращены друг к другу заштрихованными или незаштрихованными сторонами. Равным образом, если кривая D и особая прямая соприкасаются в бесконечности, штриховка прямой производится так, чтобы прямая и кривая в бесконечности соприкасались заштрихованными или, наоборот, незаштрихованными сторонами.

Все сказанное иллюстрируется ниже примером.

Пример. Для системы регулирования скорости с сервомотором и жесткой обратной связью определить область устойчивости двух параметров: T_K — времени катаракта и δ — степени неравномерности регулятора. Остальные параметры заданы:

T_r (время регулятора) ≈ 0 сек.

T_a (время двигателя) = 8 сек.

T_s (время сервомотора) = 1,5 сек.

θ (коэффициент самовывравнивания) = 0.

Решение. Характеристическое уравнение системы при $\theta = 0$

$$(T_r^2 p^2 + T_K p + \delta) (T_a p + 1) T_a p + 1 = 0.$$

При $T_r^2 = 0$ уравнение принимает вид

$$(T_K p + \delta) (T_a p + 1) T_a p + 1 = 0.$$

$$12 T_K p^2 + p^2 (8 T_K + 12 \delta) + 8 \delta p + 1 = 0.$$

Делаем подстановку $p = i\omega$

$$-12 T_K i \omega^3 - \omega^2 (8 T_K + 12 \delta) + 8 \omega \delta i + 1 = x + i y = 0.$$

Отсюда получаем два уравнения

$$x = -\omega^2 (8 T_K + 12 \delta) + 1 = P_1 T_K + Q_1 \delta + R_1 = 0.$$

$$y = -12 T_K \omega^3 + 8 \omega \delta = P_2 T_K + Q_2 \delta + R_2 = 0.$$

Здесь $P_1 = -8 \omega^2$; $Q_1 = -12 \omega^2$; $R_1 = 1$.

$$P_2 = -12 \omega^3; Q_2 = 8 \omega; R_2 = 0.$$

Составляем определители

$$\Delta = P_1 Q_2 - P_2 Q_1 = -16 \omega^3 (4 + 9 \omega^2),$$

$$\Delta_x = -R_1 Q_2 + R_2 Q_1 = -8 \omega.$$

$$\Delta_y = -P_1 R_2 + P_2 R_1 = -12 \omega^3.$$

Значения T_K и δ :

$$T_K = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{2\omega^2(4+9\omega^2)}; \quad \delta = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3}{4(4+9\omega^2)}.$$

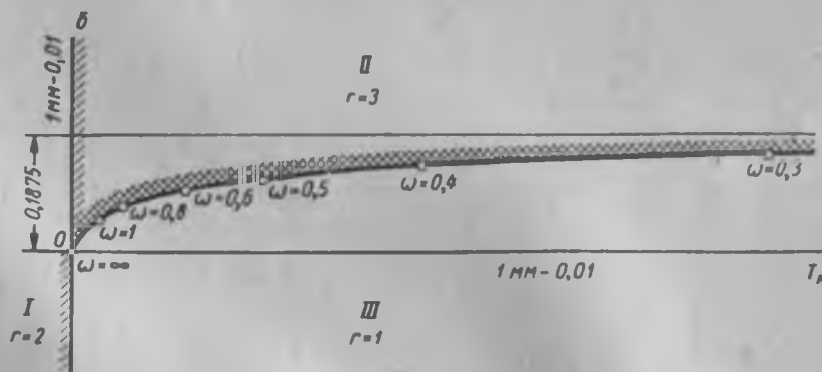
Вычисления параметров T_K и δ для разных ω сведены в табл. 12.

Таблица вычисления T_K и δ для разных ω

Таблица 12

ω	$4+9\omega^2$	$2\omega^2(4+9\omega^2)$	T_K	δ
0	4	0	∞	0,1875
∞	∞	∞	0	0
1	13	26	0,0384	0,0576
0,8	9,76	12,5	0,08	0,077
0,6	7,24	5,22	0,192	0,104
0,5	6,25	3,125	0,32	0,12
0,4	5,44	1,74	0,575	0,138
0,3	4,81	0,865	1,16	0,156

На фиг. 200 построена кривая D -разбиения для ω от 0 до $+\infty$. Вторая ветвь кривой для ω от 0 до $-\infty$ в точности совпадает с первой ветвью.



Фиг. 200. Кривая D -разбиения к примеру на стр. 394.

Для нахождения особых прямых полагаем:

- 1) свободный член характеристического уравнения равен 0. Поскольку этот член не зависит от T_K и δ , отбрасываем это решение;
- 2) коэффициент при старшем члене равен 0; это уравнение вертикальной оси;
- 3) общие множители Δ и Δ_x или Δ и Δ_y равны 0
 $\omega = 0$.

Подстановка в характеристическое уравнение дает уравнение $1 = 0$, т. е. прямую, удаленную в бесконечность. Итак, в нашем случае мы имеем одну особую прямую. Плоскость параметров T_K и δ разбивается на зоны I, II

и III. Штриховка кривой D будет двойная и поскольку $\Delta < 0$ при $\omega > 0$, она должна быть сделана справа по ходу ω от 0 к $+\infty$. Штриховка прямой сделана согласно приведенному выше правилу.

Для установления числа отрицательных корней в каждой зоне положим $T_K = +1$ и $\delta = 0$. Эта точка обязательно лежит в зоне III.

Характеристическое уравнение при этом принимает вид

$$12p^3 + 8p^2 + 1 = 0.$$

Корни уравнения

$$p_1 = -0.80; p_{2,3} = +0.665 \pm \sqrt{0.665^2 - 0.1064}.$$

Отсюда заключаем, что в III зоне имеется один отрицательный корень ($r = 1$). Определяем число r отрицательных корней в остальных зонах по общему правилу.

Областью устойчивости будет зона II, как имеющая наибольшее число r и равное степени характеристического уравнения.

Анализируя результаты построения видим, что каждому выбранному значению T_K отвечает свое предельное значение δ , ниже которого нарушаются условия устойчивости системы. Для значений $\delta > 0,1875$ система будет устойчива при всяком T_K .

6. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ ЗВЕНЬЯМИ

Ранее отмечалось, что в ряде случаев системы регулирования могут иметь в своем составе запаздывающие звенья. Под запаздывающим звеном мы понимаем такое звено, выходная величина которого изменяется в соответствии с изменением входной величины, но с отставанием от нее на некоторое время. Причина запаздывания в ряде случаев, заключается в том, что для распространения регулирующего импульса от точки измерения до регулирующего органа вдоль длинных линий с распределенными постоянными (емкостью, сопротивлением) требуется время, которое по своей величине соизмеримо с продолжительностью переходного процесса при возмущении системы толчкообразной силой.

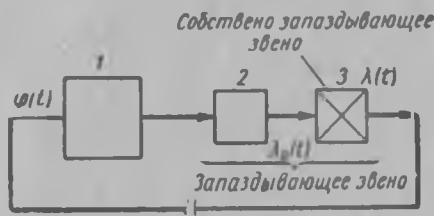
Выше, в главе IX, был приведен пример и было доказано, что при постоянном запаздывании по времени, равном a , выходная функция запаздывающего звена определяется как выходная функция звена без запаздывания с последующей подстановкой вместо переменной времени t выражения $t - a$. Это позволяет представить всякое запаздывающее звено как последовательное соединение обычного звена без запаздывания и собственно запаздывающего звена, у которого выходная функция отличается от входной только запаздыванием по времени. Рассмотрим разомкнутую систему, в составе которой имеется одно запаздывающее звено. Обозначим через $\varphi(t)$ входную и $\lambda(t)$ выходную функции.

При отсутствии запаздывания выходная функция разомкнутой системы будет отличаться от $\lambda(t)$. Обозначим ее $\lambda_0(t)$.

Допустим, что уравнение системы при отсутствии запаздывания имеет вид

$$D(p) \lambda_0(t) = \varphi(t). \quad (X-24)$$

Выделим из нашей системы запаздывающее звено, а все остальные звенья заменим одним эквивалентным звеном, т. е. представим себе систему, состоящей всего из двух звеньев: одного обычного звена любого порядка и другого запаздывающего. Последнее, согласно сказанному, может быть представлено как последовательное соединение двух звеньев — одного обычного и другого собственно запаздывающего.



Фиг. 201. Структурная схема с запаздывающим звеном.

Таким образом, структурная схема всякой разомкнутой системы с одним запаздывающим звеном может быть изображена так, как показано на фиг. 201.

Согласно сказанному о собственно-запаздывающем звене можем написать

$$\lambda(t) = \lambda_0(t - \tau), \quad (X-25)$$

если τ — есть постоянное время запаздывания.

Исключим из системы уравнений (X-24) и (X-25) функции $\lambda_0(t)$ и $\lambda_0(t - \tau)$. Для этого применим преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях

$$D(z)\lambda_0 = \bar{c}$$

$$\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0 e^{-\tau z}$$

Отсюда

$$D(z)\bar{\lambda} = \bar{c} e^{-\tau z} \quad (X-26)$$

и

$$\lambda(t) = L^{-1} \frac{\bar{c} e^{-\tau z}}{D(z)}.$$

Передаточная функция системы при отсутствии запаздывания

$$K_0(z) = \frac{1}{D(z)}.$$

То же при запаздывании

$$K(z) = \frac{e^{-\tau z}}{D(z)}.$$

Передаточная функция собственно-запаздывающего звена

$$K_\tau(z) = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda_0} = e^{-\tau z}$$

Кроме того, нетрудно заключить, что

$$K(z) = K_0(z) \cdot K_\tau(z) = K_0(z) e^{-\tau z},$$

т. е. передаточная функция разомкнутой системы с запаздывающим звеном равна произведению передаточной функции той же системы при отсутствии запаздывания на передаточную функцию собственно-запаздывающего звена, равную показательной функции $e^{-\tau z}$, где τ — постоянное время запаздывания.

Если τ постепенно уменьшать до нуля, то в пределе получим:

$$\lim K(z) = K_{пред}(z) = K_0(z).$$

При этом наша система превратится в предельную систему, в которой отсутствует собственно-запаздывающее звено, оно заменится прямой жесткой связью.

Полученную выше формулу теперь можно написать в следующем виде

$$K(z) = K_{пред}(z) \cdot K_\tau(z) = K_{пред}(z) e^{-\tau z}.$$

Эта формула устанавливает положение, что передаточная функция разомкнутой системы с запаздывающим звеном равна произведению передаточной функции предельной системы на показательную функцию $e^{-\tau z}$, где τ — время запаздывания.

Полагая $z = i\omega$, найдем амплитудно-фазовую характеристику системы с запаздыванием

$$K(i\omega) = K_{пред}(i\omega) e^{-\tau i\omega}. \quad (X-27)$$

Применим амплитудно-фазовый критерий для суждения об устойчивости системы с запаздыванием, для чего построим амплитудно-фазовую характеристику системы.

Представим комплексное выражение $K_{пред}(i\omega)$ в показательной форме

$$K_{пред}(i\omega) = R_{пред}(\omega) e^{i\psi(\omega)}, \quad (X-28)$$

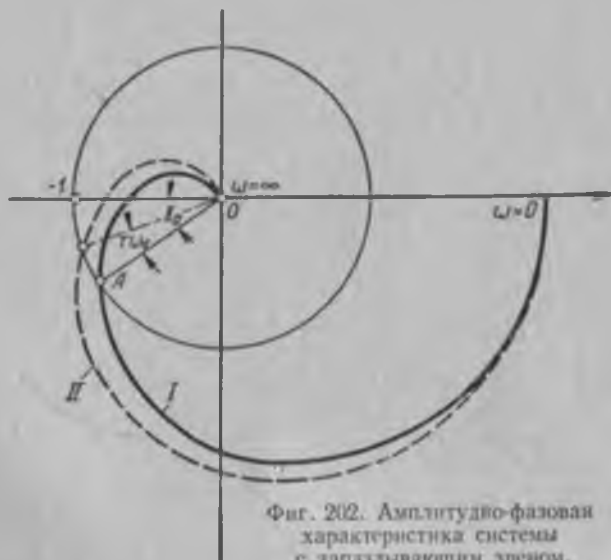
где $R_{пред}(\omega)$ — есть модуль частотной функции предельной системы и $\psi(\omega)$ — аргумент функции.

Величины $R_{пред}$ и $\psi(\omega)$ суть функции частоты ω . Подставляя выражение $K_{пред}(i\omega)$, получим

$$K(i\omega) = R_{пред} e^{[\psi(\omega) - \tau\omega] i}.$$

Отсюда следует, что для построения амплитудно-фазовой характеристики системы с запаздыванием следует построить амплитудно-фазовую характеристику предельной системы и повернуть каждый радиус-вектор этой характеристики на угол равный $\tau\omega$ по часовой стрелке.

Допустим, что предельная система устойчива и ее амплитудно-фазовая характеристика не охватывает точки $(-1, 0)$. Пусть кривая I на фиг. 202 представляет амплитудно-фазовую характеристику предельной системы. Проведем из начала координат O круг через точку $(-1, 0)$, так называемый, единичный круг, и отметим точку A пересечения этого круга с кривой I . Обозначим ω_a — частоту, отве-



Фиг. 202. Амплитудно-фазовая характеристика системы с запаздывающим звеном.

чающую этой точке, и угол γ_a , который образует радиус-вектор OA с отрицательной вещественной полуосью. Построим амплитудно-фазовую характеристику системы с запаздыванием. Пусть это будет кривая II на фиг. 202.

Пока значение угла γ_a удовлетворяет неравенству

$$\gamma_a > \omega_a \tau \quad (X-29)$$

амплитудно-фазовая характеристика, полученная из предельной поворотом каждого радиуса вектора на угол $\tau \omega_a$, не будет охватывать точку -1 на вещественной оси, так как вне единичного круга $\omega < \omega_a$, а внутри круга радиусы вектора меньше 1. Сказанное справедливо при условии, что предельная характеристика сама не охватывает точку -1 .

Таким образом, если время запаздывания меньше значения $\frac{\gamma_a}{\omega_a}$ система с запаздывающим звеном будет устойчива при условии, что предельная система сама устойчива.

Отношение $\frac{\gamma_a}{\omega_a} = \tau_{ср}$ называется критическим временем запаздывания. Мы предполагали, что единичная окружность пересекает

предельную амплитудно-фазовую характеристику только в одной точке A . Возможны случаи, когда окружность единичного радиуса имеет несколько точек пересечения с предельной характеристикой. При этом мы получим несколько значений критического времени $\tau_{1кр}$, $\tau_{2кр}$, ... смотря по числу точек пересечения. В этом случае на практике обычно выбирают наименьшее значение $\tau_{кр}$, по которому и судят об устойчивости для запаздывающих систем.

Система с последовательно включенным запаздывающим звеном будет устойчива, если устойчива предельная система и время запаздывания меньше критического времени запаздывания.

При неустойчивой предельной системе возможны случаи, когда при достаточно большом угле поворота система с запаздыванием будет устойчива.

7. СТРУКТУРНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

а) Основные положения

Анализ ряда конкретных схем регулирования показывает, что существуют такие схемы, у которых устойчивость процесса регулирования не может быть достигнута ни при каких значениях параметров звеньев. Для получения устойчивого процесса необходимо заменить одно или несколько звеньев звеньями других типов или ввести в систему дополнительные связи, т. е. в конечном итоге изменить структурную схему системы.

Системы регулирования, неустойчивые при любых значениях своих параметров, принято называть структурно-неустойчивыми.

Для стабилизации структурно-неустойчивой системы необходимо изменить ее структурную схему. Соответственно система называется структурно-устойчивой, если ее можно сделать устойчивой, не изменяя ее структурной схемы, ограничиваясь лишь надлежащим подбором значений параметров звеньев.

В связи с этим ставится задача установить признаки структурно-устойчивых и неустойчивых систем по виду их структурных схем. Исследованиями условий структурной устойчивости и стабилизации структурно-неустойчивых систем занимается ряд советских ученых. Однако эту задачу нельзя считать вполне разрешенной.

Ниже мы остановимся на ознакомлении с методом исследования структурной устойчивости и приведем некоторые выводы.

Рассмотрим систему из трех элементов, структурная схема которой изображена на фиг. 203. Структура каждого звена определена выходным оператором и коэффициентом усиления.

Уравнения звеньев

$$(T_1^2 p^2 + T_{кр} p + 1) \lambda_2 = u_1 \lambda_1$$

$$p \lambda_3 = u_2 \lambda_2$$

$$p \lambda_4 = u_3 \lambda_3.$$

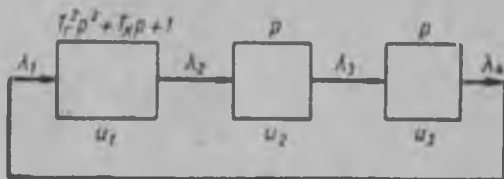
Для замкнутой системы $\lambda_4 = -\lambda_1$.

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$p^3 (T_r^2 p^2 + T_k p + 1) + U = 0,$$

где $U = u_1 u_2 u_3$.

Рассматривая это характеристическое уравнение и применяя к нему критерий Гурвица, найдем, что в этом случае условия устойчивости не соблюдены и не могут быть соблюдены ни при каких значениях параметров T_r , T_k , U , так как в уравнении отсутствует член первой степени p . Эта система будет структурно-неустойчивой. Чтобы сделать систему структурно-устойчивой, нужно одно из астатических звеньев заменить одноемкостным, например, вместо звена № 2 фиг. 203 взять звено с выходным оператором $Tr + 1$. Характеристическое уравнение замкнутой системы теперь будет



Фиг. 203. Пример структурно-неустойчивой системы.

$$p (Tp + 1) (T_r^2 p^2 + T_k p + 1) + U = 0,$$

$$T_r^2 T p^4 + (T_r^2 + T_k T) p^3 + (T + T_k) p^2 + p + U = 0.$$

Условия устойчивости по критерию Гурвица сводятся к удовлетворению одного неравенства, поскольку все параметры T_r , T_k , T и U суть положительные числа

$$T^2 T_k + T_r^2 T_k + T T_k^2 > U (T_r^2 + T T_k)^2.$$

Это неравенство при заданных значениях T , T_k и T_r всегда может быть удовлетворено надлежащим выбором коэффициента усиления системы

$$U < \frac{T^2 T_k + T_r^2 T_k + T T_k^2}{(T_r^2 + T T_k)^2}. \quad (X-30)$$

Совершенно аналогично можно доказать, что всякая одноконтурная система, состоящая из различных простых звеньев, среди которых имеется два или более астатических, будет структурно-неустойчива.

Рассмотрим теперь систему, которая содержит среди своих звеньев два неустойчивых звена первого порядка с отрицательным статизмом, имеющих операторы $T_1 p - 1$ и $T_2 p - 1$. Допустим, что остальные звенья колебательного или одноемкостного типа. Тогда

характеристическое уравнение замкнутой системы должно иметь вид

$$(T_1 p - 1)(T_2 p - 1) \Pi(T_s p + 1) \Pi(T_r^2 p^2 + T_k p + 1) + U = 0. \quad (X-31)$$

Здесь символ Π означает произведение полиномов выходных операторов, причем для сокращения письма опущены указатели числа множителей у каждого символа. Кроме того, предполагается, что все индексы s , r и k различны для каждого множителя.

У разомкнутой системы характеристическое уравнение будет отличаться от предыдущего только отсутствием свободного члена U .

$$(T_1 p - 1)(T_2 p - 1) \Pi(T_s p + 1) \Pi(T_r^2 p^2 + T_k p + 1) = F(p) = 0. \quad (X-32)$$

Все остальные коэффициенты при различных степенях p будут соответственно равны.

Одним из необходимых условий устойчивости системы является требование положительности всех коэффициентов характеристического уравнения. Допустим, что это условие соблюдено для уравнения (X-31) и, следовательно, для уравнения (X-32). Левая часть уравнения (X-32) представляет функцию $F(p)$ переменного p , которая обращается в нуль при значениях p :

$$p_1 = \frac{1}{T_1} \text{ и } p_2 = \frac{1}{T_2}.$$

Отсюда вытекает также необходимость обращения в нуль первой производной $F'(p)$ при некотором значении p_0 , удовлетворяющем неравенству $p_1 < p_0 < p_2$. Поскольку p_1 и p_2 положительны, значение p_0 также > 0 . Однако, вследствие допущения, что все коэффициенты $F(p)$, а следовательно и $F'(p)$, положительны, обращение $F'(p)$ в нуль при $p_0 > 0$ невозможно. Это заставляет признать допущение о положительности всех коэффициентов исходного уравнения ошибочным и считать, что условия устойчивости для него невыполнены при любых значениях T_1 и T_2 и других параметров. Система структурно-неустойчива.

Таким образом, наличие в одноконтурной системе двух звеньев или более первого порядка с отрицательным статизмом делает систему структурно-неустойчивой.

Рассмотрим теперь систему, которая среди своих звеньев имеет одно консервативное звено с оператором $T_2^2 p^2 + 1$. Допустим, что все остальные звенья системы будут колебательными или одно-емкостными

Характеристическое уравнение замкнутой системы представится после разделения обеих частей уравнения на U :

$$\frac{1}{U} (T_2^2 p^2 + 1) \Pi(T_s p + 1) \Pi(T_r^2 p^2 + T_k p + 1) + 1 = F(p) = 0. \quad (X-33)$$

Значение символа Π то же, что и выше.

Будем строить годограф Михайлова $F(i\omega)$.

Функция $F(i\omega)$ может быть представлена в виде

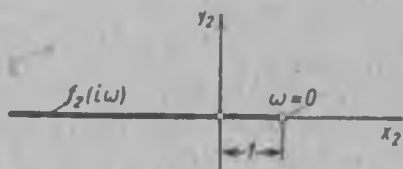
$$F(i\omega) = f_2(i\omega) f_n(i\omega) + 1,$$

где

$$f_2(i\omega) = -T_2^2 \omega^2 + 1$$

и

$$f_n(i\omega) = \frac{1}{U} \Pi(T_s i\omega +$$



Фиг. 204. Годограф консервативного звена.

$$+ 1) \Pi(-T_r^2 \omega^2 + T_k i\omega + 1). \quad (X-34)$$

Условимся индекс n устанавливать по наивысшей степени функции $f_n(i\omega)$.

Построение годографа Михайлова сводится к построению вспомогательных кривых $f_2(i\omega)$ и $f_n(i\omega)$, перемножению их и сдвигу начала координат влево на 1.

Годограф $f_2(i\omega) = -T_2^2 \omega^2 + 1$ представляет отрезок вещественной оси, начинающийся от точки $(+1, 0)$ при $\omega = 0$ и простирающийся влево до точки $(-\infty, 0)$ при $\omega = +\infty$.

Этот годограф показан на фиг. 204.

Вспомогательный годограф $f_n(i\omega)$ составлен по допущению из устойчивых звеньев, так как все параметры T_s , T_r , T_k предполагаются положительными. Поэтому протекание этого годографа в зависимости от индекса n будет происходить так, как показано на фиг. 205, а, б, в, г.

Помножим кривые $f_n(i\omega)$ при разных n соответственно на годограф, изображенный на фиг. 204. При этом числовые значения векторов перемножаются, а их аргументы складываются.

$$\text{При } 0 < \omega < \omega_1, \arg f_2(i\omega) = 0; \arg(f_2 f_n) = \arg f_n.$$

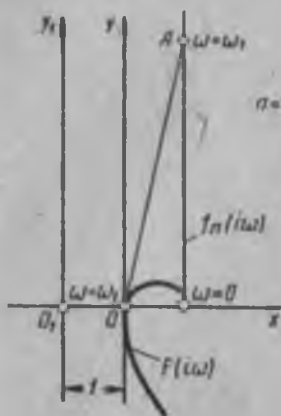
$$\text{При } \omega > \omega_1, \arg f_2(i\omega) = \pi; \arg(f_2 f_n) = \arg f_n + \pi.$$

Осбymi точками, определяющими форму годографа $F(i\omega)$, являются точки $\omega = 0$ и $\omega = \omega_1 = \frac{1}{T_s}$. Положение точки $\omega = \omega_1$ на годографе определяется параметрами звеньев, входящих в состав системы.

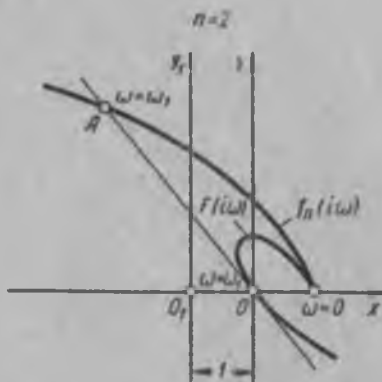
В случае $n = 1$ (см. фиг. 205, а), как бы мы ни подбирали параметры всех звеньев, радиус-вектор OA будет всегда находиться в первом квадранте осей XOY , почему годограф $F(i\omega)$ будет иметь вид, показанный на фиг. 205, а. Передвигая ось ординат влево на 1, найдем окончательное положение осей координат и начало O_1 для отсчета радиус-векторов искомого годографа $F(i\omega)$. Годограф имеет непра-

вильную форму, исправить которую нельзя ни при каких числовых значениях параметров входящих звеньев.

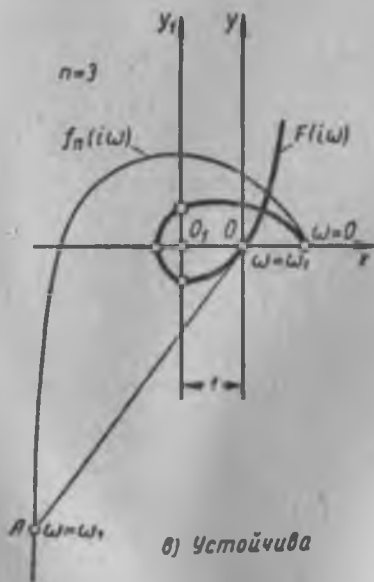
Система структурно-неустойчива.



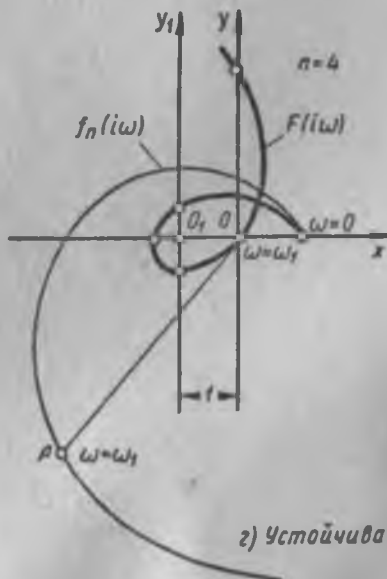
а) Неустойчива



б) Неустойчива



в) Устойчива



г) Устойчива

Фиг. 205. Вспомогательный годограф $f_n(i\omega)$ при разных индексах « n ».

В случае $n = 2$ мы можем надлежащим подбором параметров точку $\omega = \omega_1$ на годографе $f_n(i\omega)$ передвинуть как угодно далеко во второй квадрант осей XOY . При этом годограф $F(i\omega)$, который должен касаться луча OA , будет иметь форму, как показано

на фиг. 205, б. В осях координат XO_1Y_1 эта форма годографа будет неправильной. Система и здесь будет структурно-неустойчива.

В случае $n = 3$ (см. фиг. 205, в) мы можем при надлежащем подборе параметров звеньев передвинуть точку $\omega = \omega_1$ на годографе $f_n(i\omega)$ в третий квадрант осей XOY . При этом годограф $F(i\omega)$ может принять форму, указанную на фигуре. В осях XO_1Y_1 эта форма может оказаться правильной, и мы должны сделать вывод, что система в этом случае структурно-устойчива.

К совершенно аналогичному выводу мы придем также в случае $n = 4$ и более (см. фиг. 205, г).

Приведенные выше случаи показывают примеры структурно-неустойчивых систем. Более подробные исследования одноконтурных систем регулирования приводят к следующему выводу*.

Для того чтобы одноконтурная система была структурно-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы:

1) система содержала не более одного астатического или неустойчивого звена и не содержала одновременно астатического и неустойчивого звеньев;

2) степень характеристического уравнения системы, содержащей r консервативных звеньев, была больше $4r$.

б) Критический коэффициент усиления системы

Коэффициент усиления системы в вопросах регулирования играет существенную роль. В статических системах коэффициент усиления определяет остаточную неравномерность, т. е. статическую точность регулирования. Чем больше коэффициент усиления U , тем меньше степень неравномерности системы регулирования. Однако, как увидим ниже, для всякой структурно-устойчивой системы существует такое значение коэффициента усиления, при превышении которого система становится неустойчивой. Такое значение коэффициента усиления называется критическим.

Характеристическое уравнение всякой одноконтурной замкнутой системы, как было доказано ранее, может быть представлено в виде

$$D_1(p) = D(p) + U = 0. \quad (X-35)$$

Построим годограф Михайлова $D_1(i\omega)$ для этого характеристического уравнения. Целесообразно сперва построить вспомогательный годограф $D(i\omega)$, который представляет годограф разомкнутой системы, и потом перенести влево начало координат на величину U .

Допустим, что вспомогательный годограф $D(i\omega)$ имеет правильную форму, как показано на фиг. 206.

Перенесем теперь начало координат из O в точку O_1 , влево на величину U . Пока величина U мала, годограф $D(i\omega)$ сохраняет

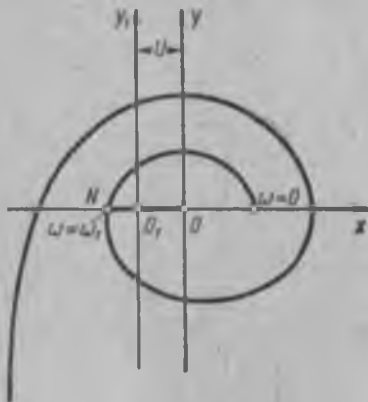
* См. Айзерман, Теория автоматического регулирования двигателей, ГТТИ, 1952.

правильную форму относительно осей координат. Однако, когда U делается больше отрезка ON , правильность формы годографа по отношению к осям координат исчезает, система становится неустойчивой. Таким образом, критическое значение $U = U_{кр}$ равно отрезку ON , где точка N представляет ближайшую к началу координат точку пересечения годографа $D(i\omega)$ с отрицательной вещественной полуосью системы координат XOY .

Для аналитического определения $U_{кр}$ заменяем p на $i\omega$ в полиноме $D(p)$ и определяем вещественную и мнимую части годографа $D(i\omega)$

$$D(i\omega) = x(\omega) + iy(\omega).$$

После этого решаем уравнение $y(\omega) = 0$, полученные значения корней $\omega_1, \omega_2 \dots$ подставляем в функцию $x(\omega)$ и находим числа $x_1, x_2 \dots$. Найденное наименьшее по абсолютной величине отрицательное число x_k будет искомым значением $U_{кр}$.



Фиг. 206. Определение критического коэффициента усиления.

в) Стабилизация систем регулирования введением внутренних обратных связей и воздействий по производным

Удовлетворить требования структурной устойчивости для одноконтурных систем регулирования не всегда представляется практически возможным. В связи с этим возникает задача введения в систему регулирования дополнительных устройств, обеспечивающих устойчивую работу системы и требуемое качество переходного процесса*. Такие устройства называются стабилизирующими, а применение этих устройств с указанной целью — стабилизацией.

Одноконтурные системы, как известно, отличаются от других более сложных систем наличием только главных связей между звеньями, которые располагаются последовательно в замкнутую цепочку. Введение в одноконтурные системы дополнительных обратных связей между звеньями или воздействий по производным оказывает стабилизирующее действие на эти системы. Сущность действия стабилизации заключается в изменении природы неустойчивых звеньев.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся случаи стабилизации отдельных звеньев.

* См. главу XI.

Шунтирование интегрирующего звена жесткой обратной связью (фиг. 207).

Уравнение звена без обратной связи

$$T\rho\lambda_{\text{внх}} = u\lambda_{\text{вх}}.$$

Уравнение звена с обратной связью

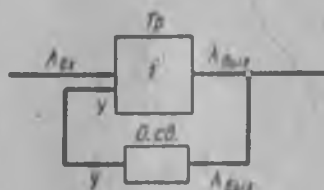
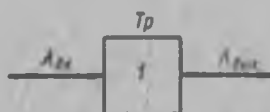
$$T\rho\lambda_{\text{внх}} = u(\lambda_{\text{вх}} + y).$$

Уравнение обратной связи

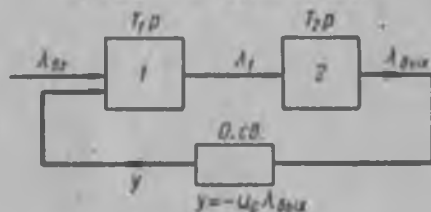
$$y = -u_c\lambda_{\text{внх}}.$$

Исключая y , найдем

$$T\rho\lambda_{\text{внх}} = u(\lambda_{\text{вх}} - u_c\lambda_{\text{внх}})$$



Фиг. 207. Шунтирование астатического звена жесткой обратной связью.



Фиг. 208. Шунтирование двух астатических звеньев жесткой обратной связью.

или

$$(T\rho + uu_c)\lambda_{\text{внх}} = u\lambda_{\text{вх}}.$$

Разделив на uu_c , приходим к уравнению

$$(T_1\rho + 1)\lambda_{\text{внх}} = u_1\lambda_{\text{вх}}, \quad (\text{X-36})$$

где

$$u_1 = \frac{1}{u_c}; \quad T_1 = \frac{T}{uu_c}.$$

Таким образом шунтирование астатического (интегрирующего) звена жесткой обратной связью придает ему характер апериодического звена.

Шунтирование двух интегрирующих звеньев жесткой обратной связью (фиг. 208)

Уравнение I звена

$$T_1\rho\lambda_1 = u_1(\lambda_{\text{вх}} + y).$$

Уравнение II звена

$$T_2\rho\lambda_{\text{внх}} = u_2\lambda_1.$$

(X-37)

Уравнение обратной связи $y = -u_c \lambda_{\text{вых}}$. Исключая y и λ_1 , получим

$$(T_1 T_2 p^2 + u_1 u_2 u_c) \lambda_{\text{вых}} = u_1 u_2 \lambda_{\text{вх}}$$

или

$$(T^2 p^2 + 1) \lambda_{\text{вых}} = u \lambda_{\text{вх}}, \quad (\text{X-38})$$

где

$$u = \frac{1}{u_c} \text{ и } T^2 = \frac{T_1 T_2}{u_1 u_2 u_c}.$$

Таким образом, два последовательно соединенных интегрирующих звена, зашунтированных одной жесткой обратной связью, эквивалентны одному консервативному звену.

Шунтирование аperiodического звена 1-го порядка жесткой обратной связью

Уравнение звена

$$(Tp + 1) \lambda_{\text{вых}} = u (\lambda_{\text{вх}} + y).$$

Уравнение обратной связи

$$y = -u_c \lambda_{\text{вых}}.$$

(X-39)

Исключаем y :

$$(Tp + 1 + uu_c) \lambda_{\text{вых}} = u \lambda_{\text{вх}}$$

или

$$(T_1 p + 1) \lambda_{\text{вых}} = u_1 \lambda_{\text{вх}},$$

где

$$T_1 = \frac{T}{1 + uu_c} \text{ и } u_1 = \frac{u}{1 + uu_c}.$$

(X-40)

Таким образом шунтирование аperiodического звена жесткой связью не изменяет структуру звена, но уменьшает его коэффициент усиления и постоянную времени. Это дает средство стабилизации систем, у которых неустойчивость вызвана превышением коэффициента усиления над критическим.

Шунтирование неустойчивого звена 1-го порядка жесткой обратной связью

Уравнение звена

$$(Tp - 1) \lambda_{\text{вых}} = u (\lambda_{\text{вх}} + y).$$

Уравнение обратной связи

$$y = -u_c \lambda_{\text{вых}}$$

(X-41)

Исключая y , придем к уравнению:

$$\left. \begin{aligned} (T_1 p + 1) \lambda_{\text{вых}} &= u_1 \lambda_{\text{вх}}, \\ \text{где} \quad u_1 &= \frac{u}{uu_c - 1} \text{ и } T_1 = \frac{T}{uu_c - 1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{X-42})$$

Отсюда вывод:

Шунтирование неустойчивого звена 1-го порядка с оператором $Tp - 1$ при надлежащем выборе коэффициента передачи u_c обратной связи делает звено устойчивым, апериодического типа, с оператором $T_1 p + 1$.

Шунтирование жесткой обратной связью двух апериодических звеньев 1-го порядка (схема аналогична схеме фиг. 208).

Уравнение I звена

$$(T_1 p + 1) \lambda_2 = u_1 (\lambda_{\text{вх}} + y).$$

Уравнение II звена

$$(T_2 p + 1) \lambda_{\text{вых}} = u_2 \lambda_2.$$

(X-43)

Уравнение обратной связи $y = -u_c \lambda_{\text{вых}}$.

Исключая λ_2 и y , придем к уравнению

$$\left. \begin{aligned} (T_r p^2 + T_k p + 1) \lambda_{\text{вых}} &= u \lambda_{\text{вх}}, \\ \text{где} \quad T_r &= \frac{T_1 T_2}{1 + u_1 u_2 u_c}; \quad T_k = \frac{T_1 + T_2}{1 + u_1 u_2 u_c}; \quad u = \frac{u_1 u_2}{1 + u_1 u_2 u_c}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{X-44})$$

Таким образом, два апериодических звена 1-го порядка, включенных последовательно и шунтированных общей жесткой обратной связью, эквивалентны одному апериодическому звену 2-го порядка. Нетрудно убедиться, что это звено имеет всегда апериодический характер переходного процесса, так как $T_k^2 - 4T_r^2 > 0$. В самом деле $(T_1 + T_2)^2 - 4T_1 T_2 = (T_1 - T_2)^2 > 0$.

Шунтирование консервативного звена жесткой обратной связью.

Уравнение звена

$$(T^2 p^2 + 1) \lambda_{\text{вых}} = u (\lambda_{\text{вх}} + y).$$

Уравнение связи

$$y = -u_c \lambda_{\text{вых}}$$

(X-45)

Исключая y , получим уравнение

$$\left. \begin{aligned} (T_r^2 p^2 + 1) \lambda_{\text{вых}} &= u_1 \lambda_{\text{вх}}, \\ \text{где} \quad u_1 &= \frac{u}{1 + uu_c}; \quad T_r^2 = \frac{T^2}{1 + uu_c}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{X-46})$$

Отсюда следует, что шунтирование консервативного звена жесткой обратной связью не влияет на структуру звена, но уменьшает коэффициент усиления и постоянную времени звена.

Шунтирование жесткой обратной связью звена 2-го порядка с отрицательным статизмом.

Уравнение звена

$$\left. \begin{aligned} (T_r^2 p^2 + T_k p + 1) \lambda_{\text{вых}} &= u (\lambda_{\text{вх}} + y), \\ y &= -u_c \lambda_{\text{вых}}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{X-47})$$

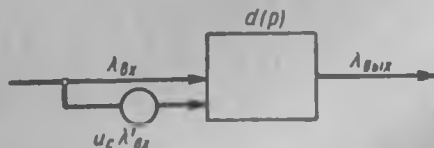
Исключая y , найдем

$$\left. \begin{aligned} (T_r^2 p^2 + T_1 p + 1) \lambda_{\text{вых}} &= u_1 \lambda_{\text{вх}}, \\ \text{где} \quad u_1 &= \frac{u}{u u_c - 1}; \quad T_1^2 = \frac{T_r^2}{u u_c - 1}; \quad T_1 = \frac{T_k}{u u_c - 1} \end{aligned} \right\} \quad (\text{X-48})$$

Таким образом, шунтирование жесткой обратной связью звена 2-го порядка с отрицательным статизмом при выборе достаточно большого коэффициента передачи u_c обратной связи может изменить знак статизма.

Влияние на структуру звена воздействий по производным.

Сущность воздействия по производной заключается в том, что на вход звена подается воздействие, зависящее не только от выходной величины предыдущего звена, но и дополнительное воздействие, пропорциональное скорости изменения этой величины. Если это дополнительное воздействие направлено согласнo с основным воздействием, мы имеем положительное воздействие по производной. В противном случае это воздействие будет отрицательным. Введение в закон регулирования первой производной может быть осуществлено различными способами, обычно путем включения дифференцирующих звеньев.



Фиг. 209. Звено с дополнительным воздействием по производной.

Пусть на вход какого-либо звена с выходным оператором $d(p)$ подается величина $\lambda_{\text{вх}}$ и дополнительная величина $T_c \lambda'_{\text{вх}}$ (фиг. 209).

Уравнение звена без воздействия по производной будет

$$d(p) \lambda_{\text{вых}} = u \lambda_{\text{вх}}.$$

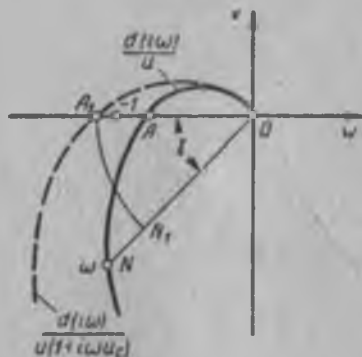
То же при воздействии по производной

$$d(p) \lambda_{\text{вых}} = u (\lambda_{\text{вх}} + T_c \lambda'_{\text{вх}}) = u (1 + T_c p) \lambda_{\text{вх}} \quad (\text{X-49})$$

Сравним обратные амплитудно-фазовые характеристики для обоих случаев:

$$\frac{d(i\omega)}{u} \text{ и } \frac{d(i\omega)}{u(1+iT_c\omega)}$$

Допустим, что в первом случае амплитудно-фазовая характеристика не будет охватывать точку $(-1, 0)$ на левой вещественной полуоси, т. е. будет неустойчивой, как показано на фиг. 210.



Фиг. 210. Обратная амплитудно-фазовая характеристика звена с дополнительным воздействием по производной.

