

51
С 73

Ё.У. СОАТОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

3



Е. У. СОАТОВ

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

Беш жилдик

3- жилд

*Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус
таълим вазирлиги олий техника ўқув юртлари
учун дарслик сифатида тавсия этган*

ТОШКЕНТ «ЎЗБЕКИСТОН» 1998

Таъризчилар: Тошкент туқимачилик ва енгил саноат институти «Олий математика» кафедраси, Тошкент электротехника алоқа институти «Олий математика» кафедраси

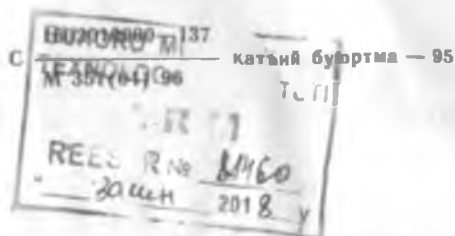
Таҳрир хайъати: Физика-математика фанлари номзодлари, доцентлар: Е. М. ХУСАНБОЕВ (масъул), А. К. ОМОНОВ, техника фанлари номзодлари, доцентлар: Р. Ж. ИСОМОВ, Ш. Р. ХУРРАМОВ

Дарслик Олий техника институтлари талабалари учун муължалланган. Унда келтирилган қисқа назарий маълумотлар, талабаларнинг ўқув жараёнини ташкил этишга ва назорат қилишга алоқадор амалий машғулоти турлари олий ўқув юр்தларининг муҳандис-техник ва кишлоқ хўжалик мутахассисликлари учун математик фанларининг амалдаги «Дастури»га тўла мос келади.

Китобнинг барча бобларида дарсхона топшириклари, мустақил ишлаш учун муължалланган масала-мисоллар, назорат ва намунавий ҳисоб топшириклари ҳамда лаборатория ишларидан олдин тегишли қисқа назарий маълумотлар келтирилиб, мос масала-мисолларни ечиш услублари кўрсатилган.

ISBN 5—640—01965—4

© «ЎЗБЕКИСТОН» нашриёти, 1996



СЎЗ БОШИ

Китобхон эътиборига ҳавола қилинаётган мазкур «Олий математика» дарслигининг учинчи жилдига чизикли алгебра ва аналитик геометрия элементлари, математик анализга кириш, бир ўзгарувчи функцияларнинг дифференциал ҳисоби, функцияларни ҳосилалар ёрдамида текшириш, ҳақиқий ўзгарувчининг вектор ва комплекс функциялари, бир ўзгарувчи функцияларнинг интеграл ҳисоби, бир неча ўзгарувчи функциялар, оддий дифференциал тенгламалар, қаторлар, Фурье алмаштиришлари, қаррали интеграллар, эгри чизикли ва сирт интеграллари, векторлар анализи, математик физика тенгламалари, эҳтимоллик назарияси ва математик статистика ҳамда сонли усуллар қисмларининг уч хил ўқув шакли (қундузги, кечки, сиртки) учун амалий машғулоти жараёнлари ва назорат турларини (дарсхона топшириқлари, мустақил ва назорат ишлари, намунавий ҳисоб топшириқлари, лаборатория ишлари ва ҳ. к.) ташкил қилишга керакли бўлган тушунчалар, формулалар, қондалар ва усуллар исботсиз келтирилган ва уларнинг моҳияти қўп микдордаги мисоллар ечимларида тушунтирилган.

Дарсликнинг учинчи жилдини ёзишда ҳам олий ўқув юр்தларининг муҳандис-техник ва қишлоқ хўжалик мутахассисликлари учун математик фанларнинг амалдаги «Дастур»ида тавсия қилинган асосий ва қўшимча адабиётлардан ҳамда ўзбек тилида чоп этилган дарслик ва ўқув қўлланмаларидан кенг фойдаланилди.

Муаллиф дарсликнинг ушбу жилдини тузишда ва унга қирилган қисмларнинг қисқа мазмунларини ёзишда, масала ва мисолларнинг ечимларини текширишда берган маслаҳатлари ва ёрдамлари учун Тошкент архитектура-қурилиш институти «Олий ва амалий математика» кафедраси аъзоларига, ҳолисона тақриз, танқид, уни ёзишда йўл қўйилган қамчиликларни қўрсатганлари учун Тошкент туқимачилик ва енгил саноат институти «Олий

математика» кафедраси, Тошкент электротехника алоқа институти «Олий математика» кафедраси жамоаларига, таҳрир хайъатининг аъзолари, доцентлар Е. М. Хусанбоев, Р. Ж. Исомов, А. К. Омонов, Ш. Р. Хуррамовларга ўз миннатдорчилигини билдиради ва уларнинг беминнат меҳнатларини эътироф этишни ўзининг бурчи деб билади.

Дарслик камчиликлардан холи эмас, албатта. Уни янада тақомиллаштиришга қаратилган танқидий фикр ва мулоҳазаларни сидқидилдан билдирган ҳамкасб ўртокларга муаллиф олдиндан ўзининг илик ҳурматини ва ташаккурини билдиради.

Муаллиф

ЧИЗИҚЛИ АЛГЕБРА ВА АНАЛИТИК ГЕОМЕТРИЯ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар.
Детерминантларни ҳисоблаш. Детерминантларнинг асосий
хоссалари. Юқори тартибли детерминантлар.

1.1.1. Тўртта сондан иборат

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

квадрат жадвал *иккинчи тартибли квадрат матрица* дейилади.

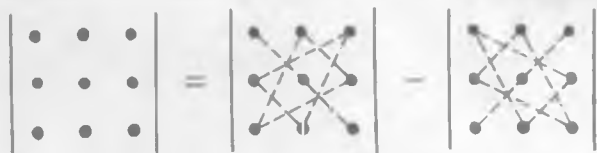
Иккинчи тартибли квадрат матрицага мос келувчи *иккинчи тартибли детерминант* деб қуйидаги белги ва тенглик билан аниқланувчи сонга айтилади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Шунга ўхшаш ушбу

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

ифода *учинчи тартибли детерминант* дейилади. Бу ифодага мусбат ишора билан кирадиган ҳар бир кўпайтма, ҳамда манфий ишорали кўпайтмалар кўпайтувчиларини алоҳида-алоҳида пункт-тир чизиклар ёрдамида туташтириб, учинчи тартибли детерминантларни ҳисоблаш учун хотирада осон сакланадиган «учбур-чаклар қоидаси»га эга бўламиз (1-шакл).



1- шакл

Детерминант a_{ik} элементининг M_{ik} минори деб, шу детерминантдан бу элемент турган қатор ва устунни ўчириш натижасида ҳосил бўлган детерминантга айтилади.

Детерминант a_{ik} элементининг алгебраик тўлдирувчиси

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

муносабат билан аниқланади.

1.1.2. Детерминантларнинг асосий хоссалари:

а) агар детерминантнинг барча сатрлари мос устунлари билан алмаштирилса, унинг қиймати ўзгармайди;

Кейинги хоссаларни таърифлашда сатрлар ва устунларни бир сўз билан қатор деб атаймиз.

б) агар детерминант ноллардан иборат қаторга эга бўлса, унинг қиймати нолга тенг бўлади;

в) агар детерминант иккита бир хил параллел қаторга эга бўлса, унинг қиймати нолга тенг бўлади;

г) агар детерминант иккита параллел қаторининг мос элементлари мутаносиб (пропорционал) бўлса, унинг қиймати нолга тенг бўлади;

д) бирор қатор элементларининг умумий кўпайтувчисини детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин;

е) агар детерминант иккита параллел қаторининг ўринлари алмаштирилса, детерминант ишорасини қарама-қаршисига ўзгарилади;

ж) детерминантнинг қиймати бирор қатор элементлари билан шу элементларга тегишли алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмалари йиғиндисига тенг.

Бу хосса детерминантнинг қатор элементлари бўйича ёйиш дейилади. Ундан детерминантларни ҳисоблашда фойдаланилади.

з) бирор қатор элементлари билан параллел қатор мос элементлари алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.

и) агар детерминант бирор қаторининг ҳар бир элементи икки қўшилувчининг йиғиндисидан иборат бўлса, у ҳолда детерминант икки детерминант йиғиндисига тенг бўлиб, уларнинг бири тегишли қатор биринчи қўшилувчилардан, иккинчиси эса иккинчи қўшилувчилардан иборат бўлади. Масалан

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + b_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

к) агар детерминантнинг бирор катори элементларига параллел каторнинг мос элементларини бирор ўзгармас сонга қўпайтириб қўшилса, детерминантнинг қиймати ўзгармайди. Масалан:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \lambda a_{11} & a_{32} + \lambda a_{12} & a_{33} + \lambda a_{13} \end{vmatrix}.$$

1.1.3. $(n \times n)$ та сондан иборат ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

жадвал n -тартибли квадрат матрица дейилади. Унинг n -тартибли детерминанти деб қуйидаги белги ва тенглик билан аниқланувчи сонга айтилади:

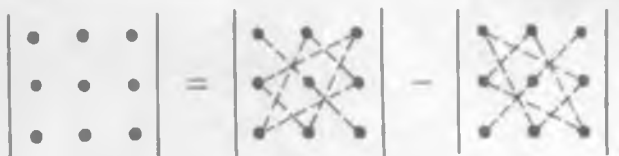
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

1.1.2 бандда келтирилган хоссаларнинг ҳаммаси исталган тартибли детерминантга тегишлидир. Ихтиёрий тартибли детерминантни ҳисоблашнинг иккита усулини келтирамыз:

1. *Детерминант тартибини пасайтириш усули* — детерминант бирор катори элементларининг биттасидан бошқаларини олдиндан нолга айлантириб олиб, шу катор бўйича ёйиш усули.

1-мисол.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= -(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 91. \end{aligned}$$



1-шакл

Детерминант a_{ik} элементининг M_{ik} минори деб, шу детерминантдан бу элемент турган қатор ва устунни ўчириш натижасида ҳосил бўлган детерминантга айтилади.

Детерминант a_{ik} элементининг алгебраик тўлдирувчиси

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$$

муносабат билан аниқланади.

1.1.2. Детерминантларнинг асосий хоссалари:

а) агар детерминантнинг барча сатрлари мос устунлари билан алмаштирилса, унинг қиймати ўзгармайди;

Кейинги хоссаларни таърифлашда сатрлар ва устунларни бир сўз билан қатор деб атаيمиз.

б) агар детерминант ноллардан иборат қаторга эга бўлса, унинг қиймати нолга тенг бўлади;

в) агар детерминант иккита бир хил параллел қаторга эга бўлса, унинг қиймати нолга тенг бўлади;

г) агар детерминант иккита параллел қаторининг мос элементлари мутаносиб (пропорционал) бўлса, унинг қиймати нолга тенг бўлади;

д) бирор қатор элементларининг умумий кўпайтувчисини детерминант белгисидан ташқарига чиқариш мумкин;

е) агар детерминант иккита параллел қаторининг ўринлари алмаштирилса, детерминант ишорасини қарама-каршисига ўзгарилади;

ж) детерминантнинг қиймати бирор қатор элементлари билан шу элементларга тегишли алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмалари йиғиндисига тенг.

Бу хосса *детерминантни* қатор элементлари бўйича *ёйиш* дейилади. Ундан детерминантларни ҳисоблашда фойдаланилади.

з) бирор қатор элементлари билан параллел қатор мос элементлари алгебраик тўлдирувчилари кўпайтмаларининг йиғиндиси нолга тенг.

и) агар детерминант бирор қаторининг ҳар бир элементи икки қўшилувчининг йиғиндисидан иборат бўлса, у ҳолда детерминант икки детерминант йиғиндисига тенг бўлиб, уларнинг бири тегишли қатор биринчи қўшилувчилардан, иккинчиси эса иккинчи қўшилувчилардан иборат бўлади. Масалан

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_1 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + b_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + b_3 & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

к) агар детерминантнинг бирор катори, элементларига параллел каторнинг мос элементларини бирор ўзгармас сонга кўпайтириб кушилса, детерминантнинг қиймати ўзгармайди. Масалан:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + \lambda a_{11} & a_{32} + \lambda a_{12} & a_{33} + \lambda a_{13} \end{vmatrix}.$$

1.1.3. $(n \times n)$ та сондан иборат ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

жадвал n - тартибли квадрат матрица дейилади. Унинг n - тартибли детерминанти деб қуйидаги белги ва тенглик билан аниқланувчи сонга айтилади:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}.$$

1.1.2 бандда келтирилган хоссаларнинг ҳаммаси исталган тартибли детерминантга тегишлидир. Ихтиёрий тартибли детерминанти ҳисоблашнинг иккита усулини келтирамиз:

1. *Детерминант тартибини пасайтириш усули* — детерминант бирор катори элементларининг биттасидан бошқаларини олдиндан нолга айлантириб олиб, шу катор бўйича ёйиш усули.

1- мисол.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= -(-1)^3 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 91. \end{aligned}$$

2. Детерминантни учбурчак кўринишга келтириш усули детерминантни шундай алмаштиришдан иборатки, унинг бош диагоналидан бир томонида ётувчи ҳамма элементлари нолга айлантирилади ва учбурчаксимон шаклга келтирилади, масалан

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Равшанки, учбурчак шаклидаги детерминантнинг киймати бош диагоналлари элементлари кўпайтмасига тенг:

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

2- мисол.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 = 48.$$

1- дарсхона топшириғи

1. Учинчи тартибли детерминантларни учбурчак кондасидан фойдаланиб ҳисобланг:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}.$$

Ж: а) -12; б) 0; в) 87.

2. Детерминантларни тартибини пасайтириш усулидан фойдаланиб ҳисобланг:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ж: а) -2; б) 0; в) 16.

3. Детерминантларни учбурчак шаклига келтириб ҳисобланг:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{vmatrix}; \quad б) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Ж: а) 48; б) 20.

4. Детерминантларни олдин соддалаштириб, кейин ҳисобланг:

$$a) \begin{vmatrix} x^2+a^2 & ax & 1 \\ y^2+a^2 & ay & 1 \\ z^2+a^2 & az & 1 \end{vmatrix}; \quad б) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}; \quad в) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Ж: а) $a(x-y)(y-z)(z-x)$; б) 640;
в) $(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$.

1- мустақил иш

Детерминантларни ҳисобланг:

$$1. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad Ж: 32. \quad 2. \begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad Ж: 24.$$

$$3. \begin{vmatrix} -4 & -3 & 5 & -2 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 1 & -6 \\ 5 & -2 & 3 & 8 \end{vmatrix} \quad Ж: 120. \quad 4. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad Ж: 192$$

2- §. Икки ва уч номаълумли чизикли тенгламалар системаси.
Кramer қондаси. Гаусс усули

1.2.1. Икки номаълумли иккита чизикли тенгламалар системаси

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

нинг бош детерминанти $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ бўлганда, ягона ечимга

эга ва у Крамер кондаси бўйича куйидаги формулалар билан ҳисобланади:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}.$$

бу ерда

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Агар $\Delta=0$ ва шу билан бирга $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}$ лардан акалли биттаси нолга тенг бўлмаса, система ечимга эга эмас.

Агар $\Delta = \Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = 0$ бўлса, у ҳолда берилган система чексиз кўп ечимга эга бўлади.

1.2.2. Уч номаълумли учта чизикли тенгламалар системаси

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

нинг бош детерминанти

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлганда ягона ечимга эга бўлиб, бу ечим Крамер формулалари билан ҳисобланади:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

бунда

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Агар $\Delta=0$ ва $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ детерминантлардан акалли биттаси нолдан фаркли бўлса, у ҳолда берилган система ечимга эга бўлмайди ва бу система *биргаликда бўлмаган система* деб аталади. Камида битта ечимга эга бўлган система *биргаликдаги система* деб аталади.

1-мисол. Чизикли тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -4; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -6. \end{cases}$$

Ечиш. Детерминантларни топамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4.$$

Детерминант $\Delta=4 \neq 0$ бўлгани учун система ягона ечимга эга ва Крамер формуласини қўллаб, уни топамиз:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 3 & 8 & -1 \\ 2 & -6 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 20 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 8;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & -3 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 8 & 20 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 20 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

1.2.3. n та номаълумли n та чизикли тенгламалар системасини n нинг катта ($n \geq 4$) кийматларида Крамер қондаси билан ечиш бир нечта юқори тартибли детерминантларни ҳисоблашни талаб этади. Шу сабабли, бундай системаларни ечишда Гаусс усулидан фойдаланиш мақсадга мувофиқ. Бу усулнинг моҳияти шундан иборатки, унда номаълумлар кетма-кет йўқотилиб, система учбурчаксимон шаклга келтирилади. Агар система учбурчаксимон шаклга келса, у ягона ечимга эга бўлади ва унинг номаълумлари охириги тенгламадан бошлаб топиб борилади. (Система чексиз куп ечимга эга бўлса, номаълумлар кетма-кет йўқотилгач, у трапециясимон шаклга келади.)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

чизиқли тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечинг.

Ечиш. Иккинчи, учинчи, тўртинчи тенгламалардан x_1 ларни йўқотамиз. Бунинг учун биринчи тенгламани кетма-кет -1 , -2 , -2 га кўпайтирамиз ва мос равишда иккинчи, учинчи, тўртинчи тенгламалар билан қўшамиз. Натижада ушбу системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_2 - 7x_3 - 2x_4 = -5, \end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Учинчи тенгламадан иккинчи тенгламани айирамиз:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 6x_3 + x_4 = 5, \\ x_3 - x_4 = 2, \end{cases}$$

сўнгра тўртинчи тенгламани -6 га кўпайтириб, учинчи тенгламага қўшсак, учбурчакли система ҳосил бўлади:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_3 - x_4 = 2, \\ 7x_4 = -7. \end{cases}$$

Бундан,

$$\begin{aligned}x_4 &= -1, \\x_3 &= 2 + x_4 = 1, \\x_2 &= -x_3 - x_4 = 0, \\x_1 &= 1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -2.\end{aligned}$$

Шундай килич,

$$x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -1.$$

2-дарсхона топшириги

1. Чизикли тенгламалар системаларини ечинг:

$$\begin{aligned}\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 = 4; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2, \\ 6x_1 - 2x_2 = 1; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 = 2; \end{cases} \\ \text{г) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0, \\ 3x_1 + x_2 = 0, \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 = 9. \end{cases}\end{aligned}$$

Ж: а) $x_1 = 2, x_2 = -1$; б) системанинг ечимлари йук; в) x_1 — ихтиёрй, $x_2 = 1 - 2x_1$; г) $x_1 = 0, x_2 = 0$; д) $x_1 = 1, x_2 = 1$.

2. Чизикли тенгламалар системаларини ечинг:

$$\begin{aligned}\text{а) } \begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 = 0, \\ x_1 - 6x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}\end{aligned}$$

Ж: а) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$; б) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$;

в) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$.

3. Тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечинг:

$$\begin{aligned}\text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_1 - 2x_2 - x_4 = -6, \\ x_2 + x_3 + 3x_4 = 16, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}\end{aligned}$$

Ж: а) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$;

б) $x_1 = 8, x_2 = 6, x_3 = 4, x_4 = 2$.

2- мустақил иш

1. Чизикли тенгламалар системаларини Крамер коидаси бўйича ечинг ва текширинг:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -5, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 17, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -7. \end{cases} \end{array}$$

2. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases} \end{array}$$

Ж: а) $x_1=0, x_2=0, x_3=0$; б) $x_1=-1, x_2=-1, x_3=1$.

3. Чизикли тенгламалар системасини Гаусс усули билан ечинг ва текширинг:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 9, \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4; \end{cases} & \text{б)} \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 3; \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{в)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 8, \\ -5x_1 + x_2 - 3x_3 = -7, \\ x_2 + x_3 - 7x_4 = -5; \end{cases} & \text{г)} \begin{cases} 2x_1 + x_3 + x_4 = 9, \\ 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 12, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 + 2x_2 - 3x_4 = -3. \end{cases} \end{array}$$

Ж: а) $x_1=2, x_2=1, x_3=-1$;

б) $x_1=0, x_2=0, x_3=1$;

в) $x_1=1, x_2=1, x_3=1, x_4=1$;

г) $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$.

3- §. Матрицалар. Матрицалар устида амаллар.

Матрицанинг ранги.

Чизикли тенгламалар системасини текшириш

1.3.1. Сонларнинг m та сатр ва n та қатордан иборат тўғри тўртбурчакли жадвали $m \times n$ ўлчамли матрица дейилади. Бу матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

кўринишда ёзилади.

Агар $m=1$ бўлса, *сатр матрица*, $n=1$ бўлса *устун матрица*, $m=n$ бўлса, *квадрат матрица* ҳосил бўлади. Квадрат A матрица учун шу матрицанинг элементларидан тузилган n - тартибли детерминантни ҳисоблаш мумкин. Бу детерминант $\det A$ ёки $|A|$ орқали белгиланади:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Агар $\det A = 0$ бўлса, у ҳолда A матрица *махсус*, $\det A \neq 0$ бўлса, *махсусмас* дейилади.

Бош диагоналида турган элементлари бирга, қолган элементлари нолга тенг бўлган квадрат матрица *бирлик матрица* деб аталади ва E билан белгиланади:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Равшанки, $\det E = 1$.

Агар ўлчамлари бир хил $m \times n$ бўлган икки матрицанинг барча мос элементлари ўзаро тенг бўлса, бу матрицалар *тенг* дейилади.

1.3.2. Бир хил $m \times n$ ўлчамли A ва B матрицанинг *йиғиндис*и деб ўша ўлчамли шундай $C = A + B$ матрицага айтиладики, унинг ҳар бир элементи A ва B матрицаларнинг мос элементлари йиғиндисидан иборат бўлади.

$m \times n$ ўлчамли A матрицанинг λ *сонга кўпайтмаси* деб, ўша ўлчамдаги $B = \lambda \cdot A$ матрицага айтиладики, бу матрица элементлари A матрица элементларини λ га кўпайтиришдан ҳосил бўлади.

$m \times k$ ўлчамли A матрицанинг $k \times n$ ўлчамли B матрицага кўпайтмаси деб, $m \times n$ ўлчамли шундай $C = A \cdot B$ матрицага айтиладики, унинг c_{ij} элементи A матрицанинг i -сатри элементлари-ни B матрицанинг j -устунидаги мос элементларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг, яъни

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}.$$

Агар $AB = BA$ бўлса, у ҳолда A ва B матрицалар ўрни алмашинадиган ёки коммутатив матрицалар дейилади.

1-мисол. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

матрицаларнинг AB ва BA кўпайтмаларини топинг.

Ечиш. AB матрица 2×2 ўлчамга эга бўлади:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 4 & 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-5) \\ 2 \cdot 2 + (-4) \cdot (-1) + 5 \cdot 4 & 2 \cdot (-1) + (-4) \cdot 3 + 5 \cdot (-5) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ 28 & -39 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

BA матрица 3×3 ўлчамга эга бўлади:

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-4) & 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 5 \\ (-1) \cdot 3 + 3 \cdot 2 & (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-4) & (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot 5 \\ 4 \cdot 3 + (-5) \cdot 2 & 4 \cdot 1 + (-5) \cdot (-4) & 4 \cdot (-2) + (-5) \cdot 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 6 & -9 \\ 3 & -13 & 17 \\ 2 & 24 & -33 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$AB \neq BA$ бўлганлиги сабабли A ва B матрицалар коммутатив эмас.

1.3.3. Агар квадрат матрица махсусмас бўлса, у ҳолда $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ тенгликни қаноатлантирувчи ягона A^{-1} матрица мавжуд бўлади ва у A матрицага тескари матрица дейилади. A матрицанинг A^{-1} тескари матрицаси қуйидагича аниқланади:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Бу ерда A_{ik} A матрица детерминанти a_{ik} элементининг алгебраик тўлдирувчиси.

2-мисол. Берилган

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

матрицага тескари матрицани топинг.

Ечиш. Матрицанинг детерминантини ҳисоблаймиз:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 7 - 1 \cdot (-6) = -4 \neq 0.$$

Демак, A матрица махсусмас матрица экан. Энди A_{ik} алгебраик тўлдирувчиларни ҳисоблаймиз:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4; A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8; A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 9; A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6; A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10; A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

Тескари матрицани тузамиз:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 7/4 & -9/4 & 5/4 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$AA^{-1} = A^{-1}A = E$ эканини текшириш мумкин. **TEKNOLOGIYA INSTITUTI**
1.3.4. n та номаълумли n та чизикли тенгламалар системаси

ни матрица кўринишда

каби ёзиш мумкин, бунда

Агар A махсусмас матрица, яъни $\det A \neq 0$ бўлса, у ҳолда бу системанинг матрица шаклидаги ечими ушбу кўринишга эга бўлади:

1.3.5. *A* матрицанинг *rang*i деб, унинг нолдан фаркли минорларининг энг катта тартибига айтилади ва $u\ rang\ (A)$ каби белгиланадн.

Матрицани куйидаги алмаштиришлар элементар алмашти-
ришлар деб аталади:

- а) факат ноллардан иборат сатрни (устунни) учирish;
б) иккита сатрнинг (устуннинг) уринларини алмаштириш;
в) бир сатр (устун)нинг барча элементларини бирор кўпай-
тувчига кўпайтириб, бошқа сатр (устун)нинг мос элементларига
кўшиш;

г) сатр (устун)нинг барча элементларини нолдан фаркли бир хил сонга кўпайтириш.

Элементар алмаштиришлар матрица рангини ўзгартирмайди. Шу сабабли, элементар алмаштиришлардан фойдаланиб, матрицани диагонал элементларидан ташқари барча элементлари нолга тенг бўладиган қўринишга келтириш мумкин. Бу ҳолда матрица ранги диагоналдаги нолга тенг бўлмаган элементлари сонига тенг бўлади.

3- м и с о л. Матрица рангини топинг:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Ечиш. Матрица устида элементар алмаштиришларни бажарамиз:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -4 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & -10 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & -11 & 22 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ҳосил қилинган матрицанинг ранги 2 га тенг, демак, берилган A матрицанинг ранги ҳам 2 га тенг бўлади:

1.3.6. Кронекер—Капелли теоремаси. n та номатлумли m та чизикли тенгламалар системаси

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

биргаликда булиши учун

$$\text{rang } A = \text{rang } B$$

булиши зарур ва етарлидир. Бу ерда

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

системанинг асосий матричаси,

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

системанинг кенгайтирилган матричаси. Агар $\text{rang } A = n$ бўлса, у ҳолда системанинг детерминанти нолдан фаркли бўлиб, у ягона ечимга эга бўлади; агар $\text{rang } A < n$ бўлса, у ҳолда система ($n - \text{rang } A$) та ихтиёрий параметрга боғлиқ бўлган чексиз кўп ечимга эга бўлади.

Агар барча b_i озод ҳадлар нолга тенг бўлса, у ҳолда тенгламалар системаси бир жинсли дейилади. Бундай тенгламалар системасида ҳар доим $\text{rang } A = \text{rang } B$, шу сабабли бир жинсли система биргаликда бўлади. Бир жинсли тенгламалар системасини $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$ кийматлар қаноатлантиради, лекин A матрицанинг ранги номаълумлар сони n дан кичик бўлганда унинг детерминанти нолга тенг бўлиб, система нолмас ечимга эга бўлади.

4-мисол: Ушбу

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 &= 4, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_4 &= 0, \\ 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

чизикли тенгламалар системаси биргаликдалигини аниқланг.

Ечиш. Берилган системанинг A асосий ва B кенгайтирилган матрицаларини тузамиз:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Сатрлар устида тегишли элементар алмаштиришларни бажариб, бу матрицаларнинг рангини топамиз:

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 9 & -1 & -12 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & -5 & 9 & -1 & -12 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \end{aligned}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 5 \\ 0 & 5 & -9 & 1 & 12 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & -11 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3/11 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -56/11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 42/11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 29/11 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -56/11 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -56/11 \end{pmatrix}$$

Шундай қилиб, $\text{rang} B = 4$, $\text{rang} A = 3$, яъни $\text{rang} B \neq \text{rang} A$.
 Демак, система биргаликда эмас.
 5-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

бир жинсли системани ечинг.

Ечиш. A матрицанинг рангини ҳисоблаймиз:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 13 & -16 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 13 & -16 \\ 0 & 13 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 13 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 13 & -16 \\ 0 & 13 & -16 \end{pmatrix}$$

$\text{rang} A = 2 < 3$ (3 — номаълумлар сони), чунки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 13 \end{vmatrix} = 13 \neq 0.$$

Демак, система ҳолмас ечимларга эга ва системанинг детерминанти

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -36 + 80 - 1 - 12 - 15 - 16 = 80 - 80 = 0$$

булгани сабабли улар чексиз кўпдир. Системанинг дастлабки икки тенгламасини ечамиз:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

Бу системада x_3 ли ҳадларни ўнг томонга ўтказамиз:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = x_3 \\ x_1 - 3x_2 = -5x_3 \end{cases}$$

Бу системани Крамер қондасидан фойдаланиб ечамиз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 4 = -13,$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} x_3 & 4 \\ -5x_3 & -3 \end{vmatrix} = -3x_3 + 20x_3 = 17x_3,$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 3 & x_3 \\ 1 & -5x_3 \end{vmatrix} = -15x_3 - x_3 = -16x_3.$$

Шундай қилиб, $x_1 = -\frac{17x_3}{13}$; $x_2 = \frac{16x_3}{13}$; $x_3 = 13t$ бўлсин (t — ихтиёрий мутаносиблик коэффициент). У ҳолда $x_1 = -17t$; $x_2 = 16t$; $x_3 = 13t$. t га ихтиёрий қийматларни бериб, чексиз кўп ечимларни ҳосил қиламиз.

3-дарсхона топшириғи

1. Агар

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

булса, $3A + 2B$ ни ҳисобланг.

$$\text{Ж: } 3A + 2B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$

2. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ва} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

матрицалар берилган. AB ва BA ларни топинг.

$$\text{Ж: } AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 11 \\ 0 & -11 & 19 \\ 13 & 13 & 29 \end{pmatrix}; \quad BA = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 30 \\ -13 & -2 & -8 \\ 21 & 3 & 18 \end{pmatrix}$$

3. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицага тескари A^{-1} матрицани топинг

$$\text{Ж: } A^{-1} = -\frac{1}{13} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -8 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Агар

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

бўлса, A нинг рангини элементар алмаштиришлар ёрдамида топинг.

Ж: $\text{rang} A = 3$.

5. Тенгламалар системасининг биргаликда бўлиш-бўлмаслигини текширинг. Агар система биргаликда бўлса, уни матрица усули билан ечинг:

$$\text{a) } \begin{cases} 4x + 2y - z = -9, \\ x + 2z = 5, \\ x - 3y + z = 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ 3x + y - 3z = 1, \\ 5x - 2y - 2z = 4. \end{cases}$$

Ж: а) $x = -1$, б) система биргаликда эмас.

$$\begin{aligned} y &= -1, \\ z &= 3; \end{aligned}$$

6. Бир жинсли системани ечинг:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Ж: $x_1 = 17t$; $x_2 = 2t$; $x_3 = -7t$ ($-\infty < t < +\infty$).

3- мустақил иш

1. Агар

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & -8 \\ -3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

бўлса, $(A+3B)^2$ ни топинг.

$$\text{Ж: } \begin{pmatrix} 96 & 12 & 8 \\ -18 & 54 & -8 \\ 51 & 85 & 111 \end{pmatrix}.$$

2. Агар

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

бўлса, A га тескари A^{-1} матрицани топинг ва $AA^{-1}=A^{-1}A=E$ эканига ишонч ҳосил қилинг.

$$\text{Ж: } A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. Тенгламалар системасининг биргаликда бўлиш-бўлмаслигини текширинг. Агар у биргаликда бўлса, уни матрица усули билан ечинг:

$$\begin{cases} 3x - y + z = 12, \\ x + 2y + 4z = 6, \\ 5x + y + 2z = 3. \end{cases} \quad \text{Ж: } x=0, y=-7, z=5.$$

4. Бир жинсли системанинг нолмас ечимлари бор-йўқлигини аниқланг, агар бор бўлса, уларни топинг:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 4x_1 - 11x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{Ж: } x_1 = -7t; x_2 = 2t; x_3 = 5t.$$

1- назорат иши

1. Олдин бирор қатор элементларининг биттасидан бошқасини нолларга айлантириб, детерминантни тартибини пасайтириш усули билан ҳисобланг:

$$1.1. \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$1.2. \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & -4 \\ -2 & 4 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1.3. \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$1.4. \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 6 & 4 & -8 \\ -2 & 4 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$1.5. \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$1.6. \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$1.7. \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & 3 \\ -4 & 3 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$1.8. \begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$1.9. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$1.10. \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1.11. \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$1.12. \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \\ 3 & 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$1.13. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$1.14. \begin{vmatrix} 5 & -8 & -4 & 7 \\ 0 & -5 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

$$1.15. \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 & 5 \\ 4 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$1.16. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -3 \\ -4 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$1.17. \begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$1.18. \begin{vmatrix} 8 & 5 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$1.19. \begin{vmatrix} 1 & 4 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$1.20. \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 & 4 \\ -9 & 3 & 2 & -7 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 7 & -4 \end{vmatrix}$$

$$1.21. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & -7 \\ 5 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -8 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$1.22. \begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$1.23. \begin{vmatrix} 3 & -7 & 2 & 1 \\ -8 & 3 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & -5 \end{vmatrix}$$

$$1.24. \begin{vmatrix} 8 & 4 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 1 \\ 5 & -1 & 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$1.25. \begin{vmatrix} 8 & -1 & -1 & 5 \\ -5 & 1 & 10 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & -5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$1.26. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$1.27. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & -2 \\ -7 & 2 & 7 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

$$1.28. \begin{vmatrix} 6 & 9 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 10 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$1.29. \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -4 & 3 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \\ -5 & 3 & -7 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$1.30. \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 & 1 \\ 13 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Чизикли тенгламалар системасини Крамер формулаларидан фойдаланиб ечинг:

$$2.1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 9, \\ 4x_2 + 11x_3 = 1, \\ 7x_1 - 5x_2 = -1. \end{cases}$$

$$2.2. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 27, \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 70, \\ 3x_1 - x_3 = -2. \end{cases}$$

$$2.3. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 46, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_1 - 7x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases}$$

$$2.4. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

$$2.5. \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 21, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$$

$$2.6. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 43, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 = 13. \end{cases}$$

$$2.7. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -2. \end{cases}$$

$$2.8. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 - 5x_2 - 8x_3 = 23. \end{cases}$$

$$2.9. \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 12, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 9, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -15. \end{cases}$$

$$2.10. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 16, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$2.11. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -6, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

$$2.12. \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 19, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -10, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$$

$$2.13. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 19. \end{cases}$$

$$2.14. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 16, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -10, \\ 2x_1 - 3x_3 = 4. \end{cases}$$

$$2.15. \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 = -7. \end{cases}$$

$$2.17. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7, \\ x_1 - 3x_3 = 11. \end{cases}$$

$$2.19. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 14. \end{cases}$$

$$2.21. \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -13, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

$$2.23. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -6, \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 = -2, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3. \end{cases}$$

$$2.25. \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

$$2.27. \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -10, \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

$$2.29. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -20, \\ x_1 - x_2 = 2, \\ 4x_1 + x_3 = -2. \end{cases}$$

$$2.16. \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -10. \end{cases}$$

$$2.18. \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 38. \end{cases}$$

$$2.20. \begin{cases} x_1 - 3x_2 = -10, \\ 4x_1 + 3x_3 = -7, \\ 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 38. \end{cases}$$

$$2.22. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -13, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 14. \end{cases}$$

$$2.24. \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 23, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 15. \end{cases}$$

$$2.26. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 24, \\ 4x_1 - x_2 = 18. \end{cases}$$

$$2.28. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2. \end{cases}$$

$$2.30. \begin{cases} 6x_1 + x_2 + x_3 = 16, \\ x_2 - 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 31. \end{cases}$$

3. 1 матрица берилган. A^{-1} тескари матрицани топинг ва $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ эканини текширинг:

$$3.1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$3.3. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3.5. \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3.7. \begin{pmatrix} -5 & 7 & -4 \\ 8 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3.9. \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3.11. \begin{pmatrix} 3 & -3 & 4 \\ -1 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3.13. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 8 \\ 1 & -5 & 5 \\ -2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$3.15. \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3.17. \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3.19. \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$3.21. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$3.2. \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3.4. \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3.6. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3.8. \begin{pmatrix} -1 & 8 & 1 \\ -1 & 5 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3.10. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 9 & 7 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3.12. \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 7 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$3.14. \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ -7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3.16. \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3.18. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$3.20. \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3.22. \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3.23. \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3.24. \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 11 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$3.25. \begin{pmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 9 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$3.26. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$3.27. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3.28. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 1 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$3.29. \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -4 & 9 & 4 \\ 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$3.30. \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \\ -3 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. Берилган A матрица рангини топинг:

$$4.1. \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 61 \\ 2 & 5 & 1 & -23 \\ 17 & -10 & 20 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4.2. \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$4.3. \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & 1 & 1 \\ 5 & -8 & -2 & 8 & 3 \\ -2 & -1 & -10 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4.4. \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$4.5. \begin{pmatrix} 5 & -5 & 10 & 12 \\ 3 & 1 & 7 & 11 \\ 1 & 7 & 4 & 30 \end{pmatrix}.$$

$$4.6. \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4.7. \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 8 & 6 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4.8. \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & -6 \\ 4 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$4.9. \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -8 & -5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4.10. \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$4.11. \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$4.12. \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$4.13. \begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 7 & -6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4.14. \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4.15. \begin{pmatrix} 7 & 5 & -3 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4.16. \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$4.17. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4.18. \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4.19. \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & -9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4.20. \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4.21. \begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 & 9 \\ 2 & 5 & 0 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4.22. \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$4.23. \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4.24. \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & -1 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4.25. \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$4.26. \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4.27. \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$4.28. \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4.29. \begin{pmatrix} 6 & 2 & -10 & 4 \\ -5 & -7 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$4.30. \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & -5 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Бир жинсли тенгламалар системасини ечинг:

$$5.1. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.2. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.3. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.5. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 14x_2 + 15x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.7. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.9. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.11. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 - 9x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.13. \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.15. \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 7x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.17. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.19. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.21. \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.4. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.6. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.8. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.10. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.12. \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.14. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.16. \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.18. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.20. \begin{cases} 7x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.22. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.23. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.25. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.27. \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 7x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.29. \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.24. \begin{cases} x_1 - x_2 + 6x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.26. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.28. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$5.30. \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

1- намунавий ҳисоб топшириқлари

1. Берилган детерминантни уч усул билан ҳисобланг.

а) уни i - сатр элементлари бўйича ёйиб;

б) уни j - устун элементлари бўйича ёйиб;

в) олдин j - устундаги биттадан бошқа элементларни нолга айлантириб, сўнгра шу устун элементлари бўйича ёйиб.

$$1.1. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -5 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$i=2, j=4.$$

$$1.2. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \\ -4 & 0 & 3 & -1 \\ 6 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$i=4, j=3.$$

$$1.3. \begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$i=3, j=3.$$

$$1.4. \begin{vmatrix} -3 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$i=1, j=2.$$

$$1.5. \begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 7 & 0 \\ -5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$i=3, j=2.$$

$$1.6. \begin{vmatrix} 4 & -1 & 3 & 2 \\ -5 & 5 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 7 \\ 0 & -2 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$i=2, j=3.$$

$$1.7. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ -3 & 2 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$i=4, j=1.$$

$$1.8. \begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 & 8 \\ -6 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 3 & -3 \\ 4 & 5 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$i=2, j=2.$$

$$1.9. \begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 5 & 7 \\ -2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$i=1, j=3.$$

$$1.10. \begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$i=4, j=4.$$

$$1.11. \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}.$$

$$i=4, j=2.$$

$$1.12. \begin{vmatrix} 3 & -2 & 9 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \\ 5 & 7 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$i=1, j=4.$$

$$1.13. \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & -2 \\ 6 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$i=1, j=1.$$

$$1.14. \begin{vmatrix} 3 & -5 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & -7 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$i=3, j=1.$$

$$1.15. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 9 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$i=3, j=4.$$

$$1.16. \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$i=2, j=1.$$

$$1.17. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$i=3, j=1.$$

$$1.18. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ -5 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$i=2, j=2.$$

$$1.19. \begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 6 & 4 \\ -5 & 3 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$i=2, j=3.$$

$$1.20. \begin{vmatrix} 6 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ -5 & 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$i=4, j=4.$$

$$1.21. \begin{vmatrix} 2 & 6 & -10 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 7 \\ 5 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$i=1, j=2.$$

$$1.22. \begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -3 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$i=3, j=3.$$

$$1.23. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & -4 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$i=4, j=2.$$

$$1.24. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$i=3, j=4.$$

$$1.25. \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$i=3, j=2.$$

$$1.26. \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$i=1, j=4.$$

$$1.27. \begin{vmatrix} -6 & 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$i=4, j=3.$$

$$1.28. \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & -5 \\ 8 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$i=2, j=4.$$

$$1.29. \begin{vmatrix} 8 & -7 & 6 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$i=1, j=3.$$

$$1.30. \begin{vmatrix} 3 & 5 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 5 \\ 5 & -1 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$$

$$i=4, j=1.$$

2. A ва B матрицалар берилган.

а) AB ва BA купайтмаларни топинг; б) A^{-1} ни топинг ва $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ эканини текширинг:

$$2.1. A = \begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$2.2. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.3. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.4. A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.5. A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$2.6. A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2.7. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -9 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.8. A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.9. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.10. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.11. A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2.12. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2.13. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 6 & 9 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2.14. A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -2 \\ -4 & 3 & 2 \\ 3 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2.15. A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2.16. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2.17. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

$$2.18. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 7 & 1 & 4 \\ 6 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$2.19. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2.20. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2.21. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2.22. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.23. A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$2.24. A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -15 \\ 5 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2.25. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2.26. A = \begin{pmatrix} 11 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$2.27. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$2.28. A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2.29. A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -13 \\ 0 & 3 & 8 \\ 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \\ 8 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2.30. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Берилган тенгламалар системасининг биргаликда эканлигини текширинг, агар биргаликда бўлса, уларни: а) Крамер коидасидан фойдаланиб, б) матрица усули, в) Гаусс усули билан ечинг:

$$3.1. \text{ а) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 11, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 8. \end{cases}$$

$$3.2. \text{ а) } \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 18; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 15, \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 10. \end{cases}$$

$$3.3. \text{ а) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 17, \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 12, \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 9. \end{cases}$$

$$3.4. \text{ а) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ -4x_1 - x_2 + 3x_3 = -3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

$$3.5. \text{ а) } \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

$$3.6. \text{ а) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 - 8x_3 = 3, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 8. \end{cases}$$

$$3.7. \text{ а) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 = -5, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 17, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

$$3.8. \text{ а) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -7; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

$$3.9. \text{ а) } \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -7, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 7; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 7x_1 + x_3 = 6. \end{cases}$$

$$3.10. a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 - x_2 = 6. \end{cases}$$

$$3.11. a) \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

$$3.12. a) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -6, \\ 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$

$$3.13. a) \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 4, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

$$3.14. a) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10, \\ 5x_1 + 2x_2 - 13x_3 = 21, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 12; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 7. \end{cases}$$

$$3.15. a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 13; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 5x_3 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$$

$$3.16. a) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -10, \\ 4x_1 + 11x_3 = -29, \\ 7x_1 - 5x_2 = 7; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$3.17. a) \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 10, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = -14, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -1; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 - 7x_3 = 3, \\ 7x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 7. \end{cases}$$

$$3.18. a) \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -6, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -15, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -4; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

$$3.19. a) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -14, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -10; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

$$3.20. a) \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = -9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -15; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 4x_1 - x_2 - 5x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 8. \end{cases}$$

$$3.21. a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 9, \\ 2x_1 - 3x_2 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 9; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

$$3.22. a) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 1; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 9. \end{cases}$$

$$3.23. a) \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -2, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 7x_2 - 10x_3 = -5; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$$

$$3.24. a) \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 6, \\ 4x_1 - x_2 + 4x_3 = 4; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

$$3.25. a) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

$$3.26. a) \begin{cases} 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 + 8x_2 - 6x_3 = -13; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10. \end{cases}$$

$$3.27. a) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 11; \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -4, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 7. \end{cases}$$

$$3.28. \text{ а) } \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 23, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 19; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$3.29. \text{ а) } \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 - x_2 = -3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

$$3.30. \text{ а) } \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 5, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 = -9; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 10x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8. \end{cases}$$

4. Бир жинсли чизикли тенгламалар системаларини ечинг:

$$4.1. \text{ а) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.2. \text{ а) } \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.3. \text{ а) } \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.4. \text{ а) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.5. \text{ а) } \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.6. \text{ а) } \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.7. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.8. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.9. \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.10. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.11. \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.12. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.13. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 5x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.14. \text{ a) } \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.15. \text{ a) } \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.16. \quad \begin{array}{l} \text{a)} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases} \\ \text{б)} \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \end{array}$$

$$4.17. \quad \begin{array}{l} \text{a)} \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0; \end{cases} \\ \text{б)} \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases} \end{array}$$

$$4.18. \quad \begin{array}{l} \text{a)} \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases} \\ \text{б)} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases} \end{array}$$

$$4.19. \quad \begin{array}{l} \text{a)} \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases} \\ \text{б)} \begin{cases} 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases} \end{array}$$

$$4.20. \quad \begin{array}{l} \text{a)} \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases} \\ \text{б)} \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases} \end{array}$$

$$4.21. \quad \begin{array}{l} \text{a)} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases} \\ \text{б)} \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases} \end{array}$$

$$4.22. \quad \begin{array}{l} \text{a)} \begin{cases} 5x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases} \\ \text{б)} \begin{cases} x_1 + 7x_2 - 8x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases} \end{array}$$

$$4.23. \quad \begin{array}{l} \text{a)} \begin{cases} 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases} \\ \text{б)} \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases} \end{array}$$

$$4.24. \quad \begin{array}{l} \text{a)} \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases} \\ \text{б)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \end{array}$$

$$4.25. \text{ а) } \begin{cases} 6x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.26. \text{ а) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - 6x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.27. \text{ а) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.28. \text{ а) } \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.29. \text{ а) } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.30. \text{ а) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

4- §. Векторлар устида чизикли амаллар.

Базис. Базис бўйича ёйиш. Координаталар оркали берилган векторлар устида чизикли амаллар

1.4.1. Боши A нуктада, охири B нуктада бўлган йўналтирилган кесма *вектор* деб аталади ва у $\overline{AB}$ ёки $\vec{a}$ каби белгиланади. $\vec{a}$ векторнинг узунлиги унинг *модули* деб аталади ва $|\vec{a}|$ каби белгиланади. Охири боши билан устма-уст тушадиган вектор *ноль-вектор* дейилади ва $\vec{0}$ билан белгиланади. Бундай вектор тайин йўналишга эга эмас, унинг модули нолга тенг.

Узунлиги бирга тенг вектор *бирлик вектор* дейилади. $\vec{a}$ векторнинг бирлик вектори $\vec{a}^0$ каби белгиланади.

Бир тўғри чизикда ёки параллел тўғри чизикларда ётувчи векторлар *коллинеар векторлар* дейилади.

Агар икки вектор ўзаро коллинеар, бир хил йўналган ва модуллари тенг бўлса, бу векторлар *тенг векторлар* дейилади.

$$4.16. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.17. \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.18. \text{ a) } \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.19. \text{ a) } \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 7x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.20. \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.21. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.22. \text{ a) } \begin{cases} 5x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 7x_2 - 8x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.23. \text{ a) } \begin{cases} 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.24. \text{ a) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.25. \text{ а) } \begin{cases} 6x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 + 8x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.26. \text{ а) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - 6x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.27. \text{ а) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.28. \text{ а) } \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 - 8x_2 + 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.29. \text{ а) } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ x_1 - 8x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

$$4.30. \text{ а) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

4-§. Векторлар устида чизикли амаллар.

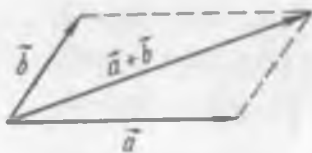
Базис. Базис бўйича ёйиш. Координаталар оркали берилган векторлар устида чизикли амаллар

1.4.1. Боши A нуктада, охири B нуктада бўлган йўналтирилган кесма *вектор* деб аталади ва у $\overline{AB}$ ёки $\vec{a}$ каби белгиланади. $\vec{a}$ векторнинг узунлиги унинг *модули* деб аталади ва $|\vec{a}|$ каби белгиланади. Охири боши билан устма-уст тушадиган вектор *ноль-вектор* дейилади ва $\vec{0}$ билан белгиланади. Бундай вектор тайин йўналишга эга эмас, унинг модули нолга тенг.

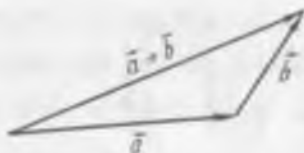
Узунлиги бирга тенг вектор *бирлик вектор* дейилади. $\vec{a}$ векторнинг бирлик вектори $\vec{a}'$ каби белгиланади.

Бир тўғри чизикда ёки параллел тўғри чизикларда ётувчи векторлар *коллинеар векторлар* дейилади.

Агар икки вектор ўзаро коллинеар, бир хил йўналган ва модуллари тенг бўлса, бу векторлар *тенг векторлар* дейилади.



2-шакл



3-шакл

Бир текисликда ёки параллел текисликларда ётувчи векторларни *компланар векторлар* дейилади.

1.4.2. Векторларни қўшиш, айтириш ва векторни сонга кўпайтириш амалларини векторлар устида *чизиқли амаллар* дейилади.

$\vec{a}$ векторнинг λ сонга *кўпайтмаси* деб, $\vec{a}$ векторга коллинеар, $\lambda > 0$ да у билан йўналиши бир хил, $\lambda < 0$ да эса йўналиши қарама-қарши ҳамда модули $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ га тенг бўлган $\lambda\vec{a}$ (ёки $a\lambda$) векторга айтилади.

$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ бирлик вектор бўлиб, у $\vec{a}$ билан бир хил йўналган.

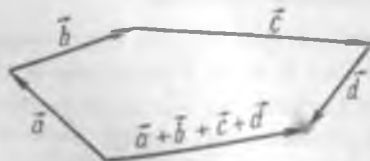
$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг *йиғиндиси* деб $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар билан компланар бўлган $\vec{a} + \vec{b}$ векторга айтилади. Икки векторнинг йиғиндиси параллелограмм (2-шакл) ёки учбурчак (3-шакл) қондалари бўйича топилади.

Бир нечта векторни қўшиш учбурчак қондасини кетма-кет қўллаш билан амалга оширилади. Натижада шу векторларга қурилган синик чизиқни ётувчи вектор бир нечта векторларнинг йиғиндиси бўлади (4-шакл).

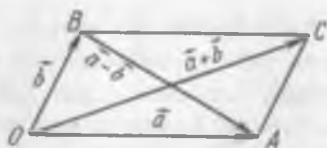
Икки $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг *айирмаси* деб, $\vec{b}$ векторга қўшилганда $\vec{a}$ векторни ҳосил қилувчи $\vec{a} - \vec{b}$ векторга айтилади (5-шакл).

$\vec{a} = \vec{OA}$ ва $\vec{b} = \vec{OB}$ векторларга қурилган параллелограммнинг OC диагонали $\vec{OC} = \vec{a} + \vec{b}$ га, BA диагонали эса $\vec{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ га тенг (6-шакл).

1.4.3. $\vec{a} = \vec{AB}$ векторнинг l ўқ бўйича *ташқил этувчиси* (компоненти) деб, шу вектор боши ва охирининг проекцияларини бирлаштирувчи A_1B_1 векторга айтилади (7-шакл).



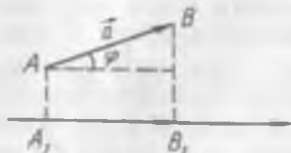
4-шакл



6-шакл



5-шакл



7-шакл

$\vec{a} = \overline{AB}$ векторнинг l ўқдаги проекцияси деб, $\overline{A_1B_1}$ векторнинг йўналиши l ўқ йўналиши билан бир хил ёки бир хил эмаслигига қараб, «+» ёки «-» ишора билан олинadиган ташкил этувчисининг узунлигига айтилади.

$$\text{пр}_l \overline{AB} = \pm |\overline{A_1B_1}|.$$

$\vec{a}$ векторнинг l ўқка проекцияси a_l деб белгиланади, яъни:

$$\text{пр}_l \vec{a} = a_l.$$

Проекцияларнинг асосий хоссалари:

а) $\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi$ ёки $a_l = |\vec{a}| \cos \varphi$.

Бунда φ — $\vec{a}$ вектор билан ўқ орасидаги бурчак;

б) $\text{пр}_l (\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l \vec{a} + \text{пр}_l \vec{b}$ ёки $\text{пр}_l (\vec{a} + \vec{b}) = a_l + b_l$;

в) $\text{пр}_l \lambda \vec{a} = \lambda \text{пр}_l \vec{a}$ ёки $\text{пр}_l \lambda \vec{a} = \lambda a_l$.

1.4.4. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ векторларнинг чизикли комбинацияси деб

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$$

формула билан аниқланувчи $\vec{a}$ векторга айтилади, бунда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — тайин сонлар.

Агар $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ векторлар системаси учун камида биттаси нолдан фарқли шундай $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ сонлар мавжуд бўлиб, $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = 0$ шарт бажарилса, у система *чизикли боғлиқ система* дейилади. Агар юқоридаги тенглик фақат $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ бўлганда ўринли бўлса, $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ векторлар системаси *чизикли эркин* дейилади.

Иккита коллинеар вектор ҳар доим чизикли боғлиқдир. Шунингдек, учта компланар вектор ҳар доим чизикли боғлиқ. Фазодаги ихтиёрий тўрт ёки ундан ортиқ векторлар ҳар доим чизикли боғлиқ.

n та чизикли боғлиқмас векторлар системаси $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ берилган бўлиб, агар ихтиёрий $\vec{a}$ векторни уларнинг чизикли комбинацияси, яъни

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$$

шаклида ифодалаш мумкин бўлса, у ҳолда берилган система *базис* дейилади.

Бу тенглик $\vec{a}$ векторнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базис бўйича *ёйилмаси* дейилади.

Фазода чизикли боғлиқ бўлмаган ҳар қандай учта $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ вектор базис ташкил қилади, шу сабабли фазодаги ҳар қандай $\vec{a}$ вектор шу базис бўйича ёйилиши мумкин:

$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ сонлар $\vec{a}$ векторнинг берилган базисдаги координаталари бўлиб, бундай ёзилади:

$$\vec{a} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}.$$

Агар базиснинг векторлари ўзаро перпендикуляр ва бирлик узунликка эга бўлса, бу базис ортонормалланган базис дейилиб, у орталар деб аталувчи $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторлар оркали белгиланади.

Агар $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ мос равишда OX, OY, OZ ўқлари бўйича йўналган орталар бўлса, у ҳолда ихтиёрий $\vec{a}$ векторнинг $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ базисдаги ёйилмаси куйидагича ифодаланади:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \text{ ёки } \vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\},$$

бунда a_x, a_y, a_z — $\vec{a}$ векторнинг координаталари. $\vec{a}$ вектор узунлиги

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

формула бўйича аникланади.

$\vec{a}$ йўналиши унинг координата ўқлари билан ҳосил қилган α, β, γ бурчаклари билан аникланади.

a векторнинг йўналтирувчи косинуслари

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

формулалар билан аникланади ва улар

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

муносабат билан боғланган.

1.4.5. $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ ва $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ векторлар берилган бўлсин. У ҳолда

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x) \vec{i} + (a_y \pm b_y) \vec{j} + (a_z \pm b_z) \vec{k},$$

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_x \vec{i} + \lambda a_y \vec{j} + \lambda a_z \vec{k}.$$

$M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ нукталар берилган бўлсин. У ҳолда $\vec{M_1 M_2}$ векторнинг орталар бўйича ёйилмаси

$$\vec{M_1 M_2} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}$$

кўринишда бўлади. M_1 ва M_2 нукталар орасидаги масофа ёки $\overline{M_1M_2}$ векторнинг узунлиги

$$|\overline{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

формула билан ҳисобланади.

M_1M_2 кесмани берилган λ нисбатда бўлувчи M нуктанинг координаталари қуйидагича аниқланади:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Хусусан, агар $\lambda = 1$ бўлса, M нукта M_1M_2 кесманинг ўртасида ётади ва унинг координаталари

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

муносабатлардан топилади.

М и с о л. $\vec{a} = \{3; 2; -5\}$ ва $\vec{b} = \{2; -3; 1\}$ векторлар берилган. Қуйидагиларни топинг:

а) $2\vec{a} - \vec{b}$ векторнинг координата ўқларидаги проекцияларини;

б) $2\vec{a} - \vec{b}$ векторнинг узунлигини;

в) $2\vec{a} - \vec{b}$ векторнинг йўналтирувчи косинусларини.

Е ч и ш. а) $2\vec{a} - \vec{b} = \{2 \cdot 3 - 2; 2 \cdot 2 - (-3); 2 \cdot (-5) - 1\} = \{4; 7; -11\}$.

б) $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4^2 + 7^2 + (-11)^2} = \sqrt{16 + 49 + 121} = \sqrt{186}.$

в) $\cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{186}}, \cos \beta = \frac{7}{\sqrt{186}}, \cos \gamma = -\frac{11}{\sqrt{186}}.$

4-дарсхона топишириғи

1. Берилган $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар бўйича уларнинг қуйидаги чизикли комбинацияларини ясанг:

а) $3\vec{a}$; б) $-\frac{1}{2}\vec{b}$; в) $2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$; г) $\frac{1}{2}\vec{a} - 3\vec{b}.$

2. ABC учбурчакда $\overline{AB} = \vec{m}$ ва $\overline{AC} = \vec{n}$ векторлар берилган. Ушбу векторларни ясанг: а) $\frac{\vec{m} + \vec{n}}{2}$; б) $\frac{\vec{m} - \vec{n}}{2}$; в) $\frac{\vec{n} - \vec{m}}{2}$; г) $-\frac{\vec{m} + \vec{n}}{2}.$

3. ABC учбурчакда AB томони P ва N нукталар билан учта тенг қисмга бўлинган: $|AP| = |PN| = |NB|$. Агар $\overline{CA} = \vec{a}$, $\overline{CB} = \vec{b}$ бўлса, $\overline{CP}$ векторни топинг.

Ж: $\overline{CP} = (2\vec{a} + \vec{b})/3.$

4. Иккита $\vec{a} = \{-1, 2, 3\}$ ва $\vec{b} = \{2, -4, 5\}$ вектор берилган. Қуйидаги векторларнинг координата ўқларидаги проекцияларини топинг:

а) $2\vec{a} + \vec{b}$; б) $\vec{a} - 3\vec{b}$; в) $3\vec{a} + 5\vec{b}$.

Ж: а) $\{0, 0, 11\}$; б) $\{-7, 14, -12\}$; в) $\{7, -14, 34\}$.

5. $\vec{a} = \{2, 3, 6\}$ векторнинг йўналтирувчи косинусларини топинг.

Ж: $\cos \alpha = \frac{2}{7}$, $\cos \beta = \frac{3}{7}$, $\cos \gamma = \frac{6}{7}$.

6. $\vec{a} = \{2, -3, 6\}$ ва $\vec{b} = \{-1, 2, -2\}$ векторлар ҳосил қилган бурчак биссектриссаси бўйича йўналган $\vec{e}$ бирлик векторнинг координаталарини топинг.

Ж: $\vec{e} = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}} \right\}$.

4- мустақил иш

1. $\vec{a} = \{8, -5, 3\}$ ва $\vec{b} = \{-4, 1, -1\}$ векторларга қурилган параллелограмм диагоналлари узунликларини топинг.

Ж: $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 14$.

2. $A(1, 2, 3)$ ва $B(3, -4, 6)$ нукталар берилган. $\overline{AB}$ вектор узунлигини ва йўналишини топинг.

Ж: $|\overline{AB}| = 7$, $\cos \alpha = \frac{2}{7}$, $\cos \beta = -\frac{6}{7}$, $\cos \gamma = \frac{3}{7}$.

3. $\vec{a} = \{3, 4, -12\}$ векторнинг ортини топинг.

Ж: $\vec{a} = \left\{ \frac{3}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{12}{13} \right\}$.

4. ABC учбурчакда $\overline{AB} = \{2, 6, -4\}$ ва $\overline{AC} = \{4, 2, -2\}$ векторлар берилган. C учидан ўтказилган медиана билан устма-уст тушувчи $\overline{CD}$ вектор узунлигини топинг.

Ж: $|\overline{CD}| = \sqrt{10}$.

5- §. Скаляр кўпайтма. Векторнинг узунлиги. Векторлар орасидаги бурчак

1.5.1. Иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторнинг скаляр кўпайтмаси деб, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ кўринишида белгиланувчи ва шу векторлар узунликлари кўпайтмасининг улар орасидаги бурчак косинуси билан кўпайтмасига тенг бўлган сонга айтилади:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Скаляр кўпайтманинг асосий хоссалари:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (ўрин алмаштириш қонуни);

б) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (тақсирот қонуни);

в) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$ (гурухлаш қонуни);

г) агар $\vec{a}=\vec{0}$, ёки $\vec{b}=\vec{0}$, ёки $\vec{a}\perp\vec{b}$ бўлса, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ (нолга тенг бўлмаган векторларнинг ортогоналлик шарти);

д) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$ ёки $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$;

е) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=|\vec{b}|\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

1.5.2. Координата ўқлари ортларининг скаляр кўпайтмаси: $\vec{i}^2=1$, $\vec{j}^2=1$, $\vec{k}^2=1$, $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$, $\vec{j}\cdot\vec{k}=0$. $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ ва $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ векторлар берилган бўлсин. У ҳолда:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_yb_y+a_zb_z;$$

$$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2.$$

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги φ бурчак ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг перпендикулярлик шарти:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ёки $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

1.5.3. $\vec{F}$ куч жисми $\vec{l}$ вектор йўналишида $\overline{BC}$ масофага кўчириш натижасида бажарган иш ушбу формула билан ҳисобланади:

$$A = \vec{F} \cdot \overline{BC} = |\vec{F}| \cdot |\overline{BC}| \cdot \cos\varphi,$$

бунда φ — кўчиш йўналиши $\vec{l}$ ва $\vec{F}$ кучнинг таъсир чизиги орасидаги бурчак.

М и с о л. Агар $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ бўлиб, улар ўзаро 60° ли бурчак ташкил этса, $2\vec{a}-\vec{b}$ ва $2\vec{a}+3\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

Е ч и ш. $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b}) = 2\vec{a}\cdot 2\vec{a} + 2\vec{a}\cdot 3\vec{b} - \vec{b}\cdot 2\vec{a} - \vec{b}\cdot 3\vec{b} =$
 $= 4\vec{a}\cdot\vec{a} + 6\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = 4\vec{a}\cdot\vec{a} + 4\vec{a}\cdot\vec{b} - 3\vec{b}\cdot\vec{b} = 4|\vec{a}|\cdot|\vec{a}| +$
 $+ 4|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 60^\circ - 3|\vec{b}|\cdot|\vec{b}| = 4\cdot 2\cdot 2 + 4\cdot 2\cdot 3\cdot \frac{1}{2} - 3\cdot 3\cdot 3 = 16 +$
 $+ 12 - 27 = 1.$

5- дарсхона топшириғи

1. Агар $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ бўлиб, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ бўлса, қуйидагиларни ҳисобланг:

- а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $\vec{a}^2$; в) $\vec{b}^2$; г) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; д) $(\vec{a}-\vec{b})^2$;
 е) $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$.

Ж: а) -6 ; б) 9 ; в) 16 ; г) 13 ; д) 37 ; е) -61 .

2. Агар $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ва $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ векторлар ўзаро $\varphi = 60^\circ$ ли бурчак ҳосил қилиб, $|\vec{a}| = 2$ ва $|\vec{b}| = 4$ бўлса, AOB учбурчакнинг OM медианаси билан $\overrightarrow{OA}$ томони орасидаги θ бурчакни топинг.

Ж: $\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{7}}$, $\theta \approx 41^\circ$.

3. $\vec{a} = \{m, 3, 4\}$ ва $\vec{b} = \{4, m, -7\}$ векторлар берилган. m нинг қандай қийматида бу векторлар перпендикуляр бўлади?

Ж: $m = 4$.

4. Учбурчакнинг учлари берилган:

$A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$.

Учбурчакнинг B учидаги ташқи бурчакни ҳисобланг.

Ж: $\frac{3\pi}{4}$.

5. $\vec{F} = \{3, -2, -5\}$ кучнинг қўйилиш нуктаси тўғри қизик бўйлаб ҳаракат қилиб, $M_1(2, -3, 5)$ ҳолатдан $M_2(3, -2, -1)$ ҳолатга ўтади. Бу кўчишда $\vec{F}$ куч бажарган ишни ҳисобланг.

Ж: $A = 31$ иш бирл.

5- мустақил иш

1. Тўртбурчакнинг учлари берилган:

$A(1, -2, 2)$, $B(1, 4, 0)$, $C(-4, 1, 1)$, $D(-5, -5, 3)$. Шу тўртбурчакнинг AC ва BD диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлишини исботланг.

2. $A(-2, 3, -4)$, $B(3, 2, 5)$, $C(1, -1, 2)$, $D(3, 2, -4)$ нукталар берилган. $\overrightarrow{AB}$ векторнинг $\overrightarrow{CD}$ вектордаги проекциясини ҳисобланг.

Ж: $-6\frac{5}{7}$.

3. Учбурчакнинг учлари берилган:

$A(1, 2, 1)$, $B(3, -1, 7)$, $C(7, 4, -2)$.

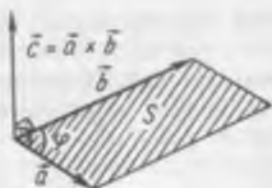
Унинг ички бурчакларини ҳисобланг.

6- §. Векторларнинг вектор ва аралаш кўпайтмалари

1.6.1. $\vec{a}$ векторнинг $\vec{b}$ векторга вектор кўпайтмаси деб $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ кўринишда белгиланувчи ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $\vec{c}$ векторга айтилади:

а) $\vec{c}$ вектор $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга перпендикуляр;

б) $\vec{c}$ вектор учидан қаралганда $\vec{a}$ вектордан $\vec{b}$ векторга энг қисқа бурилиш соат милли йўналишига тескари йўналишда



8- шакл



9- шакл

кузатилади ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг бундай жойлашувини ўнг учлик дейилади);

в) $\vec{c}$ векторнинг модули $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга қурилган параллелограммнинг S юзига тенг, яъни $|\vec{c}| = S = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$ (φ — $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак) (8- шакл).

Вектор кўпайтманинг асосий хоссалари:

а) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

б) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;

в) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$;

г) Агар $\vec{a} = \vec{0}$, ёки $\vec{b} = \vec{0}$, ёки $\vec{a} \parallel \vec{b}$ бўлса, у ҳолда $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$. Хусусан $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

1.6.2. Координата ўқлари ортларининг вектор кўпайтмаси:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}, \quad \vec{j} \times \vec{j} = \vec{0}, \quad \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}.$$

Агар

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

бўлса, у ҳолда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Агар $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар бўлса, у ҳолда

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

1.6.3. Жисм A нуктасига қўйилган $\vec{F}$ кучнинг O нуктага нисбатан $\vec{M}$ моменти (9- шакл)

$$\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{F}$$

формула билан ҳисобланади.

10-мисол. $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$ ва $\vec{b}=3\vec{i}+4\vec{k}$ векторларга қурилган параллелограммнинг юзини топинг.

Ечиш. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга қурилган параллелограммнинг S юзи шу векторлар вектор кўпайтмасининг модулига тенг: $S=|\vec{a} \times \vec{b}|$. Вектор кўпайтмани топамиз:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 8\vec{j} + 9\vec{k}$$

Демак, $S = \sqrt{(-12)^2 + (-8)^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 64 + 81} = 17$ кв. бирлик.

1.6.4. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторларнинг аралаш кўпайтмаси деб $(\vec{a} \times \vec{b})$ векторнинг $\vec{c}$ векторга скаляр кўпайтмасига айтилади.

Аралаш кўпайтманинг хоссалари:

а) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Бу хоссадан аралаш кўпайтмани $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ кўринишда белгилаш мумкин эканлиги келиб чиқади.

б) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}$, яъни кўпайтирилувчи векторлар ўринлари доиравий алмаштирилганда аралаш кўпайтма қиймати ўзгармайди;

в) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}$,

яъни қўшни иккита векторларнинг ўринлари алмаштирилганда аралаш кўпайтма ишорасини ўзгартиради;

г) агар векторлардан ақалли биттаси ноль вектор ёки $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар компланар бўлса, у ҳолда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$ бўлади.

1.6.5. Агар

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k},$$

$$\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k},$$

$$\vec{c} = c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$$

бўлса, у ҳолда

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Агар $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ векторлар компланар бўлса, у ҳолда

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

1.6.6. Аралаш кўпайтма кўпайтирилувчи векторларга қурилган параллелопипед ҳажмига ишора аниқлигида тенг, яъни $V = \pm abc$.

Мисол. Учлари $A(1, 2, 0)$, $B(-1, 2, 1)$; $C(0; -3; 2)$ ва $D(1, 0, 1)$ нукталарда бўлган пирамиданинг ҳажмини ҳисобланг.

Ечиш. Пирамиданинг A учидан чиққан кирраларига мос келувчи векторларни топамиз:

$$\overrightarrow{AB} = \{-2; 0; 1\}, \quad \overrightarrow{AC} = \{-1; -5; 2\}, \quad \overrightarrow{AD} = \{0; -2; 1\}.$$

Пирамиданинг ҳажми шу векторларга қурилган параллелопипед ҳажмининг $\frac{1}{6}$ қисмига тенг бўлганлиги сабабли

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3} \text{ куб бирлик.}$$

6- дарсхона топшириги

1. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ўзаро перпендикуляр бўлиб, $|\vec{a}| = 3$ ва $|\vec{b}| = 4$ бўлса, қуйидагиларни ҳисобланг:

а) $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|$; б) $|(3\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b})|$.

Ж: а) 24; б) 60.

2. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар ўзаро $\varphi = 45^\circ$ ли бурчак ташкил қилиб, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$ бўлса, $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b}$ ва $\vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ векторларга қурилган учбурчак юзини ҳисобланг.

Ж: $50\sqrt{2}$ кв. бирлик.

3. $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(3, 2, 1)$ нукталар берилган. $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}$ ни ҳисобланг.

Ж: $\{6, -4, -6\}$.

4. Учлари $A(7, 3, 4)$, $B(1, 0, 6)$, $C(4, 5, -2)$ нукталардан иборат учбурчак юзини ҳисобланг.

Ж: 24,5. кв. бирлик.

5. $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ нукталар бир текисликда ётадими?

6. Қуйидаги векторлар компланарми:

а) $\vec{a} = \{-1, 3, 2\}$, $\vec{b} = \{2, -3, -4\}$, $\vec{c} = \{-3, 12, 6\}$;

б) $\vec{a} = \{3, -2, 1\}$, $\vec{b} = \{2, 1, 2\}$, $\vec{c} = \{3, -1, -2\}$?

Ж: а) компланар; б) некопланар.

7. $\vec{a} = \{3, 4, 0\}$, $\vec{b} = \{0, -4, 1\}$, $\vec{c} = \{0, 2, 5\}$ векторлар қандай учлик ташкил этади?

Ж: чап учлик.

8. Пирамиданинг учлари берилган:

$A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$. $D(-5, -4, 8)$.

Учбурчакнинг D учидан туширилган баландлиги узунлигини топинг.

Ж: 11 узун. бирл.

6- мустақил иш

1. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=26$, $|\vec{a} \times \vec{b}|=72$ бўлса, $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ни ҳисобланг.

Ж: ± 30 .

2. Учбурчакнинг учлари берилган:

$A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$, $C(1, 3, -1)$.

Унинг B учидан AC томонига туширилган баландлигининг узунлигини ҳисобланг.

Ж: 5 узун. бирл.

3. $A(4, 2, -3)$ нуктага қўйилган $\vec{F}=(2, -4, 5)$ кучнинг $B(3, 2, -1)$ нуктага нисбатан куч моментини топинг.

Ж: $\vec{M}=\{-4, 3, 4\}$.

4. Учлари $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(4, 1, 3)$ нукталарда бўлган пирамида ҳажмини ҳисобланг.

Ж: 3 куб бирл.

2- назорат иши

1. $ABCD$ параллелограммда P ва N нукталар BC ва CD томонларнинг ўрталаридир. $\vec{AP}=\vec{a}$ ва $\vec{AN}=\vec{b}$ эканлиги маълум бўлса, векторларни $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орқали ифодаланг:

1.1. $\vec{AB}, \vec{AD}$.

1.2. $\vec{BP}, \vec{DN}$.

1.3. $\vec{PD}, \vec{AC}$.

1.4. $\vec{AB}, \vec{AC}$.

1.5. $\vec{BP}, \vec{AC}$.

1.6. $\vec{BN}, \vec{AC}$.

1.7. $\vec{AD}, \vec{AC}$.

1.8. $\vec{DN}, \vec{AC}$.

1.9. $\vec{BN}, \vec{NC}$.

1.10. $\vec{AB}, \vec{BD}$.

1.11. $\vec{BP}, \vec{BD}$.

1.12. $\vec{DP}, \vec{PC}$.

1.13. $\vec{AD}, \vec{BD}$.

1.14. $\vec{DN}, \vec{BD}$.

1.15. $\vec{BN}, \vec{BD}$.

1.16. $\vec{BC}, \vec{CD}$.

1.17. $\vec{PD}, \vec{BN}$.

1.18. $\vec{DP}, \vec{BD}$.

1.19. $\vec{BC}, \vec{AC}$.

1.20. $\vec{BP}, \vec{AB}$.

1.21. $\vec{PD}, \vec{AC}$.

1.22. $\vec{CD}, \vec{CA}$.

1.23. $\vec{AD}, \vec{DN}$.

1.24. $\vec{PD}, \vec{BC}$.

1.25. $\vec{BC}, \vec{BD}$.

1.26. $\vec{CB}, \vec{DN}$.

1.27. $\vec{AC}, \vec{NB}$.

1.28. $\vec{DC}, \vec{DB}$.

1.29. $\vec{CD}, \vec{BP}$.

1.30. $\vec{AD}, \vec{BN}$.

2. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ векторлар берилган. а) $\vec{d}$ векторнинг $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар оркали ёйилмасини, б) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ векторнинг $\gamma\vec{c} + \delta\vec{d}$ вектор йўналишидаги проекциясини топинг:

- 2.1. $\vec{a} = \{3, 2, -4\}, \vec{b} = \{-2, -7, 1\},$
 $\vec{c} = \{6, 20, -3\}, \vec{d} = \{-1, 4, 3\};$
 $\alpha = 4, \beta = -3, \gamma = -2, \delta = 6.$
- 2.2. $\vec{a} = \{14, 9, -1\}, \vec{b} = \{5, 7, -2\},$
 $\vec{c} = \{-3, 1, 3\}, \vec{d} = \{1, -4, 6\};$
 $\alpha = 5, \beta = 3, \gamma = -4, \delta = -2.$
- 2.3. $\vec{a} = \{1, -3, 1\}, \vec{b} = \{-2, -4, 3\},$
 $\vec{c} = \{0, -2, 3\}, \vec{d} = \{-8, -10, 13\};$
 $\alpha = 6, \beta = -7, \gamma = -1, \delta = -3.$
- 2.4. $\vec{a} = \{-3, -6, 7\}, \vec{b} = \{1, 3, 1\},$
 $\vec{c} = \{4, 5, 1\}, \vec{d} = \{7, 3, 8\};$
 $\alpha = -3, \beta = 4, \gamma = 5, \delta = -6.$
- 2.5. $\vec{a} = \{4, -5, -1\}, \vec{b} = \{-2, 4, 1\},$
 $\vec{c} = \{3, -1, 2\}, \vec{d} = \{1, -11, -9\};$
 $\alpha = -3, \beta = 5, \gamma = 1, \delta = 7.$
- 2.6. $\vec{a} = \{2, 3, 4\}, \vec{b} = \{-4, 3, -1\},$
 $\vec{c} = \{3, 1, 2\}, \vec{d} = \{4, 4, 9\};$
 $\alpha = 5, \beta = -8, \gamma = -2, \delta = 3.$
- 2.7. $\vec{a} = \{4, -3, 2\}, \vec{b} = \{3, 2, -7\},$
 $\vec{c} = \{-2, 5, 1\}, \vec{d} = \{-4, 22, -13\};$
 $\alpha = -5, \beta = -7, \gamma = -3, \delta = 2.$
- 2.8. $\vec{a} = \{-6, 4, 5\}, \vec{b} = \{-5, 3, -1\},$
 $\vec{c} = \{1, 2, 3\}, \vec{d} = \{3, -9, 2\};$
 $\alpha = 2, \beta = -6, \gamma = 4, \delta = 5.$
- 2.9. $\vec{a} = \{-4, 3, -4\}, \vec{b} = \{3, -5, 6\},$
 $\vec{c} = \{7, 2, 1\}, \vec{d} = \{-9, -16, 12\};$
 $\alpha = 6, \beta = 4, \gamma = 2, \delta = -7.$
- 2.10. $\vec{a} = \{4, -7, 4\}, \vec{b} = \{-3, 2, 1\},$
 $\vec{c} = \{9, 5, 3\}, \vec{d} = \{10, 13, -8\},$
 $\alpha = 7, \beta = 2, \gamma = -6, \delta = -5.$
- 2.11. $\vec{a} = \{-4, -2, 7\}, \vec{b} = \{-3, 3, 4\},$
 $\vec{c} = \{-1, 1, 2\}, \vec{d} = \{2, -14, 0\};$
 $\alpha = 3, \beta = -2, \gamma = -5, \delta = 3.$
- 2.12. $\vec{a} = \{-7, 4, -3\}, \vec{b} = \{2, -5, 1\},$
 $\vec{c} = \{5, 3, 2\}, \vec{d} = \{3, 12, 1\};$
 $\alpha = 3, \beta = -1, \gamma = -5, \delta = 4.$
- 2.13. $\vec{a} = \{6, -2, 1\}, \vec{b} = \{-2, 7, -5\},$
 $\vec{c} = \{3, 5, 4\}, \vec{d} = \{-5, 26, 5\};$
 $\alpha = 6, \beta = 2, \gamma = -3, \delta = 7.$

- 2.14. $\bar{a} = \{-3, 4, 5\}$, $\bar{b} = \{5, 1, -2\}$,
 $\bar{c} = \{7, 2, 1\}$, $\bar{d} = \{10, 17, 15\}$;
 $\alpha = 5$, $\beta = -2$, $\gamma = 3$, $\delta = 4$.
- 2.15. $\bar{a} = \{1, 7, 2\}$, $\bar{b} = \{-3, 4, -5\}$,
 $\bar{c} = \{1, 3, 6\}$, $\bar{d} = \{-8, -10, -10\}$;
 $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\delta = -5$.
- 2.16. $\bar{a} = \{-5, -3, -1\}$, $\bar{b} = \{3, -6, 2\}$,
 $\bar{c} = \{-2, 1, 3\}$, $\bar{d} = \{7, 22, 2\}$;
 $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $\gamma = -3$, $\delta = 4$.
- 2.17. $\bar{a} = \{2, -4, 5\}$, $\bar{b} = \{-3, 1, -8\}$,
 $\bar{c} = \{4, 2, 3\}$, $\bar{d} = \{5, 15, -1\}$,
 $\alpha = 1$, $\beta = 5$, $\gamma = -3$, $\delta = 2$.
- 2.18. $\bar{a} = \{-1, -3, 4\}$, $\bar{b} = \{-3, 2, 1\}$,
 $\bar{c} = \{6, 1, -3\}$, $\bar{d} = \{-3, -19, 14\}$;
 $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$, $\delta = 4$.
- 2.19. $\bar{a} = \{1, -2, 5\}$, $\bar{b} = \{-2, 4, 1\}$,
 $\bar{c} = \{3, 1, -3\}$, $\bar{d} = \{11, 6, 5\}$;
 $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = -4$, $\delta = -2$.
- 2.20. $\bar{a} = \{3, -4, 2\}$, $\bar{b} = \{-1, 2, -3\}$,
 $\bar{c} = \{5, 3, 1\}$, $\bar{d} = \{11, 26, -9\}$;
 $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\gamma = -3$, $\delta = 6$.
- 2.21. $\bar{a} = \{4, -5, -3\}$, $\bar{b} = \{-2, 3, 1\}$,
 $\bar{c} = \{3, -1, 2\}$, $\bar{d} = \{26, -23, -1\}$;
 $\alpha = 2$, $\beta = 4$, $\gamma = -3$, $\delta = 5$.
- 2.22. $\bar{a} = \{-5, -4, 0\}$, $\bar{b} = \{4, -3, -2\}$,
 $\bar{c} = \{0, 2, -3\}$, $\bar{d} = \{6, -14, -17\}$;
 $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $\gamma = -2$, $\delta = -3$.
- 2.23. $\bar{a} = \{4, -3, 5\}$, $\bar{b} = \{-2, 1, -3\}$,
 $\bar{c} = \{6, 1, 2\}$, $\bar{d} = \{-6, 11, -12\}$;
 $\alpha = 5$, $\beta = 2$, $\gamma = 1$, $\delta = -4$.
- 2.24. $\bar{a} = \{-4, 3, 5\}$, $\bar{b} = \{2, 7, -3\}$,
 $\bar{c} = \{-3, 0, 1\}$, $\bar{d} = \{-7, 37, 4\}$;
 $\alpha = -2$, $\beta = -4$, $\gamma = 2$, $\delta = 3$.
- 2.25. $\bar{a} = \{-4, 0, 3\}$, $\bar{b} = \{-7, -2, -4\}$,
 $\bar{c} = \{3, 1, 2\}$, $\bar{d} = \{0, 5, 22\}$;
 $\alpha = 2$, $\beta = -5$, $\gamma = -3$, $\delta = 4$.
- 2.26. $\bar{a} = \{2, -1, 0\}$, $\bar{b} = \{-5, -3, 4\}$,
 $\bar{c} = \{1, -1, 1\}$, $\bar{d} = \{-3, -2, -3\}$;
 $\alpha = 3$, $\beta = -2$, $\gamma = -4$, $\delta = 5$.
- 2.27. $\bar{a} = \{3, -2, -4\}$, $\bar{b} = \{-2, 5, 0\}$,
 $\bar{c} = \{1, 3, 4\}$, $\bar{d} = \{7, 10, -12\}$;
 $\alpha = -4$, $\beta = -6$, $\gamma = 2$, $\delta = 5$.

$$2.28. \vec{a} = \{-6, 3, -1\}, \vec{b} = \{2, -3, -5\}, \\ \vec{c} = \{-1, 1, 2\}, \vec{d} = \{-1, -5, -15\}; \\ \alpha = -1, \beta = -3, \gamma = -2, \delta = 5.$$

$$2.29. \vec{a} = \{4, 5, -3\}, \vec{b} = \{-3, 0, -2\}, \\ \vec{c} = \{2, -1, 4\}, \vec{d} = \{3, 1, 7\}; \\ \alpha = -1, \beta = 4, \gamma = 3, \delta = -2.$$

$$2.30. \vec{a} = \{2, -1, 3\}, \vec{b} = \{-3, 5, 2\}, \\ \vec{c} = \{5, 4, 1\}, \vec{d} = \{-10, -11, 11\}; \\ \alpha = 6, \beta = 3, \gamma = -4, \delta = -5.$$

3. $ABCD$ пирамиданинг учлари берилган.

а) Пирамиданинг берилган кирралари орасидаги бурчак косинусини топинг;

б) пирамиданинг берилган ёғи юзини топинг:

$$3.1. A(6, -4, 1), B(6, 3, -1), C(2, 5, 7), D(-4, -2, 3); \\ \text{а) } AB \text{ ва } AC; \text{ б) } DBC.$$

$$3.2. A(6, 4, -7), B(5, 7, -4), C(-5, -4, 2), D(4, 2, 3); \\ \text{а) } BC \text{ ва } BD; \text{ б) } ACD.$$

$$3.3. A(-2, 8, 7), B(6, -2, -3), C(8, 2, -3), D(3, 5, 3); \\ \text{а) } CA \text{ ва } CD; \text{ б) } BAD.$$

$$3.4. A(4, 4, 3), B(2, -4, 5), C(-1, 3, -4), D(4, -7, -9); \\ \text{а) } DA \text{ ва } DB; \text{ б) } ABC.$$

$$3.5. A(-5, -3, 2), B(4, -2, -4), C(5, 7, 2), D(1, 3, 4); \\ \text{а) } AB \text{ ва } AD; \text{ б) } CBD.$$

$$3.6. A(-5, 6, 4), B(-6, 2, 4), C(9, -5, 3), D(7, 2, -8); \\ \text{а) } BC \text{ ва } BA; \text{ б) } DAC.$$

$$3.7. A(1, -9, 7), B(3, -5, 1), C(-9, 3, -5), D(2, 4, 7); \\ \text{а) } CB \text{ ва } CD; \text{ б) } ABD.$$

$$3.8. A(4, -2, 9), B(3, 5, -1), C(5, 1, 7), D(-6, -3, 5); \\ \text{а) } DA \text{ ва } DC; \text{ б) } ABC.$$

$$3.9. A(4, 1, 2), B(1, -5, 4), C(9, -7, -6), D(-1, -5, -2); \\ \text{а) } AC \text{ ва } AD; \text{ б) } BCD.$$

$$3.10. A(2, -5, 1), B(3, -6, -7), C(-9, -6, 7), D(7, 2, 5); \\ \text{а) } BD \text{ ва } BA; \text{ б) } CAD.$$

$$3.11. A(2, -5, -3), B(9, 7, 3), C(8, 7, 1), D(-2, -1, 7); \\ \text{а) } CA \text{ ва } CB; \text{ б) } ABD.$$

$$3.12. A(-7, 4, 3), B(0, -4, 8), C(-3, 1, 5), D(-5, -6, -7); \\ \text{а) } DB \text{ ва } DC; \text{ б) } ABC.$$

$$3.13. A(-9, 2, 6), B(-7, 2, 3), C(5, -6, -4), D(4, -4, 5); \\ \text{а) } AB \text{ ва } AC; \text{ б) } DBC.$$

- 3.14. $A (-3, 0, 4)$, $B (8, -6, 5)$, $C (4, -4, -3)$, $D (6, 3, 5)$;
а) BC ва BD ; б) ACD .
- 3.15. $A (-3, 8, 2)$, $B (-8, 2, 4)$, $C (3, -7, 5)$, $D (5, 4, -6)$;
а) CA ва CD ; б) BCD .
- 3.16. $A (5, -3, 9)$, $B (8, -5, 1)$, $C (-7, 5, -3)$, $D (4, 2, 5)$;
а) DA ва DC ; б) BAC .
- 3.17. $A (5, -1, 6)$, $B (-6, 7, 5)$, $C (2, 1, 3)$, $D (-3, -5, -4)$;
а) AC ва AD ; б) BCD .
- 3.18. $A (1, 2, 3)$, $B (3, -3, 2)$, $C (7, -5, 4)$, $D (-3, -7, -4)$;
а) BD ва BA ; б) CAD .
- 3.19. $A (4, -3, 1)$, $B (0, -3, -5)$, $C (-3, -2, 1)$, $D (9, 4, 7)$;
а) CA ва CB ; б) ABD .
- 3.20. $A (5, -4, -2)$, $B (7, 5, 1)$, $C (3, 2, -4)$, $D (-2, -5, 3)$;
а) DB ва DC ; б) ABC .
- 3.21. $A (-7, 2, 3)$, $B (0, -2, 6)$, $C (-1, 3, 7)$, $D (-3, -4, -5)$;
а) AB ва AD ; б) CBD .
- 3.22. $A (-7, 6, 4)$, $B (-4, 1, 1)$, $C (3, -2, -6)$, $D (6, -2, 3)$;
а) BC ва BA ; б) ACD .
- 3.23. $A (-4, 1, 5)$, $B (5, -3, 2)$, $C (3, -5, -4)$, $D (8, 5, 7)$;
а) DA ва DC ; б) ABD .
- 3.24. $A (-5, 4, 2)$, $B (-4, 6, 2)$, $C (1, -5, 3)$, $D (3, 6, -4)$;
а) DA ва DC ; б) BAC .
- 3.25. $A (3, -5, 6)$, $B (6, -3, 4)$, $C (-5, 3, -2)$, $D (2, 4, 3)$;
а) AB ва AC ; б) DBC .
- 3.26. $A (4, -2, 8)$, $B (-2, 2, 3)$, $C (6, 4, 1)$, $D (-4, -3, -5)$;
а) BC ва BD ; б) ACD .
- 3.27. $A (-3, 2, 4)$, $B (-2, 5, 3)$, $C (4, -2, -3)$, $D (1, 4, 2)$;
а) CA ва CD ; б) BAD .
- 3.28. $A (-4, 4, 3)$, $B (4, -3, -2)$, $C (6, 4, -1)$, $D (1, 3, 1)$;
а) DA ва DB ; б) CAB .
- 3.29. $A (2, 2, 1)$, $B (4, -2, 3)$, $C (-3, 5, -2)$, $D (6, 5, -7)$;
а) AC ва AD ; б) BCD .
- 3.30. $A (-3, -6, 3)$, $B (6, -3, -2)$, $C (1, 2, 1)$, $D (5, 4, 3)$;
а) BD ва BA ; б) CAD .

2- намунавий ҳисоб топшириқлари

1. $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар базис ҳосил қилишини текширинг. $\vec{d}$ векторнинг шу базисдаги ёйилмасини топинг:

1.1. $\vec{a} = \{0, 3, 1\}$, $\vec{b} = \{1, -2, 0\}$, $\vec{c} = \{1, 0, 1\}$, $\vec{d} = \{2, 7, 5\}$.

1.2. $\vec{a} = \{-1, 0, 1\}$, $\vec{b} = \{3, -1, 2\}$, $\vec{c} = \{0, 1, 5\}$, $\vec{d} = \{8, -7, -13\}$.

1.3. $\vec{a} = \{4, 0, 1\}$, $\vec{b} = \{3, 1, -1\}$, $\vec{c} = \{0, -2, 1\}$, $\vec{d} = \{0, -8, 9\}$.

- 1.4. $\vec{a}=\{1, 2, -1\}, \vec{b}=\{-3, 0, 2\}, \vec{c}=\{1, 1, 4\}, \vec{d}=\{-13, 2, 18\}.$
- 1.5. $\vec{a}=\{-1, 1, 1\}, \vec{b}=\{3, 2, 0\}, \vec{c}=\{1, -1, 2\}, \vec{d}=\{11, -1, -4\}.$
- 1.6. $\vec{a}=\{2, -1, 0\}, \vec{b}=\{1, -1, 2\}, \vec{c}=\{0, 3, 1\}, \vec{d}=\{-1, 7, 0\}.$
- 1.7. $\vec{a}=\{4, 2, 1\}, \vec{b}=\{1, 0, 1\}, \vec{c}=\{2, 1, 0\}, \vec{d}=\{3, 1, 3\}.$
- 1.8. $\vec{a}=\{-3, 2, 5\}, \vec{b}=\{1, -1, 0\}, \vec{c}=\{2, 1, 0\}, \vec{d}=\{-9, 3, 15\}.$
- 1.9. $\vec{a}=\{1, 3, 0\}, \vec{b}=\{0, -2, 1\}, \vec{c}=\{1, 0, 1\}, \vec{d}=\{8, 9, 4\}.$
- 1.10. $\vec{a}=\{-1, 1, 0\}, \vec{b}=\{3, 2, -1\}, \vec{c}=\{0, 5, 1\}, \vec{d}=\{5, 0, -3\}.$
- 1.11. $\vec{a}=\{4, 1, 0\}, \vec{b}=\{3, -1, 1\}, \vec{c}=\{0, 1, -2\}, \vec{d}=\{1, -4, 1\}.$
- 1.12. $\vec{a}=\{1, -1, 2\}, \vec{b}=\{-3, 2, 0\}, \vec{c}=\{1, 2, -1\}, \vec{d}=\{8, 8, 7\}.$
- 1.13. $\vec{a}=\{-1, 1, 1\}, \vec{b}=\{3, 0, 2\}, \vec{c}=\{1, 2, -1\}, \vec{d}=\{8, -5, 7\}.$
- 1.14. $\vec{a}=\{2, 0, -1\}, \vec{b}=\{1, 2, -1\}, \vec{c}=\{0, 1, 3\}, \vec{d}=\{5, -4, 5\}.$
- 1.15. $\vec{a}=\{4, 1, 2\}, \vec{b}=\{1, 1, 0\}, \vec{c}=\{2, 0, 1\}, \vec{d}=\{3, 5, 0\}.$
- 1.16. $\vec{a}=\{2, 5, -3\}, \vec{b}=\{-1, 0, 1\}, \vec{c}=\{1, 0, 2\}, \vec{d}=\{-3, -5, 7\}.$
- 1.17. $\vec{a}=\{1, 0, 3\}, \vec{b}=\{0, 1, -2\}, \vec{c}=\{1, 1, 0\}, \vec{d}=\{7, -1, 19\}.$
- 1.18. $\vec{a}=\{0, -1, 1\}, \vec{b}=\{-1, 3, 2\}, \vec{c}=\{1, 0, 5\}, \vec{d}=\{5, -15, 0\}.$
- 1.19. $\vec{a}=\{1, 0, 4\}, \vec{b}=\{-1, 1, 3\}, \vec{c}=\{1, -2, 0\}, \vec{d}=\{-6, 2, 0\}.$
- 1.20. $\vec{a}=\{2, 1, -1\}, \vec{b}=\{0, -3, 2\}, \vec{c}=\{1, 1, 4\}, \vec{d}=\{-6, -14, -9\}.$
- 1.21. $\vec{a}=\{1, 0, 4\}, \vec{b}=\{-1, 1, 3\}, \vec{c}=\{1, -2, 0\}, \vec{d}=\{0, 7, 29\}.$
- 1.22. $\vec{a}=\{2, 1, -1\}, \vec{b}=\{0, -3, 2\}, \vec{c}=\{1, 1, 4\}, \vec{d}=\{4, -9, -14\}.$
- 1.23. $\vec{a}=\{2, 0, 3\}, \vec{b}=\{1, 1, -1\}, \vec{c}=\{-1, 2, 1\}, \vec{d}=\{-11, 11, -14\}.$
- 1.24. $\vec{a}=\{1, -2, 1\}, \vec{b}=\{-1, 0, 2\}, \vec{c}=\{-3, 1, 0\}, \vec{d}=\{16, -19, 10\}.$
- 1.25. $\vec{a}=\{1, 0, 2\}, \vec{b}=\{3, -3, 4\}, \vec{c}=\{0, 1, 1\}, \vec{d}=\{-16, 13, -25\}.$
- 1.26. $\vec{a}=\{3, 1, 0\}, \vec{b}=\{1, 2, 2\}, \vec{c}=\{1, 0, -1\}, \vec{d}=\{6, 7, 9\}.$
- 1.27. $\vec{a}=\{1, 0, -1\}, \vec{b}=\{3, -1, 2\}, \vec{c}=\{0, 1, 5\}, \vec{d}=\{-11, 10, 1\}.$
- 1.28. $\vec{a}=\{1, 0, 4\}, \vec{b}=\{-1, 3, 1\}, \vec{c}=\{1, 0, -2\}, \vec{d}=\{-1, 15, 33\}.$
- 1.29. $\vec{a}=\{1, 2, -1\}, \vec{b}=\{-3, 0, 2\}, \vec{c}=\{1, -1, 4\}, \vec{d}=\{-7, 16, -25\}.$
- 1.30. $\vec{a}=\{1, -1, 1\}, \vec{b}=\{2, 3, 0\}, \vec{c}=\{-1, 1, 2\}, \vec{d}=\{-1, -4, 10\}.$

2. A, B ва C нукталарнинг координаталари берилган.

а) $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак косинусини;

б) $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ векторнинг $\vec{a}$ вектор йўналишидаги проекциясини топинг:

2.1. $A(9, 10, 1), B(7, 6, -1), C(4, 0, -4);$

$$\vec{a} = 2\vec{AB} - 3\vec{AC}, \vec{b} = 4\vec{BC} + \vec{AC}; \alpha = 1, \beta = 2.$$

2.2. $A(0, 2, 1), B(1, 2, 0), C(0, 3, -1);$

$$\vec{a} = 3\vec{AC} + 3\vec{BC}, \vec{b} = 2\vec{AB} + 5\vec{BC}; \alpha = -1, \beta = 2.$$

- 2.3. $A(0, 4, 8), B(-5, 4, -2), C(-1, 4, 1);$
 $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}, \vec{b} = 3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}; \alpha = -2, \beta = 3.$
- 2.4. $A(3, 0, 1), B(-2, 3, 2), C(1, 1, -2);$
 $\vec{a} = 3\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}, \vec{b} = 6\overrightarrow{BC} + 5\overrightarrow{AC}; \alpha = 2, \beta = -3.$
- 2.5. $A(4, 1, -3), B(5, 1, -2), C(-1, 3, 3);$
 $\vec{a} = 4\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{CB}, \vec{b} = 7\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{BC}; \alpha = \beta = 3.$
- 2.6. $A(4, 1, 1), B(3, 1, 2), C(0, 1, -2);$
 $\vec{a} = 3\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{CA}, \vec{b} = 6\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}; \alpha = 3, \beta = 2.$
- 2.7. $A(-3, 4, -5), B(0, 1, -2), C(-1, 2, 3);$
 $\vec{a} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}, \vec{b} = 5\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{BA}; \alpha = -2, \beta = 5.$
- 2.8. $A(7, 5, -2), B(6, 0, 0), C(7, 2, 2);$
 $\vec{a} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}, \vec{b} = 2\overrightarrow{CB} + 5\overrightarrow{AC}; \alpha = -4, \beta = 2.$
- 2.9. $A(-3, -7, -3), B(-1, -3, -1), C(2, 3, 2);$
 $\vec{a} = 2\overrightarrow{BC} - 5\overrightarrow{AB}, \vec{b} = 5\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}; \alpha = -3, \beta = 1.$
- 2.10. $A(2, -1, 8), B(3, 1, 7), C(2, 0, 7);$
 $\vec{a} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}, \vec{b} = 6\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{AC}; \alpha = 5, \beta = 6.$
- 2.11. $A(-1, -1, 8), B(4, -1, -2), C(0, -1, 1);$
 $\vec{a} = 6\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB}, \vec{b} = 2\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB}; \alpha = -4, \beta = 3.$
- 2.12. $A(-2, 4, -2), B(3, 1, 0), C(0, 3, -4);$
 $\vec{a} = 3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC}, \vec{b} = 2\overrightarrow{BC} + 5\overrightarrow{CA}; \alpha = 3, \beta = -6.$
- 2.13. $A(1, 1, 4), B(-2, 1, 5), C(-1, 3, 3);$
 $\vec{a} = 4\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BC}, \vec{b} = 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}; \alpha = -5, \beta = 3.$
- 2.14. $A(4, 2, 6), B(2, 2, 8), C(-4, 2, 0);$
 $\vec{a} = 5\overrightarrow{AB} - 7\overrightarrow{AC}, \vec{b} = 2\overrightarrow{BC} + 3\overrightarrow{BA}; \alpha = 9, \beta = 12.$
- 2.15. $A(15, -12, 0), B(6, -3, 0), C(9, -6, 3);$
 $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{BC}, \vec{b} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}; \alpha = -7, \beta = 6.$
- 2.16. $A(-1, -5, -2), B(0, -6, 4), C(-1, -8, 2);$
 $\vec{a} = 3\overrightarrow{BC} + 5\overrightarrow{AB}, \vec{b} = 5\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB}; \alpha = -3, \beta = 4.$
- 2.17. $A(-1, -10, -5), B(1, -6, -3), C(0, 0, 4);$
 $\vec{a} = 2\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}, \vec{b} = 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}; \alpha = 4, \beta = -6.$
- 2.18. $A(-3, 3, 7), B(-2, 3, 6), C(-3, 2, 6);$
 $\vec{a} = 4\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \vec{b} = 2\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{BA}; \alpha = -3, \beta = 8.$
- 2.19. $A(2, -2, -8), B(5, -2, -4), C(1, -2, -1);$
 $\vec{a} = 5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}, \vec{b} = 4\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}; \alpha = -4, \beta = 1.$
- 2.20. $A(1, 2, 4), B(-4, -1, 6), C(-1, 1, 2);$
 $\vec{a} = 3\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{AB}, \vec{b} = 2\overrightarrow{BA} + 4\overrightarrow{CB}; \alpha = 3, \beta = -5.$
- 2.21. $A(1, 1, 4), B(-2, 5, 1), C(-1, 3, 3);$
 $\vec{a} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \vec{b} = 2\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AB}; \alpha = 3, \beta = -4.$
- 2.22. $A(0, 1, -2), B(3, 1, 2), C(4, 1, 1);$
 $\vec{a} = 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{BA}, \vec{b} = 3\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{AB}; \alpha = -2, \beta = 6.$

- 2.23. $A(6, -8, 10)$, $B(0, -2, 4)$, $C(2, -4, 6)$;
 $\vec{a} = 3\vec{AB} + 6\vec{CB}$, $\vec{b} = 2\vec{AC} - 5\vec{AB}$; $\alpha = 2$, $\beta = 8$.
- 2.24. $A(0, 3, 2)$, $B(-2, -1, 0)$, $C(-5, -7, -3)$;
 $\vec{a} = 5\vec{BC} - 2\vec{CA}$, $\vec{b} = 6\vec{AB} + 4\vec{AC}$; $\alpha = -2$, $\beta = 5$.
- 2.25. $A(-1, 4, 6)$, $B(0, 2, 5)$, $C(-1, 3, 5)$;
 $\vec{a} = 8\vec{AC} - 4\vec{AB}$, $\vec{b} = 2\vec{BC} - 6\vec{AB}$; $\alpha = -3$, $\beta = -4$.
- 2.26. $A(1, -2, 3)$, $B(4, -2, -1)$, $C(0, -2, 4)$;
 $\vec{a} = 2\vec{AC} + 3\vec{AB}$, $\vec{b} = 3\vec{AB} - 4\vec{BC}$; $\alpha = 2$, $\beta = 1$.
- 2.27. $A(-1, 1, 1)$, $B(-6, 4, 3)$, $C(-3, 2, -1)$;
 $\vec{a} = 4\vec{AB} - 3\vec{BC}$, $\vec{b} = \vec{AC} + \vec{AB}$; $\alpha = 4$, $\beta = -6$.
- 2.28. $A(1, 1, 4)$, $B(-2, 5, 5)$, $C(-1, 3, 3)$;
 $\vec{a} = 2\vec{AC} - 3\vec{BC}$, $\vec{b} = 2\vec{AB} + 5\vec{CA}$; $\alpha = -2$, $\beta = 6$.
- 2.29. $A(-3, -1, -2)$, $B(-4, -1, -1)$, $C(0, -1, 2)$;
 $\vec{a} = 3\vec{BC} - 4\vec{AB}$, $\vec{b} = 2\vec{AC} + 3\vec{BC}$; $\alpha = -6$, $\beta = 4$.
- 2.30. $A(5, -4, 3)$, $B(2, -1, 0)$, $C(3, -2, 1)$;
 $\vec{a} = \vec{BC} + \vec{AC}$, $\vec{b} = 2\vec{AB} - 3\vec{CA}$; $\alpha = -5$, $\beta = 3$.

3. Агар $\vec{a}$, $\vec{b}$, α , β лар маълум бўлса, $\vec{c}_1 = \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b}$ ва $\vec{c}_2 = \alpha_2 \vec{a} + \beta_2 \vec{b}$ векторларнинг коллинеар бўлиши-бўлмаслигини текширинг:

- 3.1. $\vec{a} = \{4, -3, 1\}$; $\vec{b} = \{-5, 0, 2\}$; $\alpha_1 = -2$, $\beta_1 = 5$; $\alpha_2 = -5$, $\beta_2 = 2$.
- 3.2. $\vec{a} = \{-3, 0, 5\}$; $\vec{b} = \{-7, 2, 4\}$; $\alpha_1 = -2$, $\beta_1 = 6$; $\alpha_2 = -3$, $\beta_2 = 6$.
- 3.3. $\vec{a} = \{0, -1, 2\}$; $\vec{b} = \{4, 3, -1\}$; $\alpha_1 = -3$, $\beta_1 = 1$; $\alpha_2 = -2$, $\beta_2 = 6$.
- 3.4. $\vec{a} = \{7, 1, -3\}$; $\vec{b} = \{8, 0, 5\}$; $\alpha_1 = -9$, $\beta_1 = 12$; $\alpha_2 = -4$, $\beta_2 = 3$.
- 3.5. $\vec{a} = \{8, 3, -1\}$; $\vec{b} = \{6, -1, 2\}$; $\alpha_1 = -5$, $\beta_1 = 2$; $\alpha_2 = -2$, $\beta_2 = 5$.
- 3.6. $\vec{a} = \{3, -1, 0\}$; $\vec{b} = \{9, 2, 4\}$; $\alpha_1 = -3$, $\beta_1 = 4$; $\alpha_2 = 4$, $\beta_2 = -3$.
- 3.7. $\vec{a} = \{-2, 1, 7\}$; $\vec{b} = \{3, 5, -9\}$; $\alpha_1 = 5$, $\beta_1 = 3$; $\alpha_2 = -1$, $\beta_2 = 2$.
- 3.8. $\vec{a} = \{7, 0, 6\}$; $\vec{b} = \{-2, -1, 5\}$; $\alpha_1 = 4$, $\beta_1 = -6$; $\alpha_2 = -2$, $\beta_2 = 3$.
- 3.9. $\vec{a} = \{-6, -7, 3\}$; $\vec{b} = \{4, -1, 2\}$; $\alpha_1 = -2$, $\beta_1 = 3$; $\alpha_2 = -3$, $\beta_2 = 2$.
- 3.10. $\vec{a} = \{-1, 6, 4\}$; $\vec{b} = \{0, 7, 3\}$; $\alpha_1 = -7$, $\beta_1 = 5$; $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 3$.
- 3.11. $\vec{a} = \{5, 3, 7\}$; $\vec{b} = \{4, -2, 1\}$; $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -2$; $\alpha_2 = -3$, $\beta_2 = 6$.
- 3.12. $\vec{a} = \{10, 7, 5\}$; $\vec{b} = \{6, -1, 3\}$; $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -2$; $\alpha_2 = -2$, $\beta_2 = 4$.
- 3.13. $\vec{a} = \{3, 1, 4\}$; $\vec{b} = \{-1, 3, 8\}$; $\alpha_1 = 6$, $\beta_1 = -10$; $\alpha_2 = -3$, $\beta_2 = 5$.
- 3.14. $\vec{a} = \{3, 4, 6\}$; $\vec{b} = \{-2, 0, 5\}$; $\alpha_1 = 4$, $\beta_1 = 3$; $\alpha_2 = 3$, $\beta_2 = -2$.
- 3.15. $\vec{a} = \{3, 4, 5\}$; $\vec{b} = \{-2, 9, 7\}$; $\alpha_1 = 4$, $\beta_1 = -1$; $\alpha_2 = -1$, $\beta_2 = 4$.
- 3.16. $\vec{a} = \{1, -7, 2\}$; $\vec{b} = \{-1, 2, -1\}$; $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -3$; $\alpha_2 = -2$, $\beta_2 = 6$.
- 3.17. $\vec{a} = \{4, -3, 1\}$; $\vec{b} = \{0, 7, 3\}$; $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 2$; $\alpha_2 = -2$, $\beta_2 = 4$.
- 3.18. $\vec{a} = \{2, 5, -3\}$; $\vec{b} = \{-1, 7, -2\}$; $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 3$; $\alpha_2 = 3$, $\beta_2 = 2$.
- 3.19. $\vec{a} = \{1, -2, 1\}$; $\vec{b} = \{-2, 3, 0\}$; $\alpha_1 = 5$, $\beta_1 = 3$; $\alpha_2 = -2$, $\beta_2 = 5$.
- 3.20. $\vec{a} = \{3, 2, 7\}$; $\vec{b} = \{-1, 0, 5\}$; $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = -6$; $\alpha_2 = -1$, $\beta_2 = 2$.

- 3.21. $\vec{a} = [0, -2, 6]$, $\vec{b} = [2, 4, -1]$; $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = -6$; $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = -2$.
 3.22. $\vec{a} = [5, 0, 1]$, $\vec{b} = [-2, -3, -2]$; $\alpha_1 = -3$, $\beta_1 = -1$; $\alpha_2 = 9$, $\beta_2 = 3$.
 3.23. $\vec{a} = [1, -1, 2]$, $\vec{b} = [-1, 4, 3]$; $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -2$; $\alpha_2 = -3$, $\beta_2 = 6$.
 3.24. $\vec{a} = [0, -1, 3]$, $\vec{b} = [5, -2, 1]$; $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -2$; $\alpha_2 = -2$, $\beta_2 = 4$.
 3.25. $\vec{a} = [-1, 1, 1]$, $\vec{b} = [-2, 4, 1]$; $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 4$; $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 1$.
 3.26. $\vec{a} = [7, 9, 5]$, $\vec{b} = [4, 5, 3]$; $\alpha_1 = -2$, $\beta_1 = 3$; $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = -2$.
 3.27. $\vec{a} = [-1, -1, 2]$, $\vec{b} = [-3, 2, 1]$; $\alpha_1 = -1$, $\beta_1 = 8$; $\alpha_2 = 3$, $\beta_2 = 4$.
 3.28. $\vec{a} = [7, -2, 1]$, $\vec{b} = [1, 4, -2]$; $\alpha_1 = -1$, $\beta_1 = 2$; $\alpha_2 = 3$, $\beta_2 = 5$.
 3.29. $\vec{a} = [5, 3, -2]$, $\vec{b} = [1, 0, 1]$; $\alpha_1 = -1$, $\beta_1 = 3$; $\alpha_2 = 2$, $\beta_2 = 1$.
 3.30. $\vec{a} = [-1, 0, 3]$, $\vec{b} = [3, -2, 1]$; $\alpha_1 = 3$, $\beta_1 = -1$; $\alpha_2 = 4$, $\beta_2 = 2$.

4. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ва $\vec{c}$ векторлар компланар бўлиш-бўлмаслигини аниқланг:

- 4.1. $\vec{a} = [9, 5, 8]$, $\vec{b} = [4, 3, 3]$, $\vec{c} = [5, 3, 4]$.
 4.2. $\vec{a} = [6, 11, 8]$, $\vec{b} = [0, 1, 1]$, $\vec{c} = [2, 4, 3]$.
 4.3. $\vec{a} = [-4, -1, 2]$, $\vec{b} = [-7, -3, 1]$, $\vec{c} = [-6, -1, 4]$.
 4.4. $\vec{a} = [4, 2, 4]$, $\vec{b} = [-5, -4, -5]$, $\vec{c} = [0, 1, 3]$.
 4.5. $\vec{a} = [-1, 1, 1]$, $\vec{b} = [6, 1, 8]$, $\vec{c} = [3, 0, 3]$.
 4.6. $\vec{a} = [8, -3, 1]$, $\vec{b} = [3, 0, 1]$, $\vec{c} = [4, -1, 1]$.
 4.7. $\vec{a} = [2, 1, 2]$, $\vec{b} = [-1, -2, -1]$, $\vec{c} = [4, 3, 6]$.
 4.8. $\vec{a} = [6, 2, 6]$, $\vec{b} = [-9, -4, -9]$, $\vec{c} = [1, 1, 4]$.
 4.9. $\vec{a} = [-1, 0, 3]$, $\vec{b} = [6, 7, -4]$, $\vec{c} = [3, 3, -3]$.
 4.10. $\vec{a} = [-1, 4, -2]$, $\vec{b} = [-1, 2, 0]$, $\vec{c} = [-5, 10, -7]$.
 4.11. $\vec{a} = [2, 2, 2]$, $\vec{b} = [-1, 0, -1]$, $\vec{c} = [1, 3, 2]$.
 4.12. $\vec{a} = [-1, 1, 3]$, $\vec{b} = [4, 3, 2]$, $\vec{c} = [1, 2, 3]$.
 4.13. $\vec{a} = [1, 1, 1]$, $\vec{b} = [-1, 1, -1]$, $\vec{c} = [2, 5, 1]$.
 4.14. $\vec{a} = [4, 3, 2]$, $\vec{b} = [1, 2, 3]$, $\vec{c} = [-3, -1, -1]$.
 4.15. $\vec{a} = [1, 1, 1]$, $\vec{b} = [1, -2, 1]$, $\vec{c} = [1, 3, 3]$.
 4.16. $\vec{a} = [-1, 2, 5]$, $\vec{b} = [0, -1, -2]$, $\vec{c} = [-1, 1, 3]$.
 4.17. $\vec{a} = [2, 2, 2]$, $\vec{b} = [1, -2, 1]$, $\vec{c} = [1, 3, 4]$.
 4.18. $\vec{a} = [-1, 0, 2]$, $\vec{b} = [4, 7, 6]$, $\vec{c} = [1, 3, 4]$.
 4.19. $\vec{a} = [3, 2, 1]$, $\vec{b} = [-7, -3, 1]$, $\vec{c} = [1, 2, 3]$.
 4.20. $\vec{a} = [1, 2, 2]$, $\vec{b} = [-1, 0, -2]$, $\vec{c} = [2, 7, 3]$.
 4.21. $\vec{a} = [17, -6, 2]$, $\vec{b} = [1, 0, 1]$, $\vec{c} = [6, -2, 1]$.
 4.22. $\vec{a} = [2, 1, 2]$, $\vec{b} = [-1, -2, -1]$, $\vec{c} = [4, 3, 6]$.
 4.23. $\vec{a} = [4, 2, 4]$, $\vec{b} = [-1, -2, -1]$, $\vec{c} = [4, 3, 7]$.
 4.24. $\vec{a} = [-1, 0, 2]$, $\vec{b} = [5, 7, 4]$, $\vec{c} = [2, 3, 2]$.
 4.25. $\vec{a} = [4, 2, 4]$, $\vec{b} = [-1, 0, -1]$, $\vec{c} = [4, 3, 5]$.
 4.26. $\vec{a} = [3, 4, 2]$, $\vec{b} = [-3, -2, -2]$, $\vec{c} = [5, 10, 3]$.
 4.27. $\vec{a} = [4, 7, 6]$, $\vec{b} = [1, 3, 4]$, $\vec{c} = [-3, -4, -2]$.
 4.28. $\vec{a} = [-2, 3, 8]$, $\vec{b} = [-1, 0, 1]$, $\vec{c} = [-1, 1, 3]$.
 4.29. $\vec{a} = [2, 1, 2]$, $\vec{b} = [-3, -3, 3]$, $\vec{c} = [2, 2, 4]$.
 4.30. $\vec{a} = [-1, 1, 1]$, $\vec{b} = [5, 2, 9]$, $\vec{c} = [2, 1, 4]$.

5. Пирамиданинг учлари A, B, C, D берилган.
 а) Қўрсатилган ёқ юзини; б) пирамиданинг l кийраси ва берилган иккита учидан ўтувчи кесим юзини; в) пирамиданинг хажмини ҳисобланг:

- 5.1. $A(1, 0, -3), B(-1, 1, 0), C(2, -1, 1), D(0, 2, 1)$;
 а) ABC ; б) $l=AD$, B ва C .
- 5.2. $A(0, 1, 2), B(1, -2, 2), C(-1, 2, 1), D(2, 0, 1)$;
 а) BCD ; б) $l=BA$, C ва D .
- 5.3. $A(-4, -5, 0), B(6, -1, 2), C(1, 0, 1), D(-3, 2, 1)$;
 а) ACD ; б) $l=CB$, A ва D .
- 5.4. $A(2, -1, 1), B(-3, 0, -6), C(-5, 3, -2), D(-1, 10, 3)$;
 а) ABD ; б) $l=CD$, A ва B .
- 5.5. $A(1, -3, 7), B(-1, 0, 3), C(-4, -2, 1), D(4, 2, -1)$;
 а) ABC ; б) $l=BD$, A ва C .
- 5.6. $A(-4, 1, 3), B(5, -1, 2), C(2, 1, -4), D(1, -3, 0)$;
 а) BCD ; б) $l=AC$, B ва D .
- 5.7. $A(5, 3, -4), B(1, 0, 3), C(2, -1, 4), D(0, 3, 1)$;
 а) ACD ; б) $l=AB$, C ва D .
- 5.8. $A(3, 7, -4), B(-4, 1, 3), C(2, 3, 0), D(-1, -1, -2)$;
 а) ABD ; б) $l=BC$, A ва D .
- 5.9. $A(-8, 2, -5), B(-1, -3, 0), C(-4, 1, 2), D(6, -5, -3)$;
 а) ABC ; б) $l=CD$, A ва B .
- 5.10. $A(7, -8, -10), B(-3, 3, -1), C(0, -6, 5), D(-3, -4, 2)$;
 а) BCD ; б) $l=AD$, B ва C .
- 5.11. $A(-3, 6, -4), B(1, 0, -1), C(1, 2, 2), D(6, 3, 1)$;
 а) ACD ; б) $l=BD$, A ва C .
- 5.12. $A(-4, 2, -5), B(8, 5, -10), C(0, -3, 2), D(6, 2, -4)$;
 а) ABD ; б) $l=AC$, B ва D .
- 5.13. $A(1, 2, -4), B(1, 3, 3), C(-2, -1, 7), D(4, 2, 7)$;
 а) ABC ; б) $l=AD$, B ва C .
- 5.14. $A(6, -3, -6), B(2, -3, -7), C(2, 5, -1), D(4, 1, 2)$;
 а) BCD ; б) $l=AB$, C ва D .
- 5.15. $A(7, 6, -10), B(-3, 6, 3), C(-3, 0, -8), D(2, -5, -1)$;
 а) ACD ; б) $l=CB$, A ва D .
- 5.16. $A(3, -6, -1), B(-9, -5, 1), C(5, 3, -2), D(-1, -1, 0)$;
 а) ABD ; б) $l=CD$, A ва B .
- 5.17. $A(1, 1, -1), B(4, 2, 1), C(0, 5, 2), D(0, 2, 5)$;
 а) ABC ; б) $l=BD$, A ва C .
- 5.18. $A(-7, 9, -10), B(-6, 0, 5), C(1, 2, 1), D(-2, -1, 2)$;
 а) BCD ; б) $l=AC$, B ва D .
- 5.19. $A(6, -4, 1), B(-4, -8, 4), C(1, 7, -1), D(-4, 0, -2)$;
 а) ACD ; б) $l=AB$, C ва D .
- 5.20. $A(-1, 2, -2), B(-3, -6, -2), C(2, -3, -5), D(5, 4, 14)$;
 а) ABD ; б) $l=BC$, A ва D .

- 5.21. $A(-9, 4, 8)$, $B(6, 2, 5)$, $C(-3, 0, 3)$, $D(0, 2, 1)$;
а) ABC ; б) $l=CD$, A ва B .
- 5.22. $A(5, 2, -4)$, $B(1, 2, 3)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, -1, 2)$;
а) BCD ; б) $l=AD$, B ва C .
- 5.23. $A(-2, 0, -1)$, $B(4, -2, 2)$, $C(3, 1, -1)$, $D(2, 1, 1)$;
а) ACD ; б) $l=BD$, A ва C .
- 5.24. $A(-3, 5, 7)$, $B(7, 3, 6)$, $C(-2, 1, 4)$, $D(1, 3, 2)$;
а) ABD ; б) $l=AC$, B ва D .
- 5.25. $A(-8, 9, 5)$, $B(1, 2, 3)$, $C(2, 3, 1)$, $D(-1, 1, 1)$;
а) ABC ; б) $l=AD$, B ва C .
- 5.26. $A(-12, 8, -4)$, $B(3, 7, -2)$, $C(3, 6, -3)$, $D(-7, 5, 1)$;
а) BCD ; б) $l=AB$, C ва D .
- 5.27. $A(4, 5, 2)$, $B(0, -2, -3)$, $C(-4, 5, 1)$, $D(-7, 4, -3)$;
а) ACD ; б) $l=CB$, A ва D .
- 5.28. $A(5, 4, 3)$, $B(-2, 1, 2)$, $C(0, -1, 4)$, $D(-3, 2, -1)$;
а) ABD ; б) $l=CD$, A ва B .
- 5.29. $A(-6, 2, 8)$, $B(1, -5, 0)$, $C(0, 1, -2)$, $D(3, -1, 4)$;
а) ABC ; б) $l=BD$, A ва C .
- 5.30. $A(-4, -2, 2)$, $B(-1, 1, 2)$, $C(3, 0, -2)$, $D(1, -1, 1)$;
а) BCD ; б) $l=AC$, B ва D .

7-§. Текисликнинг тенгламаси. Текисликнинг умумий тенгламасини текшириш. Тўғри чизиқнинг тенгламаси

1.7.1. *Оxyz* тўғри бурчакли координаталар системасида ҳар қандай текислик тенгламасини x , y , z ўзгарувчиларга нисбатан қуйидаги чизикли тенглама шаклида ёзиш мумкин:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Бу тенглама текисликнинг *умумий тенгламаси* дейилади. Бу ерда A , B , C коэффицентлар берилган текисликка перпендикуляр бўлган ва унинг *нормал вектори* деб аталувчи $\vec{n} = \{A, B, C\}$ векторнинг координаталаридир. Текисликнинг фазодаги ҳолати A , B , C коэффицентлари ва озод ҳадининг қийматларига боғлиқ. Хусусан, агар:

I. $D=0$ бўлса, у ҳолда $Ax + By + Cz = 0$ ва текислик координаталар бошидан ўтади.

II. а) $C=0$ бўлса, у ҳолда $Ax + By + D = 0$ ва текислик Oz ўқиға параллел бўлади;

б) $B=0$ бўлса, у ҳолда $Ax + Cz + D = 0$ ва текислик Oy ўқиға параллел бўлади;

в) $A=0$ бўлса, у ҳолда $By + Cz + D = 0$ ва текислик Ox ўқиға параллел бўлади.

III. а) $D=0, C=0$ бўлса, у ҳолда $Ax+By=0$ ва текислик Oz ўқи орқали ўтади,

б) $D=0, B=0$ бўлса, у ҳолда $Ax+Cz=0$ ва текислик Oy ўқи орқали ўтади,

в) $D=0, A=0$ бўлса, у ҳолда $By+Cz=0$ ва текислик Ox ўқи орқали ўтади.

IV. а) $C=0, B=0$ бўлса, у ҳолда $Ax+D=0$ ва текислик Oyz координаталар текислигига параллел (ёки Ox ўқка перпендикуляр) бўлади;

б) $C=0, A=0$ бўлса, у ҳолда $By+D=0$ ва текислик Oxz координаталар текислигига параллел (ёки Oy ўқка перпендикуляр) бўлади;

в) $A=0, B=0$ бўлса, у ҳолда $Cz+D=0$ ва текислик Oxy координаталар текислигига параллел (ёки Oz ўқка перпендикуляр) бўлади.

V. а) $D=0, A=0$ ва $B=0$ бўлса, у ҳолда $Cz=0$ ёки $z=0$ ва текислик Oxy координаталар текислиги билан устма-уст тушади;

б) $D=0, A=0$ ва $C=0$ бўлса, у ҳолда $By=0$ ёки $y=0$ ва текислик Oxz координаталар текислиги билан устма-уст тушади;

в) $D=0, B=0$ ва $C=0$ бўлса, у ҳолда $Ax=0$ ёки $x=0$ ва текислик Oyz текислик билан устма-уст тушади.

1.7.2. Куйида маълум шартларни каноатлантирувчи текисликлар тенгламалари келтирилган:

а) берилган $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктадан ўтувчи ва берилган $\vec{n}=\{A, B, C\}$ нормал векторга эга текислик тенгламаси:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0;$$

б) текисликнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

бунда a, b, c — текисликнинг мос координата ўқларидан кесадиган кесмалари;

в) берилган учта $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ва $M_3(x_3, y_3, z_3)$ нуктадан ўтувчи текислик тенгламаси:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

1.7.3. Тўғри чизикнинг фазода берилиш усулига қараб унинг тенгламаси турлича бўлиши мумкин:

а) берилган $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктадан ўтувчи ва $\vec{s}=\{l, m, p\}$ йўналтирувчи векторга эга бўлган тўғри чизикнинг каноник шаклдаги тенгламалари

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$$

б) тўғри чизикнинг параметрик тенгламалари

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

бунда t — параметр;

в) берилган икки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нуктадан ўтувчи тўғри чизик тенгламаси:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1},$$

г) фазодаги тўғри чизикнинг умумий тенгламалари:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

бунда $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

Бу тўғри чизикнинг йўналтирувчи вектори $\vec{s}$ ушбу

$$\vec{s} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

формула бўйича аникланади.

1.7.4. $Ax + By + Cz + D = 0$ ва $z = 0$ текисликларнинг кесишиш чизиги Oxy текисликда ётувчи

$$Ax + By + C = 0$$

тўғри чизикдан иборат бўлади. Бу тенглама текисликдаги тўғри чизикнинг умумий тенгламаси дейилади. Берилган тўғри чизикка перпендикуляр бўлган $\vec{n} = \{A, B\}$ вектор тўғри чизикнинг нормал вектори дейилади. Текисликдаги тўғри чизикнинг тенгламалари:

а) берилган $M_0(x_0, y_0)$ нуктадан ўтувчи ва берилган $\vec{n} = \{A, B\}$ нормал векторга эга тўғри чизик тенгламаси

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0;$$

б) тўғри чизикнинг каноник тенгламаси

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m},$$

бунда $\vec{s} = \{l, m\}$ — тўғри чизикнинг йўналтирувчи вектори, $M_0(x_0, y_0)$ — тўғри чизикда ўтувчи берилган нукта;

в) тўғри чизикнинг бурчак коэффициентли тенгламаси

$$y = kx + b,$$

бунда b — тўғри чизикнинг Oy ўқдан кесадиган кесмаси; k — тўғри чизикнинг бурчак коэффициенти: $k = \operatorname{tg} \alpha$ (α — тўғри чизик билан Ox ўқнинг мусбат йўналиши орасидаги бурчак);

г) $M_0(x_0, y_0)$ нуктадан ўтувчи ва k бурчак коэффициентли тўғри чизикнинг тенгламаси

$$y - y_0 = k(x - x_0);$$

д) тўғри чизикнинг кесмаларга нисбатан тенгламаси

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

бунда a ва b — тўғри чизикнинг координаталар ўқларидан кесадиган кесмаси;

е) берилган икки $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ нуктадан ўтувчи тўғри чизик тенгламаси

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Мисол: $M_0(-2; 1; -1)$ нуктадан ўтувчи $\vec{s} = \{1; -1; 2\}$ векторга параллел тўғри чизик тенгламасини топинг.

Ечиш. $\vec{s}$ вектор тўғри чизикка параллел бўлгани учун у тўғри чизикнинг йўналтирувчи вектори бўлади. Шу сабабли, тўғри чизикнинг каноник тенгламалари $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{l}$ га асосан, изланаётган тўғри чизик тенгламалари

$$\frac{x + 2}{1} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z + 1}{2}$$

қўринишда бўлади.

7- дарсхона топшириги

Куйидаги текислик тенгламасини тузинг ва тегишли шаклни чизинг:

а) $M_0(7, -3, 5)$ нуктадан ўтувчи ва Oxz координаталар текислигига параллел текислик;

б) Oz ўқ ва $M_0(-3, 1, -2)$ нукта оркали ўтувчи текислик;

в) Ox ўқка параллел ҳамда икки $M_1(4, 0, -2)$ ва $M_2(5, 1, 7)$ нуктадан ўтувчи текислик;

г) $M_0(2, 1, -1)$ нуктадан ўтувчи ва нормал вектори $\vec{n} = \{1, -2, 3\}$ бўлган текислик;

д) $M_0(3, 4, -5)$ нуктадан ўтувчи ҳамда $\vec{a} = \{3, 1, -1\}$ ва $\vec{b} = \{1, -2, 1\}$ векторларга параллел бўлган.

Ж: а) $y+3=0$; б) $x+3y=0$; в) $9y-z-2=0$; г) $x-2y+3z+3=0$; д) $x+4y+7z+16=0$.

2. $M(-1, 2, 1)$, $N(2, 3, -2)$ ва $P(3, 4, 2)$ нукталардан ўтувчи текислик тенгламасини топинг.

Ж: $7x-15y+2z+7=0$.

3. $M_0(7, -5, 1)$ нуктадан ўтувчи ва координаталар ўқларидан тенг кесмалар ажратувчи текислик тенгламасини тузинг.

Ж: $x+y+z-3=0$.

4. Фазода умумий тенгламалари

$$\begin{cases} x-y+2z+4=0, \\ 3x+y-5z-8=0 \end{cases}$$

билан берилган тўғри чизикнинг каноник тенгламасини ёзинг.

Ж: $\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{11} = \frac{z}{4}$.

5. $M_0(2, 0, -3)$ нуктадан ўтувчи ва куйидаги шартни қаноатлантирувчи тўғри чизик тенгламасини тузинг: а) $\vec{s} = \{2, 3, -4\}$ векторга параллел; б) $M_1(-3, 1, 4)$ нуктадан ўтувчи.

Ж: а) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+4}{-4}$; б) $\frac{x-2}{-5} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{7}$.

6. Берилган тенгламалари бўйича тўғри чизикнинг шаклини чизинг, унинг k бурчак коэффициентини ва координаталар ўқларидан кесадиган a ва b кесмаларини топинг:

а) $2x-y+3=0$; б) $5x+2y-8=0$;
в) $3x+8y+16=0$; г) $3x-y=0$.

Ж: а) $k=2$; $a=-\frac{3}{2}$; $b=3$; б) $k=-\frac{5}{2}$; $a=\frac{8}{5}$; $b=4$;

в) $k=-\frac{3}{8}$; $a=-\frac{16}{3}$; $b=-2$; г) $k=3$; $a=b=0$.

7. Куйидаги тўғри чизиклар тенгламаларини тузинг:

а) $M_0(3, -1)$ нуктадан ўтувчи ва ординаталар ўкига параллел;

б) $M_0(3, -1)$ нуктадан ўтувчи ва абсциссалар ўкига параллел;

в) $M_0(3, -1)$ нуктадан ўтувчи ва $\vec{a} = \{3, -2\}$ векторга параллел;

г) $M_0(3, -1)$ нуктадан ўтувчи ва $\vec{b} = \{1, -4\}$ векторга перпендикуляр.

Ж: а) $x=3$; б) $y=-1$; в) $2x+3y-3=0$; г) $x-4y-7=0$.

7- мустақил иш

1. Иккита $M_1(3, -1, 2)$ ва $M_2(4, -2, -1)$ нукта берилган. M_1 нуктадан ўтувчи ва M_1M_2 векторга перпендикуляр текислик тенгламасини тузинг.

Ж: $x-y-3z+2=0$.

2. $M_1(3, -1, 2)$, $M_2(4, -1, -1)$ ва $M_3(2, 0, 2)$ нукталардан ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

Ж: $3x+3y+z-8=0$.

3. Учбурчакнинг учлари берилган: $M(3, 6, -7)$, $N(-5, 2, 3)$ ва $P(4, -7, -2)$. P учидан ўтказилган медиананинг параметрик тенгламасини тузинг.

$$\text{Ж: } \begin{cases} x=5t+4, \\ y=-11t-7, \\ z=-2. \end{cases}$$

4. Ушбу

$$\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0 \end{cases}$$

тенгламалар билан берилган тўғри чизикнинг каноник тенгламаларини тузинг.

$$\text{Ж: } \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}.$$

5. $2x+2y-5=0$ тўғри чизикнинг абсциссалар ўкининг мусбат йўналиши билан ташкил қилган бурчагини топинг.

Ж: 135° .

6. Учбурчак томонларининг ўрталари берилган: $M_1(2,1)$, $M_2(5,3)$, $M_3(3, -4)$. Учбурчак томонлари тенгламаларини тузинг.

Ж: $7x-2y-12=0$, $5x+y-28=0$, $2x-3y-18=0$.

7. Учбурчакнинг учлари берилган: $M_1(2, 1)$, $M_2(-1, -1)$ ва $M_3(3, 2)$. Учбурчакнинг баландликлари тенгламаларини тузинг.

$$\text{Ж: } 4x + 3y - 11 = 0, x + y + 2 = 0, 3x + 2y - 13 = 0.$$

8-§. Текисликлар ва тўғри чизикларнинг ўзаро жойлашуви.
Текисликлар орасидаги бурчак. Тўғри чизиклар орасидаги бурчак.
Нуктадан тўғри чизиккача ва текисликкача бўлган масофа

1.8.1. Текисликлар $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ва $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ тенгламалар билан берилган бўлсин. Улар орасидаги φ бурчак куйидаги формула асосида ҳисобланади:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

бунда $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ ва $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ — берилган текисликларнинг нормал векторлари.

а) Агар текисликлар перпендикуляр бўлса, у ҳолда $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ ёки $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

б) Агар текисликлар параллел бўлса, у ҳолда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

в) Агар текисликлар устма-уст тушса, у ҳолда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

г) $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктадан $Ax + By + Cz + D = 0$ текисликкача бўлган d масофа:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

формула бўйича ҳисобланади.

1.8.2. Тўғри чизиклар

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

ва

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

каноник тенгламалар билан берилган бўлсин. Бу тўғри чизиклар орасидаги φ бурчак куйидаги формуладан топилади:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2|}{|\vec{x}_1| \cdot |\vec{x}_2|} = \frac{l_1 \cdot l_2 + m_1 \cdot m_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + p_2^2}}.$$

а) Агар тўғри чизиклар перпендикуляр бўлса, у ҳолда $\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0$ ёки $l_1 l_2 + m_1 m_2 + p_1 p_2 = 0$.

б) Агар тўғри чизиклар параллел бўлса, у ҳолда $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

в) Агар тўғри чизиклар устма-уст тушса, у ҳолда $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2}$,
шу билан бирга

$$\frac{x_2 - x_1}{l_1} = \frac{y_2 - y_1}{m_1} = \frac{z_2 - z_1}{p_1}.$$

г) Агар тўғри чизиклар кесишса, у ҳолда

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

д) Агар тўғри чизиклар айкаш бўлса, у ҳолда

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & p_1 \\ l_2 & m_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ нуктадан $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{p}$ тўғри чизиккача бўлган масофа қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$d = \frac{|\vec{s} \times \overline{M_1 M_0}|}{|\vec{s}|},$$

бунда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нукта шу тўғри чизикка тегишли ва $\vec{s} = \{l, m, p\}$ унинг йўналтирувчи вектори.

Икки айкаш

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ ва } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$$

тўғри чизиклар орасидаги энг киска d масофа қуйидагича аникланади:

$$d = \frac{|\overline{M_1 M_2} \cdot \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2|},$$

бунда $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $M_2(x_2, y_2, z_2)$ нукталар мос равишда бу тўғри чизикларга тегишли, $\vec{s}_1 = \{l_1, m_1, p_1\}$ ва $\vec{s}_2 = \{l_2, m_2, p_2\}$ лар эса уларнинг йўналтирувчи векторлари.

М и с о л. $x - 2y + 2z - 8 = 0$ ва $x + z - 6 = 0$ текисликлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. Икки текислик орасидаги бурчак формуласига кўра:

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} = \frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1+4+4} \cdot \sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Бундан $\varphi = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$ келиб чиқади.

1.8.3. $Ax + By + Cz + D = 0$ текислик билан $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{p}$ тўғри чизик орасидаги φ бурчак ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{s}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{s}|} = \frac{|Al + Bm + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + p^2}},$$

бунда $\vec{n} = \{A, B, C\}$ — текисликнинг нормал вектори, $\vec{s} = \{l, m, p\}$ — тўғри чизикнинг йуналирувчи вектори.

а) Агар текислик билан тўғри чизик перпендикуляр бўлса, $\vec{n}$ ва $\vec{s}$ векторлар коллинеар ёки $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{p}$ бўлади.

б) Агар текислик билан тўғри чизик параллел бўлса, у ҳолда $\vec{n}$ ва $\vec{s}$ векторлар перпендикуляр ёки $Al + Bm + Cp \neq 0$ бўлади.

в) Агар текислик билан тўғри чизик устма-уст тушса, у ҳолда $Al + Bm + Cp = 0$, шу билан бирга $Ax_0 + Bx_0 + Cz_0 + D = 0$ бўлади.

г) Агар текислик билан тўғри чизик кесишса, у ҳолда

$$Al + Bm + Cp \neq 0.$$

1.8.4. Текисликдаги тўғри чизиклар

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ ва } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

тенгламалар билан берилган бўлсин. Улар орасидаги φ бурчак ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

бунда $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1\}$, $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ — мос равишда берилган тўғри чизикларнинг нормал векторлари.

а) Агар бу тўғри чизиклар ўзаро перпендикуляр бўлса, у ҳолда

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0.$$

б) Агар бу тўғри чизиклар параллел бўлса, у ҳолда

$$A_1/A_2 = B_1/B_2.$$

в) Агар бу тўғри чизиклар устма-уст тушса, у ҳолда

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Текисликдаги тўғри чизиклар

$$y = k_1x + b_1 \text{ ва } y = k_2x + b_2$$

тенгламалар билан берилган бўлсин. Улар орасидаги φ бурчак ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$$

Бу тўғри чизикларнинг перпендикулярлик шarti $k_1 \cdot k_2 = -1$ дан иборат, параллеллик шarti эса $k_1 = k_2$ бўлади.

$M_0(x_0, y_0)$ нуктадан $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиккача бўлган d масофа ушбу

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

формула бўйича ҳисобланади.

8-дир: ҳона топшириғи

1. Координаталар бошидан ўтувчи $2x - y + 3z - 1 = 0$ ва $x + 2y + z = 0$ текисликларга перпендикуляр текислик тенгламасини тузинг.

Ж: $7x - y - 5z = 0$.

2. $P(-1, 1, -2)$ нуктадан $M_1(1, -1, 1)$, $M_2(-2, 1, 3)$ ва $M_3(4, -5, -2)$ нукталар орқали ўтувчи текисликкача бўлган d масофани ҳисобланг.

Ж: $d = 4$ узун. бирл.

3. Ушбу

$$\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0, \\ 2x + y - 2z - 4 = 0 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0, \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0 \end{cases}$$

тўғри чизиклар орасидаги φ бурчак косинусини ҳисобланг.

Ж: $\cos \varphi = \pm \frac{4}{21}$.

4. Тўғри чизик билан текисликнинг ўзаро ҳолатини аниқланг, улар кесишган ҳолда, кесишиш нуктаси координаталарини топинг:

а) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$, $3x - 3y + 2z - 5 = 0$,

б) $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$, $x + 2y - 4z + 1 = 0$,

в) $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$, $3x - y + 2z - 5 = 0$.

Ж: а) параллел; б) тўғри чизик текисликда ётади; в) $M(2, 3, 1)$

нуктада кесишади.

5. $M_1(5, 4, 6)$ ва $M_2(-2, -17, -8)$ нукталардан ўтувчи тўғри чизикка нисбатан $P(2, -5, 7)$ нуктага симметрик Q нуктани топинг.

Ж: $Q(4, -1, -3)$.

6. Учбурчакнинг $A(-10, -13)$ ва $B(-2, 3)$ учлари берилган. Унинг C учидан AB томонга ўтказилган медианасига B учидан туширилган перпендикуляр узунлигини ҳисобланг.

Ж: 4 узун, бирл.

8- мустақил иш

1. $M_1(1, -1, 2)$ ва $M_2(3, 1, 1)$ нукталардан ўтувчи $x-2y+3z+5=0$ текисликка перпендикуляр текислик тенгламасини тузинг.

Ж: $4x-y-2z-9=0$.

2. Ушбу тўғри чизикларнинг перпендикулярлигини исботланг:

$$\begin{cases} x=2t+1, \\ y=3t-2, \\ z=-6t+1 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0. \end{cases}$$

3. Ушбу

$$2x-3y+6z-14=0 \text{ ва } 4x-6y+12z+21=0$$

текисликлар орасидаги d масофани ҳисобланг.

Ж: $d=3,5$ узунлик бирлиги.

4. Ушбу

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} \text{ ва } \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

тўғри чизиклар l нинг қандай қийматида кесишади?

Ж: $l=3$.

5. Ушбу

$$\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2} \text{ ва } \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$$

тўғри чизиклар орасидаги энг қисқа масофани ҳисобланг.

Ж: 13 узунлик бирлиги.

6. $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$ тўғри чизикдан ўтувчи ва $x+4y-3z+7=0$ текисликка перпендикуляр текислик тенгламасини тузинг.

Ж: $11x-17y-19z+10=0$.

$$7. \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases} \text{ тўғри чизикнинг } 4x - 3y + 7z - 7 = 0 \text{ те-}$$

кисликда ётишини исботланг.

8. $A(5, -1)$ нукта томонларидан бири $4x - 3y - 7 = 0$ тўғри чизикда ётувчи квадратнинг учидир. Шу квадратнинг қолган томонлари тенгламаларини тузинг.

Ж: иккита квадрат масала шартини каноатлантиради:

$$a) 3x + 4y - 11 = 0, \quad 4x - 3y - 23 = 0, \quad 3x + 4y - 27 = 0;$$

$$b) 3x + 4y - 11 = 0, \quad 4x - 3y - 23 = 0, \quad 3x + 4y + 5 = 0.$$

3- назорат иши

1. ABC учбурчак учларининг координаталари берилган.

а) C учдан ўтказилган медиана тенгламасини тузинг ва унинг узунлигини топинг;

б) A учдан ўтказилган баландлик тенгламасини тузинг ва шу баландлик узунлигини топинг;

в) B бурчак биссектрисаси тенгламасини тузинг ва унинг узунлигини топинг.

$$1.1. A(4, 1), B(0, -2), C(-5, 10).$$

$$1.2. A(-7, 3), B(5, -2), C(8, 2).$$

$$1.3. A(5, -1), B(1, -4), C(-4, 8).$$

$$1.4. A(-14, 6), B(-2, 1), C(1, 5).$$

$$1.5. A(6, 0), B(2, -3), C(-3, 9).$$

$$1.6. A(-9, 2), B(3, -3), C(6, 1).$$

$$1.7. A(7, -4), B(3, -7), C(-2, 5).$$

$$1.8. A(-8, 4), B(4, -1), C(7, 3).$$

$$1.9. A(3, -3), B(-1, -6), C(-6, 6).$$

$$1.10. A(-6, 5), B(6, 0), C(9, 4).$$

$$1.11. A(4, 11), B(-1, -1), C(7, 5).$$

$$1.12. A(3, 13), B(-2, 1), C(6, 7).$$

$$1.13. A(7, 11), B(2, -1), C(10, 5).$$

$$1.14. A(6, 13), B(1, 1), C(9, 7).$$

$$1.15. A(4, 14), B(-1, 2), C(7, 8).$$

$$1.16. A(6, 10), B(1, -2), C(9, 4).$$

$$1.17. A(4, 13), B(-1, 1), C(7, 7).$$

$$1.18. A(6, 11), B(1, -1), C(9, 5).$$

- 1.19. $A(4, 10), B(-1, -2), C(7, 4)$.
- 1.20. $A(6, 14), B(1, 2), C(9, 8)$.
- 1.21. $A(-10, -1), B(-6, -4), C(6, 1)$.
- 1.22. $A(18, 8), B(12, 0), C(0, 5)$.
- 1.23. $A(-6, -3), B(-2, -6), C(10, -1)$.
- 1.24. $A(14, 10), B(8, 2), C(-4, 7)$.
- 1.25. $A(-2, -1), B(2, -4), C(14, 1)$.
- 1.26. $A(8, 7), B(2, -1), C(-10, 4)$.
- 1.27. $A(1, 0), B(5, -3), C(17, 2)$.
- 1.28. $A(20, 2), B(14, -6), C(26, -1)$.
- 1.29. $A(-1, 7), B(3, 4), C(15, 9)$.
- 1.30. $A(7, 6), B(1, 2), C(-11, 3)$.

2. M, N, P, Q нукталарнинг координаталари берилган.

а) N, P, Q нукталардан ўтувчи текисликка перпендикуляр бўлган ва M нуктадан ўтувчи тўғри чизикнинг тенгламасини тузинг;

б) M нуктадан N, P, Q нукталар оркали ўтувчи текисликка-ча бўлган масофани топинг:

- 2.1. $M(1, 7, 5), N(2, 3, 5), P(-1, 12, -4), Q(4, 6, 4)$.
- 2.2. $M(2, -4, 3), N(3, 1, 4), P(6, 2, -3), Q(2, -2, 3)$.
- 2.3. $M(1, 1, 1), N(2, 2, 5), P(3, 2, 2), Q(2, 0, 3)$.
- 2.4. $M(5, 3, -2), N(2, 4, 4), P(1, 3, 5), Q(2, 0, 2)$.
- 2.5. $M(5, 2, 6), N(0, 1, -4), P(1, 8, 3), Q(4, 2, 1)$.
- 2.6. $M(6, 3, 4), N(2, 5, 1), P(4, -1, 2), Q(1, 1, 1)$.
- 2.7. $M(1, 1, 3), N(4, 1, 6), P(2, 2, 1), Q(5, 2, 3)$.
- 2.8. $M(4, 1, 6), N(1, 1, 3), P(5, 2, 3), Q(2, 2, 1)$.
- 2.9. $M(2, 2, 1), N(5, 2, 3), P(1, 1, 3), Q(4, 1, 6)$.
- 2.10. $M(5, 2, 3), N(2, 2, 1), P(4, 1, 5), Q(1, 1, 3)$.
- 2.11. $M(7, 3, 0), N(2, 4, 7), P(5, 4, 7), Q(6, 6, 2)$.
- 2.12. $M(7, 9, 6), N(4, 5, 7), P(9, 4, 4), Q(7, 5, 3)$.
- 2.13. $M(1, 2, 6), N(4, 2, 0), P(4, 6, 6), Q(6, 1, 1)$.

- 2.14. $M(5, 8, 2)$, $N(3, 5, 10)$, $P(3, 8, 4)$, $Q(5, 5, 4)$.
 2.15. $M(3, 9, 8)$, $N(4, 6, 3)$, $P(4, 1, 5)$, $Q(0, 7, 1)$.
 2.16. $M(6, 9, 2)$, $N(5, 7, 8)$, $P(-3, 7, 1)$, $Q(9, 5, 5)$.
 2.17. $M(3, 6, 7)$, $N(4, 9, 3)$, $P(7, 6, 3)$, $Q(2, 4, 3)$.
 2.18. $M(6, 4, 8)$, $N(1, 9, 9)$, $P(5, 8, 3)$, $Q(3, 5, 4)$.
 2.19. $M(8, 5, 8)$, $N(1, 7, 3)$, $P(6, 9, 1)$, $Q(3, 3, 9)$.
 2.20. $M(0, 4, -1)$, $N(-1, 1, 6)$, $P(-1, 6, 1)$, $Q(3, 1, 4)$.
 2.21. $M(1, 3, -1)$, $N(0, 0, 6)$, $P(0, 0, 0)$, $Q(4, 0, 4)$.
 2.22. $M(4, -1, 3)$, $N(-3, 1, 1)$, $P(2, 3, -4)$, $Q(-1, -3, 4)$.
 2.23. $M(3, -1, 4)$, $N(-2, 4, 5)$, $P(2, 3, -1)$, $Q(0, 0, 0)$.
 2.24. $M(5, 2, 4)$, $N(3, 2, -4)$, $P(2, -5, 3)$, $Q(2, 4, -1)$.
 2.25. $M(3, 4, -2)$, $N(-6, 2, -3)$, $P(-6, 2, -3)$, $Q(2, 2, 4)$.
 2.26. $M(-1, 3, 1)$, $N(-4, 1, -4)$, $P(0, -5, 0)$, $Q(0, 0, -2)$.
 2.27. $M(6, 3, -3)$, $N(2, 3, 5)$, $P(3, -2, 6)$, $Q(2, 2, -5)$.
 2.28. $M(0, -1, 2)$, $N(5, -2, -1)$, $P(3, 3, 4)$, $Q(3, -1, -2)$.
 2.29. $M(3, 3, 4)$, $N(3, -1, -2)$, $P(5, -2, -1)$, $Q(0, -1, 2)$.
 2.30. $M(2, -5, 3)$, $N(5, 2, 4)$, $P(-5, 6, -1)$, $Q(3, 2, -4)$.

3. Берилган A нукта ва берилган

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{p}$$

тўғри чизик оркали ўтувчи текислик тенгламасини тузинг:

3.1. $A(3, -2, 1)$, $\frac{x+3}{-3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{4}$.

3.2. $A(4, 5, -2)$, $\frac{x+1}{4} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{-2}$.

3.3. $A(-3, 1, 2)$, $\frac{x-4}{2} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{3}$.

3.4. $A(-1, 2, 1)$, $\frac{x+2}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z-5}{2}$.

3.5. $A(2, 1, 2)$, $\frac{x+7}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+2}{8}$.

$$3.6. A(-2, 3, 1), \quad \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+5}{4}.$$

$$3.7. A(-4, -1, 2), \quad \frac{x-5}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}.$$

$$3.8. A(-3, 0, 2), \quad \frac{x}{5} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+4}{-3}.$$

$$3.9. A(1, 2, 3), \quad \frac{x+7}{3} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+6}{-2}.$$

$$3.10. A(1, -1, -2), \quad \frac{x}{-4} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{5}.$$

$$3.11. A(-3, 2, 4), \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{-3}.$$

$$3.12. A(4, -3, 1), \quad \frac{x-5}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z}{5}.$$

$$3.13. A(4, 5, 1), \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{-3}.$$

$$3.14. A(4, 2, -2), \quad \frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

$$3.15. A(0, 2, 1), \quad \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{3}.$$

$$3.16. A(5, -1, 2), \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z}{-4}.$$

$$3.17. A(4, 2, -1), \quad \frac{x-3}{-5} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

$$3.18. A(-1, 4, 5), \quad \frac{x}{-3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{4}.$$

$$3.19. A(-4, -1, 2), \quad \frac{x-1}{6} = \frac{y+3}{4} = \frac{z}{-3}.$$

$$3.20. A(2, 5, -1), \quad \frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{4} = \frac{z}{-1}.$$

$$3.21. A(5, 0, 4), \quad \frac{x}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}.$$

$$3.22. A(-4, 5, 3), \quad \frac{x-4}{1} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-2}{2}.$$

$$3.23. A(3, 0, 2), \quad \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{5}.$$

$$3.24. A(-5, 3, -4), \quad \frac{x-3}{2} = \frac{y+3}{6} = \frac{z}{-3}.$$

$$3.25. A(4, 3, 1), \quad \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}.$$

$$3.26. A(-4, 1, -3), \quad \frac{x+3}{-3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-2}{3}.$$

$$3.27. A(2, 3, 0), \quad \frac{x+3}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

$$3.28. A(-5, 2, -1), \quad \frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{-3}.$$

$$3.29. A(6, 2, 0), \quad \frac{x-1}{6} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+4}{-3}.$$

$$3.30. A(-6, 3, 2), \quad \frac{x}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+5}{-3}.$$

3- намунавий ҳисоб топшириқлари

1. ABC учбурчакнинг учлари берилган.

Қуйидагиларни топинг: а) AB томон тенгламасини;

б) C учидан AB томонга туширилган баландлик тенгламасини;

в) A учидан BC томонга туширилган медиана тенгламасини;

г) «б» ва «в» бандларда топилган баландлик билан медиананинг кесишган нуктасини;

д) C нуктадан ўтувчи AB томонга параллел тўғри чизик тенгламасини;

е) C нуктадан AB тўғри чизиккача бўлган масофани.

1.1. $A(4, -5), B(6, 9), C(-4, -1).$

1.2. $A(1, -3), B(-5, 4), C(-2, 10).$

1.3. $A(1, 8), B(-5, -4), C(-1, -3).$

1.4. $A(0, 4), B(5, -3), C(-6, -2).$

1.5. $A(6, -4), B(-8, 3), C(-2, -7).$

1.6. $A(2, 3), B(-4, -7), C(2, 0).$

1.7. $A(-4, -8), B(4, 1), C(0, 7).$

1.8. $A(4, -2), B(7, 0), C(-3, 1).$

1.9. $A(4, 1), B(-2, 8), C(1, -5).$

1.10. $A(4, 0), B(1, -3), C(5, 2).$

1.11. $A(7, 10), B(1, 3), C(4, -2).$

1.12. $A(8, 6), B(1, 3), C(-2, -3).$

1.13. $A(11, -3), B(-1, -3), C(7, 1).$

- 1.14. $A (5, 9), B (4, -1), C (0, 1)$.
- 1.15. $A (7, 3), B (1, 7), C (-2, 1)$.
- 1.16. $A (1, 6), B (6, 1), C (-3, -2)$.
- 1.17. $A (2, 6), B (6, -6), C (2, -4)$.
- 1.18. $A (10, 1), B (3, 7), C (-3, 4)$.
- 1.19. $A (8, 3), B (2, 8), C (-4, 4)$.
- 1.20. $A (7, 7), B (-7, 5), C (-3, -3)$.
- 1.21. $A (3, -3), B (4, 3), C (-6, 1)$.
- 1.22. $A (6, 2), B (-6, 8), C (2, -4)$.
- 1.23. $A (7, 5), B (-4, 0), C (2, -5)$.
- 1.24. $A (8, -1), B (2, 6), C (-4, 4)$.
- 1.25. $A (-5, 0), B (2, -6), C (8, -3)$.
- 1.26. $A (1, -4), B (-1, 10), C (-9, 6)$.
- 1.27. $A (-3, 7), B (-1, 3), C (2, -4)$.
- 1.28. $A (10, 4), B (-4, 6), C (-1, 3)$.
- 1.29. $A (2, -6), B (3, 11), C (-1, 3)$.
- 1.30. $A (-5, 5), B (4, -7), C (-2, -7)$.

2. $ABCD$ пирамиданинг учлари берилган. Қуйидагиларни то-
пинг:

- а) ABC текислик тенгламасини;
- б) AB кийра тенгламасини;
- в) D учидан ўтувчи ABC ўкка перпендикуляр тўғри чизик
тенгламасини;
- г) C учидан ўтувчи AB кийрага параллел тўғри чизик
тенгламасини;
- д) D учидан ўтувчи AB кийрага перпендикуляр текислик
тенгламасини;
- е) AD кийра билан ABC ёк орасидаги бурчак синусини;
- ж) ABC ва ABD ёклар орасидаги бурчак косинусини;
- з) D учдан ABC ёккача бўлган масофани.

- 2.1. $A (7, 3, 5), B (5, 3, 2), C (10, 2, 4), D (7, -2, 1)$.
- 2.2. $A (-8, -6, -3), B (4, 2, 1), C (0, 5, 2), D (0, 2, 5)$.
- 2.3. $A (7, -3, 14), B (-6, 0, 5), C (1, 2, 1), D (-2, -1, 2)$.
- 2.4. $A (5, 5, -6), B (-4, -8, 4), C (1, 7, -1), D (-4, 0, -2)$.
- 2.5. $A (7, -8, -1), B (-3, -6, -2), C (2, -3, -5),$
 $D (5, 4, 14)$.
- 2.6. $A (16, -8, -13), B (6, 2, 5), C (-3, 0, 3), D (0, 2, 1)$.
- 2.7. $A (7, 3, -5), B (1, 2, 3), C (-1, 2, 1), D (2, -1, 2)$.

- 2.8. $A (8, 3, 2), B (4, -2, 2), C (3, 1, -1), D (2, 1, 1).$
 2.9. $A (8, -4, -5), B (7, 3, 6), C (-2, 1, 4), D (1, 3, 2).$
 2.10. $A (6, -7, -3), B (1, 2, 3), C (1, 3, 2), D (2, 1, 1).$
 2.11. $A (-12, 7, -1), B (0, -2, -5), C (-4, 5, 1),$
 $D (-7, 4, -3).$
 2.12. $A (-5, -6, 1), B (-2, 1, 2), C (0, -1, 4), D (-3, 2, -1).$
 2.13. $A (-1, 0, -7), B (4, -5, 3), C (-2, 1, -9), D (1, -1, -3).$
 2.14. $A (2, 4, -2), B (-1, 1, 2), C (3, 0, -2), D (1, -1, 1).$
 2.15. $A (4, -1, 2), B (-1, 1, 0), C (2, -1, 1), D (0, 2, 1).$
 2.16. $A (16, -9, -5), B (1, -2, 2), C (-1, 2, 1), D (2, 0, 1).$
 2.17. $A (-9, -2, 3), B (6, -1, -2), C (1, 0, 1), D (-3, 2, 1).$
 2.18. $A (-10, 7, -6), B (-3, 0, -6), C (-5, 3, -2),$
 $D (-1, 10, 3).$
 2.19. $A (5, 3, -2), B (-1, 0, 3), C (-4, -2, -1), D (4, 2, -1).$
 2.20. $A (-5, 4, -3), B (5, -1, 2), C (2, 1, -4), D (1, -3, 0).$
 2.21. $A (0, 3, 4), B (1, 0, 3), C (2, -1, 4), D (0, 3, 1).$
 2.22. $A (-16, 20, -21), B (-4, 1, 3), C (2, 3, 0),$
 $D (-1, -1, -2).$
 2.23. $A (2, -1, 1), B (3, 7, -2), C (3, 6, -3), D (-7, 5, 1).$
 2.24. $A (8, -10, 2), B (-3, 3, -1), C (0, -6, 5), D (-3, -4, 2).$
 2.25. $A (7, 2, -3), B (4, 1, 1), C (2, 1, 2), D (2, -1, 1).$
 2.26. $A (5, -4, 5), B (1, 0, -1), C (1, 2, 2), D (6, 3, 1).$
 2.27. $A (8, 1, -12), B (8, 5, -10), C (0, -3, 2), D (6, 2, -4).$
 2.28. $A (8, 1, 10), B (-1, -2, -5), C (-2, -1, 7), D (4, 2, 7).$
 2.29. $A (8, 1, -3), B (2, -3, -7), C (-2, 5, 3), D (4, 1, 2).$
 2.30. $A (-7, -8, 10), B (-3, 6, 3), C (-3, 0, -6),$
 $D (2, -5, -1).$

3. Тўғри чизикнинг каноник тенгламаларини ёзинг:

$$3.1. \begin{cases} 2x + 3y - 2z + 6 = 0, \\ 3x + 3y + z - 1 = 0, \end{cases}$$

$$3.2. \begin{cases} x - 3y + z + 3 = 0, \\ 2x - 3y - 2z + 6 = 0. \end{cases}$$

$$3.3. \begin{cases} 3x + 4y + 3z + 1 = 0, \\ 6x - 5y + 3z + 8 = 0, \end{cases}$$

$$3.4. \begin{cases} 2x - 4y - 2z + 4 = 0, \\ 6x + 5y - 4z + 4 = 0. \end{cases}$$

$$3.5. \begin{cases} x - 3y + z + 2 = 0, \\ 5x + 3y + 2z - 4 = 0, \end{cases}$$

$$3.6. \begin{cases} x + 5y - z + 11 = 0, \\ 8x - 5y - 3z - 1 = 0. \end{cases}$$

$$3.7. \begin{cases} x + 3y + 2z + 14 = 0, \\ 5x + 3y + 2z - 4 = 0, \end{cases}$$

$$3.8. \begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0, \\ x + y + z + 11 = 0. \end{cases}$$

$$3.9. \begin{cases} x+5y+2z-5=0, \\ 2x-5y+z+6=0, \end{cases}$$

$$3.10. \begin{cases} x+y-2z-2=0, \\ 6x-y-4z-3=0. \end{cases}$$

$$3.11. \begin{cases} 2x-5y-z+5=0, \\ x+5y-2z+3=0, \end{cases}$$

$$3.12. \begin{cases} x-y+z+2=0, \\ 7x+y+z-5=0. \end{cases}$$

$$3.13. \begin{cases} 6x-7y-z-2=0, \\ x+7y-z+8=0, \end{cases}$$

$$3.14. \begin{cases} 2x-y-3z-2=0, \\ 3x-y-2z-1=0. \end{cases}$$

$$3.15. \begin{cases} x+7y-4z-5=0, \\ 2x-7y+2z+8=0, \end{cases}$$

$$3.16. \begin{cases} 2x-y+z+6=0, \\ 3x+y+2z-4=0. \end{cases}$$

$$3.17. \begin{cases} x-y+z-2=0, \\ 6x+y-4z+8=0, \end{cases}$$

$$3.18. \begin{cases} 4x+y+z+2=0, \\ 2x-y-3z+4=0. \end{cases}$$

$$3.19. \begin{cases} x-2y-z+4=0, \\ 6x+2y+3z+4=0, \end{cases}$$

$$3.20. \begin{cases} 2x-y-3z-8=0, \\ 2x-5y+2z-4=0. \end{cases}$$

$$3.21. \begin{cases} x-y-z-2=0, \\ x+3y+2z-6=0, \end{cases}$$

$$3.22. \begin{cases} x-2y+z+4=0, \\ 2x+2y+z-4=0. \end{cases}$$

$$3.23. \begin{cases} 5x+y-3z+4=0, \\ 5x-3y-z+8=0, \end{cases}$$

$$3.24. \begin{cases} x-y+2z+2=0, \\ x-3y-z+4=0. \end{cases}$$

$$3.25. \begin{cases} 3x+4y-2z+1=0, \\ x-4y-2z+3=0, \end{cases}$$

$$3.26. \begin{cases} 2x-4y+3z+4=0, \\ x+4y+z-6=0. \end{cases}$$

$$3.27. \begin{cases} x+5y+2z+11=0, \\ 3x-y-2z+7=0, \end{cases}$$

$$3.28. \begin{cases} 2x-4y+3z+4=0, \\ x+4y+z-6=0. \end{cases}$$

$$3.29. \begin{cases} 3x+y-z-6=0, \\ 2x-3y+z-8=0, \end{cases}$$

$$3.30. \begin{cases} 3x-y+2z-4=0, \\ 2x+3y-2z+6=0. \end{cases}$$

4. Берилган тўғри чизик билан текисликнинг кесишиш нуқтасини топинг:

$$4.1. \frac{x-3}{0} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{10},$$

$$x+2y-2z+25=0.$$

$$4.2. \frac{x+1}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-2}{-2},$$

$$2x-7y-3z-21=0.$$

$$4.3. \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{1},$$

$$5x-2y-z-13=0.$$

- 4.4. $\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{3}$, $4x - y + 3z + 6 = 0$.
- 4.5. $\frac{x+5}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-1}{6}$, $5x - 2y + 3z - 3 = 0$.
- 4.6. $\frac{x+1}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{-2}$, $5x - 2y + 3z - 3 = 0$.
- 4.7. $\frac{x-8}{0} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$, $4x + 9y + 5z = 0$.
- 4.8. $\frac{x+8}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-1}$, $6x - y - 4z - 3 = 0$.
- 4.9. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-5}{-1}$, $5x - 7y - 3z + 11 = 0$.
- 4.10. $\frac{x+5}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{1}$, $3x + 7y + z + 11 = 0$.
- 4.11. $\frac{x+5}{12} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z-1}{8}$, $3x - 2y - z - 6 = 0$.
- 4.12. $\frac{x+4}{-1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{-2}$, $4x - 5y + 2z + 24 = 0$.
- 4.13. $\frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{2}$, $7x + 4y + 3z - 16 = 0$.
- 4.14. $\frac{x-3}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1}$, $3x + 4y - 5z + 20 = 0$.
- 4.15. $\frac{x-1}{5} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{2}$, $7x - 3y + 2z - 28 = 0$.
- 4.16. $\frac{x-4}{2} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-3}{-1}$, $4x + y - 7z - 19 = 0$.
- 4.17. $\frac{x-4}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{2}$, $5x - 3y + z - 36 = 0$.
- 4.18. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+3}{1}$, $4x - y + 5z + 3 = 0$.
- 4.19. $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1}$, $x - 2y - z + 2 = 0$.
- 4.20. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{1}$, $4x + 2y - 3z + 8 = 0$.
- 4.21. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$, $x - 2y - 4z + 11 = 0$.
- 4.22. $\frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+2}{1}$, $5x + 3y - 2z + 7 = 0$.

$$4.23. \frac{x+4}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-1}, \quad 3x - y + 2z + 23 = 0.$$

$$4.24. \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{2}, \quad 4x - 2y + z - 19 = 0.$$

$$4.25. \frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{1}, \quad 3x - 2y + z - 8 = 0.$$

$$4.26. \frac{x-1}{5} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z+1}{3}, \quad 5x + 2y + z - 15 = 0.$$

$$4.27. \frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-1}{-1}, \quad 7x + 3y + z - 25 = 0.$$

$$4.28. \frac{x+3}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{1}, \quad 4x - y + 2z = 0.$$

$$4.29. \frac{x-2}{0} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{1}, \quad 5x - y - 3z + 10 = 0.$$

$$4.30. \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-3}, \quad x + 3y - 5z - 21 = 0.$$

9-§. Эллипс, гипербола ва параболанинг каноник тенгламалари

1.9.1. *Эллипс* деб текисликдаги шундай нукталар тўпламига айтиладики, бу нукталарнинг ҳар биридан шу текислиkning *фокуслар* деб аталувчи икки нуктасигача бўлган масофалар йиғиндиси ўзгармас микдордир.

Фокуслари Ox ўқда координаталар бошига нисбатан симметрик ётувчи эллипснинг (10-шакл) каноник тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b.$$

Бунда a ва b эллипснинг катта ва кичик ярим ўқлари узунликлари. Фокуслар орасидаги масофани $2c$ десак, $c^2 = a^2 - b^2$ муносабат ўринли. Эллипснинг эксцентриситети деб

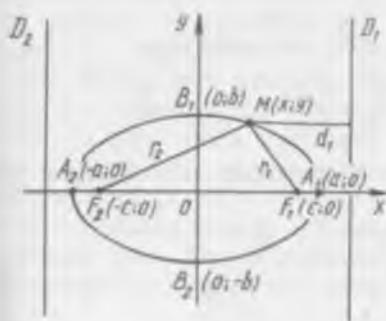
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$$

га айтилади.