Характеристику $\frac{d(i\omega)}{u(1+i\omega T_c)}$ легко построить, если известна характеристика $\frac{d(i\omega)}{u}$. Деление на комплексное выражение $1+i\omega T_c$ соответствует повороту любого вектора ON характеристики $\frac{d(i\omega)}{u}$, отвечающего значению ω , на угол $\gamma = \arctg T_c \omega$ по стрелке часов и умножению длины вектора на модуль $\frac{1}{\sqrt{1+T_c^2\omega^2}}$.

Выбирая надлежащее значение T_c воздействия по производной, мы можем добиться того, что харак-

теристика $\frac{d(i\omega)}{u(1+i\omega T_c)}$ будет охватывать точку $(-1, 0)$ на вещественной оси, т. е. звено станет устойчивым.

Из этого примера явствует значение введения в закон регулирования воздействия по первой производной. Первая производная повышает устойчивость системы. Детальное исследование* показывает, что при наличии положительного воздействия по первой производной одноконтурная система, не нарушая своей структурной устойчивости, может содержать до двух астатических звеньев и, кроме того, консервативные звенья, при условии, что степень характеристического уравнения удовлетворяет неравенству:

$$\text{при } q = 0 \quad n > 4r - 3$$

$$\text{» } q = 1 \quad n > 4r$$

$$\text{» } q = 2 \quad n > 4r + 1.$$

Здесь q — число астатических звеньев;

r — число консервативных звеньев;

n — степень характеристического уравнения.

Остановимся вкратце на вопросе выбора величины воздействия по производной.

* См. книгу Айзермана М. А., Теория автоматического регулирования двигателей, ГТТИ. 1952.

Допустим, что воздействие по производной подано на первое звено системы. Уравнение этого звена будет

$$d_1(p) \lambda_2 = u_1 (1 + T_c p) \lambda_1.$$

Все остальные звенья системы заменим одним эквивалентным звеном с оператором $D_1(p)$

$$D_1(p) \lambda_2 = U_{n-1} \lambda_2.$$

Для замкнутой системы $\lambda_2 = -\lambda_1$.

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$D(p) + U_n + p U_c = 0,$$

где $D(p) = D_1(p) d_1(p)$; $U_n = u_1 U_{n-1}$; $U_c = T_c U_{n-1}$.

Построим область устойчивости в плоскости двух параметров U_n и U_c .

Пусть $D(i\omega) = x(\omega) + iy(\omega)$.

Тогда параметры U_n и U_c определяются из уравнений

$$U_n + x(\omega) = 0; \quad U_c \omega + y(\omega) = 0. \quad (X-50)$$

Отсюда $U_n = -x(\omega)$ и $U_c = \frac{-y(\omega)}{\omega}$. Это дает возможность построить кривую D -разбиения.

Особые прямые определяются из уравнения $\Delta = 0$, где Δ — определитель системы уравнения (X-50)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{vmatrix} = \omega.$$

Особая прямая определяется уравнением $U_n = -x(0)$. Это будет прямая, параллельная оси ординат и проходящая через точку $-x(0)$ вещественной оси.

Построение кривой D -разбиения производится по годографу. График определения воздействия по производной дан на фиг. 211.

Пусть на фиг. 211, а задан годограф

$$D(i\omega) = x + iy$$

в виде кривой I .

Построим кривую $-D(i\omega) = -x - iy$. Это построение выполнено на фиг. 211, б в форме кривой II , которая представляет повторение кривой I , если переменить направление осей x и y .

Далее разделим ординаты кривой II на ω . Тогда получим кривую

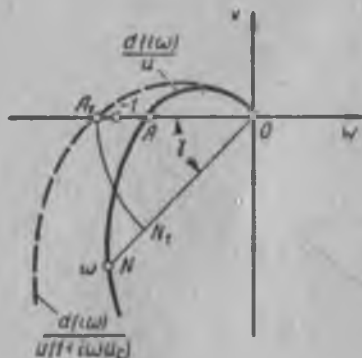
$$F(i\omega) = -x(\omega) - i \frac{y(\omega)}{\omega} = U_n + i U_c.$$

Такая кривая изображена на фиг. 211, в в виде кривой III .

Сравним обратные амплитудно-фазовые характеристики для обоих случаев:

$$\frac{d(i\omega)}{u} \text{ и } \frac{d(i\omega)}{u(1+iT_c\omega)}$$

Допустим, что в первом случае амплитудно-фазовая характеристика не будет охватывать точку $(-1, 0)$ на левой вещественной полуоси, т. е. будет неустойчивой, как показано на фиг. 210.



Фиг. 210. Обратная амплитудно-фазовая характеристика звена с дополнительным воздействием по производной.

Характеристику $\frac{d(i\omega)}{u(1+i\omega T_c)}$ легко построить, если известна характеристика $\frac{d(i\omega)}{u}$. Деление на комплексное выражение $1+i\omega T_c$ соответствует повороту любого вектора ON характеристики $\frac{d(i\omega)}{u}$, отвечающего значению ω , на угол $\gamma = \arctg T_c \omega$ по стрелке часов и умножению длины вектора на модуль $\frac{1}{\sqrt{1+T_c^2\omega^2}}$.

Выбирая надлежащее значение T_c воздействия по производной, мы можем добиться того, что харак-

теристика $\frac{d(i\omega)}{u(1+i\omega T_c)}$ будет охватывать точку $(-1, 0)$ на вещественной оси, т. е. звено станет устойчивым.

Из этого примера явствует значение введения в закон регулирования воздействия по первой производной. Первая производная повышает устойчивость системы. Детальное исследование* показывает, что при наличии положительного воздействия по первой производной одноконтурная система, не нарушая своей структурной устойчивости, может содержать до двух астатических звеньев и, кроме того, консервативные звенья, при условии, что степень характеристического уравнения удовлетворяет неравенству:

$$\text{при } q = 0 \quad n > 4r - 3$$

$$\gg q = 1 \quad n > 4r$$

$$\gg q = 2 \quad n > 4r + 1.$$

Здесь q — число астатических звеньев;

r — число консервативных звеньев;

n — степень характеристического уравнения.

Остановимся вкратце на вопросе выбора величины воздействия по производной.

* См. книгу Айзермана М. А., Теория автоматического регулирования двигателей, ГТТИ. 1952.

Допустим, что воздействие по производной подано на первое звено системы. Уравнение этого звена будет

$$d_1(p) \lambda_1 = u_1 (1 + T_c p) \lambda_1.$$

Все остальные звенья системы заменим одним эквивалентным звеном с оператором $D_1(p)$

$$D_1(p) \lambda_1 = U_{n-1} \lambda_1.$$

Для замкнутой системы $\lambda_1 = -\lambda_1$.

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$D(p) + U_n + p U_c = 0,$$

где $D(p) = D_1(p) d_1(p)$; $U_n = u_1 U_{n-1}$; $U_c = T_c U_{n-1}$.

Построим область устойчивости в плоскости двух параметров U_n и U_c .

Пусть $D(i\omega) = x(\omega) + iy(\omega)$.

Тогда параметры U_n и U_c определяются из уравнений

$$U_n + x(\omega) = 0; \quad U_c \omega + y(\omega) = 0. \quad (X-50)$$

Отсюда $U_n = -x(\omega)$ и $U_c = \frac{-y(\omega)}{\omega}$. Это дает возможность построить кривую D -разбиения.

Особые прямые определяются из уравнения $\Delta = 0$, где Δ — определитель системы уравнения (X-50)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{vmatrix} = \omega.$$

Особая прямая определяется уравнением $U_n = -x(0)$. Это будет прямая, параллельная оси ординат и проходящая через точку $-x(0)$ вещественной оси.

Построение кривой D -разбиения производится по годографу. График определения воздействия по производной дан на фиг. 211.

Пусть на фиг. 211, а задан годограф

$$D(i\omega) = x + iy$$

в виде кривой I .

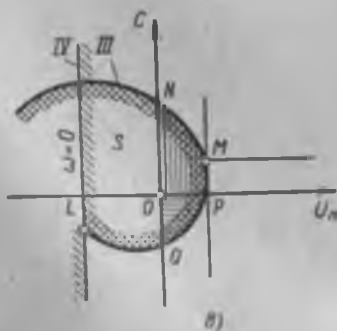
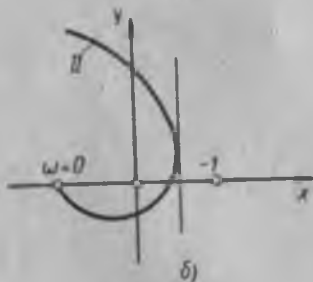
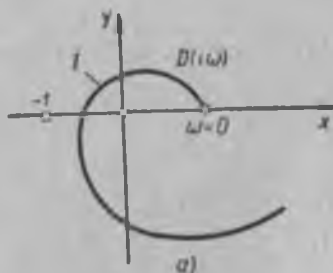
Построим кривую $-D(i\omega) = -x - iy$. Это построение выполнено на фиг. 211, б в форме кривой II , которая представляет повторение кривой I , если переменить направление осей x и y .

Далее разделим ординаты кривой II на ω . Тогда получим кривую

$$F(i\omega) = -x(\omega) - i \frac{y(\omega)}{\omega} = U_n + i U_c.$$

Такая кривая изображена на фиг. 211, в в виде кривой III

Нетрудно видеть, что это есть искомая кривая D -разбиения в плоскости параметров U_n и U_c . Особая прямая IV проходит на расстоянии $OL = -x(0)$. Штриховка произведена согласно изложенному выше правилу.



Фиг. 211. График определения воздействия по производной.

S — область устойчивости. Практическое значение имеет зона $ONMP$, где U_n и U_c положительны. Зона OPQ относится к отрицательному воздействию по первой производной. Наивыгоднейшее воздействие по первой производной следует считать в точке M , где коэффициент усиления имеет критическое значение $U_{nкр}$. Выбирая U_n и U_c так, чтобы они находились в области устойчивости и чтобы U_n было возможно ближе к $U_{nкр}$, мы найдем значения U_n и U_c , наиболее благоприятные с точки зрения устойчивости нашей системы. Величина T_c определится как отношение $T_c = \frac{U_c}{U_{n-1}}$.

Параллельное соединение интегрирующего и усилительного звеньев (фиг. 212).

Уравнение интегрирующего звена

$$Tr\lambda_2 = u_1\lambda_1.$$

Уравнение усилительного звена

$$\mu_2 = u_2\lambda_1.$$

Кроме того, $\lambda_3 = \lambda_2 + \mu_2$ при согласном соединении звеньев.

Исключая из этих уравнений λ_2 и μ_2 , получим

$$\begin{aligned} Tr\lambda_3 &= u_1 \left(1 + Tr \frac{u_2}{u_1} \right) \lambda_1 = \\ &= u_1 (1 + T_c p) \lambda_1. \end{aligned} \quad (X-51)$$

Отсюда вытекает, что параллельное и согласное соединение усилительного и интегрирующего звеньев эквивалентно применению одного интегрирующего звена с регулированием по параметру и его первой производной.

Шунтирование звена обратной изодромной связью (фиг. 213)
Уравнение звена

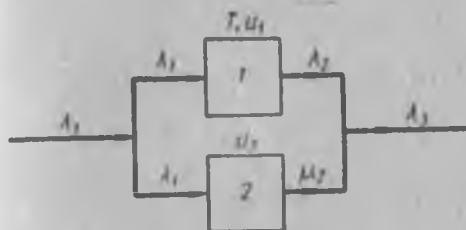
$$d(p)\lambda_{out} = u(\lambda_{in} - y).$$

Уравнение изодромной связи

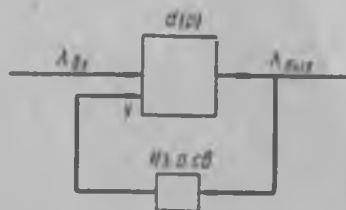
$$(T_i p + 1) u = T_i p \lambda_{\text{вых}} \text{ при } \beta = 1. \quad (\text{X-52})$$

Исключая u , приходим к уравнению

$$d(p) \lambda_{\text{вых}} = u \left(\lambda_{\text{вх}} - \frac{T_i p}{T_i p + 1} \lambda_{\text{вых}} \right)$$



Фиг. 212. Параллельное соединение интегрирующего и усилительного звеньев.



Фиг. 213. Шунтирование звена обратной изодромной связью.

или

$$d_1(p) \lambda_{\text{вых}} = u (1 + T_i p) \lambda_{\text{вх}},$$

где

$$d_1(p) = d(p) (T_i p + 1) + T_i p.$$

Полученное уравнение движения звена свидетельствует о том, что звено с изодромной обратной связью эквивалентно некоторому другому звену с дополнительным воздействием на входе по первой производной.

Для сервомоторов выходной оператор $d(p) = T_s p$. Тогда $d_1(p) = T_i p \left[T_s p + (T_s + T_i) \frac{1}{T_i} \right]$.

Отсюда следует, что сервомотор с изодромной обратной связью может быть заменен цепочкой из двух звеньев — интегрирующего и апериодического — на вход которой подается дополнительное воздействие по первой производной.

Аналогично тому, как вводится в закон регулирования воздействие по первой производной, может быть введено дополнительное воздействие по второй производной. В практических схемах обычно воздействие по второй производной вводится совместно с воздействием по первой производной. Также возможно дополнительное воздействие по интегралу.

ГЛАВА XI

АНАЛИЗ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА РЕГУЛИРОВАНИЯ

1. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА РЕГУЛИРОВАНИЯ

В настоящее время в связи с возрастающими требованиями к современным системам автоматического регулирования машин и технологических процессов, устойчивость системы не является единственным показателем, определяющим качество процесса регулирования. В зависимости от условий работы объекта регулирования практический интерес могут представлять такие показатели качества, как точность регулирования в установившемся режиме и при переходном процессе, быстродействие системы, колебательный или монотонный характер переходного процесса, величина перерегулирования, запас устойчивости и другие показатели.

На все эти вопросы можно получить ответ, если решить дифференциальное уравнение системы и построить кривую переходного процесса. Для суждения о влиянии на процесс регулирования тех или иных параметров системы требуется решение характеристического уравнения в общем виде. Однако такое решение возможно только для уравнений не выше четвертой степени, так как корни уравнений более высоких степеней не выражаются в радикалах.

Поэтому в большинстве случаев пользуются косвенными приближенными методами оценки качественных показателей процесса регулирования, при которых избегается определение корней характеристического уравнения. При этом используется связь между коэффициентами уравнения и показателями качества.

Во многих случаях мы можем судить о качестве процесса регулирования системы по ее поведению при единичном толчкообразном возмущающем воздействии. Полученные при этом оценки однако не всегда дают исчерпывающие суждения о качестве процесса, поэтому встречаются и другие подходы к оценке показателей качества.

Приводим основные показатели качества регулирования.

а) **Максимальное отклонение регулируемой величины.** Если кривая переходного процесса протекает так, как показано на фиг. 214 (кривая I), то в точке А, отвечающей времени t_m , мы будем иметь максимальное отклонение регулируемой величины. По максимальному отклонению мы можем судить о динамической точности системы

регулирования. Как было сказано в главе VIII, общая погрешность регулирования $\Delta\lambda$ складывается из двух слагаемых

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda_0 + \Delta\lambda_{пер}, \quad (XI-1)$$

где $\Delta\lambda_0$ есть установившаяся погрешность или статическая ошибка, а $\Delta\lambda_{пер} = \lambda_c$ — дополнительная погрешность, возникающая при переходном процессе и называемая динамической погрешностью. Эта величина определяет динамическую точность регулирования.

б) Величина перерегулирования. В процессе регулирования при переходе от одного установившегося положения к другому могут иметь место два случая приближения регулируемой величины к новому значению:

1) регулируемая величина приближается только содной стороны, не выходя за пределы, ограниченные новым и старым значениями;

2) приближение регулируемой величины происходит

с отклонениями, выходящими за указанные пределы.

В последнем случае мы имеем перерегулирование. Величина перерегулирования не должна превосходить допускаемых практическими требованиями значений.

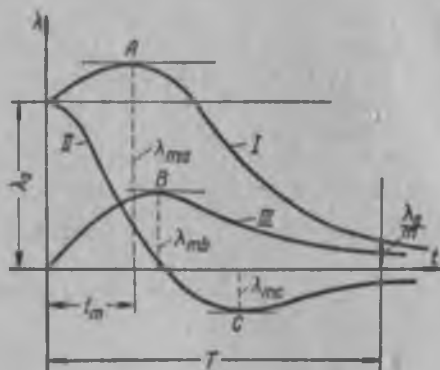
В дальнейшем под перерегулированием будем понимать всякое отклонение регулируемого параметра за пределы области, ограниченной начальным и новым установившимися значениями. Если отсчет отклонений производить от нового установившегося положения, то на фиг. 214 ось абсцисс отвечает новому положению, а отрезок λ_0 определяет начальное установившееся значение.

При определении перерегулирования следует иметь в виду три возможных случая переходных процессов при различных начальных условиях. Эти случаи выражены кривыми I, II, III переходных процессов, изображенными на фиг. 214.

В случае I перерегулирование равно $\Delta\lambda = \lambda_{ma} - \lambda_0$. Если $\lambda(t) < \lambda_0$ перерегулирования нет.

В случае III (старое и новое значения совпадают) перерегулирование $\Delta\lambda = \lambda_{mb}$, так как $\lambda_0 = 0$. Здесь перерегулирование равно ординате в точке экстремума B, т. е. совпадает с максимальным отклонением регулируемой величины.

В случае II перерегулирование в области положительных значений отсутствует, но имеется экстремум в точке C, в области отри-



Фиг. 214. Некоторые случаи переходного процесса.

цательных значений. Здесь перерегулирование равно $\Delta\lambda = |\lambda_{mc}|$. Возможны случаи, когда имеется два экстремума, в положительной и отрицательной областях, причем может оказаться, что наибольшая величина перерегулирования наступит при втором экстремуме.

в) Время регулирования. Показатель времени регулирования позволяет оценить быстроту действия системы автоматического регулирования. Теоретическое время регулирования $t = \infty$. Однако это время не дает представления о скорости затухания переходного процесса.

Поэтому условились под временем регулирования понимать время T , через которое начальное значение регулируемой величины уменьшается в m раз (см. фиг. 214) и в дальнейшем не превышает этого значения. Обычно, значение m устанавливается, исходя из условия, что регулируемая величина через промежуток времени, равный T , входит в зону нечувствительности. Это будет иметь место, когда $\frac{1}{m} < \epsilon$, где ϵ — степень нечувствительности регулятора

$$m > \frac{1}{\epsilon}. \text{ При } \epsilon = 3\% \quad m = 33.$$

Принятое определение времени регулирования не применимо для случая, когда начальное значение регулируемой величины равно нулю. В этом случае за исходную начальную величину принимают какое-либо условное значение регулируемого параметра, обычно номинальное, или базисное значение.

Для сравнения быстроты затухания переходных процессов между собой числовое значение величины m не имеет значения. В этих случаях для упрощения расчетов обычно берут $m = 10$.

г) Характер затухания переходного процесса. Характер затухания переходного процесса может быть колебательным или апериодическим. Кроме того, процесс может быть монотонным. Мы называем процесс монотонным, если отклонение от нового равновесного положения в переходном процессе по абсолютной величине с течением времени только уменьшается. Апериодический процесс в общем случае может иметь одно, два и более колебаний и в связи с этим экстремумы и перерегулирование. Монотонный процесс не имеет перерегулирования.

Если колебания переходного процесса регулирования продолжают до тех пор, пока регулируемая величина не войдет в зону нечувствительности, процесс называется колебательным. У идеального регулятора при отсутствии нечувствительности ($\epsilon = 0$) число колебаний при затухании бесконечно велико.

На фиг. 215 показаны кривые переходного процесса для трех указанных случаев.

В некоторых случаях необходимо иметь суждение о скорости затухания отдельных составляющих переходного процесса. Для апериодических составляющих быстрота затухания характеризуется

абсолютным значением вещественного корня характеристического уравнения, который отвечает рассматриваемой составляющей. Чем более абсолютное значение этого корня, тем быстрее затухает относящаяся к нему составляющая переходного процесса.

Для суждения о скорости затухания колебательных составляющих пользуются логарифмическим декрементом затухания. Последний представляет натуральный логарифм отношения двух последовательных экстремумов одного направления кривой затухания.

Пусть на фиг. 216 показана кривая затухания колебательного процесса.

Затухание отдельных составляющих колебательного процесса происходит по закону

$$\lambda = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t + \psi). \quad (XI-2)$$

Расстояние во времени между двумя последовательными максимумами одного направления $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Отношение между этими максимумами

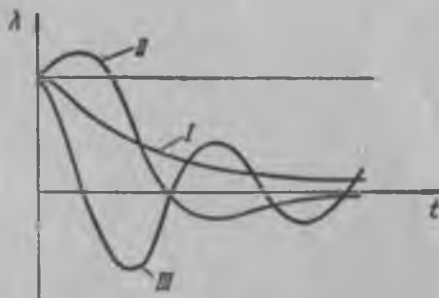
$$q = \frac{\lambda_{1\max}}{\lambda_{2\max}} = e^{\frac{2\pi\alpha}{\omega}} = e^{Td}. \quad (XI-3)$$

$$\ln q = d = T\alpha. \quad (XI-4)$$

Чем больше логарифмический декремент затухания d , тем быстрее происходит затухание составляющей

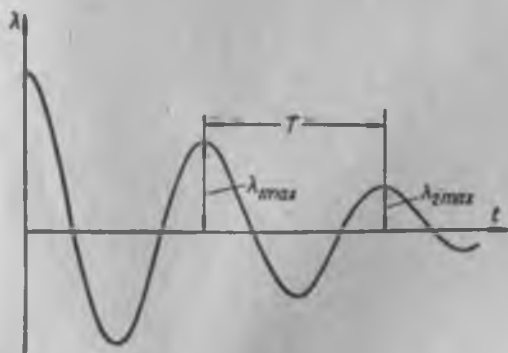
переходного процесса. Величина $\frac{1}{d}$ дает число условных периодов, по истечении которых амплитуда колебаний уменьшается в e раз.

д) **Степень устойчивости.** Если все корни характеристического уравнения расположены влево от мнимой оси, то каждому корню будет соответствовать своя составляющая переходного процесса. Наиболее медленно затухает та составляющая, которая имеет наибольшую



Фиг. 215. Различные виды переходного процесса:

I — монотонный; II — аperiodический; III — колебательный.

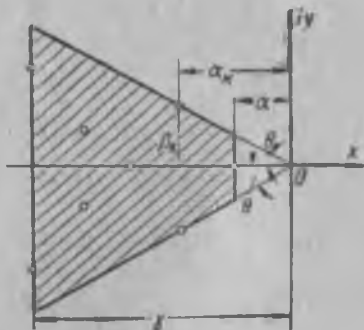


Фиг. 216. Кривая затухания колебательного процесса.

постоянную времени, т. е. корень с наименьшей вещественной частью по абсолютной величине.

Если у одной из пары комплексных сопряженных корней характеристического уравнения вещественная часть обращается в нуль, то соответственно одна из составляющих процесса теряет свой затухающий характер и переходный процесс протекает с незатухающими колебаниями.

Практический интерес представляет запас устойчивости системы, под которым понимается возможность некоторого изменения параметров системы без потери ею устойчивости.



Фиг. 217. Пример расположения в комплексной плоскости корней характеристического уравнения устойчивой системы.

Рассматривая плоскость корней, можно сказать, что чем дальше от мнимой оси расположены левые корни, тем дальше от границы устойчивости находится наша система. Это обстоятельство позволяет рассматривать абсолютное значение вещественной части левого корня, наиболее близко расположенного к мнимой оси, как запас устойчивости системы.

В дальнейшем будем называть эту величину общепринятым термином «степень устойчивости».

На фиг. 217 дан пример расположения в комплексной плоскости корней характеристического уравнения устойчивой системы.

В примере принято, что характеристическое уравнение имеет 2 вещественных и 3 пары комплексных сопряженных корней, которые на фигуре показаны точками. Вещественные корни находятся на левой половине вещественной оси, а все комплексные располагаются в области некоторой трапеции с основаниями, параллельными мнимой оси. Расстояние этих оснований до мнимой оси определяется значениями α и γ , которые представляют вещественные части корней, наиболее близкого и наиболее удаленного от мнимой оси. Таким образом, в геометрическом представлении степень устойчивости является расстоянием от мнимой оси до ближайшего к ней корня.

Величина α может служить также для приближенной оценки быстроты затухания переходного процесса, поскольку составляющая этого процесса, отвечающая наиболее близкому к мнимой оси корню, затухает медленнее других.

е) Колебательность процесса. Колебательность процесса характеризуется частотой собственных колебаний системы, которые зависят от конструктивных особенностей и природы системы регулирования. Как было отмечено в главе VIII, если характеристическое уравнение системы имеет, кроме вещественных корней, комплекс-

ные сопряженные корни, то в числе слагаемых переходного процесса появляются составляющие колебательного характера. При этом каждой паре комплексных корней $p_k = -\alpha_k \pm j\beta_k$ любой кратности отвечает одна составляющая с периодом колебаний $T_k = \frac{2\pi}{\beta_k}$, или числом колебаний в секунду $\nu_k = \frac{\beta_k}{2\pi}$.

Отношение $\frac{\beta_k}{\alpha_k} = \mu_k$ принято называть колебательностью рассматриваемой составляющей переходного процесса. Чем больше величина μ_k , тем больше при прочих равных условиях число колебаний составляющей в единицу времени. Для апериодических составляющих $\mu_k = 0$.

Если переходный процесс имеет составляющую колебательного характера, то величина μ_k определяет колебательность процесса.

При наличии нескольких составляющих колебательного характера за колебательность процесса принимают наибольшее значение величины $\mu_k = \mu$.

Обратимся к фиг. 217. Нетрудно видеть, что колебательность процесса будет равна тангенсу наибольшего угла θ , который получится, если соединить с началом координат все точки, изображающие в комплексной плоскости корни характеристического уравнения

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\beta_k}{\alpha_k} = \mu.$$

Зная величину колебательности μ , степени устойчивости α и значение τ для наиболее удаленного от мнимой оси корня, мы можем построить трапецию, внутри которой и на ее периметре расположены точки, изображающие корни характеристического уравнения системы. Это будет область расположения корней в комплексной плоскости.

ж) Статическая ошибка. Качество регулирования оценивается, кроме всего прочего, погрешностью регулирования, т. е. отклонением регулируемой величины от заданного значения.

Говоря о точности регулирования системы в установившемся режиме, следует отметить, что ошибка системы всегда складывается из двух составляющих. Первая составляющая обусловлена точностью выполнения отдельных звеньев. Она зависит от зазоров в кинематических парах и электрических контактах, а также от сил сухого трения и других причин, вызывающих нечувствительность регулятора.

Вторая составляющая — это собственно статическая ошибка, которая зависит от конструктивного устройства системы автоматического регулирования и ее нагрузки.

В астатических системах погрешность регулирования равна нулю для идеально-чувствительного регулятора, вообще же она равна $\pm \epsilon$, где ϵ — нечувствительность регулятора.

В статических системах статическая ошибка определяется неравномерностью регулятора, причем сюда присоединяется также нечувствительность регулятора.

Для следящих систем статическая ошибка, т. е. ошибка в установившемся режиме, имеет важное значение, так как она характеризует способность системы воспроизводить то или иное воздействие с заданной точностью.

Динамическая точность системы при наличии непрерывно изменяющихся воздействий может характеризоваться либо максимальной ошибкой, либо интегральной ошибкой.

Основными методами исследования качества процесса регулирования являются методы: распределения корней характеристического уравнения, интегральных оценок и частотный.

2. АНАЛИЗ КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Основными показателями качества при исследовании этим методом являются степень устойчивости и колебательность процесса. Область расположения корней оценивается трапецией, как было указано выше.

а) Характеристическое уравнение 2-й степени

Рассмотрим сперва характеристическое уравнение 2-го порядка

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0.$$

Корни уравнения

$$p_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}.$$

При $a_1^2 - 4a_0 a_2 > 0$ оба корня вещественные. Степень устойчивости

$$\alpha = \frac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}.$$

Удаление второго корня от мнимой оси

$$\tau = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_0}.$$

Колебательность $\mu = \operatorname{tg} \theta = 0$.

При $a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0$ оба корня комплексные, сопряженные.

При $a_1^2 - 4a_0a_2 = 0$:

$$\alpha = \gamma = \frac{a_1}{2a_0}.$$

$$\mu = \operatorname{tg} \theta = \frac{\sqrt{4a_0a_2 - a_1^2}}{a_1}.$$

Значение степени устойчивости α позволяет грубо оценить время регулирования, если допустить, что время затухания приблизительно определяется одной составляющей, порождаемой корнем, ближайшим к мнимой оси.

Время регулирования

$$T \approx \frac{\ln m}{\alpha},$$

где α — степень устойчивости и m — число, устанавливающее кратность уменьшения регулируемой величины за время регулирования.

Если нам задано время регулирования T и известно число m , то легко вычислить

$$\alpha \approx \frac{\ln m}{T}.$$

Для того чтобы система имела время регулирования не больше заданного значения T , необходимо, чтобы все корни характеристического уравнения были расположены влево от прямой, параллельной мнимой оси и проходящей от нее слева на расстоянии, равном $\alpha = \frac{\ln m}{T}$.

Чтобы определить по заданному значению α коэффициенты уравнения $a_0p^2 + a_1p + a_2 = 0$, делаем в уравнении подстановку $p - \alpha$ вместо p , что соответствует переносу мнимой оси влево на расстояние α

$$a_0(p - \alpha)^2 + a_1(p - \alpha) + a_2 = 0.$$

Это уравнение имеет также все корни, расположенные слева от новой мнимой оси, поэтому его коэффициенты должны удовлетворять критерию устойчивости Гурвица для характеристических уравнений 2-го порядка

$$a_0p^2 + p(a_1 - 2a_0\alpha) + (a_2 - a_1\alpha + \alpha^2) = 0.$$

$$a_0 > 0 \quad a_1 - 2a_0\alpha > 0 \quad a_2 - a_1\alpha + \alpha^2 > 0.$$

Положим $a_0 = 1$.

Тогда

$$a_1 > 2\alpha \quad \text{и} \quad a_2 > \alpha^2$$

(XI-5)

Подбирая значения a_1 и a_2 , удовлетворяющие этим неравенствам, мы определим параметры регулирующей системы, при которых затухание переходного процесса будет происходить в течение промежутка времени, не превышающего заданного.

Система, описанная уравнением

$$p^2 + a_1 p + a_2 = 0, \text{ где } a_1 > 0 \text{ и } a_2 > 0$$

всегда устойчива.

б) Характеристическое уравнение 3-й степени

Рассмотрим характеристическое уравнение 3-й степени

$$p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Приведем уравнение к нормализованному виду по Вышнеградскому.

$$\text{Положим, что } X = \frac{a_1}{\sqrt[3]{a_3}}; Y = \frac{a_2}{\sqrt[3]{a_3^2}}; p = z \sqrt[3]{a_3}.$$

После подстановки получим

$$z^3 + Xz^2 + Yz + 1 = 0. \quad (X1-6)$$

Применяя к этому уравнению критерий Гурвица, найдем, что условие устойчивости сводится к неравенству

$$XY - 1 > 0. \quad (X1-7)$$

Уравнение $XY = 1$ представляет границу устойчивости. Эта кривая в осях (X, Y) является равнобокой гиперболой I , разделяющей площадь первого квадранта на две зоны, как показано на фиг. 218.

1. $XY < 1$ — неустойчивую область C

и 2. $XY > 1$ — устойчивую область $A_1 + A_2 + B$.

Допустим, что степень устойчивости нашего исходного уравнения будет α . Для перехода к нормализованному уравнению мы должны положить, что $\alpha = \xi \sqrt[3]{a_3}$, где ξ — степень устойчивости нормализованного уравнения.

Перенесем мнимую ось влево на расстояние α . Характеристическое уравнение в новых осях будет

$$(p - \alpha)^3 + a_1(p - \alpha)^2 + a_2(p - \alpha) + a_3 = 0$$

Отсюда $\frac{C}{A} = B$ и $C = BA$, т. е.

$$1 - Y\xi + X\xi^2 - \xi^3 = (X - 3\xi)(Y - 2X\xi + 3\xi^2). \quad (XI-9)$$

Полагая $\xi = \text{const}$, мы можем рассматривать последнее уравнение в системе координат (X, Y) , как уравнение линии постоянной степени устойчивости, или постоянного времени регулирования. После преобразования найдем

$$Y = \frac{2\xi(X - 2\xi)^2 + 1}{(X - 2\xi)}.$$

При $\xi = 0$ $Y = \frac{1}{X}$.

Линия постоянной нулевой степени устойчивости $\xi = 0$ совпадает с границей устойчивости $XY = 1$.

Определим границу аperiodической устойчивости. На этой границе оба комплексных сопряженных корня $-\xi \pm i\omega$ обращаются в $-\xi$. Поэтому полином левой части уравнения (XI-6) содержит множителем $(z + \xi)^2$, а также множитель $z + \gamma$, если $-\gamma$ третий корень уравнения.

Отсюда можем записать

$$z^3 + Xz^2 + Yz + 1 = (z + \xi)^2(z + \gamma)$$

$$X = 2\xi + \gamma; \quad Y = 2\xi\gamma + \gamma^2; \quad \xi^2\gamma = 1.$$

Исключая ξ и γ , приходим к уравнению границы аperiodической устойчивости

$$4(X^3 + Y^3) - X^2Y^2 - 18XY + 27 = 0. \quad (XI-10)$$

Построим на плоскости в системе координат (X, Y) кривую $4(X^3 + Y^3) - X^2Y^2 - 18XY + 27 = 0$, причем рассмотрим только те ветви кривой, которые попадают в первый квадрант, так как X и Y имеют вещественные положительные значения.

На фиг. 218 кривая представлена ветвями II и III, которые сходятся в точке $X = 3, Y = 3$. Эти ветви выделяют область B , в которой соблюдается условие аperiodической устойчивости. Таким образом, весь первый квадрант разделяется на области, как показано на фиг. 218:

C — неустойчивая область;

$A_1 + A_2$ — область колебательной устойчивости;

B — область аperiodической устойчивости.

Граница II и III была установлена из условия, что ближайшими корнями к мнимой оси будут два комплексных сопряженных корня.

Рассмотрим еще случаи, когда ближайшим корнем к мнимой оси будет вещественный корень.

Допустим, что корень уравнения (XI-6) $z = -\xi$ будет ближайшим к мнимой оси вещественным корнем, остальные два комплексных сопряженных корня находятся в левой полуплоскости. Переноса, как и выше, мнимую ось влево на расстояние ξ придем к уравнению (XI-8)

$$z^3 + Az^2 + Bz + C = 0.$$

Это уравнение должно удовлетворяться при $z = 0$, т. е. коэффициент C должен быть равен нулю.

Чтобы остальные корни лежали влево от новой мнимой оси, должно быть $A > 0$ и $B > 0$.

Таким образом

$$-\xi^3 + X\xi^2 - Y\xi + 1 = 0.$$

$$X - 3\xi > 0. \quad (\text{XI-11})$$

$$3\xi^2 - 2X\xi + Y > 0.$$

Найдем уравнение пограничной кривой при $X - 3\xi = 0$. Исключая ξ из уравнения $-\xi^3 + X\xi^2 - Y\xi + 1 = 0$ и $X - 3\xi = 0$, придем к уравнению

$$2X^3 - 9XY + 27 = 0 \quad (\text{XI-12})$$

Последнее представляет кривую IV (см. фиг. 218), которая, как показывает детальное исследование, выделяет из области колебательной устойчивости зону монотонного переходного процесса при наличии у характеристического уравнения комплексных корней.

Кривые постоянной степени устойчивости $\xi = \text{const}$ в зоне монотонного переходного процесса и апериодической устойчивости определим, положив

$$-\xi^3 + X\xi^2 - Y\xi + 1 = 0,$$

отсюда

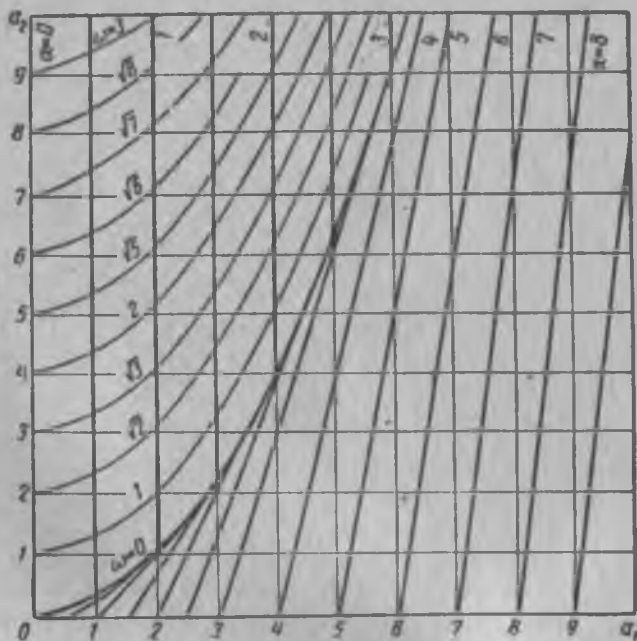
$$Y = \xi X + \frac{1 - \xi^3}{\xi}. \quad (\text{XI-13})$$

Это уравнение прямых линий, на участках которых остаются справедливы неравенства (XI-11). Наклон этих линий определяется значением $\xi = \text{const}$.

Аналогично тому, как были построены кривые $\xi = \text{const}$ равной степени устойчивости, можно построить кривые $\mu = \text{const}$ равной колебательности. Эти кривые нанесены на диаграмме фиг. 218 для значений $\mu = 0,5; 1; 2; 3; 4$. Кривая $\mu = 0$ совпадает с границей апериодической устойчивости, а $\mu = \infty$ с границей общей устойчивости.

Пользуясь диаграммой фиг. 218, мы можем, если нам известно характеристическое уравнение, определить параметры X и Y , нанеся точку (X, Y) на диаграмму и по месту расположения этой точки

установить характер переходного процесса: неустойчивый, устойчивый, колебательный, монотонный, апериодический. Кроме того, найти значение ξ и по формуле $\alpha = \sqrt[3]{a_2} \xi$ вычислить степень устойчивости α и время регулирования $T = \frac{\ln m}{\alpha}$.



Фиг. 219. Диаграмма для систем 2-го порядка.

Возможно также обратное использование диаграммы. Задаваясь временем регулирования T , вычисляем α , намечаем на диаграмме желательную точку (X, Y) , характеризующую переходный процесс, определяем ξ , a_2 и остальные коэффициенты характеристического уравнения проектируемой системы.

Пользуясь изложенным методом анализа по распределению корней характеристического уравнения, мы можем исследовать также системы второго порядка. В этом случае характеристическое уравнение приводится к виду $p^2 + a_1 p + a_2 = 0$, а построение кривых производится в плоскости параметров a_1 и a_2 . На фиг. 219 приведены семейства кривых $\alpha = \text{const}$ и $\omega = \text{const}$ для систем 2-го порядка.

В случае систем 4-го порядка характеристическое уравнение $p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0$ преобразовывают с помощью под-

становки $p = u \sqrt[4]{a_4}$, $X = \frac{a_1}{\sqrt[4]{a_4}}$; $Y = \frac{a_2}{\sqrt[4]{a_4}}$; $Z = \frac{a_3}{\sqrt[4]{a_4^3}}$ в уравнении

$$u^4 + Xu^3 + Yu^2 + Zu + 1 = 0.$$

Здесь мы имеем три независимых параметра системы X , Y и Z , в области которых и надлежит вести исследование. Построение диаграмм производится в пространственной системе координат (X, Y, Z) .

Более детальное исследование распределения корней характеристического уравнения позволяет сделать оценку качественных показателей рассматриваемой системы более подробно.

Пример. Заданное характеристическое уравнение системы $p^3 + 10p^2 + 25p + a_3 = 0$ имеет неизвестным последний член. Определить значение a_3 таким образом, чтобы регулируемая величина после отклонения входила в зону нечувствительности не позже чем через 3 сек. Степень нечувствительности $\pm 2,5\%$.

Решение. Степень устойчивости α системы должна быть

$$\alpha > \frac{\ln m}{T} = \frac{\ln 40}{3} = 1.23.$$

Примем для α его предельное значение

$$\alpha = 1.23.$$

Перенесем минимую ось влево на расстояние $\alpha = 1.23$.

Характеристическое уравнение системы в новых осях координат

$$(p - 1.23)^3 + 10(p - 1.23)^2 + 25(p - 1.23) + a_3 = 0$$

$$p^3 + 6.31p^2 + 4.94p + a_3 - 17.48 = 0.$$

Применяем к этому уравнению критерий устойчивости Гурвица

$$a_3 - 17.48 > 0$$

$$6.31 \cdot 4.94 > a_3 - 17.48.$$

Отсюда

$$17.48 < a_3 < 48.65.$$

Любое значение a_3 , удовлетворяющее этому неравенству, дает искомый ответ.

3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ

С ростом порядка дифференциального уравнения системы растут также трудности качественного анализа ее работы. Были предложены косвенные критерии для оценки качества регулирования.

К таким косвенным критериям принадлежат интегральные оценки.

Мы укажем здесь на наиболее часто встречающиеся интегральные оценки.

Введем в эти уравнения дополнительное неизвестное интеграл $\int_0^{\infty} (\lambda')^2 dt = J_a$. Остальные интегралы вычисляем способом разложения по частям

$$\int_0^{\infty} \lambda'' \lambda dt = \int_0^{\infty} \lambda d(\lambda') = \int_0^{\infty} \lambda \lambda' - \int_0^{\infty} (\lambda')^2 dt = -\lambda_0 \lambda_1 - J_a.$$

$$\int_0^{\infty} \lambda' \lambda dt = \int_0^{\infty} \lambda d\lambda = -\frac{1}{2} \lambda_0^2.$$

$$\int_0^{\infty} \lambda'' \lambda' dt = \int_0^{\infty} \lambda' d(\lambda') = -\frac{1}{2} \lambda_1^2.$$

Для определения J_{22} и J_a имеем два уравнения:

$$a_2 J_{22} - a_0 J_a = a_0 \lambda_0 \lambda_1 + \frac{1}{2} a_1 \lambda_0^2 = N_1.$$

$$a_1 J_a = \frac{1}{2} a_0 \lambda_1^2 + \frac{1}{2} a_2 \lambda_0^2 = N_2. \quad (X1-19)$$

Отсюда

$$J_{22} = \frac{a_1 N_1 + a_0 N_2}{a_1 a_2}. \quad (X1-20)$$

Уравнение 3-го порядка

$$a_0 \lambda''' + a_1 \lambda'' + a_2 \lambda' + a_3 \lambda = 0.$$

Применим указанный выше прием. Введем неизвестные интегралы

$$J_{23} = \int_0^{\infty} \lambda^2 dt; \quad J_a = \int_0^{\infty} (\lambda')^2 dt; \quad J_b = \int_0^{\infty} (\lambda'')^2 dt.$$

Умножим исходное уравнение поочередно на λ , λ' , λ'' и интегрируем полученные уравнения почленно

$$a_0 \int_0^{\infty} \lambda''' \lambda dt + a_1 \int_0^{\infty} \lambda'' \lambda dt + a_2 \int_0^{\infty} \lambda' \lambda dt + a_3 \int_0^{\infty} \lambda^2 dt = 0.$$

$$a_0 \int_0^{\infty} \lambda''' \lambda' dt + a_1 \int_0^{\infty} \lambda'' \lambda' dt + a_2 \int_0^{\infty} (\lambda')^2 dt + a_3 \int_0^{\infty} \lambda \lambda' dt = 0.$$

$$a_0 \int_0^{\infty} \lambda''' \lambda'' dt + a_1 \int_0^{\infty} (\lambda'')^2 dt + a_2 \int_0^{\infty} \lambda' \lambda'' dt + a_3 \int_0^{\infty} \lambda \lambda'' dt = 0.$$

Заметим, что

$$\int_0^{\infty} \lambda'' \lambda dt = \int_0^{\infty} \lambda d(\lambda') = -\lambda_0 \lambda_2 - \int_0^{\infty} \lambda'' \lambda' dt = -\lambda_0 \lambda_2 + \frac{1}{2} \lambda_1^2.$$

$$\int_0^{\infty} \lambda'' \lambda' dt = \int_0^{\infty} \lambda' d(\lambda'') = -\lambda_1 \lambda_2 - \int_0^{\infty} (\lambda'')^2 dt = -\lambda_1 \lambda_2 - J_2.$$

$$\int_0^{\infty} \lambda'' \lambda'' dt = -\frac{1}{2} \lambda_2^2.$$

Используя формулы, полученные при анализе уравнения 2-го порядка, придем в конечном итоге к системе уравнений

$$a_3 J_{23} - a_1 J_a = a_0 \lambda_0 \lambda_2 - \frac{1}{2} a_0 \lambda_1^2 + a_1 \lambda_0 \lambda_1 + \frac{1}{2} a_2 \lambda_0^2 = N_1.$$

$$a_2 J_a - a_0 J_b = a_0 \lambda_1 \lambda_2 + \frac{1}{2} a_1 \lambda_1^2 + \frac{1}{2} a_3 \lambda_0^2 = N_2.$$

$$a_1 J_b - a_3 J_a = \frac{1}{2} a_0 \lambda_0^2 + \frac{1}{2} a_2 \lambda_1^2 + a_3 \lambda_0 \lambda_1 = N_3.$$

Определим из этой системы уравнений J_{23}

$$J_{23} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad (XI-21)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_3 - a_1 & 0 \\ 0 & a_2 - a_0 \\ 0 & -a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3 (a_2 a_1 - a_0 a_3)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} N_1 - a_1 & 0 \\ N_2 & a_2 - a_0 \\ N_3 - a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_0 (N_1 a_3 + a_1 N_3) + a_1 (N_1 a_2 + a_1 N_2).$$

Совершенно аналогично вычисляется интегральная оценка J_{1n} для характеристического уравнения более высоких степеней. При проектировании схем регулирования некоторые параметры системы могут варьироваться конструктором в значительных пределах. Для получения наиболее добротной схемы регулирования следует выразить интегральную оценку J_{2n} в функции от этих параметров и определить значения этих параметров, при которых интеграл J_{2n} становится минимальным.

Если дано дифференциальное уравнение

$$a_0 \lambda^{(n)} + a_1 \lambda^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \lambda' + a_n \lambda = 0, \quad (\text{XI-14})$$

то оценка качества может быть основана на следующих интегралах:

1. Интеграл

$$J_{1n} = \int_0^{\infty} \lambda dt. \quad (\text{XI-15})$$

2. Интеграл

$$J_{2n} = \int_0^{\infty} \lambda^2 dt. \quad (\text{XI-16})$$

3. Интеграл

$$J_{3n} = \int_0^{\infty} (\lambda^2 + k^2 \lambda'^2) dt. \quad (\text{XI-17})$$

Интеграл J_{1n} представляет величину площади, ограниченной кривой переходного процесса и осью времени. Интеграл J_{1n} дает приближенное представление о продолжительности времени регулирования для монотонных переходных процессов.

Вполне естественно считать, что монотонный переходной процесс при одинаковых начальных условиях имеет тем больше время регулирования, чем больше интеграл J_{1n} .

Для колебательных процессов интеграл J_{1n} не может служить критерием для оценки качества, так как площадь переходного процесса учитывается интегралом с соответствующим знаком, и площади, расположенные ниже оси времени, будут вычитаться из площади, расположенной выше этой оси. Для апериодических процессов, имеющих перерегулирование, применение J_{1n} в качестве критерия качества регулирования также приводит к большим погрешностям, если регулируемая величина меняет свой знак в переходном процессе. Поэтому, интегральная оценка J_{1n} качества регулирования пригодна для монотонных процессов и апериодических без перерегулирования.

Вычисление значения интеграла J_{1n} производится по заданным начальным условиям, как указано ниже.

Пусть начальные условия заданы значениями при $t = 0$:

$$\lambda(0) = \lambda_0$$

$$\lambda'(0) = \lambda_1$$

$$\dots$$

$$\lambda^{(k)}(0) = \lambda_k.$$

Тогда, делая подстановку значения λ из уравнения (XI-14), будем иметь

$$\begin{aligned} J_{1n} &= \int_0^{\infty} \lambda dt = -\frac{1}{a_n} \int_0^{\infty} [a_0 \lambda^{(n)} + a_1 \lambda^{(n-1)} \dots a_{n-1} \lambda'] dt = \\ &= -\frac{1}{a_n} \left[(a_0 \lambda^{(n-1)} + a_1 \lambda^{(n-2)} \dots a_{n-1} \lambda) \right]_0^{\infty} = \frac{1}{a_n} (a_0 \lambda_{n-1} + \\ &\quad + a_1 \lambda_{n-2} + \dots a_{n-1} \lambda_0). \end{aligned} \quad (\text{XI-18})$$

Предполагается, что при $t = \infty$ переходный процесс закончился и регулируемая величина приняла установившееся значение. При этом

$$\lambda^{(n-1)} = \lambda^{(n-2)} \dots = \lambda' = \lambda = 0.$$

Таким образом, значение $J_{1n} = \int_0^{\infty} \lambda dt$ определяется по формуле (XI-18), исходя из заданных начальных условий.

Этот метод вычисления дан академиком В. С. Кулебакиным.

Интегральная оценка $J_{2n} = \int_0^{\infty} \lambda^2 dt$ является квадратичным критерием. Она учитывает сумму абсолютных значений площадей, расположенных выше и ниже оси времени, причем при вычислении отдельных площадей в расчет принимается вместо ординаты ее квадратичное значение. Благодаря этому интегральная оценка может быть применена к любым переходным процессам.

Вычисление интеграла J_{2n} обычно производят по методу, указанному акад. Мандельштамом.

Покажем на примерах дифференциальных уравнений 2-го и 3-го порядка, как вычисляется значение J_{2n} .

Пусть задано уравнение второго порядка

$$a_0 \lambda'' + a_1 \lambda' + a_2 \lambda = 0.$$

Осозначения начальных значений сохраняются, как принято выше. Для определения интеграла $J_{22} = \int_0^{\infty} \lambda^2 dt$ применяется следующий прием. Умножаем исходное уравнение поочередно на λ и λ' и почленно интегрируем полученные уравнения

$$a_0 \int_0^{\infty} \lambda'' \lambda dt + a_1 \int_0^{\infty} \lambda' \lambda dt + a_2 \int_0^{\infty} \lambda^2 dt = 0.$$

$$a_0 \int_0^{\infty} \lambda'' \lambda' dt + a_1 \int_0^{\infty} (\lambda')^2 dt + a_2 \int_0^{\infty} \lambda \lambda' dt = 0.$$

Для учета влияния скорости переходного процесса на качество регулирования вводят дополнительно в интегральную оценку значение производной λ' с коэффициентом k (весом).

Выражение интегральной оценки принимает вид

$$J_{3n} = \int_0^{\infty} [\lambda^2 + (k\lambda')^2] dt.$$

Определение параметров системы регулирования по минимуму простой интегральной квадратичной оценки $J_{2n} = \int_0^{\infty} \lambda^2 dt$ обычно приводит к колебательным переходным процессам, тогда как оценка J_{3n} с участием первой производной во многих случаях обеспечивает апериодический переходный процесс.

В самом деле, интеграл J_{3n} можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} J_{3n} &= \int_0^{\infty} [\lambda^2 + (k\lambda')^2] dt = \int_0^{\infty} (\lambda + k\lambda')^2 dt - 2k \int_0^{\infty} \lambda \lambda' dt = \\ &= \int_0^{\infty} (\lambda + k\lambda')^2 dt + k\lambda_0^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при выбранном весе k интеграл имеет минимум при $\lambda + k\lambda' = 0$, что приводит к решению

$$\lambda = \lambda_0 e^{-\frac{t}{k}}. \quad (X1-22)$$

Закключаем, что при наименьшем значении интегральной оценки J_{3n} переходный процесс протекает апериодически и монотонно.

4. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА КАЧЕСТВА РЕГУЛИРОВАНИЯ

Частотный метод анализа качества регулирования основывается на свойствах амплитудно-фазовых и вещественных частотных характеристик. Главным достоинством этого метода является то, что, пользуясь вещественной характеристикой, можно построить сравнительно простым способом приближенную кривую процесса регулирования. Благодаря этому получается более полное и точное представление о качестве системы регулирования.

В главе VIII было показано, что выходная функция $\lambda(t)$, характеризующая процесс регулирования, связана с вещественной частотной характеристикой формулой

$$\lambda(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Re(\omega) \cos \omega t}{\omega} d\omega.$$

Эта формула положена в основу построения приближенной кривой $\lambda(t)$.

Остановимся на некоторых свойствах вещественных частотных характеристик.

1. Значение функции $\lambda(t)$ при $t = \infty$ равно начальной ординате вещественной характеристики $Re(\omega)$

при $\omega = 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = Re(0). \quad (X1-23)$$

Это вытекает непосредственно из свойства преобразований Лапласа

$$L\lambda(t) = \frac{\Phi(z)}{z} = \bar{\lambda}(z),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lim_{z \rightarrow 0} z\bar{\lambda}(z) = \Phi(0) = Re(0).$$

2. Значение вещественной характеристики $Re(\omega)$ при $\omega = \infty$ равно начальному значению регулируемой функции $\lambda(t)$ при $t = 0$.

Это также следует из свойств преобразований Лапласа. Имеем

$$L\lambda(t) = \frac{\Phi(z)}{z} = \bar{\lambda}(z),$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) = \lim_{z \rightarrow \infty} z\bar{\lambda}(z) = \Phi(\infty). \quad (X1-24)$$

Поскольку $\lambda(0) = 0$, так как при определении были приняты нулевые начальные условия, мы получим

$$\Phi(\infty) = 0 = Re(\infty) + iIm(\infty).$$

Отсюда

$$Re(\infty) = 0 \text{ и } Im(\infty) = 0. \quad (X1-25)$$

3. Двум вещественным частотным характеристикам $Re(\omega)$ и $Re(a\omega)$, отличающимся только масштабом по оси ω , отвечают переходные процессы соответственно $\lambda(t)$ и $\lambda\left(\frac{t}{a}\right)$.

Чтобы доказать это положение, обратимся к исходной формуле

$$\lambda(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Re(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega.$$

Введем новые переменные ω_1 и t_1 вместо ω и t , связанные зависимостями

$$\omega = \omega_1 a \text{ и } t_1 = at.$$

Подставляя новые переменные, найдем

$$\lambda\left(\frac{t_1}{a}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Re(\omega_1 a) \sin \omega_1 t_1}{\omega_1} d\omega_1. \quad (XI-26)$$

Отбрасывая индекс 1, придем к формуле, подтверждающей изложенное положение.

Следовательно, увеличение или уменьшение масштаба по оси времени t для переходного процесса вызывает соответственное уменьшение или увеличение масштаба по оси ω для вещественной частотной характеристики.

При исследовании системы регулирования в громадном большинстве случаев достаточно ограничиться анализом вещественной частотной характеристики на некотором конечном интервале частот или полосе частот, определяемой неравенством $0 < \omega < \omega_c$. Эта полоса частот называется полосой или областью существенных частот. Нет надобности распространять исследование на весь интервал частот от 0 до ∞ , так как начиная с некоторой частоты ω_c ординаты вещественной характеристики становятся настолько малыми, что ими можно пренебречь без большой погрешности.

В тех случаях, когда исследуемая вещественная характеристика заменяется типовой, расхождение между этими характеристиками за пределами полосы существенных частот может вызвать различие в переходных процессах лишь в начальной стадии этих процессов и при том в течение малого промежутка времени. Само собой разумеется, что для этого требуется правильный выбор интервала существенных частот. Необходимо, чтобы абсолютные значения ординат исследуемой частотной характеристики за пределами избранной полосы частот были достаточно малы по сравнению с абсолютными значениями ординат внутри полосы частот.

Солодовников В. В. в своих работах устанавливает, что отношение $\frac{Re(\omega)}{Re(0)} < 0,1 - 0,2$ может с допустимой для практики погрешностью применяться для определения полосы существенных частот.

Приближенное вычисление кривой процесса регулирования по вещественной частотной характеристике. Построение кривой $\lambda(t)$ точным способом при уравнениях высоких порядков становится настолько громоздким, что практически не применяется.

В связи с этим возникла задача приближенного вычисления кривой процесса регулирования по спрямленным вещественным характеристикам. Для этого разбиваем характеристику на ряд участков и заменяем их отрезками прямых линий. Далее вычисляем величину интеграла

$$\int_0^{\infty} \frac{Re(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega$$

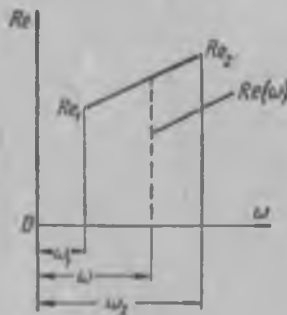
по участкам.

Пусть на фиг. 220 показан прямолинейный участок вещественной частотной характеристики на интервале частот $\omega_1 - \omega_2$. Уравнение отрезка прямой

$$Re(\omega) = Re_1 + \frac{Re_2 - Re_1}{\omega_2 - \omega_1} (\omega - \omega_1). \quad (X1-27)$$

Значение интеграла на этом отрезке

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{Re(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \left[Re_1 + \frac{Re_2 - Re_1}{\omega_2 - \omega_1} (\omega - \omega_1) \right] \times \\ &\times \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{Re_1 \omega_2 - Re_2 \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} (S. \omega_2 t - \\ &- Si \omega_1 t) - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{Re_2 - Re_1}{\omega_2 - \omega_1} \times \\ &\times \frac{\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t}{1}. \end{aligned} \quad (X1-28)$$



Фиг. 220. Прямолинейный участок вещественной частотной характеристики.

Пользуясь таблицами интегральных синусов и натуральных значений тригонометрических величин, мы легко можем вычислить искомый интеграл на каждом участке как функцию времени t .

Складывая результаты вычислений каждого участка, найдем неизвестное значение функции переходного процесса для заданной полосы частот.

$$\lambda(t) = \sum_{\omega=1}^{\omega=n} \lambda(t)_{\Delta\omega}.$$

Вычисляя последовательно $\lambda(t)$ для разных значений t , строим искомую кривую $\lambda(t)$ приближенного переходного процесса.

Для построения по вещественной характеристике кривой процесса регулирования заменяют характеристику ломаной линией из прямолинейных участков, образуя при этом трапеции или треугольники. Кроме того, для облегчения и ускорения вычислений вводятся типовые трапеции и треугольники, для которых составлены таблицы интегральных функций

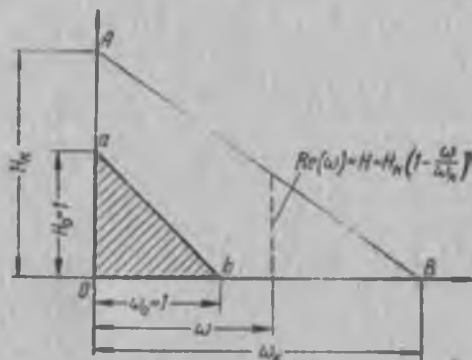
$$\frac{2}{\pi} \int \frac{Re(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega,$$

что значительно упрощает процесс вычислений*.

* См. В. В. Солодовников, Автоматика и телемеханика, № 5, 1949.

Типовой треугольник представляет прямоугольный треугольник по фиг. 221.

Высота треугольника $H_0 = 1$, за основание принят интервал пропускания частот $\omega_0 = 1$.



Фиг. 221. Типовой треугольник.

Определим сперва интегральную функцию для произвольного треугольника с высотой H_* и основанием ω_* .

$$Re(\omega) = H_* \left(1 - \frac{\omega}{\omega_*}\right)$$

$$\begin{aligned} \lambda_*(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_*} \frac{Re(\omega) \sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{2}{\pi} H_* \int_0^{\omega_*} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega - \frac{2}{\pi} H_* \frac{1}{\omega_*} \times \\ &\times \int_0^{\omega_*} \sin \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} H_* Si(\omega_* t) - \frac{2}{\pi} \frac{H_*}{\omega_* t} (1 - \cos \omega_* t). \end{aligned}$$

Введем вспомогательное переменное $\tau_* = \omega_* t$ (безразмерное число)

$$\lambda_*(t) = \frac{2}{\pi} H_* \left[Si\tau - \frac{1 - \cos \tau}{\tau} \right]. \quad (X1-29)$$

Для типового треугольника $H_* = H_0 = 1$; $\omega_* = \omega_0 = 1$ интегральная функция будет

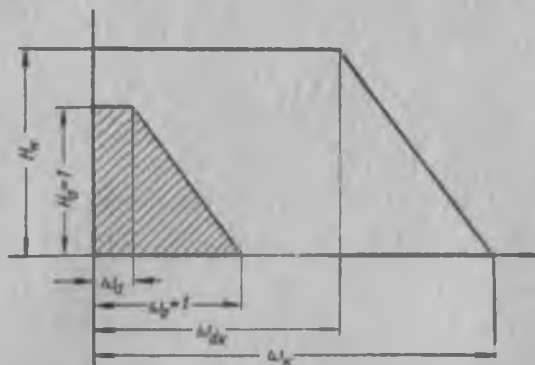
$$h_\tau = \frac{2}{\pi} \left[Si\tau - \frac{1 - \cos \tau}{\tau} \right] = h(\tau). \quad (X1-30)$$

Числовые значения интегральных h_τ функций для типового треугольника даны в табл. 1 приложения II.

Чтобы определить значение $\lambda(t)$ при произвольной треугольной вещественной характеристике, нужно предварительно найти из табл. I значение h_τ для $\tau = \omega_\kappa t$ и умножить величину h_τ на H_κ

$$\lambda_\kappa(t) = \lambda\left(\frac{\tau}{\omega_\kappa}\right) = h_\tau H_\kappa. \quad (\text{XI-31})$$

Типовая трапеция представляет прямоугольную трапецию и определяется следующими основными размерами (см. фиг. 222). Высота $H_0 = 1$.



Фиг. 222. Типовая трапеция.

Интервал пропускания частот $\omega_0 = 1$.

Интервал равномерного пропускания частот ω_d .

Коэффициент наклона $\nu = \frac{\omega_d}{\omega_0}$.

Вычислим сперва переходный процесс соответствующий произвольной трапецеидальной вещественной характеристике с высотой H_κ , основанием ω_κ , интервалом равномерного пропускания частот $\omega_{d\kappa}$

и наклоном $\nu = \frac{\omega_{d\kappa}}{\omega_\kappa}$.

$$\begin{aligned} \lambda_{\kappa\nu} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_{d\kappa}} \frac{H_\kappa \sin \omega t}{\omega} d\omega + \frac{2}{\pi} \int_{\omega_{d\kappa}}^{\omega_\kappa} \frac{H_\kappa (\omega_\kappa - \omega)}{\omega (\omega_\kappa - \omega_{d\kappa})} \sin \omega t d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{H_\kappa}{1 - \nu} \left[Si \omega_\kappa t - \nu Si \nu \omega_\kappa t + \frac{\cos \omega_\kappa t - \cos \nu \omega_\kappa t}{\omega_\kappa t} \right]. \end{aligned}$$

Введем безразмерную переменную $\tau = \omega_\kappa t$. Тогда

$$\lambda_{\kappa\nu}(t) = \lambda_{\kappa\nu}\left(\frac{\tau}{\omega_\kappa}\right) = H_\kappa \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1 - \nu} \left[Si \tau - \nu Si \nu \tau + \frac{\cos \tau - \cos \nu \tau}{\tau} \right]. \quad (\text{XI-32})$$

Для типовой трапеции ($H_k = 1$; $\omega_k = 1$; $\tau = t$) интегральная функция будет

$$h_{\tau} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{1-\nu} \left[Si\tau - \nu Siv\tau + \frac{\cos\tau - \cos\nu\tau}{\tau} \right]. \quad (X1-33)$$

Числовые значения интегральных функций h_{τ} для типовой трапеции даны в табл. 2 приложения II.

Чтобы определить значение $\lambda_{kv}(t)$ при произвольной трапецидальной вещественной характеристике, нужно предварительно найти из табл. 2 значение h_{τ} для $\tau = \omega_k t$ и $\nu = \frac{\omega_{dk}}{\omega_k}$ и умножить найденное значение h_{τ} на высоту трапеции H_k .

$$\lambda_{kv}(t) = \lambda_{kv} \left(\frac{\tau}{\omega_k} \right) = h_{\tau} \cdot H_k \quad (X1-34)$$

Иллюстрируем все сказанное примером

Пример. Дано дифференциальное уравнение системы

$$(p^3 + 4.5p^2 + 14.5p + 20) \lambda = (p + 3) \cdot 1(t).$$

Построить по вещественной характеристике приближенную кривую процесса регулирования.

Решение. Обобщенная передаточная функция

$$\Phi(z) = \frac{z+3}{z^3 + 4.5z^2 + 14.5z + 20}.$$

Обобщенная амплитудно-фазовая характеристика

$$\Phi(i\omega) = \frac{i\omega + 3}{-i\omega^3 - 4.5\omega^2 + 14.5i\omega + 20} = \frac{60 + \omega^2 - \omega^4 - i\omega(15\omega^2 + 23.5)}{(20 - 4.5\omega^2)^2 + \omega^2(14.5 - \omega^2)^2}.$$

Вещественная характеристика

$$Re(\omega) = \frac{-\omega^4 + \omega^2 + 60}{21.25\omega^4 - 151\omega^2 + 610.25}.$$

Вычисление значений $Re(\omega)$ для разных ω сведено в помещенную ниже табл. 13

Из таблицы имеем

$$Re(0) = 0.15; \quad Re(10) = -0.0107.$$

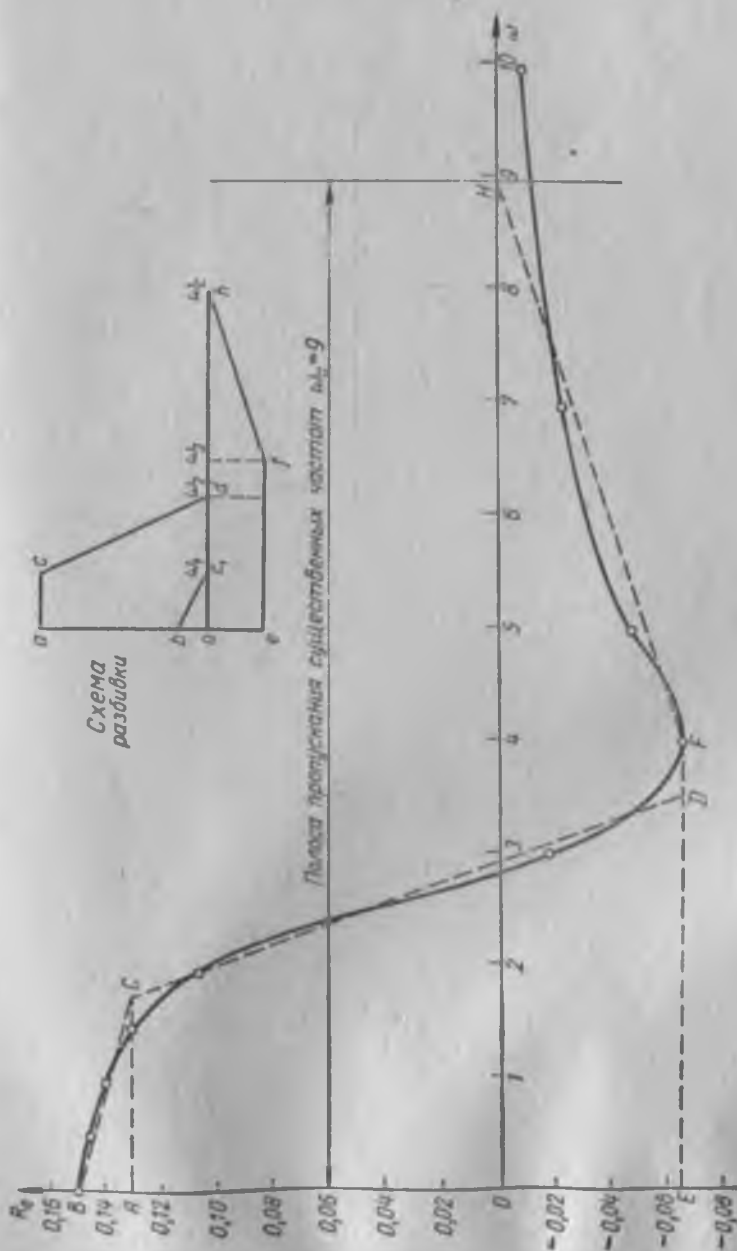
Отношение

$$\frac{Re(10)}{Re(0)} = 0.071 < 0.1.$$

Примем за полосу пропускания частот $\omega_k = 9$.

На фиг. 223 изображена вещественная характеристика $Re(\omega)$ построенная по вычисленным значениям таблицы.

На этой же фигуре произведена разбивка вещественной характеристики, в пределах полосы существенных частот на треугольники и трапеции, для вычисления приближенной кривой переходного процесса.



Фиг. 223. Вещественная частотная характеристика к примеру на стр. 438.

Таблица 13

Таблица вычислений значений $R_e(\omega)$ для разных ω

№ по пор.	ω	$20-4,5\omega^2$	$\omega(14,5-\omega^2)$	$-\omega^3+3\omega^2+6$	$\frac{(20-4,5\omega^2)^2}{+\omega^2(14,5-\omega^2)^2}$	$R_e(\omega)$
1	0	20	0	60	400	0,15
2	0,5	18,88	7,12	60 19	410 93	0,146
3	1	15,5	13,5	60	422 5	0,141
4	1,5	9,88	18,38	57 19	435 43	0,131
5	2	2	21	48	445	0,108
6	3	-20,5	16,5	-12	692,5	-0,0173
7	4	-52	-6	-180	2740	-0,0655
8	5	-92,5	-52,5	-590	11312,5	-0,047
9	7	-200,5	-241,5	-2292	98522,5	-0,0282
10	10	-430	-355	-9840	915925	-0,0107

При разбивке на треугольники и трапеции площади, ограниченной вещественной характеристикой и осями координат, требуется соблюдение указанных ниже правил (при желании использовать готовые таблицы):

1. Разбивка кривой на прямолинейные участки должна с возможно меньшей погрешностью повторять ход кривой.

2. Все треугольники и трапеции должны иметь одну боковую сторону, расположенную на оси ординат

3. Сумма площадей треугольников и трапеций на схеме разбивки должна приблизительно равняться фактической площади, ограниченной кривой $Re(\omega)$ и осями координат с учетом знаков отдельных площадок, расположенных выше и ниже оси абсцисс.

Пользуясь этими правилами, построена схема разбивки, представленная на фиг. 223.

На схеме разбивки имеем:

1. Трапецию $oacd$, отвечающую площади $EACD$.

2. Треугольник obc_1 , соответствующий площади ABC

3. Трапецию $ohfe$, изображающую отрицательную площадь $OHFE$.

Ординаты на схеме:

$$oa = EA = R_1 - R_2 = 0,13 - (-0,0165) = 0,1465.$$

$$ob = AB = R_2 - R_1 = 0,15 - 0,13 = 0,02.$$

$$oe = OE = R_2 = -0,0165.$$

Абсциссы на схеме:

$$\omega_1 = 1,75.$$

$$\omega_2 = 3,5.$$

$$\omega_3 = 4.$$

$$\omega_4 = 9.$$

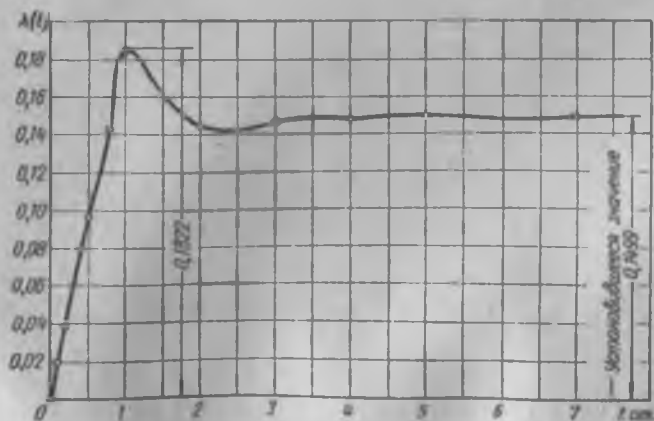
Дальнейшие вычисления сведены в табл. 14. Значения интегральных функций h_{ω} и h_c для типовых трапеций и треугольников взяты из таблиц (см. приложение II).

Кривая процесса регулирования $\lambda(t)$ полученная указанным выше вычислением, представлена на фиг. 224.

Таблица 14

№ по пор.	t	Трапеция $oacd$			Треугольник abc		Трапеция $ohfe$			
		$\tau = \omega_1 t$	$\nu = \frac{\omega_1}{\omega_2}$	$\lambda_{\tau} = \frac{R_2}{R_1 - R_2}$	$\tau = \omega_1 t$	$\lambda_{\tau} = \frac{R_2}{R_1 - R_2}$	$\tau = \omega_1 t$	$\nu = \frac{\omega_1}{\omega_2}$	$\lambda_{\tau} = \frac{R_2}{R_1 - R_2}$	$\lambda(t) = \frac{R_2}{R_1 - R_2}$
1	0.1	0.35	0.5	0.0246	0.175	0.0011	0.9	0.444	-0.0066	0.0189
2	0.2	0.70	0.5	0.0481	0.35	0.0022	1.8	0.444	-0.0122	0.0381
3	0.4	1.40	0.5	0.0914	0.70	0.0044	3.6	0.444	-0.0181	0.0777
4	0.5	1.75	0.5	0.1096	0.875	0.0054	4.5	0.444	-0.0186	0.0964
5	0.8	2.80	0.5	0.1499	1.40	0.0084	7.2	0.444	-0.0165	0.1418
6	1.0	3.5	0.5	0.1881	1.75	0.0103	9	0.444	-0.0162	0.1822
7	1.5	5.25	0.5	0.1616	2.625	0.0139	13.5	0.444	-0.0163	0.1592
8	2	7	0.5	0.1453	3.5	0.0163	18	0.444	-0.0167	0.1449
9	3	10.5	0.5	0.1447	5.25	0.0180	27	0.444	-0.0164	0.1463
10	4	14	0.5	0.1463	7	0.0181	36	0.444	-0.0164	0.1480
11	5	17.5	0.5	0.1478	8.75	0.0185	45	0.444	-0.0164	0.1499
12	7	24.5	0.5	0.1465	12.25	0.0190	63	0.444	-0.0164	0.1491

Из приведенного примера видна практическая ценность изложенного метода, который применим для характеристического уравнения любого порядка и обобщенной передаточной функции $\Phi(z)$ любого вида.



Фиг. 224. Кривая процесса регулирования к примеру.

5. КРИТЕРИИ МОНОТОННОСТИ И ОТСУТСТВИЕ ПЕРЕРЕГУЛИРОВАНИЯ

Под монотонным переходным процессом понимают такой процесс, когда отклонение регулируемой величины либо постепенно уменьшается (убывающий монотонный процесс), причем каждое последующее

щее по времени значение отклонения не больше предыдущего, либо отклонение регулируемой величины постепенно увеличивается (возрастающий монотонный процесс), причем каждое последующее значение отклонения не меньше предыдущего. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением убывающего монотонного процесса и когда начальное отклонение регулируемой величины $\lambda(0) = \lambda_0$ больше нуля $\lambda_0 > 0$. Все выводы, полученные для $\lambda(0) > 0$, легко распространить на случай $\lambda(0) < 0$.

Из условий монотонности следует, что при $\lambda(0) > 0$ скорость изменения регулируемой величины, которая выражается первой производной по времени от функции $\lambda(t)$, должна быть отрицательна, т. е. должно иметь место неравенство

$$\lambda'(t) < 0 \quad (X1-35)$$

во всем интервале $0 < t < \infty$, причем знак равенства допускается как на концах интервала при $t = 0, \infty$, так и в промежутке $0 < t < \infty$ любое число раз. Это условие является основным признаком монотонного процесса.

Во многих системах автоматического регулирования, называемых астатическими, переходный процесс характеризуется отсутствием начального отклонения регулируемой величины $\lambda(0) = 0$, но наличием начальной скорости $\lambda'(0) \neq 0$. Такой процесс не будет монотонным.

В ряде практических случаев требуется, чтобы переходный процесс протекал без изменения знака, т. е. чтобы кривая переходного процесса не пересекала ось времени. Такие переходные процессы называются знакопостоянными.

Условия знакопостоянства требуют, чтобы отклонение регулируемой величины на всем интервале $0 < t < \infty$ было одного знака, т. е. чтобы имело место одно из неравенств

$$\lambda(t) > 0 \text{ или } \lambda(t) < 0.$$

Знак равенства имеет место только в начале $t = 0$ или в конце $t = \infty$ интервала.

Нетрудно видеть, что монотонный процесс, есть в то же время и знакопостоянный. Обратное заключение будет неверным.

а) Критерии монотонности

Допустим, что исследуемый переходный процесс некоторой системы описывается дифференциальным уравнением

$$\lambda^{(n)} + a_1 \lambda^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \lambda' + a_n \lambda = 0,$$

Соответствующее характеристическое уравнение будет

$$p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0.$$

Если все корни характеристического уравнения простые, то уравнение переходного процесса может быть выражено уравнением

$$\lambda(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{p_k t}. \quad (\text{XI-36})$$

Здесь: p_k — корни характеристического уравнения
и A_k — постоянные коэффициенты, зависящие от заданных начальных условий и значений p_k .

В дальнейшем рассматриваются только устойчивые переходные процессы, для которых корни уравнения либо вещественные отрицательные, либо комплексные с отрицательной вещественной частью. Оба эти условия математически могут быть выражены одним неравенством $\text{Re } p_k < 0$.

Если среди корней характеристического уравнения имеются кратные корни, то для каждой группы одинаковых корней коэффициент A_k превращается в функцию независимого переменного t , представляющую полином степени $r-1$, где r — кратность группы.

Для построения монотонных переходных процессов характеристические уравнения с кратными корнями исключаются по причине того, что системы с такими уравнениями обычно имеют перерегулирование.

Выбор начальных условий играет существенную роль на соблюдение условий монотонности переходного процесса. Так, например, при начальных условиях

$$\lambda(0) = \lambda_0 > 0; \lambda'(0) = 0 \text{ и } \lambda''(0) > 0,$$

хотя скорость переходного процесса в начальный момент равна нулю, наличие положительного ускорения $\lambda''(0) > 0$ приведет к тому, что скорости $\lambda'(t)$ в некотором интервале будет положительной, что противоречит условию монотонности при $\lambda(0) > 0$. Таким образом, процесс не может быть монотонным на всем интервале $0 < t < \infty$ при любых корнях характеристического уравнения.

Полученный вывод можно обобщить. Переходный процесс не может быть монотонным при любом распределении корней характеристического уравнения, если при $\lambda(0) > 0$ первая необрабатываемая в нуль производная от $\lambda(t)$ при $t = 0$ положительна.

Таким образом при начальных условиях

$$\lambda(0) > 0 \quad \lambda^{(\kappa)}(0) = 0 \quad (\kappa = 1, 2, \dots, r-1)$$

и

$$\lambda^{(r)}(0) \neq 0$$

переходный процесс не будет монотонным, если $\lambda^{(r)}(0) > 0$. Он может быть монотонным только при $\lambda^{(r)}(0) < 0$. Хотя это условие является необходимым, но оно недостаточное. Следует установить

предельное значение $\lambda^{(r)}(0)$. Если скорость процесс. велика по абсолютной величине, то отклонение $\lambda(0) > 0$ перейдет через 0 и монотонность процесса нарушится. Отсюда следует, что монотонность процесса существенным образом зависит от начальной скорости переходного процесса.

Необходимыми условиями для получения монотонного процесса являются:

1) наличие, по крайней мере, одного вещественного корня характеристического уравнения, который должен быть расположен ближе других к мнимой оси в плоскости корней;

2) наличие в разложении переходного процесса

$$\lambda(t) = \sum A_k e^{p_k t}.$$

Коэффициента A_1 , отвечающего ближайшему к мнимой оси вещественному корню $p_1 = -\alpha_1$ и удовлетворяющего неравенству $A_1 > 0$ при $\lambda(0) > 0$ и $A_1 < 0$ при $\lambda(0) < 0$.

При $A_1 = 0$ следует убедиться, что $A_2 > 0$ и что p_2 есть вещественный корень.

Приведенные выше условия монотонности являются необходимыми, но они не всегда оказываются достаточными.

б) Оценка времени регулирования монотонного переходного процесса

При оценке времени регулирования монотонных процессов обычно применяют метод замены кривой переходного процесса с некоторой погрешностью экспоненциальной функцией, показатель которой выбирается из условия равенства интегральных критериев при одинаковых начальных условиях.

Пусть монотонный переходный процесс имеет уравнение

$$\lambda(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \dots A_n e^{p_n t},$$

при начальном значении $\lambda(0) = \lambda_0$.

Интегральный критерий J_{1n}

$$J_{1n} = \int_0^{\infty} \lambda(t) dt = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\alpha_k}, \text{ где } \alpha_k = -p_k.$$

Значение J_{1n} может быть вычислено также по характеристическому уравнению.

Соответственно для кривой переходного процесса первого порядка при начальном значении $\lambda(0) = \lambda_0$.

Интегральный критерий J_{11} будет

$$J_{11} = \int_0^{\infty} \lambda_0 e^{\rho t} dt = \frac{\lambda_0}{\alpha},$$

где $\rho = -\alpha$ — корень характеристического уравнения системы 1-го порядка.

Из равенства $J_{11} = J_{1n}$ определяем значение α

$$\alpha = \frac{\lambda_0}{J_{1n}}.$$

Функция $\lambda_0 e^{-\alpha t}$ позволяет определить время регулирования T .

$$T = \frac{2,3 \lg m}{\alpha} = \frac{J_{1n} 2,3 \lg m}{\lambda} \quad (X1-37)$$

в) Оценка перерегулирования

В том случае, когда переходный процесс отличается от монотонного, требуется знать величину перерегулирования. Это необходимо для суждения о пригодности регулирующей системы для тех практических условий, в которых она будет работать.

Наиболее точным методом определения величины перерегулирования являются построение кривой переходного процесса, из которой легко найти интересующие нас величины. Однако этот способ отнимает много времени. Поэтому обычно предпочитают приближенно оценивать величину перерегулирования по разным аналитическим формулам. Следует иметь в виду, что в большинстве случаев применяемые формулы дают грубую оценку перерегулирования, особенно для систем высокого порядка. Поэтому в тех случаях, когда требуется более точное решение, следует прибегать к построению кривой переходного процесса точным способом или путем спрямления частотных характеристик, как было показано выше.

ГЛАВА XII

ДИНАМИКА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ И СИСТЕМ ПРЕРЫВИСТОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

1. МЕТОДЫ АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Системы регулирования, которые содержат хотя бы одно нелинейное звено, т. е. такое звено, движение которого описывается нелинейным дифференциальным уравнением, называются *нелинейными* системами регулирования. К нелинейным звеньям относятся звенья релейного типа, импульсные, с прерывистыми и кусочно-линейными характеристиками, звенья, работа которых существенно зависит от сухого трения и люфта, и многие другие.

Нелинейные системы отличаются от линейных тем, что вместо линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, движение этих систем описывается нелинейными уравнениями, причем во многих случаях коэффициенты при неизвестных и их производных не постоянны, а представляют функции регулируемой величины. Поэтому изложенные выше методы анализа линейных систем регулирования непригодны для нелинейных систем. Укажем на следующие основные методы, применяемые для анализа нелинейных систем.

Метод фазовых траекторий. Идея этого метода заключается в следующем. Известно, что состояние системы, описываемой дифференциальным уравнением, вполне определяется знанием в каждый момент времени значений регулируемой величины и ее $(n - 1)$ производных, где n — порядок дифференциального уравнения.

Это дает нам возможность представить в некотором n -мерном пространстве состояние системы отдельной точкой.