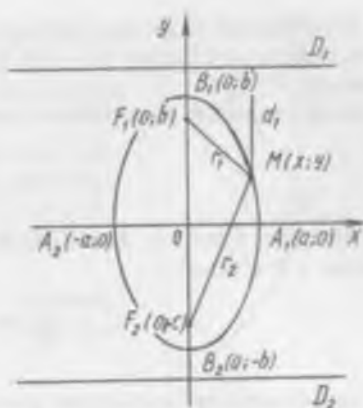
Эллипснинг $M(x, y)$ нуктасидан фокусларигача бўлган масофалар (r_1 ва r_2 билан белгиланади) унинг *фокал радиуслари* дейилади.

Тенгламалари

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{a^2}{c}, \quad a > b,$$



10- шакл



11- шакл

дан иборат иккита тўғри чизик эллипснинг директрисалари дейилади ва улар ушбу хоссага эга:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e.$$

Агар $a < b$ бўлса, у ҳолда эллипснинг фокуслари Oy ўқда ётади (11- шакл), $2b$ унинг катта ўқи, эксцентриситети эса $e = \frac{c}{b}$ бўлади, бунда $c^2 = b^2 - a^2$. Директрисалари тенгламалари:

$$y = \pm \frac{b}{e} = \pm \frac{b^2}{c}.$$

Агар $a = b$ бўлса, эллипс радиуси a , маркази координаталар бошида бўлган $x^2 + y^2 = a^2$ айланадан иборат бўлади.

1.9.2. Гипербола деб текисликдаги шундай нукталар тўпламига айтиладики, бу нукталарнинг ҳар биридан шу текисликнинг фокуслар деб аталувчи икки нуктасигача бўлган масофалар айирмаларининг абсолют кийматлари ўзгармас микдордир.

Фокуслари Ox ўқда координаталар бошига нисбатан симметрик ҳолда ётувчи гиперболанинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

кўринишга эга. Бунда a — гиперболанинг хакикий ярим ўқи узунлиги; b — мавҳум ярим ўқи узунлиги. Агар фокуслар орасидаги масофани $2c$ десак, $b^2 = c^2 - a^2$ бўлади.

Гипербола эксцентриситети деб

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$$

га айтилади.

Гиперболанинг *фокал радиуслари* деб, унинг $M(x, y)$ нуктасидан фокусларигача бўлган масофаларига (r_1 ва r_2 билан белгиланади) айтилади.

Гиперболанинг *директрисалари* деб, тенгламалари

$$x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{a^2}{c}$$

дан иборат бўлган ва қуйидаги хоссаларга эга иккита тўғри чизиққа айтилади:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon,$$

Гипербола тенгламалари $y = \pm \frac{b}{a}x$ дан иборат иккита асимптотага эга.

Агар $a=b$ бўлса, гипербола *тенг томонли гипербола* дейилади ва унинг тенгламаси

$$x^2 - y^2 = a^2$$

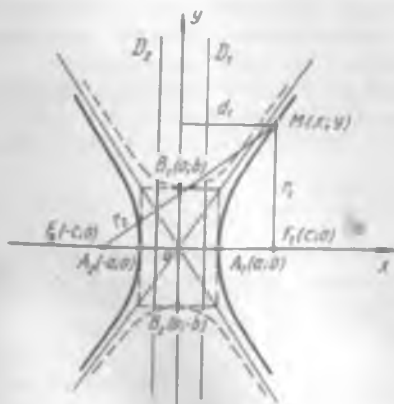
қўринишни олади, асимптоталари тенгламаси эса $y = \pm x$ дан иборат бўлади.

Агар гиперболанинг асимптоталари Oy ўқда координаталар бошига нисбатан симметрик ётса, у ҳолда унинг тенгламаси

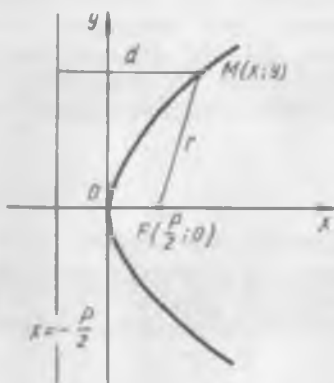
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{ёки} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

қўринишни олади. Гиперболанинг эксцентриситети $\varepsilon = \frac{c}{b}$, ди-

ректрисалари $y = \pm \frac{b}{c} = \pm \frac{b^2}{c}$, асимптоталари $y = \pm \frac{b}{a}x$ бўлади.



12- шакл



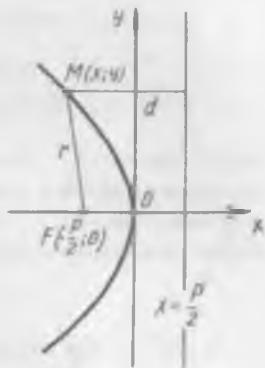
13- шакл

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ва } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ гипербола-}$$

лар қўшма гипербодалар дейилади (12- шакл).

1.9.3. Фокус деб аталувчи берилган нуктадан ва **директриса** деб аталувчи берилган тўғри чизикдан тенг узокликда ётувчи текисликдаги нукталар тўплами **парабола** дейилади.

Учи координаталар бошида ётувчи, симметрия ўқи Ox ўқдан иборат бўлган параболанинг каноник тенгламаси



14- шакл

$$y^2 = 2px$$

кўринишга эга (13- шакл). Бунда $p > 0$ (парабола параметри) — фокусдан директрисагача бўлган масофа. Директрисанинг тенгламаси $x = -\frac{p}{2}$ кўринишга эга.

Агар r — параболанинг $M(x, y)$ нуктасидан парабола фокусигача бўлган масофа, d — шу $M(x, y)$ нуктадан директрисагача бўлган масофаси бўлса, у ҳолда унинг эксцентриситети

$$e = \frac{r}{d} = 1.$$

Учи координаталар бошида, симметрия ўқи Oy бўлган парабола-нинг каноник тенгламаси ушбу кўринишга эга (14- шакл):

$$x^2 = 2py \quad (p > 0).$$

Унинг директрисаси тенгламаси эса: $y = \frac{p}{2}$.

Мисол. Фокуслари орасидаги масофа 10 га ва мавҳум ярим ўқи 3 га тенг бўлган гиперболанинг каноник тенгламасини тузинг.

Ечиш. Масаланинг шартига кўра $b = 3$ ва $2c = 10$, бундан $c = 5$ ва $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$ келиб чиқади. Демак, излана-ётган каноник тенглама

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

кўринишда бўлади.

1.9.4. Ушбу

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2,$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1,$$

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0).$$

$$(x-x_0)^2 = 2p(y-y_0)$$

тенгламалар мос равишда марказлари $C(x_0, y_0)$ нуктада бўлган айлана, эллипс, гипербол ва учи $C(x_0, y_0)$ нуктада ётувчи параболаларни аниқлайди.

9- дарсхона топшириғи

1. $9x^2 + 25y^2 = 225$ эллипс берилган. Унинг ярим уқларини, фокуслари координаталарини, эксцентриситети, директрисалари тенгламаларини топинг ва шаклини чизинг.

Ж: $a=5$, $b=3$; $F_1(4, 0)$; $F_2(-4, 0)$; $e=0,8$; $x = \pm \frac{25}{4}$.

2. $16x^2 - 9y^2 = 144$ гипербол берилган. Унинг ярим ўқини, фокуслари координаталарини, эксцентриситетини, директрисаси ва асимптоталари тенгламасини топинг. Шаклини чизинг. Ж: $a=3$, $b=4$, $F_1(5, 0)$ ва $F_2(-5, 0)$; $e=\frac{5}{3}$; $x = \pm \frac{9}{5}$, $y = \pm \frac{4}{3}x$.

3. $y^2 = 6x$ парабола берилган. Унинг p параметрини, директрисаси тенгламасини топинг ва шаклини чизинг.

Ж: $p=3$, $F(\frac{3}{2}; 0)$; $x = -\frac{3}{2}$.

4. Фокуслари абсцисса ўқида ётувчи ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи эллипснинг каноник тенгламасини тузинг:

а) унинг кичик ўқи 24 га, фокуслар орасидаги масофа 10 га тенг;

б) директрисалари орасидаги масофа 32 га, эксцентриситети 0,5 га тенг.

5. Эллипснинг фокуслари ординаталар ўқида ётиб,

а) унинг кичик ўқи 16 га, эксцентриситети эса 0,6 га тенг;

б) унинг фокуслари орасидаги масофа 6 га ва директрисалари орасидаги масофа $16\frac{2}{3}$ га тенг бўлса, унинг каноник тенгламасини тузинг.

6. Гиперболанинг фокуслари абсциссалар ўқида ётиб,

а) унинг фокуслари орасидаги масофа 6 га ва эксцентриситети 1,5 га тенг;

б) унинг хақиқий ярим ўқи 5 га тенг, учлари эса маркази билан фокуси орасидаги масофани тенг иккига бўлса, унинг каноник тенгламасини тузинг.

7. Гиперболанинг фокуслари Oy ўқида ётиб,

а) асимптоталари тенгламалари $y = \pm \frac{12}{5}x$ ва учлари орасидаги масофа 48 га тенг;

б) фокуслари орасидаги масофа 10 га, эксцентриситети

$\frac{5}{1}$ га тенг бўлса, унинг каноник тенгламасини тузинг.

8. Параболанинг каноник тенгламасини тузинг:

а) параболанинг фокуси $F(0, 4)$; б) парабола Ox ўқка нисбатан симметрик ва $A(9, 6)$ нуктадан ўтади.

9. Чизиклар тенгламаларини соддалаштиринг, уларнинг тури-ни аниқланг, параметрларини топинг ва шаклини чизинг:

а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$;

б) $2x^2 + 5y^2 + 8x - 10y - 17 = 0$;

в) $x^2 - 6y - 12x + 36y - 48 = 0$;

г) $x^2 - 8x + 2y + 18 = 0$;

д) $y^2 - 4x + 4y + 16 = 0$.

9- мустақил иш

1. $x^2 + 4y^2 = 4$ эллипс фокусларидан ўтувчи ва маркази эллипснинг юкори учиди бўлган айлана тенгламасини тузинг.

Ж: $x^2 + (y - 1)^2 = 4$.

2. а) Катта ўқи 6 га тенг, фокуси эса $F(\sqrt{5}, 0)$ нуктада бўлган эллипс;

б) мавҳум ўқи 4 га тенг ва фокуси $F(-\sqrt{13}, 0)$ нуктада бўлган гипербола;

в) директрисаси $y = -3$ бўлган параболанинг каноник тенгламасини тузинг.

Ж: а) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; б) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; в) $x^2 = 12y$.

3. Ҳар бир нуктасидан $A(3, 2)$ нуктагача бўлган масофа $B(-1, 0)$ нуктагача бўлган масофадан 3 марта ортик бўлган чизик тенгламасини тузинг.

Ж: $(x + \frac{3}{2})^2 + (y + \frac{1}{4})^2 = \frac{45}{16}$.

10- §. Иккинчи тартибли сиртларнинг каноник тенгламалари

1.10.1. Иккинчи тартибли сиртлар:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ — уч ўқли эллипсоид;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ — бир паллали гиперболоид;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ — икки паллали гиперболоид;}$$

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \text{ — эллиптик параболоид (} p \text{ ва } q \text{ ларнинг ишоралари бир хил);}$$

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} \text{ — гиперболик параболоид (} p \text{ ва } q \text{ ларнинг ишоралари бир хил);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ — конус;}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — эллиптик цилиндр;}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — гиперболик цилиндр;}$$

$$y^2 = 2px \text{ — параболик цилиндр.}$$

Айланиш сиртлари дастлабки тўртта иккинчи тартибли сиртнинг хусусий ҳолидир:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ — айланиш эллипсоиди;}$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ — бир паллали айланиш гиперболоиди;}$$

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ — икки паллали айланиш гиперболоиди;}$$

$$x^2 + y^2 = 2pz \text{ — айланиш параболоиди.}$$

10- дарсхона топшириғи

1. Берилган тенгламалар билан аниқланувчи сиртларнинг шаклини чизинг.

- а) $4x^2 + y^2 + 2z^2 = 2$;
- б) $2x^2 + 9y^2 - 2z^2 = 36$;
- в) $4x^2 + y^2 - 8z^2 = -16$;
- г) $2y = 4x^2 + z^2$;
- д) $x^2 + 4z^2 = 4$;
- е) $y^2 - 4z = 0$.

2. Сирт турини аниқланг ва унинг шаклини чизинг:

- а) $4x^2 + y^2 - z^2 - 24x - 4y + 2z + 35 = 0$;
- б) $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$;
- в) $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 4z + 18 = 0$;
- г) $x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$.

Куйидаги сиртлар билан чегараланган жисмларнинг шаклини чизинг:

1. $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$ ва $z = 0$;

2. $z = y^2$, $x^2 + y^2 = 9$ ва $z = 0$;

3. $z^2 = 4 - y$ ва $x^2 + y^2 = 4y$.

4- назорат иши

1. Чизик тенгламасини каноник кўринишга келтиринг ва унинг шаклини чизинг:

1.1. а) $4x^2 + 2y^2 - 16x + 4y + 10 = 0$;

б) $5x^2 - 6y^2 + 30x + 12y + 9 = 0$;

в) $x^2 + 10x - 4y + 33 = 0$.

1.2. а) $3x^2 + 5y^2 + 6x - 20y + 8 = 0$;

б) $4x^2 - y^2 + 16x + 12 = 0$;

в) $y^2 + 3x + 10y + 46 = 0$.

1.3. а) $x^2 + 2y^2 + 6x - 4y + 9 = 0$;

б) $x^2 - 4y^2 - 2x + 16y - 19 = 0$.

в) $x^2 - 4x + 2y - 2 = 0$.

1.4. а) $x^2 + 4y^2 + 16y + 12 = 0$;

б) $2x^2 - 3y^2 - 12x - 18y - 15 = 0$;

в) $y^2 + 8x + 10y + 9 = 0$.

1.5. а) $6x^2 + 5y^2 - 10y - 25 = 0$;

б) $5x^2 - 6y^2 - 5x - 25 = 0$;

в) $x^2 + 8x - 9y - 29 = 0$.

1.6. а) $5x^2 + 6y^2 - 10x - 25 = 0$;

б) $6x^2 - 5y^2 + 10y - 35 = 0$;

в) $y^2 - 16x - 6y + 25 = 0$.

1.7. а) $2x^2 + 3y^2 - 12x + 18y + 39 = 0$;

б) $x^2 - 4y^2 - 16y - 20 = 0$;

в) $x^2 + 8x - 2y + 14 = 0$.

1.8. а) $x^2 + 4y^2 - 2x - 16y + 13 = 0$;

б) $x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 5 = 0$;

в) $y^2 + x - 4y + 2 = 0$.

- 1.9. а) $4x^2 + y^2 + 16x + 12 = 0$;
 б) $3x^2 - 5y^2 + 6x + 20y - 32 = 0$;
 в) $x^2 + 6x + 5y - 6 = 0$.
- 1.10. а) $5x^2 + 6y^2 + 30x - 12y + 21 = 0$;
 б) $4x^2 - 2y^2 - 8x - 4y + 6 = 0$;
 в) $y^2 - 2x + 6y + 17 = 0$.
- 1.11. а) $16x^2 + 9y^2 + 96x - 18y + 9 = 0$;
 б) $16x^2 - 9y^2 - 160x - 36y + 220 = 0$;
 в) $x^2 - 4x + 5y + 14 = 0$.
- 1.12. а) $4x^2 + 5y^2 - 24x + 70y + 181 = 0$;
 б) $4x^2 - 16y^2 - 72x - 64y + 196 = 0$;
 в) $y^2 - 6x + 2y - 11 = 0$.
- 1.13. а) $3x^2 + 2y^2 - 6x - 12y + 15 = 0$;
 б) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0$;
 в) $x^2 - 8x - 3y + 19 = 0$.
- 1.14. а) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y - 7 = 0$;
 б) $2x^2 - y^2 + 4x + 4y - 10 = 0$;
 в) $y^2 - 5x + 6y + 4 = 0$.
- 1.15. а) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$;
 б) $4x^2 - 25y^2 - 24x - 100y - 164 = 0$;
 в) $x^2 - 6x + 5y - 6 = 0$.
- 1.16. а) $6x^2 + 5y^2 + 12x - 20y - 4 = 0$;
 б) $25x^2 - 9y^2 - 100x - 36y - 161 = 0$;
 в) $y^2 - 3x - 2y + 7 = 0$.
- 1.17. а) $5x^2 + 3y^2 + 20x + 24y + 53 = 0$;
 б) $5x^2 - 8y^2 + 30x + 16y - 3 = 0$;
 в) $x^2 - 7y + 12x + 50 = 0$.
- 1.18. а) $3x^2 + 4y^2 - 12x - 16y + 16 = 0$;
 б) $8x^2 - 9y^2 - 16x + 36y - 100 = 0$;
 в) $y^2 - 4x + 4y + 8 = 0$.
- 1.19. а) $4x^2 + 5y^2 + 24x + 10y + 21 = 0$;
 б) $9x^2 - 5y^2 - 36x - 30y - 54 = 0$;
 в) $x^2 - 3y - 14x + 31 = 0$.
- 1.20. а) $16x^2 + 9y^2 - 64x - 18y - 71 = 0$;
 б) $9x^2 - 4y^2 + 18x + 24y - 63 = 0$;
 в) $y^2 + 2x - 6y + 11 = 0$.

- 1.21. а) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 24y + 9 = 0$;
 б) $16x^2 - 9y^2 - 64x + 18y - 82 = 0$;
 в) $x^2 + 4y + 10x - 3 = 0$.
- 1.22. а) $9x^2 - 5y^2 - 18x + 30y + 36 = 0$;
 б) $4x^2 - 5y^2 + 24x - 10y + 11 = 0$;
 в) $y^2 + 3x + 10y + 28 = 0$.
- 1.23. а) $8x^2 + 9y^2 - 16x - 36y - 28 = 0$;
 б) $3x^2 - 4y^2 - 12x + 16y - 16 = 0$;
 в) $x^2 + 4y - 4x + 24 = 0$.
- 1.24. а) $5x^2 + 8y^2 + 30x - 16y + 13 = 0$;
 б) $6x^2 - 5y^2 + 12x + 20y - 44 = 0$;
 в) $y^2 + 5x + 6y + 1 = 0$.
- 1.25. а) $25x^2 + 9y^2 - 100x + 36y - 89 = 0$;
 б) $5x^2 - 3y^2 + 20x - 24y - 43 = 0$;
 в) $x^2 - 4y + 2x + 9 = 0$.
- 1.26. а) $4x^2 + 9y^2 - 24x + 36y + 36 = 0$;
 б) $16x^2 - 25y^2 - 32x + 100y - 484 = 0$;
 в) $y^2 + 6x - 8y + 22 = 0$.
- 1.27. а) $5x^2 + 6y^2 + 20x - 12y - 4 = 0$;
 б) $9x^2 - 16y^2 - 54x - 32y - 79 = 0$;
 в) $x^2 - 4y - 6x + 1 = 0$.
- 1.28. а) $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$;
 б) $8x^2 - 5y^2 - 32x + 10y - 13 = 0$;
 в) $y^2 - 3x + 10y + 16 = 0$.
- 1.29. а) $9x^2 + 16y^2 - 54x + 32y - 47 = 0$;
 б) $5x^2 - 6y^2 + 20x + 12y - 16 = 0$;
 в) $x^2 + 3y + 16x + 19 = 0$.
- 1.30. а) $16x^2 + 25y^2 - 32x - 100y - 284 = 0$;
 б) $4x^2 - 9y^2 - 36x - 36y - 36 = 0$;
 в) $y^2 + 5x + 6y - 1 = 0$.

2. Сирт турни аннкланг:

- 2.1. $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 4$. 2.2. $x^2 + 4y^2 = 4$.
 2.3. $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 4$. 2.4. $4x^2 - 5z^2 = 20$.
 2.5. $9x^2 - 2y + z^2 = 18$. 2.6. $y^2 - 4x = 0$.
 2.7. $4x^2 + 2z^2 - y = 0$. 2.8. $4x^2 + 5y = 0$.

- 2.9. $3y^2 - 2z^2 + 3x = 0$. 2.10. $6y^2 - z = 0$.
 2.11. $6x^2 + y^2 + 3z^2 = 18$. 2.12. $x^2 + 4z = 0$.
 2.13. $4x^2 + y^2 - 3z^2 = 12$. 2.14. $5z^2 - x = 0$.
 2.15. $5x^2 - y^2 - z^2 = 5$. 2.16. $2z^2 + 5y = 0$.
 2.17. $3x^2 + y^2 - 2z = 0$. 2.18. $4x^2 + 3z^2 = 12$.
 2.19. $2y^2 + z - 3x^2 = 0$. 2.20. $2y^2 + 5z^2 = 10$.
 2.21. $9x^2 + 3y^2 + 5z^2 = 45$. 2.22. $3z^2 - 4y^2 = 12$.
 2.23. $6x^2 - 3y^2 + z^2 = 6$. 2.24. $x^2 - 4y^2 = 4$.
 2.25. $4x^2 - 9y^2 - 2z^2 = 18$. 2.26. $3y^2 - x^2 = 3$.
 2.27. $3y^2 + 5z^2 - 15x = 0$. 2.28. $4y^2 - 5z^2 = 20$.
 2.29. $4z^2 - 3x^2 - 12y = 0$. 2.30. $3z^2 - 4x^2 = 12$.

4- намунавий ҳисоб топшириқлари

1. Куйидагилар маълум:

A, B — эгри чизикда ётувчи нукталар;

F — фокус;

a — катта ярим ўк (ёки ҳақиқий ярим ўк);

b — кичик (ёки мавҳум) ярим ўк;

e — эксцентриситет;

$y = \pm kx$ — гиперболо асимптоталари тенгламалари;

D — эгри чизик директрисаси;

$2c$ — фокус масофаси.

а) эллипсининг; б) гиперболанинг; в) параболанинг каноник тенгламасини тузинг:

1.1. а) $a=9$, $e = \frac{\sqrt{17}}{9}$; б) $b=7$; $F(-\sqrt{130}, 0)$; в) симметрия ўқи Oy , $A(-4, 32)$.

1.2. $b=3$, $F(-\sqrt{55}, 0)$; б) $a=8$, $e = \frac{5}{4}$; в) $D: x=3$.

1.3. $A(5, \frac{5}{6}\sqrt{11})$, $B(-4, \frac{5\sqrt{5}}{3})$; б) $k = \frac{2}{7}$, $e = \frac{\sqrt{53}}{7}$;

в) $D: y = -4$.

1.4. а) $e = \frac{4}{5}$, $A(-4, \frac{9}{5})$; б) $A(-5, \frac{9}{4})$ ва $B(\frac{20}{3}, -4)$; в) симметрия ўқи Ox , $A(-6, 10)$.

1.5. а) $2a=18$, $e = \frac{\sqrt{77}}{9}$; б) $k = \frac{6}{7}$; $c = \sqrt{85}$; в) $D: y=5$.

1.6. а) $b=5$, $e = \frac{2\sqrt{6}}{7}$; б) $k = \frac{4}{7}$; $2a=14$, в) $D: x=-3$.

1.7. а) $a=6$, $e = \frac{7\sqrt{3}}{2}$; б) $b=1$, $F(-\sqrt{17}, 0)$; в) симметрия ўқи Oy , $A(-4, -10)$.

1.8. а) $b=4$, $F(-3, 0)$; б) $a=3$, $e = \frac{\sqrt{13}}{3}$; в) $D: x=8$.

- 1.9. а) $A(-3\sqrt{5}, 4)$ ва $B(6, -2\sqrt{5})$; б) $k = \frac{5}{9}$, $e = \frac{\sqrt{106}}{9}$;
 в) $D:y = -16$.
 1.10. а) $e = \frac{\sqrt{39}}{8}$; $A(-4, \frac{5\sqrt{3}}{2})$; б) $A(-6, \frac{7\sqrt{7}}{4})$ ва $B(\frac{16\sqrt{6}}{7}, 5)$,
 в) симметрия ўқи Ox , $A(-3, 6)$.
 1.11. а) $2a = 12$, $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $k = \frac{1}{3}$, $2c = 4\sqrt{10}$; в) $D:y = 8$.
 1.12. а) $b = 2$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $k = \frac{1}{3}$, $2a = 18$; в) $D:x = -5$.
 1.13. а) $a = 9$, $e = \frac{\sqrt{65}}{9}$; б) $b = 4$, $F(-4\sqrt{5}, 0)$; в) симметрия ўқи Oy , $A(-3, 4)$.
 1.14. а) $b = 2$, $F(-2\sqrt{15}, 0)$; б) $a = 5$, $e = \frac{\sqrt{29}}{5}$; в) $D:x = \frac{5}{8}$.
 1.15. а) $A(-3, \frac{6}{7}\sqrt{10})$ ва $B(\frac{7}{3}\sqrt{5}, -2)$; б) $k = \frac{1}{3}$; $e = \frac{\sqrt{10}}{3}$;
 в) $D:y = -\frac{3}{8}$.
 1.16. а) $e = \frac{4\sqrt{2}}{9}$; $A(6, -\frac{7\sqrt{5}}{3})$; б) $A(-\frac{9\sqrt{5}}{2}, 4)$ ва $B(3, -\frac{8\sqrt{10}}{3})$; в) симметрия ўқи Ox , $A(-3, 8)$.
 1.17. а) $2a = 16$, $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$; б) $k = \frac{3}{8}$, $2c = 2\sqrt{73}$; в) $D:y = 6$.
 1.18. а) $b = 2$, $e = \frac{3\sqrt{5}}{7}$; б) $k = \frac{5}{6}$, $2a = 12$; в) $D:x = -\frac{5}{9}$.
 1.19. а) $a = 4$, $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$; б) $b = 3$, $F(-\sqrt{34}, 0)$; в) симметрия ўқи Oy , $A(-3, -4)$.
 1.20. а) $b = 6$, $F(\sqrt{13}, 0)$; б) $a = 9$, $e = \frac{\sqrt{85}}{9}$; в) $D:x = 6$.
 1.21. а) $A(4, -\frac{4\sqrt{33}}{7})$ ва $B(-\frac{7\sqrt{7}}{4}, 3)$; б) $k = \frac{5}{7}$, $e = \frac{\sqrt{74}}{7}$;
 в) $D:y = -6$.
 1.22. а) $e = \frac{\sqrt{15}}{4}$, $A(-3, \frac{\sqrt{7}}{4})$; б) $A(8, -\sqrt{17})$ ва $B(10, 4)$;
 в) $D:y = -8$.
 1.23. а) $2a = 6$, $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$; б) $k = \frac{4}{5}$, $2c = 2\sqrt{41}$; в) симметрия ўқи Ox , $A(-2, 6)$.
 1.24. а) $b = 5$, $e = \frac{2\sqrt{14}}{9}$; б) $k = \frac{2}{3}$, $2a = 18$; в) $D:x = -5$.
 1.25. а) $a = 8$, $e = \frac{\sqrt{15}}{8}$; б) $b = 5$, $F(-\sqrt{89}, 0)$; в) симметрия ўқи Oy ,
 $A(-2, 6)$.

- 1.26. а) $b=2$, $F(-4\sqrt{2}, 0)$; б) $a=6$, $e=\frac{\sqrt{13}}{3}$; в) $D:x=9$.
- 1.27. а) $A(6, -\sqrt{5})$ ва $B(-3\sqrt{5}, 2)$; б) $k=\frac{1}{2}$, $e=-\frac{\sqrt{5}}{2}$;
- в) $D:y=-3$.
- 1.28. а) $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $A(-6, -\sqrt{7})$; б) $A(10, \frac{4\sqrt{19}}{9})$, $(B\frac{9\sqrt{5}}{2}, -2)$;
- в) $D:y=9$.
- 1.29. а) $2a=10$, $e=\frac{\sqrt{21}}{5}$; б) $k=\frac{1}{4}$, $2c=4\sqrt{17}$; в) симметрия ўқи Ox , $A(3, -5)$.
- 1.30. а) $b=1$, $e=\frac{2\sqrt{2}}{3}$; б) $k=\frac{3}{7}$, $2a=14$; в) $D:x=-\frac{3}{4}$.

2. Ҳар бир N нуктаси куйидаги шартларни қаноатлантирадиган чизикларнинг тенгламасини тузинг:

2.1. N нукта $A(0, -4)$ нуктадан ва $y+2=0$ тўғри чизикдан бир хил узоклашган.

2.2. N нуктадан $A(-1, 3)$ ва $B(7, 3)$ нукталаргача бўлган масофалар йиғиндиси ўзгармас микдор, ҳамда $C(6, \frac{27}{5})$ нукта изланаётган чизикка тегишли.

2.3. N нуктадан $A(8, 0)$ нуктагача бўлган масофа ундан $x-2=0$ тўғри чизиккача бўлган масофадан икки марта катта.

2.4. N нуктадан координаталар бошигача ва $A(0, -4)$ нуктагача бўлган масофалар квадратлари йиғиндиси 16 га тенг.

2.5. N нукта $A(-4, 3)$ ва $B(1, -2)$ нукталардан бир хил узоклашган.

2.6. N нукта $A(0, 2)$ нуктага $B(0, 6)$ нуктага қараганда икки марта яқин туради.

2.7. N нукта $x+6=0$ тўғри чизик ва координаталар бошидан бир хил узоклашган.

2.8. N нуктадан $A(0, 4)$ нуктагача бўлган масофа ундан $y-36=0$ тўғри чизиккача бўлган масофадан уч марта кичик.

2.9. N нуктадан $A(0, -1)$ нуктагача бўлган масофа ундан $y+9=0$ тўғри чизиккача бўлган масофадан уч марта ортиқ.

2.10. N нукта координаталар ўқидан ва $A(2, 0)$ нуктадан бир хил узоклашган.

2.11. N нукта $A(5, -1)$ ва $B(0, 4)$ нукталардан бир хил узоклашган.

2.12. N нуктадан $A(0, 1)$ нуктагача бўлган масофа ундан $B(0, 4)$ нуктагача бўлган масофадан икки марта кичик.

2.13. N нуктадан координаталар бошигача ва $A(5, 0)$ нуктагача бўлган масофалар нисбати 2:1 га тенг.

2.14. N нуктадан $A(-1, 1)$ нуктагача бўлган масофа ундан $x+4=0$ тўғри чизиккача бўлган масофадан икки марта кичик.

2.15. N нуктадан $x-1=0$ тўғри чизиккача бўлган масофа ундан $A(4, 1)$ нуктагача бўлган масофадан икки марта кичик.

2.16. N нуктадан $A(2, 0)$ нуктагача ва $5x+8=0$ тўғри чизиккача бўлган масофалар нисбати 5:4 га тенг.

2.17. N нукта координаталар бошидан ва $x+4=0$ тўғри чизикдан бир хил узоқлашган.

2.18. N нуктадан $A(-8, 1)$ нуктагача бўлган масофа ундан $x+2=0$ тўғри чизиккача бўлган масофадан икки марта катта.

2.19. N нукта $A(2, 2)$ нуктадан ва абсциссалар ўкидан бир хил узоқлашган.

2.20. N нуктадан $A(3, 0)$ нуктагача бўлган масофа ундан ординаталар ўкигача бўлган масофадан икки марта катта.

2.21. N нуктадан координаталар бошигача ва $3x+16=0$ тўғри чизиккача бўлган масофалар нисбати 3:5 га тенг.

2.22. N нуктадан $A(1, 0)$ нуктагача бўлган масофа ундан $B(-2, 0)$ нуктагача бўлган масофадан икки марта кичик.

2.23. N нуктадан координаталар бошигача ва $A(0, 5)$ нуктагача масофалар нисбати 3:2 га тенг.

2.24. N нуктадан $A(0, 1)$ нуктагача бўлган масофа ундан $y-4=0$ тўғри чизиккача бўлган масофадан икки марта кичик.

2.25. N нукта $A(4, 2)$ нуктадан ва ординаталар ўкидан бир хил узоқлашган.

2.26. N нуктадан $A(4, 0)$ нуктагача бўлган масофа ундан $x-1=0$ тўғри чизиккача бўлган масофадан икки марта катта.

2.27. N нуктадан $A(1, 4)$ нуктагача бўлган масофа ундан $x+7=0$ чизиккача бўлган масофадан уч марта катта.

2.28. N нуктадан $A(4, 0)$ ва $B(-2, 2)$ нукталаргача бўлган масофалар квадратлари йиғиндиси 28 га тенг.

2.29. N нуктадан $A(-1, 7)$ нуктагача бўлган масофа ундан $x-8=0$ тўғри чизиккача бўлган масофадан икки марта кичик.

2.30. N нуктадан $A(3, -2)$ ва $B(4, 6)$ нукталаргача масофалар нисбати 3:5 га тенг.

3. Сирт номини аниқланг ва шаклини чизинг:

3.1. а) $4x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 20 = 0$; б) $9x^2 + 4y^2 = 36$.

3.2. а) $5x^2 + 5y^2 - 6z^2 - 30 = 0$; б) $z^2 = 4x - 3$.

3.3. а) $4x^2 - 3y^2 + 2z^2 - 24 = 0$; б) $2x^2 - 3z^2 = 6$.

3.4. а) $5x^2 + y^2 - 3z = 0$; б) $z^2 = 2y + 4$.

3.5. а) $x^2 + 4z^2 - 6y = 0$; б) $4x^2 + 3z^2 = 12$.

3.6. а) $8x^2 - y^2 + 4z^2 + 32 = 0$; б) $3y^2 + 2z^2 = 6$.

3.7. а) $6x^2 + 5y^2 - 10z^2 - 30 = 0$; б) $5x^2 - 4z^2 = 20$.

3.8. а) $2x^2 - 2y^2 + 5z^2 - 10 = 0$; б) $4z^2 + 3x = 12$.

3.9. а) $3y^2 + 5z^2 - 5x = 0$; б) $z^2 - 2y + 3 = 0$.

3.10. а) $5x^2 + 6y^2 + 15z^2 - 30 = 0$; б) $8x^2 + 5y^2 - 40 = 0$.

3.11. а) $3x^2 + 5y^2 - 4z = 0$; б) $5x^2 + 4z^2 = 20$.

3.12. а) $9x^2 + 12y^2 + 4z^2 - 72 = 0$; б) $4x^2 - 3y^2 = 12$.

3.13. а) $10x^2 - 9y^2 - 15z^2 - 90 = 0$; б) $y^2 = 2z$.

- 3.14. a) $6z^2 - 3y^2 - 2x^2 - 18 = 0$; 6) $3y^2 - 4z^2 = 12$.
 3.15. a) $3x^2 - 9y^2 + z^2 + 27 = 0$; 6) $x^2 - 4z^2 = 10$.
 3.16. a) $4x^2 + z^2 - 2y = 0$; 6) $y^2 = x + 3$.
 3.17. a) $2y^2 + 6z^2 = 3x$; 6) $z^2 = x - 4$.
 3.18. a) $4x^2 - 12y^2 + 3z^2 - 24 = 0$; 6) $3x^2 + z^2 = 30$.
 3.19. a) $2x^2 + 4y^2 - 5z^2 = 0$; 6) $7x^2 - 5y^2 = 35$.
 3.20. a) $7x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 42 = 0$; 6) $x^2 + 4z^2 = 4$.
 3.21. a) $2x^2 - 3y^2 - 5z^2 + 30 = 0$; 6) $3z^2 - 2x = 6$.
 3.22. a) $x^2 - 6y^2 + z^2 - 12 = 0$; 6) $2x^2 - 3z^2 = 6$.
 3.23. a) $3z^2 + 9y^2 - x = 0$; 6) $3x^2 + 5z^2 = 15$.
 3.24. a) $y - 4z^2 = 3x^2$; 6) $x^2 - 4z^2 = 4$.
 3.25. a) $8x^2 - y^2 - 2z^2 - 32 = 0$; 6) $2x^2 + 3z^2 = 6$.
 3.26. a) $6x^2 + y^2 + 6z^2 - 18 = 0$; 6) $2x^2 - 6y^2 = 12$.
 3.27. a) $3x^2 + 12y^2 + 4z^2 - 48 = 0$; 6) $2y^2 + 3z = 6$.
 3.28. a) $x^2 - 7y^2 - 14z^2 - 21 = 0$; 6) $4y^2 + 3z^2 = 12$.
 3.29. a) $3x^2 + y^2 + 9z^2 - 9 = 0$; 6) $3y^2 - 2x^2 = 6$.
 3.30. a) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 72$; 6) $2y^2 - 3x = 12$.

МАТЕМАТИК АНАЛИЗГА КИРИШ

1-§. Элементар функциялар

2.1.1. Агар x микдорнинг бирор D тўпладан олинган ҳар бир қийматига бирор E тўпладан олинган y микдорнинг бирдан-бир аниқ қиймати мос қўйилган бўлса, y ҳолда y ўзгарувчи микдор x ўзгарувчи микдорнинг *функцияси* дейилади.

x микдор эркин ўзгарувчи ёки *аргумент*, y микдор эса боғлиқ ўзгарувчи ёки *функция* дейилади. Функцияни белгилаш учун ушбу ёзувлардан фойдаланилади:

$$y=f(x), y=g(x), y=\varphi(x)$$

ва ҳ. к.

x ўзгарувчининг $f(x)$ функция маънога эга бўладиган қийматлари тўплами функциянинг *аниқланиш соҳаси* дейилади ва $D(f)$ кўринишда белгиланади. $y=f(x)$ функциянинг $x=x_0$ даги қиймати, бунда $x_0 \in D(f)$, функциянинг *хусусий қиймати* дейилади ва y_0 ёки $f(x_0)$ кўринишда белгиланади. Шундай қилиб,

$$y_0 = f(x_0) \text{ ёки } y|_{x=x_0} = y_0.$$

Функциянинг қабул қиладиган қийматлари тўплами унинг *ўзгариш соҳаси* дейилади ва $E(f)$ билан белгиланади.

Оху текислиكنинг $y=f(x)$ муносабатни каноатлантирувчи $M(x, y)$ нукталари тўплами $y=f(x)$ функциянинг *графики* дейилади.

2.1.2. Агар $y=f(x)$ функция $D(f)$ соҳани $E(f)$ соҳага ўзаро бир қийматли акслантирса, y ҳолда x ни y оркали бир қийматли ифодалаш мумкин:

$$x=\varphi(y).$$

Ҳосил бўлган функция $y=f(x)$ функцияга нисбатан *тескари функция* дейилади.

$y=f(x)$ ва $x=\varphi(y)$ функциялар *ўзаро тескари функциялардир*.

$x = \varphi(y)$ тескари функцияни, одатда, x ва y ларнинг ўринларини алмаштириш билан стандарт кўринишда ёзилади.

$$y = \varphi(x).$$

Ўзаро тескари $y = f(x)$ ва $y = \varphi(x)$ функцияларнинг графиклари биринчи ва учинчи координата чоракларининг биссектрисасига нисбатан симметрик. $y = f(x)$ функциянинг аникланиш соҳаси $y = \varphi(x)$ тескари функциянинг қийматлари соҳаси бўлади.

$u = \varphi(x)$ функциянинг аникланиш соҳаси D , қийматлар соҳаси V бўлсин, $y = f(u)$ функциянинг аникланиш соҳаси V бўлиб, ўзгариш соҳаси I бўлсин, у ҳолда $y = f(\varphi(x))$ аникланиш соҳаси D ва ўзгариш соҳаси I бўлган мураккаб функция ёки f ва φ функцияларнинг композицияси дейилади.

u ўзгарувчи *оралиқ ўзгарувчи* дейилади. $y = f(x)$ кўринишидаги функция *ошкор функция* дейилади. $F(x, y) = 0$ кўринишдаги тенглама ҳам, умуман айтганда x ва y ўзгарувчилар орасидаги функционал боғланишни беради. Бу ҳолда таърифга кўра y ўзгарувчи x нинг *ошкормас* функцияси бўлади. Масалан, $x^2 + y^2 = 4$ тенглама y ни x нинг ошкормас функцияси сифатида аниқлайди. Аникланиш соҳаси $D(f)$ координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган $f(x)$ функция x нинг ҳар қандай $x \in D(f)$ қиймати учун $f(-x) = f(x)$ (ёки $f(-x) = -f(x)$) муносабат бажарилса, *жуфт* (ёки *тоқ*) функция дейилади.

Жуфт функция графиги ординатлар ўкига нисбатан симметрик, тоқ функция графиги эса координатлар бошига нисбатан симметрикдир.

Агар $T > 0$ ўзгармас сон мавжуд бўлиб, ҳар бир $x \in D(f)$ ва $(x + T) \in D(f)$ да $f(x + T) = f(x)$ тенглик бажарилса, $f(x)$ функция *даврий функция* дейилади.

Айтилган хоссага эга бўлган T ларнинг энг кичиги T_0 функциянинг *даври* дейилади.

2.1.3. Қуйидаги функциялар *асосий элементар функциялар* дейилади:

а) $y = x^\alpha$ даражали функция, бунда $\alpha \in \mathbb{R}$; $D(f)$ ва $E(f)$ лар α га боғлиқ;

б) $y = a^x$ кўрсаткичли функция, бунда $a > 0$ ва $a \neq 1$; $D(f) = \mathbb{R}$ ва $E(f) = (0, +\infty)$;

в) $y = \log_a x$ логарифмик функция, бунда $a > 0$, $a \neq 1$; $D(f) = (0, +\infty)$ ва $E(f) = \mathbb{R}$;

г) тригонометрик функциялар:

$y = \sin x$, $D(f) = \mathbb{R}$ ва $E(f) = [-1, 1]$; $T_0 = 2\pi$;

$y = \cos x$, $D(f) = \mathbb{R}$ ва $E(f) = [-1, 1]$; $T_0 = 2\pi$;

$y = \operatorname{tg} x$, $D(f) = \{x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ ва $E(f) = \mathbb{R}$; $T_0 = \pi$;

$y = \operatorname{ctg} x$, $D(f) = \{x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ ва $E(f) = \mathbb{R}$; $T_0 = \pi$.

$y = \sec x$, $D(f) = \{x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ ва

$E(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$; $T_0 = 2\pi$.

$y = \operatorname{cosec} x$, $D(f) = \{x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ ва
 $E(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; $T_0 = 2\pi$.

д) тескари тригонометрик функциялар:

$y = \arcsin x$, $D(f) = [-1, 1]$ ва $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;

$y = \arccos x$, $D(f) = [-1, 1]$ ва $E(f) = [0, \pi]$;

$y = \operatorname{arctg} x$, $D(f) = \mathbb{R}$ ва $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

$y = \operatorname{arccot} x$, $D(f) = \mathbb{R}$ ва $E(f) = (0, \pi)$;

$y = \operatorname{arcsec} x$, $D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ ва $E(f) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$y = \operatorname{arccosec} x$, $D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ ва $E(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Элементар функция деб асосий элементар функциялардан чекли сондаги арифметик амаллар ёрдамида тузилган мураккаб функцияларга айтилади.

1- дарсхона топшириги

1. Қуйидаги функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$;

б) $y = \arcsin \frac{x-2}{2}$;

в) $y = \frac{1}{\lg(4-x^2)}$;

г) $y = \sqrt{25-x^2} + \lg \sin x$.

Ж: а) $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$; б) $[0, 4]$;

в) $(-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$; г) $[-5, -\pi) \cup (0, \pi)$.

2. Қуйидаги функцияларнинг ўзгариш соҳасини топинг:

а) $y = \sqrt{16-x^2}$; б) $y = 3\cos x - 1$; в) $y = 3^{-x^2}$.

Ж: а) $[0, 4]$; б) $[-4, 2]$; в) $(0; 1]$.

3. Қуйидаги функцияларнинг жуфт ёки тоқ функция эканини аниқланг:

а) $y = x^4 \sin 3x$; б) $y = x^4 - x^2 + x$; в) $y = \lg \cos x$.

Ж: а) тоқ; б) тоқ ҳам эмас, жуфт ҳам эмас; в) жуфт.

4. Қуйидаги функцияларнинг даврларини топинг:

а) $y = \sin 5x$; б) $y = \lg \cos 2x$; в) $y = \operatorname{tg} 3x + \cos 4x$.

Ж: а) $\frac{2\pi}{5}$; б) π ; в) π .

5. Мураккаб функцияларни асосий элементар функцияларнинг композициялари тарзида ифодаланг:

а) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} \sqrt{3x^2}}$; б) $y = \operatorname{Intg} \frac{\sqrt{x^2-1}}{4x}$.

1- мустақил иш

1. Функцияларнинг аниқланиш соҳа ирини топинг:

а) $y = \lg(3^{4x} - 9)$; б) $y = \frac{1}{x^2 - 6x + 5}$;

в) $y = \lg(-x^2 - 4x + 5)$.

Ж: а) $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; б) $(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$; в) $(-5, 1)$.

2. Берилган функцияларга мос келувчи тескари функцияларни топинг. Берилган ва топилган тескари функция графикларини чизинг:

а) $y = x^2$, агар $x \leq 0$;

б) $y = \begin{cases} -x, & \text{агар } x < 1, \\ x^2 - 2, & \text{агар } x \geq 1; \end{cases}$

в) $y = \begin{cases} x, & \text{агар } x \leq 0; \\ x^2, & \text{агар } x > 0; \end{cases}$

г) $y = \sqrt{1 - x^2}$, агар $x \in [-1, 0]$;

д) $y = \begin{cases} x, & \text{агар } x < 1, \\ x^2, & \text{агар } 1 \leq x \leq 4, \\ 2^x, & \text{агар } x > 4. \end{cases}$

3. Куйидаги функцияларнинг жуфт ёки тоқлигини аниқланг:

а) $y = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$;

б) $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$;

в) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

г) $y = 2^x + 2^{-x}$.

Ж: а) жуфт; б) тоқ; в) тоқ; г) жуфт.

2- §. Элементар функцияларнинг графиклари

$f(x)$ функция графикини чизишда ҳар хил усуллар қўлланилади: нукталар бўйича, графиклар билан амаллар бажариш, графикларни алмаштириш. $f(x)$ функция графикидан фойдаланиб содда алмаштиришлар ёрдамида мураккаброк функциялар графикларини ҳосил қилиш мумкин.

а) $y = f(x-a)$ функциянинг графиги $y = f(x)$ функция графигидан, бу графикни Ox ўқ бўйлаб $a > 0$ да ўнгга, $a < 0$ бўлганда эса чапга a бирлик суриш билан ҳосил қилинади.

б) $y=f(x)+b$ функция графиги $y=f(x)$ функция графигидан, бу графикни Oy ўқ бўйлаб $b>0$ да юқорига, $b<0$ да пастга b бирлик суриш билан ҳосил қилинади.

в) $y=f(kx)$ ($k\neq 0, k\neq 1$) функциянинг графиги $y=f(x)$ функция графигидан, унинг нуқталари ординаталарини сақлаган ҳолда $|k|<1$ да абсциссаларини $\frac{1}{|k|}$ марта чўзиш билан, $|k|>1$ да эса абсциссаларини $|k|$ марта сиқиш билан ҳосил қилинади.

г) $y=mf(x)$ ($m\neq 0, m\neq 1$) функция графиги $y=f(x)$ функция графигидан, унинг нуқталари мос абсциссаларини сақлаган ҳолда ординаталарини $|m|<1$ да $\frac{1}{|m|}$ марта қисш, $|m|>1$ да эса $|m|$ марта чўзиш орқали ҳосил қилинади.

д) $y=f(-x)$ функция графиги $y=f(x)$ функция графигидан, бу графикни Oy ўққа нисбатан симметрик акслантириш ёрдамида ҳосил қилинади.

е) $y=-f(x)$ функция графиги $y=f(x)$ функция графигидан, бу графикни Ox ўққа нисбатан симметрик акслантириш ёрдамида ҳосил қилинади.

ж) $y=|f(x)|$ функция графиги Ox ўқнинг $f(x)\geq 0$ бўладиган қисмида $y=f(x)$ функция графиги билан бир хил бўлади. Ox ўқнинг $f(x)<0$ бўладиган қисмида бу графикни $y=f(x)$ функция графигини Ox ўққа нисбатан симметрик акслантириш ёрдамида ҳосил қилинади.

Мисол. $y=-2\sin(2x+2)$ функциянинг графигини $y=\sin x$ функция графигидан фойдаланиб чизинг.

Ечиш. $y=\sin x$ функция графигидан фойдаланиб, $y=-2\sin(2x+2)$ функция графигини чизиш қуйидаги шакл алмаштиришлар орқали амалга оширилади:

$$\begin{aligned}y_1 &= \sin 2x_1, \quad y_2 = -2\sin 2x_2, \\y &= -2\sin 2(x+1) = -2\sin(2x+2).\end{aligned}$$

Геометрик нуқтан назардан бу 15-шаклдаги ясашларга олиб келади.

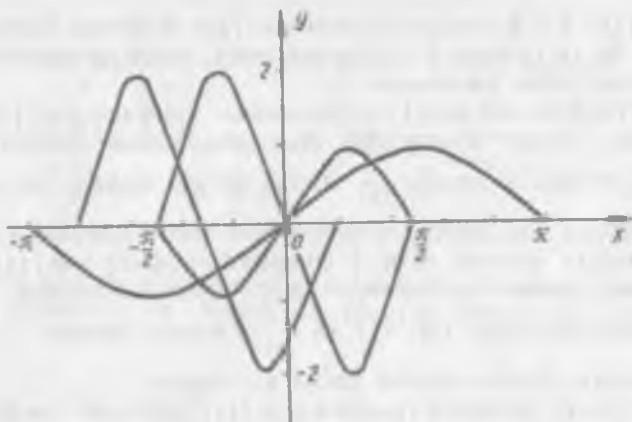
1. $0\leq x\leq 2\pi$ оралиқда $y=\sin x$ синусоидаи чизамиз.

2. Синусоидада бир нечта нуқта белгилаймиз ва ординаталарини ўзгартирмай, абсциссаларини икки марта камайтирамиз:

$x_1=\frac{1}{2}x$, $y_1=y$. Ҳосил бўлган нуқталарни силлиқ чизик билан бирлаштириб, $y_1=\sin 2x_1$ функциянинг графигини чизамиз.

3. Ҳосил бўлган графикдаги нуқталар абсциссаларини ўзгартирмай, ординаталарини 2 марта орттирамиз ва уларнинг ишораларини алмаштирамиз: $y_2=-2y_1$, $x_2=x_1$. Ҳосил бўлган нуқталарни силлиқ чизик билан бирлаштириб, $y_2=-2\sin x_2$ функциянинг графигини чизамиз.

4. Охириги графикни абсциссалар ўқи бўйича (-1) га кўчирамиз: $x=x_2-1$, $y=y_2$. Ҳосил қилинган нуқталарни силлиқ чизик билан бирлаштириб, $y=-2\sin(2x+2)$ функция графигини чизамиз (15-шакл).



15-шакл

2-дарсхона топшириғи

Функциялар графикларини чизинг:

1. $y = 2\sin(2x - 1)$.

2. $y = -\operatorname{ctg}|x + 1|$.

3. $y = 1 + \lg(x + 2)$.

4. $y = \log_2|1 - x|$.

5. $y = -\sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

6. $y = 1 - 3^{|x|}$.

7. $y = |x^2 - 7x + 12|$.

2-мустақил иш

Функциялар графикларини чизинг:

1. $y = |3x + 4 - x^2|$.

2. $y = |\log_2(2x - 1)|$.

3. $y = 2(x - 1)^3$.

4. $y = 2\cos\frac{x - \pi}{3}$.

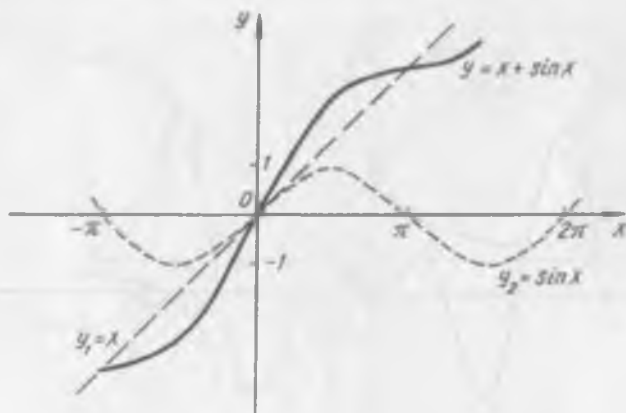
5. $y = \sin^2 x$.

6. $y = 1 - 2^{-x}$.

3-§. Икки функция йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмасининг графиклари

Асосий элементар функциялар хоссаларидан фойдаланиб, уларнинг графикларини билган ҳолда, катта ҳисоблаш ишларини бажармай туриб, бошқа функцияларнинг мураккаб графикларини чизишни графикларнинг комбинациясига (йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинмасига) келтириш мумкин.

2.3.1. Шундай ҳоллар бўладики, $y = f(x)$ функция графигини графиклари осонгина чизиладиган $y_1 = f_1(x)$ ва $y_2 = f_2(x)$ функциялар йиғиндиси шаклида ифодалаш мумкин бўлади. Унда $y = f(x)$ функция графигини чизиш мос ординаталарни геометрик кўшишга келтирилади: $y = y_1 + y_2$.



16- шакл

Шуни таъкидлаймизки, икки функция айирмасини икки функциянинг тегишли йиғиндисига келтириш мумкин.

$$y = f_1(x) - f_2(x) = f_1(x) + (-f_2(x)).$$

1- м и с о л. Ушбу

$$y = x + \sin x$$

функция графигини чизинг.

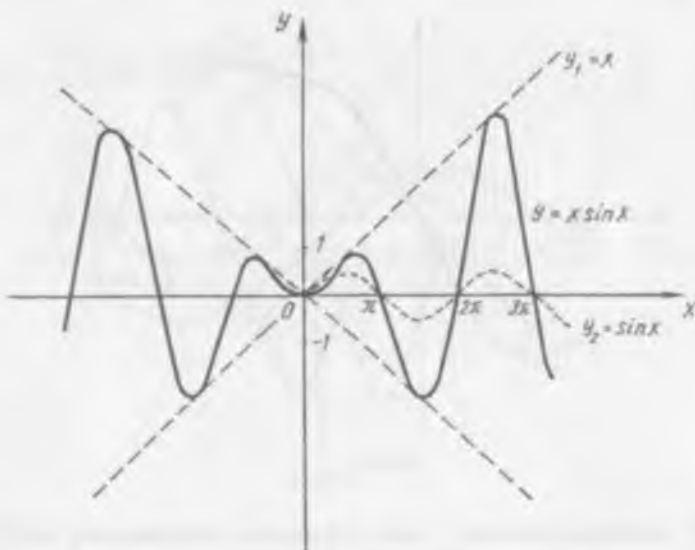
Е ч и ш. $y_1 = x$ ва $y_2 = \sin x$ деб олиб, битта чизманинг ўзида қўшилувчи функциялар графикларини чизамиз (пунктир чизиклар).

Шу функциялар графикларини кесадиган бир қатор вертикал тўғри чизиклар ўтказамиз. Шундан кейин бу графикларнинг мос ординаталарини геометрик қўшиб, изланаётган графикнинг бир қатор нукталарини топамиз, бу нукталарни узлуксиз эгри чизик билан бирлаштириб, изланаётган графикни ясаймиз (16- шаклдаги туташ чизик). Ҳосил бўлган график, тақрибий бўлади.

2.3.2. Ординаталарни геометрик кўпайтириш анча кийин. Аммо, шунга қарамай, агар $y_1 = f_1(x)$ ва $y_2 = f_2(x)$ функциялар графикларини олдиндан ясаб олинса, икки функциянинг $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$ кўпайтмасини таҳлил қилиш кўпинча осонлашади. Таҳлил қилишда y_1 ва y_2 функциялар 0, 1 ва -1 га тенг бўладиган нукталарга алоҳида эътибор бериш керак.

2- м и с о л. $y = x \cdot \sin x$ функция графигини чизинг.

Е ч и ш. Берилган функция иккита ток функциянинг кўпайтмаси сифатида жуфт функция бўлишини пайкаймиз ва шу сабабли таҳлилни $x \geq 0$ лар учун ўтказамиз. $y_1 = x$ ва $y_2 = \sin x$ графикларни (пунктир чизиклар) битта чизмада чизамиз (17- шакл).



17-шакл

$y_2 = \sin x = 0$ бўладиган нукталарда $y = y_1 \cdot y_2 = 0$ га эга бўламиз.

$y_2 = \sin x = 1$ бўладиган нукталарда $y = y_1 \cdot y_2 = x$ га эга бўламиз.

$y_2 = \sin x = -1$ бўладиган нукталарда $y = y_1 \cdot y_2 = -y_1 = -x$ ($y_3 = -x$ функция графигини чизамиз).

Бир катор шундай нукталарни белгилаб ва орalik нукталар учун $|y| = |x \sin x| < |x|$ эканини ҳисобга олиб, $x \geq 0$ лар учун изланаётган графикка (туташ чизик) эга бўламиз. $x < 0$ да берилган функция жуфт функция бўлгани учун график Oy ўқка нисбатан симметрик акслантириш билан ҳосил қилинади (17-шакл).

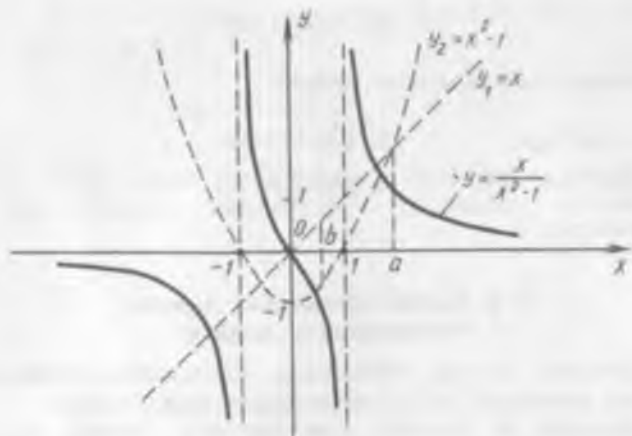
2.3.3. Икки функциянинг кўпайтмаси ҳақида айтилган мулоҳазаларнинг ҳаммаси икки функциянинг

$$y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$

бўлинмаси учун ҳам бир хилда тегишлидир.

Битта чизманинг ўзида $y_1 = f_1(x)$ ва $y_2 = f_2(x)$ функциялар графикларини чизиб, уларни таҳлил қилиш йўли билан $y = \frac{y_1}{y_2}$

бўлинма x га боғлиқ ҳолда қандай ўзгаришини текширашимиз ва шу йўл билан изланаётган графикнинг умумий кўринишига эга бўламиз. Таҳлил қилишда асосий эътиборни y_1 ва y_2 функциялар қийматлари 0, 1 ва -1 га тенг бўладиган нукталарга, улар ўзаро тенг бўладиган ёки ишоралари билан фарқ қиладиган нукталарга қаратиш керак.



18- шакл

3- мисол. $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ функция графикни чизинг.

Ечиш. Функция ток, шу сабабли $x \geq 0$ лар учунгина таҳлил қиламиз.

$y_1 = x$ ва $y_2 = x^2 - 1$ деб олиб, бу функцияларнинг $x \geq 0$ даги графикларини (пунктир чизик) чизамиз.

Эслатма: а) $x = 0$ да $y_1 = 0$, шу сабабли, $\frac{y_1}{y_2} = 0$;

б) бирор $x = a$ да $y_1 = y_2$ бўлиб, $y = \frac{y_1}{y_2} = 1$ бўлиши равшан;

в) бирор $x = b$ да $y_1 = -y_2$ бўлиб, $y = \frac{y_1}{y_2} = -1$ бўлиши равшан;

г) $x = 1$ да $y_2 = 0$, $y_1 = 1$, шу сабабли $x = 1$ тўғри чизик вертикал асимптотадир.

д) $x \rightarrow \infty$ да $y \rightarrow 0$ мусбатлигича қолади, яъни абсциссалар ўқи горизонтал асимптота бўлишини кўрамиз. Бу фикрларнинг ҳаммасини бирлаштириб графикнинг умумий кўринишига (туташ чизик) эга бўламиз.

$y = \frac{x}{x^2 - 1}$ функциянинг ток эканлиги туфайли $x < 0$ да график координаталар бошига нисбатан симметрик акслантиришдан иборат бўлади (18- шакл).

3- дарсхона топшириги

Функциялар графикларини чизинг:

1. $y = x^3 + 2x^2$.

2. $y = 2^x + \sin x$.

3. $y = \sin 2x + 2\cos x$.

4. $y = x^3 \cos x$.

5. $y = \frac{\sin x}{1 + x^2}$.

3- мустақил иш

Функциялар графикларини чизинг:

$$1. y = x + \arctg x.$$

$$4. y = x \cdot \cos x.$$

$$2. y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

$$5. y = \frac{e^{-x}}{\sin x}.$$

$$3. y = x + \cos x.$$

4- §. Кетма-кетликнинг лимити.

Функциянинг лимити

2.4.1. Натурал сонлар тўпламида аниқланган функция *сонли кетма-кетлик* дейилади ва $\{x_n\}$ кўринишда белгиланади.

Агар шундай M мусбат сон мавжуд бўлиб, ҳар қандай натурал сон n учун

$$|x_n| \leq M$$

тенгсизлик ўринли бўлса, $\{x_n\}$ *чегараланган кетма-кетлик* дейилади.

Агар ҳар қандай натурал сон n учун

$$x_{n+1} > x_n$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ *ўсувчи кетма-кетлик* дейилади.

Агар ҳар қандай натурал сон n учун

$$x_{n+1} < x_n$$

тенгсизлик бажарилса, $\{x_n\}$ *камаювчи кетма-кетлик* дейилади.

Фақат ўсувчи ёки камаювчи кетма-кетлик *монотон кетма-кетлик* дейилади.

Агар исталган $\varepsilon > 0$ сон учун шундай $N = N(\varepsilon) > 0$ сон мавжуд бўлсаки, барча $n \geq N$ лар учун

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

тенгсизлик бажарилса, ўзгармас a сон $\{x_n\}$ кетма-кетликнинг *лимити* дейилади ва бу қуйидагича ёзилади:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Агар $\{x_n\}$ кетма-кетлик лимитга эга бўлса, у *яқинлашувчи*, акс ҳолда *узоқлашувчи кетма-кетлик* дейилади.

Ҳар қандай чегараланган ва монотон кетма-кетлик лимитга эга.

1- мисол. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1$ эканлигини исбот қилинг ва $N(\varepsilon)$ ни аниқланг.

Е чи ш. Агар ихтиёрий $\epsilon > 0$ учун шундай $N(\epsilon)$ сони мавжуд бўлсаки, барча $n \geq N(\epsilon)$ лар учун

$$|x_n - a| = \left| \frac{2n+3}{2n+1} - 1 \right| < \epsilon$$

тенгсизлик бажарилса, лимитнинг таърифига кўра қўйилган масала ҳал бўлади. Юқоридаги тенгсизлик қуйидагига тенг кучли:

$$\frac{2}{2n+1} < \epsilon,$$

бундан

$$2n+1 > \frac{2}{\epsilon} \text{ ёки } n > \frac{2-\epsilon}{2\epsilon}.$$

тенгсизликка эга бўламиз. Демак, $N = N(\epsilon) = \frac{2-\epsilon}{2\epsilon}$. Шундай

$$\text{килиб, } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1.$$

2.4.2. Агар ҳар қандай $\epsilon > 0$ сон учун шундай $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ сон мавжуд бўлиб, $|x-a| < \delta$ да $|f(x) - b| < \epsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сони $f(x)$ функциянинг $x \rightarrow a$ даги лимити дейилади ва бундай ёзилади:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Агар ихтиёрий $\epsilon > 0$ учун шундай $N = N(\epsilon) > 0$ сон мавжуд бўлиб, барча $|x| > N$ лар учун $|f(x) - b| < \epsilon$ тенгсизлик бажарилса, b сони $f(x)$ функциянинг $x \rightarrow \infty$ даги лимити дейилади ва бундай ёзилади:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b.$$

Агар ихтиёрий $M > 0$ учун шундай $\delta = \delta(M) > 0$ мавжуд бўлиб, $|x-a| < \delta$ да $|f(x)| > M$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция $x \rightarrow a$ да чексиз катта дейилади ва бундай ёзилади:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Агар $x \rightarrow a$ да $x > a$ бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a+0$ белги, агар $x \rightarrow a$ да $x < a$ бўлса, у ҳолда $x \rightarrow a-0$ белги қўлланилади. $f(x)$ функциянинг a нуктадаги чап ва ўнг лимитлари деб мос равишда

$$f(a-0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \text{ ва } f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x).$$

сонларга айтилади.

$f(x)$ функциянинг $x \rightarrow a$ даги limiti мавжуд бўлиши учун $f(a-0) = f(a+0)$ бўлиши зарур ва етарли.

2.4.3. Лимитлар хақида қуйидаги теоремалар ўринли (лимитга ўтиш қондалари):

а) Агар C ўзгармас бўлса,

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C.$$

б) Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ва $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ мавжуд бўлса,

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x).$$

в) Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ва $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$ лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)$$

тенглик ўринли.

г) Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ва $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}$$

тенглик ўринли.

Агар бу теоремаларнинг шартлари бажарилмаса, у ҳолда $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$, $0 \cdot \infty$ кўринишидаги аниқмасликлар пайдо бўлиши мумкин.

Бу аниқмасликлар баъзи ҳолларда алгебраик алмаштиришлар ёрдамида очилади.

2-мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n - 1}{n^2 + 3}.$$

Ечиш. Бу мисолда касрнинг сурат ва махражи чексизликка интилади, яъни $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз.

Касрнинг сурат ва махражини n^2 га бўлсак:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 5n - 1}{n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2}} = \frac{3}{1} = 3.$$

3-мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}$$

Е ч и ш. Бунда $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аникмасликка эгамиз.
 $(n+2)! = (n+1)!(n+2)$ ва $(n+3)! = (n+1)!(n+3)(n+2)$ алмаш-
 тиришларни бажарсак:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!(n+3)}{(n+1)!(n+2)(n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0.$$

4- дарсхона топшириғи

1. $\{x_n\} = \left(\frac{3n}{n+3}\right)$ кетма-кетлик $a=3$ лимитга эга эканлигини ис-
 бот қилинг ва $N(\epsilon)$ ни аникланг.

2. Қуйидаги лимитларни топинг:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 + (n-2)^3}{n^4 + 2n^3 - 1}$. Ж: 0.

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 4n + 8}{4n^2 + 5n - 9}$. Ж: ∞ .

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+2)!}{(n-1)! + (n+2)!}$. Ж: 1.

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3+6+9+\dots+3n}{n^2+4}$. Ж: $\frac{3}{2}$.

д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7^n}{2^n - 7^{n-1}}$. Ж: -7.

е) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+2} - \sqrt{n-3})$. Ж: $\frac{5}{2}$.

4- мустақил иш

Қуйидаги лимитларни топинг:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3}$. Ж: $-\infty$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^3 - (n+1)^3}$. Ж: 1.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)! + (2n+2)!}{(2n+3)! - (2n+2)!}$. Ж: 0.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)! - (n+2)!}{(n+3)!}$. Ж: ∞ .

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^{n-1} + 2^n}$. Ж: 3.

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^3+8} (\sqrt{n^3+2} - \sqrt{n^3-1})$. Ж: $\frac{3}{2}$.

5- §. Функциянинг лимитини ҳисоблаш

Функциянинг лимитини амалда ҳисоблаш олдинги параграфда баён қилинган теоремалар ва баъзи шакл алмаштиришларга асосланади.

1- м и с о л. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-2}{x^2+1}.$$

Е ч и ш. $x \rightarrow 2$ да касрнинг сурати $3 \cdot 2 - 2 = 4$ га, махражи эса $2^2 + 1 = 5$ га интилади. Демак,

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-2}{x^2+1} = \frac{4}{5}.$$

2- м и с о л. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}.$$

Е ч и ш. Бу мисолда касрнинг сурати ҳам, махражи ҳам $x \rightarrow 1$ да нолга интилади. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз.

Касрнинг сурат ва махражини кўпайтувчиларга ажратсак:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2(x-1) - (x-1)}{x^2(x+1) - (x+1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0}{2} = 0. \end{aligned}$$

3- м и с о л. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right).$$

Е ч и ш. $\infty - \infty$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. Ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{4}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - (x+2)}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x^2-4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

4-мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x^2 + 2x}$$

Еч и ш. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аникмасликка эгамиз. Қасрнинг сурати ва махражини $(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})$ ифодага кўпайтирсак,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x^2 + 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2+x} - \sqrt{2})(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})}{x(x+2)(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+x-2}{x(x+2)(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+2)(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})} = \frac{1}{2 \cdot 2 \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}. \end{aligned}$$

5-дарсхона топшириғи

Лимитларни ҳисобланг:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 4x^3 - 1}{2x^3 + 3x^2 + 5}$. Ж: ∞ .

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3})$. Ж: 2.

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$. Ж: -1.

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 3}{x^2 - 1}$. Ж: $-\frac{1}{3}$.

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^2 - 7x + 6}$. Ж: $\frac{3}{5}$.

6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{8x-7} - 3}$. Ж: $-\frac{3}{16}$.

5-мустақил иш

Лимитларни ҳисобланг:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$. Ж: $\frac{1}{2}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 8x + 12}$. Ж: $\frac{3}{4}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$. Ж: 3.

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^3} - \sqrt{1-x+x^2}}{x^2 - x}, \quad \text{Ж: } -1.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 4}{x^2 - 9}, \quad \text{Ж: } \frac{1}{148}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x^2 - 5x + 4} + \frac{x-4}{3(x^2 - 3x + 2)} \right), \quad \text{Ж: } 0.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right), \quad \text{Ж: } \infty.$$

6-§. Биринчи ва иккинчи ажойиб лимитлар

Кўпгина лимитларни топишда куйидаги маълум формулалардан фойдаланилади:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 \text{ — биринчи ажойиб лимит;}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \text{ — иккинчи ажойиб лимит.}$$

Мисоллар ечганда куйидаги тенгликларни назарда тутиш фойдали:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + k\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad (a > 0).$$

1-мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}.$$

Еч и ш. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аниқмасликка эгамиз. Биринчи ажойиб лимитдан фойдаланамиз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \sin 3x}{3x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3.$$

2-мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi - 2x}.$$

Е ч и ш. $\frac{0}{0}$ кўринишдаги аникмасликка эгамиз. $\frac{\pi}{2} - x = z$ бел-
гилаш киритсак, у ҳолда $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ да $z \rightarrow 0$ бўлади. Ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{\pi - 2x} &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - z)}{\pi - 2(\frac{\pi}{2} - z)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{\pi - \pi + 2z} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{2z} = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

3-мисол. Лимитни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^{4x-1}$$

Е ч и ш. Қасрнинг суратини махражига бўлиб, бутун қисмини ажратиб оламиз:

$$\frac{2x+1}{2x-3} = \frac{(2x-3)+4}{2x-3} = 1 + \frac{4}{2x-3}.$$

Шундай қилиб, $x \rightarrow \infty$ да берилган функция асоси бирга интилувчи, кўрсаткичи эса чексизликка интилувчи даражани ифодалайди, яъни 1^∞ кўринишдаги аникмасликка эгамиз. Функция-ни иккинчи ажойиб лимитдан фойдаланиш мумкин бўладиган қилиб ўзгартирамиз:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^{4x-1} &= \left(1 + \frac{4}{2x-3} \right)^{4x-1} = \left[\left(1 + \frac{4}{2x-3} \right)^{\frac{2x-3}{4}} \right]^{\frac{4(4x-1)}{2x-3}} = \\ &= \left[\left(1 + \frac{4}{2x-3} \right)^{\frac{2x-3}{4}} \right]^{\frac{4(4-\frac{1}{x})}{2-\frac{3}{x}}}.\end{aligned}$$

$x \rightarrow \infty$ да $\frac{4}{2x-3} \rightarrow 0$ бўлгани сабабли иккинчи ажойиб лимитга кўра:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{4}{2x-3} \right)^{\frac{2x-3}{4}} = e.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4(4-\frac{1}{x})}{2-\frac{3}{x}} = 8 \text{ эканини ҳисобга олиб, узил-кесил}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^{4x-1} = e^8 \text{ эканини топамиз.}$$

Лимитларни ҳисобланг:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \cdot \sin 5x}$. Ж: $\frac{18}{5}$.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{3x}$. Ж: $\frac{1}{3}$.

2. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$. Ж: $-\frac{3}{2}$.

6. $\lim_{x \rightarrow 1} (3 - 2x)^{\frac{4}{x-1}}$. Ж: e^{-8} .

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$. Ж: $e^{-\frac{2}{3}}$.

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 1}{\sin 2x}$. Ж: $\frac{3}{2} \ln 2$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{3x}$. Ж: $\frac{4}{3}$.

6- мустақил иш

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 5x}$. Ж: $\frac{3}{5}$.

2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x \right)^2}$. Ж: $\frac{1}{2}$.

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+1} \right)^{2x}$. Ж: $\frac{1}{e}$.

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1) (\ln(3x+1) - \ln(3x-2))$. Ж: 2.

7- §. Эквивалент чексиз кичик функциялар ва улар ёрдамида лимитларни ҳисоблаш

Агар $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ $x \rightarrow x_0$ ҳолда чексиз кичик функциялар бўлиб,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

бўлса, у ҳолда улар эквивалент дейилади ва $x \rightarrow x_0$ да $\alpha(x) \sim \beta(x)$ каби белгиланади. Масалан, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, шу сабабли $x \rightarrow 0$ да $\sin x \sim x$.

Шунга ўхшаш $x \rightarrow 0$ да қуйидаги чексиз кичик функциялар эквивалентдир:

$$\arcsin x \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \operatorname{tg} x \sim x,$$

$$\operatorname{arctg} x \sim x, e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a,$$

$$\ln(1+x) \sim x, (1+x)^m - 1 \sim mx \text{ ва } x, \text{ к.}$$

Иккита чексиз кичик функциялар нисбатининг limiti уларга эквивалент чексиз кичик функциялар нисбатининг limitига тенг, яъни агар $x \rightarrow x_0$ да $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ ва $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ бўлса, у ҳолда

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

1-мисол. Limitни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\operatorname{tg}^2 3x}.$$

Ечиш. Ушбу $1 - \cos 4x \sim 8x^2$, $\operatorname{tg}^2 3x \sim 9x^2$ эквивалент чексиз кичик функциялардан фойдалансак:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{\operatorname{tg}^2 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^2}{9x^2} = \frac{8}{9}.$$

2-мисол. Limitни ҳисобланг:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x} - 2}{\sqrt[4]{16+5x} - 2}.$$

Ечиш. Касрнинг сурат ва махражини 2 га бўлиб, сўнгра уларни эквивалент чексиз кичик функциялар билан алмаштирамиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x} - 2}{\sqrt[4]{16+5x} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{8}x} - 1}{\sqrt[4]{1+\frac{5}{16}x} - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1+\frac{3}{8}x\right)^{\frac{1}{3}} - 1}{\left(1+\frac{5}{16}x\right)^{\frac{1}{4}} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}x}{\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{16}x} = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

7-дарсхона топшириги

Қуйидаги limitларни эквивалент чексиз кичик функциялардан фойдаланиб ҳисобланг:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 4(x-2)}{x^2 - 3x + 2} \quad \text{Ж: } 4.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin 2x} - 1}{\sqrt{1+4x} - 1} \quad \text{Ж: } \ln 3.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\operatorname{tg} 5x} \quad \text{Ж: } \frac{3}{5}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{2^{-3x} - 1} \quad \text{Ж: } -\frac{2}{3 \ln 2}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-4x)}{\sin 8x} \quad \text{Ж: } -\frac{1}{2}.$$

7- мустақил иш

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}. \quad \text{Ж: } 4.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 4x}. \quad \text{Ж: } \frac{1}{4}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg(\pi(1 + \frac{x}{2}))}{\ln(x+1)}. \quad \text{Ж: } \frac{\pi}{2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln(2 + \cos x)}{(3^{\sin x} - 1)^2}. \quad \text{Ж: } \frac{1}{2 \ln^2 3}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\lg 3x}. \quad \text{Ж: } -\frac{5}{3}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{\sin 7x - \sin 2x}. \quad \text{Ж: } \frac{1}{5} \ln \frac{8}{9}.$$

8- §. Чексиз кичик функцияларни таққослаш

$x \rightarrow x_0$ да $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ чексиз кичик функциялар бўлсин. Бу функцияларни таққослаш учун улар нисбатининг $x \rightarrow x_0$ даги limiti ҳисобланади:

а) Агар $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ функция $\beta(x)$ га нисбатан **юқори тартибли чексиз кичик функция** дейилади ва $\alpha = o(\beta)$ каби белгиланади.

б) Агар $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$ бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ функция $\beta(x)$ га нисбатан **қуйи тартибли чексиз кичик функция** дейилади. Равшанки бу ҳолда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0$ ёки $\beta = o(\alpha)$.

в) Агар $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ ва A чекли сон бўлса, у ҳолда $\alpha(x)$ ва $\beta(x)$ **бир хил тартибли чексиз кичик функциялар** дейилади.

Хусусан, агар $A=1$ бўлса, у ҳолда эквивалент чексиз кичик функцияларга эга бўламиз.

г) Агар $\alpha(x)^k$ ва $\beta(x)$ бир хил тартибли чексиз кичик функциялар бўлиб, $k > 0$ бўлса, у ҳолда $\beta(x)$ чексиз кичик функция $\alpha(x)$ га нисбатан k -тартибга эга дейилади.

Мисол. $x \rightarrow 0$ да $y = \sqrt{1+x\sin x} - 1$ чексиз кичик функциянинг x га нисбатан тартибини аниқланг.

Ечиш. $\frac{y}{x^k}$ нисбатнинг $x \rightarrow 0$ даги лимитини қараймиз ва k нинг бу лимит мавжуд ва нолдан фаркли бўладиган қийматини аниқлаймиз:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - 1}{x^k} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x\sin x} - 1)(\sqrt{1+x\sin x} + 1)}{x^k \cdot (\sqrt{1+x\sin x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x\sin x - 1}{x^k(\sqrt{1+x\sin x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sin x}{x^k(\sqrt{1+x\sin x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^{k-2}(\sqrt{1+x\sin x} + 1)} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x^{2-k}, \text{ чунки} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x\sin x} + 1) = 2. \end{aligned}$$

Равшанки $k=2$ да $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2-k} = 1$. Демак, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x^2} = \frac{1}{2}$. Шундай

килиб, y ва x^2 чексиз кичик микдорларнинг тартиби бир хил. Шу сабабли y микдор x чексиз кичик микдорга нисбатан *иккинчи тартибли* ($k=2$) чексиз кичик микдор бўлади.

8- дарсхона топшириғи

1. $x \rightarrow 0$ да $\alpha = x \sin^2 x$ ва $\beta = 2x \sin x$ чексиз кичик функцияларни таккосланг. Ж: $\alpha = o(\beta)$.

2. $x \rightarrow 0$ да $\alpha = x \ln(1+x)$ ва $\beta = x \sin x$ чексиз кичик функцияларни таккосланг. Ж: $\alpha \sim \beta$.

3. $x \rightarrow 1$ да $\alpha = 1-x$ ва $\beta = 1 - \sqrt[3]{x}$ чексиз кичик функцияларнинг бир хил тартибли бўлишига ишонч ҳосил қилинг. Булар эквивалент бўладими?

4. $x \rightarrow 0$ да чексиз кичик бўлган $y = \frac{7x^{10}}{x^3+1}$ нинг x га нисбатан тартибини аниқланг. Ж: $k=10$.

8- мустақил иш

1. $x=0$ да $\alpha = x^2 \sin^2 x$ ва $\beta = x \cdot \operatorname{tg} x$ чексиз кичик функцияларни таккосланг. Ж: $\alpha = o(\beta)$.

2. $x=0$ да $\alpha = a^x - 1$ ва $\beta = x \ln a$ чексиз кичик функцияларни таккосланг. Ж: $\alpha \sim \beta$.

3. $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ да $\alpha = \sec x - \operatorname{tg} x$ ва $\beta = \pi - 2x$ функциялар бир хил тартибли чексиз кичик бўлишига ишонч ҳосил қилинг. Улар эквивалент бўладими?

4. а) $y = \sqrt{1+x^3} - 1$ ва б) $y = 1 - \cos x$ чексиз кичик функцияларнинг x чексиз кичикка нисбатининг тартибини аниқланг. Ж: а) $k=3$; б) $k=2$.

9- §. Функциянинг узлуксизлиги.

Функциянинг узилиш нукталари ва уларнинг турлари.

Функциянинг ноли

2.9.1. Агар x_0 ва унинг атрофида аниқланган $y=f(x)$ функция шу нуктада чекли лимитга эга бўлиб, бу лимит функциянинг x_0 нуктадаги қийматига тенг, яъни

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

бўлса, у ҳолда бу функция x_0 нуктада *узлуксиз* дейилади.

Функциянинг узлуксизлиги хакидаги қуйидаги таъриф юкорида-
ги таърифга тенг кучлидир.

Агар $y=f(x)$ функция x_0 нуктада ва унинг атрофида аниқланган
булиб, аргументнинг чексиз кичик орттирмасига функциянинг
чексиз кичик орттирмаси мос келса, яъни

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

бўлса, у ҳолда функция x_0 нуктада *узлуксиз* дейилади. Бу ерда
 $\Delta x = x - x_0$ ва $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — мос равишда аргумент ва
функция орттирмалари.

$f(x)$ функциянинг x_0 нуктада узлуксиз бўлиши учун узлуксиз-
ликнинг қуйидаги шартлари бажарилиши зарур ва етарлидир:

а) функция x_0 нукта ва унинг атрофида аниқланган;

б) функциянинг $x=x_0$ нуктадаги чап ва ўнг лимитлари тенг:
 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$;

в) $x=x_0$ нуктадаги бир томонли лимитлар $f(x_0)$ га тенг, яъни
 $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$.

2.9.2. $f(x)$ функция x_0 нуктанинг атрофида аниқланган, аммо
бу нуктанинг ўзида узлуксизлик шартларидан ақалли биттаси
бажарилмаса, бу функция x_0 нуктада *узлишга эга* дейилади.

Агар $f(x)$ функция учун *чекли* бир томонли $f(x_0-0)$ ва
 $f(x_0+0)$ лимитлар мавжуд бўлса ва, шу билан бирга, $f(x_0)$,
 $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ сонлар ўзаро тенг бўлмаса, у ҳолда x_0 нукта
1- тур узлиш нуқтаси дейилади.

Хусусан, агар $f(x_0-0)=f(x_0+0) \neq f(x_0)$ бўлса, у ҳолда x_0 *барта-
раф қилинадиган узлиш нуқтаси* дейилади.

Агар $f(x_0-0)$ ёки $f(x_0+0)$ бир томонли лимитлардан ақалли
биттаси ∞ га тенг бўлса, x_0 нукта *2- тур узлиш нуқтаси* дейилади.

2.9.3. Агар функция ораликнинг ҳамма нуктасида узлуксиз
бўлса, у шу ораликда *узлуксиз* дейилади. Элементар функция-
ларнинг ҳаммаси ўзларининг аниқланиш соҳаларида узлуксиз-
дир.

2.9.4. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар x_0 нуктада узлуксиз бўлса,
у ҳолда:

а) $f(x) \pm \varphi(x)$; б) $f(x) \cdot \varphi(x)$; в) $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ ($\varphi(x_0) \neq 0$) функциялар ҳам

x_0 нуктада узлуксиз бўладилар.

Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у

а) шу кесмада чегараланган;

б) шу кесмада энг кичик ва энг катта кийматларга эришади;

в) берилган иккита киймати орасидаги барча кийматларни
қабул қилади, яъни агар $f(\alpha)=A$, $f(\beta)=B$ ($a < \alpha < \beta \leq b$) ва $A \neq B$
бўлса, у ҳолда A ва B орасида ётган C сони ҳар қандай бўлганда
ҳам x нинг ақалли битта $x=\gamma$ ($\alpha < \gamma < \beta$) киймати топиладики,
 $f(\gamma)=C$ бўлади.

Хусусан, агар $f(\alpha)$ ва $f(\beta)$ ҳар хил ишорали бўлса (яъни $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ бўлса), шундай $x = \gamma$ ($\alpha < \gamma < \beta$) қиймат топиладики, унда $f(\gamma) = 0$ бўлади.

$f(\gamma) = 0$ бўладиган $x = \gamma$ нукта функциянинг ноли дейилади.

Бу агар $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ бўлса, $f(x) = 0$ тенглама (α, β) ораликда акалли битта илдизга эга бўлишини билдиради.

Бу хоссадан $f(x)$ функция нолини ўз ичига олган ораликни топишда фойдаланилади.

9- дарсхона топишириғи

1. $y = \frac{x}{x-4}$ функциянинг узилиш нуктасини топинг ва узилиш турини аниқланг.

2. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x-2}$ функциянинг узилиш нуктасини топинг ва узилиш турини аниқланг.

3. a нинг қандай қийматларида

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & \text{агар } x \neq 3, \\ a, & \text{агар } x = 3 \end{cases}$$

функция $x=3$ нуктада узлуксиз бўлади? Функция графигини чизинг.

4. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2}, & \text{агар } x \leq 2, \\ x, & \text{агар } x > 2 \end{cases}$$

функциянинг узилиш нукталарини топинг ва узилиш турини аниқланг. Функция графигини чизинг.

5. $x^5 - 3x = 1$ тенглама $[1; 2]$ кесмада акалли битта илдизга эга эканига ишонч ҳосил қилинг.

9- мустақил иш

1. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & \text{агар } 0 \leq x \leq 1, \\ 4-2x, & \text{агар } 1 < x < 2.5, \\ 2x-7, & \text{агар } 2.5 \leq x < +\infty \end{cases}$$

функциянинг узилиш нукталарини топинг ва уларнинг турини аниқланг. Функция графигини чизинг.

2. a нинг қандай қийматларида

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{агар } x \leq 1, \\ 3-ax^2, & \text{агар } x > 1 \end{cases}$$

функция узлуксиз бўлади? Функция графигини чизинг.

3. Ушбу

$$f(x) = \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}$$

функциянинг узилиш нукталари турини аниқланг.

4. $f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$ функциянинг узилиш нукталарини топинг ва уларнинг турини аниқланг.

5. $x \cdot 2^x = 1$ тенглама ақалли битта 1 дан катта бўлмаган мусбат илдизга эга бўлишини кўрсатинг.

5- назорат иши

1. Лимитларни топинг:

1.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 6}{2x^3 - 7x^2 + 2}$

1.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 4x + 1}{x + 3x^2 + 2x^4}$

1.3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2x - 3}$

1.4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x - 5}{x^4 + 5x^2 + 1}$

1.5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + x}{4x^3 + 3x - 5}$

1.6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + 3x - 4x^2}{2x^2 - x + 4}$

1.7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^2 - 2x + 1}{2x^4 + x^2 + 5}$

1.8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2x + 4x^2}{6 + 5x - 3x^2}$

1.9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 3x^2 + 4}{6x^3 + x - 5}$

1.10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 3x^2 - x}{x^2 - x^3 + 3x^4}$

1.11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x^2 + 3x}{7x^2 + 2x - 8}$

1.12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^4 - 4x^2 + 5}{2x^3 - 3x^2 + 1}$

1.13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 - 3x^2 + 7}{3x^5 + 4x^3 - 2}$

1.14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 3}{5x^2 - 3x + 2}$

1.15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x^2 + 2}{x^4 - 3x}$

• 1.16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 5}{6x^3 + 3x - 7}$

1.17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 2x^2 - x^4}{4 + x^2 + 5x^4}$

1.18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^2 - 7x + 5}{2 + x - 4x^2}$

1.19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^7 - 4x^5 + 3}{x + 3x^5 - 6x^7}$

1.20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x - 1}{3x^2 + 5x - 2}$

1.21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^6 - 1}{4x^4 - 5x^5}$

1.22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2x^2 + 3}{3 - 4x - 10x^3}$

$$1.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x - 5}{4x^3 - 7}$$

$$1.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 - 3x^2 + 1}{1 + 3x^2 - x^4}$$

$$1.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^3 - 4x + 1}{3x^3 + 2x^2 - 5}$$

$$1.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{5x^2 + 3x - 8}$$

$$1.27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 + 3}{2x^4 + 1}$$

$$1.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 3x + 2}{5x^3 + 4x^2 - 3}$$

$$1.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^5 - 5x^2 + 7}{1 - 2x - 5x^5}$$

$$1.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 4x - 2}{6 - 2x - 3x^2}$$

2. Кўрсатилган лимитларни топинг:

$$2.1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 4}{x^3 - 8}$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{x^3 - 27}$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 4x - 3}{5x^2 + 4x - 1}$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 6x - 45}{x^2 - 2x - 15}$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 12x + 20}{x^2 + x - 6}$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{6 + x - x^2}$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{3x^3 + x - 2}$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{4x^2 + 3x - 1}$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 9x + 10}$$

$$2.10. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 16}$$

$$2.11. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + x - 20}{x^2 - 3x - 4}$$

$$2.12. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 + x - x^2}{x^3 - 3x^2 - 2}$$

$$2.13. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 3x - 10}$$

$$2.14. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 3x - 35}{x^2 - 3x - 10}$$

$$2.15. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{4x^2 - x - 3}$$

$$2.16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{3x^2 - x - 10}$$

$$2.17. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 3x + 15}{2x^2 + 5x - 3}$$

$$2.18. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 1}$$

$$2.19. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{5x^2 + 3x - 14}$$

$$2.20. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 + x - x^2}{2x^2 - 3x - 9}$$

$$2.21. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 2}{2x^2 - x - 3}$$

$$2.22. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 8x + 4}{3x^2 + x - 14}$$

$$2.23. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{40 + 2x - 3x^2}$$

$$2.24. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + x - 4}{x^2 + 3x + 2}$$

$$2.25. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^2 + 5x - 14}$$

$$2.26. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{2x^2 - x - 1}$$

$$2.27. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{4x^2 + 7x - 2}$$

$$2.28. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x - 5}$$

$$2.29. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 6x - 27}{3x^2 + 10x + 3}$$

$$2.30. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 5x + 6}$$

3. Кўрсатилган лимитларни топинг:

$$3.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{\sqrt{x+8} - \sqrt{10-x}}$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 3x - 9}{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}$$

$$3.3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 15}$$

$$3.4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{x+1}}{x^2 + 5x - 14}$$

$$3.5. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{8-x} - \sqrt{4-5x}}$$

$$3.6. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 7x - 15}{\sqrt{x+4} - \sqrt{2x-1}}$$

$$3.7. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{7+x}}{x^2 + 4x - 5}$$

$$3.8. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 - x - 21}{\sqrt{7+x} - \sqrt{1-x}}$$

$$3.9. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}$$

$$3.10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{6-x}}{x^2 - 3x + 2}$$

$$3.11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 3x - 1}{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}$$

$$3.12. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{5x+1} - 4}$$

$$3.13. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}{4x^2 + 3x - 1}$$

$$3.14. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{x^2 - 8x + 15}$$

$$3.15. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{2x-1}}{x^2 - 4x - 5}$$

$$3.16. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - \sqrt{12-x}}{x^2 + 3x - 4}$$

$$3.17. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{9-2x}}{3x^2 - 2x - 8}$$

$$3.18. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{3x-10}}{x^2 - 16}$$

$$3.19. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - \sqrt{2x+3}}{x^2 - 2x - 3}$$

$$3.20. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4x - 7}{\sqrt{8+x} - \sqrt{4x+5}}$$

$$3.21. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 10x + 9}{\sqrt{2x+7} - \sqrt{3x-2}}$$

$$3.22. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4+3x} - \sqrt{2+x}}{x^2 - 7x - 8}$$

$$3.23. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{\sqrt{7+2x} - 3}$$

$$3.24. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{x+7}}$$

$$3.25. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{3x-11}}{x^2 + 3x - 40}$$

$$3.26. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{2x+9}}{x^3 + 64}$$

$$3.27. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3x-5}}{x^2 - 9}$$

$$3.28. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 5x + 2}{\sqrt{4-3x} - \sqrt{6-x}}$$

$$3.29. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 3x - 10}{\sqrt{3x-4} - \sqrt{x}}.$$

$$3.30. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{3-x} - \sqrt{1-2x}}.$$

4. Кўрсатилган лимитларни топинг:

$$4.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{4x^2}.$$

$$4.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{3x^2}.$$

$$4.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 5x - \cos x}{2x^2}.$$

$$4.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{4x}.$$

$$4.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cdot \operatorname{tg} x}.$$

$$4.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2}.$$

$$4.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{\sin x + \sin 7x}.$$

$$4.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{x^2}.$$

$$4.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{3 \sin 3x}.$$

$$4.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\sin 5x}.$$

$$4.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x - \sin^2 x}{3x^2}.$$

$$4.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^4 x}{4x^2}.$$

$$4.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{x \cdot \arcsin x}.$$

$$4.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{3x^2}.$$

$$4.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$4.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^5 x}{x \cdot \sin x}.$$

$$4.17. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \right).$$

$$4.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$$

$$4.19. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$4.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 - x}.$$

$$4.21. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{1 - \operatorname{tg} x}.$$

$$4.22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\sin 3x + \sin x}.$$

$$4.23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 8x}.$$

$$4.24. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x.$$

$$4.25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - 1}{x^2}.$$

$$4.26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 3x}{\cos x - \cos^3 x}.$$

$$4.27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - \cos x}{1 - \cos 3x}.$$

$$4.28. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}.$$

$$4.29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{1 - \cos 2x}.$$

$$4.30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \operatorname{tg} 4x}{\arcsin \operatorname{tg} 3x}.$$

5. Кўрсатилган лимитларни топинг:

$$5.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+3} \right)^{3x+2}$$

$$5.2. \lim_{x \rightarrow 1} (3x-2)^{\frac{1}{x-1}}.$$

$$5.3. \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x-3) [\ln(x+2) - \ln(x-1)].$$

$$5.5. \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1)^{\frac{3x}{x-1}}.$$

$$5.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+5}{2x+1} \right)^{5x-3}.$$

$$5.9. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x+3) [\ln(x+2) - \ln x].$$

$$5.11. \lim_{x \rightarrow 2} (2x-3)^{\frac{3x}{x-2}}.$$

$$5.13. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-3x}{5-3x} \right)^{4x+3}.$$

$$5.15. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-7) [\ln(3x+4) - \ln 3x].$$

$$5.17. \lim_{x \rightarrow 1} (4-3x)^{\frac{x}{x^2-1}}.$$

$$5.19. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-5x}{2-5x} \right)^{4x+5}.$$

$$5.21. \lim_{x \rightarrow -\infty} (3-x) [\ln(1-x) - \ln(2-x)].$$

$$5.23. \lim_{x \rightarrow 1} (5x-4)^{\frac{x^2}{x-1}}.$$

$$5.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+4} \right)^{5x-1}.$$

$$5.27. \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x-1) [\ln(1-3x) - \ln(2-3x)].$$

$$5.29. \lim_{x \rightarrow -1} (4x+5)^{\frac{3x}{x^2-1}}.$$

$$5.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x-1}{5x+2} \right)^{2x-1}.$$

$$5.6. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) [\ln(2x+3) - \ln(2x-1)].$$

$$5.8. \lim_{x \rightarrow 1} (3-2x)^{\frac{x}{1-x}}.$$

$$5.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{2x-5}.$$

$$5.12. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+5) [\ln(x+5) - \ln x].$$

$$5.14. \lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\frac{2x}{1-x}}.$$

$$5.16. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-2}{3x+5} \right)^{2x-7}.$$

$$5.18. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x-2) [\ln(2x-1) - \ln(2x+1)].$$

$$5.20. \lim_{x \rightarrow -1} (2x+3)^{\frac{3x}{x+1}}.$$

$$5.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+7}{3x-5} \right)^{4x+3}.$$

$$5.24. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-3) [\ln(2-3x) - \ln(5-3x)].$$

$$5.26. \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} (3-5x)^{\frac{4x}{3x-2}}.$$

$$5.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3-2x}{5-2x} \right)^{3-2x}.$$

$$5.30. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-4) [\ln(3-2x) - \ln(5-2x)].$$

1. Кўрсатилган лимитларни топинг:

1.1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x^4 + x^2 + 1})$.

1.2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)$.

1.3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 6})$.

1.4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 - x + 4})$.

1.5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 + 3x^2 + 1} - x^2)$.

1.6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 2})$.

1.7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x})$.

1.8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{x^4 + 3} - \sqrt{x^4 - 2})$.

1.9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+2} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-4})$.

1.10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x(x-1)})$.

1.11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x^4+1)(x^2-1)} - \sqrt{x^6-1})$.

1.12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x^2+1)(x^2+2)} - \sqrt{(x^2-1)(x^2-2)})$.

1.13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{(x^3+1)(x^2+3)} - \sqrt{x(x^4+2)})$.

1.14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3+8} (\sqrt{x^3-2} - \sqrt{x^3-1})$.

1.15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x(x+5)} - x)$.

1.16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3})$.

1.17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{(x-3)^2})$.

1.18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt[3]{5+8x^3} - 2x)$.

$$1.19. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x(x+2)} - \sqrt{x^2-2x+3}).$$

$$1.20. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x(x+2)} - \sqrt{x^2-2x+3}).$$

$$1.21. \lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{4-x^3}).$$

$$1.22. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^5-8} - x\sqrt{x(x^2+5)}).$$

$$1.23. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-3x+2} - x).$$

$$1.24. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x^2+1)(x^2-4)} - \sqrt{x^4-9}).$$

$$1.25. \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt[3]{x^3-5}).$$

$$1.26. \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x(x-2)} - \sqrt{x^2-3}).$$

$$1.27. \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}).$$

$$1.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1}(\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2}).$$

$$1.29. \lim_{x \rightarrow \infty} (x\sqrt{x} - \sqrt{x(x+1)(x+2)}).$$

$$1.30. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{(x-2)(x+3)}).$$

2. Қўрсатилган лимитларни топинг:

$$2.1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 4x^2 - 5}{x^3 + 2x^2 - x - 2}.$$

$$2.2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^4 - 3x - 1}.$$

$$2.3. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 2x + 3}{x^4 + 3x^2 - 4}.$$

$$2.4. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}.$$

$$2.5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}.$$

$$2.6. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2}{x^3 + 3x^2 - 4}.$$

$$2.7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x^2 - 1}{4x^3 + x - 5}.$$

$$2.8. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + 3x^2 - x - 2}{2x^4 - 3x^2 + 1}.$$

$$2.9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 2x^3 - 1}{x^3 - 4x^2 + 3}.$$

$$2.10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 5x^2 - 2x - 4}{2x^3 - 3x^2 + 1}.$$

$$2.11. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - x^2 - 4x - 4}{3x^2 - x - 10}$$

$$2.13. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 3x^2 + 2}{x^3 + 2x^2 - 3x - 4}$$

$$2.15. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 - 2x + 1}{4x^3 + 2x^2 - x + 1}$$

$$2.17. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{2x^2 + 3x - 2}$$

$$2.19. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^3 - 3x^2 - 4x - 2}{3x^2 - 2x - 1}$$

$$2.21. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 - x + 2}{3x^2 - 4x - 4}$$

$$2.23. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^4 - 2x^2 - 1}{4x^2 + 3x - 1}$$

$$2.25. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8x^3 - 3x^2 - 5}{4x^4 - 3x^2 - 1}$$

$$2.27. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^4 + 2x + 1}$$

$$2.29. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4x - 5}$$

$$2.12. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x + 12}{x^3 + 3x^2 - 4}$$

$$2.14. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{8x^4 - 6x^2 - x - 1}{x^3 - 3x^2 + 2}$$

$$2.16. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{3x^2 - x - 10}$$

$$2.18. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^3 - 3x^2 - 2}{4x^3 + x^2 - 5}$$

$$2.20. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 - 2x + 3}{3x^4 - x^2 - 2}$$

$$2.22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x^3 - 5x^2 - 1}{5x^3 + 2x^2 - 4x - 3}$$

$$2.24. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2}{4x^2 + 3x - 10}$$

$$2.26. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - x^2 - 2}{2x^4 - x - 1}$$

$$2.28. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x - 1}{x^4 + 2x^2 - x - 2}$$

$$2.30. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$$

3. Кўрсатилган лимитларни топинг:

$$3.1. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 16}}{\sqrt{x + 12} - \sqrt{3x + 4}}$$

$$3.3. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{2 - 3x} - \sqrt[3]{6 - x}}{\sqrt[3]{8 + x^3}}$$

$$3.5. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt{2x + 9} - \sqrt{3x + 1}}$$

$$3.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{5 + x} - \sqrt[3]{5 - x}}{\sqrt{x^2 + x^4}}$$

$$3.9. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{x - 3} - \sqrt[3]{2x - 7}}{\sqrt{1 + 2x} - 3}$$

$$3.2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x - 3} - \sqrt{5x - 6}}{\sqrt[3]{x^2 - 9}}$$

$$3.4. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{4x + 5} - \sqrt{6x - 5}}{\sqrt{4 + x} - \sqrt{2x - 1}}$$

$$3.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27 + x} - \sqrt[3]{27 - x}}{\sqrt[3]{8 + x} - \sqrt[3]{8 - x}}$$

$$3.8. \lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} \frac{\sqrt{\frac{1}{3} + x} - \sqrt{2x - \frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{3x - 2}}$$

$$3.10. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{6 + x} - \sqrt[3]{10 + 3x}}{\sqrt{2 - x} - 2}$$

$$3.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x^2 + 2\sqrt[3]{x}}$$

$$3.13. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{\sqrt[3]{4-2x} - 2}$$

$$3.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27-3x+x^2} - 3}{x^2 - 3x}$$

$$3.17. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{3x+1} - \sqrt[3]{9+2x}}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$3.19. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x^2} - 1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 5} - 2}$$

$$3.21. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{1+2x}}{\sqrt{x} - 2}$$

$$3.23. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{2x+13} - \sqrt{8+x}}{\sqrt{4-x} - 3}$$

$$3.25. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{4x-3} - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x-3}}$$

$$3.27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - \sqrt{9-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

$$3.29. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}$$

$$3.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1+x}}$$

$$3.14. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt{2x+25}}{\sqrt[3]{x} + 2}$$

$$3.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x^2 - 2x + 4} - 2}{\sqrt{9-x} - 3}$$

$$3.18. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{2x+3} - 3}{\sqrt{4x-3} - \sqrt{x+6}}$$

$$3.20. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{2+x} - \sqrt[3]{3+2x}}{x^3 + x^2}$$

$$3.22. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+9} - \sqrt{3x+6}}{x^2 - 9}$$

$$3.24. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}{\sqrt{x-2} - \sqrt{3x-10}}$$

$$3.26. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{6+2x}}{\sqrt{8-x} - 3}$$

$$3.28. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+4}}{\sqrt{3x+1} - 4}$$

$$3.30. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{1-2x}}$$

4. Кўрсатилган лимитларни топинг:

$$4.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 4x - 1}{3x^2 + 2x + 1} \right)^{x^2 - 1}$$

$$4.2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 2x + 5}{3x^2 + 2x - 1} \right)^{4x^2 - 1}$$

$$4.3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3x - 5}{2x^2 - 3x + 4} \right)^{3x - 2}$$

$$4.4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 + 3x - 7}{4x^2 - 2x + 9} \right)^{3x^2 + 1}$$

$$4.5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 5x + 3}{2x^2 + 3x - 5} \right)^{4x - 3}$$

$$4.6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x^2 - x + 5}{6x^2 + 3x - 5} \right)^{4 - 3x}$$

$$4.7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 3x - 4} \right)^{3x - 5}$$

$$4.8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2 + 3x - 2}{5x^2 - 2x + 3} \right)^{4x^2 - 3}$$

$$4.9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 6}{x^2 + 4x - 5} \right)^{1-3x}$$

$$4.10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2 + 3x - 1}{5x^2 + 3x + 3} \right)^{-x^2 + 3}$$

$$4.11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 - x + 5}{4x^2 - 2x + 7} \right)^{3-2x}$$

$$4.12. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x^2 - 4x + 5}{7x^2 + 8x - 5} \right)^{3x^2 - 7}$$

$$4.13. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + x - 5}{2x^2 - 3x + 7} \right)^{3x^2 + 4}$$

$$4.14. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x^2 + 10x - 6}{7x^2 - 6x + 16} \right)^{x^2 - 4}$$

$$4.15. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x^2 - 3x + 8}{6x^2 + 4x - 9} \right)^{3x^2 - 8}$$

$$4.16. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 5x - 6} \right)^{2x^2 - 1}$$

$$4.17. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 8x - 6}{3x^2 - 9x + 7} \right)^{1-3x^2}$$

$$4.18. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2 - 4x - 9}{5x^2 + 6x - 8} \right)^{1-x^2}$$

$$4.19. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x^2 - 9x + 8}{6x^2 + 9x - 4} \right)^{3-4x^2}$$

$$4.20. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3x - 8} \right)^{1-x}$$

$$4.21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 5x - 4} \right)^{1-3x^2}$$

$$4.22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x - 4}{x^2 - 3x - 5} \right)^{3-x^2}$$

$$4.23. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 9x - 6}{x^2 + 8x + 8} \right)^{3-2x^2}$$

$$4.24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x^2 - 5x + 8}{6x^2 + 2x - 7} \right)^{3x-5}$$

$$4.25. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x^2 - 5x + 4}{4x^2 + 9x + 3} \right)^{4x+1}$$

$$4.26. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x^2 - 8x - 9}{7x^2 + 10x - 8} \right)^{4-x}$$

$$4.27. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 9x - 6}{3x^2 - 8x + 8} \right)^{3x^2 - 5}$$

$$4.28. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x^2 + 3x - 8}{7x^2 + 8x - 10} \right)^{4-3x}$$

$$4.29. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2 + 10x - 6}{5x^2 - 16x + 8} \right)^{1-x^2}$$

$$4.30. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x^2 + 8x - 9}{6x^2 - 4x - 3} \right)^{3x-5}$$

5. Кўрсатилган лимитларни ҳисобланг:

$$5.1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{2x}}{\sin 3x + 2x}$$

$$5.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\sin 4x}$$

$$5.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \arcsin x^2}{3^{5x} - 6^{3x}}$$

$$5.4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7(x + \pi)}{e^{3x} - 1}$$

$$5.5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{x + \lg x^3}$$

$$5.6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos 2x - \cos x}$$

$$5.7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{e^{3x} - e^{-x}}$$

$$5.8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2\pi(x+1)}{\ln(1+2x)}$$

$$5.9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^{2x}}{\sin 3x - \operatorname{tg} 2x}.$$

$$5.10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 \ln(1-3x)}{4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} 4x}.$$

$$5.11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^{2x} - 2^{5x}}{\sin x + \sin x^2}.$$

$$5.12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^{x^2} - 1}.$$

$$5.13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^x - 5^{-2x}}{2 \operatorname{arc} \sin x - x^2}.$$

$$5.14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \sin 2x}{\ln(e-x) - 1}.$$

$$5.15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^{2x} - 5^{-x}}{2 \operatorname{tg} x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}.$$

$$5.16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)}.$$

$$5.17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}.$$

$$5.18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \pi \left(1 - \frac{x}{2}\right)}{\ln(x+1)}.$$

$$5.19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2^x - 1}.$$

$$5.20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}.$$

$$5.21. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin \frac{x}{2}}{\pi - x}.$$

$$5.22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}.$$

$$5.23. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$5.24. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\operatorname{tg} \pi x}.$$

$$5.25. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9-2x^2)}{\sin 2\pi x}.$$

$$5.26. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\sin \pi x}.$$

$$5.27. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{\sin \pi x}.$$

$$5.28. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x}.$$

$$5.29. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 4x}.$$

$$5.30. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}.$$

6. Берилган функциянинг узилиш нукталарини (агар улар мавжуд бўлса) топинг. Унинг чизмасини чизинг.

$$6.1. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ x^3, & \text{агар } 0 < x \leq 1 \text{ бўлса,} \\ x+1, & \text{агар } x > 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$6.2. f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ 1-x, & \text{агар } 0 < x \leq 2 \text{ бўлса,} \\ x^2, & \text{агар } x > 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$6.3. f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ x^2, & \text{агар } 0 < x < 2 \text{ бўлса,} \\ 2x, & \text{агар } x \geq 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$6.4. f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ x+1, & \text{агар } 0 \leq x \leq 4 \text{ бўлса,} \\ 3 + \sqrt{x}, & \text{агар } x > 4 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$6.5. f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \text{агар } x \leq 1 \text{ бўлса,} \\ 2x, & \text{агар } 1 < x < 3 \text{ бўлса,} \\ x+2, & \text{агар } x \geq 3 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$6.6. f(x) = \begin{cases} x+4, & \text{агар } x < 1 \text{ бўлса,} \\ x^2+2, & \text{агар } 1 \leq x < 3 \text{ бўлса,} \\ 2x, & \text{агар } x \geq 3 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$6.7. f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } 0 < x < 2 \text{ бўлса,} \\ x-2, & \text{агар } x \geq 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$6.8. f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ (x+1)^2, & \text{агар } 0 < x \leq 2 \text{ бўлса,} \\ 4-x, & \text{агар } x > 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$6.9. f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{агар } x \leq -1 \text{ бўлса,} \\ x^2+1, & \text{агар } -1 < x \leq 1 \text{ бўлса,} \\ 3-x, & \text{агар } x > 1 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$6.10. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ -(x-1)^2, & \text{агар } 0 < x < 2 \text{ бўлса,} \\ x-3, & \text{агар } x \geq 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$6.11. f(x) = \begin{cases} -2(x+1), & \text{агар } x \leq -1 \text{ бўлса,} \\ (x+1)^3, & \text{агар } -1 < x < 0 \text{ бўлса,} \\ x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$6.12. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ x^2, & \text{агар } 0 < x \leq 2 \text{ бўлса,} \\ x+1, & \text{агар } x > 2 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$6.13. f(x) = \begin{cases} x-3, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ x+1, & \text{агар } 0 \leq x \leq 4 \text{ бўлса,} \\ 3+x, & \text{агар } x > 4 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$6.14. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & \text{агар } x \leq 0 \quad \text{бўлса,} \\ 0, & \text{агар } 0 < x \leq 2 \quad \text{бўлса,} \\ -2, & \text{агар } x > 2 \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

$$6.15. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{агар } x \leq 0 \quad \text{бўлса,} \\ x^3, & \text{агар } 0 < x \leq 2 \quad \text{бўлса,} \\ x+4, & \text{агар } x > 2 \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

$$6.16. f(x) = \begin{cases} 2, & \text{агар } x < -1 \quad \text{бўлса,} \\ 1-x, & \text{агар } -1 \leq x \leq 1 \quad \text{бўлса,} \\ \ln x, & \text{агар } x > 1 \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

$$6.17. f(x) = \begin{cases} -1, & \text{агар } x < 0 \quad \text{бўлса,} \\ \cos x, & \text{агар } 0 \leq x \leq \pi \quad \text{бўлса,} \\ 1-x, & \text{агар } x > \pi \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

$$6.18. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq -1 \quad \text{бўлса,} \\ x^2-1, & \text{агар } -1 < x \leq 2 \quad \text{бўлса,} \\ 2x, & \text{агар } x > 2 \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

$$6.19. f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{агар } x \leq 0 \quad \text{бўлса,} \\ -x^2+4, & \text{агар } 0 < x < 2 \quad \text{бўлса,} \\ x-2, & \text{агар } x \geq 2 \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

$$6.20. f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{агар } x \leq 1 \quad \text{бўлса,} \\ x^2+2, & \text{агар } 1 < x \leq 2 \quad \text{бўлса,} \\ -2x, & \text{агар } x > 2 \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

$$6.21. f(x) = \begin{cases} x, & \text{агар } x \leq 1 \quad \text{бўлса,} \\ (x-2)^2, & \text{агар } 1 < x < 3 \quad \text{бўлса,} \\ 6-x, & \text{агар } x \geq 3 \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

$$6.22. f(x) = \begin{cases} 3x+4, & \text{агар } x \leq -1 \quad \text{бўлса,} \\ x^2-2, & \text{агар } -1 < x < 2 \quad \text{бўлса,} \\ x, & \text{агар } x \geq 2 \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

$$6.23. f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{агар } x \leq -2 \quad \text{бўлса,} \\ x^3, & \text{агар } -2 < x \leq 1 \quad \text{бўлса,} \\ 2, & \text{агар } x > 1 \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

$$6.24. f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{агар } x < 0 \quad \text{бўлса,} \\ \ln x, & \text{агар } 0 \leq x < \pi \quad \text{бўлса,} \\ 3, & \text{агар } x \geq \pi \quad \text{бўлса.} \end{cases}$$

$$6.25. f(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{агар } x \leq -1 & \text{бўлса,} \\ x^2+1, & \text{агар } -1 < x \leq 2 & \text{бўлса,} \\ 2x, & \text{агар } x > 2 & \text{бўлса.} \end{cases}$$

$$6.26. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \leq 0 & \text{бўлса,} \\ 2^x, & \text{агар } 0 < x \leq 2 & \text{бўлса,} \\ x+3, & \text{агар } x > 2 & \text{бўлса.} \end{cases}$$

$$6.27. f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{агар } x < 0 & \text{бўлса,} \\ x, & \text{агар } 0 \leq x \leq 2 & \text{бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x > 2 & \text{бўлса.} \end{cases}$$

$$6.28. f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{агар } x \leq \frac{\pi}{2} & \text{бўлса,} \\ 0, & \text{агар } \frac{\pi}{2} < x < \pi & \text{бўлса,} \\ 2, & \text{агар } x \geq \pi & \text{бўлса.} \end{cases}$$

$$6.29. f(x) = \begin{cases} -x, & \text{агар } x \leq 0 & \text{бўлса,} \\ x^2+1, & \text{агар } 0 < x < 2 & \text{бўлса,} \\ x+1, & \text{агар } x \geq 2 & \text{бўлса.} \end{cases}$$

$$6.30. f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{агар } x \leq 0 & \text{бўлса,} \\ 1, & \text{агар } 0 < x \leq 2 & \text{бўлса,} \\ x^2-2, & \text{агар } x > 2 & \text{бўлса.} \end{cases}$$

7. Функциянинг узилиш нукталарини топинг. Функциянинг узилиш нуктаси атрофидаги шаклини чизинг.

$$7.1. f(x) = 2^{\frac{1}{x-3}}.$$

$$7.2. f(x) = 7^{\frac{1}{5-x}}.$$

$$7.3. f(x) = 3^{\frac{1}{x-4}}.$$

$$7.4. f(x) = 8^{\frac{3}{4-x}}.$$

$$7.5. f(x) = 4^{\frac{1}{x-3}}.$$

$$7.6. f(x) = 6^{\frac{1}{2-x}}.$$

$$7.7. f(x) = 5^{\frac{1}{x-6}}.$$

$$7.8. f(x) = 5^{\frac{4}{3-x}}.$$

$$7.9. f(x) = 4^{\frac{2}{x-6}}.$$

$$7.10. f(x) = 4^{\frac{2}{5-x}}.$$

$$7.11. f(x) = 9^{\frac{3}{4-x}}.$$

$$7.12. f(x) = 6^{\frac{1}{x+3}}.$$

$$7.13. f(x) = 7^{\frac{2}{3-x}}.$$

$$7.14. f(x) = 7^{\frac{2}{x+5}}.$$

7.15. $f(x) = 6^{\frac{1}{x-4}}$

7.16. $f(x) = 9^{\frac{1}{x+2}}$

7.17. $f(x) = 5^{\frac{x}{2-x}}$

7.18. $f(x) = 6^{\frac{3}{x+1}}$

7.19. $f(x) = 4^{\frac{1}{x-5}}$

7.20. $f(x) = 8^{\frac{1}{x+4}}$

7.21. $f(x) = 3^{\frac{2}{x-8}}$

7.22. $f(x) = 5^{\frac{3}{x+4}}$

7.23. $f(x) = 5^{\frac{3}{4-x}}$

7.24. $f(x) = 5^{\frac{4}{x+3}}$

7.25. $f(x) = 6^{\frac{1}{x-3}}$

7.26. $f(x) = 5^{\frac{4}{3-x}}$

7.27. $f(x) = 4^{\frac{3}{3-x}}$

7.28. $f(x) = 3^{\frac{2}{x+1}}$

7.29. $f(x) = 6^{\frac{2}{4-x}}$

7.30. $f(x) = 4^{\frac{3}{x+2}}$

БИР УЗГАРУВЧИ ФУНКЦИЯСИНING ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБИ

1-§. Ҳосила. Ҳосилалар жадвали

3.1.1. $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуктадаги орттирмаси Δy нинг аргумент орттирмаси Δx га нисбатининг Δx нолга интилгандаги limiti мавжуд бўлса, бу лимит $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуктадаги **ҳосиласи** дейилади.

Ҳосиланинг белгиланиши:

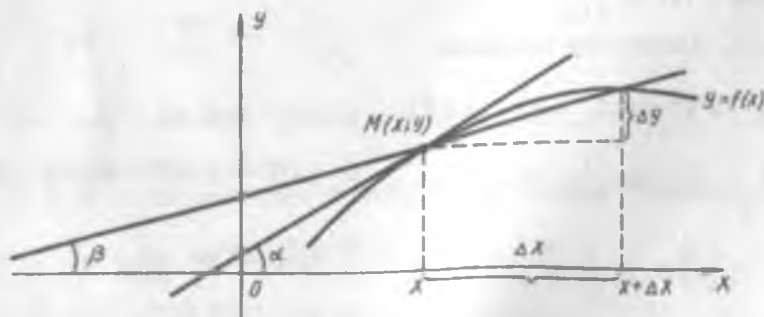
$$y' \text{ ёки } f'(x_0) \text{ ёки } \frac{dy}{dx} \text{ ёки } \frac{df}{dx}.$$

Шундай қилиб, таърифга кўра:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Агар $y=f(x)$ функция x_0 нуктада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуктада **дифференциалланувчи** дейилади, ҳосилани топиш жараёни **дифференциаллаш** дейилади.

3.1.2. Геометрик нуктаи назардан $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуктадаги ҳосиласи унинг графигига $M(x_0, f(x_0))$ нуктада ўтказилган уринманинг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган бурчагининг тангенсига тенг (19-шакл).



19-шакл

$y=f(x)$ эгри чизикка $M_0(x_0, y_0)$ нуктада ўтказилган уринма тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),$$

бунда $y_0=f(x_0)$.

$y=f(x)$ функция графикига уриниш нуктаси $M_0(x_0, y_0)$ да ўтказилган нормалнинг тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0), \text{ агар } f'(x_0) \neq 0 \text{ бўлса,}$$

$$x=x_0, \text{ агар } f'(x_0)=0 \text{ бўлса.}$$

$y=f_1(x)$ ва $y=f_2(x)$ эгри чизиклар $M_0(x_0, y_0)$ нуктада кесишсин, бу нуктадаги улар орасидаги бурчак деб $M_0(x_0, y_0)$ да уларга ўтказилган уринмалар орасидаги бурчакка айтилади ва у куйидаги формуладан топилади:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_2(x_0) \cdot f'_1(x_0)}.$$

3.1.3. x — эркин ўзгарувчи, $u=u(x)$ ва $v=v(x)$ дифференциалланувчи функциялар, C — ўзгармас сон бўлсин, у ҳолда куйидаги дифференциаллаш қоидалари ўринли:

$$1. C' = 0.$$

$$5. (Cu)' = Cu'.$$

$$2. x' = 1.$$

$$6. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

$$3. (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$4. (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

$$7. \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}.$$

8. Агар $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, яъни $y=f(\varphi(x))$ — мураккаб функция бўлса, у ҳолда:

$$y' = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

9. Агар $y=f(x)$ ва $x=\varphi(y)$ — ўзаро тескари функциялар бўлса, у ҳолда $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$.

3.1.4. Ҳосилалар жадвали:

$$1. (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u' \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

$$5. (e^u)' = e^u \cdot u'.$$

$$2. (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'.$$

$$6. (u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

$$3. \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'.$$

$$7. (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'.$$

$$4. (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'.$$

$$8. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'.$$

$$9. (\sin u)' = \cos u \cdot u'.$$

$$10. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$$

$$11. (\operatorname{tgu})' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$$

$$12. (\operatorname{ctgu})' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'.$$

$$13. (\sec u)' = \frac{\sin u}{\cos^2 u} \cdot u' = \operatorname{tgu} \cdot \sec u \cdot u'.$$

$$14. (\operatorname{cosecu})' = -\frac{\cos u}{\sin^2 u} \cdot u' = -\operatorname{ctgu} \cdot \operatorname{cosecu} \cdot u'.$$

$$15. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$16. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$17. (\arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$18. (\operatorname{arccctgu})' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$19. (\operatorname{arcsecu})' = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot u'.$$

$$20. (\operatorname{arccosecu})' = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot u'.$$

$$21. (\operatorname{shu})' = \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right)' = \operatorname{chu} \cdot u'.$$

$$22. (\operatorname{chu})' = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right)' = \operatorname{shu} \cdot u'.$$

$$23. (\operatorname{thu})' = \left(\frac{\operatorname{shu}}{\operatorname{chu}} \right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'.$$

$$24. (\operatorname{cthu})' = \left(\frac{\operatorname{chu}}{\operatorname{shu}} \right)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'.$$

1-мисол. Ҳосила таърифидан фойдаланиб, $y = \frac{2x+1}{x+3}$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Ечиш. x га Δx орттирма бериб, Δy орттирмани топамиз:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{2(x+\Delta x)-1}{x+\Delta x+3} - \frac{2x-1}{x+3} = \\ &= \frac{(2x+2\Delta x-1)(x+3) - (x+\Delta x+3)(2x-1)}{(x+\Delta x+3)(x+3)} = \frac{7\Delta x}{(x+\Delta x+3)(x+3)}. \end{aligned}$$

Δy нинг Δx га нисбати

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7}{(x + \Delta x + 3)(x + 3)}.$$

$\Delta x \rightarrow 0$ да шу нисбатнинг лимитини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{7}{(x + \Delta x + 3)(x + 3)} = \frac{7}{(x + 3)^2}.$$

Шундай қилиб, ҳосиланинг таърифига кўра:

$$y' = \left(\frac{2x-1}{x+3} \right)' = \frac{7}{(x+3)^2}.$$

2-мисол. $y = |x|$ функция ҳар қандай x да узлуксиз. $x=0$ да бу функция дифференциалланмаслигига ишонч ҳосил қилинг.

Ечиш. $x=0$ нуктада аргументга Δx орттирма берамиз, y ҳолда функция Δy орттирма олади:

$$\Delta y = |\Delta x| = \begin{cases} -\Delta x, & \text{агар } \Delta x < 0 \text{ бўлса,} \\ \Delta x, & \text{агар } \Delta x > 0 \text{ бўлса;} \end{cases}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \text{агар } \Delta x < 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } \Delta x > 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Демак, $x=0$ нуктада $y = |x|$ функция ҳосилга эга эмас, чунки $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг $\Delta x \rightarrow 0$ даги лимити мавжуд эмас.

3-мисол. $y = 8 - x^2$ ва $y = x^2$ параболаларнинг кесишиш бурчакларини топинг.

Ечиш. Параболалар тенгламаларини биргаликда ечиб, уларнинг кесишиш нукталари $A(2, 4)$ ва $B(-2, 4)$ ни топамиз. Параболалар тенгламаларини дифференциаллаймиз: $y' = -2x$, $y' = 2x$. Бу ҳосилаларнинг A ва B нукталардаги қийматларини ҳисоблаймиз ва эгри чизиклар орасидаги бурчак формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{4-4}{1-16} = -\frac{8}{15} \text{ ва } \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{-4-4}{1-16} = \frac{8}{15}.$$

Бундан: $\varphi_1 = \arctg\left(-\frac{8}{15}\right)$ ва $\varphi_2 = \arctg \frac{8}{15}$.

3.1.5. $y = f(x)$ функциянинг логарифмик ҳосиласи деб, шу функциянинг логарифмидан олинган ҳосилга айтилади, яъни:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Функцияни олдиндан логарифмлашдан фойдаланиш баъзан унинг ҳосиласини топишни осонлаштиради. Функцияни логарифмлаш

рифмлаш ва дифференциаллашни кетма-кет қўллаш *логарифмик дифференциаллаш* деб аталади.

4-мисол. Функция ҳосиласини топинг:

$$y = \sqrt[3]{x^2} + \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x.$$

Ечиш. Бу функцияни логарифмлаймиз:

$$\ln y = \frac{2}{3} \ln x + \ln(1-x) - \ln(1+x^2) + 3 \ln \sin x + 2 \ln \cos x.$$

Тенгликнинг иккала қисмини x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{3}{\sin x} \cdot \cos x - \frac{2 \sin x}{\cos x},$$

бундан

$$y' = y \left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3 \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{tg} x \right).$$

1-дарсхона топириғи

1. Ҳосила таърифидан фойдаланиб, $y = \frac{4x^2-1}{x^2+1}$ функция ҳосиласини топинг.

$$\text{Ж: } y' = \frac{10x}{(x^2+1)^2}.$$

2. $y = \sqrt[3]{x}$ функциянинг $x=0$ нуктада узлуксиз ва дифференциалланувчи бўлиш-бўлмаслигини аниқланг.

3. $y = (x+1) \sqrt[3]{3-x}$ эгри чизикқа абсциссаси $x_0 = -1$ бўлган нуктада ўтказилган уринма ва нормал тенгламасини тузинг.

$$\text{Ж: } y = \sqrt[3]{4}(x+1) \text{ ва } y = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x+1).$$

4. $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ эгри чизиклар қандай бурчак остида кесишади?

$$\text{Ж: } \arctg 2 \sqrt{2} \approx 70^\circ 30'.$$

5. Қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини дифференциаллаш қоидалари ва формулаларини қўлаб топинг:

$$\text{а) } y = \frac{\sqrt{4x+1}}{x^2}; \quad \text{б) } y = x^2 \sqrt{1-x^2};$$

$$\text{в) } y = \sin^4 x + \cos^4 x; \quad \text{г) } y = \sqrt[4]{1+\cos^2 x};$$

$$\text{д) } y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}; \quad \text{е) } y = \operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x + 3x.$$

1- мустақил иш

1. $y = \frac{8}{4+x^2}$ эгри чизикка $x_0=2$ нуктада ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламасини тузинг.

Ж: $y = -\frac{x}{2} + 2$ ва $y = 2x - 3$.

2. $y = \frac{3x-2}{4x+7}$ функция ҳосиласини таърифдан фойдаланиб топинг.

Ж: $\frac{29}{(4x+7)^2}$.

3. Қуйидаги функцияларнинг ҳосиласини топинг:

а) $y = \frac{3x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 2}}$;

б) $y = 2 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$;

в) $y = 3x \sin^3 x + 3 \cos x - \cos^3 x$;

г) $y = \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^4 \frac{x}{2}$;

д) $y = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)^2$;

е) $y = \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}$.

2- дарсхона топириғи

Қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини дифференциаллаш қондалари ва формулаларидан фойдаланиб топинг:

1. а) $y = x^2 \sin 2x$;

б) $y = e^{4x} \operatorname{tg} 2x$;

в) $y = \sqrt[3]{x^3 + \sin^3 x}$;

г) $y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \operatorname{ctg}^3 3x$;

д) $y = 3^{-\cos^3 3x}$;

е) $y = e^{-\arcsin \sqrt{x}}$.

2. а) $y = (3x^3 - \operatorname{ctg}^4 x)^3$;

б) $y = \ln^3(\sqrt{x} - 2^{-x^2})$;

в) $y = \ln \operatorname{tg} \sqrt{x}$;

г) $y = e^{-\sqrt{x^2 - 3x + 3}}$;

д) $y = \operatorname{sh}^2 x^3$;

е) $y = \arcsin \sqrt{1+x^2}$.

3. а) $y = (2^{x^3} - \operatorname{tg}^4 2x)^3$;

б) $y = x^3 \operatorname{th}^3 x$;

в) $y = \lg^4(x^5 - \sin^5 2x)$;

г) $y = \arcsin \operatorname{ctg} \sqrt{1+e^{-x^2}}$;

д) $y = (\sin 2x)^{\cos 4x}$;

е) $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{ctg} 2x}$.

4. а) $y = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$;

б) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x+2)^2} \cdot \sqrt{(x+3)^3}}$.

2- мустақил иш

Куйидаги функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

1. а) $y = x^2 \cdot \cos^3 2x$;

б) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos^2 x}{1 + \sin^2 x}}$;

в) $y = (3^{\sin 2x} - \cos 3x)^2$;

г) $y = e^{x^2} \cdot \cos^2 x$.

2. а) $y = x^3 \cdot e^{\operatorname{ctg} 3x}$;

б) $y = (\sin^3 3x + \cos^3 2x)^2$;

в) $y = \ln \operatorname{arctg} e^{-x}$;

г) $y = \sin^3 3x \cdot \operatorname{tg}^2 2x$.

3. а) $y = x \cdot \operatorname{ctg}^2 4x$;

б) $y = (x^3 + \operatorname{ctg}^3 2x)^2$;

в) $y = \cos(x^4 - \operatorname{tg}^4 x)$;

г) $y = \cos 2x \cdot e^{-2x}$.

4. а) $y = \ln \frac{\sqrt{x^4 + 1} - x^2}{\sqrt{x^4 + 1} + x^2}$;

б) $y = e^x \sqrt{1 - e^{2x}} - \operatorname{arcsine} e^x$;

в) $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$;

г) $y = \frac{2^x \cdot (x+1)^3}{(x-1)^2 \sqrt{2x+1}}$.

2- §. Юқори тартибли ҳосилалар

3.2.1. $y=f(x)$ функциянинг *иккинчи тартибли* ёки *иккинчи ҳосиласи* деб унинг биринчи тартибли ҳосиласидан олинган ҳосиллага, яъни $(y')'$ га айтилади.

Иккинчи тартибли ҳосила куйидагиларнинг бири билан белгилади:

$$y'', f''(x), \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

$y=f(x)$ функциянинг *n-тартибли* ёки *n-ҳосиласи* деб унинг $(n-1)$ -тартибли ҳосиласидан олинган ҳосиллага айтилади. *n-тартибли ҳосила* учун ушбу белгилашлардан бири қўлланилади:

$$y^{(n)}, f^{(n)}(x), \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Белгилашга кўра

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

1- м и с о л. $y = \ln x$ функциянинг *n- тартибли ҳосиласини* топинг.

Е ч и ш. *n* марта кетма-кет дифференциаллаб, куйидагига эга бўламиз:

$$y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}, y''' = \frac{2}{x^3}, y^{IV} = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, \dots,$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}}{x^n} (n-1) !$$

3.2.2. x ўзгарувчининг y функцияси ошқормас шаклда $F(x, y) = 0$ тенглама билан берилган бўлса, y ҳолда y' ҳосилани топиш учун $F(x, y) = 0$ тенгликнинг иккала қисмини x бўйича дифференциаллаб, сўнгра ҳосил бўлган y' га нисбатан чизикли тенгламадан ҳосилани топиш керак. Иккинчи ва ундан юқорироқ тартибли ҳосилалар ҳам шу каби топилади.

2- м и с о л. Ошқормас ҳолда

$$x^2 + y^2 = 64$$

тенглама билан берилган y функциянинг y' ва y'' ҳосилаларини топинг.

Е ч и ш. y ўзгарувчи x нинг функцияси деб ҳисоблаб, берилган тенгламанинг иккала қисмини x бўйича дифференциаллаймиз: $2x + 2y \cdot y' = 0$. Бундан $y' = -\frac{x}{y}$. Топилган биринчи y' ҳосилани яна x бўйича дифференциаллаймиз:

$$y'' = (y')' = -\frac{y - xy'}{y^2}$$

Энди $y' = -\frac{x}{y}$ эканини ҳисобга олиб,

$$y'' = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб, $y'' = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}$ ёки $y'' = -\frac{64}{y^3}$, чунки шартга кўра $x^2 + y^2 = 64$.

3.2.3. Агар y функциянинг x аргументга боғлиқлиги

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases}$$

тенгламалар билан параметрик шаклда берилган бўлса, y ҳолда

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = \left(\frac{y''_t}{x'_t} \right)_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt} x'_t - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}$$

3- м и с о л. Ушбу

$$\begin{cases} x = 8 \cos t, \\ y = 8 \sin t \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топинг.

Е чи ш. Юқорида келтирилган формуладан фойдаланиб, қуйидагиларни осон топамиз:

$$x'_1 = -8 \sin t, \quad y'_1 = 8 \cos t;$$

$$y'_2 = \frac{y'_1}{x'_1} = \frac{8 \cos t}{-8 \sin t} = -\operatorname{ctgt};$$

$$y''_2 = \left(\frac{y'_1}{x'_1} \right)'_t \cdot \frac{1}{x'_1} = (-\operatorname{ctgt})'_t \cdot \frac{1}{-8 \sin t} = -\frac{1}{8 \cdot \sin^3 t}.$$

3- дарсхона топириғи

1. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

2. $y = \frac{1+x}{1-x}$ функциянинг n - тартибли ҳосиласини топинг.

3. Қуйидаги тенгламалар билан ошқормас ҳолда берилган функцияларнинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топинг:

$$\text{a) } y^2 = 2px; \quad \text{б) } y = x + \operatorname{arctg} y.$$

4. Параметрик тенгламалар билан берилган функцияларнинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг:

$$\text{a) } \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t^2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

5. Ушбу

$$\begin{cases} x = \frac{5t}{1+t^2}, \\ y = \frac{5t^2}{1+t^2} \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган эгри чизикка $M_0(2, 4)$ нуктада ўтказилган уринма ва нормал тенгламасини топинг.

3- мустақил иш

1. а) $y = \frac{x^3}{4}(2\ln x - 3)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

б) Ушбу

$$\begin{cases} x = \arccos \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

в) $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$ тенглама билан ошкормас ҳолда берилган y функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

2. а) $y = x^2 \sin(5x - 3)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

б) Ушбу

$$\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

в) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ тенглама билан ошкормас ҳолда берилган y функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

3. а) $y = \frac{1}{2} \ln^2 x$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

б) Ушбу

$$\begin{cases} x = \operatorname{sh}^2 t, \\ y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

в) $x^4 - xy + y^4 = 1$ тенглама билан ошкормас ҳолда берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласини топинг.

3-§. Функциянинг дифференциали

3.3.1. $y = f(x)$ функциянинг дифференциалн деб, унинг орттирмасининг эркин ўзгарувчи x нинг орттирмасига нисбатан чизикли бўлган бош қисмига айтилади.

$y = f(x)$ функциянинг дифференциалн dy билан белгиланади. Функциянинг дифференциалн унинг ҳосиласи билан эркин ўзгарувчи орттирмасининг кўпайтмасига тенг:

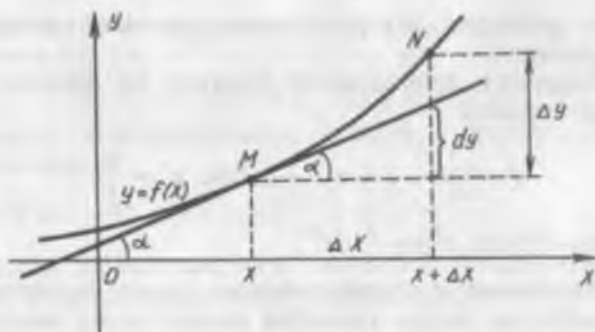
$$dy = f'(x) \Delta x \quad \text{ёки} \quad dy = y' \cdot \Delta x.$$

Равшанки, $dx = \Delta x$. Шу сабабли

$$dy = f'(x) dx \quad \text{ёки} \quad dy = y' dx.$$

Дифференциал геометрик жиҳатдан $y = f(x)$ функция графигига $M(x, y)$ нуктада ўтказилган уринма ординатасининг орттирмасига тенг (20-шакл).

Функциянинг дифференциали dy унинг Δy орттирмасидан Δx га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик микдорга фарқ қилади.



20- шакл

3.3.2. Агар $u=u(x)$ ва $v=v(x)$ функциялар дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда дифференциалнинг таърифи ва дифференциаллаш қоидаларидан бевосита дифференциалнинг асосий хоссаларига эга бўламиз:

1. $d(C)=0$, бунда C — ўзгармас.

2. $d(Cu)=Cdu$.

3. $d(u \pm v)=du \pm dv$.

4. $d(u \cdot v)=u dv + v du$.

5. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v du - u dv}{v^2}$, бунда $v \neq 0$.

6. $df(u)=f'_u(u) \cdot u' dx = f'(u) du$.

1- м и с о л. $y=\operatorname{tg}^4 2x$ функция дифференциалини топинг.

Е ч и ш. Олдин берилган функциянинг ҳосиласини топамиз:

$$y' = 8 \operatorname{tg}^3 2x \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} = 8 \operatorname{tg}^3 2x \sec^2 2x.$$

У ҳолда $dy = 8 \operatorname{tg}^3 2x \cdot \sec^2 2x dx$.

3.3.3. $y=f(x)$ функциянинг *иккинчи тартибли дифференциали* деб биринчи тартибли дифференциалдан олинган дифференциалга айтилади ва

$$d^2 y = d(dy)$$

каби белгиланади.

$y=f(x)$ функциянинг n - тартибли дифференциали деб $(n-1)$ -тартибли дифференциалдан олинган дифференциалга айтилади, яъни:

$$d^n y = d(d^{n-1} y).$$

$y=f(x)$ функция берилган бўлиб, бунда x — эркин ўзгарувчи бўлса, у ҳолда унинг юқори тартибли дифференциаллари ушбу формулалар бўйича ҳисобланади:

$$d^2 y = y'' dx^2, d^3 y = y''' dx^3, \dots, d^n y = y^{(n)} dx^n.$$

2- м и с ол. $y = x(\ln x - 1)$ функциянинг иккинчи тартибли дифференциалини топинг.

Е ч и ш. Берилган функциянинг биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларини топамиз:

$$y' = \ln x - 1 + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x, \quad y'' = \frac{1}{x}.$$

$$\text{Демак, } dy = \ln x dx, \quad d^2 y = \frac{1}{x} dx^2.$$

3.3.4. Функциянинг dy дифференциални унинг Δy орттирмасидан $\Delta x = dx$ га нисбатан юқори тартибли чексиз кичик микдорга фарк қилади, шу сабабли $\Delta y \approx dy$ ёки

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \Delta x,$$

бундан

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$$

формулага эга бўламиз, бу формула функция қийматларини тақрибий ҳисоблашларда қўлланилади.

3- м и с ол. $\arcsin 0,51$ нинг тақрибий қийматини ҳисобланг.

Е ч и ш. $y = \arcsin x$ функцияни қараймиз: $x = 0,5$, $\Delta x = 0,01$ деб олиб ва $\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \Delta x$ формуладан фойдаланиб топамиз:

$$\begin{aligned} \arcsin 0,51 &\approx \arcsin 0,5 + \frac{1}{\sqrt{1 - (0,5)^2}} \cdot 0,01 = \\ &= \frac{\pi}{6} + 0,011 \approx 0,534. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, $\arcsin 0,51 \approx 0,534$ радиан.

4- дарсхона топшириғи

1. $y = 2x^3 + 5x^2$ функция берилган. Унинг:

а) орттирмасини топинг;

б) орттирмасининг бош қисмини топинг.

Ж: а) $\Delta y = (6x^2 + 10x) \Delta x + (6x + 5) \Delta x^2 + 2\Delta x^3$;

б) $dy = (6x^2 + 10x) \Delta x$.

2. Қуйидаги функцияларнинг биринчи тартибли дифференциалларини топинг:

$$\text{а) } y = \sqrt{1+x^2}; \quad \text{б) } y = \arcsin \frac{1}{x}; \quad \text{в) } y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

3. Куйидаги функцияларнинг иккинчи тартибли дифференциалларини топинг:

а) $y=e^{-x^3}$; б) $y=x(\ln x-1)$; в) $y=\arccos x$.

4. Куйидаги функцияларнинг учинчи тартибли дифференциалларини ҳисобланг:

а) $y=\cos^2 2x$; б) $y=(2x-3)^3$; в) $y=\frac{\ln x}{x}$.

5. Куйидаги функцияларнинг тақрибий қийматларини вергулдан кейинги икки хонасигача аниқликда ҳисобланг:

а) $x=1,03$ да $y=x^3-4x^2+5x+3$;

б) $x=0,2$ да $y=\sqrt{1+x}$.

Ж: а) 5,00; б) 1,10.

6. $\sqrt[4]{17}$ нинг тақрибий қийматини вергулдан кейинги икки хонасигача аниқликда ҳисобланг.

Ж: 2,03.

4- мустақил иш

1. Агар

а) $y=x^3 \ln x$; б) $y=e^{-3x} \cdot \cos 2x$

бўлса, dy , d^2y , d^3y дифференциалларни ҳисобланг.

2. Функцияларнинг тақрибий қийматларини вергулдан кейинги икки хонасигача аниқликда ҳисобланг:

а) $x=0,1$ да $y=\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$;

б) $x=0,98$ да $y=\sqrt{x^2-7x+10}$.

Ж: а) 1,03; б) 2,09.

4- §. Ролл, Лагранж, Коши теоремалари. Лопиталь қоидаси

3.4.1. Ролл теоремаси. Агар $y=f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз, (a, b) ораликда дифференциалланувчи ва $f(a)=f(b)$ бўлса, у ҳолда акалли битта шундай $x=c$ ($a < c < b$) нукта мавжудки, унда $f'(c)=0$ бўлади.

Бу теорема ҳосиланинг ноллари ёки илдизлари ҳақидаги теорема ҳам дейилади.

Лагранж теоремаси. Агар $y=f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз, (a, b) ораликда дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда акалли битта шундай $x=c$ ($a < c < b$) нукта мавжудки,

$$f(b)-f(a)=f'(c) \cdot (b-a)$$

бўлади.

Бу теорема чекли айирмалар ҳақидаги теорема ҳам дейилади.

Қоши теоремаси. Агар $y=f(x)$ ва $y=\varphi(x)$ функциялар $[a, b]$ кесмада узлуксиз, (a, b) ораликда дифференциалланувчи, шу билан бирга бу ораликда $\varphi'(x) \neq 0$ бўлса, у ҳолда акалли битта шундай $x=c(a < c < b)$ нукта мавжудки,

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}$$

бўлади, бунда $\varphi(b) \neq \varphi(a)$.

1-мисол. $[1, 5]$ кесмада $f(x) = x^2 - 6x + 100$ функция учун Ролл теоремаси ўринлими? x нинг қандай қийматида $f'(x) = 0$ бўлади?

Ечиш. $f(x)$ функция x нинг барча қийматларида узлуксиз, дифференциалланувчи ва унинг $[1, 5]$ кесма охирларидаги қийматлари тенг: $f(1) = f(5) = 95$ бўлгани учун Ролл теоремаси шартлари бажарилади. x нинг $f'(x) = 0$ бўладиган қиймати $f'(x) = 2x - 6 = 0$ тенгламадан аниқланади, яъни $x = 3$.

2-мисол. $f(x) = 2x - x^2$ эгри чизикнинг AB ёйида шундай M нуктани топингки, бу нуктада эгри чизикка ўтказилган уринма AB ватарга параллел бўлсин, бунда $A(1, 1)$ ва $B(3, -3)$.

Ечиш. $f(x) = 2x - x^2$ функция x нинг барча қийматларида узлуксиз ва дифференциалланувчи. Изланаётган M нуктада ўтказилган уринманинг бурчак коэффициенти шартга кўра $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ га тенг, иккинчи томондан, Лагранж теоремасига кўра

иккита $a = 1$ ва $b = 3$ қиймат орасида

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

тенгликни қаноатлантирувчи $x = c$ қиймат мавжуд, бунда $f'(x) = 2 - 2x$. Тегишли қийматларни қўйсак,

$$f(3) - f(1) = (3 - 1)f'(c)$$

ёки

$$(2 \cdot 3 - 3^2) - (2 \cdot 1 - 1^2) = (3 - 1)(2 - 2c).$$

Бу охирги тенгламани c га нисбатан ечсак, $c = 2$, $f(2) = 0$. Шундай қилиб, M нукта $(2, 0)$ координаталарга эга.

3-мисол. $f(x) = \sqrt[3]{(x-8)^2}$ функция учун $[0; 10]$ кесмада Лагранж теоремаси ўринлими?

Ечиш. $f(x)$ функция x нинг барча қийматларида узлуксиз, аммо унинг $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-8}}$ ҳосиласи $(0; 10)$ ораликнинг $x = 8$ нуктасида мавжуд эмас, шунга кўра Лагранж теоремаси ўринли эмас.

3.4.2. Аниқмасликларни очишнинг Лопиталь қондаси ($\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликларни очиш). $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар x_0 нуктанинг бирор атрофида (x_0 нукта-

нинг ўзидан ташкари) дифференциалланувчи ва $\varphi'(x) \neq 0$ бўлсин. Агар $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ ёки $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty$ бўлиб,

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ мавжуд бўлса, у ҳолда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ бўлади.

$x \rightarrow \infty$ да ҳам Лопиталь қондаси ўринли.

$0 \cdot \infty$ ёки $\infty - \infty$ шаклидаги аниқмасликлар алгебраик алмаштиришлар орқали $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликларга келтирилиб, сўнгра Лопиталь қондасидан фойдаланилади.

0^0 , ∞^0 ёки 1^∞ кўринишдаги аниқмасликлар логарифмлаш орқали $\frac{0}{0}$ ёки $\frac{\infty}{\infty}$ кўринишдаги аниқмасликларга келтирилади.

4-мисол. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ ни топинг.

Ечиш. Ифоданинг сурати ва махражи $x \rightarrow 0$ да нолга интилади, шу сабабли $\frac{0}{0}$ шаклидаги аниқмасликка эгамиз. Лопиталь қондасидан фойдалансак,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

Бу ерда Лопиталь қондаси икки марта қўлланилди.

5-мисол. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x$ ни топинг.

Ечиш. $0 \cdot \infty$ шаклидаги аниқмасликка эгамиз, $x^2 \ln x$ кўпайтмани $\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}$ бўлинма шаклида ифодаласак, натижада $\frac{\infty}{\infty}$ шаклидаги

аниқмасликка эга бўламиз. Лопиталь қондасини қўллаймиз:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

6-мисол. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$ ни топинг.

Ечиш. 0^0 шаклидаги аниқмасликка эгамиз. Берилган функцияни y билан белгилаб: $y = (\sin x)^x$, буни логарифмлаймиз:

$$\ln y = x \ln \sin x = \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}}.$$

Лояталь коидасини қўлаймиз:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x^2}} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\sin x} = -\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{x}{\sin x} \cdot \cos x \right) = 0.\end{aligned}$$

Шундай қилиб, $\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1$.

5- дарсхона топириғи

1. $[-1; 0]$ ва $[0; 1]$ кесмаларда $f(x) = x - x^3$ функция учун Ролл теоремаси ўринлими? Агар ўринли бўлса, у ҳолда x нинг тегишли қийматларини топинг.

Ж: $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ функция илдизлари орасида ҳосиланинг илдизи борлигини текширинг.

3. $[-1, 2]$ кесмада $\frac{4}{x}$ ва $1 - \sqrt[3]{x^2}$ функцияларга Лагранж теоремасини қўллаб бўладими?

4. Қайси нуктада $f(x) = 4 - x^2$ функцияга ўтказилган уринма $A(-2, 0)$ ва $B(1, 3)$ нукталарни тартиб турувчи ватарга параллел? Ж: $(-0.5; 3.75)$ нуктада.

5. $f(x) = x^3$ ва $\varphi(x) = x^2$ функциялар учун Коши формуласини ёзинг ва c нуктани топинг.

6. Лопиталь қоидадан фойдаланиб, лимитларни топинг:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 7x^2 + 4x + 2}{x^3 - 5x + 4}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \cdot \ln x$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 3x}$; ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$.

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$;

Ж: а) $\frac{7}{2}$; б) 3; в) $\frac{5}{3}$; г) $\frac{1}{2}$; д) 0; е) 1; ж) 3.

5- мустақил иш

1. $[-1; 1]$ кесмада $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x}$ функция учун Ролл теоремасини қўллаб бўладими?

2. Ушбу

а) $f(x) = \arctg x$ функция учун $[0; 1]$ кесмада;

б) $f(x) = \arcsin x$ функция учун $[0; 1]$ кесмада;

в) $f(x) = \ln x$ функция учун $[1; 2]$ кесмада Лагранж формуласини ёзинг ва $x=c$ ни топинг.

Ж: а) $\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}$; б) $\sqrt{1-\frac{4}{\pi^2}}$; в) $\frac{1}{\ln 2}$.

3. Ушбу

а) $\sin x$ ва $\cos x$ функциялар учун $[0; \frac{\pi}{2}]$ кесмада;

б) x^2 ва $\sqrt{x}$ функциялар учун $[1; 4]$ кесмада Коши формуласини ёзинг ва $x=c$ ни топинг.

Ж: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\sqrt[3]{(\frac{15}{4})^2}$.

4. Лопиталь қонидасидан фойдаланиб қуйидаги лимитларни топинг:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\lg \frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot \ctg x$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \ctg^2 x)$;

д) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x)^{\cos x}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + 2^x)^{\frac{1}{x}}$.

Ж: а) 2; б) ∞ ; в) 1; г) $\frac{2}{3}$; д) 1; е) 2.

5-§. Тейлор формуласи

3.5.1. Агар $y=f(x)$ функция x_0 нуктанинг бирор атрофида $(n+1)$ - тартибгача ҳосилаларга эга бўлса ($(n+1)$ - тартибли ҳосила ҳам киради), у ҳолда бу атрофнинг ҳар қандай x нуктаси учун n - тартибли Тейлор формуласи ўринли:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \\ + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + R_n(x),$$

бунда $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$ Тейлор формуласининг Лагранж шаклидаги қолдиқ ҳади дейилади, ξ нукта x ва x_0 нукталар орасида ётади, яъни $\xi = x_0 + \theta(x-x_0)$ ва $0 < \theta < 1$.

1-мисол. $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ кўпҳадни $(x-2)$ иккиҳаднинг бутун мусбат даражалари бўйича ёйинг.

Ечиш. Масалани ҳал қилиш учун кўпҳадни ва унинг ҳосилаларининг $x_0 = 2$ нуктадаги қийматларини топиш керак. Тегинли ҳисоблашларни бажарамиз:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3; f''(x) = 6x - 4; f'''(x) = 6; n \geq 4 \text{ учун } f^{(n)}(x) = 0.$$

$$\text{Бундан: } f(2) = 11; f'(2) = 7; f''(2) = 8; f'''(2) = 6.$$

Демак,

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + \frac{7}{1!}(x-2) + \frac{8}{2!}(x-2)^2 + \frac{6}{3!}(x-2)^3$$

ёки

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

2-мисол. $x_0 = -1$ да $f(x) = e^x$ функция учун учинчи тартибли Тейлор формуласини ёзинг.

Ечиш. Барча n лар учун $f^{(n)}(x) = e^x$ ва $f^{(n)}(-1) = \frac{1}{e}$ экани равшан.

Демак,

$$e^x = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} \frac{x+1}{1!} + \frac{1}{e} \frac{(x+1)^2}{2!} + \frac{1}{e} \frac{(x+1)^3}{3!} + R_3(x),$$

шу билан бирга $R_3(x) = e^{\xi} \frac{(x+1)^4}{4!}$, бу ерда ξ нукта x ва -1 орасида ётади ёки

$$\xi = -1 + \theta(x+1), 0 < \theta < 1.$$

3.5.2. Агар Тейлор формуласида $x_0 = 0$ олинса, у ҳолда, n -тартибли Маклорен формуласи ҳосил бўлади:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

бунда $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$ — қолдиқ ҳад, ξ нукта x ва 0 нукталар орасида ётади, яъни $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$.

Баъзи функцияларнинг Маклорен формуласи бўйича ёйилмасини келтирамиз:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1};$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots - (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} +$$

$$+ (-1)^n \cos \theta x \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots - (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cos \theta x \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots +$$

$$+ \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{m-n-1} \cdot x^{n+1}.$$

$f(x) = (1+x)^m$ функциянинг ёйилмаси *биномиал ёйилма* дейилади.

3-мисол. Маклорен формуласи ёрдамида $f(x) = \ln(1+x)$ функцияни x нинг даражалари бўйича ёйинг.

Ечиш. $f(0) = 0$ экани равшан. Берилган функциянинг ҳосилаларини ҳисоблаймиз:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}; \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3};$$

$$f^{(IV)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{(1+x)^4}; \quad \dots; \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Шундай қилиб,

$$f'(0) = 1; \quad f''(0) = -1; \quad f'''(0) = 2!; \quad f^{(IV)}(0) = -3!, \dots,$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1} (n-1)!; \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Буларни Маклорен формуласига қўйсак,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots +$$

$$+ (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{n!} x^n + R_n(x)$$

ёки

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + R_n(x). \text{ Бу ерда}$$

қолдиқ ҳад $R_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\xi)^{n+1}}$, ξ нукта эса 0 ва x нукталар орасида ётади.

6- дарсхона топшириги

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ кўпхадни $x+1$ иккиҳаднинг даражалари бўйича ёйнинг.

$$\text{Ж: } f(x) = -9 + 17(x+1) - 9(x+1)^2 + 2(x+1)^3.$$

2. $x_0 = 1$ нуктада $f(x) = \sqrt{x}$ функция учун учинчи тартибли Тейлор формуласини ёзинг.

$$\text{Ж: } f(x) = 1 - \frac{x-1}{2} + \frac{3}{8}(x-1)^2 - \frac{5}{16}(x-1)^3 + R_3(x),$$

$$\text{бу ерда } R_3(x) = \frac{35}{128} \frac{(x-1)^4}{\xi^2}.$$

3. $f(x) = \operatorname{tg} x$ функция учун иккинчи тартибли Маклорен формуласини ёзинг.

$$\text{Ж: } f(x) = x + \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1 + 2\sin^2 \xi}{\cos^4 \xi}.$$

4. $f(x) = xe^x$ функция учун n -тартибли Маклорен формуласини ёзинг.

$$\text{Ж: } f(x) = x + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^3}{2!} + \dots + \frac{x^n}{(n-1)!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} (\xi + n + 1)e^{\xi}.$$

6- мустақил иш

1. Кўпхадлар ёйилмасини ёзинг:

а) $f(x) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$ ни $(x-1)$ иккиҳад даражалари бўйича;

б) $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ кўпхадни $(x-4)$ иккиҳад даражалари бўйича.

2. а) $x_0 = 2$ нуктада $f(x) = \frac{x}{x-1}$ функция учун учинчи тартибли Тейлор формуласини ёзинг;

б) $x_0 = 1$ нуктада $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ функция учун учинчи тартибли Тейлор формуласини ёзинг.

3. а) $f(x) = \operatorname{arcsin} x$ функция учун учинчи тартибли Маклорен формуласини ёзинг;

б) $f(x) = \sin^2 x$ функция учун $2n$ -тартибли Маклорен формуласини ёзинг.

6- §. Тақрибий ҳисоблашларга Тейлор формуласининг татбиқи

Тейлор формуласи ихтиёрий $f(x)$ функцияни

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

кўпхад шаклида тақрибий ифодалаш имконини беради. Бу кўпхад n - тартибли Тейлор кўпхади дейилади. Хусусан, $x_0=0$ да n - тартибли Маклорен кўпхадига эга бўламиз.

Баъзи функцияларнинг Маклорен кўпхади шаклидаги тақрибий ифодаларини келтирамиз:

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!};$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!};$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

$$(1+x)^m \approx 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n.$$

$n=1, 2, 3$ деб олиб, қуйидаги тақрибий формулаларга эга бўламиз:

$$e^x = 1 + x; \quad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}; \quad e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6};$$

$$\sin x \approx x, \quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6}; \quad \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120};$$

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}; \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}; \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720};$$

$$(1+x)^m \approx 1 + mx; \quad (1+x)^m \approx 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2;$$

$$(1+x)^m \approx 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{6}x^3.$$

Келтирилган функцияларнинг ҳар бири учун тақрибий формулалар аниқликнинг ортиб бориши тартибида берилган.

Тейлор (Маклорен) формуласи функциялар қийматларини берилган аниқликда ҳисоблашларда қўлланилади.

Масалан, $f(x)$ функциянинг $x=a$ нуктадаги қийматини ҳатолиги ε дан катта бўлмайдиган аниқликда ҳисоблаш учун Тейлор кўпхадини шундай k - тартибгача олиш керакки, бу k сон $|R_n(a)| < \varepsilon$ тенгсизлиқни қаноатлантирувчи n ларнинг энг кичиги қилиб танланади.

1- мисол. e сонини 0,0001 гача аниқликда ҳисобланг.

Ечиш. $x=a=1$ эканлигини ҳисобга олсак, Маклорен формуласига кўра:

$$e = f(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_n(1).$$

n нинг $R_n(1) = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!} < 0,0001$ шартни қаноатлантирувчи энг кичик қиймати $k=6$ бўлади, бунда $0 < \xi < 1$. Демак,

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{6!} = 2,718.$$

2-мисол. $\sqrt[3]{29}$ нинг қийматини 0,001 гача аниқликда ҳисобланг.

Ечиш. Берилган илдишни бундай ифодалаймиз:

$$\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27+2} = 3 \sqrt[3]{1 + \frac{2}{27}} = 3 \left(1 + \frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Ушбу биномиал ёйилмадан фойдаланамиз:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x).$$

Бу ерда

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\dots(m-n)}{(n+1)!} x^{n+1} (1+\xi)^{m-n-1}, 0 < \xi < 1.$$

$R_n(x)$ нинг қийматини ўрнига қўйиб,

$$(1+x)^m \approx 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n \text{ тақри-$$

бий тенгликка эга бўламиз. $R_n(x)$ хатоликни $|x| < 1$ ва етарлича катта n ларда исталганча кичик қилиш мумкин.

$$x = \frac{2}{27} \text{ ва } m = \frac{1}{3} \text{ деб олсак,}$$

$$\sqrt[3]{29} = 3 \left(1 + \frac{2}{81} - \frac{2 \cdot 2}{81 \cdot 81} + \dots + R_n\left(\frac{2}{27}\right)\right).$$

Ҳисоблашларнинг кетма-кет хатоликлари катталиги $3|R_n|$ ни баҳолаб, топамиз:

$$3|R_1| < \frac{3 \cdot 2 \cdot 2}{81^2} < 0,002, \quad 3|R_2| < \frac{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{81^3} < 0,0003.$$

Демак, берилган аниқликда ҳисоблаш учун учта ҳадни ($k=3$) олиш етарли экан, яъни

$$\sqrt[3]{29} \approx 3(1 + 0,024 - 0,0006) = 3,072.$$

7- дарсхона топшириги

1. $y = \frac{x}{x-1}$ функция учун $x_0 = 2$ нуктада учинчи тартибли Тейлор кўпҳадини ёзинг. Берилган функция ва унинг кўпҳади графикларини чизинг.

2. $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}$ тақрибий формуладан фойдаланиб $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ ни топинг ва хатоликни баҳоланг.

Ж: $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \approx 0,78$; $\epsilon < 0,01$.

3. Қуйидагиларни 0,001 гача аниқликда ҳисобланг:

а) $\cos 41^\circ$; б) $\sqrt[3]{121}$.

Ж: а) 0,754; б) 4,946.

7- мустақил иш

1. $f(x) = \arcsin x$ функция учун учинчи тартибли Маклорен кўпҳадини ёзинг. Берилган функция ва унинг кўпҳади графикларини ясанг.

2. Қуйидагиларни 0,001 гача аниқликда ҳисобланг:

а) $\sqrt[4]{e}$; б) $\sqrt[7]{129}$; в) $\sin 36^\circ$.

Ж: а) 1,395; б) 2,002; в) 0,587.

ФУНКЦИЯЛАРНИ ҲОСИЛАЛАР ЁРДАМИДА ТЕКШИРИШ

1-§. Биринчи тартибли ҳосила ёрдамида функцияларнинг экстремумларини текшириш

4.1.1. Агар (a, b) ораликнинг $x_2 > x_1$ тенгсизликни каноатлантирувчи иккита ихтиёрий x_1 ва x_2 нукталари учун $f(x_2) > f(x_1)$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция (a, b) ораликда *ўсувчи* дейилади.

Агар (a, b) ораликнинг $x_2 > x_1$ тенгсизликни каноатлантирувчи иккита ихтиёрий x_1 ва x_2 нукталари учун $f(x_2) < f(x_1)$ тенгсизлик бажарилса, $f(x)$ функция (a, b) ораликда *камаювчи* дейилади.

Ораликда ўсувчи ёки камаювчи функциялар *монотон функциялар* дейилади.

Монотонликнинг зарурий шартлари:

1. Агар (a, b) ораликда дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция ўсувчи бўлса, у ҳолда $f'(x) > 0$.

2. Агар (a, b) ораликда дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция камаювчи бўлса, у ҳолда $f'(x) < 0$.

Монотонликнинг етарлилик шартлари.

1. Агар (a, b) ораликда дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция мусбат ҳосиллага эга бўлса, яъни $f'(x) > 0$, у ҳолда функция шу ораликда *ўсувчи функция* бўлади.

2. Агар (a, b) ораликда дифференциалланувчи $y = f(x)$ функция манфий ҳосиллага эга бўлса, яъни $f'(x) < 0$, функция шу ораликда *камаювчи функция* бўлади.

Функциянинг биринчи тартибли ҳосиласи нолга тенг ёки узилишга эга бўладиган нукталари *критик нуқталар* дейилади.

Энг содда ҳолларда $y = f(x)$ функциянинг аниқланиш соҳасини чекли сондаги критик нуқталар билан чегараланган монотонлик ораликларга бўлиш мумкин.

4.1.2. Агар x_0 нуктанинг шундай атрофи мавжуд бўлсаки, бу атрофнинг ҳар қандай $x \neq x_0$ нуктаси учун $f(x) < f(x_0)$ тенгсизлик ўринли бўлса, у ҳолда $y = f(x)$ функция x_0 нуктада *максимумга эришади* дейилади.

Агар x_0 нуктанинг шундай атрофи мавжуд бўлсаки, бу атрофнинг ҳар қандай $x \neq x_0$ нуктаси учун $f(x) > f(x_0)$ тенгсиз-

лик ўринли бўлса, у ҳолда $y=f(x)$ функция x_0 нуктада *минимумга* эришади дейилади.

Функция максимум ёки минимумга эришадиган нукталар унинг *экстремум* нукталари дейилади. Функциянинг экстремум нукталаридаги қийматлари функциянинг *экстремал* (*максимал* ёки *минимал*) *қийматлари* дейилади.

Экстремумнинг зарурий шarti. Агар $y=f(x)$ функция x_0 нуктада экстремумга эга бўлса, у ҳолда $f'(x_0)$ нолга тенг ёки мавжуд бўлмайди.

Аммо ҳар қандай критик нукта ҳам экстремум нуктаси бўлавермайди.

Экстремумнинг етарлилик шarti. Агар x_0 нукта $y=f(x)$ функциянинг критик нуктаси бўлиб, функциянинг ҳосиласи бу нуктадан ўтишда ишорасини *ўзгартирса*, у ҳолда x_0 — бу функциянинг *экстремум нуктаси* бўлади, шу билан бирга:

1. Агар x_0 нуктадан чапдан ўнгга ўтишда $f'(x)$ ўз ишорасини мусбатдан манфийга ўзгартирса, у ҳолда x_0 нуктада функция максимумга эришади.

2. Агар x_0 нуктадан чапдан ўнгга ўтишда $f'(x)$ ўз ишорасини манфийдан мусбатга ўзгартирса, у ҳолда x_0 нуктада функция минимумга эришади.

Шундай қилиб, монотонлик ораликларини ва функция экстремумини топиш учун олдин функциянинг аниқланиш соҳасини критик нукталар ёрдамида монотонлик ораликларига бўлиш ва уларда ҳосила ишорасини текшириш керак.

Шундан кейин монотонлик ва экстремумнинг етарлилик шартларидан фойдаланиб, ўсиш ва камайиш ораликларини, максимум ва минимум нукталарини топиш ҳамда функциянинг бу нукталардаги қийматларини ҳисоблаб, натижаларни тегишли жадвалга ёзиш керак.

1-мисол. $y=x^3-3x^2$ функциянинг монотонлик ораликларини ва экстремумларини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг аниқланиш соҳаси — бутун Ox ўқи бўлиб, унинг ҳосиласи $y'=3x(x-2)$.

Ҳосилани нолга тенглаштириб, критик нукталарни топамиз: $x_1=0$ ва $x_2=2$. Ox ўқи бу нукталар билан учта ораликка бўлинади: $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ ва $(2; +\infty)$.

Бу ораликларда ҳосиланинг ишорасини текшириб, натижаларни қуйидаги жадвалга ёзамиз:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	0	—	0	+
y		max 0		min -4	

$$y_{\max}=f(0)=0^3-3\cdot 0^2=0; \quad y_{\min}=f(2)=2^3-3\cdot 2^2=-4.$$

4.1.3. $y=f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада ўзининг энг кичик ($m=y_{\text{кич}}$) ёки энг катта ($M=y_{\text{кат}}$) кийматларига (a, b) ораликда ётувчи критик нукталарида ёки $[a, b]$ кесманинг охирларида эришади.

2-мисол. $y=x^4-2x^2+3$ функциянинг $[-3; 2]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта кийматларини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг ҳосиласи: $y'=4(x^3-x)$. $y'=0$ шартдан $x_1=0$, $x_2=1$ ва $x_3=-1$

Критик нукталарнинг ҳаммаси $(-3; 2)$ оралikka тегишли. Берилган функциянинг бу нукталардаги ва кесманинг охирларидаги кийматларини ҳисоблаймиз:

$$y(0)=3, y(1)=2, y(-1)=2, y(-3)=66, y(2)=11.$$

Шундай қилиб, $[-3; 2]$ кесмада $y_{\text{кат}}=66$, $y_{\text{кич}}=2$.