Допустим, что мы выбрали в n -мерном пространстве систему координат, по осям которой будем откладывать значение регулируемой величины и ее $(n - 1)$ производных. Точка в такой системе координат определяет состояние системы автоматического регулирования и носит название «изображающей точки». Процесс изменения состояния системы представится как некоторое движение изображающей точки, точнее ее траекторией, которая называется фазовой траекторией. Начальные условия системы определяют начальное положение изображающей точки в «фазовом пространстве», под которым понимается указанное n -мерное пространство.

Совокупность фазовых траекторий, найденных для всевозмож-

ных начальных условий, вместе с особыми точками и траекториями, составляет фазовый портрет системы.

Метод фазовых траекторий является по существу качественным методом, но в соединении с другими методами он дает весьма наглядное и полное представление о поведении изучаемой системы.

В практических условиях этот метод чаще всего применяется для систем 2-го и 3-го порядков, так как для систем более высокого порядка ($n > 3$) применение этого метода становится громоздким.

Метод кусочно-линейной аппроксимации с припасовыванием. Метод точечного преобразования. Этот метод состоит в том, что нелинейная характеристика заменяется несколькими участками, для каждого из которых составляется свое линейное дифференциальное уравнение, приближенно описывающее поведение системы. Далее на основании условия непрерывности решения отдельные результаты для каждого участка припасовываются в точках соединения. Существуют различные варианты этого метода. К методам кусочно-линейной аппроксимации можно отнести известный метод точечного преобразования Андронова, подробнее о котором будет сказано ниже.

Метод малого параметра и медленно меняющихся функций. Метод гармонического баланса. Здесь также существуют различные варианты метода. В одном случае нелинейная функция заменяется приближенной функцией, с некоторым малым параметром, выбранной таким образом, что при обращении в нуль этого параметра нелинейное уравнение переходит в линейное. Далее в решении линейного уравнения вводится малый параметр и ищется приближенное решение начального уравнения.

В другом случае нелинейная функция разлагается в ряд Фурье и заменяется первой гармоникой этого ряда. Такая замена основывается на том, что системы автоматического регулирования в громадном большинстве случаев хорошо гасят колебания высших гармоник. Такой вариант носит название метода гармонической линеаризации, или метода гармонического баланса. Следует иметь в виду, что результаты, полученные этим методом, являются приближенными, причем тем ближе к реальному процессу, чем точнее выполняется условие гашения в системе высших гармоник.

Ниже метод гармонического баланса будет рассмотрен несколько подробнее.

Кроме перечисленных методов исследования нелинейных систем, существуют и другие, сведения о которых читатель может почерпнуть в соответствующей литературе.

а) Метод фазовых траекторий

Метод фазовых траекторий был введен в теорию колебаний акад. А. А. Андроновым для исследования движения нелинейных систем и для учета таких факторов, как сухое трение, люфты в кинематических парах и др.

Для иллюстрации этого метода рассмотрим систему 2-го порядка, описываемую уравнением

$$T_2^2 \lambda'' + T_1 \lambda' + \delta \lambda = 0,$$

которое преобразуем к виду

$$T^2 \lambda'' + 2\rho T \lambda' + \lambda = 0$$

или

$$(T^2 \rho^2 + 2\rho T \rho + 1) \lambda = 0 \quad (\text{XII-1})$$

путем введения коэффициента демпфирования

$$\rho = \frac{T_1}{2T_2 \sqrt{\delta}}$$

и постоянной времени $T = \frac{T_2}{\sqrt{\delta}}$.

Корни характеристического уравнения

$$\rho_{1,2} = \frac{-\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}}{T} = \frac{-\rho \pm \sqrt{1 - \rho^2}}{T}.$$

При анализе фазовых траекторий выделяют особые точки. Эти точки характеризуются тем, что в них не существует определенного направления касательной к фазовой траектории, т. е.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}.$$

Поскольку фазовые траектории, как будет показано ниже, не пересекаются друг с другом, из соотношения $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ следует, что фазовые траектории сходятся к особым точкам, или исходят из них. Так как состояние равновесия системы характеризуется условием $\lambda(0) = \lambda' = 0$, то соотношение $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$ также указывает, что все точки равновесия являются особыми точками фазовой плоскости.

Рассмотрим следующие случаи:

1. $\rho = 0$. Демпфирование отсутствует. Это случай консервативной системы. Корни характеристического уравнения при этом чисто мнимые, сопряженные

$$\rho_{1,2} = \pm i\omega; \quad \alpha = 0; \quad \omega = \frac{1}{T}.$$

Решение примет вид

$$\lambda = \lambda_0 \cos \omega t; \quad \lambda' = -\lambda_0 \omega \sin \omega t.$$

Уравнение фазовой траектории в параметрической форме

$$x = \lambda_0 \cos \omega t; \quad y = -\lambda_0 \omega \sin \omega t.$$

Это есть уравнение эллипса с полуосями λ_0 и $\omega\lambda_0$

$$\frac{x^2}{\lambda_0^2} + \frac{y^2}{\lambda_0^2 \omega^2} = 1; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\omega^2 x}{y} \quad (\text{XII-2})$$

и центром в начале координат.

При различных начальных значениях λ_0 на фазовой плоскости получаем семейство подобных эллипсов. Через каждую точку плоскости проходит только один эллипс, отвечающий определенному значению λ_0 . Эллипсы нигде не пересекаются, но имеют один общий центр. Вся фазовая плоскость заполнена вложенными друг в друга эллипсами.

При $\rho = 0$ уравнение системы принимает вид

$$(T^2 p^2 + 1) \lambda = 0.$$

Известно, что это уравнение приводит к незатухающим колебаниям системы с круговой частотой

$$\omega = \frac{1}{T}.$$

Таким образом, фазовые траектории, имеющие форму подобных эллипсов с общим центром, отвечают незатухающим колебаниям системы. Движение изображающей точки происходит, как указано стрелкой на фиг. 225.

Общий центр эллипсов относят также к особой точке фазовой плоскости. Эта точка называется **центром**.

2. $0 < \rho < 1$. Корни характеристического уравнения комплексные сопряженные с отрицательной вещественной частью. Переходный процесс имеет затухающий колебательный характер

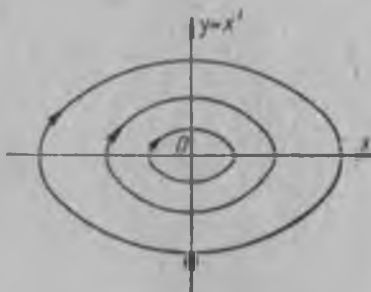
$$p_{1,2} = -\alpha \pm i\omega; \quad \alpha = \frac{\rho}{T}; \quad \omega = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \rho^2}.$$

Решение уравнения может быть представлено в виде

$$\lambda = e^{-\alpha t} (A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}) = e^{-\alpha t} [(A_1 + A_2) \cos \omega t + i(A_1 - A_2) \sin \omega t].$$

Соответственно первая производная будет

$$\lambda' = -(A_1 + A_2) e^{-\alpha t} (\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t) + i(A_1 - A_2) e^{-\alpha t} (\omega \cos \omega t - \alpha \sin \omega t).$$



Фиг. 225. Фазовые траектории незатухающих колебаний.

Каковы бы ни были заданы начальные условия при $t = 0$, они должны иметь вещественные значения. Отсюда следует, что $A_1 = A_2$

$$\lambda(0) = \lambda_0 = A_1 + A_2 \quad \text{и} \quad \lambda'(0) = -\alpha(A_1 + A_2) = -\alpha\lambda_0.$$

В связи с этим решение примет вид

$$\lambda = \lambda_0 e^{-\alpha t} \cos \omega t; \quad \lambda' = -\lambda_0 e^{-\alpha t} (\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t).$$



Фиг. 226. Фазовые траектории затухающих колебаний с устойчивым фокусом.

Фазовое пространство в нашем случае превращается в фазовую плоскость. Выберем декартову систему координат на плоскости и положим

$$x = \lambda = \lambda_0 e^{-\alpha t} \cos \omega t$$

$$y = \lambda' = -\lambda_0 e^{-\alpha t} (\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t). \quad (\text{XII-3})$$

Это есть уравнение свертывающейся логарифмической спирали в параметрической форме.

В самом деле для радиуса вектора R кривой имеем

$$R^2 = x^2 + y^2 = \lambda_0^2 e^{-2\alpha t} [\cos^2 \omega t + (\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t)^2].$$

Выражение $\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t$ имеет максимум при

$$\operatorname{tg} \omega t = \frac{\omega}{\alpha}.$$

Отсюда

$$(\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t)_{\max} = \frac{\alpha^2 + \omega^2}{\alpha}.$$

В связи с этим можем написать неравенство

$$R^2 < \lambda_0^2 e^{-2\alpha t} \left[1 + \frac{(\alpha^2 + \omega^2)^2}{\alpha^2} \right].$$

Таким образом, при $t \rightarrow \infty$ радиус вектора R стремится к нулю. На фиг. 226 показан примерный вид фазовой траектории, отвечающей затухающим колебаниям.

С другой стороны, из основного уравнения имеем

$$\lambda'' = \frac{d\lambda'}{dt} = -\frac{x + 2\gamma T y}{T^2} \quad \text{и} \quad \frac{dx}{dt} = y.$$

Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + 2\tau T y}{y T^2}. \quad (\text{XII-4})$$

Это уравнение фазовой траектории.

Движение изображающей точки по спирали происходит в направлении, указанном стрелкой, как при $y > 0$ x должно увеличиваться, а при $y < 0$ уменьшаться. Регулируемый параметр $\lambda = x$ будет совершать затухающие колебания, стремясь асимптотически к точке равновесия ($R = 0$; $\lambda = 0$; $\lambda' = 0$), находящейся в начале координат. При различных начальных условиях движение изображающей точки будет происходить по различным спиралям, но все эти спирали вложены друг в друга и свертываются к одной и той же точке равновесия, неограниченно приближаясь к последней. Через каждую точку фазовой плоскости проходит только одна спираль, эти спирали нигде не пересекаются и сходятся к одной точке — точке равновесия. Такая точка равновесия является особой точкой фазовой плоскости, она носит название **устойчивого фокуса**.

3. $-1 < \rho < 0$. **Отрицательное демпфирование**. Корни характеристического уравнения комплексные, сопряженные с положительной вещественной частью. Переходный процесс колебательный с неограниченно возрастающей амплитудой

$$p_{1,2} = \alpha \pm i\omega; \quad \alpha = -\frac{\rho}{T} > 0; \quad \omega = \frac{1}{T} \sqrt{1 - \rho^2}.$$

Аналогично случаю $\rho < 1$ найдем, что уравнение фазовой траектории будет

$$X = \lambda_0 e^{+\alpha t} \cos \omega t;$$

$$y = -\lambda_0 e^{+\alpha t} (-\alpha \cos \omega t + \omega \sin t)$$

и

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + 2\tau T y}{T^2 y}; \quad (\text{XII-5})$$

Это уравнение раскручивающейся спирали.

Радиус-вектор спирали находится из выражения

$$R^2 = x^2 + y^2 = \lambda_0^2 e^{2\alpha t} [\cos^2 \omega t + (-\alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t)^2].$$

Можно показать, что выражение в квадратных скобках всегда положительно и ни при каких значениях t не обращается в нуль. Пусть минимум этого выражения будет $N_{\min}$, причем $N_{\min} > 0$.

Тогда имеет место неравенство

$$R^2 > \lambda_0^2 e^{2\alpha t} N_{\min}.$$

Из неравенства следует, что радиус-вектор спирали при $t \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает.

Движение изображающей точки по спирали происходит, как указано на фиг. 227 стрелкой. Как и в случае $0 < \rho < 1$, здесь спирали, соответствующие различным начальным условиям λ_0 и λ'_0 , не пересекаются. Вся плоскость заполняется вложенными друг в друга спиралями.



Фиг. 227. Фазовые траектории расходящихся колебаний с неустойчивым фокусом.

Точка $\lambda_0 = \lambda'_0 = 0$ ($R = 0$) отвечает положению равновесия системы. Однако это равновесие неустойчивое, достаточно сколь угодно малого отклонения λ_0 , и изображающая точка начнет двигаться по раскручивающейся спирали, удаляясь от положения равновесия. Таким образом, неустойчивый колебательный процесс с неограниченно возрастающей амплитудой изображается на фазовой плоскости спиралью, раскручивающейся около особой точки, называемой **неустойчивым фокусом**. Система в данном случае будет неустойчива.

4. $\rho > 1$. Сильное демпфирование. Корни характеристического уравнения вещественные отрицательные. Переходный процесс затухающий аperiodический.

$$\rho_1 = -\alpha; \quad \rho_2 = -\beta,$$

$$\alpha = \frac{1}{T}(\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}) > 0; \quad \beta = \frac{1}{T}(\rho - \sqrt{\rho^2 - 1}) > 0.$$

Решение дифференциального уравнения

$$\lambda = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\beta t}; \quad \lambda' = -A_1 \alpha e^{-\alpha t} - A_2 \beta e^{-\beta t}.$$

Значения A_1 и A_2 определяются по начальным условиям

$$\lambda(0) = \lambda_0 \text{ и } \lambda'(0) = \lambda'_0.$$

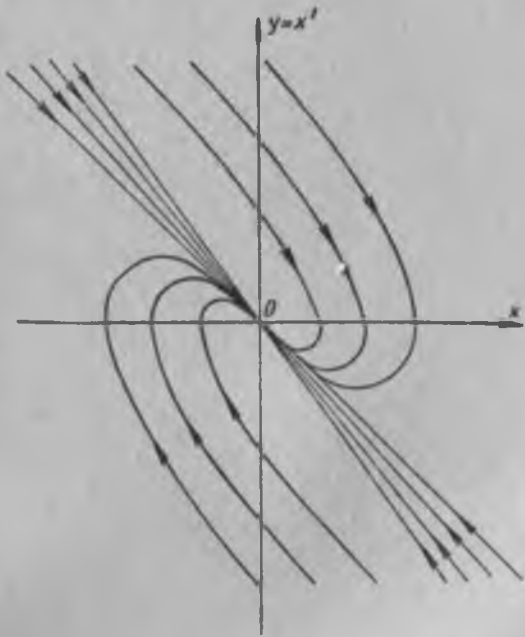
Уравнение фазовой траектории

$$x = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\beta t}; \quad y = -A_1 \alpha e^{-\alpha t} - A_2 \beta e^{-\beta t}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + 2.T}{y.T} \quad (\text{XII-6})$$

Фазовые траектории в этом случае имеют вид, изображенный на фиг. 228.

Радиус-вектора R кривой при $t \rightarrow \infty$ будет стремиться к нулю. Точка $R = 0$; $\lambda = x = 0$; $\lambda' = y = 0$ представляет точку равновесия системы и является особой точкой фазовой плоскости, в которой сходятся все фазовые траектории. Движение изображающей точки направлено так, как показано на фигуре стрелками. Так же, как и в предыдущих случаях, через каждую точку фазовой плоскости можно провести только одну траекторию. Какие бы начальные условия мы ни задавали, изображающая точка из начального положения будет двигаться к точке равновесия. Здесь уже нет колебательного движения вокруг точки равновесия. Описанная точка равновесия называется **устойчивым узлом**. Фазовые траектории, имеющие точку равновесия типа устойчивого узла, отвечают аperiodическому затухающему процессу.



Фиг. 228. Фазовые траектории аperiodического процесса с устойчивым узлом.

5. $\rho < -1$. Сильное отрицательное демпфирование. Корни характеристического уравнения вещественные положительные. Переходный процесс аperiodический неограниченно возрастающий

$$\rho_1 = \alpha; \rho_2 = \beta; \alpha = \frac{1}{T}(-\rho + \sqrt{\rho^2 - 1}) > 0.$$

$$\beta = \frac{1}{T}(-\rho - \sqrt{\rho^2 - 1}) > 0.$$

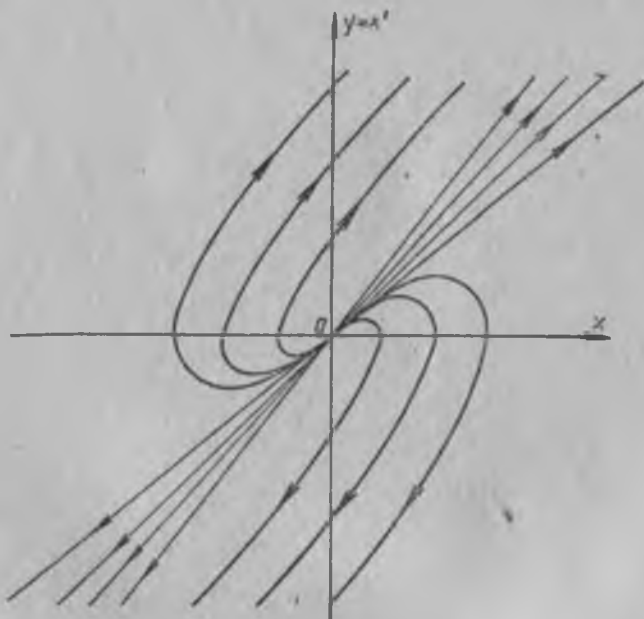
Уравнение фазовой траектории

$$x = A_1 e^{\alpha t} + A_2 e^{\beta t}; y = A_1 \alpha e^{\alpha t} + A_2 \beta e^{\beta t}. \quad (\text{XII-7})$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + 2\rho Ty}{yT^2}.$$

Сравнивая с предыдущим случаем, видим, что фазовые траектории теперь будут иметь вид, показанный на фиг. 229.

Они отличаются тем, что движение изображающей точки направлено от точки равновесия системы к бесконечно удаленной точке фазовой плоскости. Положение равновесия системы неустойчивое,



Фиг. 229. Фазовые траектории аперриодического процесса с неустойчивым узлом.

достаточно дать незначительное отклонение от этого положения и изображающая точка станет удаляться от положения равновесия по фазовой траектории в бесконечность. Точка равновесия указанного типа называется **неустойчивым узлом**.

6. Демпфирование отсутствует, а система обладает отрицательным статизмом. Уравнение такой системы может быть приведено к виду

$$(T^2 p^2 - 1)\lambda = 0.$$

Здесь корни характеристического уравнения вещественные, разных знаков. Переходный процесс неустойчивый. Уравнение фазовой траектории находится непосредственно из уравнения $(T^2 p^2 - 1)\lambda = 0$

$$\lambda = x; \lambda' = y; \lambda'' = \frac{dy}{dt} = \frac{x}{T^2};$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{yT^2} \text{ или } T^2 y dy = x dx.$$

Интегрируя, найдем

$$y^2 - \frac{x^2}{T^2} = \frac{A}{T^2}. \quad (\text{XII-8})$$

где A — постоянная интегрирования.

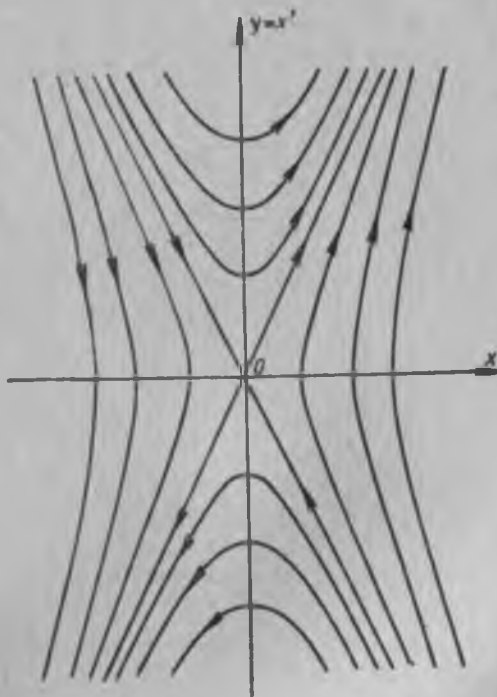
Это есть уравнение семейства равносторонних гипербол, отнесенное к главным осям.

На фиг. 230 показан примерный вид семейства фазовых траекторий в рассматриваемом случае.

Асимптоты этого семейства гипербол найдем, положив $A = 0$

$$y = \frac{x}{T} \text{ и } y = -\frac{x}{T}.$$

Направление движения изображающей точки показано стрелками на фигуре. На какой бы траектории не находилась изображающая точка (за исключением одной асимптоты) и как бы близко она ни подходила к положению равновесия в начальный или последующий момент в конечном итоге она будет удаляться от точки равновесия в бесконечность. Здесь точка равновесия представляет особую точку фазовой плоскости, называемую седлом.



Фиг. 230. Фазовые траектории переходного процесса с седлом.

Обобщим полученные выше результаты.

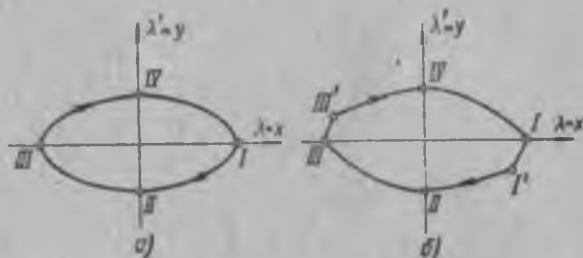
Особыми точками на фазовой плоскости могут быть:

- а) центр, когда корни характеристического уравнения мнимые сопряженные;
- б) устойчивый фокус, когда корни характеристического уравнения системы комплексные, сопряженные с отрицательной вещественной частью;
- в) неустойчивый фокус, когда комплексные сопряженные корни имеют положительную вещественную часть;
- г) устойчивый узел при вещественных отрицательных корнях;
- д) неустойчивый узел при вещественных положительных корнях;
- е) седло при вещественных корнях разных знаков.

Покажем теперь, отражается ли на фазовой траектории влияние люфта и сухого трения в системе.

Люфт. Обратимся к фиг. 27 в главе I и предположим, что ось 1 совершает незатухающие колебания, описанные в случае $\rho = 0$ уравнением $(T^2 p^2 + 1) \lambda = 0$, а ось 2 приводится в движение осью 1 механической передачей с люфтом x_e . На фиг. 231 показаны две фазовые траектории незатухающих колебаний. Фазовая траектория для системы без люфта представляет эллипс (фиг. 231, а). Построение начнем с точки I этой траектории.

Точка I отвечает наибольшему отклонению оси 1 от положения равновесия ($x = \lambda_0$). Когда ось 1 начинает возвращаться к положе-



Фиг. 231. Фазовая траектория незатухающих колебаний с люфтом и без люфта.

нию равновесия, ось 2 вначале неподвижна, пока не выбран люфт x_e , начинает движение вместе с осью 1 со скоростью $\lambda' = y$. Величину этой скорости легко определить из уравнения фазовой траектории, положив $x = \lambda_0 - x_e$ (см. формулу XII-2),

$$\left(\frac{\lambda_0 - x_e}{\lambda_0} \right)^2 + \left(\frac{y}{\omega \lambda_0} \right)^2 = 1,$$

$$y = \lambda' = -\omega \sqrt{\lambda_0^2 - (\lambda_0 - x_e)^2}.$$

Знак минус взят потому, что переход из точки I в точку II по фазовой характеристике происходит в нижней полуплоскости.

Положение точки I фазовой траектории с люфтом (фиг. 231, б) определяется положением оси 2 в момент, когда ось 1 выбрала весь люфт x_e .

При этом координаты точки I будут

$$x = \lambda_0 - x_e; \quad y = -\omega \sqrt{\lambda_0^2 - (\lambda_0 - x_e)^2}. \quad (\text{XII-9})$$

Интервал от начала движения оси 1 до начала движения оси 2, пока не выбран люфт, изобразится на фазовой траектории отрезком (I—I').

Далее, обе оси движутся совместно до тех пор, пока скорость оси 1 слять не станет равной нулю в точке III. Участок фазовой траектории I—II—III совпадает с соответствующим участком фазовой

траектории без люфта. В точке *III* процесс повторяется в обратном направлении. Ось 2 неподвижна, пока ось 1 не выберет люфт.

Сухое трение. Влияние сухого трения на вид фазовой траектории можно установить из уравнения

$$(T^2 p^2 + 1)\lambda = \pm \mu.$$

Положим, что μ постоянная величина, не зависящая от времени.

Общее решение этого уравнения найдется как сумма общего решения однородного уравнения $(T^2 p^2 + 1)\lambda = 0$ и какого-либо частного решения заданного уравнения.

Общее решение уравнения $(T^2 p^2 + 1)\lambda = 0$ было дано выше при построении фазовой траектории для незатухающих колебаний. Что касается частного решения нашего уравнения, то как нетрудно видеть, таким решением может быть $\lambda = \pm \mu$.

Таким образом искомое общее решение будет

$$\lambda = \pm \mu + A \cos \omega t,$$

$$\lambda' = -\omega A \sin \omega t,$$

где A определяется начальными условиями.

Уравнение фазовой траектории

$$\left(\frac{x \mp \mu}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{\omega A}\right)^2 = 1. \quad (\text{XII-10})$$

Нетрудно видеть, что уравнение представляет эллипс с центром в точке $(\mp \mu, 0)$.

При определении знака перед μ следует руководствоваться правилом, что трение всегда направлено против движения.

Начнем движение по фазовой траектории от точки *I* (см. фиг. 232).

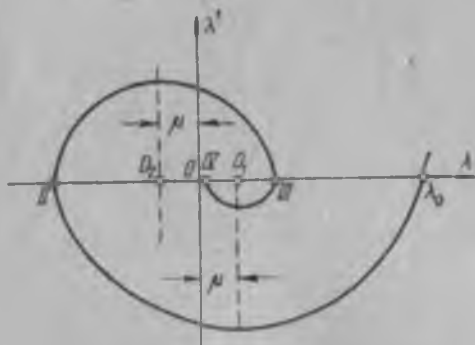
Точка *I* имеет координаты $x = \lambda_0$ и $y = 0$. От точки *I* до точки *II* фазовая траектория представляет эллипс с центром в точке O_1 ($OO_1 = \mu$). Уравнение эллипса найдем, определив предварительно значение A_1 по начальным условиям $\lambda = \lambda_0$ и $\lambda' = 0$ при $t = 0$.

Уравнение эллипса для участка *I—II*

$$\left(\frac{x - \mu}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\omega A_1}\right)^2 = 1; \quad \left(\frac{x - \mu}{\lambda_0 - \mu}\right)^2 + \left[\frac{y}{\omega(\lambda_0 - \mu)}\right]^2 = 1.$$

Координаты точки *II*:

$$x = -\lambda_0 + 2\mu; \quad y = 0.$$



Фиг. 232. Фазовая траектория затухающих колебаний при сухом трении.

Продолжим нашу фазовую траекторию. За точкой II трение меняет свой знак, так как направление движения изменилось. Поэтому уравнение траектории на участке II—III будет

$$\left(\frac{x+\mu}{A_2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\omega A_2}\right)^2 = 1.$$

Это эллипс с центром в точке O_2 .

Для определения A_2 исходим из начальных условий точки II:

$$x = -\lambda_0 + 2\mu; \quad y = 0.$$

Значение A_2 определяем из уравнения

$$\left(\frac{-\lambda_0 + 3\mu}{A_2}\right)^2 = 1; \quad A_2 = \lambda_0 - 3\mu.$$

Уравнение эллипса на участке II—III

$$\left(\frac{x+\mu}{\lambda_0 - 3\mu}\right)^2 + \left[\frac{y}{\omega(\lambda_0 - 3\mu)}\right]^2 = 1.$$

Координаты точки III:

$$y = 0; \quad x = \lambda_0 - 4\mu.$$

Продолжая аналогичным образом, приходим в конечном итоге к такому положению,

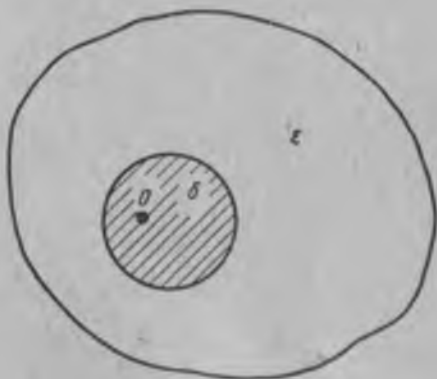
когда точка фазовой траектории попадает в зону нечувствительности O_2O_1 . Движение прекращается.

Предельные циклы. Приведенные выше типы особых точек фазовой плоскости были получены для линейных систем, причем все эти особые точки представляли в рассмотренных случаях точки устойчивого или неустойчивого равновесия системы.

Реальные системы автоматического регулирования ведут себя как линейные только в пределах малых отклонений переменных от установившихся значений. Поэтому картины фазовых траекторий, приведенные выше, имеют силу для нелинейных систем только в ограниченной области. Для более глубокого изучения и исследования нелинейных систем необходимо формулировать точное определение понятия «устойчивость системы».

Рассмотрим точку равновесия O на фазовой плоскости (фиг. 233).

Согласно определению, данному Ляпуновым, состояние равновесия называется устойчивым, если для любой заданной сколь угодно малой области ϵ допустимых отклонений от состояния равновесия существует такая окрестность δ вокруг точки равновесия, что ни одно движение, начинающееся внутри окрестности, никогда не достигает границ области ϵ допустимых отклонений при любом сколь угодно большом значении времени t . Если такой окрестности δ не существует, система неустойчива.



Фиг. 233. К определению устойчивости по Ляпунову.

Рассматривая указанную окрестность вокруг точки равновесия как область начальных условий, мы можем сказать, что система устойчива, если для любой заданной сколь угодно малой области ϵ допустимых отклонений существует своя область δ начальных отклонений, отличных от нулевых, при которых отклонения системы в переходном режиме не выходят за пределы области ϵ .

Таким образом, устойчивость по Ляпунову не обеспечивает того, что при произвольных конечных начальных отклонениях система обязательно вернется в прежнее состояние равновесия или не выйдет за пределы области допустимых отклонений. Только при достаточно малых начальных отклонениях устойчивой системы можно указать области допустимых отклонений. Если же начальные отклонения выходят за некоторые границы, то таких областей может не существовать.

Определенная выше устойчивость по Ляпунову есть устойчивость «в малом», т. е. для области достаточно малых начальных отклонений. За пределами этой области, вследствие значительного отступления характеристики системы от линейной, картина фазовых траекторий, описанных выше для линейных систем, может настолько измениться, что примет качественно другой характер.

Детальное изучение свойств фазовых траекторий нелинейных систем позволяет выделить следующие случаи (фиг. 234).

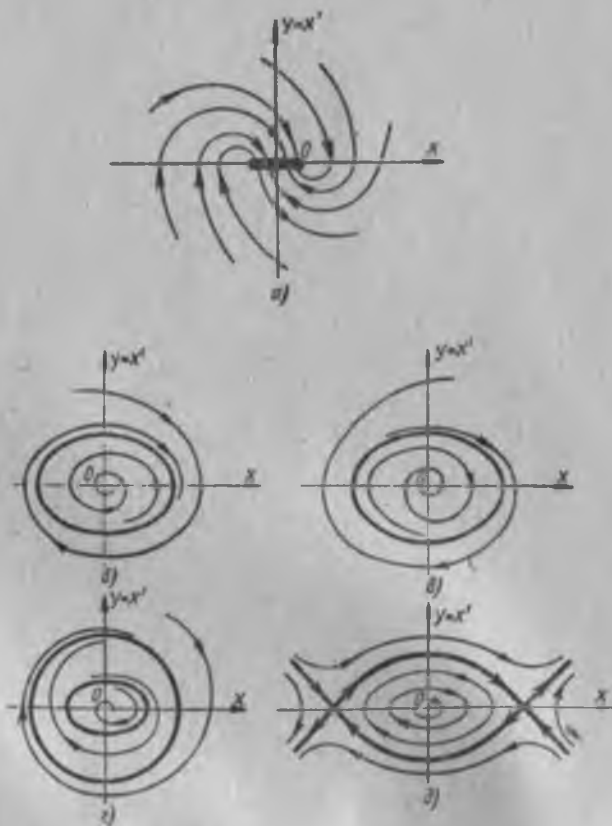
1. Система имеет зону нечувствительности и сухое трение. Установившемуся состоянию равновесия при данной нагрузке отвечает не одна точка на фазовой плоскости, а целая область возможных состояний равновесия. На фиг. 234, *а* представлен случай, когда особая точка превращается в особый отрезок прямой. Фазовые траектории теперь вливаются не в начало координат, а в указанный на фигуре отрезок, величина которого зависит от величины зоны нечувствительности и сухого трения.

2. Поведение системы характеризуется расходящимся, но ограниченным процессом. Система неустойчива в «малом», но амплитуда расходящихся колебаний из-за нелинейности характеристик увеличивается только до определенного предела и затем остается постоянной.

Картина фазовых траекторий принимает вид, изображенный на фиг. 234, *б*. Здесь в начале координат находится неустойчивый фокус. Спирали фазовых траекторий расходятся из фокуса, приближаясь асимптотически к некоторому замкнутому контуру, имеющему конечные размеры. Все изображающие точки, начавшие свое движение вне этого контура, также асимптотически приближаются по спирали к этому контуру. Контур представляет особую замкнутую изолированную траекторию, носящую название *устойчивого предельного цикла*. Если изображающая точка при своем движении по замкнутому контуру под влиянием какого-либо внешнего воздействия сойдет на другую траекторию, то она обязательно будет двигаться по внутренней или внешней спирали, наматывающейся на контур предельного цикла, и приближаться к нему асимптотически.

Если картина фазовых траекторий имеет устойчивый предельный цикл, это свидетельствует о том, что рассматриваемая система обладает устойчивыми автоколебаниями. Размеры предельного цикла по оси x определяют амплитуду колебаний, а по оси y скорость изменения амплитуды.

3. Поведение системы характеризуется затухающим процессом, но только до тех пор, пока начальное отклонение не выходит за пределы



Фиг. 234. Особые траектории фазовых портретов нелинейных систем.

некоторой области. При несоблюдении этого условия процесс становится расходящимся. Короче говоря, система устойчива в «малом» и неустойчива в «большом». Картина фазовых траекторий для этого случая изображена на фиг. 234, в. Здесь также имеется изолированная замкнутая траектория, т. е. предельный цикл. Однако этот предельный цикл имеет неустойчивый характер. Если изображающая точка в начале своего движения находилась внутри предельного

цикла, она будет двигаться всегда по спирали к началу координат, где в данном случае находится устойчивый фокус системы. Но если начальное отклонение было таково, что изображающая точка при этом оказалась вне предельного цикла, то она будет удаляться от предельного цикла по спирали в бесконечности. В этом случае система неустойчива.

Неустойчивость самого предельного цикла характеризуется тем, что изображающая точка практически не может находиться на нем в постоянном движении. При малейшем отклонении на другую траекторию под влиянием каких-либо случайных внешних воздействий изображающая точка будет удаляться от предельного цикла, либо к устойчивому фокусу, либо в бесконечность.

4. Возможны случаи, когда система имеет несколько предельных циклов. На фиг. 234, *г* показана картина фазовых траекторий с двумя предельными циклами и устойчивым фокусом. Первый предельный цикл неустойчивый, второй, более удаленный от фокуса, имеет устойчивый характер.

5. Выше мы видели, что картина фазовых траекторий для линейной системы с незатухающим колебательным процессом представляет семейство подобных эллипсов с центром в начале координат. При наличии нелинейностей картина фазовых траекторий искажается и может принять вид, показанный на фиг. 234, *д*. Здесь, кроме центра появляются еще две особые точки типа седла, через которые проходят особые траектории, называемые сепаратрисами. Последние разделяют всю фазовую плоскость на пять областей, из которых одна, замкнутая сепаратрисами, является областью устойчивого колебательного незатухающего процесса, тогда как остальные представляют области неустойчивых в конечном итоге расходящихся процессов. Согласно исследованиям А. А. Андропова, особые точки типа «седло» и «узел» появляются тогда, когда состояние движения системы характеризуется максимумом потенциальной энергии, в то время как при минимуме этой энергии имеет место появление особых изолированных точек типа «центр».

Резюмируя все сказанное выше, можем заключить, что фазовые портреты нелинейных систем могут содержать:

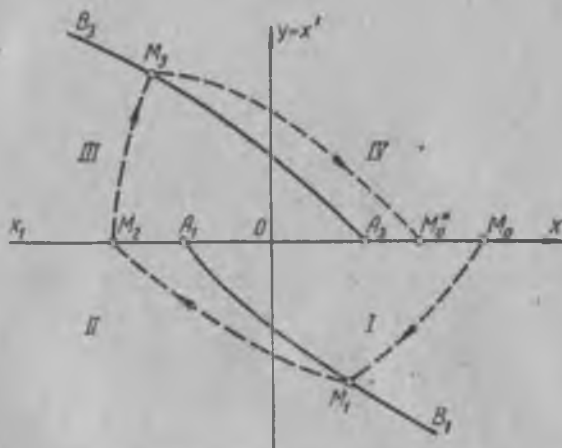
- 1) особые точки: центры, узлы, фокусы, седла;
- 2) особые траектории: отрезки линий равновесия, предельные циклы, сепаратрисы.

Имея фазовый портрет нелинейной системы регулирования, мы получаем полное представление об ее устойчивости. Ответы на вопросы, устойчива ли система в большом или малом, имеет ли она устойчивые автоколебания дает фазовый портрет системы. Построение фазового портрета на плоскости, как было указано выше, требует определения функций $\lambda(t)$ и $\lambda'(t)$ построения семейства кривых $f(\lambda, \lambda')$ при различных начальных условиях. Фазовый портрет в пространстве трех измерений требует построения семейства поверхностей $F(\lambda, \lambda', \lambda'')$ при различных начальных условиях.

6) Метод точечного преобразования

Метод точечного преобразования в теории нелинейных колебаний был впервые предложен А. А. Андроновым. Изложим сущность этого метода применительно к фазовой плоскости.

Известно, что нелинейные системы автоматического регулирования описываются в большинстве случаев сложными дифференциальными уравнениями, интегрирование которых часто затруднительно



Фиг. 235. Картина фазовых траекторий (к методу точечного преобразования).

или невозможно. Поэтому целесообразно переходный процесс разбить на участки или этапы, в пределах которых описание процесса может быть сделано приближенно линейными дифференциальными уравнениями, или вообще дифференциальными уравнениями, поддающимися интегрированию без особых затруднений.

В связи с этим вся фазовая плоскость разделится на области, в каждой из которых будет своя картина фазовых траекторий, отвечающая уравнению соответствующего этапа. В дальнейшем, не нарушая общности наших рассуждений, предположим, что фазовая плоскость разделяется на четыре области, как показано на фиг. 235.

Допустим, что граница между IV и I областями есть положительная полуось Ox , между I и II — кривая A_1B_1 , между II и III — полуось Ox_1 и между III и IV — кривая A_2B_2 .

Допустим, что начальное положение изображающей точки будет M_0 . Это отвечает начальным условиям $x(0) = OM_0 = x_0$.

В первом этапе переходного процесса изображающая точка будет двигаться по фазовой траектории I области. При этом точка M_0 попадает в точку M_1 на границе A_1B_1 . Выбираем по II области такую фазовую траекторию, которая проходит через точку M_1 . По этой траектории будет двигаться изображающая точка на 2-м

этапе переходного процесса. Допустим, что при этом точка приходит в точку M_2 на границе Ox_1 . Продолжая далее таким же образом на всех этапах, мы придем опять на полуось Ox , но в некоторую точку $\dot{M}_0$ с координатой $\dot{x}_0$. Само собой понятно, что $\dot{x}_0$ при заданном фазовом портрете системы представляет некоторую функцию от x_0 . Если при любом значении x_0 оказывается, что $\dot{x}_0$ всегда меньше x_0 , мы имеем затухающий процесс. В свою очередь неравенство $\dot{x}_0 > x_0$ свидетельствует о расходящемся переходном процессе рассматриваемой системы. Если имеет место равенство $\dot{x}_0 = x_0$, то на фазовой плоскости мы получим предельный цикл.

Функциональная зависимость $\dot{x}_0 = f(x_0)$ проще всего устанавливается графическим способом. Рассмотренное преобразование представляет точечное преобразование полуоси Ox самой в себя. Графический способ состоит в том, что мы задаемся на фазовом портрете системы рядом точек M_0 начального отклонения и, пользуясь семейством фазовых траекторий в каждой области, находим, в конечном итоге, соответствующие точки $\dot{M}_0$. Принимая положение точек M_0 и $\dot{M}_0$ за координаты некоторой преобразующей точки, мы построим в избранной системе координат кривую, представляющую функцию $\dot{x}_0 = f(x_0)$ (фиг. 236). Примерная кривая $f(x_0)$ показана на фиг. 236, а.

Отрезок ON_0 представляет наименьшее начальное отклонение, при котором систему можно вывести из равновесия. Проведем через начало координат прямую $\dot{x} = x_0$, это будет биссектриса координатного угла. Здесь могут иметь место следующие случаи:

1. Прямая $\dot{x} = x_0$ не пересекает характеристику $\dot{x}_0 = f(x_0)$, причем кривая $f(x_0)$ расположена справа от прямой $\dot{x}_0 = x_0$.

В этом случае мы будем иметь затухающий переходный процесс.

В самом деле, преобразование точки x_0 в $\dot{x}_0$ на фазовом портрете системы может быть заменено движением преобразующей точки M_0 на фиг. 236 по отрезкам M_0M_1 и M_1n_1 , как показано стрелками. Дальнейшее преобразование значения x_0 сведется к движению по отрезкам n_1M_2 и M_1n_1 . Продолжая это преобразование, мы придем в зону равновесия системы. Где бы мы ни взяли начальную точку M_0 при данном положении кривой $\dot{x}_0 = f(x_0)$ и прямой $\dot{x}_0 = x_0$ мы всегда, в конечном итоге, придем на отрезок ON_0 .