1-дарсхона топшириги

1. Функцияларнинг монотонлик ораликларини топинг:

а) $y=2-3x+x^3$; б) $y=x(1+\sqrt{x})$;

в) $y=x-2\sin x$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

Ж: а) $(-\infty, -1)$ ва $(1, +\infty)$ да ўсади, $(-1, 1)$ да камаяди;

б) $[0, +\infty)$ да ўсувчи;

в) $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ да ўсувчи; $(0, \frac{\pi}{3})$ ва $(\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$ да камаювчи.

2. Функциянинг экстремумларини топинг:

а) $y=\frac{x^2}{x-2}$; б) $y=x+\frac{1}{x}$; в) $y=\frac{\ln x}{x}$.

Ж: а) $x=0$ да $y_{\text{max}}=0$; $x=4$ да $y_{\text{min}}=8$;

б) $x=1$ да $y_{\text{min}}=2$; $x=0$ да $y_{\text{max}}=-2$;

в) $x=e$ да $y_{\text{max}}=\frac{1}{e}$.

3. Ушбу

а) $y=\frac{x-1}{x+1}$ функциянинг $[0, 4]$ кесмадаги;

б) $y=\arctg \frac{1-x}{1+x}$ функциянинг $[0, 1]$ кесмадаги энг кичик ва энг

катта кийматларини топинг.

Ж: а) $M=0,6$, $m=-1$; б) $M=\frac{\pi}{4}$, $m=0$.

1-мустақил иш

1. Функцияларнинг монотонлик ораликлари ва экстремум нукталарини топинг:

а) $y=x\sqrt{1-x^2}$; б) $y=x-2\ln x$; в) $y=\ln x - \arctg x$.

Ж: а) $\left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ва $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ да камаювчи; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ да

ўсади; $y_{\min} = y\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $y_{\max} = y\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$;

б) $(0, 2)$ да камаювчи; $(2, +\infty)$ да ўсувчи; $y_{\min} = y(2) = 2(1 - \ln 2) \approx 0,61$;

в) $(0, +\infty)$ да ўсувчи.

2. Ушбу

а) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$ нинг $[0, 1]$ кесмадаги;

б) $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ нинг $[0, 1]$ кесмадаги;

в) $y = x + 2\sqrt{x}$ нинг $[0, 4]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта кийматларини топинг:

Ж: а) $y_{\max} = 1$, $y_{\min} = 0,6$;

б) $y_{\max} = 2$, $y_{\min} = \sqrt{2}$;

в) $y_{\max} = 8$, $y_{\min} = 0$.

2-§. Функциянинг кавариклиги ва ботиклиги. Эгилиш нукталари. Асимптоталар

4.2.1. $y=f(x)$ функциянинг графиги (a, b) ораликнинг исталган нуктасида ўтказилган уринмадан *пастда* ётса, у ҳолда функция графиги *қаварик* дейилади.

$y=f(x)$ функциянинг графиги (a, b) ораликнинг исталган нуктасида ўтказилган уринмадан *юқорида* ётса, у ҳолда функция графиги *ботик* дейилади.

Функция графигининг каварик қисмини ботик қисмидан ажратувчи $M_0(x_0, f(x_0))$ нукта графикнинг эгилиш нуктаси дейилади.

Функция графигининг каварик ёки ботик бўлишининг етарлилик шартлари. Агар (a, b) ораликда дифференциалланувчи $y=f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи манфий, яъни $f''(x) < 0$ бўлса, у ҳолда бу ораликда функция графиги каварик бўлади.

Агар (a, b) ораликда дифференциалланувчи $y=f(x)$ функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи мусбат, яъни $f''(x) > 0$ бўлса, у ҳолда бу ораликда функция графиги ботик бўлади.

Кавариклик оралиғини ботиклик оралиғидан ажратиб турувчи эгилиш нуктасидан ўтишда функциянинг иккинчи тартибли ҳосила-

си ишорасини ўзгартиради. Бундай нукталарда функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи ё нолга тенг, ёки мавжуд бўлмайди.

$f''(x)=0$ ёки $f''(x)$ мавжуд бўлмайдиган нукталар *иккинчи тур критик нукталар* дейилади.

Эгилиш нукталари мавжуд бўлишининг етарлилик шарти. Агар x_0 нукта $y=f(x)$ функция учун иккинчи тур критик нукта бўлса ва $f''(x)$ иккинчи тартибли ҳосила бу нуктадан ўтишда ишорасини ўзгартирса, у ҳолда бу функция графигининг x_0 абсциссали нуктаси эгилиш нуктаси бўлади.

Демак, функция графигининг кавариклик ва ботиклик ораликларини, эгилиш нукталарини топиш учун олдин функция аникланиш соҳасини иккинчи тур критик нукталар билан ораликларга бўлиш ва бу ораликларда иккинчи тартибли ҳосила ишорасини текшириш керак. Шундан кейин етарлилик шартларидан фойдаланиб, кавариклик, ботиклик ораликлари ва эгилиш нукталари аникланади.

1-мисол. $y=xe^x$ функциянинг кавариклик, ботиклик ораликларини ва эгилиш нукталарини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг аникланиш соҳаси бутун Ox ўқдан иборат. Биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни топамиз:

$$y' = e^x(1+x); \quad y'' = e^x(2+x).$$

Иккинчи тартибли ҳосилани нолга тенглаштириб, иккинчи тур критик нуктани топамиз: $x=-2$. Ox ўқ бу нукта билан иккита оралikka бўлинади: $(-\infty, -2)$, $(-2, +\infty)$.

Бу ораликларда иккинчи тартибли ҳосила ишорасини текшириб, ушбу жадвални тузамиз:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
y''	—	0	+
y		$-2e^{-2}$	

$x=-2$ да графикда ординатаси $y=-2e^{-2}$ бўлган эгилиш нуктасига эга бўламиз.

4.2.2. Агар $y=f(x)$ функция графигидаги нукта шу график бўйлаб чексиз узоклашганда ундан бирор тўғри чизиккача бўлган масофа нолга интилса, бу тўғри чизик $y=f(x)$ функция графигининг *асимптотаси* деб аталади.

Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ бўлса, $x=a$ тўғри чизик $y=f(x)$ функция графигининг *вертикал асимптотаси* дейилади.

Агар

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{ва} \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$$

ёки

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ ва } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx)$$

лимитлар мавжуд бўлса, y ҳолда $y = kx + b$ тўғри чизик $y = f(x)$ функциянинг *огма асимптотаси* дейилади.

Хусусан, $k = 0$ да *горизонтал асимптотага* эга бўламиз.

2-мисол. $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$ функциянинг асимптоталарини топинг.

Ечиш. $\lim_{x \rightarrow -2} y = \infty$ бўлгани учун $x = -2$ вертикал асимптота

бўлади. Огма асимптоталарни топамиз:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x + 2)} = 1, \\ b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 3}{x + 2} = -4. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, огма асимптотанинг тенгламаси $y = x - 4$ қўри-нишга эга.

2-дарсхона топшириғи

1. Куйидаги функцияларнинг кавариклик, ботиклик ораликларини ва эгилиш нукталарини топинг:

а) $y = x^5 + 5x - 6$; б) $y = (x - 4)^5 + 4x + 4$; в) $y = e^{\frac{x^2}{2}}$.

Ж: а) $(-\infty, 0)$ да каварик; $(0, +\infty)$ да ботик; эгилиш нуктаси: $M_0(0, 6)$;

б) $(-\infty, 4)$ да ботик; $(4, +\infty)$ да каварик; эгилиш нуктаси: $M_0(4, 20)$;

в) $(-\infty, -1)$ ва $(1, +\infty)$ да ботик; $(-1, 1)$ да каварик; эгилиш нукталари: $M_1(-1, e^{-\frac{1}{2}})$ ва $M_2(1, e^{\frac{1}{2}})$.

2. Куйидаги функцияларнинг асимптоталарини топинг:

а) $y = \sqrt[5]{\frac{x}{x-2}}$; б) $y = 3x + \operatorname{arctg} 5x$; в) $y = \frac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x$.

Ж: а) $x = 2$ ва $y = 1$;

б) $y = 3x + \frac{\pi}{2}$ ($x \rightarrow +\infty$ да) ва $y = 3x - \frac{\pi}{2}$ ($x \rightarrow -\infty$ да);

в) $x = 0$, $y = 2x$, $x = -1$ ($x \rightarrow -1 + 0$ да).

си ишорасини ўзгартиради. Бундай нукталарда функциянинг иккинчи тартибли ҳосиласи ё нолга тенг, ёки мавжуд бўлмайди.

$f''(x)=0$ ёки $f''(x)$ мавжуд бўлмайдиган нукталар *иккинчи тур критик нукталар* дейилади.

Эгилиш нукталари мавжуд бўлишининг етарлилик шарти. Агар x_0 нукта $y=f(x)$ функция учун иккинчи тур критик нукта бўлса ва $f''(x)$ иккинчи тартибли ҳосила бу нуктадан ўтишда ишорасини ўзгартирса, у ҳолда бу функция графигининг x_0 абсциссали нуктаси эгилиш нуктаси бўлади.

Демак, функция графигининг кавариклик ва ботиклик ораликларини, эгилиш нукталарини топиш учун олдин функция аникланиш соҳасини иккинчи тур критик нукталар билан ораликларга бўлиш ва бу ораликларда иккинчи тартибли ҳосила ишорасини текшириш керак. Шундан кейин етарлилик шартларидан фойдаланиб, кавариклик, ботиклик ораликлари ва эгилиш нукталари аникланади.

1-мисол. $y=xe^x$ функциянинг кавариклик, ботиклик ораликларини ва эгилиш нукталарини топинг.

Ечиш. Берилган функциянинг аникланиш соҳаси бутун Ох ўқдан иборат. Биринчи ва иккинчи тартибли ҳосилаларни топамиз:

$$y' = e^x(1+x); \quad y'' = e^x(2+x).$$

Иккинчи тартибли ҳосилани нолга тенглаштириб, иккинчи тур критик нуктани топамиз: $x=-2$. Ох ўқ бу нукта билан иккита оралikka бўлинади: $(-\infty; -2)$, $(-2; +\infty)$.

Бу ораликларда иккинчи тартибли ҳосила ишорасини текшириб, ушбу жадвални тузамиз:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y		$-2e^{-2}$	

$x=-2$ да графикда ординатаси $y=-2e^{-2}$ бўлган эгилиш нуктасига эга бўламиз.

4.2.2. Агар $y=f(x)$ функция графигидаги нукта шу график бўйлаб чексиз узоклашганда ундан бирор тўғри чизиккача бўлган масофа нолга интилса, бу тўғри чизик $y=f(x)$ функция графигининг *асимптотаси* деб аталади.

Агар $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ бўлса, $x=a$ тўғри чизик $y=f(x)$ функция графигининг *вертикал асимптотаси* дейилади.

Агар

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ ва } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$$

ёки

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ ва } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx)$$

лимитлар мавжуд бўлса, у ҳолда $y = kx + b$ тўғри чизик $y = f(x)$ функциянинг *оғма асимптотаси* дейилади.

Хусусан, $k = 0$ да *горизонтал асимптотага* эга бўламиз.

2-мисол. $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$ функциянинг асимптоталарини топинг.

Ечиш. $\lim_{x \rightarrow -2} y = \infty$ бўлгани учун $x = -2$ вертикал асимптота

бўлади. Оғма асимптоталарни топамиз:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x + 2)} = 1,$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x + 3}{x + 2} = -4. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, оғма асимптотанинг тенгламаси $y = x - 4$ қури-
нишга эга.

2-дарсхона топшириғи

1. Қуйидаги функцияларнинг кавариклик, ботиклик оралик-
ларини ва эгилиш нукталарини топинг:

а) $y = x^5 + 5x - 6$; б) $y = (x - 4)^5 + 4x + 4$; в) $y = e^{\frac{x^2}{2}}$.

Ж: а) $(-\infty, 0)$ да каварик; $(0, +\infty)$ да ботик; эгилиш
нуктаси: $M_0(0, 6)$;

б) $(-\infty, 4)$ да ботик; $(4, +\infty)$ да каварик; эгилиш нуктаси: $M_0(4, 20)$;

в) $(-\infty, -1)$ ва $(1, +\infty)$ да ботик; $(-1, 1)$ да каварик;
эгилиш нукталари: $M_1(-1, e^{-\frac{1}{2}})$ ва $M_2(1, e^{\frac{1}{2}})$.

2. Қуйидаги функцияларнинг асимптоталарини топинг:

а) $y = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$; б) $y = 3x + \arctg 5x$; в) $y = \frac{\ln(x+1)}{x^2} + 2x$.

Ж: а) $x = 2$ ва $y = 1$;

б) $y = 3x + \frac{\pi}{2}$ ($x \rightarrow +\infty$ да) ва $y = 3x - \frac{\pi}{2}$ ($x \rightarrow -\infty$ да);

в) $x = 0$, $y = 2x$, $x = -1$ ($x \rightarrow -1 + 0$ да).

2- мустақил иш

1. Қуйидаги функцияларнинг кавариклик, ботиклик ораликларини ва эгилиш нукталарини топинг:

а) $y = \ln(1+x^2)$; б) $y = \arctg x - x$.

Ж: а) $(-\infty, -1)$ ва $(1, +\infty)$ да каварик; $(-1, 1)$ да ботик; эгилиш нукталари: $M_1(1, \ln 2)$ ва $M_2(-1, \ln 2)$.

б) $(-\infty, 0)$ да каварик; $(0, +\infty)$ да ботик; эгилиш нуктаси: $O(0, 0)$.

2. Қуйидаги функцияларнинг асимптоталарини топинг:

а) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$; б) $y = \frac{x^2}{4(x+1)^2}$.

Ж: а) $x = \pm 1$, $y = \pm x$; б) $x = -1$, $y = \frac{1}{2}x + 1$.

3-§. Функцияларнинг графикларини чизиш

$y=f(x)$ функция графикни чизишда олдин унинг асосий хусусиятларини аниқлаб олиш керак. Бунинг учун қуйидагиларга амал қилинади:

1. Функциянинг аниқланиш соҳаси топилади.
2. Функциянинг жуфт-тоқлиги ва даврийлиги текширилади.
3. Функция графикнинг координата ўқлари билан кесишиш нукталари топилади.
4. Функциянинг ишораси ўзгармайдиган ораликлари топилади.
5. Функция графикнинг асимптоталари топилади.
6. Функциянинг ўсиш, камайиш ораликлари ва унинг экстремумлари топилади.
7. Эгри чизиқнинг кавариклик, ботиклик ораликлари ва унинг эгилиш нукталари топилади.

Мисол. $y = \frac{x^3+4}{x^2}$ функцияни текширинг ва унинг графикни чизинг.

Ечиш. 1. Функциянинг аниқланиш соҳаси:

$$D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

2. Функция жуфт ҳам, тоқ ҳам эмас, даврий ҳам эмас.
3. Графикнинг координата ўқлари билан кесишиш нукталарини топамиз:

Ох ўқ билан: $\frac{x^3+4}{x^2}=0$, бундан $x = -\sqrt[3]{4}$, яъни $A(-\sqrt[3]{4}, 0)$ —

Ох ўқ билан кесишиш нуктаси.

$x \neq 0$ бўлгани учун график Оу ўқ билан кесишмайди.

4. Функциянинг ишораси ўзгармайдиган ораликларини топамиз: $x < -\sqrt[3]{3}$ да функция манфий (график Ох ўқдан пастда

жойлашган); $x > -\sqrt[4]{3}$ да функция мусбат (функция графиги Ох ўқдан юкорида жойлашган).

5. Функциянинг асимптоталарини топамиз.

Оу ўқ, яъни $x=0$ тўғри чизик эгри чизикнинг вертикал асимптотасидир, чунки

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 4}{x^2} = \infty.$$

$y=kx+b$ оғма асимптотани аниқлаш учун k ва b ни топамиз:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0.$$

Демак $y=x$ чизик оғма асимптота экан.

6. Функциянинг ўсиш, камайиш оралиқларини ва унинг экстре-

мумларини биринчи тартибли ҳосила $y' = \frac{x^3 - 8}{x^2}$ дан фойдаланиб,

$y'=0$ ва $y'=\infty$ тенгламалардан эса критик нукталарни топамиз:

$x_1=2$ ва $x_2=0$ (функциянинг узилиш нуктаси).

Қуйидаги жадвални тузамиз:

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	2	$(2; +\infty)$
y'	+	∞	-		+
y				3	
		узилиш нуктаси		min	

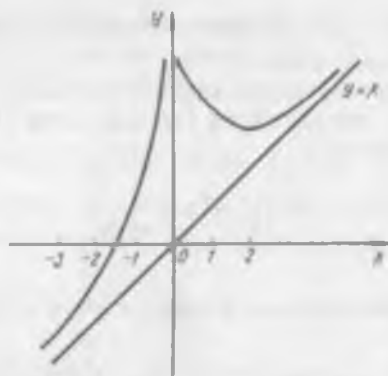
7. $y = \frac{24}{x}$ иккинчи тартибли ҳосиладан фойдаланиб, эгри

чизикнинг кавариклик, ботиклик оралиқларини ва эгилиш нукталарини топамиз. Иккинчи тартибли ҳосила ҳамма жойда мусбат, шу

боис функция графиги ботик, эгилиш нукталари йўқ.

$$y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

функция графигини чизамиз (21-шакл).



21- шакл

3- дарсхона топшириги

Функцияларни тўла текширинг ва уларнинг графикларини чизинг:

$$1. y = \frac{8}{x^2 - 4}. \quad 2. y = \sqrt[3]{(x+3)x^2}. \quad 3. y = x \cdot e^{-x}. \quad 4. y = \frac{x}{\ln x}.$$

3- мустақил иш

Функцияларни тўла текширинг ва уларнинг графикларини чизинг:

$$1. y = \frac{x}{x^2 - 4}. \quad 2. y = \ln(x^2 + 2x + 2). \quad 3. y = (3 - x)e^{2-x}.$$

6- назорат иши

1. Функцияни тўла текширинг ва графигини чизинг:

$$1.1. y = 3\left(\frac{x^4}{2} - x^2\right).$$

$$1.11. y = -4x + x^3.$$

$$1.2. y = x^3 - 9x^2 + 24x - 15.$$

$$1.12. y = (x+1)(x-2)^2.$$

$$1.3. y = x^5 - \frac{5}{3}x^3.$$

$$1.13. y = x^3 - 3x^2 + 4.$$

$$1.4. y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 8.$$

$$1.14. y = x^3 - 9x^2 + 24x - 7.$$

$$1.5. y = (x-3)^2(x-2).$$

$$1.15. y = x^4 - 8x^2 + 16.$$

$$1.6. y = x^4 - 8x^3 + 16x^2.$$

$$1.16. y = -4x^3 + 6x^2 - 3x - \frac{1}{2}.$$

$$1.7. y = x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}.$$

$$1.17. y = x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2.$$

$$1.8. y = \frac{1}{10}(2x^3 - 6x^2 - 18x + 15).$$

$$1.18. y = \frac{1}{10}(x^4 - 12x).$$

$$1.9. y = x^5 - x^3 - 2x.$$

$$1.19. y = x^4 - 2x^2 + 3.$$

$$1.10. y = 1 - x^2 - \frac{x^4}{8}.$$

$$1.20. y = (x+2)(x-1)^2.$$

$$1.21. y = x^3 - 3x^2 + 2.$$

$$1.22. y = 8 + 2x^2 - x^4.$$

$$1.23. y = \frac{1}{5}x^5 - 4x^2.$$

$$1.24. y = 2x^3 - 15x^2 + 36x.$$

$$1.25. y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 - \frac{9}{4}.$$

$$1.26. y = 2x^3 + 3x^2 - 1.$$

$$1.27. y = x^4 - 10x^2 + 9.$$

$$1.28. y = \frac{x^4}{2} - 4x^2.$$

$$1.29. y = 3x^4 + 4x^3 + 1.$$

$$1.30. y = (x+3)(x-2)^2.$$

2. Функцияни тўла текширинг ва графигини чизинг:

$$2.1. y = \frac{x-1}{x^2-2x}.$$

$$2.2. y = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}.$$

$$2.3. y = \frac{2x^2}{4x^2-1}.$$

$$2.4. y = \frac{2x+1}{x^2}.$$

$$2.5. y = \frac{1}{x^2-9}.$$

$$2.6. y = \frac{4x^2}{x^2-1}.$$

$$2.7. y = \frac{x^4}{x^3-1}.$$

$$2.8. y = \frac{x^2-x-1}{x^2-2x}.$$

$$2.9. y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}.$$

$$2.10. y = \frac{x^2+4x+1}{x^2}.$$

$$2.11. y = \frac{x^2+16}{4x}.$$

$$2.12. y = \frac{3x}{1+x^2}.$$

$$2.13. y = \frac{3-x^2}{x+2}.$$

$$2.14. y = \frac{5x^2}{x^2-25}.$$

$$2.15. y = \frac{x^2+1}{x}.$$

$$2.16. y = \frac{(x-1)^2}{x^2+1}.$$

$$2.17. y = \frac{x^3+1}{x^2}.$$

$$2.18. y = \frac{x}{3-x^2}.$$

$$2.19. y = \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}.$$

$$2.20. y = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

$$2.21. y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}.$$

$$2.22. y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

$$2.23. y = \frac{1}{1-x^2}.$$

$$2.24. y = \frac{2}{x^2+x+1}.$$

$$2.25. y = \frac{x^3-1}{4x^2}.$$

$$2.26. y = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2.$$

$$2.27. y = \frac{x^3+16}{x}.$$

$$2.28. y = \frac{4x}{(x+1)^2}.$$

$$2.29. y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}.$$

$$2.30. y = \frac{4}{x^2+2x-3}.$$

3. Функцияни тўла текширинг ва графигини чизинг:

$$3.1. y = \frac{e^{x-1}}{x-1}$$

$$3.3. y = (x-2)e^{3-x}$$

$$3.5. y = \frac{1}{e^x - 1}$$

$$3.7. y = e^{\frac{1}{x+2}}$$

$$3.9. y = x^3 e^{-x}$$

$$3.11. y = \frac{e^{2-x}}{3-x}$$

$$3.13. y = (4-x)e^{x-3}$$

$$3.15. y = \frac{1}{e^{2x} - 1}$$

$$3.17. y = e^{\frac{1}{x-3}}$$

$$3.19. y = x^2 e^{\frac{x}{2}}$$

$$3.21. y = \frac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$$

$$3.23. y = -(2x+3)e^{2(x+2)}$$

$$3.25. y = \frac{1}{e^{2x} - 1}$$

$$3.27. y = e^{\frac{1}{x+4}}$$

$$3.29. y = x^3 e^{x+1}$$

$$3.2. y = \ln \frac{x}{x-2} - 2$$

$$3.4. y = \ln(2x^2 + 3)$$

$$3.6. y = x - \ln(x+1)$$

$$3.8. y = x \ln x$$

$$3.10. y = \ln(x^2 - 4)$$

$$3.12. y = 2 \ln \frac{x+3}{x} - 3$$

$$3.14. y = \ln(x^2 - 2x + 6)$$

$$3.16. y = x - \ln x$$

$$3.18. y = 1 - \ln^3 x$$

$$3.20. y = \ln(x^2 - 4) + x$$

$$3.22. y = \ln \frac{x}{x+5} - 1$$

$$3.24. y = -x \ln^2 x$$

$$3.26. y = x - \ln(1 + x^2)$$

$$3.28. y = x^2 \ln x$$

$$3.30. y = x^2 - 2 \ln x$$

ҲАҚИҚИЙ ЎЗГАРУВЧИНИНГ ВЕКТОР ВА КОМПЛЕКС ФУНКЦИЯЛАРИ

1- §. Скаляр аргументнинг вектор функциясини дифференциаллаш

5.1.1. Агар $t \in D \subset R$ ўзгарувчининг ҳар бир қийматига маълум $\vec{a}$ вектор тўғри келса, у ҳолда бу вектор t скаляр аргументнинг *вектор функцияси* дейилади ва бундай белгиланади:

$$\vec{a} = \vec{a}(t).$$

$\vec{a} = \vec{a}(t)$ вектор функциянинг берилиши учта скаляр функция: $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$ — $\vec{a}$ вектор координаталарининг берилишига тенг қўчили:

$$\vec{a} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$$

ёки қисқача: $\vec{a} = \{a_x(t), a_y(t), a_z(t)\}$.

Агар ўзгарувчи a векторнинг боши координаталар боши билан устма-уст тушса, яъни у $M(x, y, z)$ нуктанинг радиус-вектори бўлса, у ҳолда вектор функция бундай белгиланади:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

$\vec{r}$ векторнинг охири фазода чизадиган L чизик $\vec{r} = \vec{r}(t)$ вектор функциянинг *годографи* дейилади. Координаталар боши *годограф қутби* дейилади.

Агар $\vec{r}$ векторнинг модулигина ўзгарса-ю, йўналиши ўзгаришсиз қолса, *годограф қутбдан чиқадиган нур* бўлади.

Агар $\vec{r}$ векторнинг модули ўзгаришсиз ($|\vec{r}| = \text{const}$) қолса-ю, унинг йўналишигина ўзгарса, у ҳолда маркази қутбда, радиуси эса $|\vec{r}|$ га тенг бўлган сферада ётувчи чизик *годограф* бўлади.

Фазодаги ҳамма чизикни бирор векторнинг *годографи* дейиш мумкин.

Годографнинг параметрик тенгламалари ушбу кўринишда ёзилади:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

бу ерда t ўзгарувчи *параметр* дейилади.

5.1.2. $\vec{a} = \vec{a}(t)$ вектор функциянинг t параметр бўйича ҳосиласи янги вектор функция бўлиб, ушбу тенглик билан аниқланади:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t}.$$

$$\vec{a} = \vec{a}(t) = \{a_x(t), a_y(t), a_z(t)\}.$$

Вектор функциянинг ҳосиласи ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k}.$$

Вектор функцияни дифференциаллашнинг асосий қоидаларини келтирамиз (бунда $\vec{a} = \vec{a}(t)$, $\vec{b} = \vec{b}(t)$):

$$1. \frac{d}{dt} (\vec{a} \pm \vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt} \pm \frac{d\vec{b}}{dt}.$$

$$2. \frac{d\vec{c}}{dt} = 0, \text{ бу ерда } \vec{c} \text{ — ўзгармас вектор.}$$

$$3. \frac{d}{dt} (\alpha \vec{a}) = \alpha \frac{d\vec{a}}{dt}, \text{ бу ерда } \alpha \text{ — ўзгармас сон.}$$

$$4. \frac{d}{dt} (\varphi \vec{a}) = \vec{a} \frac{d\varphi}{dt} + \varphi \frac{d\vec{a}}{dt}, \text{ бу ерда } \varphi = \varphi(t) \text{ — } t \text{ нинг скаляр функцияси.}$$

$$5. \frac{d}{dt} (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \vec{b}.$$

$$6. \frac{d}{dt} (\vec{a} \times \vec{b}) = \left(\frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} \right) + \left(\vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt} \right).$$

$$7. \frac{d}{dt} \vec{a}(\varphi(t)) = \frac{d\vec{a}}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt}, \text{ бу ерда } \varphi = \varphi(t) \text{ — } t \text{ нинг скаляр функцияси.}$$

Агар $\vec{r} = \vec{r}(t) = \{x(t), y(t), z(t)\}$ бўлса, у ҳолда $\frac{d\vec{r}}{dt}$ ҳосила вектор бўлиб, $\vec{r}(t)$ вектор функциянинг годографига ўтказилган уринма бўйлаб t параметрнинг ўсиши тарафига йўналган бўлади.

1-мисол. $\vec{r} = (t^2 - 1)\vec{i} + (t + 1)\vec{j} + t^3\vec{k}$ вектор функциянинг $t = 1$ даги бирлик уринма векторини топинг.

Ечиш. $\vec{r}$ векторнинг годографига уринма бирлик векторни топамиз:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\vec{i} + \vec{j} + 3t^2\vec{k}.$$

Бу векторнинг модулини ҳисоблаймиз:

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{4t^2 + 1 + 9t^4}.$$

$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$ нинг $t=1$ даги қиймати $\sqrt{14}$ га тенг, $\frac{d\vec{r}}{dt} \Big|_{t=1} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

Шундай қилиб, изланаётган бирлик вектор бундай ёзилади:

$$\frac{1}{\sqrt{14}} (2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}).$$

2-мисол. $\vec{r}(t) = \vec{i}\cos t + \vec{j}\sin t + \vec{k}$ ва $\frac{d\vec{r}}{dt}$ векторлар ўзаро перпендикуляр векторлар эканлигини кўрсатинг.

Ечиш. Берилган скаляр аргументли функция ҳосиласини топамиз: $\frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{i}\sin t + \vec{j}\cos t$. Энди $\vec{r}(t)$ ва $\frac{d\vec{r}}{dt}$ векторларнинг $\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$ — скаляр кўпайтмасини ҳисоблаймиз.

$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\cos t \cdot \sin t + \sin t \cdot \cos t = 0$. Демак, $\vec{r}$ ва $\frac{d\vec{r}}{dt}$ векторлар ўзаро перпендикуляр экан.

1-дарсхона топшириғи

1. Вектор функцияларнинг ҳосилаларини топинг:

а) $\vec{r} = \sin t \cdot \vec{i} + \cos^2 t \cdot \vec{j} + \sin t \cos t \cdot \vec{k}$;

б) $\vec{r} = (t + \cos t)\vec{i} + t\vec{j} + \sin t \cdot \vec{k}$;

в) $\vec{r} = e^t \vec{i} + \cos t \cdot \vec{j} + (t^2 + 1)\vec{k}$.

Ж: а) $\frac{d\vec{r}}{dt} = \cos t \vec{i} - \sin 2t \vec{j} + \cos 2t \vec{k}$;

б) $\frac{d\vec{r}}{dt} = (1 - \sin t)\vec{i} + \vec{j} + \cos t \cdot \vec{k}$;

в) $\frac{d\vec{r}}{dt} = e^t \vec{i} - \sin t \vec{j} + 2t \vec{k}$.

2. Ҳаракат қилаётган моддий нуктанинг t вақтдаги радиус-вектори $\vec{r}(t) = a(t - \sin t)\vec{i} + a(1 - \cos t)\vec{j}$ тенглама билан берилган. $t = \frac{\pi}{2}$ ва $t = \pi$ лар учун $\frac{d\vec{r}}{dt}$ векторини топинг.

Ж: $a(\vec{i} + \vec{j})$; $2a\vec{i}$.

3. $\vec{r} = e^{2t}\vec{i} - (t+8)^{\frac{4}{3}}\vec{j}$ вектор функция годографига $t=0$ даги бирлик уринма векторни топинг.

Ж: $0,6 \vec{i} - 0,8 \vec{j}$.

1. Вектор функциянинг ҳосиласини топинг:

$$\vec{r} = i \cosh^2 t + \vec{j} \sinh t \cosh t + \vec{k} \sinh^2 t.$$

Ж: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \sinh 2t \vec{i} + \vec{j} \cosh t + \vec{k} \sinh 2t.$

2. Агар $\vec{r} = \vec{i} \sinh t + \vec{j} \cosh t + \vec{k} \sqrt{\cosh^2 t - 3 \sinh^2 t}$ бўлса, $\frac{d(\vec{r}^2)}{dt}$ ни топинг.

Ж: 0.

3. Агар $\vec{r}_1 = \vec{i}t + \vec{j}t^2 + \vec{k}t^3$, $\vec{r}_2 = \vec{i}t^2 + \vec{j}t^3 + \vec{k}t$ бўлса, $\frac{d(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{dt}$ ни топинг.

Ж: $\frac{d(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{dt} = 3(t^2 - 2t^5) \vec{i} + (5t^4 - 2t) \vec{j}.$

4. $\vec{r} = 2t \cdot \vec{i} + \vec{j} \ln t + \vec{k} \cdot t^2$ вектор функциянинг $t=1$ даги уринма векторининг йўналтирувчи косинусларини топинг:

Ж: $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}.$

2- §. Скаляр аргументли вектор функция ҳосиласининг татбики

5.2.1. Кинематикада моддий нукта ҳаракатини ўрганишда унинг $\vec{r}$ радиус-вектори t вақтнинг функцияси бўлиб, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ тенглама ҳаракат тенгламаси дейилади, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ вектор-функциянинг годографи ҳаракат йўлининг шаклини (траекториясини) аниқлайди.

Агар t скаляр аргумент вақт деб қаралса, у ҳолда $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ — $\vec{r}$ вектор охирининг тезлик вектори, $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{w}$ эса тезланиш вектори дейилади.

1- мисол. Моддий нуктанинг ҳаракат тенгламаси $\vec{r} = 2(t - \sin t) \vec{i} + 2(1 - \cos t) \vec{j}$ кўринишда берилган. Ихтиёрий вақтдаги тезлик ва тезланишни топинг.

Ечиш. $\vec{v}$ тезлик ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2(1 - \cos t) \vec{i} + 2 \sin t \cdot \vec{j}.$$

Тезланиш эса,

$$\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \sin t \vec{i} + 2 \cos t \vec{j}.$$

5.2.2. $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ фазовий эгри чизикнинг t_0 параметрга мос келадиган $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктасидаги уринма тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$\frac{x-x_0}{x_0} = \frac{y-y_0}{y_0} = \frac{z-z_0}{z_0},$$

бу ерда $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$,

$$\dot{x}_0 = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0}, \quad \dot{y}_0 = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0}, \quad \dot{z}_0 = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=t_0};$$

x, y, z — уринма нуктасининг ўзгарувчи координаталари.

Уриниш нуктасидан ўтиб, уринмага перпендикуляр бўлган текислик *нормал текислик* дейилади.

Эгри чизикнинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктасидаги нормал текислик тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$\dot{x}_0(x-x_0) + \dot{y}_0(y-y_0) + \dot{z}_0(z-z_0) = 0.$$

2-мисол. Параметр $t = \frac{\pi}{4}$ га тенг бўлганда $x = a \sin^2 t$, $y = b \sin t \cos t$, $z = c \cos^2 t$ фазовий эгри чизикка ўтказилган уринма ва нормал текисликларнинг тенгламаларини тузинг.

Ечиш. Тегишли ҳосилаларни топамиз:

$$\dot{x} = a \cdot \sin 2t, \quad \dot{y} = b \cos 2t, \quad \dot{z} = -c \sin 2t.$$

$t = \frac{\pi}{4}$ нуктада $x_0 = \frac{a}{2}$, $y_0 = \frac{b}{2}$, $z_0 = \frac{c}{2}$; $\dot{x}_0 = a$, $\dot{y}_0 = 0$; $\dot{z}_0 = -c$ бўлади, демак, уринманинг тенгламаси:

$$\frac{x - \frac{a}{2}}{a} = \frac{y - \frac{b}{2}}{0} = \frac{z - \frac{c}{2}}{-c},$$

нормал текислик тенгламаси:

$$a\left(x - \frac{a}{2}\right) - c\left(z - \frac{c}{2}\right) = 0$$

ёки

$$ax - cz - \frac{a^2 - c^2}{2} = 0.$$

Шундай қилиб, уринма Oy ўқка перпендикуляр, нормал текислик эса Oy ўқка параллел экан.

1- мустақил иш

1. Вектор функциянинг ҳосиласини топинг:

$$\vec{r} = i \cosh^2 t + \vec{j} \sinh t \cosh t + \vec{k} \sinh^2 t.$$

Ж: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \sinh 2t \vec{i} + \vec{j} \cosh t + \vec{k} \sinh 2t.$

2. Агар $\vec{r} = i \sinh t + \vec{j} \cosh t + \vec{k} \sqrt{\cosh^2 t - 3 \sinh^2 t}$ бўлса, $\frac{d(\vec{r}^2)}{dt}$ ни топинг.

Ж: 0.

3. Агар $\vec{r}_1 = i t^2 + \vec{j} t^2 + \vec{k} t^3$, $\vec{r}_2 = i t^2 + \vec{j} t^3 + \vec{k} t$ бўлса, $\frac{d(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{dt}$ ни топинг.

Ж: $\frac{d(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{dt} = 3(t^2 - 2t^5) \vec{i} + (5t^4 - 2t) \vec{j}.$

4. $\vec{r} = 2t \cdot \vec{i} + \vec{j} \ln t + \vec{k} \cdot t^2$ вектор функциянинг $t=1$ даги уринма векторининг йўналтирувчи косинусларини топинг:

Ж: $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}.$

2- §. Скаляр аргументли вектор функция ҳосиласининг татбиқи

5.2.1. Кинематикада моддий нукта ҳаракатини ўрганишда унинг $\vec{r}$ радиус-вектори t вақтнинг функцияси бўлиб, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ тенглама ҳаракат тенгламаси дейилади, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ вектор-функциянинг годографи ҳаракат йўлининг шаклини (траекториясини) аниқлайди.

Агар t скаляр аргумент вақт деб қаралса, у ҳолда $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ — $\vec{r}$ вектор охирининг тезлик вектори, $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{w}$ эса тезланиш вектори дейилади.

1- мисол. Моддий нуктанинг ҳаракат тенгламаси $\vec{r} = 2(t - \sin t) \vec{i} + 2(1 - \cos t) \vec{j}$ кўринишда берилган. Ихтиёрий вақтдаги тезлик ва тезланишни топинг.

Ечиш. $\vec{v}$ тезлик ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2(1 - \cos t) \vec{i} + 2 \sin t \cdot \vec{j}.$$

Тезланиш эса,

$$\vec{w} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \sin t \vec{i} + 2 \cos t \vec{j}.$$

5.2.2. $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ фазовий эгри чизикнинг t_0 параметрга мос келадиган $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктасидаги уринма тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$\frac{x-x_0}{x_0} = \frac{y-y_0}{y_0} = \frac{z-z_0}{z_0},$$

бу ерда $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, $z_0 = z(t_0)$.

$$\dot{x}_0 = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=t_0}, \quad \dot{y}_0 = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0}, \quad \dot{z}_0 = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=t_0},$$

x , y , z — уринма нуктасининг ўзгарувчи координаталари.

Уриниш нуктасидан ўтиб, уринмага перпендикуляр бўлган текислик *нормал текислик* дейилади.

Эгри чизикнинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктасидаги нормал текислик тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$x_0(x-x_0) + y_0(y-y_0) + z_0(z-z_0) = 0.$$

2-мисол. Параметр $t = \frac{\pi}{4}$ га тенг бўлганда $x = a \sin^2 t$, $y = b \sin t \cos t$, $z = c \cos^2 t$ фазовий эгри чизикка ўтказилган уринма ва нормал текисликларнинг тенгламаларини тузинг.

Ечиш. Тегишли ҳосилаларни топамиз:

$$\dot{x} = a \cdot \sin 2t, \quad \dot{y} = b \cos 2t, \quad \dot{z} = -c \sin 2t.$$

$t = \frac{\pi}{4}$ нуктада $x_0 = \frac{a}{2}$, $y_0 = \frac{b}{2}$, $z_0 = \frac{c}{2}$; $\dot{x}_0 = a$, $\dot{y}_0 = 0$, $\dot{z}_0 = -c$ бўлади, демак, уринманинг тенгламаси:

$$\frac{x - \frac{a}{2}}{a} = \frac{y - \frac{b}{2}}{0} = \frac{z - \frac{c}{2}}{-c},$$

нормал текислик тенгламаси:

$$a\left(x - \frac{a}{2}\right) - c\left(z - \frac{c}{2}\right) = 0$$

ёки

$$ax - cz - \frac{a^2 - c^2}{2} = 0.$$

Шундай қилиб, уринма Oy ўқка перпендикуляр, нормал текислик эса Oy ўқка параллел экан.

2- дарсхона топириғи

1. Ҳаракатдаги моддий нуктанинг радиус-вектори $\vec{r}=4t\vec{i}-3t\vec{j}$ тенглама билан берилган. Ҳаракат тезлиги ва тезланишини топинг.

$$\text{Ж: } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 4\vec{i} - 3\vec{j}; \quad \vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}.$$

2. Моддий нуктанинг ҳаракат тенгламаси $\vec{r}=3t\vec{i}+(4t-t^2)\vec{j}$ кўринишда берилган. Унинг тезлиги ва тезланишини топинг.

$$\text{Ж: } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 3\vec{i} + 2(2-t)\vec{j}; \quad \vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -2\vec{j}.$$

3. $\vec{r}=a\cos t\vec{i}+b\sin t\vec{j}$ ҳаракат тенгламаси берилган. Ҳаракат тезлиги ва тезланишини топинг.

$$\text{Ж: } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\sin t \cdot \vec{i} + b\cos t \cdot \vec{j};$$

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -a\cos t \vec{i} - b\sin t \cdot \vec{j}.$$

4. Берилган нуктадан ўтувчи уринма ва нормал текислик тенгламаларини тузинг:

а) $x=4\sin^2 t, y=2\sin 2t, z=2\cos^2 t, t=0$ да;

б) $x=\frac{1}{2}t^2, y=\frac{1}{3}t^3, z=\frac{1}{4}t^4, t=2$ да;

в) $x=a \cdot \operatorname{ch} t, y=a \cdot \operatorname{sh} t, z=at, t=0$ да.

Ж: а) $\frac{x}{0} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{0}$ (уринма),

$y=0$ (нормал текислик);

б) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-\frac{8}{3}}{2} = \frac{z-4}{4}, \quad 3x+6y+12z-70=0;$

в) $\frac{x-a}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1},$

$y+z=0.$

2- мустақил иш

1. $\vec{r}=2\cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{k}$ ҳаракат тенгламаси берилган. Ҳаракат тезлиги ва тезланишини аниқланг.

Ж: $\vec{v} = -2\sin t \cdot \vec{i} + \cos t \cdot \vec{k},$

$\vec{w} = -2\cos t \cdot \vec{i} - \sin t \cdot \vec{k}.$

2. Ҳаракат тенгламаси берилган: $\vec{r}=(2t^2-3)\vec{i}-3t\vec{j}+(4t^2-5)\vec{k}$. Ҳаракат тезлиги ва тезланишини аниқланг.

Ж: $\vec{v}=4t\vec{i}-6t\vec{j}+8t\vec{k};$

$\vec{w}=4\vec{i}-6\vec{j}+8\vec{k}.$

3. Моддий нукта харакатининг $\vec{r} = \cos^3 t \cdot \vec{i} + \sin^2 t \cdot \vec{j}$ тенгламасини билган ҳолда, унинг параметрнинг $t = \frac{\pi}{6}$ ва $t = \frac{\pi}{4}$ кийматлардаги тезлик ва тезланиш векторларини топинг.

Ж: $t = \frac{\pi}{6}$ да: $\vec{v} = -\frac{9}{8}\vec{i} + \frac{3\sqrt{3}}{8}\vec{j}$,

$$\vec{w} = -\frac{3\sqrt{3}}{8}\vec{i} + \frac{15}{6}\vec{j};$$

$t = \frac{\pi}{4}$ да: $\vec{v} = -\frac{3\sqrt{2}}{4}\vec{i} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\vec{j}$,

$$\vec{w} = \frac{3\sqrt{2}}{4}\vec{i} + \frac{3\sqrt{2}}{4}\vec{j}.$$

4. Эгри чизикка берилган нуктада ўтказилган уринма ва нормал текислик тенгламаларини тузинг.

а) $x = \cos^2 \frac{t}{2}$, $y = \sin t$, $z = \sin \frac{t}{2}$, $t = \pi$ да;

б) $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $t = 1$ да.

Ж: а) $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$; $y=0$;

б) $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$, $x+2y+3z-6=0$.

6- намунавий ҳисоб топшириқлари

1. Биринчи тартибли ҳосилани топинг:

1.1. $y = \sqrt[4]{x^2+3x} - \sqrt[5]{(6x-1)^2}$.

1.2. $y = \frac{2x}{\sqrt{1+x}} - 4\sqrt{1+x}$.

1.3. $y = \sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^3}}$.

1.4. $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$.

1.5. $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}$.

1.6. $y = x\sqrt{1+x^2}$.

1.7. $y = 5\sqrt[5]{4x+3} - \frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

1.8. $y = 3\sqrt[3]{x^5+5x^4} - \frac{5}{x}$.

1.9. $y = \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}$.

1.10. $y = x + \sqrt[5]{\frac{1+x^5}{1-x^5}}$.

1.11. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1.12. $y = \frac{x-1}{x+1} \sqrt{x^2-6}$.

1.13. $y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

1.14. $y = \frac{2}{\sqrt{x^3-x+1}}$.

1.15. $y = \frac{5}{\sqrt[4]{(2-x^2)^3}}$.

1.16. $y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+4}$.

1.17. $y = 2\sqrt[3]{(2-x^3)^2}$.

$$1.18. y = \sqrt[3]{x\sqrt{x^2+1}}.$$

$$1.19. y = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}.$$

$$1.20. y = \sqrt[4]{\frac{1+x^4}{1-x^4}}.$$

$$1.21. y = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}.$$

$$1.22. y = \frac{1}{\sqrt[5]{9x+4}} + \frac{12}{\sqrt[4]{x^3+10}}.$$

$$1.23. y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$1.24. y = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}.$$

$$1.25. y = \left(\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)^2.$$

$$1.26. y = \sqrt[3]{(2x-3)(3-x)^2}.$$

$$1.27. y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x+1}.$$

$$1.28. y = \left(\frac{x}{3-4x}\right)^3.$$

$$1.29. y = (\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right).$$

$$1.30. y = \frac{9}{\sqrt{x^2-4x-5}}.$$

2. Биринчи тартибли y' ҳосилани топинг:

$$2.1. y = \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}.$$

$$2.2. y = \sin^3 2x.$$

$$2.3. y = e^{1+\ln^2 x}.$$

$$2.4. y = \operatorname{tg} \ln \sqrt{x}.$$

$$2.5. y = \sin \sqrt{1+x^2}.$$

$$2.6. y = \cos \ln^2 x.$$

$$2.7. y = \frac{1+\sin 3x}{1-\sin 3x}.$$

$$2.8. y = \sqrt{1+\ln^2 x}.$$

$$2.9. y = x \arcsin \frac{2x+1}{3}.$$

$$2.10. y = e^{-x^2} \cos^3(2x+3).$$

$$2.11. y = \frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}.$$

$$2.12. y = \sin^2 3x.$$

$$2.13. y = \sqrt{1-\ln^3 x}.$$

$$2.14. y = \frac{4 \ln x}{1-\ln x}.$$

$$2.15. y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x.$$

$$2.16. y = \ln \sqrt{\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}} - x.$$

$$2.17. y = \ln \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\cos x}}.$$

$$2.18. y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}).$$

$$2.19. y = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$2.20. y = \operatorname{tg}^2(x^3+1)$$

$$2.21. y = \sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 3x}.$$

$$2.22. y = 5^{\frac{1}{\sin^2 x}}.$$

$$2.23. y = \sin^6 10x + \cos^6 10x.$$

$$2.24. y = \sqrt[3]{\operatorname{tg} 6x+1}.$$

$$2.25. y = e^{\sin x - \cos x} \cdot (\sin x + \cos x).$$

$$2.26. y = \frac{\sin^2 \frac{x}{4}}{1 + \cos^2 \frac{x}{4}}.$$

$$2.27. y = e^{2x}(3\sin 2x - \cos 2x).$$

$$2.29. y = \frac{1}{10} \cdot \frac{1 + \lg 5x}{1 - \lg 5x}.$$

$$2.28. y = \sqrt{1 + \sin 4x} - \sqrt{1 - \sin 4x}.$$

$$2.30. y = \frac{1}{\sin^2 10x}.$$

3. Биринчи тартибли y' ҳосилани топинг:

$$3.1. y = \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x}.$$

$$3.17. y = \frac{4 \ln x}{1 - \ln x}.$$

$$3.2. y = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}.$$

$$3.18. y = 7^{x^2 + 2x}.$$

$$3.3. y = \operatorname{arccotg} \frac{1}{x}.$$

$$3.19. y = e^{-x} \cdot \ln x.$$

$$3.4. y = 3^{\cos^2 x}.$$

$$3.20. y = \frac{x}{\sqrt{8 - x^2}}.$$

$$3.5. y = \ln \operatorname{ctg} \sqrt[3]{x}.$$

$$3.21. y = \frac{2}{5} \ln^2(3 \operatorname{ctg} 5x + 2).$$

$$3.6. y = (e^{\sin x} - 1)^2.$$

$$3.22. y = \ln^5 \sqrt{\frac{10}{e^{5x} - e^{-5x}}}.$$

$$3.7. y = x^3 \sqrt{\frac{2}{1+x}}.$$

$$3.23. y = \frac{1}{3} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 2x}}.$$

$$3.8. y = e^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$3.24. y = \ln \sqrt{1 + e^{2x} + e^{4x}}.$$

$$3.9. y = e^{-\cos^4 5x}.$$

$$3.10. y = x \cdot \operatorname{arctg}^3 5x + \ln \operatorname{tg} x.$$

$$3.25. y = \ln^3 \sqrt{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}.$$

$$3.11. y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

$$3.26. y = \ln(\sqrt{2x+1} - \sqrt{2x}).$$

$$3.12. y = x^2 e^{-2x}.$$

$$3.27. y = (1 + \ln \sin 2x)^2.$$

$$3.13. y = 2^{\frac{1}{x}}.$$

$$3.28. y = \ln \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}.$$

$$3.14. y = x \cdot \ln^2 x.$$

$$3.29. y = \ln^3(1 + e^{\frac{x}{2}}).$$

$$3.15. y = 3e^{\sin^3 x}.$$

$$3.30. y = \ln \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

$$3.16. y = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

4. Биринчи тартибли y' ҳосилани топинг:

$$4.1. y = x^{\frac{2}{x}}.$$

$$4.5. y = x^{\frac{1}{x^2}}.$$

$$4.2. y = x^{e^x}.$$

$$4.6. y = (\ln x)^x.$$

$$4.3. y = x^{\arcsin x}.$$

$$4.7. y = 2x^{\sqrt{x}}.$$

$$4.4. y = (\cos x)^{\cos x}.$$

$$4.8. y = (\cos x)^{x^2}.$$

$$4.9. y = (\sin x)^{\cos x}.$$

$$4.10. y = (\arctg 2x)^{\sin x}.$$

$$4.11. y = x^{\arccos x}.$$

$$4.12. y = x^{\lg x}.$$

$$4.13. y = (\ln(5x-4))^{\arctg x}.$$

$$4.14. y = (\sin(7x+4))^{\arccos x}.$$

$$4.15. y = (\arcsin 2x)^{\operatorname{ctg}(x+1)}.$$

$$4.16. y = (\sin 3x)^{\arccos x}.$$

$$4.17. y = (\sqrt{3x+2})^{\arctg 3x}.$$

$$4.18. y = (\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}.$$

$$4.19. y = (\operatorname{ctg} 2x^3)^{\sin \sqrt{x}}.$$

$$4.20. y = (\cos(x+5))^{\arcsin 3x}.$$

$$4.21. y = (\operatorname{tg} 3x^4)^{\sqrt{x+3}}.$$

$$4.22. y = (\ln(x+3))^{\sin \sqrt{x}}.$$

$$4.23. y = (\arctg 2x)^{\sin x}.$$

$$4.24. y = (\ln(7x+4))^{\lg x}.$$

$$4.25. y = (\ln(7x-5))^{\arctg 2x}.$$

$$4.26. y = (\arcsin(2+x))^{\ln(x+3)}.$$

$$4.27. y = (\arccos(x+2))^{\lg 3x}.$$

$$4.28. y = (\arcsin 5x)^{\lg \sqrt{x}}.$$

$$4.29. y = (\operatorname{ctg}(7x+4))^{\sqrt{4+x}}.$$

$$4.30. y = (\operatorname{ctg} 3x^4)^{\sqrt{x-3}}.$$

5. Ошкормас ҳолда куйидаги тенгламалар билан берилган функцияларнинг биринчи тартибли y' ҳосиласини топинг:

$$5.1. x \sin 2y - y \cos 2x = 10.$$

$$5.2. (e^y - x)^2 = x^2 + 4.$$

$$5.3. x \cdot \operatorname{tg} y - x^2 + y^2 = 4.$$

$$5.4. y - x^2 = \arctg y.$$

$$5.5. e^{xy} - x^2 + y^3 = 0.$$

$$5.6. y = x + x \sin y.$$

$$5.7. e^{2y} - e^{-3x} + \frac{y}{x} = 1.$$

$$5.8. e^y + 3x^2 e^{-y} = 4x.$$

$$5.9. \ln(x^2 + y^2) + \arctg \frac{x}{y} = 0.$$

$$5.10. x \sin y - y \cos x = 0.$$

$$5.11. 3^{x+y} - xy \ln 3 = 15.$$

$$5.12. e^{xy} - x^2 + y^2 = 0.$$

$$5.13. y \sin x + \cos(x-y) = \cos y.$$

$$5.14. \cos(x-y) - 2x + 4y = 0.$$

$$5.15. x e^y + y e^x = xy.$$

$$5.16. \cos xy = \frac{y}{x}.$$

$$5.17. xy + \ln y - 2 \ln x = 0.$$

$$5.18. e^{x+y} = \sin \frac{y}{x}.$$

$$5.19. (x+y)^2 - (x-2y)^3 = 0.$$

$$5.20. y \ln x - x \ln y = x + y.$$

$$5.21. y^3 - 3y + 6x = 0.$$

$$5.22. \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5y.$$

$$5.23. x^2 + y^3 - 10x + y = 0.$$

$$5.24. x^2 = 6y - y^3.$$

$$5.25. x^2 - 2xy + y^3 = 1.$$

$$5.26. \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 + \frac{1}{4}y^2.$$

$$5.27. y^3 - 3x^3y + 9 = 0.$$

$$5.28. y \sin x = \cos y.$$

$$5.29. y^4 - 4x^2y + 9 = 0.$$

$$5.30. \sqrt{x^3} + \sqrt{y^3} = \sqrt[3]{4}.$$

6. Берилган функциянинг биринчи тартибли y' ва иккинчи тартибли y'' ҳосилаларини топинг:

$$6.1. y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

$$6.2. y = \frac{x}{x^2-1}$$

$$6.3. y = x^3 \ln x$$

$$6.4. y = \arctg \frac{2x}{1-x^2}$$

$$6.5. y = \text{Intg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$$

$$6.6. y = x e^{x^2}$$

$$6.7. y = x \cdot \arctg x$$

$$6.8. y = x - \arctg x$$

$$6.9. y = \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x$$

$$6.10. y = \arctg x$$

$$6.11. y = \frac{x-1}{x+1} e^{-x}$$

$$6.12. y = \arctg x^2$$

$$6.13. y = x^2 \ln x$$

$$6.14. y = \sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$$

$$6.15. y = \ln \text{ctg} 4x$$

$$6.16. y = \sqrt[3]{(1-x)^2}$$

$$6.17. y = \cos^2 x$$

$$6.18. y = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

$$6.19. y = x \cdot e^{-x}$$

$$6.20. y = \ln(\ln x)$$

$$6.21. y = (1+x^2) \arctg x$$

$$6.22. y = e^{\sqrt{x}}$$

$$6.23. y = \frac{1}{1+x^2}$$

$$6.24. y = \sqrt{4-x^2}$$

$$6.25. y = \frac{1}{4+\sqrt{x}}$$

$$6.26. y = \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x$$

$$6.27. y = x^x$$

$$6.28. y = \sin^4 x + \cos^4 x$$

$$6.29. y = \ln(x + \sqrt{x})$$

$$6.30. y = e^{-x} \sin x$$

7. Параметрик кўринишда берилган y функциянинг x бўйича биринчи тартибли y' ва иккинчи тартибли y'' ҳосилаларини топинг:

$$7.1. \begin{cases} x = \ln \cos 2t, \\ y = \sin^2 2t. \end{cases}$$

$$7.2. \begin{cases} x = 1 - e^{3t}, \\ y = \frac{1}{3} (e^{3t} + e^{-3t}). \end{cases}$$

$$7.3. \begin{cases} x = \frac{1-t}{t^2}, \\ y = \frac{1+t}{t^2}. \end{cases}$$

$$7.4. \begin{cases} x = \sin^3 4t, \\ y = \frac{1}{2} \cos^3 4t. \end{cases}$$

$$7.5. \begin{cases} x = \frac{1}{3} t^3 + t, \\ y = \ln(t^2 + 1). \end{cases}$$

$$7.6. \begin{cases} x = \text{tg} t, \\ y = \frac{1}{\sin^2 t}. \end{cases}$$

$$7.7. \begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - \arctg t. \end{cases}$$

$$7.8. \begin{cases} x = \frac{\sin t}{1+\sin t}, \\ y = \frac{\cos t}{1+\sin t}. \end{cases}$$

$$7.9. \begin{cases} x = 4 - e^{-2t}, \\ y = \frac{3}{e^{2t} + 1}. \end{cases}$$

$$7.10. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t). \end{cases}$$

$$7.11. \begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t. \end{cases}$$

$$7.12. \begin{cases} x = \cos \frac{t}{2}, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$$

$$7.13. \begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

$$7.14. \begin{cases} x = t^2, \\ y = \frac{1}{3}t^3 - t. \end{cases}$$

$$7.15. \begin{cases} x = \cos 3t, \\ y = \sin 3t. \end{cases}$$

$$7.16. \begin{cases} x = \sin \frac{t}{2}, \\ y = \cos t. \end{cases}$$

$$7.17. \begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = \cos t. \end{cases}$$

$$7.18. \begin{cases} x = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t, \\ y = 2 \ln \operatorname{ctg} t. \end{cases}$$

$$7.19. \begin{cases} x = t^2 + 1; \\ y = e^t. \end{cases}$$

$$7.20. \begin{cases} x = 3 \cos^2 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$7.21. \begin{cases} x = t + \ln \cos t, \\ y = t - \ln \sin t. \end{cases}$$

$$7.22. \begin{cases} x = 2t - \sin 2t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

$$7.23. \begin{cases} x = t + \frac{1}{2} \sin 2t, \\ y = \cos^3 t. \end{cases}$$

$$7.24. \begin{cases} x = t^5 + 2t, \\ y = t^3 + 8t - 1. \end{cases}$$

$$7.25. \begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t, \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{t}. \end{cases}$$

$$7.26. \begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1), \\ y = \arccos 2t. \end{cases}$$

$$7.27. \begin{cases} x = t^2 + t + 1, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$$

$$7.28. \begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = \frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$$

$$7.29. \begin{cases} x = \frac{2-t}{2+t^2}, \\ y = \frac{t^2}{2+t^2}. \end{cases}$$

$$7.30. \begin{cases} x = 2 \cos^2 t, \\ y = \sin^2 t. \end{cases}$$

3- §. Комплекс сонлар ва улар устида амаллар. Эйлер формулалари

5.3.1. $z = x + iy$ кўринишдаги ифода комплекс сон дейилади, бунда x ва y — ҳақиқий сонлар, i эса $i^2 = -1$ тенглик билан аниқланади ва у *мавҳум бирлик* деб аталади.

x ва y сонлар z комплекс соннинг мос равишда ҳақиқий ва комплекс қисми дейилади ва $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ кўринишда белгиланади.

Агар $y=0$ бўлса, $z=x$ — ҳақиқий сон, агар $x=0$ бўлса, $z=iy$ — соф мавҳум сон бўлади. Шундай қилиб, ҳақиқий ва мавҳум сонлар z комплекс соннинг хусусий ҳолидир.

Агар $z_1 = x_1 + iy_1$, ва $z_2 = x_2 + iy_2$ икки комплекс соннинг мос равишда ҳақиқий ва мавҳум қисмлари тенг бўлса, яъни $x_1 = x_2$ ва $y_1 = y_2$ бўлса, бу комплекс сонлар тенг дейилади, яъни $z_1 = z_2$.

Мавҳум қисмларининг ишораси билангина фарк қилувчи $z = x + iy$ ва $\bar{z} = x - iy$ комплекс сонлар қўшма комплекс сонлар дейилади.

5.3.2. Агар $z_1 = x_1 + iy_1$ ва $z_2 = x_2 + iy_2$ иккита комплекс сон берилган бўлса, улар устида алгебраик амаллар қуйидагича бажарилади:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Комплекс сонларни даражага кўтариш иккиҳадни даражага кўтариш каби бажарилади, бунда i сонининг даражалари қуйидаги формулалар бўйича аниқланади:

$$i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1 \text{ ва х. к.}$$

Умуман, $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$.

1-мисол. Ушбу $z_1 = 3 - i$, $z_2 = -2 + 3i$, $z_3 = 4 + 3i$ комплекс сонлар берилган бўлсин. $z = \frac{z_1 - z_2 \cdot z_3}{z_1 + z_3}$ ни ҳисобланг.

Ечиш. Қетма-кет ҳисоблаймиз:

$$z_2 \cdot z_3 = (-2 + 3i)(4 + 3i) = (-8 - 9) + i(12 - 6) = -17 + 6i;$$

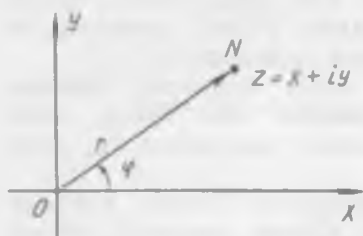
$$z_1 - z_2 \cdot z_3 = (3 - i) - (-17 + 6i) = (3 + 17) + i(-1 - 6) = 20 - 7i;$$

$$z_1^3 = (3 - i)^3 = 27 - 27i + 9i^2 - i^3 = (27 - 9) + i(-27 + 1) = 18 - 26i;$$

$$z_1 + z_3 = (18 - 26i) + (4 + 3i) = (18 + 4) + i(-26 + 3) = 22 - 23i.$$

Шундай қилиб,

$$z = \frac{20 - 7i}{22 - 23i} = \frac{(20 - 7i)(22 + 23i)}{(22 - 23i)(22 + 23i)} = \frac{(440 + 161) + i(460 - 154)}{22^2 + 23^2} = \frac{601}{1013} + i \frac{306}{1013}.$$



22-шакл

5.3.3. Ҳар бир $z = x + iy$ комплекс сон геометрик жиҳатдан Oxy координаталар текислигининг (x, y) нуктаси ёки $\overrightarrow{ON}$ вектори билан тасвирланади. Комплекс сон тасвирланадиган Oxy текислиги *комплекс текислик* дейилади ва (z) каби белгиланади. $z = x$ ҳақиқий сонлар *ҳақиқий ўқ* деб аталувчи Ox ўқ нукталари билан тасвирланади. Соф мавҳум $z = iy$ сонлар *мавҳум ўқ* деб аталувчи Oy ўқнинг нукталари билан тасвирланади.

z комплекс сонига мос келувчи N нуктанинг ҳолатини r ва φ кутб координаталари билан ҳам аниқлаш мумкин (22-шакл). Бунда координаталар бошидан N нуктагача бўлган масофага тенг $r = |\overrightarrow{ON}|$ сони *комплекс соннинг модули* дейилади ва $|z|$ билан белгиланади; $\overrightarrow{ON}$ векторнинг Ox ўқининг мусбат йўналиши билан ҳосил қилган φ бурчак *комплекс соннинг аргументи* дейилади ва у $\text{Arg}z$ деб белгиланади.

Ҳар қандай $z = x + iy$ комплекс сон учун қуйидаги формулалар ўринлидир:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \\ r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \text{tg} \varphi = \frac{y}{x},$$

бунда $\varphi = \text{arg}z$ нинг бош қиймати $0 \leq \text{arg}z < 2\pi$ шартни қаноатлантиради.

2-мисол. $z = -\sqrt{3} + i$ комплекс соннинг модули ва аргументи ни топинг.

Ечиш. $x = -\sqrt{3}$, $y = 1$ бўлганлиги учун $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2$.

$\text{tg} \varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ тенгламадан φ аргументни топамиз:

$$\varphi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

Шундай қилиб, $r = 2$, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$.

5.3.4. Комплекс соннинг $z = x + iy$ кўринишдаги ифодаси комплекс соннинг *алгебраик шакли* дейилади.

Комплекс соннинг $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ кўринишдаги ифодаси унинг *тригонометрик шакли* дейилади.

Эйлернинг

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$$

формуласидан фойдаланиб, комплекс сон ёзилишининг *кўрсаткич-ли шаклига* эга бўламиз:

$$z = re^{i\varphi}.$$

2- мисолда $z = -\sqrt{3} + i$ комплекс соннинг модули $r=2$ ва аргументи $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ эканини аниклаган эдик.

Шуларни инобатга олсак, бу соннинг тригонометрик ва кўрсаткичли шакллари мос равишда куйидагича бўлади:

$$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right), \quad z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

5.3.5. Комплекс сонларни кўпайтириш, бўлиш, даражага кўтариш, улардан илдиз чиқаришда комплекс сон ёзилишининг тригонометрик ва кўрсаткичли шаклларида фойдаланилади:

Агар

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

бўлса, ушбу формулалар ўринлидир:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n \cdot e^{in\varphi}.$$

Охириги формула *Муавр формуласи* дейилади.

Тригонометрик ёки кўрсаткичли шаклдаги комплекс сондан n даражали илдиз чиқариш учун ушбу формуладан фойдаланилади:

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + \right. \\ &\quad \left. + i\sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2\pi k}{n}}. \end{aligned}$$

k га $0, 1, 2, \dots, n-1$ кийматлар бериб, илдизнинг n та ҳар хил кийматларига эга бўламиз (бунда $\sqrt[n]{r}$ арифметик илдиз).

Илдизнинг барча n та кийматларини тасвирловчи нукталарнинг геометрик талкини маркази кутбда, радиуси $\sqrt[n]{r}$ бўлган айланага ички чизилган мунтазам n бурчакнинг учларини англатишидан иборатдир.

3-мисол. $(-\sqrt{3}+i)^6$ ни ҳисобланг.

Ечиш. 2-мисол ва Муавр формуласидан фойдаланиб куйидаги ечимга эга бўламиз:

$$z^6 = 2^6 \left(\cos \frac{5\pi}{6} \cdot 6 + i \sin \frac{5\pi}{6} \cdot 6 \right) = 2^6 e^{5\pi i} = 64 (\cos 5\pi + i \sin 5\pi) = -64.$$

4-мисол. $\sqrt[3]{-1}$ ни топинг.

Ечиш. $z = -1$ сон учун $r=1$, $\varphi=\pi$. Шу сабабли унинг тригонометрик шакли куйидагича ёзилади:

$$z = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi).$$

n -даражали илдиз чиқариш формуласидан фойдаланиб, ушбуга эга бўламиз:

$$w_k = \sqrt[3]{\cos \pi + i \sin \pi} = \cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} = e^{i \frac{\pi + 2\pi k}{3}}, \text{ бунда } k=0, 1, 2.$$

k га кетма-кет 0, 1, 2 қийматларни бериб, илдизнинг учала қийматини топамиз:

$$w_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = e^{i \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_1 = \cos \pi + i \sin \pi = e^{i \pi} = -1,$$

$$w_2 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = e^{i \frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5.3.6. Эйлернинг

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

формуласи даража кўрсаткичи комплекс ўзгарувчидан иборат кўрсаткичли функцияни тригонометрик функциялар орқали ифода-лайди. Тригонометрик функциялар $\cos \varphi$ ва $\sin \varphi$ кўрсаткичли функциялар орқали куйидагича ифодаланади:

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}.$$

3-дарсхона топшириги

1. Агар $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 + 4i$, $z_3 = -1 + 3i$ бўлса, $z = \frac{z_1 + 3z_2}{z_1 z_2 - z_3^2}$

нинг қийматини ҳисобланг.

Ж: $\frac{227}{274} + \frac{99}{274}i$.

2. $z_1 = 3 - 2i$; $z_2 = 4 + i$; $z_3 = -2 + i$ комплекс сонлар берилган.

$$z = \frac{z_1(z_2 - z_3)}{z_3 + z_1}$$

ни ҳисобланг.

Ж: $-\frac{45}{41} - \frac{87}{41}i$.

3. (z) комплекс текисликда куйида берилган шартларни қаноатлантирувчи $z = x + iy$ нукталар соҳасини аниқланг:

а) $0 < \operatorname{Re} 3zi < 2$; б) $\operatorname{Im}(iz) \geq 2$;

в) $|z - 3 + 4i| < 3$; г) $1 < |z - i| 2$;

д) $2 < |z| < 3$,

$$0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}.$$

4. Куйидаги комплекс сонларни тригонометрик ва кўрсаткичли шаклларда ифодаланг:

а) $z_1 = 3 - 3i$; б) $z_2 = -1 - i$; в) $z_3 = -i$; г) $z_4 = -2$.

Ж: а) $z_1 = 3\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = 3\sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}}$;

б) $z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2} e^{-i \frac{3\pi}{4}}$;

в) $z_3 = \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = e^{-i \frac{\pi}{2}}$;

г) $z_4 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = 2e^{i\pi}$.

5. Куйидагиларни ҳисобланг:

а) $\sqrt[6]{-1}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt[4]{-1 + \sqrt{3}i}$.

Ж: а) $k=0$, $w_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$;

$k=1$, $w_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$;

$k=2$, $w_2 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}$;

$k=3$, $w_3 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$;

$k=4$, $w_4 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$;

$k=5$, $w_5 = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}$;

$$б) k=0, \quad w_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6};$$

$$k=1, \quad w_1 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6};$$

$$k=2, \quad w_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2};$$

$$в) k=0, \quad w_0 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right);$$

$$k=1, \quad w_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right);$$

$$k=2, \quad w_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right);$$

$$k=3, \quad w_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right).$$

3- мустақил иш

1. Агар $z_1 = i - 1$, $z_2 = -2 + i$, $z_3 = 3 - 4i$ бўлса,

$$z = \frac{z_1(z_2 + z_3)}{z_1 - z_2}$$

ни топинг.

$$\text{Ж: } \frac{64}{5} - \frac{38}{5}i.$$

2. Агар $z_1 = -3 + i$, $z_2 = 4 - i$, $z_3 = 1 + 3i$ бўлса,

$$z = \frac{z_1 + z_2 z_3}{z_2 - z_3}$$

ни топинг.

$$\text{Ж: } -\frac{396}{5101} + \frac{812}{5101}i.$$

3. (z) комплекс текисликда қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $z = x + iy$ нукталар соҳасини аниқланг:

$$а) \operatorname{Re} \frac{1}{z} > 1; \quad б) \operatorname{Im}(2iz) > 3;$$

$$в) 3 < |z + 1 - 2i| < 4; \quad г) \frac{\pi}{2} \leq \arg z < \pi,$$

$$3 < |z| < 4.$$

4. Комплекс сонларни тригонометрик ва кўрсаткичли шаклда ифодаланг:

$$а) z_1 = \frac{2}{1+i}; \quad б) z_2 = -\sqrt{3} - i;$$

$$в) z_3 = -\frac{1}{3}; \quad г) z_4 = 1 + \sqrt{3}i.$$

$$\text{Ж: а) } z_1 = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) \sqrt{2} e^{-\frac{\pi}{4}i};$$

$$б) z_2 = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i\sin \frac{5\pi}{6} \right) = 2e^{\frac{5\pi}{6}i};$$

$$в) z_3 = \frac{1}{3} (\cos \pi + i\sin \pi) = \frac{1}{3} e^{\pi i};$$

$$г) z_4 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}.$$

5. Куйдагиларни хисобланг:

$$а) \sqrt{i}; \quad б) \sqrt[4]{1}; \quad в) \sqrt{-1}.$$

$$\text{Ж: а) } k=0, w_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4};$$

$$k=1, w_1 = \cos \frac{5\pi}{4} + i\sin \frac{5\pi}{4};$$

$$б) k=0, w_0 = \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ;$$

$$k=1, w_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4};$$

$$k=2, w_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i\sin \frac{\pi}{2};$$

$$k=3, w_3 = \cos \frac{3\pi}{4} + i\sin \frac{3\pi}{4};$$

$$k=4, w_4 = \cos \pi + i\sin \pi;$$

$$k=5, w_5 = \cos \frac{5\pi}{4} + i\sin \frac{5\pi}{4};$$

$$k=6, w_6 = \cos \frac{3\pi}{2} + i\sin \frac{3\pi}{2};$$

$$k=7, w_7 = \cos \frac{7\pi}{4} + i\sin \frac{7\pi}{4};$$

$$в) k=0, w_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4};$$

$$k=1, w_1 = \cos \frac{3\pi}{4} + i\sin \frac{3\pi}{4};$$

$$k=2, w_2 = \cos \frac{5\pi}{4} + i\sin \frac{5\pi}{4};$$

$$k=3, w_3 = \cos \frac{7\pi}{4} + i\sin \frac{7\pi}{4};$$

БИР ЎЗГАРУВЧИ ФУНКЦИЯСИННИНГ ИНТЕГРАЛ ҲИСОБИ

1-§. Аникмас интеграл ва интеграллашнинг содда усуллари

6.1.1. Бирор ораликда аникланган $f(x)$ функция учун бу ораликнинг ҳамма кийматларида

$$F'(x) = f(x) \text{ ёки } dF(x) = f(x)dx$$

шарт бажарилса, у ҳолда $F(x)$ функция $f(x)$ нинг *бошланғич функцияси* дейилади.

Агар $f(x)$ функция $F(x)$ бошланғич функцияга эга бўлса, у ҳолда $F(x) + C$ $f(x)$ нинг ҳамма бошланғич функциялари тўплами бўлади, бунда C — ихтиёрий ўзгармас. Шунга кўра берилган $f(x)$ функциянинг ҳар қандай иккита бошланғич функцияси бир-биридан ихтиёрий ўзгармасга фарк қилади.

$f(x)$ (ёки $f(x)dx$ ифода)дан олинган аникмас интеграл деб, бу функциянинг барча $F(x) + C$ бошланғич функциялари тўпламига айтилади ва бундай белгиланади: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Аникмас интегрални топиш жараёни *интеграллаш* дейилади.

6.1.2. Аникмас интегралнинг асосий хоссалари (интеграллаш қоидалари):

а) $(\int f(x)dx)' = f(x);$

б) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx;$

в) $\int dF(x) = F(x) + C;$

г) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (k — ўзгармас);

д) $\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx;$

е) агар $\int f(x)dx = F(x) + C$ ва $u = \Phi(x)$ ҳар қандай дифференциалланувчи функция бўлса, у ҳолда:

$$\int f(u) du = F(u) + C.$$

6.1.3. Аникмас интеграллар жадвали:

1. $\int du = u + C.$

2. $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$

3. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C.$
4. $\int \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C.$
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C.$
6. $\int e^u du = e^u + C.$
7. $\int \sin u du = -\cos u + C.$
8. $\int \cos u du = \sin u + C.$
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C.$
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C.$
11. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C.$
12. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C.$
13. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C = \ln \left| \frac{1}{\sin u} - \operatorname{ctg} u \right| + C.$
14. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \right| + C = \ln \left| \frac{1}{\cos u} + \operatorname{tg} u \right| + C.$
15. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{u}{a} + C.$
16. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C.$
17. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arc} \sin \frac{u}{a} + C = -\operatorname{arc} \cos \frac{u}{a} + C.$
18. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln |u + \sqrt{u^2 \pm a^2}| + C.$

Интеграллаш натижасининг тўғрилиги топилган бошлангич функцияни дифференциаллаш билан текширилади. Келтирилган жадвалда u эркин ўзгарувчини, шунингдек, дифференциалланувчи функцияни ифодалайди.

6.1.4. Интеграллашнинг куйидаги содда усулларини келтирамиз:

а) интеграл остидаги функцияни содда функциялар йиғиндисига ёйиш ва интегралларнинг хоссаларидан фойдаланиш усули;

б) дифференциал белгиси остига киритиш усули. Масалан:

$dx = \frac{1}{k} d(kx + a)$, агар a, k — ўзгармас бўлса;

$$\begin{aligned}
 x dx &= \frac{1}{2} d(x^2), \quad \cos x dx = d(\sin x), \\
 \frac{dx}{x} &= d(\ln x), \quad \frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x), \quad \frac{dx}{1+x^2} = \\
 &= d(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x) \quad \text{ва х.к.}
 \end{aligned}$$

1- м и с о л. $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$ аникмас интегрални топинг.

Е ч и ш. Интеграл остидаги функцияни шаклан алмаштириб, аникмас интегралнинг д) хоссасидан фойдалансак:

$$\begin{aligned}\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx &= \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \left[\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} + \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} \right] dx = \\ &= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \arctg x + C.\end{aligned}$$

2- м и с о л. $\int 4\cos^2 \frac{x}{2} dx$ аникмас интегрални топинг.

Е ч и ш. Интеграл остидаги функцияни даражани пасайтириш формуласидан фойдаланиб алмаштирамиз:

$$2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x.$$

Сўнгра аникмас интегралнинг г) ва д) хоссаларидан фойдалансак,

$$\begin{aligned}\int 4\cos^2 \frac{x}{2} dx &= \int 2(1 + \cos x) dx = 2 \int (1 + \cos x) dx = \\ &= 2 \int dx + 2 \int \cos x dx = 2x + 2\sin x + C.\end{aligned}$$

3- м и с о л. Аникмас интегрални топинг:

$$\int 3^x \cdot e^{3x} dx.$$

$$\text{Е ч и ш. } \int 3^x \cdot e^{3x} dx = \int (3 \cdot e^3)^x dx = \frac{(3e^3)^x}{\ln(3e^3)} + C.$$

4- м и с о л. Аникмас интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(3x-5)}}.$$

Е ч и ш. Дифференциал остига киритиш усулини қўллаймиз. Бунинг учун $dx = \frac{1}{3} d(3x-5)$ деб олиб, жадвалдаги (4) интегралдан фойдаланамиз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x-5}} = \frac{1}{3} \int \frac{d(3x-5)}{\sqrt{3x-5}} = \frac{2}{3} \sqrt{3x-5} + C.$$

5- м и с о л. Аникмас интегрални топинг:

$$\int \frac{x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Е ч и ш. Ейиш ва дифференциал белгиси остига киритиш усулларидан биргаликда фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} - \int \arcsin x d(\arcsin x) = \\ &= -\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \arcsin^2 x + C. \end{aligned}$$

6-мисол. Аниқмас интегрални топинг:

$$\int \frac{3x^2 - 4x}{x^3 - 2x^2 + 4} dx$$

Е ч и ш.
$$\int \frac{3x^2 - 4x}{x^3 - 2x^2 + 4} dx = \int \frac{d(x^3 - 2x^2 + 4)}{x^3 - 2x^2 + 4} =$$

$$= \ln|x^3 - 2x^2 + 4| + C.$$

1-дарсхона топшириғи

Аниқмас интегралларни топинг, интеграллаш натижаларини дифференциаллаш билан текширинг:

1. $\int \left(4x^5 - 2\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{5}{x^2} \right) dx.$

2. $\int (\lg x + \operatorname{ctg} x)^2 dx.$

3. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx.$

4. $\int \frac{(1+x^2)}{x(1+x^2)} dx.$

5. $\int \frac{dx}{(3x-4)^3}.$

6. $\int \operatorname{tg} 4x dx.$

7. $\int \frac{x^2 dx}{1+x^3}.$

8. $\int \frac{3^x}{\sqrt{9-9^x}} dx.$

9. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x - x}}{1+x^2} dx.$

10. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx.$

11. $\int \frac{dx}{(x-2)^2 + 4}.$

12. $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}.$

14. $\int \cos^3 x dx.$

15. $\int \sin^2 x dx.$

1- мустақил иш

Аникмас интегралларни топинг, интеграллаш натижаларини дифференциаллаш билан текширинг:

$$1. \int \frac{dx}{(x+1) \sqrt[3]{\ln(x+1)}}$$

$$2. \int \frac{\sin 3x}{\cos^2 3x} dx.$$

$$3. \int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} 7x}}{\sin^2 7x} dx.$$

$$4. \int \frac{\arcsin^2 5x}{\sqrt{1-25x^2}} dx.$$

$$5. \int e^{4-5x^2} x dx.$$

$$6. \int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2-1}} dx.$$

$$7. \int \frac{\sin 2x}{1+3\cos 2x} dx.$$

$$8. \int \frac{e^{3x} dx}{4-e^{6x}}.$$

$$9. \int \sin^2 (2x-1) dx.$$

$$10. \int \operatorname{tg}^4 \frac{2x}{3} dx.$$

$$11. \int \sin 3x \cos x dx.$$

$$12. \int \frac{dx}{4x^2-5x+4}.$$

2- §. Аникмас интегралда ўзгарувчини алмаштириш. Бўлаклаб интеграллаш

6.2.1. Аникмас интегралда ўзгарувчини алмаштириш қуйидагича амалга оширилади:

а) $x = \varphi(t)$, бунда $\varphi(t)$ — янги ўзгарувчи t нинг дифференциалланувчи функцияси бўлсин. Бу ҳолда ўзгарувчини алмаштириш формуласи ушбу кўринишга эга:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt;$$

б) $\Psi(x) = t$, бунда t — янги ўзгарувчи. Бу ҳолда ўзгарувчини алмаштириш формуласи ушбу кўринишга эга:

$$\int f(\Psi(x)) \Psi'(x) dx = \int f(t) dt.$$

Иккала ҳолда ҳам интеграллашдан кейин ўзгарувчи x га қайтиш керак.

1- мисол. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$ аникмас интегрални топинг.

Ечиш. $x = a \sin t$ десак, $dx = a \cos t dt$ бўлади ва аникмас интеграл ушбу кўринишни олади:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt = \\ &= \int \sqrt{a^2 \cdot \cos^2 t} \cdot a \cos t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \\ &= \frac{a^2}{2} \int dt + \frac{a^2}{2} \int \cos 2t dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \int \cos 2t dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \cos 2t d(2t) = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \sin 2t + C.$$

Энди

$$t = \arcsin \frac{x}{a} \text{ ва } \sin 2t = 2 \sin t \cos t =$$

$$= 2 \sin t \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

тенгликлардан фойдаланиб эски ўзгарувчи x га қайтамыз:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{a^2}{4} \cdot 2 \cdot \frac{x}{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + C = \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C. \end{aligned}$$

2-мисол. Аникмас интегрални топинг:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx$$

Ечиш. $x = atg t$ деб белгиласак, $dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$ бўлади. Буни ҳисоб-га олиб аникмас интегрални топамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x^2} dx &= \int \frac{\sqrt{a^2 tg^2 t + a^2}}{a^2 tg^2 t} \cdot \frac{adt}{\cos^2 t} = \\ &= \int \frac{\sqrt{1 + tg^2 t}}{\sin^2 t} dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t \cdot \cos t} = \\ &= \int \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\sin^2 t \cdot \cos t} dt = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t} dt + \int \frac{dt}{\cos t} = \\ &= \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t} + \int \frac{dt}{\cos t} = -\frac{1}{\sin t} + \ln \left| \frac{1}{\cos t} + tg t \right| + C = \\ &= -\frac{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}}{\frac{x}{a}} + \ln \left| \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a} \right| + C = \\ &= -\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x} + \ln \left| \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + x}{a} \right| + C. \end{aligned}$$

3-мисол. Аникмас интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}.$$

Е ч и ш. Илдиз остидаги ифодани t^2 билан белгиласак,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}} &= \left\{ \begin{array}{l} 2x-9=t^2; \quad t=\sqrt{2x-9}; \\ x=\frac{1}{2}(t^2+9); \quad dx=tdt \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{tdt}{\frac{1}{2}(t^2+9) \cdot t} = 2 \int \frac{dt}{9+t^2} = \frac{2}{3} \arctg \frac{t}{3} + C = \\ &= \frac{2}{3} \arctg \frac{\sqrt{2x-9}}{3} + C. \end{aligned}$$

4- м и с о л. Аниқмас интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-1}}.$$

Е ч и ш. $t = \frac{1}{x+1}$ янги ўзгарувчини киритамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x-1}} &= \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{x+1}; \quad x = \frac{1}{t} - 1; \\ dx = -\frac{1}{t^2} dt \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{-\frac{1}{t^2} dt}{\frac{1}{t} \sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 + \frac{1}{t} - 1 - 1}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{1-2t+t^2+t-2t^2}} = \\ &= - \int \frac{dt}{\sqrt{1-t-t^2}} = - \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}} = \arccos \frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + C = \\ &= \arccos \frac{2t+1}{\sqrt{5}} + C = \arccos \frac{\frac{2}{x+1}+1}{\sqrt{5}} + C = \\ &= \arccos \frac{x+3}{\sqrt{5}(x+1)} + C. \end{aligned}$$

6.2.2. Булаклаб интеграллаш усули

$$\int u dv = uv - \int v du$$

формулага асосланиди, бунда u ва v — x нинг интегралланувчи функциялари.

Бу усул ҳар хил синфдаги функциялар купайтмаларини интеграллашда фойдаланилади:

$$\begin{aligned} &\int P_n(x) e^{ax} dx, \int P_n(x) \cos ax dx, \int P_n(x) \sin ax dx, \\ &\int P_n(x) \arctg x dx, \int P_n(x) \arcsin x dx, \\ &\int P_n(x) \cos x dx, \int P_n(x) \ln x dx. \end{aligned}$$

Дастлабки учта интегралда u учун $P_n(x)$ кўпхад қабул қилинадн, охириги тўртта интегралда эса u учун $\arctg x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\ln x$ қабул қилинадн.

Баъзи ҳолларда бўлаклаб интеграллаш формуласини бир неча марта қўллаш зарур бўлади.

5-мисол. $\int x e^{-5x} dx$ ни топинг.

Ечиш. $u = x$ ва $dv = e^{-5x} dx$ деб оламиз, у ҳолда

$$\begin{aligned} \int x e^{-5x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = e^{-5x} dx, \quad v = \int e^{-5x} dx = -\frac{1}{5} e^{-5x} \end{array} \right\} = \\ &= -\frac{x}{5} e^{-5x} - \frac{1}{25} e^{-5x} + C. \end{aligned}$$

v ни топишда интеграллаш доимийсини ҳар доим нолга тенг деб ҳисоблаш мумкин.

6-мисол. $\int \arctg x dx$ ни топинг.

Ечиш. $u = \arctg x$ деб оламиз, у ҳолда

$$\begin{aligned} \int \arctg x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \arctg x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2}, \\ dv = dx, \quad v = \int dx = x \end{array} \right\} = \\ &= x \cdot \arctg x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \\ &= x \cdot \arctg x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C. \end{aligned}$$

7-мисол. $\int (x^2+1) \cos x dx$ интегрални топинг.

Ечиш. Бу мисолда бўлаклаб интеграллаш формуласини икки марта қўллашга тўғри келади.

$$\begin{aligned} \int (x^2+1) \cos x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x^2+1, \quad du = 2x dx; \\ dv = \cos x dx, \quad v = \sin x \end{array} \right\} = \\ &= (x^2+1) \sin x - 2(-x \cdot \cos x + \int \cos x dx) = \\ &= (x^2+1) \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C = \\ &= 2x \cos x + (x^2-1) \sin x + C. \end{aligned}$$

8-мисол. Аникмас интегрални ҳисобланг:

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx.$$

Ечиш. Бу интегрални икки марта бўлаклаб интеграллаймиз.

$$\int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{\alpha x}, \quad du = \alpha e^{\alpha x} dx; \\ dv = \cos \beta x dx, \quad v = \frac{1}{\beta} \sin \beta x \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{\alpha x}, \quad du = \alpha \cdot e^{\alpha x} dx \\ dv = \sin \beta x dx, \quad v = -\frac{1}{\beta} \cos \beta x \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \left(-\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx \right) = \\
&= \frac{e^{\alpha x}}{\beta^2} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx.
\end{aligned}$$

Бунда

$$I = \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$$

деб ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$I = \frac{e^{\alpha x}}{\beta^2} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2} I.$$

Бу тенгламани I га нисбатан ечсак,

$$I = \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) + C.$$

2- дарсхона топириғи

Аникмас интегралларни топинг:

$$1. \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}. \quad \text{Ж: } \frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3 \ln |1 + \sqrt[3]{x+1}|$$

$$2. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}. \quad \text{Ж: } x + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + \\ + 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \ln |\sqrt[6]{x} - 1| + C.$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+4}}. \quad \text{Ж: } C - \frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}.$$

$$4. \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx. \quad \text{Ж: } C - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x.$$

$$5. \int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{1-x-x^2}}. \quad \text{Ж: } C - \ln \left| \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-x-x^2}}{x+1} \right|.$$

$$6. \int x \cdot \arctg x dx \quad \text{Ж: } \frac{x^2+1}{2} \arctg x - \frac{x}{2} + C.$$

$$7. \int \frac{x dx}{\sin^2 x}. \quad \text{Ж: } C - x \cdot \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x|.$$

8. $\int \arcsin x dx$ Ж: $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.
9. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$ Ж: $C - \frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6)$.
10. $\int x^2 \sin x dx$ Ж: $C - x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x$.
11. $\int \sin \ln x dx$ Ж: $\frac{x}{2} (\sin \ln x - \cos \ln x) + C$.
12. $\int \sqrt{4+x^2} dx$ Ж: $\frac{x}{2} \sqrt{4+x^2} + 2 \ln|x + \sqrt{4+x^2}| + C$.

2- мустақил иш

Аниқмас интегралларни топинг:

1. $\int x \sqrt{x-1} dx$ Ж: $\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$ Ж: $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 \ln|1 + \sqrt[4]{x}| + C$.
3. $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$ Ж: $\frac{x}{4}(x^2-2) \sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} + C$.
4. $\int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{x^2+2x+10}}$ Ж: $C - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3}{x+1} + \sqrt{\frac{9}{(x+1)^2} + 1} \right|$.
5. $\int \ln(x^2+1) dx$ Ж: $x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \arctg x + C$.
6. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$ Ж: $C - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x \right)$.
7. $\int e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^2 dx$ Ж: $C - 2e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 4x + 8)$.
8. $\int \cos \ln x dx$ Ж: $\frac{x}{2} (\cos \ln x + \sin \ln x) + C$.

3- §. Каср-рационал функцияни энг содда касрларга ёйиш. Рационал функцияларни интеграллаш

6.3.1. Иккита кўпхаднинг нисбатига тенг

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$$

Функция каср-рационал функция ёки рационал каср дейилади, бунда m ва n $Q_m(x)$ ва $P_n(x)$ кўпхадларнинг даража кўрсаткичлари бўлиб, улар натурал сонлардир. $m < n$ да $R(x)$ каср-рационал функция тўғри каср, $m \geq n$ да эса нотўғри каср дейилади.

Қуйидаги тўғри касрлар энг содда касрлар дейилади:

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx = \\
&= \left\{ \begin{array}{l} u = e^{\alpha x}, du = \alpha \cdot e^{\alpha x} dx \\ dv = \sin \beta x dx, v = -\frac{1}{\beta} \cos \beta x \end{array} \right\} = \\
&= \frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x - \frac{\alpha}{\beta} \left(-\frac{1}{\beta} e^{\alpha x} \cos \beta x + \frac{1}{\beta} \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx \right) = \\
&= \frac{e^{\alpha x}}{\beta^2} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx.
\end{aligned}$$

Бунда

$$I = \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx$$

деб ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$I = \frac{e^{\alpha x}}{\beta^2} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) - \frac{\alpha^2}{\beta^2} I.$$

Бу тенгламани I га нисбатан ечсак,

$$I = \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) + C.$$

2- дарсхона топшириғи

Аникмас интегралларни топинг:

1. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+1}}.$ Ж: $\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{2}{3}} - 3(x+1)^{\frac{1}{3}} + 3 \ln |1 + \sqrt[3]{x+1}|$
2. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}.$ Ж: $x + \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} +$
 $+ 6x^{\frac{1}{6}} + 6 \ln |\sqrt[6]{x} - 1| + C.$
3. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2+4}}.$ Ж: $C - \frac{\sqrt{x^2+4}}{4x}.$
4. $\int \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{x^2}.$ Ж: $C - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x.$
5. $\int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{1-x-x^2}}.$ Ж: $C - \ln \left| \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-x-x^2}}{x+1} \right|.$
6. $\int x \cdot \arctg x dx$ Ж: $\frac{x^2+1}{2} \arctg x - \frac{x}{2} + C.$
7. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$ Ж: $C - x \cdot \operatorname{ctg} x + \ln |\sin x|.$

8. $\int \arcsin x dx$ Ж: $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$.
9. $\int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx$ Ж: $C - \frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6)$.
10. $\int x^2 \sin x dx$ Ж: $C - x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x$.
11. $\int \sin \ln x dx$ Ж: $\frac{x}{2} (\sin \ln x - \cos \ln x) + C$.
12. $\int \sqrt{4+x^2} dx$ Ж: $\frac{x}{2} \sqrt{4+x^2} + 2 \ln|x + \sqrt{4+x^2}| + C$.

2- мустақил иш

Аникмас интегралларни топинг:

1. $\int x \sqrt{x-1} dx$ Ж: $\frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$ Ж: $2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4 \ln|1 + \sqrt[4]{x}| + C$.
3. $\int x^2 \sqrt{4-x^2} dx$ Ж: $\frac{x}{4}(x^2-2) \sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} + C$.
4. $\int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{x^2+2x+10}}$ Ж: $C - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3}{x+1} + \sqrt{\frac{9}{(x+1)^2} + 1} \right|$.
5. $\int \ln(x^2+1) dx$ Ж: $x \ln(x^2+1) - 2x + 2 \arctg x + C$.
6. $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$ Ж: $C - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x \right)$.
7. $\int e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^2 dx$ Ж: $C - 2e^{-\frac{x}{2}} (x^2 + 4x + 8)$.
8. $\int \cos \ln x dx$ Ж: $\frac{x}{2} (\cos \ln x + \sin \ln x) + C$.

3- §. Каср-рационал функцияни энг содда касрларга ёйиш. Рационал функцияларни интеграллаш

6.3.1. Иккита кўпхаднинг нисбатига тенг

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$$

Функция каср-рационал функция ёки рационал каср дейилади, бунда m ва n $Q_m(x)$ ва $P_n(x)$ кўпхадларнинг даража кўрсаткичлари бўлиб, улар натурал сонлардир. $m < n$ да $R(x)$ каср-рационал функция тўғри каср, $m \geq n$ да эса нотўғри каср дейилади.

Қуйидаги тўғри касрлар энг содда касрлар дейилади:

$$I. \frac{A}{x-\alpha}.$$

$$II. \frac{A}{(x-\alpha)^k}, \text{ бунда } k \geq 2 - \text{ бутун сон.}$$

$$III. \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \text{ бунда } D=p^2-4q < 0.$$

$$IV. \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^s}, \text{ бунда } s \geq 2 - \text{ бутун сон, } D=p^2-4q < 0.$$

Юкоридаги касрларда A, B, p, q, α — хакикий сонлар.

6.3.2. Ҳар қандай хакикий коэффициентли n -даражали $P_n(x)$ кўпхад хакикий сонлар тўпламида ушбу кўринишда тасвирланиши мумкин:

$$P_n(x) = a_0(x-\alpha_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x-\alpha_p)^{k_p} (x^2+px+q)^{s_1} \cdot \dots \cdot (x^2+px+q)^{s_l},$$

бунда $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ $P_n(x)$ кўпхаднинг мос равишда $k_1, \dots, k_p$ каррали хакикий илдиэлари, ҳамма квадрат учхадлар учун дискриминант $D_i < 0$ ($i = \overline{1, l}$); $k_1 + \dots + k_p + 2s_1 + \dots + 2s_l = n$; $k_1, \dots, k_p, s_1, \dots, s_l$ — натурал сонлар; a_0 — $P_n(x)$ кўпхадда x^n олдидаги коэффициент.

Агар $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ тўғри рационал касрнинг махражи $P_n(x)$

юкорида кўрсатилгандек ифодаланган бўлса, у ҳолда бундай касрни I — IV кўринишдаги энг содда рационал касрлар йиғиндиси-га ёйиш мумкин. Бу ёйилмада $P_n(x)$ кўпхаднинг ҳар бир k каррали α илдиэига, яъни $(x-\alpha)^k$ кўринишдаги кўпайтувчига, ушбу k та касрлар йиғиндиси мос келади:

$$\frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k}.$$

$P_n(x)$ кўпхаднинг s каррали комплекс кўшма илдиэининг ҳар бир жуфтига, яъни $(x^2+px+q)^s$ кўринишдаги кўпайтувчига ушбу s та касрдан иборат йиғинди мос келади:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s}.$$

Ёйилмадаги A_i, N_i, M_i коэффициентларни топишда хусусий қийматлар усули ёки номаълум коэффициентлар усулидан фойдаланилади. Баъзан бу икки усул биргаликда қўлланилади.

$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ рационал каср *нотўғри каср* бўлган ҳолда бутун

қисмини ажратиб, сўнгга тўғри каср қисми юкоридаги каби энг содда касрларга ёйилади.

1-мисол. Ушбу

$$R(x) = \frac{15x^2 - 4x - 81}{(x-3)(x+4)(x-1)}$$

рационал касрни энг содда касрларнинг йиғиндисига ёйинг.

Ечиш. Берилган $R(x)$ рационал каср тўғри каср. Махражининг ҳамма илдизлари (3, -4, 1) бир каррали (оддий) ва хакикий, шунинг учун

$$R(x) = \frac{15x^2 - 4x - 81}{(x-3)(x+4)(x-1)} = \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x+4)} + \frac{C}{(x-1)},$$

бунда A, B, C — аниқланиши керак бўлган коэффициентлар. Тенгликнинг ўнг қисмини умумий махражга келтириб, иккала қисмининг ҳам махражларини ташлаб юборсак:

$$15x^2 - 4x - 81 = A(x+4)(x-1) + B(x-3)(x-1) + C(x-3)(x+4).$$

а) *Хусусий қийматлар усулининг* мазмуни шундаки, унда ҳосил бўлган айниятга x нинг ҳар хил (одатда махражнинг хакикий илдизлари) қийматлари қўйилади. Қаралаётган мисолда бу қуйидагича амалга оширилади:

$$\begin{array}{l|l} x=3 & 42=14A, \\ x=-4 & 175=35B, \\ -x=1 & 70=-10C. \end{array}$$

Ҳосил қилинган тенгламалар системасидан $A=3, B=5, C=7$. Шундай қилиб,

$$R(x) = \frac{15x^2 - 4x - 81}{(x-3)(x+4)(x-1)} = \frac{3}{x-3} + \frac{5}{x+4} + \frac{7}{x-1}.$$

б) *Номаълум коэффициентлар усулининг* моҳияти шундаки, унда ҳосил бўлган айниятда x нинг ўнгдаги ва чапдаги бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, A, B, C коэффициентларни топиш учун тенгламалар системаси тузилади, яъни:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 15 = A + B + C, \\ x & -4 = 3A - 4B + C, \\ x^0 & -81 = -4A + 3B - 12C. \end{array}$$

Ҳосил бўлган тенгламалар системасини ечиб, $A=3, B=5, C=7$ эканини топамиз.

2-мисол. Ушбу рационал касрни содда касрлар йиғиндисига ёйинг:

$$R(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)^2}$$

Е ч и ш. Тўғри рационал касрни қуйидагича ёямиз:

$$R(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Бундан

$$x = A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1).$$

Коэффициентларни топиш учун юқорида баён қилинган иккала усулдан ҳам биргаликда фойдаланамиз:

$$\begin{array}{l|l} x=1 & 1=4A, \\ x=-1 & -1=-2C, \\ x^2\text{да} & 0=A+B. \end{array}$$

$$\text{Системани ечсак, } A=\frac{1}{4}, B=-\frac{1}{4}, C=\frac{1}{2}.$$

Демак,

$$R(x) = \frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2}.$$

3- м и с о л. Қуйидаги рационал касрни содда касрларга ёйинг:

$$R(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x+1)}.$$

Е ч и ш. Рационал каср тўғри касрдир, уни энг содда касрларга ёямиз:

$$R(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+3} + \frac{Dx+E}{(x^2+2x+3)^2}.$$

Ушбу

$$x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8 = A(x^2 + 2x + 3)^2 + (Bx + C)(x+1)(x^2 + 2x + 3) + (Dx + E)(x+1).$$

тенгликдан фойдаланиб номаълум коэффициентларни топиш учун тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{array}{l|l} x=-1 & 4=4A, \\ x^4\text{ да} & 1=A+B \\ x^3\text{ да} & 4=4A+2B+C, \\ x^2\text{ да} & 11=10A+3B+3C+D \\ x\text{ да} & 12=12A+B+5C+D+E. \end{array}$$

Тенгламалар системасини ечсак,

$$A=1, B=0, C=0, D=1, E=-1.$$

Демак,

$$R(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{(x^2 + 2x + 3)^2(x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{x-1}{(x^2 + 2x + 3)^2}.$$

6.3.3. Тўғри рационал касрларни интеграллаш энг содда касрларни интеграллашга келтирилади.

I. $\int \frac{A dx}{x - \alpha} = A \ln|x - \alpha| + C.$

II. $\int \frac{A dx}{(x - \alpha)^k} = \frac{A}{(1 - k)(x - \alpha)^{k-1}} + C.$

III. $\int \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} dx = \frac{A}{2} \ln|x^2 + px + q| +$
 $+ \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctg \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.$

IV. $\int \frac{(Ax + B) dx}{(x^2 + px + q)^s} = \frac{A}{2} \int \frac{(2x + p) dx}{(x^2 + px + q)^s} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{d\left(x + \frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^s},$

бунда

$a^2 = q - \frac{p^2}{4}, t = x + \frac{p}{2}$ белгилашлар киритиб, иккинчи интеграл

$I_s = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^s}$ кўринишга келтирилади ва у куйидаги рекуррент формула ёрдамида топилади:

$$I_s = \frac{t}{2(s-1)a^2(t^2 + a^2)^{s-1}} + \frac{2s-3}{2(s-1)a^2} I_{s-1}.$$

4-мисол. Интегрални ҳисобланг: $\int \frac{3x-1}{x^2+4x+8} dx.$

Ечиш.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x-4)+6-1}{x^2-4x+8} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x-4}{x^2-4x+8} dx + 5 \int \frac{dx}{x^2-4x+8} = \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2-4x+8| + 5 \int \frac{dx}{(x-2)^2+2^2} = \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2-4x+8| + \frac{5}{2} \arctg \frac{x-2}{2} + C. \end{aligned}$$

5-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2} dx.$$

Ечиш.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+2) - 3 + 2}{(x^2+2x+10)^2} dx = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x+2)dx}{(x^2+2x+10)^2} - \int \frac{dx}{(x^2+2x+10)^2} = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+2x+10)}{(x^2+2x+10)^2} - \\ &- \int \frac{d(x+1)}{[(x+1)^2+3^2]^2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2+2x+10} - I_2 \end{aligned}$$

Бунда $I_2 = \int \frac{d(x+1)}{[(x+1)^2+3^2]^2}$, $s=2$, $u=x+1$ ва $a^2=9$ деб белгилаб, юкоридаги рекуррент формуладан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{du}{(u^2+9)^2} = \frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 1} \left(\frac{u}{u^2+9} + (2 \cdot 2 - 3) I_1 \right) = \\ &= \frac{1}{18} \left(\frac{u}{u^2+9} + \int \frac{du}{u^2+9} \right) = \frac{1}{18} \left(\frac{u}{u^2+9} + \frac{1}{3} \arctg \frac{u}{3} \right). \end{aligned}$$

Ўзгарувчи x га қайтсак,

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{18} \left(\frac{x+1}{(x+1)^2+9} + \frac{1}{3} \arctg \frac{x+1}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{18} \left(\frac{x+1}{x^2+2x+10} + \frac{1}{3} \arctg \frac{x+1}{3} \right). \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} \int \frac{(3x+2)dx}{(x^2+2x+10)^2} &= -\frac{3}{2(x^2+2x+10)} - \frac{x+1}{18(x^2+2x+10)} - \\ &- \frac{1}{54} \arctg \frac{x+1}{3} + C. \end{aligned}$$

6.3.4. $\frac{Q_n(x)}{P_n(x)}$ рационал касрни интеграллашдан олдин қуйидаги

алгебранг алмаштиришлар ва ҳисоблашлар бажарилади:

а) берилган каср тўғри каср эканини текшириш; агар каср нотўғри бўлса, у ҳолда унинг бутун қисмини ажратиш, яъни

$$\frac{Q_n(x)}{P_n(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{P_n(x)}$$

шаклга келтириш, бунда $q(x)$ — кўпхад, $\frac{r(x)}{P_n(x)}$ эса тўғри рационал каср;

б) касрнинг махражи $P_n(x)$ ни $(x-\alpha)^k$ ва $(x^2+px+q)^s$ кўри-нишдаги чизикли ва квадрат кўпайтувчиларга ажратиш ($p^2-4q < 0$);

в) тўғри рационал касрни энг содда касрлар йиғиндисиغا ёйиш;

г) ёйилманинг коэффициентларини ҳисоблаш.

6-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16} dx.$$

Ечиш. Берилган рационал каср нотўғри каср бўлганлиги учун унинг бутун қисмини ажратамиз:

$$\frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16} = \frac{x^5-8x^3+16x}{x^4-8x^2+16} + \frac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16}$$

Демак,

$$\begin{aligned} \frac{x^5+1}{x^4-8x^2+16} &= x + \frac{8x^3-16x+1}{x^4-8x^2+16} = \\ &= x + \frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2}. \end{aligned}$$

Тўғри касрни энг содда касрлар йиғиндисиغا ёямиз:

$$\frac{8x^3-16x+1}{(x-2)^2(x+2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}.$$

Махражлардан кутулсак,

$$8x^3-16x+1 = A(x+2)^2(x-2) + B(x+2)^2 + C(x-2)^2(x+2) + D(x-2)^2.$$

Номаълум коэффициентларни топиш учун тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{array}{l|l} x=2 & 33=16B, \\ x=-2 & -31=16D, \\ x^3 \text{ да} & 8=A+C \\ x^2 \text{ да} & 0=2A+B-2C+D. \end{array}$$

Бу системани ечиб, коэффициентларни топамиз:

$$A = \frac{127}{32}, B = \frac{33}{16}, C = \frac{129}{32}, D = -\frac{31}{16}.$$

Демак,

$$\int \frac{(x^5+1)dx}{x^4-8x^2+16} = \int \left(x + \frac{\frac{127}{32}}{x-2} + \frac{\frac{33}{16}}{(x-2)^2} + \frac{\frac{129}{32}}{x+2} - \frac{\frac{31}{16}}{(x+2)^2} \right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{127}{32} \ln|x-2| - \frac{33}{16(x-2)} + \frac{129}{32} \ln|x+2| + \frac{31}{16(x+2)} + C.$$

3- дарсхона топириги

Берилган аникмас интегралларни топинг:

1. $\int \frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x} dx.$ Ж: $\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{1}{3} \ln \frac{|x|^3}{(x-2)^2(x+1)} + C.$
2. $\int \frac{2x^2-3x+3}{x^3-2x^2+x} dx.$ Ж: $C - \frac{2}{x-1} + \ln \frac{|x|^3}{|x-1|}.$
3. $\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx.$ Ж: $C - \frac{x}{(x-1)^2} + \ln \frac{(x-1)^2}{|x|}.$
4. $\int \frac{xdx}{x^3+1}.$ Ж: $C + \frac{1}{6} \ln \frac{x^2-x+1}{(x+1)^2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$
5. $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}.$ Ж: $C + \frac{2}{3\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x+2).$
6. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}.$ Ж: $C + \frac{1}{2} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+x+1} + \frac{x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{5}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

3- мустақил иш

Аникмас интегралларни топинг:

1. $\int \frac{5x^3+9x^2-22x-8}{x^3-4x} dx.$ Ж: $5x + \ln x^2(x+2)^4|x-2|^3 + C.$
2. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$ Ж: $\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2} + \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}} \right| + C.$
3. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}.$ Ж: $C - \frac{1}{x-2} - \operatorname{arctg}(x-2).$

$$4. \int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}. \quad \text{Ж: } C - \frac{1}{6(1+x)} + \frac{1}{6} \ln \frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$5. \int \frac{x^2+3}{(x+1)(x^2+1)} dx. \quad \text{Ж: } \frac{x+2}{2(x^2+1)} + 2\operatorname{arctg} x + \ln \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2+1}} + C.$$

$$6. \int \frac{(x+1)^4 dx}{(x^2+2x+2)^3}. \quad \text{Ж: } \frac{3}{8} \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{5x^3+15x^2+18x+8}{8(x^2+2x+2)^2} + C.$$

4-§. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ кўринишдаги интеграллар

$\int R(\sin x, \cos x) dx$ кўринишидаги интеграллар (R — $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан рационал функция) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ алмаштириш ёрдамида рационал функцияларнинг интегралларига (3-§) келтирилади. Чунки,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Бундай алмаштириш кўп ҳолларда мураккаб ҳисоблашларга олиб келади. Шу сабабли баъзи хусусий ҳолларда кўрсатилган ҳилдаги интегралларни топишда қуйидаги содда ўрнига қўйиш-лардан фойдаланилади:

а) агар $R(\sin x, \cos x)$ ифода $\sin x$ га нисбатан тоқ функция, яъни

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

бўлса, у ҳолда $\cos x = t$ ўрнига қўйиш бу функцияни рационаллаштиради;

б) агар $R(\sin x, \cos x)$ ифода $\cos x$ га нисбатан тоқ функция, яъни

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

бўлса, у ҳолда интеграл $\sin x = t$ ўрнига қўйиш билан рационал функцияларни интеграллашга келтирилади;

в) агар $R(\sin x, \cos x)$ ифода $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан жуфт функция, яъни

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$$

бўлса, у ҳолда бу функция $\operatorname{tg} x = t$ ўрнига қўйиш билан рационаллаштирилади. Бу ҳолда

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + t^2},$$

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1 + t^2},$$

$$x = \operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2};$$

г) агар $R(\operatorname{tg} x)$ бўлса, у ҳолда интеграл остидаги ифода яна $\operatorname{tg} x = t$ ўрнига қўйиш билан рационаллаштирилади.

1-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5}.$$

Ечиш. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ ўрнига қўйишдан фойдаланиб, интегрални топамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5} &= \left\{ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \right. \\ &\quad \left. dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \right\} = \\ &= \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} + 3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2 \int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} = \int \frac{dt}{t^2 + 4t + 4} = \\ &= \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C = C - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}. \end{aligned}$$

2-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)}{\cos 2x} dx.$$

Ечиш. Интеграл остидаги функция $\sin x$ га нисбатан тоқ функция, шунинг учун $\cos x = t$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx &= \left\{ \cos x = t; \sin^2 x = 1 - t^2, \right. \\ &\quad \left. \sin x dx = -dt; \cos 2x = 2t^2 - 1 \right\} = \\ &= \int \frac{(1 + \sin^2 x) \sin x}{\cos 2x} dx = \int \frac{(2 - t^2)(-dt)}{2t^2 - 1} = \int \frac{t^2 - 2}{2t^2 - 1} dt = \frac{1}{2} \int \frac{(2t^2 - 4) dt}{2t^2 - 1} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{3}{2t^2 - 1} \right) dt = \frac{t}{2} - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{2t^2 - 1} =$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}t - 1}{\sqrt{2}t + 1} \right| + C = \frac{1}{2} \cos x - \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\sqrt{2} \cos x + 1} \right| + C.$$

3-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx.$$

Ечиш. Интеграл остидаги функция $\cos x$ га нисбатан ток функция, шу сабабли $\sin x = t$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x (1 + \cos^2 x) \cos x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \sin x = t, \cos^2 x = 1 - t^2 \\ \cos x dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{(1 - t^2)(2 - t^2)}{t^2 + t^4} dt = \int \frac{t^4 - 3t^2 + 2}{t^4 + t^2} dt.$$

Энди нотўғри рационал касрнинг бутун қисмини ажратиб ва тўғри рационал касрни энг содда касрларга ёйиб, интегрални топамиз:

$$\int \frac{t^4 - 3t^2 + 2}{t^4 + t^2} dt = \int \left(1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1 + t^2} \right) dt = t - \frac{2}{t} - 6 \arctg t + C.$$

Шундай қилиб, эски ўзгарувчига қайтсак:

$$\int \frac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x} dx = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6 \arctg(\sin x) + C.$$

4-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3}$$

Ечиш. Интеграл остидаги функция $\sin x$ ва $\cos x$ га нисбатан жуфт функция, шу сабабли $\tg x = t$ деб оламиз:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3} = \left\{ \begin{array}{l} \tg x = t; \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}, \\ x = \arctg t; dx = \frac{dt}{1 + t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{dt}{1 + t^2}}{\frac{t^2}{1 + t^2} + 3} =$$

$$= \int \frac{dt}{3 + 4t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2t)}{(\sqrt{3})^2 + (2t)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{2\tg x}{\sqrt{3}} + C.$$

5- м и с о л. Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$$

Е ч и ш. Интеграл остидаги функция факат $\operatorname{tg} x$ га боғлиқ бўлгани учун $\operatorname{tg} x = t$ деб олампиз:

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x} = \left\{ \operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \right\} = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+t)}.$$

Интеграл остидаги функцияни энг содда касрларга ёйиб, интегрални топамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+t)} &= \int \left(\frac{1}{2(1+t)} - \frac{t-1}{2(1+t^2)} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \ln|1+t| - \frac{1}{4} \ln|1+t^2| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C. \end{aligned}$$

Эски ўзгарувчи x га кайтсак,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x} &= \frac{1}{2} \ln|1+\operatorname{tg} x| - \frac{1}{4} \ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + \frac{1}{2} x + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \right| + \frac{1}{2} x + C = \frac{1}{2} \ln |\cos x(1+\operatorname{tg} x)| + \\ &+ \frac{1}{2} x + C = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \ln |\cos x + \sin x| + C. \end{aligned}$$

4- дарсхона топшириғи

Берилган аниқмас интегралларни топинг:

1. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$ Ж: $\frac{1}{5} \ln \left| 5\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 \right| + C.$
2. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$ Ж: $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(2\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$
3. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x + \sin x}$ Ж: $\ln |\sin x| - \sin x + C.$
4. $\int \frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x - 1)}$ Ж: $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x} \right| + C.$
5. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$ Ж: $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} (3 \operatorname{tg} x) + C.$
6. $\int \frac{\sin^2 x \cos x dx}{\sin x + \cos x}$ Ж: $\frac{1}{4} \ln |\sin x + \cos x| - \frac{1}{4} \cos x (\sin x + \cos x) + C.$

$$7. \int \frac{dx}{4 + \lg x + 4 \operatorname{ctg} x} \quad \text{Ж: } \frac{4}{25}x - \frac{3}{25} \ln |\lg x + 2| + \frac{2}{5(\lg x + 2)} - \\ - \frac{3}{25} \ln |\cos x| + C.$$

$$8. \int \frac{(2 \lg x + 3) dt}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} \quad \text{Ж: } \ln(\lg^2 x + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\lg x}{\sqrt{2}} + C.$$

4- мустақил иш

Берилган аникмас интегралларни топинг:

$$1. \int \frac{dx}{5 + 4 \sin x} \quad \text{Ж: } \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} + C.$$

$$2. \int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx \quad \text{Ж: } \ln(2 + \cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

$$3. \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 6 \sin x + 5} \quad \text{Ж: } \frac{1}{4} \ln \frac{5 - \sin x}{1 - \sin x} + C.$$

$$4. \int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x} \quad \text{Ж: } \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{2} \right) + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x} \quad \text{Ж: } \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C.$$

$$6. \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx \quad \text{Ж: } C - \ln |\cos x - \sin x|.$$

5- §. Таркибида тригонометрик функциялар бўлган баъзи интеграллар

6.5.1. $\int \sin^n x \cos^m x dx$ кўринишидаги интеграллар куйидагича топилади:

а) агар $n > 0$ ток бўлса, $\cos x = t$, $\sin x dx = -dt$ ўрнига қўйиш интегрални рационаллаштиради.

1-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx.$$

Ечиш. $\sin^3 x$ даражада битта $\sin x$ қўпайтувчини ажратамиз ва уни дифференциал остига киритамиз:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = \\ &= - \int \sin^2 x \cos^2 x d(\cos x) = - \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x d(\cos x) = \\ &= - \int (\cos^2 x - \cos^4 x) d(\cos x) = C - \frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x; \end{aligned}$$

б) агар $m > 0$ ток бўлса, у ҳолда $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ ўрнига қўйиш интегрални рационаллаштиради.

5- м и с о л. Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$$

Е ч и ш. Интеграл остидаги функция факат $\operatorname{tg} x$ га боғлиқ бўлгани учун $\operatorname{tg} x = t$ деб оламиз:

$$\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x} = \left\{ \operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t, \right. \left. dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\} = \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+t)}$$

Интеграл остидаги функцияни энг содда касрларга ёйиб, интегрални топамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(1+t^2)(1+t)} &= \int \left(\frac{1}{2(1+t)} - \frac{t-1}{2(1+t^2)} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \ln|1+t| - \frac{1}{4} \ln|1+t^2| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C. \end{aligned}$$

Эски ўзгарувчи x га кайтсак,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x} &= \frac{1}{2} \ln|1+\operatorname{tg} x| - \frac{1}{4} \ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + \frac{1}{2} x + C = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} \right| + \frac{1}{2} x + C = \frac{1}{2} \ln |\cos x(1+\operatorname{tg} x)| + \\ &+ \frac{1}{2} x + C = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \ln |\cos x + \sin x| + C. \end{aligned}$$

4- дарсхона топшириғи

Берилган аникмас интегралларни топинг:

1. $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$ Ж: $\frac{1}{5} \ln \left| 5\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 \right| + C.$
2. $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$ Ж: $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} (2\operatorname{tg} \frac{x}{2}) + C.$
3. $\int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x + \sin x}$ Ж: $\ln |\sin x| - \sin x + C.$
4. $\int \frac{dx}{\sin x(2\cos^2 x - 1)}$ Ж: $\ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1+\sqrt{2}\cos x}{1-\sqrt{2}\cos x} \right| + C.$
5. $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$ Ж: $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} (3 \operatorname{tg} x) + C.$
6. $\int \frac{\sin^2 x \cos x dx}{\sin x + \cos x}$ Ж: $\frac{1}{4} \ln |\sin x + \cos x| - \frac{1}{4} \cos x (\sin x + \cos x) + C.$

$$7. \int \frac{dx}{4 + \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} x} \quad \text{Ж: } \frac{4}{25}x - \frac{3}{25} \ln |\operatorname{tg} x + 2| + \frac{2}{5(\operatorname{tg} x + 2)} - \\ - \frac{3}{25} \ln |\cos x| + C.$$

$$8. \int \frac{(2 \operatorname{tg} x + 3) dx}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} \quad \text{Ж: } \ln(\operatorname{tg}^2 x + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + C.$$

4- мустақил иш

Берилган аникмас интегралларни топинг:

$$1. \int \frac{dx}{5 + 4 \sin x} \quad \text{Ж: } \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{5 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4}{3} + C.$$

$$2. \int \frac{2 - \sin x}{2 + \cos x} dx \quad \text{Ж: } \ln(2 + \cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C.$$

$$3. \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x - 6 \sin x + 5} \quad \text{Ж: } \frac{1}{4} \ln \frac{5 - \sin x}{1 - \sin x} + C.$$

$$4. \int \frac{dx}{1 + 3 \cos^2 x} \quad \text{Ж: } \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{2} \right) + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{3 \sin^2 x + 5 \cos^2 x} \quad \text{Ж: } \frac{1}{\sqrt{15}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x}{\sqrt{5}} + C.$$

$$6. \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx \quad \text{Ж: } C - \ln |\cos x - \sin x|.$$

5- §. Таркибида тригонометрик функциялар бўлган баъзи интеграллар

6.5.1. $\int \sin^n x \cos^m x dx$ кўринишидаги интеграллар куйидагича топилади:

а) агар $n > 0$ ток бўлса, $\cos x = t$, $\sin x dx = -dt$ ўрнига қўйиш интегрални рационаллаштиради.

1-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx.$$

Ечиш. $\sin^3 x$ даражада битта $\sin x$ қўпайтувчини ажратамиз ва уни дифференциал остига киритамиз:

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cdot \cos^2 x dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx = \\ &= - \int \sin^2 x \cos^2 x d(\cos x) = - \int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x d(\cos x) = \\ &= - \int (\cos^2 x - \cos^4 x) d(\cos x) = C - \frac{1}{3} \cos^3 x + \frac{1}{5} \cos^5 x; \end{aligned}$$

б) агар $m > 0$ ток бўлса, у ҳолда $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ ўрнига қўйиш интегрални рационаллаштиради.

2- мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin^4 x}},$$

Е ч и ш.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^{4/3} x} &= \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sin^{4/3} x} = \\ &= \int \frac{(1 - \sin^2 x) d(\sin x)}{\sin^{4/3} x} = \int \left(\sin^{-\frac{4}{3}} x - \sin^{\frac{2}{3}} x \right) d(\sin x) = \\ &= -3 \sin^{-\frac{1}{3}} x - \frac{3}{5} \sin^{\frac{5}{3}} x + C = C - \frac{3}{\sqrt[3]{\sin x}} - \frac{3}{5} \sqrt[3]{\sin^5 x}. \end{aligned}$$

в) агар $m, n \geq 0$ жуфт бўлсалар, у ҳолда

$$\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\alpha),$$

$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha)$ формулалардан фойдаланган ҳолда иккиланган бурчакларга ўтиб, синус ва косинуснинг даражасини пасайтириш керак.

3- мисол. Интегрални топинг:

$$\int \sin^4 x dx.$$

Е ч и ш.

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \int (\sin^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} (x - \sin 2x + \\ &+ \int \cos^2 2x dx) = \frac{1}{4} (x - \sin 2x + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx) = \\ &= \frac{1}{4} (x - \sin 2x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x) + C = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) + C. \end{aligned}$$

г) агар $m, n \leq 0$ ва улардан бири тоқ бўлса, у ҳолда сурат ва махражни $\sin x$ ёки $\cos x$ га, буларнинг қайсиниси тоқ даражадалигига қараб, қўшимча кўпайтириш усулидан фойдаланиш керак.

4- мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

Е ч и ш.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^2 x} = - \int \frac{d(\cos x)}{1 - \cos^2 x} =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \right| + C = \ln \sqrt{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1} + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

д) агар $m+n < 0$ ва жуфт бўлса, у ҳолда $\operatorname{tg} x = t$ ёки $\operatorname{ctg} x = t$ ўрнига қўйишдан фойдаланиш мақсадга мувофиқ. Агар бунда $m < 0$ ва $n < 0$ бўлса, у ҳолда сунъий усул қўлланиши мумкин, бунинг учун суратдаги 1 ни $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^k = 1$ «тригонометрик бир»га алмаштириш керак. Бу формулада $k = \frac{|m+n|}{2} - 1$.

5-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{\sin^{\frac{1}{3}} x}{\cos^{\frac{13}{3}} x} dx.$$

Ечиш. Бунда $m = \frac{1}{3}$, $n = -\frac{13}{3}$, $m+n = -4 < 0$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^{\frac{1}{3}} x}{\cos^{\frac{13}{3}} x} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t, \frac{dx}{\cos^2 x} = dt; \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right\} = \int \frac{\operatorname{tg}^{\frac{1}{3}} x dx}{\cos^2 x \cos^{\frac{10}{3}} x} = \int \frac{t^{\frac{1}{3}} dt}{1+t^2} = \\ &= \int t^{\frac{1}{3}} (1+t^2) dt = \int (t^{\frac{1}{3}} + t^{\frac{7}{3}}) dt = \int t^{\frac{1}{3}} dt + \int t^{\frac{7}{3}} dt = \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + \\ &+ \frac{3}{10} t^{\frac{10}{3}} + C = \frac{3}{4} \operatorname{tg}^{\frac{4}{3}} x + \frac{3}{10} \operatorname{tg}^{\frac{10}{3}} x + C. \end{aligned}$$

6-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}.$$

Ечиш. Бунда $m = -2$, $n = -4$, $m+n = -6 < 0$.

$k = \frac{|m+n|}{2} - 1 = \frac{6}{2} - 1 = 2$. Шундай қилиб:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} &= \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^2 x \cos^4 x} dx = \int \frac{(\sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \\ &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx + \int \frac{2dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \\ &= \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x \cos^2 x} + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C = \\ &= \int \operatorname{tg}^2 x dx + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + 2\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C. \end{aligned}$$

6.5.2. $\int \operatorname{tg}^n x dx$ ва $\int \operatorname{ctg}^n x dx$ шаклдаги интеграллар, бунда $n > 0$ — бутун сон.

Бу хил интегралларни топишда $\operatorname{tg}^2 x$ ёки $\operatorname{ctg}^2 x$ кўпайтувчилар ажратилади ва улар $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ ва $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$ формулалар бўйича алмаштирилади, бу формулалар тангенс ва котангенс даражаларини кетма-кет пасайтиради. Бу хил интегралларни $\operatorname{tg} x = t$ ёки $\operatorname{ctg} x = t$ ўрнига қўйишлар ёрдамида ҳам топиш мумкин.

7- м и с о л. Интегрални топинг:

$$\int \operatorname{tg}^4 x \, dx.$$

Е ч и ш. Бу мисолга юқоридаги усулни қўллаймиз:

$$\begin{aligned} 1\text{-усл.} \quad \int \operatorname{tg}^4 x \, dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg}^2 x \, dx = \int \operatorname{tg}^2 x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg}^2 x \, dx = \\ &= \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x + C. \end{aligned}$$

2-усл.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^4 x \, dx &= \begin{cases} \operatorname{tg} x = t, \\ x = \operatorname{arctg} t, \, dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{cases} = \int \frac{t^4 dt}{1+t^2} = \int \frac{(t^4-1)+1}{1+t^2} dt = \\ &= \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2} \right) dt = \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C. \end{aligned}$$

6.5.3. $\int \sec^n x \, dx$ ва $\int \operatorname{cosec}^n x \, dx$ кўринишдаги интеграллар. Иккита ҳолни кўрамиз:

а) агар n тоқ бўлса, у ҳолда $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ алмаштиришдан фойдаланилади;

б) агар n жуфт бўлса, у ҳолда $\operatorname{tg} x = t$ ўрнига қўйишдан фойдаланилади ёки $\sec^2 x$, ёки $\operatorname{cosec}^2 x$ кўпайтувчи ажратилиб, $\sec^2 x \, dx = d(\operatorname{tg} x)$ ёки $\operatorname{cosec}^2 x = d(\operatorname{ctg} x)$ деб олинади, қолган даражалар эса

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \text{ ёки } \operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$$

формулалар бўйича алмаштирилади.

8- м и с о л. Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

Е ч и ш. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ универсал ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \left\{ \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; \right. \left. x = \frac{2t}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \right\} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{8t^3}{(1+t^2)^3}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int \frac{(1+t)^2}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1+2t^2+t^4}{t^3} dt = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{t^3} + \frac{2}{t} + t \right) dt = \\
&= \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2t^2} + 2\ln|t| + \frac{t^2}{2} \right) + C = \frac{1}{2} \ln|t| + \frac{t^4-1}{8t^2} + C = \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 1}{8 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + C = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \\
&+ \frac{\left(\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} \right) \cdot 1}{\cos^2 \frac{x}{2} \cdot 8 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} + C = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + C.
\end{aligned}$$

9- мисол. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}$ интегрални топинг.

Ечиш. $\frac{1}{\cos^2 x}$ кўпайтувчини ажратамиз ва $\frac{dx}{\cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$ деб оламиз.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos^6 x} &= \int \frac{1}{\cos^4 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} \right)^2 d(\operatorname{tg} x) = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)^2 d(\operatorname{tg} x) = \\
&= \int (1 + 2\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x) d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x + \frac{2}{3} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + C.
\end{aligned}$$

6.5.4. $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$, $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$, $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$ кўри-
нишдаги интеграллар куйидаги маълум тригонометрик формула-
лардан фойдаланилса, осон ҳисобланади:

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta));$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta));$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Бу формулалар тригонометрик функциялар кўпайтмасини
йиғинди шаклида ифодалаш имконини беради.

10- мисол. $\int \sin 2x \cos 5x dx$ интегрални топинг.

Ечиш. Тригонометрик функциялар кўпайтмасини йиғинди
билан алмаштирамиз:

$$\begin{aligned}
\int \sin 2x \cos 5x dx &= \frac{1}{2} \int (\sin 7x + \sin(-3x)) dx = \frac{1}{2} \int \sin 7x dx - \\
&- \frac{1}{2} \int \sin 3x dx = -\frac{1}{14} \cos 7x + \frac{1}{6} \cos 3x + C.
\end{aligned}$$

11- м и с ол. Интегрални топинг:

$$\int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x dx.$$

Е чи ш . Келтирилган формулаларни икки марта куллаймиз:

$$\begin{aligned} \int \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos 3x + \cos (-x)) \cos 4x dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos 3x \cos 4x dx + \frac{1}{2} \int \cos x \cos 4x dx = \\ &= \frac{1}{4} \int (\cos 7x + \cos (-x)) dx + \frac{1}{4} \int (\cos 5x + \cos (-3x)) dx = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{7} \sin 7x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{3} \sin 3x + \sin x \right) + C = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{7} \sin 7x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{3} \sin 3x + \sin x \right) + C. \end{aligned}$$

5- дарсхона топшириғи

Берилган аникмас интегралларни топинг:

1. $\int \cos^3 x \cdot \sin^6 x dx.$ Ж: $C + \frac{1}{3\sin^3 x} - \frac{1}{5\sin^5 x}.$
2. $\int \sin^5 x \sqrt{\cos^3 x} dx.$ Ж: $\frac{5}{9} \sqrt{\cos^{18} x} - \frac{5}{8} \sqrt{\cos^8 x} - \frac{5}{28} \sqrt{\cos^{28} x} + C.$
3. $\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx.$ Ж: $\frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$
4. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$ Ж: $\frac{(\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg}^4 x + 10\operatorname{tg}^2 x + 1)}{3\operatorname{tg}^3 x} + C.$
5. $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x}.$ Ж: $\frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C.$
6. $\int \operatorname{tg}^3 x dx.$ Ж: $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + C.$
7. $\int \frac{dx}{\sin^6 x}.$ Ж: $C - \operatorname{ctg} x - \frac{2}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x.$
8. $\int \cos x \cdot \cos^3 x dx.$ Ж: $C + \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{28} \sin 7x + \frac{1}{20} \sin 5x.$

Берилган аниқмас интегралларни топинг:

1. $\int \sin^3 x dx$. Ж: $C - \cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$.

2. $\int \cos^4 \frac{x}{2} dx$. Ж: $\frac{3x}{8} + \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{16} + C$.

3. $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cdot \cos^5 x}$. Ж: $C - \frac{1}{2 \operatorname{tg}^2 x} + 3 \ln |\operatorname{tg} x| + \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x$.

4. $\int \frac{dx}{\cos^5 x}$. Ж: $\frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3}{8} \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln |\operatorname{tg} x + \sec x| + C$.

5. $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. Ж: $\operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C$.

6. $\int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x dx$. Ж: $\frac{1}{24} \cos 6x - \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$.

6-§. Иррационал ифодаларни интеграллаш

6.6.1. $\int R \left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{n_1}{s}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{n_2}{s}}, \dots \right) dx$

кўринишдаги интеграллар (R — рационал функция ва m_1, n_1, m_2, n_2 — бутун сонлар) $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$ ўрнига қўйиш ёрдамида интегралланади, бунда $s = \frac{n_1}{s}, \frac{n_2}{s}, \dots$ сонларнинг энг кичик умумий карралиси (ЭКУК), яъни $s = \text{ЭКУК}(n_1, n_2, \dots)$.

Хусусан, $\int R(x, (ax+b)^{\frac{n_1}{s}}, (ax+b)^{\frac{n_2}{s}}, \dots) dx$ кўринишдаги интеграллар $ax+b = t^s$ ўрнига қўйиш ёрдамида топилади,

$\int R(x, x^{\frac{n_1}{s}}, x^{\frac{n_2}{s}}, \dots) dx$ кўринишдаги интеграллар эса $x = t^s$ ўрнига

қўйиш ёрдамида янги ўзгарувчи t нинг рационал функцияси интегралига келтирилади, бунда умумий ҳолдагидек, $s = \text{ЭКУК}(n_1, n_2, \dots)$.

1- мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} - \sqrt{2x+1}}$$

Ечиш. ЭКУК (2, 3)=6, шунинг учун:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2 - \sqrt{2x+1}}} &= \left\{ \begin{array}{l} 2x+1=t^6; \\ x=\frac{1}{2}(t^6-1); dx=3t^5 dt \end{array} \right\} = \\ &= \int \frac{3t^5 dt}{t^4 - t^3} = 3 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = 3 \int \frac{(t^2-1)+1}{t-1} dt = \\ &= 3 \int \left(t+1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \frac{3}{2} (t+1)^2 + \ln|t-1| + C = \\ &= \left\{ t = \sqrt[6]{2x+1} \right\} = \frac{3}{2} \left(\sqrt[6]{2x+1} + 1 \right)^2 + \ln \left| \sqrt[6]{2x+1} - 1 \right| + C. \end{aligned}$$

6.6.2. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$ кўринишдаги интеграллар (R — рационал функция) квадрат учхаддан тўла квадрат ажратилганидан ва ўзгарувчи $z = x + \frac{b}{2a}$ деб олинганидан кейин куйидаги кўринишдаги интеграллардан бирига келтирилади:

а) $\int R(z, \sqrt{m^2 - z^2}) dz,$

б) $\int R(z, \sqrt{m^2 + z^2}) dz,$

в) $\int R(z, \sqrt{z^2 - m^2}) dz.$

Агар

а) $z = m \sin t$ ёки $z = m \cos t;$

б) $z = m \operatorname{tg} t$ ёки $z = m \operatorname{ctg} t;$

в) $z = m \operatorname{sech} t$ ёки $z = m \operatorname{cosech} t$

тригонометрик ўрнига қўйишлардан фойдаланилса, бу интеграллар $\int R(\sin t, \cos t) dt$ кўринишдаги интегралларга келтирилади.

2-мисол. Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+7}^3}.$$

Ечиш. Квадрат учхаддан тўла квадрат ажратамиз ва янги z ўзгарувчини киритамиз. Шундан кейин юқорида келтирилган б) тригонометрик ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+7}^3} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+3}^3} = \left\{ \begin{array}{l} x+2=z, \\ dx=dz \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{dz}{\sqrt{(z^2+3)^3}} = \left\{ z = \sqrt{3} \operatorname{tg} t, \right. \\
&\quad \left. dz = \frac{\sqrt{3} dt}{\cos^2 t} \right\} = \int \frac{\frac{\sqrt{3} dt}{\cos^2 t}}{\sqrt{(3 \operatorname{tg}^2 t + 3)^3}} = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\cos^2 t \sqrt{(1+\operatorname{tg}^2 t)^3}} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\cos^2 t \cdot \frac{1}{\cos^3 t}} = \\
&= \frac{1}{3} \int \cos t dt = \frac{1}{3} \sin t + C = \frac{1}{3} \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+\frac{z^2}{3}}}}{\sqrt{1+\frac{z^2}{3}}} + C = \\
&= \frac{1}{3} \frac{z}{\sqrt{3+z^2}} + C = \frac{1}{3} \frac{x+2}{\sqrt{3+(x+2)^2}} + C = \frac{x+2}{3\sqrt{x^2+4x+7}} + C.
\end{aligned}$$

6.6.3. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ кўринишдаги интеграл квадрат учхаддан тўла квадрат ажратиш йўли билан $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ ёки $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}}$ жадвал интегралларидан бирига келтирилади.
3- м и с о л . Интегрални топинг:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$$

Е чи ш . Квадрат учхадни ушбу кўринишга келтирамиз:
 $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$. Бундан фойдаланиб, интегрални топамиз:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}| + C.$$

6.6.4. $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ кўринишдаги интеграллар суратдан квадрат учхаднинг ҳосиласини ажратиш натижасида иккита интегралга келтирилади: улардан бири $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$ жадвал интеграл, иккинчиси эса 6.6.3- бандда каралган интегралдир.

4- м и с о л . $\int \frac{3x+4}{\sqrt{6x-x^2-8}} dx$ интегрални топинг.

Е чи ш . Суратда интеграл остидаги ифоданинг ҳосиласини ажратамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+4}{\sqrt{6x-x^2-8}} dx &= \int \frac{-\frac{3}{2}(-2x+6) + 13}{\sqrt{6x-x^2-8}} dx = \\ &= -\frac{3}{2} \int \frac{-2x+6}{\sqrt{6x-x^2-8}} dx + 13 \int \frac{d(x-3)}{\sqrt{1-(x-3)^2}} = \\ &= -3 \sqrt{6x-x^2-8} + 13 \arcsin(x-3) + C. \end{aligned}$$

6.6.5. $\int \frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ кўринишдаги интеграллар $\frac{1}{x-\alpha} = t$ ўрнига қўйиш ёрдамида 6.6.3-бандда қаралган интегралга келтирилади.

5-мисол. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x-3}}$ интегрални топинг.

Ечиш. $\frac{1}{x+1} = t$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x+1} = t; \quad x = \frac{1}{t} - 1; \\ x+1 = \frac{1}{t}; \quad dx = -\frac{dt}{t^2} \end{array} \right\} = \\ &= -\int \frac{t \cdot \frac{dt}{t^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 + 3\left(\frac{1}{t}-1\right) + 3}} = -\int \frac{dt}{t \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 1}} = \\ &= -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t + 1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} = C - \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 + t + 1} \right| = \\ &= C - \ln \left| \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1} \right|. \end{aligned}$$

6.6.6. $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ кўринишдаги интеграллар (m, n, p — рационал сонлар) дифференциал биномлари интеграллари деб аталиб, унга ҳолдагина элементар функциялар орқали ифодаланади:

а) агар p — бутун сон бўлса, у ҳолда интеграл $x=t^s$ ўрнига қўйиш ёрдамида (бунда s — касрлар махражлари m ва n нинг энг кичик умумий қарралиси) рационал функция интегралига келтирилади;

б) агар $\frac{m+1}{n}$ — бутун сон бўлса, у ҳолда интеграл $a+bx^n=t^s$ ўрнига қўйиш билан рационаллаштирилади, бунда s — p касрнинг махражи;

в) $\frac{m+1}{n} + p$ — бутун сон бўлса, у ҳолда $a + bx^n = t^n \cdot x^n$ деб оламиз, бунда $s = p$ касрнинг махражи.

6-мисол. $\int \sqrt[3]{x} (2 + \sqrt{x})^2 dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $p=2$ — бутун сон, демак, биринчи а) ҳолга эгамиз:

$$\begin{aligned} \int x^{\frac{1}{3}} (x + x^{\frac{1}{2}}) dx &= \left\{ m = \frac{1}{3}, n = \frac{1}{2}; \right. \\ &\quad \left. s = \text{ЭКУК}(2, 3) = 6, x = t^6, dx = 6t^5 dt \right\} = \\ &= \int t^2 (2 + t^3)^2 6t^5 dt = 6 \int (4t^7 + 4t^{10} + t^{13}) dt = \\ &= 6 \left(\frac{1}{2} t^8 + \frac{4}{11} t^{11} + \frac{1}{14} t^{14} \right) + C = \{ t = \sqrt[6]{x} \} = \\ &= 3 \sqrt[3]{x^4} + \frac{24}{11} \sqrt[6]{x^{11}} = \frac{3}{7} \sqrt[3]{x^7} + C \end{aligned}$$

7-мисол. Интегрални ҳисобланг:

$$\int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

Ечиш. Бунда $m = -\frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = \frac{1}{2}$, $\frac{m+1}{n} = \left(-\frac{2}{3} + 1\right) : \frac{1}{3} = 1$ — бутун сон. Иккинчи б) ҳолга эгамиз:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{x^2}} dx &= \left\{ \begin{aligned} 1 + x^{\frac{1}{3}} &= t^2, & \frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}} &= 2t dt \\ x^{\frac{1}{3}} &= t^2 - 1 \end{aligned} \right\} = \\ &= \int 6t^2 dt = 2t^3 + C = 2 \sqrt{(1 + \sqrt[3]{x})^3} + C. \end{aligned}$$

8-мисол. $\int \frac{dx}{x^{11} \sqrt{1+x^4}}$ интегрални топинг:

Ечиш. Бунда $p = -\frac{1}{2}$, $m = -11$, $n = 4$, $\frac{m+1}{n} = \frac{-11+1}{4} = -\frac{5}{2}$ — каср сон, аммо $\frac{m+1}{n} + p = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = -3$ — бутун сон. Учинчи в) ҳолга эгамиз:

$$\begin{aligned}
 \int x^{-11} (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} dx &= \left\{ 1+x^4 = t^2 \cdot x^4, \right. \\
 &\quad \left. x = \frac{1}{(t^2-1)^{\frac{1}{4}}}; \quad dx = -\frac{tdt}{2(t^2-1)^{\frac{5}{4}}} \right\} = \\
 &= \int -\frac{1}{2} (t^2-1)^{-\frac{1}{4}-11} \cdot \left(\frac{t^2}{t^2-1} \right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{tdt}{(t^2-1)^{\frac{5}{4}}} = \\
 &= -\frac{1}{2} \int (t^2-1)^{\frac{11}{4}} \cdot \frac{dt}{(t^2-1)^{\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{2} \int (t^2-1)^2 dt = \\
 &= C - \frac{t^5}{10} + \frac{t^3}{3} - \frac{t}{2} = C - \frac{\sqrt{(1+x^4)^5}}{10x^{10}} + \frac{\sqrt{(1+x^4)^3}}{3x^6} - \frac{\sqrt{1+x^4}}{2x^2}.
 \end{aligned}$$

6- дарсхона топириғи

Аникмас интегралларни топинг:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}}.$

Ж: $C - \sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2 \ln |\sqrt[4]{1-2x} - 1|.$

2. $\int \frac{\sqrt[6]{x} dx}{1+\sqrt[3]{x}}.$

Ж: $\frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} - 2\sqrt[6]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C.$

3. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}.$

Ж: $\ln \left| \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right| + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$

4. $\int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+x+2}} dx.$

Ж: $3\sqrt{x^2+x+2} + \frac{1}{2} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+2} \right| + C.$

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2-2x-1}}.$

Ж: $C - \operatorname{arc} \sin \frac{x+1}{x\sqrt{3}}.$

6. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}.$

Ж: $C + \sqrt{\frac{x}{x+2}}.$

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} (\sqrt[4]{x}+1)^{10}}.$

Ж: $C - \frac{1}{2(\sqrt[4]{x}+1)^2} + \frac{4}{9(\sqrt[4]{x}+1)^9}.$

8. $\int \sqrt[3]{x} \sqrt{2 + \sqrt[3]{x^2}} dx$.
 Ж: $\frac{2}{3} \left(\sqrt{2 + \sqrt[3]{x^2}} \right)^9 - \frac{12}{5} \left(\sqrt{2 + \sqrt[3]{x^2}} \right)^8 + C$.
9. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$. Ж: $\frac{(2x^2-1) \sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C$.
10. $\int \sqrt{x^2-4} dx$. Ж: $\frac{x}{2} \sqrt{x^2-4} - 2 \ln |x + \sqrt{x^2-4}| + C$.

6- мустақил иш

Аниқмас интегралларни топинг.

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3} (\sqrt[4]{x+3} - 1)}$. Ж: $4 \sqrt{x+3} + 4 \ln |\sqrt[4]{x+3} - 1| + C$.
2. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}} dx$.
 Ж: $\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} - 3 \sqrt[3]{x} - 6 \sqrt[6]{x} + 3 \ln |\sqrt[3]{x} + 1| + 6 \arctg \sqrt[6]{x} + C$.
3. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$. Ж: $\sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \ln |x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}| + C$.
4. $\int \frac{dx}{(x-1) \sqrt{6x-x^2-5}}$. Ж: $C - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5-x}{x-1}}$.
5. $\int \sqrt{1-2x-x^2} dx$. Ж: $\frac{x+1}{2} \sqrt{1-2x-x^2} + \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$.
6. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$. Ж: $C + \frac{x^3}{3 \sqrt{(1+x^2)^3}}$.
7. $\int \sqrt[3]{x} \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^4}} dx$. Ж: $\frac{21}{32} \sqrt{(1 + \sqrt[3]{x^4})^8} + C$.

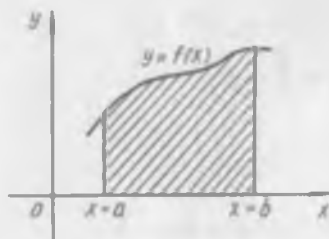
7-§. Аниқ интеграл. Ньютон — Лейбниц формуласи.

Аниқ интегралда ўзгарувчини алмаштириш.

Бўлаклаб интеграллаш

6.7.1. $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада аниқланган ва узлуксиз бўлсин. Бу кесмани $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ нукталар билан n та қисмга бўламиз. Ҳар бир (x_{i-1}, x_i) ораликдан ихтиёрий ξ_i нуктани оламиз ва ушбу йиғиндини тузамиз:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$



23-шакл

бунда $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Ушбу $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

куринишдаги йиғинди *интеграл йиғинди*, бу йиғиндининг $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ даги лимитини, агар бу лимит мавжуд бўлса, $f(x)$ функциядан a дан b гача олинган *аниқ интеграл* дейилади ва

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

куринишда белгиланади. Бу ҳолда $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада *интегралланувчи функция* дейилади. a ва b сонлар мос равишда *интеграллашнинг қуйи* ва *юқори чегаралари* дейилади.

Функция $[a, b]$ кесмада *интегралланувчи* бўлиши учун унинг шу кесмада узлуксиз бўлиши етарли.

Агар $[a, b]$ кесмада $f(x) > 0$ бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ интеграл

геометрик жиҳатдан $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ ва $x = b$ чизиклар билан чегараланган эгри чизикли трапеция куринишдаги шаклнинг юзини ифодалайди (23-шакл).

6.7.2. Аниқ интегралнинг асосий хоссаларини келтирамыз.

а) $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx;$

б) $\int_a^a f(x) dx = 0;$

в) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$

г) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx.$

д) $\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$, бунда k — узгармас;

е) агар $[a, b]$ кесмада $f(x) \geq 0$ бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx \geq 0;$

ж) агар $[a, b]$ кесмада $f(x) \geq g(x)$ бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx \geq$

$\int_a^b g(x) dx;$

з) агар m ва M мос равишда $f(x)$ функциянинг $[a, b]$ кесмадаги энг кичик ва энг катта киймати бўлса, у ҳолда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

тенгсизлик ўринли (аник интегрални баҳолаш ҳақидаги теорема);

и) $\int_a^b f(x) dx = f'(c)(b-a)$, бунда $c \in (a, b)$ (ўрта киймат ҳақидаги теорема).

6.7.3. Агар $F(x)$ $[a, b]$ кесмада узлуксиз $f(x)$ функциянинг бошлангич функцияларидан бири бўлса, у ҳолда Ньютон — Лейбницнинг қуйидаги формуласи ўринли:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Бу формуладан аниқ интегралларни ҳисоблашда фойдаланилади.

1-мисол. Интегрални ҳисобланг: $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$.

Ечиш. $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x} = \int_1^2 \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln |\ln x| \Big|_1^2 = \ln(\ln e^2) - \ln(\ln e) = \ln 2$.

2-мисол. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$ ни ҳисобланг.

Ечиш. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \sin x dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) d(\cos x) =$
 $= -\cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} \cos^3 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0) + \frac{1}{3}(\cos^3 \frac{\pi}{2} - \cos^3 0) = \frac{2}{3}.$

6.7.4. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада узлуксиз, $x = \varphi(t)$ функция эса дифференциалланувчи бўлиб, шу билан бирга $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ бўлса, у ҳолда ушбу тенглик ўринли:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Кўпинча $x = \psi(t)$ ўрнига қўйиш ўрнига $t = \psi(x)$ тескари алмаштиришдан фойдаланилади. Бу ҳолда интеграллашнинг янги чегаралари α ва β бевосита $\alpha = \psi(a)$ ва $\beta = \psi(b)$ тенгликлардан топилади. Бунда интеграллаш чегараларини алмаштиришни қуйидаги жадвал шаклида ёзиш қулай:

x	t
a	α
b	β

3-мисол. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $x = \sin t$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз:

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t, \\ dx = \cos t dt, \end{array} \right. \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\pi}{4} \\ \hline 1 & \frac{\pi}{2} \\ \hline \end{array} =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t} \cos t dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt =$$

$$= (-\operatorname{ctg} t - t) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) - \left(-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

4-мисол. $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$ интегрални ҳисобланг.

Ечиш. $t = \sqrt{x+1}$ формула бўйича ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} = \left\{ \begin{array}{l} t = \sqrt{x+1}, \\ x = t^2 - 1, \end{array} dx = 2t dt \right. \begin{array}{|c|c|} \hline x & t \\ \hline 3 & 2 \\ \hline 8 & 3 \\ \hline \end{array} =$$

$$= \int_2^3 \frac{(t^2-1)2t dt}{t} = 2 \int_2^3 (t^2-1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_2^3 =$$

$$= 2(9-3) - 2\left(\frac{8}{3} - 2\right) = \frac{32}{3}.$$

6.7.5. Агар $u = u(x)$, $v = v(x)$ функциялар ва уларнинг ҳосилалари $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

тенглик ўринли (бўлаклаб интеграллаш формуласи).

5-мисол. $\int_1^e x \ln^2 x dx$ интегрални топинг.

Ечиш. Бўлаклаб интеграллаш формуласини қўлаймиз:

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln^2 x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln^2 x, \quad du = 2 \ln x \cdot \frac{dx}{x}, \\ dv = x dx, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} x^2 \ln^2 x \Big|_1^e - \int_1^e x \ln x dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \\ dv = x dx, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} e^2 - \left(\frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{1}{4} (e^2 - 1). \end{aligned}$$

7-дарсхона топшириғи

Интегралларни ҳисобланг:

1. $\int_0^1 (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2}) dx$. Ж: $\frac{19}{15}$.

2. $\int_1^3 \frac{dx}{2x-1}$. Ж: $\frac{1}{2} \ln 3$.

3. $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$. Ж: $\frac{\pi}{4}$.

4. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$. Ж: $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

5. $\int_1^0 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$. Ж: $\frac{2}{3} \left(3 + \ln \frac{2}{5} \right)$.

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x}$ Ж: $\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}$.
7. $\int_{\ln 2}^{\ln 6} \frac{e^x \sqrt{e^x - 2}}{e^x + 2} dx$ Ж: $4 - \pi$.
8. $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{x \sqrt{1+4x^2}}$ Ж: $\ln \frac{\sqrt{5}+3}{2}$.
9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} \sin^4 x dx$ Ж: $\frac{4}{25} \left(e^{\frac{3\pi}{4}} + 1 \right)$.
10. $\int_0^1 x \cdot \operatorname{arctg} x dx$ Ж: $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$.

7- мустақил иш

Аниқ интегралларни ҳисобланг:

1. $\int_3^4 \frac{x^2+3}{x-2} dx$ Ж: $\frac{11}{2} + 7\ln 2$.
2. $\int_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$ Ж: $\frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{4}{7}$.
3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x dx$ Ж: $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$.
4. $\int_1^5 \frac{dx}{x + \sqrt{2x-1}}$ Ж: $2\ln 2 - \frac{1}{2}$.
5. $\int_2^{\frac{4}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx$ Ж: $\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3}$.
6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$ Ж: $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.
7. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos 2x dx$ Ж: $\frac{\pi^2-8}{32}$.

8.

$$\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1+x}}$$

$$\text{Ж: } \pi\sqrt{2}-4$$

8-§. Ясси фигураларнинг юзларини ҳисоблаш

6.8.1. $y=f(x)$ функция графиги, $x=a$, $x=b$ иккита тўғри чизик ва Ox ўқ билан чегараланган фигура эгри чизикли трапеция дейилади.

Бундай эгри чизикли трапециянинг юзи $f(x) \geq 0$ бўлса,

$$S = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b y dx$$

формула бўйича ҳисобланади (24-шакл).

$y=f_1(x)$ ва $y=f_2(x)$ ($f_2(x) \geq f_1(x)$) эгри чизиклар ва $x=a$ ҳамда $x=b$ иккита тўғри чизик билан чегараланган фигуранинг юзи

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

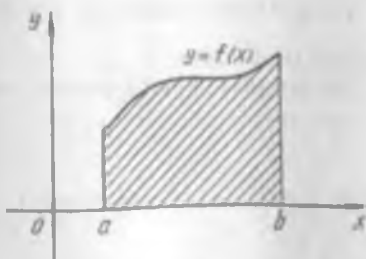
формула бўйича ҳисобланади (25-шакл).

Агар эгри чизикли трапеция $x=f(y)$ функция графиги, $y=c$, $y=d$ тўғри чизиклар ва Oy ўқ билан чегараланган бўлса, унинг юзи $f(y) \geq 0$ учун

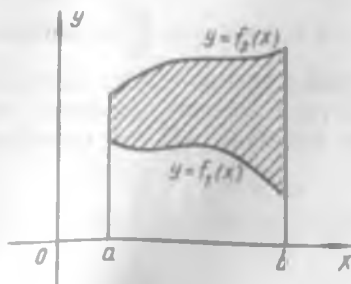
$$S = \int_c^d f(y) dy = \int_c^d x dy$$

формула бўйича ҳисобланади (26-шакл).

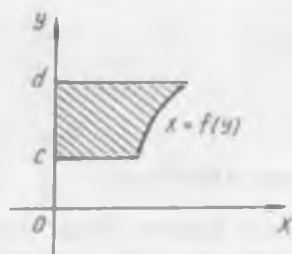
$x=f_1(y)$ ва $x=f_2(y)$ ($f_2(y) \geq f_1(y)$) эгри чизиклар, $y=c$ ва $y=d$ иккита тўғри чизик билан чегараланган фигура юзи



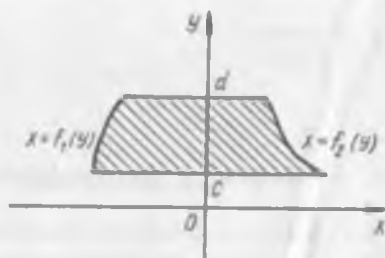
24-шакл



25-шакл



26-шакл



27-шакл

$$S = \int_c^d (f_2(y) - f_1(y)) dy$$

формула бўйича ҳисобланади (27-шакл).

6.8.2. Агар эгри чизик $x=x(t)$, $y=y(t)$ параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, у ҳолда шу эгри чизик, $x=a$, $x=b$ тўғри чизиклар ва Ox ўқ билан чегараланган эгри чизикли трапециянинг юзи

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} y(t) dx(t)$$

формула бўйича ҳисобланади, бунда t_1 ва t_2 $a=x(t_1)$, $b=x(t_2)$ ($y(t) \geq 0$) тенгламалардан аниқланади.

6.8.3. $r=r(\varphi)$ функция графиги ва $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ иккита нур билан чегараланган фигура эгри чизикли сектор дейилади, бунда φ ва r — кутб координаталари (28-шакл). Эгри чизикли секторнинг юзи

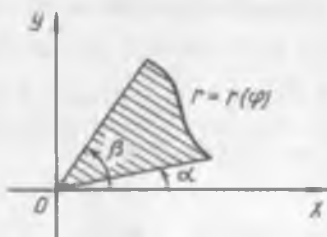
$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi$$

формула бўйича ҳисобланади.

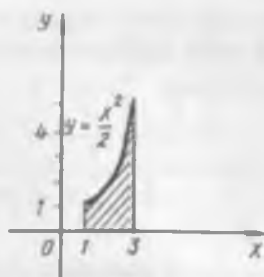
1-мисол. $y=\frac{x^2}{2}$ парабола, $x=1$, $x=3$ тўғри чизиклар ва Ox ўқ билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

Ечиш. Аввал шаклни чизамиз (29-шакл). Изланаётган юз ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$S = \int_a^b y dx = \int_1^3 \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^3}{6} \Big|_1^3 = \frac{1}{6} (3^3 - 1^3) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3} \text{ (кв. бирл.)}.$$



28- шакл



29- шакл

2- мисол. $x=2-y-y^2$ эгри чизик ва ординаталар ўқи билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг.

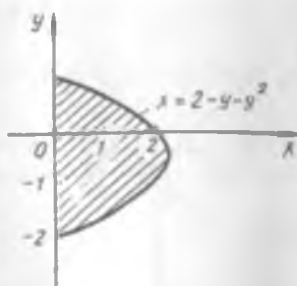
Ечиш. Фигура Oy ўқка ёпишиб туради (30- шакл), унинг юзи $S = \int_c^d x dy$ формула бўйича ҳисобланади.

$$S = \int_c^d x dy = \int_{-2}^1 (2-y-y^2) dy = \left(2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-4 - \frac{4}{2} + \frac{8}{3} \right) = \frac{9}{2} \text{ (кв. бирл.)}$$

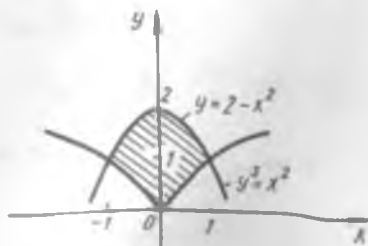
3- мисол. $y=2-x^2$ ва $y^3=x^2$ эгри чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламалар системасини ечиб, эгри чизикларнинг кесишиш нукталарини топамиз: $A(-1, 1)$ ва $B(1, 1)$. Интеграллаш чегаралари бўлиб $x=-1$ ва $x=1$ хизмат қилади.

Фигура юзи $S = \int_c^d (f_2(x) - f_1(x)) dx$ формула бўйича ҳисобланади (31- шакл).



30- шакл



31- шакл

$$S = \int_{-1}^1 (f_2(x) - f_1(x)) dx = \int_{-1}^1 (2 - x^2 - \sqrt[3]{x^2}) dx =$$

$$= \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5} \sqrt[3]{x^5} \right) \Big|_{-1}^1 = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{3}{5} \right) -$$

$$- \left(-2 + \frac{1}{3} + \frac{3}{5} \right) = \frac{16}{15} + \frac{16}{15} = \frac{32}{15} \text{ (кв. бирл.)}.$$

4- мисол. Эллипснинг

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases}$$

параметрик тенгламаларидан фойдаланиб, унинг юзини топинг.

Ечиш. Эллипснинг симметриклигидан фойдаланиб, изланаётган юзнинг тўртдан бирини ҳисоблаймиз (32- шакл). $x = a \cos t$ тенгламада $x = 0$ ва $x = a$ деб олсак, ушбу интеграллаш чегараларига эга бўламиз: $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = 0$. Ҳисоблаймиз:

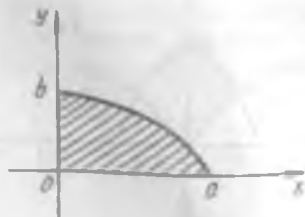
$$\frac{1}{4} S = \int_{t_1}^{t_2} y dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t (-a \sin t) dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt =$$

$$= \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = \frac{ab}{2} \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi ab}{4}.$$

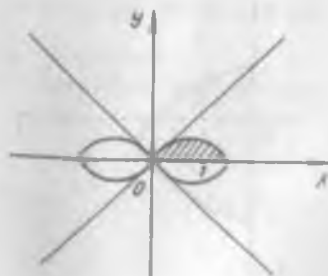
Демак, бутун фигуранинг юзи

$$S = \pi ab \text{ (кв. бирл.)}.$$

5- мисол. $r^2 = 2 \cos 2\varphi$ Бернулли лемнискатаси билан чегараланган фигура юзини топинг.



32- шакл



33- шакл

Е ч и ш. Эгри чизикнинг симметриклигидан фойдаланиб, олдин изланаётган юзнинг тўртдан бирини топамиз (33-шакл). Изланаётган юзнинг тўртдан бир қисми φ нинг 0 дан $\frac{\pi}{4}$ гача ўзгаришига тўғри келади.

Фигура юзини куйидаги формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\cos 2\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Шундай қилиб, изланаётган юз: $S = \frac{1}{2}$ (қв. бирл.).

8-дарсхона топшириғи

Берилган чизиклар билан чегараланган фигуралар юзларини ҳисобланг:

1. $y = 4x - x^2$ ва Ox ўқ билан. Ж: $\frac{32}{3}$ (қв. бирл.).

2. $y = (x-1)^2$ ва $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ Ж: $\frac{10}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \ln(3 + \sqrt{8}) \approx 4,58$ (қв. бирл.).

3. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ (бир аркаси) ва $y = 0$. Ж: 12π (қв. бирл.).

4. $r = 2a\cos\varphi$ ва $r = 2a\sin\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Ж: $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a^2$ (қв. бирл.).

5. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$. Ж: $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$ (қв. бирл.).

6. $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$. Ж: $\frac{125}{6}$ (қв. бирл.).

7. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $y = x$, $y = -x\sqrt{3}$. Ж: $\frac{25\pi}{24}$ (қв. бирл.).

8. $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$. Ж: $\frac{72\sqrt{3}}{5}$ (қв. бирл.).

8-мустақил иш

Берилган чизиклар билан чегараланган фигуралар юзларини ҳисобланг:

1. $y = -x^2$, $x + y + 2 = 0$. Ж: 4,5 (кв. бирл.).
2. $xy = 20$, $x^2 + y^2 = 4$ (1 чорак). Ж: $\frac{41}{2} \arcsin \frac{9}{41} + 20 \ln 0,8$ (кв. бирл.).
3. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$. Ж: $\frac{3}{8} \pi a^2$ (кв. бирл.).
4. $x = 2t$, $y = 4t^2 - 6t$ ва $y = 0$. Ж: $\frac{9}{2}$ (кв. бирл.).
5. $r = a \sin 3\varphi$ (битта ҳалқа). Ж: $\frac{\pi a^2}{12}$ (кв. бирл.).
6. $r = a \cos \varphi$, $r = 2a \cos \varphi$. Ж: $\frac{3}{2} \pi a^2$ (кв. бирл.).

9-§. Эгри чизик ёйлари узунликларини ҳисоблаш

Агар тўғри бурчакли координаталарда $y = f(x)$ функция $[a, b]$ кесмада силлик (яъни $y' = f'(x)$ ҳосила узлуксиз) бўлса, у ҳолда бу эгри чизик мос ёйининг узунлиги

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

формула бўйича ҳисобланади.

Эгри чизик

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, бу эгри чизикнинг $t \in [t_1, t_2]$ параметрнинг монотон ўзгаришига мос ёйининг узунлиги

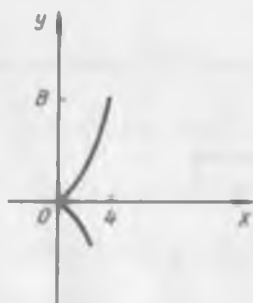
$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

формула билан ҳисобланади. ■

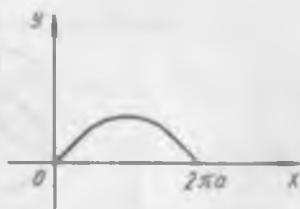
Агар силлик эгри чизик кутб координаталарда $r = r(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$) тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда ёй узунлиги

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

формула билан ҳисобланади.



34- шакл



35- шакл

1- мисол. $y^2 = x^3$ ярим кубик параболанинг координаталар бошидан $A(4, 8)$ нуктагача бўлган ёйи узунлигини топинг.

Е ч и ш. Аввал шаклни чизамиз (34- шакл). Парабола тенгламасини дифференциаллаймиз:

$$y = x^{\frac{3}{2}}, \quad y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}.$$

Формулага кўра:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \\ &= \frac{4 \cdot 2}{9 \cdot 3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) \text{ (узун. бирл.)}. \end{aligned}$$

2- м и с о л. Битта циклоида узунлигини топинг:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Е ч и ш. Циклоиданинг барча аркаси бир хил, қайси арка бўйлаб t параметр 0 дан 2π гача ўзгарса, ўша аркани оламиз (35- шакл):

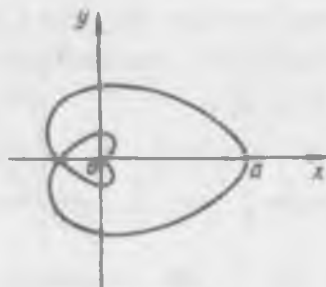
$$x' = a(1 - \cos t), \quad y' = a \sin t.$$

Шу сабабли:

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t} dt = \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a \text{ (узун. бирл.)}. \end{aligned}$$

3- м и с о л. $r = a \sin^4 \frac{\varphi}{4}$ ёпик эгри чизикнинг узунлигини ҳисобланг.

Е ч и ш. Берилган функция жуфт функция. Шу сабабли берилган эгри чизик кутб ўкига нисбатан симметрик. Нукта бутун эгри



36-шакл

чизикни φ 0 дан 4π гача ўзгарганда чизади, шунга кўра эгри чизикнинг ярми φ 0 дан 2π гача ўзгарганда чизилади (36-шакл).

$r' = a \sin^3 \frac{\varphi}{4} \cdot \cos \frac{\varphi}{4}$. Демак,

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{4} + a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{4} \cos^2 \frac{\varphi}{4}} d\varphi = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{\varphi}{4} d\varphi = -4a \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{4} d\left(\cos \frac{\varphi}{4}\right) = \\ &= -4a \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \frac{\varphi}{4}) d\left(\cos \frac{\varphi}{4}\right) = -4a \left(\cos \frac{\varphi}{4} - \frac{\cos^3 \frac{\varphi}{4}}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= 4a \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}a. \text{ Демак, } l = \frac{16}{3}a \text{ (узун. бирл.).} \end{aligned}$$

9-дарсхона топшириғи

Эгри чизиклар ёйлари узунликларини ҳисобланг:

1. $y = \ln \sin x$, $x = \frac{\pi}{3}$ дан $x = \frac{\pi}{2}$ гача. Ж: $\frac{1}{2} \ln 3$ (узун. бирл.).
2. $y = \frac{2}{5}x \sqrt[4]{x} - \frac{2}{3} \sqrt[4]{x^3}$ абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқталари орасидаги. Ж: $\frac{20}{9} \sqrt[5]{3}$ (узун. бирл.).
3. $x = \frac{1}{3}t^3 - t$, $y = t^2 + 2$, $t = 0$ дан $t = 3$ гача. Ж: 12 (узун. бирл.).
4. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $t = 0$ дан $t = \ln \pi$ гача. Ж: $\sqrt{2} (\pi - 1)$ (узун. бирл.).
5. $r = \varphi^2$, $\varphi = 0$ дан $\varphi = \pi$ гача. Ж: $[(\pi^2 + 4) \sqrt{\pi^2 + 4} - 8] \cdot \frac{1}{3}$ (узун. бирл.).
6. $r = a \sin \theta$. Ж: πa (узун. бирл.).