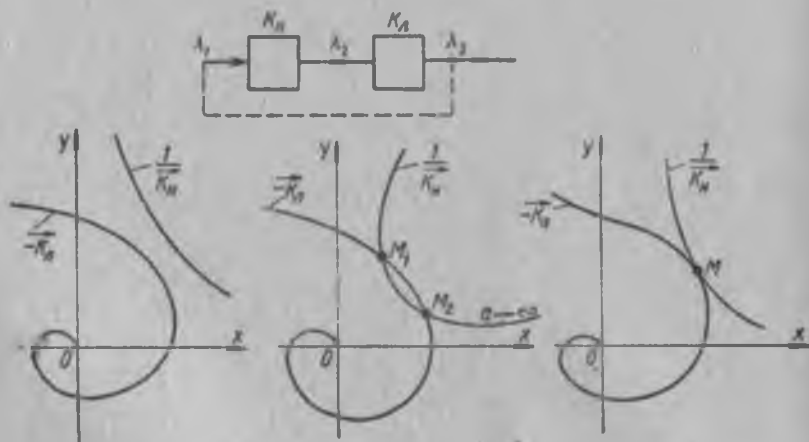
Если кривая $f(x_0)$ расположена слева от прямой $\dot{x}_0 = x_0$, как показано на фиг. 236, б, то процесс будет расходящимся.

2. Прямая $\dot{x}_0 = x_0$ пересекает характеристику $\dot{x}_0 = f(x_0)$ в одной точке. Здесь мы также встречаемся с двумя различными располо-

Более сложная зависимость может быть представлена одним из следующих видов:

$$\lambda = F(\varphi, \varphi'); \quad F(\lambda, \lambda' \dots) = a\varphi \text{ и другими.}$$

Остановимся на выражении вида $\lambda = F(\varphi, \varphi')$ и допустим, что входная функция звена $\varphi = a \sin \omega t$.



Фиг. 237. К методу гармонического баланса. Диаграммы $\bar{K}_A$ и $\frac{1}{\bar{K}_M}$.

Тогда

$$\lambda = F(a \sin \omega t, a \omega \cos \omega t). \quad (\text{XII-11})$$

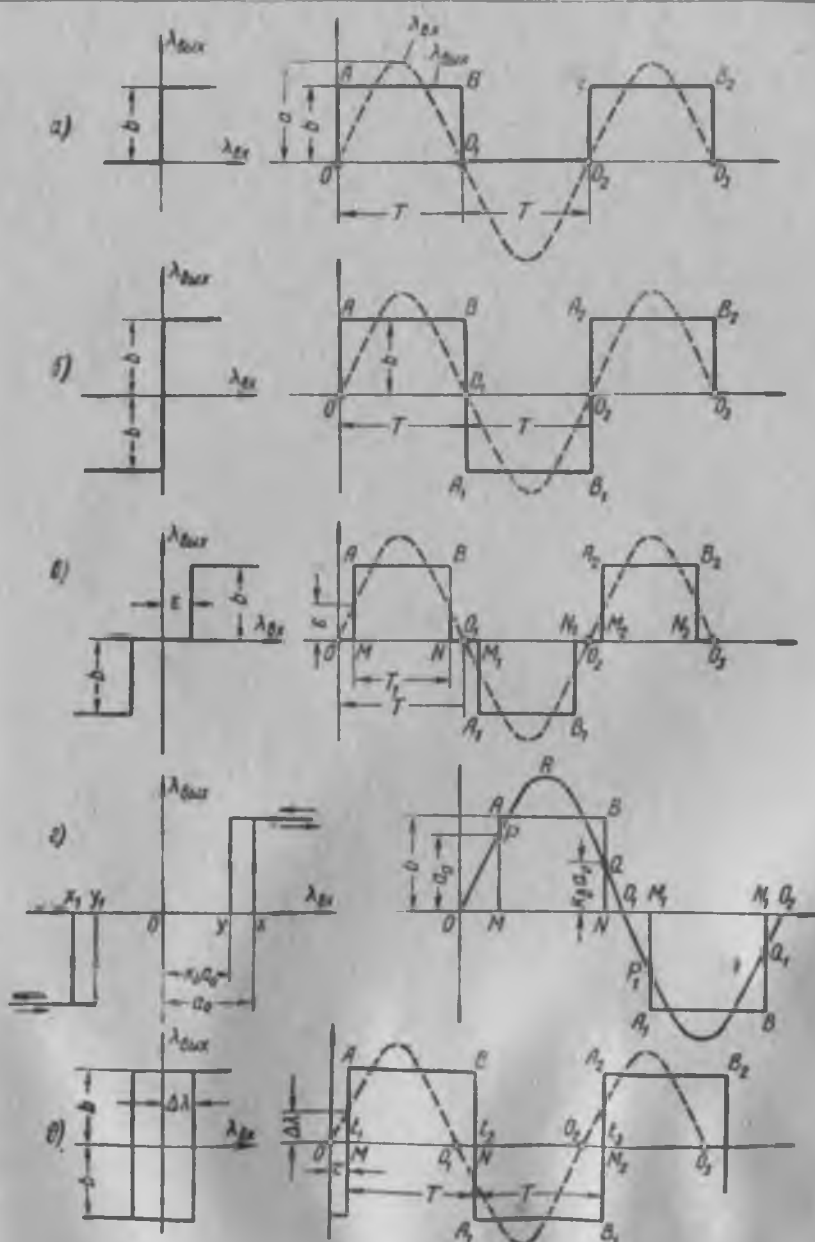
Разложим функцию в ряд Фурье, воспользовавшись формулами (VIII—75, 76).

$$\lambda = A_0 + B_1 \sin \omega t + A_1 \cos \omega t + \Sigma$$

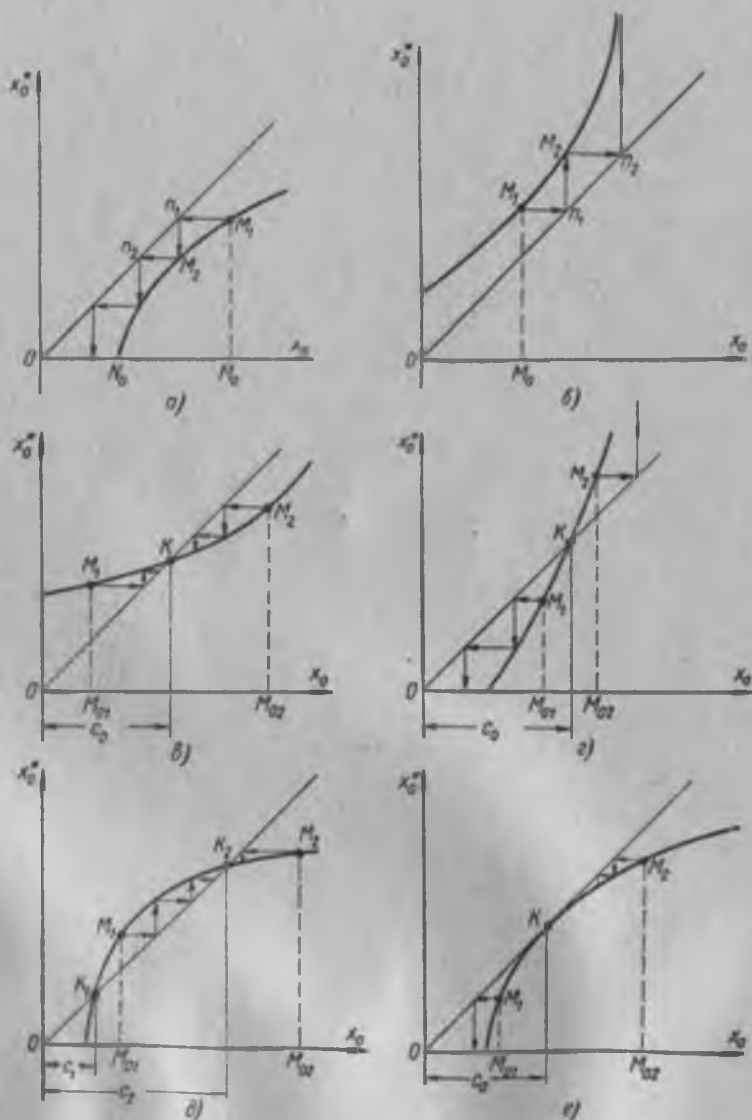
Σ — сумма членов с высшими гармониками.

Значения коэффициентов A_0 , A_1 и B_1 определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin u, a \omega \cos u) du, \\ B_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin u, a \omega \cos u) \sin u du, \\ A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin u, a \omega \cos u) \cos u du. \end{aligned} \right\} u = \omega t$$



Фиг. 238. Типовые характеристики реле.



Фиг. 236. Характеристики $x_0^* = f(x_0)$, к методу точечного преобразования.

жениями кривой $f(x_0)$ относительно прямой $\dot{x}_0 = x_0$. Эти положения показаны на фиг. 236, в и г.

В первом случае мы убеждаемся, что система имеет устойчивый предельный цикл, что свидетельствует о возможности возникновения в системе устойчивых автоколебаний. В самом деле при любом начальном отклонении $x_0 < c_0$ или $x_0 > c_0$ преобразующая точка M_0 движется к точке K с координатами $\dot{x}_0 = x_0 = c_0$.

Во втором случае (фиг. 236, г) также имеется предельный цикл, но он будет неустойчивым. При начальном отклонении $x_0 < c_0$ процесс устойчивый, движение изображающей точки направлено к зоне равновесия; при $x_0 > c_0$ изображающая точка удаляется в бесконечность.

3. Прямая $\dot{x}_0 = x_0$ и характеристика $\dot{x}_0 = f(x_0)$ имеют две точки пересечения (фиг. 236, д).

Здесь мы имеем два предельных цикла, из которых один, как легко убедиться, устойчивый, а другой — неустойчивый. При начальном отклонении $x_0 < c_1$ переходный процесс протекает устойчиво, система возвращается к положению равновесия. При $x_0 > c_1$ изображающая точка движется к точке K_2 ($\dot{x}_0 = x_0 = c_2$), в системе возникают устойчивые автоколебания, отвечающие этой точке.

4. Прямая $\dot{x}_0 = x_0$ и характеристика $\dot{x} = f(x_0)$ имеют одну точку касания (фиг. 236, е).

Этот случай можно рассматривать как частный случай предыдущего, когда точки K_1 и K_2 сливаются. Здесь мы имеем полуустойчивый предельный цикл. Пока начальные отклонения $x_0 < c_0$, изображающая точка движется к зоне равновесия, сам предельный цикл неустойчив. При $x_0 > c_0$ изображающая точка движется к точке K ($\dot{x}_0 = x_0 = c_0$) и предельный цикл имеет устойчивый характер.

в) Метод гармонического баланса (фиг. 237, 238)

Этот метод, как отмечалось выше, основан на замене нелинейной функции ее первой гармоникой в ряду Фурье. Применяя аналитический способ решения, мы можем получить приближенное дифференциальное уравнение нелинейного звена, которое легко интегрируется. Зависимость между выходной и входной величинами нелинейного звена может быть весьма разнообразна. Если эта зависимость описывается функцией без производных и интегралов, то она может быть представлена уравнением

$$\lambda = F(\tau),$$

где функциональная зависимость, выраженная символом F , может иметь форму как непрерывную, так и прерывистую, например, импульсную или релейного типа.

Допустим далее, что функция $\lambda = F(\varphi, \varphi')$ симметричная относительно оси времени. Тогда $A_0 = 0$.

Замечая, что $\sin \omega t = \frac{\varphi}{a}$ и $\cos \omega t = \frac{\varphi'}{a\omega}$ и отбрасывая члены с высшими гармониками, получим приближенное дифференциальное уравнение нелинейного звена в виде

$$\lambda \approx q(a, \omega) \varphi + q_1(a, \omega) \frac{\varphi'}{\omega}, \quad (\text{XII-12})$$

где $q(a, \omega) = \frac{B_1}{a}$ и $q_1(a, \omega) = \frac{A_1}{a}$.

Приведем без доказательства значения этих коэффициентов для некоторых реле, характеристики которых изображены на фиг. 238. Для характеристики по фиг. 238, б:

$$q = \frac{4b}{\pi a}; \quad q_1 = 0.$$

Для характеристики по фиг. 238, в:

$$q = \frac{4b}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{a^2}} \quad \text{при } a > \varepsilon,$$

$$\text{при } a < \varepsilon; \quad q = 0; \quad q_1 = 0.$$

Для характеристики по фиг. 238, г

$$q = \frac{2b}{\pi a} \left(\sqrt{1 - \frac{a_0^2}{a^2}} + \sqrt{1 - \frac{k_0^2 a_0^2}{a^2}} \right); \quad a_0 < a$$

$$q_1 = \frac{2k_0 a_0}{\pi a^2} (1 - k_0).$$

Для характеристики по фиг. 238, д:

$$q = \frac{2b}{\pi a} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta \lambda}{a}\right)^2}; \quad q_1 = \frac{4b \Delta \lambda}{\pi a^2}; \quad \Delta \lambda < a.$$

Таким образом, нелинейное уравнение релейного звена мы можем заменить приближенным линейным уравнением. Такая линеаризация называется гармонической в отличие от обычной, где нелинейная характеристика заменяется прямой линией с наклоном, не зависящим от течения входной величины.

Остановимся теперь кратко на графическом методе гармонического баланса, разработанном Гольдфарбом.

Рассмотрим разомкнутую систему, имеющую одно нелинейное звено. Объединим все остальные линейные звенья в одно эквивалентное звено «линейная часть» и представим систему состоящей из линейной части и одного нелинейного звена, как показано на фиг. 237.

Обозначим входную функцию нелинейного звена λ_1 и выходную λ_2 , соответственно входную и выходную функцию линейной части λ_2 и λ_3 . Допустим, что зависимость между λ_1 и λ_2 выражается некоторой нелинейной функцией $\lambda_2 = F(\lambda_1)$ и что входная функция λ_1 представляет простое синусоидальное колебание

$$\lambda_1 = a \sin \omega t.$$

Разлагая функцию $\lambda_2 = F(a \sin \omega t)$ в ряд Фурье и ограничиваясь первой гармоникой, можем написать

$$\lambda_2 \approx A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sin(\omega t + \theta)$$

при условии, что среднее значение λ_2 за период $= 0$.

Значения A_1 и B_1 будут даны выше

Введем комплексную форму для входной и выходной величин

$$\vec{\lambda}_1 = ae^{i\omega t}; \quad \vec{\lambda}_2 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} e^{i(\omega t + \theta)}.$$

Соответственно вещественные значения λ_1 и λ_2 будут

$$\lambda_1 = \text{Im}[ae^{i\omega t}] \quad \text{и} \quad \lambda_2 = \text{Im}[\sqrt{A_1^2 + B_1^2} e^{i(\omega t + \theta)}].$$

Отношение векторов $\frac{\vec{\lambda}_2}{\vec{\lambda}_1} = \vec{K}$ есть комплексный коэффициент

усиления звена. Обозначим его через $\vec{K}$. Положим, что $\vec{K} = g + ib$.

Тогда

$$\vec{\lambda}_2 = \vec{K} \vec{\lambda}_1. \quad (\text{XII-13})$$

$$\text{Im} \vec{\lambda}_2 = \text{Im}(\vec{K} \vec{\lambda}_1).$$

Отсюда

$$A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = \text{Im}[(g + ib)ae^{i\omega t}] = a(g \sin \omega t + b \cos \omega t)$$

$$g = \frac{B_1}{a}; \quad b = \frac{A_1}{a}. \quad (\text{XI-14})$$

Модуль комплексного коэффициента усиления $|\vec{K}| = K$, представляющий отношение амплитуды первой выходной гармоники к амплитуде входного синусоидального колебания, определится из выражения

$$|\vec{K}| = \sqrt{g^2 + b^2} = \frac{1}{a} \sqrt{A_1^2 + B_1^2}. \quad (\text{XII-15})$$

Фазу первой выходной гармоники относительно входа найдем из формулы

$$\theta = \arctg \frac{b}{g}.$$

Пользуясь комплексным коэффициентом усиления $\vec{K}$, уравнение нелинейного звена можем представить в виде

$$\vec{\lambda}_2 = \vec{\lambda}_1 \vec{K}_n, \quad (\text{XII-16})$$

где индекс n отмечает принадлежность к нелинейному звену.

Следует отметить, что если в функциональную зависимость нелинейного звена $\lambda_2 = F(\lambda_1)$ не входят производные или интегралы, то K_n является функцией амплитуды a входной синусоиды и не зависит от частоты колебаний ω .

Обратимся теперь к линейной части системы. Поскольку λ_2 есть гармоническая функция с частотой колебания ω , дифференциальное уравнение линейной части может быть написано в комплексной форме

$$\vec{\lambda}_2 = \vec{\lambda}_1 K_A(i\omega), \quad (\text{XII-17})$$

где $K_A(i\omega) = \vec{K}_A$ есть частотная функция линейной части системы. Модуль частотной функции определяет отношение амплитуд выходной и входной синусоид, а аргумент — фазу выходной относительно входной.

Поэтому частотную функцию мы можем рассматривать как комплексный коэффициент усиления линейной части системы.

Учитывая все сказанное, мы можем нашу разомкнутую систему представить двумя уравнениями в комплексной форме

$$\left. \begin{aligned} \vec{\lambda}_2 &= \vec{K}_n \vec{\lambda}_1, \\ \vec{\lambda}_2 &= \vec{K}_A \vec{\lambda}_1 \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII-18})$$

Допустим, что система замкнута и в ней возникли незатухающие колебания. Присоединяя к уравнениям (XII-18) уравнение $\vec{\lambda}_1 = -\vec{\lambda}_2$ и исключая из трех уравнений $\vec{\lambda}_2$ и $\vec{\lambda}_1$, приходим к уравнению

$$(\vec{K}_n \vec{K}_A + 1) \vec{\lambda}_2 = 0. \quad (\text{XII-19})$$

Так как в нашем случае $\vec{\lambda}_2$ не равно нулю, поскольку имеет место допущение, что в системе возникли незатухающие колебания, то должно быть

$$\vec{K}_n \vec{K}_A + 1 = 0. \quad (\text{XII-20})$$

Это есть условие возникновения автоколебаний в системе. Для определения значений частоты ω и амплитуды a автоколебаний, целесообразно применить графический способ решения уравнения (XII-20).

Для этого условие возникновения автоколебаний представим в виде $-\vec{K}_A = \frac{1}{\vec{K}_N}$.

Далее наносим на фигуру две кривых: 1) $-\vec{K}_A(i\omega)$ при разных значениях ω и 2) $\frac{1}{\vec{K}_N}$ при разных значениях амплитуды a входной синусоиды. Первая кривая строится одним из способов построения амплитудно-фазовой характеристики с учетом знака, а вторая по точкам.

На фиг. 237 изображены три случая взаимного расположения характеристик $-\vec{K}_A$ и $\frac{1}{\vec{K}_N}$.

Если эти характеристики не пересекаются, это значит, что в системе невозможны автоколебания.

Если характеристики касаются друг друга, система находится на границе устойчивости. Изменяя параметры нелинейного звена, можно устранить касание характеристик. Когда характеристики пересекаются в одной или нескольких точках, это свидетельствует о возможности возникновения в системе автоколебаний. Каждая точка пересечения характеристик позволяет определить значение частоты ω и амплитуды a автоколебаний. Частота ω находится по характеристике $-\vec{K}_A(i\omega)$, а амплитуда по характеристике $\frac{1}{\vec{K}_N}$. После того как определены точки возможных автоколебаний, остается проверить, какие из этих автоколебаний будут устойчивы. Мы не будем останавливаться на этом вопросе, только укажем, что для этого строится характеристика общего комплексного коэффициента усиления системы $\vec{K}_N \vec{K}_A$. Если эта характеристика охватывает точку $(-1,0)$, то автоколебания неустойчивы, если не охватывает — устойчивы.

2. РЕЛЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Система автоматического регулирования называется релейной, если она имеет в своем составе помимо линейных звеньев, по крайней мере, одно звено релейного типа. Релейное звено характеризуется тем, что оно преобразовывает сигнал, поступающий на вход звена, в управляющее воздействие, которое применяется не непрерывно, а скачком всякий раз, когда входной сигнал проходит через заданные значения. Релейное звено является также усилителем по мощности. Действие релейного звена зависит от его характеристики, под которой понимают функциональную зависимость выходной величины звена от входного сигнала, т. е. функцию $\lambda_{вых} = f(\lambda_{вх})$.

Чтобы уяснить действие релейного звена, представим, что на его вход поступает управляющий сигнал синусоидальной формы. При этом рассмотрим типовые характеристики реле, представленные на фиг. 238.

На фиг. 238, а дана характеристика идеального мгновенного реле одностороннего действия без зоны нечувствительности. Зависимость $\lambda_{вых} = f(\lambda_{вх})$ запишется

$$\lambda_{вых} = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda_{вх} < 0, \\ +b & \text{при } \lambda_{вх} > 0. \end{cases} \quad (\text{XII-21})$$

Выходное воздействие изобразится графически ломаной линией $OABO_1O_2$, где T — полупериод синусоидального входного сигнала. Отрицательные полувольты срезаны.

На фиг. 238, б изображены характеристики мгновенного поляризованного реле без зоны нечувствительности. При изменении знака управляющего сигнала $\lambda_{вх}$ меняется знак управляющего воздействия $\lambda_{вых}$. Математическая запись зависимости $\lambda_{вых} = f(\lambda_{вх})$ в этом случае будет

$$\lambda_{вых} = \begin{cases} -b & \text{при } \lambda_{вх} < 0 \\ +b & \text{при } \lambda_{вх} > 0. \end{cases} \quad (\text{XII-22})$$

Выходная величина звена здесь представляется ломаной линией $OABO_1A_1B_1O_2$ соответственно полувольтам входного сигнала.

На фиг. 238, в дана характеристика предыдущих реле, но с зоной нечувствительности 2ε . Здесь

$$\lambda_{вых} = \begin{cases} +b & \text{при } \lambda_{вх} > \varepsilon, \\ 0 & \text{при } |\lambda_{вх}| < \varepsilon \\ -b & \text{при } \lambda_{вх} < -\varepsilon. \end{cases} \quad (\text{XII-23})$$

Выходная функция изобразится теперь ломаной линией $OMABNM_1A_1B_1N_1O_2$, где T_1 всегда меньше T . Величина T_1 определяется по величине зоны нечувствительности:

$$T_1 = T \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\varepsilon}{\lambda_{вх \max}} \right).$$

Выше в главе IV отмечалось, что применяемые на практике реле обычно имеют коэффициент возврата $k_b < 1$. На фиг. 238, г приведена характеристика мгновенного поляризованного реле с уставкой $|\lambda_{вх}| = a_0$ и коэффициентом возврата меньше 1. Отношение отрезков $\frac{OY}{OX} = \frac{OY_1}{OX_1} = k_b$ есть коэффициент возврата реле. Работа реле при изменении сигнала $\lambda_{вх}$ по синусоиде показана на фигуре стрелками. Функциональная зависимость $\lambda_{вых} = f(\lambda_{вх})$ может быть записана в виде

$$\lambda_{вых} = \begin{cases} +b & \text{при } \lambda_{вх} > a_0 \\ b \operatorname{sign} \Delta & \text{при } k_b a_0 < |\lambda_{вх}| < a_0 \\ 0 & \text{при } |\lambda_{вх}| < k_b a_0 \\ -b & \text{при } \lambda_{вх} < -a_0. \end{cases} \quad (\text{XII-24})$$

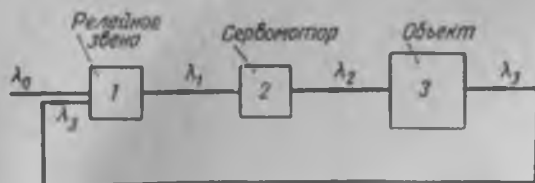
Здесь для сокращения записи введен условный множитель $\text{Sign } \Delta$, значение которого зависит от стадии работы реле. Пока абсолютная величина $|\lambda_{ex}| < k_b a_0$, значение $\text{Sign } \Delta = 0$. Когда реле находится в стадии возврата и абсолютная величина λ_{ex} удовлетворяет неравенству $k_b a_0 < |\lambda_{ex}| < a_0$, значение $\text{Sign } \Delta = +1$, если при этом $\lambda_{ex} > 0$ и $\text{Sign } \Delta = -1$, если $\lambda_{ex} < 0$. Характеристика реле имеет вид петли гистерезиса. Выходная функция представляет ломаную линию $OMABNO_1M_1A_1B_1N_1O_2$. Ось прямоугольника $MABN$ здесь не совпадает с осью полуволны ORO_1 входного сигнала. Этот сдвиг между осями будет тем больше, чем меньше коэффициент возврата.

Если реле имеет ощутимое время срабатывания, которым нельзя пренебречь, то выходное воздействие реле запаздывает относительно входного сигнала. На фиг. 238, *д* представлена характеристика поларизованного реле, у которого время срабатывания равно τ . Отрезок $\Delta\lambda$ есть ордината входного сигнала, отвечающая времени $t = \tau$. Здесь характеристика реле также имеет вид петли гистерезиса. Выходная функция представляется ломаной линией.

Приведенные выше характеристики релейных звеньев не исчерпывают всех встречающихся видов релейных характеристик. Чаще других в системах автоматического регулирования встречаются реле с характеристиками, показанными на фиг. 238, *г* или 238, *д*.

а) Применение метода фазовых траекторий для анализа релейных систем

Как было отмечено выше, релейные системы отличаются от непрерывных линейных систем нелинейностью, которую вносит



Фиг. 239. Структурная схема релейной системы.

релейный элемент. Релейные системы также существенно отличаются от систем импульсного регулирования, где период чередования регулирующих импульсов имеет постоянное заданное значение, поскольку он устанавливается специальным механизмом (падающей дужкой и др.). Этот период не зависит от параметров объектов регулирования и регулирующей цепи.

Ниже покажем применение метода фазовых траекторий к анализу автоматического регулирования с релейным звеном.

Рассмотрим систему, схема которой изображена на фиг. 239 и состоит из релейного звена 1, сервомотора 2 и объекта регулирования 3.

Предположим, что релейное звено имеет характеристику, приведенную на фиг. 238, б.

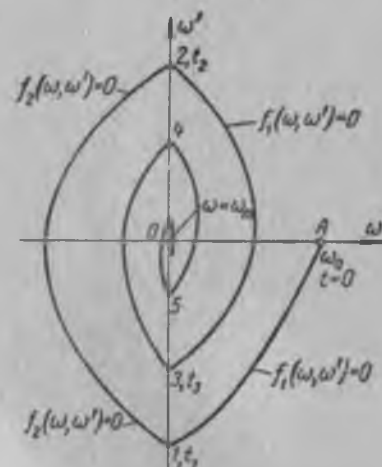
Для наглядности будем считать, что объектом регулирования является силовой двигатель, сервомотором электродвигатель с постоянной скоростью и регулируемой величиной — угловая скорость силового двигателя.

Пусть уставка скорости будет ω_m . Допустим, что в некоторый момент времени вследствие снятия нагрузки скорость поднялась до значения $\omega > \omega_m$. Релейное

звено немедленно включит сервомотор, который приведет в действие регулирующий орган. Примем условно, что регулирующий эффект автоматического устройства пропорционален перемещению регулирующего органа,

т. е. $\int v dt$, где v — скорость пере-

мещения. При $v = \text{const}$ этот эффект будет пропорционален времени. Вследствие регулирующего эффекта через некоторый промежуток времени в момент t_1 скорость ω сравняется со скоростью ω_m и будет продолжать уменьшаться дальше. Когда скорость уменьшится до значения, отвечающего разврату реле, в этот момент релейное звено переключает сервомотор на другое направление и процесс повторяется снова.



Фиг. 240. Изображение движения релейной системы на фазовой плоскости.

Выберем на фазовой плоскости оси координат (ω, ω') с началом в точке O . Пусть начальный момент процесса регулирования ($t = 0$) характеризуется точкой A ($\omega = \omega_0$; $\omega' = 0$). Поскольку релейное звено в нашем случае имеет два рабочих положения, которым отвечает движение регулирующего органа с постоянной скоростью в противоположных направлениях, уравнения фазовой траектории для этих положений релейного звена будут, вообще говоря, различны. Допустим, что они известны. Обозначим их через $f_1(\omega, \omega') = 0$ и $f_2(\omega, \omega') = 0$. Обратимся к фиг. 240.

Уравнение первого участка фазовой траектории, по которой должна двигаться изображающая точка, будет $f_1(\omega, \omega') = 0$. Начальное положение изображающей точки определяется координатами $\omega = \omega_0$; $\omega' = 0$. Подставляя в уравнение $f_1(\omega, \omega') = 0$ значение $\omega = \omega_m$, определим координаты $\omega = \omega_m$ и $\omega' = \omega'_1$, конечной точки I первого участка фазовой траектории. В этой точке происходит переключение релейного звена, фазовая траектория меняет свое уравнение на другое $f_2(\omega, \omega') = 0$. Участок траектории

1 — 2 имеет общую точку 1 с участком А-1, поэтому уравнение $f_2(\omega, \omega') = 0$ должно иметь начальные условия, совпадающие с координатами точки 1, т. е. $\omega = \omega_m$ и $\omega' = \omega'_1$. Подставляя в уравнение $f_2(\omega, \omega') = 0$; $\omega = \omega_m$ найдем значение $\omega' = \omega'_2$ для конечной точки 2 второго участка фазовой траектории. В этой точке происходит очередное переключение релейного звена и смена уравнения фазовой траектории.

Продолжаем построение переходного процесса указанным образом до тех пор, пока изображающая точка не попадает в зону нечувствительности. Этим построение заканчивается.

До сих пор имелась ввиду простейшая характеристика релейного звена. Представим себе теперь, что релейное звено имеет коэффициент возврата $k_0 < 1$, характеристика реле соответствует показанной на фиг. 238, ε и уставка реле $\pm a_0$. Примем для упрощения, что коэффициент возврата одинаков для обоих положений релейного звена. В этом случае релейное звено устанавливает три различных состояния сервомотора: ход вперед, ход назад и отсутствие движения. Этому в общем случае должны отвечать три различных уравнения семейств фазовых траекторий: 1) сервомотор неподвижен — $f_0(\omega, \omega') = 0$; 2) прямой ход сервомотора — $f_1(\omega, \omega')$ и 3) обратный ход сервомотора

$$f_2(\omega, \omega') = 0.$$

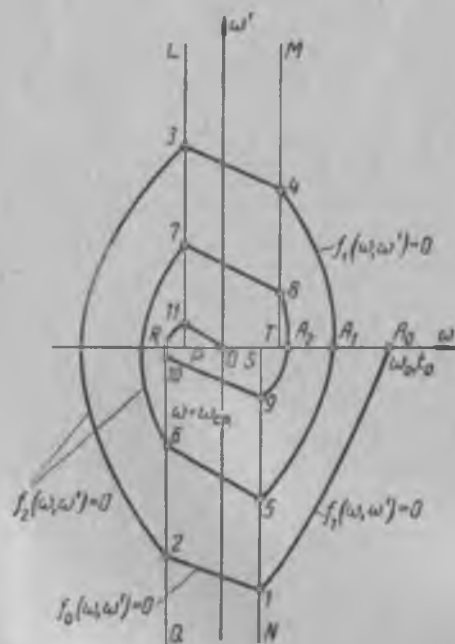
При этом мы будем иметь четыре этапа переходных процессов. Первый этап отвечает включению реле и движению сервомотора вперед до момента отпущения реле. При втором этапе сервомотор неподвижен, но система продолжает двигаться, уменьшая скорость до срабатывания реле на обратный ход. Третий этап — это обратное движение сервомотора и увеличение скорости силового двигателя до отпущения реле. При последнем этапе сервомотор неподвижен, но система продолжает двигаться, увеличивая скорость до срабатывания реле на прямой ход.

На фиг. 241 показано построение переходного процесса в этом случае.

Первый участок фазовой траектории, начинаясь в точке $A_0(\omega = \omega_0, \omega' = 0)$ в начальный момент времени t_0 , продолжается до точки 1 прямой SN, отвечающей отпущению реле при прямом ходе сервомотора. В этот момент реле отпускает контакты и сервомотор останавливается, фазовая траектория меняет уравнение на $f_0(\omega, \omega') = 0$, которое описывает поведение системы при неподвижном сервомоторе. Начальные условия фазовой траектории 1 — 2 определяются координатами точки 1. Это позволяет из всего семейства фазовых траекторий, имеющих уравнение $f_0(\omega, \omega') = 0$ выбрать ту, которая проходит через точку 1.

Фазовая траектория 1 — 2 продолжается до встречи с прямой, отвечающей срабатыванию реле при обратном ходе сервомотора.

В точке 2 срабатывает релейное звено, сервомотор получает обратное движение и фазовая траектория меняет уравнение на $f_2(\omega, \omega') = 0$ с начальными условиями точки 2. Движение по фазовой траектории 2—3 продолжается до встречи с прямой LP , отвечающей отпусканнию реле при обратном ходе сервомотора. В точке 3 релейное звено отключает сервомотор, движение системы будет продолжаться под действием сил инерции и перерегулирования регулирующего органа. Уравнение фазовой траектории будет $f_0(\omega, \omega') = 0$, но с начальными условиями точки 3. Продолжая аналогичным образом, мы построим картину переходного процесса, из которой можно определить все интересующие нас показатели.



Фиг. 241. Изображение движения релейной системы на фазовой плоскости с учетом коэффициента возврата реле.

Если при обходе вокруг зоны равновесия точки A_0 , A_1 , A_2 пересечения фазовых траекторий с осью ω будет удаляться от начала координат, то переходный процесс будет расходящимся. Необходимо изменить параметры релейного звена, чтобы получить устойчивый процесс. Если после первого обхода точки A_1 и A_0 совпадут, то заключаем, что в системе возможно возникновение автоколебаний. Исследование устойчивости этих автоколебаний производится указанным выше способом.

Приведем для иллюстрации сказанного выше пример.

Пример. Для поддержания постоянной температуры воды в теплообменнике емкостью V м³ и поверхностью охлаждения S м² применено двухпозиционное релейное регулирование. Подогрев воды производится реостатом, который на первой позиции релейного элемента имеет сопротивление R_1 ом, а на второй R_2 ом, причем $R_1 < R_2$. Реостат подключается релейным элементом на постоянное напряжение E вольт.

Коэффициент теплоотдачи стенок бака χ ккал/м²·час·град

Теплоемкость воды $c = 1$.

Определить пределы колебаний температуры в установившемся режиме и частоту переключений реле.

Решение. Уравнение баланса тепла при повышении температуры θ воды на $d\theta$ за время dt .

$$S\gamma(\theta - \theta_m) dt + V1000d\theta = W860dt.$$

Здесь θ_m — температура окружающего пространства;

W — мощность, расходуемая на нагревание в кат.

Для упрощения положим $\theta_m = 0$.

$$\frac{V1000}{S_v} \frac{d\theta}{dt} + \theta = \frac{W860}{S_v}.$$

Обозначим $\frac{V1000}{S_v} = T$ и $\frac{W860}{S_v} = q$.

Тогда наше уравнение примет вид $T \frac{d\theta}{dt} + \theta = q$.

Величина q будет иметь разные значения, смотря по тому, на какую позицию включен релейный элемент:

для первой позиции

$$q = q_1 = \frac{W860}{S_v} = \frac{E^2 860}{R_1 S_v 1000} = 0,86 \frac{E^2}{R_1 S_v};$$

для второй позиции

$$q = q_2 = 0,86 \frac{E^2}{R_2 S_v}$$

Решение уравнения $T\theta' + \theta = q$ будет

$$\theta = q + Ae^{pt}, \text{ где } p = -\frac{1}{T},$$

а коэффициент A определяется из начальных условий.

Уравнение фазовой траектории для первой позиции релейного звена $T\theta' + \theta = q_1$ аналогично для второй позиции,

$$T\theta' + \theta = q_2.$$

Установившаяся температура, если реле будет находиться неопределенно долгое время на первой позиции,

$$\theta_{1v} = q_1 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Аналогично для второй позиции

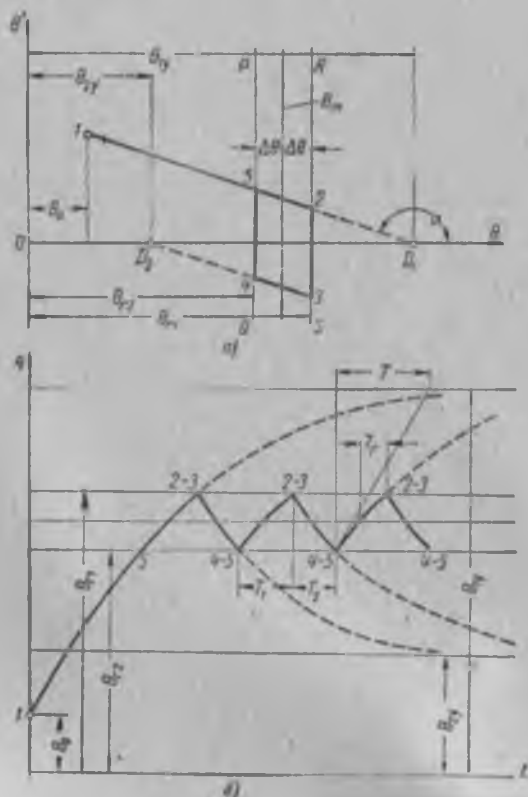
$$\theta_{2v} = q_2 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Начнем построение фазовой траектории с произвольной заданной температуры θ_0 (фиг. 242). Этому значению при $t = 0$ должно отвечать значение $\theta' = \frac{q - \theta_0}{T}$.

Пусть на фиг. 242, а точка I отвечает началу переходного процесса. Уравнения фазовой траектории для первой и второй позиций при любых начальных условиях представляют параллельные прямые $1D_1$ и $3D_2$, проходящие соответственно через точки D_1 и D_2 , определяемые абсциссами θ_{1v} и θ_{2v} . Угол наклона этих прямых к оси θ находится по тангенсу $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{T}$. Примем далее, что

реле с учетом времени срабатывания переключается мгновенно на первую позицию, если θ становится меньше θ_{r1} , и переключается на вторую, если $\theta > \theta_{r1}$. Проведем прямые PQ и RS отвечающие этим предельным значениям. Переходный процесс, начавшись в точке I , будет протекать на фазовой плоско-

сти по прямой $1D_1$, имеющей уравнение $T\theta' + \theta = q_1$ до встречи с прямой RS в точке 2. Здесь происходит переключение реле на вторую позицию и смена уравнений фазовой траектории. Теперь уравнение будет $T\theta' + \theta = q_2$. Начальные условия для этой прямой определяются абсциссой точки 2. Далее переход-



Фиг. 242. Фазовая траектория и диаграмма $\theta = \theta(t)$ к примеру.

ный процесс на фазовой плоскости протекает по прямой $3D_2$ до встречи с прямой PQ в точке 4. Здесь мы имеем переключение реле опять на первую позицию и смену фазовых траекторий. Уравнение фазовой траектории теперь будет $T\theta' + \theta = q_1$ с начальной абсциссой точки 4. Нетрудно видеть, что установившийся процесс на фазовой плоскости будет изображен параллелограммом 2345. Пользуясь уравнениями фазовых траекторий, мы можем без труда определить показатели процесса в точках 2, 3, 4, и 5.

На фиг. 242, б внизу изображен тот же процесс, но во времени.

Начальная температура воды в баке при $t = 0$ $\theta = \theta_0$. Участок кривой от точки 1 до точки 2—3 строится по уравнению

$$\theta = q_1 + A_1 e^{-\frac{t}{T}}.$$

где A_1 — определяется из условия $\theta = \theta_0$ при $t = 0$

Участок от точки 2—3 до точки 4—5 имеет уравнение

$$\theta = q_2 + A_2 e^{-\frac{t}{T}},$$

если счет времени начать от момента 2—3. Коэффициент A_2 определится из условия $\theta = \theta_{r1}$ при $t = 0$.

Аналогично участок от точки 4—5 до точки 2—3 будет иметь уравнение $\theta = q_1 + A_2 e^{-\frac{t}{T}}$ при условии, что отсчет времени установлен от точки 4—5. Коэффициент A_2 находится из начального условия $\theta = \theta_{r2}$. Продолжая далее построение процесса таким же образом, приходим к выводу, что при установившемся режиме температура в баке будет совершать периодические колебания, частота которых определяется параметрами релейного элемента и объекта регулирования.

Полный период определяется суммой $T_0 = T_1 + T_2$ (см. фиг. 242, б), где T_1 и T_2 — отрезки времени работы реле на первой и второй позициях.

Отрезки T_1 и T_2 вычисляются из уравнений

$$\theta_{r1} = q_1 + A_n e^{-\frac{T_1}{T}};$$

$$\theta_{r2} = q_2 + A_{n+1} e^{-\frac{T_2}{T}}; \quad \theta_{r2} = q_1 + A_n$$

$$e^{-\frac{T_2}{T}} = \frac{q_1 - \theta_{r1}}{q_1 - \theta_{r2}}; \quad \theta_{r2} = q_2 + A_{n+1}.$$

Аналогично

$$e^{-\frac{T_1}{T}} = \frac{\theta_{r2} - q_2}{\theta_{r1} - q_2}.$$

Если релейный элемент симметричен относительно своих позиций, то можно положить, что:

$$\theta_{r1} = \theta_m + \Delta\theta; \quad \theta_{r2} = \theta_m - \Delta\theta;$$

где

$$\theta_m = \frac{\theta_{r1} + \theta_{r2}}{2}.$$

Подставляя эти значения в формулы, определяющие: $e^{-\frac{T_1}{T}}$ и $e^{-\frac{T_2}{T}}$, получим

$$q_1 - \theta_{r1} = q_1 - \theta_m - \Delta\theta; \quad \theta_{r2} - q_2 = \theta_m - q_2 - \Delta\theta;$$

$$q_1 - \theta_{r2} = q_1 - \theta_m + \Delta\theta; \quad \theta_{r1} - q_2 = \theta_m - q_2 + \Delta\theta.$$

Тогда

$$\theta_s = \frac{\theta_{r1} - \theta_{r2}}{2} = \frac{1}{2} (q_1 - q_2)$$

$$\theta_m = \frac{1}{2} (q_1 + q_2).$$

Отсюда

$$\frac{\theta_{r2} - q_2}{\theta_{r1} - q_2} = \frac{q_1 - \theta_{r1}}{q_1 - \theta_{r2}}; \quad T_1 = T_0; \quad T_0 = 2T_1$$

$$e^{-\frac{T_1}{T}} = \frac{\theta_s - \Delta\theta}{\theta_s + \Delta\theta} = \frac{1 - \frac{\Delta\theta}{\theta_s}}{1 + \frac{\Delta\theta}{\theta_s}}.$$

$$T_1 = T \ln \frac{1 + \frac{\Delta\theta}{\theta_s}}{1 - \frac{\Delta\theta}{\theta_s}} = 2T \operatorname{Arth} \frac{\Delta\theta}{\theta_s}; \quad T_0 = 4T \operatorname{Arth} \frac{\Delta\theta}{\theta_s}.$$

Число переключений релейного элемента в единицу времени

$$i = \frac{2}{T_0} = \frac{1}{2T \operatorname{Arth} \frac{\Delta\theta}{\theta_s}}.$$

Применим полученные формулы для решения числового примера.