Эгри чизиклар ёйлари узунликларини ҳисобланг:

1. $y = \frac{x^2}{2}$, $x=0$ дан $x=1$ гача. Ж: $0,5 [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$ (узун. бирл.).
2. $y = 1 - \ln \cos x$, $x=0$ дан $x = \frac{\pi}{6}$ гача. Ж: $\frac{1}{2} \ln 3$ (узун. бирл.).
3. $x = 8 \sin t + 6 \cos t$, $y = 6 \sin t - 8 \cos t$, $t=0$ дан $t = \frac{\pi}{2}$ гача. Ж: 5π (узун. бирл.).
4. $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$. Ж: $16a$ (узун. бирл.).
5. $r = a \cos^3 \frac{\varphi}{3}$, $\varphi=0$ дан $\varphi = \frac{\pi}{2}$ гача. Ж: $\frac{a}{8} (2\pi + 3\sqrt{3})$ (узун. бирл.).
6. $r = 1 - \cos \varphi$. Ж: 8 (узун. бирл.).

10- §. Ҳажмларни ҳисоблаш

6.10.1. Агар $S(x)$ юз жисмнинг Ox ўққа перпендикуляр текислик билан кесишишидан ҳосил бўлган кесими бўлиб, $[a, b]$ кесмада узлуксиз функция бўлса, жисмнинг ҳажми

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

формула билан ҳисобланади.

6.10.2. $y=f(x)$ эгри чизик ва $x=a$, $x=b$, $y=0$ тўғри чизиклар билан чегараланган эгри чизикли трапеция Ox ўқи атрофида айлантирилса, y ҳолда айланиш жисмининг ҳажми

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

формула билан ҳисобланади.

Агар шу фигуранинг ўзи Oy ўқи атрофида айлантирилса, x ҳолда айланиш жисмининг ҳажми

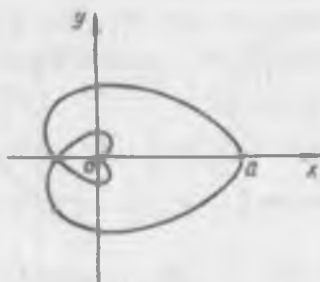
$$V = 2\pi \int_a^b xy dx$$

формула билан ҳисобланади.

6.10.3. Агар $y_1=f_1(x)$ ва $y_2=f_2(x)$ (бунда $f_1(x) \geq f_2(x)$) эгри чизиклар ҳамда $x=a$, $x=b$ тўғри чизиклар билан чегараланган фигура Ox ўқи атрофида айланса, айланиш жисмининг ҳажми

$$V = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

формула бўйича ҳисобланади.



36-шакл

чизикни φ 0 дан 4π гача ўзгарганда чизади, шунга кўра эгри чизикнинг ярми φ 0 дан 2π гача ўзгарганда чизилади (36-шакл).

$r' = a \sin^{\frac{3}{4}} \frac{\varphi}{4} \cdot \cos \frac{\varphi}{4}$. Демак,

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^{\frac{6}{4}} \frac{\varphi}{4} + a^2 \sin^{\frac{6}{4}} \frac{\varphi}{4} \cos^2 \frac{\varphi}{4}} d\varphi = \\ &= a \int_0^{2\pi} \sin^{\frac{3}{4}} \frac{\varphi}{4} d\varphi = -4a \int_0^{2\pi} \sin^{\frac{3}{4}} \frac{\varphi}{4} d\left(\cos \frac{\varphi}{4}\right) = \\ &= -4a \int_0^{2\pi} (1 - \cos^2 \frac{\varphi}{4}) d\left(\cos \frac{\varphi}{4}\right) = -4a \left(\cos \frac{\varphi}{4} - \frac{\cos^3 \frac{\varphi}{4}}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= 4a \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}a. \text{ Демак, } l = \frac{16}{3}a \text{ (узун. бирл.).} \end{aligned}$$

9-дарсхона топшириғи

Эгри чизиклар ёйлари узунликларини ҳисобланг:

1. $y = \ln \sin x$, $x = \frac{\pi}{3}$ дан $x = \frac{\pi}{2}$ гача. Ж: $\frac{1}{2} \ln 3$ (узун. бирл.).
2. $y = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{4}}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt[4]{x^3}$ абсциссалар ўқи билан кесишиш нукталари орасидаги. Ж: $\frac{20}{9}\sqrt{\frac{5}{3}}$ (узун. бирл.).
3. $x = \frac{1}{3}t^3 - t$, $y = t^2 + 2$, $t = 0$ дан $t = 3$ гача. Ж: 12 (узун. бирл.).
4. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \cdot \sin t$, $t = 0$ дан $t = \ln \pi$ гача. Ж: $\sqrt{2} (\pi - 1)$ (узун. бирл.).
5. $r = \varphi^2$, $\varphi = 0$ дан $\varphi = \pi$ гача. Ж: $[(\pi^2 + 4)\sqrt{\pi^2 + 4} - 8] \cdot \frac{1}{3}$ (узун. бирл.).
6. $r = a \sin \theta$. Ж: πa (узун. бирл.).

Эгри чизиклар ёйлари узунликларини ҳисобланг:

1. $y = \frac{x^2}{2}$, $x=0$ дан $x=1$ гача. Ж: $0,5 [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$ (узун. бирл.).
2. $y = 1 - \ln \cos x$, $x=0$ дан $x = \frac{\pi}{6}$ гача. Ж: $\frac{1}{2} \ln 3$ (узун. бирл.).
3. $x = 8 \sin t + 6 \cos t$, $y = 6 \sin t - 8 \cos t$, $t=0$ дан $t = \frac{\pi}{2}$ гача. Ж: 5π (узун. бирл.).
4. $x = a(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = a(2 \sin t - \sin 2t)$. Ж: $16a$ (узун. бирл.).
5. $r = a \cos \frac{\varphi}{3}$, $\varphi=0$ дан $\varphi = \frac{\pi}{2}$ гача. Ж: $\frac{a}{8}(2\pi + 3\sqrt{3})$ (узун. бирл.).
6. $r = 1 - \cos \varphi$. Ж: 8 (узун. бирл.).

10- §. Ҳажмларни ҳисоблаш

6.10.1. Агар $S(x)$ юз жисмнинг Ox ўққа перпендикуляр текислик билан кесишишидан ҳосил бўлган кесими бўлиб, $[a, b]$ кесмада узлуксиз функция бўлса, жисмнинг ҳажми

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

формула билан ҳисобланади.

6.10.2. $y=f(x)$ эгри чизик ва $x=a$, $x=b$, $y=0$ тўғри чизиклар билан чегараланган эгри чизикли трапеция Ox ўқи атрофида айлантирилса, y ҳолда айланиш жисмининг ҳажми

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

формула билан ҳисобланади.

Агар шу фигуранинг ўзи Oy ўқи атрофида айлантирилса, x ҳолда айланиш жисмининг ҳажми

$$V = 2\pi \int_a^b xy dx$$

формула билан ҳисобланади.

6.10.3. Агар $y_1=f_1(x)$ ва $y_2=f_2(x)$ (бунда $f_1(x) \geq f_2(x)$) эгри чизиклар ҳамда $x=a$, $x=b$ тўғри чизиклар билан чегараланган фигура Ox ўқи атрофида айланса, айланиш жисмининг ҳажми

$$V = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx$$

формула бўйича ҳисобланади.

Агар шу фигуранинг ўзи Oy ўқ атрофида айланса, айланиш жисмининг ҳажми

$$V = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1) dx$$

формула бўйича ҳисобланади.

6.10.4. Агар эгри чизикли трапеция $x=f(y)$ функция графиги, $y=c$, $y=a$ тўғри чизиклар ва Oy ўқи билан чегараланса, бу фигуранинг Oy ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмининг ҳажми

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy$$

формула бўйича ҳисобланади.

Агар шу фигуранинг ўзи Ox ўқи атрофида айланса, айланиш жисмининг мос ҳажми

$$V = 2\pi \int_c^d xy dy$$

формула бўйича аниқланади.

6.10.5. Агар $x_1=f_1(y)$ ва $x_2=f_2(y)$ (бунда $x_2 \geq x_1 \geq 0$) эгри чизиклар ва $y=c$, $y=d$ тўғри чизиклар билан чегараланган фигура Oy ўқи атрофида айланса, у ҳолда айланиш жисмининг ҳажми

$$V = \pi \int_c^d (x_2^2 - x_1^2) dy$$

формула бўйича топилади.

Агар шу фигуранинг ўзи Ox ўқи атрофида айланса, у ҳолда айланиш жисмининг мос ҳажми ушбуга тенг бўлади:

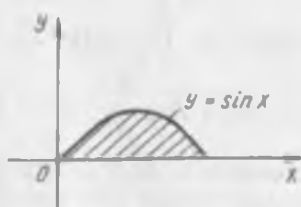
$$V = 2\pi \int_c^d y(x_2 - x_1) dy.$$

6.10.6. Агар эгри чизик параметрик ёки кутб координаталарда берилса, у ҳолда келтирилган формулаларда мос ўринга қўйишларни бажариш керак бўлади.

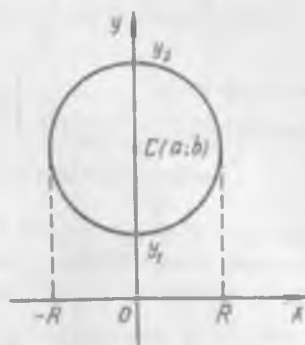
1-мисол. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ эллипсоиднинг ҳажмини топинг.

Ечиш. Эллипсоиднинг Ox ўқка перпендикуляр бирор текислик билан кесишдан ҳосил бўлган кесимининг ярим ўқлари

$$b_1 = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad \text{ва} \quad c_1 = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$



37- шакл



38- шакл

бўлган

$$\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{x^2}{c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1$$

эллипсдир. Демак, кесим юзи (8- §, 4- мисол):

$$S(x) = \pi b_1 c_1 = \pi b c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right),$$

бунда x ўзгарувчи — a дан a гача ўзгаради. Шунга кўра эллипсоиднинг ҳажми ушбуга тенг:

$$\begin{aligned} V &= \int_{-a}^a S'(x) dx = \pi b c \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b c \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^a = \\ &= \pi b c \left[\left(a - \frac{a^3}{3a^2}\right) - \left(-a + \frac{a^3}{3a^2}\right)\right] = \frac{4}{3} \pi a b c \quad (\text{куб бирл.}). \end{aligned}$$

2- мисол. $y = \sin x$ синусоиданинг битта ярим тўлкини ва Ox ўқнинг $[0, \pi]$ кесмаси билан чегараланган фигуранинг а) Ox ўқи атрофида ва б) Oy ўқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган жисмларнинг ҳажмини ҳисобланг (37- шакл).

$$\begin{aligned} \text{Е ч и ш. а) } V &= \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2} (\pi) = \frac{\pi^2}{2} \quad (\text{куб бирл.}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } V &= 2\pi \int_0^{\pi} xy dx = 2\pi \int_0^{\pi} x \cdot \sin x dx = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{array} \right\} = 2\pi \left(-x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \right) = \\
 &= 2\pi (-\pi \cos \pi + \sin x \Big|_0^{\pi}) = 2\pi^2 (\text{куб. бирл.}) .
 \end{aligned}$$

3-мисол. $x^2 + (y-b)^2 \leq R^2$ ($b > R$) доиранинг Ox уқи атрофида айланишидан ҳосил бўлган торнинг ҳажмини топинг (38-шакл).

Ечиш. $x^2 + (y-b)^2 = R^2$ айлана тенгламасидан:

$$y_1 = b - \sqrt{R^2 - x^2},$$

$$y_2 = b + \sqrt{R^2 - x^2},$$

Шунинг учун

$$V = \pi \int_{-R}^R (y_2^2 - y_1^2) dx = \pi \int_{-R}^R [(b + \sqrt{R^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{R^2 - x^2})^2] dx =$$

$$= 4\pi b \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left\{ \begin{array}{cc} x = R \sin t, & \\ -R & -\frac{\pi}{2} \\ dx = R \cos t dt, & R \quad \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= 4\pi b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} \cdot R \cos t dt =$$

$$= 4\pi b R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2\pi b R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt =$$

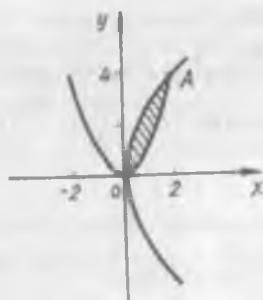
$$= 2\pi b R^2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi^2 b R^2 (\text{куб. бирл.}).$$

4-мисол. $y = x^2$ ва $8x - y^2$ параболалар билан чегараланган фигурани Oy уқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг (39-шакл).

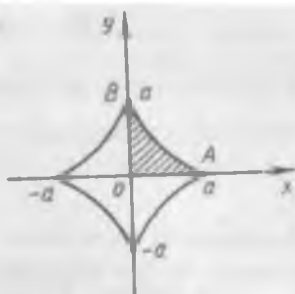
Ечиш.

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = 8x \end{cases}$$

тенгламалар системасидан параболаларнинг кесишиш нукталарини топамиз: $O(0, 0)$ ва $A(2, 4)$.



39-шакл



40-шакл

$x_2(y) = \sqrt{y} \geq x_1(y) = \frac{y^2}{8}$ га эгамиз, ўзгарувчи y 0 дан 4 гача ўзгаради. Демак,

$$V = \pi \int_0^4 (x_2^2 - x_1^2) dy = \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y^4}{64} \right) dy =$$

$$= \pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{320} \right) \Big|_0^4 = \pi \left(8 - \frac{32}{10} \right) = \frac{24\pi}{5} \text{ (куб бирл.)} .$$

5- м и с о л. $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ астроида билан чегараланган фигурининг Ox ўқи атрофида айлантирилишидан ҳосил бўлган жисмнинг ҳажмини ҳисобланг (40- шакл).

Е ч и ш. Изланаётган ҳажм OAB фигурани айлантиришдан ҳосил бўлган ҳажмнинг иккиланганига тенг. Шунинг учун

$$V = 2\pi \int_0^a y^2 dx .$$

Ўзгарувчини алмаштирамиз:

$$V = 2\pi \int_0^a y^2 dx = \begin{cases} x = a \cos^3 t \\ dx = -3a \cos^2 t \cdot \sin t dt, \\ y' = a \sin^3 t. \end{cases}$$

x	t
0	$\frac{\pi}{2}$
a	0

$$= 2\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^2 \sin^6 t (-3a \cos^2 t \sin t) dt = 6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t \cos^2 t dt =$$

$$= -6\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t d(\cos t) = -6\pi a^3 \left(\frac{1}{3} \cos^3 t - \frac{3}{5} \cos^5 t + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{7} \cos^7 t - \frac{1}{9} \cos^9 t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6\pi a^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5} + \frac{3}{7} - \frac{1}{9} \right) = \frac{32}{105} \pi a^3 \text{ (куб бирл.)} .$$

10- дарсхона топшириги

1. $x=2$ ва $x=3$ текисликлар билан $x^2+y^2+z^2=16$ шардан қирқилган шар қатламининг ҳажмини ҳисобланг: Ж: $\frac{29}{3}\pi$ (куб. бирл.)

2. Координата ўқлари ва $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}$ парабола билан чегараланган юзни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг. Ж: $\frac{\pi a^3}{15}$ (куб бирл.) .

3. $y=\sin x$ синусоида ёйи, ординаталар ўқи ва $y=1$ тўғри чизик билан чегараланган фигурани Oy ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Ж: $\frac{\pi(\pi^2-8)}{4}$ (куб бирл.) .

4. $y=\frac{1}{4}x^2+2$ парабола ва $5x-8y+14=0$ тўғри чизик билан чегараланган фигурани Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг. Ж: $\frac{891\pi}{1280}$ (куб. бирл.) .

5. Ушбу $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ циклоиданинг бир аркасини Ox ўқи ат-

рофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг. Ж: $5a^3\pi^2$ (куб бирл.) .

10- мустақил иш

1. $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}$ ва $z=1$ сиртлар билан чегараланган жисм ҳажмини ҳисобланг. Ж: $\pi\sqrt{2}$ (куб бирл.) .

2. а) $y=\frac{64}{x^2+16}$ ва $x^2=8y$, б) $y^2=x$ ва $x^2=y$ чизиклар билан чегараланган фигураларни Ox ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Ж: а) $\frac{16\pi}{5}(5\pi+8)$ (куб. бирл.); б) $0,3\pi$ (куб. бирл.) .

3. а) $y=x^3$, $y=0$, $x=2$; б) $x^2-y^2=4$, $y=\pm 2$ чизиклар билан чегараланган фигурани Oy ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг. Ж: а) $\frac{64}{5}\pi$ (куб. бирл.);

б) $\frac{64}{3}\pi$ (куб. бирл.) .

4. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг бир аркаси ва Ox ўқи билан чегараланган фигурани: а) Oy ўқи атрофида; б) фигуранинг симметрия ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Ж: а) $6\pi^3 a^3$ (куб. бирл.); б) $\frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2 - 16)$ (куб. бирл.).

11-§. Хосмас интеграллар, яқинлашиши хосмас интегрални ҳисоблаш.

Интегралланиш чегаралари чексиз бўлган интеграллар ёки чегараланмаган функциялардан олинган интеграллар *хосмас интеграллар* дейилади:

6.11.1. $[a, +\infty)$ ораликда узлуксиз бўлган $f(x)$ функциядан олинган интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_a^N f(x) dx$$

тенглик билан аникланади.

Агар шу лимит мавжуд бўлиб, чекли бўлса, хосмас интеграл *яқинлашувчи*, акс ҳолда хосмас интеграл *узоқлашувчи* дейилади.

Агар $F(x)$ функция $f(x)$ нинг бошлангич функцияси бўлса, у ҳолда:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a), \text{ бунда } F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x).$$

Куйидаги интеграллар ҳам шунга ўхшаш аникланади:

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow -\infty} \int_N^b f(x) dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{N_1 \rightarrow -\infty} \int_{N_1}^b f(x) dx + \lim_{N_2 \rightarrow +\infty} \int_b^{N_2} f(x) dx.$$

1-мисол. $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ хосмас интегрални ҳисобланг (бунда α —

ўзгармас мусбат сон).

Ечиш. Таърифга кўра:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N e^{-\alpha x} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right) \Big|_0^N = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha N} + \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{e^{\alpha N}} \right) = \frac{1}{\alpha}.\end{aligned}$$

Демак, берилган интеграл якинлашувчи.

2- мисол. $\alpha > 0$ нинг қандай қийматларида

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

интеграл якинлашувчи, қандай қийматларида узоклашувчи эканини аниқланг.

Ечиш. $\alpha = 1$ деб фараз қиламиз, у ҳолда:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{dx}{x} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln x \Big|_1^N = \lim_{N \rightarrow +\infty} \ln N = \infty.$$

Демак, берилган интеграл узоклашувчи. Энди $\alpha \neq 1$ деб фараз қиламиз, у ҳолда:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \Big|_1^N = \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-\alpha} (N^{1-\alpha} - 1).\end{aligned}$$

Демак, $\alpha > 1$ да

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1},$$

яъни берилган интеграл якинлашувчи, $0 < \alpha < 1$ да эса

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty$, яъни берилган интеграл узоклашувчи. Шундай

қилиб, $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ хосмас интеграл $\alpha > 1$ да якинлашувчи ва $0 < \alpha \leq 1$ да узоклашувчи.

6.11.2. 2- мисолдаги интеграл интегралнинг якинлашувчи ёки узоклашувчи эканини таққослаш аломатларидан фойдаланишда қўлланилади.

1. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар барча $x \geq a$ лар учун аниқланган ва $[a, +\infty)$ да интегралланувчи ҳамда барча $x \geq a$ лар учун $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ бўлса, у ҳолда

а) $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчанлигидан $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчи экани келиб чиқади, шу билан бирга

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx;$$

б) $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегралнинг узоклашувчанлигидан $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ интегралнинг узоклашувчи экани келиб чиқади.

2. Агар $f(x)$ функция барча x лар учун аниқланган ва $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл ҳам яқинлашади; бу ҳолда у *абсолют яқинлашувчи интеграл* дейилади, бунда

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx.$$

3. Агар $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи, $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ узоклашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ интегрални *шартли яқинлашувчи интеграл* дейилади.

3-мисол. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{3x^4 + 2x^2 + 1}$ интегралнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. $f(x) = \frac{1}{3x^4 + 2x^2 + 1} < \frac{1}{3x^4} < \frac{1}{x^4} = \varphi(x)$ ($x \geq 1$ да) ва $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$ интеграл яқинлашувчи (2-мисол $\alpha = 4 > 1$) бўлгани учун берилган интеграл ҳам яқинлашувчи (таккослаш аломати асосида).

4-мисол. $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ интегралнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. $x \geq 1$ да $f(x) = e^{-x^2} < e^{-x} = \varphi(x)$ ва $\int_1^{\infty} e^{-x} dx$ интеграл якинлашувчи (1-мисол, $\alpha = 1$) бўлгани сабабли берилган интеграл якинлашувчи.

5-мисол. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x - \sin^2 x}$ интегралнинг якинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. $x \geq 1$ да $f(x) = \frac{1}{x - \sin^2 x} > \frac{1}{x} = \varphi(x)$ ва $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ интеграл узоклашувчи (2-мисол, $\alpha = 1$), шунга кўра $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x - \sin^2 x}$ интеграл узоклашувчи.

6.11.3. $[a, b]$ ораликда узлуксиз, b нуктада узилишга эга $f(x)$ функциядан олинган хосмас интеграл

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +0} \int_a^{b-x} f(x) dx$$

тенглик билан аникланади.

Агар бу лимит мавжуд бўлиб, у чекли бўлса хосмас интеграл *якинлашувчи*, акс ҳолда хосмас интеграл *узоклашувчи* дейилади.

Агар $F(x)$ функция $f(x)$ учун бошланғич функция бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

бунда $F(b) = \lim_{x \rightarrow b} F(x)$.

Агар функция a нуктада ёки $[a, b]$ ораликнинг бирор ички c нуктасида узилишга эга бўлса ҳам интеграл юқоридагига ўхшаш аникланади:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow +0} \int_a^{b-x} f(x) dx$$

ва

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx.$$

6-мисол. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ хосмас интегрални ҳисобланг:

Е ч и ш. Интеграл остидаги функция $x=1$ нуктада узилишга эга. Демак, таърифга кўра,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (-2\sqrt{1-x}) \Big|_0^{1-\varepsilon} =$$

$$= -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\sqrt{1-1+\varepsilon} - \sqrt{1-0}) = -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\sqrt{\varepsilon} - 1) = 2,$$

демак, берилган интеграл якинлашувчи.

7-мисол. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ (α — ўзгармас мусбат сон) хосмас интеграл-

нинг якинлашиш ва узоклашиш шартларини топинг.

Е ч и ш. Интеграл остидаги функция $x=0$ нуктада узилишга эга. Агар $\alpha=1$ бўлса, у ҳолда ушбуга эгамиз:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln x \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\ln 1 - \ln \varepsilon) = \infty,$$

яъни интеграл узоклашувчи.

Агар $\alpha \neq 1$ бўлса, у ҳолда:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{1-\alpha} (1 - \varepsilon^{1-\alpha}).$$

Демак, $0 < \alpha < 1$ да куйидагиларга эгамиз: $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$, яъни

интеграл якинлашувчи; $\alpha > 1$ да эса $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \infty$, яъни интеграл узоклашувчи.

Шундай қилиб, $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ хосмас интеграл $0 < \alpha < 1$ да якинлашувчи, $\alpha \geq 1$ да узоклашувчи.

6.11.4. Охириги мисол натижасидан таққослаш аломатларида фойдаланилади:

1. Агар $f(x)$ ва $\varphi(x)$ функциялар $a \leq x < b$ ораликда аниқланган ҳамда $[a, b-\varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < b-a$) кесмада интегралланувчи ва агар $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$ бўлса, у ҳолда:

а) $\int_a^b \varphi(x) dx$ интегралнинг якинлашувчанлигидан $\int_a^b f(x) dx$ интег-

ралнинг якинлашувчанлиги келиб чиқади. бунда $\int_a^b f(x) dx \leq$

$$\leq \int_a^b \varphi(x) dx;$$

б) $\int_a^b f(x) dx$ интегралнинг узоклашувчанлигидан $\int_a^b \varphi(x) dx$ интегралнинг узоклашувчи эканлиги келиб чиқади.

2. Агар $f(x)$ функция $[a, b]$ ораликда аниқланган ва $[a, b - \varepsilon]$ кесмада интегралланувчи бўлса, $\int_a^b |f(x)| dx$ интегралнинг яқинлашувчанлигидан $\int_a^b f(x) dx$ интегралнинг яқинлашувчанлиги келиб чиқади. Бу ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ интеграл *абсолют яқинлашувчи интеграл* дейилади.

3. Агар $\int_a^b f(x) dx$ интеграл яқинлашувчи, $\int_a^b |f(x)| dx$ интеграл узоклашувчи бўлса, у ҳолда $\int_a^b f(x) dx$ интеграл *шартли яқинлашувчи интеграл* дейилади.

8-мисол. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2x^3}$ интегралнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. Интеграл остидаги функция $x=0$ нуктада узилишга эга.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 2x^3} < \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \varphi(x)$$

ва $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}}$ интеграл яқинлашади (7-мисол, $\alpha = \frac{1}{3} < 1$), демак, берилган интеграл ҳам яқинлашади.

II- дарсхона топшириғи

1. Хосмас интегралларни ҳисобланг ёки уларнинг узоклашувчи эканини аниқланг.

1. $\int_1^{\infty} \frac{\arctg x}{1+x^2} dx$ Ж: $\frac{\pi}{8}$

2. $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{4+x^2}$ Ж: $\frac{\pi}{4}$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \quad \text{Ж: } \frac{\pi}{6}.$$

$$4. \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x(\ln x)^2} \quad \text{Ж: } 1.$$

$$5. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} \quad \text{Ж: узоклашади.}$$

$$6. \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}} \quad \text{Ж: } \pi.$$

II. Интегралларнинг яқинлашувчанлигини текширинг:

$$7. \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad \text{Ж: узоклашувчи.}$$

$$8. \int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{2}{x}\right) dx \quad \text{Ж: яқинлашувчи.}$$

$$9. \int_0^1 \frac{e^x dx}{\sqrt{1-\cos x}} \quad \text{Ж: узоклашувчи.}$$

$$10. \int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{Ж: яқинлашувчи.}$$

III- мустақил иш

1. Хосмас интегралларни ҳисобланг ёки уларнинг узоклашувчанлигини аниқланг:

$$a) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)} \quad \text{Ж: } 1 - \ln 2.$$

$$б) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{1+x^2} \quad \text{Ж: узоклашувчи.}$$

$$в) \int_1^{+\infty} \frac{\arctg x}{x^2} dx \quad \text{Ж: } \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$г) \int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}} \quad \text{Ж: } \frac{8}{3}.$$

$$д) \int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} dx. \quad \text{Ж: } -\frac{2}{e}.$$

$$е) \int_{-1}^1 \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^5}} dx. \quad \text{Ж: узоклашувчи}$$

2. Интегралларинг якинлашувчанлигини текширинг:

$$а) \int_{e^0}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln(\ln x)} \quad \text{Ж: узоклашувчи.}$$

$$б) \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^4}}. \quad \text{Ж: якинлашувчи.}$$

7- назорат иши

1. Аникмас интегрални топинг:

$$1.1. \int x^3 \ln x dx.$$

$$1.2. \int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

$$1.3. \int x \arctg x dx.$$

$$1.4. \int \sqrt{x} \ln x dx.$$

$$1.5. \int x^2 e^{-2x} dx.$$

$$1.6. \int \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

$$1.7. \int x^2 \cos 5x dx.$$

$$1.8. \int \ln^2 x dx.$$

$$1.9. \int x \arcsin x dx.$$

$$1.10. \int \arctg \sqrt{4x-1} dx.$$

$$1.11. \int \ln(4x^2+1) dx.$$

$$1.12. \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx.$$

$$1.13. \int x \sin^2 x dx.$$

$$1.14. \int x \cdot \tg^2 x dx.$$

$$1.15. \int \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

$$1.16. \int \frac{x \sin x dx}{\cos^2 x}.$$

$$1.17. \int \sqrt{x} \ln^2 x dx.$$

$$1.18. \int \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$$1.19. \int x \cdot \ln^2 x dx.$$

$$1.20. \int x^3 \ln^2 x dx.$$

$$1.21. \int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx.$$

$$1.22. \int (x^2+2) e^{\frac{x}{2}} dx.$$

$$1.23. \int (x+3)^2 \sin 2x dx.$$

$$1.24. \int \ln(x^2+4) dx.$$

$$1.25. \int \arctg \frac{1}{x} dx.$$

$$1.26. \int x \cdot \arcsin \frac{1}{x} dx.$$

$$1.27. \int x \cdot 3^{\frac{x}{2}} dx.$$

$$1.29. \int x^3 \cdot \arctg x dx.$$

$$1.28. \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{x-1}} dx.$$

$$1.30. \int \frac{\ln \cos x}{\sin^2 x} dx.$$

2. Аникмас интегрални топинг:

$$2.1. \int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx.$$

$$2.3. \int \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+4x+5}} dx.$$

$$2.5. \int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+x-2}} dx.$$

$$2.7. \int \frac{2x-3}{\sqrt{8-2x-x^2}} dx.$$

$$2.9. \int \frac{8x+3}{\sqrt{5+2x-x^2}} dx.$$

$$2.11. \int \frac{3x-1}{x^2-6x+10} dx.$$

$$2.13. \int \frac{x+1}{4x^2-12x+13} dx.$$

$$2.15. \int \frac{3x-2}{5x^2-3x+2} dx.$$

$$2.17. \int \frac{4x-3}{5x^2+6x+18} dx.$$

$$2.19. \int \frac{2x-1}{5x^2-x+2} dx.$$

$$2.21. \int \frac{x-8}{5-4x+4x^2} dx.$$

$$2.23. \int \frac{5x+3}{x^2+10x+29} dx.$$

$$2.25. \int \frac{x+1}{5x^2+2x+1} dx.$$

$$2.27. \int \frac{2x-5}{x^2+6x+13} dx.$$

$$2.29. \int \frac{2x+3}{15-4x^2+4x} dx.$$

$$2.2. \int \frac{x+2}{x^2+2x+2} dx.$$

$$2.4. \int \frac{x+5}{2x^2+2x+3} dx.$$

$$2.6. \int \frac{x+1}{3+4x-x^2} dx.$$

$$2.8. \int \frac{x-2}{x^2+x+1} dx.$$

$$2.10. \int \frac{x-7}{x^2+4x+13} dx.$$

$$2.12. \int \frac{x+5}{\sqrt{3x^2+6x+1}} dx.$$

$$2.14. \int \frac{x+2}{\sqrt{3-x^2+2x}} dx.$$

$$2.16. \int \frac{2x+3}{\sqrt{15-4x^2+4x}} dx.$$

$$2.18. \int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx.$$

$$2.20. \int \frac{x-3}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx.$$

$$2.22. \int \frac{x-2}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx.$$

$$2.24. \int \frac{x-2}{\sqrt{x^2-2x+1}} dx.$$

$$2.26. \int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-4x+1}} dx.$$

$$2.28. \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4x+2}} dx.$$

$$2.30. \int \frac{x-5}{\sqrt{6+4x-x^2}} dx.$$

3. Аниқмас интегрални топинг:

$$3.1. \int \frac{dx}{4x^3+x}.$$

$$3.3. \int \frac{xdx}{x^3-3x+2}.$$

$$3.5. \int \frac{x^2 dx}{x^4-16}.$$

$$3.7. \int \frac{x-2}{x^4+4x^2} dx.$$

$$3.9. \int \frac{x^4 dx}{x^4+6x^2+8}.$$

$$3.11. \int \frac{x-1}{2x^3+3x^2+x} dx.$$

$$3.13. \int \frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x} dx.$$

$$3.15. \int \frac{x^3-6}{x^4+6x+8} dx.$$

$$3.17. \int \frac{x^2 dx}{x^4+x^2-2}.$$

$$3.19. \int \frac{dx}{x^4-x^3+x^2-x}.$$

$$3.21. \int \frac{x+2}{x^3-2x^2+2x} dx.$$

$$3.23. \int \frac{xdx}{x^3-1}.$$

$$3.25. \int \frac{x^4 dx}{x^4+5x^2+4}.$$

$$3.27. \int \frac{dx}{4x^3-x}.$$

$$3.29. \int \frac{dx}{x^3-8}.$$

$$3.2. \int \frac{x-1}{x^3+1} dx.$$

$$3.4. \int \frac{x^2-3}{x^4+5x^2+6} dx.$$

$$3.6. \int \frac{x+3}{x^3+x^2-2x} dx.$$

$$3.8. \int \frac{2x^2-3x-12}{x^3+x^2-6x} dx.$$

$$3.10. \int \frac{6x^4-1}{2x^3-x+1} dx.$$

$$3.12. \int \frac{x+4}{x^3+6x^2+9x} dx.$$

$$3.14. \int \frac{dx}{x^4+x^3+x^2+x}.$$

$$3.16. \int \frac{dx}{x^4+5x^2+4}.$$

$$3.18. \int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)} dx.$$

$$3.20. \int \frac{(3x-7)dx}{x^3+x^2+4x+4}.$$

$$3.22. \int \frac{x-1}{x^3+x} dx.$$

$$3.24. \int \frac{x^3-6}{x^4+6x+8} dx.$$

$$3.26. \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx.$$

$$3.28. \int \frac{x^2 dx}{(x+2)^2(x+4)^2}.$$

$$3.30. \int \frac{x+5}{x^4+2x^3+x^2} dx.$$

4. Аниқмас интегрални топинг:

$$4.1. \int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}.$$

$$4.3. \int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^3-1}} dx.$$

$$4.2. \int \frac{\sqrt[5]{x}-1}{1+\sqrt{x}} dx.$$

$$4.4. \int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}+1} dx.$$

$$4.5. \int \frac{\sqrt{x} dx}{1 + \sqrt[3]{x^2}}.$$

$$4.7. \int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x} + 2}.$$

$$4.9. \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$$

$$4.11. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1+x}}.$$

$$4.13. \int \frac{x dx}{(2+5x) \sqrt{2+5x}}.$$

$$4.15. \int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}}.$$

$$4.17. \int \frac{dx}{3 \sqrt[4]{x^3} - 2 \sqrt[3]{x^2}}.$$

$$4.19. \int \frac{dx}{\sqrt{x} (\sqrt[4]{x^3} - 1)}.$$

$$4.21. \int \frac{\sqrt{x+3}}{1 + \sqrt[3]{x+3}} dx.$$

$$4.23. \int \frac{x+1}{\sqrt[5]{2x+1}} dx.$$

$$4.25. \int \frac{x dx}{2 + \sqrt{2x+1}}.$$

$$4.27. \int \frac{dx}{\sqrt{x+3} (1 + \sqrt[3]{x+3})}.$$

$$4.29. \int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1} + 1} dx.$$

$$4.6. \int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} dx.$$

$$4.8. \int \frac{\sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt{x}} dx.$$

$$4.10. \int \frac{1 + \sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}} dx.$$

$$4.12. \int \frac{dx}{x \sqrt{x+1}}.$$

$$4.14. \int \frac{x dx}{\sqrt[4]{5x-1}}.$$

$$4.16. \int \frac{\sqrt[5]{x} dx}{1 + \sqrt[3]{x}}.$$

$$4.18. \int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x} (\sqrt[3]{x}+1)} dx.$$

$$4.20. \int \frac{dx}{\sqrt{x-2} (1 + \sqrt[3]{x-2})}.$$

$$4.22. \int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx.$$

$$4.24. \int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt{x}+4) \sqrt[4]{x^3}} dx.$$

$$4.26. \int \frac{1 - \sqrt[5]{x} + 2 \sqrt[4]{x}}{x + 2 \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^4}} dx.$$

$$4.28. \int \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x^3} (1 + \sqrt[3]{x})} dx.$$

$$4.30. \int \frac{2 \sqrt[4]{x} + 1}{\sqrt[4]{x^3} (\sqrt{x} + 4)} dx.$$

5. Аникмас интегрални топинг:

$$5.1. \int \frac{\sin x dx}{5 + 3 \sin x}.$$

$$5.3. \int \frac{\sin^2 x dx}{(1 + \cos x + \sin x)^2}.$$

$$5.5. \int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x + \sin x}.$$

$$5.2. \int \frac{dx}{\cos x (1 + \cos x)}.$$

$$5.4. \int \frac{1 - \sin x}{\cos x (1 + \cos x)} dx.$$

$$5.6. \int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx.$$

$$5.7. \int \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2} dx.$$

$$5.9. \int \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{(\sin x + 2\cos x)^2} dx.$$

$$5.11. \int \frac{5\operatorname{tg} x + 2}{2\sin 2x + 5} dx.$$

$$5.13. \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4 + 3\cos 2x} dx.$$

$$5.15. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$$

$$5.17. \int \frac{dx}{\sin^3 x}.$$

$$5.19. \int \cos^5 x dx.$$

$$5.21. \int \operatorname{ctg}^3 x dx.$$

$$5.23. \int \cos^4 x \sin^2 x dx.$$

$$5.25. \int \sin^6 x dx.$$

$$5.27. \int \frac{\operatorname{tg} x + 2}{\sin^2 x + 2\cos^2 x - 3} dx.$$

$$5.29. \int \frac{dx}{(3\operatorname{tg} x + 5)\sin 2x}.$$

$$5.8. \int \frac{8 + \operatorname{tg} x}{18\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx.$$

$$5.10. \int \frac{6 + \operatorname{tg} x}{9\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx.$$

$$5.12. \int \frac{36 dx}{(6 - \operatorname{tg} x)\sin 2x}.$$

$$5.14. \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx.$$

$$5.16. \int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx.$$

$$5.18. \int \sin^4 \frac{x}{2} dx.$$

$$5.20. \int \cos^2 x \sin^4 x dx.$$

$$5.22. \int \operatorname{tg}^4 x dx.$$

$$5.24. \int \frac{dx}{\sin^6 x}.$$

$$5.26. \int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x dx.$$

$$5.28. \int \frac{dx}{\sin x (1 - \sin x)}.$$

$$5.30. \int \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^3}.$$

7- намунавий ҳисоб топшириқлари

1. Аниқ интегрални ҳисобланг:

$$1.1. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(\arccos x)^3 - 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$1.2. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8x - \arctg 2x}{1 + 4x^2} dx.$$

$$1.3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \cdot \ln \cos x dx.$$

$$1.4. \int_1^e \frac{x^2 + \ln x^2}{x} dx.$$

$$1.5. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$1.6. \int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

$$1.7. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x^2 + 1}.$$

$$1.8. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x - (\arctg x)^4}{1 + x^2} dx.$$

$$1.9. \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 + 1}$$

$$1.11. \int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} dx$$

$$1.13. \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3 \cos^2 x} \sin 2x dx$$

$$1.15. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2^{3 \arcsin 2x} dx}{1 + 4x^2}$$

$$1.17. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 2}}$$

$$1.19. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^3 x (2 \lg x + 1)}$$

$$1.21. \int_0^e \frac{\sqrt{5+3 \ln x}}{x} dx$$

$$1.23. \int_0^1 x^2 e^{-2x^2} dx$$

$$1.25. \int_0^1 \frac{2^x dx}{\sqrt{4+4^x}}$$

$$1.27. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\cos^2 x^4}$$

$$1.29. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$1.10. \int_{-1}^0 \frac{\lg(x+1)}{\cos^2(x+1)} dx$$

$$1.12. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^8}}$$

$$1.14. \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3 x \sqrt{\sin x} dx$$

$$1.16. \int_e^2 \frac{\ln^3 x + 3}{x \ln x} dx$$

$$1.18. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{1+x^8}$$

$$1.20. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^3 x}} dx$$

$$1.22. \int_0^1 \frac{e^{3x} dx}{16+e^{6x}}$$

$$1.24. \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x dx}{\sqrt{9-x^4}}$$

$$1.26. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$1.28. \int_1^e \frac{\sin \ln x}{x} dx$$

$$1.30. \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{4}}} \frac{x dx}{\sin^2 x^2}$$

2. Аник интегрални хисобланг:

$$2.1. \int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 2) \sin x dx$$

$$2.2. \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + 7x + 12) \cos x dx$$

- 2.3. $\int_2^3 (x-1)^3 \ln^2(x-1) dx.$
- 2.4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 5x + 6) \sin 3x dx.$
- 2.5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x^2 + 4x + 7) \cos 2x dx.$
- 2.6. $\int_{-1}^1 x^2 e^{-\frac{1}{2}x} dx.$
- 2.7. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (x^2 + 6x + 9) \sin 2x dx.$
- 2.8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (9x^2 + 9x + 11) \cos 3x dx.$
- 2.9. $\int_1^2 x \ln^2 x dx.$
- 2.10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 5x^2) \sin x dx.$
- 2.11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8x^2 + 16x + 17) \cos 4x dx.$
- 2.12. $\int_0^1 x^2 e^{3x} dx.$
- 2.13. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (3x - x^2) \sin 2x dx.$
- 2.14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3x^2 + 5) \cos 2x dx.$
- 2.15. $\int_{-1}^0 (x+2)^3 \ln^3(x+2) dx.$
- 2.16. $\int_0^1 x \arctg x dx.$
- 2.17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 8x^2) \cos 4x dx.$
- 2.18. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (x^2 + 2) e^{\frac{x}{2}} dx.$
- 2.19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin 4x dx.$
- 2.20. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \cos x dx.$
- 2.21. $\int_1^{\sqrt{3}} \arctg \frac{1}{x} dx.$
- 2.22. $\int_{-1}^0 (x+1) \ln^2(x+1) dx.$
- 2.23. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x^2 - 3x) \sin 2x dx.$
- 2.24. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 (x+2)^2 \cos 3x dx.$
- 2.25. $\int_1^{\sqrt{e}} \sqrt{x} \cdot \ln^2 x dx.$
- 2.26. $\int_1^{\frac{1}{e}} \arcsin(1-x) dx.$
- 2.27. $\int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx.$
- 2.28. $\int_{-2}^0 (x^2 + 5x + 6) \cos 2x dx.$

2.29. $\int_1^{\frac{1}{e}} \frac{\ln^2 x dx}{\sqrt{x}}.$

2.30. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x dx}{\cos^3 3x}.$

3. Аниқ интегрални ҳисобланг:

- 3.1. $\int_0^{\arctg 3} \frac{1 + \operatorname{ctg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx.$
- 3.2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{2 + \cos x}.$
- 3.3. $\int_0^{2\pi} \sin^6 x dx$
- 3.4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{6 \sin^2 x}{3 \cos 2x - 4} dx.$
- 3.5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{(1 + \sin x)^2} dx.$
- 3.6. $\int_0^{2\pi} \sin^{\frac{5}{4}} x \cos^{\frac{3}{4}} x dx.$
- 3.7. $\int_0^{\arctg 2} \frac{12 + \operatorname{tg} x}{3 \sin^2 x + 12 \cos^2 x} dx.$
- 3.8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{5 + 4 \cos x}.$
- 3.9. $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \cos^6 x dx$
- 3.10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(7 + 3 \operatorname{tg} x) dx}{(\sin x + 2 \cos x)^2}.$
- 3.11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x + \sin x} dx.$
- 3.12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx.$
- 3.13. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{5 \operatorname{tg} x + 2}{2 \sin 2x + 5} dx.$
- 3.14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1 + \sin x - \cos x}.$
- 3.15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 - 7 \operatorname{tg} x}{2 + 3 \operatorname{tg} x} dx.$
- 3.16. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$
- 3.17. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x + \sin x} dx.$
- 3.18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^3 x dx.$
- 3.19. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4 + 3 \cos 2x} dx.$
- 3.20. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{5 + 3 \sin x}.$

$$3.21. \int_0^{2\pi} \cos^6 \frac{x}{4} dx.$$

$$3.23. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x(1 + \cos x)}.$$

$$3.25. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\lg^2 x - 11\lg x - 22}{4 - \lg x} dx.$$

$$3.27. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lg^4 x dx.$$

$$3.29. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x + \cos x)^2}.$$

$$3.22. \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctg 3} \frac{4\lg x - 5}{1 - \sin 2x + 4\cos^2 x} dx.$$

$$3.24. \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{x}{4} \cos^6 \frac{x}{4} dx.$$

$$3.26. \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\arctg 2} \frac{dx}{\sin x(1 + \sin x)}.$$

$$3.28. \int_0^{\arctg \frac{1}{3}} \frac{8 + \lg x}{18\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx.$$

$$3.30. \int_0^{2\pi} \sin^3 3x \cos^3 3x dx.$$

4. Аник интегрални хисобланг:

$$4.1. \int_{-1}^1 \frac{\sqrt[3]{3x+5} + 2}{1 + \sqrt[3]{3x+5}} dx.$$

$$4.3. \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2-2}}{x^4} dx.$$

$$4.5. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

$$4.7. \int_1^{64} \frac{1 - \sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x}}{x + 2\sqrt{x^3} + \sqrt{x^4}} dx.$$

$$4.9. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$4.11. \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

$$4.13. \int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3 + \sqrt[3]{(x-2)^2}} dx.$$

$$4.2. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx.$$

$$4.4. \int_1^2 \frac{x + \sqrt{3x-2} - 10}{\sqrt{3x-2} + 7} dx.$$

$$4.6. \int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}.$$

$$4.8. \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x \sqrt{1 - e^{-2x}}}.$$

$$4.10. \int_1^{64} \frac{(2 + \sqrt[3]{x}) dx}{(\sqrt[6]{x} + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}) \sqrt{x}}.$$

$$4.12. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^4} dx.$$

$$4.14. \int_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x + 4}}.$$

$$4.15. \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}.$$

$$4.17. \int_{\ln 3}^9 \frac{1-e^x}{1+e^x} dx.$$

$$4.19. \int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$$

$$4.21. \int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$4.23. \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - e^{-x}}.$$

$$4.25. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{(x+1)^3}}.$$

$$4.27. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{(16+x^2)^3}}.$$

$$4.29. \int_0^{\ln 2} \frac{dx}{e^x(3+e^{-x})}.$$

$$4.16. \int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} dx.$$

$$4.18. \int_{-3}^2 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$$

$$4.20. \int_0^{\frac{1}{2} \ln 2} \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}.$$

$$4.22. \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}.$$

$$4.24. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(16-x^2)^3}}.$$

$$4.26. \int_{\ln 2}^{2 \ln 2} \frac{dx}{e^x - 1}.$$

$$4.28. \int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}}.$$

$$4.30. \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx.$$

5. Хосмас интегралларни ҳисобланг ёки уларнинг узоқлашувчи эканини исботланг:

$$5.1. \text{ а) } \int_{-1}^{\infty} \frac{x dx}{x^2 + 4x + 5};$$

$$\text{ б) } \int_0^{\ln 2} \frac{e^{\lg x}}{\cos^2 x} dx.$$

$$5.3. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{\arctg 2x}{1+4x^2} dx,$$

$$\text{ б) } \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-4}}.$$

$$5.2. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4} dx;$$

$$\text{ б) } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x dx}{\sqrt{(1-\sin 3x)^5}}.$$

$$5.4. \text{ а) } \int_0^{\infty} \frac{(x+2) dx}{\sqrt{(x^2+4x+1)^4}};$$

$$\text{ б) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos^3 x}}.$$

$$5.5. \text{ a) } \int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5};$$

$$\text{б) } \int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}.$$

$$5.7. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2} dx;$$

$$\text{б) } \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}.$$

$$5.9. \text{ a) } \int_0^{\infty} x \sin x dx;$$

$$\text{б) } \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}.$$

$$5.11. \text{ a) } \int_{\frac{1}{3}}^{\infty} \frac{dx}{(1+9x^2) \operatorname{arctg}^2 3x};$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}.$$

$$5.13. \text{ a) } \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x};$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

$$5.15. \text{ a) } \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x - 1)^2};$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}.$$

$$5.17. \text{ a) } \int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5};$$

$$5.6. \text{ a) } \int_0^{\infty} \frac{x dx}{4x^2 + 4x + 5};$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$5.8. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)};$$

$$\text{б) } \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{4x-x^2-4}}.$$

$$5.10. \text{ a) } \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2 - 4x};$$

$$\text{б) } \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}.$$

$$5.12. \text{ a) } \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{(4+x^2) \sqrt{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}};$$

$$\text{б) } \int_0^3 \frac{\sqrt[3]{9} x dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}.$$

$$5.14. \text{ a) } \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^3 + x^2};$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(2x-1)^2};$$

$$5.16. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{dx}{6x^2 - 5x + 1};$$

$$\text{б) } \int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt[4]{(4-x^2)^3}}.$$

$$5.18. \text{ a) } \int_1^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{16x^4 - 1}};$$

$$6) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$$

$$5.19. a) \int_0^{20} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4 + 1}}$$

$$6) \int_0^1 \frac{x dx}{1-x^4}$$

$$5.21. a) \int_1^{\infty} \frac{x dx}{16x^4 - 1}$$

$$6) \int_0^2 \frac{\sqrt{\ln(2-3x)}}{2-3x} dx$$

$$5.23. a) \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^3+8)^4}}$$

$$6) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x) \ln^2(1-x)}$$

$$5.25. a) \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{9x^2 - 9x + 2}$$

$$6) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{1-3x}}$$

$$5.27. a) \int_1^{\infty} \frac{x dx}{x^2 - 4x + 5}$$

$$6) \int_0^{20} \frac{x dx}{\sqrt[4]{4-x^2}}$$

$$5.29. a) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{16x^4 + 1}$$

$$6) \int_0^1 x^2 \ln x dx$$

$$6) \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}$$

$$5.20. a) \int_4^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}}$$

$$6) \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3+\frac{1}{x}}}{x^2} dx$$

$$5.22. a) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$$

$$6) \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1} dx$$

$$5.24. a) \int_0^{\infty} \frac{x dx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$$

$$6) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{20x^2 - 9x + 1}$$

$$5.26. a) \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$$

$$6) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(5x-1)^2}$$

$$5.28. a) \int_0^{\infty} e^{-3x} x dx$$

$$6) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$$

$$5.30. a) \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{16x^4 + 1}$$

$$6) \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$$

6. Берилган чизиклар билан чегараланган фигуранинг юзини ҳисобланг:

6.1. $x = 4 - (y - 1)^2$, $x = y^2 - 4y - 3$.

6.2. $x = 2\sqrt{2} \cos t$, $y = 3\sqrt{2} \sin t$ ($y \geq 3$).

6.3. $r = 6\cos 3\varphi$, $r \geq 3$.

6.4. $x = (y - 2)^3$, $x = 4y - 8$.

6.5. $x = 8\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$ ($x \geq 3\sqrt{3}$).

6.6. $r = \cos \varphi$, $r = \sin \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$)

6.7. $y = (x + 1)^2$, $y^2 = x + 1$.

6.8. $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$ ($0 < x < 8\pi$, $y \geq 4$).

6.9. $r = 4\cos 3\varphi$.

6.10. $y = (x - 2)^3$, $y = 4x - 8$.

6.11. $x = \sqrt{2} \cos t$, $y = 4\sqrt{2} \sin t$ ($y \geq 4$).

6.12. $r = 2(1 - \cos \varphi)$,

6.13. $y = (x - 1)^2$, $y^2 = x - 1$.

6.14. $x = 24\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ ($x \geq 9\sqrt{3}$).

6.15. $r^2 = 2\sin 2\varphi$.

6.16. $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

6.17. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ ($0 < x < 2\pi$, $y \geq 1$).

6.18. $r = 3\sin 4\varphi$.

6.19. $xy = 4$, $x - y = 5$.

6.20. $x = 6\cos t$, $y = 4\sin t$.

6.21. $r = 2(1 + \cos \varphi)$.

6.22. $y^2 = 16 - 8x$, $y^2 = 24x + 48$.

6.23. $x = 32\cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ ($x \geq 4$).

6.24. $r = 2\sin 3\varphi$.

6.25. $y = x^2 - 3x$, $3x + y - 4 = 0$.

6.26. $x = 6(t - \sin t)$, $y = 6(1 - \cos t)$ ($0 < x < 12\pi$, $y \geq 9$).

6.27. $r = 4\sin 3\varphi$ ($r \geq 2$).

6.28. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$

6.29. $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$.

6.30. $r = \cos 2\varphi$.

7. Берилган чизик ёйининг узунлигини ҳисобланг:

7.1. $y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x$, $0 \leq x \leq \frac{7}{9}$.

$$7.2. \quad x=2\cos^3 t, \quad y=2\sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

$$7.3. \quad r=1-\sin\varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{6}$$

$$7.4. \quad y=1-\ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$7.5. \quad x=2(t-\sin t), \quad y=2(1-\cos t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$7.6. \quad r=8(1-\cos\varphi), \quad -\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq 0$$

$$7.7. \quad x=e^t(\cos t + \sin t), \quad y=e^t(\cos t - \sin t), \quad 0 \leq t \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$7.8. \quad y=e^x + 13, \quad \ln \sqrt{15} \leq x \leq \ln \sqrt{24}$$

$$7.9. \quad r=3e^{\frac{3\pi}{4}}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$7.10. \quad x=4(t-\sin t), \quad y=4(1-\cos t), \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{2\pi}{3}$$

$$7.11. \quad y=\ln \sin x, \quad \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$7.12. \quad r=8\sin\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$7.13. \quad x=10\cos^3 t, \quad y=10\sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$7.14. \quad y=\frac{1}{2}(1-e^x-e^{-x}), \quad 0 \leq x \leq 3$$

$$7.15. \quad r=4\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{3}{4}$$

$$7.16. \quad x=5\cos^2 t, \quad y=5\sin^2 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

$$7.17. \quad y=\ln x, \quad \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$$

$$7.18. \quad r=7(1-\sin\varphi), \quad -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}$$

$$7.19. \quad x=3(t-\sin t), \quad y=3(1-\cos t), \quad \pi \leq t \leq 2\pi$$

$$7.20. \quad y=-\ln \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$

$$7.21. \quad r=2(1-\cos\varphi), \quad -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}$$

$$7.22. \quad x=3(2\cos t - \cos 2t), \quad y=3(2\sin t - \sin 2t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$7.23. \quad y=2-e^x, \quad \ln \sqrt{3} \leq x \leq \ln \sqrt{8}$$

$$7.24. \quad r=4e^{\frac{\pi}{3}}, \quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$$

$$7.25. \quad x=8\cos^3 t, \quad y=8\sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$$

$$7.26. \quad y=1-\ln(x^2-1), \quad 3 \leq x \leq 4$$

$$7.27. r=6(1+\sin\varphi), \quad -\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq 0.$$

$$7.28. x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \quad y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t, \quad 0\leq t\leq \frac{\pi}{3}.$$

$$7.29. y=e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}, \quad 0\leq x\leq 2.$$

$$7.30. r=3e^{\frac{3\varphi}{4}}, \quad 0\leq\varphi\leq \frac{\pi}{3}.$$

8. Функциялар графиклари билан чегараланган фигурани берилган координата ўқи атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм ҳажмини ҳисобланг:

$$8.1. y=(x-1)^2, \quad x=0, \quad x=2, \quad y=0 \quad (Oy).$$

$$8.2. y=-x^2+5x-6, \quad y=0 \quad (Ox).$$

$$8.3. x=3\cos^2 t, \quad y=4\sin^2 t, \quad \left(0\leq t\leq \frac{\pi}{2}\right) \quad (Oy).$$

$$8.4. y^2=(x-1)^3, \quad x=2 \quad (Ox).$$

$$8.5. y=x^3, \quad y=x \quad (Oy).$$

$$8.6. x=6(t-\sin t), \quad y=6(1-\cos t) \quad (Ox).$$

$$8.7. y=x^2-2x+1, \quad x=2, \quad y=0 \quad (Oy).$$

$$8.8. y=2x-x^2, \quad y=0, \quad 2x^2-4x+y=0 \quad (Ox).$$

$$8.9. x=2\cos t, \quad y=5\sin t \quad (Oy).$$

$$8.10. y=3\sin x, \quad y=\sin x \quad (0\leq x\leq \pi) \quad (Ox).$$

$$8.11. y=\arcsin x, \quad y=\arccos x, \quad y=0 \quad (Oy).$$

$$8.12. x=7\cos^3 t, \quad y=7\sin^3 t \quad (Ox).$$

$$8.13. y=(x-1)^2, \quad y=1 \quad (Oy).$$

$$8.14. x=\sqrt[3]{y-2}, \quad x=1, \quad y=1 \quad (Ox).$$

$$8.15. x=\sqrt{3}\cos t, \quad y=2\sin t \quad (Oy).$$

$$8.16. y=2x-x^2, \quad y=-x+2 \quad (Ox).$$

$$8.17. y=\sqrt{x-1}, \quad y=0, \quad y=1, \quad x=0,5 \quad (Oy).$$

$$8.18. x=2(t-\sin t), \quad y=2(1-\cos t) \quad (Ox).$$

$$8.19. y=x^2+1, \quad y=x, \quad x=0, \quad x=1 \quad (Oy).$$

$$8.20. y=e^{1-x}, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=1 \quad (Ox).$$

$$8.21. x=2\cos t, \quad y=6\sin t \quad (Oy).$$

$$8.22. y^2=4x, \quad x^2=4y \quad (Ox).$$

$$8.23. y=2-\frac{x^2}{2}, \quad x+y=2 \quad (Oy).$$

$$8.24. y = \cos^3 t, y = \sin^3 t \quad (Ox).$$

$$8.25. y = 5\cos x, y = \cos x, x \geq 0 \quad (Ox).$$

$$8.26. y = \ln x, x = 2, y = 0 \quad (Oy).$$

$$8.27. x = 3\cos t, y = 8\sin t \quad (Oy).$$

$$8.28. y = x^2, y^2 - x = 0 \quad (Ox).$$

$$8.29. y = \arccos \frac{x}{5}, y = \arccos \frac{x}{3}, y = 0 \quad (Oy).$$

$$8.30. y = e^x, x = 0, y = 0, x = 1 \quad (Ox).$$

БИР НЕЧА ҲАҶАТЛАШЧИНИНГ ФУНКЦИЯСИ

1-§. Бир неча ҳаҷатлашчи функциясининг хусусий хосилалари ва тўлиқ дифференциали

7.1.1. Агар бирор D тўпламнинг ҳар бир (x, y) ҳақиқий сонлар жуфтлиги бирор қонда билан E тўпламдаги ягона z ҳақиқий сонга мос қўйилган бўлса, у ҳолда D тўпламда икки ҳаҷатлашчининг функцияси z аниқланган дейилади ва қуйидаги қўринишларда белгиланади:

$$z = f(x, y), z = z(x, y) \text{ ва х. к.}$$

D тўплам функциянинг аниқланиш соҳаси дейилади.

Геометрик нуқтаи назардан $z = f(x, y)$ функциянинг *Охуз* тўғри бурчакли координаталар системасидаги тасвири (функциянинг графиги) бирор сиртдан иборатдир.

Исталган чекли сондаги ҳаҷатлашчининг функцияси ҳам юқоридаги каби аниқланади.

1-мисол. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Берилган функция $4 - x^2 - y^2 \geq 0$, яъни $x^2 + y^2 \leq 4$ шартда ҳақиқий қийматлар қабул қилади. Демак, функциянинг аниқланиш соҳаси маркази координаталар бошида бўлган, радиуси 2 га тенг доирадан иборат.

2-мисол. $u = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$ функциянинг аниқланиш соҳасини топинг.

Ечиш. Берилган функция $1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$, яъни $x^2 + y^2 + z^2 < 1$ шартда аниқланган. Бинобарин, берилган функциянинг аниқланиш соҳаси маркази координаталар бошида, радиуси 1 га тенг шар бўлади, бунда шар сирти (сфера) аниқланиш соҳасига қирмайди.

7.1.2. Агар x ҳаҷатлашчига бирор Δx орттирма бериб, y ни ўзгаришсиз қолдирсак, у ҳолда $z = f(x, y)$ функция $\Delta_x z$ орттирма олади, бу орттирма z функциянинг x ҳаҷатлашчи бўйича хусусий орттирмаси дейилади:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Худди шундай, y ўзгарувчи Δy орттирма олиб, x ўзгаришсиз қолса, u ҳолда z функциянинг y ўзгарувчи бўйича хусусий орттирмаси қуйидагича ёзилади:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Агар $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ чекли лимит мавжуд бўлса, у $z = f(x, y)$ функциянинг эркин ўзгарувчи x бўйича хусусий ҳосиласи дейилади ва $\frac{\partial z}{\partial x}$ ёки $f'_x(x, y)$ билан белгиланади. Демак,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y).$$

Агар $\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$ чекли лимит мавжуд бўлса, у $z = f(x, y)$ функциянинг эркин ўзгарувчи y бўйича хусусий ҳосиласи дейилади ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ёки $f'_y(x, y)$ билан белгиланади.

Хусусий ҳосилалар учун бир ўзгарувчи функциясини дифференциаллашнинг қонди ва формулалари сақланади.

Исталган чекли сондаги эркин ўзгарувчи функциясининг хусусий ҳосилалари ҳам юқоридагидек аниқланади.

3-мисол. $z = \arcsin \frac{x}{y}$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Еч и ш. y ни ўзгармас деб, x бўйича хусусий ҳосилани топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

Энди x ни ўзгармас деб ҳисоблаб, y ўзгарувчи бўйича хусусий ҳосилани топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

4-мисол. $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Еч и ш. $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}} (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}};$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}} (-2y) = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}(-2z) = -\frac{z}{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}.$$

7.1.3. Агар x ва y ўзгарувчилар мос равишда Δx ва Δy орттирмалар олса, u ҳолда $z=f(x, y)$ функция $\Delta z=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$ тўлиқ орттирма олади. Бу тўлиқ орттирманинг Δx ва Δy ларга нисбатан чизикли бўлган бош қисми функциянинг тўлиқ дифференциали дейилади ва dz орқали белгиланади.

$z=f(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

бу ерда $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$.

Тўлиқ дифференциалдан кўпинча функциянинг тақрибий қийматларини ҳисоблаш учун фойдаланилади, чунки $\Delta z \approx dz$, яъни

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y) + \Delta z.$$

5- мисол. $z = \arctg \frac{y}{x}$ функциянинг тўлиқ дифференциалини топинг.

Е чи ш. Дастлаб хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Тўлиқ дифференциал формуласига кўра:

$$dz = \frac{-ydx}{x^2+y^2} + \frac{xdy}{x^2+y^2} = \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}.$$

6- мисол. $u = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ функциянинг тўлиқ дифференциалини топинг.

Е чи ш. Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Демак, тўлиқ дифференциал:

$$dz = \frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

7-мисол. $1,02^{3,01}$ ни тақрибий ҳисобланг.

Ечиш. $z = x^y$ функцияни қараймиз. Унинг $x=1$ ва $y=3$ даги қиймати $z=1^3=1$ га тенг.

$z = x^y$ функциянинг тўлиқ дифференциалини топамиз:

$$dz = yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y.$$

$x=1$, $y=3$, $\Delta x=0,02$ ва $\Delta y=0,01$. Шунинг учун $dz=3 \cdot 1^2 \cdot 0,02 + 1^3 \ln 1 \cdot 0,01 = 0,06$ бўлади. У ҳолда изланаётган қиймат:

$$(1,02)^{3,01} \approx f(x, y) + dz = 1 + 0,06 = 1,06.$$

1-дарсхона топшириғи

1. Функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг:

а) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$; б) $z = \arcsin(x + y)$;

в) $z = \ln(y^2 - 2x + 4)$; г) $u = \frac{1}{\ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)}$.

2. Қуйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг:

а) $z = x^3 + y^3 - 3axy$; б) $z = \frac{x-y}{x+y}$;

в) $z = e^{\frac{x}{y}}$; г) $z = \arcsin \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$;

д) $z = \ln|x + \sqrt{x^2 + y^2}|$; е) $z = \ln \sin \frac{x+1}{\sqrt{y}}$;

ж) $u = z^{xy}$; з) $u = (xy)^z$.

3. Қуйидаги функцияларнинг тўлиқ дифференциалини топинг:

а) $z = \ln \operatorname{tg} \frac{y}{x}$; б) $z = \ln(x^2 + y^2)$;

в) $z = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$; г) $u = \arcsin \operatorname{tg} \frac{xy}{x^2}$.

4. Тақрибий ҳисобланг:

а) $\ln(0,09^3 + 0,99^3)$; б) $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$.

Ж: а) $-0,03$; б) $4,998$.

1-мустақил иш

1. Функцияларнинг аниқланиш соҳасини топинг.

а) $z = \ln(y - x)$; б) $z = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$;

$$\text{в) } r = \ln \sqrt{\frac{y}{x}}; \quad \text{г) } u = \sqrt{x+y+z}.$$

2. Куйидаги функцияларнинг хусусий ҳосилаларини топинг:

$$\text{а) } z = e^{xy(x^2+y^2)}; \quad \text{б) } z = \arctg \frac{y}{1+x^2};$$

$$\text{в) } z = y \cdot x^y; \quad \text{г) } z = \arctg \frac{y}{x} + \arctg \frac{x}{y};$$

$$\text{д) } u = x + \frac{x-y}{y-z}.$$

3. Функцияларнинг тўлиқ дифференциалини топинг:

$$\text{а) } z = \ln \cos \frac{x}{y}; \quad \text{б) } z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}); \quad \text{в) } u = \frac{z}{x^2 + y^2}.$$

4. Тақрибий ҳисобланг:

$$\text{а) } \sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^3}; \quad \text{б) } \sin 28^\circ \cdot \cos 61^\circ.$$

Ж: а) 2,95; б) 0,227.

2-§. Мураккаб функциянинг ҳосилалари. Ошкормас функциянинг ҳосилалари

7.2.1. Агар $z = f(x, y)$, $x = x(t)$, $y = y(t)$ функциялар дифференциалланувчи бўлса, у ҳолда $z = f(x(t), y(t))$ мураккаб функциянинг ҳосиласи ушбу формула бўйича топилади:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Агар $z = f(x, y)$, $y = y(x)$ бўлса, у ҳолда $z = f(x, y(x))$ дан x бўйича тўлиқ ҳосила куйидаги формула бўйича топилади:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Худди шунингдек, $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ бўлса, у ҳолда $z = f(x, y)$ нинг хусусий ҳосилалари куйидаги формулалар бўйича топилади:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

1-мисол. Агар $x = e^t$ ва $y = \ln t$ бўлса, $z = \frac{x}{y}$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Е ч и ш.

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{y} e^t - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{1}{t} = \frac{t y e^t - x}{y^2 \cdot t}.$$

2- м и с ол. Агар $y=x^2$ бўлса, $z=\arctg \frac{y}{x}$ функциянинг тўлиқ ҳосиласини топинг.

Е ч и ш. Тўлиқ ҳосила формуласига кўра:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot 2x = \\ &= \frac{-y}{x^2+y^2} + \frac{2x^2}{x^2+y^2} = \frac{2x^2-y}{x^2+y^2} = \frac{2x^2-x^2}{x^2+x^4} = \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Хусусий ҳосила: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$.

3- м и с ол. Агар $x=uv$, $y=\frac{u}{v}$ бўлса, $z=\ln(x^2+y^2)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

$$\begin{aligned} \text{Е ч и ш. } \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot v + \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \frac{1}{v} = \\ &= \frac{2}{x^2+y^2} \left(x \cdot v + \frac{y}{v}\right) = \frac{2}{u}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \\ &= \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot u + \frac{2y}{x^2+y^2} \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) = \frac{2}{x^2+y^2} \left(xu - \frac{yu}{v^2}\right) = \frac{2(v^4-1)}{(v^4+1)v}. \end{aligned}$$

7.2.2. Агар $F(x, y)=0$ тенглама бирор $y(x)$ функцияни ошқормас кўринишда аникласа ва $F'_y(x, y) \neq 0$ бўлса, у ҳолда қуйидаги формула ўринлидир:

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

Агар $F(x, y, z)=0$ тенглама икки ўзгарувчили $z(x, y)$ функцияни ошқормас кўринишда аникласа ва $F'_z(x, y, z) \neq 0$ бўлса, у ҳолда қуйидаги формулалар ўринлидир:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}$$

4- м и с ол. Ошқормас кўринишда

$$(x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) + 1 = 0$$

тенглама билан берилган $y(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Е ч и ш. Тенгламанинг чап томонини $F(x, y)$ оркали белгилаймиз ва хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$F'_x(x, y) = 3(x^2+y^2)^2 2x - 6x = ((x^2+y^2)^2 - 1) \cdot 6x;$$

$$F'_y(x, y) = 3(x^2+y^2)^2 2y - 6y = ((x^2+y^2)^2 - 1) \cdot 6y.$$

$$\text{Демак, } \frac{dy}{dx} = - \frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)} = - \frac{6x((x^2+y^2)^2-1)}{6y((x^2+y^2)^2-1)} = - \frac{x}{y}.$$

5- м и с о л. Ошкормас кўринишда $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$ тенглама билан берилган $z(x, y)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

Е чи ш. Тенгламанинг чап томонини $F(x, y, z)$ орқали белгилаб, хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$F'_x(x, y, z) = 2x; F'_y(x, y, z) = -4y - z + 1; F'_z(x, y, z) = 6z - y.$$

Демак,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = - \frac{2x}{6z - y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = - \frac{1 - 4y - z}{6z - y}.$$

2- дарсхона топириғи

1. Агар $z = \ln \frac{u}{v}$, бу ерда $u = \lg^2 x$, $v = \operatorname{ctg}^2 x$ бўлса, $\frac{dz}{dx}$ ни топинг.

2. Агар $z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}$, бу ерда $y = 3x + 1$ бўлса, $\frac{dz}{dx}$ ни топинг.

3. Агар $z = x^2 y$, бу ерда $y = \cos x$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{dz}{dx}$ ни топинг.

4. Агар $z = u^2 \ln v$, бу ерда $u = \frac{y}{x}$, $v = x^2 + y^2$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$ ва $\frac{\partial z}{\partial y}$ ни топинг.

5. Агар $z = x^2 y - y^2 x$, бу ерда $x = u \cos v$ ва $y = u \sin v$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial u}$ ва $\frac{\partial z}{\partial v}$ ни топинг.

6. Агар $w = \ln(x^3 + y^3 - z^3)$, бу ерда $x = uv$, $y = \frac{u}{v}$, $z = e^{u \cdot v}$ бўлса, $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$ ни топинг.

7. Ошкормас кўринишда

а) $\sin xy - e^{xy} - x^2 y = 0$; б) $y^x = x^y$ тенглама билан берилган $y(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг:

8. Ошкормас кўринишда

а) $e^z = x y z$; б) $z^3 + 3 x y z = 0^3$

тенглама билан берилган $z(x, y)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

2- мустақил иш

1. Агар $z = \arcsin(x - y)$, бу ерда $x = 3t$, $y = 4t^3$ бўлса, $\frac{dz}{dt}$ ни топинг.

2. Агар $z = \arctg xy$, бу ерда $y = e^x$ бўлса, $\frac{dz}{dx}$ ни топинг.

3. Агар $z = u^2 + v^2$, бу ерда $u = x + y$, $v = x - y$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ларни топинг.

4. Агар $z = u^2 v - v^2 u$, бу ерда $u = x \sin y$, $v = y \cos x$ бўлса, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ ларни топинг.

5. Ошкормас кўринишда

$$a) 1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0; \quad б) y \sin x - \cos(x - y) = 0$$

тенглама билан берилган $y(x)$ функциянинг ҳосиласини топинг.

6. Ошкормас кўринишда

$$a) x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0; \quad б) z \ln(x + z) - \frac{xy}{z} = 0$$

тенглама билан берилган $z(x, y)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг.

3-§. Уринма текислик ва сиртга нормал. Юкори тартибли ҳосилалар. Тейлор формуласи

7.3.1. Сиртга M_0 нуктада ўтказилган уринма текислик деб сиртда M_0 нукта орқали ўтказилган барча эгри чизикларга ўтказилган уринмалар жойлашган текисликка айтилади.

Сиртга M_0 нуктадаги нормал деб M_0 нуктадан ўтувчи ва бу нуктада ўтказилган уринма текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизикка айтилади.

Агар сирт $z = f(x, y)$ тенглама билан берилган бўлса, у ҳолда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктада бу сиртга ўтказилган уринма текислик тенгламаси:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$ нукта орқали сиртга ўтказилган нормалнинг каноник тенгламаси куйидагича бўлади:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Агар сирт $F(x, y, z) = 0$ тенглама билан ошкормас кўринишда берилган бўлса, сиртнинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктасида ўтказилган уринма текислик тенгламаси

$F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$ кўринишда, нормал тенгламаси эса

$$\frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$$

кўринишда бўлади.

1- м и с о л. $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ сиртга $M_0(1, 1, 1)$ нуктада ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламаларини тузинг.

Е ч и ш. Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1 \quad \text{ва} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2.$$

Бу ҳосилаларнинг $M_0(1, 1, 1)$ нуктадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0} = 2 - 2 - 1 = -1 \quad \text{ва} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0} = -2 + 2 + 2 = 2.$$

Шундай қилиб, $f'_x(1, 1) = -1$, $f'_y(1, 1) = 2$. Демак, уринма текислик тенгламаси:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1) \quad \text{ёки} \quad x - 2y + z = 0,$$

нормал тенгламаси:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

2- м и с о л. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ сиртга $M_0(1, 2, -1)$ нуктада ўтказилган уринма текислик ва нормалнинг тенгламасини тузинг.

Е ч и ш. Тенгламанинг чап томонини $F(x, y, z)$ орқали белгилаб, хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$F'_x(x, y, z) = 3x^2 + yz; \quad F'_y(x, y, z) = 3y^2 + xz; \\ F'_z(x, y, z) = 3z^2 + xy.$$

Ҳосилаларнинг $M_0(1, 2, -1)$ нуктадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$F'_x(1, 2, -1) = 3 - 2 = 1; \quad F'_y(1, 2, -1) = 12 - 1 = 11; \\ F'_z(1, 2, -1) = 3 + 2 = 5.$$

Шундай қилиб, уринма текислик тенгламаси:

$$1(x - 1) + 11(y - 2) + 5(z + 1) = 0 \quad \text{ёки} \quad x + 11y + 5z - 18 = 0,$$

нормал тенгламаси:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}.$$

7.3.2. $z = f(x, y)$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари деб биринчи тартибли хусусий ҳосилалардан олинган хусусий ҳосилаларга айтилади. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар қуйидагича белгиланади:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = f''_{yx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = f''_{yy}(x, y).$$

$f''_{xy}(x, y)$ ва $f''_{yx}(x, y)$ хусусий ҳосилалар аралаш ҳосилалар дейилади. Аралаш ҳосилалар узлуксиз бўлган нукталарда уларнинг кийматлари тенг бўлади.

Учинчи ва ундан юқори тартибли хусусий ҳосилалар ҳам шундай аникланади.

Ушбу $\frac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$ ёзув z функцияни m марта x ўзгарувчи бўйича ва $(n-m)$ марта y ўзгарувчи бўйича дифференциалланганини билдиради.

3- м и с о л. $z = \arctg \frac{x}{y}$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг.

Е ч и ш. Дастлаб биринчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Иккинчи марта дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Кейинги иккита ифодани таккослаб, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

7.3.3. Агар $z = f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нукта атрофида $(n+1)$ -тартиблигача $(n+1)$ -тартиблиси ҳам) узлуксиз хусусий

1- м и с о л. $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$ сиртга $M_0(1, 1, 1)$ нуктада ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламаларини тузинг.

Е ч и ш. Хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1 \quad \text{ва} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2.$$

Бу ҳосилаларнинг $M_0(1, 1, 1)$ нуктадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0} = 2 - 2 - 1 = -1 \quad \text{ва} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0} = -2 + 2 + 2 = 2.$$

Шундай қилиб, $f'_x(1, 1) = -1$, $f'_y(1, 1) = 2$. Демак, уринма текислик тенгламаси:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1) \quad \text{ёки} \quad x - 2y + z = 0,$$

нормал тенгламаси:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

2- м и с о л. $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ сиртга $M_0(1, 2, -1)$ нуктада ўтказилган уринма текислик ва нормалнинг тенгламасини тузинг.

Е ч и ш. Тенгламанинг чап томонини $F(x, y, z)$ орқали белгилаб, хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$F'_x(x, y, z) = 3x^2 + yz; \quad F'_y(x, y, z) = 3y^2 + xz; \\ F'_z(x, y, z) = 3z^2 + xy.$$

Ҳосилаларнинг $M_0(1, 2, -1)$ нуктадаги қийматларини ҳисоблаймиз:

$$F'_x(1, 2, -1) = 3 - 2 = 1; \quad F'_y(1, 2, -1) = 12 - 1 = 11; \\ F'_z(1, 2, -1) = 3 + 2 = 5.$$

Шундай қилиб, уринма текислик тенгламаси:

$$1(x - 1) + 11(y - 2) + 5(z + 1) = 0 \quad \text{ёки} \quad x + 11y + 5z - 18 = 0,$$

нормал тенгламаси:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}.$$

7.3.2. $z = f(x, y)$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилалари деб биринчи тартибли хусусий ҳосилалардан олинган хусусий ҳосилаларга айтилади. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар қуйидагича белгиланади:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{yx} = f'_{yx}(x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xy} = f'_{xy}(x, y).$$

$f'_{xy}(x, y)$ ва $f'_{yx}(x, y)$ хусусий ҳосилалар аралаш ҳосилалар дейилади. Аралаш ҳосилалар узлуксиз бўлган нукталарда уларнинг қийматлари тенг бўлади.

Учинчи ва ундан юқори тартибли хусусий ҳосилалар ҳам шундай аникланади.

Ушбу $\frac{\partial^n z}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$ ёзув z функцияни m марта x ўзгарувчи бўйича ва $(n-m)$ марта y ўзгарувчи бўйича дифференциалланганини билдиради.

3-ми с о л. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ функциянинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг.

Е ч и ш. Дастлаб биринчи тартибли хусусий ҳосилаларни топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Иккинчи марта дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Кейинги иккита ифодани такқослаб, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

7.3.3. Агар $z = f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нукта атрофида $(n+1)$ -тартиблигача $(n+1)$ -тартиблиси ҳам) узлуксиз хусусий

хосилаларга эга бўлса, у ҳолда каралаётган нукта атрофида ушбу Тейлор формуласи ўринлидир:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} [f'_x(x_0, y_0) (x - x_0) + f'_y(x_0, y_0) (y - y_0)] + \\ + \frac{1}{2!} [f''_{xx}(x_0, y_0) (x - x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0) (x - x_0) (y - y_0) + \\ + f''_{yy}(x_0, y_0) (y - y_0)^2] + \dots + \frac{1}{n!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x_0, y_0) + \\ + R_n(x, y),$$

бу ерда $R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left[(x - x_0) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))$, $0 < \theta < 1$.

Тейлор формуласининг $x_0 = y_0 = 0$ бўлгандаги хусусий ҳоли *Маклорен формуласи* дейилади.

4-мисол. $z = x^3 - 5x^2 - xy + y^2 + 10x + 5y - 4$ функцияни $P_0(2, -1)$ нукта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг.

Ечиш. Берилган функциянинг хусусий хосилаларини ва уларнинг $P_0(2, -1)$ нуктадаги қийматларини бирин-кетин ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^3 - 5x^2 + y^2 + 10x + 5y - 4 - xy, & f(2, -1) &= 2; \\ f'_x(x, y) &= 3x^2 - 10x - y + 10, & f'_x(2, -1) &= 3; \\ f'_y(x, y) &= -x + 2y + 5, & f'_y(2, -1) &= 1; \\ f''_{xx}(x, y) &= 6x - 10, & f''_{xx}(2, -1) &= 2; \\ f''_{xy}(x, y) &= -1, & f''_{xy}(2, -1) &= -1; \\ f''_{yy}(x, y) &= 2, & f''_{yy}(2, -1) &= 2; \\ f'''_{xxx}(x, y) &= 6, & f'''_{xxx}(2, -1) &= 6. \end{aligned}$$

Кейинги барча хосилалар айнан нолга тенг. Топилганларни Тейлор формуласига қўйиб, изланаётган ёйилмани ҳосил қиламиз:

$$z = f(x, y) = 2 + 3(x - 2) + (y + 1) + (x - 2)^2 - (x - 2)(y + 1) + \\ + (y + 1)^2 + (x - 2)^3.$$

3-дарсхона топшириғи

1. Берилган сиртга берилган $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктада ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламаларини тузинг:

$$\begin{aligned} \text{а) } z &= 1 + x^2 + y^2, & M_0(1, 1, 3); \\ \text{б) } x^2 + y^2 - z^2 &= -1, & M_0(2, 2, 3); \\ \text{в) } z &= \ln(x^2 + y^2), & M_0(1, 0, 0); \\ \text{г) } x^2 + z^2 - 5yz + 3y &= 46, & M_0(1, 2, -3). \end{aligned}$$

2. Берилган функцияларнинг иккинчи тартибли хусусий хосилаларини топинг ва аралаш хусусий хосилалари тенг ёки тенг эмаслигини текширинг:

$$a) z = xy + \frac{y}{x};$$

$$b) z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$в) z = xe^{-xy};$$

$$г) z = y^x;$$

$$д) z = \ln(x^2 + y^2);$$

$$е) z = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$ж) u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$з) u = \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

3. $z = e^{xy}$ функция

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2z$$

тенгламани каноатлантиришини текширинг.

4. $z = x^y$ функция

$$y \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} = (1 + y \ln x) \frac{\partial z}{\partial x}$$

тенгламани каноатлантиришини текширинг.

5. $z = e^x (x \cos y - y \sin y)$ функция $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ тенгламани кано-

атлантиришини текширинг.

6. $f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ функция $P_0(-2, 1)$ нукта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг.

7. $f(x, y) = e^x \sin y$ функцияни учинчи тартибли хадларгача (улар ҳам киради) Маклорен формуласи бўйича ёйинг.

3-мустақил иш

1. Берилган сиртга берилган $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуктада ўтказилган уринма текислик ва нормал тенгламаларини тузинг:

$$a) z = 1 + x^2 + y^2, M_0(2, -1, 6);$$

$$б) x^2 - y^2 - z^2 + xz + 4x + 5 = 0, M_0(-2, 1, 0).$$

2. Берилган функцияларнинг иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг ва аралаш хусусий ҳосилалар тенг ёки тенг эмаслигини текширинг:

$$a) z = \operatorname{tg} \sqrt{xy};$$

$$б) z = \ln(3xy - 4);$$

$$в) z = \sin \sqrt{x^2 y};$$

$$г) z = \operatorname{arctg}(2x - y).$$

3. Берилган функциялар кўрсатилган тенгламаларни каноатлантиришини текширинг:

$$a) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial z^2} = 0, \quad z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$б) x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0, \quad z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy).$$

4. $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ функцияни $P_0(1, 2)$ нукта атрофида Тейлор формуласи бўйича ёйинг.

5. $f(x, y) = e^{x+y}$ функцияни $P_0(1, -1)$ нукта атрофида учинчи тартибли хадлар (улар ҳам киради) гача Тейлор формуласи бўйича ёйинг.

4-§. Бир неча ўзгарувчи функциясининг экстремумлари

7.4.1. Агар $z = f(x, y)$ функциянинг $P_0(x_0, y_0)$ нуктадаги киймати унинг бу нуктанинг бирор атрофидаги исталган $P(x, y)$ нуктасидаги кийматидан катта, яъни $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ бўлса, $z = f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуктада *максимумга* эга дейилади.

Агар $z = f(x, y)$ функциянинг $P_0(x_0, y_0)$ нуктадаги киймати унинг бу нуктанинг бирор атрофидаги исталган $P(x, y)$ нуктасидаги кийматидан кичик бўлса, яъни $f(x_0, y_0) < f(x, y)$ бўлса, $z = f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуктада *минимумга* эга дейилади.

Функциянинг максимуми ёки минимуми унинг *экстремуми* дейилади. Функция экстремумга эга бўлган нукта унинг *экстремум нуктаси* дейилади.

7.4.2. Экстремумнинг зарурий шартлари: агар $P_0(x_0, y_0)$ нукта ўзлуксиз $z = f(x, y)$ функциянинг экстремум нуктаси бўлса, у ҳолда $f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$ бўлади ёки бу ҳосилаларнинг акалли биттаси мавжуд бўлмайди.

Бу шартлар бажариладиган нукталар *критик нуқталар* дейилди. Ҳар қандай критик нукта ҳам экстремум нуктаси бўлавермайди.

7.4.3. Иккинчи тартибли ҳосилаларнинг $P_0(x_0, y_0)$ критик нуктадаги кийматларини

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0); B = f''_{xy}(x_0, y_0); C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

оркали белгилаймиз ва $\Delta = AC - B^2$ дискриминантни тузамиз.

Экстремумнинг етарли шарти.

а) агар $\Delta > 0$ бўлса, $z = f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуктада экстремумга эга бўлиб, бунда $A < 0$ (ёки $C < 0$) бўлганда P_0 нукта максимум нуктаси, $A > 0$ (ёки $C > 0$) бўлганда минимум нуктаси бўлади;

б) агар $\Delta < 0$ бўлса, P_0 нуктада экстремум мавжуд эмас;

в) агар $\Delta = 0$ бўлса, экстремум мавжуд бўлиши ҳам, мавжуд бўлмаслиги ҳам мумкин.

1-мисол. $z = xy(x + y - 2)$ функциянинг экстремумларини топинг.

Ечиш. Функция бутун Oxy текисликда аниқланган.

Критик нукталарни қуйидаги тенгламалардан топамиз:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2 - 2y = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy - 2x = 0.$$

Бу системани ечиб, тўртта критик нуктани топамиз: $P_1(0, 0)$, $P_2(2, 0)$, $P_3(0, 2)$, $P_4\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Иккинчи тартибли хусусий ҳосилалар.

$$f_{xx}(x, y) = 2y; \quad f''_{xy}(x, y) = 2x + 2y - 2; \quad f''_{yy}(x, y) = 2x.$$

Хар бир критик нуктадаги дискриминантни ҳисоблаймиз:

а) $P_1(0, 0)$ нуктада: $\Delta = AC - B^2 = (2 \cdot 0) \cdot (2 \cdot 0) - (2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 2)^2 = -4 < 0$, демак экстремум йўқ (экстремумнинг етарли шартига мувофиқ);

б) $P_2(2, 0)$ нуктада: $\Delta = -4 < 0$, демак экстремум мавжуд эмас;

в) $P_3(0, 2)$ нуктада: $\Delta = -4 < 0$, демак экстремум мавжуд эмас;

г) $P_4\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ нуктада: $\Delta = \frac{12}{9} > 0$, $A = \frac{4}{3} > 0$, демак функциянинг

минимум нуктасига эгамиз, бу нуктада $z_{\min} = f\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{8}{27}$.

7.4.4. Чегараланган ёпик D соҳада дифференциалланувчи функция ўзининг энг катта ва энг кичик қийматига ё $\bar{D}$ соҳа ичида ётувчи критик нуктада, ё бу соҳа чегарасида эришади.

Ёпик $\bar{D}$ соҳада функциянинг энг катта ва энг кичик қийматини топиш учун: а) соҳа ичида ва унинг чегарасида ётган барча критик нукталар топилади; б) функциянинг бу нукталардаги ва чегарадаги қийматлари ҳисобланади; в) топилган қийматлар орасидан энг катта ва энг кичик қийматлар топилади.

2-мисол. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ функциянинг $x \leq 0$, $y \leq 0$, $x + y \geq -3$ соҳадаги энг катта ва энг кичик қийматларини топинг.

Ечиш. D соҳа AOB учбурчакдан иборат (41-шакл).

а) Ушбу системадан соҳа ичидаги критик нукталарни топамиз:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

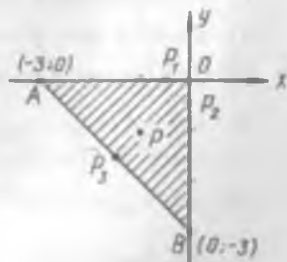
Бу ердан: $x = -1$, $y = -1$, демак, $P_0(-1, -1)$ нуктага эгамиз.

б) Функцияни соҳа чегарасида текшираемиз. Тенгламаси $y = 0$ бўлган AO чегарада $z = x^2 + x$ функцияга эгамиз; критик нукталарнинг абсциссаларини $z'_x = 2x + 1 = 0$ тенгламадан аниқлаймиз:

$x = -\frac{1}{2}$. Демак критик нукта: $P_1\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$. Тенгламаси $x = 0$

бўлган BO чегарада $z = y^2 + y$ функцияга эгамиз; критик нукталарнинг ординаталарини $z'_y = 2y + 1 = 0$ тенгламадан топамиз:

$y = -\frac{1}{2}$. Демак, критик нукта $P_2\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. Тенгламаси $y = -3 - x$



41-шакл

бўлган AB чегарада $z=3x^2+9x+6$ функцияга эгамиз; критик нукталарнинг абсциссларини $z'_x=6x+9=0$ тенгламадан топамиз: $x=-\frac{3}{2}$. AB тенгламасидан $y=-\frac{3}{2}$. Демак, критик нукта:

$$P_3\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

в) Берилган функциянинг P_0, P_1, P_2, P_3 критик нукталардаги ҳамда чегаралар туташидиган A, B ва O нукталардаги кийматларини ҳисоблаймиз:

$$z_0=f(P_0)=f(-1, 1)=-1;$$

$$z_1=f(P_1)=f\left(-\frac{1}{2}, 0\right)=-\frac{1}{4};$$

$$z_2=f(P_2)=f\left(0, -\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4};$$

$$z_3=f(P_3)=f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{4};$$

$$z_4=f(O)=f(0, 0)=0;$$

$$z_5=f(A)=f(-3, 0)=6;$$

$$z_6=f(B)=f(0, -3)=6.$$

г) Функциянинг топилган барча кийматларини таккослаб, $z_{\text{энг кат}}=f(A)=f(B)=6$ ва $z_{\text{энг кич}}=f(P_0)=-1$ деган хулосага келамиз.

4- дарсхона топшириғи

1. Функцияларни экстремумга текшириш:

а) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$;

б) $z=\frac{1}{2}xy+(47-x-y)\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right)$;

в) $z=xy^2(1-x-y)$;

г) $z=x^3+y^3-15xy$.

Ж: а) $z_{\min}=-9$;

в) $z_{\max}=\frac{1}{64}$;

б) $z_{\max}=282$;

г) $z_{\min}=-125$.

2. Функцияларнинг кўрсатилган соҳадаги энг катта ва энг кичик кийматларини топинг:

а) $z=x^2-xy+y^2-4x$; $x\geq 0, y\geq 0, 2x+3y\leq 12$;

б) $z=x^2+3y^2+x-y$; $x\leq 1, y\leq 1, x+y\geq 1$.

Ж: а) $z_{\text{энг кич}}=-\frac{16}{3}$; $z_{\text{энг кат}}=16$;

б) $z_{\text{энг кич}}=1$; $z_{\text{энг кат}}=4$.

1. Функцияларни экстремумга текширинг:

а) $z = (x-1)^2 + 2y^2$;

б) $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$;

в) $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

Ж: а) $z_{\min} = 0$; б) $z_{\min} = -1$; в) $z_{\max} = 8e^{-2}$;

2. Функциянинг кўрсатилган соҳадаги энг катта ва энг кичик кийматларини топинг:

а) $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$; $x \geq 0, y \geq 0, x \leq 1, y \leq 2$;

б) $z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x + 5$; $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3$.

Ж: а) $z_{\text{энг кич}} = -3, z_{\text{энг кат}} = 17$,

б) $z_{\text{энг кич}} = -9, z_{\text{энг кат}} = 5$.

5- §. Шартли экстремум

$z = f(x, y)$ функциянинг шартли экстремуми деб бу функциянинг x ва y ўзгарувчиларнинг боғланиш тенгламаси деб аталувчи $\varphi(x, y) = 0$ тенглама билан боғланганлик шарида эришадиган экстремумига айтилади.

Ушбу $\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \varphi(x, y)$ функция Лагранж функцияси дейилади, бу ерда λ — бирор ўзгармас кўпайтувчи. Шартли экстремумни топиш $\Phi(x, y, \lambda)$ функциясининг оддий экстремумини излашга келтирилади. Лагранж функцияси экстремумининг зарурий шартни қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Агар $P_0(x_0, y_0)$, λ_0 — бу системанинг исталган ечими ва

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \varphi_x'(x_0, y_0) & \varphi_y'(x_0, y_0) \\ \varphi_x'(x_0, y_0) & \Phi_{xx}''(x_0, y_0, \lambda_0) & \Phi_{xy}''(x_0, y_0, \lambda_0) \\ \varphi_y'(x_0, y_0) & \Phi_{xy}''(x_0, y_0, \lambda_0) & \Phi_{yy}''(x_0, y_0, \lambda_0) \end{vmatrix}$$

бўлса, $\Delta < 0$ да $z = f(x, y)$ функция $P_0(x_0, y_0)$ нуктада шартли максимумга, $\Delta > 0$ да шартли минимумга эга бўлади.

Мисол. $z = x + 2y$ функциянинг x ва y ўзгарувчилар $x^2 + y^2 = 5$ тенглама билан боғланган шартдаги экстремумини топинг.

Ечиш. Лагранж функциясини тузамиз:

$$\Phi(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Қуйдагига эгамиз:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 + 2x\lambda, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2 + 2y\lambda, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5.$$

$\Phi(x, y, \lambda)$ функция учун экстремумнинг зарурий шартлари ушбу тенгламалар системасини беради:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ 2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Бу системани ечиб, иккита:

$$x_1 = -1, \quad y_1 = -2, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}$$

ва

$$x_2 = 1, \quad y_2 = 2, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}$$

ечимларни топамиз.

Энди

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 2\lambda; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 2\lambda; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0$$

эканлигини эътиборга олсак, у холда

1) $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $x_1 = -1$, $y_1 = -2$ да

$$\Delta_1 = - \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20 > 0,$$

яъни функция $P_1(-1, -2)$ нуктада шартли минимумга эга:
 $z_{\min} = -1 - 4 = -5;$

2) $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $y_2 = 2$ да

$$\Delta_2 = - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -20 < 0,$$

яъни функция $P_2(1, 2)$ нуктада шартли максимумга эга:
 $z_{\max} = 1 + 2 \cdot 2 = 5.$

5- дарсхона топшириги

Функциянинг шартли экстремумини топинг:

1. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$; $x + y + 3 = 0$ шартда.

Ж: $x = y = -\frac{3}{2}$ да $z_{\min} = -\frac{19}{4}$.

2. $z = xy$; $2x + 3y - 5 = 0$ шартда.

Ж: $x = \frac{5}{4}$, $y = \frac{5}{6}$ да $z_{\max} = \frac{25}{24}$.

3. $z = x^2 + y^2$; $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$ шартда.

Ж: $x = \frac{36}{25}$, $y = \frac{48}{25}$ да $z_{\min} = \frac{144}{25}$.

4. $z = 6 - 4x - 3y$; $x^2 + y^2 = 1$ шартда.

Ж: $x = -\frac{4}{5}$, $y = -\frac{3}{5}$ да $z_{\max} = 11$; $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{3}{5}$ да $z_{\min} = 1$.

5. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$; $y - x = \frac{\pi}{4}$ шартда.

Ж: $x = \frac{7\pi}{8} + \pi k$, $y = \frac{9\pi}{8} + \pi k$ да $z_{\max} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$;

$x = \frac{3\pi}{8} + \pi k$, $y = \frac{5\pi}{8} + \pi k$ да $z_{\min} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$.

6. $z = x + y$; $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}$ шартда.

Ж: $x = y = -2$ да $z_{\max} = -4$;

$x = y = 2$ да $z_{\min} = 4$.

5- мустақил иш

Функциянинг шартли экстремумини топинг:

1. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; $x + y = 2$ шартда.

Ж: $x = y = 1$ да $z_{\min} = 2$.

2. $z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$; $x^2 + y^2 = 1$ шартда.

Ж: $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ да $z_{\min} = -1 - 2\sqrt{2}$;

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ да $z_{\max} = 1 - 2\sqrt{2}$;

3. $z = xy^2$; $x + 2y = 1$ шартда.

Ж: $x = y = 1$ да $z_{\min} = 0$; $x = y = \frac{1}{3}$ да $z_{\max} = \frac{1}{27}$.

4. $z = 2x + y$; $x^2 + y^2 = 1$ шартда.

Ж: $x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $y = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ да $z_{\min} = -\sqrt{5}$;

$$x = \frac{2}{\sqrt{5}}, y = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ да } z_{\max} = \sqrt{5}.$$

5. $z = xy$; $x + y = 1$ шартда.

$$\text{Ж: } x = y = \frac{1}{2} \text{ да } z_{\max} = \frac{1}{4}.$$

8- назорат иши

1. Берилган функциянинг аникланиш соҳасини топинг:

$$1.1. \quad z = \ln(-x-y).$$

$$1.2. \quad z = \arccos \frac{y+1}{x}.$$

$$1.3. \quad z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2x}.$$

$$1.4. \quad z = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 4x + 8}}.$$

$$1.5. \quad z = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}.$$

$$1.6. \quad z = \arcsin \frac{x}{y^2}.$$

$$1.7. \quad z = \ln(y - x^2).$$

$$1.8. \quad z = \frac{1}{\sqrt{4x - y^2}}.$$

$$1.9. \quad z = \ln(x^2 + y).$$

$$1.11. \quad z = \frac{3xy}{2x - 5y}.$$

$$1.10. \quad z = \sqrt{x^2 + 2y + y^2}.$$

$$1.13. \quad z = \sqrt{y^2 - x^2}.$$

$$1.12. \quad z = \arcsin(x - y).$$

$$1.15. \quad z = \frac{3x}{6 - x^2 - y^2}.$$

$$1.14. \quad z = \ln(4 - x^2 - y^2).$$

$$1.17. \quad z = \frac{4xy}{x^2 - y^2}.$$

$$1.16. \quad z = \sqrt{x^2 + y^2 - 8}.$$

$$1.19. \quad z = \arccos(x + y).$$

$$1.18. \quad z = e^{\sqrt{x^2 + y^2 - 5}}.$$

$$1.21. \quad z = \ln(y^2 - x^2).$$

$$1.20. \quad z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}.$$

$$1.23. \quad z = \frac{3}{6 - x^2 - y^2}.$$

$$1.22. \quad z = \arcsin \frac{x}{y}.$$

$$1.25. \quad z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}.$$

$$1.24. \quad z = \arccos(x + 2y).$$

$$1.27. \quad z = \ln(2x - y).$$

$$1.26. \quad z = \sqrt{1 - x - y}.$$

$$1.29. \quad z = \frac{4xy}{x - 3y + 1}.$$

$$1.28. \quad z = \arcsin(2x - y).$$

$$1.30. \quad z = \frac{\sqrt{3x - 2y}}{x^2 + y^2 + 2}.$$

2. Берилган функциянинг иккинчи тартибли ҳосилаларини топинг ва $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ эканини текширинг:

$$2.1. \quad z = x \cdot e^{\frac{y}{x}}.$$

$$2.2. \quad z = \ln(x + e^{-y}).$$

$$2.3. \quad z = \arctg \frac{x}{y}.$$

$$2.4. \quad z = e^{xy}.$$

$$2.5. \quad z = e^{-x-3y} \cdot \sin(x + 3y).$$

$$2.6. \quad z = \frac{\sin(x - y)}{x}.$$

$$2.7. \quad z = e^{\frac{x}{y}}.$$

$$2.8. \quad z = e^{\frac{x^2 + y^2}{2}}.$$

$$2.9. z = \sqrt{\frac{x}{y}}.$$

$$2.11. z = \operatorname{ctg}(x+y).$$

$$2.13. z = \arcsin(x-y).$$

$$2.15. z = \operatorname{tg}xy^2.$$

$$2.17. z = \operatorname{arctg}(x-4y).$$

$$2.19. z = \cos(3x^2 - y^2).$$

$$2.21. z = \arccos(x-5y).$$

$$2.23. z = \arcsin(4x+y).$$

$$2.25. z = \operatorname{arctg}(2x-y).$$

$$2.27. z = e^{\sqrt{x+y}}.$$

$$2.29. z = \operatorname{tg} \sqrt{xy}.$$

$$2.10. z = \operatorname{tg} \frac{x}{y}.$$

$$2.12. z = \sin(x^2 - y).$$

$$2.14. z = \ln(3x^2 - 2y^2).$$

$$2.16. z = \ln(3xy - 4).$$

$$2.18. z = \ln(5x^2 - 3y^2).$$

$$2.20. z = \sin \sqrt{xy}.$$

$$2.22. z = e^{x^2 - y^2}.$$

$$2.24. z = \ln(4x^2 - 5y^2).$$

$$2.26. z = \cos(x^2y^2 - 5).$$

$$2.28. z = \operatorname{ctg} \frac{y}{x}.$$

$$2.30. z = e^{\frac{y}{x^2 + y^2}}.$$

3. Берилган $z=f(x, y)$ мураккаб функциянинг кўрсатилган ҳосиласини топинг:

$$3.1. z = e^{y-2x}, y = \ln \sin t, x = \cos t. \frac{dz}{dt} = ?$$

$$3.2. r = \arccos(3x-y), x = 4t, y = 3t^2. \frac{dz}{dt} = ?$$

$$3.3. z = u^3 \ln v, u = \frac{x}{y}, v = 2x - 3y. \frac{\partial z}{\partial x} = ?$$

$$3.4. z = \operatorname{arctg} xy, y = e^{\cos^3 x}. \frac{dz}{dx} = ?$$

$$3.5. z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, y = x^2. \frac{dz}{dx} = ?$$

$$3.6. z = e^{x-2y}, x = \sin t, y = t^3. \frac{dz}{dt} = ?$$

$$3.7. z = \ln(e^x - e^{-y}), x = t^2, y = t^3. \frac{dz}{dt} = ?$$

$$3.8. z = u^2 \ln v, u = \frac{y}{x}, v = x^2 + y^2. \frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

$$3.9. z = x^y, y = \ln \sin x. \frac{dz}{dx} = ?$$

$$3.10. z = \ln(e^x + e^y), y = \frac{1}{3}x^3 + x. \frac{dz}{dx} = ?$$

$$3.11. z = \frac{x^2}{y+1}, x = 1-2t, y = \operatorname{arctg} t. \frac{dz}{dt} = ?$$

$$3.12. z = \sqrt{x+y^2+3}, x = \ln t, y = t^2. \frac{dz}{dt} = ?$$

$$3.13. z = u^2v - v^2u, u = x \sin y, v = y \cos x. \frac{\partial z}{\partial y} = ?$$

$$3.14. z = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{y}, y = e^{(x+1)^2}. \frac{dz}{dx} = ?$$

- 3.15. $z = \frac{x^2 - y}{x^2 + y}$, $y = 3x + 1$. $\frac{dz}{dx} = ?$
- 3.16. $z = \arcsin \frac{x^2}{y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$. $\frac{dz}{dt} = ?$
- 3.17. $z = u^2 + v^2$, $u = x - y^2$, $v = x^2 + y$. $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$
- 3.18. $z = \operatorname{arccot} xy$, $y = e^{2x}$. $\frac{dz}{dx} = ?$
- 3.19. $z = \arcsin \frac{x}{y}$, $y = \sqrt{x^2 + 1}$. $\frac{dz}{dx} = ?$
- 3.20. $z = x^2 e^y$, $x = \cos t$, $y = \sin t$. $\frac{dz}{dt} = ?$
- 3.21. $z = x^y$, $x = e^t$, $y = \ln t$. $\frac{dz}{dt} = ?$
- 3.22. $z = \ln(u^2 - v^2)$, $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$. $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$
- 3.23. $z = \ln(e^x - e^y)$, $y = x^3 + 1$. $\frac{dz}{dx} = ?$
- 3.24. $z = e^{y-2x}$, $x = \sin t$, $y = t^4$. $\frac{dz}{dt} = ?$
- 3.25. $z = \ln(e^{-x} + e^y)$, $x = t^2$, $y = t^3$. $\frac{dz}{dt} = ?$
- 3.26. $z = \arcsin \frac{x}{y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$. $\frac{dz}{dt} = ?$
- 3.27. $z = u^2 \ln v$, $u = \frac{x}{y}$, $v = 3y - 2x$. $\frac{\partial z}{\partial y} = ?$
- 3.28. $z = xy^2$, $y = \sin x$. $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$
- 3.29. $z = \arccos \frac{2x}{y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$. $\frac{dz}{dt} = ?$
- 3.30. $z = \frac{x^2}{y+1}$, $x = 1 - 2t$, $y = \arctg t$. $\frac{dz}{dt} = ?$

4. Ошкормас кўринишда берилган $z(x, y)$ функциянинг хусусий ҳосилаларини топинг:

- 4.1. $z^2 = xy - z + x^2 - 4$.
- 4.2. $x^2 + y^2 - xz + yz - 3x = 11$.
- 4.3. $x^2 + y^2 - 2z^2 - 2y = 0$.
- 4.4. $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 6 = 0$.
- 4.5. $\ln z = x + 2y - z + \ln 3$.
- 4.6. $x^3 + 3xyz - z^3 = 27$.
- 4.7. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz = 17$.
- 4.8. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 59$.
- 4.9. $\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 - 3z = 3$.
- 4.10. $x^2 - y^2 - z^2 + 6z + 2x - 4y + 12 = 0$.

- 4.11. $x^2 + y^2 + z^2 + 6z - 4x + 9 = 0$.
 4.12. $x^2 + y^2 - xz - yz = 0$.
 4.13. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y = 15$.
 4.14. $e^x - xyz - x + 1 = 0$.
 4.15. $3x^2y^2 + 2xyz^2 - 2x^3z + 4y^3z = 4$.
 4.16. $z^3 + 3yzx + 3y = 7$.
 4.17. $e^x + x + 2y + z = 4$.
 4.18. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xz = 2$.
 4.19. $x + y + z + 2 = xyz$.
 4.20. $x \cos y + y \cos z + z \cos x = \frac{\pi}{2}$.
 4.21. $x^2 + y^2 + z^2 + 2xz = 5$.
 4.22. $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = \frac{3}{2}$.
 4.23. $y^2 - z^2 + x^2 - 2xz + 2x = z$.
 4.24. $x + y + z = e^x$.
 4.25. $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$.
 4.26. $x - z \ln \frac{z}{y} = 0$.
 4.27. $xy + yz + xz = 1$.
 4.28. $e^x - xyz = 0$.
 4.29. $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.
 4.30. $2x^2 - y^2 + z^2 - 4z + y = 13$.

5. Куйидаги функцияларни экстремумга текширинг:

- 5.1. $z = 2(x + y) - x^2 - y^2$.
 5.2. $z = xy(12 - x - y)$.
 5.3. $z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$.
 5.4. $z = x^2 - xy + y^2 + x - y + 1$.
 5.5. $z = x^2 + 3(y + 2)^2$.
 5.6. $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 6y + 20$.
 5.7. $z = (x - 2)^2 + 2y^2 - 10$.
 5.8. $z = 3x^3 + 3y^2 - 9xy + 10$.
 5.9. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.
 5.10. $z = xy - 3x^2 - 2y^2$.
 5.11. $z = y \sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.
 5.12. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$.
 5.13. $z = 2x^2 + 2y^3 - 6xy + 5$.
 5.14. $z = y \sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$.
 5.15. $z = (x - 1)^2 + 2y^2$.
 5.16. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$.
 5.17. $z = x \sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.
 5.18. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$.
 5.19. $z = x^3 + y^3 - 6xy - 39x + 18y + 20$.
 5.20. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
 5.21. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.
 5.22. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$.

$$5.23. z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2.$$

$$5.24. z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2.$$

$$5.25. z = x^2 + y^2 - xy + x + y.$$

$$5.26. z = xy - x^2 - y^2 + 9.$$

$$5.27. z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

$$5.28. z = 4(x - y) - x^2 - y^2.$$

$$5.29. z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5.$$

$$5.30. z = xy(6 - x - y).$$

6. Куйидаги чизиклар билан чегараланган ёпик соҳада $z = f(x, y)$ функциянинг энг кичик ва энг катта кийматларини топинг:

$$6.1. z = x^2 - y^2 - x + y;$$

$$x = 0, x = 2, y = 0, y = 1.$$

$$6.3. z = x^2 + 2xy - 4x + 8y;$$

$$x = 0, y = 0, 5x - 3y + 45 = 0.$$

$$6.5. z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 5;$$

$$x + y = 5, x = -1, y = -1.$$

$$6.7. z = 3y - 2x - xy;$$

$$x = 0, y = 0, 3x - 4y = 12.$$

$$6.9. z = x^2 - 2xy + \frac{5}{2}y^2 - 2x;$$

$$x = 0, x = 2, y = 0, y = 2.$$

$$6.11. z = x^2 + 6xy - x + 3y;$$

$$x = 0, x = 3, y = 0, y = 3.$$

$$6.2. z = -3x^2 + 2y^2 + 12x - 4y;$$

$$y = 0, x = 0, 3x + 4y = 12.$$

$$6.4. z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x;$$

$$x = 3, y = 0, y = x + 1.$$

$$6.6. z = x^2 - xy + 5;$$

$$y = 0, x^2 + y = 1.$$

$$6.8. z = x^2 - 4xy + y^2 + 6y;$$

$$y = x, y = 0, x = 4.$$

$$6.10. z = 3xy - 6x^2 - 6y^2 + 15x;$$

$$x = 0, x = 2, y = 0, y = 1.$$

$$6.12. z = 5xy - y^2;$$

$$x = 4, y^2 = 5x + 5.$$

$$6.13. z = x^2 + 2xy - 10;$$

$$y = 0, y = x^2 - 4.$$

$$6.15. z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1;$$

$$x = -3, y = 0, x + y + 1 = 0.$$

$$6.17. z = xy - 2x - y;$$

$$x = 0, x = 3, y = 0, y = 4.$$

$$6.19. z = x^3 + y^3 - 3xy;$$

$$x = 0, x = 2, y = 0, y = 3.$$

$$6.21. z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4;$$

$$x = -1, x = 1, y = -1, y = 1.$$

$$6.14. z = x^2y;$$

$$y = 0, y = 1 - x^2.$$

$$6.16. z = x^2 + 2xy + 4x - y^2;$$

$$x = 0, y = 0, x + y + 2 = 0.$$

$$6.18. z = x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y;$$

$$x = 2, y = 0, y = x + 2.$$

$$6.20. z = x^2 + xy - 2;$$

$$y = 0, y = 4x^2 - 4.$$

$$6.22. z = \frac{1}{2}x^2 - xy;$$

$$y = 3, y = \frac{x^2}{3}.$$

$$6.23. z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y;$$

$$x = 0, x = 1, y = 0, y = 2.$$

$$6.25. z = 4 - 2x^2 - y^2;$$

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

$$6.27. z = x^2 + xy;$$

$$x = -1, x = 1, y = 0, y = 3.$$

$$6.29. z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x;$$

$$x = 3, y = 0, x - y + 1 = 0.$$

$$6.24. z = 1 + xy^2;$$

$$x = 0, x = 1, y = -1, y = 2.$$

$$6.26. z = 2x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 4x;$$

$$x = 0, y = 2, y = 2x.$$

$$6.28. z = 2x + y - xy;$$

$$x = 0, x = 4, y = 0, y = 4.$$

$$6.30. z = 4(x - y) - x^2 - y^2;$$

$$x = 0, x + 2y = 4, x - 2y = 4.$$

ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1-§. Умумий тушунчалар. Ўзгарувчилари ажраладиган ва бир жинсли биринчи тартибли дифференциал тенгламалар

8.1.1. Эркин ўзгарувчи, номаълум функция ва унинг ҳосила (дифференциал)ларини боғловчи

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

муносабат *оддий дифференциал тенглама* дейилади.

Дифференциал тенгламага кирувчи ҳосила (дифференциал)ларнинг энг юқори тартиби дифференциал тенгламанинг тартиби дейилади.

Дифференциал тенгламанинг ечими деб, тенгламага қўйганда уни айнtimerга айлантирадиган дифференциалланувчи $y = \varphi(x)$ функцияга айтилади.

Бундай тенглама учун Коши масаласи бошланғич шартлар деб аталувчи ушбу

$$y|_{x=x_0} = y_0, y'|_{x=x_0} = y'_0, \dots, y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)}$$

шартларни каноатлантирувчи ечимини топишдан иборатдир.

n -тартибли оддий дифференциал тенгламанинг *умумий ечими* деб, тенгламанинг тартиби канча бўлса, шунча ихтиёрий ўзгармасларга боғлиқ бўлган шундай $y = \varphi(x, c_1, \dots, c_n)$ функцияга айтиладики, бу функция учун қуйидаги шартлар бажарилади:

а) y функция $c_1, c_2, \dots, c_n$ ихтиёрий ўзгармасларнинг исталган қийматларида берилган тенгламани каноатлантиради;

б) бошланғич шартлар ҳар қандай бўлганда ҳам, ихтиёрий ўзгармасларнинг шундай қийматини топиш мумкинки, бу қийматларда $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$ ечим бошланғич шартларни каноатлантиради.

8.1.2. Ушбу

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

кўринишдаги тенглама ўзгарувчилари *ажралган дифференциал тенглама* дейилади. Унинг ўзига ҳос томони шундаки, dx олдида фақат x га боғлиқ кўпайтувчи, dy олдида эса фақат y га боғлиқ кўпайтувчи туради. Бу тенгламанинг ечими уни ҳадма-ҳад интеграллаш йўли билан аниқланади:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Дифференциал тенгламанинг ошкормас ҳолда ифодаланган ечимни бу тенгламанинг *интеграл* дейилади.

Интеграллаш доимийси C ни ечим учун қулай кўринишда танлаш мумкин.

1-мисол. $\operatorname{tg} x dx - \operatorname{ctg} y dy = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Бу ерда ўзгарувчилари ажралган тенгламага эгамиз. Уни хадма-хад интеграллаймиз:

$$\int \operatorname{tg} x dx - \int \operatorname{ctg} y dy = C$$

ёки

$$-\ln|\cos x| - \ln|\sin y| = -\ln \bar{C},$$

бу ерда интеграллаш доимийси C ни $-\ln \bar{C}$, яъни $C = -\ln \bar{C}$ орқали белгилаш қулайдир, бу ердан $\ln \sin y \cdot \cos x = \ln C$ ёки $\sin y \cdot \cos x = C$ — умумий интеграл.

8.1.3. Ушбу

$$M_1(x) \cdot M_2(y) dx + N_1(x) \cdot N_2(y) dy = 0$$

тенглама *ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама* дейилади. Бу кўринишдаги тенглама $M_2(y) \cdot N_1(x) \neq 0$ га бўлиш натижасида ўзгарувчилари ажралган дифференциал тенгламага келтирилади.

2-мисол. Ушбу

$$(1+x^2)dy + ydx = 0$$

тенгламанинг $y|_{x=1}=1$ бошланғич шартни каноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Бу ерда ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага эгамиз. Тенгламани

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{1+x^2} = 0$$

кўринишга келтириб, интеграллаймиз:

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{1+x^2} = C \text{ ёки } \ln|y| + \operatorname{arctg} x = C.$$

Тенгламанинг интегралини ҳосил қилдик. Берилган $y|_{x=1}=1$ бошланғич шартдан фойдаланиб, ихтиёрий ўзгармас C ни топамиз:

$$\ln 1 + \operatorname{arctg} 1 = C$$

яъни $C = \frac{\pi}{4}$. Демак, $\ln y + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4}$, бу ердан изланаётган ечимни ҳосил қиламиз:

$$y = e^{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}$$

8.1.4. Агар $f(x, y)$ функцияда x ва y ўзгарувчилар мос равишда tx ва ty га алмаштирилганда (t — ихтиёрий параметр)

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

шарт бажарилса, у ҳолда $f(x, y)$ функция бир жинсли функция деб аталади.

Бир жинсли функция $f(x, y)$ ни

$$f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Агар $y' = f(x, y)$ дифференциал тенгламада $f(x, y)$ бир жинсли функция бўлса, бундай тенглама бир жинсли дифференциал тенглама дейилади. Бир жинсли дифференциал тенгламалар

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

кўринишга келтирилади ва $y = u \cdot x$ ўрнига қўйиш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенгламага келтирилади ($u = u(x)$ номаълум функция):

$$xdu = (\varphi(u) - u)dx.$$

3-мисол. Ушбу

$$(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$$

тенгламанинг ечимини топим.

Еч и ш. Берилган тенгламани $y' = -\frac{x^2 + 2xy}{xy}$ кўринишга келтирамиз. $f(x, y) = \frac{x^2 + 2xy}{xy}$ бир жинсли функция. $y = ux$, $y' = u'x + u$ ўрнига қўйишни бажарамиз. У ҳолда берилган тенглама

$$u'x + u = -\frac{x^2 + 2ux^2}{ux^2} \text{ ёки } u'x + u = -\frac{1 + 2u}{u}$$

кўринишга келади, бу ердан

$$u'x = -\frac{1 + 2u + u^2}{u} \text{ ёки } u'x = -\frac{(1 + u)^2}{u}.$$

Ўзгарувчиларни ажратамиз: $\frac{udu}{(1 + u)^2} = -\frac{dx}{x}$. Интеграллаб, топамиз:

$$\int \frac{udu}{(1 + u)^2} = C - \int \frac{dx}{x} \text{ ёки } \int \frac{(u + 1) - 1}{(1 + u)^2} du = C - \ln|x|.$$

Натижада қуйидагига эга бўламиз:

$$\ln|1 + u| + \frac{1}{1 + u} = \ln C - \ln x \text{ ёки } \frac{1}{1 + u} = \ln \frac{C}{x(1 + u)}.$$

$u = \frac{y}{x}$ эканлигини ҳисобга олиб, $\frac{x}{x + y} = \ln \frac{C}{x + y}$ ни ҳосил қиламиз.

8.1.5. Ушбу

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$$

кўринишдаги тенглама $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ бўлганда

$$x = x_1 + \alpha, \quad y = y_1 + \beta$$

ўрнига қўйиш ёрдамида бир жинсли тенглама кўринишига келтирилади, бу ерда α, β — $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ва $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ тўғри чизикларнинг кесишиш нуктасининг координаталари. Агар $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ бўлса, у ҳолда $a_1x + b_1y = t$ ўрнига қўйиш ёрдамида ўзгарувчилар ажратилади.

4-мисол. $(2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1)dy = 0$ тенгламанинг умумий интегралини топинг.

Ечиш. Тенгламани қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$y' = -\frac{2x + y + 1}{x + 2y - 1}.$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \text{ бўлгани учун бу тенглама бир}$$

жинсли тенгламага келтирилиши мумкин. Ушбу

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$$

тўғри чизикларнинг кесишиш нуктасини топамиз: $x = \alpha = -1$; $y = \beta = 1$. Энди

$$\begin{aligned} x &= x_1 - 1, & dx &= dx_1, \\ y &= y_1 + 1, & dy &= dy_1, \end{aligned}$$

деб, тенгламада ўзгарувчиларни алмаштирамиз:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = -\frac{2x_1 + y_1}{x_1 + 2y_1}.$$

Ҳосил килинган бу бир жинсли тенгламада $y_1 = ux_1$ белгилаш киритсак, $y'_1 = u'x_1 + u$ бўлади. У ҳолда

$$u'x_1 + u = -\frac{2x_1 + ux_1}{x_1 + 2ux_1} \text{ ёки } u'x_1 + u = -\frac{2 + u}{1 + 2u}.$$

Натижада ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага эга бўламиз:

$$u'x_1 = -\frac{2(u^2 + u + 1)}{1 + 2u} \text{ ёки } \frac{(2u + 1)du}{u^2 + u + 1} = -\frac{2dx_1}{x_1}.$$

Интеграллаб, топамиз:

$$\ln|u^2 + u + 1| = -2\ln|x_1| + \ln C$$

ёки

$$u^2 + u + 1 = \frac{C}{x_1^2}.$$

x_1 ва y_1 ўзгарувчиларга кайтсак,

$$\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 + \frac{y_1}{x_1} + 1 = \frac{C}{x_1^2} \text{ ёки } y_1^2 + x_1 y_1 + x_1^2 = C.$$

$x_1 = x + 1$, $y_1 = y - 1$ алмаштиришларни ҳисобга олиб, ечимни x ва y ўзгарувчиларга нисбатан ёзамиз:

$$(y-1)^2 + (y-1)(x+1) + (x+1)^2 = C$$

ёки оддий шакл алмаштиришлардан сўнг

$$x^2 + xy + y^2 + x - y = \bar{C}$$

кўринишдаги умумий ечимга эга бўламиз.

1- дарсхона топшириғи

1. Келтирилган $y(x, C)$ функциялар (C — ихтиёрий ўзгармас) мос равишда берилган дифференциал тенгламаларнинг ечими бўладими:

а) $y = x^2(1 + Ce^x)$, $x^2 y' + (1 - 2x)y = x^2$;

б) $y = Ce^x - e^{-x}$, $xy'' + 2y' - xy = 0$;

в) $x^2 + y^4 = Cy^2$, $xydx = (x^2 - y^4)dy$;

Жавоб: а) ҳа; б) йўқ; в) ҳа.

2. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

а) $(1 + x^2)y' + 1 + y^2 = 0$;

б) $(x^2 + x)y' = 2y + 1$;

в) $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$;

г) $xy' + 2\sqrt{xy} = y$;

д) $(x - 2y - 3)y' + (2x + y - 1) = 0$;

е) $(x - y + 4)dy + (x + y - 2)dx = 0$.

Ж: а) $y = \frac{C-x}{1+Cx}$; б) $2y + 1 = \frac{Cx^2}{(1+x)^2}$;

в) $y^2 = Cxe^{-\frac{1}{x}}$; г) $\begin{cases} \sqrt{\frac{y}{x}} = \ln \frac{C}{x}, x > 0 \text{ да,} \\ \sqrt{\frac{y}{x}} = \ln Cx, x < 0 \text{ да;} \end{cases}$

д) $x^2 + xy - y^2 - x + 3y = C$; е) $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C$.

3. Коши масаласини ечинг:

а) $\sec^2 x \operatorname{tg} y dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x dy = 0$; $y|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$;

б) $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$; $y|_{x=1} = \frac{\pi}{2}$;

в) $2(x+y)y' + (3x+3y-1) = 0$; $y|_{x=0} = 2$.

Ж: а) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1$; б) $y = x \arcsin x$;

в) $3x + 2y - 4 + 2 \ln|x+y-1| = 0$.

I- мустақил иш

1. Келтирилган $y(x, C)$ функциялар (C — ихтиёрий узгармас) мос равишда берилган дифференциал тенгламаларнинг ечими бўлади-ми:

а) $e^{\frac{y}{x}} = Cy$; $xyy' - y^2 = x^2y'$;

б) $y = Cx + \frac{1}{C}$; $xy' - y + \frac{1}{y} = 0$?

Жавоб: а) ҳа; б) йўқ.

2. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

а) $(\sqrt{xy} - \sqrt{x})dx + (\sqrt{xy} + \sqrt{y})dy = 0$;

б) $xy \cdot y' = y^2 + 2x^2$; в) $y' = \frac{2x-y+1}{x-2y+1}$.

Ж: а) $x+y-2\sqrt{x}+2\sqrt{y}+2\ln|(\sqrt{x}+1)(\sqrt{y}-1)| = C$;

б) $y^2 = 4x^2 \ln Cx$; в) $x^2 - xy + y^2 + x - y = C$.

3. Коши масаласини ечинг:

а) $\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1+\sin y}} + y' = 0$; $y|_{x=\frac{\pi}{4}} = 0$;

б) $xy' = xe^x + y$; $y|_{x=1} = 0$;

в) $(2x-y+4)dy + (x-2y+5)dx = 0$.

Ж: а) $\sqrt{2} \sin x + \sin y - \cos y = 0$;

б) $y = -x \ln|1 - \ln x|$; в) $(x+y-1)^2 = C(x-y+3)$.

2- §. Чизиқли, Бернулли, тўлиқ дифференциалли биринчи тартибли дифференциал тенгламалар

8.2.1. Ушбу

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

кўринишдаги тенглама **чизиқли дифференциал тенглама** дейилади. Бу ерда $P(x)$ ва $Q(x)$ лар x нинг маълум узлуксиз функциялари. Агар $Q(x) \neq 0$ бўлса, тенглама **чизиқли бир жинсли бўлмаган тенглама**, агар $Q(x) = 0$ бўлса, **чизиқли бир жинсли тенглама** дейилади.

$y = u(x)v(x)$ ўрнига қўйиш (бу ерда u ва v номаълум функциялар) ёрдамида тенглама

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$

ёки

$$u'v + u[v' + P(x)v] = Q(x)$$

кўринишга келтирилади.

u ва v функциялардан бири (масалан, v) ихтиёрий танлаб олиниши мумкинлигидан фойдаланиб, v функцияни охирги тенгла-

мада кавс ичида турган ($v' + Pv$) ифода нолга тенг бўладиган қилиб олинади. У ҳолда иккинчи номаълум функция u ни топиш учун $u'v = Q(x)$ тенгламани ечиш kifоя.

Шундай қилиб, берилган тенглама $y = uv$ ўрнига қўйиш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган ушбу иккита тенгламага келтирилади:

$$v' + P(x)v = 0,$$

$$u'v = Q(x).$$

Буларни интеграллаб берилган тенгламанинг умумий ечими топилади:

$$y = e^{-\int P dx} (C + \int Q e^{\int P dx} dx).$$

Баъзан дифференциал тенглама y нинг функцияси x га нисбатан қизиқли бўлган, яъни

$$x' + p(y)x = q(y)$$

кўринишга келтирилиши мумкин. Бу тенглама $x = uv$ ўрнига қўйиш орқали юқоридагидек ечилади.

1- м и с о л. Ушбу

$$(x^2 - x)y' + y = x^2(2x - 1)$$

тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Е ч и ш. Тенгламани $(x^2 - x) \neq 0$ га бўлиб, ушбу кўринишга келтирамиз:

$$y' + \frac{y}{x^2 - x} = \frac{x^2(2x - 1)}{x^2 - x}$$

ёки

$$y' + \frac{y}{x(x-1)} = \frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

Тенглама қизиқли бўлиб, бу ерда $P(x) = \frac{1}{x(x-1)}$, $Q(x) = \frac{x(2x-1)}{x-1}$.

$y = uv$, $y' = u'v + uv'$ ўрнига қўйиш натижасида берилган тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x(x-1)}\right) = \frac{x(2x-1)}{x-1}.$$

u нинг олдидаги қўпайтувчини нолга тенглаб

$$\begin{cases} v' + \frac{v}{x(x-1)} = 0, \\ u'v = \frac{x(2x-1)}{x-1} \end{cases}$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз. Дастлаб биринчи тенгламанинг интегралган хусусий ечимини топамиз:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x(x-1)} \quad \text{ёки} \quad \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{x-(x-1)}{x(x-1)} dx$$

Бундан

$$\ln|v| = -\ln|x-1| + \ln x$$

ёки

$$v = \frac{x}{x-1}.$$

Топилган v функцияни системанинг иккинчи тенгламасига қўямиз:

$$u' \frac{x}{x-1} = \frac{x(2x-1)}{x-1},$$

бу ердан $u' = 2x - 1$. Интегралласак:

$$u = x^2 - x + C.$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$y = uv = \frac{x(x^2 - x + C)}{x-1}.$$

2-мисол. $(2x - y^2)y' = 2y$ тенгламанинг $y|_{x=1} = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама x га нисбатан чизиклидир. Ҳақиқатан ҳам,

$$(2x - y^2) \frac{1}{x} = 2y, \text{ ёки } 2x - y^2 = 2x'y, \text{ ёки } x' - \frac{y}{2} = -\frac{y}{2} \text{ (бу ерда}$$

$$p(y) = -\frac{1}{y}, q(y) = -\frac{y}{2}).$$

$x = uv$, $x' = u'v + uv'$ ўрнига қўйиш натижасида берилган тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$u'v + u\left(v' - \frac{v}{y}\right) = -\frac{v}{2}.$$

бу ердан ушбу иккита тенгламага эга бўламиз:

$$v' - \frac{v}{y} = 0 \text{ ва } u'v = -\frac{v}{2}.$$

Биринчи тенгламани ечиб, топамиз:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y} \text{ ёки } v = y.$$

Иккинчи тенгламага $v = y$ ни қўямиз:

$$u'y = -\frac{y}{2}, \text{ ёки } u' = -\frac{1}{2}, \text{ ёки } u = C - \frac{y}{2}.$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими:

$$x = uv = y\left(C - \frac{y}{2}\right).$$

$y|_{x=1} = 1$ бошланғич шартдан

$$1 = C - \frac{1}{2} \text{ ёки } C = \frac{3}{2}.$$

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг хусусий ечими
 $x = \frac{1}{2} y (3 - y).$

8.2.2. Ушбу

$$y' + P(x)y = y^\alpha Q(x)$$

кўринишдаги дифференциал тенглама *Бернулли тенгламаси* дейилади. Бу тенгламада $\alpha = \text{const}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, $P(x)$ ва $Q(x)$ функциялар x нинг узлуксиз функциялари. Янги $z = y^{1-\alpha}$ функция киритилиб, Бернулли тенгламаси 8.2.1 бандда кўриб чиқилган

$$z' + (1-\alpha)zP(x) = (1-\alpha)Q(x)$$

чиқиқли тенгламага келтирилади.

Бернулли тенгламасини янги z ўзгарувчи киритмай, чиқиқли тенглама сифатида $y = uv$ ўрнига қўйишдан фойдаланиб ҳам ечиш мумкин.

3-мисол. $y' + \frac{y}{x} = y^2 \frac{\ln x}{x}$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенглама Бернулли тенгламаси бўлиб, бу ерда $\alpha = 2$. $y = uv$, $y' = u'v + uv'$ ўрнига қўйишни бажарамиз, натижада:

$$u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = u^2 v^2 \frac{\ln x}{x}.$$

u , v функцияларни топиш учун ушбу системани тузамиз:

$$\begin{cases} v' + \frac{v}{x} = 0, \\ u'v = u^2 v^2 \frac{\ln x}{x}. \end{cases}$$

Биринчи тенгламани интеграллаб, $v = \frac{1}{x}$ хусусий ечимни оламиз, уни иккинчи тенгламага қўйсак,

$$u' = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln x}{x} u^2$$

га эга бўламиз. Ўзгарувчиларни ажратамиз ва интеграллаймиз:

$$\frac{du}{u^2} = \frac{\ln x}{x^2}$$

ёки

$$-\frac{1}{u} = \int \frac{\ln x}{x^2} dx,$$

бу ерда

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} s = \ln x, ds = \frac{dx}{x} \\ dt = \frac{1}{x^2}, t = -\frac{1}{x} \end{array} \right\} = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C.$$

Демак, $-\frac{1}{u} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$, бу ердан $u = \frac{x}{Cx + 1 + \ln x}$.

Берилган Бернулли тенгламасининг умумий ечими:

$$y = uv = \frac{1}{Cx + 1 + \ln x}.$$

8.2.3. Агар

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

қўринишдаги тенгламанинг чап қисми бирор $u(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали, яъни

$$du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

бўлса, u ҳолда бундай тенглама *тўлиқ дифференциалли тенглама* дейилади.

Юқоридаги тенглама тўлиқ дифференциалли тенглама бўлиши учун

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

шарт бажарилиши керак.

Тўлиқ дифференциалли тенглама таърифидан $du = 0$, бундан $u(x, y) = C$ эканлиги келиб чиқади (C — ихтиёрий ўзгармас).

$u(x, y)$ ни топиш учун y ни ўзгармас деб ҳисоблаймиз, u ҳолда $dy = 0$ эканидан $du = M(x, y)dx$ бўлади. Бу тенгликни x бўйича интегралласак,

$$u = \int M(x, y)dx + \varphi(y).$$

Охирги тенгликни y бўйича дифференциаллаймиз ва натижани $N(x, y)$ га тенглаймиз, чунки $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$.

$$\int \frac{\partial M}{\partial y} dx + \varphi'(y) = N(x, y)$$

ёки

$$\varphi'(y) = N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx.$$

Бу ифодани y бўйича интеграллаб, $\varphi(y)$ ни топамиз:

$$\varphi(y) = \int \left(N(x, y) - \int \frac{\partial M}{\partial y} dx \right) dy + C.$$

Демак,

$$u(x, y) = \int M(x, y) dx + \int (N(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y} dx) dy + C.$$

Бу ифодани ихтиёрӣ узгармасга тенглаб, тенгламанинг умумий интегралини ҳосил қиламиз.

4- м и с о л. $(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Е ч и ш. Бу ерда $M(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$, $N(x, y) = 6x^2y + 4y^3$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy, \quad \text{яъни} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \text{ бўлганлиги сабабли}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2.$$

Бу тенгликни x бўйича интеграллаймиз:

$$u = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Бундан

$$\varphi'(y) = \frac{\partial u}{\partial y} - 6x^2y.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \text{ эканлигини ҳисобга олсак,}$$

$$\varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3 - 6x^2y = 4y^3.$$

Бундан

$$\varphi(y) = y^4 + C.$$

Демак,

$$u = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

ёки

$$x^2 + 3x^2y^2 + y^4 = C.$$

2- дарсхона топшириғи

1. Тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

а) $y' - \frac{1-2x}{x^2} y = 1$;

б) $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$;

в) $y' = \frac{1}{2x-y^2}$;

г) $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$;

д) $y' - y \lg x + y \cos x = 0$;

е) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$;

ж) $(x + \sin y) dx + (x \cos y + \sin y) dy = 0$;

з) $(y + e^x \sin y) dx + (x + e^x \cos y) dy = 0$.

Ж: а) $y = Cx^2e^{\frac{1}{x}} + x^2$; б) $y = (x+C)(1+x^2)$; в) $x = Ce^2y + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{4}$; г) $x = y \ln y + \frac{C}{y}$;

д) $y(x+C) = \sec x$; е) $y = \left(\frac{C + \ln|\cos x|}{x} + \lg x \right)^2$; ж) $\frac{1}{2}x^2 + x \sin y - \cos y = C$; з) $xy + e^x \sin y = C$.

2. Қоши масаласини ечинг:

а) $y' - y \lg x = \sec x$; $y|_{x=0} = 0$;
 б) $2xydx + (y - x^2)dy = 0$; $y|_{x=-2} = 4$;
 в) $(y^2 + 2y + x^2)y' + 2x = 0$; $y|_{x=1} = 0$;
 г) $x + ye^x + (y + e^x)y' = 0$; $y|_{x=0} = 4$.

Ж: а) $y = \frac{x}{\cos x}$; б) $x^2 - y \ln \frac{4e}{y}$;
 в) $x^2 + y^2 = e^{-y}$; г) $x^2 + y^2 + 2ye^x = 24$.

2- мустақил иш

1. Тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

а) $y' = e^{2x} - e^x y$; б) $y' = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}$;

г) $x dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3 \right) dy$;

в) $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$; д) $\frac{x dy}{x^2 + y^2} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx$.

Ж: а) $y = Ce^{-e^x} + e^x - 1$;
 б) $y = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1$;
 в) $y = \frac{1}{(1+x)(C + \ln|1+x|)}$;
 г) $x^2 + y^2(C - y^2)$;
 д) $x + \arctg \frac{y}{x} = C$.

2. Қоши масаласини ечинг:

а) $y' = 2y - x + e^x$; $y|_{x=0} = -1$;
 б) $y^2 dx = (x + ye^{-\frac{1}{y}}) dy$; $y|_{x=0} = -3$;
 в) $y' - 7y = e^{3x} y^2$; $y|_{x=0} = 2$;
 г) $x dx + y dy = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$; $y|_{x=1} = 1$.

$$\text{Ж: а) } y = \frac{1}{2}x - e^x + \frac{1}{4}(1 - e^{2x});$$

$$\text{б) } x = e^{-\frac{1}{2}y} (3 + y); \quad \text{в) } y = \frac{10e^{7x}}{e^{10x} - 6};$$

$$\text{г) } \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \arctg \frac{x}{y} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

3-§. Юкори тартибли дифференциал тенгламалар

8.3.1. $y^{(n)} = f(x)$ кўринишдаги тенглама ўнг томонни кетма-кет n марта интеграллаш ёрдамида ечилади.

1-мисол. $y'' = xe^{-x}$ тенгламанинг $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани кетма-кет интеграллаб, умумий ечимини топамиз:

$$y' = \int xe^{-x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = e^{-x} dx, \quad v = -e^{-x} \end{array} \right\} = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1,$$

$$y = \int (C_1 - xe^{-x} - e^{-x}) dx = C_1 x - (-xe^{-x} - e^{-x}) + e^{-x} + C_2$$

$$\text{ёки } y = xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1 x + C_2.$$

Бошланғич шартлардан

$$\begin{cases} 1 = 2 + C_2, \\ 0 = -1 + C_1, \end{cases}$$

бу системанинг ечимлари $C_1 = 1$ ва $C_2 = -1$. Шундай қилиб, берилган бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечим:

$$y = xe^{-x} + 2e^{-x} + x - 1.$$

8.3.2. $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n-1)})$ кўринишдаги тенгламада номаълум функция ва унинг $(k-1)$ -тартибгача ҳосилалари катнашмайди. Бундай тенгламанинг тартибини $y^{(k)} = p(x)$ ўрнига қўйиш ёрдамида пасайтириш мумкин.

2-мисол. $y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x}$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$ деб, берилган тенгламани

$$p' = \frac{p}{x} \ln \frac{p}{x}$$

кўринишга келтирамыз. Биринчи тартибли бир жинсли тенгламани ҳосил қилдик. Энди $p = ux$, $p' = u'x + u$ деб, қуйидаги тенгламани ҳосил қиламиз:

$$u'x + u = u \ln u \quad \text{ёки} \quad \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}.$$

Унинг ечими

$$\ln|\ln u - 1| = \ln x + \ln C_1 \text{ ёки } \ln u - 1 = Cx,$$

бу ердан $u = e^{C_1 x + 1}$. Дастлабки y ўзгарувчига қайтиб,

$$y' = p = ux = xe^{C_1 x + 1} \text{ ёки } y' = xe^{C_1 x + 1}$$

тенгламани оламин. Бу тенгламани интеграллаб, умумий ечимни топамиз:

$$\begin{aligned} y &= \int x e^{C_1 x + 1} dx = \left\{ \begin{array}{l} s = x, \quad ds = dx, \\ dt = e^{C_1 x + 1} dt, \quad t = \frac{1}{C_1} e^{C_1 x + 1} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{x}{C_1} e^{C_1 x + 1} - \frac{1}{C_1^2} e^{C_1 x + 1} + C_2. \end{aligned}$$

8.3.3. $y^{(n)} = f(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ кўринишдаги тенгламада x эркин ўзгарувчи қатнашмайди. Бундай тенгламанинг тартибини $y' = p(y)$ ўрнига қўйиш орқали пасайтириш мумкин.

3-мисол. $y'' = \frac{1+y'^2}{y}$ тенгламани ечинг.

Ечиш. $y' = p(y)$, $y'' = p'p$ ўрнига қўйишни амалга оширсак, тенглама

$$p'p = \frac{1+p^2}{y}$$

кўринишга келади. Бу — ўзгарувчилари ажраладиган тенгламадир. Ўзгарувчиларни ажратиб ва интеграллаб, топамиз:

$$\frac{p dp}{1+p^2} = \frac{dy}{y} \text{ ёки } \frac{1}{2} \ln|1+p^2| = \ln|y| + \ln C_1,$$

бу ердан

$$1+p^2 = C_1^2 y^2 \text{ ёки } p = \pm \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}.$$

y ўзгарувчига қайтсак

$$y' = \pm \sqrt{C_1^2 y^2 - 1} \text{ ёки } \frac{dy}{\sqrt{C_1^2 y^2 - 1}} = \pm dx.$$

бундан,

$$\frac{1}{C_1} \ln|C_1 y + \sqrt{C_1^2 y^2 - 1}| = \pm (x + C_2).$$

3-дарсхона топшириғи

1. Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

а) $y''' \sin^4 x = \sin 2x$;

б) $y'' = \ln x$;

$$\begin{array}{ll} \text{в)} (1-x^2)y'' - xy' = 2; & \text{г)} (1+x^2)y'' + 1 + y'^2 = 0; \\ \text{д)} y''(2y+3) - 2y'^2 = 0; & \text{е)} yy'' - y'^2 = y^2 \ln y. \end{array}$$

Ж: а) $y = \ln \sin x + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$;

б) $y = \frac{x^2}{2} (\ln x - \frac{3}{2}) + C_1 x + C_2$;

в) $y = (\arcsin x)^2 + C_1 \arcsin x + C_2$;

г) $y = (1 + C_1^{-2}) \ln(C_1 x + 1) - C_1^{-1} x + C_2$;

д) $0.5 \ln(2y+3) = C_1 x + C_2$;

е) $\ln y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$.

2. Коши масаласини ечинг:

а) $y''' = xe^{-x}$; $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=2$, $y''|_{x=0}=2$;

б) $y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1)$; $y|_{x=2}=1$, $y'|_{x=2}=-1$;

в) $yy'' - y'^2 = 0$; $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=2$.

Ж: а) $y = -(x+3) \cdot e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 + 3$;

б) $y = (3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 72x + 8) \cdot \frac{1}{24}$;

в) $y = e^{2x}$.

3- мустақил иш

1. Қуйидаги тенгламаларни ечинг:

а) $y'' = \frac{y'}{x} + x$;

г) $y'' = 2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x$;

б) $y'' = \operatorname{arctg} x$;

д) $y'' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x$;

в) $yy'' = (y')^2$;

е) $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$.

Ж: а) $y = \frac{x^3}{3} + C_1 x^2 + C_2$;

б) $y = \frac{\operatorname{arctg} x}{2} (x^2 - 1) - \frac{x}{2} \ln(1+x^2) + C_1 x + C_2$;

в) $y = C_1 e^{C_2 x}$; г) $y = \frac{1}{3} \sin^3 x + C_1 x + C_2$;

д) $y = -\frac{1}{3} \sin^3 x + C_1 \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) + C_2$;

е) $y \cos^2(x + C_1) = C_2$.

2. Коши масаласини ечинг:

а) $y''' = x \sin x$; $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=0$; $y''|_{x=0}=2$;

б) $xy'' + x(y')^2 - y' = 0$; $y|_{x=2}=2$, $y'|_{x=2}=1$;

в) $yy'' = (y')^2 - (y')^3$; $y|_{x=1}=1$; $y'|_{x=1}=-1$.

Ж: а) $y = x \cos x - 3 \sin x + x^2 + 2x$;

б) $y = 2 + \ln \frac{x^2}{4}$; в) $y - x = 2 \ln |y|$.

4-§. Ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизикли тенгламалар

8.4.1. Ушбу

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

кўринишдаги тенглама n -тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенглама дейилади. Бу ерда $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ бирор $[a, b]$ ораликда аниқланган ва узлуксиз функциялар бўлиб, улар тенгламанинг коэффициентлари дейилади.

Агар $y_1, y_2, \dots, y_n$ функциялар n -тартибли бир жинсли чизикли дифференциал тенгламанинг $[a, b]$ ораликда аниқланган чизикли эрки ечимлари бўлса, у ҳолда унинг умумий ечими

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

кўринишда ёзилади.

Чизикли эрки ечимлар *ечимларнинг фундаментал системаси* дейилади.

8.4.2. Агар n -тартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенгламанинг $a_1, a_2, \dots, a_n$ коэффициентлари ўзгармас сонлар бўлса, у ҳолда хусусий ечимлар $y = e^{kx}$ кўринишда изланади. Бу ердаги k n -тартибли чизикли бир жинсли дифференциал тенгламанинг характеристик тенгламаси деб аталувчи ушбу

$$k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

тенгламанинг илдизлари бўлади.

Характеристик тенглама n та $k_1, k_2, \dots, k_n$ илдизларга эга. Бу илдизларнинг характерига кўра уларга мос хусусий ечимлар қуйидагича бўлади:

а) характеристик тенгламанинг ҳар бир ҳақиқий содда k илдизига e^{kx} хусусий ечим мос келади;

б) ҳар бир m каррали ҳақиқий илдизга m та чизикли эрки e^{kx} , xe^{kx} , ..., $x^{m-1}e^{kx}$ ечимлар мос келади;

в) комплекс қўшма содда илдизларнинг ҳар бир $k_1 = \alpha + i\beta$ ва $k_2 = \alpha - i\beta$ жуфтига иккита чизикли эрки $e^{\alpha x} \cos \beta x$ ва $e^{\alpha x} \sin \beta x$ хусусий ечим мос келади;

г) карралиги r га тенг бўлган комплекс қўшма илдизларнинг ҳар бир $k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$ жуфтига $2r$ та ушбу чизикли эрки хусусий ечимлар мос келади;

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \cos \beta x, \dots, x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x,$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \dots, x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Олинган хусусий ечимлар — ечимларнинг фундаментал системанинг чизикли комбинацияси

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

ни тузиб, ўзгармас коэффициентли чизикли бир жинсли дифференциал тенгламанинг умумий ечими ҳосил қилинадн.

1-мисол. $y'' - 7y' + 6y = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Характеристик тенгламани тузамиз:

$$k^2 - 7k + 6 = 0,$$

унинг илдизлари $k_1 = 1$ ва $k_2 = 6$ — хакикий ва оддий, демак, берилган тенгламанинг хусусий чизикли эрки ечимлари (фундаментал ечимлар системаси): $y_1 = e^x$ ва $y_2 = e^{6x}$, тенгламанинг умумий ечими эса

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$$

булади.

2-мисол. $y^{IV} - 13y'' + 36y = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Характеристик тенгламани тузамиз:

$$k^4 - 13k^2 + 36 = 0.$$

унинг илдизлари $k_{1,2} = \pm 3$, $k_{3,4} = \pm 2$ — хакикий ва оддий. Бу илдизларга ушбу хусусий чизикли эрки ечимлар мос келади:

$$y_1 = e^{3x}, y_2 = e^{-3x}, y_3 = e^{2x}, y_4 = e^{-2x}.$$

Умумий ечим куйидаги кўринишда булади:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x}.$$

3-мисол. $y^V - 16y' = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Характеристик тенгламани тузамиз:

$$k^5 - 16k = 0,$$

унинг ечимлари: $k_1 = 0$, $k_{2,3} = \pm 2$ — хакикий, $k_{4,5} = \pm 2i$ — комплекс кўшма ($\alpha = 0$, $\beta = 2$). Фундаментал ечимлар системасини ёзамиз:

$$y_1 = e^{0x} = 1, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{-2x}, y_4 = e^{0x} \cos 2x = \cos 2x, y_5 = \sin 2x.$$

Умумий ечим:

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x} + C_4 \cos 2x + C_5 \sin 2x.$$

4-мисол. $y'' - y' - 2x = 0$ тенгламанинг $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 3$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Бу тенгламанинг характеристик тенгламаси $k^2 - k - 2 = 0$ куйидаги илдизларга эга: $k_1 = 2$, $k_2 = -1$. Демак, умумий ечим

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

кўринишда булади. Унинг ҳосиласи:

$$y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x}.$$

Бошлангич шартларни умумий ечимга ва унинг ҳосиласига қўйиб, C_1 ва C_2 га нисбатан ушбу тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2, \\ 3 = 2C_1 - C_2, \end{cases}$$

бу ердан $C_1 = 1$, $C_2 = -1$. Демак, берилган бошлангич шартларни каноатлантирувчи хусусий ечим қуйидагича бўлади:

$$y = e^{2x} - e^{-x}.$$

5-мисол. $y'' - 4y' + 5y = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $k^2 - 4k + 5 = 0$ характеристик тенглама $k_{1,2} = 2 \pm i$ қўшма-комплекс илдизларга эга. Буларга мос фундаментал ечимлар системаси қуйидагича бўлади:

$$y_1 = e^{2x} \cos x, \quad y_2 = e^{2x} \sin x.$$

Умумий ечим:

$$y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x \text{ ёки } y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

6-мисол. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Характеристик тенгламани тузамиз:

$k^4 + 2k^3 + k^2 = 0$, бу тенглама $k_{1,2} = 0$ ($m=2$); $k_{3,4} = -1$ ($m=2$) каррали илдизларга эга. Буларга мос фундаментал ечимлар системаси

$$y_1 = e^{0x} = 1; \quad y_2 = x \cdot 1 = x; \quad y_3 = e^{-x}, \quad y_4 = x e^{-x}$$

қурилишга эга бўлади. Демак, умумий ечим

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x}$$

ёки

$$y = C_1 + C_2 x + e^{-x} (C_3 + C_4 x).$$

4-дарсхона топшириғи

1. Тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

а) $y'' + 4y' + 3y = 0$; б) $y'' - 4y' + 4y = 0$; в) $y'' + 4y' + 8y = 0$.

Ж: а) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$;

б) $y = e^{2x} (C_1 + C_2 x)$;

в) $y = e^{-2x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

2. Тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

а) $y^{VI} - 13y^{IV} + 36y'' = 0$; б) $y^{IV} - 8y'' + 16y = 0$;

в) $y^V - 6y^{IV} + 9y''' = 0$; г) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$;
 д) $64y^{VIII} + 48y^{VI} + 12y^{IV} + y'' = 0$.

Ж: а) $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x} + C_5 + C_6 x$;

б) $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + e^{-2x}(C_3 + C_4 x)$;

в) $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + C_3 + C_4 x + C_5 x^2$;

г) $y = e^x(C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$;

д) $y = \cos \frac{x}{2}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) + \sin \frac{x}{2}(C_4 + C_5 x + C_6 x^2) + C_7 + C_8 x$.

3. Коши масаласини ечинг.

а) $y'' + 4y' + 29y = 0$; $y|_{x=0} = 0$, $y'|_{x=0} = 15$;

б) $y^V = y'$; $y|_{x=0} = 0$; $y'|_{x=0} = 1$; $y''|_{x=0} = 0$; $y'''|_{x=0} = 1$;

$y^{IV}|_{x=0} = 2$.

Ж: а) $y = 3e^{-2x} \sin 5x$;

б) $y = e^x + \cos x - 2$.

4- мустақил иш

1. Тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

а) $4y''' - 8y' + 5y = 0$; в) $y^{IV} - 6y'' + 9y = 0$;

б) $3y'' - 2y' - 8y = 0$; г) $y^{IV} + y'' = 0$.

Ж: а) $y = e^x \left(C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2} \right)$;

б) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-\frac{4x}{3}}$;

в) $y = e^{\sqrt{3}x}(C_1 + C_2 x) + e^{-\sqrt{3}x}(C_3 + C_4 x)$;

г) $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.

2. Коши масаласини ечинг.

а) $y'' - 2y' + y = 0$; $y|_{x=2} = 1$, $y'|_{x=2} = -2$;

б) $y''' - y' = 0$; $y|_{x=0} = 3$, $y'|_{x=0} = -1$; $y''|_{x=0} = 1$.

Ж: а) $y = (7 - 3x)e^{x-2}$; б) $y = 2 + e^{-x}$.

5- §. Ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенгламалар

Ушбу

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x),$$

бу ерда $f(x) \neq 0$, $a_1, \dots, a_n$ — ўзгармас сонлар, кўринишдаги тенглама n - тартибли ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган чизиқли дифференциал тенглама дейилади.

Берилган бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламанинг умумий ечими $y = Y + \bar{y}$ формулага кўра аникланади, бу ерда Y — мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечими, $\bar{y}$ — берилган бир жинсли бўлмаган тенгламанинг бирорта хусусий ечими.

Бу тенгламанинг $\bar{y}$ хусусий ечимлари тенгламанинг ўнг томони ушбу

$$f(x) = e^{\gamma x} [P_n(x) \cos \delta x + Q_m(x) \sin \delta x]$$

махсус кўринишга эга бўлганда аниқмас коэффициентлар усули билан топилади. Бу ерда γ ва δ — берилган сонлар, $P_n(x)$ ва $Q_m(x)$ — мос равишда n - ва m - даражали маълум кўпхадлар. Бу ҳолда берилган тенгламанинг хусусий ечими $\bar{y}$ куйидаги кўринишда изланади:

$$\bar{y} = x^r e^{\gamma x} [u_l(x) \cos \delta x + v_l(x) \sin \delta x],$$

бу ерда r

$$k^n + p_1 k^{n-1} + p_2 k^{n-2} + \dots + p_n = 0$$

характеристик тенгламанинг $\gamma + \delta i$ илдизининг карралиги (агар характеристик тенглама бундай илдизга эга бўлмаса, $r=0$); $u_l(x)$ ва $v_l(x)$ — l - даражали кўпхадлар, шу билан бирга l сони m ва n ларнинг каттасига тенг.

$u_l(x)$ ва $v_l(x)$ кўпхадларнинг коэффициентлари берилган тенгламада y ўрнига y ни қўйгандан сўнг унинг чап ва ўнг томонларидаги ўхшаш хадлар коэффициентларини бир-бирига тенглаш натижасида ҳосил бўлган алгебраик тенгламалар системасидан топилади.

Агар берилган бир жинсли бўлмаган чизикли тенгламада $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ бўлса, унинг хусусий ечими $y = y_1 + y_2$ бўлади, бу ерда y_1 — ўнг томони $f_1(x)$ бўлган берилган тенгламанинг хусусий ечими, y_2 эса ўнг томони $f_2(x)$ бўлган бу тенгламанинг хусусий ечими.

1- м и с о л. Ушбу

$$y^{IV} - 3y'' = 9x^2$$

чизикли тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Е ч и ш. $k^4 - 3k^2 = 0$ характеристик тенглама $k_1 = k_2 = 0$, $k_{3,4} = \pm \sqrt{3}$ илдизларга эга, буларга ушбу $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = e^{\sqrt{3}x}$,

$y_4 = e^{-\sqrt{3}x}$ фундаментал ечимлар системаси мос келади, бу ердан мос бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$Y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{\sqrt{3}x} + C_4 e^{-\sqrt{3}x}.$$

Берилган тенгламада $f(x) = 9x^2$, $\gamma = 0$, $\delta = 0$, шунинг учун $\gamma + i\delta = 0$. Бу сон характеристик тенгламанинг иккала $k_1 = k_2 = 0$ илдизлари билан бир хилдир, шунинг учун $r = 2$ ва хусусий ечим y ни

$$\bar{y} = (Ax^2 + Bx + C)x^2 = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$$

кўринишда излаймиз.

$\bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'', \bar{y}^{IV}$ ҳосилаларни топамиз ва уларни қуйидаги схема бўйича жойлаштирамиз (тик чизикнинг чап томонига тенгламада булар олдида турган коэффициентларни ёзиб чиқамиз):

$$\begin{array}{r|l} 0 & \bar{y} = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2, \\ 0 & \bar{y}' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx, \\ -3 & \bar{y}'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C, \\ 0 & \bar{y}''' = 24Ax + 6B, \\ 1 & \bar{y}^{IV} = 24A. \end{array}$$

Топилганларни тенгламага қўямиз:

$$\bar{y}^{IV} - 3\bar{y}'' = -36Ax^2 - 18Bx - 6C + 24A = 9x^2.$$

Бу ерда чап ва ўнг томонда x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, A, B, C ларни топиш учун алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{array}{r|l} x^2 & -36A = 9, \\ x & -18B = 0, \\ x^0 & 6C + 24A = 0, \end{array}$$

бу ердан $A = -\frac{1}{4}, B = 0, C = -1$.

Демак, $\bar{y}$ хусусий ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\bar{y} = -\frac{1}{4}x^4 - Cx^2.$$

Берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = Y + \bar{y} = C_1 + C_2x + C_3e^{\sqrt{3}x} + C_4e^{-\sqrt{3}x} - \frac{1}{4}x^4 - Cx^2.$$

2-мисол. Ушбу

$$y'' - 7y' + 6y = xe^x; \quad y|_{x=0} = 1, \quad y'|_{x=0} = 3.$$

Коши масаласини ечинг.

Ечиш. $k^2 - 7k + 6 = 0$ характеристик тенглама $k_1 = 1, k_2 = 6$ ил-дизларга эга, шунинг учун мос бир жинсли тенглама $y'' - 7y' + 6y = 0$ нинг умумий ечими $Y = C_1e^x + C_2e^{6x}$ функциядан иборат.

Тенгламанинг ўнг томони $f(x) = xe^x, \gamma = 1, \delta = 0, \gamma + i\delta = 1 = k$, шунинг учун $r = 1; P_1(x) = x$, демак, хусусий ечим y ни

$$\bar{y} = xe^x(Ax + B) \text{ ёки } \bar{y} = e^x(Ax^2 + Bx)$$

кўринишда излаймиз.

1- мисолдаги каби топамиз:

$$\begin{array}{l|l} 6 & y = e^x(Ax^2 + Bx), \\ -7 & y' = e^x(Ax^2 + Bx + 2Ax + B), \\ 1 & y'' = e^x(Ax^2 + Bx + 2Ax + B + 2Ax + B + 2A). \end{array}$$

Тенгламага кўямиз:

$$\bar{y}'' - 7\bar{y}' + 6\bar{y} = e^x(6A - 7A + A)x^2 + e^x(6B + 7B - 14A + B + 4A)x + e^x(-7B + 2B + 2A) = xe^x.$$

Бу айниятнинг иккала томонини $e^x \neq 0$ га бўлиб ва чап ҳамда ўнг томонда x нинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларни тенглаб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = 0, \\ x & -10A = 1, \quad \text{бу ердан } A = -\frac{1}{10}, \quad B = -\frac{1}{25}, \\ x^0 & 2A - 5B = 0, \end{array}$$

Демак, хусусий ечим: $\bar{y} = e^x \left(-\frac{x^2}{10} - \frac{x}{25} \right).$

Умумий ечим: $y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} - e^x \left(\frac{x^2}{10} + \frac{x}{25} \right).$

Коши масаласини ечиш учун y' ни топамиз:

$$y' = C_1 e^x + 6C_2 e^{6x} - e^x \left(\frac{x^2}{10} + \frac{x}{25} + \frac{x}{5} + \frac{1}{25} \right).$$

Бошлангич шартлардан фойдаланиб, ихтиёрий ўзгармаслар C_1 ва C_2 ларни топиш учун чизиқли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$1 = C_1 + C_2, \quad 1 = C_1 + C_2,$$

$$3 = C_1 + 6C_2 - \frac{1}{25} \quad \text{ёки} \quad \frac{76}{25} = C_1 + 6C_2,$$

бу ердан $C_1 = \frac{74}{125}, \quad C_2 = \frac{51}{125}.$

Демак, берилган бошлангич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y = \frac{74}{125} e^x + \frac{51}{125} e^{6x} - e^x \left(\frac{x^2}{10} + \frac{x}{25} \right).$$

3- мисол. Ушбу

$$y'' + y = (x^2 - 1)e^{-x} + \sin x$$

тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. $k^2 + 1 = 0$ характеристик тенглама $k_{1,2} = \pm i$ ($\alpha = 0, \beta = 1$) мавҳум илдиэларга эга, демак, мос бир жинсли тенгламанинг

У умумий ечими $Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ функция кўринишида бўлади. Тенгламанинг ўнг томони ушбу $f_1(x)$ ва $f_2(x)$ функцияларнинг йингидисидан иборат:

$$f_1(x) = (x^2 - 1)e^{-x}; f_2(x) = \sin x,$$

шунинг учун тенгламанинг $\bar{y}$ хусусий ечимини $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ кўринишда излаймиз.

y_1 учун:

$$f_1(x) = (x^2 - 1)e^{-x}, \gamma = -1, \delta = 0; \gamma + i\delta = -1 \neq k_1, k_2,$$

демак, $r = 0$ ва $\bar{y}_1 = (Ax^2 + Bx + C)e^{-x}$.

y_2 учун:

$$f_2(x) = \sin x, \gamma = 0, \delta = 1; \gamma + i\delta = i = k_1 \neq k_2,$$

демак, $r = 1$ ва $\bar{y}_2 = (D \sin x + E \cos x)x$.

Шундай қилиб,

$$\begin{array}{l|l} 1 & \bar{y} = e^{-x}(Ax^2 + Bx + C) + (Dx \sin x + Ex \cos x), \\ 0 & \bar{y}' = e^{-x}(-Ax^2 - Bx - C + 2Ax + B) + \sin x(D - Ex) + \cos x(E + Dx), \\ 1 & \bar{y}'' = e^{-x}(Ax^2 + Bx + C - 2Ax - B - 2Ax - B + 2A) + \\ & + \sin x(-E - E - Dx) + \cos x(D - Ex + D). \end{array}$$

Топилганларни тенгламага кўямиз:

$$\begin{aligned} \bar{y}'' + \bar{y}' &= e^{-x}(A + A)x^2 + e^{-x}(B + B - 2A - 2A)x + e^x(C + C - \\ &- B - B + 2A) + \sin x(Dx - 2E - Dx) + \cos x(Ex + 2D - Ex) = \\ &= (x^2 - 1)e^{-x} + \sin x. \end{aligned}$$

Охири айниятнинг чап ва ўнг томонларидаги бир хил ҳадлар олдидаги коэффициентларни тенглаб, A, B, C, D, E ларни топамиз:

$$\begin{array}{l|l} x^2 e^{-x} & 1 = 2A, \\ x e^{-x} & 0 = 2B - 4A, \\ x^0 e^{-x} & -1 = 2C - 2B + 2A, \\ \sin x & 1 = -2E, \\ \cos x & 0 = 2D, \end{array}$$

бу ердан $A = \frac{1}{2}, B = 1, C = 0, D = 0, E = -\frac{1}{2}$. Бинобарин $\bar{y}$ хусу-

сий ечим $\bar{y} = e^{-x}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) - \frac{x}{2}\cos x$ функциядан, умумий ечим эса

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^{-x}\left(\frac{x^2}{2} + x\right) - \frac{x}{2}\cos x$$

функциядан иборат бўлади.

5- дарсхона топшириги

1. Тенгламанинг умумий ечимини топинг:

а) $y'' - 6y' + 8y = 3x^2 + 2x + 1$;

б) $y'' - 6y' + 25y = 2\sin x + 3\cos x$;

в) $y'' + 3y' - 10y = xe^{-2x}$;

г) $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$,

д) $y^{IV} - y = xe^x + \cos x$;

е) $y'' - 3y' + 2y = 3x + 5\sin 2x$;

ж) $y'' - 4y' + 4y = 8(x^2 + e^{2x} + \sin 2x)$.

Ж: а) $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{64}(24x^2 + 52x + 41)$;

б) $y = e^{3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x) + \frac{1}{102}(14 \cos x + 5 \sin x)$;

в) $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-5x} + \frac{1}{144}(1 - 12x)e^{-2x}$;

г) $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x) - \frac{1}{2}xe^x \cos x$;

д) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x + \frac{x^2 - 3x}{8}e^x - \frac{x}{4}\sin x$;

е) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4}(9 + 3\cos 2x - \sin 2x)$;

ж) $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + 2x^2 + 4x + 3 + 4xe^{2x} + \cos 2x$.

2. Қоши масаласини ечинг:

а) $y''' - y' = 3(2 - x^2)$; $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = y''|_{x=0} = 1$;

б) $y'' + y = -\sin 2x$; $y|_{x=\pi} = y'|_{x=\pi} = 1$.

Ж: а) $y = e^x + x^3$; б) $y = \frac{1}{3}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin x - \cos x$.

5- мустақил иш

1. Тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

а) $y'' - 3y' + 2y = x - e^{-2x} + 1$;

б) $2y'' + 5y' = 29x \sin x$;

в) $y'' - 4y' + 4y = \sin x \cdot \cos 2x$.

Ж: а) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4} - \frac{1}{12}e^{-2x}$;

б) $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{3x}{2}} + \left(-5x - \frac{16}{29}\right) \cos x - \left(2x - \frac{185}{29}\right) \sin x$;

в) $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{1}{169}\left(-\frac{5}{2}\sin 3x + 6\cos 3x\right) - \frac{1}{50}(3\sin x + 4\cos x)$.

кўринишда излаймиз, бу ерда $C_1(x)$ ва $C_2(x)$ функциялар

$$\begin{cases} C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x = 0, \\ -C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x = \operatorname{tg} x \end{cases}$$

системадан топилади. Системани ечсак:

$$C_1'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}, \quad C_2'(x) = \sin x.$$

Интеграллашдан сўнг қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} C_1(x) &= -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx = \\ &= \sin x - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + \bar{C}_1, \\ C_2(x) &= \int \sin x dx = -\cos x + \bar{C}_2. \end{aligned}$$

бу ерда $\bar{C}_1$ ва $\bar{C}_2$ — ихтиёрий интеграллаш ўзгармаслари.

Шундай қилиб, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = (\bar{C}_1 + \sin x + \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|) \cos x + (\bar{C}_2 - \cos x) \sin x$$

ёки

$$y = \bar{C}_1 \cos x + \bar{C}_2 \sin x - \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|.$$

6- дарсхона топириғи

1. Қуйидаги тенгламаларнинг умумий ечимини ихтиёрий ўзгармасларни вариациялаш усули ёрдамида топинг:

а) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{2}$; б) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$;

в) $y'' + y' = \frac{1}{\cos x}$; г) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.

Ж: а) $y = (C_1 + C_2 x) e^x + x e^x \ln |x|$;

б) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1)$;

в) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x + \cos x \cdot \ln |\cos x|$;

г) $y = (C_1 + C_2 x + \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{3}{4} x^2) e^{-2x}$.

2. Коши масаласини ечинг:

$$y'' + y' = \frac{1}{\sin x}; \quad y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1, \quad y'|_{x=\frac{\pi}{2}} = 0.$$

Ж: $y = \frac{\pi}{2} \cos x + \sin x - x \cos x + \sin x \ln |\sin x|$.

I. Тенгламаларнинг умумий ечимини топинг:

$$1. y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$\text{Ж: } y = (C_1 + \sqrt{4-x^2} + \arcsin \frac{x}{2} + C_2 x) e^x.$$

$$2. y'' + y = \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

$$\text{Ж: } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \ln |\cos x + \sqrt{\cos^2 x - \frac{1}{2}}| + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \cdot \arcsin(\sqrt{2} \sin x).$$

$$3. y'' - y' = -e^{2x} \sqrt{1-e^{2x}}.$$

$$\text{Ж: } y = C_1 + C_2 e^x + \frac{1}{2} e^x (\arcsin e^x + e^x \sqrt{1-e^{2x}}) + \frac{1}{3} \sqrt{(1-e^{2x})^3}.$$

II. Коши масаласини ечинг:

$$y'' + 4y = \frac{1}{\sin^2 x}; \quad y \Big|_{x=-\frac{\pi}{2}} = 0; \quad y' \Big|_{x=-\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

$$\text{Ж: } y = -\cos 2x \ln |\sin x| - x \sin 2x - \cos^2 x.$$

8- намунавий ҳисоб топшириқлари

I. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

$$1.1. \quad 3(x^2 y + y) dy + \sqrt{2+y^2} dx = 0.$$

$$1.2. \quad (3 + e^x) y y' = e^x.$$

$$1.3. \quad y \ln y + x y' = 0.$$

$$1.4. \quad 2x dx - 2y dy = x^2 y dy - 2xy^2 dx.$$

$$1.5. \quad y' y \sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0.$$

$$1.6. \quad \sqrt{4+y^2} dx - y dy = x^2 y dy.$$

$$1.7. \quad 2x + 2xy^2 + \sqrt{2-x^2} y' = 0.$$

$$1.8. \quad x dx - y dy = yx^2 dy - xy^2 dx.$$

$$1.9. \quad \sqrt{1-x^2} y' + xy^2 + x = 0.$$

$$1.10. \quad (e^x + 8) dy - ye^x dx = 0.$$

$$1.11. \quad x \sqrt{5+y^2} dx + y \sqrt{4+x^2} dy = 0.$$

$$1.12. \quad 6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3xy^2 dx.$$

- 1.13. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.
 1.14. $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$.
 1.15. $y(4+e^x)dy - e^xdx = 0$.
 1.16. $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$.
 1.17. $6xdx - 2ydy = 2yx^2dy - 3xy^2dx$.
 1.18. $\sqrt{5+y^2}dx + 4(x^2y+y)dy = 0$.
 1.19. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$.
 1.20. $(e^{2x}+5)dy + ye^{2x}dx = 0$.
 1.21. $\sqrt{4-x^2}y' + xy^2 + x = 0$.
 1.22. $6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx$.
 1.23. $y(1+\ln y) + xy' = 0$.
 1.24. $(1+e^x)yy' = e^x$.
 1.25. $\sqrt{3+y^2}dx - ydy = x^2ydy$.
 1.26. $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.
 1.27. $x\sqrt{4+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$.
 1.28. $(1+e^x)y' = ye^x$.
 1.29. $\sqrt{3+y^2} + \sqrt{1-x^2}yy' = 0$.
 1.30. $2xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$.

2. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

- 2.1. $(2x-y)dx + (x+y)dy = 0$. 2.2. $(x^2+y^2)dx + 2xydy = 0$.
 2.3. $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$. 2.4. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.
 2.5. $(y^2-xy)dx + (x^2-2xy)dy = 0$. 2.6. $x\ln\frac{x}{y}dy - ydx = 0$.
 2.7. $(xye^y + y^2)dx = x^2e^ydy$. 2.8. $(x-y)ydx - x^2dy = 0$.
 2.9. $xy^2dy = (x^3+y^3)dx$. 2.10. $(x^2-y^2)dx = 2xydy$.
 2.11. $y^2dx = (xy-x^2)dy$. 2.12. $(y^2-2xy)dx + x^2dy = 0$.
 2.13. $xy + y^2(2x^2+xy)y'$. 2.14. $xyy' = y^2 + 2x^2$.
 2.15. $2xy' \cdot y = \frac{x^2+y^2}{x^2}$. 2.16. $(5xy-x^2)y' - 5y^2 = 0$.
 2.17. $xy' = 4\sqrt{2x^2+y^2} + y$. 2.18. $4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5$.
 2.19. $xy' = 3\sqrt{2x^2+y^2} + y$. 2.20. $y'(2x^2+2xy) = x^2+2xy-y^2$.
 2.21. $xy' = \frac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}$. 2.22. $y' = \frac{x+2y}{2x-y}$.
 2.23. $xy' = y(\ln\frac{y}{x} - 1)$. 2.24. $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$.

$$2.25. \quad xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}.$$

$$2.26. \quad xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

$$2.27. \quad xy' = y - \sec \frac{y}{x}.$$

$$2.28. \quad xy' = y \cos \left(\ln \frac{y}{x} \right).$$

$$2.29. \quad y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{3x^2 - 2xy}.$$

$$2.30. \quad xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

3. Коши масаласини ечинг:

$$3.1. \quad xy' - y = x^2 \cos x; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$3.2. \quad xy' + y = x^3; \quad y(1) = 0.$$

$$3.3. \quad y' \cos x + y \sin x = 1; \quad y(0) = 1.$$

$$3.4. \quad y' + 2xy = xe^{-x^2}; \quad y(0) = -1.$$

$$3.5. \quad y' - \frac{y}{x} = -\frac{2}{x^2}; \quad y(1) = 1.$$

$$3.6. \quad y' - y \cos x = \sin 2x; \quad y(0) = -1.$$

$$3.7. \quad y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3; \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

$$3.8. \quad y' + 2xy = -2x^3; \quad y(1) = e^{-1}.$$

$$3.9. \quad y' + \frac{2y}{x} = x^3; \quad y(1) = -\frac{5}{6}.$$

$$3.10. \quad y' - \frac{y}{x} = x^2; \quad y(1) = 0.$$

$$3.11. \quad y' - \frac{y}{x} = -\frac{2 \ln x}{x}; \quad y(1) = 1.$$

$$3.12. \quad y' + \frac{y}{x} = \sin x; \quad y(\pi) = \frac{1}{\pi}.$$

$$3.13. \quad y' - \frac{y}{x} = x \sin x; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

$$3.14. \quad y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x; \quad y(-1) = \frac{3}{2}.$$

$$3.15. \quad y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1); \quad y(0) = 1.$$

$$3.16. \quad y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}; \quad y(0) = \frac{2}{3}.$$

$$3.17. \quad y' - \frac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2; \quad y(0) = 1.$$

$$3.18. \quad y' + y \operatorname{tg} x = \cos^2 x; \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$3.19. \quad y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x; \quad y(0) = 0.$$

$$3.20. \quad y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2; \quad y(1) = 3.$$

$$3.21. \quad y' + \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{x}; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}.$$

$$3.22. \quad xy' + y = \ln x + 1; \quad y(1) = 0.$$

$$3.23. y' \operatorname{ctg} x - y = 2 \cos^2 x \operatorname{ctg} x; y(0) = 0.$$

$$3.24. xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}; y(1) = 0.$$

$$3.25. (xy' - 1) \ln x = 2y; y(e) = 0.$$

$$3.26. y = x(y' - x \cos x); y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$3.27. xy' - 2y = 2x^4; y(1) = 0.$$

$$3.28. y' + y \operatorname{tg} x + \sin x; y(0) = 0.$$

$$3.29. (x^2 + 1)y' + 4xy = 3; y(0) = 0.$$

$$3.30. y' + \frac{1-x}{1+x} y = \frac{e^{-x}}{1-x}; y(0) = \ln 5.$$

4. Коши масаласининг ечимини топинг:

$$4.1. y' - y \operatorname{tg} x = -\frac{2}{3} y^4 \sin x; y(0) = 1.$$

$$4.2. y' - y = xy^2; y(0) = 1.$$

$$4.3. 4y' + x^3 y = (x^3 + 8)e^{-2x} y^2; y(0) = 1.$$

$$4.4. y' - y = 2xy^2; y(0) = \frac{1}{2}.$$

$$4.5. 3y' + 2xy = 2xy^{-2} \cdot e^{-2x^2}; y(0) = -1.$$

$$4.6. xy' - y = -y^2 (\ln x + 2) \ln x; y(1) = 1.$$

$$4.7. y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^2; y(0) = 1.$$

$$4.8. y'x + y = \frac{xy^2}{3}; y(1) = 3.$$

$$4.9. 2y' + 3y \cos x = (8 + 12 \cos x)e^{2x} y^{-1}; y(0) = 2.$$

$$4.10. y' + 4x^2 y = 4y^2 e^{4x} (1 - x^2); y(0) = -1.$$

$$4.11. 2(y' + xy) = (x-1)e^x - y^2; y(0) = 2.$$

$$4.12. 2y' - 3y \cos x = -e^{-2x} (2 + 3 \cos x) y^{-1}; y(0) = 1.$$

$$4.13. y' + xy = (x-1)e^x y^2; y(0) = 1.$$

$$4.14. xy' + y = y^2 \ln x; y(1) = 1.$$

$$4.15. 2y' + 3y \cos x = e^{2x} (2 + 3 \cos x) y^{-1}; y(0) = 1.$$

$$4.16. 2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x (1 + \sin x); y(0) = 1.$$

$$4.17. 2(xy' + y) = xy^2; y(1) = 2.$$

$$4.18. xy' + y = 2y^2 \ln x; y(1) = \frac{1}{2}.$$

$$4.19. 3(xy' + y) = y^2 \ln x; y(1) = 3.$$

$$4.20. 3xy' + 5y = (4x-5)y^4; y(1) = 1.$$

$$4.21. y' + 2xy = 2x^3 y^3; y(0) = \sqrt{2}.$$

$$4.22. 2(y' + y) = xy^2; y(0) = 2.$$

$$4.23. y' + y = xy^2; y(0) = 1.$$

$$4.24. y' + xy = (1+x)e^{-x}y^2; y(0) = 1.$$

$$4.25. 2(y' + xy) = (1+x)e^{-x}y^2; y(0) = 2.$$

$$4.26. 2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3; y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$4.27. 2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3; y(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$4.28. 8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3; y(1) = \sqrt{2}.$$

$$4.29. 2(xy' + y) = y^2 \ln x; y(1) = 2.$$

$$4.30. xy' + y = xy^2; y(1) = 1.$$

5. Дифференциал тенгламанинг умумий интеграллини топиш:

$$5.1. (y^2 + y \sec^2 x) dx + (2xy + \operatorname{tg} x) dy = 0.$$

$$5.2. \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx - \frac{2y}{x^3} dy = 0.$$

$$5.3. \frac{y}{x^2} dx - \frac{xy+1}{x} dy = 0.$$

$$5.4. (y^3 + \cos x) dx + (3xy^2 + e^y) dy = 0.$$

$$5.5. (\sin y + y \sin x + \frac{1}{x}) dx + (x \cos y - \cos x + \frac{1}{y}) dy = 0.$$

$$5.6. xy^2 dx + y(x^2 + y^2) dy = 0.$$

$$5.7. (3x^3 + 6x^2y + 3xy^2) dx + (2x^3 + 3x^2y) dy = 0.$$

$$5.8. (x^2 - 4xy - 2y^2) dx + (y^2 - 4xy - 2x^2) dy = 0.$$

$$5.9. e^y dx + (\cos y + xe^y) dy = 0.$$

$$5.10. \frac{dx}{y} - \frac{x+y^2}{y^2} dy = 0.$$

$$5.11. \left(xy^2 + \frac{x}{y^2} \right) dx + \left(x^2y - \frac{x^2}{y^3} \right) dy = 0.$$

$$5.12. \left(2x - 1 - \frac{y}{x^2} \right) dx - \left(2y - \frac{1}{x} \right) dy = 0.$$

$$5.13. (3x^2 + 4y^2) dx + (8xy + e^y) dy = 0.$$

$$5.14. (\sin 2x - 2\cos(x+y)) dx - 2\cos(x+y) dy = 0.$$

$$5.15. \frac{1+xy}{x^2y} dx + \frac{1-xy}{xy^2} dy = 0.$$

$$5.16. \left(\frac{y}{x^2+y^2} + e^x \right) dx - \frac{xdy}{x^2+y^2} = 0.$$

$$5.17. (\cos(x+y^2) + \sin x) dx + 2y \cos(x+y^2) dy = 0.$$

$$5.18. (6xy^2 + 4x^3) dx + (6x^2y + y)^2 dy = 0.$$

$$5.19. \left(3x^2 + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y}\right) dx - \frac{2x}{y^2} \cdot \cos \frac{2x}{y} dy = 0.$$

$$5.20. \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right) dy = 0.$$

$$5.21. \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right) dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) dy = 0.$$

$$5.22. \left(10xy - \frac{1}{\sin y}\right) dx + \left(5x^2 + \frac{x \cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3\right) dy = 0.$$

$$5.23. (5xy^2 - x^3) dx + (5x^2y - y) dy = 0.$$

$$5.24. \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2} = 0.$$

$$5.25. 3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0.$$

$$5.26. (3x^2y + 2y + 3) dx + (x^3 + 2x + 3y^2) dy = 0.$$

$$5.27. \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx - \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} + 2y\right) dy = 0.$$

$$5.28. \left(xe^x + \frac{y}{x^2}\right) dx - \frac{1}{x} dy = 0.$$

$$5.29. xe^y dx + (x^2 ye^y + \operatorname{tg}^2 y) dy = 0.$$

$$5.30. \left(1 + \frac{1}{y} e^{\frac{x}{y}}\right) dx + \left(1 - \frac{x}{y^2} e^{\frac{x}{y}}\right) dy = 0.$$

6. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

$$6.1. y''' + y'' \operatorname{tg} x = 0.$$

$$6.2. y''' x \ln x = y''.$$

$$6.3. y'' = -\frac{x}{y}.$$

$$6.4. x^2 y'' + xy' = 1.$$

$$6.5. y'' - \frac{y'}{x-1} = x(x-1).$$

$$6.6. y'' \operatorname{ctg} x + y' = 2.$$

$$6.7. xy'' + y' = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$6.8. xy''' - 2y'' = \frac{2}{x^2}.$$

$$6.9. x^4 y''' + x^3 y' = 4.$$

$$6.10. y'' + \frac{2x}{x^2+1} y' = 2x.$$

$$6.11. \operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0.$$

$$6.12. (1+x^2) y'' + 2xy' = x^3.$$

$$6.13. y''' \cdot \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0.$$

$$6.14. \operatorname{tg} x \cdot y''' = 2y''.$$

$$6.15. x^2 y'' + xy' = 1.$$

$$6.16. y'' + 2xy'^2 = 0.$$

$$6.17. xy'' = y' + x^3.$$

$$6.18. xy''' - y' = \frac{1}{x}.$$

- 6.19. $xy''' + y'' = 1$. 6.25. $x^3y''' + x^2y'' = \sqrt{x}$.
 6.20. $(x+1)y''' + y'' = x+1$. 6.26. $y'''' \lg x = y'' + 1$.
 6.21. $xy''' + 2y'' = 0$. 6.27. $x^5y''' + x^4y'' = 1$.
 6.22. $xy''' + y'' + x = 0$. 6.28. $xy'' + y' = \ln x$.
 6.23. $y'''' \lg 5x = 5y''$. 6.29. $xy'' - y' = 2x^2e^x$.
 6.24. $(1 + \sin x)y''' = y'' \cos x$. 6.30. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

7. Коши масаласини ечинг:

- 7.1. $y''y^3 + 1 = 0$; $y(1) = -1$, $y'(1) = -1$.
 7.2. $1 + y'^2 = yy''$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 7.3. $y''y^3 + 36 = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.
 7.4. $4y^3y'' = y^4 - 1$; $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \frac{\sqrt{2}}{4}$.
 7.5. $y'' = 18y^3$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.
 7.6. $y'' = 2 - y$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.
 7.7. $y^{12} + 2yy'' = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
 7.8. $y''y^3 + 9 = 0$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.
 7.9. $4y^3y'' = y^4 - 16$; $y(0) = 2\sqrt{2}$; $y'(0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 7.10. $yy'' + y^{12} = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
 7.11. $y^3y'' = 4(y^4 - 1)$; $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
 7.12. $yy'' - 2y^{12} = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
 7.13. $y'' + 2yy^{12} = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
 7.14. $y' \lg y = 2y^{12}$; $y(1) = \frac{\pi}{2}$, $y'(1) = 2$.
 7.15. $y''y^3 + 25 = 0$; $y(2) = -5$, $y'(2) = -1$.
 7.16. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y^{12} = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
 7.17. $y''(1 + y) = y^{12} + y'$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.
 7.18. $y'' + 18 \sin y \cos^3 y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
 7.19. $2yy'' = y^{12}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
 7.20. $y''y^3 + 4 = 0$; $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$.
 7.21. $y''(1 + y) = 5y^{12}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
 7.22. $yy'' - y^{12} = y^4$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.
 7.23. $y'' = y'e^y$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
 7.24. $y'' = 32y^3$; $y(4) = 1$, $y'(4) = 4$.
 7.25. $y' = -\frac{1}{2y^3}$, $y(0) = \frac{1}{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
 7.26. $y^3y'' = y^4 - 16$; $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
 7.27. $4y''^2 = 1 + y^{12}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 7.28. $y'' = 1 - y^{12}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
 7.29. $y''(2y + 3) = 2y^{12}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
 7.30. $yy'' - 2yy' \ln y = y^{12}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

8. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

- 8.1. $y^{IV} + y''' = 12x + 6$;
- 8.2. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$;
- 8.3. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2$;
- 8.4. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$;
- 8.5. $y''' + y'' = 5x^2 - 1$;
- 8.6. $y''' + y'' = 49 - 24x^2$;
- 8.7. $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5$;
- 8.8. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$;
- 8.9. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$;
- 8.10. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$;
- 8.11. $y''' - y'' = x^2 + x$;
- 8.12. $7y''' - y'' = 12x$.
- 8.13. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1$;
- 8.14. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$;
- 8.15. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$;
- 8.16. $y^{IV} + y''' = x$;
- 8.17. $y^{IV} - y''' = 5(x + 2)^2$.
- 8.18. $y''' - y'' = 3x^2 - 2x + 1$.
- 8.19. $y''' - y'' = 6x + 5$;
- 8.20. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1 - x)$;
- 8.21. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$;
- 8.22. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3$;
- 8.23. $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x + 1$;
- 8.24. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3$;
- 8.25. $y''' - 5y'' + 6y' = (x - 1)^2$;
- 8.26. $y^V - y^{IV} = 2x + 3$;
- 8.27. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x$;
- 8.28. $y^{IV} + 6y''' + 9y'' = 3x - 1$;
- 8.29. $3y^{IV} + y''' = 6x - 1$.
- 8.30. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$.

9. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

- 9.1. $y''' + 4y'' + 3y' = 4(1 - x)e^{-x}$;
- 9.2. $y''' - 4y'' - 3y' = -4xe^x$;
- 9.3. $y''' - 3y'' - 2y' = -4xe^x$;

- 9.4. $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x$.
- 9.5. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x}$.
- 9.6. $y''' + y'' - y - y = (8x + 4)e^x$.
- 9.7. $y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^x$.
- 9.8. $y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}$.
- 9.9. $y''' + 8y'' - 3y' = (4x + 2)e^x$.
- 9.10. $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}$.
- 9.11. $y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^x$.
- 9.12. $y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^x$.
- 9.13. $y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^x$.
- 9.14. $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}$.
- 9.15. $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^x$.
- 9.16. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^x$.
- 9.17. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$.
- 9.18. $y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^x$.
- 9.19. $y''' - 3y'' + 4y' = (18x - 21)e^{-x}$.
- 9.20. $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)e^x$.
- 9.21. $y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^x$.
- 9.22. $y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}$.
- 9.23. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^x$.
- 9.24. $y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)e^{-x}$.
- 9.25. $y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}$.
- 9.26. $y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^x$.
- 9.27. $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)e^x$.
- 9.28. $y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^x$.
- 9.29. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = e^{-x}(32x - 32)$.
- 9.30. $y''' - 3y'' + 2y' = (4x + 9)e^{2x}$.

10. Дифференциал тенгламанинг умумий ечимини топинг:

- 10.1. $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$.
- 10.2. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \cdot \sin 4x$.
- 10.3. $y'' - 4y' + 8y = e^x(-\sin x + 2\cos x)$.
- 10.4. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$.
- 10.5. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$.
- 10.6. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cdot \cos 5x$.
- 10.7. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \cdot \sin 6x$.
- 10.8. $y'' - 4y' + 8y = e^x \cdot (-3\sin x + 4\cos x)$.

- 10.9. $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$.
 10.10. $y'' + 2y' = -2e^x \cdot (\sin x + \cos x)$.
 10.11. $y'' + 2y' = 10e^x \cdot (\sin x + \cos x)$.
 10.12. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$.
 10.13. $y'' + y = 2\cos 7x + 3\sin 7x$.
 10.14. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \cdot \sin 5x$.
 10.15. $y'' + 4y = e^{2x} \cos 3x$.
 10.16. $y'' - 4y' + 8y = e^x \cdot (2\sin x - \cos x)$.
 10.17. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.
 10.18. $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x$.
 10.19. $y'' + 2y' = 3e^x \cdot (\sin x + \cos x)$.
 10.20. $y'' - 4y' + 8y = e^x \cdot (5\sin x - 3\cos x)$.
 10.21. $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$.
 10.22. $y'' + 2y' = e^x (\sin x + \cos x)$.
 10.23. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cdot \cos x$.
 10.24. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cdot \cos 8x$.
 10.25. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \cdot \sin 3x$.
 10.26. $y'' - 4y' + 8y = e^x \cdot (3\sin x + 5\cos x)$.
 10.27. $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$.
 10.28. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cdot \cos 4x$.
 10.29. $y'' + 2y' = 6e^x (\sin x + \cos x)$.
 10.30. $y'' + y = 2\cos 4x + 3\sin 4x$.

11. Коши маслласини ечинг:

- 11.1. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.
 11.2. $y'' - 2y' = \frac{4e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$; $y(0) = \ln 4$, $y'(0) = \ln 4 - 2$.
 11.3. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{2 + e^{-2x}}$; $y(0) = 1 + 3 \ln 3$, $y'(0) = 10 \ln 3$.
 11.4. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1 + e^{-x}}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
 11.5. $y'' + 16y = \frac{16}{\cos 4x}$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.
 11.6. $y'' + y = 4\cot 8x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.
 11.7. $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\cos \pi x}$; $y(0) = +3$, $y'(0) = 0$.
 11.8. $y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
 11.9. $y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4} \cot \frac{x}{2}$; $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = \frac{1}{2}$.

- 11.10. $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 11.11. $y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$; $y(0) = \ln 4$; $y'(0) = 3(1 - \ln 2)$.
 11.12. $y'' + 9y = \frac{9}{\sin 3x}$; $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{2}$.
 11.13. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{2 + e^{-x}}$; $y(0) = 1 + 3 \ln 3$, $y'(0) = 5 \ln 3$.
 11.14. $y'' + 4y = 8\cot 2x$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$.
 11.15. $y'' + 9y = \frac{9}{\cos 3x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
 11.16. $y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{2 + e^x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
 11.17. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1 + e^{-2x}}$; $y(0) = 1 + 2 \ln 2$, $y'(0) = 6 \ln 2$.
 11.18. $y'' - y' = \frac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$; $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = \ln 9 - 1$.
 11.19. $y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$.
 11.20. $y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
 11.21. $y'' + 4y = 4\cot 2x$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$.
 11.22. $y'' + 4y = \frac{4}{\cos 2x}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.
 11.23. $y'' + \pi^2 y = \frac{\pi^2}{\sin \pi x}$; $y\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^2}{2}$.
 11.24. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{3 + e^{-x}}$; $y(0) = 1 + 8 \ln 2$, $y'(0) = 14 \ln 2$.
 11.25. $y'' + y' = \frac{e^x}{2 + e^x}$; $y(0) = \ln 27$, $y'(0) = 1 - \ln 9$.
 11.26. $y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
 11.27. $y'' + y = 2\cot 8x$; $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.
 11.28. $y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$; $y(0) = 4 \ln 4$; $y'(0) = 3(3 \ln 4 - 1)$.
 11.29. $y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}$; $y\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3$, $y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\pi$.
 11.30. $y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}$; $y(0) = 1 + 2 \ln 2$, $y'(0) = 3 \ln 2$.

7- §. Дифференциал тенгламалар системаларини ечиш

8.7.1. Ушбу

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

дифференциал тенгламалар системаси *нормал система* дейилади, бу ерда $y_1, y_2, \dots, y_n$ — эркин ўзгарувчи x нинг номаълум функциялари.

Бу системани каноатлантирувчи $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$ функциялар системаси бу *системанинг ечими* дейилади.

Берилган дифференциал тенгламалар системаси учун Коши масаласи шундай ечимни топишдан иборатки, бу ечим $x = x_0$ да берилган $y_1|_{x=x_0} = y_{10}$, $y_2|_{x=x_0} = y_{20}$, ..., $y_n|_{x=x_0} = y_{n0}$ бошланғич шартларни каноатлантирсин.

Нормал системанинг *умумий ечими* деб n та $C_1, C_2, \dots, C_n$ ихтиёрий ўзгармасларга боғлиқ бўлган

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases}$$

функциялар системасига айтилади. Бу ечим берилган тенгламани ихтиёрий ўзгармасларнинг ҳар қандай мумкин бўлган қийматларида айниятга айлантиради ва берилган бошланғич шартларни каноатлантирадиган қилиб танланса, Коши масаласининг ечими бўлади.

Умумий ечимдан ихтиёрий ўзгармасларнинг мумкин бўлган баъзи қийматларида ҳосил бўладиган ечимлар *хусусий ечимлар* дейилади.

8.7.2. Нормал системани ечишнинг усулларида бир номаълум функцияларни йўқотиш усули бўлиб, у n та дифференциал тенгламалар системасини бир номаълум функцияли битта n -тартибли дифференциал тенгламага келтиради.

1- м и с о л. Ушбу

$$\begin{cases} y' = y + z, \\ z' = y - z \end{cases}$$

дифференциал тенгламалар системасини $y|_{x=0} = 2$, $z|_{x=0} = 0$ бошланғич шартларда ечинг.

Ечиш. Номаълум функция z ни йўқотиш учун биринчи тенгламани x бўйича дифференциаллаймиз:

$$y'' = y' + z',$$

бу ерда z' ўрнига унинг иккинчи тенгламадан аниқланган ифодасини қўямиз:

$$y' = y' + y - z.$$

Энди z ўрнига унинг биринчи тенгламадан олинган ифодасини қўйсақ,

$$y'' - 2y = 0$$

тенглама ҳосил бўлади. Бу тенгламанинг $k^2 - 2 = 0$ характеристик тенгламаси $k_{1,2} = \pm \sqrt{2}$ илдизларга эга.

Демак, умумий ечим қуйидагича ёзилади:

$$y = C_1 e^{\sqrt{2}x} + C_2 e^{-\sqrt{2}x}.$$

z учун умумий ечимни системанинг биринчи тенгламасидан топамиз:

$$z = y' - y = C_1(\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}x} - C_2(\sqrt{2} + 1)e^{-\sqrt{2}x}.$$

Ихтиёрий ўзгармасларни топиш учун бошланғич шартлардан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 2, \\ C_1(\sqrt{2} - 1) - C_2(\sqrt{2} + 1) &= 0. \end{aligned}$$

Бу ердан:

$$C_1 = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}, \quad C_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}.$$

Шундай қилиб, биз излаётган хусусий ечим қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)e^{\sqrt{2}x} + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-\sqrt{2}x}, \\ z &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}x} - \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\sqrt{2}x}. \end{aligned}$$

8.7.3. Агар дифференциал тенгламалар нормал системасининг ўнг томонлари номаълум $y_1, y_2, \dots, y_n$ функцияларга нисбатан чизикли функциялар бўлса, у ҳолда тенгламалар системаси *чизикли система* дейилади. n та номаълум $y_1, y_2, \dots, y_n$ функциялар қатнашган коэффициентлари ўзгармас бўлган, n та чизикли бир жинсли тенгламалар системаси қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ \dots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

Бу системанинг ечими

$$y_1 = \alpha_1 e^{kx}, y_2 = \alpha_2 e^{kx}, \dots, y_n = \alpha_n e^{kx}$$

кўринишда изланади. $y_1, y_2, \dots, y_n$ ларни берилган дифференциал тенгламалар системасига қўйиб, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ларга нисбатан чизикли алгебраик тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} (a_{11} - k) \alpha_1 + a_{12} \alpha_2 + \dots + a_{1n} \alpha_n = 0, \\ a_{21} \alpha_1 + (a_{22} - k) \alpha_2 + \dots + a_{2n} \alpha_n = 0, \\ \dots \\ a_{n1} \alpha_1 + a_{n2} \alpha_2 + \dots + (a_{nn} - k) \alpha_n = 0. \end{cases}$$

k қуйидаги n - даражали тенгламадан топилади:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0.$$

Бу тенглама берилган дифференциал тенгламалар системасининг характеристик тенгламаси дейилади. k нинг турли қийматларига $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ларнинг маълум тўплами мос келади. Характеристик тенгламанинг илдизлари турлича бўлсин: $k_1, k_2, \dots, k_n$.

У ҳолда k_1 илдизга бирорта $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \dots, \alpha_{n1}$ тўплам мос келиб, унга биринчи ечим тўғри келади:

$$y_{11} = \alpha_{11} e^{k_1 x}, y_{21} = \alpha_{21} e^{k_1 x}, \dots, y_{n1} = \alpha_{n1} e^{k_1 x}.$$

Шунга ўхшаш k_2 илдизга $\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n}$ тўплам мос келади, унга ўз навбатида иккинчи ечим тўғри келади:

$$y_{12} = \alpha_{12} e^{k_2 x}, y_{22} = \alpha_{22} e^{k_2 x}, \dots, y_{n2} = \alpha_{n2} e^{k_2 x}.$$

k_n илдизга $\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \dots, \alpha_{nn}$ тўплам мос келади ва унга n - ечим тўғри келади:

$$y_{1n} = \alpha_{1n} e^{k_n x}, y_{2n} = \alpha_{2n} e^{k_n x}, \dots, y_{nn} = \alpha_{nn} e^{k_n x}$$

Фундаментал ечимлар системасини ҳосил қилдик. Умумий ечим қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\begin{aligned}y_1 &= C_1 y_{11} + C_2 y_{12} + \dots + C_n y_{1n}, \\y_2 &= C_1 y_{21} + C_2 y_{22} + \dots + C_n y_{2n}, \\&\vdots \\y_n &= C_1 y_{n1} + C_2 y_{n2} + \dots + C_n y_{nn}.\end{aligned}$$

2-мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y' = 7y + 3z, \\ z' = 6y + 4z \end{cases}$$

тенгламалар системасининг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Ечимни $y = \alpha e^{kx}$, $z = \beta e^{kx}$ кўринишда излаймиз.

Характеристик тенгламани тузамиз:

$$\begin{vmatrix} 7-k & 3 \\ 6 & 4-k \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } k^2 - 11k + 10 = 0.$$

Унинг илдизлари: $k_1 = 1$, $k_2 = 10$ — ҳақиқий ва ҳар хил сонлар.

а) $k_1 = 1$ да α ва β ларни топиш учун тузиладиган система қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} (7-1)\alpha + 3\beta = 0, \\ 6\alpha + (4-1)\beta = 0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} 6\alpha + 3\beta = 0, \\ 6\alpha + 3\beta = 0. \end{cases}$$

Унинг битта $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -2$ ечимини олайлик. $k_1 = 1$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -2$ га мос хусусий ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y_1 = e^x, \quad z_1 = -2e^x.$$

б) $k_2 = 10$ да α ва β лар қуйидаги системадан топилади:

$$\begin{cases} (7-10)\alpha + 3\beta = 0, \\ 6\alpha + (4-10)\beta = 0 \end{cases} \text{ ёки } \begin{cases} -3\alpha + 3\beta = 0, \\ 6\alpha - 6\beta = 0. \end{cases}$$

Бу тенгламанинг $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 1$ ечимини олайлик. $k_2 = 10$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 1$ га мос хусусий ечим

$$y_2 = e^{10x}, \quad z_2 = e^{10x}$$

кўринишда бўлади.

Шундай қилиб, бу ҳолда фундаментал система қуйидагича бўлади:

$$\begin{aligned}y_1 &= e^x, \quad y_2 = e^{10x}, \\z_1 &= -2e^x, \quad z_2 = e^{10x}.\end{aligned}$$

Умумий ечим:

$$\begin{aligned} y &= C_1 y_1 + C_2 y_2, \\ z &= C_1 z_1 + C_2 z_2 \end{aligned}$$

$$\text{ёки} \quad \begin{aligned} y &= C_1 e^x + C_2 e^{10x}, \\ z &= -2C_1 e^x + C_2 e^{10x}. \end{aligned}$$

3- мисол. Ушбу

$$\begin{cases} y' = -7y + z, \\ z' = -2y - 5z \end{cases}$$

системанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Ечимни қуйидаги кўринишда излаймиз:

$$y = \alpha e^{kx}, \quad z = \beta e^{kx}.$$

Характеристик тенгламани тузамиз:

$$\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{ёки} \quad k^2 + 12k + 37 = 0.$$

Унинг илдизлари: $k_{1,2} = -6 \pm i$ — комплекс сонлар. $k_1 = -6 + i$ учун α ва β лар қуйидаги системадан топилади:

$$\begin{cases} (-7+6-i)\alpha + \beta = 0, \\ -2\alpha + (-5+6-i)\beta = 0 \end{cases} \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} (-1-i)\alpha + \beta = 0, \\ -2\alpha + (1-i)\beta = 0. \end{cases}$$

Система $\beta = (1+i)\alpha$ тенгламага келтирилади. Бу ердан $\alpha_1 = 1$ десак, $\beta_1 = 1+i$. $k_1 = -6+i$, $\alpha = 1$, $\beta = 1+i$ сонларга мос хусусий ечим:

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{(-6+i)x} = e^{-6x+ix} = e^{-6x}(\cos x + i\sin x) = e^{-6x}\cos x + ie^{-6x}\sin x; \\ z_1 &= (1+i)e^{(-6+i)x} = (1+i)e^{-6x}(\cos x + i\sin x) = e^{-6x}(\cos x - \sin x + \\ &\quad + i(\cos x + \sin x)) = e^{-6x}(\cos x - \sin x) + ie^{-6x}(\cos x + \sin x). \end{aligned}$$

Юқорида топилган хусусий ечимда унинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини алоҳида-алоҳида олиб, иккита ечимни ҳосил қиламиз, улар берилган дифференциал тенгламалар системасининг фундаментал ечимлари системасини ҳосил қилади:

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= e^{-6x} \cdot \cos x, \quad \bar{y}_2 = e^{-6x} \cdot \sin x, \\ \bar{z}_1 &= e^{-6x}(\cos x - \sin x), \quad \bar{z}_2 = e^{-6x}(\cos x + \sin x). \end{aligned}$$

У ҳолда берилган системанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y = C_1 \bar{y}_1 + C_2 \bar{y}_2, \quad \text{ёки} \quad y = e^{-6x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x),$$

$$z = C_1 \bar{z}_1 + C_2 \bar{z}_2 \quad z = e^{6x}(C_1(\cos x - \sin x) + C_2(\cos x + \sin x)).$$

Характеристик тенгламанинг иккинчи: $k_2 = -6 - 1$ илдиздан фойдалансак, яна шу ечимларни ҳосил қиламиз.

4- м и с о л. Ушбу

$$\begin{cases} y' = 5y - z, \\ z' = y + 3z \end{cases}$$

тенгламалар системасининг умумий ечимини топинг.

Е ч и ш. Системанинг характеристик тенгламаси

$$\begin{vmatrix} 5-k & -1 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } k^2 - 8k + 16 = 0$$

каррали илдизларга эга: $k_1 = k_2 = 4$.

$k = 4$ икки каррали илдизга мос хусусий ечим қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{aligned} y &= e^{4x}(\alpha_1 x + \alpha_2), \\ z &= e^{4x}(\beta_1 x + \beta_2). \end{aligned}$$

α ва β ларни топиш учун y , z , y' , z' ларни берилган системага қўямиз:

$$\alpha_1 + 4(\alpha_1 x + \alpha_2) = 5(\alpha_1 x + \alpha_2) - (\beta_1 x + \beta_2),$$

$$\beta_1 + 4(\beta_1 x + \beta_2) = (\alpha_1 x + \alpha_2) + 3(\beta_1 x + \beta_2).$$

x нинг олдидаги коэффициентларни ва озод ҳадларни тенглаб, қуйидаги алгебранг тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 4\alpha_1 = 5\alpha_1 - \beta_1 \\ 4\beta_1 = \alpha_1 + 3\beta_1 \end{cases} \text{ ва } \begin{cases} \alpha_1 + 4\alpha_2 = 5\alpha_2 - \beta_2 \\ \beta_1 + 4\beta_2 = \alpha_2 + 3\beta_2 \end{cases}$$

Бу ердан:

$\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 - \beta_2 = \alpha_1 = \beta_1$. Энди $\alpha_1 = C_1$, $\alpha_2 = C_2$ (C_1 ва C_2 — ихтиёрий ўзгармаслар) деб, $\beta_1 = C_1$, $\beta_2 = C_2 - C_1$ ни топамиз. Демак, система-нинг умумий ечими

$$\begin{aligned} y &= e^{4x}(C_1 x + C_2), \\ z &= e^{4x}(C_1 x + C_2 - C_1) \end{aligned}$$

кўринишда бўлади.

7- дарсхона топишириги

1. Қуйидаги бир жинсли системаларнинг умумий ечимини номаълумларни йўқотиш усулидан фойдаланмай топинг:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \begin{cases} y' = -7y + z, \\ z' = -2y - 5z, \end{cases} & \text{в)} \quad & \begin{cases} y' = y - z + w \\ z' = y + z - w \\ w' = 2y - z. \end{cases} \\ \text{б)} \quad & \begin{cases} y' = y - 3z, \\ z' = 3y + z; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ж: а) } y = e^{-6x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x), \\ z = e^{-6x}((C_1 + C_2) \cos x - (C_1 - C_2) \sin x);$$

$$\text{б) } y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x), \\ z = e^x(C_1 \sin 3x - C_2 \cos 3x);$$

$$\text{в) } y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}, \\ z = C_1 e^x - 3C_3 e^{-x}, \\ w = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 5C_3 e^{-x}$$

2. Тенгламалар системасининг умумий ечимини номаълумларни йўқотиш усули билан топинг:

$$\begin{aligned} \text{а) } \quad & \begin{cases} y' = -5y + 2z + e^x, \\ z' = y + 6z + e^{-2x}; \end{cases} & \text{в) } \quad & \begin{cases} y = 5y + 2z - 3w, \\ z = 4y + 5z - 4w, \\ w = 6y + 4z - 4w. \end{cases} \\ \text{б) } \quad & \begin{cases} y' = 3y - 2z + x, \\ z' = 3y - 4z; \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Ж: а) } y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-7x} + \frac{7}{40} e^x + \frac{1}{5} e^{-2x}, \\ z = \frac{1}{2} C_1 e^{-4x} - C_2 e^{-7x} + \frac{1}{40} e^x + \frac{3}{10} e^{-2x};$$

$$\text{б) } y = 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{2}{3}x - \frac{5}{18}, \\ z = C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{-3x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12};$$

$$\text{в) } y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}, \\ z = C_1 e^x + 2C_3 e^{3x}, \\ w = 2C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 2C_3 e^{3x}.$$

3. Берилган дифференциал тенгламалар системаси учун Коши масаласини ечинг:

$$\text{а) } \begin{cases} y' = w + z - y, \\ z' = w + y - z, \\ w' = y + z + w, \end{cases} \quad y|_{x=0} = 1, \quad z|_{x=0} = w|_{x=0} = 0;$$

$$6) \begin{cases} y' = z + w, \\ z' = w + y, \quad y|_{x=0} = -1, \quad z|_{x=0} = 1, \quad w|_{x=0} = 0, \\ w' = y + z, \end{cases}$$

$$\text{Ж: а) } y = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x},$$

$$z = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{6}e^{2x} - \frac{1}{2}e^{-2x},$$

$$w = -\frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{3}e^{2x};$$

$$б) y = -e^{-x}, \quad z = e^{-x}, \quad w = 0.$$

7- мустақил иш

1. Дифференциал тенгламалар системасининг умумий ечимини топинг:

$$а) \begin{cases} y' = z + \operatorname{tg}^2 x - 1, \\ z' = -y + \operatorname{tg} x; \end{cases} \quad б) \begin{cases} y' = y + z - \cos x, \\ z' = -2y - z + \sin x + \cos x. \end{cases}$$

$$\text{Ж: а) } y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \operatorname{tg} x, \\ z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2;$$

$$б) y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x, \\ z = (C_2 - C_1) \cos x - (C_1 + C_2) \sin x + x(\cos x + \sin x).$$

2. Коши масаласини ечинг:

$$а) \begin{cases} y' = -2y - z + \sin x, \\ z' = 4y + 2z + \cos x; \end{cases} \quad y|_{x=0} = -1, \quad z|_{x=0} = 0.$$

$$б) y' = 4y + z + 36x; \\ z' = -2y + z + 2e^x; \quad y|_{x=0} = 0, \quad z|_{x=0} = 1.$$

$$\text{Ж: а) } y = 2 \sin x - 1, \quad б) y = 10e^{2x} - 8e^{3x} - e^x + 6x - 1, \\ z = 2 - 3 \sin x - 2 \cos x; \quad z = -20e^{2x} + 8e^{3x} + 3e^x + 12x + 10.$$

КАТОРЛАР. ФУРЬЕ АЛМАШТИРИШЛАРИ

1-§. Сонли каторлар

9.1.1. Сонли $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ кетма-кетлик берилган бўлсин. Ушбу

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

кўринишдаги йигинди *сонли қатор* дейилади, $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ сонлар *қаторнинг ҳадлари*, қаторнинг n -ҳади u_n эса қаторнинг *умумий ҳади* деб аталади.

Сонли қаторнинг дастлабки n та ҳадининг йигиндиси S_n орқали белгиланади ва қаторнинг n -*хусусий йигиндиси* дейилади:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ — чекли лимит мавжуд бўлса, қатор *яқинлашувчи*, S — унинг *йигиндиси* дейилади. Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ бўлса,

ёки мавжуд бўлмаса, қатор *узоқлашувчи* дейилади.

Куйидаги

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} + \dots$$

ифода *қаторнинг n -қолдиғи* дейилади.

Геометрик прогрессиянинг ҳадларидан тузилган

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

қатор $|q| \geq 1$ бўлганда *узоқлашувчи*, $|q| < 1$ бўлганда *яқинлашувчидир* (бунда у $S = \frac{a}{1-q}$ йигиндига эга).

Ушбу

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

қатор *гармоник қатор* деб аталади, у *узоқлашувчидир*.

Умумлашган гармоник қатор (ёки Дирихле катори) деб аталувчи

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

катор $p \leq 1$ да узоклашувчи, $p > 1$ да якинлашувчидир.

Каторнинг якинлашувчи бўлишининг зарурий шarti: Агар

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ катор якинлашса, у ҳолда } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Катор узоклашувчи бўлишининг (катор узоклашишининг) етарли шarti: Агар $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ бўлса, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ катор узоклашади.

Мисол. Ушбу каторнинг йиғиндисини топинг:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$$

Ечиш. Каторнинг умумий ҳади $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ ни содда касрлар йиғиндиси кўринишида ифодаalayмиз:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}.$$

Бундан

$$1 = A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1).$$

Бу ерда кетма-кет $n=1$, $n=2$, $n=3$ кийматларни бериб, ҳосил бўлган чизикли тенгламалар системасини ечиб, $A = \frac{1}{2}$, $B = -1$, $C = \frac{1}{2}$ ни ҳосил қиламиз.

Шундай қилиб,

$$u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2}$$

ёки

$$u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right).$$

Бу ердан:

$$u_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} \right);$$

$$u_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right);$$

$$u_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} \right);$$

$$u_4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \right);$$

$$\dots$$

$$u_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right).$$

Чап ва ўнг томонларни жамлаймиз:

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right).$$

Шундай қилиб, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{4}$. Демак, қатор яқинлашувчи ва унинг йиғиндиси $S = \frac{1}{4}$ га тенг.

9.1.2. Яқинлашувчи қаторларнинг хоссалари:

а) Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қатор яқинлашувчи бўлиб, унинг йиғиндиси S га тенг бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda u_n$ (λ —ўзгармас сон) қатор ҳам яқинлашувчи бўлади ва унинг йиғиндиси $\lambda \cdot S$ га тенг бўлади;

б) агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ қаторлар яқинлашувчи бўлиб, йиғиндилари мос равишда S ҳамда δ га тенг бўлса, у ҳолда $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ қатор ҳам яқинлашувчи бўлиб, йиғиндиси $(S \pm \delta)$ га тенг бўлади;

в) агар қатор яқинлашувчи бўлса, у ҳолда унда исталган чекли сондаги ҳадларни ташлаб юбориш ёки унга чекли сондаги ҳадларни қўшиш натижасида ҳосил бўлган қатор ҳам яқинлашувчи бўлади.

1-дарсхона топшириғи

Қаторларнинг яқинлашувчи эканини исбот қилинг ва уларнинг йиғиндисини топинг.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad \text{Ж: } S = \frac{1}{2}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \quad \text{Ж: } S = \frac{1}{3}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n} \quad \text{Ж: } S = \frac{3}{2}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2} \quad \text{Ж: } S = \frac{1}{8}.$$

Қаторларнинг яқинлашувчи эканини исбот қилинг ва йигиндиси-
ни топинг.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}. \quad \text{Ж: } S = \frac{11}{18}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}. \quad \text{Ж: } S = \frac{1}{6}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 2^n}{10^n}. \quad \text{Ж: } S = \frac{5}{4}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}. \quad \text{Ж: } S = 1.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}. \quad \text{Ж: } S = \frac{23}{90}.$$

2- §. Мусбат ҳадли қаторларнинг яқинлашиш ва узоқлашиш аломатлари

9.2.1. Такқослаш аломати. Агар мусбат ҳадли иккита
 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ қатор берилган бўлиб, бирор N номердан бошлаб
 $u_n \leq v_n$ тенгсизлик бажарилса, у ҳолда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ қаторнинг яқинлашишидан $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қаторнинг ҳам яқин-
лашиши келиб чиқади;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ қаторнинг узоқлашишидан $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ қаторнинг ҳам узоқ-
лашиши келиб чиқади.

1- м и с о л. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \dots$$

қаторнинг яқинлашувчи ёки узоқлашувчи эканини текширинг.

Е ч и ш. $u_n = \frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n} = v_n$ эканлиги равшан. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ қатор мах-

ражи $q = \frac{1}{2} < 1$ бўлган геометрик прогрессия хадлари йигиндидан иборат ва у яқинлашувчи. Таккослаш аломатига кўра берилган қатор ҳам яқинлашувчидир.

2-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \dots + \frac{\ln n}{n} + \dots$$

қаторнинг яқинлашувчи ёки узоклашувчи эканини текширинг.

Ечиш. Барча $n \geq 3$ учун $u_n = \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} = v_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ — гармоник

қаторнинг узоклашувчанлигидан ва таккослаш аломатидан берилган қаторнинг ҳам узоклашувчи бўлиши келиб чиқади.

9.2.2. Таккослашнинг лимит аломати. Агар ҳадлари мусбат иккита $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ва $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ қатор берилган бўлиб, чекли ва

мусбат $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A$ лимит мавжуд бўлса, у ҳолда иккала қатор бир вақтда яқинлашади ёки бир вақтда узоклашади.

3-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

қаторнинг яқинлашувчи ёки узоклашувчи эканини текширинг.

Ечиш. Берилган қаторни гармоник $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ қатор билан таккослаймиз:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} > 0$$

Гармоник қатор узоклашувчи эканидан берилган қаторнинг ҳам узоклашувчи экани келиб чиқади.

4-мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \dots + \frac{1}{2^n+1} + \dots$$

қаторнинг яқинлашувчи ёки узоклашувчи эканини текширинг.

Ечиш. Таккослашнинг лимит аломатини қўллашда махра-
жи $\frac{1}{2}$ га тенг бўлган геометрик прогрессиядан фойдаланамиз.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n + 1}}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2^n}} = 1 > 0$$

ва $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ катор якинлашувчи бўлгани учун ($q = \frac{1}{2} < 1$) берилган катор ҳам якинлашади.

9.2.3. Д а л а м б е р а л о м а т и. Агар мусбат ҳадли $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ка-

тор учун $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = d$ мавжуд бўлса, у ҳолда бу катор $d < 1$ да якинлашади, $d > 1$ бўлганда узоклашади.

5- м и с о л. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n} + \dots$$

каторнинг якинлашувчи ёки узоклашувчи эканини текширинг.

Ечиш. Бу ерда $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$ ва $u_{n+1} = \frac{2n+1}{2^{n+1}}$,

шунинг учун

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1) \cdot 2^n}{2^{n+1} (2n-1)} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2n}}{1 - \frac{1}{2n}} = \frac{1}{2} < 1. \end{aligned}$$

Демак, берилган катор якинлашади.

9.2.4. Коши аломати. Агар мусбат ҳадли $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ катор

учун $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = C$ мавжуд бўлса, бу катор $C < 1$ бўлганда якинла-
шади, $C > 1$ да узоклашади.

6- м и с о л. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

каторнинг якинлашувчи ёки узоклашувчи эканини текширинг.

Е ч и ш. $u_n = \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ бўлгани учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{e}{2} > 1.$$

Демак, берилган қатор узоклашади.

9.2.5. Кошининг интеграл аломати. Агар $\sum_{n=1}^{\infty} u$

қаторнинг ҳадлари мусбат ва ўсмайдиган бўлиб, $x > 1$ да аниқланган, узуксиз, мусбат ва манотон камаювчи $f(x)$ функция учун $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2, \dots$, $f(n) = u_n, \dots$ тенгламалар ўринли бўлса, у ҳолда

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

хосмас интеграл яқинлашса, берилган қатор ҳам яқинлашади ва аксинча, хосмас интеграл узоклашса, қатор ҳам узоклашади.

7-мисол. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{(n^2+1)^2}$ қаторнинг яқинлашувчи ёки узоклашувчи эканини текширинг.

Е ч и ш. $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ деб олайлик. Бу функция Кошининг интеграл аломатининг барча талабларини қондиради.

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{2x dx}{(x^2+1)^2} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{d(1+x^2)}{(x^2+1)^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x^2+1} \right) \Big|_1^N = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{N^2+1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Демак, хосмас интеграл яқинлашади, шунинг учун берилган қатор ҳам яқинлашади.

2-дарсхона топшириғи

1. Қуйидаги қаторларнинг яқинлашувчи ёки узоклашувчи эканини текширинг:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}.$

Ж: яқинлашади.

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}.$

Ж: узоклашади.

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$ Ж: узоклашади.

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$ Ж: якинлашади.

д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ Ж: якинлашади.

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ Ж: узоклашади.

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ Ж: якинлашади.

з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$ Ж: якинлашади.

2. Искот килинг:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{n!} = 0$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$.

2- мустақил иш

Қуйидаги каторларнинг якинлашувчи ёки узоклашувчи эканини текширинг.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}$ Ж: узоклашади.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$ Ж: якинлашади.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg^n \frac{1}{n}$ Ж: якинлашади.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2n}$ Ж: узоклашади.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 5}$ Ж: якинлашади.

3- §. Ўзгарувчи ишорали қаторлар

9.3.1. Хадларининг ишоралари турлича бўлган қатор *ўзгарувчи ишорали қатор* дейилади. Қаторнинг ҳар бир мусбат хадидан кейин манфий хад ва ҳар бир манфий хадидан кейин мусбат хад келса, бундай қатор *ишоралари навбатланувчи қатор* дейилади. Ишораси навбатланувчи қаторни бундай ёзиш мумкин.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots (u_n > 0).$$

Лейбниц аломати. Агар ишоралари навбатлашувчи қаторда қатор хадларининг абсолют қийматлари камаювчи, яъни

$$u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$$

бўлиб, унинг умумий ҳади u_n нолга интилса: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, у ҳолда

бу қатор яқинлашувчи бўлади ва унинг йиғиндиси S ушбу $0 < S < u_1$ шартни қаноатлантиради.

Ишораси навбатланувчи қатор қолдиғи $|R_n| < u_{n+1}$ тенгсизлик билан баҳоланади.

1- мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

қаторнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. Берилган қатор учун Лейбниц аломатининг шартлари бажарилаяпти, яъни

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$$

ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Шу сабабли қатор яқинлашади.

9.3.2. Абсолют ва шартли яқинлашувчи қаторлар. Ўзгарувчи ишорали $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ қатор берилган бўлиб, унинг хадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots$$

қатор яқинлашувчи бўлса, берилган қатор *абсолют яқинлашувчи қатор* дейилади.

Агар ўзгарувчи ишорали қатор яқинлашувчи бўлиб, бу қатор хадларининг абсолют қийматларидан тузилган қатор узоклашувчи

булса, у ҳолда берилган ўзгарувчи ишорали қатор *шартли яқинлашувчи* қатор дейилади.

$$2\text{- м и с о л. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^3} = \frac{\sin \alpha}{1^3} + \frac{\sin 2\alpha}{2^3} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^3} + \dots$$

қаторнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Е ч и ш. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^3}$ қаторни қараймиз. $|\sin n\alpha| \leq 1$ бўлганлиги учун

$$u_n = \frac{|\sin n\alpha|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3} = v_n$$

ни ҳосил қиламиз. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ қатор яқинлашувчидир, чунки у умумлашган гармоник қатор бўлиб, $p=3>1$. Такқослаш аломатига

кўра, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^3}$ қатор ҳам яқинлашувчи. Демак, берилган

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^3}$ қатор абсолют яқинлашувчидир.

3- дарсхона топшириғи

Қуйидаги қаторларнинг шартли ёки абсолют яқинлашишини текширинг:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$. Ж: шартли яқинлашувчи.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{3n-1}$. Ж: узоклашувчи.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$. Ж: шартли яқинлашувчи.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Ж: абсолют яқинлашувчи.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}$. Ж: абсолют яқинлашувчи.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$. Ж: шартли яқинлашувчи.

7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n+5}$. Ж: узоклашувчи.

3-§. Ўзгарувчи ишорали қаторлар

9.3.1. Ҳадларининг ишоралари турлича бўлган қатор *ўзгарувчи ишорали қатор* дейилади. Қаторнинг ҳар бир мусбат ҳадидан кейин манфий ҳад ва ҳар бир манфий ҳадидан кейин мусбат ҳад келса, бундай қатор *ишоралари навбатланувчи қатор* дейилади. Ишораси навбатланувчи қаторни бундай ёзиш мумкин.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots (u_n > 0).$$

Лейбниц аломати. Агар ишоралари навбатлашувчи қаторда қатор ҳадларининг абсолют қийматлари камаювчи, яъни

$$u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$$

бўлиб, унинг умумий ҳади u_n нолга интилса: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, у ҳолда

бу қатор яқинлашувчи бўлади ва унинг йигиндиси S ушбу $0 < S < u_1$ шартни қаноатлантиради.

Ишораси навбатланувчи қатор қолдиги $|R_n| < u_{n+1}$ тенгсизлик билан баҳоланади.

1- мисол. Ушбу

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots$$

қаторнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Ечиш. Берилган қатор учун Лейбниц аломатининг шартлари бажарилаяпти, яъни

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > \frac{1}{n} > \dots$$

ва

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Шу сабабли қатор яқинлашади.

9.3.2. Абсолют ва шартли яқинлашувчи қаторлар. Ўзгарувчи ишорали $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$ қатор берилган бўлиб, унинг ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots$$

қатор яқинлашувчи бўлса, берилган қатор *абсолют яқинлашувчи қатор* дейилади.

Агар ўзгарувчи ишорали қатор яқинлашувчи бўлиб, бу қатор ҳадларининг абсолют қийматларидан тузилган қатор узоклашувчи

булса, у ҳолда берилган ўзгарувчи ишорали қатор шартли яқинлашувчи қатор дейилади.

$$2\text{-мисол. } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^3} = \frac{\sin \alpha}{1^3} + \frac{\sin 2\alpha}{2^3} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{n^3} + \dots$$

қаторнинг яқинлашувчанлигини текширинг.

Еч и ш. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^3}$ қаторни қараймиз. $|\sin n\alpha| \leq 1$ бўлганлиги учун

$$u_n = \frac{|\sin n\alpha|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3} = v_n$$

ни ҳосил қиламиз. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ қатор яқинлашувчидир, чунки у умумлашган гармоник қатор бўлиб, $p=3>1$. Такқослаш аломатига кўра, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^3}$ қатор ҳам яқинлашувчи. Демак, берилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^3} \text{ қатор абсолют яқинлашувчидир.}$$

3-дарсхона топшириғи

Қуйидаги қаторларнинг шартли ёки абсолют яқинлашишини текширинг:

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}. \quad \text{Ж: шартли яқинлашувчи.}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n-2}{3n-1}. \quad \text{Ж: узоклашувчи.}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}. \quad \text{Ж: шартли яқинлашувчи.}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n \cdot 2^n}. \quad \text{Ж: абсолют яқинлашувчи.}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}. \quad \text{Ж: абсолют яқинлашувчи.}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}. \quad \text{Ж: шартли яқинлашувчи.}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{6n+6}. \quad \text{Ж: узоклашувчи.}$$

Равшанки, исталган $\epsilon > 0$ учун шундай N номер танлаш мумкинки, барча $n > N$ ва исталган x учун $|R_n(x)| < \epsilon$ тенгсизлик бажарилади.

Шундай қилиб, берилган қатор текис яқинлашади.

3-мисол. Вейерштрасс аломати ёрдамида

$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots + \frac{\cos nx}{n^2} + \dots$ қатор барча x лар учун текис яқинла-
шишини исбот қилинг.

Ечиш.

$|u_n(x)| = \left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ ва $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ қатор яқинла-
шувчи бўлгани учун берилган қатор барча x лар учун текис яқинла-
шади.

9.4.3. Текис яқинлашувчи функционал қаторларнинг хоссалари:

а) агар текис яқинлашувчи функционал қаторнинг ҳадлари $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлса, унинг йиғиндиси $S(x)$ ҳам бу кесмада узлуксиз бўлади;

б) агар $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳадлари $[a, b]$ кесмада узлуксиз бўлиб, қатор бу кесмада текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b u_1(x) dx + \int_a^b u_2(x) dx + \dots + \int_a^b u_n(x) dx + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx,$$

бу ерда $S(x)$ — қатор йиғиндиси;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ функционал қаторнинг ҳадлари $[a, b]$ кесмада аниқланган ва бу кесмада $u'_n(x)$ узлуксиз ҳосилаларга эга бўлсин. Агар бу кесмада берилган қатор яқинлашувчи ва унинг ҳадлари ҳосилаларидан тузилган

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) = u'_1(x) + u'_2(x) + \dots + u'_n(x)$$

қатор текис яқинлашувчи бўлса, у ҳолда функционал қаторнинг йиғиндиси $S(x)$ ҳам $[a, b]$ кесмада ҳосиллага эга бўлади ва

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

4-мисол. Ушбу

$$\arctg x + \arctg \frac{x}{2\sqrt{2}} + \arctg \frac{x}{3\sqrt{3}} + \dots + \arctg \frac{x}{n\sqrt{n}} + \dots$$

қаторга қаторларни ҳадма-ҳад дифференциаллаш тўғрисидаги хоссани татбиқ қилиш мумкинми?

Е ч и ш. Берилган каторни якинлашувчи

$$x + \frac{x}{2^{3/2}} + \frac{x}{3^{3/2}} + \dots + \frac{x}{n^{3/2}} + \dots$$

катор билан таккослаймиз (исталган тайин x да).

Етарлича катта n ларда $\arctg \frac{x}{n^{3/2}} \sim \frac{x}{n^{3/2}}$ бўлгани учун ва так-
қослашнинг лимит аломатига кўра берилган катор ҳам якинлаша-
ди. Берилган катор умумий ҳадининг ҳосиласини топамиз:

$$u'_n(x) = \frac{n^{3/2}}{x^2 + n^3}$$

Ҳосилалардан тузилган катор қуйидаги кўринишга эга:

$$\frac{1}{x^2 + 1^3} + \frac{2\sqrt{2}}{x^2 + 2^3} + \frac{3\sqrt{3}}{x^2 + 3^3} + \dots + \frac{n\sqrt{n}}{x^2 + n^3} + \dots$$

Бу каторнинг ҳадлари якинлашувчи

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}} + \dots \text{ каторнинг мос ҳадларидан кичик}$$

эканини кўрамиз. Демак, Вейерштрасс аломатига кўра ҳосила-
лардан тузилган катор $(-\infty, +\infty)$ ораликда текис якинлашади,
бинобарин, каторларни дифференциаллаш хоссасини берилган
каторга қўллаш мумкин.

4- дарсхона топшириғи

1. Қаторларнинг якинлашиш соҳасини топинг:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$;
г) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x}{2^n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n-1)4^n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)x}$.

Ж: а) $-1 < x < 1$; б) $\frac{1}{e} < x < e$; в) $x \neq \pm 1$; г) $-\infty < x < +\infty$;

д) $-8 \leq x < 2$; е) $0 < x < +\infty$.

2. Ушбу

$$\frac{2x+1}{x+2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^3 + \frac{1}{8} \left(\frac{2x+1}{x+2} \right)^4 + \dots$$

катор $[-1, 1]$ кесмада текис якинлашишини кўрсатинг.

3. Каторларнинг текис яқинлашиш соҳасини топинг:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$.

Ж: а) $-\infty < x < +\infty$; б) $-\infty < x < +\infty$.

4-мустақил иш

1. Функционал каторнинг яқинлашиш соҳасини топинг:

а) $1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \dots + \frac{1}{n^x} + \dots$;

б) $\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2^2(x^2+1)^2} + \frac{1}{3^2(x^2+1)^3} + \dots + \frac{1}{n^2(x^2+1)^n} + \dots$;

в) $x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + x^2 \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \dots + x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} + \dots$.

Ж: а) $1 < x < +\infty$;

б) $-\infty < x < +\infty$;

в) $-2 < x < 2$.

2. Ушбу

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \dots + \frac{x^n}{2^{n-1}} + \dots$$

каторнинг $(-2, 2)$ ораликда текис яқинлашишини текширинг.

3. Ушбу

$$\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2^2} \cos 3x + \frac{1}{2^3} \cos 4x + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cos nx + \dots$$

каторни $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right]$ кесмада ҳадма-ҳад интеграллаш мумкинми?

Ж: Мумкин, чунки берилган катор $(-\infty, +\infty)$ да текис яқинлашувчидир.

5-§. Даражали каторлар

9.5.1. Ушбу

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

кўринишдаги функционал катор *даражали қатор* дейилади. Бу ерда $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — ўзгармас сонлар даражали каторнинг *коэффицициентлари* дейилади.

Хусусий ҳолда, $x_0=0$ да ушбу даражали қаторга эга бўламиз:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Абель теоремаси. а) Агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ даражали қатор бирорта $x=x_1 \neq 0$ нуктада яқинлашса, у ҳолда у x нинг $|x| < |x_1|$ тенгсизликни қаноатлантирувчи ҳар қандай қийматида абсолют яқинлашади;

б) агар $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ даражали қатор бирорта $x=x_1$ қийматда узоклашса, у ҳолда у x нинг $|x| > |x_1|$ шартни қаноатлантирувчи исталган қийматларида узоклашади.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ даражали қатор учун шундай $(-R, R)$ оралик мавжудки, у мазкур оралик ичида абсолют яқинлашиб, ундан ташқарида эса узоклашади; бу оралик қаторнинг яқинлашиш оралиғи дейилади. R сони яқинлашиш радиуси дейилади, у хусусий ҳолларда 0 ёки ∞ га тенг бўлиши ҳам мумкин. Яқинлашиш оралигининг четки нукталари $x = \pm R$ да даражали қаторнинг яқинлашиши ёки узоклашиши масаласи алоҳида ҳал қилинади.

9.5.2. Агар қаторнинг барча $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ коэффицентлари нолга тенг бўлмаса, $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ даражали қаторнинг яқинлашиш радиуси ушбу формула орқали аниқланади:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ ёки } R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Агар қатор фақат жуфт ёки тоқ даражаларни ўз ичига олса ёки даражалари қаррали бўлса, ва ҳ.к., у ҳолда яқинлашиш оралиғи бевосита Даламбер ёки Коши аломатларидан фойдаланиб топилади.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{np}$ қатор учун яқинлашиш радиуси қуйидагича топилади:

$$R = \sqrt[p]{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} \text{ ёки } R = \sqrt[p]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[p]{|a_n|}}}$$

1-мисол. Қуйидаги қаторнинг яқинлашишини текширинг:

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{1}{n}x^n + \dots$$

Ечиш. Бу ерда $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Каторнинг якинлашиш радиусини топамиз:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Демак, берилган даражали катор $(-1, 1)$ ораликда абсолют якинлашади, $(-\infty; -1) \cup (1, +\infty)$ да эса узоклашади. Берилган каторнинг бу ораликнинг чекка нукталарида якинлашувчи ёки узоклашувчи эканлигини аниқлаймиз. $x=1$ бўлганда берилган катор $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ кўринишдаги гармоник узоклашувчи катор бўлади.

$x=-1$ да эса $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ каторни ҳосил қиламиз, бу катор якинлашади, чунки у Лейбниц аломати шартларини қаноатлантиради.

Шундай қилиб, берилган даражали каторнинг якинлашиш соҳаси $(-1, 1)$.

2-мисол. Ушбу

$$1 + \frac{x^3}{10} + \frac{x^6}{10^2} + \frac{x^9}{10^3} + \dots + \frac{x^{3n}}{10^n} + \dots$$

каторнинг якинлашишини текширинг.

Ечиш. $a_n = \frac{1}{10^n}$, шунинг учун якинлашиш радиусини

$$R = \sqrt[n]{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|}} = \sqrt[n]{\lim_{n \rightarrow \infty} 10} = \sqrt[n]{10}$$

формуладан топамиз. Демак, берилган каторнинг якинлашиш оралиғи $(-\sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{10})$ бўлади. Каторнинг якинлашишини оралиқнинг чекка нукталарида текшираамиз. Агар $x = \sqrt[3]{10}$ бўлса, катор $1 + 1 + 1 + \dots$ кўринишга эга бўлиб, бу катор узоклашади. Агар $x = -\sqrt[3]{10}$ бўлса, катор $1 - 1 + 1 - \dots$ кўринишда бўлиб, у ҳам узоклашади.

Шундай қилиб, берилган каторнинг якинлашиш соҳаси $(-\sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{10})$.

3-мисол. Қуйидаги

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

каторнинг якинлашиш соҳасини топинг.

Ечиш. $a_n = \frac{1}{n!}, a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$.

Қаторнинг яқинлашиш радиусини топамиз:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot (n+1)!}{n! \cdot 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Демак, берилган қатор бутун сон ўқида яқинлашади.

9.5.3. Агар умумий кўринишдаги

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

қатор берилган бўлса, унинг яқинлашиш радиуси R олдинги формулалар билан аниқланаверади, яқинлашиш оралиғи эса маркази $x=x_0$ нуктада бўлган (x_0-R, x_0+R) оралик бўлади.

4-мисол. Ушбу

$$\begin{aligned} 1 - \frac{x-2}{2\sqrt{2}} + \frac{(x-2)^2}{4\sqrt{3}} - \frac{(x-2)^3}{8\sqrt{4}} + \dots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^n \sqrt{n+1}} + \dots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^n \sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг.

Ечиш. Қаторнинг яқинлашиш радиусини топамиз:

$$\begin{aligned} R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n \sqrt{n+1}} \cdot \frac{2^{n+1} \cdot \sqrt{n+2}}{1} = \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} = 2. \end{aligned}$$

Демак, қатор $(0; 4)$ ораликда абсолют яқинлашади.

$x=0$ да $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ қаторни ҳосил қиламиз, у узоклашади, чунки

унинг ҳадлари узоклашувчи гармоник қаторнинг ҳадларидан катта $\left(u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{1}{n+1} = v_n \right)$.

$x=4$ да $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ қаторни ҳосил қиламиз, у Лейбниц аломатига қўра яқинлашади.

Шундай қилиб, берилган қаторнинг яқинлашиш соҳаси $(0, 4]$.

9.5.4. Даражали каторларнинг хоссалари:

а) яқинлашиш оралигининг ичида ётувчи ҳар қандай $[a, b]$ кесмада даражали катор текис яқинлашади. Унинг йиғиндиси яқинлашиш оралигида узлуксиз функция бўлади;

б) даражали каторларни уларнинг яқинлашиш оралигида ҳадма-ҳад интеграллаш ва дифференциаллаш мумкин.

5- мисол. Ушбу

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

каторнинг йиғиндисини топинг.

Е ч и ш. Каторнинг яқинлашиш радиусини топамиз:

$$R = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot (2n+1)}{(2n-1) \cdot 1}} = 1.$$

Демак, $(-1, 1)$ ораликда катор яқинлашади, шунинг учун уни яқинлашиш оралигида ҳадма-ҳад дифференциаллаш мумкин. Берилган каторнинг йиғиндисини $S(x)$ оркали белгиласак,

$$S'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n-2} + \dots$$

Ҳосил килинган катор — геометрик прогрессия ҳадлари йиғиндиси ва у $(-1, 1)$ ораликда яқинлашади, унинг йиғиндиси:

$$S'(x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

Ҳосилалардан тузилган каторни интеграллаб, берилган каторнинг йиғиндисини топамиз:

$$S(x) = \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|, \quad (|x| < 1).$$

5- дарсхона топшириғи

1. Қуйидаги даражали каторларнинг яқинлашиш соҳасини топинг:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(2n-1)!};$

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n};$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} (nx)^n;$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n-1};$

д) $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^{n-1};$

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{(n+1)^n};$

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2};$

з) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5x^{2n}}{2n+1};$

Ж: а) $-\infty < x < +\infty$; б) $1 < x < 3$; в) $x=0$; г) $1 < x < 2$;
 д) $x=0$; е) $-e < x < e$; ж) $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$; з) $-1 < x < 1$.

2. Қатор йиғиндисини топинг.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

Ж: а) $\frac{1}{(x-1)^2}, |x| < 1$; б) $-\ln(1-x), (-1 \leq x < 1)$;
 в) $\arctg x, |x| \leq 1$.

5- мустақил иш

1. Даражали қаторнинг яқинлашиш соҳасини топинг.

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n \cdot 3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1) \ln(n+1)}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$.

Ж: а) $2 < x \leq 8$; б) $2 < x < 4$; в) $-e < x < e$;
 г) $-\infty < x < +\infty$.

2. Қатор йиғиндисини топинг:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-1)x^{2n-2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$.

Ж: а) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, |x| < 1$; б) $\frac{2}{(1-x)^2}, |x| < 1$.

6- §. Функцияларни Тейлор ва Маклорен қаторларига ёйиш

9.6.1. Агар $y=f(x)$ функция $x=x_0$ нукта атрофида $(n+1)$ - тартибгача ҳосилаларга эга бўлса, у ҳолда қуйидаги Тейлор формуласи ўринлидир.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

бу ерда $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$ ($0 < \theta < 1$). $R_n(x)$ —

Тейлор формуласининг Лагранж шаклидаги (3-боб, 16-§) қолдиқ ҳади дейилади.

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

кўпхад $y=f(x)$ функциянинг n -даражали Тейлор кўпҳади дейилади.

$x=0$ да Тейлор формуласининг хусусий ҳоли — Маклорен формуласи ҳосил бўлади:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

бу ерда $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^n$ ($0 < \theta < 1$).

9.6.2. Агар $y=f(x)$ функция x_0 нукта атрофида исталган марта дифференциалланувчи бўлса ва бу нуктанинг бирорта атрофида

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

бўлса, Тейлор ва Маклорен формулаларидан ушбу

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

ва

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \dots$$

чексиз қаторлар ҳосил бўлади. Буларнинг биринчиси *Тейлор қатори*, иккинчиси *Маклорен қатори* дейилади. Бу қаторлар x нинг $R_n(x) = 0$ бўладиган қийматларида $f(x)$ га яқинлашади.

1-мисол. $y = x^4 - 3x^2 + 2x + 2$ функцияни $(x-1)$ иккиҳад даражалари бўйича ёйинг.

Ечиш. $x_0 = 1$ учун Тейлор формуласидан фойдаланамиз. Функциянинг ҳосилаларини ва уларнинг $x_0 = 1$ нуктадаги қийматларини топамиз:

$$y(1) = 2;$$

$$y'(1) = (4x^3 - 6x + 2)|_{x=1} = 0;$$

$$y''(1) = (12x^2 - 6)|_{x=1} = 6;$$

$$y'''(1) = 24x|_{x=1} = 24;$$

$$y^{IV} = 24;$$

$$y^V = 0 \text{ ва х. к.}$$

Демак,

$$y = x^4 - 3x^2 + 2x + 2 = 2 + \frac{6}{2!} (x-1)^2 + \frac{24}{3!} (x-1)^3 + \frac{24}{4!} (x-1)^4$$

ёки

$$y = x^4 - 3x^2 + 2x + 2 = 2 + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4.$$

2-мисол. $y = \frac{1}{x}$ функция учун $x_0 = 1$ нуктада n -даражали

Тейлор кўпхаддини ёзинг.

Ечиш. Функциянинг ҳосилаларини ва уларнинг $x_0 = 1$ нуктадаги қийматларини топамиз:

$$y(1) = 1;$$

$$y'(1) = -\frac{1}{x^2} \Big|_{x=1} = -1;$$

$$y''(1) = \frac{1 \cdot 2}{x^3} \Big|_{x=1} = \frac{1 \cdot 2}{1} = 2!$$

$$y'''(1) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4} \Big|_{x=1} = -3!$$

$$y^{(4)}(1) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{x^5} \Big|_{x=1} = 4!, \dots, y^{(n)}(1) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \Big|_{x=1} = (-1)^n n!$$

Демак, Тейлор кўпхади қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & 1 - \frac{x-1}{1!} + \frac{2!}{2!}(x-1)^2 - \frac{3!}{3!}(x-1)^3 + \frac{4!}{4!}(x-1)^4 + \dots + \\ & + \frac{(-1)^n n!}{n!} (x-1)^n = 1 - (x-1) + \\ & + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 + \dots + (-1)^n (x-1)^n. \end{aligned}$$

Берилган функция учун қолдик ҳад

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{1}{(1+\theta(x-1))^{n+2}} (x-1)^{n+1}, 0 < \theta < 1$$

кўринишда бўлади.

3-мисол. $y = 2^x$ функцияни Маклорен каторига ёйинг.

Ечиш. Ҳосилаларнинг $x = 0$ нуктадаги қийматларини топамиз:

$$y(0) = 1; y'(0) = 2^x \ln 2 \Big|_{x=0} = \ln 2; y''(0) = 2^x \ln^2 2 \Big|_{x=0} = \ln^2 2;$$

$$y'''(0) = 2^x \ln^3 2 \Big|_{x=0} = \ln^3 2, \dots,$$

$$y^n(0) = 2^x \ln^n 2 \Big|_{x=0} = \ln^n 2.$$

Маклорен каторини тузамиз:

$$y = 2^x = 1 + x \ln 2 + \frac{\ln^2 2}{2!} x^2 + \frac{\ln^3 2}{3!} x^3 + \dots + \frac{\ln^n 2}{n!} x^n + \dots$$

Топилган каторнинг яқинлашиш радиусини аниқлаймиз:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{\ln^2 2 \ln 2} \cdot \frac{\ln^2 2}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\ln 2} = \infty.$$

Демак, катор сонлар ўқининг барча нукталарида абсолют яқинлашади.

$R_n(x)$ қолдик ҳад:

$$R_n(x) = \frac{\ln^{n+1} 2}{(n+1)!} \cdot 2^{nx} \cdot x^{n+1}, 0 < 0 < 1.$$

$0 < \ln 2 < 1$ бўлгани учун тайин x учун ушбу тенгсизлик ўринлидир:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{\ln^{n+1} 2 \cdot 2^{nx}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 2^x.$$

Бирок исталган x учун $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ (5.2-§, 3-мисол), шунинг учун $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ (исталган x да). Бу — топилган катор йигиндиси, исталган x ларда ҳақиқатан ҳам 2^x га тенглигини билдиради.

6- дарсхона топшириғи

1. $f(x) = x^5 - 4x + 2x^3 + 2x + 1$ кўпхадни $(x+1)$ иккиҳаднинг даражалари бўйича ёйинг.

2. $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ кўпхадни $(x-4)$ иккиҳаднинг даражалари бўйича ёйинг.

3. $f(x) = \ln x$ функцияни $x_0 = 1$ нукта атрофида Тейлор каторига ёйинг.

4. $f(x) = \sqrt{x^3}$ функцияни $x_0 = 1$ нукта атрофида Тейлор каторига ёйинг.

5. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ функцияни Маклорен каторига ёйинг.

6- мувофақил иш

1. $f(x) = x^{10} - 3x^5 + 1$ функцияни $(x-1)$ иккиҳаднинг даражалари бўйича ёйинг.

2. $f(x) = \frac{1}{x}$ функцияни $x_0 = 3$ нукта атрофида Тейлор каторига ёйинг ва яқинлашиш соҳасини топинг.

3. $f(x) = x^2 e^x$ функцияни Маклорен каторига ёйинг ва яқинлашиш соҳасини топинг.

7- §. Баъзи функцияларнинг Тейлор ва Маклорен қаторлари

9.7.1. Баъзи функцияларнинг Маклорен қаторига ёйилмаларини келтирамиз:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad -1 < x \leq 1;$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 - \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots, \quad -1 < x < 1.$$

Бу ерда ҳар қайси қатор учун соҳа кўрсатилган бўлиб, унда даражали қатор тегишли функцияга яқинлашади. Охирги қатор **биномиал қатор** дейилади.

9.7.2. Умумий ҳолда функцияларни даражали қаторга ёйиш бевосита Тейлор ва Маклорен қаторларидан фойдаланишга асосланган. Бирок, амалда кўпгина функцияларнинг даражали қаторларини олдинги бандда келтирилган формулалардан ёки геометрик прогрессия ҳадлари йигиндиси формуласидан фойдаланиб топиш мумкин. Баъзан қаторга ёйишда ҳадма-ҳад дифференциаллаш ёки интеграллашдан ҳам фойдаланиш мумкин.

1-мисол. $f(x) = e^{-x^2}$ функцияни x нинг даражалари бўйича қаторга ёйинг.

Ечиш. Юқорида e^x учун келтирилган қатор формуласида x ўрнига $-x^2$ ни қўйсак,

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

Топилган қатор исталган x ларда яқинлашади.

2-мисол. $f(x) = \cos \sqrt{x}$ функцияни x нинг даражалари бўйича қаторга ёйинг.

Ечиш. Юқоридаги $\cos x$ учун келтирилган қаторда x ни $\sqrt{x}$ билан алмаштирсак,

$$\cos \sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!} + \dots$$

Бу катор исталган x ларда якинлашувчидир, бироқ $\cos\sqrt{x}$ функция $x \leq 0$ да аниқланмаганлигини ҳисобга олсак, топилган катор $\cos\sqrt{x}$ га фақат $0 \leq x < +\infty$ да якинлашади.

3-мисол. $f(x) = \frac{3}{2-x-x^2}$ функцияни Маклорен каторига ёйинг.

Ечиш. Берилган функцияни энг содда рационал касрлар йиғиндисига ажратамиз:

$$\frac{3}{2-x-x^2} = \frac{3}{(2+x)(1-x)} = \frac{1}{2+x} + \frac{1}{1-x}.$$

Маълумки, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ катор $-1 < x < 1$ да якинлашади.

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n} \text{ катор эса } -1 < \frac{x}{2} < 1 \quad \text{ёки}$$

$-2 < x < 2$ да якинлашади. Шунинг учун янги

$$\frac{3}{2-x-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right) x^n$$

катор берилган функцияга $-1 < x < 1$ да якинлашади.

7-дарсхона топшириғи

Берилган функцияларни x нинг даражалари бўйича каторга ёйинг.

1. $f(x) = e^{-2x};$

2. $f(x) = x \cos 3x;$

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}};$

4. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \text{ да,} \\ 1, & x = 0 \text{ да;} \end{cases}$

5. $f(x) = \ln(10+x);$

6. $f(x) = \frac{5}{6+x-x^2};$

7. $f(x) = \arcsin x.$

7-мустақил иш

Берилган функцияларни x нинг даражалари бўйича каторга ёйинг:

1. $f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x};$

2. $f(x) = \frac{6}{8+2x-x^2};$

3. $f(x) = \ln(1+x-12x^2);$

4. $f(x) = 2x \cos \frac{2x}{2} - x;$

5. $f(x) = \sqrt[3]{8-x^3}.$

8- §. Даражали каторларнинг татбики

9.8.1. Функция қийматини тақрибий ҳисоблаш. Баъзи ҳолларда функциянинг тақрибий қийматини берилган аниқликда ҳисоблаш учун унинг даражали каторга ёйилмасидан фойдаланилади.

1- мисол. e сонини 0,00001 гача аниқлик билан топинг.

Ечиш. $x=1$ да e^x нинг каторга ёйилмасидан фойдаланамиз:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

n сонни шундай аниқлаймизки,

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

тақрибий тенгликнинг хатолиги 0,00001 дан ошмасин. Қолдикни баҳолаймиз:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots = \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots \right] < \\ &< \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right] = \frac{1}{n!} \cdot \frac{\frac{n}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

Энди

$$R < \frac{1}{n!n} < 0,00001$$

тенгсизликни ечиб, $n \geq 8$ ни топамиз. Демак,

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}.$$

Буни ҳисоблаб, талаб қилинган аниқликдаги жавобни оламиз:

$$e \approx 2,71828.$$

2- мисол. $\sqrt[3]{130}$ ни 0,001 гача аниқлик билан ҳисобланг.

Ечиш. Равшанки,

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{5^3 + 5} = 5 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{25}} = 5(1 + 0,04)^{\frac{1}{3}}.$$

Аввал танишган биноминал катордан фойдаланамиз ($m = \frac{1}{3}$, $x = 0,04$):

$$\sqrt[3]{130} = 5 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot 0,04 + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1)}{2!} 0,04^2 + \dots \right]$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{1}{3} - 2 \right)}{3!} 0,04^3 + \dots \right] = 5 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot 0,04 - \frac{1 \cdot 2}{3^2 \cdot 2!} 0,04^2 + \right. \\ \left. + \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3^3 \cdot 3!} 0,04^3 - \dots \right] = 5 + \frac{1}{3} \cdot 0,2 - \frac{1}{9} \cdot 0,008 + \frac{5}{81} \cdot 0,00032 - \dots$$

Бу ишоралари навбатланувчи қатор Лейбниц аломатини қаноатлантиради, шунинг учун қолдик: $|R_n| < u_{n+1}$. Мазкур ҳолда тўртинчи ҳад $\frac{5}{81} \cdot 0,00032 < 0,001$, демак, $\sqrt[3]{130} \approx 5 + 0,0667 - 0,0009$, яъни

$$\sqrt[3]{130} \approx 5,066.$$

9.8.2. Интегралларни қаторлар ёрдамида ҳисоблаш. Интеграл остидаги $f(x)$ функцияни даражали қаторга ёйиб, даражали қаторларни интеграллаш тўғрисидаги теоремани қўллаб,

$\int_0^x f(x) dx$ интегрални даражали қатор кўринишда тасвирлаш ҳамда

унинг қийматини бу қаторнинг яқинлашиш оралиғидаги x нинг ҳар қандай қийматида берилган аниқлик билан ҳисоблаш мумкин.

3-мисол. $\int e^{-x^2} dx$ интегрални толиғ.

Ечиш. e^{-x^2} функцияни даражали қаторга ёямиз.

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

У бутун сонлар ўқида яқинлашади, демак, уни ҳадма-ҳад интеграллаш мумкин:

$$\int e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!} + \dots$$

Даражали қаторни интеграллашда унинг яқинлашиш оралиғи ўзгармаганлиги сабабли, ҳосил қилинган қатор ҳам бутун сонлар ўқида яқинлашади.

4-мисол. $\int_0^1 \sin x^2 dx$ ни 0,001 гача аниқлик билан ҳисобланг.

Ечиш. $\sin x$ функциянинг даражали қаторга ёйилмасидан фойдаланамиз (у ерда x ни x^2 билан алмаштирамиз):

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \dots$$

Қатор бутун сонлар ўқида яқинлашади, шунинг учун уни ҳадма-ҳад интеграллаш мумкин, яъни

$$\int_0^1 \sin x^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-2}}{(2n-1)!} + \dots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11 \cdot 5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)(2n-1)!} + \dots \right) \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(4n-1)(2n-1)!} + \dots$$

Ҳосил килинган ишоралари навбатланувчи қаторнинг учинчи ҳади 0,001 дан кичик, шунинг учун

$$\int_0^1 \ln x^2 dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} = 0,295.$$

9.8.3. Дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш. Агар дифференциал тенгламани элементар функциялар ёрдамида аниқ интеграллаб бўлмаса, унинг ечимини Тейлор ёки Маклореннинг даражали қатори кўринишида излаш қулайдир.

5-мисол Ушбу

$$y = y' - x, \quad y|_{x=0} = 1$$

дифференциал тенгламани ечимнинг даражали қаторга ёйилмаси-ничи дастлабки бешта аъзога қўйиб топилган.

Ечиш. Ечимни даражали қатор кўринишида излаймиз:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

$x=0$ да қуйидагига эгамиз:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Берилган $y' = y' - x$ дифференциал тенгламадан $y'(0) = 1^3 - 0 = 1$ ни топамиз. Берилган тенгламани дифференциаллаймиз ва ҳосилаларнинг $x_0 = 0$ даги қийматини ҳисоблаймиз:

$$y' = 3y^2 \cdot y' - 1, \quad y''(0) = 2;$$

$$y''' = 6y \cdot y'^2 + 3y^2 \cdot y'', \quad y'''(0) = 12;$$

$$y^{IV} = 6y'^3 + 18y \cdot y' \cdot y'' + 3y^2 \cdot y''', \quad y^{IV}(0) = 78 \text{ ва х.к.}$$

Топилган қийматларни қаторга қўйиб, изланаётган ечимни ҳосил қиламиз:

$$y(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{12}{3!}x^3 + \frac{78}{4!}x^4 + \dots =$$

$$= 1 + x + x^2 + 2x^3 + \frac{13}{4}x^4 + \dots$$

8- дарсхона топшириги

1. Даражали каторлар ёрдамида куйидаги микдорларни 0,0001 гача аниқлик билан тақрибий ҳисобланг:

а) $\frac{1}{e}$; б) $\sin 12^\circ$; в) $\sqrt[3]{520}$; г) $\ln 1,1$.

Ж: а) 0,3679; б) 8,0411; в) 0,2094; г) 0,0953.

2. Куйидаги аниқ интегралларни даражали каторлар ёрдамида 0,01 гача аниқликда ҳисобланг:

а) $\int_0^{1/2} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$; б) $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$; в) $\int_0^{0,1} \frac{e^x - 1}{x} dx$.

Ж: а) 0,248; б) 0,098; в) 0,102.

3. Аниқмас интегралларни даражали катор кўринишида топинг ва ҳосил қилинган каторларнинг яқинлашиш соҳасини кўрсатинг:

а) $\int \frac{\sin x}{x} dx$; б) $\int \frac{e^x}{x^2} dx$.

Ж: а) $-\infty < x < +\infty$; б) $-\infty < x < 0$ ва $0 < x < +\infty$.

4. Берилган бошланғич шартларни каноатлантирувчи дифференциал тенгламалар ечимларининг даражали каторга ёйилмасининг дастлабки бешта ҳаддини ёзинг:

а) $y' = 2\cos x - xy^2$, $y(0) = 1$;
 б) $y'' = -2xy$, $y(0) = y'(0) = 1$;
 в) $y' = 2y + x - 1$, $y(1) = 1$.

8- мустақил иш

1. Даражали каторлар ёрдамида 0,001 гача аниқликда ҳисобланг:

а) $\sin 1^\circ$; б) $\sqrt[3]{70}$; в) $\cos 1^\circ$.

Ж: а) 0,841; б) 4,125; в) 1,000.

2. Куйидаги аниқ интегралларни 0,001 гача аниқликда ҳисобланг:

а) $\int_0^{1/2} \sqrt{1+x^3} dx$; б) $\int_0^4 e^{\frac{1}{x}} dx$.

Ж: а) 0,508; б) 2,835.

3. Дифференциал тенглама ечимининг даражали каторга ёйилмасининг дастлабки учта хадини топинг:

$$а) y' = x^2 - y, y(1) = 1; \quad б) y' = x^2 y + y^3, y(0) = 1.$$

9-§. Фурье каторлари

9.9.1. Агар $y=f(x)$ функция (a, b) ораликда чегараланган (яъни $a < x < b$ да $|f(x)| < M$, бу ерда M — ўзгармас) ва бўлакли — монотон (яъни (a, b) ораликни хар бирида бу функция монотон бўлган чекли сондаги ораликларга ажратиш мумкин) бўлса, у ҳолда бу функция (a, b) ораликда Дирихле шартларини каноатлантиради дейилади.

9.9.2. Агар $y=f(x)$ функция узунлиги 2π га тенг $(-\pi, \pi)$ ораликда Дирихле шартларини каноатлантирса, у ҳолда бу ораликининг $f(x)$ узлуксиз бўлган хар қандай x нуктасида функцияни Фурье тригонометрик каторига ёйиш мумкин, яъни

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

бу ерда a_n, b_n — Фурье коэффициентлари бўлиб, улар қуйидаги формулалар бўйича ҳисобланади:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n=1, 2, \dots).$$

Агар $x \in (-\pi, \pi)$ нукта $f(x)$ функциянинг узилиш нуктаси бўлса, Фурье катори йигиндиси $S(x)$ функциянинг чап ва ўнг лимитларининг ўрта арифметигига тенг:

$$S(x) = \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)].$$

Оралик охирлари $x=\pi$ ва $x=-\pi$ нукталарда:

$$S(\pi) = S(-\pi) = \frac{1}{2} [f(-\pi+0) + f(\pi-0)].$$

9.9.3. Агар $f(x)$ — жуфт (яъни $f(-x) = f(x)$) бўлса, у ҳолда Фурье каторида факат косинуслар катнашади, чунки барча $b_n = 0$ бўлиб,

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \text{ бўлади. Агар } f(x) \text{ функция ток (яъни}$$

$f(-x) = -f(x)$) бўлса, Фурье каторида факат синуслар катнашади,

$$\text{чунки барча } a_n = 0 \text{ бўлиб, } b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \text{ бўлади.}$$

9.9.4. $(0, \pi)$ ораликда берилган $f(x)$ функция $(-\pi, 0)$ ораликга ё жуфт, ё тоқ функция каби давом эттирилиши мумкин. Демак, уни зарур бўлса, $(0, \pi)$ ораликда косинуслар ёки синуслар бўйича тўлиқ бўлмаган Фурье каторига ёйиш мумкин.

9.9.5. Даври 2π бўлган ҳар қандай даврий $f(x)$ функция ва исталган $a \in \mathbb{R}$ учун

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{a-\pi}^{a+\pi} f(x) dx.$$

бўлгани учун Фурье коэффициентларини куйидаги формулалар бўйича ҳисоблаш мумкин:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx,$$

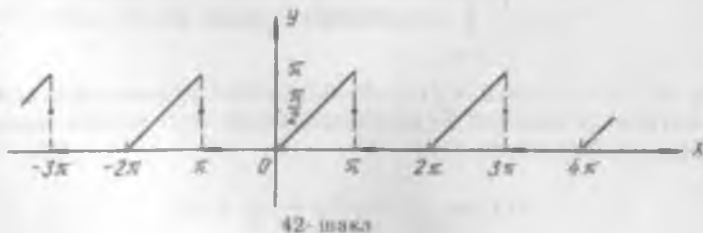
бу ерда $n=0, 1, 2, \dots$

1- мисол. Даври 2π бўлган ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } -\pi < x < 0 \text{ бўлса,} \\ x, & \text{агар } 0 \leq x \leq \pi \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни Фурье каторига ёйинг.

Ечиш. Берилган функция бўлакли узлуксиз ва чегараланган бўлгани учун уни Фурье каторига ёйиш мумкин (42- шакл).



Фурье коэффициентларини топамиз:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2};$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos nx dx, \\ v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left. \frac{x}{n} \sin nx \right|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{1}{\pi n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2} ((-1)^n - 1); \end{aligned}$$

n — жуфт бўлганда, $a_n = 0$; n — тоқ бўлганда

$$a_n = -\frac{2}{\pi n^2},$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \left. \begin{array}{l} u=x, du=dx \\ dv=\sin nx dx, \\ v=-\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x}{n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{\pi}{n} \cos \pi n + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{n} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Топилган коэффициентлардан фойдаланиб, Фурье каторини тузамиз:

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos(2n-1)x + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right)$$

Бу катор берилган функцияга барча $x \neq (2n-1)\pi$ ларда яқинлашади. $x = (2n-1)\pi$ нукталарда катор йиғиндиси

$$S((2n-1)\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

формула бўйича ҳисобланади (42-шаклга қarang.).

9.9.6. Агар $f(x)$ функция узунлиги $2l$ бўлган бирор $(-l, l)$ ораликда Дирихле шартларини қаноатлантирса, функциянинг бу ораликка тегишли узлуксизлик нукталарида функцияни Фурье каторига ёйиш мумкин:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{\pi n x}{l} + b_n \sin \frac{\pi n x}{l} \right),$$

бу ерда

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx \quad (n=1, 2, \dots).$$

$f(x)$ функциянинг узилиш нукталарида ва оралик охирлари $x = \pm l$ да Фурье катори йиғиндиси $(-l, l)$ ораликда ёйиш ҳолидаги каби аниқланади.

9.9.7. $f(x)$ функцияни $2l$ узунликдаги ихтиёрий $(a, a+2l)$ ораликда Фурье қаторига ёйганда a_n ва b_n коэффициентлар учун формулаларда интеграллаш чегараларини мос равишда a ва $a+2l$ билан алмаштириш зарур.

9.9.8. Жуфт ёки тоқ функцияни $(-l, l)$ ораликда Фурье қаторига ёйишда Фурье коэффициентлари $(-\pi, \pi)$ ораликда бўлгани каби соддалашади.

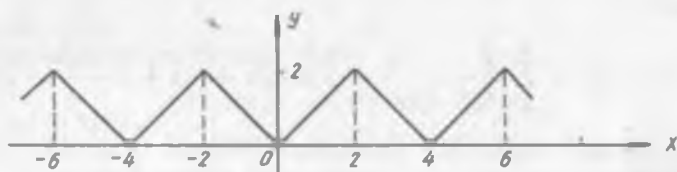
9.9.9. $(0, l)$ да берилган $f(x)$ функцияни $(-l, l)$ да косинуслар ёки синуслар бўйича Фурье қаторига ёйиш мумкин.

2- мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{агар } -2 \leq x < 0 \text{ бўлса,} \\ x, & \text{агар } 0 \leq x \leq 2 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни Фурье қаторига ёйинг.

Ечиш. Функция Дирихле шартларини қаноатлантиради (43- шакл).



43- шакл

Берилган функция жуфт, шунинг учун у фақат косинуслар бўйича Фурье қаторига ёйилади, барча $b_n = 0$. a_n коэффициентларни топамиз ($l=2$):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos \frac{n\pi x}{2} dx, \\ v = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{2x}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 - \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin \frac{n\pi x}{2} dx = \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^2 = \frac{4}{\pi^2 n^2} ((-1)^n - 1); \end{aligned}$$

n — жуфт бўлганда $a_n = 0$; n — тоқ бўлганда $a_n = \frac{-8}{\pi^2 n^2}$.

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx = \int_0^2 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = 2.$$

Берилган функциянинг Фурье қатори куйидаги кўринишда бўлади:

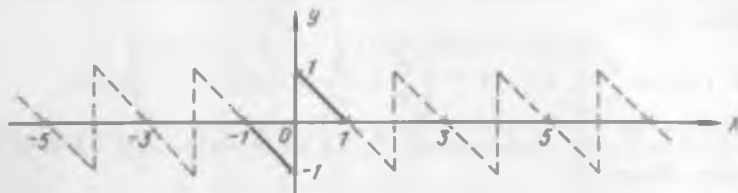
$$f(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{\pi(2n-1)}{2} x.$$

3- мисол. $f(x) = 1 - x$ функцияни $[0, 1]$ кесмада синуслар бўйича каторга ёйинг.

Ечиш. Берилган функцияни $[-1, 0)$ ораликда ток функция сифатида давом эттирамиз, яъни

$$f(x) = \begin{cases} -1 - x, & \text{агар } -1 \leq x < 0 \text{ бўлса,} \\ 1 - x, & \text{агар } 0 \leq x \leq 1 \text{ бўлса} \end{cases}$$

деймиз (44- шакл).



44- шакл

Ток функциялар учун барча $a_n = 0$. Энди b_n ($l = 1$) ларни топамиз:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = 2 \int_0^1 (1 - x) \sin \frac{\pi n x}{1} dx = \\ &= \left\{ \begin{aligned} u &= 1 - x, \quad du = -dx, \\ dv &= \sin \pi n x dx \quad v = -\frac{1}{\pi n} \cos \pi n x \end{aligned} \right\} = 2 \left(\frac{1}{\pi n} - \frac{1}{\pi^2 n^2} \sin \pi n x \Big|_0^1 \right) = \frac{2}{\pi n}. \end{aligned}$$

Топилган коэффициентларни Фурье каторига қўйиб, синуслар бўйича ушбу каторни ҳосил киламиз:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \pi n x.$$

9- дарсхона топириғи

1. $-\pi \leq x \leq \pi$ ораликда $f(x) = x$ функцияни Фурье каторига ёйинг.

$$\text{Ж: } f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}.$$

2. Ушбу функцияни Фурье каторига ёйинг:

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{агар } -\pi \leq x < 0 \text{ бўлса,} \\ 3x, & \text{агар } 0 \leq x \leq \pi \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$\text{Ж: } f(x) = \frac{5\pi}{4} - \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \right)$$

3. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{агар } -2 < x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ -1, & \text{агар } 0 < x \leq 2 \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни Фурье каторига ёйинг.

$$\text{Ж: } f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos \frac{\pi(2n-1)x}{2} - \frac{1}{\pi} \sin \frac{\pi n x}{2} \right)$$

4. $f(x) = x^2$ функцияни $(0, \pi)$ ораликда синуслар бўйича Фурье каторига ёйинг.

$$\text{Ж: } f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left[\frac{\pi^2}{\pi} + \frac{2}{\pi^3} ((-1)^n - 1) \right] \sin nx.$$

5. $f(x) = 1 - 2x$ функцияни $[0, 1]$ да косинуслар бўйича Фурье каторига ёйинг.

$$\text{Ж: } f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

9- мустақил иш

1. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{агар } -\pi < x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } 0 < x \leq \pi \text{ бўлса} \end{cases}$$

функцияни Фурье каторига ёйинг.

$$\text{Ж: } f(x) = -1 + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

2. $f(x) = |x|$ функцияни $[-1, 1]$ да Фурье каторига ёйинг.

$$\text{Ж: } f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}.$$

3. $f(x) = \sin x$ функцияни $[0, \pi]$ да косинуслар бўйича Фурье каторига ёйинг.

$$\text{Ж: } f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n x}{1 - (2n)^2}.$$

4. $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$ функцияни $[0, 2]$ да синуслар бўйича Фурье каторига ёйинг.

$$\text{Ж: } f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n x}{2}.$$

10- §. Фурье интегралли

9.10.1. Агар $y=f(x)$ функция Ox ўқининг исталган чекли оралиғида Дирихле шартларини қаноатлантирса ва бутун ўқ бўйича абсолют интегралланувчи бўлса (яъни $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ интеграл яқинлашса), унинг учун Фурьенинг интеграл формуласи ўринлидир:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos z(u-x) du.$$

I тур узилиш нукталарида $f(x)$ нинг қиймати учун аввалгидек,

$$\frac{1}{2}(f(x_0-0) + f(x_0+0))$$

қабул қилинади, бу ерда x_0 — узилиш нуктасининг абсциссаси.

Фурье интегралини комплекс шаклда ҳам ёзиш мумкин:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{iz(x-u)} du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} dz \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izu} f(u) du.$$

Жуфт функция учун Фурье интегралли қуйидагича бўлади:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos xz dz \int_0^{+\infty} f(u) \cos zu du,$$

тоқ функциянинг Фурье интегралли:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin xz dz \int_0^{+\infty} f(u) \sin zu du.$$

9.10.2. Қуйидаги

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} f(x) dx$$

муносабат билан аниқланган $F(z)$ функция $f(x)$ функциянинг Фурье алмаштириши дейилади.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-izx} F(z) dz$$

муносабат эса Фурьенинг тескари алмаштириш формуласи дейилади.

Хусусий ҳолда

а) $f(x)$ жуфт функция бўлса,

$$f_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos zx dx, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_c(z) \cos zx dz$$

(бу формулалар Фурьенинг косинус-алмаштиришлари дейилади);

б) $f(x)$ функция тоқ бўлса,

$$f_s(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin zx dx,$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_s(z) \sin zx dz$$

(бу формулалар Фурьенинг синус алмаштиришлари дейилади).

Фурьенинг синус ва косинус алмаштиришлари фақат Ox нинг мусбат ярим ўқида берилган, бу ярим ўқи бўйлаб абсолют интегралланувчи ва унинг исталган чекли кесмасида Дирихле шартларини қаноатлантирувчи функцияларгагина қўлланиши мумкин.

1- мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} x < -1 \text{ да } 0, \\ -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \text{ да } x+1, \\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \text{ да } 1, \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \text{ да } -x+1, \\ x > 1 \text{ да } 0 \end{cases}$$

функциянинг Фурье алмаштиришини топинг.

Е чи ш. Ушбу

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{izu} du.$$

Фурье алмаштириши формуласига кўра

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot e^{izu} du + \int_{-1}^{-1/2} (u+1) e^{izu} du + \int_{-1/2}^{1/2} 1 \cdot e^{izu} du + \int_{1/2}^1 (-u+1) e^{izu} du + \int_1^{+\infty} 0 \cdot e^{izu} du \right]$$

Равшанки, биринчи ва охириги интеграллар нолга тенг. Қолган интегралларни мос равишда I_1 , I_2 ва I_3 оркали белгилаб, ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-1}^{-1/2} (u+1) e^{izu} du = \left\{ s = u+1, ds = du, \right. \\
 &\quad \left. dt = e^{izs} du, t = \frac{e^{izs}}{iz} \right\} = \left(\frac{1}{iz} (u+1) e^{izu} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{i^2 z^2} e^{izu} \right) \Big|_{-1}^{-1/2} = \frac{1}{iz} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{iz}{2}} + \frac{1}{z^2} e^{-\frac{iz}{2}} - \frac{1}{z^2} e^{-iz} = \frac{1}{2iz} e^{-\frac{iz}{2}} + \frac{1}{z^2} e^{-\frac{iz}{2}} - \frac{1}{z^2} e^{-iz}; \\
 I_2 &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{izu} du = \frac{1}{iz} e^{izu} \Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{iz} (e^{i/2z} - e^{-i/2z}) = \frac{2 \sin \frac{z}{2}}{z}; \\
 I_3 &= \int_{1/2}^1 (-u+1) e^{izu} du = \left\{ s = -u+1, ds = -du, \right. \\
 &\quad \left. dt = e^{izs} du, t = \frac{1}{iz} e^{izs} \right\} = \\
 &= \left(\frac{1}{iz} (-u+1) e^{izu} + \frac{1}{i^2 z^2} e^{izu} \right) \Big|_{1/2}^1 = \frac{1}{i^2 z^2} e^{iz} - \frac{1}{iz} \cdot \frac{1}{2} e^{\frac{iz}{2}} - \\
 &\quad - \frac{1}{i^2 z^2} e^{\frac{iz}{2}} = -\frac{1}{z^2} e^{iz} - \frac{1}{2iz} e^{\frac{iz}{2}} - \frac{1}{z^2} e^{\frac{iz}{2}}.
 \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{2iz} e^{-\frac{iz}{2}} + \frac{1}{z^2} e^{-\frac{iz}{2}} - \frac{1}{z^2} e^{-iz} + \frac{2 \sin \frac{z}{2}}{z} - \frac{1}{z^2} e^{iz} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2iz} e^{\frac{iz}{2}} + \frac{1}{z^2} e^{\frac{iz}{2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{2 \cos z}{z^2} + \frac{\sin \frac{z}{2}}{z} + \frac{2 \cos \frac{z}{2}}{z^2} \right]
 \end{aligned}$$

2- мисол. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} 0 \leq x < a & \text{да } 1, \\ x = a & \text{да } \frac{1}{2}, \\ x > a & \text{да } 0 \end{cases}$$

функциянинг косинус ва синус алмаштиришларини топинг.

Е чи ш. Берилган функциянинг косинус-алмаштиришини топамиз:

$$\begin{aligned}
 f_c(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(u) \cos zu du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^a \cos zu du + \right. \\
 &\quad \left. + \int_a^{+\infty} 0 \cdot \cos zu du \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos zu du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin az}{z}.
 \end{aligned}$$

Энди синус алмаштиришини топамиз:

$$\begin{aligned} f_s(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(u) z u du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\int_0^a \sin z u du + \int_0^{+\infty} 0 \cdot \sin z u du \right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \sin z u du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos az}{z}. \end{aligned}$$

Ўз навбатида $f_c(z)$ ва $f_s(z)$ функцияларга косинус- ва синус-алмаштиришларни қўллаб, $f(x)$ функциянинг ўзини топамиз, яъни

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin az}{z} \cos xz dz &= \begin{cases} 0 \leq x < a \text{ да } 1; \\ x = a \text{ да } \frac{1}{2}, \\ x > a \text{ да } 0; \end{cases} \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos az}{z} \sin xz dz &= \begin{cases} 0 \leq x < a \text{ да } 1; \\ x = a \text{ да } \frac{1}{2}, \\ x > a \text{ да } 0. \end{cases} \end{aligned}$$

10- дарсхона топшириғи

1. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} |x| \leq \pi \text{ да } \cos \frac{x}{2}, \\ |x| > \pi \text{ да } 0 \end{cases}$$

функциянинг Фурье алмаштиришини топинг.

$$\text{Ж: } F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{4}{1-4z^2} \cdot \cos \pi z.$$

2. $f(x) = e^{-x} (x \geq 0)$ функциянинг косинус ва синус алмаштиришларини топинг.

$$\text{Ж: } f_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{z^2+1}, \quad f_s(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{z}{z^2+1}.$$

10- мустақил иш

1. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} -1 \leq x < 0 \text{ да } e^{-x}, \\ 0 \leq x \leq 1 \text{ да } e^x, \\ |x| > 1 \text{ да } 0 \end{cases}$$

функциянинг Фурье алмаштиришини топинг.

$$\text{Ж: } F(z) = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \frac{ze - \sin z - z \cos z}{e(1+z^2)}$$

2. Ушбу

$$f(x) = \begin{cases} -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} & \text{да } -1, \\ -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} & \text{да } 0, \\ \frac{1}{2} \leq x \leq 1 & \text{да } 1 \end{cases}$$

функциянинг Фурье синус ва косинус алмаштиришларини топинг.

$$\text{Ж: } f_c(z) = \frac{\sin z - \sin \frac{z}{2}}{z} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad f_s(z) = \frac{\cos \frac{z}{2} - \cos z}{z} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

9- назорат иши

1. Каторнинг якинлашувчанлигини исбот килинг ва йиғиндисини топинг:

$$1.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}$$

$$1.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 11n + 30}$$

$$1.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{14}{49n^2 - 14n - 48}$$

$$1.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 5n + 6}$$

$$1.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2 - 9}$$

$$1.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 3n - 2}$$

$$1.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 7n - 12}$$

$$1.8. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5}$$

$$1.9. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 32n + 63}$$

$$1.10. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 2}$$

$$1.11. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 7n + 12}$$

$$1.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 + 3n - 2}$$

$$1.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 15n + 4}$$

$$1.14. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 24n + 35}$$

$$1.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 7n - 12}$$

$$1.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 15n + 56}$$

$$1.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{9n^2 + 6n - 8}$$

$$1.18. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2 + 16n + 15}$$

$$1.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{16n^2 - 8n - 15}.$$

$$1.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 13n + 42}.$$

$$1.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 9n + 20}.$$

$$1.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 21n + 10}.$$

$$1.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n - 12}.$$

$$1.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n}.$$

$$1.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2 + 21n - 8}.$$

$$1.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{49n^2 + 35n - 6}.$$

$$1.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{4n^2 + 4n - 3}.$$

$$1.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^2 - 3n - 2}.$$

$$1.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 3}.$$

$$1.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 6n + 5}.$$

2. Каторнинг яқинлашишини текширинг:

$$2.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$2.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n}.$$

$$2.5. \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \cos \frac{\pi}{n}).$$

$$2.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1} + n - 1}.$$

$$2.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} (e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1).$$

$$2.11. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

$$2.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}.$$

$$2.15. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+5}} \sin \frac{1}{n-1}.$$

$$2.2. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}.$$

$$2.4. \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{n}{(n^2+3)^{3/2}}.$$

$$2.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}.$$

$$2.8. \sum_{n=2}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^2-1}} - 1 \right).$$

$$2.10. \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+5}{n^2+4}.$$

$$2.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} \operatorname{arctg} \frac{n+3}{n^2+5}.$$

$$2.14. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2\pi}{2n+1}}{\sqrt{n}}.$$

$$2.16. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}.$$

- 2.17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+3n}{5^n+n}$.
- 2.18. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+1}{n^2+n+2}$.
- 2.19. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)^2}{n^5+\ln^4 n}$.
- 2.20. $\sum_{n=1}^{\infty} n(e^{\frac{1}{n}}-1)^2$.
- 2.21. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^3}$.
- 2.22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2}{n^3+\sin 2^n}$.
- 2.23. $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}}$.
- 2.24. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^3}{n^3+1}$.
- 2.25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+\cos n}{3^n+\sin n}$.
- 2.26. $\sum_{n=2}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}$.
- 2.27. $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \lg^5 \frac{n}{n}$.
- 2.28. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\cos^2 6n}$.
- 2.29. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 \sqrt[3]{n}+5}$.
- 2.30. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$.

3. Қаторнинг яқинлашишини текширинг:

- 3.1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n^2-1)}{n!}$.
- 3.2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{3^n \cdot (n+1)!}$.
- 3.3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3n+5} \cdot \frac{1}{2^n}$.
- 3.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$.
- 3.5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (2n+5)}$.
- 3.6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$.
- 3.7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}}}{3^n}$.
- 3.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^n}$.
- 3.9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+3)!}$.
- 3.10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (4n-1)}$.
- 3.11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4n!}$.
- 3.12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n} \cdot 2^n}$.
- 3.13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2n^2}$.
- 3.14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{5}{n}}{n!}$.

$$3.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}.$$

$$3.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (n+1)!}{(2n)!}.$$

$$3.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n-1}{5^n (n+1)!}.$$

$$3.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{\frac{n}{2}}}{n!}.$$

$$3.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!}.$$

$$3.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n (2n-1)}.$$

$$3.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(3n)!}.$$

$$3.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

$$3.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}.$$

$$3.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n \cdot n^2}.$$

$$3.20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n n^7.$$

$$3.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{(n+1)!}.$$

$$3.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}.$$

$$3.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}.$$

$$3.28. \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \lg \frac{n}{3^n}.$$

$$3.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} \lg \frac{1}{5^n}.$$

4. Каторнинг яқинлашишни текширинг:

$$4.1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n-1}\right)^{n^2}.$$

$$4.2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n^2}.$$

$$4.3. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{n} \left(\frac{n-2}{2n+1}\right)^{3n}.$$

$$4.4. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{n+2}{2n+3}\right)^n.$$

$$4.5. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{2n}\right)^{n^2}.$$

$$4.6. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lg \frac{n}{5^n}\right)^{3n}.$$

$$4.7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{4n+3}\right)^{n^2}.$$

$$4.8. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n+1}.$$

$$4.9. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{n^2}.$$

$$4.10. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{2^n}\right)^{3n}.$$

$$4.11. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{5n}\right)^{3n}.$$

$$4.12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{5^n}.$$

$$4.13. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4^n}.$$

$$4.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 \cdot 3^n}{(2n+1)^n}.$$

$$4.17. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 4n + 5}{6n^2 - 3n - 1} \right)^n.$$

$$4.19. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin \frac{1}{3n} \right)^{2n}.$$

$$4.21. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{2n+1} \right)^n.$$

$$4.23. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{4n-1} \right)^n (n-1)^2.$$

$$4.25. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{2n+1} \right)^n.$$

$$4.27. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 + 5n + 8}{3n^2 -} \right)^n.$$

$$4.29. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n+1} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

$$4.14. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^{n^2}.$$

$$4.16. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{5n} \right)^{n^2}.$$

$$4.18. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^n.$$

$$4.20. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n} \right)^{n^2}.$$

$$4.22. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2+1}{n^2+1} \right)^{n^2}.$$

$$4.24. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot e^{-n}.$$

$$4.26. \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}.$$

$$4.28. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{3n+1} \right)^n (n+1)^3.$$

$$4.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{n/2}}.$$

5. Ишораларни навбатланувчи каторнинг шартли ва абсолют яқинлашишини текширинг:

$$5.1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

$$5.2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^3}}.$$

$$5.3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{6n}.$$

$$5.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \sqrt[3]{n}}.$$

$$5.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 5^n}.$$

$$5.6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$5.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2n^2}{n^4 - n^2 + 1}.$$

$$5.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}.$$

$$5.9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{2^n}.$$

$$5.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(n+4)}.$$

$$5.11. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{12^n}.$$

$$5.12. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}.$$

$$6.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{(n+1)^n} x^n.$$

$$6.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n} x^n.$$

$$6.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^n.$$

$$6.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}.$$

$$6.21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(n+1)^n}.$$

$$6.23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3^n \cdot x^n}.$$

$$6.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n} x^n}{i}.$$

$$6.27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}.$$

$$6.29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}.$$

$$6.14. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n x^n.$$

$$6.16. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{3n}.$$

$$6.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n)^i} x^n.$$

$$6.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(n+1)^n}.$$

$$6.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^i}{n^{\frac{n}{2}}} x^n.$$

$$6.24. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

$$6.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(2n-1)3^n}}{2^n \cdot x^n}.$$

$$6.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{x^{2n-1}}.$$

$$6.30. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{x^{2n+1}}.$$

$$5.13. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \cdot$$

$$5.15. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+1}{n^3}$$

$$5.17. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(2n)} \cdot$$

$$5.19. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1} \cdot$$

$$5.21. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin \frac{n}{\pi}$$

$$5.23. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \lg \frac{1}{n} \cdot$$

$$5.25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(-1)^{n+1} \cdot 2}$$

$$5.27. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{0.9^n}$$

$$5.29. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n}{2n-1} \cdot$$

$$5.30. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{n}{1} \right)$$

$$5.28. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) \ln n} \cdot$$

$$5.26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{3/2}}{(-1)^{n+1}} \cdot$$

$$5.24. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n \sqrt{n}}{\sin n \sqrt{n}} \cdot$$

$$5.22. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)} \cdot$$

$$5.20. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \ln n} \cdot$$

$$5.18. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{n+2}} \cdot$$

$$5.16. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^n \cdot$$

$$6.7. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+5} \right)^n \cdot x^n \cdot$$

$$6.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n} \cdot x^n \cdot$$

$$6.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^3 x^n}{n!} \cdot$$

$$6.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3} x^n \cdot$$

$$6.2. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n \cdot$$

$$6.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ni)^2}{(2n)!} x^n \cdot$$

$$6.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^n(n^2+1)} \cdot$$

$$6.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{5^n} x^n \cdot$$

$$6.10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{3^n \cdot n!} x^n \cdot$$

$$6.12. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n x^n \cdot$$

$$6.11. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln^2 n}{x^n} \cdot$$

$$6.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{2n}}{8^n} \cdot$$

КАРРАЛИ ИНТЕГРАЛЛАР

1- §. Декарт координатларида икки ўлчовли интегралларни ҳисоблаш

10.1.1. $z=f(x, y)=f(P)$ функция L чизик билан чегараланган ёпик D соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлиб, $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ — D соҳани n та элементар бўлақларга бўлиш натижасида ҳосил бўлган юзчалар бўлсин. Ҳар қайси Δs_i элементар соҳада ихтиёрий $P_i(x_i, y_i)$ нуктани танлаймиз ва функциянинг P_i нуктадаги қиймати $f(P_i)$ ҳисоблаб, ушбу кўпайтмани тузамиз:

$$f(P_i) \cdot \Delta s_i = f(x_i, y_i) \Delta s_i.$$

Шундай кўпайтмаларнинг барчасининг

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i$$

йиғиндиси $z=f(x, y)=f(P)$ функция учун D соҳадаги *интеграл йиғинди* дейилади.

Δs_i элементар юзчалар сони чексиз орттирилса, у ҳолда улар диаметрларининг энг каттаси нолга интилгандаги интеграл йиғиндининг limiti $z=f(x, y)$ функциядан D соҳа бўйича олинган икки ўлчовли *интеграл* дейилади ва бундай белгиланади:

$$\iint_D f(P) ds \text{ ёки } \iint_D f(x, y) ds$$

Шундай қилиб,

$$\iint_D f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty, \max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i$$

Бунда D — интеграллаш соҳаси, $f(x, y)$ интеграл остидаги функция, ds — юз элементи дейилади. Декарт координатларида $ds = dxdy$ бўлганлиги учун икки ўлчовли интеграл

$$\iint_D f(x, y) ds = \iint_D f(x, y) dxdy$$

бўлади.

Агар $f(x, y) \geq 0$ бўлиб, v — пастдан интеграллаш соҳаси D билан, юқоридан D га проекцияланувчи $z=f(x, y)$ сиртнинг бўлаги билан, ён томондан эса ясовчилари Oz ўқка параллел ва йўналтирувчиси D соҳа чегараси L дан иборат цилиндрик сирт билан чегараланган жисм ҳажми бўлсин. У ҳолда

$$v = \iint_D f(x, y) \, dx dy.$$

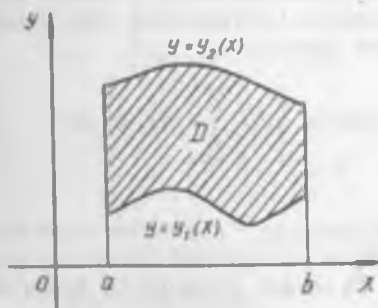
Агар $f(x, y) \equiv 1$ бўлса, у ҳолда икки ўлчовли интегралнинг қиймати сон жиҳатдан интеграллаш соҳаси D нинг s юзига тенг бўлади, яъни

$$\iint_D dx dy = \iint_D ds = s.$$

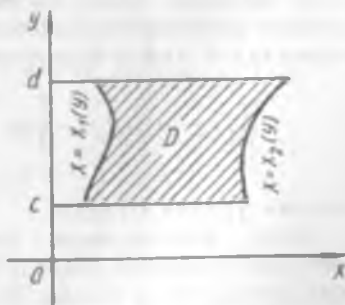
Агар $f(x, y)$ функция D соҳага жойлашган пластинка массаси тақсимланишининг зичлигини ифодаласа, у ҳолда икки ўлчовли интеграл шу пластинка моддасининг массаси M ни беради:

$$M = \iint_D f(x, y) \, dx dy = \iint_D f(x, y) \, ds.$$

10.1.2. Икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш иккита аник интегрални кетма-кет ҳисоблашга келтирилади.



45- шакл



46- шакл

Агар D соҳа $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ функцияларнинг графиклари ҳамда $x=a$ ва $x=b$ тўғри чизиклар билан чегараланган (45- шакл), яъни

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases}$$

тенгсизликлар билан аникланган бўлса, у ҳолда икки ўлчовли интеграл куйидаги формула ёрдамида ҳисобланади:

$$\iint_D f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy \right] dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy.$$

Бу ерда

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

ички интеграл еб аталади ва уни ҳисоблашда x ни ўзгармас деб, интеграллаш y бўйича олиб борилади. Ички интегрални ҳисоблаш натижаси ташқи интеграл учун интеграл ости функцияси бўлади.

Агар D соҳа куйидаги

$$\begin{cases} c \leq y \leq d \\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \end{cases}$$

тенгсизликлар билан аниқланган бўлса (46- шакл) икки ўлчовли интеграл ушбу

$$\iint_D f(x, y) dx dy \Rightarrow \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right] dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

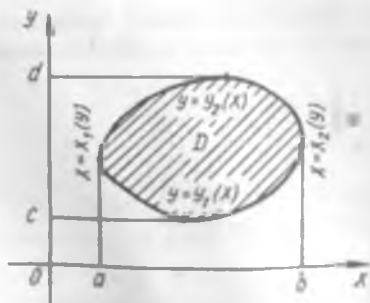
формула ёрдамида иккита аниқ интегрални ҳисоблашга келтирилади.

Агар D соҳа 47- шаклда кўрсатилгандагидек $x=a$, $y=c$, $x=b$, $y=d$ чизиклар билан факат битта нуктада кесишса, y ҳолда икки ўлчовли интегрални ҳисоблашда юқорида келтирилган ҳар иккала формуладан ҳам фойдаланиш мумкин бўлиб,

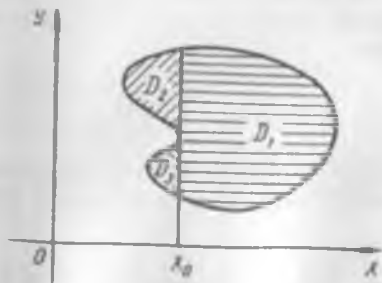
$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

тенглик ўринли бўлади.

Агар интеграллаш соҳаси 48- шаклда кўрсатилгандагидек контурга эга бўлса, y ҳолда икки ўлчовли интегрални ҳисоблаш учун соҳа $x=x_0$ чизик билан бўлақларга бўлиниб, юқоридаги формулардан фойдаланилади.



47- шакл



48- шакл

1- мисол. Икки ўлчовли интегрални ҳисобланг:

$$\iint_D (x-y) dx dy.$$

бу ерда D соҳа $y=2-x^2$ ва $y=2x-1$ чизиклар билан чегараланган.

Е ч и ш. D соҳани чизамиз (49- шакл). Учи $A(0, 2)$ да булган $y=2-x^2$ парабола Oy ўқка нисбатан симметрик бўлиб, $y=2x-1$ тўғри чизик билан иккита: $B(1, 1)$ ва $C(-3, -7)$ нуқталарда кесишади. Интеграллаш соҳаси D ушбу тенгсизликлар системаси билан аникланади:

$$\begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ 2x-1 \leq y \leq 2-x^2. \end{cases}$$

Икки ўлчовли интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \iint_D (x-y) dx dy &= \int_{-3}^1 dx \int_{2x-1}^{2-x^2} (x-y) dy = \int_{-3}^1 \left[xy - \frac{1}{2} y^2 \right]_{2x-1}^{2-x^2} dx = \\ &= \int_{-3}^1 \left[x(2-x^2) - \frac{1}{2} (2-x^2)^2 - x(2x-1) + \frac{1}{2} (2x-1)^2 \right] dx = \\ &= \int_{-3}^1 \left(2x - x^3 - 2 + 2x^2 - \frac{x^4}{2} - 2x^2 + x + 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx = \\ &= \int_{-3}^1 \left(-\frac{1}{2} x^4 - x^3 + 2x^2 + x - \frac{3}{2} \right) dx = \\ &= \left[-\frac{1}{10} x^5 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 - \frac{3}{2} x \right]_{-3}^1 = \frac{64}{15}. \end{aligned}$$

2- мисол. Ушбу

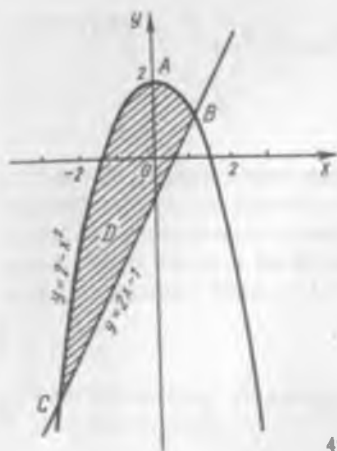
$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy$$

интегралда интеграллаш тартибини ўзгартиринг.

Е ч и ш. Интеграллаш соҳаси D ушбу тенгсизликлар системаси орқали аникланади:

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq 1-x^2. \end{cases}$$

Бу соҳани чизамиз (50- шакл) ва уни D_1 ва D_2 соҳаларга ажратамиз. Бу соҳалар қуйидаги тенгсизликлар системалари билан аникландилар:



49- шакл



50- шакл

$$D_1: \begin{cases} 0 \leq y \leq 1, \\ -\sqrt{1-y} \leq x \leq +\sqrt{1-y}; \end{cases} \quad D_2: \begin{cases} -1 \leq y \leq 0, \\ -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq +\sqrt{1-y^2} \end{cases}$$

У ҳолда

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{+\sqrt{1-y}} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

1- дарсхона топириги

1. Интегралларни ҳисобланг:

а) $\int_1^3 dx \int_{x^2}^x (x-y) dy$; б) $\int_0^4 dx \int_1^e x \ln y dy$;

в) $\int_{-3}^8 dy \int_{y^2-4}^5 (x+2y) dx$.

Ж: а) $112\frac{8}{105}$; б) 8; в) $50\frac{2}{5}$.

2. Икки ўлчовли $\iint_D f(x, y) dx dy$ интегралнинг интеграллаш соҳа-

си D :

а) $x=3$, $x=5$, $3x-2y+4=0$ ва $3x-2y+1=0$ тўғри чизиклар билан;

б) $x^2+y^2-4y=0$ чизик билан;

в) $y=x^2+1$, $x=0$, $x+y=4$ чизиклар билан чегараланган. Ички ва ташки интегралларнинг интеграллаш чегараларини аниқланг.

3. Қуйидаги икки ўлчовли интегралларда интеграллаш тартибини ўзгартиринг:

а) $\int_0^1 dy \int_y^y f(x, y) dx$; б) $\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy$;

в) $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx$.

4. Қуйидаги интегралларни ҳисобланг:

а) $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, бу ерда D соҳа $y = x^2$ ва $y^2 = x$ чизиклар билан чегараланган.

б) $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$, бу ерда D соҳа $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$ чизиклар билан чегараланган.

Ж: а) $\frac{33}{140}$; б) $\frac{9}{4}$.

5. $y = x^2 - 2x$, $y = x$ чизиклар билан чегараланган юзни ҳисобланг:

Ж: $9/2$ кв. бирл.

6. $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ сиртлар билан чегараланган жисм ҳажмини ҳисобланг.

Ж: $\frac{1}{6}$ куб бирл.

7. Агар $x = (y - 1)^2$, $y = x - 1$ чизиклар билан чегараланган моддий пластинка массаси тақсимланишининг зичлиги $\gamma = y$ бўлса, унинг массасини аниқланг.

Ж: $\frac{27}{4}$ масса бирл.

1- мустақил иш

1. Қуйидаги икки ўлчовли интегралларни ҳисобланг:

а) $\iint_D (\cos 2x + \sin y) dx dy$, бу ерда D соҳа $x = 0$, $y = 0$ $4x + 4y - \pi = 0$, $y = 0$ чизиклар билан чегараланган;

б) $\iint_D y \ln x dx dy$, бу ерда D соҳа $xy = 1$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$ чизикла билан чегараланган.

в) $\iint_D \sin(x + y) dx dy$, бу ерда D соҳа $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, $y = x$ чизиклар билан чегараланган.

г) $\iint_D x dx dy$, бу ерда D соҳа—учлари $A(2, 3)$, $B(2, 7)$, $C(4, 5)$ нук-

таларда бўлган учбурчак.

Ж: а) $\frac{1}{4}(\pi + 1 - 2\sqrt{2})$; б) $\frac{5}{8}(2\ln 2 - 1)$; в) 1; г) 26.

2. Интеграллаш тартибини ўзгартиринг:

а) $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy$; б) $\int_0^1 dx \int_{\frac{1-x^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$;

в) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$;

г) $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^x f(x, y) dy$;

д) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$.

3. $y=2-x$, $y^2=4x+4$ чизиклар билан чегараланган юзни ҳисобланг.

Ж: $\frac{64}{3}$ кв. бирл.

4. $x^2+y^2=1$, $z=0$, $x+y+z=4$ сиртлар билан чегараланган ҳисм ҳажмини ҳисобланг.

Ж: 4л куб. бирл.

2-§. Декарт координатларида уч ўлчовли интегралларни ҳисоблаш

10.2.1. $f(x, y, z) = f(P)$ функция о сирт билан чегараланган ёпик фазовий Ω соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлсин; $\Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_n$ — Ω соҳани n та бўлақларга бўлиш натижасида ҳосил бўлган соҳаларнинг ҳажмлари бўлсин, ҳар қайси Δv_i соҳачада ихтиёрий $P_i(x_i, y_i, z_i)$ нуктани танлаймиз ва функциянинг P_i нуктадаги қийматини ҳисоблаб, ушбу кўпайтмани тузамиз:

$$f(P_i) \cdot \Delta v_i = f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta v_i.$$

Куйидаги

$$\sum_{i=1}^n f(P) \Delta v_i \text{ ёки } \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i$$

ийгинди $f(x, y, z) = f(P)$ функция учун Ω соҳа бўйича интеграл йи-гинди дейилади.

$f(x, y, z) = f(P)$ функциянинг Ω соҳа бўйича уч ўлчовли интеграл деб интеграл йиғиндининг элементар соҳалар диаметрларининг энг каттаси нолга интилади деган шартдаги лимитига айтилади:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \lim_{\max \text{diam} \Delta v_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i$$

Декарт координаталарида уч ўлчовли интеграл $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$ кўринишда ёзилади.

10.2.2. Уч ўлчовли интегрални ҳисоблаш учта аник интегрални ёки битта икки ўлчовли ва битта аник интегрални кетма-кет ҳисоблашга келтирилади.

Агар Ω соҳа, ушбу

$$\begin{cases} a \leq x \leq b, \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \\ z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y) \end{cases}$$

тенгсизликлар системаси билан аникланган бўлса (51-шакл), у ҳолда уч ўлчовли интеграл куйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

ёки

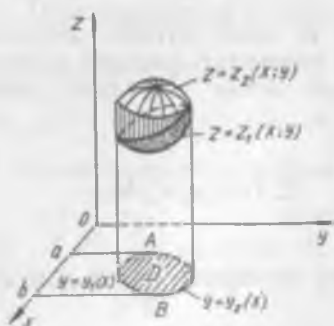
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Мисол. Ушбу $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ интегрални ҳисобланг, бу ерда

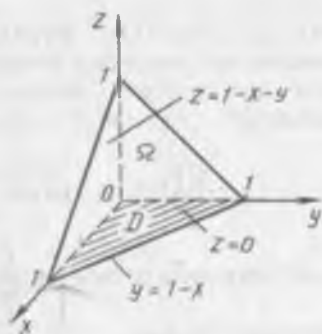
Ω соҳа $x+y+z=1$, $z=0$, $y=0$, $x=0$ текисликлар билан чегараланган.

Ечиш. Интеграллаш соҳаси Ω ни чизамиз (52-шакл). Бу соҳа ушбу тенгсизликлар системаси оркали аникланади:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1-x, \\ 0 \leq z \leq 1-x-y. \end{cases}$$



51- шакл



52- шакл

Берилган уч ўлчовли интеграл қуйидагича ҳисобланади:

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{z^2}{2} \Big|_0^{1-x-y} \right) dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{(1-x-y)^3}{3} \Big|_0^{1-x} \right) dx = \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^1 (-(1-x)^3) dx = \frac{1}{6} \left(-\frac{(1-x)^4}{4} \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

2- дарсхона топшириғи

1. Уч қаррали интегралларни ҳисобланг:

1. $\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^3 z dz.$

Ж: $\frac{1}{110}.$

2. $\int_0^{e-1} dx \int_0^{e-x-1} dy \int_e^{x+y+e} \frac{\ln(z-x-y)}{(x-e)(y+e)} dz.$

3. $\iiint_{\Omega} xy dx dy dz$ — уч ўлчовли интегрални ҳисобланг. Бу ерда

Ω соҳа $z=xy$ гиперболоид ҳамда $x+y=1$ ва $z=0 (z \geq 0)$ текисликлар билан чегараланган.

Ж: $\frac{1}{180}.$

4. $\iiint_{\Omega} y \cos(z+x) dx dy dz$ уч ўлчовли интегрални ҳисобланг. Бу ерда Ω соҳа $y = \sqrt{x}$ цилиндр ва $y=0, z=0$ ҳамда $x+z=\frac{\pi}{2}$ те-
кисликлар билан чегараланган.

$$\text{Ж: } \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

2- мустақил иш

Уч қаррали интегралларни ҳисобланг:

$$1. \int_0^3 dx \int_0^{2x} dy \int_0^{\sqrt{xy}} z dz.$$

$$\text{Ж: } \frac{81}{4}.$$

2. $\iiint_{\Omega} xyz dx dy dz$ — уч ўлчовли интегрални ҳисобланг. Бу ерда Ω соҳа $y=x^2, x=y^2, z=xy$ ва $z=0$ сиртлар билан чегараланган.

$$\text{Ж: } \frac{1}{96}.$$

3. $\iiint_{\Omega} (2x+y) dx dy dz$ — уч ўлчовли интегрални ҳисобланг. Бу ерда Ω соҳа $y=x, x=1, z=1$, ва $z=1+x^2+y^2$ сиртлар билан чегараланган.

$$\text{Ж: } \frac{41}{60}.$$

3- §. Икки ўлчовли интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш

10.3.1. Икки қаррали интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ да ўзгарувчиларни алмаштириш қуйидаги

$$x = x(u, v), y = y(u, v)$$

муносабатлар ёрдамида амалга оширилади. Бу ерда $x(u, v)$ ва $y(u, v)$ D соҳада узлуксиз биринчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга функциялар. Юқоридаги муносабатлардан u ва v ўзгарувчиларни ягона усул билан

$$u = u(x, y), v = v(x, y)$$

қўринишда топиш мумкин бўлсин. У ҳолда Oxy координаталар текислигидаги D соҳанинг ҳар бир $P(x, y)$ нуктасига янги O_1uv тўғри бурчакли координаталар системасидаги бирор $\bar{P}(u, v)$ нукта мос келади. Ҳамма $\bar{P}(u, v)$ нукталар тўплами бирор ёпиқ $\bar{D}$ соҳани ҳосил қилади.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

булса, у ҳолда икки ўлчовли интеграл учун ушбу ўзгарувчиларни алмаштириш формуласи ўринлидир:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\bar{D}} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv.$$

1-мисол. Ушбу икки ўлчовли интегрални ўзгарувчиларни алмаштириш усулидан фойдаланиб ҳисобланг:

$$\iint_D (x+y) dx dy,$$

бу ерда $D: y=x-1, y=x+2, y=-x-2$ ва $y=-x+3$ чизиклар билан чегараланган соҳа.

Ечиш. Oxy текисликдаги D соҳани чизамиз (53-шакл) ва

$$\begin{cases} u = y - x, \\ v = y + x \end{cases}$$

янги ўзгарувчилар киритамиз. У ҳолда Oxy текислигининг $y=x-1$ ва $y=x+2$ тўғри чизикларига Ouv текислигининг мос ҳолда $u=-1$ ва $u=2$ тўғри чизиклари, $y=-x-2$ ва $y=-x+3$ тўғри чизикларига эса $v=-2$ ва $v=3$ тўғри чизиклар мос келади. D соҳа аксланадиган янги $\bar{D}$ соҳани чизамиз (54-шакл).

x ва y ўзгарувчиларни u ва v лар оркали ифодалаб,

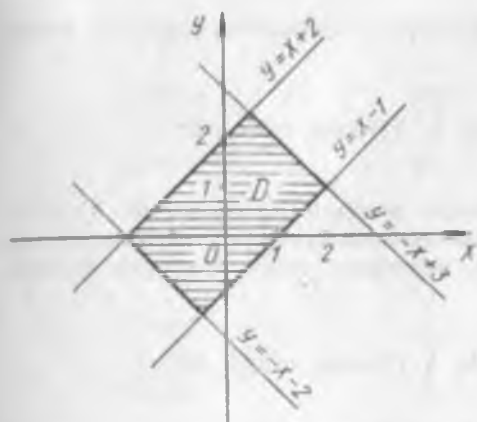
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(v-u), \\ y = \frac{1}{2}(v+u) \end{cases}$$

Якобианни ҳисоблаймиз:

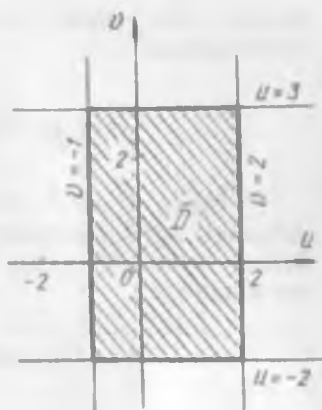
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

яъни

$$|J| = \frac{1}{2}.$$



53- шакл



54- шакл

Интеграллаш соҳаси $\bar{D}$ куйидаги тенгсизликлар системаси оркали аниқланади:

$$\begin{cases} -1 \leq u \leq 2, \\ -2 \leq v \leq 3. \end{cases}$$

Демак,

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y) dx dy &= \iint_{\bar{D}} \frac{1}{2} v du dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 du \int_{-2}^3 v dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{2} v^2 \Big|_{-2}^3 \right) du = \frac{1}{4} \int_{-1}^2 (9-4) du = \frac{5}{4} u \Big|_{-1}^2 = \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

10.3.2. Маълумки, тўғри бурчакли x, y ва кутб r, φ координаталар ўзаро

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

муносабатлар билан боғланган. Бу ерда $r \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Икки ўлчовли интегралда тўғри бурчакли координаталардан кутб координаталарга ўтиш куйидаги формула оркали амалга оширилади:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\bar{D}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Интеграллаш чегаралари O кутбнинг вазиятига боғлиқ бўлади.

а) Агар O кутб $\varphi = \alpha$ ва $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$) нурлар ҳамда $r = r_1(\varphi)$ ва $r = r_2(\varphi)$ ($r_1(\varphi) < r_2(\varphi)$) чизиклар билан чегараланган D соҳа ташка-

рисиди ётса, икки ўлчовли интеграл қуйидаги формула билан ҳисобланади:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

б) Агар O кутб D соҳа ичида жойлашган бўлса ва бу соҳа чегараси кутб координаталар системасида $r=r(\varphi)$ кўринишга эга бўлса, у ҳолда икки ўлчовли интеграл ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

в) Агар O кутб $\varphi=\alpha$ ва $\varphi=\beta$ ($\alpha < \beta$) нурлар билан чегараланган D соҳа чегарасида ётса, шу билан бирга, чегаранинг кутб координаталар системасида тенгламаси $r=r(\varphi)$ кўринишда бўлса, икки ўлчовли интеграл ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

2-мисол. Ушбу икки ўлчовли интегрални ҳисобланг:

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

бу ерда D соҳа $x^2 + y^2 \leq a^2$ доиранинг биринчи чораги.

Ечиш. Агар интеграллаш соҳаси D доира ёки унинг бўлаги бўлса, кўп интеграллар кутб координаталарида осон ҳисобланади. Бизнинг ҳолда O кутб D соҳа чегарасида жойлашган (б) ҳол). D соҳа кутб координаталар системасида ушбу тенгсизликлар системаси орқали аниқланади (55-шакл):

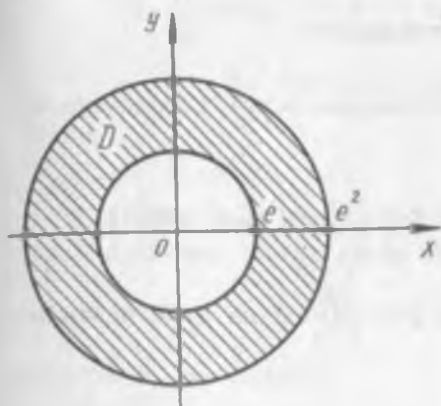
$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq r \leq a \end{cases}$$

Демак,

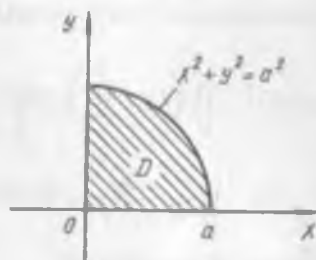
$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \iint_D \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} r dr d\varphi = \iint_D r^2 dr d\varphi = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r^2 dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3} r^3 \Big|_0^a \right) d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 d\varphi = \frac{a^3}{3} \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^3}{6}. \end{aligned}$$

3-мисол. Ушбу интегрални ҳисобланг:

$$\iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy,$$



55- шакл



56- шакл

бу ерда D соҳа $x^2 + y^2 = e^2$ ва $x^2 + y^2 = e^4$ доиралар орасидаги ҳалкадан иборат.

Е ч и ш. D соҳани чизамиз (56- шакл). Кутб координаталарида D соҳа чегараси $r = e$ ва $r = e^2$ кўринишга эга. O кутб чегарадан ташкарида ётади (a) ҳол).

Интегралда кутб координаталарига ўтамиз:

$$\iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy = \iint_D \ln r^2 \cdot r dr d\varphi = 2 \iint_D r \ln r dr d\varphi = 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_e^{e^2} \ln r dr.$$

Ички интегрални ҳисоблаймиз:

$$\int_e^{e^2} r \ln r dr = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln r; du = \frac{1}{r} dr \\ dv = r dr; v = \frac{1}{2} r^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} r^2 \ln r \Big|_e^{e^2} -$$

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{2} r^2 \frac{1}{r} dr = \frac{1}{2} (e^4 \ln e^2 - e^2 \ln e) - \frac{1}{2} \int_e^{e^2} r dr =$$

$$= \frac{1}{2} (2e^4 - e^2) - \frac{1}{4} r^2 \Big|_e^{e^2} = \frac{1}{2} (2e^4 - e^2) -$$

$$- \frac{1}{4} (e^4 - e^2) = \frac{3}{4} e^4 - \frac{1}{4} e^2 = \frac{e^2}{4} (3e^2 - 1).$$

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} \iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy &= 2 \int_0^{2\pi} \frac{e^2}{4} (3e^2 - 1) d\varphi = \frac{1}{2} e^2 (3e^2 - 1) \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} e^2 (3e^2 - 1) \varphi \Big|_0^{2\pi} = \pi e^2 (3e^2 - 1). \end{aligned}$$

3- дурсхона топириги

Куйидаги икки ўлчовли интегралларни кутб координаталар системасига ўтиб, ҳисобланг:

а) $\iint_D \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) dx dy$, бу ерда D соҳа $x^2 + y^2 \leq \pi^2$ доира;

б) $\iint_D \frac{dx dy}{x^2 + y^2 + 1}$, бу ерда D соҳа $y = \sqrt{1 - x^2}$ ва $y = 0$ чизиклар билан чегараланган;

в) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, бу ерда D соҳа $x^2 + y^2 = 2ax$ чизик билан чегараланган;

г) $\iint_D \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$, бу ерда D соҳа $x^2 + y^2 = \frac{\pi}{9}$ ва $x^2 + y^2 = \pi^2$ чизиклар билан чегараланган.

Ж: а) $2\pi^3$; б) $\frac{1}{2}\pi \ln 2$; в) $\frac{3}{2}\pi a^4$; г) 3π .

2. Икки ўлчовли интегрални ҳисобланг:

$\iint_D (x + y) x dx dy$, бу ерда D соҳа $2x + y = 1$, $x - y = 2$, $2x + y = 3$, $x - y = -1$ тўғри чизиклар билан чегараланган.

Ж: 2,5.

3. $r = a \sin 2\varphi$, $a > 0$ чизик билан чегараланган шакл юзини ҳисобланг.

Ж: $\pi a^2/2$ кв. бирл.

3- мустақил иш

1. Куйидаги интегралларни кутб координаталарига ўтиб ҳисобланг:

а) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, бу ерда D соҳа $x^2 + y^2 = a^2$ ва $x^2 + y^2 = 4a^2$ чизиклар билан чегараланган;

6) $\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$, бу ерда D соҳа $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$,

$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, $y = \sqrt{3}x$ чизиклар билан чегараланган ҳалканинг бир қисми.

Ж: а) $\frac{14}{3}\pi a^3$; б) $\frac{1}{6}\pi^2$

2. Агар D соҳа $x+y=1$, $x-y=1$, $x+y=3$, $x-y=-1$ тўғри чизиклар билан чегараланган квадрат бўлса,

$$\iint_D (x+y)^3 (x-y)^2 dx dy$$

интегрални ҳисобланг.

Ж: $\frac{29}{3}$

ЭГРИ ЧИЗИҚЛИ ИНТЕГРАЛЛАР ВА СИРТ ИНТЕГРАЛЛАРИ

1-§. Биринчи ва иккинчи тур эгри чизикли интеграллар

11.1.1. $f(x, y) = f(P)$ функция AB ясси силлик эгри чизикнинг барча нукталарида аниқланган ва узлуксиз бўлсин; бу ёйни узунликлари $\Delta l_1, \Delta l_2, \dots, \Delta l_n$ бўлган n та элементар ёйчаларга бўламиз. Ҳар қайси i -бўлакда ихтиёрий $P_i(x_i, y_i)$ нуктани танлаб олиб, функциянинг P_i нуктадаги қийматини мос элементар ёйча узунлигига кўпайтирамиз. Бу кўпайтмаларнинг ушбу

$$\sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta l_i \text{ ёки } \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta l_i$$

кўринишидаги йиғиндиси $f(x, y) = f(P)$ функция учун AB ёй бўйича *интеграл йиғинди* дейилади.

Бу интеграл йиғиндининг элементар ёйчалар узунликларининг энг каттаси нолга интилгандаги лимити *биринчи тур эгри чизикли интеграл* ёки *ёй узунлиги бўйича эгри чизикли интеграл* дейилади:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta l_i$$

ёки

$$\int_{AB} f(P) dl = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta l_i$$

Агар AB эгри чизик фазода берилган бўлиб, бу эгри чизик бўйлаб узлуксиз $f(x, y, z) = f(P)$ функция берилган бўлса, у ҳолда:

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i$$

ёки

$$\int_{AB} f(P) dl = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(P_i) \Delta l_i$$

Биринчи тур эгри чизикли интеграл $\int_{AB} f(P) dl$ ёй қайси йўналишда ўти-
лишига боғлиқ эмас, яъни

$$\int_{AB} f(P) dl = \int_{BA} f(P) dl.$$

11.1.2. Биринчи тур эгри чизикли интегрални ҳисоблаш аниқ
интегрални ҳисоблашга келтирилади:

а) Агар ясси $\int_{AB}$ эгри чизик

$$x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$$

параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, эгри чизикли
интеграл ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

$\int_{AB}$ эгри чизик фазода $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$)
тенгламалар билан аниқланган бўлса, у ҳолда

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

б) Агар $\int_{AB}$ ясси эгри чизик $y = y(x)$ ($a \leq x \leq b$) тенглама билан
берилган бўлса, эгри чизикли интеграл қуйидаги формула бўйича
ҳисобланади:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

в) Агар $\int_{AB}$ ясси эгри чизик $x = x(y)$ ($c \leq y \leq d$) тенглама
билан берилган бўлса, эгри чизикли интеграл

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_c^d f(x(y), y) \sqrt{1 + x'^2} dy$$

формула бўйича ҳисобланади.

1- м и с о л. Ушбу эгри чизикли интегрални ҳисобланг:

$$\int_L (x - y) dl,$$

бу ерда L — тўғри чизикнинг $A(0, 0)$ дан $B(4, 3)$ гача бўлаги.

Е ч и ш. AB тўғри чизик $y = \frac{3}{4}x$ кўринишга эга. $y' = \frac{3}{4}$ ни то-
памиз. Демак,

$$\int_L (x-y) dl = \int_0^1 (x - \frac{3}{4}x) \sqrt{1 + \frac{9}{16}} dx = \int_0^1 \frac{1}{4}x \cdot \frac{5}{4} dx = \\ = \frac{5}{16} \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{5}{2}.$$

2-мисол. $\int_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) dl$ интегрални ҳисобланг, бу ерда
 $L: x = t \cos t, y = t \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$ винт чизигининг биринчи
ўрамини.

Е ч и ш. Ҳосилаларни ҳисоблаймиз: $\dot{x} = \cos t - t \sin t,$
 $\dot{y} = \sin t + t \cos t, \dot{z} = 1$. У ҳолда

$$\int_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) dl = \int_0^{2\pi} (2t - \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t}) \times \\ \times \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt = \int_0^{2\pi} (2t - t) \sqrt{2 + t^2} dt = \\ = \int_0^{2\pi} t \sqrt{2 + t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{(2 + t^2)^3} \Big|_0^{2\pi} = \\ = \frac{1}{3} (\sqrt{(2 + 4\pi^2)^3} - \sqrt{2^3}) = \frac{\sqrt{2^3}}{3} (\sqrt{(1 + 2\pi^2)^3} - 1).$$

11.1.3. $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар бирор ясси силлик
 AB эгри чизикнинг барча нукталарида аникланган ва узлуксиз
бўлсин; $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ ва $\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_n$ элементар ёйчаларнинг
(11.1.1. банд) Ox ва Oy ўқларга проекциялари бўлсин.

Ушбу

$$\sum_{i=1}^n [P(x_i, y_i) \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \Delta y_i]$$

йигинди $P(x, y)$ ва $Q(x, y)$ функциялар учун координаталар бўйича
интеграл йигинди дейилади.

Бу интеграл йигиндининг $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ ва $\max \Delta y_i \rightarrow 0$ даги limiti
 AB ёй йўналиши бўйича иккинчи тур эгри чизиқли интеграл ёки
координаталар бўйича эгри чизиқли интеграл дейилади:

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta y_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n P(x_i, y_i) \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \Delta y_i$$

Иккинчи тур эгри чизикли интеграл интеграллаш йўлининг йўналишига боғлиқ, яъни

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = - \int_{BA} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Агар интеграллаш йўли ёпик эгри чизикдан иборат бўлса, у ҳолда ёпик контур бўйича эгри чизикли интеграл айланиб ўтиш йўналишини кўрсатиб

$$\oint P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

каби белгиланади.

Агар ёпик контурни айланиб ўтиш соат миля ҳаракатига қарама-қарши бўлса, у мусбат дейилади (бунда контур билан чегараланган соҳа чап томонда қолади). Бунга тесқари айланиб ўтиш манфий дейилади. Қелгусида, агар таъқидлаб ўтилмаган бўлса, контурни айланиб ўтиш йўналишини мусбат деб олаверамиз.

11.1.4. Иккинчи тур интегрални ҳисоблаш ҳам аниқ интегрални ҳисоблашга қелтирилади:

а) Агар ясси AB эгри чизик $x=x(t)$, $y=y(t)$ параметрик тенгламалар билан берилган бўлиб, t параметр йўлнинг бошланиши A га мос t_A қийматдан, йўл охири B га мос t_B қийматгача ўзгарса, иккинчи тур эгри чизикли интеграл ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t)] dt.$$

AB эгри чизик фазода $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ параметрик тенгламалар билан берилган бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \dot{y}(t) + \\ + R(x(t), y(t), z(t)) \dot{z}(t)] dt. \end{aligned}$$

б) Агар ясси AB эгри чизик $y=y(x)$ тенглама билан берилган бўлиб, x ўзгарувчи йўл бошланиши A га мос a қийматдан йўл охири B га мос b қийматгача ўзгарса, эгри чизикли интеграл қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)] dx.$$

в) Агар ясси AB эгри чизик $x=x(y)$ тенглама билан берилган бўлиб, y ўзгарувчи йўл бошланиши A га мос c кийматдан йўл охири B га мос d кийматгача ўзгарса, эгри чизикли интеграл куйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_c^d [P(x(y), y) x'(y) + Q(x(y), y)] dy.$$

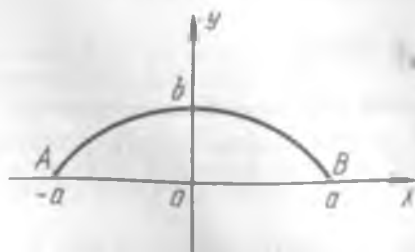
3-мисол. Ушбу эгри чизикли интегрални ҳисобланг:

$$\int_L y^2 dx + x^2 dy,$$

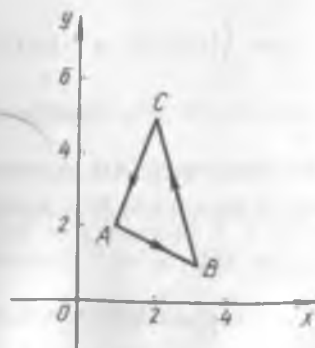
бу ерда L контур $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ эллипсининг соат илки ҳаракати бўйича айланиб ўтиладиган юқори ярми (57-шакл).

Ечиш. Йўлнинг бошланиши параметрнинг $t_A = \pi$ киймати га мос A нуктада жойлашган; йўл охири параметрнинг $t_B = 0$ киймати га мос B нуктада жойлашган. Шундай қилиб, куйидагига эгамиз:

$$\begin{aligned} \int_L y^2 dx + x^2 dy &= \int_{AB} y^2 dx + x^2 dy = \int_{\pi}^0 [b^2 \sin^2 t (-a \sin t) + \\ &+ a^2 \cos^2 t \cdot b \cos t] dt = -ab^2 \int_{\pi}^0 \sin^3 t dt + a^2 b \int_{\pi}^0 \cos^3 t dt = \\ &= ab^2 \int_0^{\pi} \sin^3 t dt - a^2 b \int_0^{\pi} \cos^3 t dt = -ab^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 t) d(\cos t) - \\ &- a^2 b \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 t) d(\sin t) = -ab^2 \left(\cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right) \Big|_0^{\pi} - \\ &- a^2 b \left(\sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \Big|_0^{\pi} = -ab^2 \left(-1 + \frac{1}{3} - 1 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} ab^2. \end{aligned}$$



57-шакл



58-шакл

4- м и с о л. Ушбу эгри чизикли интегрални ҳисобланг:

$$\oint_L 2xdy - 3ydx,$$

бу ерда L — учлари $A(1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(2, 5)$ нукталарда бўлган учбурчак контури (58- шакл).

Е ч и ш. Контур ушбу тенгламалар билан берилган кесмалардан тўзилган:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - AB \text{ нинг тенгламаси};$$

$$y = -4x + 13 - BC \text{ нинг тенгламаси};$$

$$y = 3x - 1 - AC \text{ нинг тенгламаси}.$$

Куйидагига эгамиз:

$$\begin{aligned} \oint (2xdy - 3ydx) &= \int_{AB} 2xdy - 3ydx + \\ &+ \int_{BC} 2xdy - 3ydx + \int_{CA} 2xdy - 3ydx. \end{aligned}$$

Хар қайси интегрални ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \int_{AB} 2xdy - 3ydx &= \int_1^3 \left(2x \left(-\frac{1}{2} \right) - 3 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \right) \right) dx = \\ &= \int_1^3 \left(-x + \frac{3}{2}x - \frac{15}{2} \right) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 (x - 15) dx = \frac{1}{4} (x - 15)^2 \Big|_1^3 = \\ &= \frac{1}{4} (12^2 - 14^2) = \frac{1}{4} \cdot 26 \cdot (-2) = -13; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{BC} (2xdy - 3ydx) &= \int_3^2 (2x(-4) - 3 \cdot (-4x + 13)) dx = \\ &= \int_3^2 (-8x + 12x - 39) dx = \int_3^2 (4x - 39) dx = (2x^2 - 39x) \Big|_3^2 = \\ &= (8 - 78 - 18 + 117) = 29; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{CA} (2xdy - 3ydx) &= \int_2^1 (2x \cdot 3 - 3(3x - 1)) dx = \int_2^1 (6x - 9x + 3) dx = \\ &= 3 \int_2^1 (1 - x) dx = 3 \left(x + \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_2^1 = 3 \left(1 + \frac{1}{2} - 2 - 2 \right) = -\frac{15}{2}. \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$\oint_L (2xdy - 3ydx) = \frac{17}{2}.$$

1- дарсхона топшириги

1. $\int_L \frac{dl}{x-y}$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L контур $y = \frac{1}{2}x - 2$ тўғри чизикнинг $A(0, -2)$ ва $B(4, 0)$ нукталар орасидаги кесмаси.

Ж: $\sqrt{5} \ln 2$.

2. $\int_L y^2 dl$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L контур $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($a > 0$) циклоиданинг биринчи арки. Ж: $\frac{256}{15}a^3$.

3. $\int_L xy dl$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L — учлари $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$, $D(0, 2)$ нукталарда бўлган тўғри тўртбурчак контури. Ж: 24.

4. $\int_L xyz dl$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L контур тўғри чизикнинг $A(1, 0, 1)$ ва $B(2, 2, 3)$ нукталар орасидаги кесмаси. Ж: 12.

5. $\int_L (x^2 - 2xy)dx + (2xy + y^2)dy$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L контур $y = x^2$ параболанинг $A(1, 1)$ нуктадан $B(2, 4)$ нуктагача ёйи. Ж: $40 \frac{19}{30}$.

6. $\oint_L ydx - xdy$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L контур мусбат йўналишда айланиб ўтиладиган $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ эллипс. Ж: $-2\pi ab$.

7. Агар L $A(0, 0)$ ва $B(1, 1)$ нукталарни туташтирувчи чизик:
а) $y = x$; б) $y = x^2$; в) $y^2 = x$; г) $y = x^3$
тенгламалар билан берилган бўлса,

$\int_L xy dx + (y - x)dy$ интегрални ҳисобланг.

Ж.: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{17}{30}$; г) $-\frac{1}{20}$.

8. $\int_L xdx + ydy + (x + y - 1)dz$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L $A(1, 1, 1)$ ва $B(2, 3, 4)$ нукталарни туташтирувчи тўғри чизик кесмаси. Ж: 13.

1- мустақил иш

Эгри чизикли интегралларни ҳисобланг:

1. $\int_L x dl$, бу ерда L $O(0, 0)$ ва $A(1, 2)$ нукталарни туташтирувчи тўғри чизик кесмаси. Ж: $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

2. $\int_L x^2 y dl$, бу ерда L $x^2 + y^2 = 9$ айлананинг биринчи квадрантда ётувчи қисми. Ж 27.

3. $\int_L \frac{dl}{x+y}$, бу ерда L $y = x + 2$ тўғри чизикнинг $A(2, 3)$ ва $B(3, 5)$ нукталарини туташтирувчи кесмаси.

Ж: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. $\int_L (x+y)dx + (x-y)dy$, бу ерда L $y = x^2$ параболанинг $A(-1, 1)$ ва $B(1, 1)$ нукталар орасидаги бўлаги.

Ж: 2.

5. $\int_L (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$, бу ерда L OAB синик чизик бўлиб, $O(0, 0)$, $A(2, 0)$, $B(4, 2)$. Ж: $\frac{136}{3}$.

6. $\oint_L ydx + 2xdy$, бу ерда L томонлари $2x + 3y = \pm 6$, $2x - 3y = \pm 6$ тўғри чизикларда ётувчи, соат миля ҳаракатига тескари йўналишда айланиб ўтиладиган ромб контури. Ж: 12.

2-§. Биринчи ва иккинчи тур эгри чизикли интегралларнинг татбиқи

11.2.1. Биринчи тур эгри чизикли интеграллар ёрдамида эгри чизик ёйининг узунлигини, моддий ёй массасини, цилиндрлик сирт юзини ҳисоблаш мумкин.

а) $\int_{AB} dl = l_{AB}$, бу ерда l_{AB} AB ёй узунлиги (биринчи тур эгри чизикли интегралнинг геометрик маъноси);

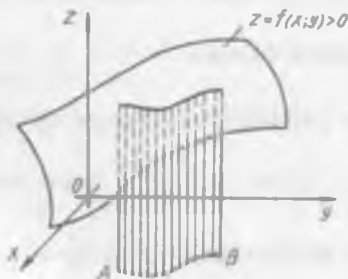
б) $\int_{AB} f(x, y, z) dl = m$, бу ерда m — моддий AB ёй массаси, $f(x, y, z) = \gamma$ — бу ёйнинг чизикли зичлиги (эгри чизикли интегралнинг механик маъноси);

в) $\int_{AB} f(x, y) dl = S$, бу ерда S — ясовчиларни Oz ўққа параллел ва AB ёй нукталаридан ўтувчи, пастдан бу ёй билан, юқоридан цилиндрлик сиртнинг $z = f(x, y)$ ($f(x, y) > 0$) сирт билан кесишиш чизиги билан, ён томонлардан эса A ва B нукталардан Oz

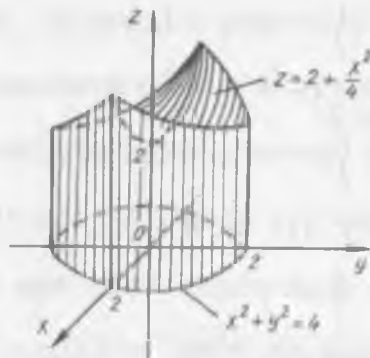
ўққа параллел ўтган чизиклар билан чегараланган цилиндрик сиртнинг юзи (59- шакл).

1- мисол. $x^2 + y^2 = 4$ цилиндрик сиртнинг Oxy текислик ва $z = 2 + \frac{x^2}{2}$ сирт орасидаги қисмининг юзини ҳисобланг.

Е ч и ш. Шаклни чизамиз (60- шакл).



59- шакл



60- шакл

Цилиндрик сиртнинг изланаётган юзи S ушбу интеграл билан ифодаланади:

$$S = \int_L \left(2 + \frac{x^2}{2} \right) dl,$$

бу ерда L Oxy текисликдаги айлана: $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$ ёки параметрик шаклда: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \leq t < 2\pi$.

У ҳолда $dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \sqrt{(1 - 2\sin t)^2 + (2\cos t)^2} dt = 2dt$
Демак,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} \left(2 + \frac{1}{2} \cdot 4\cos^2 t \right) 2dt = 4 \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 t) dt = \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos 2t \right) dt = 4 \left(\frac{3}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= 6 \cdot 2\pi = 12\pi \text{ кв. бирл.} \end{aligned}$$

11.2.2. Иккинчи тур эгри чизикли интеграллар ёрдамида шаклнинг юзини, куч ишини, функцияни унинг маълум тўлиқ дифференциали бўйича топиш мумкин.

$$а) \int_{\vec{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = A, \text{ бу ерда } A = \vec{F} = P(x, y)\vec{i} + Q(x,$$

$y)\vec{j}$ куч бажарган иш, бу куч таъсирида жисм $\vec{AB}$ йўл бўйича кўчади (иккинчи тур эгри чизикли интегралнинг механик маъноси).

б) $\frac{1}{2} \oint_L (xdy - ydx) = S$, бу ерда S — ёпик L контур билан чегараланган фигура юзи.

2- м и с о л. $x = acost$, $y = bsint$, $0 \leq t \leq 2\pi$ эллипс билан чегараланган шакл юзини ҳисобланг.

$$\text{Е ч и ш. } S = \frac{1}{2} \oint_L (xdy - ydx) \text{ формуладан фойдаланамиз.}$$

$$dx = -asintdt, \quad dy = bcostdt.$$

$$\text{Демак, } S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (acost \cdot bcost - bsint(-asint))dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t +$$

$$+ \sin^2 t)dt = \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} dt = \pi ab \text{ кв. бирл.}$$

11.2.3. Агар L D соҳанинг чегараси бўлса ва $P(x, y)$, $Q(x, y)$ функциялар ёпик D соҳада ўзларининг хусусий ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз бўлсалар, у ҳолда ушбу Грин формуласи ўринлидир:

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

бу ерда L контурни айланиб чиқиш шундай танланадикки, D соҳа чап томонда қолади (мусбат йўналнш).

Агар бирор D соҳада Грин формуласи шартлари бажарилса, куйидаги тасдиқлар тенг кучлидир:

$$а) \oint_l Pdx + Qdy = 0, \text{ бунда } l \text{ } D \text{ соҳада жойлашган исталган}$$

ёпик контур.

$$б) \int_{\vec{AB}} Pdx + Qdy \text{ интеграл } A \text{ ва } B \text{ нукталарни туташтирувчи}$$

интеграллаш йўлига боғлиқ эмас, бу ерда $\vec{AB}$ D соҳага тегишли.

в) $Pdx + Qdy = du(x, y)$, бу ерда $du(x, y)$ $u(x, y)$ функциянинг ўлиқ дифференциали.

г) D соҳанинг ҳамма нукталарида $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Агар $du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ бўлса, $u(x, y)$ функция

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy + C$$

ёки

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy + C$$

формула ёрдамида аникланади, бу ерда $M_0(x_0, y_0)$ ва $M(x, y)$ нукталар D соҳага тегишли, C — ихтиёрий ўзгармас.

3-мисол. Грин формуласидан фойдаланиб, $\oint_L y(1-x^2)dx + (1+y^2)xdy$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L контур $x^2 + y^2 = 4$ айланадан иборат бўлиб, у мусбат йўналишда айланиб ўтилади.