Числовой пример

$$S = 20 \text{ м}^2; \quad V = 4 \text{ м}^3; \quad \gamma = 240 \text{ ккал/м}^3 \cdot \text{час} \cdot \text{град}.$$

$$E = 380 \text{ в}; \quad R_1 = 0.26 \text{ ома}; \quad R_2 = 0.325 \text{ ома}; \quad \Delta\theta = 0.02\theta_m$$

Имеем

$$q_1 = 0.86 \frac{E^2}{R_1 S \gamma} = 0.86 \frac{380^2}{0.26 \cdot 20 \cdot 240} = 99.5;$$

$$q_2 = 0.86 \frac{E^2}{R_2 S \gamma} = 79.5;$$

$$\theta_m = \frac{1}{2} (q_1 + q_2) = 89.5.$$

$$\Delta\theta = 0.02\theta_m \approx 1.8;$$

$$\theta_s = \frac{1}{2} (q_1 - q_2) = 10;$$

$$T = \frac{V1000}{S\gamma} = 0.633;$$

$$\bar{i} = \frac{1}{2 \cdot 0.633 \operatorname{Arth} 1.8} = 3.3 \text{ в час}.$$

Переключения следуют через каждые 18,2 минуты.

Установившаяся температура θ_m в баке не выходит из пределов $89.5 - 1.8 < \theta_m < 89.5 + 1.8$; $87.7^\circ < \theta_m < 91.3^\circ$.

Приведенный пример является типичным для случая устойчивых автоколебаний в релейной системе. Если при этом колебания регулируемой величины происходят в пределах, допускаемых условиями технологического процесса, то систему автоматического регулирования можно считать пригодной. В противном случае необходимо менять параметры релейного звена.

б) Устойчивость и автоколебания релейных систем

Выше были уже изложены основные методы, которыми можно пользоваться для анализа нелинейных систем. Как мы видели, релейное звено в ряде случаев, особенно при позиционном регулировании, может явиться источником незатухающих устойчивых автоколебаний в системе.

При исследовании устойчивости релейных систем можно пользоваться различными методами, но в большинстве случаев быстрее достигают результатов, применяя гармоническую линеаризацию релейного звена и в дальнейшем используя критерии устойчивости линейных систем.

Другой способ сводится к применению специальных критериев устойчивости для релейных систем.

Способ гармонической линеаризации. Допустим, что система релейного регулирования, как обычно, состоит из объекта регулирования, чувствительного элемента, релейного звена и сервомотора с регулирующим органом.

Положим, что уравнения отдельных звеньев системы будут: чувствительного элемента

$$\lambda_2 = u_1 \lambda_1,$$

релейного звена после произведенной гармонической линеаризации

$$\lambda_3 = \left(q + q_1 \frac{p}{\omega} \right) \lambda_2,$$

сервомотора

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) \lambda_4 = u_3 \lambda_3,$$

объекта регулирования

$$(T_0 p + 1) \lambda_1 = -u_0 \lambda_4.$$

Значения коэффициентов q и q_1 даются формулами (XII-12). Результирующее уравнение относительно регулируемой величины λ_1 будет

$$\left[(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) (T_0 p + 1) + u_0 u_1 u_3 \left(q + q_1 \frac{p}{\omega} \right) \right] \lambda_1 = 0.$$

Характеристическое уравнение системы

$$T_2^2 T_0 p^3 + p^2 (T_2^2 + T_0 T_1) + p \left(T_1 + T_0 + \frac{u_0 u_1 u_2 q_1}{\omega} \right) + 1 + u_0 u_1 u_2 q = 0. \quad (\text{XII-25})$$

Критерий Гурвица для линейной системы 3-го порядка требует соблюдения неравенства

$$\left. \begin{aligned} (T_2^2 + T_0 T_1) \left(T_1 + T_0 + \frac{u_0 u_1 u_2 q_1}{\omega} \right) &> T_2^2 T_0 (1 + u_0 u_1 u_2 q) \\ \left(T_1 + \frac{u_0 u_1 u_2 q_1}{\omega} \right) (T_2^2 + T_0 T_1) + T_0^2 T_1 &> u_0 u_1 u_2 q T_2^2 T_0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII-26})$$

Это есть условие устойчивости рассматриваемой релейной системы. Подбирая надлежащим образом параметры q и q_1 релейного звена, а также T_2 и T_1 и коэффициенты усиления линейной части, всегда можно обеспечить устойчивость системы при заданных параметрах T_0 и u_0 объекта регулирования.

При $q_1 = 0$ неравенство (XII-26) упрощается и принимает вид

$$T_1 (T_2^2 + T_0 T_1 + T_0^2) > u_0 u_1 u_2 q. \quad (\text{XII-27})$$

Критерии устойчивости релейных систем. Наиболее подробно теория релейных систем автоматического регулирования разработана Я. З. Цыпкиным*. В отношении устойчивости релейных систем он установил три равноценных критерия. Выполнение любого из них обеспечивает устойчивость положения равновесия системы. Эти критерии приводятся ниже без доказательства. При этом предположено, что все звенья системы, кроме одного релейного звена, линейны. В линейную часть входят также обратные связи системы. Как показал Цыпкин, задача исследования устойчивости действительной релейной системы сводится к исследованию так называемой предельной системы. Эта система получается из линейной части действительной релейной системы, если ее коэффициент усиления неограниченно возрастает.

Приводим ниже критерии устойчивости релейных систем, разработанные Я. З. Цыпкиным:

1. Критерий устойчивости по передаточной функции линейной части. Передаточная функция линейной части системы $K(p)$:

а) имеет все нули (корни числителя) с отрицательной вещественной частью;

б) имеет в точке $p = \infty$ нуль не выше второй кратности, т. е. разность степеней знаменателя и числителя $n - m < 2$;

* См. книгу Я. З. Цыпкина, Теория релейных систем автоматического регулирования, ГНТТЛ, 1955.

в) коэффициенты d_0 и d_1 при разложении $K(p)$ в ряд по степеням $\frac{1}{p}$

$$K(p) = \left(d_0 + \frac{d_1}{p} + \frac{d_2}{p^2} \cdot \dots \right) \frac{1}{p^{n-m}}$$

удовлетворяют неравенствам

$$d_0 > 0 \text{ при } n - m = 1,$$

$$d_0 > 0 \text{ и } d_1 < 0 \text{ при } n - m = 2.$$

2. Критерий устойчивости по предельной системе и частотной характеристике линейной части. Предельная система устойчива и частотная характеристика при $\omega \rightarrow \infty$ расположена в нижней полуплоскости, причем ее вид подобен виду частотной характеристики элемента, описываемого уравнением не выше 2-го порядка.

3. Критерий устойчивости по предельной системе и временной характеристике $\lambda(t)$. Предельная система устойчива и временная характеристика обладает таким свойством, что

$$\lambda(0) = 0 \quad \lambda'(0) > 0$$

или

$$\lambda(0) = \lambda'(0) = 0 \quad \lambda''(0) > 0 \text{ и } \lambda'''(0) < 0.$$

Устойчивость предельной системы может быть исследована любым из способов, применяемых для линейных систем.

Автоколебания. Определение амплитуды и частоты автоколебаний релейных систем или параметров, при которых эти колебания могут иметь место, производится в практических случаях приближенным способом. Этот способ основывается на том, что незатухающие колебания переходного процесса происходят на границе устойчивости, разделяющей области затухающих и расходящихся процессов. Принимается с некоторым приближением, что автоколебания имеют синусоидальную форму $\lambda = a \sin \omega t$.

Известно, что на границе устойчивости характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни.

Рассмотрим для примера характеристическое уравнение системы, приведенное выше (XII-25), и положим в нем для упрощения $q_1 = 0$.

Тогда

$$T_2^2 T_0 p^3 + p^2 (T_2^2 + T_0 T_1) + p (T_1 + T_0) + 1 + u_0 \mu_1 u_2 q = 0.$$

Подставляем значение $p = i\omega$

$$-T_2^2 T_0 i \omega^3 - \omega^2 (T_2^2 + T_0 T_1) + i \omega (T_1 + T_0) + 1 + u_0 \mu_1 u_2 q = 0.$$

Деля вещественную и мнимую части и приравнивая их по отдельности к нулю, приходим к двум уравнениям

$$T_2^2 T_0 \omega^2 = T_1 + T_0; \dots\dots (XII-28)$$

$$\omega^2 = \frac{T_1 + T_0}{T_2^2 T_0}$$

$$1 + u_0 u_1 u_2 q = \frac{(T_1 + T_0)(T_2^2 + T_0 T_1)}{T_2^2 T_0}$$

или

$$q = \frac{T_1 (T_2^2 + T_0 T_1 + T_0^2)}{u_0 u_1 u_2}.$$

Из этих уравнений мы определяем ω — частоту автоколебаний и параметр релейного звена q , который, как мы видели выше, есть функция амплитуды a .

3. ИМПУЛЬСНЫЕ ИЛИ ПРЕРЫВИСТЫЕ СИСТЕМЫ

Импульсной системой называется такая система автоматического регулирования, которая, кроме линейных звеньев, описываемых линейными дифференциальными уравнениями, содержит одно или несколько импульсных звеньев.

Импульсное звено характеризуется тем, что воздействие, получаемое им на входе, преобразуется в импульсы, имеющие постоянные или переменные амплитуды и следующие друг за другом через промежутки времени, которые могут быть одинаковыми или изменяться по какому-либо закону. В дальнейшем мы будем рассматривать импульсные системы с одним импульсным звеном, как наиболее часто применяемые на практике.

Укажем на следующие основные типы импульсных звеньев.

1. Величина выходного импульса пропорциональна отклонению измерительного элемента с соблюдением знака, но длительность импульса остается постоянной.

2. Длительность импульса пропорциональна отклонению чувствительного элемента, но величина импульса остается постоянной с соблюдением знака отклонения.

3. Импульсное звено реагирует только на знак отклонения чувствительного элемента и посылает через равные промежутки времени выходные импульсы постоянного значения, но разного знака, смотря по направлению отклонения регулируемого параметра.

В зависимости от конструктивного устройства импульсного звена величина выходного импульса может быть равной или пропорциональной значению входного воздействия в начальный момент импульса и оставаться постоянной в течение всей длительности этого

импульса. Такое звено аналогично падающей дужке. В другом случае, выходной импульс в течение всего времени следует за изменением входного воздействия. Здесь мы имеем звено типа ключа. Звено работает так, что для каждого импульса как бы вырезается определенный участок из кривой входного воздействия. Величина импульса будет пропорциональна среднему значению воздействия на входе за отрезок времени, равный длительности импульса.

Наиболее частое применение имеет импульсное звено первого типа. На фиг. 243 показана схема этого звена в виде падающей дужки.

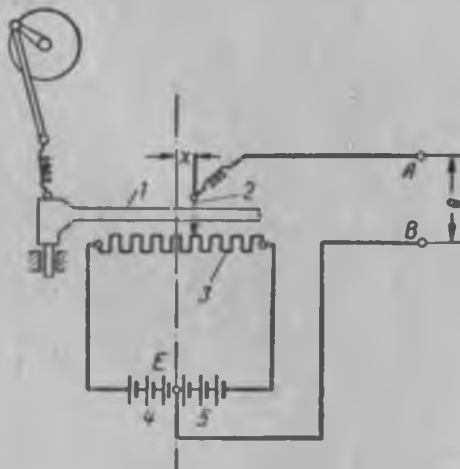
Как следует из схемы, падающая дужка 1 совершает периодическое движение и прижимает во время рабочей части цикла указатель 2 на постоянный потенциометр 3, включенному в цепь двух батарей 4 и 5, как показано на схеме. Указатель 2 связан со стрелкой гальванометра и его положение на потенциометре зависит от отклонения чувствительного элемента.

При нулевом отклонении указатель 2 занимает среднее положение на потенциометре. Выходной величиной импульсного элемента является напряжение на зажимах А и Б. Здесь мы будем иметь импульсы напряжения постоянной длительности, но разные по величине и знаку. Напряжение на зажимах А и Б будет пропорционально отклонению указателя 2 от среднего положения. Напряжение на зажимах А и Б будет появляться только в моменты прижима указателя 2 падающей дужкой.

Импульсное звено, показанное на фиг. 243, является одновременно усилителем по мощности, благодаря тому, что энергия батарей поступает на выход звена. Выходная мощность звена может во много раз превышать мощность на входе.

В дальнейшем изложении будем придерживаться импульсного звена, выполненного применительно к первому типу. Поступающую на вход непрерывную функцию $x(t)$ импульсное звено преобразовывает в ряд импульсов на выходе, следующих друг за другом через определенные интервалы времени, как показано на фиг. 244.

Высоты импульсов пропорциональны значениям входной функции в моменты появления импульсов. Величина T , определяющая



Фиг. 243. Схема пропорционального импульсного звена.

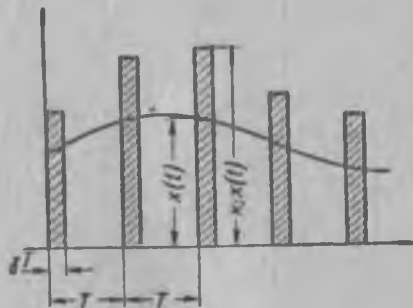
время между моментами возникновения двух смежных импульсов, называется периодом чередования.

Длительность импульса принято обозначать γT , где γ — коэффициент, не превышающий 1

$$0 < \gamma < 1. \quad (\text{XII-29})$$

Этот коэффициент иногда называют скважностью импульсного звена.

Отношение высоты импульса к соответствующей ординате входной функции представляет коэффициент усиления импульсного звена.



Фиг. 244. Схема преобразования непрерывной входной функции в импульсную.

Обозначим его k . Если импульсы следуют непрерывно друг за другом и коэффициент $\gamma = 1$, импульсное звено превращается в обычное усилительное звено с коэффициентом усиления k . Выходная функция при этом будет непрерывной. При малом значении γ , близком к нулю, импульсное звено превращается в прерыватель, который замыкает цепь регулирования периодически на некоторый короткий промежуток времени.

Такие прерыватели применяются в схемах регулирования с искус-

ственной вибрацией для ослабления вредного влияния сил трения, люфтов, гистерезиса, а также в схемах вибрационных регуляторов.

Регулирующие цепи, имеющие в составе своих звеньев импульсное звено, будем называть импульсными цепями.

В настоящее время импульсные цепи применяются широко в ряде областей техники: в телевидении, в телеграфии, при преобразовании постоянного тока в переменный, в селекторных сервомеханизмах, в системах прерывистого регулирования, в регуляторах вибрационного типа и других.

а) Анализ движения импульсных систем автоматического регулирования

Импульсные системы автоматического регулирования являются так же, как и релейные, нелинейными системами, но имеют следующие особенности. Действие чувствительного элемента на систему передается не непрерывно, а отдельными импульсами, следующими друг за другом через некоторые промежутки времени обычно равные. Величина импульса пропорциональна отклонению чувствительного элемента (импульсное звено 1-го рода), или постоянна (импульсное звено 2-го рода). Длительность импульса постоянна (импульсное звено 1-го рода) или пропорциональна отклонению чувствительного элемента (импульсное звено 2-го рода).

В дальнейшем будем рассматривать так называемые линейные импульсные системы, состоящие из одного импульсного звена и линейной части, которая составляется из прочих линейных звеньев.

Импульсное звено образовано из чувствительного элемента и импульсного элемента. Последний как бы фильтрует отклонения чувствительного элемента, передавая в систему отклонения в моменты времени, установленные периодом чередования, и с длительностью, отвечающей скважности импульсного элемента.

Будем рассматривать импульсы 1-го рода. Пусть период импульсов будет T , скважность γ , коэффициент усиления k . Примем далее, что первый импульс подается в момент времени $t = 0$, начало второго импульса отвечает моменту времени $t = T$, третьего $t = 2T$ и n -го $t = (n - 1)T$.

Допустим, что отклонения чувствительного элемента выражаются временной функцией $\varphi(t)$.

Пусть система разомкнута и на вход импульсного звена поступает воздействие $\varphi(t)$. На выходе звена получается последовательность импульсов, которые передаются на линейную часть системы. Примем, что переходная проводимость линейной части выражается функцией $\Lambda(t)$.

Тогда на выходе разомкнутой системы мы получим от первого импульса величину

$$\lambda_{1\gamma} = k\varphi(0) \Lambda(t)$$

для отрезка времени, пока действует импульс

$$0 < t < \gamma T$$

и $\lambda_1 = k\varphi(0) [\Lambda(t) - \Lambda(t - \gamma T)]$ после прекращения действия импульса $\gamma T < t < \infty$.

Аналогично от второго импульса:

$$\lambda_{2\gamma} = k\varphi(T) \Lambda(t - T) \text{ при } T < t < T(1 + \gamma);$$

$$\lambda_2 = k\varphi(T) [\Lambda(t - T) - \Lambda(t - T - \gamma T)] \text{ при } T(1 + \gamma) < t < \infty$$

и вообще от $n + 1$ -го импульса;

$$\lambda_{(n+1)\gamma} = k\varphi(nT) \Lambda(t - nT) \text{ при } nT < t < T(n + \gamma)$$

$$\lambda_{n+1} = k\varphi(nT) [\Lambda(t - nT) - \Lambda(t - nT - \gamma T)] \text{ при } T(n + \gamma) < t < \infty$$

Суммируя отдельные составляющие, придем к следующему выражению выходной функции $\lambda_{\text{вых}}$ после $(n + 1)$ импульсов

$$\lambda_{\substack{\text{вых} \\ (n+1)}} = k \sum_{m=0}^{n+1} \varphi(mT) [\Lambda(t - mT) - \Lambda(t - mT - \gamma T)] \quad (\text{XII-30})$$

при $T(n + \gamma) < t < (n + 1)T$.

Если же время t лежит в пределах действия $n + 1$ -го импульса, т. е. при $nT < t < (n + \gamma) T$, то формула $\lambda_{\text{вх}}$ имеет несколько другой вид

$$\lambda_{\text{вх}} = k \sum_{m=0}^{m=n-1} \varphi(mT) [\Lambda(t - mT) - \Lambda(t - mT - \gamma T)] + k\varphi(nT) \Lambda(t - nT). \quad (\text{XII-31})$$

Для упрощения этой формулы целесообразно ввести понятие импульсной переходной проводимости скважности γ .

Обозначим ее $\Lambda_\gamma(t)$. Эта величина представляет разность

$$\Lambda_\gamma(t) = \Lambda(t) - \Lambda(t - \gamma T) \quad (\text{XII-32})$$

и физически является выходной функцией для единичного импульса длительности γT при $t > \gamma T$.

Для

$$0 < t < \gamma T \quad \Lambda_\gamma(t) = \Lambda(t). \quad (\text{XII-33})$$

Введя эту величину в формулы (XII-30-31), получим:

$$\lambda_{\text{вх}} = k \sum_{m=0}^{m=n} (mT) \Lambda_\gamma(t - mT) \quad \text{при } (n + \gamma) T < t < (n + 1) T,$$

$$\lambda_{\text{вх}} = k \sum_{m=0}^{m=n-1} \varphi(mT) \Lambda_\gamma(t - mT) \quad \text{при } nT < t < (n + \gamma) T. \quad (\text{XII-34})$$

Эта формула позволяет найти значение выходной величины для любого момента времени и для произвольной линейной части, если известна ее переходная проводимость $\Lambda(t)$ для единичного толчка.

Из этой формулы вытекает графический способ определения $\lambda_{\text{вх}}$.

Графический метод построения $\lambda_{\text{вх}}$. По переходной проводимости $\Lambda(t)$ линейной части системы определяют импульсную переходную проводимость $\Lambda_\gamma(t)$ скважности γ для периода чередования импульсов T . После этого наносят в каждом интервале T график функции $\Lambda_\gamma(t)$. Это легко можно сделать с помощью шаблона. Далее определяют по значению времени $t = mT$ соответствующее значение функции $\varphi(t)$ и для каждого интервала строят кривые $k\varphi(mT)\Lambda_\gamma(t)$, умножая ординаты графиков $\Lambda_\gamma(t)$ на множители $k\varphi(mT)$ с соблюдением знаков. Суммируя полученные кривые, найдем результирующий график выходной функции $\lambda_{\text{вх}}$.

Метод ступенчатых функций и разностных уравнений. Наиболее интересными для суждения о выходной функции $\lambda_{\text{вх}}$ являются ее дискретные значения, отвечающие моментам времени $t = 0; T; 2T; \dots, mT; \dots$

Если ограничиться рассмотрением этих дискретных значений и ввести относительное время $\tau = \frac{t}{T}$ (0, 1, 2, 3, ...), то формулы (XII-34) для $t = nT$, т. е. для конца n -го периода могут быть преобразованы в формулу

$$\lambda_{\text{о.м.х.}}(n) = k \sum_{m=0}^{n-1} \varphi(m) \Lambda_T(n-m). \quad (\text{XII-35})$$

Заметим, что в этой формуле значения всех входящих в нее функций определяются для дискретных значений независимого переменного, именно относительного времени $\tau = 0, 1, 2, \dots$. При этом условии мы можем в формуле (XII-34) заменить все непрерывные функции соответствующими ступенчатыми функциями. Известно, что ступенчатые функции остаются постоянными на всем отрезке времени, равном интервалу ступени.

Ступенчатая функция изменяет свое значение в точках, являющихся границей двух смежных интервалов. Будем обозначать ступенчатые функции квадратными скобками $[]$ вместо круглых $()$.

$$\lambda_{\text{о.м.х.}}[n] = k \sum_{m=0}^{n-1} \varphi[m] \Lambda_T[n-m]. \quad (\text{XII-36})$$

Мы получили интересующее нас дискретное значение $\lambda_{\text{о.м.х.}}[n]$, предполагая известной функцию переходной проводимости $\Lambda_T(t) = \Lambda(t) - \Lambda(t - \tau T)$ для линейной части системы.

Более подробное исследование импульсных систем автоматического регулирования позволяет установить, что дискретное значение $\lambda[n]$ выходной величины в конце n -го интервала может быть определено из линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$A_0 \lambda[n+m] + A_1 \lambda[n+m-1] + \dots + A_m \lambda[n] = 0.$$

Здесь m — порядок разностного уравнения.

Составление и решение разностных уравнений относится к так называемой теории конечных разностей*.

Решение приведенного выше разностного уравнения представляется функцией

$$\lambda[n] = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n + \dots + C_m z_m^n, \dots \quad (\text{XII-37})$$

где $C_1, C_2, \dots$ — постоянные величины, а $z_1, z_2, \dots$ — корни характеристического уравнения

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \dots + A_m = 0.$$

* Интересующихся этим вопросом отсылаем к книгам Б е з и к о в и ч а, Исчисление конечных разностей, изд. ЛГУ, 1939 г., или Г е л ь ф о н д а, Исчисление конечных разностей, ГНТИ, 1936.

Нетрудно видеть, что $\lambda[n]$ будет стремиться к конечному значению или нулю при неограниченном возрастании n только при условии, что модуль $z < 1$

$$|z| < 1.$$

Метод дискретного преобразования Лапласа. Составление разностных уравнений для импульсных систем автоматического регулирования и их анализ сопряжены со значительными трудностями. Я. З. Цыпкин разработал метод, который дает возможность легче и всесторонне исследовать особенности импульсных систем автоматического регулирования.

Сущность метода заключается в применении к разностным уравнениям и ступенчатым функциям преобразования Лапласа, аналогично тому, как это делается для непрерывных функций. Преобразование Лапласа дискретных функций значительно отличается от такого же преобразования непрерывных функций. Тем не менее этот метод позволяет сохранить для импульсных систем автоматического регулирования все основные понятия, как например, передаточной функции, частотной характеристики, входного и выходного операторов и пр., а также сам аппарат вычислений, разработанный для систем непрерывного регулирования, с той лишь разницей, что все функции преобразования будут иметь другие выражения, отвечающие дискретному преобразованию. Мы не будем здесь останавливаться на этом методе. Интересующихся отсылаем к книге Я. З. Цыпкина «Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях».

б) Устойчивость импульсных систем автоматического регулирования

Понятие устойчивости систем импульсного регулирования формулируется так же, как и для систем непрерывного действия.

Выше мы видели, что когда поведение системы описывается разностным уравнением, имеющим характеристическое уравнение

$$A_0 z^m + A_1 z^{m-1} + \dots + A_m = 0,$$

критерием устойчивости системы является условие

$$|z| < 1. \quad (\text{XII-38})$$

Это значит, что для устойчивости системы корни характеристического уравнения должны быть расположены внутри области, ограниченной окружностью радиуса, равного 1, с центром в начале координат. Если имеются корни за пределами этой области, система неустойчива.

Более глубокий анализ устойчивости импульсных систем автоматического регулирования дал Я. З. Цыпкин в упомянутой выше книге.

Приведем разработанный им критерий устойчивости замкнутой системы без доказательства*.

1. Если система импульсного регулирования устойчива в разомкнутом состоянии, то она будет устойчива и в замкнутом состоянии при условии, что амплитудно-фазовая характеристика $K(ix)$ разомкнутой системы в полосе $-\pi < x < \pi$ не охватывает точку $(-1, 0)$.

2. Если система импульсного регулирования неустойчива в разомкнутом состоянии и имеет число r корней характеристического уравнения, расположенных справа от мнимой оси, то в замкнутом состоянии система будет устойчивой при условии, если годограф частотной характеристики $K(ix)$ охватывает точку $(-1, 0)$ в полосе $-\pi < x < \pi$ r раз в положительном направлении.

В изложенном критерии фигурирует частотная функция $K(ix)$, под которой понимается отношение дискретных изображений Лапласа выходной и входной функций разомкнутой системы с последующей подстановкой вместо комплексной переменной дискретного Лапласовского преобразования значения ix .

* Мееров М. В., „Введение в динамику автоматического регулирования электрических машин“, Изд. АН СССР, 1956, стр. 337.

ГЛАВА XIII

ОПТИМАЛЬНОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ И СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Система автоматического регулирования, которая наилучшим образом выполняет свою задачу при заданных реальных условиях и ограничениях, называется *оптимальной*, а процесс регулирования ею обеспечиваемый — *оптимальным процессом*.

Понятие оптимальности в каждом конкретном случае должно быть увязано с задачей системы регулирования.

В ряде случаев, от системы регулирования, например, требуется, чтобы она при наличии помех, поступающих на вход вместе с полезным сигналом, обеспечивала наивысшую точность воспроизведения полезного сигнала, т. е. требуется, чтобы процесс передачи сигнала от входа к выходу осуществлялся с наименьшей ошибкой. Такой процесс в данном случае будет оптимальным, а система, обеспечивающая воспроизведение такого процесса, — оптимальной.

В других случаях, для заданного объекта и исполнительного механизма требуется спроектировать систему автоматического регулирования, обеспечивающую наименьшее время регулирования. В этих случаях мы вынуждены считаться с ограничениями скорости, ускорения и мощности исполнительного механизма, т. е. ограничениями, накладываемыми на модули производных некоторых величин, участвующих в процессе регулирования. Система регулирования, обеспечивающая выполнение этой задачи будет в данном случае оптимальной.

Вообще говоря, наилучшая система должна обеспечивать наименьшее время регулирования, наименьшую установившуюся погрешность и отсутствие перерегулирования или, по крайней мере, наименьший максимум переходного процесса. Но эти требования нередко при своем осуществлении вступают в противоречие друг с другом.

Чаще всего рассматривается оптимальность в отношении продолжительности переходного процесса. В этом случае оптимальной системой называется такая система, у которой переходный процесс при заданном возмущающем воздействии заканчивается в минимально возможное при наложенных ограничениях время.

Если задачей системы регулирования является воспроизведение поступающего на вход сигнала с наибольшей возможной точностью, мы не можем не учитывать различного рода помех, возникающих в процессе передачи сигнала от одного звена к другому.

Так, например, в электрических цепях систем автоматического регулирования такие помехи, искажающие воспроизведение сигнала, вызываемые работой контактов, непостоянством параметров источников питания, местными паразитными цепями и другими причинами.

Помимо этих помех внутреннего порядка, на вход системы наряду с задающим или управляющим воздействием (полезным сигналом) могут поступать посторонние возмущающие воздействия (помехи), вызванные причинами, не связанными с автоматическим управлением системы, например, влиянием внешней среды и др.

Так, например, в системе автоматического регулирования «самолет — автопилот» полезными сигналами являются сигналы, поступающие на вход автопилота и задающие закон движения самолета. Помехами являются случайные изменения лобового сопротивления и подъемной силы самолета, вызванные колебаниями плотности атмосферы, хаотическим движением масс воздуха и другими причинами.

Все случайные воздействия или помехи, накладывающиеся на полезный сигнал, в громадном большинстве случаев не могут быть точно определены или предсказаны, так как они являются по своему характеру непрерывно изменяющимися случайными функциями.

Поэтому при построении оптимальных систем, имеющих своей основной задачей передачу или воспроизведение управляющего сигнала с наибольшей возможной точностью при наличии помех, следует применять статистические методы расчета для учета влияния этих помех.

В дальнейшем мы рассмотрим вопрос о построении оптимальных систем регулирования для двух случаев: 1) обеспечения наименьшей длительности переходного процесса при ограниченных по модулю производных и 2) передачи с наименьшей ошибкой сигнала при наличии помех.

Предварительно кратко ознакомимся со статистическим методом учета случайных явлений.

1. ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ ДЛЯ УЧЕТА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Необходимо отметить, что статистический метод позволяет устанавливать закономерности случайных явлений массового характера. Предсказать исход единичного случайного явления теория вероятностей не может. Если рассматривается какое-либо событие, которое характеризуется совокупностью некоторых условий, и о нем известно, что это событие при осуществлении указанной совокупности условий может произойти, а может и не произойти, то такое событие называется случайным.

Допустим, что мы произвели N экспериментов над событием A при соблюдении совокупности условий S и что в n -случаях событие

произошло. Отношение $\nu = \frac{n}{N}$ называется частотой события A .

Частота ν при возрастании числа экспериментов N будет несколько изменяться, но стремиться к некоторому постоянному значению. Это значение носит название вероятности события при заданной совокупности условий и часто обозначается символом $P(A)$. Этот символ обозначает вероятность события A . Вероятность P всегда подчинена неравенству

$$0 < P < 1. \quad (\text{XIII-1})$$

Событие, для которого $P = 1$ есть достоверное событие.

Значение $P = 0$ отвечает невозможному событию.

В теории вероятности рассматриваются величины, значение которых зависит от случая и подчиняются законам вероятности. Такие величины называются *случайными*.

Для полного определения случайной величины мы должны знать все значения, которые она может принять, и вероятности каждого из этих значений. Иначе говоря, мы должны знать закон распределения вероятностей.

Если случайная величина может принимать только дискретный ряд значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_n$, то график распределения вероятностей можно изобразить, как показано на фиг. 245.

При этом должно быть

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (\text{XIII-2})$$

Если случайная величина непрерывна и может принимать всевозможные значения от $-\infty$ до $+\infty$, то закон распределения вероятности устанавливается с помощью введения понятия *плотности вероятности* и $\nu(x)$. Рассмотрим два бесконечно близких значения x и $x + dx$ случайной величины.

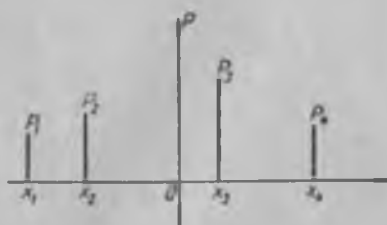
Вероятность события, что случайная величина ξ окажется в интервале $x < \xi < x + dx$ будет равна $\nu(x)dx$, где $\nu(x)$ есть плотность вероятности. Таким образом, плотность вероятности есть предел отношения вероятности нахождения случайной величины в интервале $x < \xi < x + dx$ к величине этого интервала, когда последняя стремится к 0. Нетрудно видеть, что вероятность того, что случайная величина принимает какое-либо конкретное значение x при непрерывном распределении вероятности равна нулю. График распределения вероятности в случае непрерывного распределения может иметь вид, изображенный на фиг. 246.

При этом должно быть

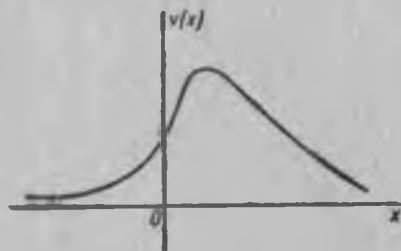
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \nu(x) dx = 1. \quad (\text{XIII-3})$$

Функция $v(x)$ может принимать любые только положительные или нулевые значения.

Другой способ выражения закона распределения вероятности может быть получен с помощью так называемой интегральной функции распределения $F(x)$.



Фиг. 245. График распределения вероятности для дискретной случайной величины.

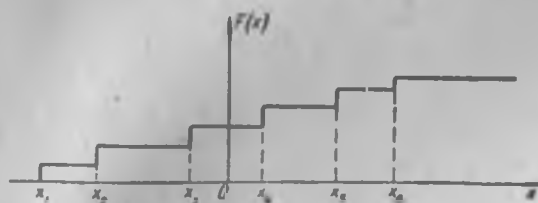


Фиг. 246. График распределения вероятности для непрерывной случайной величины.

Эта функция определяет вероятность того события, что случайная величина ξ не будет превышать фиксированное число x

$$F(x) = P(\xi \leq x). \quad (\text{XIII-4})$$

Если случайная величина может принимать только дискретные значения, то график распределения вероятности изобразится в этом случае в виде ступенчатой функции, как показано на фиг. 247.



Фиг. 247. График дискретного распределения вероятности.

При непрерывном распределении вероятности график $F(x)$ будет иметь вид, изображенный на фиг. 248.

При этом должно быть

$$F(-\infty) = 0; \quad F(+\infty) = 1.$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x v(x) dx \text{ и, следовательно, } \frac{dF(x)}{dx} = v(x). \quad (\text{XIII-5})$$

Всякая случайная физическая величина имеет свой закон распределения вероятности, который можно определить из большого

числа наблюдений. В теории вероятности принимается так называемый закон нормального распределения или закон Гауса.

По этому закону нормальная плотность вероятности $v(x)$ выражается функцией

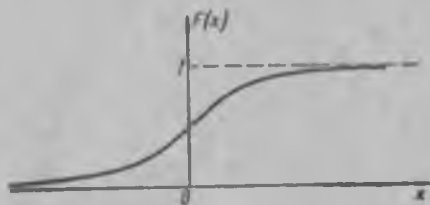
$$v(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (\text{XIII-6})$$

где a и σ — постоянные параметры.

Функция достигает максимума при $x = a$.

Изменяя a при $\sigma = \text{const}$, мы сдвигаем кривую распределения плотности вероятности вправо или влево, сохраняя форму кривой.

Изменение параметра σ позволяет менять форму кривой и максимум плотности.



Фиг. 248. График непрерывного распределения вероятности.

Подбирая надлежащим образом параметры σ и a , мы в большинстве случаев найденные из опыта кривые распределения плотности вероятности можем заменить с некоторым приближением кривой нормальной плотности.

Кривые распределения плотности вероятности случайной величины имеют следующие показатели:

1. Среднее значение случайной величины

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x v(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x). \quad (\text{XIII-7})$$

Это есть среднее взвешенное значение и может интерпретироваться как абсцисса центра тяжести единичной массы, имеющей распределение $F(x)$.

2. Среднее значение квадрата случайной величины

$$\bar{x^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 v(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x). \quad (\text{XIII-8})$$

3. Дисперсия или среднее значение квадрата отклонения $\Delta = x - \bar{x}$ случайной величины от ее среднего значения

$$\sigma^2 = \Delta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 v(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \bar{x})^2 dF(x). \quad (\text{XIII-9})$$

4. Среднее квадратичное отклонение случайной величины

$$\sigma = \sqrt{\Delta^2}. \quad (\text{XIII-10})$$

2. СТАЦИОНАРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

При решении различных задач автоматического регулирования приходится иметь дело не с отдельными случайными величинами, а со случайными процессами, где случайные величины претерпевают изменение во времени. Случайным процессом принято называть совокупность случайных величин $x(t)$, зависящих от времени, причем эта зависимость не является вполне определенной, как это имеет место в регулярном процессе.

Отдельные наблюдения над случайным процессом, протекающим при неизменных условиях опыта в одной и той же или разных, но однотипных системах, каждый раз дают различные функции $x(t)$. Поэтому мы можем говорить лишь о законе распределения вероятностей величин, участвующих в процессе, предсказать же протекание отдельного случайного процесса нельзя.

Все случайные процессы могут быть разделены на два класса: нестационарные и стационарные. Под стационарными процессами понимают такие, у которых закон распределения вероятности не зависит от изменения начала отсчета времени.

Процесс будет стационарным, если две группы значений переменных

$$x(t_1), x(t_2) \dots x(t_n)$$

и

$$x(t_1 + \tau), x(t_2 + \tau) \dots x(t_n + \tau)$$

при произвольных числах n и промежутках времени τ дают тождественные законы распределения вероятности.

Для анализа и синтеза систем автоматического регулирования существенное значение имеют стационарные случайные процессы, которые мы и будем в дальнейшем только иметь в виду. Приводим показатели, характеризующие стационарный случайный процесс.

1. Плотность вероятности $v_1(x)$. Согласно определения стационарного процесса $v_1(x, t) = v_1(x, t + \tau)$, т. е. $v_1(x)$ не зависит от начала отсчета времени. Произведение $v_1(x) dx$ представляет вероятность нахождения x в интервале $(x, x + dx)$.

2. Плотность вероятности $v_2(x_1, x_2, \tau)$. Эта величина также не зависит от начала отсчета времени для стационарного процесса.

Произведение $v_2(x_1, x_2, \tau)$ представляет вероятность нахождения пары значений x в интервалах $(x_1, x_1 + dx_1)$ и $(x_2, x_2 + dx_2)$, отделенных друг от друга промежутком времени τ .

3. Аналогично определяется понятие плотности вероятности

$$v_3(x_1, x_2, x_3, \tau).$$

4. Статистическое среднее значение. Это значение определяется по формуле

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x v(x, t) dx \quad (\text{XIII-11})$$

и представляет среднее значение, найденное на основании многих наблюдений над однотипными системами в один и тот же момент времени.

5. Среднее значение по времени

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) dt. \quad (\text{XIII-12})$$

Это значение определяется на основании многих наблюдений над одной и той же системой в течение значительного промежутка времени.

Для стационарного случайного процесса значения $\bar{x}$ и $\bar{x}$ совпадают

$$\bar{x} = \bar{x}. \quad (\text{XIII-13})$$

6. Корреляционная функция $R_x(\tau)$. Корреляционной функцией случайного процесса называют среднее по времени значение от произведения $x(t)x(t + \tau)$

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)x(t + \tau) dt. \quad (\text{XIII-14})$$

Для стационарного процесса корреляционная функция будет одной и той же для всех функций из множества случайных функций, имеющих один и тот же закон распределения вероятности. $R_x(\tau)$ выражает общие свойства всей совокупности случайных функций $x(t)$ стационарного процесса.

При $\tau = 0$ корреляционная функция

$$R_x(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x^2(t) dt = \bar{x}^2 \quad (\text{XIII-15})$$

есть среднее значение из квадратов по времени.

Не трудно видеть, что $R_x(0) \geq 0$.

Можно также показать, что $R_x(0) \geq R_x(\tau)$.

Функция $R_x(\tau)$ есть четная функция τ , всегда $R_x(\tau) = R_x(-\tau)$.

Физический смысл функции $R_x(\tau)$ заключается в том, что она является мерой взаимной связи между значениями $x(t)$ и $x(t + \tau)$.

7. Спектральная плотность $S_x(\omega)$. Спектральной плотностью стационарного случайного процесса называется Фурье-изображение корреляционной функции, т. е.

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (\text{XIII-16})$$

$S_x(\omega)$ есть четная функция ω , что позволяет дать $S_x(\omega)$ другое выражение

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (\text{XIII-17})$$

Функция $S_x(\omega)$ спектральной плотности для любой из случайных функций $x(t)$ стационарного процесса, имеющих один и тот же закон распределения вероятности, остается неизменной, так же как и корреляционная функция $R_x(\tau)$.

Можно показать, что если известна функция $S_x(\omega)$ стационарного случайного процесса, то корреляционная функция $R_x(\tau)$ может быть вычислена по формуле

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (\text{XIII-18})$$

т. е. как оригинал Фурье-изображения.

Отсюда следует, что

$$R_x(0) = x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (\text{XIII-19})$$

Эта формула дает возможность вычислять среднее значение квадрата случайной величины по функции спектральной плотности.

3. ПОКАЗАТЕЛИ ВЗАИМНОЙ СВЯЗИ МЕЖДУ ДВУМЯ СТАЦИОНАРНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ

1. Взаимная корреляционная функция $R_{xy}(\tau)$. Взаимной корреляционной функцией двух случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$ называют среднее по времени от произведения $x(t)$ и $y(t + \tau)$

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) y(t + \tau) dt. \quad (\text{XIII-20})$$

Функции $R_{xy}(\tau)$ и $R_{yx}(\tau)$ вообще не равны.