Ечиш. Грин формуласи бўйича икки ўлчовли интегралга ўтамыз:

$$\begin{aligned} \oint_L y(1-x^2)dx + (1+y^2)dy &= \iint_D (1+y^2 - 1+x^2)dxdy = \\ &= \iint_D (x^2 + y^2)dxdy, \end{aligned}$$

бу ерда D соҳа $x^2 + y^2 \leq 4$ тенгсизлик билан аникланадиган доира. Интегрални ҳисоблаш учун қутб координаталарига ўтамыз:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2)dxdy &= \iint_D (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) r dr d\varphi = \\ &= \iint_D r^3 dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^3 dr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} (r^4|_0^2) d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} 16 d\varphi = 8\pi. \end{aligned}$$

4-мисол. Ушбу

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{2}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy$$

дифференциал ифода бирор функциянинг тўлиқ дифференциали эканини кўрсатинг ва бу функцияни топинг.

Ечиш. Қуйидагиларга эгамиз:

$$P(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}; \quad Q(x, y) = \frac{2}{y} - \frac{x}{y^2};$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \text{ бинобарин, берилган ифода ҳақиқатан ҳам би-}$$

роқ $u(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциалидир.

Демак, $M_0(x_0, y_0)$ деб $M_0(1, 1)$ ни олиб, қуйидагини топамиз:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_1^x \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx + \int_1^y \left(\frac{2}{y} - \frac{1}{y^2} \right) dy = \\ &= \left(\ln|x| + \frac{x}{y} \right) \Big|_1^x + \left(2 \ln y + \frac{1}{y} \right) \Big|_1^y = \ln|x| + \frac{x}{y} - \frac{1}{y} + \\ &+ 2 \ln|y| + \frac{1}{y} - 1 + C = \ln|x| + 2 \ln|y| + \frac{x}{y} + \bar{C}. \end{aligned}$$

2- дарсхона топириғи

1. $x = \cos t$, $y = \sin t$ айлана ёйининг массасини аниқланг. Унинг (x, y) нуктадаги қизикли зичлиги y га тенг. Ж: 2 масса бирл.

2. R радиусли доиравий цилиндр билан худди шундай цилиндр тўғри бурчак остида (ўқлари тўғри бурчак остида) кесишади. Кесимда ҳосил бўлган сирт юзини ҳисобланг. Ж: $8R^2$ кв. бирл.

3. а) $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ астроида билан;

б) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоиданинг биринчи аркаси ва Ox ўқи билан чегараланган шакл юзини ҳисобланг.

Ж: а) $3\pi a^2$ кв. бирл.; б) $3\pi a^2$ кв. бирл.

4. Тўлиқ дифференциал бўйича $u(x, y)$ функцияни топинг:

а) $du = (2x - 3xy^2 + 2y)dx + (2x - 3x^2y + 2y)dy$;

б) $du = (\arcsin x - x \ln y)dx - \left(\arcsin y + \frac{x^2}{2y} \right)dy$.

5. $\vec{F} = (x^2 + y^2 + 1)\vec{i} + 2xy\vec{j}$ кучнинг $y = x^2$ параболанинг $A(0, 0)$ ва $B(1, 1)$ нукталар орасидаги ёйи бўйича бажарган ишини ҳисобланг.

Ж: $\frac{196}{105}$ иш. бирл.

6. Грин формуласидан фойдаланиб, $\oint_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2dy$

интегрални ҳисобланг, бу ерда L учлари $A(1, 1)$, $B(2, 2)$, $C(1, 3)$ бўлган учбурчак контури. Натижани бевосита интеграллаш билан текширинг. Ж: $-\frac{4}{3}$

2- мустақил иш

1. $x^2 + y^2 = R^2$ цилиндрлик сиртининг Oxy текислик ва $z = \frac{xy}{2R}$

сирт орасига жойлашган қисмининг юзини ҳисобланг. Ж: R^2 кв. бирл.

2. $y = x^2$ ва $y = \sqrt{x}$ қизиклар билан чегараланган соҳанинг юзини ҳисобланг. Ж: $\frac{1}{3}$ кв. бирл.

3. Берилган тўлиқ дифференциали

$$du = \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}$$

бўйича $u(x, y)$ функцияни топинг.

4. $\vec{F} = 2xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ кучнинг $A(0, 0)$ ва $B(2, 1)$ нукталарни туташтирувчи йўлда бажарган ишини ҳисобланг. Ж: 4 иш бирл.

5. Грин формуласидан фойдаланиб, $\oint_L y^2 dx + (x+y)^2 dy$ интегрални ҳисобланг, бу ерда L — учлари $A(3, 0)$, $B(3, 3)$, $C(0, 3)$ нукталарда бўлган учбурчак контури. Ж: 18.

3-§. Сирт интеграллари

11.3.1. σ — бирорта силлиқ сирт ва $f(x, y, z) = f(M)$ функция σ сиртда узлуксиз бўлсин; $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$ лар σ сиртнинг элементар сиртларга бўлиниши бўлиб, уларнинг юзларини ҳам шу символлар билан белгилайлик; ҳар қайси элементар сиртда ихтиёрий $M_i(x_i, y_i, z_i)$ нукта танлаймиз ва ушбу $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta\sigma_i$ интеграл йиғиндини тузамиз.

Элементар сиртларнинг диаметрининг энг каттаси нолга интилганда интеграл йиғинди интиладиган лимит *биринчи тур сирт интеграли* (ёки *сирт юзи бўйича интеграл*) дейилади:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \lim_{\max \Delta\sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta\sigma_i$$

ёки

$$\iint_{\sigma} f(M) d\sigma = \lim_{\max \Delta\sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta\sigma_i$$

Сирт интегралининг киймати σ сиртнинг қайси томони танланишига боғлиқ эмас.

Аник интегралнинг барча хоссалари биринчи тур сирт интеграллари учун ўринлидир. Агар σ сиртнинг Oxy текисликка проекцияси σ_{xy} бир қийматли бўлса, яъни Oz ўққа параллел ҳар қандай тўғри чизик σ сиртни факат битта нуктада кесса, мос биринчи тур сирт интегрални ҳисоблашни ушбу формула орқали икки ўлчовли интегрални ҳисоблашга келтириш мумкин:

$$\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy,$$

бу ерда $z = z(x, y)$ — σ сиртнинг тенгламаси. Равшанки, $\iint_{\sigma} d\sigma = S$,

бу ерда S — σ сиртнинг юзи, $\iint_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = M$, бу ерда M — σ сиртнинг массаси, $f(x, y, z) = \gamma$ — σ сиртнинг сиртий зичлиги.

1-мисол. $\iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma$ интегрални ҳисобланг, бу ерда σ — $x^2 + y^2 = z^2$ конус сиртнинг $z=0$ ва $z=1$ текисликлар орасидаги қисми.

Ечнш. Берилган σ сирт тенгламасидан унинг қаралаётган қисми учун $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ эканини кўрамиз. Қуйидагиларга эгамиз:

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Демак,

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) d\sigma &= \iint_{\sigma_{xy}} (x^2 + y^2) \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \\ &= \sqrt{2} \iint_{\sigma_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy. \end{aligned}$$

Икки ўлчовли интегралнинг интеграллаш соҳаси σ_{xy} $x^2 + y^2 \leq 1$ доирадан иборат (конус сиртнинг Oxy текисликка проекцияси). Икки ўлчовли интегралда кутб координаталарига ўтамиз:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \iint_{\sigma_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy &= \sqrt{2} \iint_{\sigma_{rs}} r^3 dr d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr = \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} r^4 \Big|_0^1 \right) d\varphi = \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

11.3.2. σ силлик сиртнинг ҳар бир нуктасидан $\vec{n}$ нормал вектори ўтказилган томони *мусбат*, бошқа томони (агар у мавжуд бўлса) эса *манфий* томон дейилади.

Хусусан, агар σ сирт ёпик бўлса ва Ω фазонинг бирор соҳасини чегараласа, у ҳолда сиртнинг мусбат ёки *ташқи томони* деб унинг нормал векторлар Ω соҳадан йўналган томони, манфий ёки *ички томони* деб унинг нормал векторлари Ω соҳага йўналган томони айтилади. Мусбат (ташқи) ва манфий (ички) томонлари мавжуд бўлган сиртлар *икки томонлама сиртлар* дейилади. Улар учун қуйидаги хосса ўринлидир. Агар $\vec{n}$ нормал векторнинг асосини бундай сиртда ётувчи исталган ёпик L контур бўйлаб узлуксиз кўчирилса, дастлабки нуктага қайтганда $\vec{n}$ нинг йўналиши дастлабки йўналиш билан бир хил бўлади.

Бир томонлама сиртлар учун $\vec{n}$ нормал векторнинг бундай кўчиши дастлабки нуктага қайтилганда $(-\vec{n})$ векторга олиб келади. Маълум томони танланган σ сирт *ориентацияланган* дейилади.

11.3.3. σ^+ — бирор силлик сирт бўлиб, унда $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ йўналиш билан характерланувчи мусбат томон танланган бўлсин; $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ узлуксиз функциялар бўлсин, у ҳолда мос иккинчи тур сирт интеграл куйидагича ифодаланади:

$$\iint_{\sigma^+} Pdydz + Qdzdx + Rxdy = \iint_{\sigma^+} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) d\sigma.$$

Бу формула биринчи ва иккинчи тур сирт интегралларини ўзаро боғлайди. Сиртнинг бошқа σ^- томонига ўтилганда бу интеграл ишорасини карама-каршисига ўзгартиради. Агар σ сирт $z = z(x, y)$ тенглама билан ошкор ҳолда берилган бўлса, у ҳолда $\vec{n}$ нормалнинг йўналтирувчи косинуслари куйидаги формулалар бўйича аникланади:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm|\vec{n}|} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\pm|\vec{n}|} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{\pm|\vec{n}|},$$

бу ерда $|\vec{n}| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ ва ишора танлаш сирт томони билан мувофиқлашган бўлиши керак.

Агар σ сирт тенгламаси $F(x, y, z) = 0$ ошқормас ҳолда берилган бўлса, бу сирт нормали $\vec{n}$ нинг йўналтирувчи косинуслари куйидаги формулалар бўйича аникланади:

$$\cos\alpha = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \cos\beta = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial F}{\partial z},$$

бу ерда $D = \pm \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$ ва илдиз олдидagi ишорани танлаш сирт томони билан мувофиқлаштирилиши керак.

Иккинчи тур сирт интеграл, шунингдек, *координаталар бўйича сирт интеграл* деб ҳам аталади.

Иккинчи тур сирт интегралнинг ҳисоблашни бевосита икки ўлчовли интегрални ҳисоблашга келтириш мумкин.

Агар σ сирт $z = z(x, y)$ тенгламага эга бўлса, у ҳолда иккинчи тур сирт интеграл куйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$\iint_{\sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{\sigma_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy,$$

бу ерда σ_{xy} сирт σ нинг Oxy текисликка проекцияси.

$\pm$ ишоралар сиртнинг иккита турли томонларига мос келади: бунда «+» ишора танланган томонда $\cos\gamma > 0$ бўлганда, «-» эса $\cos\gamma < 0$ бўлганда олинади.

σ сирт $y = y(x, z)$ ёки $x = x(y, z)$ тенгламалар билан берилган

ҳолларда қолган интеграллар ҳам худди юқоридагидек ҳисобланади:

$$\iint_{\sigma_{xz}} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{\sigma_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dz dx,$$

бу ерда σ_{xz} — сирт σ нинг Oxz текисликка проекцияси, «+» ишора танланган томонда $\cos\beta > 0$ бўлганда, «-» ишора эса $\cos\beta < 0$ бўлганда олинади;

$$\iint_{\sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{\sigma_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz,$$

бу ерда σ_{yz} — сирт σ нинг Oyz текисликка проекцияси; «+» ишора танланган томонда $\cos\alpha > 0$ бўлганда, «-» ишора эса $\cos\alpha < 0$ бўлганда олинади.

2-мисол. Ушбу интегрални ҳисобланг:

$$I = \iint_{\sigma} z dx dy + x dx dz + y dy dz,$$

бу ерда σ $y+z=1$ текислигининг координата текисликлари билан кесишишидан ҳосил бўлган учбурчак; сиртнинг танланган томонида нормаль Oz ўқи билан ўткир бурчак ташкил этади.

Ечиш. Шаклни чизамиз ва интеграллаш томонини $\vec{n}$ нормаль ёрдамида танлашни кўрсатамиз (61-шакл).

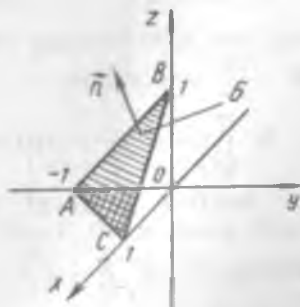
$z=1-x+y$ сирт тенгламасига эгамиз, $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 1$, $\cos\gamma > 0$, шу нинг учун

$$\cos\alpha = -\frac{-1}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \cos\beta = -\frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Берилган интегрални ҳисоблаш учун қуйидаги формулани ҳосил қиламиз:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\sigma^+} z dx dy + x dx dz + y dy dz = \iint_{\sigma^+} \left(y \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - x \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + z \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) d\sigma = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\sigma^+} ((y-x) + z) d\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\sigma_{xy}^+} (y-x + (1-x+y)) \sqrt{1+1+1} dx dy = \\ &= \iint_{\sigma_{xy}^+} (2y-2x+1) dx dy, \text{ бу ерда } \sigma_{xz}, \sigma \text{ сирт } (\sigma ABC) \text{ нинг } Oxy \end{aligned}$$



61-шакл

текисликка проекцияси (ΔAOC). Икки ўлчовли интегралда чегараларни қўйиб чиқамиз:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\sigma} (2y - 2x + 1) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x-1}^0 (2y - 2x + 1) dy = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 (2y - 2x + 1)^2 \Big|_{x-1}^0 dx = \frac{1}{4} \int_0^1 ((1 - 2x)^2 - 1) dx = \\ &= \left(-\frac{1}{8} \frac{(1 - 2x)^3}{3} - \frac{x}{4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{24} - \frac{1}{4} + \frac{1}{24} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3-дасрхона топшириғи

1. $\iint_{\sigma} \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$ интегрални ҳисобланг, бу ерда σ сирт $9x^2 + 9y^2 = 16z^2$ конус сиртининг $z=0$ ва $z=3$ текисликлар орасидаги қисми. Ж: $\frac{160\pi}{3}$.

2. $\iint_{\sigma} xyz d\sigma$ интегрални ҳисобланг, бу ерда σ сирт $x + y + z = 1$ текисликнинг биринчи октантда жойлашган қисми. Ж: $\frac{\sqrt{3}}{120}$.

3. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ яримсферанинг массасини ҳисобланг. Унинг ҳар бир нуктасидаги сиртий зичлиги $\gamma = x^2 y^2$ га тенг деб олинг. Ж: $\frac{128\pi}{15}$ масса бирл.

4. $\iint_{\sigma} yz dx dy + xz dy dz + xy dx dz$ интегрални ҳисобланг, бу ерда σ — биринчи октантда жойлашган ҳамда $x^2 + y^2 = R^2$ цилиндр ва $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=R$ текисликлардан тузилган сиртнинг ташки томони. Ж: $R^4 \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{8} \right)$.

5. $\iint_{\sigma} x dy dz + z^3 dx dy$ интегрални ҳисобланг, бу ерда σ — $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ сферанинг ташки томони. Ж: $\frac{32\pi}{15}$.

3-мустақил иш

1. $\iint_{\sigma} (z + 2x + \frac{4}{3}y) d\sigma$ интегрални ҳисобланг, бу ерда σ — $6x + 4y + 3z - 12 = 0$ текисликнинг биринчи октантда ётувчи қисми. Ж: $\frac{4}{\sqrt{61}}$.

2. $\iint_{\sigma} x^2 y^2 d\sigma$ интегрални ҳисобланг, бу ерда $\sigma: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

яримсфера. Ж: $\frac{2\pi R^5}{15}$.

3. $\iint_{\sigma} (y + 2z) dx dy$ интегрални ҳисобланг, бу ерда σ — биринчи

октантда жойлашган $6x + 3y + 2z = 6$ текисликнинг юқориги қисми.

Ж: $\frac{3}{8}$.

4. $\iint_{\sigma} z dy dz + (3y - x) dx dz - z dx dy$ интегрални ҳисобланг, бу ер-

да σ — $z=0$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = x^2 + y^2 + 2$ сиртлар билан чегараланган жисм сиртининг ташки томони. Ж: 5π .

10- назорат иши

1. Интеграллаш тартибини ўзгартиринг:

$$1.1. \int_0^2 dx \int_{4-2x^2}^{4-x^2} f(x, y) dy.$$

$$1.2. \int_0^2 dy \int_{y^2}^{y^2+2} f(x, y) dx.$$

$$1.3. \int_0^3 dx \int_{\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$1.4. \int_0^4 dx \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2}^{\frac{3}{2} - \frac{1}{4}x^2} f(x, y) dy.$$

$$1.5. \int_0^4 dy \int_{\frac{1}{y} + 1}^{\frac{3}{2}y + 4} f(x, y) dx.$$

$$1.6. \int_0^1 dy \int_{2y+1}^{4-y^2} f(x, y) dx.$$

$$1.7. \int_0^4 dy \int_{\frac{3}{2}\sqrt{x}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$1.8. \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{4}x^2}^{\frac{2}{4}\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

$$1.9. \int_0^4 dy \int_{\frac{1}{2}y+1}^{7-y} f(x, y) dx.$$

$$1.10. \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$1.11. \int_0^1 dx \int_{2x^2}^{3-x} f(x, y) dy.$$

$$1.12. \int_0^{\frac{1}{2}} dy \int_{2y^2}^{y+3} f(x, y) dx.$$

$$1.13. \int_{-1}^0 dx \int_{2x^2}^{x+3} f(x, y) dy.$$

$$1.14. \int_0^1 dy \int_{2y^2}^{3-y} f(x, y) dx.$$

$$1.15. \int_{-\frac{1}{2}}^0 dx \int_{2x^2}^{3-x} f(x, y) dy.$$

$$1.16. \int_0^4 dy \int_{\frac{1}{4y}}^{\sqrt{9+y^2}} f(x, y) dx.$$

$$1.17. \int_0^4 dx \int_{\frac{1}{4}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$1.18. \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{9+y^2}}^{\frac{1}{4y}} f(x, y) dx.$$

$$1.19. \int_0^1 dx \int_{-1}^{x^2+1} f(x, y) dy.$$

$$1.20. \int_0^4 dy \int_{\frac{3}{4y}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$1.21. \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$1.22. \int_0^4 dx \int_0^x f(x, y) dy.$$

$$1.23. \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy.$$

$$1.24. \int_1^2 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx.$$

$$1.25. \int_1^2 dy \int_0^{2y} f(x, y) dx.$$

$$1.26. \int_0^1 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx.$$

$$1.27. \int_0^3 dx \int_0^{3-x} f(x, y) dy.$$

$$1.28. \int_{\frac{1}{9}}^{\frac{1}{2}} dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

$$1.29. \int_0^1 dx \int_0^{x^2+1} f(x, y) dy.$$

$$1.30. \int_0^1 dx \int_0^{4-x^2} f(x, y) dy.$$

2. Берилган чизиклар билан чегараланган шаклнинг юзини ҳисобланг:

$$2.1. \quad y = \frac{3}{x}, y = 4e^x, \\ y = 3, y = 4.$$

$$2.2. \quad x = 8 - y^2, \\ x = -2y.$$

$$2.3. \quad y^2 - 2y + x^2 = 0, \\ y^2 - 4y + x^2 = 0, \\ y = x, x = 0.$$

$$2.4. \quad x^2 - 4x + y^2 = 0, \\ x^2 - 8x + y^2 = 0, \\ y = 0, y = -\frac{x}{\sqrt{3}}.$$

$$2.5. \quad y^2 - 6y + x^2 = 0,$$

$$2.6. \quad y = \frac{3}{x}, y = 8e^x, \\ y = 3, y = 8.$$

$$\begin{aligned} 2.7. \quad & y^2 - 8y + x^2 = 0, \\ & y^2 - 10y + x^2 = 0, \\ & y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.9. \quad & y^2 - 4y + x^2 = 0, \\ & y^2 - 6y + x^2 = 0, \\ & y = x, x = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.11. \quad & y^2 - 6y + x^2 = 0, \\ & y^2 - 10y + x^2 = 0, \\ & y = x, x = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.13. \quad & x^2 - 2x + y^2 = 0, \\ & x^2 - 6x + y^2 = 0, \\ & y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.15. \quad & x^2 - 2x + y^2 = 0, \\ & x^2 - 8x + y^2 = 0, \\ & y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.17. \quad & x^2 - 2x + y^2 = 0, \\ & x^2 - 4x + y^2 = 0, \\ & y = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.19. \quad & x^2 - 2x + y^2 = 0, \\ & x^2 - 6x + y^2 = 0, \\ & y = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.21. \quad & x^2 - 2x + y^2 = 0, \\ & x^2 - 6x + y^2 = 0, \\ & y = 0, y = x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.23. \quad & y^2 - 6y + x^2 = 0, \\ & y^2 - 8y + x^2 = 0, \\ & y = x, x = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.25. \quad & y^2 - 4y + x^2 = 0, \\ & y^2 - 8y + x^2 = 0, \\ & y = x, x = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.27. \quad & y^2 - 4y + x^2 = 0, \\ & y^2 - 8y + x^2 = 0, \\ & y = \sqrt{3}x, x = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.29. \quad & y^2 - 2y + x^2 = 0, \\ & y^2 - 10y + x^2 = 0, \\ & y = \frac{x}{\sqrt{3}}, x = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.8. \quad & y = \frac{\sqrt{x}}{2}, y = \frac{1}{2x}, \\ & x = 16. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.10. \quad & x = 5 - y^2, \\ & x = -4y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.12. \quad & y = \frac{3}{2} \sqrt{x}, \\ & y = \frac{3}{2x}, x = 9. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.14. \quad & y = 3\sqrt{x}, y = \frac{3}{x}, \\ & x = 4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.16. \quad & y = \frac{2}{x}, y = 5e^x, \\ & y = 2, y = 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.18. \quad & y = 32 - x^2, \\ & y = -4x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.20. \quad & y = 20 - x^2, \\ & y = -8x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.22. \quad & y = \frac{25}{4} - x^2, \\ & y = x - \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.24. \quad & y = \sqrt{x}, y = \frac{1}{x}, \\ & x = 16. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.26. \quad & y = \frac{2}{x}, y = 7e^x, \\ & y = 2, y = 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.28. \quad & x = 27 - y^2, \\ & x = -6y. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2.30. \quad & y = 11 - x^2, \\ & y = -10x. \end{aligned}$$

3. Сиртий зичлиги γ маълум булса, берилган x ва y билан чегараланган D пластинканинг массасини топинг:

$$3.1. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \quad x^2 + y^2 = 4, \\ x &= 0, \quad y = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \\ \gamma &= \frac{x+y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

$$3.2. \quad \begin{aligned} x &= 1, \quad y = 0, \\ y^2 &= 4x \quad (y \geq 0), \\ \gamma &= 7x^2 + y. \end{aligned}$$

$$3.3. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9, \quad x^2 + y^2 = 16, \\ x &= 0, \quad y = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \\ \gamma &= 2(x^2 + y^2). \end{aligned}$$

$$3.4. \quad \begin{aligned} y^2 &= 4x, \quad x = 1, \\ y &= 0 \quad (y \geq 0), \\ \gamma &= \frac{7x^2}{2} + 5y. \end{aligned}$$

$$3.5. \quad \begin{aligned} x &= 2, \quad y = 0, \\ y^2 &= 2x \quad (y \geq 0), \\ \gamma &= \frac{7x^2}{8} + 2y. \end{aligned}$$

$$3.6. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \quad x^2 + y^2 = 16, \\ x &= 0, \quad y = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \\ \gamma &= \frac{x+y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

$$3.7. \quad \begin{aligned} x &= 2, \quad y = 0, \\ y^2 &= \frac{x}{2} \quad (y \geq 0), \\ \gamma &= \frac{7x^2}{2} + 6y. \end{aligned}$$

$$3.8. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4, \quad x^2 + y^2 = 25, \\ x &= 0, \quad y = 0 \quad (x \geq 0, y \leq 0), \\ \gamma &= \frac{2x-3y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

$$3.9. \quad \begin{aligned} x &= 1, \quad y = 0, \\ y^2 &= 4x \quad (y \geq 0), \\ \gamma &= x + 3y^2. \end{aligned}$$

$$3.10. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \quad x^2 + y^2 = 9, \\ x &= 0, \quad y = 0 \quad (x \geq 0, y \leq 0), \\ \gamma &= \frac{x-y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

$$3.11. \quad \begin{aligned} x &= 1, \quad y = 0, \quad y^2 = x, \\ (y \geq 0), \gamma &= 3x + 6y^2. \end{aligned}$$

$$3.12. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9, \quad x^2 + y^2 = 25, \\ x &= 0, \quad y = 0 \quad (x \leq 0, y \leq 0), \\ \gamma &= \frac{2y-x}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

$$3.13. \quad \begin{aligned} x &= 2, \quad y = 0, \quad y^2 = \frac{x}{2} \\ (y \geq 0), \gamma &= 2x + 3y^2. \end{aligned}$$

$$3.14. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4, \quad x^2 + y^2 = 16, \\ x &= 0, \quad y = 0 \quad (x \leq 0, y \geq 0), \\ \gamma &= \frac{2y-3x}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

$$3.15. \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}, \quad y = 0, \\ y^2 &= 8x \quad (y \geq 0), \\ \gamma &= 7x + 3y^2. \end{aligned}$$

$$3.16. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 9, \quad x^2 + y^2 = 16, \\ x &= 0, \quad y = 0 \quad (x \leq 0, y \geq 0), \\ \gamma &= \frac{2y-5x}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

$$3.17. \quad \begin{aligned} x &= 1, \quad y = 0, \\ y^2 &= 4x \quad (y \geq 0), \\ \gamma &= 7x^2 + 2y. \end{aligned}$$

$$3.18. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \quad x^2 + y^2 = 16, \\ x &= 0, \quad y = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \\ \gamma &= \frac{x+3y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

$$3.19. \quad \begin{aligned} x &= 2, \quad y^2 = 2x, \\ y &= 0 \quad (y \geq 0), \\ \gamma &= \frac{7x^2}{4} + \frac{y}{2}. \end{aligned}$$

$$3.20. \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \quad x^2 + y^2 = 4, \\ x &= 0, \quad y = 0 \quad (x \geq 0, y \geq 0), \\ \gamma &= \frac{x+2y}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

$$3.21. \begin{aligned} x &= 2, y = 0, \\ y^2 &= 2x \ (y \geq 0), \\ \gamma &= \frac{7x^2}{4} + y. \end{aligned}$$

$$3.23. \begin{aligned} x &= 2, y = 0, \\ y^2 &= \frac{x}{2} \ (y \geq 0), \\ \gamma &= \frac{7x^2}{2} + 8y. \end{aligned}$$

$$3.25. \begin{aligned} x &= 1, y = 0, \\ y^2 &= 4x \ (y \geq 0), \\ \gamma &= 6x + 3y^2. \end{aligned}$$

$$3.27. \begin{aligned} x &= 2, y = 0, \\ y^2 &= \frac{x}{2} \ (y \geq 0), \\ \gamma &= 4x + 6y^2. \end{aligned}$$

$$3.29. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}, y = 0, \\ y^2 &= 2x \ (y \geq 0), \\ \gamma &= 4x + 9y^2. \end{aligned}$$

$$3.22. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, x^2 + y^2 = 9, \\ x &= 0, y = 0 \ (x \geq 0, y \leq 0), \\ \gamma &= \frac{2x - y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

$$3.24. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, x^2 + y^2 = 25 \\ x &= 0, y = 0 \ (x \geq 0, y \leq 0), \\ \gamma &= \frac{x - 4y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$3.26. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4, x^2 + y^2 = 16, \\ x &= 0, y = 0 \ (x \geq 0, y \leq 0), \\ \gamma &= \frac{3x - y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

$$3.28. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4, x^2 + y^2 = 9, \\ x &= 0, y = 0 \ (x \leq 0, y \geq 0), \\ \gamma &= \frac{y - 4x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

$$3.30. \begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4, x^2 + y^2 = 9, \\ x &= 0, y = 0 \ (x \leq 0, y \geq 0), \\ \gamma &= \frac{y - 2x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

4. Эгри чизикли интегралларни ҳисобланг:

$$4.1. \int_L (x^2 + y^2) dl, \text{ бу ерда } L — x^2 + y^2 = 4x \text{ айлана.}$$

$$4.2. \int_L (4 \sqrt[3]{x} - 3 \sqrt[3]{y}) dl, \text{ бу ерда } L — x = \cos^3 t, y = \sin^3 t \text{ астроида-}$$

нинг $A(1, 0)$ ва $B(0, 1)$ нукталар орасидаги ёйи.

$$4.3. \int_L xy dl, \text{ бу ерда } L — \text{томонлари } x=1, x=-1, y=1, y=-1 \text{ бўлган квадрат контури.}$$

$$4.4. \int_L y^2 dl, \text{ бу ерда } L — x=t-\sin t, y=1-\cos t \text{ циклоиданинг биринчи арки.}$$

$$4.5. \int_L xy dl, \text{ бу ерда } L — \text{учлари } A(2, 0), B(4, 0), C(4, 3), D(2, 3) \text{ дан иборат тўғри тўртбурчак контури.}$$

$$4.6. \int_L y dl, \text{ бу ерда } L — y^2 = 2x \text{ параболанинг } x^2 = 2y \text{ парабола кесган ёйи.}$$

4.7. $\int_L \frac{dl}{x-y}$, бу ерда L — тўғри чизикнинг $A(4, 0)$, $B(6, 1)$ нукталар орасидаги кесмаси.

4.8. $\int_L (x^2 + y^2) 2dl$, бу ерда L — $r=2$ айлананинг биринчи чораги.

4.9. $\int_L (x-y) dl$, бу ерда L — $x^2 + y^2 = 2x$ айлана.

4.10. $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, бу ерда L — $x^2 + y^2 = 2x$ айлана.

4.11. $\int_L xy dl$, бу ерда L — учлари $O(0, 0)$, $A(3, 0)$, $B(3, 4)$, $D(0, 4)$ булган тўғри тўртбурчак контури.

4.12. $\int_L (x^2 + y^2) dl$, бу ерда L — $x^2 + y^2 = 4$ айлана.

4.13. $\int_L \frac{dl}{\sqrt{8-x^2-y^2}}$, бу ерда L — $O(0, 0)$ ва $B(2, 2)$ нукталарни туташтирувчи тўғри чизик кесмаси.

4.14. $\int_L (4\sqrt{x} - 3\sqrt{y}) dl$, бу ерда L — $A(-1, 0)$ ва $B(0, 1)$ нукталарни туташтирувчи тўғри чизик кесмаси.

4.15. $\int_L \frac{dl}{x-y}$, бу ерда L — $A(0, 4)$ ва $B(4, 0)$ нукталар орасида жойлашган тўғри чизик кесмаси.

4.16. $\int_L \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dl$, бу ерда L — $r = 2(1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ кардионда ёйи.

4.17. $\int_L y dl$, бу ерда L — $x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$ астроиданинг $A(1, 0)$ ва $B(0, 1)$ нукталар орасидаги ёйи.

4.18. $\int_L y dl$, бу ерда L — $y^2 = \frac{2}{3}x$ параболанинг $O(0, 0)$ ва $A(\frac{\sqrt{35}}{6}, \frac{\sqrt{35}}{3})$ нукталар орасидаги ёйи.

4.19. $\int_L (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl$, бу ерда L — $A(1, 0)$ ва $B(0, 1)$ нукталар орасидаги тўғри чизик кесмаси.

4.20. $\int_L \arctg \frac{y}{x} dl$, бу ерда L — $r = (1 + \cos \varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ кардиоидда ёйи.

4.21. $\int_L xy dl$, бу ерда L — учлари $O(0, 0)$, $A(5, 0)$, $B(5, 3)$, $C(0, 3)$

булган тўғри тўртбурчак контури.

4.22. $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$, бу ерда L — $x^2 + y^2 = 2y$ айлана.

4.23. $\int_L (x + y) dl$, бу ерда L — $r^2 = \cos 2\varphi$, $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ Бернул-

ли лемнискатасининг ёйи.

4.24. $\int_L (x + y) dl$, бу ерда L — учлари $O(0, 0)$, $A(-1, 0)$,

$B(0, 1)$ булган учбурчак контури.

4.25. $\int_L (x^2 + y^2) dl$, бу ерда L — $r = 4$ айлананинг биринчи чораги.

4.26. $\int_L (x + y) dl$, бу ерда L — учлари $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $O(0, 0)$ бўл-

ган учбурчак контури.

4.27. $\int_L xy dl$, бу ерда L — учлари $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, $B(4, 2)$, $C(0, 2)$

булган тўғри тўртбурчак контури.

4.28. $\int_L \frac{(y^2 - x^2)xy}{(x^2 + y^2)} dl$, бу ерда L — $r = 9 \sin 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ эгри чи-

зик ёйи.

4.29. $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$, бу ерда L — $O(0, 0)$ ва $A(1, 2)$ нукталарни

туташирувчи тўғри чизик кесмаси.

4.30. $\int_L \sqrt{2y} dl$, бу ерда L — $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ циклон-

данинг биринчи арки.

5. Эгри чизикли интегрални ҳисобланг:

5.1. $\int_{AB} (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$, бу ерда AB — $y = x^2$ парабо-

ланинг $A(-1, 1)$ дан $B(1, 1)$ гача ёйи.

5.2. $\int_{AB} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{3\sqrt{x^5} + \sqrt{y^5}}$, бу ерда AB — $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ астрои-

данинг $A(2, 0)$ дан $B(0, 2)$ нуктагача ёйи.

5.3. $\int_{AB} (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$, бу ерда AB — $y + x^3$ кубик парабола-

нинг $A(0, 0)$ дан $B(1, 1)$ нуктагача ёйи.

5.4. $\oint_L (x+2y)dx + (x-y)dy$, бу ерда $L - x=2\cos t, y=2\sin t$ айлана (айланиб ўтиш мусбат).

5.5. $\oint_L (x^2y-x)dx + (y^2x-2y)dy$, бу ерда $L - x=3\cos t, y=2\sin t$ эллипс ёйи (айланиб ўтиш мусбат).

5.6. $\int_L (xy-1)dx + x^2ydy$, бу ерда $L - x=\cos t, y=2\sin t$ эллипсининг $A(1, 0)$ нуктадан $B(0, 2)$ нуктагача ёйи.

5.7. $\int_{OBA} 2xydx - x^2dy$, бу ерда $OBA - O(0, 0), B(2, 0), A(2, 1)$ нукталарни туташтирувчи синик чизик.

5.8. $\int_{AB} (x^2-y^2)dx + xydy$, бу ерда $AB - A(1, 1), B(3, 4)$ нукталарни туташтирувчи тўғри чизик кесмаси.

5.9. $\int_L \cos ydx - \sin xdy$, бу ерда $L - AB$ тўғри чизик кесмаси $A(2\pi, -2\pi), B(-2\pi; 2\pi)$.

5.10. $\int_L \frac{ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, бу ерда $L - AB$ тўғри чизик кесмаси $A(1, 2), B(3, 6)$.

5.11. $\int_L xydx + (y-x)dy$, бу ерда $L - y=x^3$ кубик параболанинг $A(0, 0)$ нуктадан $B(1, 1)$ нуктагача ёйи.

5.12. $\int_L (x^2+y^2)dx + (x+y^2)dy$, бу ерда $L - ABC$ синик чизик $A(1, 2), B(3, -2), C(3, 5)$.

5.13. $\int_L y^2dx + x^2dy$, бу ерда $L - x=a\cos t, y=b\sin t$ эллипсининг соат мили бўйича айланиб ўтилган юкори ярми.

5.14. $\int_L (xy-y^2)dx + xdy$, бу ерда $L - y=2\sqrt{x}$ параболанинг $O(0, 0)$ нуктадан $B(1, 2)$ нуктагача ёйи.

5.15. $\int_L xdx + xydy$, бу ерда $L - x^2+y^2=2x$ айлананинг контурни мусбат айланиб чиққандаги юкориги ярми.

5.16. $\int_L (x-y)dx + dy$, бу ерда $L - x^2+y^2=R^2$ айлананинг контурни мусбат йўналишда айланиб чиққандаги юкориги ярми.

5.17. $\oint_L (x^2-y)dx$, бу ерда L контур $x=0, y=0, x=1, y=2$ тўғри чизиклар ҳосил қилган тўғри тўртбурчак (контурни айланиб ўтиш йўналиши мусбат).

- 5.18. $\int_L 4x \sin^2 y dx + y \cos 2x dy$, бу ерда L — $O(0, 0)$ ва $B(3, 6)$ нукталарни туташтирувчи тўғри чизик кесмаси.
- 5.19. $\oint_L y dx - x dy$, бу ерда L — $x = 6 \cos t$, $y = 4 \sin t$ эллипсининг контурни айланиб чиқиш йўналиши мусбат бўлгандаги ёйи.
- 5.20. $\int_L 2xy dx - x^2 dy$, бу ерда L — $x = 2y^2$ параболанинг $O(0, 0)$ нуктадан $A(2, 1)$ нуктагача ёйи.
- 5.21. $\int_L (x, y - x) dx + \frac{1}{2} x^2 dy$, бу ерда L — $y^2 = 4x$ параболанинг $A(0, 0)$ нуктадан $B(1, 2)$ нуктагача ёйи.
- 5.22. $\oint (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$, бу ерда L — учлари $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ бўлган учбурчак контури (контурни айланиб чиқиш йўналиши мусбат).
- 5.23. $\int_L (xy - x) dx + \frac{x^2}{2} dy$, бу ерда L — ABO синик чизик: $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $B(\frac{1}{2}, 3)$; контурни айланиб чиқиш йўналиши мусбат.
- 5.24. $\int_L (xy - y^2) dx + x dy$, бу ерда L — $O(0, 0)$ нуктадан $A(1, 2)$ нуктагача тўғри чизик кесмаси.
- 5.25. $\int_L x dy - y dx$, бу ерда L — $y = x^3$ кубик параболанинг $O(0, 0)$ нуктадан $A(2, 8)$ нуктагача ёйи.
- 5.26. $\int_L 2xy dx - x^2 dy$, бу ерда L — $y = \frac{x^2}{4}$ параболанинг $A(0, 0)$ нуктадан $B(2, 1)$ нуктагача ёйи (бўлаги).
- 5.27. $\int_L (xy - x) dx + \frac{x^2}{2} dy$, бу ерда L — $y = 4x^2$ параболанинг $O(0, 0)$ нуктадан $A(1, 4)$ нуктагача ёйи.
- 5.28. $\int_L (x + y) dx + (x - y) dy$, бу ерда L — $y = x^2$ параболанинг $A(-1, 1)$ нуктадан $B(1, 1)$ нуктагача ёйи.
- 5.29. $\oint x dy - y dx$, бу ерда L — учлари $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ нукталарда бўлган учбурчак контури (контурни айланиб ўтиш йўналиши мусбат).
- 5.30. $\int_L (x^2 + y) dx + (x + y^2) dy$, бу ерда L — ABC синик чизик: $A(2, 0)$, $B(5, 3)$, $C(5, 0)$.

6. Берилган ифодалар $u(x, y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали эканлигини курсатинг. Эгри чизикли интеграл ёрдамида $u(x, y)$ функцияни топинг:

$$6.1. (10xy^3 + 12x^3 + 6) dx + (15x^2y - 5) y dy.$$

$$6.2. (y^2 e^{xy} + 6x - 8) dx + (2xy e^{xy} - 8y) dy.$$

$$6.3. (\cos x \cdot \cos y + 6x + 3) dx + (18y^2 - \sin x \cdot \sin y) dy.$$

$$6.4. \left(\sin x + \frac{\cos x \cos y}{\sin^2 x} \right) dx + \left(\frac{\sin y}{\sin x} - \cos y \right) dy.$$

$$6.5. \left(\frac{1}{y-1} - \frac{y}{(x-1)^2} - 1 \right) dx + \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{(y-1)^2} + 2y \right) dy.$$

$$6.6. \left(\frac{y}{1+x^2y^2} - 1 \right) dx + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} - 10 \right) dy.$$

$$6.7. \left(\frac{1}{x-1} + \frac{\cos x}{y-1} + 3x^2 \right) dx + \frac{1 - \sin x}{(y-1)^2} dy.$$

$$6.8. \left(2\cos 2x \cos 3y - \frac{1}{x} \right) dx + \left(\frac{2}{y} - 3\sin 2x \sin 3y \right) dy.$$

$$6.9. \left(e^{-x} - \frac{2}{x^3y} \right) dx + \left(\sin 3y - \frac{1}{x^2y^2} \right) dy.$$

$$6.10. (xy e^{x^2y} + \cos 2x + x^2) dx + \left(\frac{x^2}{2} e^{x^2y} + y \right) dy.$$

$$6.11. \left(\frac{1}{x+y} + 2 \right) dx + \left(\frac{1}{x+y} - 3 \right) dy.$$

$$6.12. (x + y \cdot \sin^2 y) dx + (1 + x \sin^2 y + xy \sin 2y) dy.$$

$$6.13. \frac{1-2y}{x^3y} dx + \frac{1-x}{xy^2} dy.$$

$$6.14. \left(e^{-x} - \frac{2}{yx^3} \right) dx + \left(\sin 3y - \frac{1}{x^2y^2} \right) dy.$$

$$6.15. \left(2xy - \frac{1}{x^2} \right) dx + \left(x^2 - \frac{2}{y^3} \right) dy.$$

$$6.16. \left(\frac{1}{x-1} + \frac{\cos x}{y-1} \right) dx + \frac{1 - \sin x}{(y-1)^2} dy.$$

$$6.17. \left(\ln y + \frac{y}{x} - x \right) dx + \left(\ln x + \frac{x}{y} + 1 \right) dy.$$

$$6.18. \left(2\cos 2x \cdot \cos 3y - \frac{1}{x} \right) dx - \left(\frac{2}{y} - 3\sin 2x \cdot \sin 3y \right) dy.$$

$$6.19. \left(\frac{2}{x^2} + \cos^2 y \right) dx + (y - x \sin 2y) dy.$$

$$6.20. \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} \right) dx + \frac{1-x}{y^2} dy = 0.$$

$$6.21. (\sin^2 y - y \cdot \sin 2x) dx + (x \sin 2y + \cos^2 x + 1) dy.$$

$$6.22. \left(\frac{y}{x} + \ln y + 2x \right) dx + \left(\ln x + \frac{x}{y} + 1 \right) dy.$$

$$6.23. \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}} + x^2 \right) dx + \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}} + y \right) dy.$$

$$6.24. \left(\frac{y}{1+x^2y^2} - 1 \right) dx + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} - 10 \right) dy.$$

$$6.25. \frac{1-y}{x^2y} dx + \frac{1-2x}{y^2x} dy.$$

$$6.26. \left(\frac{y^2}{(x+y)^2} - \frac{1}{x} \right) dx + \left(\frac{x^2}{(x+y)^2} + \frac{1}{y} \right) dy.$$

$$6.27. \left(x - \frac{y}{x^2+y^2} \right) dx + \left(\frac{x}{x^2+y^2} - y \right) dy.$$

$$6.28. (y \cos xy + 2x - 3y) dx + (x \cos xy - 3x + 4y) dy.$$

$$6.29. (5y + \cos x + 6xy^2) dx + (5x + 6x^2y) dy.$$

$$6.30. (y - \sin x) dx + (x - 2y \cos y^2) dy.$$

ВЕКТОР АНАЛИЗИ

1-§. Скаляр майдон. Сатҳ чизиклари ва сиртлари.
Йўналиш бўйича ҳосила. Градиент. Вектор майдон.
Вектор чизиклар

12.1.1. Агар фазодаги бирор D соҳанинг ҳар бир $M = M(x, y, z)$ нуктасида $u = u(M) = f(x, y, z)$ скаляр функция берилган бўлса, у ҳолда бу соҳада *скаляр майдон берилган* дейилади. $u = f(x, y, z)$ функция *майдон функцияси* дейилади.

Агар D соҳа текисликка тегишли бўлса, скаляр майдон *ясси майдон* дейилади.

Скаляр майдоннинг $u(x, y, z) = C$ (C — ўзгармас сон) тенглама билан аниқланган қисми *сатҳ сирти* дейилади. $u(x, y) = C$ тенглама ясси скаляр майдоннинг *сатҳ чизиғи*ни аниқлайди.

Агар $\vec{l} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$ — бирор l йўналишдаги бирлик вектор бўлса, у ҳолда скаляр майдоннинг дифференциалланувчи $u = f(x, y, z)$ функциясининг l йўналиш бўйича ҳосиласи $\frac{\partial u}{\partial l}$ куйидаги

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma$$

формула билан аниқланади.

Скаляр майдон функцияси $u = f(x, y)$ бўлса, у ҳолда

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta,$$

бу ерда $\vec{l} = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j}$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

$u = f(x, y, z)$ скаляр майдоннинг градиенти деб, куйидаги

$$\text{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

векторга айтилади.

$u = f(x, y, z)$ функциянинг берилган нуктадаги градиенти билан бу нуктадаги йўналиш бўйича ҳосила орасида куйидаги муносабат билан ифодаланувчи боғланиш мавжуд:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{grad} u \cdot \vec{l} \text{ ёки } \frac{\partial u}{\partial t} = n_{\vec{l}} \text{grad} u.$$

Градиент куйидаги хоссаларга эга:

- а) $\text{grad}(u_1 + u_2) = \text{grad} u_1 + \text{grad} u_2$;
- б) $\text{grad} Cu = C \text{grad} u$ ($C = \text{const}$);
- в) $\text{grad}(u_1 \cdot u_2) = u_1 \text{grad} u_2 + u_2 \text{grad} u_1$.

1-мисол. $u = xy^2z^3$ функция ва $M(3, 2, 1)$, $N(5, 4, 2)$ нукта берилган. Бу функциянинг M нуктадаги $\overrightarrow{MN}$ вектор йўналиши бўйича ҳосиласини топинг.

Ечиш. u функциянинг $M(3, 2, 1)$ нуктадаги хусусий ҳосилалари:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = y^2 z^3|_M = 2^2 \cdot 1^3 = 4;$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = 2xyz^3|_M = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1^3 = 12;$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_M = 3xy^2z^2|_M = 3 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 = 36.$$

$\overrightarrow{MN}$ вектор билан йўналиши бир хил бўлган $\vec{l}$ бирлик вектор

$$\vec{l} = \frac{\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{MN}|}$$

га тенг, бу ерда

$$\overrightarrow{MN} = (5-3)\vec{i} + (4-2)\vec{j} + (2-1)\vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k},$$

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3. \text{ Демак,}$$

$$\vec{l} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}.$$

Шундай қилиб,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \cdot \frac{2}{3} + 12 \cdot \frac{2}{3} + 36 \cdot \frac{1}{3} = \frac{68}{3}.$$

2-мисол. $u = \ln(x^2 + y^2)$ функциянинг $M(3, 4)$ нуктадаги u функция градиенти йўналишидаги ҳосиласини топинг.

Ечиш. Бу ерда $\vec{l}$ вектор функциянинг $M(3, 4)$ нуктадаги градиенти билан бир хил йўналган, шунинг учун $\frac{\partial u}{\partial t} = |\text{grad} u|$.

$M(3, 4)$ нуктадаги хусусий ҳосилалар:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M = \frac{2x}{x^2 + y^2} \Big|_M = \frac{6}{25}, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_M = \frac{2y}{x^2 + y^2} \Big|_M = \frac{8}{25}.$$

Демак,

$$\text{grad} u|_M = \frac{6}{25}\vec{i} + \frac{8}{25}\vec{j}.$$

Шундай қилиб,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{\left(\frac{6}{25}\right)^2 + \left(\frac{8}{25}\right)^2} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}.$$

12.1.2. Агар фазодаги D соҳанинг ҳар бир $M(x, y, z)$ нуктасида $\vec{a}(M) = \{P, Q, R\}$ вектор (бу ерда $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — скаляр функциялар) аниқланган бўлса, у ҳолда D соҳада *вектор майдон берилган* дейилади.

Вектор майдоннинг *вектор чизиғи* деб шундай чизикка айтиладики, унинг ҳар бир нуктасида уринманинг йўналиши шу нуктага мос келган $\vec{a}(M)$ векторнинг йўналиши билан бир хил бўлади.

Сирт бўлагининг нукталари орқали ўтувчи ҳамма вектор чизиклар тўплами *вектор найчалари* дейилади.

Вектор чизиклари ушбу дифференциал тенгламалар системасидан аниқланади:

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)}.$$

Координаталари вақтга боғлиқ бўлмаган майдон (скаляр ёки вектор) *стационар ёки барқарор майдон* дейилади.

3-мисол. $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + b\vec{k}$ вектор майдоннинг $M(1, 0, 0)$ нуктадан ўтадиган вектор чизиғини топинг.

Еч и ш. $P(x, y, z) = -y$, $Q(x, y, z) = x$, $R(x, y, z) = b$ эканлигини ҳисобга олиб, вектор чизикларнинг ушбу

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{b}$$

дифференциал тенгламалар системасини ҳосил қиламиз.

Уларни ечамиз:

$$\begin{cases} \frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x}, & \begin{cases} xdx + ydy = 0, \\ \frac{dy}{x} = \frac{dz}{b}, \end{cases} \\ \frac{dy}{x} = \frac{dz}{b}, & \begin{cases} x^2 + y^2 = C_1^2, \\ \frac{dz}{b} = \frac{dy}{x} \end{cases} \end{cases}$$

ёки параметрик шаклда:

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t, \\ y = C_1 \sin t, \\ \frac{dz}{b} = \frac{C_1 \cos t dt}{C_1 \cos t} \end{cases} \quad \begin{cases} x = C_1 \cos t, \\ y = C_1 \sin t, \\ z = bt + C_2 \end{cases}$$

Интеграллаш доимийлари вектор чизик $M(1, 0, 0)$ нуктадан утади деган шартдан топилади: $C_1=1$ ва $C_2=0$.

Шундай қилиб, $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + b\vec{k}$ вектор майдоннинг вектор чизиклари ушбу $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = bt$ (винт чизик) тенгламалар билан аникланади.

1- дарсхона топшириғи

1. Қуйидаги

а) $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$; б) $u = \frac{z}{x^2 + y^2}$

функциялар аниқлайдиган скаляр майдонларнинг сатҳ сиртлари тенгламаларини ёзинг ва уларни чизинг.

2. $z = xy$ ясси скаляр майдоннинг сатҳ чизикларини чизинг.

3. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2z$ функциянинг $M_1(1, 3, 2)$ нуктадаги $M_2(0, 5, 0)$ нукта томон йўналиши бўйича ҳосиласини топинг. Ж: $-\frac{11}{3}$.

4. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ функциянинг $M_0(3, 4)$ нуктадаги:

а) $\vec{a} = \{1, 1\}$ вектор бўйича; б) M_0 нуктанинг радиус-вектори бўйича; в) $\vec{s} = \{4, 3\}$ вектор йўналиши бўйича ҳосиласини топинг. Ж: а) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$; б) 1; в) 0.

5. Агар $u = x^2yz - xy^2z + xyz^2$ бўлса, $M_0(1, 1, 1)$ нуктада $\text{grad } u$ ни топинг.

Ж: $\text{grad } u = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

6. $u = \frac{3}{2}x^2 + 3y^2 - 2z^2$ ва $v = x^2yz$ функцияларнинг $M(2, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ нуктадаги градиентлари орасидаги φ бурчакни топинг. Ж: $\frac{\pi}{2}$.

7. $z = \frac{2x^2}{y}$ сиртнинг $M(2, 1, 8)$ нуктадаги энг катта кўтарилиш тиклигининг φ бурчагини топинг. Ж: $\text{tg } \varphi = 8\sqrt{10}$, $\varphi \approx 87^\circ 40'$.

8. Агар: а) $\vec{a} = \omega y\vec{i} + \omega x\vec{j}$, $\omega \neq 0$; б) $\vec{a} = 5x\vec{i} + 10y\vec{j}$; в) $\vec{a} = 4z\vec{j} - 9y\vec{k}$ бўлса, вектор майдоннинг вектор чизикларини топинг. Ж: а) $x^2 - y = C_1$, $z = C_2$; б) $x^2 = C_1y$, $z = C_2$; в) $9y^2 + 4z^2 + C_1$, $x = C_2$.

1- мустақил иш

1. Ясси $z = 4 - x^2 - y^2$ скаляр майдоннинг сатҳ чизикларини ва $M(1, 2)$ нуктадаги $\text{grad } z$ ни ясанг.

2. $u = x + \ln(y + z^2)$ функциянинг $M(2, 1, 1)$ нуктадаги $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ вектор йўналишидаги ҳосиласини ҳисобланг. Ж: $-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

3. $z = 5x^2 - 2xy + y^2$ сиртнинг $M(1, 1, 4)$ нуктадаги энг катта кутарилиш тиклигининг φ бурчагини топинг.

Ж: $\operatorname{tg} \varphi = 8$, $\varphi \approx 83^\circ$.

4. Агар:

а) $\vec{a} = (x+y)\vec{i} - x\vec{j} - x\vec{k}$; б) $\vec{a} = 2x\vec{i} + 8z\vec{k}$

бўлса, вектор майдонларнинг вектор чизикларини топинг.

Ж: а) $x^2 + y^2 + z^2 = C_1^2$, $y - z = C_1$;

б) $z = C_1 x^4$, $y = C_2$.

2-§. Вектор майдон оқими. Остроградский теоремаси. Вектор (майдон) дивергенцияси

12.2.1. Сирт оркали ўтадиган оқимни ҳисоблаш.

Агар σ сиртнинг ҳар бир нуктасидаги нормалнинг мусбат йўналиши

$$\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$$

бирлик вектор оркали аниқланган бўлса, у ҳолда $\vec{a}(M) = \{P, Q, R\}$ вектор майдоннинг σ сирт оркали ўтувчи Π оқими деб қуйидаги иккинчи тур сирт интегралига айтилади:

$$\Pi = \iint_{\sigma} P(x, y, z) dydz + Q(x, y, z) dzdx + R(x, y, z) dxdy,$$

ёки

$$\Pi = \iint_{\sigma} [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] d\sigma$$

ёки вектор шаклда

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma.$$

Агар σ — ёпик бўлакчи-силлик сирт бўлиб, ташки нормалнинг бирлик вектори $\vec{n}_0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ бўлса, у ҳолда бу сирт оркали оқиб ўтадиган $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ вектор оқими Π ни ушбу Остроградский — Гаусс формуласи ёрдамида ҳисоблаш мумкин:

$$\Pi = \oint\oint_{\sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz,$$

бу ерда Ω — фазонинг σ сирт билан чегаралаган бўлаги.

$\vec{a}(M) = \{P, Q, R\}$ вектор майдоннинг дивергенцияси деб $\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ муносабат билан аниқланган скаляр микдорга айтилади.

Остроградский — Гаусс формуласи вектор шаклида қуйидагича ёзилади:

$$\oint\oint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} dxdydz.$$

$$a) \operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b};$$

$$b) \operatorname{div} \vec{c} = 0, \text{ агар } \vec{c} \text{ — ўзгармас вектор бўлса};$$

$$в) \operatorname{div} f \vec{a} = f \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} f,$$

бу ерда $f = f(x, y, z)$ — скаляр функция.

12.2.2. Сирт орқали оқиб ўтадиган оқимни ҳисоблашга мисоллар кўрамиз.

1-мисол. $\vec{a} = x\vec{i} - 2y\vec{j} + z\vec{k}$ вектор майдоннинг $x + 2y + 3z - 6 = 0$ текислигининг биринчи октантда жойлашган юқори қисми бўйича оқимини ҳисобланг.

Ечиш. Текислигининг нормал бирлик вектори $\vec{n}^0 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right\}$ бўлади. $\vec{a}$ вектор оқимини қуйидаги формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$\Pi = \oiint_{\sigma} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 d\sigma = \frac{1}{\sqrt{14}} \iint_{\sigma} (x - 4y + 3z) d\sigma.$$

Бу ерда

$$z = \frac{1}{3}(6 - x - 2y), \quad d\sigma = \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} dx dy = \frac{\sqrt{14}}{3} dx dy.$$

Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{3} \iint_D (x - 4y + 6 - x - 2y) dx dy = \frac{1}{3} \iint_D (6 - 6y) dx dy = \\ &= 2 \int_0^3 dy \int_0^{6-2y} (1 - y) dx = 2 \int_0^3 (1 - y)(6 - 2y) dy = 2 \int_0^3 (6 - 8y + 2y^2) dy = \\ &= 4 \int_0^3 (y^2 - 4y + 3) dy = 4 \left(\frac{1}{3}y^3 - 2y^2 + 3y \right) \Big|_0^3 = \\ &= 4 \left(\frac{27}{3} - 18 + 9 \right) = 0. \end{aligned}$$

2-мисол. $\vec{a} = xz^2\vec{i} + yx^2\vec{j} + zy^2\vec{k}$ вектор майдоннинг $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ шар сирти бўйича унинг ташки томонига оқимини ҳисобланг.

Ечиш. Сирт ёпик бўлгани учун $\vec{a}$ вектор майдоннинг шар сирти бўйича ташки томонига оқими Π ни Остроградский — Гаусс формуласи бўйича топамиз:

$$\Pi = \iiint_V \vec{a} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz = \iiint_V (z^2 + x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Уч ўлчовли интегрални ҳисоблаш учун қуйидаги формулалар ёрдамида сферик координаталарга ўтамиз:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta,$$

$$0 \leq r \leq a,$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

$$0 \leq \theta \leq \pi.$$

У ҳолда

$$I = \iiint_0^a r^4 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \int_0^a r^4 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4a^5 \pi}{5}.$$

2- дарсхона топириғи

1. $\vec{a} = (x-3z)\vec{i} + (x+2y+z)\vec{j} + (4x+y)\vec{k}$ вектор майдоннинг $x+y+z=2$ текислигининг биринчи октантда ётган юкори қисми бўйича оқимини ҳисобланг. Ж: $\frac{26}{3}$.

2. $\vec{a} = 8x\vec{i} + 11y\vec{j} + 17z\vec{k}$ вектор майдоннинг $x+2y+3z=1$ текислигининг биринчи октантда жойлашган қисми бўйича оқимини ҳисобланг. Нормал Oz ўқи билан ўткир бурчак ҳосил қилади. Ж: 1.

3. $\vec{a} = (xy+z^2)\vec{i} + (yz+x^2)\vec{j} + (zx+y^2)\vec{k}$ вектор майдоннинг $M(1, 3, -5)$ нуктадаги дивергенциясини ҳисобланг. Ж: -1 .

4. $\vec{a} = (x-y)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + z^2\vec{k}$ вектор майдоннинг $x^2+y^2=1$, $z=0$ ва $z=2$ сиртлар билан чегараланган цилиндр жисм сирти бўйича ташки нормал йўналишида оқимини ҳисобланг. Ж: -4π .

2- мустақил иш

1. Вектор майдоннинг дивергенциясини топинг.

а) $\vec{a} \approx xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z^3\vec{k}$, $M(1, -1, 3)$ нуктада;

б) $\text{grad } u$, бу ерда $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$;

в) $\text{grad } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. Вектор майдоннинг Π оқимини ҳисобланг:

а) $\vec{a} = x\vec{i} + 3y\vec{j} + 2z\vec{k}$ нинг $x+y+z=1$ текислигининг биринчи октантда ётган юкори қисми бўйича;

б) $\vec{a} = 3xi - yj - zk$ нинг $9-z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ текисликлар билан чегараланган бирор жисм бўйича ташки нормал йўналишида;

в) $\vec{a} = 2xi + zk$ нинг $z=3x^2+2y^2$, $x^2+y^2=4$, $z=0$ сиртлар бўйича чегараланган сиртга ташки нормал бўйича.

Ж: а) 1; б) $\frac{81\pi}{8}$; в) 20.

3-§. Вектор майдонидаги чизикли интеграл.

Циркуляция. Вектор майдон ротори.

Стокс теоремаси. Циркуляцияни ҳисоблаш.

$\vec{a} = \{P, Q, R\}$ векторнинг L эгри чизик бўйича *чизикли интеграл* деб бу L эгри чизик бўйича вектор майдон бажарган ишни аниқловчи ушбу эгри чизикли интегралга айтилади:

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Агар L контур ёпик бўлса, чизикли интеграл $\vec{a}$ вектор майдоннинг бу контур бўйича *циркуляцияси* дейилади.

Ёпик эгри чизик L фазода бирор σ сиртни чегаралаган бўлиб, бу сиртда $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ вектор берилган бўлсин, у ҳолда циркуляция ва сирт интегрални боғловчи ушбу *Стокс формуласи* уринлидир:

$$\oint Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\sigma} \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) d\sigma,$$

бу ерда $\vec{n}^0 = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ — интеграллаш бажарилаётган σ сирт томони нормалининг бирлик вектори, бунда σ сиртнинг шу томони бўйича L контурни айланиб ўтиш мусбат бўлиши керак.

Грин формуласи Стокс формуласининг L эгри чизик ва σ сирт Ox_1 текисликда ётган ҳолдаги хусусий ҳолидир.

$\vec{a} = \{P, Q, R\}$ вектор майдоннинг *ротори* ёки *уюрмаси* деб ушбу

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{a} &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{k} = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \end{aligned}$$

векторга айтилади.

Вектор шаклида Стокс формуласи қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\oint \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\sigma} \vec{n}^0 \cdot \text{rot } \vec{a} d\sigma$$

Вектор майдони роторининг баъзи хоссалари:

а) $\text{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{rot } \vec{a} + \text{rot } \vec{b}$;

б) $\text{rot } c = 0$, бу ерда c — доимий (ўзгармас) вектор;

в) $\text{rot}(\psi \vec{a}) = \psi \text{rot } \vec{a} + \text{grad } \psi \cdot \vec{a}$, бу ерда $\psi = \psi(x, y, z)$ скаляр функция.

фазонинг ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуктасидаги роторини топинг.

Ечиш. Чизикли тезлик вектори $\vec{v}$ ни ҳисоблаймиз:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_z y - \omega_y z) \vec{i} +$$

$$+ (\omega_z x - \omega_x z) \vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{k}.$$

Демак,

$$\text{rot } \vec{v} = 2\omega_x \vec{i} + 2\omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} = 2\vec{\omega}.$$

2-мисол. $\vec{a} = y\vec{i} + x^2\vec{j} - z\vec{k}$ вектор майдонининг $L: x^2 + y^2 = 4, z = 3$ айлана бўйича бирлик вектор $\vec{k}$ га нисбатан айланиб ўтишнинг мусбат йўналишда циркуляциясини икки усул билан:

а) циркуляция таърифидан фойдаланиб;

б) Стокс формуласидан фойдаланиб ҳисобланг.

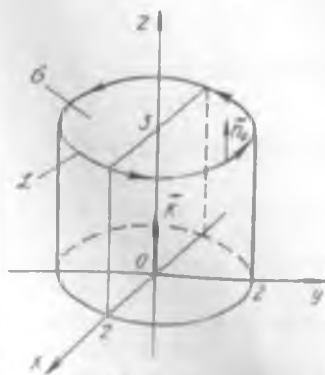
Ечиш. Чизма чизиб, унда нормалнинг бирлик вектор $n^0 = \vec{k}$ йўналишини ва контурни айланиш йўналишини кўрсатамиз (62-шакл).

а) Айлананинг параметрик тенгламалари:

$$x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 3, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Изланаётган C циркуляцияни таърифдан фойдаланиб топамиз:

$$C = \oint_{\pi} y dx + x^2 dy - z dz = \int_0^{2\pi} [2\sin t (-2\sin t dt) +$$



Шакл-62

$$+ 4\cos^2 t \cdot 2\cos t dt - 3 \cdot 0] = 8 \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt -$$

$$- 4 \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = 8 \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2 t) d(\sin t) -$$

$$- 2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) dt = 8 \left(\sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} -$$

$$- 2 \left(t - \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = -4\pi.$$

6) Шартга кўра: $\vec{n}^0 = \vec{k}$, $\text{rot} \vec{a} = (2x-1)\vec{k}$. Сток формуласига кўра:

$$\begin{aligned} C &= \iint_{\sigma_{xy}} \text{rot} \vec{a} \cdot \vec{n}^0 d\sigma = \iint_{\sigma_{xy}} (2x-1) dx dy = \iint_{\sigma_{xy}} (2r \cos \varphi - 1) r dr d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2r \cos \varphi - 1) r dr = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} r^3 \cos \varphi - \frac{1}{2} r^2 \right) \Big|_0^2 d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{3} \cos \varphi - 2 \right) d\varphi = \left(\frac{8}{3} \sin \varphi - 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = -4\pi. \end{aligned}$$

(Икки ўлчовли интегрални ҳисоблашда кутб координаталарига ўтилди.)

3- дарсхона топшириғи

1. $\vec{a} = xyz\vec{i} + (x+y+z)\vec{j} + (x^2+y^2+z^2)\vec{k}$ вектор майдоннинг $M(1, -1, 2)$ нуктадаги роторини топинг. Ж: $\text{rot} \vec{a} = -3\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$.

2. $\vec{a} = y\vec{i} - 2z\vec{j} + x\vec{k}$ вектор майдоннинг бир паллали $2x^2 - y^2 + z^2 = R^2$ гиперболоидни $y=x$ текислик кесишидан ҳосил бўлган эллипс бўйича циркуляциясини топинг. Натижани Стокс формуласи ёрдамида текширинг. Ж: $\pm 3\pi R^2$.

3. $\vec{a} = zy^2\vec{i} + xz^2\vec{j} + yx^2\vec{k}$ вектор майдоннинг $x=y^2+z^2$ параболоидни $x=9$ текислик билан кесишиш контури бўйича $\vec{n}^0 = \vec{i}$ ортга нисбатан мусбат айланиб ўтишдаги циркуляциясини ҳисобланг. Ж: 729 π .

4. $\vec{a} = -y\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ вектор майдоннинг $x^2+y^2-z^2=0$ конуснинг $z=1$ текислик билан кесишиш чизиги L бўйича $\vec{n}^0 = \vec{k}$ ортга нисбатан мусбат айланиб ўтишдаги циркуляциясини ҳисобланг. Ж: π .

3- мустақил иш

1. $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ вектор майдоннинг $x^2+y^2+z^2=4$ сферанинг $\sqrt{x^2+y^2}=z$ конус билан кесишиш чизиги L бўйича $\vec{n}^0 = \vec{k}$ ортга нисбатан мусбат айланиб ўтишдаги циркуляциясини ҳисобланг.

2. $\vec{a} = yz\vec{i} + 2xz\vec{j} + y^2\vec{k}$ вектор майдоннинг $z = \sqrt{25-x^2-y^2}$ ярим сферанинг $x^2+y^2=16$ цилиндр билан кесишиш чизиги L бўйича $\vec{n}^0 = \vec{k}$ ортга нисбатан мусбат йўналишда айланиб ўтишдаги циркуляциясини ҳисобланг.

3. $\vec{a} = (x-y)\vec{i} + x\vec{j} - z\vec{k}$ вектор майдоннинг $x^2+y^2=1$ цилиндрнинг $z=2$ текислик билан кесишиш чизиги L бўйича $\vec{n}^0 = \vec{k}$ бўлгандаги циркуляциясини ҳисобланг.

4-§. Потенциал майдон.

Потенциал майдондаги чизикли интеграл.

Гамильтон ва Лаплас операторлари

12.4.1. Агар фазонинг бир боғламли Ω соҳасининг ҳар бир нуктасида $\text{rota} = 0$ бўлса, $\vec{a} = \{P, Q, R\}$ вектор майдон Ω соҳада *потенциал ёки уюрмасиз майдон* дейилади.

$\text{rotgrad} u = 0$ бўлгани учун исталган $u = u(x, y, z)$ скаляр майдоннинг градиенти ҳосил қилган вектор майдон ҳар доим потенциалдир. $\vec{a}$ майдон Ω соҳада потенциал бўлиши учун икки марта узлуксиз дифференциалланувчи $u = u(x, y, z)$ скаляр функция мавжуд бўлиши зарур ва етарли бўлиб, унинг учун $\vec{a} = \text{grad} u$ бўлиши керак. $u = u(x, y, z)$ функция a майдоннинг *потенциали* (ёки *потенциал функцияси*) дейилади.

$\vec{a} = \{P, Q, R\}$ потенциал майдон учун потенциални топишнинг ушбу формуласи ўринлидир:

$$u(x, y, z) = \int_{M_0, M} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz + C,$$

бу ерда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — Ω соҳанинг бирорта тайин нуктаси, $M(x, y, z)$ — соҳанинг ихтиёрий нуктаси, C — ихтиёрий ўзгармас.

Бу формуладан интеграллаш йўлига боғлиқ бўлмаган иккинчи тур эгри чизикли интегрални ҳисоблаш формуласи ҳам келиб чиқади:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = u(B) - u(A),$$

бу ерда $u(A)$ ва $u(B)$ потенциалнинг йўлнинг бошланғич A ва охириги B нукталаридаги қийматлари.

Агар фазонинг Ω соҳасидаги ҳар бир нуктада $\text{div} \vec{a} = 0$ бўлса, $\vec{a}$ вектор майдон бу соҳада *соленоидли ёки найчасимон майдон* дейилади. $\text{div} \text{rota} = 0$ бўлгани учун исталган $\vec{a}$ вектор майдоннинг ротор майдони соленоидли майдон бўлади.

Агар фазонинг Ω соҳасида $\vec{a}$ вектор майдон бир вақтнинг ўзида ҳам потенциал, ҳам соленоидли бўлса, яъни Ω соҳанинг ҳар қайси нуктасида $\text{div} \vec{a} = 0$, $\text{rota} = 0$ бўлса, $\vec{a}$ вектор майдон Ω соҳада *гармоник майдон* дейилади. Гармоник майдоннинг u потенциали

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Лаплас тенгламасининг ечимидан иборатдир. Лаплас тенгламасини каноатлантирувчи $u = u(x, y, z)$ функция *гармоник функция* дейилади.

1-мисол. $\vec{a} = \{2xy + z, x^2 - 2y, x\}$ векторнинг майдони потенциал, лекин соленоидли эмаслигини кўрсатинг. Берилган майдоннинг потенциали u ни топинг.

Ечиш. Куйидагига эгамиз:

$P = 2xy + z, Q = x^2 - 2y, R = x$, шунинг учун:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z & x^2 - 2y & x \end{vmatrix} =$$

$= \vec{i}(0 - 0) - \vec{j}(1 - 1) + (2x - 2x)\vec{k} = 0$, яъни $\vec{a}$ — потенциал майдон.
 $\vec{a}$ вектор дивергенциясини топамиз:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2y - 2 + 0 \neq 0,$$

бинобарин, $\vec{a}$ — соленоидли майдон эмас. Берилган $\vec{a}$ майдон потенциали u ни куйидаги формуладан аниқлаймиз:

$$u(x, y, z) = \int_{M_0, M} Pdx + Qdy + Rdz + C,$$

чизикли интеграл бошлангич $M_0(x_0, y_0, z_0)$ ва охириги $M(x, y, z)$ нуктага боғлиқ. Аниқ интегралга ўтиб топамиз:

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z)dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z)dz + C.$$

Мазкур ҳолда $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нукта сифатида координаталар боши $O(0, 0, 0)$ ни олиш мумкин. Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_{OM} (2xy + z)dx + (x^2 - 2y)dy + xdz + C = \\ &= \int_0^x (2xy + z)dx + \int_0^y (-2y)dy + \int_0^z 0dz + C = (x^2y + xz)|_0^x - \\ &\quad - y^2|_0^y + C = x^2y + xz - y^2 + C. \end{aligned}$$

2-мисол. $\vec{a} = \{yz - xy, xz - \frac{x^2}{2} + yz^2, xy + y^2z\}$ майдон потенциал ёки потенциал эмаслигини текширинг, унинг потенциалини топинг ҳамда $A(1, 1, 1)$ ва $B(2, -2, 3)$ нукталарни туташтирувчи чизик бўйича мос чизикли интегрални ҳисобланг.

с ч и ш. Берилишига кўра:

$$P = yz - xy, \quad Q = xz - \frac{x^2}{2} + yz^2, \quad R = xy + y^2z,$$

шунинг учун

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{a} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz - xy & xz - \frac{x^2}{2} + yz^2 & xy + y^2z \end{vmatrix} = \\ &= (x + 2yz - x - 2yz)\vec{i} + (y - y)\vec{j} + (z - x - z + x)\vec{k} = 0 \end{aligned}$$

демак, $\vec{a}$ — потенциал майдон, бинобарин, унинг потенциали мавжуд. Уни олдинги мисолдагига ўхшаш топамиз:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^x (yz - xy) dx + \int_0^y yz^2 dy + \int_0^z 0 dz + C = \\ &= \left(xyz - \frac{x^2 y}{2} \right) \Big|_0^x + \frac{1}{2} y^2 z^2 \Big|_0^y + C = xyz - \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^2 z^2}{2} + C. \end{aligned}$$

Шундай қилиб,

$$u(x, y, z) = xyz - \frac{x^2 y}{2} + \frac{y^2 z^2}{2} + C.$$

Потенциал майдонда чизикли интеграл A ва B нукталарни туташтирувчи йўлга боғлиқ бўлмайди, шунинг учун уни

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = u(B) - u(A)$$

формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned} \int_{AB} (yz - xy) dx + \left(xz - \frac{x^2}{2} + yz^2 \right) dy + (xy + y^2 z) dz = \\ = u(B) - u(A) = \left(2 \cdot (-2) \cdot 3 - \frac{2^2 \cdot (-2)}{2} + \frac{(-2)^2 \cdot 3^2}{2} \right) - \\ - \left(1 \cdot 1 \cdot 1 - \frac{1^2 \cdot 1}{2} + \frac{1^2 \cdot 1^2}{2} \right) = 9. \end{aligned}$$

12.4.2. Вектор анализнинг асосий тушунчалари (градиент, дивергенция, ротор)ни *Гамильтон оператори* деб аталувчи

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$$

дифференциал оператор (символик ∇ вектор каби белгиланувчи ва «набла» деб ўкилувчи) ёрдамида тавсифлаш қулай.

Векторни скалярга кўпайтириш, иккита векторнинг скаляр ва вектор кўпайтмалари каби маълум операциялардан фойдаланиб, асосий дифференциал амалларни ∇ оператори ёрдамида ёзамиз:

$$\operatorname{grad} u = \vec{i} \frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial u}{\partial z} = \nabla u,$$

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{a},$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{a}.$$

Келтириб ўтилган амаллар *биринчи тартибли дифференциал амаллар* дейилади. Гамильтон оператори ёрдамида вектор анализининг мураккаб ифодалари устида дифференциал амалларни (иккита ёки кўпроқ скаляр функциялар кўпайтмаси, скаляр функциянинг векторга кўпайтмаси, векторларнинг вектор кўпайтмалари ва х. к.) бажариш қулай. Бунда факат шуни эсда саклаш лозимки, бу оператор дифференциаллаш операторидир ва кўпайтмани дифференциаллаш қондасини билиш керак.

3-мисол. Иккита скаляр функция u ва v кўпайтмасининг градиентини топинг.

Е ч и ш. Қуйидагига эгамиз:

$$\operatorname{grad} u \cdot v = \nabla u v = u \nabla v + v \nabla u$$

ёки

$$\operatorname{grad} uv = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u.$$

12.4.3. Иккинчи тартибли бешта дифференциал амални ёзиш мумкин:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = \Delta u,$$

бу ерда

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2$$

ифода Лаплас оператори дейилади:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \operatorname{grad} u &= (\nabla \times \nabla) u; \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} &= \nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}); \\ \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} &= \nabla (\nabla \cdot \vec{a}); \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} &= \nabla \times (\nabla \times \vec{a}).\end{aligned}$$

Гамильтон оператори ∇ нинг вектор маъносидан $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \vec{0}$ (иккита коллинеар векторнинг вектор кўпайтмасига эгамиз) эканлиги ва $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$ (компланар векторларнинг аралаш кўпайтмасига эгамиз) эканлиги келиб чиқади.

4-мисол. $u = \frac{1}{r}$ функция, бу ерда $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, гармоник функция эканлигини ва $\vec{a} = \operatorname{grad} u$ — вектор майдон гармоник эканлигини исбот қилинг.

Ечиш. Дастлаб берилган функция учун Лаплас тенгламаси $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ ёки $\Delta u = 0$ ўринли эканини текширамыз. Бунинг

учун $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ва Δu ларни ҳисоблаймиз:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}; \\ \Delta u &= -\frac{3}{r^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0.\end{aligned}$$

Демак, $\Delta u = 0$ Лаплас тенгламаси ўринли, бинобарин, берилган $u = \frac{1}{r}$ — гармоник функция.

Мисолни ечишда давом этамыз. Топамыз:

$$\vec{a} = \operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

ёки

$$\vec{a} = -\frac{1}{r^3} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}).$$

Маълумки, исталган u функция учун: $\operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \vec{0}$, яъни $\vec{a}$ нинг гармониклигини аниқлашнинг биринчи шарт бажарилган. Иккинчи шарт: $\operatorname{div} \vec{a} = 0$ ҳам бажарилади, чунки

$$\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u = 0.$$

4- дарсхона топириғи

1. $\vec{a}$ майдоннинг потенциал эканини курсатинг ва унинг потенциалли u ни топинг:

а) $\vec{a} = \{2xy, x^2 - 2yz, -y^2\}$;

б) $\vec{a} = \{3x^2y - y^3, x^3 + 3xy^2\}$;

в) $\vec{a} = \{y + 2, x + z, y + x\}$;

г) $\vec{a} = \{yz \cos xy, xz \cos xy, \sin xy\}$.

Ж: а) $u = x^2y - y^2z + C$;

б) $u = x^3y - xy^3 + C$;

в) $u = xy + yz + xz + C$;

г) $u = z \sin xy + C$.

2. $\vec{a} = \{yz + 1, xz, xy\}$ майдон потенциалли u ни топинг ва

$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,2)} (yz + 1)dx + xzdy + xydz$ чизикли интегрални ҳисобланг.

Ж: $u = x + xyz + C$; 12.

3. Берилган функция гармоникми:

а) $u = \ln r$, бу ерда $r = \sqrt{x^2 + y^2}$;

б) $u = r - x$, бу ерда $r = \sqrt{x^2 + y^2}$;

в) $y = Ax + By + Cz + D$.

Ж: а) ҳа; б) йўқ; в) ҳа.

4- мустақил иш

$\vec{a}$ вектор майдоннинг потенциаллигини текширинг, унинг потенциаллини топинг ва $\vec{a}$ вектордан A (ёй боши) ва B (ёй охири) нукталарни туташтирувчи ёй чизиги бўйлаб олинган чизикли интеграл қийматини ҳисобланг:

1. $\vec{a} = \{2xyz, x^2z, x^2y\}$,

$A(1, -1, 2)$, $B(-2, 4, 2)$. Ж: 34.

2. $\vec{a} = \{x^2 - 2yz, y^2 - 2xz, z^2 - 2xy\}$,

$A(1, -1, 1)$, $B(-2, 2, 3)$. Ж: $\frac{92}{3}$.

3. $\vec{a} = \{2xy + z^2, 2xz + x^2, 2xz + y^2\}$,

$A(0, 1, -2)$, $B(2, 3, 1)$. Ж: 25.

9- намунавий ҳисоб топшириқлари

1. $u = u(x, y, z)$ скаляр майдоннинг M нуктадаги $\vec{l}$ вектор йўналиши бўйича ҳосиласини топинг:

- 1.1. $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$,
 $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$,
 $M(1, 1, 1)$.
- 1.2. $u = x + \ln(z^2 + y^2)$,
 $\vec{l} = -2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$,
 $M(2, 1, 1)$.
- 1.3. $u = x^2y - \sqrt{xy + z^2}$,
 $\vec{l} = 2\vec{j} - 2\vec{k}$,
 $M(1, 5, -2)$.
- 1.4. $u = y \ln(1 + x^2) - \arctg z$,
 $\vec{l} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$,
 $M(0, 1, 1)$.
- 1.5. $u = x (\ln y - \arctg z)$,
 $\vec{l} = 8\vec{i} + 4\vec{j} + 8\vec{k}$,
 $M(-2, 1, -1)$.
- 1.6. $u = \ln(3 - x^2) + xy^2z$,
 $\vec{l} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$,
 $M(1, 3, 2)$.
- 1.7. $u = \sin(x + 2y) + \sqrt{xyz}$,
 $\vec{l} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$,
 $M = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 3\right)$.
- 1.8. $u = x^2y^2z - \ln(z - 1)$,
 $\vec{l} = 5\vec{i} - 6\vec{j} + 2\sqrt{5}\vec{k}$,
 $M(1, 1, 2)$.
- 1.9. $u = x^3 + \sqrt{y^2 + z^2}$,
 $\vec{l} = \vec{j} - \vec{k}$,
 $M(1, -3, 4)$.
- 1.10. $u = \frac{\sqrt{x}}{y} - \frac{yz}{x + \sqrt{y}}$,
 $\vec{l} = 2\vec{i} + \vec{k}$,
 $M(4, 1, -2)$.
- 1.11. $u = \sqrt{xy} + \sqrt{9 - z^2}$,
 $\vec{l} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$,
 $M(1, 1, 0)$.
- 1.12. $u = 2\sqrt{x + y} + y \arctg z$,
 $\vec{l} = 4\vec{i} - 3\vec{k}$,
 $M(3, -2, 1)$.
- 1.13. $u = z^2 + 2 \arctg(x - y)$,
 $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$,
 $M(1, 2, -1)$.
- 1.14. $u = \ln(x^2 + y^2) + xyz$,
 $\vec{l} = \vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$,
 $M(1, -1, 2)$.
- 1.15. $u = xy - \frac{x}{z}$,
 $\vec{l} = 5\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$,
 $M(-4, 3, -1)$.
- 1.16. $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$,
 $\vec{l} = -2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$,
 $M(1, -3, 4)$.
- 1.17. $u = x^2 - \arctg(y + z)$,
 $\vec{l} = 3\vec{j} - 4\vec{k}$,
 $M(2, 1, 1)$.
- 1.18. $u = x^2y + y^2z + z^2x$,
 $\vec{l} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$,
 $M(1, -1, 2)$.
- 1.19. $u = \ln(xy + yz + xz)$,
 $\vec{l} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$,
 $M(-2, 3, -1)$.
- 1.20. $u = 5x^2yz - xy^2z + yz^2$,
 $\vec{l} = 8\vec{i} - 4\vec{j} + 8\vec{k}$,
 $M(1, 1, 1)$.
- 1.21. $u = \frac{10}{x^2 + y^2 + z^2 + 1}$,
 $\vec{l} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$,
 $M(-1, 2, 2)$.
- 1.22. $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$,
 $\vec{l} = -4\vec{i} - 3\vec{k}$,
 $M(1, 2, 2)$.
- 1.23. $u = 5x^2yz - xy^2z + yz^2$,
 $\vec{l} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$,
 $M(1, -3, 2)$.
- 1.24. $u = x^2 + xy^2 - 6xyz$,
 $\vec{l} = 3\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$,
 $M(1, 3, -5)$.

$$1.25. u = \sqrt{1+x^2+y^2+z^2}, \\ \bar{l} = 2\bar{i} + \bar{j}, \\ M(1, 1, 1).$$

$$1.26. u = \ln(x^3+y^3+z+1), \\ \bar{l} = -5\bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}, \\ M(1, 3, 0).$$

$$1.27. u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} - \frac{z}{x}, \\ \bar{l} = 3\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}, \\ M(-1, 1, 1).$$

$$1.28. u = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz, \\ \bar{l} = 4\bar{i} + 2\bar{k}, \\ M(1, -1, 2).$$

$$1.29. u = \ln(x^2+y^2+z^2), \\ \bar{l} = 4\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}, \\ M(-1, 2, 1).$$

$$1.30. u = \frac{x}{y} - \frac{y}{z} - \frac{x}{z}, \\ \bar{l} = -5\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}, \\ M(2, 2, 2).$$

2. $u = u(x, y, z)$ функциянинг M нуктадаги энг катта ўзгариши катталиги ва йўналишини топинг:

$$2.1. u = xyz, \\ M(0, 1, -2).$$

$$2.2. u = xy^2z, \\ M(1, -2, 0).$$

$$2.3. u = x^2y^2z, \\ M(-1, 0, 3).$$

$$2.4. u = xy^2z^2, \\ M(-2, 1, 1).$$

$$2.5. u = x^2y + y^2z, \\ M(0, -2, 1).$$

$$2.6. u = xy - xz, \\ M(-1, 2, 1).$$

$$2.7. u = xyz, \\ M(2, 1, 0).$$

$$2.8. u = x^2yz, \\ M(2, 0, 2).$$

$$2.9. u = xyz^2, \\ M(3, 0, 1).$$

$$2.10. u = x^2yz^2, \\ M(2, 1, -1).$$

$$2.11. u = y^2z - x^2, \\ M(0, 1, 1).$$

$$2.12. u = x(y+z), \\ M(0, 1, 2).$$

$$2.13. u = x^2yz, \\ M(1, -1, 1).$$

$$2.14. u = xyz^2, \\ M(4, 0, 1).$$

$$2.15. u = 2x^2yz, \\ M(-3, 0, 2).$$

$$2.16. u = (x+y)z^2, \\ M(0, -1, 4).$$

$$2.17. u = x^2(y^2+z), \\ M(4, 1, -3).$$

$$2.18. u = x^2(y+z^2), \\ M(3, 0, 1).$$

$$2.19. u = x(y^2+z^2), \\ M(1, -2, 1).$$

$$2.20. u = x^2z - y^2, \\ M(1, 1, -2).$$

$$2.21. u = x^2y - z, \\ M(-2, 2, 1).$$

$$2.22. u = y(x+z), \\ M(0, 2, -2).$$

$$2.23. u = x^2yz, \\ M(1, 0, 4).$$

$$2.24. u = (x+z)y^2, \\ M(2, 2, 2).$$

$$2.25. u = (x^2+z)y^2, \\ M(-4, 1, 0).$$

$$2.26. u = (x^2-y)z^2, \\ M(1, 3, 0).$$

$$2.27. u = x^2 + 3y^2 - z^2, \\ M(0, 0, 1).$$

$$2.28. u = xz^2 + y, \\ M(2, 2, 1).$$

$$2.29. u = xy^2 - z, \\ M(-1, 2, 1).$$

$$2.30. u = z(x+y), \\ M(1, -1, 0).$$

3. $u = u(x, y, z)$ ва $v = v(x, y, z)$ скаляр майдонлар градиентлари орасидаги бурчакни топинг:

$$3.1. \quad u = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3,$$

$$v = \frac{yz^2}{x^2},$$

$$M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$3.2. \quad u = \frac{4\sqrt{6}}{x} - \frac{6}{9y} + \frac{3}{z},$$

$$v = x^2yz^3,$$

$$M\left(2, \frac{1}{3}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

$$3.3. \quad u = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{\sqrt{3}},$$

$$v = \frac{z^3}{xy^3},$$

$$M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

$$3.4. \quad u = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3,$$

$$v = \frac{xz^2}{y},$$

$$M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right).$$

$$3.5. \quad u = \frac{\sqrt{6}}{2x} - \frac{\sqrt{6}}{2y} + \frac{3}{3z},$$

$$v = \frac{yz^2}{x},$$

$$M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$3.6. \quad u = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z},$$

$$v = \frac{z}{x^3y^2},$$

$$M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$3.7. \quad u = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3,$$

$$v = \frac{x^2}{yz^2}, \quad M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$3.8. \quad u = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2,$$

$$v = \frac{z^2}{xy^2},$$

$$M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

$$3.9. \quad u = 3\sqrt{2}x^2 - \frac{y^2}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2}z^2,$$

$$v = \frac{xy^2}{z^2},$$

$$M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

$$3.10. \quad u = \frac{3}{x} + \frac{4}{y} - \frac{1}{\sqrt{6}z},$$

$$v = \frac{x^3y^2}{z},$$

$$M\left(1, 2, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$3.11. \quad u = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}z},$$

$$v = \frac{1}{x^2yz},$$

$$M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$3.12. \quad u = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z},$$

$$v = \frac{x^2}{y^2z^3},$$

$$M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$3.13. \quad u = x^2 + 9y^2 + 6z^2,$$

$$v = xyz,$$

$$M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$3.14. \quad u = \frac{2}{x} + \frac{3}{2y} - \frac{\sqrt{6}}{4z},$$

$$v = \frac{y^3}{x^2z}, \quad M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right).$$

$$3.15. \quad u = \sqrt{2}x^3 - \frac{3y^2}{\sqrt{2}} - 6\sqrt{2}z^2, \\ v = xy^2z, \\ M\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$3.16. \quad u = -\frac{\sqrt{6}}{2x} + \frac{\sqrt{6}}{2y} - \frac{2}{3z}, \\ v = \frac{x}{yz^2}, \\ M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$3.17. \quad u = \frac{6}{x} + \frac{2}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}z}, \\ v = \frac{y^2z^3}{x^2}, \\ M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$3.18. \quad u = \frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{2\sqrt{2}}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2z}, \\ v = \frac{y^2z^3}{x}, \\ M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$3.19. \quad u = 6\sqrt{6}x^3 - 6\sqrt{6}y^3 + 2z^3, \\ v = \frac{y}{xz^3}, \\ M\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 1\right).$$

$$3.20. \quad u = x^2 - y^2 - 3z^2, \\ v = \frac{yz^2}{x}, \\ M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$3.21. \quad u = \frac{3x^2}{\sqrt{2}} - \frac{y^2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}z^2, \\ v = \frac{z^2}{x^2y^2}, \\ M\left(\frac{2}{3}, 2, \sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

$$3.22. \quad u = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{8z^3}{\sqrt{3}}, \\ v = \frac{x^2}{y^2z^3}, \\ M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$3.23. \quad u = \frac{3}{2}x^2 + 3y^2 - 2z^2, \\ v = x^2yz^3, \\ M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right).$$

$$3.24. \quad u = 9\sqrt{2}x^3 - \frac{y^3}{2\sqrt{2}} - \frac{4z^3}{3}, \\ v = \frac{xy^2}{z^2}, \\ M\left(\frac{1}{3}, 2, \sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

$$3.25. \quad u = \sqrt{2}x^2 - \frac{3y^2}{2} - 6\sqrt{2}z^2, \\ v = \frac{1}{xy^2z}, \\ M\left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right).$$

$$3.26. \quad u = \frac{1}{\sqrt{2}x} - \frac{2\sqrt{2}}{y} - \frac{3\sqrt{3}}{2z}, \\ v = \frac{x}{y^2z^3}, \\ M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$3.27. \quad u = -\frac{4\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{9y} + \frac{1}{\sqrt{3}z}, \\ v = x^2yz, \\ M\left(2, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$3.28. \quad u = x^2 + 9y^2 + 6z^2, \\ v = \frac{1}{xyz}, \\ M\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

$$3.29. \quad u = \frac{x^3}{\sqrt{2}} - \frac{y^3}{\sqrt{2}} - \frac{8z^3}{\sqrt{3}},$$

$$v = \frac{y^2 z^3}{x^2},$$

$$M\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$3.30. \quad u = -\frac{3x^3}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}y^3}{3} + 8\sqrt{3}z^3,$$

$$u = \frac{x^2 z}{y^3},$$

$$M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}\right).$$

4. $\vec{a}$ вектор майдондаги вектор чизикларни топинг:

$$4.1. \quad \vec{a} = 4y\vec{i} - 9x\vec{j}.$$

$$4.2. \quad \vec{a} = x\vec{i} + 4y\vec{j}.$$

$$4.3. \quad \vec{a} = 4y\vec{i} + 8z\vec{k}.$$

$$4.4. \quad \vec{a} = 4z\vec{j} - 9y\vec{k}.$$

$$4.5. \quad \vec{a} = 5x\vec{i} + 10y\vec{j}.$$

$$4.6. \quad \vec{a} = y\vec{j} + 4z\vec{k}.$$

$$4.7. \quad \vec{a} = 9y\vec{i} - 4x\vec{j}.$$

$$4.8. \quad \vec{a} = 4x\vec{i} + z\vec{k}.$$

$$4.9. \quad \vec{a} = 2y\vec{i} + 3x\vec{j}.$$

$$4.10. \quad \vec{a} = 3x\vec{i} + 6z\vec{k}.$$

$$4.11. \quad \vec{a} = y\vec{j} + 3z\vec{k}.$$

$$4.12. \quad \vec{a} = 2z\vec{j} + 3y\vec{k}.$$

$$4.13. \quad \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

$$4.14. \quad \vec{a} = 2y\vec{j} + 6z\vec{k}.$$

$$4.15. \quad \vec{a} = 5z\vec{i} + 7x\vec{k}.$$

$$4.16. \quad \vec{a} = 2x\vec{i} + 4y\vec{j}.$$

$$4.17. \quad \vec{a} = 4z\vec{i} - 9x\vec{k}.$$

$$4.18. \quad \vec{a} = 2x\vec{i} + 8z\vec{k}.$$

$$4.19. \quad \vec{a} = 6x\vec{i} + 12z\vec{k}.$$

$$4.20. \quad \vec{a} = 4x\vec{i} + y\vec{j}.$$

$$4.21. \quad \vec{a} = x\vec{i} + z\vec{k}.$$

$$4.22. \quad \vec{a} = 7y\vec{j} + 14z\vec{k}.$$

$$4.23. \quad \vec{a} = 9z\vec{j} - 4y\vec{k}.$$

$$4.24. \quad \vec{a} = x\vec{i} + 3y\vec{j}.$$

$$4.25. \quad \vec{a} = 2z\vec{i} + 3x\vec{k}.$$

$$4.26. \quad \vec{a} = x\vec{i} + 3z\vec{k}.$$

$$4.27. \quad \vec{a} = 2x\vec{i} + 6y\vec{j}.$$

$$4.28. \quad \vec{a} = 5y\vec{i} + 7x\vec{j}.$$

$$4.29. \quad \vec{a} = 9z\vec{i} - 4x\vec{k}.$$

$$4.30. \quad \vec{a} = 2x\vec{i} + 6z\vec{k}.$$

5. $\vec{a}$ вектор майдоннинг p текислик ва координата текисликлари ҳосил қилган пирамиданинг ташки сирти бўйича оқимини икки усул билан топинг:

а) оқим таърифидан фойдаланиб;

б) Остроградский — Гаусс формуласи ёрдамида.

$$5.1. \quad \vec{a} = 3x\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x-z)\vec{k},$$

$$p : x + 3y + z = 3.$$

$$5.2. \quad \vec{a} = (3x-1)\vec{i} + (y-x+z)\vec{j} + 4z\vec{k},$$

$$p : 2x - y - 2z = 2.$$

$$5.3. \quad \vec{a} = x\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (y+z)\vec{k},$$

$$p : 3x + 3y + z = 3.$$

$$5.4. \quad \vec{a} = (x+z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x+2y+z)\vec{k},$$

$$p : x + y + z = 2.$$

$$5.5. \quad \vec{a} = (y+2z)\vec{i} + (x+2z)\vec{j} + (x-2y)\vec{k},$$

$$p : 2x + y + 2z = 2.$$

- 5.6. $\vec{a} = (x+z)\vec{i} + 2y\vec{j} + (x+y)\vec{k}$,
 $\rho : x+2y+z=2$.
- 5.7. $\vec{a} = (3x-y)\vec{i} + (2y+z)\vec{j} + (2z-x)\vec{k}$,
 $\rho : 2x-3y+z=6$.
- 5.8. $\vec{a} = (2y+z)\vec{i} + (x-y)\vec{j} - 2z\vec{k}$,
 $\rho : x-y+z=2$.
- 5.9. $\vec{a} = (x+y)\vec{i} + 3y\vec{j} + (y-z)\vec{k}$,
 $\rho : 2x-y-2z=-2$.
- 5.10. $\vec{a} = (x+y-z)\vec{i} - 2y\vec{j} + (x+2z)\vec{k}$,
 $\rho : x+2y+z=2$.
- 5.11. $\vec{a} = (y-z)\vec{i} + (2x+y)\vec{j} + z\vec{k}$,
 $\rho : 2x+y+z=2$.
- 5.12. $\vec{a} = x\vec{i} + (y-2z)\vec{j} + (2x-y+2z)\vec{k}$,
 $\rho : x+2y+2z=2$.
- 5.13. $\vec{a} = (x+2z)\vec{i} + (y-3z)\vec{j} + z\vec{k}$,
 $\rho : 3x+2y+2z=6$.
- 5.14. $\vec{a} = 4x\vec{i} + (x-y-z)\vec{j} + (3y+2z)\vec{k}$,
 $\rho : 2x+y+z=4$.
- 5.15. $\vec{a} = (2z-x)\vec{i} + (x+2y)\vec{j} + 3z\vec{k}$,
 $\rho : x+4y+2z=8$.
- 5.16. $\vec{a} = 4z\vec{i} + (x-y-z)\vec{j} + (3y+z)\vec{k}$,
 $\rho : x-2y+2z=2$.
- 5.17. $\vec{a} = (x+y)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + 2(z+x)\vec{k}$,
 $\rho : 3x-2y+2z=6$.
- 5.18. $\vec{a} = (x+y+z)\vec{i} + 2z\vec{j} + (y-7z)\vec{k}$,
 $\rho : 2x+3y+z=6$.
- 5.19. $\vec{a} = (2x-z)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + (x+2z)\vec{k}$,
 $\rho : x-y+z=2$.
- 5.20. $\vec{a} = (2y-z)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + x\vec{k}$,
 $\rho : x+2y+2z=4$.
- 5.21. $\vec{a} = (2z-x)\vec{i} + (x-y)\vec{j} + (3x+z)\vec{k}$,
 $\rho : x+y+2z=2$.
- 5.22. $\vec{a} = (x+z)\vec{i} + (x+3y)\vec{j} + y\vec{k}$,
 $\rho : x+y+2z=2$.
- 5.23. $\vec{a} = (x+z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x-y)\vec{k}$,
 $\rho : 2x+2y+z=4$.
- 5.24. $\vec{a} = (3x+y)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + y\vec{k}$,
 $\rho : x+2y+z=2$.
- 5.25. $\vec{a} = (y+z)\vec{i} + (2x-z)\vec{j} + (y+3z)\vec{k}$,
 $\rho : 2x+y+3z=6$.

$$5.26. \vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+6y)\vec{j} + y\vec{k},$$

$$p : x+2y+2z=2.$$

$$5.27. \vec{a} = (2y-z)\vec{i} + (x+2y)\vec{j} + y\vec{k},$$

$$p : x+3y+2z=6.$$

$$5.28. \vec{a} = (y+z)\vec{i} + x\vec{j} + (y-2z)\vec{k},$$

$$p : 2x+2y+z=2.$$

$$5.29. \vec{a} = (x+z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x-y)\vec{k},$$

$$p : 3x+2y+z=6.$$

$$5.30. \vec{a} = z\vec{i} + (x+y)\vec{j} + y\vec{k},$$

$$p : 2x+y+2z=2.$$

6. $\vec{a}$ вектор майдоннинг p текислигининг координата текисликларин билан кесишдан ҳосил бўлган учбурчак контури бўйича циркуляциясини (бу текислигининг нормал векторига нисбатан айланиб ўтиш йўналиши мусбат бўлганда) куйидаги икки усул билан ҳисобланг:

а) циркуляция таърифидан фойдаланиб;

б) Стокс формуласи ёрдамида.

$$6.1. \vec{a} = z\vec{i} + (x+y)\vec{j} + y\vec{k},$$

$$p : 2x+y+2z=2.$$

$$6.2. \vec{a} = (x+z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x-y)\vec{k},$$

$$p : 3x+2y+z=6.$$

$$6.3. \vec{a} = (y+z)\vec{i} + x\vec{j} + (y-2z)\vec{k},$$

$$p : 2x+2y+z=2.$$

$$6.4. \vec{a} = (2y-z)\vec{i} + (x+2y)\vec{j} + y\vec{k},$$

$$p : x+3y+2z=6.$$

$$6.5. \vec{a} = (y+z)\vec{i} + (x+6y)\vec{j} + y\vec{k},$$

$$p : x+2y+2z=2.$$

$$6.6. \vec{a} = (y+z)\vec{i} + (2x-z)\vec{j} + (y+3z)\vec{k},$$

$$p : 2x+y+3z=6.$$

$$6.7. \vec{a} = (3x+y)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + y\vec{k},$$

$$p : x+2y+z=2.$$

$$6.8. \vec{a} = (x+z)\vec{i} + z\vec{j} + (2x-y)\vec{k},$$

$$p : 2x+2y+z=4.$$

$$6.9. \vec{a} = (x+z)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + y\vec{k},$$

$$p : x+y+2z=2.$$

$$6.10. \vec{a} = (2y-z)\vec{i} + (x+y)\vec{j} + x\vec{k},$$

$$p : x+2y+2z=4.$$

$$6.11. \vec{a} = (2z-x)\vec{i} + (x-y)\vec{j} + (3x+z)\vec{k},$$

$$p : x+y+2z=2.$$

$$6.12. \vec{a} = (2x-z)\vec{i} + (y-x)\vec{j} + (x+2z)\vec{k},$$

$$p : x-y+z=2.$$

- 6.13. $\vec{a} = (x+y+z)\vec{i} + 2z\vec{j} + (y-7z)\vec{k}$,
 $p: 2x+3y+z=6$.
- 6.14. $\vec{a} = (x+y)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + 2(x+z)\vec{k}$,
 $p: 3x-2y+2z=6$.
- 6.15. $\vec{a} = 4z\vec{i} + (x-y-z)\vec{j} + (3y+z)\vec{k}$,
 $p: x-2y+2z=2$.
- 6.16. $\vec{a} = (2z-x)\vec{i} + (x+2y)\vec{j} + 3z\vec{k}$,
 $p: x+4y+2z=8$.
- 6.17. $\vec{a} = 4x\vec{i} + (x-y-z)\vec{j} + (3y+2z)\vec{k}$,
 $p: 2x+y+z=4$.
- 6.18. $\vec{a} = (x+2z)\vec{i} + (y-3z)\vec{j} + z\vec{k}$,
 $p: 3x+2y+2z=6$.
- 6.19. $\vec{a} = x\vec{i} + (y-2z)\vec{j} + (2x-y+2z)\vec{k}$,
 $p: x+2y+2z=2$.
- 6.20. $\vec{a} = (y-z)\vec{i} + (2x+y)\vec{j} + z\vec{k}$,
 $p: 2x+y+z=2$.
- 6.21. $\vec{a} = (x+y-z)\vec{i} - 2y\vec{j} + (x+2z)\vec{k}$,
 $p: x+2y+z=2$.
- 6.22. $\vec{a} = (x+y)\vec{i} + 3y\vec{j} + (y-z)\vec{k}$,
 $p: 2x-y-2z=-2$.
- 6.23. $\vec{a} = (2y+z)\vec{i} + (x-y)\vec{j} - 2z\vec{k}$,
 $p: x-y+z=2$.
- 6.24. $\vec{a} = (3x-y)\vec{i} + (2y+z)\vec{j} + (2z-x)\vec{k}$,
 $p: 2x-3y+z=6$.
- 6.25. $\vec{a} = (x+z)\vec{i} + 2y\vec{j} + (x+y-z)\vec{k}$,
 $p: x+2y+z=2$.
- 6.26. $\vec{a} = (y+2z)\vec{i} + (x+2z)\vec{j} + (x-2y)\vec{k}$,
 $p: 2x+y+2z=2$.
- 6.27. $\vec{a} = (x+z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x+2y+z)\vec{k}$,
 $p: x+y+z=2$.
- 6.28. $\vec{a} = x\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (y+z)\vec{k}$,
 $p: 3x+3y+z=3$.
- 6.29. $\vec{a} = (3x-1)\vec{i} + (y-x+z)\vec{j} + 4z\vec{k}$,
 $p: 2x-y-2z=-2$.
- 6.30. $\vec{a} = 3x\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (x-z)\vec{k}$,
 $p: x+3y+z=3$.

7. $\vec{a}$ вектор майдон соленоидлими (1—11- вариантлар), потенциалми (12—25- вариантлар), гармоникми (26—30- вариантлар) эканини аниқланг:

- 7.1. $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + xy\vec{j} - xz\vec{k}$.
- 7.2. $\vec{a} = x^2y\vec{i} - 2xy^2\vec{j} + 2xyz\vec{k}$.
- 7.3. $\vec{a} = (2yz - 2x)\vec{i} + (xz - 2y)\vec{j} + xy\vec{k}$.
- 7.4. $\vec{a} = (x^2 - z^2)\vec{i} - 3xy\vec{j} + (y^2 + z^2)\vec{k}$.
- 7.5. $\vec{a} = 2xyz\vec{i} - y(yz + 1)\vec{j} + z\vec{k}$.
- 7.6. $\vec{a} = (2x - 3y)\vec{i} + 2xy\vec{j} - z^2\vec{k}$.
- 7.7. $\vec{a} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (y^2 - z^2)\vec{j} + (z^2 - x^2)\vec{k}$.
- 7.8. $\vec{a} = yz\vec{i} + (x - y)\vec{j} + z^2\vec{k}$.
- 7.9. $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$.
- 7.10. $\vec{a} = 3x^2y\vec{i} - 2xy^2\vec{j} - 2xyz\vec{k}$.
- 7.11. $\vec{a} = (x + y)\vec{i} - 2(y + z)\vec{j} + (z - x)\vec{k}$.
- 7.12. $\vec{a} = (yz - 2x)\vec{i} + (xz + zy)\vec{j} + xy\vec{k}$.
- 7.13. $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$.
- 7.14. $\vec{a} = 6xy\vec{i} + (3x^2 - 2y)\vec{j} + z\vec{k}$.
- 7.15. $\vec{a} = (2x - yz)\vec{i} + (2x - xy)\vec{j} + yz\vec{k}$.
- 7.16. $\vec{a} = (y - z)\vec{i} + 3xyz\vec{j} + (z - x)\vec{k}$.
- 7.17. $\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x^2 - y^2)\vec{k}$.
- 7.18. $\vec{a} = (x + y)\vec{i} - 2xz\vec{j} - 3(y + z)\vec{k}$.
- 7.19. $\vec{a} = z^2\vec{i} + (xz + y)\vec{j} + x^2y\vec{k}$.
- 7.20. $\vec{a} = xy(3x - 4y)\vec{i} + x^2(x - 4y)\vec{j} + 3z^2\vec{k}$.
- 7.21. $\vec{a} = 6x^2\vec{i} + 3\cos(3x + 2z)\vec{j} + \cos(3y + 2z)\vec{k}$.
- 7.22. $\vec{a} = (x + y)\vec{i} + (z - y)\vec{j} + 2(x + z)\vec{k}$.
- 7.23. $\vec{a} = 3(x - z)\vec{i} + (x^2 - y^2)\vec{j} + 3z\vec{k}$.
- 7.24. $\vec{a} = (2x - yz)\vec{i} + (xz - 2y)\vec{j} + 2xyz\vec{k}$.
- 7.25. $\vec{a} = 3x^2\vec{i} + 4(x - y)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$.
- 7.26. $\vec{a} = x^2z\vec{i} + y^2\vec{j} - xz^2\vec{k}$.
- 7.27. $\vec{a} = (x + y)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x + z)\vec{k}$.
- 7.28. $\vec{a} = \frac{x}{y}\vec{i} + \frac{y}{z}\vec{j} + \frac{z}{x}\vec{k}$.
- 7.29. $\vec{a} = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$.
- 7.30. $\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$.

МАТЕМАТИК ФИЗИКАНИНГ АСОСИЙ ТЕНГЛАМАЛАРИ

1- §. Тор тебраниш тенгламаси учун Коши масаласини
Даламбер усули билан ечиш

13.1.1. Математик физиканинг кўпгина масалалари хусусий ҳосилали дифференциал тенгламаларга келтирилади. Булардан энг кўп учрайдигани иккинчи тартибли тенгламалардир.

Умумий кўриниши

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = f(x, y)$$

бўлган хусусий ҳосилали иккинчи тартибли чизикли дифференциал тенгламани қараймиз. Бу тенгламада номаълум $u(x, y)$ функция иккита ўзгарувчига боғлиқ бўлиб, тенгламанинг A, B, C, D, E ва F коэффицентлари ҳам умуман айтганда x ва y ларга боғлиқ маълум функциялар. Тенгламанинг ўнг томонидаги $f(x, y)$ функция берилган функция бўлиб, y нолга тенг бўлса, тенглама *иккинчи тартибли бир жинсли чизикли хусусий ҳосилали тенглама* дейилади.

Агар тенгламанинг берилган соҳасида:

$B^2 - 4AC > 0$ бўлса, тенглама гипербولىк,

$B^2 - 4AC = 0$ бўлса, тенглама параболик,

$B^2 - 4AC < 0$ бўлса, тенглама эллиптик турга тегишли бўлади.

Торнинг кўндаланг тебраниши, металл стерженнинг бўйлама тебраниши, симдаги электр тебранишлар, айланувчи цилиндрдаги айланма тебранишлар, газнинг тебранишлари каби масалалар гипербولىк турдаги энг содда тўлқин тенгламаси

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

га олиб келади.

Исикликнинг тарқалиш жараёни, ғовак мухитда суюқлик ва газнинг оқиши масаласи каби масалалар параболик турдаги энг содда исиклик тарқалиш тенгламаси (Фурье тенгламаси)

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

га олиб келади.

Тебранишлар, иссиқлик ўтказиш ва диффузия каби масалаларга тегишли стационар жараёнларнинг тадқиқотида эллиптик турдаги тенгламалардан фойдаланилади. Бу турдаги энг содда тенглама

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Лаплас тенгласидир.

13.1.2. Умумий кўринишда берилган хусусий ҳосилали иккинчи тартибли чизикли дифференциал тенгламанинг *характеристик тенгласи* деб

$$A(dy)^2 - Bdx dy + C(dx)^2 = 0$$

оддий дифференциал тенгламага айтилади.

Гиперболик турдаги тенгламалар учун характеристик тенглама $\varphi(x, y) = C_1$ ва $\psi(x, y) = C_2$ интегралга эга бўлади. Умумий тенглама

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

алмаштиришлар ёрдамида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

шаклдаги *каноник* кўринишга келтирилади.

Параболик турдаги тенгламалар учун характеристик тенглама битта $\varphi(x, y) = c$ умумий интегралга эга бўлиб, улар $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ — (η φ га боғлиқ бўлмаган ихтиёрий функция) алмаштириш ёрдамида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

шаклдаги каноник кўринишга келтирилади.

Эллиптик турдаги тенгламалар учун характеристик тенглама интеграллари ушбу кўринишга эга бўлади: $\varphi(x, y) \pm i\psi(x, y) = C_{1,2}$, бу ерда $\varphi(x, y)$ ва $\psi(x, y)$ — хақиқий функциялар. $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ алмаштиришлар ёрдамида эллиптик турдаги тенгламалар ушбу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = F\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)$$

каноник шаклга келтирилади.

1-мисол. Ушбу

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 8 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

дифференциал тенгламани каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. Бунда $A=4$, $B=8$, $C=3$, $AC - \frac{B^2}{4} = -4 < 0$, демак,

гиперболик турдаги тенгламага эгамиз. Тегишли характеристик тенгламани тузамиз:

$$4(dy)^2 - 8dxdy + 3(dx)^2 = 0$$

ёки

$$4\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 8\frac{dy}{dx} + 3 = 0.$$

$\frac{dy}{dx}$ ни топамиз: $\frac{dy}{dx} = \frac{4 \pm 2}{4}$, бундан $y' = \frac{3}{2}$ ва $y' = \frac{1}{2}$. Характеристик тенглама интеграллари: $y - \frac{3}{2}x = C_1$ ва $y - \frac{1}{2}x = C_2$ эканлигини эътиборга олиб, $\xi = y - \frac{3}{2}x$, $\eta = y - \frac{1}{2}x$ ўзгарувчиларни алмаштиришни бажарамиз. Эски ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилаларни янги ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилалар билан ифодалаймиз:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{\partial u}{\partial \eta} \left(-\frac{1}{2}\right); \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \\ &= -\frac{3}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \\ &= -\frac{3}{2} \left(-\frac{3}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) = \\ &\quad \frac{9}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{3}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \\ &= -\frac{3}{2} \frac{\partial u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}; \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\
& = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.
\end{aligned}$$

Берилган дифференциал тенгламага иккинчи тартибли ҳосилалар учун топилган ифодаларни қўямиз:

$$\begin{aligned}
& \left(9 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + \left(3 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \right. \\
& \left. + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + \left(-12 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 16 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) + \\
& + \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \left(-3 \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Соддалаштиришдан кейин берилган тенглама ушбу

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \text{ ёки } \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

каноник кўринишга (гиперболик тур) келтирилади.

13.1.3. Гиперболик турдаги ва параболик турдаги тенгламалар кўпинча вақт давомида содир бўлувчи жараёнларни ўрганишда қўлланилади. Шу сабабли бу ҳолларда изланаётган u функция t вақтга ва x координатага боғлиқ бўлади, яъни $u = u(x, t)$.

Қўйилган масалани тўлиқ ҳал этиш учун бу турдаги тенгламалар билан бирга *чегаравий* ва *бошланғич шартлар* ҳам берилган бўлиши шарт.

Бошланғич шартлар $t=0$ да изланаётган u функция ва унинг ҳосиласи қийматининг берилишидан (гиперболик турдаги тенгламалар учун) ёки функция қийматининггина берилишидан (параболик турдаги тенгламалар учун) иборатдир.

Чегаравий шартларда $u(x, t)$ номаълум функциянинг ўзгарувчи x ни ўзгариш оралиғининг охириларидаги қийматлари берилади.

Агар қаралаётган жараён учун ўзгарувчи x нинг ўзгариш оралиғи чексиз деб қаралса, у ҳолда масала факат бошланғич шартлардагина ечилиб, $u(x, t)$ функция учун чегаравий шартлар қўйилмайди. Масалада факат бошланғич шартлар берилса, бундай масала *Коши масаласи* дейилади.

Агар масала чекли оралик учун қўйилса, у ҳолда бошланғич шартлар ҳам, чегаравий шартлар ҳам берилиши керак. Бу ҳолда *аралаш масалага* эга бўламиз.

Эллиптик турдаги тенгламалар одатда стационар жараёнларга тегишли масалалар қаралаётганда қўлланилади. Шунинг учун t вақт бу тенгламаларда катнашмайди ва изланаётган ечим факат координаталарга боғлиқ бўлиб, масала чегаравий шартлардагина

ечилади. Шартларнинг берилишига кўра Дирихле масаласи, Нейман масаласи ёки аралаш масалалар қўйилиши мумкин.

13.1.4. Торнинг кўндаланг тебранишлари ҳақидаги масалани қўриб чиқайлик. Эркин эгила оладиган ингичка ип тор деб аталади. Торнинг кичик кўндаланг тебранишлари торнинг тебраниш тенгламаси (тўлқин тенгламаси)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ни каноатлантирувчи $u = u(x, t)$ функция билан характерланади, бу тенгламада x тор нуктаси координатаси, t — вақт, a^2 — тор тайёрланган материалнинг физик хоссаларининг акс эттирувчи доимий.

Гиперболик турдаги тенгламага эгамиз. $t=0$ пайтда торнинг ҳолати $u|_{t=0} = \varphi(x)$ ва тор нукталарининг тезлиги $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x)$ маълум бўлсин (Коши масаласи).

Торнинг тебранишлари тенгламасининг ечими ушбу кўринишга эга:

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(x) dx.$$

Бу формула тор тебраниш тенгламаси учун Коши масаласининг Даламбер ечими деб аталади.

2- мисол. $u|_{t=0} = x^2$, $\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$ бўлса,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

тенглама ечимини топинг.

Е ч и ш. $a=1$, $\varphi(x) = x^2$, $\psi(x) = 0$, шунга кўра $u = \frac{\varphi(x-t) + \varphi(x+t)}{2}$,

бунда $\varphi(x) = x^2$. Шундай қилиб, $u = \frac{(x-t)^2 + (x+t)^2}{2}$ ёки $u = x^2 + t^2$.

1- дарсхона топшириғи

1. Тенгламаларни каноник кўринишга келтиринг:

а) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0;$

б) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \sin^2 x - 2y \sin x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$

$$в) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

$$Ж: а) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta}; б) \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2} \frac{\partial z}{\partial \xi}; в) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

2. Агар $u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = x$ экани маълум бўлса, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенглама ечимини топинг. Ж: $u = xt$.

3. Агар $u|_{t=0} = \sin x, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 1$ бўлса, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенглама билан аниқланувчи торнинг $t = \frac{\pi}{2a}$ пайтдаги шаклини аниқланг.

Ж: $u = \sin x \cos at + t$; агар $t = \frac{\pi}{2a}$ бўлса, у ҳолда $u = \frac{\pi}{2a}$, яъни тор абсциссалар ўқиға параллел.

1- мустақил иш

1. Тенгламаларни каноник кўринишга келтиринг:

$$а) x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$$

$$б) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6 \frac{\partial z}{\partial y} = 0;$$

$$в) \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

$$Ж: а) \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} = 0, \xi = \frac{y}{x}; \eta = y; б) \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0, \xi = x + y,$$

$$\eta = 3x + y; в) \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right), \xi = y^2, \eta = x^2.$$

2. Тенгламаларнинг ечимини топинг:

$$а) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ бунда } u|_{t=0} = x, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = -x;$$

$$б) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ бунда } u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \cos x.$$

$$Ж: а) u = x(1-t);$$

$$б) u = \frac{1}{a} \cos x \cdot \sin at.$$

3. Агар $u|_{t=0} = \sin x$, $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = \cos x$ бўлса, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенглама

билан аниқланувчи торнинг $t = \pi$ даги шаклини топинг.

Ж: $u = -\sin x$.

2- §. Иссиқлик ўтказиш (тўлқин) тенгламаси учун аралаш масалани Фурье усули билан ечиш

13.2.1. Берилган бошланғич ва чегаравий шартлардан фойдаланиб, стерженда температура таксимотини аниқловчи $u(x, t)$ функциясини топиш талаб қилинсин.

Масала $u(x, t)|_{t=0} = f(x)$ бошланғич ва $u(x, t)|_{x=0} = u(x, t)|_{x=l} = 0$ ёки

$$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0,$$

чегаравий шартларда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l$$

иссиқлик ўтказиш тенгламасини ечишга келтирилади.

Хусусий ҳосилаларни тенгламаларни ечишнинг кенг тарқалган усулларида бири ўзгарувчиларни ажратиш усули ёки Фурье усулидир. Бу усулга кўра хусусий ечим $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x) \psi_n(t)$

кўринишда изланади. $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ чегаравий шартлар билан қўйилган масала учун Фурье усулига мувофиқ ечим:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2 t}{l^2}} \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}$$

кўринишда бўлади, бунда

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx,$$

$\frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=l} = 0$ чегаравий шартлар билан қўйилган масала учун эса ечимни

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 a^2 t}{l^2}} \cdot \cos \frac{\pi n x}{l} + a_0$$

$$\left(a_0 = \frac{1}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{\pi n x}{l} dx \right)$$

кўринишда оламиз.

1- мисол.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l, t > 0) \text{ тенгламанинг}$$

$$u|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} x, & \text{агар } 0 < x \leq \frac{l}{2} \text{ бўлса,} \\ l-x, & \text{агар } \frac{l}{2} < x < l \text{ бўлса} \end{cases}$$

бошлангич шартни ва $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ чегаравий шартларни каноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Берилган чегаравий шартларни каноатлантирувчи ечимни ушбу кўринишда излаймиз:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{l^2}} \cdot \sin \frac{\pi n x}{l},$$

бунда

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} x \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} dx + \\ &+ \frac{2}{l} \int_{\frac{l}{2}}^l (l-x) \sin \frac{\pi n x}{l} dx = \left\{ s=x, ds=dx, \right. \\ &\quad \left. dt = \sin \frac{\pi n x}{l} dx, t = -\frac{l}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{l} \right\} = \\ &= \frac{2}{l} \left(-\frac{lx}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{l} + \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n x}{l} \right) \Big|_0^{\frac{l}{2}} + \\ &+ \frac{2}{l} \left(-\frac{l^2}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{l} + \frac{lx}{\pi n} \cos \frac{\pi n x}{l} - \frac{l^2}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n x}{l} \right) \Big|_{\frac{l}{2}}^l = \\ &= \frac{4l}{\pi^2 n^2} \sin \frac{\pi n}{2}. \end{aligned}$$

Демак, изланаётган ечим ушбу кўринишга эга:

$$u(x, t) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{\pi n}{2} e^{-\frac{\pi^2 n^2 t}{l^2}} \cdot \sin \frac{\pi n x}{l}$$

ёки

$$u(x, t) = \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)^2} e^{-\frac{\pi^2 (2k+1)^2 t}{l^2}} \cdot \sin \frac{\pi (2k+1)x}{l}.$$

13.2.2. Бир томондан чегараланган (ярим чексиз) стержен учун

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

тенгламанинг $u|_{t=0}=f(x)$ бошлангич шартни ва $u|_{x=0}=\varphi(t)$ чегаравий шартни каноатлантирувчи ечими ушбу формула билан аникланади:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} f(\xi) \left[e^{-\frac{(t-\eta)^2}{4x^2}} - e^{-\frac{(t+\eta)^2}{4x^2}} \right] d\xi + \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi t}} \int_0^t \varphi(\eta) \cdot e^{-\frac{x^2}{4\pi(t-\eta)}} (t-\eta)^{-\frac{3}{2}} d\eta.$$

2-мисол. $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ тенгламанинг $u|_{t=0}=f(x)=u_0$ бошлангич шартни ва $u|_{x=0}=0$ чегаравий шартни каноатлантирувчи ечимини топинг.

Ечиш. Берилган шартларни каноатлантирувчи ечим юкоридаги формулага кўра ушбу кўринишга эга:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} u_0 \left[e^{-\frac{(t-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(t+x)^2}{4t}} \right] d\xi$$

ёки

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \left[e^{-\frac{(t-x)^2}{4t}} - e^{-\frac{(t+x)^2}{4t}} \right] d\xi.$$

$\frac{x-\xi}{2\sqrt{t}} = \mu$, $d\xi = -2\sqrt{t}d\mu$ деб белгилаб, биринчи интегрални алмаштирамиз, яъни

$$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(t-x)^2}{4t}} d\xi = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu; \frac{u_0}{2} \left[1 + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right].$$

бунда $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$, $\frac{x+\xi}{2\sqrt{t}} = \mu$, $d\xi = 2\sqrt{t}d\mu$ деб белгилаб,

$$\frac{u_0}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(t+x)^2}{4t}} d\xi = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\mu^2} d\mu = \frac{u_0}{2} \left[1 - \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right] \text{ га эга бўла-}$$

миз. Шундай қилиб, ечим ушбу кўринишни олади:

$$u(x, t) = u_0 \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

2- дарсхона топшириғи

1. Узунлиги l га тенг, ташки мухит таъсиридан мухофазаланган ва $u|_{t=0} = f(x) = \frac{cx(l-x)}{l^2}$ бошланғич температурага эга бўлган бир жинсли стержен берилган. Стерженнинг охирлари нолга тенг температурада тутиб турилади. Иссиқлик ўтказиш тенгламаси ечимини топинг (стерженнинг $t > 0$ вақтдаги температурасини аниқланг).

$$\text{Ж: } u(x, t) = \frac{8c}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

2. Агар ярим чексиз стерженнинг $x=0$ чап охири иссиқликдан мухофазаланган, температуранинг бошланғич тақсимооти

$$u|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x < 0, \\ u_0, & \text{агар } 0 < x < l, \\ 0, & \text{агар } x > l \end{cases}$$

бўлса, иссиқлик ўтказиш тенгламасининг ечимини топинг.

$$\text{Ж: } u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left[\Phi\left(\frac{x+l}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-l}{2\sqrt{t}}\right) \right].$$

3. Агар стерженнинг $u|_{t=0} = f(x) = \frac{2\pi}{l}x - \sin \frac{2\pi}{l}x$ бошланғич температураси берилган ва охирлари иссиқликдан мухофазаланган, яъни $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0$ бўлса, узунлиги l га тенг ва сирти ҳам иссиқликдан мухофазаланган стерженда температура тақсимотини топинг.

$$\text{Ж: } u(x, t) = \pi + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{32}{\pi(2k+1)^2(2k-1)(2k+3)} \times \\ \times e^{-\left(\frac{\pi(2k+1)}{l}\right)^2 t} \cdot \cos \frac{(2k+1)\pi x}{l}.$$

2- мустақил иш

1. $u|_{t=0} = x(l-x)$, $u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0$ шартларда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

иссиқлик ўтказиш тенгламасини ечинг.

$$\text{Ж: } u(x, t) = \frac{8l^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi(2n+1)}{l}\right)^2 t} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l} \cdot \frac{1}{(2n+1)^3}.$$

2. Агар узунлиги l га тенг сирти иссиқликдан муҳофазаланган стерженнинг бошланғич температураси

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2u_0}{l}, & \text{агар } 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{2u_0}{l} (l-x), & \text{агар } \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}$$

бўлиб, стерженнинг учлари ҳам иссиқликдан муҳофазаланган бўлса, шу стерженда иссиқлик тақсимланишини топинг.

$$\text{Ж: } u(x, t) = \frac{u_0}{2} - \frac{4u_0}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2(2n+1)}{l} \pi x}{(2n+1)^2} e^{-\frac{2(2n+1)^2 \pi^2 a^2 t}{l^2}}$$

3-§. Дирихле масаласини доирада Фурье усули билан ечиш

Дирихле масаласини қараймиз: доира ичида Лаплас тенгламасини каноатлантирувчи ва доира чегарасида берилган функцияга тенг бўлган гармоник функцияни топинг.

Масалани ечиш учун кутб координаталаридан фойдаланамиз. Маркази кутбда бўлиб, радиуси R га тенг доира берилган бўлсин. $r \leq R$ доирада гармоник, $r=R$ айланада $u|_{r=R}=f(\varphi)$ шартни каноатлантирувчи ($f(\varphi)$ — берилган функция) ва бу айланада узлуксиз бўлган $u=u(r, \varphi)$ функцияни излаймиз. Изланаётган функция доирада кутб координаталарида ёзилган ушбу Лаплас тенгламасини каноатлантириши керак.

$$r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Фурье усулидан фойдаланиб доира учун Дирихле масаласи ечимини топамиз:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau.$$

Бу интеграл Пуассон интеграли деб аталади.

Мисол. Бир жинсли юпка доиравий пластинкада температура-нинг стационар тақсимланишини топинг. Пластинка радиуси R га тенг, унинг юкори қисми 1° да, пастки қисми 0° да тутиб турилади.

Ечиш. Масала шартига кўра:

$$f(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{агар } -\pi < \tau < 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } 0 < \tau < \pi \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau$$

интеграл билан аниқланади.

а) юкори ярим доира ($0 < \varphi < \pi$) нукталари учун $\operatorname{tg} \frac{\tau - \varphi}{2} = t$ алмаштиришни киритамиз, бундан $\cos(\tau - \varphi) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} d\tau = 2t dt$. Янги интеграллаш ўзгарувчиси t ($-\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$) дан $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$ гача ўзгаради. Шундай қилиб,

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}^{\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} \frac{R^2 - r^2}{(R-r)^2 + (R+r)^2 t^2} dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R+r}{R-r} t \right) \Big|_{-\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}^{\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R+r}{R-r} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R+r}{R-r} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\frac{R+r}{R-r} (\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2})}{\left(1 - \frac{R+r}{R-r} \right)^2} = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{R^2 - r^2}{2Rr \sin \varphi} \end{aligned}$$

ёки

$\operatorname{tg} u = -\frac{R^2 - r^2}{2Rr \sin \varphi}$, $0 < \varphi < \pi$. Бу тенгликни ўнг томони манфий, демак $0 < \varphi < \pi$ да u функция $\frac{1}{2} < u < \pi$ тенгсизликлари қаноатлантиради. Бу ҳол учун $0 < \varphi < \pi$ да ушбу ечимга эга бўламиз:

$$\operatorname{tg}(\pi - u) = \frac{R^2 - r^2}{2Rr \sin \varphi} \quad \text{ёки} \quad u = \pi - \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{R^2 - r^2}{2Rr \sin \varphi}.$$

б) Пастки ярим доирада жойлашган нукталар учун ($\pi < \varphi < 2\pi$) $\operatorname{ctg} \frac{\tau - \varphi}{2} = t$ ўрнига қўйишдан фойдаланамиз, бундан $\cos(\tau - \varphi) = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$, $d\tau = -\frac{2dt}{1 + t^2}$, янги интеграллаш ўзгарувчиси t ($-\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}$) дан $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ гача ўзгаради. У ҳолда φ нинг бу қийматлари учун ушбуга эгамиз:

$$u(r, \varphi) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}^{\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}} \frac{R^2 - r^2}{(R+t)^2 + (R-t)^2 t^2} dt =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R-r}{R+r} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{R-r}{R+r} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) \right]$$

ёки

$$u = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{R^2 - r^2}{2Rr \sin \varphi}, \quad \pi < \varphi < 2\pi.$$

Энди унг томон мусбат ($\sin \varphi < 0$), шунинг учун $0 < u < \frac{1}{2}$.

3- дарсхона топшириги

Кутб координаталарини киритиб, $1 \leq r \leq 2$ халқанинг ички қисми учун Лаплас тенгламасининг

$$u|_{r=1} = 0, \quad u|_{r=2} = y$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$\text{Ж: } u(r, \varphi) = \frac{8}{3} \operatorname{sh}(\ln r) \cdot \sin \varphi.$$

3- мустақил иш

$\Delta u = 0$ Лаплас тенгламаси учун Дирихле масаласининг $1 < r < 2$ халқада $u|_{r=1} = \sin 3\varphi$, $u|_{r=2} = 1 + \cos 2\varphi$ чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечимини топинг.

$$\text{Ж: } u(r, \varphi) = \frac{\ln r}{\ln 2} \left(\frac{4}{15} r^2 - \frac{4}{15} \frac{1}{r^2} \right) \cos 2\varphi + \left(\frac{64}{63} r^{-3} - \frac{1}{63} r^3 \right) \sin 3\varphi.$$

ЭХТИМОЛЛИКЛАР НАЗАРИЯСИ ВА МАТЕМАТИК СТАТИСТИКА

1-§. Эхтимоллиқнинг классик ва статистик таърифлари. Геометрик эхтимоллик

14.1.1. Эхтимоллиқлар назариясида *ҳодиса* деб, синов натижасида рўй бериши мумкин бўлган ҳар қандай фактга айтилади.

Синов натижасида албатта рўй берадиган ҳодиса *муқаррар (U)* ҳодиса дейилади.

Синов натижасида ҳеч қачон рўй бермайдиган ҳодиса *мумкин бўлмаган (V)* ҳодиса дейилади.

Синов натижасида рўй бериши ҳам, рўй бермаслиги ҳам мумкин бўлган ҳодиса *тасодифий ҳодиса* дейилади.

Синовнинг ҳар қандай натижаси *элементар ҳодиса* дейилади.

Агар битта синовнинг ўзида *A* ва *B* тасодифий ҳодисалар бир вақтда рўй бермасалар, улар *биргаликдамас (биргаликда бўлмаган) ҳодисалар* дейилади. Агар синов натижасида бир нечта ҳодисалардан фақат биттаси рўй берса, улар *ҳодисаларнинг тўла гуруҳи*ни ташкил этади дейилади.

Агар *A* ва *B* ҳодисаларнинг ҳеч бирини иккинчисига нисбатан рўй бериши мумкин дейишга асос бўлмаса, бу ҳодисалар *тенг имкониятли* дейилади.

A ҳодисанинг рўй бермаслигидан иборат бўлган *Ā* ҳодиса *A* ҳодисага *қарама-қарши ҳодиса* дейилади.

Агар *A* ва *B* ҳодисалардан бирининг рўй бериши иккинчисининг рўй бериш ёки рўй бермаслигига таъсир этмаса, бу ҳодисалар *ўзаро эрки* (*боғлиқ бўлмаган*) *ҳодисалар* дейилади. Акс ҳолда *A* ва *B* ҳодисалар *боғлиқ ҳодисалар* дейилади.

14.1.2. Синаш натижасида тенг имкониятли *n* та элементар ҳодисалар рўй бериши мумкин бўлсин. Бирор *A* ҳодисанинг рўй бериши учун элементар ҳодисалардан *m* таси қулайлик туғдирсин. У ҳолда *A* ҳодисанинг классик эхтимоллиги

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

формула билан аниқланади.

Эхтимоллиқнинг хоссалари:

1. Муқаррар ҳодисанинг эхтимоллиги 1 га тенг, яъни

$$P(U) = 1.$$

2. Мумкин бўлмаган ҳодисанинг эҳтимоллиги 0 га тенг, яъни

$$P(V) = 0.$$

3. Тасодифий A ҳодисанинг эҳтимоллиги учун

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

ўринли.

14.1.3. Эҳтимолликларни бевосита ҳисоблашда кўпинча комбинаторика формулаларидан фойдаланилади.

Ўрин алмаштиришлар деб n та турли элементларнинг бир-биридан факат жойлашши билан фарқ қилувчи комбинацияларига айтилади. n та турли элементларнинг ўрин алмаштиришлари сони $P_n = n!$ га тенг ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$).

Ўринлаштиришлар n та турли элементдан m тадан тузилган комбинациялар бўлиб, улар бир-биридан m элементларнинг таркиби, ё уларнинг тартиби билан фарқ қилади. Уларнинг сони

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \text{ ёки } A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

формулалар билан топилади.

Группалашлар — бир-биридан ҳеч бўлмаганда битта элементи билан фарқ қилувчи n та элементдан m тадан тузилган комбинациялардир. Уларнинг сони

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \text{ га тенг.}$$

14.1.4. Ҳодисанинг *нисбий частотаси* деб ҳодиса рўй берган синовлар сонининг ўтказилган барча синовлар сонига нисбатига айтилади:

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

бу ерда m — ҳодисанинг рўй беришлари сони, n — синовларнинг умумий сони.

Синовлар сони етарлича катта бўлганда ҳодисанинг *статистик эҳтимоллиги* сифатида нисбий частотани олиш мумкин:

$$W(A) \approx P(A) = \frac{m}{n}.$$

14.1.5. Геометрик эҳтимоллик. D_1 соҳа D соҳанинг қисми (бўлаги) бўлсин. Агар соҳанинг ўлчамини (узунлиги, юзи, ҳажми) mes орқали белгиласак, таваккалига ташланган нуқтанинг D соҳага тушиш эҳтимоллиги

$$P(A) = \frac{mes D_1}{mes D} \text{ га тенг.}$$

1-мисол. Кутида 3 та оқ, 7 та қора шар бор. Ундан таваккалига олинган шарнинг оқ шар бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A олинган шар ок эканлиги ҳодисаси бўлсин. Мазкур синов 10 та тенг имкониятли элементар ҳодисалардан иборат бўлиб, уларнинг 3 таси A ҳодисага қулайлик туғдирувчидир. Демак,

$$P(A) = \frac{3}{10} = 0,3.$$

2-мисол. Гуруҳда 12 талаба бўлиб, уларнинг 8 нафари аълочилар. Рўйхат бўйича таваккалига 9 талаба танлаб олинди. Танлаб олинганлар ичида 5 талаба аълочи талаба бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Синовнинг барча мумкин бўлган тенг имкониятли элементар ҳодисалари сони C_{12}^9 га тенг. Буларнинг ичидан $C_8^5 \cdot C_4^4$ таси танлаб олинган талабалар ичидан 5 таси аълочи талабалар ҳодисаси (A) учун қулайлик туғдиради. Шунинг учун

$$P(A) = \frac{C_8^5 \cdot C_4^4}{C_{12}^9} = \frac{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1}{\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{14}{55}.$$

3-мисол. Киркма алифбонинг 10 та ҳарфидан «математика» сўзи тузилган. Бу ҳарфлар тасодифан сочилиб кетган ва қайтадан ихтиёрий тартибда йиғилган. Яна «математика» сўзи ҳосил бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A — «Математика» сўзи ҳосил бўлди ҳодисаси. Тенг имкониятли мумкин бўлган элементар ҳодисалар сони $n = 10!$ бўлиб, A ҳодисага қулайлик яратувчилари $m = 2! \cdot 3! \cdot 2!$ бўлади. Бу ерда математика сўзида «м» 2 марта, «а» 3 марта, «т» 2 марта такрорланиши ҳисобга олинади.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2! \cdot 3! \cdot 2!}{10!} = \frac{1}{151200}.$$

4-мисол. Телефонда номер тараётган абонент охириги икки рақамни эсдан чиқариб қўйди ва фақат бу рақамлар ҳар хил эканлигини эслаб қолган ҳолда уларни таваккалига терди. Керакли рақамлар терилганлиги эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A — иккита керакли рақам терилганлик ҳодисаси бўлсин. Ҳаммаси бўлиб, унта рақамдан иккитадан нечта уринлаштиришлар тузиш мумкин бўлса шунча, яъни $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$ та турли рақамларни териш мумкин. Шунинг учун классик эҳтимолликка кўра

$$P(A) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{90}.$$

5-мисол. Француз табиатшуноси Бюффон (XVIII аср) тангани 4040 марта ташлаган ва бунда 2048 марта гербли томон тушган. Бу синовлар мажмуасида гербли томон тушиши частотасини топинг.

Е ч и ш.

$$W(A) = \frac{2048}{4040} \approx 0,50693.$$

6-мисол. R радиусли доирага нукта таваккалига ташланган. Ташланган нуктанинг доирага ички чизилган мунтазам учбурчак ичига тушиши эҳтимоллигини топинг.

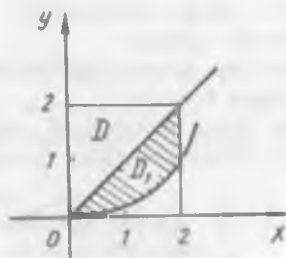
Е ч и ш. $S(D_1)$ — учбурчакнинг юзи, $S(D)$ — доиранинг юзи бўлсин (63-шакл). A — нуктанинг учбурчакка тушиши ҳодисаси. У ҳолда

$$P(A) = \frac{S(D_1)}{S(D)} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4\pi R^2} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0,4137.$$

$$P(A) \approx 0,4137.$$



63-шакл



64-шакл

7-мисол. $[0, 2]$ кесмадан таваккалига иккита x ва y сонлари танланган. Бу сонлар $x^2 \leq 4y \leq 4x$ тенгсизликни қаноатлантириши эҳтимоллигини топинг.

Е ч и ш. (x, y) нуктанинг координаталари

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

тенгсизликлар системасини қаноатлантиради. Бу — (x, y) нукта томони 2 га тенг квадрат нукталари тўпламидан таваккалига танланишини билдиради.

Бизни қизиқтираётган A ҳодиса танланадиган (x, y) нукта штрихланган фигурага тегишли бўлган ҳолда ва фақат шу ҳолда рўй беради (64-шакл). Бу фигура координаталари $x^2 \leq 4y \leq 4x$ тенгсизликни қаноатлантирадиган нукталарнинг тўплами сифатида ҳосил қилинган. Демак, изланаётган эҳтимоллик штрихланган фигура юзининг квадрат юзига нисбатига тенг, яъни

$$P(A) = \frac{\int_0^2 \left(x - \frac{1}{4}x^2\right) dx}{4} = \frac{\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^2}{4} = \frac{\frac{4}{2} - \frac{8}{12}}{4} = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{1}{3}.$$

Демак, $P(A) = \frac{1}{3}$.

1- дарсхона топириги

1. Таваккалига 20 дан катта бўлмаган натурал сон танланганда, унинг 5 га каррали бўлиш эҳтимоллигини топинг.

Ж: 0,2.

2. Карточкаларга 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ракамлари ёзилган. Таваккалига тўртта карточка олиниб, уларни катор қилиб терилганда жуфт сон ҳосил бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $\frac{4}{9}$.

3. Кутида 12 та оқ ва 8 та кизил шар бор. Таваккалига

а) битта шар олинганда унинг оқ бўлиши эҳтимоллигини топинг;

б) битта шар олинганда унинг кизил бўлиши эҳтимоллигини топинг;

в) 2 та шар олинганда уларнинг турли рангда бўлиши эҳтимоллигини топинг;

г) 8 та шар олинганда уларнинг 3 таси кизил рангли бўлиши эҳтимоллигини топинг;

д) 8 та шар олинганда кизил рангли шарлар 3 тадан кўп бўлмаслиги эҳтимоллигини топинг;

Ж: а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{48}{95}$; г) $\approx 0,35$; д) $\approx 0,6117$.

4. Иккита ўйин соккаси барабар ташланганда қуйидаги ҳодисаларнинг рўй бериш эҳтимолликларини топинг:

A — тушган очколар йиғиндиси 8 га тенг.

B — тушган очколар кўпайтмаси 8 га тенг.

C — тушган очколар йиғиндиси уларнинг кўпайтмасидан катта.

Ж: $P(A) = \frac{5}{36}$; $P(B) = \frac{1}{18}$; $P(C) = \frac{11}{36}$.

5. Танга 2 марта ташланганда ақалли бир марта гербли томон тушиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P(A) = \frac{3}{4}$.

6. Кутичада 6 та бир хил (номерланган) кубик бор. Таваккалига битта-битадан барча кубиклар олинганда кубикларнинг номерлари ўсиб бориш тартибида чиқиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P(A) = \frac{1}{720}$.

7. Кутида 5 та бир хил буюм бўлиб, уларнинг 3 таси бўялган. Таваккалига 2 та буюм олинганда улар орасида:

а) битта бўялгани бўлиши;

б) иккита бўлгани бўлиши;

в) ҳеч бўлмаганда битта бўялгани бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: а) 0,6; б) 0,3; в) 0,9.

8. Учлари (0, 0), (0, 1), (1, 1), (1, 0) нукталарда бўлган квадратга (x, y) нукта ташланади. Бу нуктанинг координаталари $y < 2x$

тенгсизликни каноатлантириши эҳтимоллигини топинг.

$$\text{Ж: } P(A) = 0,75.$$

9. Таваккалига ҳар бири бирдан катта бўлмаган иккита мусбат сон олинганда, уларнинг йиғиндиси $x+y$ бирдан катта бўлмаслиги, кўпайтмаси xy эса 0,09 дан кичик бўлмаслиги эҳтимоллигини топинг.

$$\text{Ж: } P(A) \approx 0,2.$$

10. Айланага таваккалига ички учбурчак чизилади. Бу учбурчак ўткир бурчакли бўлиши эҳтимоллигини топинг.

$$\text{Ж: } \frac{1}{4}.$$

11. Техник назорат бўлими таваккалига олинган 100 та китобдан 5 таси яроксиз эканини аниқлади. Яроксиз китобларнинг нисбий частотасини аниқланг.

$$\text{Ж: } W(A) = \frac{5}{100} = 0,05.$$

1- мустақил иш

1. Домино тошларининг тўлиқ мажмуасидан (28 та тош) таваккалига биттаси олинади. Қуйидаги ходисаларнинг эҳтимоллигини топинг.

- а) олинган тошда 6 очко бўлиши;
- б) олинган тошда 5 очко ёки 4 очко бўлиши;
- в) чиққан очколар йиғиндиси 7 га тенг бўлиши.

$$\text{Ж: а) } \frac{1}{4}; \text{ б) } \frac{13}{28}; \text{ в) } \frac{3}{28}.$$

2. Таваккалига 20 дан катта бўлмаган натурал сон танланганда унинг 20 нинг бўлувчиси бўлиши эҳтимоллигини топинг.

$$\text{Ж: } P = 0,3.$$

3. Рақамлари ҳар хил икки хонали сон ўйланган. Ўйланган сон:

- а) тасодифан айтилган икки хонали сон бўлиши;
- б) рақамлари ҳар хил бўлган тасодифан айтилган икки хонали сон бўлиши эҳтимоллигини топинг.

$$\text{Ж: а) } \frac{1}{90}; \text{ б) } \frac{1}{81}.$$

4. Алоҳида карточкаларга 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 рақамлар ёзилган. Карточкалар яхшилаб аралаштирилгач, таваккалига тўрттаси олинади ва кетма-кет катор қилиб терилади. Хосил бўлган сон 1234 бўлиши эҳтимоллигини топинг.

$$\text{Ж: } 0,00033.$$

5. Кутида 100 та лампочка бўлиб, уларнинг 10 таси яроксиз. Таваккалига 4 та лампочка олинади. Олинган лампочкалар ичида:

- а) яроксизлари йўқ бўлиши;
- б) яроклилари йўқ бўлиши эҳтимоллигини топинг.

$$\text{Ж: } P \approx 0,65; \text{ б) } P \approx 0,00005.$$

6. R радиусли доирага нукта ташланади. Бу нукта доирага ички чизилган квадрат ичига тушиши эҳтимоллигини топинг.

$$\text{Ж: } P = \frac{2}{\pi}.$$

7. Таваккалига ҳар бири 2 дан катта бўлмаган иккита x ва y мусбат сон олинганда бу сонларнинг кўпайтмаси xy бирдан катта бўлмаслиги, y/x бўлинма эса иккидан катта бўлмаслиги эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P \approx 0,38$.

8. Танкка қарши минаялар тўғри чизик бўйлаб ҳар 15 м га жойлаштирилган. Эни 3 м бўлган танк бу тўғри чизикка перпендикуляр йўналишда келмоқда. Танкнинг минаяга дуч келиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P = \frac{1}{5}$.

9. Буюм партиясини синашда яроқли буюмлар нисбий частотаси 0,9 га тенг бўлди. Агар ҳаммаси бўлиб, 200 та буюм текширилган бўлса, яроқли буюмлар сонини топинг.

Ж: 180 та.

10. Барча ёклари бўялган куб 1000 та тенг «кубча»ларга арраланган. Таваккалига олинган «кубча»нинг иккита ёғи бўялган бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P = 0,096$.

11. Яшиқда 31 та биринчи нав ва 6 та иккинчи нав деталь бор. Таваккалига 3 та деталь олинади: а) олинган учала деталь биринчи нав бўлиши; б) олинган деталларнинг ҳеч бўлмаганда биттаси биринчи нав бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: а) $P \approx 0,58$; б) $p \approx 0,9974$.

12. Таваккалига олинган телефон номери бешта рақамдан иборат. Унда:

а) ҳамма рақамлар ҳар хил бўлиши;

б) ҳамма рақамлар ток бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: а) 0,3024; б) 0,03125.

13. Шарга куб ички чизилган. Нукта таваккалига шарга ташланади. Нуктанинг кубга тушиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \approx 0,368$.

2-§. Ҳодисалар алгебраси.

Эҳтимолликларни қўшиш ва кўпайтириш теоремалари.

Шартли эҳтимоллик

14.2.1. Иккита A ва B ҳодисанинг *йигиндис*и деб A ҳодисанинг, ёки B ҳодисанинг, ёки бу иккала ҳодисанинг рўй беришидан иборат $C = A + B$ ҳодисага айтилади.

Биргаликда бўлмаган иккита A ва B ҳодиса *йигиндис*ининг эҳтимоллиги бу ҳодисалар эҳтимолликларининг *йигиндис*ига тенг:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Бир нечта жуфт-жуфти билан биргаликда бўлмаган ҳодисалар *йигиндис*ининг эҳтимоллиги бу ҳодисалар эҳтимолликларининг *йигиндис*ига тенг:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Тўла группа ташкил этувчи $A_1, A_2, \dots, A_n$ ходисалар эҳтимолликларининг йиғиндиси 1 га тенг, яъни

$$P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1.$$

Карама-карши ходисалар эҳтимолликларининг йиғиндиси 1 га тенг, яъни

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

14.2.2. Иккита A ва B ходисанинг *кўпайтмаси* деб, бу ходисаларнинг биргаликда рўй беришидан иборат $C = A \cdot B$ ходисага айтилади.

Иккита эркин ходисанинг биргаликда рўй бериши эҳтимоллиги бу ходисалар эҳтимолликларининг кўпайтмасига тенг:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Биргаликда эркин бўлган бир нечта ходисанинг рўй бериши эҳтимоллиги бу ходисалар эҳтимолликларининг кўпайтмасига тенг:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

B ходисанинг A ходиса рўй берди деган шартда ҳисобланган эҳтимоллиги *шартли эҳтимоллик* дейилади. Шартли эҳтимоллик куйидагича белгиланади:

$$P_A(B) \text{ ёки } P(B/A).$$

Иккита боғлиқ ходисанинг биргаликда рўй бериши эҳтимоллиги учун куйидаги формулалар ўринли:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B) \text{ ёки } P(AB) = P_B \cdot P_B(A).$$

Бир нечта боғлиқ ходисаларнинг биргаликда рўй бериш эҳтимоллиги куйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n).$$

14.2.3. A ва B тасодифий ходисалар йиғиндисининг эҳтимоллиги учун куйидаги формула ўринли:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

14.2.4. Тўла эҳтимоллик формуласи. $B_1, B_2, \dots, B_n$ лар ходисаларнинг тўла гуруҳини ташкил этиб, A ходиса уларнинг бири билан рўй бериши мумкин бўлсин. У ҳолда

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(B_k) \cdot P_{B_k}(A).$$

14.2.5. Бейес формуласи. Агар A ҳодиса рӯй бергани маълум бўлса, у ҳолда $P(B_k)$, $k=\overline{1, n}$ эҳтимолликларни қайта баҳолаш мумкин, яъни $P_A(B_k)$ шартли эҳтимолликларни ушбу Бейес формуласи ёрдамида топиш мумкин:

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}{P(A)}$$

1-мисол. Цехда бир нечта станок ишлайди. Смена давомида битта станокни соzлашни талаб этиш эҳтимоллиги 0,2 га тенг, иккита станокни соzлашни талаб этиш эҳтимоллиги 0,13 га тенг. Смена давомида иккитадан ортик станокни соzлашни талаб этиш эҳтимоллиги эса 0,07 га тенг. Смена давомида станокларни соzлашни талаб этилиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Куйидаги ҳодисаларни қараймиз: A — смена давомида битта станок соzлашни талаб этади ҳодисаси;

B — смена давомида иккита станок соzлашни талаб этади ҳодисаси;

C — смена давомида 2 тадан ортик станок соzлашни талаб этади ҳодисаси.

.., B , C ҳодисалар ўзаро биргаликда эмас. Бизни куйидаги ҳодиса кизиктиради: $(A+B+C)$ — смена давомида соzлаш зарур бўладиган станоклар:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,2 + 0,13 + 0,07 = 0,4.$$

2-мисол. Иккита овчи бир пайтда бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда куёнга қарата ўқ узишди. Овчилардан ҳеч бўлмаганда бири ўқни нишонга текказса, куён отиб олинган бўлади. Биринчи овчининг нишонга уриш эҳтимоллиги 0,8 га, иккинчисиники 0,75 га тенг бўлса, куённи отиб олиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Куйидаги ҳодисаларни қараймиз:

A — биринчи овчи нишонга текказиши;

B — иккинчи овчи нишонга текказиши.

A ва B эркин ҳодисалар. Бизни $(A+B)$ ҳодиса кизиктиради.

$(A+B)$ — ҳеч бўлмаганда битта овчининг нишонга текказиши.

У ҳолда

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0,8 + 0,75 - 0,8 \cdot 0,75 = 0,95,$$

$$P(A+B) = 0,95.$$

3-мисол. Командада 12 спортчи бўлиб, уларнинг 5 таси спорт устаси. Спортчилар ичидан куръа ташлаш орқали уч спортчи танланади. Танланган спортчиларнинг ҳаммаси спорт устаси бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A_1 — биринчи спортчи — спорт устаси;

A_2 — иккинчи спортчи — спорт устаси;

A_3 — учинчи спортчи — спорт устаси;

$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ — учала спортчи — спорт устаси.
 A_1, A_2, A_3 , ходисалар — боғлик ходисалар. Демак,

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}.$$

4- мисол. Талаба ўзига керакли формулани 3 та маълумотномадан кидиради. Формула биринчи, иккинчи, учинчи маълумотномада бўлиши эҳтимоллиги мос равишда 0,6; 0,7; 0,8 га тенг. Формула:

- а) фақат битта маълумотномада бўлиши;
- б) фақат иккита маълумотномада бўлиши;
- в) учала маълумотномада бўлиши;
- г) ҳеч бўлмаганда битта маълумотномада бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Қуйидаги ходисаларни караймиз:

A_1 — формула биринчи маълумотномада бор,

A_2 — формула иккинчи маълумотномада бор,

A_3 — формула учинчи маълумотномада бор.

а) $A = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ — формула фақат битта маълумотномада бор.

$A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3, \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3, \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ ходисалар биргаликда эмас ва $A_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3; \bar{A}_1, A_2, \bar{A}_3; \bar{A}_1, \bar{A}_2, A_3$ ходисалар боғлик эмас. Демак,

$$P(A) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,188.$$

б) $A = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$ — формула фақат иккита маълумотномада бор. Демак,

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,452.$$

в) $A = A_1 A_2 A_3$ — формула учала маълумотномада бор.

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336.$$

г) $A = A_1 + A_2 + A_3$ — формула ҳеч бўлмаганда битта маълумотномада бор. Мазкур ҳолда A ходисага карама-карши ходисани караш қулай.

$\bar{A}$ — формула ҳеч бир маълумотномада йўқ.

$\bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$, у ҳолда $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 1 - 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 1 - 0,024 = 0,976.$$

Шундай қилиб, а) $P(A) = 0,188$; б) $P(A) = 0,452$; в) $P(A) = 0,336$; г) $P(A) = 0,976$.

5- мисол. Биринчи кутида 2 та ок, 6 та кора, иккинчи кутида эса 4 та ок, 2 та кора шар бор. Биринчи кутидан таваккалига 2 та шар олиб, иккинчи кутига солинди, шундан кейин иккинчи кутидан таваккалига битта шар олинди.

а) Олинган шар ок бўлиши эҳтимоллиги қандай?

б) Иккинчи кутидан олинган шар ок бўлиб чиқди. Биринчи кутидан олиб иккинчи кутига солинган 2 та шар ок бўлиши эҳтимоллиги қандай?

Ечиш. а) Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

14.2.5. Бейес формуласи. Агар A ҳодиса руй бергани маълум бўлса, у ҳолда $P(B_k)$, $k = \overline{1, n}$ эҳтимолликларни қайта баҳолаш мумкин, яъни $P_A(B_k)$ шартли эҳтимолликларни ушбу Бейес формуласи ёрдамида топиш мумкин:

$$P_A(B_k) = \frac{P(B_k) \cdot P_{B_k}(A)}{P(A)}.$$

1-мисол. Цехда бир нечта станок ишлайди. Смена давомида битта станокни соzлашни талаб этиш эҳтимоллиги 0,2 га тенг, иккита станокни соzлашни талаб этиш эҳтимоллиги 0,13 га тенг. Смена давомида иккитадан ортиқ станокни соzлашни талаб этиш эҳтимоллиги эса 0,07 га тенг. Смена давомида станокларни соzлашни талаб этилиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Куйидаги ҳодисаларни караймиз: A — смена давомида битта станок соzлашни талаб этади ҳодисаси;

B — смена давомида иккита станок соzлашни талаб этади ҳодисаси;

C — смена давомида 2 тадан ортиқ станок соzлашни талаб этади ҳодисаси.

B , C ҳодисалар ўзаро биргаликда эмас. Бизни куйидаги ҳодиса кизиктиради: $(A + B + C)$ — смена давомида соzлаш зарур бўладиган станоклар:

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,2 + 0,13 + 0,07 = 0,4.$$

2-мисол. Иккита овчи бир пайтда бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда қуёнга карата ўқ узишди. Овчилардан ҳеч бўлмаганда бири ўқни нишонга текказса, қуён отиб олинган бўлади. Биринчи овчининг нишонга уриш эҳтимоллиги 0,8 га, иккинчисиники 0,75 га тенг бўлса, қуённи отиб олиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Куйидаги ҳодисаларни караймиз:

A — биринчи овчи нишонга текказиши;

B — иккинчи овчи нишонга текказиши.

A ва B эркин ҳодисалар. Бизни $(A + B)$ ҳодиса кизиктиради.

$(A + B)$ — ҳеч бўлмаганда битта овчининг нишонга текказиши.

У ҳолда

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = 0,8 + 0,75 - 0,8 \cdot 0,75 = 0,95,$$

$$P(A + B) = 0,95.$$

3-мисол. Командада 12 спортчи бўлиб, уларнинг 5 таси спорт устаси. Спортчилар ичидан қуръа ташлаш орқали уч спортчи танланади. Танланган спортчиларнинг ҳаммаси спорт устаси бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. A_1 — биринчи спортчи — спорт устаси;

A_2 — иккинчи спортчи — спорт устаси;

A_3 — учинчи спортчи — спорт устаси;

$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$ — учала спортчи — спорт устаси.
 A_1, A_2, A_3 , ходисалар — боғлик ходисалар. Демак,

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) P_{A_1 A_2}(A_3) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}.$$

4- мисол. Талаба ўзига керакли формулани 3 та маълумотномадан кидиради. Формула биринчи, иккинчи, учинчи маълумотномада бўлиши эҳтимоллиги мос равишда 0,6; 0,7; 0,8 га тенг. Формула:

- а) фақат битта маълумотномада бўлиши;
- б) фақат иккита маълумотномада бўлиши;
- в) учала маълумотномада бўлиши;
- г) ҳеч бўлмаганда битта маълумотномада бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. Қуйидаги ходисаларни караймиз:

A_1 — формула биринчи маълумотномада бор,

A_2 — формула иккинчи маълумотномада бор,

A_3 — формула учинчи маълумотномада бор.

а) $A = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ — формула фақат битта маълумотномада бор.

$A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3, \bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3, \bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$ ходисалар биргаликда эмас ва $A_1, A_2, A_3; \bar{A}_1, A_2, \bar{A}_3; \bar{A}_1, \bar{A}_2, A_3$ ходисалар боғлик эмас. Демак,

$$P(A) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3) = 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,8 = 0,188.$$

б) $A = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$ — формула фақат иккита маълумотномада бор. Демак,

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,2 + 0,6 \cdot 0,3 \cdot 0,8 + 0,4 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,452.$$

в) $A = A_1 A_2 A_3$ — формула учала маълумотномада бор.

$$P(A) = 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,8 = 0,336.$$

г) $A = A_1 + A_2 + A_3$ — формула ҳеч бўлмаганда битта маълумотномада бор. Мазкур ҳолда A ходисага карама-карши ходисани караш кулай.

$\bar{A}$ — формула ҳеч бир маълумотномада йўқ.

$\bar{A} = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$, у ҳолда $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 1 - 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 1 - 0,024 = 0,976.$$

Шундай қилиб, а) $P(A) = 0,188$; б) $P(A) = 0,452$; в) $P(A) = 0,336$; г) $P(A) = 0,976$.

5- мисол. Биринчи қутида 2 та ок, 6 та қора, иккинчи қутида эса 4 та ок, 2 та қора шар бор. Биринчи қутидан таваккалига 2 та шар олиб, иккинчи қутига солинди, шундан кейин иккинчи қутидан таваккалига битта шар олинди.

а) Олинган шар ок бўлиши эҳтимоллиги қандай?

б) Иккинчи қутидан олинган шар ок бўлиб чиқди. Биринчи қутидан олиб иккинчи қутига солинган 2 та шар ок бўлиши эҳтимоллиги қандай?

Ечиш. а) Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

A — иккинчи кутидан олинган шар ок,
 B_1 — биринчи кутидан иккинчи кутига 2 та ок шар солинган,
 B_2 — биринчи кутидан иккинчи кутига 2 та турли рангдаги шар солинган,

B_3 — биринчи кутидан иккинчи кутига 2 та кора шар солинган.

B_1, B_2, B_3 — ҳодисалар тўла гуруҳ ташкил этади. У ҳолда тўла эҳтимоллик формуласига кўра

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A).$$

$B_k, k=1,3$ гипотезаларнинг эҳтимолликларини ва $P_{B_k}(A)$ шартли эҳтимолликларни классик схема бўйича ҳисоблаймиз:

$$P(B_1) = \frac{C_2^2}{C_8^2} = \frac{1}{28}, \quad P(B_2) = \frac{C_2^1 \cdot C_6^1}{C_8^2} = \frac{12}{28}.$$

$$P(B_3) = \frac{C_6^2}{C_8^2} = \frac{15}{28}; \quad P_{B_1}(A) = \frac{3}{4}; \quad P_{B_2}(A) = \frac{5}{8};$$

$$P_{B_3}(A) = \frac{1}{2}.$$

Топилган натижаларни тўла эҳтимоллик формуласига қўямиз:

$$P(A) = \frac{1}{28} \cdot \frac{3}{4} + \frac{12}{28} \cdot \frac{5}{8} + \frac{15}{28} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16}.$$

б) $P_A(B_1)$ эҳтимолликни Бейес формуласи бўйича топамиз:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{28} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{9}{16}} = \frac{1}{21}.$$

2- дарсхона топшириғи

1. Курсант олиш бўйича «синов» топшириши учун 4 дан паст бўлмаган баҳо олиши керак. Агар курсант отганига «5» баҳони 0,3, «4» баҳони 0,6 эҳтимоллик билан олиши маълум бўлса, курсантнинг «синов» топшира олиш эҳтимоллигини топинг. Ж: $p=0,9$.

2. Иккита мерган нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,6 га, иккинчиси учун 0,7 га тенглиги маълум бўлса, қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимолликларини топинг:

- мерганларнинг факат бирининг нишонга текказиши;
- мерганларнинг ҳеч бўлмаганда бири нишонга текказиши;
- иккала мерган нишонга текказиши;
- ҳеч бир мерганнинг нишонга текказа олмаслиги;
- мерганларнинг ҳеч бўлмаганда бири нишонга текказа олмани.

Ж: а) 0,46; б) 0,6; в) 0,42; г) 0,12; д) 0,58.

3. Йигувчига зарур деталь биринчи, иккинчи, учинчи, тўртинчи яшикда эканлиги эҳтимоллиги мос равишда 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 га тенг. Зарур деталь:

а) кўпи билан 3 та яшикда бўлиши;

б) камин билан 2 та яшикда бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: а) 0,6976; б) 0,9572.

4. Гуруҳда 10 талаба бўлиб, уларнинг 7 нафари аълочилар. Тўрт талаба деканатга чақиртирилди. Уларнинг барчаси аълочи бўлиши эҳтимоллигини топинг. Ж: $\frac{1}{6}$.

5. Учта завод соат ишлаб чикаради ва магазинга жўнатади. Биринчи завод бутун маҳсулотнинг 40% ини, иккинчи завод 45% ини, учинчи завод эса 15% ини тайёрлайди. Биринчи завод чиқарган соатларнинг 80% и, иккинчи завод соатларининг 70% и, учинчи завод соатларининг 90% и илгарилаб кетади. Сотиб олинган соатнинг илгарилаб кетиши эҳтимоллигини топинг. Ж: 0,77.

6. Самолётга қарата учта ўк узилган. Биринчи отишда нишонга тегиш эҳтимоллиги 0,5 га, иккинчисида 0,6 га, учинчисида 0,8 га тенг. Битта ўк текканда самолётнинг уриб туширилиши эҳтимоллиги 0,3 га, иккита ўк текканда 0,6 га тенг. Учта ўк тегса, самолёт уриб туширилади. Самолётнинг уриб туширилиш эҳтимоллигини топинг. Ж: 0,594.

7. Спартакиадада биринчи гуруҳдан 4 талаба, иккинчи гуруҳдан 6, учинчи гуруҳдан 5 талаба катнашади. Институт терма жамоасига биринчи гуруҳдаги талаба 0,9 эҳтимоллик билан, иккинчи гуруҳ талабаси 0,7 ва учинчи гуруҳ талабаси 0,8 эҳтимоллик билан қабул қилиниши мумкин. Таваккалига танланган талаба терма жамоага қабул қилинди. Бу талабанинг қайси гуруҳда ўқиши эҳтимоллиги каттарок? Ж: Талабанинг иккинчи гуруҳда ўқиши эҳтимоллиги каттарок.

8. Цехда тайёрланадиган деталлар иккита назоратчи томонидан текширилади. Деталнинг назорат учун биринчи назоратчига тушиши эҳтимоллиги 0,6 га, иккинчи назоратчига тушиши 0,4 га тенг. Ярокли деталнинг биринчи назоратчи томонидан яроксиз деб топилиши эҳтимоллиги 0,06 га, иккинчи назоратчи учун эса 0,02 га тенг. Яроксиз деб топилган деталлар текширилганда улар ичидан яроклилиги чиқиб қолди. Бу детални биринчи назоратчи текширган-лиги эҳтимоллигини топинг. Ж: $\frac{9}{11}$.

2- мустақил иш

1. Битта ўк узишда нишонга тегиш эҳтимоллиги биринчи мерган учун P га, иккинчи мерган учун 0,7 га тенг. Мерганлар бир вақтда ўк узишганда роса битта ўkning нишонга тегиш эҳтимоллиги 0,38 га тенглиги маълум бўлса, P ни топинг. Ж: 0,8.

A — иккинчи кутидан олинган шар ок,
 B_1 — биринчи кутидан иккинчи кутига 2 та ок шар солинган,
 B_2 — биринчи кутидан иккинчи кутига 2 та турли рангдаги шар солинган,
 B_3 — биринчи кутидан иккинчи кутига 2 та кора шар солинган.
 B_1, B_2, B_3 — ходисалар тўла гуруҳ ташкил этади. У ҳолда тўла эҳтимоллик формуласига кўра

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A).$$

$B_k, k=1,3$ гипотезаларнинг эҳтимолликларини ва $P_{B_k}(A)$ шартли эҳтимолликларни классик схема бўйича ҳисоблаймиз:

$$P(B_1) = \frac{C_2^2}{C_8^2} = \frac{1}{28}; \quad P(B_2) = \frac{C_2^1 \cdot C_6^1}{C_8^2} = \frac{12}{28}.$$

$$P(B_3) = \frac{C_6^2}{C_8^2} = \frac{15}{28}; \quad P_{B_1}(A) = \frac{3}{4}; \quad P_{B_2}(A) = \frac{5}{8};$$

$$P_{B_3}(A) = \frac{1}{2}.$$

Топилган натижаларни тўла эҳтимоллик формуласига кўямиз:

$$P(A) = \frac{1}{28} \cdot \frac{3}{4} + \frac{12}{28} \cdot \frac{5}{8} + \frac{15}{28} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{16}.$$

б) $P_A(B_1)$ эҳтимолликини Бейес формуласи бўйича топамиз:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{28} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{9}{16}} = \frac{1}{21}.$$

2- дарсхона топшириғи

1. Курсант отиш бўйича «синов» топшириши учун 4 дан паст бўлмаган баҳо олиши керак. Агар курсант отганига «5» баҳони 0,3, «4» баҳони 0,6 эҳтимоллик билан олиши маълум бўлса, курсантнинг «синов» топшира олиш эҳтимоллигини топинг. Ж: $p=0,9$.

2. Иккита мерган нишонга карата биттадан ўқ узишда. Биринчи мерганнинг нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,6 га, иккинчиси учун 0,7 га тенглиги маълум бўлса, куйидаги ходисаларнинг эҳтимолликларини топинг:

- а) мерганларнинг факат бирининг нишонга текказиши;
- б) мерганларнинг ҳеч бўлмаганда бири нишонга текказиши;
- в) иккала мерган нишонга текказиши;
- г) ҳеч бир мерганнинг нишонга текказа олмаслиги;
- д) мерганларнинг ҳеч бўлмаганда бири нишонга текказа олмани.

Ж: а) 0,46; б) 0,6; в) 0,42; г) 0,12; д) 0,58.

3. Йиғувчига зарур деталь биринчи, иккинчи, учинчи, тўртинчи яшиқда эканлиги эҳтимоллиги мос равишда 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 га тенг. Зарур деталь:

а) кўпи билан 3 та яшиқда бўлиши;

б) ками билан 2 та яшиқда бўлиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: а) 0,6976; б) 0,9572.

4. Гуруҳда 10 талаба бўлиб, уларнинг 7 нафари аълочилар. Тўрт талаба деканатга чакиртирилди. Уларнинг барчаси аълочи бўлиши эҳтимоллигини топинг. Ж: $\frac{1}{6}$.

5. Учта завод соат ишлаб чиқаради ва магазинга жўнатади. Биринчи завод бутун маҳсулотнинг 40% ини, иккинчи завод 45% ини, учинчи завод эса 15% ини тайёрлайди. Биринчи завод чиқарган соатларнинг 80% и, иккинчи завод соатларининг 70% и, учинчи завод соатларининг 90% и илгарилаб кетади. Сотиб олинган соатнинг илгарилаб кетиши эҳтимоллигини топинг. Ж: 0,77.

6. Самолётга қарата учта ўк узилган. Биринчи отишда нишонга тегиш эҳтимоллиги 0,5 га, иккинчисида 0,6 га, учинчисида 0,8 га тенг. Битта ўк текканда самолётнинг уриб туширилиши эҳтимоллиги 0,3 га, иккита ўк текканда 0,6 га тенг. Учта ўк тегса, самолёт уриб туширилади. Самолётнинг уриб туширилиш эҳтимоллигини топинг. Ж: 0,594.

7. Спартакиадада биринчи гуруҳдан 4 талаба, иккинчи гуруҳдан 6, учинчи гуруҳдан 5 талаба катнашади. Институт терма жамоасига биринчи гуруҳдаги талаба 0,9 эҳтимоллик билан, иккинчи гуруҳ талабаси 0,7 ва учинчи гуруҳ талабаси 0,8 эҳтимоллик билан қабул қилиниши мумкин. Таваккалига танланган талаба терма жамоага қабул қилинди. Бу талабанинг қайси гуруҳда ўқиши эҳтимоллиги каттарок? Ж: Талабанинг иккинчи гуруҳда ўқиши эҳтимоллиги каттарок.

8. Цехда тайёрланадиган деталлар иккита назоратчи томонидан текширилади. Деталнинг назорат учун биринчи назоратчига тушиши эҳтимоллиги 0,6 га, иккинчи назоратчига тушиши 0,4 га тенг. Ярокли деталнинг биринчи назоратчи томонидан яроксиз деб топилиши эҳтимоллиги 0,06 га, иккинчи назоратчи учун эса 0,02 га тенг. Яроксиз деб топилган деталлар текширилганда улар ичидан яроклилиги чиқиб қолди. Бу детални биринчи назоратчи текширганлиги эҳтимоллигини топинг. Ж: $\frac{9}{11}$.

2- мустақил иш

1. Битта ўк узишда нишонга тегиш эҳтимоллиги биринчи мерган учун P га, иккинчи мерган учун 0,7 га тенг. Мерганлар бир вақтда ўк узишганда роса битта ўkning нишонга тегиш эҳтимоллиги 0,38 га тенглиги маълум бўлса, P ни топинг. Ж: 0,8.

2. Мерганнинг битта ўк узишда 10 очко уриш эҳтимоллиги 0,05 га, 9 очко уриш эҳтимоллиги 0,2 га, 8 очко уриш эҳтимоллиги 0,6 га тенг. Битта ўк узилди. Қуйидаги ходисаларнинг эҳтимоллигини топинг:

А — 8 дан кам бўлмаган очко урилган;

В — 8 дан кўп очко урилган.

Ж: $P(A) = 0,85$; $P(B) = 0,25$.

3. Устахонада учта станок ишляпти. Смена давомида биринчи станокнинг солашни талаб этиш эҳтимоллиги 0,15 га, иккинчи станок учун 0,1 га, учинчи станок учун эса 0,12 га тенг. Станоклар бараварига (бир пайтда) солашни талаб этмайди деб ҳисоблаб, смена давомида ҳеч бўлмаганда битта станок солашни талаб этиши эҳтимоллигини топинг. Ж: $\approx 0,3268$.

4. Яшиқда 15 та деталь бўлиб, уларнинг 10 таси бўялган. Йиғувчи таваккалига 3 та деталь олади. Олинган деталларнинг барчаси бўялган бўлиши эҳтимоллигини топинг. Ж: $P \approx 0,264$.

5. Бирор физикавий катталиқни бир марта ўлчашда берилган аниқликдан катта бўлган хатоликка йўл қўйилиши эҳтимоллиги 0,4 га тенг. Учта боғлиқ бўлмаган ўлчаш ўтказилди. Бу ўлчашларнинг факат биттасида йўл қўйилган хато берилган аниқликдан катта бўлиши эҳтимоллигини топинг. Ж: 0,392.

6. Талаба 25 та имтиҳон саволларидан 20 тасига тайёрланишга улгурди. Талаба таваккалига олинган учта саволнинг камида иккитасини билиши эҳтимоллигини топинг. Ж: $\frac{209}{345}$.

7. Йиғиш цехига учта автоматдан деталлар келиб тушади. Биринчи автомат 0,3%, иккинчиси 0,2%, учинчи 0,4% яроксиз деталь ишлаб чиқариши маълум. Агар биринчи автоматдан 1000 та, иккинчисидан 2000 та, учинчисидан 2500 та деталь келиб тушгани маълум бўлса, йиғиш цехига яроксиз деталь келиб тушганлиги эҳтимоллигини топинг. Ж: 0,003091.

8. Бензин қуйиш бекати ёнидан енгил ва юк машиналари ўтиб туради. Уларнинг 60% ини юк машиналари ташкил этади. Ўтиб кетаётган машинанинг бензин олиш учун тўхташ эҳтимоллиги юк машинаси учун 0,1 га, енгил машина учун эса 0,2 га тенг. Бензин қуйиш бекатига бензин қуйиб олиш учун машина келиб тўхтади. Бу юк машинаси эканлиги эҳтимоллигини топинг. Ж: $\frac{3}{7}$.

3-§. Боғлиқмас синовлар кетма-кетлиги. Бернулли формуласи.

Муавр — Лаплас ва Пуассон теоремалари

14.3.1. Агар синовлар натижаларининг ҳар қандай комбинацияси боғлиқмас ходисалар тўпламидан иборат бўлса, бу синовлар *боғлиқмас* дейилади.

Чекли сондаги n та кетма-кет боғлиқмас синовлар ўтказилган бўлсин. Бу синовларнинг ҳар бири натижасида маълум бир ходиса

рўй бериши мумкин бўлса, синовларнинг бундай кетма-кетлилиги *Бернулли схемаси* дейилади.

Бернулли формуласи. Ҳар бирида ходисанинг рўй бериши эҳтимоллиги p га тенг n та боғлиқмас синовларда бу ходисанинг роса m марта рўй бериши эҳтимоллиги

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ бу ерда } q = 1 - p.$$

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

га тенг.

$P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ — n та боғлиқмас синовларда A ходисанинг камида m_1 ва кўпи билан m_2 мартагача рўй бериш эҳтимоллиги бўлсин. У ҳолда қуйидаги формула ўринлидир:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

n та синовда ходисанинг камида бир марта рўй беришининг эҳтимоллиги

$$P_n(1 \leq m \leq n) = 1 - q^n, \quad q = 1 - p$$

га тенг.

Агар ходисанинг синовлар натижасида m_0 марта рўй бериши эҳтимоллиги қолган синовларнинг мумкин бўлган натижалари эҳтимоллигидан катта бўлса, m_0 сон энг эҳтимолли дейилади. У қуйидаги формула бўйича ҳисобланади:

$$np - q \leq m_0 \leq np + q:$$

а) агар $np - q$ — каср сон бўлса, битта энг эҳтимолли m_0 сон мавжуд;

б) агар $np - q$ — бутун сон бўлса, иккита энг эҳтимолли сон m_0 ва $m_0 + 1$ мавжуд;

в) агар np — бутун сон бўлса, энг эҳтимолли сон $m_0 = np$ бўлади.

14.3.2. Лапласнинг локал теоремаси (катта n ларда). Ҳар бирида ходисанинг рўй бериш эҳтимоллиги p га тенг бўлган n та боғлиқмас синовларда ходиса роса m марта рўй бериш эҳтимоллиги тақрибан қуйидагига тенг:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

бу ерда

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$\varphi(x)$ функциянинг қийматлари жадвали иловада келтирилган. Бунда $\varphi(x)$ — жуфт функция эканига эътибор беринг.

14.3.3. Лапласнинг интеграл теоремаси (катта n ларда). Хар бирида ҳодисанинг рўй бериш эҳтимоллиги p га тенг бўлган n та боғлиқмас синовларда ҳодисанинг камида m_1 марта ва кўпи билан m_2 марта рўй бериш эҳтимоллиги тақрибан қуйидагига тенг:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

бу ерда

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$\Phi(x)$ — Лаплас функцияси.

$\Phi(x)$ функциянинг $x \in [0; 5]$ учун қийматлари жадвали иловада берилган. $x > 5$ учун $\Phi(x) = 0,5$ ва $\Phi(x)$ — ток функция экани эътиборга олинади.

Эслатма. Лапласнинг тақрибий формулаларидан $npq > 10$ бўлган ҳолда фойдаланилади. Агар $npq < 10$ бўлса, бу формулалар катта хатоликларга олиб келади.

14.3.4. Пуассон теоремаси. Катта n лар ва кичик p ларда қуйидаги тақрибий формула ўринли:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \text{бу ерда } \lambda = np.$$

1-мисол. Бирор мерган учун битта ўқ узишда нишонга тегиши эҳтимоллиги 0,8 га тенг ва ўқ узиш тартибига (номериға) боғлиқ эмас. 5 марта ўқ узилганда нишонга роса 2 марта тегиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. $n=5, p=0,8, m=2, q=0,2$. Бернулли формуласи бўйича ҳисоблаймиз:

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 = 0,0512.$$

2-мисол. Танга 10 марта ташланганда гербли томон:

а) 4 тадан 6 мартагача тушиш эҳтимоллигини;

б) ҳеч бўлмаганда бир марта тушиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. $n=10, m_1=4, m_2=6, p=q=0,5$.

$$\text{а) } P_{10}(4 \leq m \leq 6) = P_{10}(4) + P_{10}(5) + P_{10}(6) =$$

$$C_{10}^4 \cdot (0,5)^4 \cdot (0,5)^6 + C_{10}^5 \cdot (0,5)^5 \cdot (0,5)^5 + C_{10}^6 \cdot (0,5)^6 \cdot (0,5)^4 =$$

$$= (0,5)^{10} (C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6) = \frac{21}{32} \cdot \frac{21}{32}.$$

$$\text{б) } P_{10}(1 \leq m \leq 10) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}.$$

3- м и с ол. А ходисанинг 900 та боғлиқмас синовнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимоллиги $p=0,8$ га тенг. А ходиса:

а) 750 марта, б) 710 дан 740 мартагача рўй бериш эҳтимоллигини топинг.

Е чи ш. $npq=900 \cdot 0,8 \cdot 0,2=144 > 10$ бўлгани учун а) бандида Лапласнинг локал теоремасидан фойдаланамиз, б) бандда эса Лапласнинг интеграл теоремасидан фойдаланамиз.

$$а) x = \frac{750 - 900 \cdot 0,8}{\sqrt{900 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5, \quad \psi(2,5) \approx 0,0175.$$

$$P_{900}(750) \approx \frac{1}{12} \cdot 0,0175 \approx 0,00146.$$

$$б) x_1 = \frac{710 - 720}{12} \approx -0,83, \quad x_2 = \frac{740 - 720}{12} \approx 1,67.$$

$$\Phi(-0,83) = -\Phi(0,83) \approx -0,2967.$$

$$\Phi(1,67) \approx 0,4527.$$

$$P_{900}(710 \leq m \leq 740) \approx 0,4525 + 0,2967 = 0,7492.$$

Ж: а) 0,00146, б) 0,0236, в) 0,7492.

4- м и с ол. Телефон станцияси 400 абонентга хизмат кўрсатади. Агар ҳар бир абонент учун унинг бир соат ичида станцияга кўнғирок килиш эҳтимоллиги 0,01 га тенг бўлса, қуйидаги ходисаларнинг эҳтимолликларини топинг:

а) бир соат давомида 5 абонент станцияга кўнғирок килади;

б) бир соат давомида 4 та дан кўп бўлмаган абонент кўнғирок килади;

в) бир соат давомида камида 3 абонент станцияга кўнғирок килади.

Е чи ш. $p=0,01$ жуда кичик, $n=400$ эса катта бўлгани учун $\lambda=400 \cdot 0,01=4$ да Пуассоннинг тақрибий формуласидан фойдаланамиз.

$$а) P_{400}(5) \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0,156293.$$

$$б) P_{400}(0 \leq m \leq 4) \approx 0,018316 + 0,073263 + 0,146525 + 0,195367 + 0,195367 = 0,628838;$$

$$в) P_{400}(3 \leq m \leq 400) = 1 - P_{400}(0 \leq m \leq 2) = 1 - 0,018316 - 0,073263 - 0,146525 = 0,761896.$$

Ж: а) 0,156293; б) 0,628838; в) 0,761896.

5- м и с ол. Бирорта қурилманинг 15 та элементининг ҳар бири синаб қурилади. Элементларнинг синовга бардош бериш эҳтимоллиги 0,9 га тенг. Қурилма элементларининг синовга бардош бера оладиган энг катта эҳтимоллиги сонини топинг.

Е чи ш. $n=15$, $p=0,9$, $q=0,1$.

Энг эҳтимолли m_0 сонни ушбу

$$np - q \leq m_0 \leq np + p$$

14.3.3. Лапласнинг интеграл теоремаси (катта n ларда). Хар бирида ходисанинг рўй бериш эҳтимоллиги p га тенг бўлган n та боғлиқмас синовларда ходисанинг камида m_1 марта ва кўпи билан m_2 марта рўй бериш эҳтимоллиги тақрибан қуйидагига тенг:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

бу ерда

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$\Phi(x)$ — Лаплас функцияси.

$\Phi(x)$ функциянинг $x \in [0; 5]$ учун қийматлари жадвали иловада берилган. $x > 5$ учун $\Phi(x) = 0,5$ ва $\Phi(x)$ — ток функция экани эътиборга олинади.

Эслатма. Лапласнинг тақрибий формулаларидан $npq > 10$ бўлган ҳолда фойдаланилади. Агар $npq < 10$ бўлса, бу формулалар катта хатоликларга олиб келади.

14.3.4. Пуассон теоремаси. Катта n лар ва кичик p ларда қуйидаги тақрибий формула ўринли:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \text{бу ерда } \lambda = np.$$

1-мисол. Бирор мерган учун битта ўқ узишда нишонга тегиши эҳтимоллиги 0,8 га тенг ва ўқ узиш тартибига (номериға) боғлиқ эмас. 5 марта ўқ узилганда нишонга роса 2 марта тегиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. $n=5$, $p=0,8$, $m=2$, $q=0,2$. Бернулли формуласи бўйича ҳисоблаймиз:

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 = 0,0512.$$

2-мисол. Танга 10 марта ташланганда гербли томон:

а) 4 тадан 6 мартагача тушиш эҳтимоллигини;

б) ҳеч бўлмаганда бир марта тушиш эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. $n=10$, $m_1=4$, $m_2=6$, $p=q=0,5$.

$$\begin{aligned} \text{а) } P_{10}(4 \leq m \leq 6) &= P_{10}(4) + P_{10}(5) + P_{10}(6) = \\ &= C_{10}^4 \cdot (0,5)^4 \cdot (0,5)^6 + C_{10}^5 (0,5)^5 \cdot (0,5)^5 + C_{10}^6 (0,5)^6 (0,5)^4 = \\ &= (0,5)^{10} (C_{10}^4 + C_{10}^5 + C_{10}^6) = \frac{21}{32}. \quad \text{Ж: } \frac{21}{32}. \end{aligned}$$

$$\text{б) } P_{10}(1 \leq m \leq 10) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}.$$

3-мисол. А ҳодисанинг 900 та боғлиқмас синовнинг ҳар бирида рўй бериш эҳтимолиги $p=0,8$ га тенг. А ҳодиса:

а) 750 марта, б) 710 дан 740 мартагача рўй бериш эҳтимолигини топинг.

Ечиш. $npq=900 \cdot 0,8 \cdot 0,2=144 > 10$ бўлгани учун а) бандида Лапласнинг локал теоремасидан фойдаланамиз, б) бандда эса Лапласнинг интеграл теоремасидан фойдаланамиз.

$$а) x = \frac{750 - 900 \cdot 0,8}{\sqrt{900 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5, \quad \Phi(2,5) \approx 0,9175.$$

$$P_{900}(750) \approx \frac{1}{12} \cdot 0,0175 \approx 0,00146.$$

$$б) x_1 = \frac{710 - 720}{12} \approx -0,83, \quad x_2 = \frac{740 - 720}{12} \approx 1,67.$$

$$\Phi(-0,83) = -\Phi(0,83) \approx -0,2967.$$

$$\Phi(1,67) \approx 0,4527.$$

$$P_{900}(710 \leq m \leq 740) \approx 0,4525 + 0,2967 = 0,7492.$$

Ж: а) 0,00146, б) 0,0236, в) 0,7492.

4-мисол. Телефон станцияси 400 абонентга хизмат кўрсатади. Агар ҳар бир абонент учун унинг бир соат ичида станцияга қўнғирок қилиш эҳтимолиги 0,01 га тенг бўлса, қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимоликларини топинг:

а) бир соат давомида 5 абонент станцияга қўнғирок қилади;

б) бир соат давомида 4 та дан кўп бўлмаган абонент қўнғирок қилади;

в) бир соат давомида камида 3 абонент станцияга қўнғирок қилади.

Ечиш. $p=0,01$ жуда кичик, $n=400$ эса катта бўлгани учун $\lambda=400 \cdot 0,01=4$ да Пуассоннинг тақрибий формуласидан фойдаланамиз.

$$а) P_{400}(5) \approx \frac{4^5}{5!} e^{-4} \approx 0,156293.$$

$$б) P_{400}(0 \leq m \leq 4) \approx 0,018316 + 0,073263 + 0,146525 + 0,195367 + 0,195367 = 0,628838;$$

$$в) P_{400}(3 \leq m \leq 400) = 1 - P_{400}(0 \leq m \leq 2) = 1 - 0,018316 - 0,073263 - 0,146525 = 0,761896.$$

Ж: а) 0,156293; б) 0,628838; в) 0,761896.

5-мисол. Бирорта қурилманинг 15 та элементининг ҳар бири синаб қўрилади. Элементларнинг синовга бардош бериш эҳтимолиги 0,9 га тенг. Қурилма элементларининг синовга бардош бера оладиган энг катта эҳтимолиги сонин топинг.

Ечиш. $n=15$, $p=0,9$, $q=0,1$.

Энг эҳтимоли m_0 сонни ушбу

$$np - q \leq m_0 \leq np + p$$

қуш тенгсизликдан топамиз. Берилганларни қўйиб,

$$15 \cdot 0,9 - 0,1 \leq m_0 < 15 \cdot 0,9 + 0,9$$

ёки

$$13,4 \leq m_0 \leq 14,4 \text{ га эга бўламиз.}$$

m_0 — бутун сон бўлгани учун изланаётган энг эҳтимолли сон $m_0 = 14$ бўлади.

Ж: 14.

3- дарсхона топшириғи

1. Қайси ҳодисанинг эҳтимоллиги катта:

а) Тенг кучли ракиб билан ўйнаб, тўртта партиядан учтасини ютиб олишми ёки саккиз партиядан бештасини ютиб олишми?

б) Тўртта партиянинг камида учтасини ютиб олишми ёки саккизта партиянинг камида бештасини ютиб олишми?

Ж: а) $\frac{1}{4}$ ва $\frac{7}{32}$ — 4 та партиядан 3 тасини ютиш эҳтимоллиги катта;

б) $\frac{5}{16}$ ва $\frac{93}{256}$ — 8 та партиядан камида 5 тасини ютиб олиш эҳтимоллиги катта.

2. Ўйин соккаси 800 марта ташланганда учга каррали очко 267 марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P_{500}(267) \approx 0,03$.

3. 100 та станок бир-бирига боғлиқсиз ишлайди, шу билан бирга смена давомида уларнинг ҳар бирининг тўхтовсиз ишлаш эҳтимоллиги 0,8 га тенг. Смена давомида 75 дан 85 тагача станок бетўхтов ишлаши эҳтимоллигини топинг. Ж: 0,7887.

4. Завод омборга 5000 та сифатли буюмлар юборди. Ҳар бир буюмнинг йўлда шикастланиш эҳтимоллиги 0,0002 га тенг. 5000 та буюм ичидан йўлда:

а) роса 3 таси шикастланиши эҳтимоллигини;

б) 3 тадан кўп бўлмагани шикастланиши эҳтимоллигини;

в) 3 тадан кўпи шикастланиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: а) 0,06313; б) 0,981; в) 0,019.

5. Техника назорат бўлими 10 та деталдан иборат партияни текширади. Деталнинг стандарт бўлиши эҳтимоллиги 0,75 га тенг. Стандарт деб топиладиган деталларнинг энг эҳтимолли сонини топинг. Ж: $m_0 = 8$.

6. Узунлиги 15 см бўлган АВ кесма С нукта билан 2:1 нисбатда бўлинган. Бу кесмага таваккалига 4 та нукта ташланади. Улардан икkitаси С нуктадан чапрокка, икkitаси унрокка тушиши эҳтимоллигини топинг. Нуктанинг кесмага тушиш эҳтимоллиги кесма узунлигига пропорционал ва унинг жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади. Ж: $\frac{8}{27}$.

3- мустақил иш

1. Ўйин соккаси 10 марта ташланганда учга каррали очколар камида 2 марта, кўпи билан беш марта тушиши эҳтимоллигини топинг. Ж: 0,488.

2. Битта ўк узилганда нишонга тегиш эҳтимоллиги 0,8 га тенг. 100 марта ўк узилганда нишонга роса 75 марта тегиш эҳтимоллигини топинг. Ж: $P_{100}(75) = 0,04565$.

3. t вақт ичида битта конденсаторнинг ишдан чиқиши эҳтимоллиги 0,2 га тенг. t вақт ичида 100 та бир-бирига боғлиқсиз ишловчи конденсатордан:

в) камида 20 таси ишдан чиқиши;

б) 28 тадан ками ишдан чиқиши;

в) 14 тадан 28 тагачасининг ишдан чиқиши эҳтимоллигини топинг. Ж: а) 0,55; б) 0,98; в) 0,9.

4. Дўкон 1000 шиша маъданли сув олди. Ташиб келтиришда 1 та шишанинг синиб қолиши эҳтимоллиги 0,003 га тенг. Дўконга келтирилган шиша идишларнинг:

а) роса 2 таси;

б) 2 тадан ками;

в) 2 тадан кўпи;

г) ҳеч бўлмаганда биттаси синган бўлиши эҳтимоллигини топинг. Ж: а) 0,224; б) 0,1992; в) 0,5768; г) 0,95.

5. Товаршунос буюмларнинг 24 та намунасини кўриб чиқади. Хар бир намунанинг сотишга яроқли деб топилиш эҳтимоллиги 0,6 га тенг. Товаршунос сотишга яроқли деб топган намуналарнинг энг эҳтимолли сонини топинг. Ж: $m_0' = 14$, $m_0'' = 15$.

6. Узунлиги a бўлган AB кесмага таваккалига 5 та нукта ташланади. Бунда 2 та нукта A нуктадан x дан кичик масофада, 3 та нукта эса A дан x дан катта масофада ётиш эҳтимоллигини топинг. Нуктанинг кесмага тушиш эҳтимоллиги кесма узунлигига пропорционал ва унинг жойлашишига боғлиқ эмас.

$$\text{Ж: } P_5(2) = C_5^2 \left(\frac{x}{a}\right)^2 \left[\frac{(a-x)}{a}\right]^3$$

4-§. Дискрет тасодифий микдорлар.

Баъзи тақсимот қонунлари

14.4.1 Синов натижасида олдиндан маълум бўлган кийматлардан бирини қабул қиладиган микдор, *тасодифий миқдор* дейилади.

Дискрет тасодифий миқдор деб мумкин бўлган кийматлар чекли ёки чексиз сонли кетма-кетликлардан иборат микдор айтилади.

X дискрет тасодифий микдорнинг мумкин бўлган кийматлари билан уларнинг эҳтимолликлари орасидаги боғланиш тасодифий микдорнинг *тақсимот қонуни* дейилади.

X дискрет тасодифий микдорнинг тақсимот қонуни қуйидаги усуллар билан берилиши мумкин:

а) биринчи сатри мумкин бўлган x_k кийматлардан, иккинчи сатри p_k эҳтимолликлардан иборат *жадвал ёрдамида*:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

бу ерда $\sum_{k=1}^n p_k = 1$;

б) график усулда — бунинг учун тўғри бурчакли координатлар системасида (x_k, p_k) нукталар ясалади, сўнгра уларни тўғри чизик кесмалари билан туташтириб, *тақсимот кўпбурчаги* деб аталувчи фигурани ҳосил қилинади;

в) аналитик усулда (формула кўринишида):

$$P(X=x_k) = \varphi(x_k)$$

ёки *интеграл функциялар* (таксимот функциялари) деб аталувчи функциялар ёрдамида.

14.4.2. Ҳар бир $x \in (-\infty; +\infty)$ учун X тасодифий микдорнинг x дан кичик киймат қабул қилиш эҳтимоллигини аниқловчи $F(x) = P(X < x)$ функция *тақсимот функцияси* дейилади.

Таксимот функциясининг асосий хоссалари:

1. Таксимот функциясининг кийматлари $[0; 1]$ кесмага тегишлидир:

$$0 \leq F(x) \leq 1.$$

2. Таксимот функцияси камаймайдиган функциядир, яъни агар $x_2 > x_1$ бўлса, $F(x_2) \geq F(x_1)$.

3. X тасодифий микдорнинг $[a, b]$ ораликдаги кийматларни қабул қилиш эҳтимоллиги таксимот функциясининг бу ораликдаги орттирмасига тенг, яъни

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a).$$

4. Агар X тасодифий микдорнинг барча мумкин бўлган кийматлари (a, b) ораликка тегишли бўлса, у ҳолда

$$\begin{aligned} x \leq a \text{ да } F(x) &= 0, \\ x \geq b \text{ да } F(x) &= 1, \end{aligned}$$

Дискрет тасодифий микдорлар таксимотининг баъзи қонунларини қараб чиқамиз.

14.4.3. X дискрет тасодифий микдор — ҳодисанинг n та боғлиқ-мас синовларда рўй беришлари сони, p — ҳодисанинг ҳар бир синовда рўй бериш эҳтимоллиги, $x_1 = 0, x_2 = 1, \dots, x_{n+1} = n$ — X дискрет тасодифий микдорнинг мумкин бўлган кийматлари бўлсин. Бу кийматларга мос эҳтимолликлар ушбу Бернулли формуласи бўйича ҳисобланади:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p.$$

Бернулли формуласи ёрдамида аниқланадиган эҳтимолликлар таксимоти *биномиал тақсимот* дейилади.

Биномиал конунни жадвал кўринишида тасвирлаш мумкин:

X	0	1	2	...	n
P	q^n	$C_n^1 p q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	...	p^n

14.4.4. Агар синовлар сони жуда катта бўлиб, ходисанинг ҳар қайси синовда рўй бериш эҳтимоллиги p жуда кичик бўлса, у ҳолда дискрет тасодифий миқдорнинг мумкин бўлган қийматларига мос эҳтимолликларини Бернулли формуласи бўйича эмас, балки ушбу Пуассон формуласидан фойдаланиб топиш кулай:

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np.$$

Пуассон формуласи ифодалайдиган эҳтимолликлар тақсимоти Пуассон тақсимоти дейилади.

Пуассон тақсимотини жадвал кўринишида ифодалаш мумкин:

X	0	1	2	...	m	...
P	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}$	...

1-мисол. Кутида 7 та шар бўлиб, 4 таси оқ, қолганлари эса қора. Кутидан таваккалига 3 та шар олинади.

X дискрет тасодифий миқдор — олинган оқ шарлар сони бўлса,

а) X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг;

б) $X \geq 2$ ходисанинг эҳтимоллигини топинг.

Ечиш. X дискрет тасодифий миқдор қабул қилиши мумкин бўлган қийматлар: 0, 1, 2, 3.

а) Мос эҳтимолликларни классик усул билан топамиз:

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35}.$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}.$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}.$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3 \cdot C_3^0}{C_7^3} = \frac{4}{35}.$$

Демак, X — дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$

экан.

(Текшириш: $\frac{1}{35} + \frac{12}{35} + \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = 1$.)

$$6) P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = \frac{22}{35}.$$

2-мисол. Нишонга карата 4 та ўқ узилади (боғлиқсиз ҳолда), бунда ҳар қайси ўқ узишда нишонга тегиш эҳтимоллиги $p=0,8$ га тенг. Қуйидагиларни топинг:

а) нишонга тегишлар сонига тенг бўлган X дискрет тасодифий микдорнинг тақсимот қонунини;

б) $1 \leq X \leq 3$ ва $X > 3$ ҳодисаларнинг эҳтимоллигини;

в) тақсимот қўпбурчагини чизинг;

г) X — дискрет тасодифий микдорнинг тақсимот функциясини топинг ва унинг графигини чизинг;

д) тақсимот функциясидан фойдаланиб $X < 3$, $1 \leq X \leq 4$ ҳодисаларнинг эҳтимоллигини ҳисобланг.

Ечиш. а) X тасодифий микдорнинг мумкин бўлган қийматлари: 0, 1, 2, 3, 4. Мас эҳтимолликларни Бернулли формуласи бўйича ҳисоблаймиз:

$$P(X=0) = C_4^0 0,8^0 \cdot 0,2^4 = 0,0016,$$

$$P(X=1) = C_4^1 0,8 \cdot 0,2^3 = 0,0256,$$

$$P(X=2) = C_4^2 0,8^2 \cdot 0,2^2 = 0,1536,$$

$$P(X=3) = C_4^3 0,8^3 \cdot 0,2 = 0,4096,$$

$$P(X=4) = C_4^4 0,8^4 \cdot 0,2^0 = 0,4096.$$

X дискрет тасодифий микдорнинг тақсимот қонуни — биномиал:

X	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

(Текшириш: $0,0016 + 0,0256 + 0,1536 + 0,4096 + 0,4096 = 1$.)

$$6) P(1 \leq X \leq 3) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0,0256 + 0,1536 + 0,4096 = 0,5888.$$

$$P(X > 3) = P(X=4) = 0,4096.$$

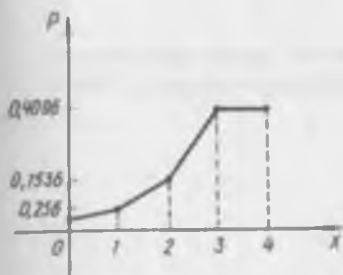
в) тақсимот қўпбурчагини ясаймиз (65-шакл).

г) $F(x)$ нинг тақсимот қонунидан фойдаланиб, тақсимот функциясини тузамиз.

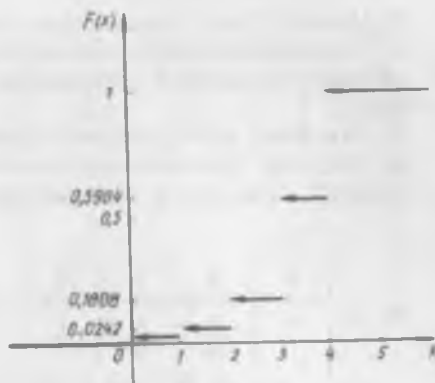
$$x \leq 0 \text{ учун } F(x) = P(X < x) = 0,$$

$$0 < x \leq 1 \text{ учун } F(x) = P(X < x) = P(X=0) = 0,0016,$$

$$1 < x \leq 2 \text{ учун } F(x) = P(X < x) = P(X=0) + P(X=1) = 0,0016 + 0,0256 = 0,0272,$$



65- шакл



66- шакл

$2 < x \leq 3$ учун $F(x) = P(X < x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 = 0,1808$,

$3 < x \leq 4$ учун $F(x) = P(X < x) = 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 + 0,4096 = 0,5904$,

$X > 4$ учун $F(x) = P(X < x) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$.

Демак,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ 0,0016, & \text{агар } 0 < x \leq 1, \\ 0,0272, & \text{агар } 1 < x \leq 2, \\ 0,1808, & \text{агар } 2 < x \leq 3, \\ 0,5904, & \text{агар } 3 < x \leq 4, \\ 1, & \text{агар } x > 4. \end{cases}$$

Таксимот функцияси графигини чизамиз (66- шакл).

д) $F(x) = P(X < x)$ бўлгани учун:

$$P(X < 3) = F(3) = 0,1808.$$

14.4.2 даги 3- хоссага кўра:

$$P(1 \leq X < 4) = F(4) - F(1) = 0,5904 - 0,0016 = 0,5888.$$

4- дарсхона топшириғи

1. 6 та деталдан иборат партияда 4 та стандарт деталь бор. Таваккалига 3 та деталь олинади. Олинган деталлар ичидаги стандарт деталлар сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий микдорнинг таксимот қонунини топинг.

	X	0	1	2	3
Ж:	P	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. Иккита ўйин соккаси биргаликда икки марта ташланади:
 а) иккала ўйин соккасида жуфт очколар тушиши сонидан иборат X дискрет тасодифий миқдорнинг биномиал тақсимот қонунини топинг;

б) тақсимот қўпбурчагини ясанг;

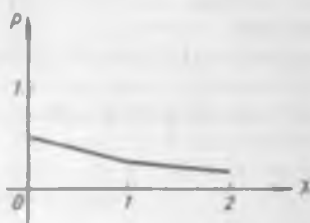
в) тақсимот функциясини топинг ва унинг графигини чизинг;

г) $X < 2$, $1 \leq X \leq 2$ ҳодисаларнинг эҳтимолликларини топинг.

Ж: а)

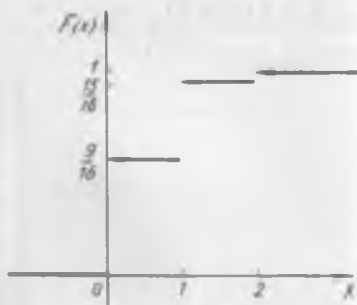
X	0	1	2
P	$\frac{9}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{1}{16}$

б) 67- шакл;



67- шакл

$$в) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ \frac{9}{16}, & \text{агар } 0 < x \leq 1, \\ \frac{15}{16}, & \text{агар } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{агар } x > 2 \end{cases} \quad (68\text{- шакл});$$



68- шакл

г) $P(X < 2) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{15}{16},$

$P(1 \leq x \leq 2) = P(X=1) + P(X=2) = \frac{7}{16}.$

3. Автомат телефон станция 1000 та телефон абонентига хизмат кўрсатади. 5 минут давомида АТС га абонементдан чакириқ келиш эҳтимоллиги 0,005 га тенг. 5 минут давомида АТС га келган чакириқлар сонидан иборат X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг:

а) 5 минут давомида АТС га ҳеч бўлмаганда битта чакириқ келиш эҳтимоллиги қандай?

б) 5 минут давомида АТС га 4 тадан қўп чакириқ келиш эҳтимоллиги-чи?

	x	0	1	2	...	1000
Ж.:	p	$\frac{1}{e^5}$	$\frac{5}{e^5}$	$\frac{5^2}{2e^5}$	...	$\frac{5^{1000}}{1000!e^5}$

а) 0,993; б) 0,561,

4. X дискрет тасодикий микдорнинг тахсимот функцияси берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 1, \\ 0,25, & \text{агар } 1 < x \leq 3, \\ 0,4, & \text{агар } 3 < x \leq 4, \\ 0,8, & \text{агар } 4 < x \leq 5, \\ 1, & \text{агар } x > 5. \end{cases}$$

а) $X=2$; $2 < X \leq 4$ ходисаларининг эхтимоллигини топинг;

б) берилган тасодикий микдорнинг тахсимот конунини топинг.

Ж: а) $P(X=2)=0$, $P(2 < X \leq 4)=0,15$.

б)	X	1	3	4	5
	P	0,25	0,15	0,4	0,2

4- мустақил иш

1. Икки мерган битта нишонга бараварига биттадан ўк узади. Битта ўк узишда биринчи мерган учун нишонга тегиш эхтимоллиги 0,5 га, иккинчи мерган учун 0,4 га тенг. Дискрет тасодикий микдор — нишонга тегишлар сони.

а) X тасодикий микдорнинг тахсимот конунини топинг;

б) тахсимот кўпбурчагини ясанг;

в) тахсимот функциясини топинг ва унинг графигини чизинг;

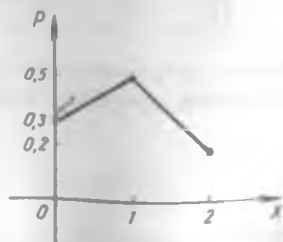
г) $X \geq 1$ ходисанинг эхтимоллигини топинг.

Ж: а)

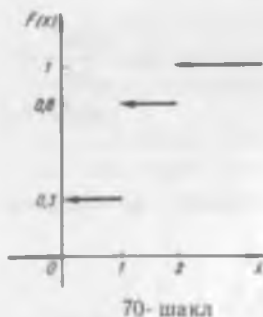
X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

 :

б) 69- шакл.



69- шакл



$$в) F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ 0,3, & \text{агар } 0 < x \leq 1, \\ 0,8, & \text{агар } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{агар } x > 2 \quad (70\text{-шакл}); \end{cases}$$

г) $P(X \geq 1) = 0,7$.

2. Маълум бир партиядо ностандарт деталлар 10% ни ташкил этади. Таваккалига 4 та деталь танлаб олинади. Бу 4 та деталь орасида ностандарт деталлар сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий микдорнинг биномиал тақсимот қонунини топинг.

Ж:

X	0	1	2	3	4
P	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

3. Милтиқдан отилган ҳар бир ўқнинг самолётга тегиш эҳтимоллиги 0,001 га тенг. 3000 та ўқ узилади. Отилган ўқларнинг самолётга текканлари сонидан иборат X тасодифий микдорнинг тақсимот қонунини топинг.

Ж:

X	0	1	2	...	3000
P	$\frac{1}{e^3}$	$\frac{3}{e^3}$	$\frac{3^2}{2e^3}$	...	$\frac{3^{3000}}{3000!e^3}$

4. X дискрет тасодифий микдорнинг тақсимот функцияси берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 2, \\ 0,3, & \text{агар } 2 < x \leq 3, \\ 0,5, & \text{агар } 3 < x \leq 4, \\ 1, & \text{агар } x > 4. \end{cases}$$

а) $1 \leq X \leq 3$ ҳодисанинг эҳтимоллигини топинг;

б) X тасодифий микдорнинг тақсимот қонунини топинг.

Ж: а) $P(1 \leq X \leq 3) = 0,5$;

б)

X	2	3	4
P	0,3	0,2	0,5

**5- §. Узлуксиз тасодифий микдорлар.
Айрим таксимот конунлари**

14.5.1. Бирорта чекли ёки чексиз ораликдаги барча кийматларни қабул қилиши мумкин бўлган тасодифий микдор *узлуксиз тасодифий микдор* дейилади.

Узлуксиз тасодифий микдор:

- 1) интеграл функция (таксимот функция)си орқали,
- 2) эҳтимолликларнинг таксимот зичлиги (дифференциал функция) орқали берилиши мумкин.

Таксимот функциясининг таърифи ва хоссалари 4-§ да келтирилган.

X узлуксиз тасодифий микдор эҳтимолликларининг *таксимот зичлиги* деб, таксимот функцияси $F(x)$ нинг биринчи тартибли ҳосиласи бўлган $f(x)$ функцияга айтилади.

X узлуксиз тасодифий микдорнинг (a, b) ораликка тегишли кийматни қабул қилиши эҳтимоллиги қуйидаги тенглик билан аникланади:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Зичлик функцияси $f(x)$ ни билган ҳолда ушбу формула бўйича таксимот функциясини топиш мумкин:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

14.5.2. Зичлик функциясининг хоссалари:

1. Зичлик функцияси манфий эмас, яъни $f(x) \geq 0$.
2. Зичлик функциясидан $-\infty$ дан $+\infty$ гача ораликда олинган ҳосмас интеграл бирга тенг:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Хусусан, агар тасодифий микдорнинг барча мумкин бўлган кийматлари (a, b) ораликка тегишли бўлса, у ҳолда:

$$\int_a^b f(x) dx = 1.$$

Узлуксиз тасодифий микдорнинг баъзи таксимот конунларини кўриб чиқамиз.

14.5.3. Агар X узлуксиз тасодифий микдорнинг мумкин бўлган барча кийматлари тегишли бўлган ораликда эҳтимолликларнинг таксимот зичлиги ўзгармас, яъни (a, b) да $f(x) = C$ бўлса ва бу

ораликдан ташқарида эса $f(x)=0$ (C — узгармас) бўлса, X тасодифий микдор таксимоти *теkis* дейилади.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq a, \\ \frac{1}{b-a}, & \text{агар } a < x \leq b, \\ 0, & \text{агар } x > b. \end{cases}$$

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$ формула асосида таксимот функциясини топиш

мумкин:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{агар } a < x \leq b, \\ 1, & \text{агар } x > b. \end{cases}$$

X узлуксиз тасодифий микдорнинг (a, b) ораликка тегишли (α, β) ораликда тушиш эҳтимоллиги

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}$$

га тенг.

14.5.4. Агар зичлик функцияси

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

(бу ерда a, σ — эрки параметрлар) кўринишда берилган бўлса, X узлуксиз тасодифий микдорнинг таксимоти *нормал* дейилади.

Нормал таксимланган X узлуксиз тасодифий микдорнинг берилган ораликка тушиш эҳтимоллиги ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \text{ бу ерда}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \text{Лаплас функцияси.}$$

Четланишнинг абсолют киймати δ мусбат сондан кичик бўлиши эҳтимоллиги

$$P(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$$

га тенг.

14.5.5. Агар зичлик функцияси

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{агар } x \geq 0 \end{cases}$$

(бу ерда λ — эркин параметр) кўринишда берилган бўлса, X узлуксиз тасодифий миқдорнинг тақсимоти *кўрсаткичли* дейилади:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx \text{ формула асосида тақсимот функциясини топиш}$$

мумкин:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

X узлуксиз тасодифий миқдор кўрсаткичли тақсимотга эга бўлса, берилган (α, β) ораликка тушиш эҳтимоллиги учун ушбу формула ўринли:

$$P(\alpha < X < \beta) = e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda \beta}.$$

Агар T — бирор элементнинг тўхтовсиз ишлаш давомийлиги, λ эса тўхтаб қолишлар интенсивлиги (тезлиги)ни ифодаловчи узлуксиз тасодифий миқдор бўлса, у ҳолда бу элементнинг тўхтовсиз ишлаш вақти t ни тақсимот функцияси $F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $\lambda > 0$ бўлган (у t вақт давомида элементнинг тўхтаб қолиш эҳтимоллигини аниқлайди) кўрсаткичли қонун бўйича тақсимланган тасодифий миқдор деб ҳисоблаш мумкин.

Ишончлилик функцияси $R(t)$ элементнинг t вақт ичида тўхтовсиз ишлаш эҳтимоллигини аниқлайди:

$$R(t) = e^{-\lambda t}.$$

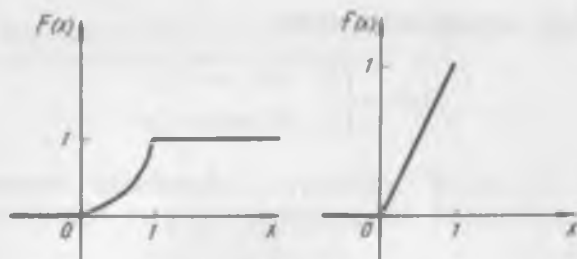
1-мисол. X тасодифий миқдор ушбу тақсимот функцияси орқали берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ x^2, & \text{агар } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{агар } x > 1. \end{cases}$$

а) 4 та боғлиқмас синув натижасида X узлуксиз тасодифий миқдор роял 3-мартга $(0,25; 0,75)$ ораликка тегишли қиймат қабул қилиш эҳтимоллигини топинг;

б) зичлик функцияси $f(x)$ ни топинг;

в) $F(x)$ ва $f(x)$ ларнинг графикларини чизинг.



71-шакл

Е чи ш. а) Дастлаб битта синов натижасида X узлуксиз тасодикий микдорнинг берилган ораликка тушиш эҳтимоллигини топамиз:

$$P(0,25 < X < 0,75) = F(0,75) - F(0,25) = 0,75^2 - 0,25^2 = 0,5625 - 0,0625 = 0,5.$$

Энди 4 та боғлиқмас синов натижасида X узлуксиз тасодикий микдор роса 3 марта берилган ораликка тегишли кийматни қабул қилиш эҳтимоллигини топамиз. Бунинг учун Бернулли формуласидан фойдаланамиз:

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q = C_4^3 \cdot 0,5^3 \cdot 0,5 = 4 \cdot (0,5)^4 = 4 \cdot 0,0625 = 0,25.$$

Шундай қилиб, $P_4(3) = 0,25$.

б) $f(x) = F'(x)$, демак,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ 2x, & \text{агар } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{агар } x > 1. \end{cases}$$

в) 71-шакл.

2- м и с ол. X узлуксиз тасодикий микдорнинг зичлик функцияси

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq \frac{\pi}{6}, \\ 3\sin 3x, & \text{агар } \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 0, & \text{агар } x > \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

берилган. Таксимот функцияси $F(x)$ ни топинг.

$$\text{Е чи ш. } F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Агар $x \leq \frac{\pi}{6}$ бўлса, $f(x) = 0$ бўлади, демак,

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0.$$

Агар $\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}$ бўлса, у ҳолда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\pi/6} 0 \cdot dx + \int_{\pi/6}^x 3\sin 3x dx = 0 - \cos 3x \Big|_{\pi/6}^x = \\ = -(\cos 3x - \cos \frac{\pi}{2}) = -\cos 3x.$$

Агар $x > \frac{\pi}{3}$ бўлса, у ҳолда

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\pi/6} 0 \cdot dx + \int_{\pi/6}^{\pi/3} 3\sin 3x dx + \int_{\pi/3}^x 0 \cdot dx = 0 - \cos 3x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} + 0 = \\ = (-\cos \pi + \cos \frac{\pi}{2}) = 1.$$

Шундай қилиб,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq \frac{\pi}{6}, \\ -\cos 3x, & \text{агар } \frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3}, \\ 1, & \text{агар } x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

3-мисол. X узлуксиз тасодикий микдорнинг зичлик функцияси бутун Ox ўқида

$$f(x) = \frac{2C}{e^x + e^{-x}}$$

тенглик билан берилган. Ўзгармас C параметрни топинг.

Ечнш. Зичлик функцияси $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ шартни қаноатлантириши керак. Шунинг учун

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2C}{e^x + e^{-x}} dx = 2C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = 1,$$

бу ердан $C = \frac{1}{2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}}$. Қуйидаги аниқмас интегрални қарай-

миз:

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \int \frac{d(e^x)}{1 + (e^x)^2} = \arctg e^x.$$

Хосмас интегрални ҳисоблашга ўтамиз:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{e^x + e^{-x}} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg e^x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow \infty} \arctg e^x \Big|_0^b = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctg 1 - \arctg e^a) + \\ &+ \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctg e^b - \arctg 1) = \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Шундай қилиб, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{2}$. Демак, $C = \frac{1}{2 \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}$.

Ж: $C = \frac{1}{\pi}$.

4-мисол. Бир соат ($0 \leq t \leq 1$, t бирлиги соатларда ҳисобланган вақт) ичида бекатга факат битта автобус келиб тўхтади. Вақтнинг $t=0$ пайтида бекатга келган йўловчининг автобусни 10 минутдан ортиқ кутмаслик эҳтимоллиги қандай?

Ечиш. Бекатга $t=0$ пайтда келган йўловчининг автобусни кутиш вақтини $[0; 1]$ ораликда текис тақсимланган X тасодифий миқдор сифатида қараш мумкин. Бу текис тақсимотнинг зичлик функцияси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ 1, & \text{агар } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{агар } x > 1. \end{cases}$$

$b-a=1-0=1$ — тасодифий миқдор X нинг қийматлари жойлашган $[0, 1]$ ораликнинг узунлиги.

$\beta - \alpha = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$ — қулайлик туғдирувчи элементар натижалар жойлашган $\left[0; \frac{1}{6}\right]$ ораликнинг узунлиги. Шунинг учун

$$P\left(0 < X < \frac{1}{6}\right) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}.$$

Ж: $\frac{1}{6}$.

5-мисол. X узлуксиз тасодифий миқдор кўрсаткичи қонун бўйича тақсимланган:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x < 0, \\ 2e^{-2x}, & \text{агар } x \geq 0. \end{cases}$$

Синов натижасида X тасодикий микдорнинг $(0,3; 1)$ оралikka тушиш эхтимоллигини топинг.

Е ч и ш. $P(0,3 < X < 1) = e^{-(2 \cdot 0,3)} - e^{-(2 \cdot 1)} = e^{-0,6} - e^{-2} = 0,54881 - 0,13534 \approx 0,41$.

Ж: 0,41.

6- мисол. Элементнинг тўхтовсиз ишлаш эхтимоллиги $f(t) = 0,02e^{-0,02t} (t > 0)$ кўрсаткичли конун бўйича таксимланган. Элементнинг тўхтовсиз 50 соат ишлаши эхтимоллигини топинг.

Е ч и ш. Ишончлилик функцияси $R(t) = e^{-\lambda t}$ дан фойдалансак,

$$R(50) = e^{-0,02 \cdot 50} = e^{-1} \approx 0,3679$$

булади.

7- мисол. X тасодикий микдор эхтимолликлар таксимотининг $a=0$, $\sigma=2$ параметрли нормал конунига бўйсунсин. X тасодикий микдорнинг $(-2; 3)$ оралikka тушиши эхтимоллигини аниқланг.

Е ч и ш. Ушбу

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

формуладан фойдалансак:

$$\begin{aligned} P(-2 < X < 3) &= \Phi\left(\frac{3-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2-0}{2}\right) = \\ &= \Phi(1,5) - \Phi(-1) = \Phi(1,5) + \Phi(1). \end{aligned}$$

$\Phi(x)$ функция жадвалидан:

$$\Phi(1,5) = 0,43319, \Phi(1) = 0,34134.$$

Демак,

$$P(-2 < X < 3) = 0,43319 + 0,34134 = 0,77453.$$

Ж: 0,77453.

8- мисол. X тасодикий микдор нормал конун бўйича таксимланган, a ва σ параметрлар мос ҳолда 20 ва 10 га тенг. Абсолют киймат бўйича четланиш учдан кичик бўлиш эхтимоллигини топинг.

Е ч и ш. $P(|X-a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$ формуладан фойдаланамиз.

Шартга кўра $\delta=3$, $a=20$, $\sigma=10$. Демак, $P(|X-20| < 3) = 2\Phi\left(\frac{3}{10}\right) = 2\Phi(0,3)$. Жадвалдан $\Phi(0,3) = 0,1179$. Демак, изланаётган эхтимоллик:

$$P(|X-20| < 3) = 0,2358.$$

5- дарсхона топшириғи

1. X тасодикий микдор $[0; \pi]$ кесмада $f(x) = A \sin x$, бу кесмадан ташқарида $f(x) = 0$ эхтимолликлар zichлигига эга.

а) A ни аниқланг;

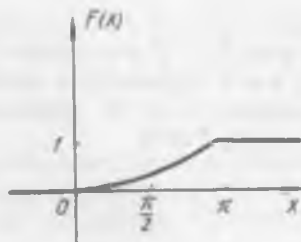
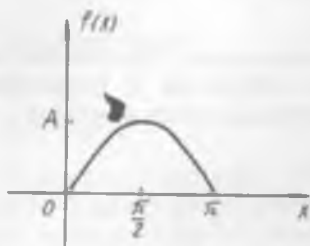
б) таксимот функцияси $F(x)$ ни топинг;

в) $P\left(-\frac{\pi}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\pi\right)$ эҳтимолликни топинг;

г) $f(x)$ ва $F(x)$ функцияларнинг графигини чизинг.

$$\text{Ж: а) } A = \frac{1}{2}; \text{ б) } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ \sin^2 \frac{x}{2}, & \text{агар } 0 < x \leq \pi, \\ 1, & \text{агар } x > \pi. \end{cases} \quad \text{в) } 3/4.$$

г) 72-шакл.



72-шакл

2. Автобуслар 5 минут оралик билан қатнайдилар. Бекатда автобус кутиш вақти X текис тақсимланган деб, қуйидагиларни топинг:

а) $F(x)$ тақсимот функциясини;

б) эҳтимолликлар зичлиги $f(x)$ ни;

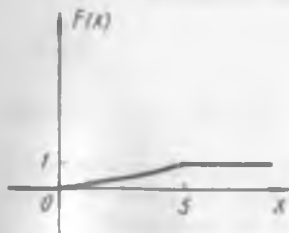
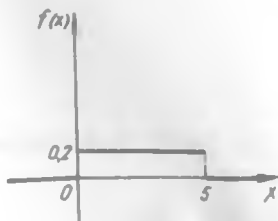
в) кутиш вақтининг 2 минутдан ошмаслик эҳтимоллигини топинг;

г) $f(x)$ ва $F(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

$$\text{Ж: а) } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ 0,2x, & \text{агар } 0 < x \leq 5, \\ 1, & \text{агар } x > 5. \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ 0,2, & \text{агар } 0 < x \leq 5, \\ 0, & \text{агар } x > 5. \end{cases} \quad \text{в) } P(X \leq 2) = 0,4;$$

г) 73-шакл.



73-шакл

3. X тасодикий микдор эхтимолликлар тахсимотининг параметрлари $a=20$, $\sigma=5$ бўлган нормал конунига бўйсунсин. Синов натижасида X тасодикий микдорнинг (15; 25) ораликда жойлашган қиймат қабул қилиш эхтимоллигини топинг. Ж: $P(15 < X < 25) = 0,6826$.

4. Бирор модда систематик хатоларсиз тортилади. Тортишдаги тасодикий хатоликлар ўрта квадратик четланиши $\sigma=20$ г бўлган нормал конунга бўйсунди. Тортиш абсолют қиймат бўйича 10 г дан ошмайдиган хатолик билан бажарилиши эхтимоллигини топинг.

Ж: $P(|X| < 10) = 2\Phi(0,5) = 0,383$.

5. Телевизорнинг бузилмай ишлаши эхтимоллиги ушбу кўрсаткичли конун бўйича тахсимланган:

$$f(t) = 0,002e^{-0,002t} (t > 0).$$

Телевизорнинг 1000 соат бузилмай ишлаши эхтимоллигини топинг.

Ж: $R(1000) = e^{-2} \approx 0,1359$.

5- мустақил иш

1. X тасодикий микдорнинг эхтимолликлар зичлиги берилган:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ ax, & \text{агар } 0 < x \leq 2, \\ 0, & \text{агар } x > 2. \end{cases}$$

а) a ни аниқланг;

б) тахсимот функцияси $F(x)$ ни топинг;

в) $f(x)$ ва $F(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

$$\text{Ж: а) } a=0,5; \text{ б) } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ 0,25x^2, & \text{агар } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{агар } x > 2. \end{cases}$$

в) $P(X > 1) = 0,75$.

2. X тасодикий микдор $[0, 2]$ кесмада текис тахсимот конунига эга, а) эхтимолликлар зичлиги $f(x)$ ва тахсимот функцияси $F(x)$ ни топинг; б) $0 < X < 0,5$ ҳодисанинг эхтимоллигини топинг, в) $f(x)$ ва $F(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

$$\text{Ж: а) } F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ 0,5x, & \text{агар } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{агар } x > 2. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ 0,5, & \text{агар } 0 < x \leq 2, \\ 0, & \text{агар } x > 2. \end{cases}$$

б) $P(0 < X < 0,5) = 0,25$.

3. X тасодифий микдор эхтимолликлар тахсимотининг параметрлари $a=30$, $\sigma=10$ булган нормал конунига буйсунади. X микдор (10; 50) ораликка тегишли киймат кабул қилиш эхтимоллигини топинг.

Ж: $P(10 < X < 50) = 0,9544$.

4. X тасодифий микдор нормал тахсимланган. Бу микдорнинг урта квадратик четланиши 0,4 га тенг. Тасодифий микдорнинг абсолют киймати буйича a дан четлашиши 0,3 дан кичик бўлиши эхтимоллигини топинг.

Ж: 0,5468.

5. Элементнинг тухтовсиз ишлаш вакти кўрсаткичли тахсимотга эга:

$$F(t) = 1 - e^{-0,002t} \quad (t > 0).$$

$t=24$ соат давомида элементнинг:

а) ишламай қолиш эхтимоллигини;

б) ишлаб туриш эхтимоллигини топинг.

Ж: $F(24) = 0,3812$, $R(24) = 0,6188$.

6-§. Дискрет ва узлуксиз тасодифий микдорларнинг математик кутилиши ва дисперсияси

14.6.1. X дискрет тасодифий микдорнинг математик кутилиши $M(X)$ деб унинг мумкин булган барча кийматларини уларнинг эхтимолликларига кўпайтмалари йиғиндисига тенг сонга айтилади.

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{k=1}^n x_k p_k.$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

Агар ихтиёрий x ва y сонлар ҳамда X ва Y тасодифий микдорлар учун

$$P(X < x, Y < y) = P(X < x) \cdot P(Y < y)$$

тенглик ўринли булса, X ва Y тасодифий микдорлар **боғлиқмас тасодифий микдорлар** дейилади.

Математик кутилишнинг хоссаларини келтирамыз:

1. Ўзгармас микдорнинг математик кутилиши ўзгармаснинг ўзига тенг:

$$M(C) = C.$$

2. Тасодифий микдорлар йиғиндисининг математик кутилиши қўшилувчилар математик кутилишларининг йиғиндисига тенг:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

3. Боғлиқмас тасодифий микдорлар кўпайтмасининг математик кутилиши кўпайтувчилар математик кутилишларининг кўпайтмасига тенг:

$$M(XY) = M(X) \cdot M(Y).$$

4. Ўзгармас кўпайтувчи математик кутилиш белгиси олдига чиқарилади:

$$M(CX) = CM(X),$$

C — ўзгармас сон.

14.6.2. X тасодифий микдорнинг *дисперсияси* деб тасодифий микдорнинг ўзининг математик кутилишидан четланиши квадрати-нинг математик кутилишига айтилади.

Агар $[X - M(X)]$ тасодифий микдорнинг четланиши бўлса, у ҳолда

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Амалда бошқа формуладан фойдаланиш қулай:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2.$$

Дисперсиянинг хоссаларини келтирамиз:

1. Ўзгармаснинг дисперсияси нолга тенг:

$$D(C) = 0.$$

2. Ўзгармас кўпайтувчининг квадратга ошириб, дисперсия белгисидан ташқарига чиқариш мумкин:

$$D(CX) = C^2 D(X), \quad C — \text{ўзгармас сон.}$$

3. Боғлиқмас тасодифий микдорлар йиғиндисини (айирмасини) нинг дисперсияси қўшилувчилар дисперсияларининг йиғиндисига тенг:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

14.6.3. 1. Дискрет тасодифий микдорнинг биномиал тақсимо-ти учун

$$M(X) = n \cdot p, \quad D(X) = n \cdot p \cdot q.$$

2. Пуассон тақсимо-ти учун:

$$M(X) = \lambda, \quad D(X) = \lambda.$$

14.6.4. Узлуксиз тасодифий микдор мумкин бўлган кийматларини бутун сон ўқида қабул қилсин, $f(x)$ унинг зичлик функцияси бўлсин.

Агар $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx$ интеграл мавжуд бўлса, $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ интеграл X узлуксиз тасодифий микдорнинг математик кутилиши дейилади, яъни

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Агар мумкин бўлган барча қийматлар (a, b) оралikka тегишли бўлса, у ҳолда

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx.$$

Изоҳ. Математик кутилишнинг дискрет тасодифий микдорлар учун хоссалари узлуксиз тасодифий микдорлар учун ҳам ўринли.

14.6.5. X узлуксиз тасодифий микдорнинг мумкин бўлган қийматлари Ox ўқида ётса, унинг дисперсияси куйидаги тенглик орқали аниқланади:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

ёки

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2.$$

Агар X узлуксиз тасодифий микдорнинг мумкин бўлган барча қийматлари (a, b) оралikka тегишли бўлса, у ҳолда

$$D(X) = \int_a^b [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

ёки

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2.$$

Изоҳ: Дисперсиянинг дискрет тасодифий микдорлар учун хоссалари узлуксиз тасодифий микдорлар учун ҳам ўринли.

14.6.6. Тасодифий микдорнинг *ўрта квадратик четланиши* деб дисперсиядан олинган квадрат илдизга айтилади:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

14.6.7. Математик кутилиш ва дисперсия:

1) текис таксимланган узлуксиз тасодифий микдор учун:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, D(X) = \frac{(b-a)^2}{12};$$

2) кўрсаткичли таксимот учун:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2};$$

3) нормал таксимот учун:

$$M(X) = a, D(X) = \sigma^2.$$

1-мисол. X тасодифий микдор ушбу таксимот конуни билан берилган:

X	0	1	2	3	4
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ечиш. Тасодифий микдор дискрет бўлгани учун 14.6.1 ва 14.6.2 даги формулаларга кўра:

$$M(X) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,08 + 4 \cdot 0,02 = 1,32.$$

X^2	0	1	4	9	16
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

$$M(X^2) = 0 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,08 + 16 \cdot 0,02 = 2,64.$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 2,64 - (1,32)^2 = 2,64 - 1,7424 = 1,8976;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \approx 1,3775.$$

Шундай қилиб, $M(X) = 1,32$; $D(X) = 1,8976$; $\sigma(X) \approx 1,3775$.

2-мисол. Иккита богликмас синовда A ходисанинг рўй беришлар сонидан иборат X дискрет тасодифий микдорнинг дисперсиясини топинг, бунда ходисанинг бу синовларда рўй бериш эҳтимолликлари тенг ва $M(X) = 0,9$ экани маълум.

Ечиш. X дискрет тасодифий микдор биномиал конун бўйича таксимланган, шунинг учун $M(X) = np$. Шартга кўра $M(X) = 0,9$, $n = 2$. Демак, $2p = 0,9$, $p = 0,45$, $q = 1 - 0,45 = 0,55$.

$$D(X) = npq = 2 \cdot 0,45 \cdot 0,55 = 0,495.$$

Шундай қилиб, $D(X) = 0,495$.

3-мисол. X узлуксиз тасодифий микдорнинг зичлик функцияси берилган:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq \frac{\pi}{6}, \\ 3\sin 3x, & \text{агар } \frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & \text{агар } x > \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

X тасодифий микдорнинг сонли характеристикалари — $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Е ч и ш.

$$\begin{aligned} M(X) &= \int_a^b x f(x) dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} x \cdot 3\sin 3x dx = \\ &= 3 \int_{\pi/6}^{\pi/3} x \cdot \sin 3x dx = 3 \left(-\frac{1}{3} x \cos 3x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} + \frac{1}{3} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos 3x dx \right) = \\ &= \left(\begin{matrix} u=x \\ dv=\sin 3x dx \end{matrix} \Big| \begin{matrix} du=dx \\ v=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix} \right) = \\ &= 3 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \left(\frac{\pi}{3} \cos \pi - \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{2} \right) + 3 \frac{1}{9} \sin 3x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \\ &= - \left(-\frac{\pi}{3} - 0 \right) + \frac{1}{3} \left(\sin \pi - \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\pi-1}{3} \approx 0,7133. \\ D(x) &= \int_a^b x^2 f(x) dx - [M(X)]^2 = 3 \int_{\pi/6}^{\pi/3} x^2 \sin 3x dx - \left(\frac{\pi-1}{3} \right)^2. \end{aligned}$$

Кейинги интегрални ҳисоблаб оламиз:

$$\begin{aligned} 3 \int_{\pi/6}^{\pi/3} x^2 \sin 3x dx &= \left(\begin{matrix} u=x^2 \\ dv=\sin 3x dx \end{matrix} \Big| \begin{matrix} du=2x dx \\ v=-\frac{1}{3}\cos 3x \end{matrix} \right) = \\ &= 3 \left[-x^2 \cdot \frac{1}{3} \cos 3x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} + \frac{2}{3} \int_{\pi/6}^{\pi/3} x \cos 3x dx \right] = -x^2 \cos 3x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} + \\ &+ 2 \int_{\pi/6}^{\pi/3} x \cos 3x dx = - \left(\frac{\pi^2}{9} \cos \pi - \frac{\pi^2}{36} \cos \frac{\pi}{2} \right) + 2 \left(\frac{1}{3} x \sin 3x \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{3} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin 3x dx \right) = \left(\begin{matrix} u=x \\ dv=\cos 3x dx \end{matrix} \Big| \begin{matrix} du=dx \\ v=\frac{1}{3}\sin 3x \end{matrix} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi^2}{9} + \frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{3} \sin \pi - \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{2} \right) - \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3} \cos 3x \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \\
 &= \frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi}{9} + \frac{2}{9} \left(\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi}{9} + \frac{2}{9} (-1) = \frac{\pi^2 - \pi - 2}{9}; \\
 D(X) &= \frac{\pi^2 - \pi - 2}{9} - \left(\frac{\pi - 1}{3} \right)^2 = \frac{\pi^2 - \pi - 2}{9} - \frac{\pi^2 - 2\pi + 1}{9} = \\
 &= \frac{\pi^2 - \pi - 2 - \pi^2 + 2\pi - 1}{9} = \frac{\pi - 3}{9} \approx 0,0155.
 \end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,0155} \approx 0,1245.$$

4-мисол. Текис тақсимланган X тасодифий микдор зичлик функцияси билан берилган:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq a-l, \\ \frac{1}{2l}, & \text{агар } a-l < x \leq a+l, \\ 0, & \text{агар } x > a+l. \end{cases}$$

$M(X)$ ва $D(X)$ ни топинг.

Ечиш. 14.6.8 даги формулалардан фойдаланамиз:

$$M(X) = \frac{a+b}{2}, \text{ демак, } M(X) = \frac{a-l+a+l}{2} = \frac{2a}{2} = a;$$

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}, \text{ демак,}$$

$$D(X) = \frac{(a+l-a+l)^2}{12} = \frac{(2l)^2}{12} = \frac{4l^2}{12} = \frac{l^2}{3}.$$

Шундай қилиб, $M(X) = a$; $D(X) = \frac{l^2}{3}$.

5-мисол. X тасодифий микдор нормал тақсимланган бўлиб, математик кутилиши $a=10$ га тенг. X тасодифий микдорнинг $(10; 20)$ оралikka тушиш эҳтимолиги $0,3$ га тенг бўлса, унинг $(0; 10)$ оралikka тушиш эҳтимолигини топинг.

Ечиш. Нормал эгри чизик (Гаусс эгри чизиги) $x=a=10$ тўғри чизикка нисбатан симметрик бўлгани учун юқоридан нормал эгри чизик билан, пастдан эса $(0; 10)$ ҳамда $(10; 20)$ ораликлар билан чегараланган юзлар бир-бирига тенг. Бу юзлар сон жиҳатдан X тасодифий микдорнинг тегишли ораликларга тушиш эҳтимоликларига тенг. Шунинг учун:

$$P(0 < X < 10) = P(10 < X < 20) = 0,3.$$

6-мисол. Зичлик функцияси $f(x) = 10e^{-10x} (x \geq 0)$ билан берилган кўрсаткичли таксимотнинг математик кутилиши, дисперсияси, ўрта квадратик четланишини топинг.

Ечиш. $\lambda = 10$.

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{100} = 0,01.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

7-мисол. Таксимот функцияси $F(x) = 1 - e^{-0,1x} (x > 0)$ билан берилган кўрсаткичли таксимотнинг $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларини топинг.

Ечиш. $\lambda = 0,1$, $M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,1} = 10$,

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{0,01} = 100, \sigma(X) = \frac{1}{\lambda} = 10.$$

6-дарсхона топишириғи

1. X тасодифий микдор — ўйин соккасини бир марта ташланганда тушадиган очколар сони. $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ж: $M(X) = 3,5$; $D(X) = 2,92$; $\sigma(X) = 1,71$.

2. Нишонга карата ҳар бир отишда тегиш эҳтимоллиги $p = 0,8$ бўлган 4 та ўқ узилади (боғлиқмас ҳолда). Нишонга тегишлар сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий микдорнинг сонли характеристикалари $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ж: $M(X) = 3,2$; $D(X) = 0,64$; $\sigma(X) = 0,8$.

3. X узлуксиз тасодифий микдор зичлик функцияси $f(x)$ билан берилган:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ 0,5\cos x, & \text{агар } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{агар } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ж: $M(X) = 0$; $D(X) \approx 0,4649$; $\sigma(X) \approx 0,68$.

4. X узлуксиз тасодифий микдор зичлик функцияси $f(x)$ билан берилган:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 2, \\ 0,5, & \text{агар } 2 < x \leq 4, \\ 0, & \text{агар } x > 4. \end{cases}$$

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ж: $M(X) = 3$; $D(X) = \frac{1}{3}$; $\sigma(X) = 0,58$.

5. X узлуксиз тасодикий микдор зичлик функцияси $f(x)$ билан берилган:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x < 0, \\ 5e^{-5x}, & \text{агар } x \geq 0. \end{cases}$$

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ж: $M(X) = 0,2$; $D(X) = 0,04$; $\sigma(X) = 0,2$.

6. Агар $M(X) = 3$, $D(X) = 16$ эканлиги маълум бўлса, нормал тақсимланган X тасодикий микдорнинг зичлик функциясини топинг.

$$\text{Ж: } f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}$$

6- мустақил иш

1. Кутида 7 та шар бўлиб, уларнинг тўрттаси оқ, қолганлари қора. Кутидан таваккалга 3 та шар олинади. X — олинган оқ шарлар сони. $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ни топинг.

Ж: $M(X) = 1\frac{5}{7}$; $D(X) \approx 0,49$; $\sigma(X) \approx 0,7$.

2. Иккита ўйин соққаси бараварига 2 марта ташланади. X — иккала ўйин соққасидаги тушган жуфт очколар сони. $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ж: $M(X) = 0,5$; $D(X) = \frac{3}{8} = 0,375$; $\sigma(X) \approx 0,612$.

3. X узлуксиз тасодикий микдор зичлик функцияси билан берилган:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ 2x, & \text{агар } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{агар } x > 1. \end{cases}$$

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ж: $M(X) = \frac{2}{3}$; $D(X) = \frac{1}{18}$; $\sigma(X) = 0,236$.

4. (2; 8) ораликда текис тақсимланган X тасодикий микдорнинг $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларини топинг.

Ж: $M(X) = 5$; $D(X) = 3$; $\sigma(X) = \sqrt{3}$.

5. X узлуксиз тасодикий микдор зичлик функцияси

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x < 0, \\ 0,04e^{-0,04x}, & \text{агар } x \geq 0 \end{cases}$$

билан берилган. $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

Ж: $M(X) = 25$; $D(X) = 625$; $\sigma(X) = 25$.

6. Нормал тақсимланган X тасодифий микдор зичлик функцияси

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

билан берилган. $M(X)$, $D(X)$ ларни топинг.

Ж: $M(X) = 1$, $D(X) = 25$.

11-назорат иши

1.1. Цехда 7 эркак ва 6 аёл ишлайди. Таваккалига 8 киши ажратилганда, улар орасида уч аёл бўлиши эҳтимоллигини топинг.

1.2. Яшикдаги деталларининг 20% и яроксиз. Олинган 3 та деталнинг кўпи билан биттаси яроксиз бўлиб чиқиши эҳтимоллигини топинг.

1.3. Биринчи кутида 12 та шар бўлиб, уларнинг 8 таси оқ, иккинчи кутида 15 та шар бўлиб, уларнинг 4 таси оқ. Биринчи кутидан иккинчисига 2 та шар солинади. Иккинчи кутидан таваккалига олинган шар қора бўлиши эҳтимоллигини топинг.

1.4. $p(A) = 0,6$ бўлсин. A ҳодисанинг 2400 боғлиқсиз синовда роса 1400 марта рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

1.5. Партияда 12% ностандарт деталлар бор. Таваккалига 5 та деталь олинади. Олинган деталлар ичида ностандарт деталлар сони — X дискрет тасодифий микдорнинг тақсимот қонунини ва $M(X)$, $D(X)$, $P(1 < X \leq 2)$, $F(x)$ ларни топинг.

2.1. Кутида номерланган олти куб бор. Таваккалига биттадан ҳамма кублар олинганда ҳосил бўлган соннинг бешга бўлиниши эҳтимоллигини топинг.

2.2. Буюмнинг стандарт бўлиши эҳтимоли 0,8 га тенг. Тўртта буюмнинг ҳеч бўлмаганда биттаси стандарт бўлиши эҳтимоллигини топинг.

2.3. Учта кутининг ҳар бирида 6 та қора ва 4 та оқ шар бор. Биринчи кутидан таваккалига битта шар олиб, иккинчисига солинади, шундан сўнг иккинчи кутидан таваккалига битта шар олиниб, учинчи кутига солинади. Учинчи кутидан таваккалига олинган шарнинг оқ бўлиши эҳтимоллигини топинг.

2.4. Янги туғилган 70 чақалоқнинг камида 40 ва кўпи билан 65 нафари ўғил бола бўлиши эҳтимоллигини топинг.

2.5. Бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда ишлайдиган 4 та асбобдан иборат қурилма текширилади. Агар асбобларнинг бузилиб қолиш эҳтимолликлари $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,5$ ва $p_4 = 0,6$ бўлса, бузилиб қолган асбоблар сонидан иборат X дискрет тасодифий микдорнинг тақсимот қонуни $F(x)$ ни ва $P(2 < X < 4)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

3.1. 52 та картадан иборат тўлиқ дастадан таваккалига 4 та карта олинганда роса 2 таси ғиштин бўлиши эҳтимоллигини топинг.

3.2. Курилма бир-бирига боғликсиз ишлайдиган учта элементдан иборат. Уларнинг бузилиб қолиши эҳтимоллари 0,05; 0,08; 0,07 га тенг. Иккита элемент бузилиб қолиши эҳтимоллигини топинг.

3.3. 10 та милтикнинг 4 таси оптик нишонга олиш мосламасига эга. Бундай мосламали милтикдан нишонга уриш эҳтимоллиги 0,9 га, усиз 0,7 га тенг. Таваккалига олинган милтикдан 2 та ўк узилган. Агар мерган иккала ҳолда ҳам нишонга уролмаган бўлса, оптик мосламали милтиқ танланмаганлиги эҳтимоллигини топинг.

3.4. Ўйин соккасини 50 марта ташланганда «олтилик» камида 10, кўпи билан 25 марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

3.5. Тўқувчи 1000 та урчукка хизмат кўрсатади. Бир минут ичида битта урчукда ип узилиш эҳтимоллиги 0,004 га тенг. Ипи узилган урчуқлар сонидан иборат X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $M(X)$, $D(X)$, $P(100 < X < 200)$, $F(x)$ ларни топинг.

4.1. 20 та команда иккита гуруҳга бўлинади. Иккита энг кучли команда бошқа-бошқа гуруҳларга тушиши эҳтимоллигини топинг.

4.2. Тўрт мерган нишонга қарата ўк узишади. Нишонга тегиш эҳтимолликлари мос ҳолда 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 га тенг: а) учта мерган нишонга ургани; б) нишон мўлжалга олингани эҳтимоллигини топинг.

4.3. Биринчи қутида 12 та шар бўлиб, уларнинг 7 таси оқ, иккинчи қутида 15 та шар бўлиб, уларнинг 5 таси оқ. Ҳар қайси қутидан биттадан шар олинди, сўнгра бу икки шардан таваккалига биттаси олинди. Агар танланган шар қора бўлса, олинган иккала шарнинг қора бўлиши эҳтимоллигини топинг.

4.4. Партияда 30% яроксиз деталлар бор. 50 та деталнинг ичидан 10 тадан кўпи яроксиз бўлиб чиқиши эҳтимоллигини топинг.

4.5. Иккита тўпдан навбатма-навбат нишонга қарата тўплардан бири нишонни мўлжалга олгунча ўк узилади. Нишонга тегиш эҳтимолликлари тўплар учун мос ҳолда 0,7 ва 0,3. Биринчи тўп узган ўқлар сонидан иборат дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(2 \leq X \leq 5)$ ларини топинг.

5.1. Узунликлари 1, 3, 5, 7 ва 9 см бўлган бешта кесма мавжуд. Таваккалига олинган учта кесмадан учбурчак тузиш мумкинлиги эҳтимоллигини топинг.

5.2. Учта мерган нишонга қарата ўк узишди. Нишоннинг биринчи мерган томонидан «яксон» қилиниш эҳтимоллиги 0,8 га, иккинчи ва учинчи мерганлар учун мос ҳолда 0,7 ва 0,9 га тенг. Иккитадан кўп бўлмаган мерган нишонни «яксон» қилиши эҳтимоллигини топинг.

5.3. Ичида 10 та шар бўлган қутига оқ шар солинди, шундан сўнгра таваккалига 2 та шар олинди. Иккала шар оқ бўлиши эҳтимоллигини топинг.

5.4. $p(A) = 0,8$ бўлсин. A ҳодиса 21 та синовнинг кўпчилигида рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

5.5. Курилма 1000 та элементдан иборат бўлиб, исталган

элементнинг T вақт давомида ишдан чиқиш эҳтимоллиги 0,002 га тенг. Ишдан чиққан элементлар сони бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X > 100)$ ларни топинг.

6.1. 52 талик карталар дастасидан таваккалига 3 та карта олинади. Булар «уч», «еттилик», «туз» бўлиши эҳтимоллигини топинг.

6.2. Таваккалига олинган буюмнинг юқори навли бўлиш эҳтимоллиги 0,7 га тенг. Олинган тўртта буюмнинг фақат иккитаси юқори навли бўлиши эҳтимоллигини топинг.

6.3. Лабораторияда 6 та автомат ва 4 та ярим автомат бор. Бузилиб қолиш (ишдан чиқиш) эҳтимоллиги автомат учун 0,1 га, ярим автомат учун эса 0,2 га тенг. Таваккалига олинган машина автомат бўлса, унинг ишдан чиқиши эҳтимоллигини топинг.

6.4. $p(A) = 0,7$ бўлсин. A ҳодиса 50 та синовда 10 дан 25 мартагача рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

6.5. Овчининг 3 та ўқи бор. U нишонга қарата биринчи ўқ теккунча отади. Агар ҳар қайси ўқ узишда хато кетиш эҳтимоллиги 0,2 га тенг бўлса, сарф қилинган ўқлар сонидан иборат X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X > 2)$ ларни топинг.

7.1. Кутида 12 шар бўлиб уларнинг 5 таси оқ ва 7 таси қора. Таваккалига 3 та шар олинади. Олинган шарларнинг 2 таси қора ва 1 таси оқ бўлиши эҳтимоллиги қандай?

7.2. 4 та боғлиқмас ҳодисанинг ҳар бири мос ҳолда 0,012; 0,01; 0,006 ва 0,002 эҳтимолликлар билан рўй бериши мумкин. Ҳеч бўлмаганда битта ҳодисанинг рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

7.3. Лампочкалар партиясидан 100 та лампочкага 0 дан 5 тагача яроксизлари тўғри келиши мумкин. 100 та лампочкадан таваккалига 10 таси олинди. Олинган барча 10 та лампочка ярокли эканлиги маълум бўлса, партиядан ҳамма лампочкалар ярокли бўлиши эҳтимоллигини аниқланг.

7.4. Тенг кучли шахматчилар учун

а) 70 та ўйиндан 60 тасини ютиш;

б) камида 40 та ўйинни ютиш эҳтимоллиги қандай?

7.5. Автомобилнинг бутун йўли давомида тўртта светофор бор. Уларнинг ҳар бири 0,5 эҳтимоллик билан ё йўлни очади, ё ҳаракатни таъқиқлайди. Автомобилнинг биринчи тўхташигача ўтган светофорлар сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

8.1. Яшиқда 90 та сифатли ва 10 та яроксиз буюм бор. Таваккалига олинган 5 та буюмнинг 2 тадан кўп бўлмагани яроксиз эканлиги эҳтимоллигини топинг.

8.2. Қурилма учта элементдан иборат. Биринчи, иккинчи, учинчи элементларнинг тўхтовсиз ишлаш эҳтимолликлари мос ҳолда 0,6; 0,7; 0,8 га тенг. Ҳеч бўлмаганда битта элемент ишдан чиқиши эҳтимоллигини топинг.

8.3. 3 та қутининг ҳар бирида 7 та қора ва 3 та оқ шар бор. Ҳар

кайсй кутидан таваккалига биттадан шар олинади, сўнгра бу учта шардан бири олинади. Бу шар кора рангда бўлиши эҳтимоллигини топинг.

8.4. Ўйин соккаси 60 марта ташланганда «учлик» 15 дан кам марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

8.5. Курилма деталларни штамповка килади. Деталь яроксиз бўлиб чиқиши эҳтимоллиги 0,01 га тенг. 10 та деталь ичида яроксизларининг сонидан иборат X дискрет тасодифий микдорнинг тахсимот конунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(5 < X \leq 8)$ ларни топинг.

9.1. Таваккалига олинган икки хонали соннинг ракамлари йигиндиси 9 га тенг бўлиши эҳтимоллигини топинг.

9.2. Биринчи тадқиқотчининг хатога йўл қўйиши эҳтимоллиги 0,1 га, иккинчи ва учинчи тадқиқотчилар учун эса 0,2 ва 0,3 га тенг.

а) ҳеч бўлмаганда битта тадқиқотчининг;

б) иккита тадқиқотчининг хатога йўл қўйиши эҳтимоллигини топинг.

9.3. Бешта кути бор: 1-, 2- ва 3- кутиларда 2 тадан оқ ва 3 тадан кора шар бор, 4- ва 5- кутиларда 1 тадан оқ ва 1 тадан кора шар бор. Дуч келган битта кутидан таваккалига битта шар олинади. Агар олинган шар кора бўлса, тўртинчи кути танланганлиги эҳтимоллигини топинг.

9.4. Маълумотни узатишда битта белгининг бузилиш эҳтимоли 0,1 га тенг. 10 та белгидан иборат маълумотда 3 та бузилиш борлиги эҳтимоллиги қандай?

9.5. Орасида 4 та яроксиз бўлган 10 та деталдан иборат партиядан таваккалига 4 та деталь олинади. Олинган деталлар ичидаги яроксизлари сонидан иборат дискрет тасодифий микдорнинг тахсимот конунини ва $F(x)$, $M(X)$, $\sigma(X)$, $P(X > 2)$ ларни топинг.

10.1. 8 та бир хил карточкага 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13 сонлар ёзилган. Таваккалига иккита карточка олинади. Олинган иккита карточкадаги сонлардан тузилган каср қисқарувчи бўлиши эҳтимоллигини топинг.

10.2. Электр занжиридаги узилиш R элементнинг ёки иккита r_1 ва r_2 элементларнинг ишдан чиқиши туфайли рўй бериши мумкин. (Бу элементларнинг ишдан чиқиши эҳтимолликлари 0,3; 0,2 ва 0,1 га тенг.)

а) занжирнинг узилиш эҳтимоллигини топинг;

б) элементлардан бирининг ишдан чиқиши эҳтимоллигини топинг.

10.3. Йиғувчи 3 яшик деталь олди: биринчи яшикда 40 та деталь бўлиб, 5 таси бўялган; иккинчисида 50 та деталь бўлиб, 10 таси бўялган; учинчисида 30 та деталь бўлиб, 20 таси бўялган. Таваккалига танланган яшикдан таваккалига олинган деталь бўялган бўлиши эҳтимоллигини топинг.

10.4. Янги туғилган 50 чакалок ичида ўғил болалар ками билан 25 ва кўпи билан 35 тани ташкил этиши эҳтимоллиги қандай?

10.5. Дарслик 100000 нусхада чоп этилган. Дарслик нотўғри муқоваланган бўлиши эҳтимоллигини 0,0001 га тенг. Ҳамма китоблар орасидаги яроксизлари сонидан иборат X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(100 < X < 1000)$ ларни топинг.

11.1. Ўйин соққаси ташланади. Туб сон тушиши эҳтимол қандай?

11.2. Яшиқда 100 деталъ бўлиб, уларнинг 10 таси яроксиз. Таваққалига 4 та деталъ олинган. Олинган деталлар ичида:

а) иккитаси яроксиз;

б) ҳеч бўлмаганда биттаси яроксиз бўлиши эҳтимоллигини топинг.

11.3. Деталлар биринчи партиясининг $2/3$ қисми яроксиз, иккинчи ва учинчи партияди барча деталлар ярокли. Таваққалига битта деталъ олинади. Олинган деталнинг яроксиз бўлиши эҳтимоллигини топинг.

11.4. Алоқа каналлари орқали 1000 та белги юборилади. Битта белгининг бузилиш эҳтимоллиги 0,005 га тенг. Роса 50 та белгининг бузилиши эҳтимоллигини топинг.

11.5. 3 та асбоб текширилади. Ҳар қайси асбоб ундан олдинги асбоб ярокли (ишончли) бўлиб чиққандагина текширилади. Ҳар бир асбоб учун синовга бардош бериш эҳтимоллиги 0,9 га тенг. Асбобларни синаш сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорининг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $P(X > 1)$ ларни топинг.

12.1. Таваққалига танланган икки хонали бутун сонни квадратга оширганда турт билан туговчи сон ҳосил бўлиши эҳтимоллигини аниқланг.

12.2. Мерган марказий доира ва иккита концентрик ҳалқадан иборат нишонга қарата битта ўқ узади. Доира ва ҳалқаларга ўқ тегиши эҳтимоллиги мос равишда 0,2; 0,5; 0,1 га тенг. Ўқнинг ҳалқага тегиши эҳтимоллигини топинг.

12.3. Бензин куйиш станцияси жойлашган шоссе бўйлаб ўтаётган юк машиналари сонининг енгил машиналар сонига нисбати 3:2 каби. Юк машинасининг бензин олиш учун станцияга кириш эҳтимоллиги 0,1 га, енгил машина учун 0,2 га тенг. Бензин олиш учун кириб келган машина — юк машинаси бўлиши эҳтимоллигини топинг.

12.4. Танга ташланади. Танга 11 марта ташланганда гербли томон 3 марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

12.5. Соққа 3 марта ташланади. «Отилиқ» тушишлари сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X < 2)$ ларни топинг.

13.1. Битта тоқчадаги 10 та китоб таваққалига куздан кечирил-япти. Учта маълум китобнинг ёнма-ён турганлиги эҳтимоллигини топинг.

13.2. Мерганнинг битта ўқ узишда нишонга текказиш эҳтимолли

0,8 га тенг. Бешта ўк узишда нишонга камида тўрт марта тегиш эҳтимоллигини топинг.

13.3. Иккита автомат деталлар тайёрлайди. Биринчи автоматнинг ностандарт деталь тайёрлаш эҳтимоллиги 0,07 га, иккинчисиники эса 0,09 га тенг. Иккинчи автоматнинг ишлаб чиқариш унумдорлиги биринчи автоматнинг унумдорлигидан уч марта юқори. Таваккалига олинган деталнинг стандарт бўлиши эҳтимоллигини топинг.

13.4. Тангани 80 марта ташланганда 50 марта «герб» тушиши эҳтимоллигини топинг.

13.5. Қурилма учта элементдан тузилган. Битта синовда ҳар қайси элементнинг ишдан чиқиш эҳтимоллиги 0,4 га тенг. Ишдан чиққан элементлар сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ва $P(X > 1)$ ларни топинг.

14.1. Ўнта бир хил карточкага нолдан тўққизгача турли сонлар ёзилган. Бу карточкалар ёрдамида таваккалига тузилган уч ҳонали соннинг 36 га бўлиниши эҳтимоллигини топинг.

14.2. Ўнта қўлёзма 30 та папкага жойлашган (битта қўлёзмага 3 та папка). Таваккалига олинган 6 та папкада бирорта ҳам қўлёзма бутунича жойлашмаслик эҳтимоллигини топинг.

14.3. Автобус паркидан 1- номердаги 6 та автобус, 2- номердаги 4 та автобус ва 3- номердаги 5 та автобус ихтиёрий тартибда чиқиб кетди. Иккинчи бўлиб чиққан автобуснинг 2- номерли бўлиши эҳтимоллигини топинг.

14.4. Оилада 5 та фарзанд бор. Уларнинг 3 тадан қўп бўлмагани ўғил болалар экани эҳтимоллигини топинг.

14.5. Ишчи 3 та станокка хизмат қўрсатади. Бир соат ичида станокнинг ишчига «эҳтиёжи бўлмаслик» эҳтимоллиги I станок учун 0,9 га, II станок учун 0,8 га, III станок учун 0,7 га тенг. Бир соат ичида ишчининг аралашуви талаб этилмайдиган станоклар сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, ва $\sigma(X)$ ларни топинг.

15.1. «36 дан 5» спортлото ўйнида мукофот олиш эҳтимоллиги қандай? (Мукофот олиши учун камида 3 та ракам тўғри топилиши керак.)

15.2. Йиғувчига керак бўлган деталь биринчи, иккинчи ва учинчи яшиқларда бўлиши эҳтимоллиги мос ҳолда 0,6; 0,7; 0,8 га тенг. Зарур деталнинг камида иккита яшиқда бўлиши эҳтимоллигини топинг.

15.3. Яшиқда 1- заводда тайёрланган 10 та деталь, 2- заводда тайёрланган 5 та деталь ва 3- заводда тайёрланган 15 та деталь бор. Йиғувчи деталларни битталаб олади. Иккинчи олишида 2- заводда тайёрланган деталь чиқиши эҳтимоллигини топинг.

15.4. $p(A) = 0,25$ бўлсин. A нинг ҳодиса 243 та синовда 70 марта рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

15.5. Икки тўпдан нишонга қарата галма-гал тўплардан бири нишонга текказгунча ўк узилади. Ҳар қайси тўпнинг нишонга

текказиш эҳтимоллиги мос равишда 0,3 ва 0,7 га тенг. Иккинчи тўп сарф қилган ўқлар сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X > 10)$ ларни топинг.

16.1. Тўққиз йўловчи трамвайнинг 3 та вагонига чиқиб жойлашдилар. Ҳар бир йўловчи вагонни таваккалига танлайди. Бир вагонга тўрт йўловчи, бошқасига уч, учинчи вагонга эса икки йўловчи чиққанлиги эҳтимоллиги қандай?

16.2. Икки тўпдан барабарига отилганда нишонга тегиш эҳтимоллиги 0,46 га тенг. Агар иккинчи тўпнинг нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,7 га тенг бўлса, биринчи тўп учун бу эҳтимоллик қандай бўлади? Тўпларнинг ҳеч бўлмаганда бири нишонга текказиши эҳтимоллигини топинг.

16.3. Иккита қутининг ҳар бирида 7 та қора, 3 та оқ шар бор. Иккинчи қутидан таваккалига иккита шар олинди ва биринчи қутига солинди. Биринчи қутидан олинган шар оқ бўлиши эҳтимоллигини топинг.

16.4. Ўйин соккасини 90 марта ташлашда 3 га қаррали соннинг камида 100, кўпи билан 170 марта чиқиши эҳтимоллигини топинг.

16.5. Иккита мерган галма-галдан нишонга қарата ўқ узишадди. Битта ўқ узишда хато кетиш эҳтимоллиги биринчи мерган учун 0,2 га, иккинчиси учун 0,4 га тенг. Агар тўрттадан ортиқ ўқ узилмаган бўлса, нишонга теккунча отилган ўқлар сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X > 2)$ ларни топинг.

17.1. Қурилма 3 таси эскириб қолган 5 та элементдан иборат. Қурилмани тасодифан ишга туширилганда 2 та элемент ишлайди. Қурилманинг ишга тушмай қолиши эҳтимоллигини топинг.

17.2. Ҳодисанинг ҳар бир синовда рўй бериш эҳтимоллиги 0,2 га тенг. Синовлар бирин-кетин, ҳодиса рўй бергунча ўтказилади. Иккитадан кўп бўлмаган синов ўтказилиш эҳтимоллигини топинг.

17.3. 12 та милтикнинг 5 таси оптик нишонга олиш мосламасига эга. Бундай мосламали милтикдан нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,9 га, мосламасиз милтикдан эса 0,75 га тенг. Мерган таваккалига олган милтикдан иккита ўқ узди. У иккала ҳолда ҳам нишонга текказганлигининг эҳтимоллигини топинг.

17.4. Битта ўқ узишда нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,8 га тенг. 5 та ўқ узилганда 4 таси нишонга тегиши эҳтимоллигини топинг.

17.5. Нишон 1-номерли доира ҳамда 2- ва 3-номерли концентрик ҳалқалардан иборат. 1-номерли доирага текказишга 10 очко, 2-номерли ҳалқага — 5 очко ва 3-номерли ҳалқага текказишга (— 1) очко берилади. Доирага ва ҳалқаларга текказиш эҳтимолликлари мос ҳолда 0,5, 0,3, 0,2 га тенг. Учта ўқ узилганда тўпланган очқолар сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ва $P(X > 10)$ ларни топинг.

18.1. Кўчада учраган биринчи автомашинанинг номери бир хил рақамлардан иборат бўлиши эҳтимоллигини аниқланг.

18.2. 100 та буюмдан иборат партиядо 20 та стандарт буюм бор. Таваккалига 3 та буюм олинди. Уларнинг ичида камида иккитаси стандарт бўлиши эҳтимоллигини топинг.

18.3. Тирда бешта милтик бўлиб, улардан нишонга текказиш эҳтимолликлари 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9 га тенг. Таваккалига олинган милтикдан бир марта ўқ узишда нишонга текказиш эҳтимоллигини аниқланг.

18.4. $p(A) = 0,7$ бўлсин. A ҳодисанинг 2100 та синовда 1000 марта рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

18.5. Иккита ўйин соккаси бир пайтда ташланади. Иккаласида ҳам жуфт очко чиқиш сонидан иборат бўлган X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ва $P(X > 2)$ ларни топинг.

19.1. «45 дан 6» спортлото ўйинида ютиб олиш эҳтимоллиги қандай? (Мукофот олиш учун камида 4 та рақам тўғри топилиши керак.)

19.2. Икки спортчининг ҳар бири учун бирор машқни яхши бажариш эҳтимоллиги 0,5 га тенг. Спортчилар машқни навбат билан бажарадилар, бунда ҳар бир спортчи уч мартадан уринади. Спортчиларнинг ҳеч бўлмаганда бири мукофотни олиши эҳтимоллигини топинг.

19.3. Биринчи кутида 1 та ок ва 9 та қора шар, иккинчи кутида 1 та қора ва 5 та ок шар бор. Ҳар қайси кутидан биттадан шар олиб ташланди ва қолган ҳамма шарларни учинчи кутига солинди. Учинчи кутидан олинган шар ок бўлиши эҳтимоллигини топинг.

19.4. Ўйин соккаси 70 марта ташланганда тоқ очколар 50 дан 65 мартагача тушиши эҳтимоллигини топинг.

19.5. Агар X тасодифий миқдор иккита $x_1 < x_2$ қийматга эга бўлиб, $P(X = x_1) = 0,3$; $M(X) = 3,7$, $D(X) = 0,21$ бўлса, бу тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини топинг.

20.1. Таваккалига танланган икки хонали соннинг тўб сон бўлиши эҳтимоллигини топинг.

20.2. Яшиқда 15 та деталь бўлиб, уларнинг 10 таси бўялган. Таваккалига 5 та деталь олинади. Уларнинг орасида камида 4 таси бўялган бўлиши эҳтимоллигини топинг.

20.3. Автобус паркидан 1- номердаги 6 та, 2- номердаги 4 та ва 3- номердаги 10 та автобус чиқиб кетди. Иккинчи бўлиб чиққан автобуснинг 1- номерли бўлиши эҳтимоллигини топинг.

20.4. $p(A) = 0,8$ эканлиги маълум. A ҳодисанинг 100 та синовда камида 75 марта рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

20.5. Иккита бомбардимончи самолёт нишонга теккунча галми галдан бомба ташлайди. Биринчи самолётнинг нишонни аниқ мўлжалга олиш эҳтимоллиги 0,7 га, иккинчисиники эса 0,8 га тенг. Агар самолётларнинг ҳар бирида 3 тадан бомба бўлса, ташланган бомбалар сонидан иборат X дискрет тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини, $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P(X > 2)$ ларни топинг.

21.1. Болалар учун санаторийга 12 та, сайёхлар лагерига 8 та ва спорт лагерига 5 та йўлланма ажратилди. Агар 3 ўртоқнинг она-оналари бир-биридан беҳабар биттадан йўлланма олган бўлса, бу 3 ўртоқнинг битта лагерга тушиб қолиши эҳтимоллиги қандай?

21.2. Биринчи станокнинг бир соат давомида узлуксиз ишлаш эҳтимоллиги 0,75 га, иккинчи станокники эса 0,8 га тенг. Агар станоклар бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда ишласалар, бир соат давомида фақат битта станок тўхташи эҳтимоллиги қандай?

21.3. Асбоблар иккита заводда тайёрланади. Биринчи завод барча маҳсулотнинг $2/3$ қисмини тайёрлайди, уларнинг 5% и яроксиз, иккинчи завод $1/3$ қисмини тайёрлайди, уларнинг 7% и яроксиз. Ярокли деталь олингани эҳтимоллигини топинг.

21.4. Тангани 45 марта ташланганда «герб» 15 марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

21.5. Овчи паррандага карата, ўқ теккунча отади, лекин турттадан кўп бўлмаган ўқ узишга улгуради, холос. Агар битта ўқ узишда нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,7 га тенг бўлса, узилган ўқлар сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

22.1. Ўқувчининг биринчи имтиҳонни топшириши эҳтимоллиги 0,9 га, иккинчисини топшириш эҳтимоллиги 0,8 га, учинчисини топшириш эҳтимоллиги 0,7 га тенг. Ўқувчининг: 1) барча имтиҳонларни; 2) акалли битта имтиҳонни топшириш эҳтимоллиги қандай?

22.2. Автобусда 5 йўловчи бор. Қолган 5 та бекатнинг ҳар бирида биттадан йўловчи тушиб қолиши эҳтимоллигини топинг.

22.3. Асбоб икки хил тарз (режим)да ишлайди. Иш жараёнининг 80% ида одатдаги (нормал) иш тарзи кузатилади, 20% ида одатдан ташқари (нормал бўлмаган) иш тарзи кузатилади. Одатдаги тарзда асбобнинг ишдан чиқиш эҳтимоллиги 0,2 га, одатдан ташқари тарзда ишдан чиқиш эҳтимоллиги эса 0,7 га тенг. Асбобнинг ишдан чиқиши эҳтимоллигини топинг.

22.4. Қайси бирининг эҳтимоллиги каттароқ: тангани тўрт марта ташлаганда «герб»нинг 2 марта тушишинингми ёки 8 марта ташланганда «герб»нинг 4 марта тушишинингми?

22.5. Қиз ва ўғил болаларнинг туғилиш эҳтимолликлари тенг деб фараз қилинади. Тўрт болали оиладаги ўғил болалар сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг тақсимот қаторини тузинг. $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

23.1. 3 та станок ишламоқда. Бу станокларнинг бир соат давомида соzлашни талаб қилмаслик эҳтимолликлари мос равишда 0,95; 0,8; 0,8 га тенг. Бир соат ичида ҳеч бўлмаганда битта станокнинг соzлашни талаб этмаслик эҳтимоллигини топинг.

23.2. Уч ўртоқнинг иккитаси учрашувга келди. Агар уларнинг учрашувга келиш эҳтимолликлари мос равишда 0,1; 0,3; 0,5 га тенг бўлса, учрашувга биринчи ва учинчи ўртоқнинг келиши эҳтимоллигини топинг.

23.3. Уч хил идишлар бўлиб, 1-хилда 3 идиш, унинг ҳар бири

ичида 5 та ок ва 3 та кора шар бор. 2- хилда 3 идиш, уларнинг ҳар бири ичида 6 та ок ва 2 та кора шар бор. 3- хилда 4 идиш, уларнинг ҳар бири ичида 7 та ок ва 9 та кора шар бор. Таваккалига танланган идишдан таваккалига шар олинади. Бу шарнинг кора бўлиши эҳтимоллиги қандай?

23.4. Янги тугилган 200 чакалокнинг камида 90 таси ўғил болалар бўлиши эҳтимоллиги қандай?

23.5. Учта мерган битта нишонга карата ўқ узишади. Нишонга текказиш эҳтимоллиги биринчи мерган учун 0,8 га, иккинчиси учун 0,6 га, учинчиси учун 0,5 га тенг. Нишонга теккан ўқлар сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

24.1. Автомат станок деталарни штамплайди. Бир соат ичида бирорта ҳам яроқли деталь ишлаб чиқармаслик эҳтимоллиги 0,9 га тенг. 3 соат ичида чиқарилган барча деталларнинг яроқли бўлиши эҳтимоллигини топинг.

24.2. Йиғув цехига 3 та цехдан деталлар келтирилди: биринчи цехдан 6 та; иккинчи цехдан 7 та, учинчи цехдан 8 та. Таваккалига бир пайтда олинган иккита деталнинг 1- цехдан ёки 2- цехдан бўлиши эҳтимоллиги қандай?

24.3. Иккита станокда деталлар тайёрланади, бунда биринчи станок иккинчисига нисбатан 3 марта кўп деталь тайёрлайди. Биринчи станокнинг яроқсиз деталлари 2,5%ни, иккинчисиники 1,5 %ни ташкил этади. Таваккалига олинган деталь яроқсиз бўлиб чиқди. Бу деталнинг иккинчи станокда тайёрланган бўлиши эҳтимоллигини топинг.

24.4. Янги тугилган 200 чакалокнинг 100 таси ўғил болалар бўлиши эҳтимоллиги қандай?

24.5. Тўпдан узилган битта ўқ билан нишонни мўлжалга олиш эҳтимоллиги 0,4 га тенг. Учта ўқ узилганда нишонга теккизишлар сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

25.1. Таваккалига олинган телефон номери 6 та рақамдан тузилган. Барча рақамларнинг турлича бўлиши эҳтимоллиги қандай?

25.2. Қутида 9 та 40 ваттли, 11 та 60 ваттли электр лампочкалар аралаштириб қўйилган. Таваккалига олинган 2 та лампочканинг бир хил қувватли бўлиши эҳтимоллиги қандай?

25.3. Йиғув цехига 1- цехдан 600 та, 2- цехдан 500 та, 3- цехдан 900 та деталь келиб тушади. 1- цехнинг яроқсиз деталлари 5 %ни, 2- цехники 8 %ни, 3- цехники 3 %ни ташкил этади. Таваккалига олинган деталнинг яроқсиз бўлиши эҳтимоллигини топинг.

25.4. Агар $p(A)=0,25$ бўлса, A ҳодиса 6 та синовда 3 марта рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

25.5. Ичида 5 та ок ва 7 та кора шар бўлган идишдан 4 та шар олинади. Олинган ок шарлар сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

26.1. Қутида 5 та ок, 10 та қизил ва 6 та кора шар бор.

Таваккалига 2 та шар олинади. Олинган шарларнинг бири ок, иккинчиси кора бўлиши эҳтимоллиги қандай?

26.2. Мерган нишонга қарата 4 марта ўқ узади. Ҳар қайси ўқ узишда нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,7 га тенг. Унинг ҳеч бўлмаганда бир марта нишонга текказиш эҳтимоллиги қандай?

26.3. Қуйидаги ҳодисаларни қарайлик: эртага яхши об-ҳаво, коникарли об-ҳаво, ёмон об-ҳаво бўлади. Уларнинг эҳтимолликлари мос ҳолда 0,3; 0,4; 0,3 га тенг. Яхши об-ҳавода 0,9 эҳтимоллик билан, коникарли об-ҳавода 0,7 эҳтимоллик билан, ёмон об-ҳавода 0,2 эҳтимоллик билан сайрга чикилади. Эртага сайрга чиқиш эҳтимоллигини топинг.

26.4. Ўйин соккаси 960 марта ташланганда 3 га каррали соннинг 600 марта чиқиши эҳтимоллигини топинг.

26.5. Иккита танга уч мартадан ташланади. Гербли томон тушишлар сонидан иборат бўлган X тасодифий микдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

27.1. Олтита бир хил карточкага 2, 4, 7, 8, 12, 14 сонлари ёзилган. Иккита карточка олинади. Ҳосил қилинган қаср қисқарадиган бўлиши эҳтимоллиги қандай?

27.2. «л» та конверт ва уларга мос «л» хат бор. Хатлар конвертларга таваккалига солинади. Ҳеч бўлмаганда битта хатнинг тегишли конвертга тушмаслик эҳтимоллигини топинг.

27.3. Гуруҳда 3 аълочи, 4 «тўртчи», 6 «уччи» ва 1 «иккичи» бор. Билетда ҳаммаси бўлиб 20 савол бор. Аълочи барча 20 та саволга жавоб бера олади, «тўртчи» 16 та саволга, «уччи» 10 та саволга, «иккичи» 5 та саволга жавоб бера олади. Таваккалига чакирилган талаба 3 та саволга жавоб берди. Бу талабанинг «иккичи» экани эҳтимоллигини топинг.

27.4. Битта ўқ узишда нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,8 га тенг. 100 та ўқ узганда 75 марта нишонга тегиш эҳтимоллигини топинг.

27.5. Агар битта ўқ узишда нишонга тегиш эҳтимоллиги $\frac{3}{4}$ га тенг бўлса, 3 та ўқ узишда нишонга тегишлар сонидан иборат бўлган X тасодифий микдорнинг тақсимот қонунини ва $F(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

28.1. Мерган унга қараб ҳаракат қилаётган нишонга қарата ўқ узади. Биринчи ўқ узишда нишонга тегиш эҳтимоллиги 0,4 га тенг ва у ҳар бир кейинги ўқ узишда 0,1 га ортади. 3 та ўқ узишда икки марта нишонга текказиш эҳтимоллиги қандай?

28.2. Турли бир хонали сонлар билан номерланган 9 та жетоннинг 3 таси олинади. Уларни кетма-кет қўйганда ёзилган номерларнинг ўсиб бориш тартибида жойлашиши эҳтимоллигини топинг.

28.3. Гуруҳда 2 «аълочи», 5 «тўртчи», 18 «коникарли» ўқийдиган ва 2 та «иккичи» талаба ўқийди. Бир талаба чакирилади. Агар «аълочи» фақат 5 баҳо, «тўртчи» бирдай эҳтимоллик билан 4 ёки 5 баҳо, коникарли ўқийдиган талаба эса бирдай эҳтимоллик билан 4, 3, 2 баҳо олиши маълум бўлса, чакирилган талаба 5 ёки 4 баҳо олиши эҳтимоллигини топинг.

28.4. $p(A) = 0,7$ бўлсин. A ходисанинг 2100 синовда 1000 марта рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

28.5. Идишда 4 та оқ ва 6 та қора шар бор. Ундан қора шар чиқмагунча бирин-кетин шарлар олинади (қайтариб солинмасдан). Бунда чиққан оқ шарлар сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни ва $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$ ларни топинг.

29.1. Бир хил карточкаларга 1 дан 25 гача бўлган натурал сонлар ёзилган. Таваккалига икки марта биттадан (қайтариб солмай) карточка олинади. Ҳар иккала карточкада туб сонлар ёзилган бўлиши эҳтимоллиги қандай?

29.2. 4 талаба бир хил лаборатория ишини ҳисоблайди. Уларнинг ҳатога йўл қўйиш эҳтимолликлари мос ҳолда 0,2; 0,3; 0,1; 0,4 га тенг. Ақалли битта талабанинг ҳатога йўл қўйиши эҳтимоллигини топинг.

29.3. 9 та қутига 10 тадан шар шундай солинганики, иккитасида 5 тадан оқ шар, учтасида 4 тадан оқ шар, тўрттасида 3 тадан оқ шар бор. Таваккалига олинган шар оқ бўлиб чиқди. Бу шар 3 та оқ шар жойлаштирилган идишдан эканлиги эҳтимоллигини топинг.

29.4. Ўйин соққасини 1000 марта ташлаганда тоқ очколар 700 марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

29.5. Ўйин соққаси 4 марта ташланади. Соққани 4 марта ташланганда 6 очконинг тушиш сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни ва $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$ ларни топинг.

30.1. Тўла домино тошларидан (28 та) таваккалига биттаси олинади. Ундаги очколар йиғиндиси 10 дан кичик, 3 дан катта бўлиши эҳтимоллиги қандай?

30.2. Идишда 10 та оқ, 15 та қора ва 20 та қизил шар бор. Қетма-кет 3 та шар (қайтариб солинмай) олинади. Шарларнинг оқ, қизил, оқ қетма-кетликда чиқиши эҳтимоллигини топинг.

30.3. Асбобларнинг 30 %ини юқори малакали, 70% ини ўртача малакали мутахассис йиғди. Юқори малакали мутахассис йиғган асбобнинг ишончлиги 0,9 га, ўртача мутахассисники эса 0,8 га тенг. Олинган асбоб ишончли бўлиб чиқди. Унинг юқори малакали мутахассис тайёрлагани эҳтимоллигини топинг.

30.4. Агар $p(A) = 0,8$ бўлса, A ходисанинг 100 та синовда 80 марта рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

30.5. Ичида 4 та оқ ва 6 та қора шар бўлган идишдан 5 та шар олинади. Чиққан оқ шарлар сонидан иборат бўлган X тасодифий миқдорнинг тақсимот қонуни ва $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $F(x)$ ларни топинг.

**7- §. Боғлиқмас тасодифий
микдорлар йиғиндисининг таксимоти.**

Тасодифий аргумент функцияси

14.7.1. Агар X тасодифий микдорнинг ҳар бир мумкин бўлган қийматига Y тасодифий микдорнинг битта мумкин бўлган қиймати мос келса, у ҳолда Y ни тасодифий аргумент X нинг функцияси дейилади ва $Y = \varphi(X)$ кўринишда ёзилади.

1. X — дискрет тасодифий микдор, x_k — унинг мумкин бўлган қийматлари бўлсин, у ҳолда:

а) агар $Y = \varphi(X)$ — монотон функция бўлса, у ҳолда Y тасодифий микдорнинг мумкин бўлган қийматлари $y_k = \varphi(x_k)$ тенгликдан топилиб, X ва Y ларнинг мос қийматлари эҳтимолликлари тенг бўлади, яъни

$$P(Y = y_k) = P(X = x_k).$$

б) агар $Y = \varphi(X)$ — монотон бўлмаган функция бўлса, X нинг турли қийматларига Y нинг бир хил қийматлари мос келиши мумкин. Бу ҳолда Y нинг мумкин бўлган қийматлари эҳтимолликларини топиш учун X нинг Y бир хил қийматлар қабул қиладиган мумкин бўлган қийматлари эҳтимолликларини қўшиш керак.

2. X — узлуксиз тасодифий микдор бўлиб, зичлик функцияси $f(x)$ бўлсин, у ҳолда:

а) агар $y = \varphi(x)$ — монотон, дифференциалланувчи функция бўлиб, тесқари функцияси $x = \psi(y)$ бўлса, Y тасодифий микдорнинг $g(y)$ зичлик функцияси қуйидаги тенгликдан топилади:

$$g(y) = f[\psi(y)] \cdot |\psi'(y)|.$$

б) агар $y = \varphi(x)$ — тасодифий микдор X нинг мумкин бўлган қийматлари оралиғида монотон бўлмаган функция бўлса, у ҳолда бу ораликни $\varphi(x)$ функция монотон бўладиган ораликларга бўлиш ва ҳар бир монотонлик оралиги учун зичлик функциясини топиш, сўнгра $g(y)$ ни йиғинди шаклида тасвирлаш керак, яъни

$$g(y) = \sum g_k(y).$$

14.7.2. Агар X ва Y тасодифий микдорларнинг мумкин бўлган ҳар бир жуфтига Z тасодифий микдорнинг мумкин бўлган битта қиймати мос келса, Z микдор иккита X ва Y тасодифий аргументларнинг функцияси дейилади ва бу қуйидагича ёзилади:

$$Z = \varphi(X, Y).$$

1. X ва Y — дискрет тасодифий микдорлар боғлиқмас бўлсин.

$Z = X + Y$ функциянинг таксимотини топиш учун Z нинг мумкин бўлган барча қийматларини топиш керак, бунинг учун X нинг ҳар бир мумкин бўлган қийматини Y нинг барча мумкин бўлган қийматларига қўшиб чиқиш кифоя. Z нинг топилган мумкин бўлган қийматлари эҳтимолликлари X ва Y нинг қўшилаётган қийматлари эҳтимолларининг қўпайтмасига тенг бўлади.

2. X ва Y — узлуксиз боғлиқмас тасодифий микдорлар бўлсин ва ҳеч бўлмаганда улардан бирининг зичлик функцияси $(-\infty, +\infty)$ ораликда битта формула билан берилган бўлсин. У ҳолда $Z = X + Y$ йиғиндининг зичлик функцияси қуйидаги формула орқали топилади:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(z-x) dx$$

ёки

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y) \cdot f_2(y) dy,$$

бу ерда $f_1(x)$ ва $f_2(y)$ — X ва Y нинг зичлик функциялари.

Изоҳ. Агар аргументларнинг мумкин бўлган қийматлари манфий бўлмаса, юқоридаги формулалар қуйидагича ёзилади:

$$g(z) = \int_0^z f_1(x) f_2(z-x) dx$$

ёки

$$g(z) = \int_0^z f_1(z-y) \cdot f_2(y) dy.$$

1-мисол. X дискрет тасодифий микдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

X	3	6	10
P	0,2	0,1	0,7

а) $Y = 2X + 1$ тасодифий микдорнинг тақсимот қонунини топинг;

б) тақсимот функцияси $G(y)$ ни топинг.

Ечиш. а) $Y = 2X + 1$ тасодифий микдорнинг мумкин бўлган қийматларини топамиз:

$$y_1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7, y_2 = 2 \cdot 6 + 1 = 13, y_3 = 2 \cdot 10 + 1 = 21.$$

$Y = \varphi(x) = 2x + 1$ функция монотон ўсувчи, шунинг учун x нинг турли мумкин бўлган қийматларига Y нинг турли қийматлари мос келади. Y нинг мумкин бўлган қийматлари эҳтимолликларини топамиз:

$$\begin{aligned} P(Y=7) &= P(X=3) = 0,2 \\ P(Y=13) &= P(X=6) = 0,1, \\ P(Y=21) &= P(X=10) = 0,7. \end{aligned}$$

Y нинг тақсимот қонунини ёзамиз:

Y	7	13	21
P	0,2	0,1	0,7

б) тақсимот функцияси $G(y)$ ни топамиз.

$$G(7) = P(Y < 7) = 0,$$

$$G(13) = P(Y < 13) = P(Y = 7) = 0,2,$$

$$G(21) = P(Y < 21) = P(Y = 7) + P(Y = 13) = 0,2 + 0,1 = 0,3,$$

$$y > 21, \quad G(y) = P(Y \leq 21) = P(Y = 7) + P(Y = 13) + P(Y = 21) = 0,2 + 0,1 + 0,7 = 1.$$

Шундай қилиб,

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{агар } y \leq 7, \\ 0,2, & \text{агар } 7 < y \leq 13, \\ 0,3, & \text{агар } 13 < y \leq 21, \\ 1, & \text{агар } y > 21. \end{cases}$$

2-мисол. X тасодифий микдор қуйидаги тақсимот қонунига эга:

X	0	1	2	3
P	0,1	0,3	0,4	0,2

а) $Y = \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right) + 1$ тасодифий микдорнинг тақсимот қонунини топинг.

б) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$ ларни ҳисобланг.
Е ч и ш. Y нинг мумкин бўлган қийматларини топамиз:

$$y_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0\right) + 1 = 1, \quad y_2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 1\right) + 1 = 2,$$

$$y_3 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\right) + 1 = 1, \quad y_4 = \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 3\right) + 1 = 0.$$

Қўриниб турибдики, X нинг турли қийматларига Y нинг бир хил қийматлари мос келяпти.

0, 1, 2 — Y нинг мумкин бўлган қийматлари. Бу қийматларга мос эҳтимолликларни топамиз:

$$P(Y=0) = P(X=3) = 0,2,$$

$$P(Y=1) = P(X=0) + P(X=2) = 0,1 + 0,4 = 0,5,$$

$$P(Y=2) = P(X=1) = 0,3.$$

Y нинг изланаётган тақсимот қонуни қуйидаги қўринишда бўлади:

Y	0	1	2
P	0,2	0,5	0,3

$$6) M(X) = 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,2 = 1,7.$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 0 + 1 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,4 + 9 \cdot 0,2 - 1,7^2 = 0,81$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0,81} = 0,9,$$

$$M(Y) = 0 + 1 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,3 = 1,1,$$

$$D(Y) = 0 + 1^2 \cdot 0,5 + 2^2 \cdot 0,3 - 1,1^2 = 0,49,$$

$$\sigma(Y) = 0,7.$$

3- мисол. X тасодикий микдор $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ораликда текис таксимланган. $Y = \sin X$ тасодикий микдорнинг зичлик функцияси $g(y)$ ни топинг.

Ечиш. X тасодикий микдор $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ораликда текис таксимланган, шунинг учун X тасодикий микдорнинг дифференциал функцияси $f(x)$ (зичлик функцияси) бу ораликда куйидаги кўринишга эга бўлади:

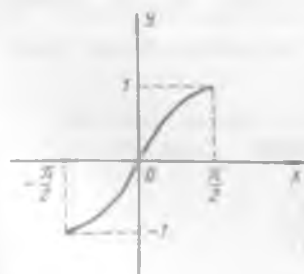
$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\pi},$$

бу ораликдан ташкарида эса $f(x) = 0$ бўлади. $Y = \sin X$ функция $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ораликда монотон, демак, тескари функцияга эга, яъни:

$$x = \psi(y) = \arcsin y.$$

$\psi(y)$ хосилани топамиз:

$$\psi'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad (74\text{- шакл}).$$



74- шакл

$g(y)$ зичлик функцияни $g(y) = [f(\psi(y)) \times X |\psi'(y)|]$ формула бўйича ҳисоблаймиз:

$$g(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \left| \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \right| = \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}}.$$

$y = \sin x$ ва $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ бўлгани учун: $-1 < y < 1$. Шундай қилиб $(-1, 1)$ ораликда:

$$g(y) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-y^2}}.$$

бу ораликдан ташкарида $g(y) = 0$.

4- мисол. X тасодикий микдорнинг интеграл функцияси (таксимот функцияси) $F(x)$ берилган. $Y = -\frac{2}{3}X + 2$ тасодикий микдорнинг таксимот функцияси $G(y)$ ни топинг.

Ечиш. Таксимот функциясининг таърифига кўра: $G(y) = P(Y < y)$. Бирок, $y = -\frac{2}{3}x + 2$ — камаювчи функция, шунинг учун $Y < y$ тенгсизлик $X > x$ тенгсизлик бажарилгандагина ўринли бўлади.

Демак,

$$G(y) = P(Y < y) = P(X > x)$$

$X < x$ ва $X > x$ карама-карши ҳодисалар, шунинг учун

$$P(X < x) + P(X > x) = 1 \text{ ва } P(X > x) = 1 - P(X < x) = 1 - F(x).$$

Шундай қилиб, $G(y) = 1 - F(x)$.

$y = -\frac{2}{3}x + 2$ тенгламадан x ни топамиз:

$$x = \frac{3}{2}(2 - y).$$

Узил-кесил қуйидагига эга бўламиз.

$$G(y) = 1 - F\left[\frac{3}{2}(2 - y)\right]$$

5- мисол. X тасодикий микдор $(0; \pi)$ ораликда $f(x) = \frac{1}{2} \sin x$ зичлик функция билан берилган; бу ораликдан ташқарида $f(x) = 0$. $Y = X^2$ нинг зичлик функцияси $g(y)$ ни ва $M(Y)$ математик кутилишни топинг.

Ечиш. $y = x^2 = \varphi(x)$ функция $(0, \pi)$ ораликда қатъий ўсувчи бўлгани учун:

$$g(y) = f[\varphi(y)] \cdot |\varphi'(y)|.$$

$\varphi(y) = \sqrt{y}$ $y = x^2$ функцияга тесқари функция,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad |\varphi'(y)| = \frac{1}{2\sqrt{y}},$$

$$g(y) = \frac{1}{2} \sin \sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{\sin \sqrt{y}}{4\sqrt{y}}.$$

$y = x^2$ ва $0 < x < \pi$ бўлгани учун $0 < y < \pi^2$, демак, Y нинг мумкин бўлган қийматлари $(0; \pi^2)$ ораликда жойлашган.

$$M(Y) = \int_0^{\pi^2} y \cdot g(y) dy = \frac{1}{4} \int_0^{\pi^2} y \cdot \frac{\sin \sqrt{y}}{\sqrt{y}} dy =$$

$$\left. \begin{array}{l} y = t^2 \\ dy = 2t dt \end{array} \right| \begin{array}{l} y=0, t=0 \\ y=\pi^2, t=\pi \end{array}$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} t^2 \cdot \frac{\sin t}{t} \cdot 2t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} t^2 \sin t dt = \frac{1}{2} (\pi^2 - 4).$$

6-мисол. X ва Y боғлиқмас дискрет тасодифий микдорлар ушбу таксимот конунлари орқали берилган:

X	1	3
P	0,3	0,7

Y	2	4
P	0,6	0,4

$Z = X + Y$ тасодифий микдорнинг таксимот конунини топинг.
Ечиш. Z нинг мумкин бўлган қийматларини топамиз:

$$z_1 = 1 + 2 = 3; z_2 = 1 + 4 = 5; z_3 = 3 + 2 = 5; z_4 = 3 + 4 = 7.$$

Бу мумкин бўлган қийматларнинг эҳтимолликларини топамиз.

X ва Y аргументлар боғлиқмас (эркли) бўлгани учун $X=1$ ва $Y=2$ ҳодисалар ҳам боғлиқмас. Шунинг учун $P(Z=3) = P(X=1) \cdot P(Y=2) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$. Худди шундай:

$$P(Z=5) = P(X=1) \cdot P(Y=4) = 0,3 \cdot 0,4 = 0,12,$$

$$P(Z=5) = P(X=3) \cdot P(Y=2) = 0,7 \cdot 0,6 = 0,42,$$

$$P(Z=7) = P(X=3) \cdot P(Y=4) = 0,7 \cdot 0,4 = 0,28.$$

$Z = z_2 = 5$ ва $Z = z_3 = 5$ биргаликда булмаган ҳодисалар, уларнинг эҳтимолликлари қўшилади, яъни

$$0,12 + 0,42 = 0,54.$$

Шундай қилиб, изланаётган таксимот конуни қуйидаги кўри-нишда бўлади:

Z	3	5	7
P	0,18	0,54	0,28

7-мисол. X ва Y боғлиқмас тасодифий микдорлар зичлик функциялари билан берилган:

$$f_1(x) = e^{-x} \quad (0 \leq x < \infty),$$

$$f_2(y) = \frac{1}{2} e^{-y/2} \quad (0 \leq y < \infty).$$

$Z = X + Y$ тасодикий микдорнинг зичлик функциясини топинг.
 Ечиш. Аргументларнинг мумкин бўлган қийматлари манфий эмас. Қуйидаги формуладан фойдаланамиз:

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_0^z f_1(x) \cdot f_2(z-x) dx = \\ &= \int_0^z e^{-x} \cdot \frac{1}{2} e^{-(z-x)/2} dx = \frac{1}{2} \int_0^z e^{-x} \cdot e^{-\frac{z-x}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^z e^{-x} \cdot e^{-\frac{z}{2} + \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}} \int_0^z e^{-\frac{x}{2}} dx = \\ &= -\frac{1}{2} e^{-\frac{z}{2}} \cdot 2 \int_0^z e^{-\frac{x}{2}} d\left(-\frac{x}{2}\right) = \\ &= -e^{z/2} \cdot e^{-x/2} \Big|_0^z = -e^{-z/2} (e^{-z/2} - 1) = e^{-z/2} (1 - e^{-z/2}). \end{aligned}$$

Демак, $(0; \infty)$ ораликда:

$$g(z) = e^{-z/2} [1 - e^{-z/2}].$$

бу ораликдан ташқарида: $g(z) = 0$.

7-дарсхона топшириғи

1. X тасодикий микдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Y тасодикий микдорнинг тақсимот қонунини топинг:

а) $Y = X^2 + 1$; б) $Y = 2^X$.

$M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$ ларни ҳисобланг.

Ж: $M(X) = 0,1$; $D(X) = 1,29$; $\sigma(X) \approx 1,136$.

а)

Y	1	2	5
P	0,3	0,5	0,2

б)

Y	0,25	0,5	1	2	4
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

а) $M(Y) = 2,3$; $D(Y) = 2,01$; $\sigma(Y) \approx 1,42$.

б) $M(Y) = 1,425$; $D(Y) \approx 1,13$; $\sigma(Y) \approx 1,06$.

2. X тасодифий микдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

X	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,5	0,2

$Y = |X|$ тасодифий микдорнинг тақсимот функцияси $G(y)$ ни топинг.

Ж:

$$G(y) = \begin{cases} 0, & \text{агар } y \leq 0, \\ 0,2, & \text{агар } 0 < y \leq 1, \\ 0,8, & \text{агар } 1 < y \leq 2, \\ 1, & \text{агар } y > 2. \end{cases}$$

3. X тасодифий микдор $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ ораликда текис тақсимланган. $Y = \cos X$ тасодифий микдорнинг зичлик функцияси $g(y)$ ни топинг.

Ж: $(0;1)$ ораликда: $g(y) = \frac{2}{\pi \sqrt{1-y^2}}$; бу ораликдан ташқарида $g(y) = 0$.

4. X тасодифий микдорнинг тақсимот функцияси $F(x)$ берилган. $Y = -5X + 1$ тасодифий микдорнинг тақсимот функцияси $G(y)$ ни топинг.

$$\text{Ж: } G(y) = 1 - F\left[\frac{1}{5}(1-y)\right].$$

5. X тасодифий микдор $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ораликда $f(x) = \cos x$, бу ораликдан ташқарида $f(x) = 0$ бўлган зичлик функцияси билан берилган. $Y = X^2$ функциянинг математик кутилишини топинг.

$$\text{Ж: } M(Y) = \frac{\pi^2 - 8}{4}.$$

6. X ва Y дискрет тасодифий микдорлар тақсимот қонунлари билан берилган:

X	10	12	16
P	0,4	0,1	0,5

Y	1	2
P	0,2	0,8

$Z = X + Y$ тасодифий микдорнинг тақсимот қонунини топинг.

Ж:

Z	11	12	13	14	17	18
P	0,08	0,32	0,02	0,08	0,10	0,40

7. X ва Y боғлиқмас тасодифий микдорлар ўзларининг зичлик функциялари билан берилган:

$$f_1(x) = \frac{1}{3}e^{-x/3} \quad (0 \leq x < \infty),$$

$$f_2(y) = \frac{1}{5}e^{-y/5} \quad (0 \leq y < \infty).$$

$Z = X + Y$ тасодифий микдорнинг зичлик функциясини топинг.

$$\text{Ж: } g(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-z/5} (1 - e^{-2z/5}), & \text{агар } z \geq 0, \\ 0, & \text{агар } z < 0. \end{cases}$$

8. X ва Y боғлиқмас тасодифий микдорларнинг ҳар бири $[0; 2\pi]$ кесмада текис тақсимланган. $Z = X + Y$ тасодифий микдорнинг тақсимот қонунини топинг.

$$\text{Ж: } g(z) = \begin{cases} 0, & \text{агар } z \leq 0, \\ 0,25z, & \text{агар } 0 < z < 2, \\ 1 - 0,25z, & \text{агар } 2 < z \leq 4, \\ 0, & \text{агар } z > 4. \end{cases}$$

7- мустақил иш

1. X тасодифий микдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

x	-2	-1	0	1	2
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

$Y = 2X - 1$ тасодифий микдорнинг тақсимот қонунини топинг.

Ж:

y	-5	-3	-1	1	3
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

2. X тасодифий микдор ушбу тақсимот қонуни билан берилган:

x	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
p	0,2	0,7	0,1

а) $Y = \sin X$ тасодифий микдорнинг тақсимот қонунини топинг.

б) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $M(Y)$, $D(Y)$, $\sigma(Y)$ ларни ҳисобланг.

$$\text{Ж: а) } \begin{array}{c|c|c} Y & \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ \hline P & 0,3 & 0,7 \end{array}$$

б) $M(X) \approx 1,49$; $D(X) \approx 0,92$; $\sigma(X) \approx 0,96$.
 $M(Y) = 0,895$; $D(Y) \approx 0,04$; $\sigma(Y) = 0,2$.

3. X тасодикий микдор ушбу таксимот конуни билан берилган:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} X & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline P & 0,1 & 0,2 & 0,5 & 0,2 \end{array}$$

$Y = X^2 - 1$ тасодикий микдорнинг таксимот функцияси $G(y)$ ни топинг.

$$\text{Ж: } G(y) = \begin{cases} 0, & \text{агар } y \leq -1, \\ 0,2, & \text{агар } -1 < y \leq 0, \\ 0,8, & \text{агар } 0 < y \leq 3, \\ 1 & \text{агар } y > 3. \end{cases}$$

4. X тасодикий микдорнинг зичлик функцияси берилган.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{агар } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, & \text{агар } x \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$Y = \lg X$ тасодикий микдорнинг зичлик функцияси $g(y)$ ни топинг.

$$\text{Ж: } g(y) = \frac{2}{\pi(1+y^2)}, -\infty < y < +\infty.$$

5. X тасодикий микдорнинг таксимот функцияси $F(x)$ берилган бўлса, а) $Y = 4X + 6$; б) $Y = aX + b$ тасодикий микдорларнинг таксимот функцияларини топинг.

$$\text{Ж: а) } G(y) = F\left[\frac{y-6}{4}\right];$$

$$\text{б) } G(y) = F\left[\frac{y-b}{a}\right], a > 0 \text{ да;}$$

$$G(y) = 1 - F\left[\frac{y-b}{a}\right], a < 0 \text{ да.}$$

6. X тасодикий микдор $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ораликда $f(x) = \cos x$, бу оралик-

дан ташкарида $f(x)=0$ бўлган зичлик функцияси билан берилган. $Y=X^2$ функциянинг дисперсиясини топинг. Ж: $20-2\pi^2$.

7. X ва Y дискрет тасодифий микдорлар ушбу таксимот конунари билан берилган:

X	4	10
P	0,7	0,3

Y	1	7
P	0,8	0,2

$Z=X+Y$ тасодифий микдорнинг таксимот конунини топинг.

Ж:

Z	5	11	17
P	0,56	0,38	0,06

8. X ва Y тасодифий микдорлар боғлиқмас ва ҳар бири $[0, 1]$ кесмада текис таксимланган. $Z=X+Y$ тасодифий микдорнинг зичлик функциясини топинг.

$$\text{Ж: } g(z) = \begin{cases} 0, & \text{агар } z < 0, \\ z, & \text{агар } 0 \leq z < 1, \\ 2-z, & \text{агар } 1 < z \leq 2, \\ 0, & \text{агар } z > 2. \end{cases}$$

8- §. Икки ўлчовли боғлиқ тасодифий микдорлар.

Корреляция моменти
ва корреляция коэффиценти

14.8.1. Мумкин бўлган кийматлари (x, y) сонлар жуфти билан аниқланувчи (X, Y) тасодифий микдорлар системаси *икки ўлчовли тасодифий микдор* дейилади.

Ташкил этувчилари X ва Y дискрет бўлган *икки ўлчовли тасодифий микдор дискрет* дейилади. Ташкил этувчилари X ва Y узлуксиз бўлган *икки ўлчовли тасодифий микдор узлуксиз* дейилади.

Икки ўлчовли тасодифий микдорнинг мумкин бўлган кийматлари ва уларнинг эҳтимолликлари орасидаги мослик *икки ўлчовли тасодифий микдорнинг тақсимот қонуни* дейилади.

Икки ўлчовли дискрет тасодифий микдорнинг таксимот қонуни қуйидаги усулларнинг бири орқали берилиши мумкин:

а) мумкин бўлган кийматлар ва уларнинг мос эҳтимолликлари ёзилган жадвал қурилишида

$Y \quad X$	x_1	x_2	...	x_n
y_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
y_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}
...	...	...	...	...
y_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}

$$p_{ij} > 0, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m} \text{ ва } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1.$$

б) аналитик усулда (интеграл функция кўринишида).

14.8.2. Икки ўлчовли тасодифий микдор таксимотининг *интеграл функцияси* деб

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

функцияга айтилади.

Интеграл функциянинг асосий хоссалари.

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$.

2. Интеграл функция ҳар қайси аргументи бўйича камай-майдиган функциядир:

агар $x_2 > x_1$ бўлса, $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$,

агар $y_2 > y_1$ бўлса, $F(x, y_2) \geq F(x, y_1)$.

3. $F(-\infty, y) = 0$, $F(-\infty, -\infty) = 0$,

$F(x, -\infty) = 0$, $F(+\infty, +\infty) = 1$.

4. $y = +\infty$ да $F(x, y)$ интеграл функция X ташкил этувчининг интеграл функциясига айланади:

$$F(x, +\infty) = F_1(x).$$

$x = +\infty$ да $F(x, y)$ интеграл функция Y ташкил этувчининг интеграл функциясига айланади:

$$F(+\infty, y) = F_2(y).$$

Куйидаги формула уринли

$$\begin{aligned} P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) = \\ = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)]. \end{aligned}$$

14.8.3. Икки ўлчовли узлуксиз тасодифий микдорнинг *зичлик функцияси* деб интеграл функциядан олинган иккинчи тартибли аралаш хусусий ҳосилага айтилади:

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Зичлик функцияни билган ҳолда ушбу формула буйича интеграл функцияни топиш мумкин:

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x,y) dx dy.$$

$f(x, y)$ зичлик функцияга эга тасодикий нукта (X, Y) нинг D соҳага тушиш эҳтимоллиги ушбу тенглик орқали аниқланади:

$$P[(X, Y) \in D] = \iint_D f(x,y) dx dy.$$

Зичлик функция куйидаги хоссаларга эга:

1. $f(x, y) \geq 0$.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$.

Агар (X, Y) нинг мумкин бўлган барча қийматлари чекли D соҳага тегишли бўлса, 2- хосса куйидаги қуринишга бўлади:

$$\iint_D f(x,y) dx dy = 1.$$

14.8.4. Икки улчовли дискрет тасодикий микдорнинг сонли характеристикалари: 1. Системани ташкил этувчи X ва Y дискрет тасодикий микдорларнинг математик кутилиши куйидаги формулалар буйича аниқланади:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x p_{ij}$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y p_{ij}$$

Агар X ва Y тасодикий микдорлар боғлиқмас бўлса, у ҳолда бу тасодикий микдорларнинг тақсимот қонунларидан $M(X)$ ва $M(Y)$ ни куйидаги формулалар орқали топиш мумкин:

$$M(X) = \sum_{k=1}^m x_k p_{k.}$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^n y_i p_{.i}$$

2. X ва Y тасодикий микдорларнинг дисперсиялари ушбу формулалардан топилади:

$$D(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} (x_i - M(X))^2,$$

$$D(Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P_{ij} (y_j - M(Y))^2.$$

Дисперсияларни ҳисоблашда куйидаги формулалардан ҳам фойдаланиш мумкин:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

$$D(Y) = M(Y^2) - [M(Y)]^2.$$

3. X , Y дискрет тасодикий микдорларнинг уртача квадратик четланиши

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$$

формулалар ёрдамида аникланади.

14.8.5. Икки ўлчовли узлуксиз тасодикий микдорнинг сонли характеристикалари: 1. Узлуксиз тасодикий микдорларнинг математик кутилиши ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, y) dx dy,$$

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy,$$

бу ерда $f(x, y)$ — зичлик функция.

2. Системага кирувчи X ва Y узлуксиз тасодикий микдорларнинг дисперсиялари куйидаги формулалар бўйича топилади:

$$\begin{aligned} D(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x, y) dx dy - [M(X)]^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [y - M(Y)]^2 f(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f(x, y) dx dy - [M(Y)]^2, \end{aligned}$$

бу ерда $f(x, y)$ — зичлик функция.

3. X ва Y тасодифий микдорларнинг уртача квадратик четланишлари куйидаги формулалардан аникланади:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}.$$

14.8.6. Тасодифий микдорлар системалари назариясида *корреляция моменти* (ковариация) K_{xy} муҳим роль уйнайди. Дискрет тасодифий микдорлар учун:

$$K_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - M(X)) (y_j - M(Y)) p_{ij}.$$

Узлуксиз тасодифий микдорлар учун:

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)][y - M(Y)] f(x, y) dx dy.$$

Корреляция моментини яна куйидагича ҳам топish мумкин:
 $K_{xy} = M(X \cdot Y) - M(X)M(Y)$, бу ерда

$$M(X \cdot Y) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij},$$

узлуксиз тасодифий микдорлар учун эса

$$M(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy f(x, y) dx dy.$$

Корреляция моментининг асосий хоссаси: агар X ва Y — боғлиқмас (эркли) бўлса, $K_{xy} = 0$.

14.8.7. X ва Y тасодифий микдорнинг *корреляция коэффиценти* деб

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

сонга айтилади.

Корреляция коэффицентининг хоссалари:

1. Агар X ва Y — боғлиқмас тасодифий микдорлар бўлса, у ҳолда $r_{xy} = 0$.

2. r_{xy} — улчамсиз катталиқ (микдор), шу билан бирга $|r_{xy}| \leq 1$.

3. Агар $Y = AX + B$, бу ерда A ва B — ўзгармас сонлар бўлса, $|r_{xy}| = 1$.

14.8.8. $f(x, y)$ зичлик функцияга эга бўлган (X, Y) система учун X ва Y боғлиқ бўлмаса

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

бўлади, бу ерда мос ҳолда $f_1(x)$ — X нинг, $f_2(y)$ — Y нинг зичлик функцияси.

14.8.9. Иккита боғлиқ X ва Y тасодифий микдорларнинг дисперсияси учун қуйидаги формула ўринли:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2K_{xy}.$$

Хусусий ҳолда, агар X ва Y тасодифий микдорлар боғлиқ бўлмаса, у ҳолда

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

1-мисол. Дискрет икки ўлчовли (X, Y) тасодифий микдорлар системасининг тақсимот қонуни берилган:

$Y \backslash X$	3	10	12
4	0,17	0,13	0,25
5	0,10	0,30	0,05

Ташкил этувчи X ва Y микдорларнинг тақсимот қонунларини топинг.

Ечиш. X нинг мумкин бўлган қийматлари эҳтимолликларини топамиз, бунинг учун эҳтимолликларни «устун бўйича» қушиб чиқамиз:

$$P(X=3) = 0,17 + 0,10 = 0,27,$$

$$P(X=10) = 0,13 + 0,30 = 0,43,$$

$$P(X=12) = 0,25 + 0,05 = 0,30.$$

Демак,

X	3	10	12
P	0,27	0,43	0,30

— ташкил этувчи X нинг тақсимот қонуни.

Текшириш. $0,27 + 0,43 + 0,30 = 1.$

Y нинг мумкин бўлган қийматлари эҳтимолликларини топамиз, бунинг учун эҳтимолликларни «сатр бўйича» қушиб чиқамиз:

$$P(Y=4) = 0,17 + 0,13 + 0,25 = 0,55,$$

$$P(Y=5) = 0,10 + 0,30 + 0,05 = 0,45$$

Ташкил этувчи Y нинг тақсимот қонуни қуйидагича бўлади:

Y	4	5
P	0,55	0,45

Текшириш:
 $0,55 + 0,45 = 1.$

2-мисол. Тасодифий микдорлар системаси (X, Y) нинг тақсимот қонуни берилган:

$X \backslash Y$	1	2	3
1	1/18	1/12	1/36
2	1/9	1/6	1/18
3	1/6	1/4	1/12

$M(X)$, $M(Y)$, $D(X)$, $D(Y)$, r_{xy} ларни топинг.

$$\begin{aligned} \text{Ечиш. } M(X) &= 1 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{12} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \\ &+ 3 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{1}{18} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(Y) &= 1 \cdot \frac{1}{18} + 2 \cdot \frac{1}{12} + 3 \cdot \frac{1}{36} + 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{18} + \\ &+ 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{12} = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

X ва Y тасодифий микдорларнинг дисперсиясини ҳисоблаш учун (X, Y) микдорлар системасидан $(\check{X}, \check{Y})$ микдорлар системасига ўтамыз, бу ерда

$$\check{X} = X - M(X), \quad \check{Y} = Y - M(Y),$$

$$\check{X} = X - \frac{7}{3}, \quad \check{Y} = Y - \frac{11}{6}.$$

Жадвал тузамиз:

$\check{X} \backslash \check{Y}$	$-5/6$	$1/6$	$7/6$
$-4/3$	$1/18$	$1/12$	$1/36$
$-1/3$	$1/9$	$1/6$	$1/18$
$2/3$	$1/6$	$1/4$	$1/12$

$$\begin{aligned} D(X) &= \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{9} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} + \\ &+ \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{36} + \\ &+ \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(Y) &= \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(-\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \\ &+ \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \\ &+ \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{36} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{18} + \left(\frac{7}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{17}{36}. \end{aligned}$$

$$\sigma(\check{X}) = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\sigma(\check{Y}) = \sqrt{\frac{17}{36}} = \frac{\sqrt{17}}{6}.$$

$(\check{X}, \check{Y})$ система таксимоти жадвалидан фойдаланиб, K_{xy} ни топамиз.

$$\begin{aligned}
 K_{xy} = & \left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{18} + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{12} + \\
 & \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{36} + \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{9} + \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \\
 & + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{18} + \frac{2}{3}\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} + \\
 & + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{1}{12} = -\frac{4}{3}\left(-\frac{5}{108} + \frac{1}{72} + \frac{7}{216}\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{5}{54} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{36} + \frac{7}{108}\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{5}{36} + \frac{1}{24} + \frac{7}{72}\right) = \frac{4}{3} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 0 = 0.
 \end{aligned}$$

$K_{xy}=0$ бўлгани учун корреляция коэффиценти ҳам нолга тенг бўлади: $r_{xy}=0$.

3- мисол. (X, Y) тасодифий микдорлар системаси қуйидаги зичлик функцияси билан берилган:

$$f(x, y) = \begin{cases} a \sin(x+y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \notin D. \end{cases}$$

$$D: \begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Қуйидагиларни топинг: а) a коэффиценти; б) $M(X)$, $M(Y)$ ни; в) $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$ ни; г) r_{xy} ни.

Ечиш. а) a коэффиценти

$$a \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) dy dx = 1$$

тенгламадан топамиз.

$$\begin{aligned}
 a \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) dy dx &= -a \int_0^{\pi/2} \cos(x+y) \Big|_0^{\pi/2} dx = \\
 &= a \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx = a(\sin x - \cos x) \Big|_0^{\pi/2} = 2a, a = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$D \text{ соҳада } f(x, y) = \frac{1}{2} \sin(x+y).$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } M(X) &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x \sin(x+y) dy dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x dx \int_0^{\pi/2} \sin(x+y) dy = \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos(x+y) \Big|_0^{\pi/2} x dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [\cos(x+\frac{\pi}{2}) - \cos x] x dx =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x(\sin x + \cos x) dx = \frac{1}{2} x(\sin x - \cos x) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Худди-шунга ўқшаш:

$$\begin{aligned} \text{в) } \sigma^2(X) &= M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} x^2 \sin(x+y) dy dx - \\ &- \frac{\pi^2}{16} = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \cos(x+y) \Big|_0^{\pi/2} dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x^2(\sin x + \cos x) dx - \\ &- \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2} x^2(\sin x - \cos x) \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x(\sin x - \cos x) dx - \frac{\pi^2}{16} = \\ &= \frac{\pi^2}{8} + x(\sin x + \cos x) \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx - \frac{\pi^2}{16} = \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} + (\sin x - \cos x) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{2} - 2. \end{aligned}$$

$$\sigma^2(Y) = \frac{\pi^3 + 8\pi - 32}{16}.$$

$$\begin{aligned} \text{г) } K_{xy} &= M(XY) - M(X)M(Y) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} xy \sin(x+y) dy dx - \\ &+ \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x dx \int_0^{\pi/2} y \sin(x+y) dy - \frac{\pi^2}{16} = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [y \cos(x+y)]_0^{\pi/2} - \\ &- \int_0^{\pi/2} \cos(x+y) dy] x dx - \frac{\pi^2}{16} = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \left[\frac{\pi}{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \right. \\ &+ \sin x \Big] dx - \frac{\pi^2}{16} = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \left(-\frac{\pi}{2} \sin x - \cos x + \sin x \right) dx - \frac{\pi^2}{16} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} x \left(\frac{\pi}{2} \sin x + \cos x - \sin x \right) dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{1}{2} x \left(\sin x - \frac{\pi}{2} \cos x + \right. \\ &+ \cos x \Big) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left(\sin x - \frac{\pi}{2} \cos x + \cos x \right) dx - \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi}{4} - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} \left(\sin x - \frac{\pi}{2} \sin x - \cos x \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{16} =$$

$$= \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{16}.$$

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{8\pi - 16 - \pi^2}{\pi^2 + 8\pi - 32} \approx -\frac{0.73688}{3.00232} \approx -0.2454.$$

8-дарсхона топириги

1. Дискрет икки ўлчовли (X, Y) тасодифий микдор таксимот конуни оркали берилган:

$Y \backslash X$	26	30	41	50
2,3	0,05	0,12	0,08	0,04
2,7	0,09	0,30	0,11	0,21

Ташкил этувчи X ва Y тасодифий микдорларнинг таксимот конунларини топинг.

Ж:

X	26	30	41	50
P	0,14	0,42	0,19	0,25

2. Иккита тасодифий микдорлар системаси (X, Y) нинг таксимот конуни берилган:

$Y \backslash X$	20	40	60
10	3λ	λ	0
20	2λ	4λ	2λ
30	λ	2λ	5λ

Куйидагиларни топинг:

а) λ коэффициентни; б) $M(X)$, $M(Y)$ ни; в) $D(X)$, $D(Y)$ ни; г) r_{xy} ни.

Ж: а) $\lambda = 1/20$; б) $M(X) = 22$; $M(Y) = 41$; в) $\sigma^2(X) = 56$;

$\sigma^2(Y) = 259$; г) $r_{xy} = 0,56$.

3. (X, Y) тасодифий микдорлар системаси куйидаги зичлик функция оркали берилган:

$$f(x, y) = \begin{cases} axy, & x \in D, \\ 0, & x \notin D. \end{cases}$$

D соҳа $x+y-1=0$, $x=0$, $y=0$ тўғри чизиклар билан чегараланган учбурчак.

Куйидагиларни топинг: а) a коэффициентни; б) $M(X)$, $M(Y)$; в) $D(X)$, $D(Y)$; г) r_{xy} .

Ж: а) $a=24$; б) $M(X)=M(Y)=\frac{2}{5}$; в) $D(X)=D(Y)=\frac{1}{25}$;

г) $r_{xy}=-\frac{2}{3}$.

4. Икки ўлчовли $(X; Y)$ тасодикий микдорнинг зичлик функцияси берилган:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Куйидагиларни топинг: а) $P(0 < X < 1, 0 < Y < 1)$ ни;

б) таксимот функцияси $F(x, y)$ ни;

в) ҳар бир X ва Y тасодикий микдорнинг зичлик функцияларини.

Ж: а) $P=\frac{1}{16}$; б) $F(x, y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\arctg x + \frac{\pi}{2}\right)\left(\arctg y + \frac{\pi}{2}\right)$;

в) $f_1(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$; $f_2(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)}$.

8- мустақил иш

1. Таксимот қонуни билан берилган икки ўлчовли тасодикий микдор ташкил этувчиларининг таксимот қонунларини топинг.

$Y \backslash X$	2	4	5
1	0,12	0,18	0,10
3	0,10	0,11	0,39

Ж:

X	2	4	5
P	0,22	0,29	0,49

Y	1	3
P	0,40	0,60

2. Таксимот функция

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{\pi} \arctg \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{\pi} \arctg \frac{y}{3} + \frac{1}{2}\right)$$

булган икки ўлчовли (X, Y) тасодикий микдорнинг X ва Y ташкил этувчилари снов натижасида $X < 2$, $Y < 3$ қийматларни қабул қилиши эҳтимоллигини топинг.

Ж: $P(x < 2, Y < 3) = \frac{9}{16}$.

3. Тасодифий микдорлар системасининг зичлик функцияси

$$f(x, y) = \begin{cases} a^2 - x^2 - y^2, & \text{агар } x^2 + y^2 \leq a^2 (a > 0), \\ 0, & \text{агар } x^2 + y^2 > a^2 \end{cases}$$

булган тахсимот конунига буйсунади.

Куйидагиларни топинг:

а) a коэффициентни;

б) $M(X)$, $M(Y)$;

в) $\sigma^2(X)$, $\sigma^2(Y)$;

г) r_{xy} .

Ж: а) $a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$; б) $M(X) = M(Y) = 0$;

в) $\sigma^2(X) = \sigma^2(Y) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}$; г) $r_{xy} = 0$.

9-§. Вариацион қатор учун полигон ва гистограмма. Танланманинг асосий сонли характеристикалари

14.9.1. Текширилаётган аломат бўйича урганиладиган барча объектлар тўплами *бош тўплам* дейилади. *Танланма тўплам* ёки *танлама* деб текшириш учун олинган объектлар тўпламига айтилади.

Тўплам (танланма ёки бош тўплам) *ҳажми* деб бу тўпламдаги объектлар сонига айтилади.

Бирор X белгини (дискрет ёки узлуксиз) микдор (сон) жиҳатидан урганиш учун бош тўпламдан n ҳажмли $X_1, X_2, \dots, X_n$ танланма ажратилган бўлсин.

X белгининг кузатиладиган $x_1, x_2, \dots, x_n$ кийматлари *варианталар* дейилади.

Варианталарнинг ўсиб бориш тартибида ёзилган кетма-кетлиги *вариацион қатор* дейилади.

Танланманинг *статистик тақсимооти* деб вариантлар ва уларга мос частоталар ёки нисбий частоталардан иборат жадвалга айтилади:

X_i	x_1	x_2	...	x_k	ёки	X_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k		ω_i	n_1/n	n_2/n	...	n_k/n

Барча частоталар йиғиндис *танланма ҳажмига* тенг, яъни $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$, бу ерда $n_1, n_2, \dots, n_k$ — частоталар.

Барча нисбий частоталар йиғиндис *бирга* тенг, яъни $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_k = 1$, бу ерда $\omega_1 = n_1/n$, $\omega_2 = n_2/n$, ..., $\omega_k = n_k/n$ — нисбий частоталар.

Белги узлуксиз бўлса, унинг барча кузатиладиган кийматлари жойлашган оралик h узунликдаги кисмий ораликларга бўлинади ва i -ораликка тушган частоталар йиғиндиси (ёки нисбий частоталар йиғиндиси) топилади.

14.9.2. Частоталар полигони деб кесмалари $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \dots, (x_k, p_k)$ нукталарни туташтирадиган синик чизикка айтилади, бу ерда x_i — танланма вариантлари, p_i — мос частоталар.

Нисбий частоталар полигони деб кесмалари $(x_1, w_1), (x_2, w_2), \dots, (x_k, w_k)$ нукталарни туташтирадиган синик чизикка айтилади, бу ерда x_i — танланма вариантлари; w_i — уларга мос нисбий частоталар.

Белгининг узлуксиз таксимланишини яққол кўрсатиш учун **гистограммалар** деб аталувчи диаграммалардан фойдаланилади.

Частоталар гистограммаси деб асослари h узунликдаги ораликлар, баландликлари эса p_i/h (частота зичлиги) нисбатларга тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонавий фигурага айтилади.

$$S_i = h \cdot \frac{p_i}{h} = p_i \text{ — кисмий } i\text{-тўғри тўртбурчакнинг юзи.}$$

$$S = \sum_{i=1}^k p_i = n \text{ — частоталар гистограммаси юзи.}$$

Нисбий частоталар гистограммаси деб асослари h узунликдаги ораликлар, баландликлари эса w_i/h (нисбий частота зичлиги) нисбатларга тенг бўлган тўғри тўртбурчаклардан иборат поғонавий фигурага айтилади.

$$S_i = h \cdot \frac{w_i}{h} = w_i \text{ — кисмий } i\text{-тўғри тўртбурчакнинг юзи.}$$

$$S = \sum_{i=1}^k w_i = 1 \text{ — нисбий частоталар гистограммасининг юзи.}$$

14.9.3. X белгили бош тўпламнинг таксимот функцияси $F(x, \theta)$ бўлиб, θ — номаълум параметр бўлсин. $X_1, \dots, X_n$ шу бош тўпламдан олинган танлама бўлсин. Танланманинг ихтиёрий функцияси $L(X_1, \dots, X_n)$ статистика дейилади.

Статистиканинг кузатилган киймати $L(x_1, \dots, x_n)$ ни θ параметрнинг тақрибий киймати сифатида олинади. Бу ҳолда $L = L(x_1, \dots, x_n)$ статистика θ параметрнинг баҳоси дейилади.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ — танламанинг ўрта киймати, } S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

танланманинг **дисперсияси** дейилади.

Агар $ML(X_1, \dots, X_n) = \theta$ шарт бажарилса, L баҳо θ параметр учун **силжимаган баҳо** дейилади.

Агар L баҳо ва ҳар қандай $\epsilon > 0$ учун

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|L - \theta| \leq \epsilon) = 1$$

ўринли бўлса, L баҳо θ параметр учун асосли баҳо дейилади.
Агар L баҳо учун

$$\lim_{L \rightarrow \theta} D(L) = 0$$

бўлса, L баҳо θ параметр учун асосли баҳо бўлади.
Агар L баҳо учун

$$\lim_{L \rightarrow \theta} M(L) = \theta$$

бўлса, L баҳо θ параметр учун асимптотик силжимаган баҳо дейилади.

Агар θ параметрнинг L_1 ва L_2 силжимаган баҳолари берилган бўлиб, $D(L_1) < D(L_2)$ бўлса, L_1 баҳо L_2 баҳога нисбатан самарали баҳо дейилади.

Берилган n ҳажмли танланмада энг кичик дисперсияли баҳо самарали баҳо дейилади.

$\bar{X}$ бош тўпلام ўрта қиймати учун силжимаган, асосли ва самарали баҳо бўлади.

S^2 бош тўпلام дисперсияси учун асимптотик силжимаган, асосли баҳо бўлади.

$\frac{n}{n-1} S^2$ бош тўпلام дисперсияси учун силжимаган, асосли баҳо бўлади. Танланманинг ўрта қиймати ва дисперсияларини ҳисоблашни соддалаштириш учун баъзан қуйидаги формулалардан фойдаланилади:

$$u_i = \frac{X_i - c}{h}, i = \overline{1, n},$$

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i, \bar{X} = \bar{u} \cdot h + c,$$

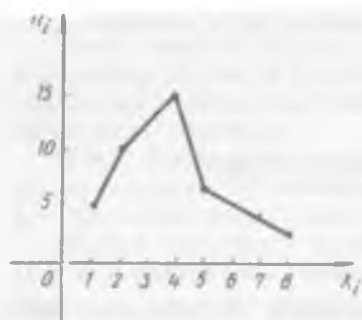
$$S_u^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2,$$

$$S_x^2 = h^2 \cdot S_u^2,$$

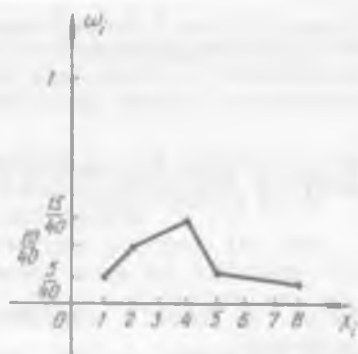
бу ерда c ва h сонлари ҳисоблашни енгиллаштирадиган қилиб танланади.

1-мисол. Берилган танланма тақсимоти бўйича частоталар ва нисбий частоталар полигонларини чизинг.

X_i	1	2	4	5	8
n_i	5	10	15	7	3



75- шакл



76- шакл

Е чи ш. $n = 5 + 10 + 15 + 7 + 3 = 40$ — танланма ҳажми. Нисбий частоталарни топамиз:

$$w_1 = \frac{n_1}{n}, w_1 = \frac{5}{40}, w_2 = \frac{10}{40}, w_3 = \frac{15}{40}, w_4 = \frac{7}{40},$$

$$w_5 = \frac{3}{40}.$$

x_i	1	2	4	5	8
w_i	5/40	10/40	15/40	7/40	3/40

75- шаклда частоталар полигони ва 76- шаклда нисбий частоталар полигони тасвирланган.

2- мис ол. Берилган танланма тақсимоти бўйича частоталар ва нисбий частоталар гистограммаларини чизинг.

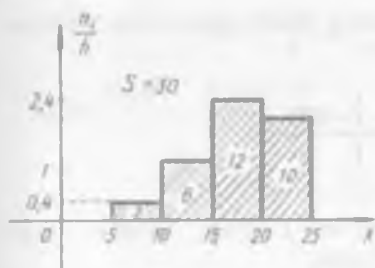
$x_i - x_{i+1}$	5—10	10—15	15—20	20—25
n_i	2	6	12	10
w_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$

Е чи ш. $n = 2 + 6 + 12 + 10 = 30$ — танланма ҳажми.

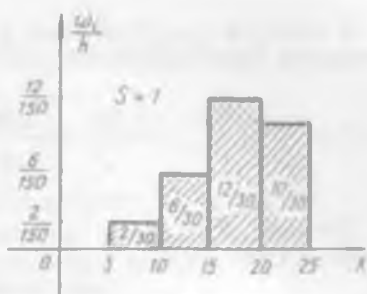
$$h = 5, \frac{n_1}{h} = \frac{2}{5} = 0,4; \frac{n_2}{h} = \frac{6}{5} = 1,2;$$

$$\frac{n_3}{h} = \frac{12}{5} = 2,4; \frac{n_4}{h} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\frac{w_1}{h} = \frac{2}{150}; \frac{w_2}{h} = \frac{6}{150}; \frac{w_3}{h} = \frac{12}{150}; \frac{w_4}{h} = \frac{10}{150}.$$



77-шакл



78-шакл

77-шаклда частоталар полигони ва 78-шаклда нисбий частоталар гистограммалари тасвирланган.

3-мисол. Бош тўпладан $n=50$ ҳажмдаги танланма ажратилган:

X_i	2	5	7	10
n_i	16	12	8	14

Бош тўплам ўрта қийматининг силжимаган баҳосини топинг.

Ечиш. Бош тўплам ўрта қийматининг силжимаган баҳоси — танланманинг ўрта қиймати. Шунинг учун

$$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{16 \cdot 2 + 12 \cdot 5 + 8 \cdot 7 + 14 \cdot 10}{50} = 5,76.$$

4-мисол. Бир асбоб ёрдамида стерженнинг узунлиги беш марта ўлчанганда (систематик хатоларсиз) қуйидаги натижалар олинган: 92, 94, 103, 105, 106.

а) стержен узунлигининг танланма ўрта қийматини топинг;

б) асбоб йўл қўйган хатоларнинг танланма дисперсиясини топинг.

Ечиш. а) Танлама ўрта қиймати $\bar{X}$ ни топиш учун шартли вариантлардан фойдаланамиз, чунки дастлабки вариантлар — катта сонлардир:

$$u_i = X_i - 92$$

$$\bar{X} = 92 + \frac{0 + 2 + 11 + 13 + 14}{5} = 92 + 8 = 100.$$

б) Танланма дисперсияни топамиз:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{(92 - 100)^2 + (94 - 100)^2 + (103 - 100)^2 + (105 - 100)^2 + (106 - 100)^2}{5} = 34.$$

5- мисол. $n=10$ хажмли танланманинг ушбу таксимоти бўйича танланма ўрта қийматини топинг:

X_i	1250	1270	1280
n_i	2	5	3

Ечиш. Дастлабки вариантлар катта сонлар, шунинг учун $u_i = x_i - 1270$ шартли вариантларга ўтамиз:

u_i	-20	0	10
n_i	2	5	3

$$\bar{X} = C + \bar{u} = 1270 + \frac{2 \cdot (-20) + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 10}{10} = 1270 - 1 = 1269$$

6- мисол. Ушбу $n=10$ хажмли танланма таксимоти бўйича танланма дисперсияни топинг.

X_i	186	192	194
n_i	2	5	3

Ечиш. $u_i = X_i - 191$ шартли вариантларга ўтамиз:

u_i	-5	1	3
n_i	2	5	3

$$S_x^2 = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i u_i}{n} \right]^2 = \frac{2 \cdot 5^2 + 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 3^2}{10} - \left[\frac{2 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 3}{10} \right]^2 = 8,2 - 0,16 = 8,04.$$

7- мисол. Ушбу $n=10$ хажмли танланма таксимоти бўйича танланма ўрта қийматини ва танланма дисперсияни топинг:

X_i	0,01	0,04	0,08
n_i	5	3	2

Ечиш. $u_i = 100X_i$ ($h=100$) шартли вариантларга ўтамиз, натижада қуйидаги таксимотни ҳосил қиламиз:

u_i	1	4	8
n_i	5	3	2

$$\bar{u} = \frac{\sum n_i u_i}{n} = \frac{1}{100} (1 \cdot 5 + 4 \cdot 3 + 8 \cdot 2) = 0,33.$$

$$S_u^2 = \frac{\sum n_i u_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i u_i}{n} \right]^2 = \frac{5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 4^2 + 2 \cdot 8^2}{10} - \left[\frac{5 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 8}{10} \right]^2 = 7,21.$$

$$S_x^2 = \frac{1}{h^2} \cdot S_u^2 = \frac{1}{100^2} \cdot 7,21 \approx 0,0007.$$

9- дарсхона топириғи

1. Бирор дискрет тасодифий миқдорни ўрганиш чоғида 40 та боғлиқмас синовлар натижасида куйидаги танланма ҳосил қилинган:

10,13,10,9,9,12,12,6,7,9,
8,9,11,9,14,13,9,8,8,7,
10,10,11,11,11,12,8,7,9,10,
13,3,8,8,9,10,11,11,12,12.

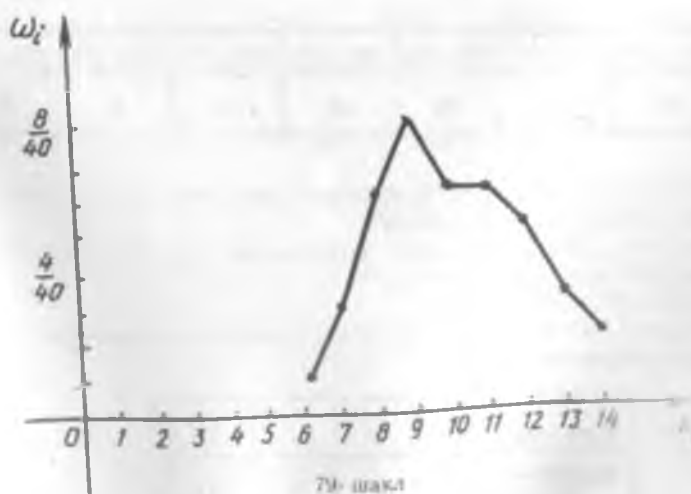
- а) вариацион каторни тузинг;
б) нисбий частоталар жадвалини тузинг;
в) нисбий частоталар полигонини чизинг.