Кроме того, взаимные корреляционные функции не являются четными, но можно показать, что между ними существует зависимость

$$\left. \begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= R_{yx}(-\tau) \\ \sqrt{R_x(0)} \cdot \sqrt{R_y(0)} &\geq R_{xy}(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIII-21})$$

2. Взаимная спектральная плотность $S_{xy}(\omega)$. Эта функция определяется как Фурье-изображение взаимной корреляционной функции $R_{xy}(\tau)$

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (\text{XIII-22})$$

Между $S_{xy}(\omega)$ и $S_{yx}(\omega)$ существует зависимость

$$S_{xy}(\omega) = S_{yx}(-\omega). \quad (\text{XIII-23})$$

4. ПРОХОЖДЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО СИГНАЛА ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНУЮ СИСТЕМУ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Допустим, что рассматриваемая система имеет импульсную проводимость $W(t)$ и частотную функцию $K(i\omega)$.

Пусть на вход этой системы поступил стационарный случайный сигнал $\mu(t)$, имеющий корреляционную функцию $R_\mu(\tau)$ и спектральную плотность $S_\mu(\omega)$.

Обозначим выходной сигнал через $x(t)$ и соответственно его корреляционную функцию и спектральную плотность $R_x(\tau)$ и $S_x(\omega)$.

Величина выходного сигнала $x(t)$ определяется с помощью импульсной проводимости $W(t)$ по формуле

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(t - \theta) W(\theta) d\theta, \quad (\text{XIII-24})$$

а корреляционная функция на выходе из выражения

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) x(t + \tau) dt.$$

Подставив выражение $x(t)$ в формулу $R_x(\tau)$ и произведя интегрирование, найдем искомую функцию $R_x(\tau)$.

Мы опускаем здесь процесс интегрирования и даем готовый результат

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\theta \int_{-\infty}^{+\infty} W(\eta) W(\theta) R_\mu(\tau + \theta - \eta) d\eta^*. \quad (\text{XIII-25})$$

Подставляя полученное выражение $R_x(\tau)$ в формулу для $S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$, определим $S_x(\omega)$ на выходе системы.

* См. В. В. Солодовников, Введение в статистическую динамику систем автоматического регулирования, ГТТИ, 1952

Опуская вычисления, приведем готовый результат:

$$S_x(\omega) = |K(i\omega)|^2 S_u(\omega) \quad (\text{XIII-26})$$

Отсюда следует, что спектральная плотность выходной величины линейной системы равна произведению квадрата модуля ее частотной функции на спектральную плотность входного сигнала.

Б. ОПТИМАЛЬНОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ

Построение оптимального процесса регулирования с наименьшей длительностью переходного периода, отсутствием перерегулирования и при заданных ограничениях по модулю производных

Нашу задачу мы ограничим рассмотрением простейших случаев, когда ограничения по модулю накладываются на первую или вторую производные регулируемого параметра (скорость и ускорение).

Выше было сформулировано определение общего понятия оптимального процесса. Уточним это определение для нашего случая.

Обозначим регулируемую величину системы через λ , а предписанное значение через λ_p ; обе величины являются функциями времени. В частном случае λ_p может быть постоянной величиной.

Задача системы автоматического регулирования состоит в обеспечении равенства $\lambda = \lambda_p$ в любой момент времени. Однако в реальных системах это равенство выполняется с некоторой погрешностью

$$\lambda_p - \lambda = \Delta\lambda.$$

Величина $\Delta\lambda$ может быть представлена как сумма двух составляющих

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda_n + \Delta\lambda_b.$$

Здесь $\Delta\lambda_b$ — установившаяся погрешность или статическая ошибка и $\Delta\lambda_n$ — переходная погрешность, или динамическая ошибка, которая исчезает по окончании переходного процесса.

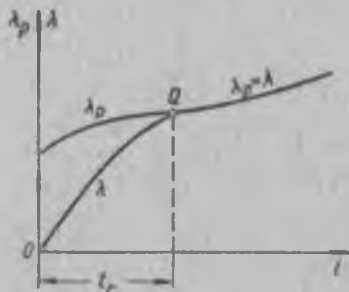
Практически переходный процесс считается законченным, когда переходная погрешность входит в зону нечувствительности, т. е. $\Delta\lambda_n$ делается меньше ε_n — некоторой малой величины. Для систем, применяющихся в реальных условиях, величина $\Delta\lambda_b = 0$, или не превосходит некоторую допускаемую малую величину ε_b , т. е. $|\Delta\lambda_n| < \varepsilon_b$.

Таким образом, переходный процесс считается законченным, когда

$$|\Delta\lambda| < \varepsilon_n + \varepsilon_b.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать идеальный процесс регулирования, у которого после окончания переходного периода $\Delta\lambda = 0$ и $\lambda = \lambda_p$.

На фиг. 249 функции λ и λ_p изображены кривыми. Кривая λ_p представляет предписанное значение, тогда как λ — действительное значение регулируемой величины. Точка Q встречи кривых λ и λ_p характеризует окончание переходного периода, если в дальнейшем



Фиг. 249. К определению оптимального переходного процесса.

для времени $t > t_r$ кривые λ и λ_p сливаются в одну общую кривую. Из этого условия также следует, что в точке Q при $t = t_r$ не только $\lambda = \lambda_p$, но равны и все производные

$$\left[\frac{d^k \lambda}{dt^k} \right]_{t_r} = \left[\frac{d^k \lambda_p}{dt^k} \right]_{t_r} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

где n — порядок дифференциального уравнения системы.

Для того чтобы переходный процесс был оптимальным при заданных условиях, необходимо:

1) время регулирования $t_r = t_{opt}$ было наименьшим, т. е. меньше чем при всяком другом переходном процессе, удовлетворяющем заданным условиям;

2) чтобы в точке встречи Q имело место равенство для всех производных

$$\frac{d^k \lambda}{dt^k} = \frac{d^k \lambda_p}{dt^k} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1);$$

3) чтобы производные, на которые наложены ограничения по модулю, удовлетворяли этим ограничениям на всем промежутке переходного периода.

Рассмотрим ниже следующие случаи:

1.

$$\lambda_p = \lambda_p(t); \quad \left| \frac{d\lambda}{dt} \right| < M.$$

Предписанное значение λ_p представляет некоторую функцию времени $\lambda_p(t)$. Первая производная (скорость) регулируемой величины ограничена по модулю, т. е. должна удовлетворять неравенству

$$\left| \frac{d\lambda}{dt} \right| < M,$$

где M — некоторая заданная постоянная величина.

Очевидно, что изменение λ будет происходить наиболее быстро, если величина производной λ' будет в течение всего времени протекания переходного процесса поддерживаться на предельном допустимом значении.

Поэтому положим

$$\frac{d\lambda}{dt} = \pm M.$$

Отсюда

$$\lambda = \pm Mt + A,$$

где A — постоянная интегрирования, определяемая по заданным начальным условиям переходного процесса.

Если начальное значение $\lambda(0) = 0$, то $A = 0$. Переходный процесс представится отрезком прямой (см. фиг. 250) OQ под углом α к оси времени, где $\operatorname{tg} \alpha = M$.

В том случае, если кривая λ_p лежит в нижней полуплоскости

$$\operatorname{tg} \alpha = -M.$$

Полученный переходный процесс будет оптимальным. В самом деле кривые всех прочих переходных процессов либо пересекают прямую OQ , либо не пересекают, располагаясь справа или слева от этой прямой, как показано на фигуре пунктирными кривыми I , II , III . Если переходный процесс протекает по кривой I , его время регулирования t_r , очевидно, будет меньше t_{opt} . Процессы, отвечающие кривым II и III , не могут идти в рассмотрение, поскольку для них полностью

или частично не выполняется заданное ограничение $\left| \frac{d\lambda}{dt} \right| < M$.

Величина t_{opt} , как видно из фигуры, будет

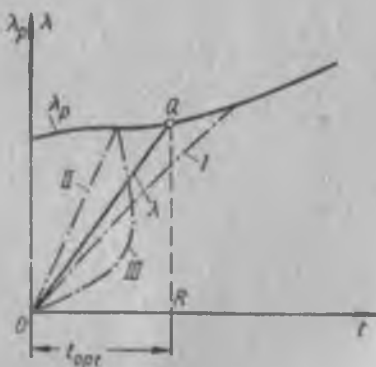
$$t_{opt} = \frac{\lambda_{pQ}}{M}. \quad (XIII-27)$$

II.

$$\lambda_p = \text{const}; \quad \left| \frac{d^2\lambda}{dt^2} \right| < M.$$

В этом случае предписанное значение λ_p остается постоянным $\lambda_p = \text{const}$. Ограничена по модулю только вторая производная $\left| \frac{d^2\lambda}{dt^2} \right| < M$. Кривая λ_p представляется на фиг. 251 прямой линией.

Для того чтобы величина λ достигла значения λ_p в наиболее короткое время, нужно чтобы абсолютное значение производной λ поддерживалось все время на предельном уровне. Однако при этом мы придем к моменту достижения λ значения λ_p со скоростью $\frac{d\lambda}{dt}$.

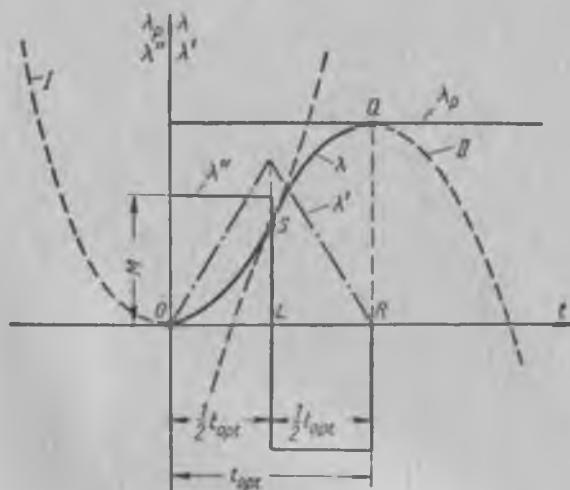


Фиг. 250. Оптимальный переходный процесс при ограничении первой производной.

отличной от нуля, что вызовет неизбежно перерегулирование. Необходимо, чтобы было выполнено условие $\left[\frac{d\lambda}{dt}\right]_{t_r} = \left[\frac{d\rho}{dt}\right]_{t_r}$.

Для избежания перерегулирования нужно установить такое управление переходным процессом, чтобы заранее начать уменьшение скорости λ' и при том с таким расчетом, чтобы λ достигала значения λ_p за наименьшее возможное время.

Как показывает анализ*, это будет осуществлено только, если производная λ'' (ускорение) непрерывно поддерживается на предель-



Фиг. 251. Оптимальный переходный процесс при ограничении второй производной и $\lambda_p = \text{const}$.

ном уровне до тех пор, пока λ не достигнет значения $\lambda = +\frac{1}{2}\lambda_p$, после чего λ'' меняет свой знак на обратный, но сохраняет свое абсолютное значение на предельном уровне.

На фиг. 251 изображены кривые λ'' , λ' и λ , удовлетворяющие этому условию.

Производная λ'' в промежутке времени $0 < t < \frac{1}{2} t_{opt}$ равна $+M$ и $-M$ во втором промежутке $\frac{1}{2} t_{opt} < t < t_{opt}$. Таким образом, построенный переходный процесс состоит из двух этапов: разгона и замедления. Оба этапа имеют одинаковую продолжительность.

Скорость λ' на первом этапе растет по закону прямой до некоторого значения N по условию неограниченного и на втором этапе уменьшается от N до 0.

* См. А. Я. Лернер, Автоматика и телемеханика, т. XIII, № 2.

Анализируя кривую построенного переходного процесса, нетрудно заключить, что эта кривая состоит из двух кусков OS и SQ двух парабол I и II (см. фиг. 251).

Первая парабола определяется дифференциальным уравнением $\lambda'' = +M$, вторая $\lambda'' = -M$.

Отсюда уравнение первой параболы

$$\lambda_I = \frac{Mt^2}{2} + A_1t + B_1.$$

Уравнение второй

$$\lambda_{II} = -\frac{Mt^2}{2} + A_2t + B_2.$$

Оси обеих парабол параллельны оси ординат. Значение постоянных интегрирования, а также время регулирования t_{opt} , определяются из уравнений, фиксирующих начальные и конечные условия переходного процесса, а также равенство ординат и первых производных в точке S . Для нашего случая, изображенного на фиг. 251, это будут следующие уравнения

$$\text{При } t = 0 \quad \lambda_I = 0; \quad \lambda'_I = 0.$$

$$\cdot \quad t = t_{opt} \quad \lambda_{II} = \lambda_p; \quad \lambda'_{II} = 0.$$

$$\cdot \quad t = \frac{1}{2} t_{opt} \quad \lambda_I = \lambda_{II} = \frac{1}{2} \lambda_p; \quad \lambda'_I = \lambda'_{II}.$$

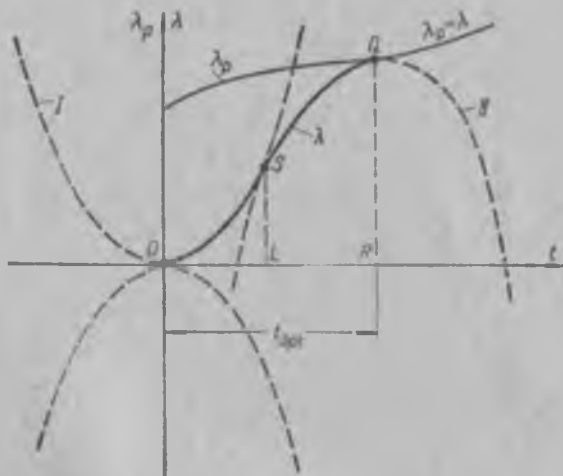
Опуская вычисления, приведем решение этих уравнений:

$$A_1 = 0; \quad B_1 = 0; \quad A_2 = Mt_{opt}; \quad B_2 = \lambda_p - \frac{1}{2} Mt_{opt}^2,$$

$$t_{opt} = 2 \sqrt{\frac{\lambda_p}{M}}.$$

Построенный переходный процесс есть оптимальный процесс. Всякий другой процесс, имеющий изображающую кривую, расположенную правее кривой OSQ , будет иметь время $t_r > t_{opt}$. Все остальные процессы будут иметь переходную кривую слева кривой OSQ или пересекающей ее. При этом, как нетрудно убедиться, будет нарушено условие ограниченности модуля второй производной $\left| \frac{d^2\lambda}{dt^2} \right| < M$. Пользуясь рассмотренными выше параболami, можно указать на другой способ построения оптимального процесса, разработанный А. А. Фельдбаумом. Строим при начале координат две параболы: I — с уравнением $\lambda_I = \frac{1}{2} Mt^2$ и II — с уравнением $\lambda_{II} = -\frac{1}{2} Mt^2$. Ось первой параболы будет направлена вверх, второй вниз. Первую параболу перемещаем параллельно себе в такое

положение, в котором выполняются начальные условия переходного процесса, именно обеспечиваются заданные значения λ_1 и λ_2 при $t = 0$. В нашем случае (см. фиг. 251) заданы начальные условия $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = 0$, вследствие чего ось I параболы и ось ординат совпадают. Далее перемещаем II параболу, сохраняя параллельность осей обеих парабол, в такое положение, при котором парабола



Фиг. 252. Оптимальный переходный процесс при ограничении второй производной и $\lambda_p = \lambda_p(t)$.

имеет точку касания Q с линией λ_p и точку S касания с I -й параболой. Участок кривой OSQ представит оптимальный переходный процесс.

$$\text{III. } \lambda_p = \lambda_p(t); \left| \frac{d^2 \lambda}{dt^2} \right| < M.$$

Этот случай отличается от предыдущего только тем, что график λ_p представляет некоторую кривую линию (см. фиг. 252). Для построения оптимального процесса применяем способ двух парабол, изложенный выше.

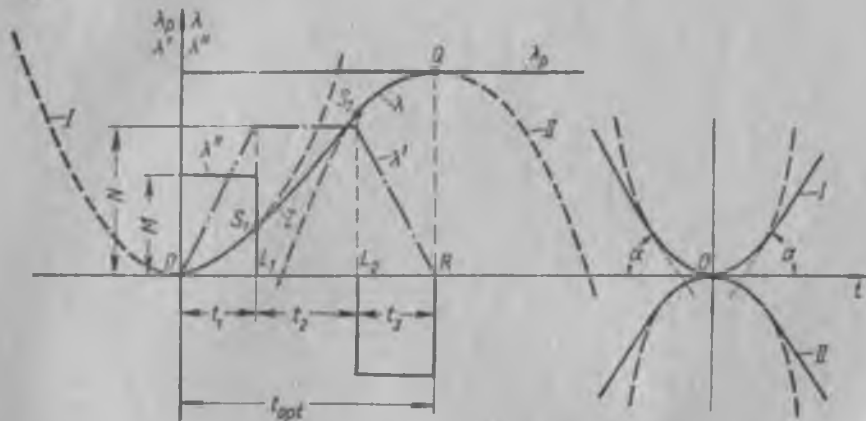
Строим при начале координат две параболы с уравнениями $\lambda_I = \frac{1}{2} M t^2$ и $\lambda_{II} = -\frac{1}{2} M t^2$. Перемещая параллельно себе, фиксируем положение I -й параболы так, чтобы были соблюдены заданные начальные условия переходного процесса в момент $t = 0$. После этого перемещаем с соблюдением параллельности осей вторую параболу и находим такое ее положение, когда она касается I -й параболы и кривой $\lambda_p(t)$.

Положение точек касания Q и S позволяет определить все интересующие нас параметры.

$$\text{IV. } \lambda_p = \text{const}; \quad \left| \frac{d\lambda}{dt} \right| < N; \quad \left| \frac{d^2\lambda}{dt^2} \right| < M.$$

В этом случае ограничиваются по модулю обе производные, первая и вторая.

Здесь оптимальный переходный процесс разбивается на три периода: период разгона с $\lambda'' = M$ до достижения допустимой максимальной



Фиг. 253. Оптимальный переходный процесс при ограничении первой и второй производных.

ной скорости $\lambda' = N$, период движения с постоянной скоростью $\lambda' = N$ и период замедления с $\lambda'' = -M$. Соответственно этому кривая переходного процесса составляется из трех участков, как показано на фиг. 253.

Участок OS_1 есть кусок параболы I , имеющей уравнение

$$\lambda_I = \frac{1}{2} M t^2 + A_1 t + B_1.$$

Участок S_1S_2 есть отрезок прямой Z , уравнение которой $\lambda_z = N t + A_2$.

Участок S_2Q принадлежит параболе II , имеющей уравнение

$$\lambda_{II} = -\frac{1}{2} M t^2 + A_3 t + B_2 \quad (\text{см. фиг. 253}).$$

Все постоянные интегрирования A_1 , B_1 , A_2 , A_3 , B_2 , а также отрезки времени t_1 , t_2 , t_3 определяются из уравнений, фиксирующих начальные и конечные условия переходного процесса (точки O и Q), и уравнений, устанавливающих равенство ординат и первых производных в точках S_1 и S_2 прямой Z с одной стороны и парабол I и II — с другой. При этом число уравнений будет равно числу неизвестных.

Время продолжительности переходного процесса будет $t_{opt} = t_1 + t_2 + t_3$. Пользуясь рассуждениями, приведенными выше, нетрудно заключить, что процесс будет оптимальным.

Способ построения оптимального процесса с помощью двух парабол может быть применен и для этого случая, но со следующей модификацией. Строим при начале выбранной системы координат две параболы с уравнениями: 1) $\lambda_I = \frac{1}{2} M t^2$ и 2) $\lambda_{II} = -\frac{1}{2} M t^2$.

Проводим к этим параболам касательные под углами к оси времени определяемыми из условия $\operatorname{tg} \alpha = \pm N$ (см. фиг. 253, а). Далее фиксируем по начальным условиям переходного процесса положение 1 параболы с пристроенными касательными, а вторую со своими касательными перемещаем параллельно себе до тех пор, пока она с одной стороны не будет касаться линии λ_p , а с другой касательные обеих парабол не совпадут.

Нетрудно видеть, что описанный способ двух парабол с пристроенными касательными применим для построения оптимального процесса не только когда $\lambda_p = \text{const}$, но и когда $\lambda_p = \lambda_p(t)$, т. е. когда функция λ_p представлена графически кривой линией.

После того, как построена кривая оптимального переходного процесса и установлены моменты времени, в которые должна производиться перемена знака производных, переходят к построению структурной схемы оптимальной системы регулирования. Эта схема должна обеспечивать перемену направления скоростей и ускорений (в общем случае и знаков других производных) регулируемой величины или других параметров оптимального процесса в соответствующие моменты времени. Такая задача может быть разрешена с помощью релейных устройств.

Оптимальное регулирование при наличии помех

Рассмотрим теперь случай построения оптимальной системы регулирования, имеющей задачу передачи полезного сигнала с наименьшей ошибкой при наличии помех.

Допустим, что полезный сигнал представлен периодической функцией $\varphi(t)$, а помехи с некоторым приближением стационарной случайной функцией $m(t)$. Из теории вероятности известно, что для периодической функции может быть вычислена своя корреляционная функция. Поскольку функция $\varphi(t)$ и $m(t)$ нам известны, считаем известными также их корреляционные и взаимно-корреляционные функции

$$R_\varphi(\tau), R_m(\tau), R_{\varphi m}(\tau) \text{ и } R_{m\varphi}(\tau).$$

Для упрощения допустим, что возмущающее воздействие помехи $m(t)$ поступает на вход системы вместе с полезным сигналом $\varphi(t)$.

Кроме того, среднее значение $m(t)$ и $\varphi(t)$ пусть будет равно нулю, т. е.

$$\overline{m} = 0; \quad \overline{\varphi} = 0.$$

Общее воздействие на входе системы представится суммой двух составляющих

$$\varphi_1(t) = \varphi(t) + m(t).$$

Положим далее, что заданное значение регулируемого параметра определяется функцией $h(t)$, которая связана с функцией полезного сигнала преобразованием

$$h(t) = K_0(p) \varphi(t).$$

Здесь $K_0(p)$ — некоторый заданный оператор.

Пусть далее импульсная переходная функция системы будет $W(t)$. Тогда на выходе системы будет получен сигнал

$$\lambda(t) = \int_0^{\infty} \varphi_1(t - \tau) W(\tau) d\tau. \quad (\text{XIII-28})$$

Величина погрешности

$$\xi(t) = h(t) - \lambda(t).$$

Погрешность передачи будет определяться средней квадратичной ошибкой $\sqrt{\bar{\epsilon}^2(t)}$.

Наша задача сводится к тому, чтобы найти такую функцию импульсной переходной проводимости $W(t)$, при которой погрешность $\bar{\epsilon}^2(t)$ принимала бы наименьшее значение, причем функция $W(t)$ должна отвечать условию физической осуществимости, т. е.

$$W(t) = 0 \quad \text{при } t < 0$$

$$\bar{\epsilon}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \left\{ h(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(t - \tau) W(\tau) d\tau \right\}^2 dt.$$

Раскрывая скобки под интегралом и меняя порядок интегрирования, найдем

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} & \int_{-T}^{+T} h^2(t) dt - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} W(\mu) d\mu \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} h(t) \varphi_1(t - \mu) dt + \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} W(\mu) d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} W(\theta) d\theta \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} \varphi_1(t - \mu) \varphi_1(t - \theta) dt. \end{aligned}$$

Это выражение среднего квадрата ошибки $\bar{\epsilon}^2$ может быть представлено через корреляционные функции сигналов $h(t)$, $m(t)$, $\varphi(t)$ (см. формулы XIII-14, 15, 20, 21).

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} h^2(t) dt = R_h(0).$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} h(t) \varphi_1(t - \mu) dt = R_{\varphi_1 h}(\mu) = R_{\varphi h}(\mu) + R_{mh}(\mu).$$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} \varphi_1(t - \mu) \varphi_1(t - \eta) dt &= R_{\varphi_1}(\eta - \mu) = R_{\varphi}(\eta - \mu) + \\ &+ R_m(\eta - \mu) + R_{\varphi m}(\eta - \mu) + R_{m\varphi}(\eta - \mu). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}^2 &= R_h(0) - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} W(\mu) R_{\varphi_1 h}(\mu) d\mu + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} W(\mu) d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} W(\eta) R_{\varphi_1}(\eta - \mu) d\eta. \end{aligned} \quad (\text{XIII-29})$$

Таким образом, задача сводится к отысканию функции $W(t)$, обращающей выражение $\bar{\epsilon}^2$ в минимум. Решение этой задачи требует применения методов вариационного исчисления.

Исследование показывает, что искомая функция $W(t)$ является решением интегрального уравнения*

$$R_{h\varphi_1}(\tau) - \int_0^{\tau} R_{\varphi_1}(\tau - \mu) W(\mu) d\mu = 0 \quad \text{при } \tau > 0.$$

После того, как найдена оптимальная импульсная переходная функция $W(t)$, задача сводится к выбору таких параметров системы, при которых осуществляется идентичность действительной импульсной переходной функции системы с вычисленной оптимальной.

* Решение этого интегрального уравнения приводится в книге В. В. Солодовникова, Введение в статистическую динамику систем автоматического регулирования, ГТТИ, 1952.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

Сущность преобразования Лапласа при решении интегродифференциальных линейных уравнений заключается в том, что заданное уравнение с предписанными начальными условиями приводится к алгебраическому уравнению. Это уравнение решается относительно некоторой промежуточной функции, по которой затем отыскивается искомое решение заданного уравнения с помощью обратного преобразования. Оба преобразования как прямое так и обратное, на практике выполняются с помощью таблицы, в которой даны преобразования типовых функций.

Функция вещественного переменного в вещественной области по методу Лапласа преобразовывается в некоторую функцию комплексного переменного в комплексной области.

Преобразование выполняется по формуле

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{st} dt = F(s). \quad (\text{П-1})$$

Здесь $f(t)$ — исходная функция вещественного переменного, подлежащая преобразованию. Эта функция называется оригиналом;

s — комплексная переменная преобразования;

t — вещественная переменная;

$F(s)$ — функция комплексного переменного s , называемая изображением функции $f(t)$.

Комплексная переменная s вообще произвольна. На нее накладывается единственное условие — это условие абсолютной сходимости интеграла.

Если преобразуемая функция $f(t)$ однозначна или имеет конечное число разрывов первого рода и равна нулю при $t < 0$, а при $t > 0$ ограничена по модулю неравенством $|f(t)| < Ae^{kt}$, где A и k — некоторые постоянные числа, то абсолютная сходимость интеграла преобразования обеспечена. Функции $f(t)$, применяемые в уравнениях переходных процессов автоматического регулирования, как правило, удовлетворяют этим условиям.

Указанное выше преобразование носит название прямого преобразования Лапласа в отличие от обратного преобразования, имеющего целью по известному изображению вычислить отвечающий ему оригинал.

Прямое преобразование Лапласа сокращенно обозначается символом L , а обратное — L^{-1}

$$\left. \begin{aligned} Lf(t) &= F(s), \\ L^{-1}F(s) &= f(t). \end{aligned} \right\} \quad (\text{П-2})$$

В дальнейшем для упрощения записей условимся изображение функции $f(t)$ вместо $F(s)$ обозначать $\bar{f}(s)$, но учитывая, что функциональная зависимость $\bar{f}(s)$ отличается от зависимости $f(t)$, будем над символом $\bar{f}(s)$ ставить еще черту.

Тогда предыдущие символические равенства запишутся так:

$$L\bar{f}(t) = \bar{\bar{f}}(s), \quad L^{-1}\bar{\bar{f}}(s) = f(t). \quad (\text{П-3})$$

Перечислим ниже основные свойства преобразования Лапласа, опустив их доказательства.

СВОЙСТВА L -ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1. Изображение суммы или разности двух функций равно соответственно сумме или разности изображений этих функций

$$L[f_1(t) \pm f_2(t)] = Lf_1(t) \pm Lf_2(t). \quad (\text{П1-4})$$

2. Множитель, не зависящий от вещественной и комплексной переменных t и z , может быть вынесен за знак преобразования L

$$L[af(t)] = aLf(t). \quad (\text{П1-5})$$

3. На основании первых двух свойств будет справедлива запись:

$$L\left[\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)\right] = \sum_{k=1}^n a_k Lf_k(t). \quad (\text{П1-6})$$

4. Все сказанное в п. 1, 2 и 3 относительно символа L сохраняет свою силу также для символа L^{-1} обратного преобразования.

5. Если функция $f(t)$ и ее производная преобразуются по Лапласу, то L -изображение производной можно вычислить по L -изображению функции, пользуясь формулой

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = zLf(t) - f(0+) = z\bar{f}(z) - f(0+). \quad (\text{П1-7})$$

Здесь $f(0+)$ представляет предел значения функции $f(t)$ при $t = 0$ при стремлении независимой переменной к нулю справа. Такое определение имеет значение для функции с конечными разрывами непрерывности. Для непрерывных функций

$$f(0+) = f(0).$$

6. L -изображение производной любого порядка от вещественной функции по вещественному переменному вычисляется по изображению функции, пользуясь формулами:

$$L[f'(t)] = z\bar{f}(z) - zf(0+) - f'(0+).$$

$$L[f''(t)] = z^2\bar{f}(z) - z^2f(0+) - zf'(0+) - f''(0+)$$

и вообще

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = z^n \bar{f}(z) - \sum_{k=1}^n z^{n-k} f^{(k-1)}(0+). \quad (\text{П1-8})$$

Символ $f^{(k-1)}(0+)$ обозначает $\frac{d^{k-1} f(t)}{dt^{k-1}}$ при $t = 0+$.

Это очень важное свойство преобразования Лапласа, так как благодаря этому свойству дифференциальное уравнение преобразовывается в комплексной области в алгебраическое.

7. Если функция $f(t)$ преобразуется по Лапласу, то изображение ее интеграла может быть найдено по формуле:

1) для определенного интеграла

$$L\left[\int_0^t f(t) dt\right] = \frac{1}{z} \bar{f}(z); \quad (\text{П1-9})$$

2) для неопределенного интеграла

$$L \left[\int f(t) dt \right] = -\frac{1}{z} \bar{f}(z) + \frac{1}{z} \left[\int f(t) dt \right]_{t=0+}. \quad (\text{ПІ-10})$$

Здесь выражение $\left[\int f(t) dt \right]_{t=0+}$ представляет значение интеграла при $t = 0+$, т. е. предельное значение интеграла, если независимая переменная t приближается к нулю справа.

8. Умножение независимой переменной в вещественной области на постоянную величину соответствует в комплексной области делению на эту величину как всего изображения функции, так и независимой переменной

$$L f(at) = \frac{1}{a} \bar{f} \left(\frac{z}{a} \right). \quad (\text{ПІ-11})$$

9) Изображение функции вещественного переменного, запаздывающей на величину a , находится по формуле

$$\left. \begin{aligned} L[f(t-a)] &= e^{-az} \bar{f}(z), \\ \text{если только } f(t-a) &= 0 \text{ при } t < a. \end{aligned} \right\} \quad (\text{ПІ-12})$$

Соответственно для функции с опережением

$$\left. \begin{aligned} L f(t+a) &= e^{az} \bar{f}(z), \\ \text{если только } f(t+a) &= 0 \text{ при } t < -a. \end{aligned} \right\} \quad (\text{ПІ-13})$$

Эти формулы указывают, что смещение по оси t в вещественной области соответствует в комплексной области умножению на показательную функцию.

В указанных формулах a представляет вещественное неотрицательное число.

10. Умножение на показательную функцию e^{-mt} в вещественной области соответствует в комплексной области смещению комплексной переменной на величину m . Последняя в общем случае представляет постоянное комплексное число

$$\left. \begin{aligned} L[e^{-mt} f(t)] &= \bar{f}(z+m), \\ L[e^{mt} f(t)] &= \bar{f}(z-m). \end{aligned} \right\} \quad (\text{ПІ-14})$$

Эти формулы носят название формул смещения в комплексной области.

11. Если имеются две функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ в вещественной области, преобразуемые по Лапласу, то интеграл

$$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$$

определяется как оригинал произведения изображения этих функций

$$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = L^{-1} [\bar{f}_1(z) \bar{f}_2(z)]. \quad (\text{ПІ-15})$$

Здесь τ — переменная интегрирования.

Эта формула носит название интеграла свертывания в вещественной области.

12. Если функция $f(t)$ и ее первая производная преобразуемы по Лапласу и существует предел $\lim_{z \rightarrow \infty} z \bar{f}(z)$, то имеет место равенство

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z \bar{f}(z) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t). \quad (\text{ПІ-16})$$

Эта формула указывает, что поведение функции $z\bar{f}(z)$ в комплексной плоскости, в окрестности бесконечно удаленной точки, совпадает с поведением функции $f(t)$ в вещественной области вблизи точки $t=0$. Формула устанавливает равенство значения $z\bar{f}(z)$ при $z=\infty$ и $f(t)$ при $t=0$.

13. Если функция $f(t)$ и ее первая производная, преобразуемая по Лапласу и функция $z\bar{f}(z)$, не имеет полюсов на мнимой оси и в правой полуплоскости, то имеет место равенство

$$\lim_{z \rightarrow 0} z\bar{f}(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t). \quad (\text{ПІ-17})$$

Эта формула указывает, что поведение функции $z\bar{f}(z)$ в комплексной области в окрестности начала координат совпадает с поведением функции $f(t)$ в вещественной области в окрестности бесконечно удаленной точки.

Формула устанавливает равенство значения $z\bar{f}(z)$ при $z=0$ и $f(t)$ при $t=\infty$.

14. Изображение периодической функции $f(t) = f(t+T)$ с периодом T вычисляется по изображению вспомогательной функции $\varphi(t)$, совпадающей с заданной функцией $f(t)$ в интервале одного периода $(0—T)$ и обращающейся в 0 для всех остальных значений t .

Зависимость между изображениями заданной и вспомогательной функций определяется формулой

$$Lf(t) = \frac{L\varphi(t)}{1 - e^{-zT}}. \quad (\text{ПІ-18})$$

15. Изображение периодической функции $f(t) = f(t+T)$ с периодом T , меняющей свой знак через половину периода с сохранением абсолютного значения, т. е. при соблюдении равенства $f\left(t + \frac{1}{2}T\right) = -f(t)$, вычисляется по изображению вспомогательной функции $\varphi(t)$, совпадающей с заданной функцией $f(t)$ в интервале одного полупериода $\left(0 - \frac{1}{2}T\right)$ и обращающейся в нуль при всех остальных значениях t .

Искомое изображение вычисляется по формуле

$$Lf(t) = \frac{L\varphi(t)}{1 + e^{-\frac{1}{2}zT}}. \quad (\text{ПІ-19})$$

16. Если функция $f(t, x)$ есть функция от двух независимых переменных t и x , причем x не зависит от t и функция преобразуема по Лапласу относительно переменной t , то справедливо равенство

$$L\left[\frac{\partial}{\partial x} f(t, x)\right] = \frac{\partial}{\partial x} \bar{f}(z, x). \quad (\text{ПІ-20})$$

Эта формула называется правилом дифференцирования по второй переменной.

Таблица 1*

**ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ h_τ ДЛЯ ТИПОВЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ
Вещественных частотных характеристик**

τ	h_τ	τ	h_τ	τ	h_τ
0,00	0,00000	0,30	0,0952	0,60	0,189
01	0,00318	31	0,0984	61	0,192
02	0,00637	32	0,100	62	0,195
03	0,00955	33	0,1055	63	0,198
04	0,0127	34	0,108	64	0,201
0,05	0,0159	0,35	0,111	0,65	0,204
06	0,0191	36	0,114	66	0,208
07	0,0223	37	0,117	67	0,211
08	0,0254	38	0,121	68	0,214
09	0,0286	39	0,124	69	0,217
0,10	0,0318	0,40	0,127	0,70	0,220
11	0,0350	41	0,130	71	0,223
12	0,0382	42	0,133	72	0,226
13	0,0415	43	0,136	73	0,229
14	0,0446	44	0,139	74	0,232
0,15	0,0477	0,45	0,142	0,75	0,235
16	0,0509	46	0,146	76	0,238
17	0,0541	47	0,149	77	0,241
18	0,0573	48	0,152	78	0,244
19	0,0604	49	0,155	79	0,247
0,20	0,0637	0,50	0,158	0,80	0,250
21	0,0668	51	0,161	81	0,253
22	0,0700	52	0,164	82	0,256
23	0,0731	53	0,167	83	0,259
24	0,0763	54	0,171	84	0,262

* Перепечатано из книги Воронова, Элементы теории автоматического регулирования, Воениздат, 1964.

Продолжение табл. I

τ	h_τ	τ	h_τ	τ	h_τ
0,25	0,0794	0,55	0,174	0,85	0,265
26	0,0826	56	0,177	86	0,268
27	0,0856	57	0,180	87	0,271
28	0,0889	58	0,183	88	0,274
29	0,0921	59	0,186	89	0,277
0,90	0,280	3,5	0,815	9,0	0,925
91	0,283	6	0,824	2	0,928
92	0,286	7	0,833	4	0,931
93	0,289	8	0,842	6	0,934
94	0,292	9	0,849	8	0,936
0,95	0,295	4,0	0,856	10,0	0,939
96	0,298	1	0,862	2	0,941
97	0,301	2	0,868	4	0,943
98	0,304	3	0,873	6	0,945
99	0,307	4	0,878	8	0,946
1,0	0,310	4,5	0,882	11,0	0,947
1	0,339	6	0,885	11,5	0,949
2	0,367	7	0,888	12,0	0,950
3	0,395	8	0,891	12,5	0,950
4	0,422	9	0,894	13,0	0,950
1,5	0,449	5,0	0,895	13,5	0,950
6	0,475	2	0,899	14,0	0,951
7	0,500	4	0,901	14,5	0,954
8	0,525	6	0,902	15,0	0,956
9	0,548	8	0,903	15,5	0,959
2,0	0,571	6,0	0,903	16,0	0,961
1	0,593	2	0,903	16,5	0,963
2	0,615	4	0,903	17,0	0,965
3	0,635	6	0,903	17,5	0,966
4	0,655	8	0,903	18,0	0,966
2,5	0,674	7,0	0,904	18,5	0,966
6	0,691	2	0,904	19,0	0,966
7	0,709	4	0,906	19,5	0,967
8	0,725	6	0,907	20,0	0,967
9	0,740	8	0,909	21	0,968
3,0	0,755	8,0	0,911	22	0,971
1	0,768	2	0,913	23	0,973
2	0,781	4	0,916	24	0,975
3	0,793	6	0,919	25	0,975
4	0,804	8	0,922	30	0,980
				40	0,984
				50	0,987
				100	0,994
				120	0,995

Таблица 2*

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ $h_{\alpha\tau}$ ДЛЯ ТИПОВЫХ ТРАПЕЦИЙ
Вещественных частотных характеристик

τ	0,00	0,06	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
0.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	0.138	0.165	0.176	0.184	0.192	0.199	0.207
1.0	0.310	0.325	0.340	0.356	0.371	0.386	0.402
1.5	0.449	0.469	0.494	0.516	0.538	0.560	0.594
2.0	0.571	0.560	0.628	0.655	0.682	0.709	0.732
2.5	0.674	0.707	0.739	0.771	0.802	0.833	0.862
3.0	0.755	0.792	0.828	0.863	0.895	0.928	0.958
3.5	0.815	0.853	0.892	0.928	0.963	0.994	1.024
4.0	0.856	0.898	0.937	0.974	1.008	1.039	1.066
4.5	0.883	0.923	0.960	0.998	1.029	1.057	1.084
5.0	0.895	0.939	0.977	1.012	1.042	1.067	1.087
5.5	0.900	0.940	0.986	1.015	1.042	1.063	1.079
6.0	0.903	0.945	0.981	1.013	1.037	1.054	1.065
6.5	0.904	0.943	0.980	1.009	1.029	1.043	1.050
7.0	0.904	0.945	0.978	1.006	1.024	1.034	1.037
7.5	0.907	0.945	0.980	1.005	1.021	1.027	1.027
8.0	0.911	0.951	0.983	1.007	1.020	1.024	1.021
8.5	0.918	0.956	0.989	1.010	1.021	1.024	1.018
9.0	0.925	0.966	0.996	1.016	1.025	1.025	1.017
9.5	0.932	0.972	1.004	1.020	1.026	1.026	1.018
10.0	0.939	0.980	1.009	1.025	1.030	1.027	1.018
10.5	0.946	0.985	1.013	1.028	1.031	1.026	1.016
11.0	0.947	0.988	1.015	1.028	1.030	1.024	1.013
11.5	0.949	0.988	1.016	1.027	1.028	1.021	1.010
12.0	0.950	0.990	1.015	1.025	1.024	1.015	1.004

* Перепечатано из книги Воронова, Элементы теории автоматического регулирования, Восмиздат, 1954.

Продолжение табл. 2

τ	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30
12,5	0,950	0,989	1,013	1,022	1,019	1,010	0,998
13,0	0,950	0,989	1,012	1,019	1,015	1,004	0,993
13,5	0,950	0,990	1,011	1,016	1,011	1,000	0,990
14,0	0,951	0,990	1,010	1,015	1,008	0,997	0,987
14,5	0,954	0,990	1,011	1,014	1,008	0,996	0,986
15,0	0,956	0,993	1,012	1,014	1,006	0,995	0,987
15,5	0,959	0,995	1,013	1,014	1,006	0,995	0,989
16,0	0,961	0,998	1,015	1,014	1,006	0,995	0,990
16,5	0,964	0,999	1,016	1,015	1,005	0,996	0,992
17,0	0,965	1,001	1,016	1,014	1,005	0,996	0,993
17,5	0,966	1,002	1,016	1,013	1,003	0,995	0,994
18,0	0,966	1,002	1,015	1,012	1,002	0,994	0,994
18,5	0,966	1,001	1,014	1,010	1,000	0,993	0,994
19,0	0,966	1,002	1,013	1,008	0,998	0,992	0,994
19,5	0,967	1,001	1,012	1,005	0,996	0,991	0,994
20,0	0,967	1,001	1,011	1,004	0,995	0,991	0,994
20,5	0,968	1,002	1,010	1,003	0,994	0,991	0,995
21,0	0,968	1,002	1,010	1,003	0,994	0,991	0,996
21,5	0,969	1,003	1,010	1,002	0,994	0,992	0,999
22,0	0,971	1,004	1,011	1,002	0,994	0,994	1,000
22,5	0,973	1,005	1,011	1,002	0,995	0,995	1,002
23,0	0,973	1,006	1,011	1,002	0,995	0,997	1,003
23,5	0,975	1,005	1,011	1,002	0,995	0,998	1,004
24,0	0,975	1,006	1,010	1,001	0,995	0,998	1,005
24,5	0,975	1,006	1,009	1,000	0,995	0,999	1,005
25,0	0,975	1,006	1,008	0,999	0,995	0,999	1,004
25,5	0,975	1,006	1,007	0,998	0,994	0,999	1,004
26,0	0,975	1,006	1,006	0,997	0,994	0,999	1,003

Продолжение табл. 2

$\tau \backslash \nu$	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	0,215	0,223	0,231	0,240	0,248	0,255	0,259
1,0	0,417	0,432	0,447	0,461	0,476	0,490	0,505
1,5	0,603	0,617	0,646	0,665	0,685	0,706	0,722
2,0	0,761	0,785	0,810	0,831	0,856	0,878	0,899
2,5	0,891	0,917	0,943	0,967	0,985	1,010	1,030
3,0	0,986	1,013	1,038	1,061	1,081	1,100	1,116
3,5	1,050	1,074	1,095	1,115	1,132	1,145	1,158
4,0	1,090	1,110	1,127	1,141	1,151	1,158	1,162
4,5	1,104	1,120	1,129	1,138	1,141	1,141	1,138
5,0	1,102	1,112	1,117	1,117	1,114	1,107	1,097
5,5	1,088	1,092	1,096	1,090	1,076	1,064	1,050
6,0	1,070	1,068	1,062	1,051	1,036	1,020	1,001
6,5	1,049	1,043	1,033	1,018	1,001	0,982	0,965
7,0	1,033	1,023	1,009	0,992	0,975	0,957	0,941
7,5	1,020	1,005	0,989	0,974	0,956	0,944	0,931
8,0	1,011	0,998	0,982	0,966	0,952	0,941	0,934
8,5	1,007	0,993	0,978	0,964	0,954	0,948	0,948
9,0	1,006	0,992	0,978	0,968	0,962	0,961	0,967
9,5	1,006	0,993	0,982	0,975	0,972	0,977	0,987
10,0	1,005	0,994	0,985	0,982	0,984	0,993	1,006
10,5	1,004	0,994	0,989	0,988	0,994	1,005	1,019
11,0	1,002	0,993	0,990	0,993	1,001	1,014	1,027
11,5	0,998	0,991	0,991	0,996	1,006	1,017	1,029
12,0	0,994	0,988	0,990	0,997	1,007	1,018	1,026
12,5	0,990	0,986	0,989	0,997	1,007	1,015	1,019
13,0	0,986	0,984	0,989	0,997	1,006	1,012	1,012

Продолжение табл. 2

$\tau \backslash v$	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65
13,5	0,983	0,984	0,989	0,998	1,005	1,008	1,004
14,0	0,983	0,985	0,985	0,991	0,999	1,005	1,005
14,5	0,984	0,987	0,994	1,002	1,005	1,003	0,994
15,0	0,986	0,991	0,998	1,005	1,006	1,002	0,994
15,5	0,989	0,995	1,002	1,008	1,007	1,001	0,992
16,0	0,992	0,999	1,007	1,010	1,008	1,001	0,994
16,5	0,995	1,002	1,009	1,011	1,008	1,001	0,995
17,0	0,998	1,005	1,011	1,012	1,007	1,000	0,996
17,5	0,999	1,007	1,011	1,009	1,005	0,998	0,997
18,0	1,000	1,007	1,010	1,008	1,001	0,997	0,997
18,5	1,001	1,007	1,009	1,005	0,999	0,995	0,997
19,0	1,001	1,006	1,006	1,001	0,995	0,993	0,997
19,5	1,001	1,005	1,004	0,998	0,992	0,992	0,997
20,0	1,001	1,004	1,001	0,995	0,991	0,992	0,998
20,5	1,001	1,003	1,000	0,994	0,991	0,994	0,999
21,0	1,002	1,003	0,999	0,993	0,992	0,996	1,001
21,5	1,004	1,003	0,998	0,994	0,995	0,999	0,995
22,0	1,005	1,004	0,998	0,995	0,997	1,000	1,004
22,5	1,006	1,004	0,998	0,998	1,000	1,005	1,005
23,0	1,006	1,004	0,998	0,997	1,002	1,007	1,007
23,5	1,006	1,003	0,998	0,998	1,003	1,008	1,006
24,0	1,006	1,002	0,998	0,999	1,004	1,007	1,004
24,5	1,005	1,000	0,997	1,000	1,004	1,006	1,002
25,0	1,004	0,999	0,996	1,000	1,004	1,004	0,999
25,5	1,002	0,997	0,996	1,000	1,003	1,002	0,997
26,0	1,001	0,996	0,996	1,000	1,002	0,999	0,995

Продолжение табл. 2

$\tau \backslash v$	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	0,267	0,275	0,282	0,290	0,297	0,304	0,314
1,0	0,519	0,534	0,547	0,561	0,575	0,590	0,602
1,5	0,740	0,758	0,776	0,794	0,813	0,832	0,844
2,0	0,919	0,938	0,957	0,974	0,991	1,008	1,022
2,5	1,050	1,067	1,084	1,090	1,105	1,120	1,133
3,0	1,131	1,143	1,154	1,162	1,169	1,175	1,177
3,5	1,165	1,170	1,174	1,174	1,175	1,176	1,175
4,0	1,163	1,161	1,156	1,150	1,141	1,132	1,119
4,5	1,132	1,127	1,111	1,099	1,085	1,071	1,053
5,0	1,084	1,069	1,053	1,036	1,019	1,003	0,987
5,5	1,032	1,016	0,994	0,979	0,962	0,951	0,932
6,0	0,984	0,956	0,949	0,934	0,922	0,914	0,907
6,5	0,948	0,936	0,920	0,910	0,906	0,904	0,905
7,0	0,927	0,917	0,911	0,909	0,911	0,917	0,926
7,5	0,922	0,919	0,920	0,927	0,934	0,946	0,962
8,0	0,932	0,936	0,944	0,955	0,970	0,986	1,002
8,5	0,951	0,958	0,974	0,990	1,006	1,023	1,041
9,0	0,976	0,990	1,006	1,023	1,038	1,051	1,060
9,5	1,000	1,015	1,033	1,048	1,059	1,065	1,066
10,0	1,020	1,036	1,049	1,059	1,063	1,062	1,056
10,5	1,033	1,046	1,054	1,058	1,055	1,048	1,033
11,0	1,039	1,047	1,048	1,044	1,034	1,021	1,005
11,5	1,037	1,039	1,034	1,024	1,010	0,994	0,977
12,0	1,029	1,025	1,015	1,000	0,984	0,970	0,958
12,5	1,017	1,010	0,995	0,980	0,965	0,955	0,950
13,0	1,005	0,993	0,980	0,965	0,955	0,952	0,955

Продолжение табл. 2

x	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
13,5	0,995	0,982	0,968	0,958	0,954	0,958	0,970
14,0	0,998	0,975	0,965	0,961	0,965	0,976	0,991
14,5	0,983	0,970	0,969	0,971	0,981	0,997	1,010
15,0	0,983	0,977	0,978	0,987	1,001	1,018	1,032
15,5	0,985	0,984	0,991	1,003	1,019	1,032	1,048
16,0	0,990	0,993	1,003	1,018	1,031	1,040	1,039
16,5	0,995	1,001	1,014	1,027	1,035	1,037	1,028
17,0	0,999	1,008	1,020	1,030	1,032	1,026	1,012
17,5	1,002	1,012	1,023	1,027	1,023	1,013	0,994
18,0	1,004	1,014	1,020	1,018	1,008	0,993	0,978
18,5	1,005	1,012	1,014	1,007	0,993	0,978	0,969
19,0	1,004	1,009	1,006	0,995	0,981	0,970	0,957
19,5	1,003	1,005	0,998	0,985	0,973	0,967	0,973
20,0	1,003	1,001	0,991	0,980	0,972	0,975	0,986
20,5	1,002	0,998	0,987	0,978	0,977	0,990	1,001
21,0	1,002	0,996	0,987	0,982	0,989	1,001	1,015
21,5	1,002	0,995	0,988	0,988	0,998	1,013	1,025
22,0	1,002	0,995	0,991	0,997	1,010	1,024	1,029
22,5	1,002	0,996	0,996	1,006	1,018	1,028	1,028
23,0	1,002	0,997	1,001	1,011	1,022	1,025	1,016
23,5	1,001	0,998	1,004	1,015	1,021	1,016	1,002
24,0	0,999	0,999	1,007	1,015	1,016	1,006	0,990
24,5	0,998	0,999	1,007	1,012	1,007	0,995	0,979
25,0	0,996	1,000	1,007	1,008	0,998	0,984	0,975
25,5	0,995	1,000	1,005	1,001	0,989	0,978	0,977
26,0	0,995	1,000	1,002	0,997	0,984	0,978	0,983

Таблица 3

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СИНОСУСЫ Six ДЛЯ УГЛОВ В РАДИАНАХ

x	Six	x	Six	x	Six
0,00	0	0,35	0,3476	0,70	0,6812
1	0,010000	36	0,3574	71	0,6904
2	0,019999	37	0,3672	72	0,6996
3	0,029998	38	0,3770	73	0,7087
4	0,039996	39	0,3867	74	0,7179
0,05	0,04999	40	0,3965	75	0,7270
6	0,05999	41	0,4062	76	0,7360
7	0,06998	42	0,4159	77	0,7451
8	0,07997	43	0,4256	78	0,7541
9	0,08996	44	0,4353	79	0,7631
0,10	0,09994	45	0,4450	0,80	0,7721
11	0,10993	46	0,4546	81	0,7811
12	0,11990	47	0,4643	82	0,7900
13	0,12998	48	0,4739	83	0,7989
14	0,13985	49	0,4835	84	0,8078
0,15	0,14981	0,50	0,4931	0,85	0,8166
16	0,15977	51	0,5027	86	0,8254
17	0,16973	52	0,5123	87	0,8342
18	0,1797	53	0,5218	88	0,8430
19	0,1896	54	0,5313	89	0,8518
0,20	0,1996	0,55	0,5408	0,90	0,8605
21	0,2095	56	0,5503	91	0,8692
22	0,2194	57	0,5598	92	0,8778
23	0,2293	58	0,5693	93	0,8865
24	0,2392	59	0,5787	94	0,8951
0,25	0,2491	0,60	0,5881	0,95	0,9036
26	0,2590	61	0,5975	96	0,9122
27	0,2689	62	0,6069	97	0,9207
28	0,2788	63	0,6163	98	0,9292
29	0,2986	64	0,6256	99	0,9377
0,30	0,2985	0,65	0,6349	1,00	0,9461
31	0,3083	66	0,6442	1,1	1,0287
32	0,3182	67	0,6535	1,2	1,1080
33	0,3280	68	0,6629	1,3	1,1840
34	0,3378	69	0,6720	1,4	1,2662
1,5	1,3247	4,0	1,7582	35	1,5969
0,5 π	1,3699	4,1	1,7887	40	1,5870
1,6	1,3892	4,2	1,7184	45	1,5587
1,7	1,4496	4,3	1,6973	50	1,5616
1,8	1,5058	4,4	1,6758	55	1,5707
1,9	1,5578				

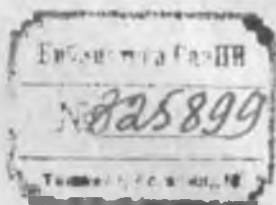
Продолжение табл. 3

x	Slx	x	Slx	x	Slx
2.0	1,6054	4,5	1,6541	60	1,5867
2.1	1,6487	4,6	1,6325	65	1,5792
2.2	1,6876	4,7	1,6110	70	1,5616
2.3	1,7222	1,5 π	1,6089	75	1,5586
2.4	1,7525	4,8	1,5900	80	1,5723
		4,9	1,5696	85	1,5824
2.5	1,7785				
2.6	1,8004	5.0	1,5499	90	1,5757
2.7	1,8182	6	1,4247	95	1,5630
2.8	1,8321	2 π	1,4182	100	1,5622
2.9	1,8422	7	1,4546	110	1,5799
		8	1,5742	120	1,5640
3.0	1,8487	9	1,6650	130	1,5737
3.1	1,8517				
π	1,8519	10	1,6583		
3.2	1,8514	11	1,5783		
3.3	1,8419	12	1,5050		
3.4	1,8419	13	1,4994		
		14	1,5562		
3.5	1,8331				
3.6	1,8219	15	1,6182		
3.7	1,8086	20	1,5482		
3.8	1,7934	25	1,5315		
3.9	1,7765	30	1,5668		

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А., Теория автоматического регулирования двигателей, ГТТИ, 1952.
2. Андронов А. А., Вознесенский И. К., Теория автоматического регулирования, АН СССР, 1949.
3. Блох З. Ш., Динамика линейных систем автоматического регулирования машин, ГТТИ, 1952.
4. Вознесенский И. Н., О регулировании машин с большим числом регулируемых параметров, «Автоматика и телемеханика», № 4—5, 1938.
5. Мееров М. В., Введение в динамику автоматического регулирования электрических машин, Изд. АН СССР, 1956.
6. Воронов А. А., Элементы теории автоматического регулирования, Воениздат, 1954.
7. Герасимов С. Г., Дудников Б. Г. и Чистяков С. Ф., Автоматическое регулирование котельных установок, ГЭИ, 1950.
8. Гарднер М. и Бернс Д., Переходные процессы в линейных системах, Гостехиздат, 1949.
9. Гольдфарб Л. С., К вопросу о теории вибрационных регуляторов, «Автоматика и телемеханика», т. IX, № 6, 1948.
10. Джеймс Х., Никольс Н., Филипс Р., Теория систем, изд. иностранной литературы, 1953.
11. Доклады сессии АН СССР по научным проблемам автоматизации производства:
 - а) научные основы построения технических средств автоматики;
 - б) основные проблемы автоматического регулирования и управления;
 - в) теория и методы расчета и проектирования механизмов и машин-автоматов и автоматических линий, изд. АН СССР, 1957.
12. Жуковский Н. Е., Собрание сочинения, т. III, Теория регулирования хода машин, Гостехиздат, 1949.
13. Ивахненко А. Г., Электроавтоматика, Гостехиздат, УССР, Киев, 1956.
14. Итоги науки (технические науки). Проблема теории нелинейных систем автоматического регулирования и управления. Сборник статей, изд. АН СССР, 1956.
15. Китов А. И., Электрические цифровые машины, изд. Сов. радио, 1951.
16. Котровский М. М. и Костогрызов В. О., Автоматическое регулирование тепловых процессов металлургического производства, Металлургиздат, 1952.
17. Лоссиевский В. Л., Автоматическое регулирование, АН СССР, 1946.
18. Кириллов И. И., Регулирование паровых и газовых турбин, Госэнергоиздат, 1952.
19. Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, ОНТИ, 1935.
20. Михайлов А. В., Метод гармонического анализа в теории регулирования, «Автоматика и телемеханика», № 3, 1938.
21. Марьяновский Д. И., Исследование устойчивости системы регулирования при введении внутренних связей, «Электричество», 1949.
22. Солодовников В. В., Метод частотных характеристик в теории регулирования, «Автоматика и телемеханика», XIII, 2, 1947.
23. Солодовников В. В., Введение в статическую динамику систем автоматического управления, ГТТИ, 1952.

24. Соколов Т. Н. и Дружинский И. А., Автоматическое управление процессами копирования, Машгиз, 1954.
25. Сотсков Б. С., Элементы автоматической и телемеханической аппаратуры, ГЭИ, 1950.
26. Трапезников Б. Е., О видах вспомогательной энергии автоматических устройств, «Известия Академии наук СССР», ОТН, № 12, 1945.
27. Труды первой научно-технической конференции молодых специалистов Института автоматики и телемеханики. Сборник работ по автоматике и телемеханике АН СССР, изд. АН СССР, 1953.
28. Джеймс Х., Никольс Н., Филиппс Р., Теория следящих систем, перевод под ред. Цыпкина Я. З., ИЛ, 1951.
29. Фатеев А. В., Основы линейной теории автоматического регулирования, Госэнергониздат, 1954.
30. Фельдбаум А. А., Электрические системы автоматического регулирования, Оборонгиз, 1957.
31. Цыпкин Я. З., Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях, Госэнергониздат, 1954.
32. Цянь-Сюэ-Сэнь, Техническая кибернетика, изд. иностранной литературы, 1956.
33. Щегляев А. В., Смельницкий С. Г., Ермаков Д. А., Новая система регулирования паровой турбины, «Электрические станции» № 8, 1950.
34. Шлядин В. М., Элементы автоматики и телемеханики, Оборонгиз, 1952.
35. Основы автоматического регулирования. Теория. Под редакцией В. В. Солодовникова, Машгиз, 1954.



ОГЛАВЛЕНИЕ

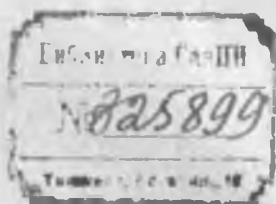
Предисловие	3
Введение	5
1. Краткий очерк развития автоматического регулирования	5
2. Значение автоматизации для народного хозяйства	7
3. Структура различных устройств автоматизации	9

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

<i>Глава I. Основные понятия и определения</i>	<i>14</i>
1. Основная терминология и основы классификации элементов систем автоматического регулирования	14
2. Классификация по функциональной зависимости регулируемой величины	16
а) Астатическое и статическое регулирование — 17 б) Программное регулирование — 22 в) Следящие и копирующие системы — 24	
3. Классификация по способу воздействия чувствительного элемента на регулирующий орган	27
а) Прямое регулирование — 27 б) Непрямое регулирование — 28	
4. Классификация по характеру воздействия регулирующего органа на объект регулирования	30
5. Одновременное регулирование нескольких параметров. Несвязанное и связанное регулирование	34
6. Скорость регулирования	36
7. Корректирующие устройства	37
8. Настройка регулятора	44
9. Регулирование по замкнутому и разомкнутому циклам	46
10. Запоздывание в элементах регулятора	49
11. Влияние трения и люфтов. Зона нечувствительности регулятора	51
12. Экстремальное регулирование	54
13. Самонастраивающиеся системы автоматического регулирования	56
14. Применение счетно-решающих машин в системах автоматического регулирования	58
<i>Глава II. Основные свойства объектов регулирования</i>	<i>61</i>
1. Аккумулирующая способность объекта	61
2. Самовыравнивание	64
3. Время разгона объекта. Постоянная времени объекта	71
<i>Глава III. Чувствительные элементы и датчики автоматических регулирующих устройств</i>	<i>76</i>
1. Чувствительные элементы уровня	79
а) Поплавки — 79 б) Термостатные трубки — 81	

24. Соколов Т. Н. и Дружинский И. А., Автоматическое управление процессами копирования, Машгиз, 1954.
25. Сотсков Б. С., Элементы автоматической и телемеханической аппаратуры, ГЭИ, 1950.
26. Трапезников Б. Е., О видах вспомогательной энергии автоматических устройств, «Известия Академии наук СССР», ОТН, № 12, 1945.
27. Труды первой научно-технической конференции молодых специалистов Института автоматики и телемеханики. Сборник работ по автоматике и телемеханике АН СССР, изд. АН СССР, 1953.
28. Джеймс Х., Никольс Н., Филипс Р., Теория следящих систем, перевод под ред. Цыпкина Я. З., ИЛ, 1951.
29. Фатеев А. В., Основы линейной теории автоматического регулирования, Госэнергоиздат, 1954.
30. Фельдбаум А. А., Электрические системы автоматического регулирования, Оборонгиз, 1957.
31. Цыпкин Я. З., Переходные и установившиеся процессы в импульсных цепях, Госэнергоиздат, 1954.
32. Цянь-Сюэ-Сэнь, Техническая кибернетика, изд. иностранной литературы, 1956.
33. Щегляев А. В., Смелянский С. Г., Ермаков Д. А., Новая система регулирования паровой турбины, «Электрические станции» № 8, 1950.
34. Шлянди В. М., Элементы автоматики и телемеханики, Оборонгиз, 1952.
35. Основы автоматического регулирования. Теория. Под редакцией В. В. Солодовникова, Машгиз, 1954.



ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
1. Краткий очерк развития автоматического регулирования	5
2. Значение автоматизации для народного хозяйства	7
3. Структура различных устройств автоматизации	9

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ЭЛЕМЕНТЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Глава I. Основные понятия и определения	14
1. Основная терминология и основы классификации элементов систем автоматического регулирования	14
2. Классификация по функциональной зависимости регулируемой величины	16
а) Астатическое и статическое регулирование — 17 б) Программное регулирование — 22 в) Следящие и копирующие системы — 24	
3. Классификация по способу воздействия чувствительного элемента на регулирующий орган	27
а) Прямое регулирование — 27 б) Непрямое регулирование — 28	
4. Классификация по характеру воздействия регулирующего органа на объект регулирования	30
5. Одновременное регулирование нескольких параметров. Несвязанное и связанное регулирование	34
6. Скорость регулирования	36
7. Корректирующие устройства	37
8. Настройка регулятора	44
9. Регулирование по замкнутому и разомкнутому циклам	46
10. Запоздывание в элементах регулятора	49
11. Влияние трения и люфтов. Зона нечувствительности регулятора	51
12. Экстремальное регулирование	54
13. Самонастраивающиеся системы автоматического регулирования	56
14. Применение счетно-решающих машин в системах автоматического регулирования	58
Глава II. Основные свойства объектов регулирования	61
1. Аккумулирующая способность объекта	61
2. Самовыравнивание	64
3. Время разгона объекта. Постоянная времени объекта	71
Глава III. Чувствительные элементы и датчики автоматических регулирующих устройств	76
1. Чувствительные элементы уровня	79
а) Поплавки — 79 б) Термостатные трубки — 81	

2. Чувствительные элементы давления	83
а) Плоские мембраны — 83 б) Гармониковые мембраны и сильфоны — 85 в) Цилиндрические пружины — 86 г) Манометрические пружины — 87	
3. Чувствительные элементы расхода	89
а) Дифференциальные манометры — 90 б) Кольцевые весы — 92 в) Коло- кола — 93	
4. Чувствительные элементы температуры	93
а) Контактные термометры — 93 б) Манометрические термометры — 94 в) Биме- таллические элементы — 95 г) Дилатометры — 96 д) Термопары — 96 е) Термо- метры сопротивления — 97	
5. Чувствительные элементы скорости	98
а) Центробежный маятниковый регулятор с продольной пружиной — 98 б) Плоский центробежный регулятор — 103 в) Гидродинамический регулятор скорости — 104	
6. Фотозлементы	105
а) Фотозлементы с внешним фотоэффектом — 106 б) Фотосопротивления — 107 в) Фотозлементы с запирающим слоем — 108	
7. Электрические преобразователи	108
а) Контактные датчики — 109 б) Реостатные датчики — 109 в) Индуктивные дат- чики — 112 г) Емкостные датчики — 115 д) Датчики скорости — 117 е) Сель- сины — 117	
Глава IV. Усилители, исполнительные механизмы, реле	129
1. Общие замечания	129
2. Усилители	129
3. Гидравлические и пневматические усилители и сервомоторы	133
а) Золотники — 133 б) Струйные трубки — 138 в) Дроссели переменного сече- ния — 142	
4. Комбинированные усилители	144
5. Сервомоторы	144
6. Электрические усилители	146
а) Магнитные усилители — 147 б) Электромашинные усилители — 151 в) Элек- тронные усилители — 156 г) Тиратронные усилители — 161	
7. Электрические релейные усилители	165
а) Контактный нуль-гальванометр с падающей дужкой — 167 б) Электронные реле — 168 в) Тиратронные реле — 169	
8. Электрические сервомоторы. Специальные схемы включения	170
а) Схема Леонарда (мотор-генератор) — 170 б) Схема с гидромуфтой — 171 в) Схема с тиратронами — 172	
Глава V. Элементы обратных и дифференцирующих связей	173
1. Введение	173
2. Элементы жесткой обратной связи	175
а) Рычажная связь — 175 б) Рычажно-пневматическая связь — 176 в) Рычажно- гидравлическая связь — 176 г) Кулачковая и рычажная связь — 177 д) Элек- трическая мостовая обратная связь — 178 е) Электромеханическая обратная связь — 179 ж) Электронная обратная связь — 180	
3. Элементы гибкой обратной связи	180
а) Гидромеханическая изодромная связь — 180 б) Сильфонная гибкая связь с дросселем — 182 в) Мостовая гибкая обратная связь — 184	
4. Дифференцирующие элементы	185
а) Электрический дифференцирующий элемент — 185 б) Тепловой дифференциру- ющий элемент — 186 в) Дифференцирующие элементы скорости — 187	

Глава VI. Системы регулирования, структурные схемы и статика	189
1. Структурные схемы	189
2. Основные схемы включения электрических датчиков в системы автоматического регулирования	192
а) Непосредственное включение на усилитель —193 б) Мостовая схема —193 в) Дифференциальная схема включения датчика —196 г) Компенсационная схема —197 д) Релейная схема —199	
3. Статические характеристики	200
4. Статика систем регулирования	205
а) Регуляторы давления с жесткой обратной связью —208 б) Релейный регулятор давления —210 в) Регулятор скорости с гибкой обратной связью —211 г) Автономное связанное регулирование двух параметров —213 д) Регуляторы соотношения расхода —219 е) Регуляторы температуры —221 ж) Электронный регулятор температуры —223	

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ДИНАМИКА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Глава VII. Уравнения движения систем автоматического регулирования . .	225
1. Метод малых отклонений	228
2. Безразмерная форма уравнений	230
3. Примеры составления уравнений отдельных звеньев	232
4. Построение системы уравнений процесса регулирования	236
а) Одноконтурные системы регулирования —237 б) Системы с жесткой обратной связью —238 в) Системы с гибкой связью —241 г) Связанные автономные системы регулирования —244	
Глава VIII. Методы решения и исследования линейных уравнений динамики систем регулирования	255
1. Виды возмущающих воздействий	261
а) Единичная толчкообразная функция —261 б) Функция единичного импульса первого порядка —262 в) Функция единичного импульса второго порядка —263 г) Периодическая функция возмущающего воздействия —264	
2. Применение преобразования по Лапласу для систем автоматического регулирования	265
а) Система без дополнительных связей —265 б) Замкнутая система с жесткой обратной связью, шунтирующей несколько звеньев —268 в) Замкнутая система с гибкой обратной связью —270 г) Интегрирование уравнения $D(p)\lambda = U(p)\varphi(t)$ методом Лапласа —272	
3. Метод частотной функции	281
а) Передаточная функция системы —282 б) Зависимость между передаточной функцией разомкнутой системы и передаточными функциями ее звеньев —282 в) Передаточная функция замкнутой системы —286 г) Частотная функция системы —287 д) Разложение в гармонический ряд функций возмущения —291 е) Амплитудно-фазовая характеристика и ее построение —293 ж) Обобщенные вещественная и мнимая частотные характеристики —297	
4. Метод переходной проводимости	301
а) Функция переходной проводимости и реакция системы на произвольное возмущение —301 б) Связь между передаточной функцией системы и функцией переходной проводимости —303 в) Определение процесса регулирования в замкнутой системе при произвольном возмущающем воздействии с помощью функции переходной проводимости —305	
5. Метод единичного импульса	309
а) Единичная импульсная функция —310 б) Реакция звена на единичный импульс. Функция веса —310 в) Связь между функцией веса, передаточной функцией и функцией переходной проводимости —311 г) Вычисление выходного сигнала с помощью функции веса —313	
6. Оценка изложенных методов	315

2. Чувствительные элементы давления	83
а) Плоские мембраны — 83 б) Гармониковые мембраны и силфоны — 85	
в) Цилиндрические пружины — 86 г) Манометрические пружины — 87	
3. Чувствительные элементы расхода	89
а) Дифференциальные манометры — 90 б) Кольцевые весы — 92 в) Коло-	
кола — 93	
4. Чувствительные элементы температуры	93
а) Контактные термометры — 93 б) Манометрические термометры — 94 в) Биме-	
таллические элементы — 95 г) Дилатометры — 95 д) Термопары — 96 е) Термо-	
метры сопротивления — 97	
5. Чувствительные элементы скорости	98
а) Центробежный маятниковый регулятор с продольной пружиной — 98	
б) Плоский центробежный регулятор — 103 в) Гидродинамический регулятор	
скорости — 104	
6. Фотоэлементы	105
а) Фотоэлементы с внешним фотоэффектом — 106 б) Фотосопротивления — 107	
в) Фотоэлементы с запирающим слоем — 108	
7. Электрические преобразователи	108
а) Контактные датчики — 109 б) Реостатные датчики — 109 в) Индуктивные дат-	
чики — 112 г) Емкостные датчики — 115 д) Датчики скорости — 117 е) Сель-	
сины — 117	
Глава IV. Усилители, исполнительные механизмы, реле	129
1. Общие замечания	129
2. Усилители	129
3. Гидравлические и пневматические усилители и сервомоторы	133
а) Золотники — 133 б) Струйные трубки — 138 в) Дроссели переменного сече-	
ния — 142	
4. Комбинированные усилители	144
5. Сервомоторы	144
6. Электрические усилители	146
а) Магнитные усилители — 147 б) Электромашинные усилители — 151 в) Элек-	
тронные усилители — 156 г) Тиратронные усилители — 161	
7. Электрические релейные усилители	165
а) Контактный нуль-гальванометр с падающей дужкой — 167 б) Электронные	
реле — 168 в) Тиратронные реле — 169	
8. Электрические сервомоторы. Специальные схемы включения	170
а) Схема Леонарда (мотор-генератор) — 170 б) Схема с гидромуфтой — 171	
в) Схема с тиратронами — 172	
Глава V. Элементы обратных и дифференцирующих связей	173
1. Введение	173
2. Элементы жесткой обратной связи	175
а) Рычажная связь — 175 б) Рычажно-пневматическая связь — 176 в) Рычажно-	
гидравлическая связь — 176 г) Кулачковая и рычажная связь — 177 д) Элек-	
трическая мостовая обратная связь — 178 е) Электромеханическая обратная	
связь — 179 ж) Электронная обратная связь — 180	
3. Элементы гибкой обратной связи	180
а) Гидромеханическая изодромная связь — 180 б) Силфонная гибкая связь	
с дросселем — 182 в) Мостовая гибкая обратная связь — 184	
4. Дифференцирующие элементы	185
а) Электрический дифференцирующий элемент — 185 б) Тепловой дифференциру-	
ющий элемент — 186 в) Дифференцирующие элементы скорости — 187	

Глава VI. Системы регулирования, структурные схемы и статика	189
1. Структурные схемы	189
2. Основные схемы включения электрических датчиков в системы автоматического регулирования	192
а) Непосредственное включение на усилитель —193 б) Мостовая схема —193 в) Дифференциальная схема включения датчика —196 г) Компенсационная схема —197 д) Релейная схема —199	
3. Статические характеристики	200
4. Статика систем регулирования	205
а) Регуляторы давления с жесткой обратной связью —208 б) Релейный регулятор давления —210 в) Регулятор скорости с гибкой обратной связью —211 г) Автономное связанное регулирование двух параметров —213 д) Регуляторы соотношения расхода —219 е) Регуляторы температуры —221 ж) Электронный регулятор температуры —223	

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ДИНАМИКА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Глава VII. Уравнения движения систем автоматического регулирования . .	225
1. Метод малых отклонений	228
2. Безразмерная форма уравнения	230
3. Примеры составления уравнений отдельных звеньев	232
4. Построение системы уравнений процесса регулирования	236
а) Одноконтурные системы регулирования —237 б) Системы с жесткой обратной связью —238 в) Системы с гибкой связью —241 г) Связанные автономные системы регулирования —244	
Глава VIII. Методы решения и исследования линейных уравнений динамики систем регулирования	255
1. Виды возмущающих воздействий	261
а) Единичная толчкообразная функция —261 б) Функция единичного импульса первого порядка —262 в) Функция единичного импульса второго порядка —263 г) Периодическая функция возмущающего воздействия —264	
2. Применение преобразования по Лапласу для систем автоматического регулирования	265
а) Система без дополнительных связей —265 б) Замкнутая система с жесткой обратной связью, шунтирующей несколько звеньев —268 в) Замкнутая система с гибкой обратной связью —270 г) Интегрирование уравнения $D(p) \lambda = U(p) \varphi(t)$ методом Лапласа —272	
3. Метод частотной функции	281
а) Передаточная функция системы —282 б) Зависимость между передаточной функцией разомкнутой системы и передаточными функциями ее звеньев —282 в) Передаточная функция замкнутой системы —284 г) Частотная функция системы —287 д) Разложение в гармонический ряд функций возмущения —291 е) Амплитудно-фазовая характеристика и ее построение —293 ж) Обобщенные вещественная и мнимая частотные характеристики —297	
4. Метод переходной проводимости	301
а) Функция переходной проводимости и реакция системы на произвольное возмущение —301 б) Связь между передаточной функцией системы и функцией переходной проводимости —303 в) Определение процесса регулирования в замкнутой системе при произвольном возмущающем воздействии с помощью функции переходной проводимости —305	
5. Метод единичного импульса	309
а) Единичная импульсная функция —310 б) Реакция звена на единичный импульс, функция веса —310 в) Связь между функцией веса, передаточной функцией и функцией переходной проводимости —311 г) Вычисление выходного сигнала с помощью функции веса —313	
6. Оценка изложенных методов	315

Глава IX. Классификация и анализ простейших звеньев	316
1. Основы классификации	316
2. Усилительное безынерционное звено	318
3. Аperiodическое звено 1-го порядка	318
4. Интегрирующее звено	320
5. Аperiodическое звено 2-го порядка	321
6. Колебательное звено	327
7. Астатическое звено 2-го порядка	334
8. Дифференцирующие звенья	336
а) Гибкое (изодромное) звено со статизмом — 336 б) Гибкое (изодромное) звено без статизма — 338 в) Собственно дифференцирующее звено — 339	
9. Звенья с отрицательным статизмом	340
10. Звенья с запаздыванием по времени	341
Глава X. Устойчивость систем автоматического регулирования	347
1. Основные положения	347
2. Алгебраические критерии устойчивости	353
а) Критерий устойчивости Рауса — 353 б) Критерий устойчивости Гурвица — 355 в) Критерий устойчивости Вышнеградского для систем 3-го порядка — 356	
3. Критерий устойчивости Михайлова	357
а) Годограф характеристического уравнения и его свойства — 357 б) Методы построения годографа Михайлова — 362	
4. Критерии устойчивости, основанные на амплитудно-фазовых характеристиках	366
а) Введение — 366 б) Амплитудно-фазовые характеристики — 368 в) Обратные амплитудно-фазовые характеристики — 373 г) Логарифмические амплитудные и фазовые частотные характеристики — 374	
5. Области устойчивости в плоскости одного и двух параметров	382
а) Основные положения. Задача Вышнеградского — 382 б) Область устойчивости в комплексной плоскости одного параметра — 385 в) Область устойчивости в плоскости двух параметров — 390	
6. Устойчивость систем с запаздывающими звеньями	395
7. Структурная устойчивость	399
а) Основные положения — 399 б) Критический коэффициент усиления системы — 404 в) Стабилизация систем регулирования введением внутренних обратных связей и воздействий по производным — 405	
Глава XI. Анализ качества процесса регулирования	414
1. Показатели качества процесса регулирования	414
2. Анализ качества регулирования по распределению корней характеристического уравнения	420
а) Характеристическое уравнение 2-й степени — 421 б) Характеристическое уравнение 3-й степени — 422	
3. Интегральные критерии качества регулирования	427
4. Частотный метод анализа качества регулирования	432
5. Критерии монотонности и отсутствие перерегулирования	441
а) Критерии монотонности — 442 б) Оценка времени регулирования монотонного переходного процесса — 444 в) Оценка перерегулирования — 445	
Глава XII. Динамика нелинейных систем и систем прерывистого регулирования	446
1. Методы анализа нелинейных систем	446
а) Метод фазовых траекторий — 447 б) Метод точечного преобразования — 462 в) Метод гармонического баланса — 465	

2. Релейные системы	471
а) Применение метода фазовых траекторий для анализа релейных систем — 473	
б) Устойчивость и автоколебания релейных систем — 481	
3. Импульсные или прерывистые системы	484
а) Анализ движения импульсных систем автоматического регулирования — 486	
б) Устойчивость импульсных систем автоматического регулирования — 490	
Глава XIII. Оптимальное регулирование и случайные процессы	492
1. Применение статистических методов в теории автоматического регулирования для учета случайных процессов	493
2. Стационарные случайные процессы	497
3. Показатели взаимной связи между двумя стационарными случайными процессами	499
4. Прохождение стационарного случайного сигнала через линейную систему автоматического регулирования	500
5. Оптимальное регулирование	501
Приложение I	511
Приложение II	515
Л и т е р а т у р а	525

Николай Николаевич Иващенко

АВТОМАТИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ

Редактор издательства *Г. Ф. Кочетов*

Технический редактор *А. Я. Тиханов*

Корректор *И. Г. Петрова*

Сдано в производство 14/VI 1958 г.

Подписано к печати 21/X 1958 г. Т-10913

Тираж 15 000 экз. Печ. листов 33,25

Уч.-изд. л. 31. Бум. л. 16,63

Формат 60×92/16. Заказ 174

Типография № 6 УПП Ленсовнархоза, Ленинград,
ул. Моисеенко, 10

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строчка	Напечатано	Должно быть
110	12-я строка		R_{11}
122	5-я строка	$\beta = (\alpha_0 + \omega_{pl})' = 0$	$\beta = \alpha_0 + \omega_{pl}' = 0$
183	11-я строка	$S_1 u' = S_2 u' = S_3 v$	$S_1 u' - S_2 u' = S_3 v$
301	3-я строка	$S_1(hf) = \int_0^h \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega$ и $S_1(b) = \int_0^b \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega$	$S_1(\omega t) = \int_0^t \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega$ и $S_1(\omega) = \int_0^1 \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega$
322	12-я строка	$T_{11} = T_{11} \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}}{2, \beta}$	$T_{11} = T_1 \frac{\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}}{2, \beta}$
323	9-я строка	$\lambda = \frac{1}{T_2^2(z + a)(z + \beta)}$	$\lambda = \frac{1}{T_2^2(z + a)(z + \beta)}$
409	На ф.м. 200	$u_c \lambda_{ax}$	$T_c \lambda_{ax}$
422	5-я строка	$a = \xi \sqrt{\alpha_0}$	$a = \xi \sqrt{a_0}$
433	9-я строка	$m(\infty) = 0$	$Im(\infty) = 0$
436	9-я строка	$-\frac{2}{\pi} H_c \frac{1}{\omega_1}$	$-\frac{2}{\pi} H_c \frac{1}{\omega_k} \times$
488	15-я строка	$\lambda_{max} = k \sum_{m=0}^{m=n} (mT) \Lambda_T (t - mT)$	$\lambda_{max} = k \sum_{m=0}^{m=n} \varphi(mT) \Lambda_T (t - mT)$
497	8-я строка	$v_2(x_1, x_2, \tau)$	$v_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2$

Николай Николаевич Иващенко
АВТОМАТИЧЕСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ

Редактор издательства Г. Ф. Кочетова

Технический редактор А. Я. Тиханов
Корректор И. Г. Петрова

Сдано в производство 14/VI 1958 г.
Подписано к печати 21/X 1958 г. Т-10913
Тираж 15 000 экз. Печ. листов 33,25
Уч.-изд. л. 31. Бум. л. 16,63
Формат 60×92/16. Заказ 174

Типография № 6 УИП Ленсовнархоза, Ленинград,
ул. Монсеенко, 10

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Столбец	Напечатано	Должно быть
110	12-я строку		R_H
122	5-я сверху	$\tilde{\beta} = (\alpha_0 + \omega_{01} t) = \theta,$	$\tilde{\beta} = \alpha_0 + \omega_{01} t - \theta,$
183	11-я сверху	$S_1 u' = S_2 u' = S_3 v,$	$S_1 u' - S_2 u' = S_3 v$
301	3-я сверху	$S_1(t) = \int_0^t \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega$ и $S_1(\omega) = \int_0^t \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega$	$S_1(\omega t) = \int_0^t \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega$ и $S_1(\omega) = \int_0^t \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega$
322	12-я сверху	$T_{12} = T_{13} \frac{\tilde{\beta} \pm \sqrt{\tilde{\beta}^2 - 1}}{\frac{2}{\beta} \tilde{\beta}},$	$T_{12} = T_{13} \frac{\tilde{\beta} \pm \sqrt{\tilde{\beta}^2 - 1}}{\frac{2}{\beta} \tilde{\beta}}$
323	9-я сверху	$\lambda = \frac{1}{T_2^2 (z + \alpha) (z + \beta)} \frac{\mu_c \lambda_{ex}}{\mu_c \lambda_{ex}}$	$\lambda = \frac{1}{T_2^2 (z + \alpha) (z + \beta)}$
409	На фиг. 209		$T_c \lambda_{ex}$
422	5-я сверху	$\alpha = \xi \sqrt{a_3},$	$\alpha = \xi \sqrt{a_3},$
433	9-я сверху	$m(\infty) = 0$	$Im(\infty) = 0$
436	9-я сверху	$-\frac{2}{\pi} \frac{H_\kappa}{\omega_\kappa} \times$	$-\frac{2}{\pi} \frac{H_\kappa}{\omega_\kappa} \times$
488	15-я сверху	$\lambda_{max} = k \sum_{m=0}^{m=\infty} (mT) \Lambda_T (t - mT)$	$\lambda_{max} = k \sum_{m=0}^{m=\infty} \varphi(mT) \Lambda_T (t - mT)$
491	8-я снизу	$v_2(x_1, x_2, \tau)$	$v_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2$

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
509	1-я и 2-я снизу	$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T}$	$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T}$
510	4-я сверху	$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T}$	$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T}$
511	18-я сверху	$\int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt = F(z)$	$\int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt = F(z) .$