Ж: а) 6,7,8,9,10,11,12,13,14;

б)

x_i	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ω_i	1/40	3/40	6/40	8/40	6/40	6/40	5/40	3/40	1/40

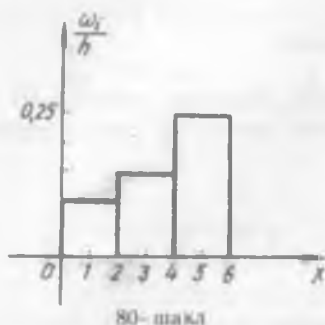
в) 79- шакл.



2. Берилган танланма тақсимо­ти бўйича нисбий частоталар гистограммасини чизинг.

$X_i - X_{i+1}$	0—2	2—4	4—6
n_i	20	30	50

Ж: 80- шакл.



3. Бош тўпламдан $n=60$ ҳажмли танланма ажратилган:

X_i	1	3	6	26
n_i	8	40	10	2

Бош тўплам ўрта қийматининг силжимаган баҳосини топинг.

Ж: $\bar{X}=4$.

4. Таваккалига танлаб олинган 100 талаба бўйини (см. ларда) ўлчаш натижалари берилган:

Бўйи	154—158	158—162	162—166	166—170	170—174	174—178	178—182
Талаба-лар сони	10	14	26	28	12	8	2

Текширилган талабалар бўйларининг танланма ўрта қийматини ва танланма дисперсиясини топинг.

Кўрсатма: Ораликларнинг ўрталарини топинг ва уларни вариантлар деб қабул қилинг.

Ж: $\bar{X}=166$, $S^2=33,44$.

5. Гуруҳдаги 40 талабанинг ёзма ишлари баҳо­ларининг частота­лари жадвали берилган:

Баҳо — X_i	2	3	4	5
Частота — n_i	3	8	25	4

$\bar{X}$, S^2 , S ларни топинг.

Ж: $\bar{X}=3,75$; $S^2=0,5375$; $S=0,74$.

6. Ушбу $n=100$ хажмли танланма тақсимои бўйича танланма дисперсияни топинг:

X_i	2502	2804	2903	3028
n_i	8	30	60	2

Курсатма: $u_i = X_i - 2844$ шартли вариантларга ўтинг.

Ж: $S_x^2 = S_u^2 = 12603$.

9-мустақил иш

1. Кириш имтиҳонларида эллик абитуриент куйидаги балларни олди:

12, 14, 19, 15, 14, 18, 13, 16, 17, 12, 20, 17, 15, 13, 17, 16, 20, 14, 14, 13, 17, 16, 15, 19, 16, 15, 18, 17, 15, 14, 16, 15, 15, 18, 15, 15, 19, 14, 16, 18, 18, 15, 15, 17, 15, 16, 16, 14, 14, 17.

- вариацион каторни тузинг;
- нисбий частоталар жадвалини тузинг;
- нисбий частоталар полигонини чизинг.

Ж: а) 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20.

б)

X_i	12	13	14	15	16	17	18	19	20
w_i	0,04	0,06	0,16	0,24	0,16	0,14	0,10	0,06	0,04

2. Берилган танланма тақсимои бўйича нисбий частоталар гистограммасини чизинг.

$X - X_{i+1}$	10—15	15—20	20—25	25—30	30—35	$n=20$
n_i	2	4	8	4	2	

$$\text{Ж: } w_1 = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}; w_2 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}; w_3 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5};$$

$$w_4 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}; w_5 = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}; h = 5.$$

$$\frac{w_1}{h} = \frac{1}{50}; \frac{w_2}{h} = \frac{1}{25}; \frac{w_3}{h} = \frac{1}{25}; \frac{w_4}{h} = \frac{1}{25}; \frac{w_5}{h} = \frac{1}{50}.$$

3. Куйидаги танланма берилган:

2, 1, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 3, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 2, 2, 3, 3.

- вариацион каторни тузинг;
- частоталар жадвалини тузинг;
- нисбий частоталар полигонини чизинг;
- $\bar{X}$, S^2 , S ларни топинг.

Ж: а) 1, 2, 3, 4;

б)	X_i	1	2	3	4
	ω_i	0,15	0,25	0,50	0,10

г) $\bar{X}=2,55$; $S^2=0,7475$; $S=0,86$.

4. Ушбу $n=100$ хажмли танланма тақсимо­ти бўйича танланма дисперсияни топинг:

X_i	340	360	375	380
n_i	20	50	18	12

Кўрсатма: $u_i = X_i - 360$ шартли вариантларга ўтинг.

Ж: $S^2(X) = S^2(u) = 167,29$.

5. Ушбу $n=10$ хажмли танланма тақсимо­ти бўйича танланма дисперсияни топинг:

X_i	23,5	26,1	28,2	30,4
n_i	2	3	4	1

Кўрсатма: $u_i = 10x_i - 268$ шартли вариантларга ўтинг.

Ж: $S^2_X = \frac{S^2_u}{100} = 4,89$.

1- лаборатория машғулоту

Танланмаларнинг сонли характеристикаларини ҳисоблаш

Берилган танланма тақсимо­тининг танланма ўрта қийматини, танланма дисперсиясини $u_i = \frac{X_i - \bar{X}}{h}$ формула ёрдамида соддалаш­тириб ҳисобланг.

1.	X_i	10,3	10,5	10,7	10,9	11,1	11,3	11,5	11,7	11,9	12,1
	n_i	4	7	8	10	25	15	12	10	4	5
2.	X_i	83	85	87	89	91	93	95	97	99	101
	n_i	6	7	12	15	30	10	8	6	4	2
3.	X_i	10,6	10,8	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8			
	n_i	5	10	17	30	20	12	6			
4.	X_i	15	20	25	30	35	40	45	50	55	
	n_i	6	13	38	74	106	85	30	10	4	
5.	X_i	18,6	19,0	19,4	19,8	20,2	20,6				
	n_i	4	6	30	40	18	2				
6.	X_i	65	70	75	80	85	90				
	n_i	2	5	25	15	5	3				
7.	X_i	20,2	20,4	20,6	20,8	21,0					
	n_i	4	7	20	15	3					
8.	X_i	1,05	1,15	1,25	1,35	1,45					
	n_i	18	20	25	22	15					

9.	X_i	5	10	15	20	25	30		
	n_i	10	20	40	30	15	5		
10.	X_i	5,3	5,6	5,9	6,2	6,5	6,8		
	n_i	5	10	25	20	15	4		
11.	X_i	6,4	6,8	7,2	7,6	8,0	8,4	8,8	
	n_i	7	12	16	30	25	15	6	
12.	X_i	7,3	7,6	7,9	8,2	8,5	8,8	9,1	
	n_i	10	15	18	24	20	14	5	
13.	X_i	8,2	8,6	9,0	9,4	9,8	10,2		
	n_i	6	12	30	25	20	4		
14.	X_i	9,1	9,3	9,5	9,7	9,9	10,1	10,3	
	n_i	10	13	16	28	23	17	7	
15.	X_i	10,1	10,5	10,9	11,3	11,7	12,1	12,5	
	n_i	20	25	30	45	40	35	15	
16.	X_i	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
	n_i	15	18	23	25	35	32	22	13
17.	X_i	2,1	2,3	2,5	2,7	2,9	3,1	3,3	3,5
	n_i	19	25	28	30	40	35	24	15
18.	X_i	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8
	n_i	20	25	35	40	50	32	23	15
19.	X_i	3,2	3,5	3,8	4,1	4,4	4,7	5,0	5,3
	n_i	10	15	20	22	35	30	25	12
20.	X_i	3,6	4,0	4,4	4,8	5,2	5,6	6,0	6,4
	n_i	15	25	30	35	45	40	30	20
21.	X_i	4,3	4,6	4,9	5,2	5,5	5,8	6,1	6,4
	n_i	6	8	13	15	25	20	14	5
22.	X_i	4,5	5,0	5,5	6,0	6,5	7,0	7,5	8,0
	n_i	10	16	18	20	30	28	15	8
23.	X_i	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0	12,2	12,4	12,6
	n_i	5	8	12	15	25	22	13	7
24.	X_i	11,5	11,9	12,3	12,7	13,1	13,5	13,9	14,3
	n_i	10	14	18	20	26	21	13	8
25.	X_i	12,3	12,5	12,7	12,9	13,1	13,3	13,5	13,7
	n_i	2	5	8	12	20	15	7	3
26.	X_i	12,4	12,8	13,2	13,6	14,0	14,4	14,8	15,2
	n_i	3	10	15	25	40	30	20	5
27.	X_i	13,2	13,4	13,6	13,8	14,0	14,2	14,4	14,6
	n_i	10	15	18	20	30	25	16	12
28.	X_i	13,8	14,3	14,8	15,3	15,8	16,3	16,8	17,3
	n_i	4	7	9	11	15	10	6	5
29.	X_i	14	16	18	20	22	24	26	28
	n_i	15	17	20	22	25	23	16	13
30.	X_i	16,1	16,4	16,7	17,0	17,3	17,6		
	n_i	10	14	21	28	23	15		

10- §. Математик кутилиш ва дисперсия учун ишончли ориликлар

14.10.1. $X_1, X_2, \dots, X_n$ X — белгили бош тўпландан олинган танланма бўлиб, унинг тақсимот функцияси $F(x, 0)$ бўлсин. θ параметр учун $L(X_1, \dots, X_n)$ баҳо бўлсин.

Агар ихтиёрий $\alpha > 0$ сон учун шундай $\delta > 0$ сон топиш мумкин бўлсаки, унинг учун

$$P(|L - \theta| < \delta) = 1 - \alpha$$

бўлса, у ҳолда $(L - \delta; L + \delta)$ орилик θ параметрнинг $1 - \alpha$ ишончлилиқ даражали ишончли орилиги дейилади.

14.10.2. X белгиси нормал тақсимланган бош тўпламни қараймиз. Бу тақсимотнинг математик кутилиши a учун қуйидаги ишончли ориликдан фойдаланилади:

$$a) \bar{X} - t_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

бу ерда σ — ўрта квадратик четланиш, t_{α} — Лаплас функцияси $\Phi(t)$ нинг $\Phi(t_{\alpha}) = \alpha/2$ бўладиган қиймати.

б) σ — номаълум бўлиб, танланма ҳажми $n > 30$ бўлганда:

$$\bar{X} - t_{n-1, \alpha} \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_{n-1, \alpha} \frac{S}{\sqrt{n}}, \text{ бу ерда}$$

S^2 — танланма дисперсия, $t_{n-1, \alpha}$ — Стъудент тақсимоти жадвалидан берилган n ва α лар бўйича топилади.

14.10.3. X белгиси нормал тақсимланган тақсимот функциясининг дисперсияси σ^2 учун қуйидаги ишончли ориликлардан фойдаланилади:

$$S^2(1 - q)^2 < \sigma < S^2(1 + q)^2, \quad q < 1 \text{ бўлганда,}$$

$$0 < \sigma^2 < S^2(1 + q^2), \quad q > 1 \text{ бўлганда.}$$

1- мисол. Тасодифий микдор $\sigma = 2$ параметр билан нормал конун бўйича тақсимланган. $n = 25$ ҳажмли танланма олинган. Бу тақсимотнинг номаълум a параметри учун $\gamma = 0,95$ ишончлилиқ билан ишончли ориликни топинг.

Ечиш. $\Phi(t) = \frac{1}{2}\gamma = 0,475$ тенгликдан, $\Phi(t)$ функция жадвалидан $t = 1,96$ сонни топамиз. У ҳолда баҳо аниқлиги қуйидагича бўлади:

$$\delta = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t = \frac{2}{\sqrt{25}} \cdot 1,96 = 0,784,$$

ишончли орилик эса

$$\bar{X} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \text{ ёки } (\bar{X} - 0,784, \bar{X} + 0,784).$$

Масалан, агар олинган танланма учун $\bar{X}=2,3$ бўлса, у ҳолда (1,5; 3,1) оралиқ 95% ишончлилик билан номаълум параметр a ни қоплайди.

2- мисол. Бош тўпلامнинг нормал тақсимланган X белгисининг номаълум математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли оралиқни топинг. Бунда $\sigma=5$, танламанинг ўрта қиймати $\bar{X}=14$ ва танлама ҳажми $n=25$ берилган.

Ечиш. $\Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$ муносабатдан: $\Phi(t) = \frac{0,95}{2} = 0,475$. Жадвалдан

$t=1,96$ ни топамиз. Топилганларни $\bar{X} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ га қўямиз:

$$\left(14 - 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} ; 14 + 1,96 \cdot \frac{5}{\sqrt{25}} \right)$$

ёки

$$(12,04; 15,96)$$

ишончли оралиқни топамиз.

3- мисол. Бош тўпلامнинг X белгиси нормал тақсимланган. $n=16$ ҳажмли танланма бўйича танланма ўрта қиймат $\bar{X}=20,2$ ва танланма ўрта квадратик четланиш $S=0,8$ топилган. Номаълум математик кутилишни ишончли оралиқ ёрдамида $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳоланг.

Ечиш. $t_{n-1;\gamma}$ ни жадвалдан топамиз:

$$\gamma=0,95; n=16; t_{n-1;\gamma}=2,13.$$

Буларни

$$\bar{X} - t_{n-1;\gamma} \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_{n-1;\gamma} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

формулага қўйсак,

$$\left(20,2 - 2,13 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{16}} ; 20,2 + 2,13 \cdot \frac{0,8}{\sqrt{16}} \right)$$

ёки

$$(19,774; 20,626)$$

ҳосил бўлади. Шундай қилиб, номаълум a параметр 0,95 ишончлилик билан

$$19,774 < a < 20,626$$

ишончли оралиқда ётади.

4- мисол. Физик катталиқни тўққизта бир хил, боғлиқмас ўлчаш натижасида олинган натижаларнинг ўрта арифметиги $\bar{X}=42,319$ ва танланма ўрта квадратик четланиши $S=5,0$ топилган. Ўлчанаётган катталиқнинг ҳақиқий қийматини $\gamma=0,95$ ишончлилик билан аниқлаш талаб қилинади.

Ечиш. Ўлчанаётган катталикнинг ҳақиқий қиймати унинг математик кутилишига тенг. Шунинг учун масала σ номаълум бўлганда

$$\bar{X} - t_{n-1, \gamma} \frac{S}{\sqrt{n}} < a < \bar{X} + t_{n-1, \gamma} \frac{S}{\sqrt{n}}$$

ишончлилик оралиғи ёрдамида математик кутилишни баҳолашга келтирилади.

Жадвалдан $\gamma=0,95$ ва $n=9$ бўйича $t_{n-1, \gamma}=2,31$ ни топамиз. У ҳолда

$$42,319 - 2,31 \cdot \frac{5}{3} < a < 42,319 + 2,31 \cdot \frac{5}{3}$$

ёки

$$38,469 < a < 46,169.$$

Шундай қилиб, изланаётган катталикнинг ҳақиқий қиймати 0,95 ишончлилик билан $38,469 < a < 46,169$ ишончли ораликда ётади.

5- мисол. Бош тўпламнинг X белгиси нормал тақсимланган. $n=16$ ҳажмли танланма бўйича танланма ўрта квадратик четланиши $S=1$ топилган. Бош тўплам ўрта квадратик четланиш σ ни 0,95 ишончлилик билан қоплайдиган ишончли ораликни топинг.

Ечиш. Берилганлар $\gamma=0,95$ ва $n=16$ бўйича жадвалдан $q=0,44 < 1$ ни топамиз. Топилганларни $S(1-q) < \sigma < S(1+q)$ формулага қўямиз ва

$$1 \cdot (1 - 0,44) < \sigma < 1 \cdot (1 + 0,44)$$

ёки

$$0,56 < \sigma < 1,44$$

ни ҳосил қиламиз.

6- мисол. Бирор физик катталик битта асбоб ёрдамида 12 марта ўлчанган, бунда ўлчашлардаги тасодифий хатоликларнинг ўрта квадратик четланиши 0,6 га тенг бўлиб чиқди. Асбоб аниқлигини 0,99 ишончлилик билан топинг.

Ечиш. Асбобнинг аниқлиги ўлчашлардаги тасодифий хатоликларнинг ўрта квадратик четланиши билан тавсифланади. Шунинг учун масала ўрта квадратик четланиш σ ни берилган $\gamma=0,99$ ишончлилик билан қоплайдиган ишончли ораликни топишга келтирилади.

Жадвалдан $\gamma=0,99$ ва $n=12$ бўйича $q=0,9$ ни топамиз. $S=0,6$ ва $q=0,9$ ларни формулага қўйиб, изланаётган ораликни топамиз:

$$0,6 (1 - 0,9) < \sigma < 0,6 (1 + 0,9)$$

ёки

$$0,06 < \sigma < 1,14.$$

10- дарсхона топириги

1. Бош тўпلامнинг нормал тахсимланган X сон белгисининг номаълум математик кутилиши a ни 0,99 ишончилилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг, бунда ўрта квадратик четланиш $\sigma=4$, танламанинг ўрта қиймати $\bar{X}=10,2$ ва танлама ҳажми $n=16$.

Ж: $7,63 < a < 12,77$.

2. Бош тўпلامнинг нормал тахсимланган X белгисининг математик кутилишини танланма ўрта қиймат бўйича баҳосининг 0,925 ишончилилик билан аниқлиги 0,2 га тенг бўладиган танламанинг минимал ҳажмини топинг. Ўрта квадратик четланишни $\sigma=1,5$ га тенг деб олинг.

Ж: $n=179$.

3. Бош тўпладан $n=10$ ҳажмли танланма олинган:

x_i	-2	1	2	3	4	5
n_i	2	1	2	2	2	1

Бош тўпلامнинг нормал тахсимланган белгиси математик кутилишини танланма ўрта қиймати бўйича 0,95 ишончилилик билан ишончли оралик ёрдамида баҳоланг.

Ж: $0,3 < a < 3,7$.

4. Бирор физик катталикини боғлиқмас бир хил аниқликдаги 9 та ўлчаш маълумотлари бўйича ўлчашларнинг ўрта арифметик қиймати $\bar{X}=30,1$ ва ўрта квадратик четланиши $S=6$ топилган. Ўлчанаётган катталикининг ҳақиқий қийматини ишончли оралик ёрдамида $\gamma=0,99$ ишончилилик билан баҳоланг.

Ж: $23,38 < a < 36,82$.

5. Бош тўпلامнинг микдорий белгиси нормал тахсимланган. n ҳажмли танланма бўйича тузатилган ўрта квадратик четланиш S топилган.

а) ўртача квадратик четланиш σ ни;

б) дисперсияни 0,99 ишончилилик билан қоплайдиган ишончли ораликни топинг, бунда $n=10$; $S=5,1$.

Ж: а) $0 < \sigma < 14,28$; б) $0 < \sigma^2 < 203,92$.

6. Битта асбоб ёрдамида (систематик, хатоларсиз) бирор физик катталик 10 марта ўлчанган, бунда ўлчашлардаги тасодикий хатоларнинг ўрта квадратик четланиши 0,8 га тенг бўлган. Асбоб аниқлигини 0,95 ишончилилик билан аниқланг.

Ж: $0,28 < \sigma < 1,32$.

7. Нормал тахсимланган бош тўпладан $n=10$ ҳажмли танланма олинган ва ушбу частоталар жадвали тузилган:

x_i	-2	1	2	3	4	5
w_i	0,2	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1

Математик кутилиш учун $\gamma=0,95$ ишончлилик билан ишончли ориликни топинг.

8. 10 та боғлиқмас (эркли) ўлчашлар натижасида стержень узунлиги (мм) учун куйидаги маълумотлар олинган: 23,24,23,25,25, 26,26,25,24,25. Ўлчаш хатолиги нормал тахсимланган деб фараз килиб, стержень узунлигининг математик кутлиши учун $\gamma=95\%$ билан ишончли ориликни топинг.

Ж: $23,8 < a < 25,4$.

9. Агар 10 та боғлиқсиз ўлчашлар натижасида объектгача бўлган масофа (м) учун 25025, 24970, 24780, 25315, 24097, 24646, 24717, 25354, 24912, 25374 натижалар олинган бўлса, объектгача бўлган масофанинг математик кутилиши учун $\gamma=0,9$ ишончлилик билан ишончли ориликни топинг. Бунда ўлчаш хатолиги $\sigma=100$ ўрта квадратик четланиш билан нормал тахсимланган деб фараз килинади.

Ж: $24948 < a < 25052$.

10- мустақил иш

1. Бош тўпламнинг X белгиси нормал тахсимланган. Агар ўрта квадратик четланиш σ , танланма ўрта қиймати $\bar{X}$ ва танланма ҳажми n берилган бўлса ($\sigma=5$, $\bar{X}=16,8$; $n=25$), номаълум a математик кутилишни 0,99 ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли ориликни топинг.

Ж: $19,23 < a < 19,37$.

2. Ўлчашларнинг тасодифий хатоликлари ўрта квадратик четланиши $\sigma=40$ м бўлган биргина асбоб ёрдамида тўпдан нишонгача бўлган масофа 5 марта (бир хил шароитда) ўлчанган. Агар ўлчашларнинг ўрта арифметик қиймати $\bar{X}=2000$ м эканлиги маълум бўлса, нишонгача бўлган a хақиқий масофани 0,95 ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли ориликни топинг.

Ж: $1960,8 < a < 2039,2$.

3. Дисперсияси номаълум нормал тахсимланган бош тўплам математик кутилиши учун танланма ҳажми n бўйича γ ишончлилик билан ишончли орилигини топинг. Бунда $n=25$, $\bar{X}=2,4$; $S^2=4$; $\gamma=0,95$.

Ж: $1,5744 < a < 3,2256$.

4. Бош тўпламдан $n=12$ ҳажмли танланма олинган:

x_i	-0,5	-0,4	-0,2	0	0,2	0,6	0,8	1	1,2	1,5
n_i	1	2	1	1	1	1	1	1	2	1

Бош тўпламнинг нормал тахсимланган белгиси математик кутилиши a ни 0,95 ишончлилик билан ишончли орилик ёрдамида баҳоланг.

Ж: $-0,04 < a < 0,88$.

5. Бош тўпламнинг нормал тақсимланган миқдорий белгисидан олинган n хажмли танланма бўйича ўрта квадратик четланиш S топилган.

Агар $n=50$, $S=14$ бўлса, а) ўрта квадратик четланиш σ ни 0,994 ишончлилик билан қопловчи ишончли ораликни топинг;

б) худди шу маълумотлар бўйича юқоридаги талабни дисперсия учун бажаринг.

Ж: а) $7,98 < \sigma < 20,02$; б) $63,9 < \sigma^2 < 400,8$.

6. Бир хил аниқликдаги 15 та ўлчаш бўйича ўрта квадратик четланиш $S=0,12$ топилган. Ўлчаш аниқлигини 0,99 ишончлилик билан аниқланг.

Ж: $0,03 < \sigma < 0,21$.

7. Бирор физик катталиқ X ни бир-бирига боғлиқ бўлмаган 4 та ўлчаш натижасида 28,6; 28,3; 28,2, 28,4 қийматлар олинган. Ўлчаш хатолиги нормал тақсимотга эга деб фараз қилиб, нормал тақсимланган X тасодикий миқдорнинг a математик кутилиши учун 95 % ишончлилик билан ишончли оралик топинг.

Ж: $28,11 < a < 28,65$.

11-§. Гипотезаларни Пирсоннинг мувофиқлик критерийси бўйича текшириш

X белгилари бош тўпладан олинган $X_1, X_2, \dots, X_n$ танланма берилган бўлиб, унинг асосида бош тўпламнинг тақсимот функцияси ҳақидаги $H_0: F(x) = F_0(x)$ асосий гипотезани $H_1: F(x) \neq F_0(x)$ конкурент гипотеза бўлганда текшириш керак бўлсин. X белги қийматларини $(-\infty; a_1) = \Delta_1, \Delta_2 = [a_1; a_2), \dots, \Delta_{k-1} = [a_{k-2}; a_{k-1}), \Delta_k = [a_{k-1}; +\infty)$ ораликларга бўламиз, n_i танланма қийматларининг Δ_i — ораликларга тушган қийматларининг сони бўлсин ва

$\omega_i = \frac{n_i}{n}, p_i = P(X \in \Delta_i)$. У ҳолда

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1,$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n,$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_k = 1.$$

Қуйидаги статистикани аниқлаймиз:

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\omega_i - p_i)^2}{p_i} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

Агар H_0 гипотеза ўринли бўлиб, $np_i > 5$ бўлса, $\chi^2(k-1)$ — озодлик даражали χ^2 — квадрат тақсимот бўйича тақсимлангандир.

Агар $F_0(x)$ тақсимот функцияда l та номаълум параметрлар бўлиб, улар танланма бўйича баҳоланган бўлса, озодлик даражалари сони $(k-l-1)$ га тенг бўлади.

Энди Пирсоннинг мувофиклик критерийсини аниқлаймиз. Бунинг учун аввал α аниқлилик даражаси ва chi — квадрат таксимот учун жадвалдан $x_{k-1, \alpha}$ нинг $P(Y^2 > x_{k-1, \alpha}) = \alpha$ бўладиган критик киймати топилади.

Сўнгра танланма кийматига кўра Y^2 ҳисобланади, агар $Y^2 < x_{k-1, \alpha}$ бўлса, H_0 гипотеза қабул қилинади ва бош тўплам $F_0(x)$ таксимот функцияга эга деб ҳисобланади, агар $Y^2 > x_{k-1, \alpha}$ бўлса, H_0 гипотеза рад этилади.

Агар озодлик даража 30 дан катта бўлса, критик киймат нормал таксимотдан фойдаланиб топилади.

1- мисол. X белгилли бош тўпландан олинган танланманинг статистик таксимоти берилган:

Δi	[0;5]	[5;10]	[10;15]	[15;20]	[20;25]	[25;30]	[30;35]	[35;40]	[40;45]	[45;50]
n_i	2	12	8	4	14	6	10	2	1	11

X белгининг таксимот функцияси текис таксимотга мувофик ёки мувофик эмаслигини 0,05 аниқлик даражаси билан Пирсоннинг мувофиклик критерияси ёрдамида текширинг.

Е ч и ш.

$$n = \sum_{i=1}^k n_i = 70.$$

Қуйидаги жадвални тузамиз:

x	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5	32,5	37,5	42,5	47,5
w	0,029	0,171	0,114	0,057	0,2	0,086	0,143	0,029	0,014	0,157

$$w_1 = \frac{2}{70} = 0,029; w_2 = \frac{12}{70} = 0,171; w_3 = \frac{8}{70} = 0,114;$$

$$w_4 = \frac{4}{70} = 0,057; w_5 = \frac{14}{70} = 0,2; w_6 = \frac{6}{70} = 0,086;$$

$$w_7 = \frac{10}{70} = 0,143; w_8 = \frac{2}{70} = 0,029; w_9 = \frac{1}{70} = 0,014; w_{10} = \frac{11}{70} = 0,157.$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{10} w_i X_i = 2,5 \cdot 0,029 + 7,5 \cdot 0,171 + 12,5 \cdot 0,114 +$$

$$+ 17,5 \cdot 0,057 + 22,5 \cdot 0,2 + 27,5 \cdot 0,086 + 32,5 \cdot 0,143 +$$

$$+ 37,5 \cdot 0,029 + 42,5 \cdot 0,014 + 47,5 \cdot 0,157 =$$

$$= 2,5(0,029 + 3 \cdot 0,171 + 5 \cdot 0,114 + 7 \cdot 0,057 + 9 \cdot 0,2 +$$

$$+ 11 \cdot 0,086 + 13 \cdot 0,14 + 15 \cdot 0,029 + 17 \cdot 0,014 + 19 \cdot 0,157) =$$

$$= 24,4285;$$

$$\begin{aligned} X^2 &= 2,5^2(0,029 + 9 \cdot 0,171 + 25 \cdot 0,114 + 49 \cdot 0,057 + 81 \cdot 0,2 + \\ &\quad + 121 \cdot 0,086 + 169 \cdot 0,143 + 225 \cdot 0,029 + \\ &\quad + 289 \cdot 0,014 + 361 \cdot 0,157) = 782,67; \\ S^2 &= \overline{X^2} - \overline{X}^2 = 782,67 - (24,4285)^2 = 782,67 - 596,75 = 185,92; \\ S &= \sqrt{185,92} \approx 13,63. \end{aligned}$$

X белги учун

$$M(X) = \frac{a+b}{2}; \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{2}; \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

бўлганидан a ва b ни аниқлаш учун қуйидаги системани тузамиз:

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 24,43, \\ \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = 13,63 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 48,86, \\ b-a = 47,16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (b = 48,01; a = 0,85);$$

$$\frac{1}{b-a} = \frac{1}{47,16} = 0,0212.$$

Шундай қилиб,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x < 0,85, \\ 0,0212, & \text{агар } 0,85 \leq x \leq 48,01, \\ 0, & \text{агар } x > 48,01, \end{cases}$$

бу ерда $f(x)$ — X белгининг зичлик функцияси.

Энди текис таксимот бўйича X белгининг $[0; 5)$, $[5; 10)$, ..., $[45; 50)$ оралиқларга тушиш эҳтимолликларини топамиз.

Δi	$[-5;0)$	$[0;5)$	$[5;10)$	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$
P_i	0	0,088	0,106	0,106	0,106	0,106

Δi	$[25;30)$	$[30;35)$	$[35;40)$	$[40;45)$	$[45;50)$	$[50;55)$
P_i	0,106	0,106	0,106	0,106	0,064	0

$$\begin{aligned} p_1 &= P(0 < X < 5) = p(0,85 < X < 5) = \int_{0,85}^5 0,0212 dx = \\ &= 0,0212x \Big|_{0,85}^5 = 0,0212 \cdot 4,15 = 0,088. \end{aligned}$$

$$p_{10} = P(45 < X < 50) = P(45 < X < 48,01) = \int_{45}^{48,01} 0,0212 dx =$$

$$= 0,0221x \Big|_{45}^{48,01} = 0,0212 \cdot 3,01 = 0,064.$$

χ^2 ни ҳисоблаш учун қуйидаги жадвални тузамиз:

w_i	P_i	$w_i - P_i$	$(w_i - P_i)^2$	$\frac{(w_i - P_i)^2}{P_i}$
0,029	0,088	-0,059	0,003	0,034
0,171	0,106	0,065	0,004	0,038
0,114	0,106	0,008	0,006	0,057
0,057	0,106	-0,049	0,002	0,019
0,2	0,106	0,094	0,009	0,085
0,086	0,106	-0,020	0,000	0,000
0,143	0,106	0,037	0,001	0,009
0,029	0,106	-0,077	0,006	0,057
0,014	0,106	-0,092	0,008	0,075
0,157	0,064	0,093	0,009	0,141
				0,515

Шундай қилиб $\chi^2 = n \cdot \sum_{i=1}^k \frac{(w_i - P_i)^2}{P_i} = 70 \cdot 0,515 = 36,05$, яъни

$$\chi^2 = 36,05.$$

χ^2 — квадрат таксимот жадвалидан маълумки

$$\chi_{10-2-1; 0,05} = \chi_{7; 0,05} = 14,1.$$

$\chi^2 > 14,1$ бўлгани учун бош тўпلامнинг таксимот функцияси 0,05 аниқлик даража билан текис таксимотга мос келмайди деган хулосага эга бўламиз.

2-мисол. X белгили бош тўпладан олинган танланманинг статистик таксимои берилган:

Δi	[0;3)	[3;6)	[6;9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)	[18;21)	[21;24)	[24;27)	[27;30)
n_i	1	3	4	6	11	10	7	5	2	1

X белгининг таксимот функцияси нормал таксимотга мувофиқ ёки мувофиқ эмаслигини 0,05 аниқлик даражаси билан Пирсоннинг мувофиқлик критерийси ёрдамида аниқланг.

Ечиш. $n = \sum_{i=1}^{10} n_i = 50$, $w_i = \frac{n_i}{n}$, $i = \overline{1,10}$ деб олиб, қуйидаги жадвални тузамиз:

X_i	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5	25,5	28,5
w_i	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,20	0,14	0,10	0,04	0,02

$X = 3T - 1,5$ алмаштиришни бажарсак, T ва T^2 учун статистик таксимот куйидагича бўлади:

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02
T^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
w	0,02	0,06	0,08	0,12	0,22	0,2	0,14	0,1	0,04	0,02

$$\bar{T} = 0,2 + 0,12 + 0,24 + 0,48 + 1,1 + 1,2 + 0,98 + 0,8 + 0,36 + 0,2 = 5,5.$$

$$T^2 = 0,02 + 0,24 + 0,72 + 1,92 + 5,5 + 7,2 + 6,86 + 6,4 + 3,24 + 2 = 34,1.$$

$$\bar{X} = 3 \cdot \bar{T} - 1,5 = 3 \cdot 5,5 - 1,5 = 15.$$

$$S^2 = 9(\bar{T^2} - \bar{T}^2) = 34,65.$$

$$S = 5,9.$$

Демак,

$$f(x) = \frac{1}{5,9\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-15)^2}{2 \cdot 34,65}}.$$

$$\frac{x-15}{5,9} = u \text{ бўлсин, у ҳолда}$$

$$f(x) = \frac{1}{5,9\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \approx 0,17 \cdot \varphi(u),$$

$$\text{бу ерда } \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \text{ бўлади.}$$

Бу функциянинг кийматларидан фойдаланиб яна битта жадвал тузамиз ($h=3$):

X	u	$\varphi(u)$	$f(x)$	$h f(x)$	X	u	$\varphi(u)$	$f(x)$	$h f(x)$
1,5	-2,29	0,029	0,005	0,02	16,5	0,25	0,387	0,066	0,20
4,5	-1,78	0,082	0,014	0,04	19,5	0,76	0,299	0,051	0,15
7,5	-1,27	0,178	0,030	0,09	22,5	1,27	0,178	0,030	0,09
10,5	-0,76	0,299	0,051	0,15	25,5	1,78	0,082	0,014	0,04
13,5	-0,25	0,387	0,066	0,20	28,5	2,29	0,029	0,005	0,02

Энди куйидаги

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\gamma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \alpha}{\gamma}\right),$$

(бу ерда a — математик кутилиш ва

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

формула ёрдамида ораликларга тушиш эҳтимолликларини ҳисоб-
лаймиз:

$$P(0 < X < 3) = 0,0154 \approx 0,02,$$

$$P(3 < X < 6) = 0,0425 \approx 0,04,$$

$$P(6 < X < 9) = 0,0905 \approx 0,09,$$

$$P(9 < X < 12) = 0,151 \approx 0,15,$$

$$P(12 < X < 15) = 0,1946 \approx 0,19,$$

$$P(15 < X < 18) = 0,1946 \approx 0,19,$$

$$P(18 < X < 21) = 0,151 \approx 0,15,$$

$$P(21 < X < 24) = 0,0915 \approx 0,09,$$

$$P(24 < X < 27) = 0,0425 \approx 0,04,$$

$$P(27 < X < 30) = 0,0154 \approx 0,02,$$

Натижада қуйидаги жадвалга эга бўламиз:

Δt	[0;3)	[3;6)	[6;9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)	[18;21)	[21;24)	[24;27)	[27;30)
P_i	0,02	0,04	0,09	0,15	0,19	0,19	0,15	0,09	0,04	0,02

Юқоридагилардан фойдаланиб, χ^2 ни ҳисоблаш учун жадвал
тузамиз:

w_i	P_i	$w_i - P_i$	$(w_i - P_i)^2$	$\frac{(w_i - P_i)^2}{P_i}$
0,02	0,02	0	0,0000	0,00
0,06	0,04	0,02	0,0004	0,01
0,08	0,09	-0,01	0,0001	0,001
0,12	0,15	-0,03	0,0009	0,006
0,22	0,20	0,02	0,0004	0,006
0,2	0,20	0,00	0,0000	0,02
0,14	0,15	-0,01	0,0001	0,00
0,1	0,09	0,01	0,0001	0,0007
0,04	0,04	0	0,0000	0,00
0,02	0,02	0	0,0000	0,00
				0,0387

$$\chi^2 = n \sum \frac{(w_i - p_i)^2}{p_i} = 50 \cdot 0,0387 = 1,935;$$

$\chi_{10-2-1; 0,05} = 14,1$.

$\chi^2 < 14,1$ бўлгани учун бош тўпلامнинг таксимот функцияси 0,05 аниқлилик даража билан нормал таксимотга мос келади деган хулосага эга бўламиз.

11- дарсхона топшириғи

X белгили бош тўпلامдан олинган танланманинг статистик таксимоти берилган:

Δi	[4,1;4,2)	[4,2;4,3)	[4,3;4,4)	[4,4;4,5)	[4,5;4,6)	[4,6;4,7)	[4,7;4,8)	[4,8;4,9)	[4,9;5,0)
n_i	1	2	3	4	5	8	8	9	10

X белгининг таксимот функцияси нормал таксимотга мувофиқ ёки мувофиқ эмаслигини 0,05 аниқлик даража билан Пирсоннинг мувофиқлик критерийси ёрдамида аниқланг.

Ж: Нормал таксимотга мос келади.

11- мустақил иш

X белгили бош тўпلامдан олинган танламанинг статистик таксимоти берилган:

Δi	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)
n_i	11	14	15	10	14	16

X белгининг таксимот функцияси текис таксимотга мувофиқ ёки мувофиқ эмаслигини 0,05 аниқлилик даражаси билан Пирсоннинг мувофиқлик критерийси ёрдамида аниқланг.

Ж: Текис таксимот билан мувофиқлашади.

2-лаборатория машғулоти

Чизиқли регрессия тенгламасини энг кичик квадратлар усули ёрдамида аниқлаш

X ва Y белгили икки ўлчовли бош тўпلامдан олинган n хажмли танланма берилган бўлсин. (x_i, y_i) кузатилган кийматларини мос частоталари билан ушбу корреляцион жадвалга жойлаштирамиз:

$X \backslash Y$	$y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m$				$\sum_{j=1}^m n_{ij}$
	y_1	y_2	$\dots$	y_m	
x_1	n_{11}	n_{12}	$\dots$	n_{1m}	n_{x_1}
x_2	n_{21}	n_{22}	$\dots$	n_{2m}	n_{x_2}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
x_l	n_{l1}	n_{l2}	$\dots$	n_{lm}	n_{x_l}
$\sum_{i=1}^l n_{ij}$	n_{y_1}	n_{y_2}	$\dots$	n_{y_m}	$n = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m n_{ij}$

Куйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l x_i n_{x_i}, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m y_j n_{y_j}$$

$$\overline{XY} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m x_i y_j n_{ij}, \quad \overline{X^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l x_i^2 n_{x_i}$$

$$\overline{Y^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m y_j^2 n_{y_j}, \quad \sigma_x^2 = \overline{X^2} - \bar{X}^2$$

$$\sigma_y^2 = \overline{Y^2} - \bar{Y}^2, \quad r = \frac{\overline{XY} - \bar{X} \cdot \bar{Y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

$$Y - \bar{Y} = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} r (x - \bar{x}) \text{ энг кичик квадратлар усули билан топилган}$$

У нинг Х га тўғри чизикли регрессия тенгламасидир.

Кўпинчи бу тенгламани топишни соддалаштириш учун

$$u_i = \frac{x_i - C_1}{h_1}, \quad v_j = \frac{y_j - C_2}{h_2}$$

алмаштиришлар киритилади.

C_1 ва C_2 мос равишда $x_1 \leq \dots \leq x_l$ ва $y_1 \leq \dots \leq y_m$ вариацион каторларнинг ўрталарида жойлашган вариантлар, h_1 ва h_2 лар эса вариацион каторлар кўшни вариантларининг айирмаси.

Юқоридаги алмаштиришлардан фойдаланиб, чизикли регрессия тенгламасини топишда куйидаги формулалар ишлатилади:

$$\bar{u} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l u_i n_{x_i}, \quad \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m v_j n_{y_j}$$

$$\overline{u^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^l u_i^2 n_{x_i}, \quad \overline{v^2} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^m v_j^2 n_{y_j}$$

$$\sigma_u^2 = \overline{u^2} - \bar{u}^2, \quad \sigma_v^2 = \overline{v^2} - \bar{v}^2$$

$$\sigma_x = h_1 \cdot \sigma_u, \quad \sigma_y = h_2 \cdot \sigma_v, \quad \bar{X} = \bar{u} \cdot h_1 + C_1$$

$$Y = \bar{v} \cdot h_2 + C_2, \quad r = \frac{\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m u_i v_j n_{ij} - n \cdot \bar{u} \bar{v}}{n \sigma_u \sigma_v}$$

Корреляцион жадвал маълумотлари бўйича У нинг Х га тўғри чизикли регрессия тенгламасини энг кичик квадратлар усули билан топинг.

1.

$Y \backslash X$	5	10	15	20	25	30	n_y
45	2	4	—	—	—	—	6
55	—	3	5	—	—	—	8
65	—	—	5	35	5	—	45
75	—	—	2	8	17	—	27
85	—	—	—	4	7	3	14
n_x	2	7	12	47	29	3	$n=100$

2.

$Y \backslash X$	10	15	20	25	30	35	n_y
40	2	4	—	—	—	—	6
50	—	3	7	—	—	—	10
60	—	—	5	30	10	—	45
70	—	—	7	10	8	—	25
80	—	—	—	5	6	3	14
n_x	2	7	19	45	24	3	$n=100$

3.

$Y \backslash X$	15	20	25	30	35	40	n_y
15	4	1	—	—	—	—	5
25	—	6	4	—	—	—	10
35	—	—	2	50	2	—	54
45	—	—	1	9	7	—	17
55	—	—	—	4	3	7	14
n_x	4	7	7	63	12	7	$n=100$

4.

$Y \backslash X$	2	7	12	27	22	27	n_y
100	1	5	—	—	—	—	6
110	—	5	3	—	—	—	8
120	—	—	3	40	12	—	55
130	—	—	2	10	5	—	17
140	—	—	—	3	4	7	14
n_x	1	10	8	53	21	7	$n=100$

5.

$X \backslash Y$	5	10	15	20	25	30	n_y
10	3	5	—	—	—	—	8
20	—	4	4	—	—	—	8
30	—	—	7	35	8	—	50
40	—	—	2	10	8	—	20
50	—	—	—	5	6	3	14
n_x	3	9	13	30	22	3	$n=100$

6.

$X \backslash Y$	12	14	22	27	32	37	n_y
25	2	4	—	—	—	—	6
35	—	6	3	—	—	—	9
45	—	—	6	35	4	—	45
55	—	—	2	8	6	—	16
65	—	—	—	14	7	3	24
n_x	2	10	11	57	17	3	$n=100$

7.

$X \backslash Y$	15	20	25	30	35	40	n_y
25	3	4	—	—	—	—	7
35	—	6	3	—	—	—	9
45	—	—	6	35	2	—	43
55	—	—	12	8	6	—	26
65	—	—	—	4	7	4	15
n_x	3	10	21	47	15	4	$n=100$

8.

$X \backslash Y$	4	9	14	19	24	29	n_y
30	3	3	—	—	—	—	6
40	—	5	4	—	—	—	9
50	—	—	40	2	8	—	50
60	—	—	5	10	6	—	21
70	—	—	—	4	7	3	14
n_x	3	8	49	16	21	3	$n=100$

9.

$X \backslash Y$	5	10	15	20	25	30	n_y
30	2	6	—	—	—	—	8
40	—	5	3	—	—	—	8
50	—	—	7	40	2	—	49
60	—	—	4	9	6	—	19
70	—	—	—	4	7	5	16
n_x	2	11	14	53	15	5	$n=100$

10.

$X \backslash Y$	10	15	20	25	30	35	n_y
20	5	1	—	—	—	—	6
30	—	6	2	—	—	—	8
40	—	—	40	5	5	—	50
50	—	—	2	8	7	—	17
60	—	—	—	4	7	8	19
n_x	5	7	9	52	19	8	$n=100$

11.

$X \backslash Y$	5	10	15	20	25	30	35	40	n_y
100	2	1	—	—	—	—	—	—	3
120	3	4	3	—	—	—	—	—	10
140	—	—	5	10	8	—	—	—	23
160	—	—	—	1	—	6	1	1	9
180	—	—	—	—	—	—	4	1	5
n_x	5	5	8	11	8	6	5	2	$n=50$

12.

$X \backslash Y$	18	23	28	33	38	43	48	n_y
125	—	1	—	—	—	—	—	1
150	1	2	5	—	—	—	—	8
175	—	3	2	12	—	—	—	17
200	—	—	1	8	7	—	—	16
225	—	—	—	—	3	3	—	6
250	—	—	—	—	1	1	—	2
n_x	1	6	8	20	10	4	1	$n=50$

13.

$X \backslash Y$	5	10	15	20	25	30	35	n_y
100	—	—	—	—	—	6	1	7
120	—	—	—	—	—	4	2	6
140	—	—	8	10	5	—	—	23
160	3	4	3	—	—	—	—	10
180	2	1	—	1	—	—	—	4
n_x	5	5	11	11	5	10	3	$n=50$

14.

$X \backslash Y$	13	18	23	28	33	n_y
25	3	2	—	—	—	5
35	—	6	4	—	—	10
45	—	1	9	5	—	15
55	—	1	2	4	8	15
65	—	—	1	—	4	5
n_x	3	10	16	9	12	$n=50$

15.

$X \backslash Y$	30	35	40	45	50	n_y
45	2	6	—	—	—	8
55	2	8	10	—	—	20
65	—	—	32	3	9	44
75	—	—	4	11	6	21
85	—	—	—	2	5	7
n_x	4	14	46	16	20	$n=100$

16.

$X \backslash Y$	33	38	43	48	53	58	n_y
65	4	8	10	—	—	—	13
75	—	4	4	2	—	—	10
85	—	1	6	6	1	—	14
95	—	—	—	1	5	—	6
105	—	—	—	1	4	1	6
115	—	—	—	—	2	4	6
n_x	4	13	11	10	12	5	$n=55$

17.

$X \backslash Y$	3	7	11	15	19	23	n_y
6	5	3	—	2	—	—	10
16	7	10	1	2	—	—	20
26	2	18	15	20	—	—	55
36	—	—	30	28	—	—	56
46	—	—	—	19	12	—	31
56	—	—	—	—	21	7	28
n_x	14	31	46	69	33	7	$n=200$

18.

$X \backslash Y$	45	50	55	60	65	70	75	n_y
30	—	—	—	—	8	2	1	11
35	—	1	6	22	33	10	3	75
40	1	2	10	48	37	8	1	107
45	—	1	12	11	2	—	—	26
50	—	2	1	1	—	—	—	4
55	—	—	1	—	—	—	—	1
n_x	1	6	30	82	80	20	5	$n=224$

19.

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4	n_y
0	18	1	1	—	—	20
3	1	20	—	—	—	21
6	3	5	10	2	—	20
9	—	—	7	12	—	19
12	—	—	—	—	20	20
n_x	22	26	18	14	20	$n=100$

20.

$X \backslash Y$	0	4	8	12	16	n_y
7	19	1	1	—	—	21
13	2	14	—	—	—	16
19	—	3	22	2	—	27
25	—	—	—	15	—	15
31	—	—	—	—	21	21
n_x	21	18	23	17	21	$n=100$

21.

$\begin{array}{c c} X & Y \end{array}$	0	1	2	3	4	n_y
10	20	5	—	—	—	25
20	7	15	3	1	—	26
30	—	3	17	4	—	24
40	—	—	8	13	7	28
50	—	—	—	5	42	47
n_x	27	23	28	23	49	$n=150$

22.

$\begin{array}{c c} X & Y \end{array}$	150	165	175	185	195	n_y
50	2	2	—	—	—	4
70	—	2	—	—	—	2
90	—	—	9	2	1	12
110	—	—	2	7	9	18
130	—	—	—	3	11	14
n_x	2	4	11	12	21	$n=50$

23.

$\begin{array}{c c} X & Y \end{array}$	20	25	30	35	40	n_y
10	3	7	—	—	—	10
16	—	12	5	1	—	18
20	—	—	6	1	1	8
24	—	—	—	3	1	4
28	—	—	—	—	1	1
n_x	3	19	11	5	3	$n=41$

24.

$\begin{array}{c c} X & Y \end{array}$	25	35	45	55	65	n_y
2	5	10	—	—	—	15
4	—	13	10	10	—	33
6	—	—	18	16	—	34
8	—	—	—	2	2	4
10	—	—	—	—	1	1
n_x	5	23	28	26	3	$n=87$

25.

$\begin{array}{c c} X & Y \end{array}$	10	20	30	40	50	n_y
10	7	17	10	—	—	34
20	—	23	12	5	—	40
30	—	10	5	3	2	20
40	—	—	2	2	1	5
50	—	—	—	—	1	1
n_x	7	50	29	10	4	$n=100$

26.

$\begin{array}{c c} X & Y \end{array}$	5	15	25	35	45	n_y
2	3	14	—	—	—	17
12	—	16	18	—	—	34
22	—	—	20	10	11	41
32	—	—	—	6	2	8
n_x	3	30	38	16	13	$n=100$

27.

$\begin{array}{c c} X & Y \end{array}$	1	6	11	16	21	n_y
5	3	10	—	—	—	13
10	4	11	10	—	—	25
15	—	5	15	10	—	30
20	—	—	11	10	4	25
25	—	—	—	4	3	7
n_x	7	26	36	24	7	$n=100$

28.

$\begin{array}{c c} X & Y \end{array}$	4	6	8	10	12	n_y
3	7	21	10	—	—	38
8	—	5	15	10	—	30
13	—	—	11	10	4	25
18	—	—	—	4	3	7
n_x	7	26	36	24	7	$n=100$

29.

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	3	7	11	15	19	n_y
2	2	4	—	—	—	6
6	—	3	5	—	—	8
8	—	—	5	35	5	45
10	—	—	2	8	17	27
12	—	—	—	4	10	14
n_x	2	7	12	47	32	$n=100$

30.

$\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}$	2	5	8	11	14	17	n_y
1	2	4	—	—	—	—	6
6	—	6	3	—	—	—	9
11	—	—	6	35	4	—	45
16	—	—	2	8	6	—	16
21	—	—	—	14	7	3	24
n_x	2	10	11	57	17	3	$n=100$

12- назорат иши

1.1. X тасодикий микдор $F(x)$ тақсимот функцияси орқали берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 1, \\ \frac{1}{10}(3x^2 + x - 4), & \text{агар } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{агар } x > 2. \end{cases}$$

Зичлик функция $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг.

$F(X)$ ва $f(x)$ функцияларининг графигини чизинг.

1.2. Нормал тақсимланган X тасодикий микдорнинг математик кутилиши $a=2$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=6$. $P(4 < X < 9)$ ни топинг.

1.3. Нормал тақсимотнинг номаълум математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,69$; $n=25$; $\sigma=2,5$).

2.1. X тасодикий микдор $F(x)$ тақсимот функцияси билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq -\frac{1}{5}, \\ 5x + 1, & \text{агар } -\frac{1}{5} < x \leq 0, \\ 1, & \text{агар } x > 0. \end{cases}$$

Зичлик функция $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

2.2. Нормал тақсимланган X тасодифий микдорнинг математик кутилиши $a=3$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=2$. $P(3 < X < 10)$ ни топинг.

2.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни 0,95 ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,70$; $n=25$; $\sigma=3$).

3.1. X тасодифий микдор $F(x)$ тақсимот функцияси билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq -\pi, \\ \sqrt{2} \cos \frac{x}{2}, & \text{агар } -\pi < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{агар } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Зичлик функция $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

3.2. Нормал тақсимланган X тасодифий микдорнинг математик кутилиши $a=4$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=2$. $P(5 < X < 9)$ ни топинг.

3.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,71$; $n=49$; $\sigma=3,5$).

4.1. X тасодифий микдор тақсимот функцияси $F(x)$ билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ \frac{\sqrt{x}}{2}, & \text{агар } 0 < x \leq 4, \\ 1, & \text{агар } x > 4. \end{cases}$$

Зичлик функция $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг, ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

4.2. X тасодифий микдор нормал конун бўйича тақсимланган. Унинг математик кутилиши $a=5$, ўрта квадратик четланиши $\sigma=4$. $P(2 < X < 10)$ ни топинг.

4.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,72$; $n=64$; $\sigma=4$).

5.1. X тасодифий микдор тақсимот функцияси $F(x)$ билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 4, \\ \ln \frac{x}{4}, & \text{агар } 4 < x \leq 4e, \\ 1, & \text{агар } x > 4e. \end{cases}$$

Зичлик функция $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

5.2. Нормал тасимланган X тасодикий микдорнинг математик кутилиши $a=6$, ўрта квадратик четланиши $\sigma=2$. $P(4 < X < 12)$ ни топинг.

5.3. Нормал тасимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан қоплайдиган ишончли ораликни топинг. ($\bar{X}=74,73$; $n=81$; $\sigma=4,5$).

6.1. X тасодикий микдор тасимот функцияси $F(x)$ билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ \frac{1}{3}(2x^2 + x), & \text{агар } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{агар } x > 1. \end{cases}$$

Зичлик функция $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ ларнинг графикларини чизинг.

6.2. X тасодикий микдор нормал конун бўйича тасимланган, математик кутилиши $a=7$, ўрта квадратик четланиши $\sigma=2$. $P(3 < X < 10)$ ни топинг.

6.3. Нормал тасимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг. ($\bar{X}=74,73$; $n=81$; $\sigma=4,5$).

7.1. X тасодикий микдор тасимот функцияси $F(x)$ билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ \frac{1}{2}(x^3 + x), & \text{агар } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{агар } x > 1. \end{cases}$$

Зичлик функция $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ нинг графикларини чизинг.

7.2. Нормал тасимланган X тасодикий микдорнинг математик кутилиши $a=8$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=5$. $P(3 < x < 15)$ ни топинг.

7.3. Нормал тасимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг. ($\bar{X}=74,74$; $n=100$; $\sigma=5$).

8.1. X тасодикий микдор тасимот функцияси $F(x)$ билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ 3x^2 + 2x, & \text{агар } 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{агар } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Зичлик функция $f(x)$, $M(x)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ нинг графикини чизинг.

8.2. Нормал таксимланган X тасодикий микдорнинг математик кутилиши $a=9$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=6$. $P(5 < X < 14)$ ни топинг.

8.3. Нормал таксимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,75$; $n=121$; $\sigma=5,5$).

9.1. X тасодикий микдор таксимот функцияси $F(x)$ билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ 2 \sin x, & \text{агар } 0 < x \leq \frac{\pi}{6}, \\ 1, & \text{агар } x > \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Зичлик функция $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

9.2. X тасодикий микдор нормал конун бўйича таксимланган, математик кутилиши $a=10$, ўрта квадратик четланиши $\sigma=4$. $P(2 < x < 13)$ ни топинг.

9.3. Нормал таксимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончлилик оралигини топинг ($\bar{X}=74,76$; $n=114$; $\sigma=6$).

10.1. X тасодикий микдор таксимот функцияси $F(x)$ билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 1, \\ \frac{1}{6} (x^2 + 3x - 4), & \text{агар } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{агар } x > 2. \end{cases}$$

Зичлик функция $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(x)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ ларнинг графикларини чизинг.

10.2. Нормал таксимланган X тасодикий микдорнинг математик кутилиши $a=11$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=5$. $P(7 < x < 17)$ ни топинг.

10.3. Нормал таксимотнинг математик кутилиши a ни $\sigma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,91$; $n=729$; $\sigma=13,5$).

11.1. X тасодикий микдор таксимот функцияси $F(x)$ билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{5} (3x - 1), & \text{агар } \frac{1}{3} < x \leq 2, \\ 1, & \text{агар } x > 2. \end{cases}$$

Зичлик функция $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(x)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикни чизинг.

11.2. Нормал таксимланган X тасодикий микдорнинг математик кутилиши $a=12$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=4$ $P(7 < x < 18)$ ни топинг.

11.3. Нормал таксимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли оралиқни топинг ($\bar{X}=74,77$; $n=169$; $\sigma=6,5$).

12.1. X тасодикий микдорнинг таксимот функцияси $F(x)$ билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq -1, \\ \sqrt{x+1}, & \text{агар } -1 < x \leq 0, \\ 1, & \text{агар } x > 0. \end{cases}$$

Зичлик функцияси $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(x)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

12.2. Нормал таксимланган X тасодикий микдорнинг математик кутилиши $a=13$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=5$. $P(9 < x < 18)$ ни топинг.

12.3. Нормал таксимотнинг математик кутилиши a ни $\sigma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли оралиқни топинг ($\bar{X}=74,78$; $n=196$; $\sigma=7$).

13.1. X тасодикий микдор таксимот функцияси $F(x)$ билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 3 \\ \ln \frac{x}{3}, & \text{агар } 3 < x \leq 3e, \\ 1, & \text{агар } x > 3e. \end{cases}$$

Зичлик функция $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(x)$ ларни топинг, ҳамда $f(x)$ ва $F(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

13.2. X тасодикий микдор нормал конун бўйича таксимланган, математик кутилиши $a=14$, ўрта квадратик четланиши $\sigma=9$. $P(11 < x < 17)$ ни топинг.

13.3. Нормал таксимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли оралиқни топинг ($\bar{X}=74,79$; $n=225$; $\sigma=7,5$).

14.1. X тасодикий микдор таксимот функцияси $F(x)$ билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq \frac{3}{4}\pi, \\ \cos 2x, & \text{агар } \frac{3}{4}\pi < x \leq \pi, \\ 1, & \text{агар } x > \pi. \end{cases}$$

Зичлик функция $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(x)$ ларни топинг, ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

14.2. X тасодифий микдор нормал конун бўйича тақсимланган, математик кутилиши $a=15$, ўрта квадратик четланиши $\sigma=8$. $P(9 < x < 21)$ ни топинг.

14.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,8$; $n=256$; $\sigma=8$).

15.1. X тасодифий микдор тақсимот функцияси $F(x)$ билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq -1, \\ \frac{1}{2}(x+1), & \text{агар } -1 < x \leq 1 \\ 1, & \text{агар } x > 1. \end{cases}$$

Зичлик функцияси $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(x)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

15.2. Нормал тақсимланган X тасодифий микдорнинг математик кутилиши $a=16$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=6$. $P(2 < x < 9)$ ни топинг.

15.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,81$; $n=289$; $\sigma=8,5$).

16.1. X тасодифий микдор тақсимот функцияси $F(x)$ билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{9}, & \text{агар } 0 < x \leq 3, \\ 1, & \text{агар } x > 3. \end{cases}$$

Зичлик функцияси $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(x)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

16.2. Нормал тақсимланган X тасодифий микдорнинг математик кутилиши $a=17$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=11$. $P(9 < x < 20)$ ни топинг.

16.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли оралики топинг ($\bar{X}=74,82$; $n=324$; $\sigma=9$).

17.1. X тасодифий микдор тақсимот функцияси $F(x)$ билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 2, \\ \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2), & \text{агар } 2 < x \leq 3, \\ 1, & \text{агар } x > 3. \end{cases}$$

Зичлик функцияси $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(x)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

17.2. Нормал тақсимланган X тасодифий микдорнинг математик кутилиши $a=18$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=6$. $P(10 < x < 22)$ ни топинг.

17.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,83$; $n=381$; $\sigma=9,5$).

18.1. X тасодифий микдор тақсимот функцияси $F(x)$ билан берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 2, \\ \frac{1}{2}x - 1, & \text{агар } 2 < x < 4, \\ 1, & \text{агар } x > 4. \end{cases}$$

Зичлик функцияси $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(x)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

18.2. Нормал тақсимланган X тасодифий микдорнинг математик кутилиши $a=19$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=7$. $P(11 < x < 23)$ ни топинг.

18.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,84$; $n=400$; $\sigma=10$).

19.1. X тасодифий микдор тақсимот функцияси $F(x)$ ёрдамида берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}(2x^2 + x - 1), & \text{агар } \frac{1}{2} < x \leq 1, \\ 1, & \text{агар } x > 1. \end{cases}$$

Зичлик функцияси $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(x)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

19.2. X тасодифий микдор нормал тақсимланган. Унинг математик кутилиши $a=20$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=7$. $P(13 < x < 24)$ ни топинг.

19.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,85$; $n=441$; $\sigma=10,5$).

20.1. X тасодифий микдор тақсимот функцияси $F(x)$ ёрдамида берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{4}, & \text{агар } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{агар } x > 2. \end{cases}$$

Зичлик функцияси $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(x)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

20.2. Нормал тақсимланган X тасодифий микдорнинг математик кутилиши $a=21$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=9$. $P(9 < x < 15)$ ни топинг.

20.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончилилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,86$; $n=484$; $\sigma=11$).

21.1. X тасодифий микдор тақсимот функцияси $F(x)$ ёрдамида берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ \frac{1}{12} (x^3 + 2x), & \text{агар } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{агар } x > 2. \end{cases}$$

Зичлик функцияси $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

21.2 Нормал тақсимланган X тасодифий микдорнинг математик кутилиши $a=22$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=8$. $P(10 < X < 18)$ ни топинг.

21.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончилилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,87$; $n=529$, $\sigma=11,5$).

22.1. X тасодифий микдор тақсимот функцияси $F(x)$ ёрдамида берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 2, \\ \ln \frac{x}{2}, & \text{агар } 2 < x \leq 2e, \\ 1, & \text{агар } x > 2e. \end{cases}$$

Зичлик функцияси $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

22.2. Нормал тақсимланган X тасодифий микдорнинг математик кутилиши $a=23$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=9$. $P(11 < X < 20)$ ни топинг.

22.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончилилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,88$; $n=576$; $\sigma=12$).

23.1. X тасодифий микдор тақсимот функцияси ёрдамида берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ \sqrt{2} \sin \frac{x}{2}, & \text{агар } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{агар } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Зичлик функцияси $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

23.2 X тасодикий микдор нормал қонун бўйича тақсимланган. Математик кутилиши $a=24$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=11$. $P(13 < X < 25)$ ни топинг.

23.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончилилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,89$; $n=625$; $\sigma=12,5$).

24.1. X тасодикий микдор тақсимот функцияси $F(x)$ ёрдамида берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ \sqrt[3]{x}, & \text{агар } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{агар } x > 1. \end{cases}$$

Зичлик функцияси $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

24.2. Нормал тақсимланган X тасодикий микдорнинг математик кутилиши $a=2$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=5$. $P(4 < X < 9)$ ни топинг.

24.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончилилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг. ($\bar{X}=74,9$, $n=676$, $\sigma=13$).

25.1 X тасодикий микдор тақсимот функцияси $F(x)$ ёрдамида берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{5}(2x+1), & \text{агар } -\frac{1}{2} < x \leq 2, \\ 1, & \text{агар } x > 2. \end{cases}$$

Зичлик функцияси $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

25.2. Нормал тақсимланган X тасодикий микдорнинг математик кутилиши $a=3$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=5$. $P(4 < X < 7)$ ни топинг.

25.3. Нормал тақсимотнинг a математик кутилишини $\gamma=0,95$ ишончилилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,92$; $n=784$, $\sigma=14$).

26.1 X тасодикий микдор тақсимот функцияси $F(x)$ ёрдамида берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 1, \\ \frac{1}{2}(x^2 - x), & \text{агар } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{агар } x > 2. \end{cases}$$

Зичлик функцияси $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

26.2. Нормал тақсимланган X тасодифий микдорнинг математик кутилиши $a=4$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=3$. $P(3 < X < 11)$ ни топинг.

26.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончилилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,93$; $n=841$; $\sigma=14,5$).

27.1. X тасодифий микдор тақсимот функцияси $F(x)$ ёрдамида берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 2, \\ \frac{1}{4}(x^2 - x - 2), & \text{агар } 2 < x \leq 3, \\ 1, & \text{агар } x > 3. \end{cases}$$

Зичлик функцияси $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

27.2. Нормал тақсимланган X тасодифий микдорнинг математик кутилиши $a=5$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=4$. $P(2 < X < 11)$ ни топинг.

27.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончилилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,94$; $n=841$; $\sigma=29$).

28.1. X тасодифий микдор тақсимот функцияси $F(x)$ ёрдамида берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{агар } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ 1, & \text{агар } x > 0. \end{cases}$$

Зичлик функцияси $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

28.2. Нормал тақсимланган X тасодифий микдорнинг математик кутилиши $a=6$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=3$. $P(6 < X < 16)$ ни топинг.

28.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончилилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,95$; $n=784$; $\sigma=28$).

29.1. X тасодифий микдор тақсимот функцияси $F(x)$ ёрдамида берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 1, \\ \sqrt{x-1}, & \text{агар } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{агар } x > 2. \end{cases}$$

Зичлик функцияси $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

29.2. Нормал тақсимланган X тасодифий миқдорнинг математик кутилиши $a=7$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=3$. $P(5 < X < 13)$ ни топинг.

29.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг ($\bar{X}=74,96$; $n=729$; $\sigma=27$).

30.1. X тасодифий миқдор тақсимот функцияси $F(x)$ ёрдамида берилган:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 5, \\ \ln \frac{x}{5}, & \text{агар } 5 < x \leq 5e, \\ 1, & \text{агар } x > 5e. \end{cases}$$

Зичлик функцияси $f(x)$, $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни топинг ҳамда $F(x)$ ва $f(x)$ функцияларнинг графикларини чизинг.

30.2. Нормал тақсимланган X тасодифий миқдорнинг математик кутилиши $a=8$ ва ўрта квадратик четланиши $\sigma=1$. $P(4 < X < 9)$ ни топинг.

30.3. Нормал тақсимотнинг математик кутилиши a ни $\gamma=0,95$ ишончлилик билан баҳолаш учун ишончли ораликни топинг. ($\bar{X}=74,97$; $n=676$; $\sigma=26$).

10- намунавий ҳисоб топшириқлари

1.1. Қутида 6 та ок, 4 та кора, 3 та кизил шар бор. Таваккалига олинган 3 та шарнинг ҳаммаси турли рангда бўлиши эҳтимоллигини топинг.

1.2. 7 та ўриндиқли каторга 4 киз ва 3 ўғил ўтиришади. Уч ўғилнинг ёнма-ён ўтириши эҳтимоллигини топинг.

1.3. Китоб тоқчасида алгебрадан 4 та, геометриядан 3 та китоб таваккалига териб чиқилган. Ҳар қайси фанга доир китоблар ёнма-ён туриши эҳтимоллигини топинг.

1.4. Тангани 10 марта ташланганида 5 марта гербли томон ва 5 марта рақамли томон тушган. Гербли томонларнинг ҳаммаси дастлабки 5 марта ташланганда тушганлиги эҳтимоллигини топинг.

1.5. Яшиқда 15 та детал бўлиб, уларнинг 5 таси бўялган. Таваккалига олинган 5 та деталнинг 4 таси бўялган, биттаси бўялмаган бўлиб чиқиши эҳтимоллигини топинг.

1.6. Спортлото ўйинидаги бош ютуқни (45 тадан 6 та номерни топиш) ютиб олиш эҳтимоллигини топинг. 5 та номерни топиш эҳтимоллигини аниқланг.

1.7. 52 талик ўйин картасини 2 тадан тарқатишганда «туз» ва «кирол» чиқиши эҳтимоллигини топинг.

1.8. Театрга 6 та чипта олинган бўлиб, улардан 4 таси 1- катордаги жойлардан иборатдир. Таваккалига олинган 3 та

чиптанинг 2 таси биринчи катордаги жойларда бўлиши эҳтимоллигини топинг.

1.9. Футбол бўйича мусобакаларда 20 та жамоа катнашади. Тасодифий равишда бу жамоалар 10 тадан қилиб иккита гуруҳга бўлинди. Бунда 2 та энг кучли жамоа битта гуруҳга тушиб қолиши эҳтимоллигини топинг.

1.10. Қутичада 7 та ок ва 5 та қора шар бор.

а) таваккалига олинган шар қора бўлиши;

б) таваккалига олинган 2 та шар қора бўлиши эҳтимоллигини топинг.

1.11. Талаба укув дастуридаги 40 саволдан 30 тасини билади. Ҳар бир имтиҳон билетида 2 тадан савол бўлса, талабанинг ҳар иккала саволни билиши эҳтимоллигини топинг.

1.12. Қуръа ташлаш катнашчилари яшиқдан 1 дан 100 гача номерланган жетонларни тортадилар. Таваккалига биринчи бўлиб, олинган жетон номерида 5 рақами иштирок этмаслиги эҳтимоллигини топинг.

1.13. Олтита бир хил карточкаларнинг ҳар бирига қуйидаги ҳарфлардан бири ёзилган: а, б, с, м, р, о. Карточкалар яхшилаб аралаштирилгач, галма-галдан битталаб олинган ва катор қилиб, териб чиқилган тўртта карточкада «ромб» сўзининг ҳосил бўлиши эҳтимоллигини топинг.

1.14. Барча ёқлари бўялган куб мингта бир хил ўлчамли кубчаларга бўлинади ва улар яхшилаб аралаштирилади. Таваккалига олинган кубчанинг: а) битта, б) иккита ёғи бўялган бўлиши эҳтимоллигини топинг.

1.15. Саккизта ҳар хил китоб битта тоқчага таваккалига териб қуйилганда, иккита маълум китоб ёнма-ён туриб қолиши эҳтимоллигини топинг.

1.16. 10 та ҳар хил китобнинг 5 таси ҳар бири 4 сўмдан, учтаси 1 сўмдан, 2 таси 3 сўмдан сотиляпти. Таваккалига олинган иккита китоб биргаликда 5 сўм бўлиши эҳтимоллигини топинг.

1.17. Гуруҳнинг 8 нафари кизлар бўлган 17 талабаси орасида 7 та билет ўйналяпти. Билетга «эга чикканлар» ичида 4 та талабанинг кизлар бўлиши эҳтимоллигини топинг.

1.18. Беш қаватли уйнинг лифти уч йўловчи билан қутарила бошлади. Ҳар қайси қаватдан биттадан ортик бўлмаган йўловчи тушиб қолиши эҳтимоллигини топинг. (Бунда йўловчиларни қаватлар бўйича тақсимлашнинг мумкин бўлган барча усуллари тенг эҳтимолли деб ҳисобланг.)

1.19. Натурал каторнинг 1, 2, 3, ..., 100 сонлари таваккалига жойлаштирилган 1 ва 2 сонлари ёнма-ён, шу билан бирга, ўсиб бориш тартибида жойлашганлиги эҳтимоллигини топинг.

1.20. Ўнта талаба тайин электропоездда кетишга шартлашиб олдилар, лекин қайси вагонда кетишга келншиб олмадилар. Агар электропоездда 10 та вагон бўлса иккита талабанинг битта вагонга тушиб қолмаслик эҳтимоллигини топинг. (Бунда талабаларнинг

вагонлар бўйича жойлашишларининг барча имкониятлари тенг имкониятли деб фараз қилинади.)

1.21. Таваккалга олинган учта рақамнинг: а) ҳаммаси бир хил; б) икkitаси бир хил бўлиши эҳтимоллигини топинг.

1.22. 10 эркак ва 10 аёлдан иборат гуруҳ тасодифий равишда 2 та тенг қисмга бўлинади. Ҳар қайси қисмда эркаклар ва аёллар сони бир хил бўлиши эҳтимоллигини топинг.

1.23. Йиғувчида бир-биридан кам фарқ қиладиган 10 та деталь бор. Уларнинг тўрттаси биринчи турдаги, икkitаси иккинчи, икkitаси учинчи ва икkitаси тўртинчи турдаги деталлардир. Бир пайтда олинган олти та деталнинг учтаси — биринчи турдаги, икkitаси иккинчи, биттаси — учинчи турдаги деталь бўлиш эҳтимоллигини топинг.

1.24. Таваккалига олинадиган икки хонали соннинг а) туб сон; б) 5 га қаррали сон бўлиши эҳтимоллигини топинг.

1.25. Ҳар хил рақамлар билан номерланган 9 та жетоннинг 3 таси олинади. Уларнинг ўсиб бориш тартибида чиқиши эҳтимоллигини топинг. Учала жетоннинг номерлари жуфт бўлиши эҳтимоллигини топинг.

1.26. Таваккалига танланган телефон номери 5 та рақамдан иборат. Уларда:

а) барча рақамлар ҳар хил бўлиши;

б) барча рақамлар ток бўлиши эҳтимоллигини топинг.

1.27. Таваккалига олинган натурал сон 2 га ҳам, 3 га ҳам бўлинмаслиги эҳтимоллигини топинг.

1.28. 2,3,4,5,6 сонлари ёзилган бешта карточкадан тасодифий равишда уч хонали сон тузилади. Бу сон ток бўлиши эҳтимоллигини топинг.

1.29. Берилган 1, 2, 3, 4, 5 рақамдан фойдаланиб турли рақамли тўрт хонали сон тузилади. Тузилган сон рақамларининг ўсиш тартибида бўлиши эҳтимоллигини топинг.

1.30. Яшиқда 40 та ярокли ва 6 та яроксиз саклагичлар бор. Яшиқдан 3 та саклагич олинган:

а) барча саклагичлар ярокли бўлиши;

б) ақалли биттаси яроксиз бўлиши эҳтимоллигини топинг.

2.1. Айланага таваккалига ички учбурчак чизилади. Бу учбурчак тенг ёнли бўлиши эҳтимоллигини топинг.

2.2. Айланага таваккалига ички учбурчак чизилади. Бу учбурчак тўғри бурчакли бўлиши эҳтимоллигини топинг.

2.3. Айланага таваккалига ички учбурчак чизилади. Бу учбурчак ўткир бурчакли бўлиши эҳтимоллигини топинг.

2.4. 200 м ли магнитофон тасмасига 20 м оралиқда маълумот ёзилган, шу тасманинг 60 м дан 75 м гача бўлган оралиғида узлуксиз ёзув бўлиш эҳтимоллигини топинг.

2.5. Икки ўрток маълум бир жойда соат 14⁰⁰ билан 15⁰⁰ орасида учрашишга келишдилар. Ҳар қайси ўрток 20 мин кутиб, кейин кетади. Учрашув рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

2.6. Томони a га тенг квадратлар тури чизилган текисликка таваккалига $r < \frac{a}{2}$ радиусли танга ташланади. Танга квадратларнинг томонларидан ҳеч бирини кесмаслик эҳтимоллигини топинг. Нуктанинг текис фигурага тушиш эҳтимоллиги фигура юзига пропорционал ва унинг жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.

2.7. Текислик бир-биридан $2a$ масофада жойлашган параллел тўғри чизиклар билан бўлинган. Бу текисликка таваккалига радиуси $r < a$ бўлган танга ташланади. Танга тўғри чизиклардан ҳеч бирини кесмаслиги эҳтимоллигини топинг.

2.8. Парабола ярим доирага уринади ва унинг диаметри чегараларидан ўтади. Ярм доирага таваккалига ташланган нукта ярим доира ва парабола билан чегараланган соҳага тушиш эҳтимоллигини топинг.

2.9. Парабола квадратнинг пастки асосига уринади ва унинг юқори учлари орқали ўтади. Квадратга таваккалига ташланган нуктанинг квадратнинг юқори томони ва парабола билан чегараланган соҳага тушиш эҳтимоллигини топинг.

2.10. Таваккалига 1 дан катта бўлмаган иккита x ва y сон олинган. Агар бу сонлар квадратларнинг йиғиндис $\frac{1}{4}$ дан катта бўлса, уларнинг йиғиндис бирдан катта бўлмаслиги эҳтимоллигини топинг.

2.11. Таваккалига ҳар бири иккидан катта бўлмаган иккита мусбат x ва y сон олинган. $xy \leq 1$; $y/x \leq 2$ бўлиши эҳтимоллигини топинг.

2.12. Иккита x ва y хақикий сон $|x| \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган қилиб таваккалига танланади. $x^2 < y$ шартнинг бажарилиши эҳтимоллигини топинг.

2.13. Иккита x ва y хақикий сон $|x| \leq 3$, $|y| \leq 5$ тенгсизликларни қаноатлантирадиган қилиб таваккалига танланади. $\frac{x}{y}$ каср мусбат бўлиши эҳтимоллигини топинг.

2.14. R радиусли доира ичига r радиусли кичик доира жойлаштирилган. Катта доирага таваккалига ташланган нукта кичик доирага ҳам тушиши эҳтимоллигини топинг. (Доирага тушиш эҳтимоллиги доира юзига пропорционал бўлиб, унинг жойлашишига боғлиқ эмас деб фараз қилинади.)

2.15. Радиуси 15 см бўлган шар марказидан 25 см масофада ёруғликнинг нуктавий манбаи жойлашган. Шар сиртида таваккалига олинган нукта ёритилган бўлиши эҳтимоллигини топинг.

2.16. Ичидан томони $a = 14$ см квадрат қирқиб олинган $R = 25$ см радиусли доирага радиуси $r = 2$ см бўлган шар таваккалига ташланади. Агар шар албатта доирага тушса, унинг бу тешик четларига тегмай ундан ўтиб кетиш эҳтимоллигини топинг.

2.117. R радиусли доирага мунтазам олтибурчак ички чизилган. Доира ичига таваккалига ташланган нуктанинг олтибурчак ичига тушиш эҳтимоллигини топинг.

2.118. Квадратнинг тайинланган учидан унинг диагоналидан кичик ихтиёрый радиус билан айлана чизилган. Айлана квадратнинг бу учга эга бўлган томонларини кесиб ўтиши эҳтимоллигини топинг.

2.119. R радиусли айланада таваккалига нукта танланади. Бу нукта айланада белгилаб қўйилган A нуктадан R радиусдан катта бўлмаган масофада ётиши эҳтимоллигини топинг.

2.20. Миналар қўйилиб қилинган тўсик миналар ораси 100 м дан қилиб, бир чизик бўйича жойлаштирилган. Кенглиги 20 м бўлган кеманинг бу тўсикни тўғри бурчак остида кесиб ўтганда, милага дуч келиши эҳтимоллигини топинг. (Чизикнинг кенглигини ҳисобга олмаслик мумкин.)

2.21. Узунлиги 12 см бўлган AB кесмага таваккалига C нукта қўйилади. AC кесмага қурилган квадрат юзи 36 см^2 ва 81 см^2 лар орасида бўлиши эҳтимоллигини топинг.

2.22. Учлари $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 1)$, $(1; 0)$ бўлган квадратга таваккалига (x, y) нукта ташланади. Бу нуктанинг координаталари $y < 2x$ тенгсизликни қаноатлантириши эҳтимоллигини топинг.

2.23. R радиусли доирага таваккалига ташланган нуктанинг доирага ички чизилган квадратга тушиши эҳтимоллигини топинг.

2.24. R радиусли доирага таваккалига ташланган нуктанинг доирага ички чизилган мунтазам учбурчакка тушиши эҳтимоллигини топинг.

2.25. Тез айланаётган диск жуфт сондаги тенг секторларга ажратилган ва улар навбат билан OK ва KO радиусларга бўяб чиқилган. Дискка қарата ўқ узилади. Ўқнинг секторлардан бирига тегиши эҳтимоллигини топинг. (Ўқнинг текис фигурага тегиш эҳтимоллиги бу фигуранинг юзига пропорционал деб фараз қилинади.)

2.26. Разведкачилар радиоприёмниги сигналларни узун тулқиндаги частоталарда даврий равишда ҳар 2 мин да 16 с давомда қабул қилади. Агар сигнални қайд қилиш учун қабул 1 с дан кам бўлмаслиги зарур бўлса, радиоприёмникнинг 10 с давом этадиган сигнални қайд қилиши эҳтимоллигини топинг.

2.27. Узунлиги L бўлган AB телефон линиясининг C нуктасида (унинг ҳолати линия бўйича тенг имкониятли) узилиш рўй берди. C нуктанинг A нуктадан l дан кичик бўлмаган масофада жойлашганлиги эҳтимоллигини топинг.

2.28. Аэропортнинг қўндириш системаси (тизими) мураккаб метеорологик шартларда самолётларни 5 мин дан кам бўлмаган оралик билан қўндиришни таъминлайди. Иккита самолёт жадвал бўйича бири соат 10 да, иккинчиси соат 10 у 10 минутда аэродромга қўнишлари керак. Агар биринчи самолёт аэродромга жадвалга нисбатан 10 мин атрофида, иккинчиси 5 мин атрофида четланиш билан кириб келиши мумкин бўлса (бунда жадвалдан кўрсатилган

чегараларда четланишлар катталиклари тенг имкониятли деб фараз қилинади), иккинчи самолётнинг кутиш зонасига кетиб туриши эҳтимоллигини топинг.

2.29. Томони a бўлган мунтазам учбурчаклардан терилган паркетга r радиусли танга таваккалига ташланди. Танга учбурчаклардан ҳеч қайсисининг томонига тегмаслиги эҳтимоллигини топинг.

2.30. a узунликдаги стержень таваккалига 3 булакка бўлинди. Ҳар қайси булакнинг узунлиги $a/4$ дан катта бўлиши эҳтимоллигини топинг.

3.1. Пул-буюм лотереясининг ҳар 10000 билетига 150 та буюм ва 50 та пул ютуқлари ўйналади. Бир дона лотерея билети эгасининг буюм ёки пул ютуғи ютиб олиш эҳтимоллигини топинг.

3.2. Мерганнинг битта ўқ узиб 10 очко олиш эҳтимоллиги 0,1 га, 9 очко олиш эҳтимоли 0,3 га, 8 ёки ундан кам очко олиш эҳтимоллиги 0,6 га тенг. Мерганнинг битта ўқ узиб 9 тадан кам бўлмаган очко олиши эҳтимоллигини топинг.

3.3. Партиядаги 10 та деталнинг 8 таси стандарт. Таваккалига олинган 2 та деталнинг ақалли биттаси стандарт бўлиши эҳтимоллигини топинг.

3.4. Яшикда 10 та деталь бўлиб, уларнинг 2 таси ностандарт. Таваккалига олинган 6 та деталь ичида биттадан қўп бўлмаган ностандарт деталь бўлиши эҳтимоллигини топинг.

3.5. Мерганнинг ўнлик соҳага уриши эҳтимоли 0,05; тўққизликка 0,2; саккизликка 0,6. Битта ўқ узилади. Қуйидаги ҳодисаларнинг эҳтимолликларини топинг.

A — камида 8 очко олинган.

B — 8 дан қўп очко олинган.

3.6. Яшикда 8 та оқ ва 12 та қизил бир хил шарлар бор. Таваккалига учта шар олинади. Уларнинг ақалли биттаси оқ бўлиши эҳтимоллигини топинг.

3.7. Яшикда 8 та оқ ва 12 та қизил шар бор. Таваккалига 5 та шар олинади. Уларнинг ичида биттадан қўп бўлмаган оқ шар бўлиши эҳтимоллигини топинг.

3.8. Яшикда 9 та оқ ва 14 та қизил шар бор. Таваккалига 6 та шар олинади. Уларнинг ичида камида иккитаси оқ шар бўлиши эҳтимоллигини топинг.

3.9. Жисмоний тарбиячилар кунн талаба ўйингоҳга борди. Футболга 0,3 эҳтимоллик билан, баскетболга 0,4 эҳтимоллик билан, волейболга 0,2 эҳтимоллик билан чипта сотиб олиш мумкин эди. Талабанинг мусобақага тушиши эҳтимоллигини топинг. Талабанинг баскетбол ёки волейбол мусобақасига қира олиш эҳтимоллигини топинг.

3.10. Яшикда 8 та қизил, 10 та яшил ва 12 та қўқ рангдаги бир хил шар бор. Таваккалига учта шар олинади. Уларнинг ақалли иккитаси бир хил рангда бўлиши эҳтимоллигини топинг.

3.11. Устахонада учта станок ишлаб турибди. Смена давомиди

биринчи станокнинг бузилиши эҳтимоллиги 0,15 га, иккинчи станокники 0,1 га, учинчи станокники 0,12 га тенг. Станоклар бир пайтда бузилмайди деб фараз қилиб, смена давомида акалли битта станокнинг бузилиши эҳтимоллигини топинг.

3.12. Қутида 15 та ок, 20 та қора, 25 та яшил, 10 та қизил шар бор. Таваккалига олинган шар ок, қора ёки қизил бўлиши эҳтимолликларини топинг.

3.13. Қутида 10 та ок, 15 та қора, 20 та яшил, 25 та қизил шар бор. Таваккалига олинган шар ок, қора ёки қизил бўлиши эҳтимолликларини топинг.

3.14. Ишчи учта станокка хизмат кўрсатади. Смена давомида ишчининг аралашувини талаб қилиш эҳтимоллиги биринчи станок учун 0,7 га, иккинчи станок учун 0,75 га, учинчи станок учун эса 0,8 га тенг. Смена давомида ишчининг аралашувини қайсидир 2 та станокнинг талаб қилиши эҳтимоллигини топинг.

3.15. Битта ўк узишда нишонга текказиш эҳтимоллиги биринчи мерган учун p га иккинчиси учун 0,7 га тенг. Битта ўк узишда роса бир марта нишонга текказиш эҳтимоллиги иккала мерган учун 0,38 га тенг эканлиги маълум. P ни топинг.

3.16. Бирор физик микдорни бир марта ўлчашда берилган аниқликдан ортик бўлган хатоликка йўл қўйиш эҳтимоллиги 0,2 га тенг. Тўртта боғлиқмас ўлчаш ўтказилди. Қўпи билан битта ўлчашда берилган аниқликдан ортик бўлган хатоликка йўл қўйилганлик эҳтимоллигини топинг.

3.17. Бир дона пул-буюм лотереяси билан ютиш эҳтимоллиги $1/7$ га тенг. 5 дона билет сотиб олиб: а) бешта билетнинг ҳаммасига ютиши, б) акалли битта билетга ютиш эҳтимоллигини топинг.

3.18. Бир бирига боғлиқмас 3 та ўк узишда акалли бир марта нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,9984 га тенг. Битта ўк узишда нишонга текказиш эҳтимоллигини топинг.

3.19. Абонент тераётган телефон номерининг охири рақамини эсидан чиқариб қўйди ва уни таваккалига терди. Унинг 2 тадан ортик бўлмаган муваффақиятсиз уриниш қилиши эҳтимоллигини топинг.

3.20. Битта ўк узишда нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,2 га тенг. 8 та ўк узилди. Нишонни яқсон қилиш учун ҳеч бўлмаганда бир марта нишонга текказиш етарли бўлса, нишоннинг яқсон қилиниш эҳтимоллигини топинг.

3.21. Талаба имтиҳон саволларининг 25 тасидан 20 тасинигина тайёрлашга улгурди. Талабанинг таваккалига танлаган 4 та саволнинг камида 2 тасини билиш эҳтимоллигини топинг.

3.22. Овчи узоқлашиб бораётган нишонга қарата 3 марта ўк узди. Нишонга тегиш эҳтимоллиги ўк узишнинг бошида 0,8 га тенг, у кейинги ҳар бир ўк узишда 0,1 га камаяди. Овчи:

- а) учала ҳолда теккиза олмаслиги;
- б) акалли бир марта текказиш;
- в) икки марта текказиш эҳтимоллигини топинг.

3.23. Имтиҳон билетида 3 та савол бор. Талабанинг биринчи ва иккинчи саволга жавоб бериш эҳтимоллиги 0,9 га, учинчи саволга эса 0,8 га тенг. Агар имтиҳонни топшириш учун:

- а) ҳамма саволларга жавоб бериш керак;
- б) ақалли 2 та саволга жавоб бериш керак бўлса, талабанинг имтиҳонни топшириш эҳтимоллигини топинг.

3.24. n та оқ ва m та қора шар бўлган қутидан 2 та шар олинади. Олинган шарлар турли рангда бўлиши эҳтимоллигини топинг.

3.25. Қутида 10 та оқ, 15 та қора, 20 та яшил ва 25 та қизил шар бор. Битта шар олинади. Олинган шар:

- а) қизил, оқ ёки қора бўлиши;
- б) яшил ёки қизил бўлиши;
- в) оқ, қора ёки яшил бўлиши эҳтимоллигини топинг.

3.26. Танга 4 марта ташланади. Гербли томон роса икки марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

3.27. Заём облигацияларининг ярмиси ютукли. Ақалли битта облигацияга 0,95 дан катта эҳтимоллик билан ютук чиқишига ишонч ҳосил қилиш учун неча облигация сотиб олиш керак?

3.28. Яшиқда 90 та ярқоқ ва 10 та ярқисиз деталь бор. Йиғувчи кетма-кет (қайтариб солмай) 10 та деталь олади. Олинган деталлар орасида:

- а) ярқисизлари йўқлиги,
- б) ҳеч бўлмаганда биттаси ярқисиз бўлиши эҳтимоллигини топинг.

3.29. Иккита ўйин соққасини неча марта ташланганда ақалли бир марта 12 очко тушишига 0,5 дан кам бўлмаган эҳтимоллик билан ишонч ҳосил қилиш мумкин?

3.30. Ўйин иккита ўйинчининг бири кетма-кет 2 партияни ютгунча давом этади (дуранг натижа ҳисобга олинмайди). Ҳар бир ўйинчининг партияни ютиши эҳтимоллиги 0,5 га тенг ва олдинги партиялар натижаларига боғлиқ эмас. Ўйин 6- партиягача тугаши эҳтимоллигини топинг.

4.1. 10 000 та киймат келтирилган логарифмлар жадвалида битта хато кетган. Жадвалдан таваккалига олинган 100 та логарифм киймати орасида ақалли битта хато киймат борлиги эҳтимоллигини топинг.

4.2. Олти лампали (ҳамма лампалар ҳар хил) радиоприёмникнинг битта лампаси «қуйиб» қолди. Приёмникни тузатиш учун занжирдаги элементдан таваккалига танланган лампани олиб аралаштирилади ва приёмник текшириб қўрилади. Приёмникнинг

- а) битта лампани;
- б) иккита лампани;
- в) учта лампани алмаштиргандан сўнг одатдагидек ишлаб кетиши эҳтимоллигини топинг.

4.3. Тўрт овчи нишонга қарата маълум бир тартибда ўқ узишга келишиб олишди: навбатдаги овчи ундан олдинги овчи нишонга теккиза олмаган тақдирдагина ўқ узади. Ҳар бир овчининг нишонга

текказиш эҳтимоллиги бир хил бўлиб, 0,8 га тенг. Нишонга карата:

а) битта;

б) иккита;

в) учта ўқ узилиш эҳтимоллигини топинг.

4.4. Ракамли кулф умумий ўқида тўртта диск бор. Хар бир диск ракамлар билан белгиланган олтига секторга бўлинган. Кулфни дисклардаги ракамлар маълум комбинация (у кулфнинг «сири»дан иборат) ташкил этгандагина очиш мумкин. Ракамларнинг ихтиёрий комбинациясини териб, кулфни очиш мумкинлиги эҳтимоллигини топинг.

4.5. Механизмга учта бир хил деталь киради. Агар механизмни йиғишда учала деталь ўрнига ўлчамлари чизмада белгиланганидан катта бўлган деталлар қўйилса, механизмнинг иши бузилади. Йиғувчида 5 таси катта ўлчамдаги 12 та деталь қолди. Агар йиғувчи деталларни таваккалига олса, бу деталлардан йиғилган механизмнинг нормал ишламаслик эҳтимоллигини топинг.

4.6. Корхонада яроксиз маҳсулот умумий маҳсулотнинг ўртача 2 %ни ташкил этади. Ярокли маҳсулотнинг 95 % ини биринчи нав ташкил этади. Таваккалига олинган маҳсулот:

а) текширишдан ўтган маҳсулотдан олинган бўлса;

б) тайёрланган умумий маҳсулотдан олинган бўлса, унинг биринчи навли бўлиши эҳтимоллигини топинг.

4.7. Овчи узоқлашаётган нишонга карата 2 марта ўқ ўзди. Отиш бошланганда нишонга тегиш эҳтимоллиги 0,8 га тенг, кейинги хар кайси ўқ ўзишда эса у 0,1 га камаяди. Овчининг:

а) хар иккала ҳолда ҳам нишонга текказа олмаслиги;

б) акалли бир марта текказиш эҳтимоллигини топинг.

4.8. «А» ва «В» ходисалар қуйидагича: «А» ходиса — 4 та уйин соққасини бир пайтда ташланганда акалли битта бир тушиши; «В»ходиса — 2 та соққани 24 марта ташланганда акалли бир марта 2 та бир тушиши. Бу ходисаларнинг қайси бири эҳтимоллироқ?

4.9. Ишчи тайёрлайдиган деталларнинг 8 %и яроксиз. Синаб қўришга олинган деталлар орасида бирорта ҳам яроксиз булмаслиги эҳтимоллигини топинг.

4.10. Иссиқлик электростанциясида 15 смена муҳандислари бўлиб, уларнинг 3 таси аёллар. Сменада 3 киши туради. Таваккалига танланган сменада эркаклар 2 тадан кам булмаслиги эҳтимоллигини топинг.

4.11. 30 талабанинг ишлаб чиқариш амалиёти учун Тошкентда 15 та жой, Фарғонада 8 та жой, Олмалиқда 7 та жой ажратилган. Икки ўртоқнинг битта шаҳарда амалиёт ўтиши эҳтимоллигини топинг.

4.12. Кутида a дона o_k ва b дона қора шар бор. Кутидаги ҳамма шарлар бирин-кетин, тасодифий равишда олинади. Тартиб бўйича иккинчи олинган шарнинг o_k бўлиши эҳтимоллигини топинг.

4.13. Карталарнинг тўлиқ дастаси (52 та карта)дан бирварақайнга 4 та карта олинади. Қуйидаги ходисалар қаралади:

«А» — олинган карталар ичида ҳеч бўлмаганда битта «ғиштин» бўлади;

«В» — олинган карталар ичида ҳеч бўлмаганда битта «қарға» бўлади.

$A+B$ ходисанинг эҳтимоллигини топинг.

4.14. Касаба уюшмаси ёзда дам олишга кетадиган болалар учун 15 та спорт лагерига, 9 та сайёҳлик лагерига ва 4 та соғломлаштириш лагерига йўлланмалар ажратди. Агар учта ўртоқнинг ота-оналари бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда биттадан йўлланма олиб келган бўлсалар, бу уч ўртоқнинг битта лагерда дам олиши эҳтимоллигини топинг.

4.15. Биринчи қутида 5 та оқ, 11 та қора ва 8 та қизил шар, иккинчи қутида эса 10 та оқ, 8 та қора ва 6 та қизил шар бор. Ҳар иккала қутидан таваккалига биттадан шар олинади. Олинган шарлар бир хил рангда бўлиши эҳтимоллигини топинг.

4.16. Яшиқда тўрт рангдаги ғалтак иплар бор: оқ — 50 %, қизил — 20 %, яшил — 20 %, кўк — 10 %. Таваккалига олинган ғалтакнинг яшил ёки кўк бўлиши эҳтимоллигини топинг.

4.17. Тайёрланаётган деталларнинг ўртача 3 %и яроксиз. Синаш учун олинган 5 та деталнинг орасида бирорта ҳам яроксиз бўлмаслиги эҳтимоллигини топинг.

4.18. Қутичада 30 % и оқ, қолганлари қизил ғалтак иплар аралаштирилиб қуйилган. Таваккалига олинган икки ғалтак ип бир хил рангда бўлиши эҳтимоллигини топинг.

4.19. Техник қаров станциясига 20 та машина келтирилди. Уларнинг 5 тасида юриш қисмида, 8 тасида моторда нуқсонлар бўлиб, 10 тасида ҳеч қандай нуқсон топилмади. Юриш қисмида нуқсони бўлган машинанинг моторида ҳам нуқсон борлиги эҳтимоллигини топинг.

4.20. 12 ўғил бола ва 18 қиз бола бор гуруҳдан 2 киши таваккалига танланди. Уларнинг

а) иккаласи ўғил бола;

б) қиз бола ва ўғил бола бўлиши эҳтимоллигини топинг.

4.21. Харидорга 41-ўлчамдаги пойафзал зарурлиги эҳтимоллиги 0,2 га тенг бўлсин. Дастлабки бешта харидорнинг 41-ўлчамдаги пойафзални сураш эҳтимоллигини топинг.

4.22. 1 ва 2 деб белгиланган 2 та ўйин соққаси ташланди. Биринчи соққадаги очколарнинг иккинчи соққадаги очколардан катта бўлиши эҳтимоллигини топинг.

4.23. Ўйин соққасини ташланганда жуфт ёки учга қаррали очко тушиши эҳтимоллигини топинг.

4.24. Ишчи 4 та станокка хизмат кўрсатади. Бир соат давомида биринчи станок ишчининг созлаш учун аралашувини талаб қилмаслиқ эҳтимоллиги 0,2 га тенг; иккинчи станок учун 0,25; учинчи станок учун 0,6 га, тўртинчи станок учун эса 0,4 га тенг. Бир соат давомида бирорта ҳам станокнинг ишчининг аралашувини талаб этмаслиги эҳтимоллигини топинг.

4.25. Талаба олий математикадан имтихонга тайёрланиши учун математик таҳлил фанидан 20 саволга ва геометриядан 25 та саволга жавоб тайёрлаши керак. Бирок, у математик таҳлилдан 15 та, геометриядан 20 та саволга жавоб тайёрлай олди, холос. Билетда 3 та савол бор: 2 та таҳлилдан ва 1 та геометриядан.

а) талаба имтихонни аълога топшириши (учала саволга ҳам жавоб бериши);

б) яхшига топшириши (исталган иккита саволга жавоб бериши) эҳтимоллигини топинг.

4.26. Деталларга 3 боскичда ишлов берилади. Биринчи боскичда яроксиз деталь олиш эҳтимоллиги 0,02 га, иккинчисиди 0,03 га, учинчисиди 0,02 га тенг. Айрим боскичларда яроксиз деталь олиш боғлиқмас ходисалар деб фараз қилиб, 3 та боскичдан сўнг яроқли деталь олиш эҳтимоллигини топинг.

4.27. 1,2,3,4,5 рақамлардан биттаси, қолганларидан яна биттаси танланади. Тоқ сон танланган бўлиб, унинг

а) биринчи галда,

б) иккинчи галда,

в) иккала галда ҳам танланганлиги эҳтимоллигини топинг.

4.28. n -тартибли дитерминант ёйилмасининг битта ҳади таваккалига танланади. Танланган ҳадда бош диагональ элементлари бўлмаслиги эҳтимоллиги p_n ни топинг. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ ни ҳисобланг.

4.29. Уч киши галма-галдан тангани ташлайди. Кимда биринчи бўлиб гербли томон тушса, ўша ютган ҳисобланади. Ҳар қайси ўйинчи учун ютиш эҳтимоллигини топинг.

4.30. Икки киши галма-галдан тангани ташлайди. Кимда биринчи бўлиб гербли томон тушса, ўша ютган ҳисобланади. Ҳар қайси ўйинчи учун ютиш эҳтимоллигини топинг.

5.1. Пластмасса ғўлалар учта прессда тайёрланади. I пресс барча ғўлаларнинг 50 % ини, II- 30 %, III- 20 % ини ишлаб чиқаради. Бунда I пресс ғўлаларининг 0,025, II нинг 0,02, III нинг 0,015 қисми ностандартдир. Тайёр ғўлалар ичидан таваккалига олингани стандарт бўлиши эҳтимоллигини топинг.

5.2. Пластмасса буюмлар учта автоматда тайёрланади: I автомат маҳсулотнинг 40 % ини, II-35 % ини, III-25 % ини ишлаб чиқаради. Бунда I автоматнинг 0,13, II-0,025, III-0,025 қисми ностандарт буюмлардир. Танланган стандарт буюм III автоматда тайёрланганлиги эҳтимоллигини топинг.

5.3. Дўконга 4 лампочка заводда тайёрланган бир хил лампочкалар қабул қилиб олинди: I заводдан 350 дона, II дан 625 дона, III дан 245 дона ва IV дан 850 дона. Лампочкалар 1500 соатдан ортиқ вақт ёниши эҳтимоллиги I завод учун 0,25 га, II завод учун 0,30 га, III завод учун 0,40 га, IV завод учун 0,75 га тенг. Дўкон тоқчаларига лампочкалар аралаштириб териб чиқилди. Сотиб олинган лампочканинг 1500 соатдан кўп вақт ёниши эҳтимоллигини топинг.

5.4. Омборга 1000 та подшипник келтирилди. Уларнинг 260 таси I заводда, 400 таси II заводда ва 340 таси III заводда тайёрланган. Подшипникнинг ностандарт бўлиб чиқиши эҳтимоллиги I завод учун 0,08 га, II завод учун 0,025 га, III завод учун, 0,04 га тенг. Таваккалига олинган подшипник ностандарт бўлиб чикди. Бу подшипникнинг I заводда тайёрланганлиги эҳтимоллигини топинг.

5.5. Электр лампочкалари партиясининг 10 % и I заводда, 40 % и II заводда, 50 % и III заводда тайёрланган. Яроксиз лампочка ишлаб чиқариш I завод учун 0,02, II завод учун 0,008, III завод учун 0,006. Таваккалига олинган лампочканинг яроксиз бўлиши эҳтимоллигини топинг.

5.6. Соатлар учта заводда тайёрланади ва дуконга келтирилади. I завод махсулотнинг 40 % ини, II завод 45 % ини, III завод 15 % ини тайёрлайди. I завод тайёрлаган соатларнинг 90 % и, II завод соатларининг 70 % и, III завод соатларининг 90 % и илгарилаб кетади. Сотиб олинган соатнинг илгарилаб кетиши эҳтимоллигини топинг.

5.7. Иккита яшикда радиолампар бор. Биринчи яшикда 12 лампа бўлиб, I таси яроксиз, иккинчи яшикда 10 та лампочка бўлиб, уларнинг I таси яроксиз. Биринчи яшикдан битта лампа олиниб, иккинчи яшикка солинади. Иккинчи яшикдан таваккалига олинган лампанинг яроксиз бўлиши эҳтимоллигини топинг.

5.8. Биринчи жамоада 6 та спорт устаси ва 4 та биринчи разрядли спортчи, иккинчи жамоада 6 та биринчи разрядли спортчи ва 4 та спорт устаси бор. Бу жамоалар уйинчиларидан тузилган терма жамоада 10 уйинчи бор: 6 уйинчи — биринчи жамоадан, 4 уйинчи — иккинчи жамоадан. Терма жамоадан таваккалига бир уйинчи танланади. Бу уйинчининг спорт устаси бўлиши эҳтимоллигини топинг.

5.9. Хамма буюмлар иккита назоратчи томонидан текширилади. Буюмнинг текшириш учун биринчи назоратчига тушиши эҳтимоллиги 0,55 га, иккинчи назоратчига тушиши эҳтимоллиги 0,45 га тенг. Биринчи назоратчининг ностандарт буюмни ўтказиб юбориш эҳтимоллиги 0,01 га, иккинчи назоратчи учун 0,02 га тенг. Таваккалига «стандарт» тамғали буюм олинганда у яроксиз бўлиб чикди. Бу буюмнинг иккинчи назоратчи томонидан текширилганлиги эҳтимоллигини топинг.

5.10. Йиғиш учун деталлар иккита станокда тайёрланиб, уларнинг биринчиси иккинчисига нисбатан 3 марта кўп деталь ишлаб чиқаради. Бунда биринчи станок ишлаб чиқарадиган деталларнинг 0,025, иккинчи станок учун 0,015 қисмини яроксиз деталлар ташкил этади. Таваккалига йиғиш учун олинган битта деталь ярокли бўлиб чикди. Бу деталнинг иккинчи станокда тайёрланган бўлиши эҳтимоллигини топинг.

5.11. 9 та бир хил ёпик кутининг ҳар бирида факат ранглари билан фаркланувчи 10 тадан шар бор. 2 та кутида 5 тадан оқ шар бор, 3 кутида 4 тадан оқ шар бор ва 4 кутида 3 тадан оқ шар бор. Тўғмаси босиш натижасида қайсидир кутидан оқ шар олиб

чикди. Бу кутида 3 та ок шар бўлганлиги эҳтимоллигини топинг.

5.12. 4 та мерган бир-бирига боғлиқ бўлмаган ҳолда битта нишонга биттадан ўқ уздилар. Бу мерганлар учун нишонга текказиш эҳтимолликлари мос равишда 0,4; 0,6; 0,7; 0,8 га тенг. Отиш тугагандан сўнг нишондан учта ўқнинг изи топилди. Тўртинчи мерганнинг ўқи хато кетганлиги эҳтимоллигини топинг.

5.13. Биринчи кутида 10 та шар бўлиб, уларнинг 8 таси ок, иккинчи кутида 20 та шар бўлиб, 4 таси ок. Ҳар қайси кутидан таваккалига биттадан шар олинди, сўнгра таваккалига бу шарларнинг бири олинди. Ок шар олинганлиги эҳтимоллигини топинг.

5.14. Талабаларнинг қурилиш отрядида 2 та бригада биринчи босқич талабаларидан, битта бригада эса иккинчи босқич талабаларидан тузилган. Биринчи босқичларнинг ҳар қайси бригадасида 5 йигит ва 3 киз бор, иккинчи босқичларнинг бригадасида 4 йигит ва 4 киз бор. Қуръа ташлаш билан отряд бригадаларининг биридан шаҳарга бориш учун бир киши танланди.

а) Йигит танланганлиги эҳтимоллигини топинг.

б) Йигит танланган. Унинг биринчи босқич талабаси экани эҳтимоллигини топинг.

5.15. Омборда 3 та фабрикадан маҳсулот келади: биринчи фабриканинг маҳсулоти 20 % ни, иккинчи фабриканики 46 % ни, учинчи фабриканики 34 % ни ташкил этади. Ностандарт буюм ишлаб чиқариш 1-фабрика учун ўртача 3 % ни, 2-фабрика учун 2 % ни, 3-фабрика учун 1 % ни ташкил этади. Агар таваккалига олинган буюм ностандарт бўлса, унинг 1-фабрикада тайёрланганлик эҳтимоллигини топинг.

5.16. Имтиҳонга келган 10 талабанинг учтаси аъло, тўрттаси — яхши, иккитаси — ўртача ва биттаси — ёмон тайёргарликка эга. Имтиҳон билетларида 20 та савол бор. Аъло тайёргарликка эга талаба барча 20 та саволга, яхши тайёргарликка эга талаба 16 та саволга, ўртачаси 10 та саволга, ёмони 5 та саволга жавоб бериши мумкин. Таваккалига чақирилган талаба берилган 3 та исталган саволга жавоб берди. Бу талабанинг: а) аъло тайёргарликка; б) ёмон тайёргарликка эга эканлиги эҳтимоллигини топинг.

5.17. Радиолампа учта заводнинг ҳар биридан тегишли 0,25; 0,50; 0,25 эҳтимолликлар билан қабул қилинади. Бир йил ичида лампочкаларнинг ишдан чиқиш эҳтимоллиги 1-завод лампалари учун 0,1 га, иккинчи учун 0,2 га, учинчи учун 0,4 га тенг. Таваккалига танланган лампанинг бир йил ишлаши эҳтимоллигини топинг.

5.18. Бензин қуйиш шохобчаси олтидан енгил ва юк машиналари ўтиб туради. Уларнинг 60 % и юк машиналаридан иборат. Ўтиб кетаётган машинанинг бензин қуйиш шохобчасига кириб ўтиш эҳтимоллиги юк машинаси учун 0,1 га, енгил машина учун 0,2 га тенг. Шохобчага машина кириб келди. Унинг юк машинаси эканлиги эҳтимоллигини топинг.

5.19. Қурилишга 1000 дона ғишт келтирилди. Йулда ғиштниги синиш эҳтимоллиги 0,003 га тенг. Қурилишга: а) 2 тадан ортик

синган гишт: 6) ақалли битта синган гишт келтирилганлиги эҳтимоллигини топинг.

5.20. Спартакиадада I-гуруҳдан 4 талаба, 2-гуруҳдан 6 талаба, 3-гуруҳдан 5 талаба катнашмоқда. I-гуруҳ талабаси институт терма жамоасига 0,9 эҳтимоллик билан қабул қилинади, 2-гуруҳ талабаси учун бу эҳтимоллик 0,7 га, 3-гуруҳ талабаси учун 0,8 га тенг. Таваккалига танланган талаба институт терма жамоасига қабул қилинди. Бу талабанинг қайси гуруҳда ўқиши эҳтимоллироқ?

5.21. Йиғилган электр занжирга I тур саклагич қўйилиши мумкин, у қучланиш ортиб кетганда 0,8 эҳтимоллик билан ишлаб кетади ёки II тур саклагич қўйилиши мумкинки, у уша шароитда 0,9 эҳтимоллик билан ишлаб кетади. I тур саклагич занжирга 0,6 эҳтимоллик билан, II тур саклагич эса 0,4 эҳтимоллик билан ўланиши мумкин. Занжирга ўланган саклагич ишга тушиб кетди. Қайси бири эҳтимоллироқ: I тур саклагич қўйилганими ёки II тур саклагич қўйилганими?

5.22. Ишчи бир хил деталларга ишлов бериладиган учта станокка хизмат кўрсатади. Яроксиз деталь ишлаб чиқариш эҳтимоллиги I-станок учун 0,02 га, 2-станок учун 0,03 га, учинчи станок учун — 0,04 га тенг. Ишлов берилган деталлар битта яшикка жойланади. I-станокнинг унумдорлиги 2-станокка нисбатан уч марта юқори, 3-станокнинг унумдорлиги эса 2-станокнинг унумдорлигига нисбатан икки марта паст. Таваккалига олинган деталнинг яроксиз бўлиб чиқиши эҳтимоллигини топинг.

5.23. Самолётга қарата учта ўк узилди. I-отишда мўлжалга тегиш эҳтимоллиги 0,5 га, 2-отишда 0,6 га, 3-отишда 0,8 га тенг. Битта ўк текканда самолётнинг уриб туширилиш эҳтимоллиги 0,3 га, иккита ўк текканда 0,6 га тенг, учта ўк текканда эса самолётнинг уриб туширилиши аниқдир. Самолётнинг уриб туширилиши эҳтимоллигини топинг.

5.24. Учта станок конвейерга деталлар етказиб беради. I-станок учун яроксиз деталь чиқариш эҳтимоллиги 0,03 га, 2-станок учун 0,02 га, 3-станок учун 0,01 га тенг. I-станокнинг унумдорлиги 2-станокникига нисбатан уч марта юқори. 3-станокники эса 2-станокникига нисбатан 2 марта юқори. Конвейердан таваккалига олинган деталнинг яроксиз бўлиши эҳтимоллигини топинг.

5.25. Йиғув цехига деталлар 3 та автоматдан келтирилади. I-автомат 0,3 %, 2-автомат — 0,2 %, 3-автомат 0,4 % яроксиз деталь ишлаб чиқариши маълум. Агар I-автоматдан 1000 та, 2-автоматдан 2000 та, 3-автоматдан 2500 та деталь келтирилган бўлса, йиғишга таваккалига олинган деталнинг яроксиз бўлиши эҳтимоллигини топинг.

5.26. Йиғиш цехига деталлар 2 та бўлимдан келтирилади: I бўлимдан — 70 %, II бўлимдан — 30 %. Бунда I бўлим деталларининг 10 %и, II бўлимики эса 20 % и яроксиз. Таваккалига олинган деталнинг яроксиз бўлиши эҳтимоллигини топинг.

5.27. Электр лампочкалари партиясининг 20 % ини 1-завод, 30 % ини 2-завод, 50 % ини 3-завод тайёрлаган. 1-завод учун яроксиз лампочка ишлаб чиқариш эҳтимоллиги 0,01 га, 2-завод учун 0,005 га, 3-завод учун 0,006 га тенг. Таваккалига олинган лампочканинг яроксиз бўлиши эҳтимоллигини топинг.

5.28. Омборга 1000та деталь келтирилди. Уларнинг 200 таси 1-заводда, 460 таси 2-заводда, 340 таси 3-заводда тайёрланган. Деталнинг яроксиз бўлиб чиқиши эҳтимоллиги 1-завод учун 0,03 га, 2-завод учун 0,02 га, 3-завод учун эса 0,01 га тенг. Таваккалига олинган деталь яроксиз бўлиб чиқди. Унинг 1-заводда тайёрланган бўлиши эҳтимоллигини топинг.

5.29. Дўконга 4 та лампа заводида тайёрланган бир хил электр лампочкалари келтирилди: 1-заводдан 250 та, 2-заводдан 525 та, 3-заводдан 275 та ва 4-заводдан 950 та. Лампочканинг 1500 соатдан кўп ёниши эҳтимоллиги 1-завод учун 0,15 га, 2-завод учун 0,30 га, 3-завод учун 0,20 га ва 4-завод учун 0,70 га тенг. Лампочкалар тоқчаларга жойлаштирилаётганда улар аралашиб кетди. Сотиб олинган лампочканинг 1500 соатдан ортиқ ёниши эҳтимоллигини топинг.

5.30. Пластмасса буюмлар учта станокда тайёрланади. I станок бутун маҳсулотнинг 50 % ини, II 30 % ини, III 20 % ни тайёрлайди. Бунда I станок буюмларининг 0,025 қисми, II нинг 0,02 қисми, III нинг 0,015 қисми яроксиз. Стандартга жавоб берувчи буюмнинг II станокда тайёрланганлик эҳтимоллигини топинг.

6.1. Цехда 6 та мотор бор. Хар бир мотор учун унинг мазкур пайтда ишга туширилганлик эҳтимоллиги 0,8 га тенг. Мазкур пайтда а) 4 та мотор: б) ҳамма моторлар ишга туширилганлик эҳтимоллиги; в) барча моторлар ўчириб қўйилганлик эҳтимоллигини топинг.

6.2. Бир дона лотерея билетига ютук чиқиш эҳтимоллиги $\frac{1}{7}$ га тенг. 6 та билетга эга бўлиб: а) иккита билетга; б) учта билетга; в) ҳамма билетларга ютук чиқиши эҳтимоллигини топинг.

6.3. Бананлар ортилган учта кема келиши кутиляпти. Статистиканинг кўрсатишича келтириляётган бананларнинг йўлда айниб қолиши 13 % ни ташкил этади. У ҳолда а) битта кеманинг; б) иккита кеманинг; в) учала кеманинг айниган маҳсулот билан келиши эҳтимоллигини топинг. Барча кемалардаги бананларнинг айнамаган бўлиши эҳтимоллиги нимага тенг?

6.4. Автобазада 12 та машина бор. Уларнинг хар бирининг йўлга чиқиш эҳтимоллиги 0,8 га тенг. Автобаза меъёрида ишлаши учун камида 8 та машина йўлда бўлиши керак бўлса, автобазанинг меъёрида ишлаши эҳтимоллигини топинг.

6.5. Телевизорнинг кафолат муддати ичида таъмирлашни талаб этиши эҳтимоллиги 0,2 га тенг. Кафолат муддати ичида 6 та телевизорнинг а) биттадан кўп бўлмагани; б) ақалли биттаси таъмирлашни талаб этиши эҳтимоллигини топинг.

6.6. Таваккалига олинган деталнинг ностандарт бўлиши эҳтимоллиги 0,1 га тенг бўлсин. Таваккалига олинган бешта

деталнинг иккитадан кўп бўлмагани ностандарт бўлиши эҳтимоллигини топинг.

6.7. 6 та болали оилада камида иккитаси киз бола бўлиши эҳтимоллигини топинг. Ўгил бола туғилиши эҳтимоллигини 0,51 деб олинг.

6.8. Битта лотерея билетига ютук чиқиши эҳтимоллиги $\frac{1}{7}$ га тенг. Олти билетнинг энг камида иккитасига ютук чиқиши эҳтимоллигини топинг.

6.9. Объектни яксон қилиш учун камида 3 марта нишонга тегиш керак. 15 та ўқ узилди. Ҳар қайси отишда нишонга тегиш эҳтимоллиги 0,4 га тенг бўлса, объектнинг яксон қилиниш эҳтимоллигини топинг.

6.10. Синаш пайтида ишламай қолиш эҳтимоллиги ҳар бир асбоб учун 0,4 га тенг. Қайси ходисанинг эҳтимоллиги катта: 4 та боғлиқмас синашда 2 та асбобнинг ишламай қолишими ёки 6 та боғлиқмас синашда 3 та асбобнинг ишламай қолишими?

6.11. Устахонада 8 та мотор ишляпти. Ҳар бир мотор учун тушликкача кизиб кетиш эҳтимоллиги 0,7 га тенг. Тушгача: а) 4 та моторнинг кизиб кетиши; б) барча моторларнинг кизиб кетиши; в) бирорта ҳам моторнинг кизиб кетмаслик эҳтимоллигини топинг.

6.12. Яшиқда бир неча минг сақлагичлар бор. Уларнинг ярмисини 1-завад, қолганини 2-завад тайёрлаган. Таваккалига 5 та сақлагич олинди. Уларнинг: а) иккитаси; б) камида иккитаси; в) иккитадан кўпи 1-завадда тайёрланганлик эҳтимоллигини топинг.

6.13. Қайси бири эҳтимоллироқ: тенг қучли рақиб билан ўйнаб турт партиядан учтасини ютишми ёки саккиз партиядан камида бештасини ютишми (дуранг ҳисобга олинмайди)?

6.14. Ўйин соққасини 10 марта ташланганда учга қаррали очко икки мартадан кўп, лекин беш мартадан кам марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

6.15. Яшиқдаги деталларнинг 40 % и 1-завадда, қолганлари 2-завадда тайёрланган. Яшиқдан таваккалига 7 та деталь олинди. Уларнинг ичида: а) иккитаси; б) 3 тадан кўп бўлмагани; в) 2 тадан ортиги 1-завадда тайёрланган бўлиши эҳтимоллигини топинг.

6.16. Ишчи 50 та дастғохга хизмат қўрсатади. 6 соатлик иш вақтида дастғохнинг созлашни талаб этиши эҳтимоллиги $\frac{1}{3}$ га тенг. Қайси бири эҳтимоллироқ:

а) 17 та дастғох созлашни талаб этади;

б) 16 та дастғох созлашни талаб этади.

6.17. Завад дуқонга 5000 дона сифатли буюм жўнатди. Ҳар буюмнинг йўлда шикастланиш эҳтимоллиги 0,0002 га тенг. Йўлда 5000 буюмнинг: а) роса 3 таси; б) 3 тадан ортиги шикастланиши эҳтимоллигини топинг.

6.18. Кинотеатрга 730 томошабин сиғади. а) 3 та томошабин бир кунда (масалан, 1 мартда) туғилганлиги; б) 3 тадан кўп бўлмаган томошабин бир кунда туғилганлиги эҳтимоллигини топинг.

6.19. Курилишга 1000 дона гишт келтирилди. Ташиш ва келтириш пайтида гиштнинг синиш эҳтимоллиги 0,003 га тенг. Курилишга: а) 2 тадан ортик синган гишт келтирилганлик; б) камида битта синик гишт келтирилганлик эҳтимоллигини топинг.

6.20. Чапакайлар ўртача 1 % ни ташкил этади. 200 талаба орасида: а) роса 4 та; б) 4 тадан кам бўлмаган чапакай борлиги эҳтимоллигини топинг.

6.21. Дуконга 1000 шиша маъдан сув келтирилди. Келтириш пайтида шиша идишнинг синиб қолиши эҳтимоллиги 0,003 га тенг. Дуконга: а) роса 2 та; б) 2 тадан кам синган шиша идиш келтирилганлиги эҳтимоллигини топинг.

6.22. Дарслик 10000 нусхада чоп этилди. Дарслик нусхаси нотўғри бетланганлик эҳтимоллиги 0,0001 га тенг. Ҳамма нусха ичида роса 5 дона яроксиз дарслик борлиги эҳтимоллигини топинг.

6.23. Беш болали оилада учтадан ортик киз бола бўлмаслиги эҳтимоллигини топинг. (Ўгил бола туғилиши эҳтимоллиги 0,51 деб олинг.)

6.24. Китоб саҳифасида хато учраши эҳтимоллиги 0,002 га тенг. 500 саҳифали китоб текширилмоқда. а) 2 саҳифада; б) 2 дан ортик бўлмаган саҳифада хато учраши эҳтимоллигини топинг.

6.25. А ходисанинг рўй бериш эҳтимоллиги 0,4 га тенг. 10 та синовда А ходиса 3 тадан кўп бўлмаган ҳолда рўй бериш эҳтимоллигини топинг.

6.26. Завод дуконга 6000 дона сифатли буюм жўнатди. Йўлда шикастланиш эҳтимоллиги ҳар бир буюм учун 0,00025 га тенг. Жўнатилган 600 дона буюм орасида йўлда: а) роса 2 таси; б) 2 тадан кўпи шикастланган бўлиши эҳтимоллигини топинг.

6.27. Кинотеатрга 1000 та томошабин сигади. а) 2 та томошабиннинг бир кунда (масалан 1 мартда) туғилганлиги эҳтимоллиги; б) 2 тадан кўп бўлмаган томошабиннинг бир кунда туғилганлиги эҳтимоллигини топинг.

6.28. Дарслик 40000 нусхада чоп этилган. Дарслик нусхасида камчилик бўлиш эҳтимоллиги 0,00015 га тенг. Бутун нусхада роса 6 дона камчилиги бор дарслик бўлиши эҳтимоллигини топинг.

6.29. А ходисанинг рўй бериш эҳтимоллиги 0,45 га тенг. 40 та синовда А ходиса 8 тадан кўп бўлмаган ҳолда рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

6.30. Устахонада 9 та мотор ишляпти. Ҳар бир мотор учун тушгача кизиб кетиш эҳтимоллиги 0,6 га тенг. Тушгача: а) 3 та мотор кизиб кетиши эҳтимоллигини; б) ҳамма моторлар кизиб кетиши эҳтимоллигини; в) бирорта ҳам мотор кизиб кетмаслиги эҳтимоллигини топинг.

7.1. Тўпдан ўқ узишда битта ўқ узиб, нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,8 га тенг. 900 та ўқ узилганда уларнинг камида 690 тасининг, кўпи билан 740 тасининг нишонга тегиши эҳтимоллигини топинг.

7.2. Боллар йўнишда ўртача 10 % бракка йўл қўйилиши

кузатилади. 400 та болтдан иборат партияда 299 тадан ортиғи ярокли бўлиши эҳтимоллигини топинг.

7.3. Харакатланаётган нишонга битта ўк узишда текказиш эҳтимоллиги 0,7 га тенг. 20 та ўк узилганда 15 тасининг нишонга тегиши эҳтимоллигини топинг.

7.4. Битта ўк узишда нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,4 га тенг. 320 та ўк узилганда 100 тасининг нишонга тегиши эҳтимоллигини топинг.

7.5. Берилган ўсимлик уруғининг униб чиқувчанлиги 90 % ни ташкил этади. Экилган 800 та уруғнинг камида 700 тасининг униб чиқиши эҳтимоллигини топинг.

7.6. А ҳодисанинг 900 та боғлиқмас ҳодисаларининг ҳар бирида рўй бериши эҳтимоллиги p 0,8 га тенг. А ҳодисанинг камида 710 марта, кўпи билан 740 марта рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

7.7. А ҳодисанинг 900 та боғлиқмас ҳодисанинг ҳар бирида рўй бериши эҳтимоллиги p 0,8 га тенг. А ҳодисанинг: а) 750 марта; б) 710 марта рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

7.8. Китоб саҳифасида хато бўлиши эҳтимоллиги 0,002 га тенг. 500 саҳифали китоб текширилади. Камида 3, кўпи билан 5 саҳифада хато бўлиши эҳтимоллигини топинг.

7.9. 100 та станок бир-бирига боғлиқ бўлмай ишлайди, бунда уларнинг ҳар бирининг 6 соат иш вақтида узлуксиз ишлаш эҳтимоллиги 0,8 га тенг. Олти соат иш вақтида камида 75 та, кўпи билан 85 та станокнинг узлуксиз ишлаши эҳтимоллигини топинг.

7.10. 100 та станок бир-бирига боғлиқ бўлмай ишлайди, бунда уларнинг ҳар бирининг 6 соат иш вақтида узлуксиз ишлаш эҳтимоллиги 0,8 га тенг. Олти соат иш вақтида 85 та станок узлуксиз ишлаши эҳтимоллигини топинг.

7.11. Фабрика 75 % биринчи нав маҳсулот чиқаради. 300 та маҳсулот ичидан биринчи навлилари сони камида 219 та ва кўпи билан 234 та бўлиши эҳтимоллигини топинг.

7.12. Ўйин соккаси 500 марта ташланади. Бунда бир очко камида 70 марта ва кўпи билан 83 марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

7.13. Танга 400 марта ташланади. Гербли томоннинг камида 204 марта ва кўпи билан 214 марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

7.14. Ҳар қайси ўнта деталнинг 9 таси стандартга жавоб берадиганлари сони камида 42 та, кўпи билан 48 та бўлиши эҳтимоллигини топинг.

7.15. Ўйин соккаси 500 марта ташланади. Бунда бир очконинг: а) 83 марта; б) 78 марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

7.16. Танга 400 марта ташланади. Бунда гербли томоннинг: а) 200 марта; б) 160 марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

7.17. Мерганнинг битта ўк узиб нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,75 га тенг. 100 марта ўк узилганда нишонга: а) камида 70 ва кўпи билан 80 марта; б) кўпи билан 70 марта текказиш эҳтимоллигини топинг.

7.18. Агар ҳодисанинг ҳар бир синовда рўй бериш эҳтимоллиги 0,2 га тенг бўлса, 400 та синовда унинг 104 марта рўй бериши эҳтимоллигини тақрибан топинг.

7.19. Агар боғлиқмас 1000 та синовларнинг ҳар бирида A ҳодиса 0,5 эҳтимоллик билан рўй берса, унинг камида 500 марта рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

7.20. Агар боғлиқмас синовларнинг умумий сони 600 та бўлиб, ҳодисанинг алоҳида синовларда рўй бериши эҳтимоллиги 0,6 га тенг бўлса, ҳодисанинг камида 342 ва кўпи билан 378 марта рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

7.21. Тўпдан ҳар бир алоҳида ўқ узишда нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,9 га тенг. 20 та ўқ узилганда нишонга тегишлар сони 16 дан кам, 19 дан ортик бўлмаслиги эҳтимоллигини топинг.

7.22. Қарбонит ғўлачаларни автоматик прессланганда улар умумий сонининг $\frac{2}{3}$ қисми тамғасиз бўлади. Таваккалига олинган 450 та ғўлача орасида тамғасизлари сони камида 280 та, кўпи билан 320 та бўлиши эҳтимоллигини топинг.

7.23. Тўпдан ўқ узилганда нишон 0,8 эҳтимоллик билан яқсон бўлади. 2000 та ўқ узилди. Бунда: а) камида 1200 марта, лекин 1300 дан ортик бўлмаган марта нишонга тегиш; б) камида 1200 марта нишонга тегиш эҳтимоллигини топинг.

7.24. Агар уруғнинг унб чиқиш эҳтимоллиги 0,75 бўлса, экилган 500 уруғнинг 130 таси унб чикмаслик эҳтимоллигини топинг.

7.25. Ўйин соққаси 80 марта ташланади. 3 рақами 20 марта тушиши эҳтимоллигини аниқланг. (Лапласнинг локал теоремасини қўлланг.)

7.26. Ҳар ўнта деталнинг 5 таси стандартга жавоб беради. Олинган 50 та деталнинг стандартга жавоб берадиганлари сони камида 43 та, кўпи билан 49 та бўлиши эҳтимоллигини топинг.

7.27. Қарбонит ғўлачаларни автоматик прессланганда $\frac{2}{3}$ қисми тамғасиз бўлади. Таваккалига олинган 450 та ғўлача ичида тамғасизлари сони камида 300 та ва кўпи билан 310 та бўлиши эҳтимоллигини топинг.

7.28. Тўпдан ўқ узганда нишонга текказиш эҳтимоллиги 0,9 га тенг. 900 та ўқ узилганда нишонга тегишлар сони камида 700 та ва кўпи билан 720 та бўлиши эҳтимоллигини топинг.

7.29. 1000 та боғлиқсиз синовларнинг ҳар бирида A ҳодиса 0,1 эҳтимоллик билан рўй беради. A ҳодисанинг камида 100 та, кўпи билан 125 марта рўй бериши эҳтимоллигини топинг.

7.30. Ўйин соққаси 300 марта ташланади. Бир очко камида 60 марта ва ортиги билан 70 марта тушиши эҳтимоллигини топинг.

8. Қуйида X дискрет тасодифий миқдор тақсимот қонуни билан берилган.

а) Тақсимот функцияси $F(x)$ ни топинг ва унинг графигини чизинг.

б) X дискрет тасодифий миқдорнинг сонли характеристикаларн $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ларни ҳисобланг.

8.1.	X	52	56	57	60
	P	0,1	0,3	0,4	0,2

8.2.	X	16	24	26	28
	P	0,4	0,3	0,1	0,2

8.3.	X	14	18	23	29
	P	0,2	0,1	0,3	0,4

8.4.	X	30	32	35	40
	P	0,1	0,5	0,2	0,2

8.5.	X	12	14	16	20
	P	0,1	0,5	0,3	0,1

8.6.	X	12	14	18	20
	P	0,3	0,1	0,4	0,2

8.7.	X	35	39	42	46
	P	0,1	0,3	0,2	0,4

8.8.	X	23	25	28	29
	P	0,3	0,2	0,4	0,1

8.9.	X	17	27	29	28
	P	0,2	0,4	0,3	0,1

8.10.	X	24	26	38	30
	P	0,2	0,2	0,5	0,1

8.11.	X	25	27	30	32
	P	0,2	0,4	0,3	0,1

8.12.	X	2	16	19	21
	P	0,1	0,5	0,3	0,1

8.13.	X	45	47	50	52
	P	0,2	0,4	0,3	0,1

8.14.	X	10	12	14	16
	P	0,2	0,3	0,1	0,4

8.15.	X	18	22	23	26
	P	0,2	0,3	0,4	0,1

8.16.	X	78	80	84	85
	P	0,2	0,3	0,1	0,4

8.17.	X	21	25	26	31
	P	0,1	0,4	0,2	0,3

8.18.	X	25	28	30	33
	P	0,1	0,2	0,4	0,3

8.19.	X	56	58	60	64
	P	0,2	0,3	0,4	0,1

8.20.	X	60	64	67	70
	P	0,1	0,3	0,4	0,2

8.21.	X	31	34	37	40
	P	0,3	0,5	0,1	0,1

8.22.	X	20	22	30	31
	P	0,1	0,2	0,4	0,3

8.23.	X	17	20	23	27
	P	0,1	0,4	0,3	0,2

8.24.	X	28	32	34	36
	P	0,1	0,2	0,2	0,5

8.25.	X	37	41	43	45
	P	0,2	0,1	0,5	0,2

8.26.	X	30	35	38	40
	P	0,3	0,5	0,1	0,1

8.27.	X	15	20	28	24
	P	0,1	0,4	0,3	0,2

8.28.	X	20	25	30	31
	P	0,1	0,2	0,4	0,3

8.29.	X	10	25	20	26
	P	0,4	0,3	0,1	0,2

8.30.	X	41	40	52	55
	P	0,2	0,3	0,1	0,4

9. X тасодикий миқдор $F(x)$ тақсимоат функцияси билан берилган бўлса, қуйидагиларни топинг:

а) зичлик функция $f(x)$ ни;

б) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ ва $P(0,3 < X < 0,7)$ ларни.

$$9.1 \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ x^2, & \text{агар } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{агар } x > 1. \end{cases}$$

$$9.2. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ x^3, & \text{агар } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{агар } x > 1. \end{cases}$$

$$9.3. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x < 0, \\ 3x^2 + 2x, & \text{агар } 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{агар } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$9.4. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 1, \\ \frac{1}{2}(x^2 - x), & \text{агар } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{агар } x > 2. \end{cases}$$

$$9.5. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq 0, \\ 0,2x, & \text{агар } 0 < x \leq 5, \\ 1, & \text{агар } x > 5. \end{cases}$$

$$9.6. \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x \leq -30, \\ \frac{x+30}{60}, & \text{агар } -30 < x \leq 30, \\ 1, & \text{агар } x > 30. \end{cases}$$

$$9.7. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{arap } x \leq 0, \\ \frac{x}{a} \left(2 - \frac{x}{a} \right), & \text{arap } 0 < x \leq a, \\ 1, & \text{arap } x > a. \end{cases}$$

$$9.8. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{arap } x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 - \sin x, & \text{arap } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi, \\ 1, & \text{arap } x > \pi \end{cases}$$

$$9.9. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{arap } x \leq -1, \\ \frac{3}{4}(x+1), & \text{arap } -1 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 1, & \text{arap } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

$$9.10. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{arap } x \leq 0, \\ 1 - \cos x, & \text{arap } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \text{arap } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$9.11. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{arap } x \leq 0, \\ \frac{x}{7}, & \text{arap } 0 < x \leq 7, \\ 1, & \text{arap } x > 7. \end{cases}$$

$$9.12. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{arap } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{36}, & \text{arap } 0 < x \leq 6, \\ 1, & \text{arap } x > 6. \end{cases}$$

$$9.13. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{arap } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{25}, & \text{arap } 0 < x \leq 5, \\ 1, & \text{arap } x > 5. \end{cases}$$

$$9.14. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{arap } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{16}, & \text{arap } 0 < x \leq 4, \\ 1, & \text{arap } x > 4. \end{cases}$$

$$9.15. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{арар } x \leq 0, \\ \frac{1 - \cos x}{2}, & \text{арар } 0 < x \leq \pi, \\ 1, & \text{арар } x > \pi. \end{cases}$$

$$9.16. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{арар } x \leq -\frac{\pi}{6}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 3x, & \text{арар } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{6}, \\ 1, & \text{арар } x > \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

$$9.17. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{арар } x \leq -1, \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{3}, & \text{арар } -1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{арар } x > 2. \end{cases}$$

$$9.18. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{арар } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ 1 + \sin x, & \text{арар } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ 1, & \text{арар } x > 0. \end{cases}$$

$$9.19. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{арар } x \leq 1, \\ x - 1, & \text{арар } 1 < x \leq 2, \\ 1, & \text{арар } x > 2. \end{cases}$$

$$9.20. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{арар } x \leq \frac{3\pi}{4}, \\ \cos 2x, & \text{арар } \frac{3\pi}{4} < x \leq \pi, \\ 1, & \text{арар } x > \pi. \end{cases}$$

$$9.21. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{арар } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \cos x, & \text{арар } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ 1, & \text{арар } x > 0. \end{cases}$$

$$9.22. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{арар } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{4}, & \text{арар } 0 < x \leq 2, \\ 1, & \text{арар } x > 2. \end{cases}$$

$$9.23. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{арар } x \leq 0, \\ \frac{x^2}{9}, & \text{арар } 0 < x \leq 3, \\ 1, & \text{арар } x > 3. \end{cases}$$

$$9.24. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{арав } x \leq 2, \\ \frac{1}{2}x - 1, & \text{арав } 2 < x \leq 4, \\ 1, & \text{арав } x > 4. \end{cases}$$

$$9.25. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{арав } x \leq 0, \\ 2\sin x, & \text{арав } 0 < x \leq \frac{\pi}{6}, \\ 1, & \text{арав } x > \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

$$9.26. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{арав } x \leq 0, \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \sin 3x, & \text{арав } 0 < x \leq \frac{\pi}{9}, \\ 1, & \text{арав } x > \frac{\pi}{9}. \end{cases}$$

$$9.27. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{арав } x \leq \frac{3\pi}{4}, \\ \cos 2x, & \text{арав } \frac{3\pi}{4} < x \leq \pi, \\ 1, & \text{арав } x > \pi. \end{cases}$$

$$9.28. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{арав } x \leq -1, \\ \frac{1}{2}(x+1), & \text{арав } -1 < x \leq 1, \\ 1, & \text{арав } x > 1. \end{cases}$$

$$9.29. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{арав } x \leq 0, \\ \sqrt{x}, & \text{арав } 0 < x \leq 1, \\ 1, & \text{арав } x > 1. \end{cases}$$

$$9.30. F(x) = \begin{cases} 0, & \text{арав } x \leq 3, \\ \ln \frac{x}{3}, & \text{арав } 3 < x \leq 3e, \\ 1, & \text{арав } x > 3e. \end{cases}$$

15.1.1. Ушбу n та номаълумли n та чизикли тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \dots + a_{3n}x_n = b_3, \\ & a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + \dots + a_{4n}x_n = b_4, \\ & \dots\dots\dots \\ & a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + a_{n4}x_4 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(2)}x_2 + a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)}, \\ a_{42}^{(3)}x_2 + a_{43}^{(3)}x_3 + a_{44}^{(3)}x_4 + \dots + a_{4n}^{(3)}x_n &= b_4^{(3)}, \\ &\dots \\ a_{n2}^{(n-2)}x_2 + a_{n3}^{(n-2)}x_3 + a_{n4}^{(n-2)}x_4 + \dots + a_{nn}^{(n-2)}x_n &= b_n^{(n-2)}. \end{aligned}$$

605

усулидан фарқи ҳам шундан иборат) ва қуйидаги системага эга бўламиз:

$$a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 + \dots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)},$$

$$a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)},$$

$$a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)},$$

$$a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 + \dots + a_{4n}^{(2)}x_n = b_4^{(2)},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{n3}^{(2)}x_3 + a_{n4}^{(2)}x_4 + \dots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)}.$$

Бу жараёни $a_{33} \neq 0$ учун шунга ўхшаш давом эттириб, учинчи тенгламадан ташқари барча тенгламаларда x_3 номаълумни йўқотиб, ушбу системани ҳосил қиламиз:

$$a_{14}^{(2)}x_4 + a_{15}^{(2)}x_5 + \dots + a_{1n}^{(2)}x_n = b_1^{(2)},$$

$$a_{24}^{(2)}x_4 + a_{25}^{(2)}x_5 + \dots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)},$$

$$a_{34}^{(2)}x_4 + a_{35}^{(2)}x_5 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)},$$

$$a_{44}^{(3)}x_4 + \dots + a_{4n}^{(3)}x_n = b_4^{(3)},$$

$$a_{n4}^{(3)}x_4 + \dots + a_{nn}^{(3)}x_n = b_n^{(3)}.$$

Ва ниҳоят бу жараёни давом этдира бориб, қуйидаги системага эга бўламиз:

$$\begin{cases} a_{11}^{(n-1)}x_1 = b_1^{(n-1)}, \\ a_{22}^{(n-1)}x_2 = b_2^{(n-1)}, \\ a_{33}^{(n-1)}x_3 = b_3^{(n-1)}, \\ \dots\dots\dots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}. \end{cases}$$

Агар $a_{ii}^{(n-1)} = 0$ бўлса, тенгламаларнинг ўринларини алмаштириш орқали $a_{ii}^{(n-1)} \neq 0$ шарт бажариладиган ҳолга келтириш мумкин.

Бу системадан $x_1, x_2, \dots, x_n$ номаълумларнинг қийматлари топилади, тенгламалар системасини ечишнинг номаълумларни кетма-кет йўқотишга асосланган мазкур усули **Жордано — Гаусс усули** деб аталади.

Бу усулни тенгламалар системасига эмас, балки шу системанинг элементар алмаштиришлар ёрдамида диагонал кўринишга келтирилувчи кенгайтирилган матрицасига қўллаш қулайроқдир.

Мулоҳазаларнинг умумийлигига зарар етказмаган ҳолда факат тўрт номаълумли тўртта тенгламалар системасини қараймиз. У ҳолда бундай системанинг кенгайтирилган матрицаси қуйдаги кўринишда бўлади:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4 \end{pmatrix}$$

Ҳал қилувчи элемент сифатида бош диагоналда турган элемент олинади ($a_{ii}, i=1,4$). Ҳал қилувчи элементда кесишувчи сатр ва устун мос равишда *ҳал қилувчи сатр* ва *ҳал қилувчи устун* деб аталади.

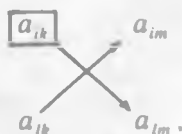
Кенгайтирилган A матрицадан унга эквивалент $A^{(1)}$ матрицага ўтиш учун

— A матрицада ҳал қилувчи элемент танланади (масалан, $a_{11} \neq 0$);

— ҳал қилувчи сатр эквивалент матрицага ўзгаришсиз қўчириб ёзилиб, ҳал қилувчи устуннинг ҳал қилувчи элементдан бошқа барча элементлари нолларга келтирилади;

— эквивалент матрицанинг қолган элементлари «туғри тўртбурчак» қондаси деб аталувчи қонда бўйича қайта аниқланади.

Бу қонданинг моҳияти қуйдагича: A матрицанинг ушбу тўртта элементини қараймиз:



бу ерда a_{ik} — ҳал қилувчи элемент, эквивалент матрицага ёзиладиган $a_{lm}^{(1)}$ га мос келувчи элемент, a_{im} ва a_{lk} ҳал қилувчи сатр ва ҳал қилувчи устундаги элементлар.

Алмаштириладиган $a_{lm}^{(1)}$ элемент (эквивалент матрица элементи) ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$a_{lm}^{(1)} = \frac{a_{ik}a_{lm} - a_{lk}a_{im}}{a_{ik}}$$

1- мисол. Ушбу

$$\begin{cases} x + 4y + 2z = -1, \\ 2x - 3y + z = -7, \\ x - 4y = -5 \end{cases}$$

системани Жордано — Гаусс усули билан ечинг.

Е ч и ш. Кенгайтирилган матрицанинг сатрлари устида элементар алмаштиришлар бажарамиз:

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -7 \\ 1 & -4 & 0 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -11 & -3 & -5 \\ 0 & -8 & -2 & -4 \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{3}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{10}{11} & -\frac{31}{11} \\ 0 & 1 & \frac{3}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{10}{11} & -\frac{31}{11} \\ 0 & 1 & \frac{3}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Бундан,

$$x = -1, y = 1, z = -2.$$

2- м и с о л. Берилган

$$A = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 2 & -3 & 2 & 0 & 6 \end{array} \right)$$

матрицага Жордано — Гаусс усулини қўлланг.

Е ч и ш. $a_{11} = 1$ ни ҳал қилувчи элемент деб олиб, биринчи сатр элементларини ўзгаришсиз қўчириб ёзамиз ва биринчи устуннинг ҳал қилувчи $a_{11} = 1$ элементдан бошқа барча элементларини эса ноллар билан алмаштирамиз. Тўртбурчак қондасини қўллаб,

$$A \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & -3 & 3 & -3 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{array} \right)$$

ни ҳосил қиламиз.

Иккинчи сатр элементларини (-3) га бўлиб, ушбу матрицага эга бўламиз:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16 \\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

Энди $a_{22}''=1$ ни ҳал қилувчи элемент деб оламиз:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

Учинчи сатр элементларини 2 га бўламиз:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 14 \end{pmatrix}$$

$a_{33}'''=1$ ни ҳал қилувчи элемент деб оламиз:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Тўртинчи сатр элементларини (-2) га бўламиз:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{pmatrix}$$

$a_{44}''''=1$ ни ҳал қилувчи элемент деб оламиз:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

15.1.2. Жордано — Гаусс усулидан чизикли тенгламалар системасини ечишдан ташқари детерминантларни ҳисоблашда, матрица

рангини аниқлашда, тескари матрицани топишда ҳам фойдаланилади.

3-мисол. Детерминантни Жордано — Гаусс усули билан ҳисобланг:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

Ечиш.

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 10 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 23 & 10 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 23 & 10 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 20 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & 10 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 20 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & 10 \end{vmatrix} = \\ &= -7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 20 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 28 & 10 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \\ &= -7 \cdot 10 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{vmatrix} = -7 \cdot 10 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -70. \end{aligned}$$

4-мисол. Ушбу

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

матрица рангини Жордано — Гаусс усулини қўлаб аниқланг.

Ечиш. Элементар алмаштиришларда матрицанинг ранги ўзгармаслиги маълум. A матрицага Жордано — Гаусс усулини қўллаймиз:

$$A \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 5 & 7 \\ 7 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & -22 & -32 & -44 \\ 0 & -11 & -16 & -22 \\ 0 & -11 & -16 & -22 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 11 & 16 & 22 \\ 0 & 11 & 16 & 22 \\ 0 & 11 & 16 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 11 & 16 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ҳосил бўлган матрицанинг ҳар қандай иккинчи тартибли детерминанти нолдан фаркли, демак, $r(A) = 2$.

5-мисол. Берилган

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

матрицага тескари A^{-1} матрицани Жордано — Гаусс усули билан топинг.

Ечиш. $\Delta = 24 \neq 0$ бўлгани учун A хосмас матрица. A матрицанинг ўнг томонида бирлик матрицани ёзиб тўғри бурчакли матрица ҳосил қиламиз ва унга Жордано — Гаусс усулини қўллаймиз.

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{3} & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{10}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{24}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{1}{7} & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{7}{24} & -\frac{1}{24} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{24} & \frac{7}{24} \end{array} \right)$$

Демак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{7}{24} & \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{24} & \frac{7}{24} \end{pmatrix}$$

1- дарсхона топириги

Куйидаги масалаларни Жордано — Гаусс усулидан фойдаланиб ечинг:

1. Детерминантларни ҳисобланг:

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Ж: а) 96; б) — 900.

2. Матрица рангини топинг:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Ж: а) $r=2$; б) $r=3$.

3. Берилган матрица учун A^{-1} тескари матрицани топинг:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}; \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Ж:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x + 8y + z = 2, \\ 3x - 2y + 6z = -7, \\ 2x + y - z = 6; \end{cases} \text{ б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

Ж: а) $x = -3, y = 2, z = 1$;

б) $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -1$.

1- мустақил иш

Куйидаги масалаларни Жордано — Гаусс усули билан ечинг:

1. Детерминантни ҳисобланг:

$$\begin{vmatrix} 8 & 7 & 2 & 10 \\ -8 & 2 & 7 & 10 \\ 4 & 4 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{Ж: } -1800.$$

2. Матрица рангини топинг:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Ж: } r=3.$$

3. Берилган A матрицага тескари A^{-1} матрицани топинг:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Ж: } \begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$$

4. Чизикли тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 5x_4 = 23. \end{cases}$$

Ж: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$.

3- лаборатория машгулоти
Чизиқли тенгламалар системасини ечиш

Жордано — Гаусс усулини қўллаб чизиқли тенгламалар системасини учта усул билан ечинг:

- а) Крамер қондаси бўйича;
- б) тескари матрица ёрдамида;
- в) номаълумларни йўқотиш усули билан.

$$1. \begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x - y - z = 4, \\ 3x + 4y - 2z = 11, \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y - z = 1, \\ 8x + 3y - 6z = 2, \\ 4x + y - 3z = 3. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 7x - 5y = 31, \\ 4x + 11z = -43, \\ 2x + 3y + 4z = -20. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - y - 3z = -1, \\ x + 5y + z = -7. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x - 2y + 3z = 6, \\ 2x + 3y - 4z = 20, \\ 3x - 2y - 5z = 6. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x - 4y - 2z = -7, \\ 3x + y + z = 5, \\ -3x + 5y + 6z = 7. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 3x + 4y + 2z = 8, \\ 2x - 4y - 3z = -1, \\ x + 5y + z = 0. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 3x + y + z = 21, \\ x - 4y - 2z = -16, \\ -3x + 5y + 6z = 41. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} x + y - z = -2, \\ 4x - 3y + z = 1, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x + y + 3z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} x + 2y + 4z = 31, \\ 5x + y + 2z = 20, \\ 3x - y + z = 0. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 5x + 8y - z = 7, \\ 2x - 3y + 2z = 9, \\ x + 2y + 3z = 1. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x - y + 5z = 4, \\ 5x + 2y + 13z = 2, \\ 3x - y + 5z = 0. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 7x - 5y = 34, \\ 4x + 11y = -36, \\ 2x + 3y + 4z = -20. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x+2y=6, \\ 3x-y-z=12, \\ y+2z=-1. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} x-3y+z=-9, \\ 4x+2y-z=-8, \\ x+2z=-3. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} 4x-3y+2z=8, \\ 2x+5y-3z=11, \\ 5x+6y-2z=13. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x+3y-z=8, \\ 2x+z=1, \\ -x+2y+z=12. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 4x+y-3z=9, \\ x+y-z=-2, \\ 8x+3y-6z=12. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2x+3y+z=4, \\ 2x+y+3z=0, \\ 3x+2y+z=1. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} x-2y+3z=6, \\ 2x+3y-4z=20, \\ 3x-2y-5z=6. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x+2z=6, \\ x-3y+z=5, \\ 4x+2y-z=-14. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} x+y-z=1, \\ 8x+3y-6z=2, \\ -4x-y+3z=-3. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 2x+z=1, \\ x+3y-z=-4, \\ -x+2y+z=4. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} 2x+y+3z=7, \\ 2x+3y+z=1, \\ 3x+2y+z=6. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 2x-y+3z=-4, \\ x+3y-z=11, \\ x-2y+2z=-7. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 7x+4y-z=13, \\ 3x+2y+3z=3, \\ 2x-3y+z=-10. \end{cases}$$

2-§. Тенгламалар ва тенгламалар системаларини ечишнинг итерация усуллари

15.2.1. $f(x)=0$ тенглама хақикий илдизларининг тақрибий қийматларини топиш учун аввал илдиз яққаланади, яъни берилган тенгламанинг битта илдизидан бошқа илдизлари йўқ бўлган оралик аниқланади.

$[a;b]$ кесма узлуксиз $f(x)$ функция илдизининг яққалаш оралиги бўлиши учун қуйидаги шартлар бажарилиши керак:

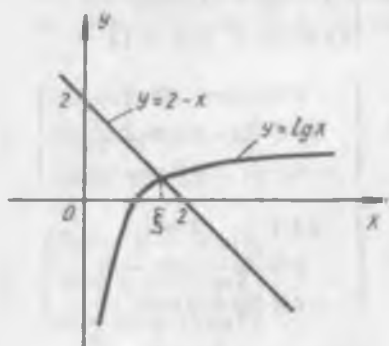
а) $f(a) \cdot f(b) < 0$;

б) $[a;b]$ да $f'(x)$ ишорасини сақлаши зарур.

Баъзан $f(x)=0$ тенгламани $\varphi(x)=\psi(x)$ кўринишда ёзиб, $y=\varphi(x)$ ва $y=\psi(x)$ функциялар графикларини битта координаталар текислигида чизиб илдизнинг яққалаш ораликларини топиш мумкин.

1- мисол. $2 - \lg x - x = 0$ тенглама илдизининг яқкалаш оралигини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани $\lg x = 2 - x$ кўринишда ёзиб, $y = \lg x$ ва $y = 2 - x$ функциялар графикларини битта чизмада тасвирлаймиз. Бу графикларнинг кесишиш нуқтаси M нинг ξ абсциссаси $[1; 2]$ ораликда ётади (81- шакл). Бу ораликда берилган



81- шакл

тенгламанинг чап томонидаги ифода тегишли шартларни канонатлантирганлиги сабабли, у илдишни яқкалаш оралиғи бўлади.

15.2.2. Тенгламаларни сонли ечишнинг энг муҳим усулларида бири итерация усули ёки кетма-кет яқинлашиши усули бўлиб, унинг моҳияти куйидагидан иборат.

Ушбу $f(x) = 0$ тенглама берилган бўлсин, бу ерда $f(x)$ — узлуксиз функция. Бу тенгламани унга тенг кучли $x = \varphi(x)$ тенглама билан алмаштирамиз.

Агар бирор $[a, b]$ оралиқнинг ҳамма нуқталарида $|\varphi'(x)| \leq r < 1$ (r — ўзгармас сон) бўлиб, дастлабки функция бу ораликда ягона илдишга эга бўлса, у ҳолда бирор усул билан илдизнинг бошланғич x_0 тақрибий қийматини танлаймиз. Шундан сўнг ушбу кетма-кетликни тузиш мумкин:

$$x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), \dots, x_n = \varphi(x_{n-1}), \dots$$

Бу кетма-кетликнинг лимити $f(x) = 0$ тенгламанинг $[a, b]$ ораликдаги ягона илдиши булади, яъни $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$.

ξ илдизнинг итерация усули билан топилган x_n тақрибий қиймати $|\xi - x_n| < \frac{r}{1-r} |x_n - x_{n-1}|$ тенгсизлик билан баҳоланади.

Бу ерда ξ қаралаётган тенгламанинг илдиши, x_{n-1} ва x_n иккита яқинлашиш, r эса $|\varphi'(x)|$ нинг $[a, b]$ даги энг кичик қиймати.

Илдизнинг қийматини ϵ дан катта бўлмаган хатолик билан топиш учун n нинг қийматини

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{r-1}{r} \epsilon$$

тенгсизлик бажариладиган қилиб аниқлаш етарлидир.

$f(x) = 0$ тенгламани $x = \varphi(x)$ кўринишдаги тенгламага келтириш учун уни

$$x = x - \lambda f(x), (\lambda \neq 0)$$

эквивалент тенглама билан алмаштирамиз. Унда

$$\varphi(x) = x - \lambda f(x).$$

λ параметрни $\varphi(x)$ функция итерация жараёнининг якинлашиши учун етарли бўлган шартни каноатлантирадиган қилиб топиш мумкин:

$$|\varphi'(x)| = |1 - \lambda f'(x)| < 1.$$

Агар

$$1 - \lambda f'(x) = 0$$

деб олинса, x_0 якинлашиш атрофида юқоридаги тенгсизлик ўз-ўзидан бажарилади. У ҳолда

$$\lambda = +\frac{1}{f'(x_0)}, \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

2- мисол. $2 - \lg x - x = 0$ тенгламани $x_0 = 1,5$ илдизнинг бошланғич якинлашишидан (1- мисолдан маълум) $x = \varphi(x)$ кўринишга келтиринг.

Е чи ш. Бунда $f(x) = 2 - \lg x - x$, $f'(x) = -1 - \frac{1}{x \ln 10}$. Эквивалент тенгламани ёзамиз:

$$x = x - \lambda(2 - \lg x - x).$$

λ сонни

$$1 - \lambda f'(1,5) = 0$$

ёки

$$1 + \lambda \left(1 + \frac{2}{3 \ln 10}\right) = 0$$

тенгламадан топамиз. $\lambda = -1$ сони бу тенгламанинг илдизига яқин. Шундай қилиб,

$$x = -\lg x + 2,$$

бунда $\varphi(x) = 2 - \lg x$.

3- мисол. $2 - \lg x - x = 0$ тенглама илдизини итерация усули билан 0,001 гача аниқликда топинг.

Е чи ш. 2- мисолда бошланғич тенгламани $x = 2 - \lg x$ кўринишда олдик. Бунда $\varphi(x) = 2 - \lg x$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{x}$, яъни $[1, 2]$ ораликда $|\varphi'(x)| < 1$, шунинг учун итерация усулидан фойдаланиш мумкин. 1- мисолдаги $[1; 2]$ ораликнинг чап охирини нолинчи яқинлашиш учун қабул қиламиз, яъни $x_0 = 1$. Энди биринчи, иккинчи ва ундан кейинги яқинлашишларни топиб натижаларни ушбу жадвалга ёзамиз.

i	x_i	$\lg x_i$	$\varphi(x_i) = 2 - \lg x_i$
0	1	0	2
1	2	0,3010	1,6990
2	1,6990	0,2302	1,7698
3	1,7698	0,2480	1,7520
4	1,7520	0,2435	1,7565
5	1,7565	0,2445	1,7555
6	1,7555	0,2444	1,7556
7	1,7556	—	—

Шундай қилиб, $\varepsilon = 0,001$ гача аникликда изланаётган илди $\xi = 1,755$, чунки

$$|x_7 - x_6| = 0,001.$$

15.2.3. $\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$ тенгламалар системасининг (икки номаъ-

лумли иккита тенгламалар системаси билан чекланамиз) берилган аникликдаги ҳақиқий илдиэларини ҳисоблаш талаб қилинсин.

Система ечимларидан бири (ξ, η) нинг бошланғич яқинлашиши $x = x_0, y = y_0$ берилган бўлсин дейлик. Улар, масалан, битта чизмада $f(x, y) = 0$ ва $\varphi(x, y) = 0$ эгри чизиклар графикларини чизиш йўли билан график усулда топилган бўлиши мумкин.

Берилган тенгламалар системасини унга эквивалент бўлган

$$\begin{cases} x = F(x, y), \\ y = \Phi(x, y) \end{cases}$$

кўринишга келтирамиз ва бошланғич яқинлашиши (x_0, y_0) нинг (ξ, η) аник ечимини ҳам ўз ичига олувчи) бирор D атрофида

$$\begin{aligned} |F'_x(x, y)| + |\Phi'_x(x, y)| &\leq r_1 < 1, \\ |F'_y(x, y)| + |\Phi'_y(x, y)| &\leq r_2 < 1 \end{aligned}$$

деб фараз қилиб, итерация усули билан ечамиз.

Системанинг ечимига яқинлашувчи (x_n, y_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) кетма-кетлик қуйидагича тузилади:

$$\begin{aligned} x_1 &= F(x_0, y_0), \quad y_1 = \Phi(x_0, y_0); \\ x_2 &= F(x_1, y_1), \quad y_2 = \Phi(x_1, y_1); \\ x_3 &= F(x_2, y_2), \quad y_3 = \Phi(x_2, y_2); \end{aligned}$$

Агар (x_n, y_n) ларнинг ҳаммаси D га тегишли бўлса, у ҳолда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi \text{ ва } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \eta.$$

Берилган системани $x=F(x,y)$, $y=\Phi(x,y)$ кўринишга келтириш учун $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ деб, унга эквивалент бўлган

$$\begin{cases} \alpha f(x,y) + \beta \varphi(x,y) = 0, \\ \gamma f(x,y) + \delta \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

системани караймиз.

α , β , γ , δ параметрларни шундай танлаймизки, бу функцияларнинг хусусий ҳосилалари дастлабки яқинлашишда тенг бўлсин ёки нолга яқин бўлсин. Бунинг учун α , β , γ , δ параметрларни куйидаги тенгламалар системасининг тақрибий ечимлари сифатида топамиз:

$$\begin{cases} 1 + \alpha f'_x(x_0, y_0) + \beta \varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \\ \alpha f'_y(x_0, y_0) + \beta \varphi'_y(x_0, y_0) = 0, \\ \gamma f'_x(x_0, y_0) + \delta \varphi'_x(x_0, y_0) = 0, \\ 1 + \gamma f'_y(x_0, y_0) + \delta \varphi'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

4- мисол. $x_0=0,8$; $y_0=0,55$ эканлигини ҳисобга олиб, ушбу

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$$

тенгламалар системасини

$$\begin{cases} x = F(x,y), \\ y = \Phi(x,y) \end{cases}$$

кўринишга келтиринг.

Ечиш. Бунда $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$,

$\varphi(x,y) = x^3 - y$; $f'_x(x_0, y_0) = 1,6$; $f'_y(x_0, y_0) = 1,1$;

$\varphi'_x(x_0, y_0) = 1,92$; $\varphi'_y(x_0, y_0) = -1$.

Берилган системага эквивалент

$$\begin{cases} \alpha (x^2 + y^2 - 1) + \beta (x^3 - y) = 0, \\ \gamma (x^2 + y^2 - 1) + \delta (x^3 - y) = 0 \end{cases}$$

системани

$$\begin{cases} x = x + \alpha (x^2 + y^2 - 1) + \beta (x^3 - y), \\ y = y + \gamma (x^2 + y^2 - 1) + \delta (x^3 - y) \end{cases}$$

кўринишда ёзиб оламиз.

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ коэффициентларнинг сон кийматлари учун

$$\begin{cases} 1 + 1,6\alpha + 1,92\beta = 0, \\ 1,1\alpha - \beta = 0, \\ 1,6\gamma + 1,92\delta = 0, \\ 1 + 1,1\gamma - \delta = 0. \end{cases}$$

системанинг илдиэларини оламиз, яъни

$$\alpha \approx -0,3; \beta \approx -0,3; \gamma \approx -0,5; \delta \approx 0,4.$$

Шундай килиб, тенгламалар системаси итерация усулини қўллаш учун қулай бўлган ушбу кўринишга келтирилади:

$$\begin{cases} x = x - 0,3(x^2 + y^2 - 1) - 0,3(x^3 - y) \equiv F(x, y), \\ y = y - 0,5(x^2 + y^2 - 1) + 0,4(x^3 - y) \equiv \Phi(x, y). \end{cases}$$

2- дарсхона топшириғи

1. $x^3 - 9x^2 + 18x - 1 = 0$ тенгламанинг илдиэларини яқкалаш ораликларини график усул билан аниқланг:

Ж: (0,1); (2,3); (6,7).

2. Тенгламаларни итерация усули билан, 0,01 гача аниқликда ечинг:

а) $x^3 - 12x - 5 = 0$; б) $4x = \cos x$.

Ж: а) 0,42; б) 0,24.

3. Ушбу $\begin{cases} x^2 + y^2 = -1, \\ x^3 - y = 0 \end{cases}$ тенгламалар системаси илдиэининг даст-

лабки яқинлашишини график усулида топинг ва 0,01 гача аниқликда итерация усули билан ҳисобланг.

Ж: $\xi = 0,83$; $\eta = 0,56$.

2- мустақил иш

1. $x^3 - 12x + 1 = 0$ тенглама ҳақиқий илдиэларининг яқкалаш ораликларини график усулда аниқланг.

Ж (-4, -3); (0,1); (3,4).

2. Тенгламаларни итерация усули билан 0,01 гача аниқликда ечинг:

а) $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$; б) $4x - 7\sin x = 0$.

Ж: а) 3,62; б) 0 ва $\pm 1,73$.

3. Тенгламалар системасини итерация усули билан 0,01 гача аниқликда ечинг:

$$\begin{cases} x^2 + y - 4 = 0, \\ y - \lg x - 1 = 0. \end{cases}$$

Ж: $\xi = 1,67$; $\eta = 1,22$.

4- лаборатория машгулоти

$f(x)=0$ тенглама илдиэларини итерация усули
билан топиш

Тенгламаларнинг энг кичик мусбат илдиэини итерация усули
билан 0,0001 гача аниқликда топинг.

1. $x^2 - \cos \pi x = 0.$	Ж: 0,4373.	16. $2 - x - \lg x = 0.$	Ж: 1,7554.
2. $\cos^2 \pi x - x = 0.$	Ж: 0,3115.	17. $(x-1)^2 - e^{-x} = 0.$	Ж: 1,4776.
3. $x - 3 \cos^2 1,04x = 0.$	Ж: 0,9393.	18. $\lg x - 3(x-2)^2 = 0.$	Ж: 1,1439.
4. $2 \ln x - \frac{1}{x} = 0.$	Ж: 1,4215.	19. $2 - x - 2 \ln x = 0.$	Ж: 1,3702.
5. $2 - x^2 - e^{-x} = 0.$	Ж: 1,3150.	20. $1 - x - x \sqrt{x} = 0.$	Ж: 0,5698.
6. $3 - x - 2 \lg x = 0.$	Ж: 2,2830.	21. $\frac{1}{2}x - \lg x - 3 = 0.$	Ж: 7,7822.
7. $2 \sqrt{x} - \cos \frac{\pi x}{2} = 0.$	Ж: 0,2211.	22. $\frac{1}{x+1} - \ln x = 0.$	Ж: 1,4935.
8. $\sqrt{x} - \cos 0,387x = 0.$	Ж: 0,8867.	23. $\lg \frac{5x}{2} - \sin \pi x = 0.$	Ж: 0,8875.
9. $\sqrt{x} - 2 \cos \frac{\pi x}{2} = 0.$	Ж: 0,7210.	24. $2 - x - \operatorname{ctg} x = 0.$	Ж: 0,6306.
10. $2 \lg x - \frac{x}{2} + 1 = 0.$	Ж: 0,3971.	25. $e^x - 2 + x^2 = 0.$	Ж: 0,5378.
11. $3 - x - \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = 0.$	Ж: 1,3172.	26. $\frac{2}{x} - \lg x = 0.$	Ж: 0,5965.
12. $\pi \cos \pi x - \frac{1}{x} = 0.$	Ж: 1,5652.	27. $4 - x - e^{\frac{x}{2}} = 0.$	Ж: 1,6815.
13. $\frac{1}{x^2} - \lg x = 0.$	Ж: 1,8967.	28. $\sqrt{x+1} - \frac{1}{x} = 0.$	Ж: 0,7545.
14. $\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{3} - x^2 = 0.$	Ж: 0,8755.	29. $(x-1)^2 - \frac{1}{2}e^x = 0.$	Ж: 0,2132.
15. $\ln x + \sqrt{x} = 0.$	Ж: 0,4848.	30. $2 - x - \operatorname{arctg} 2x = 0.$	Ж: 0,9248.

3-§. Оддий дифференциал тенгламаларни ечишнинг сонли усуллари. Эйлер усули ва унинг модификациялари.

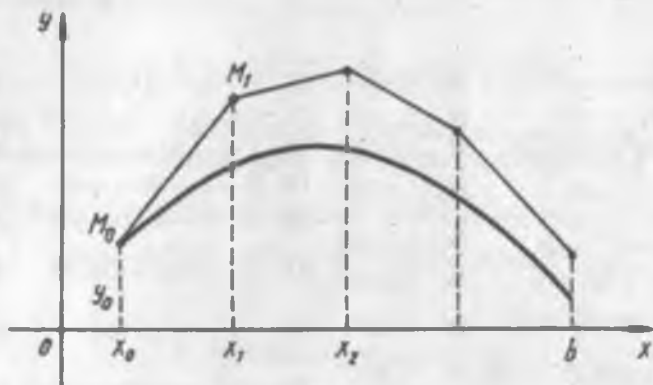
15.3.1. Амалиётда учрайдиган дифференциал тенгламаларнинг
аниқ ечимларини ҳар доим ҳам топиб бўлавермайди. Шу сабабли
дифференциал тенгламаларни тақрибий ечиш усуллари катта
аҳамиятга эга. Эйлер усули ва унинг модификациялари шу усуллар
жумласига кирази.

Биринчи тартибли

$$y' = f(x, y)$$

дифференциал тенглама берилган бўлиб, унинг $[x_0; b]$ кесмада $y(x_0) = y_0$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топиш талаб қилинсин (Коши масаласи).

$[x_0, b]$ кесмани n та тенг бўлакка бўламиз (82- шакл): $\frac{b-x_0}{n} = h$ (интеграллаш қадами).



82- шакл

(x_0, x_1) ораликда интеграл эгри чизик унга $M_0(x_0, y_0)$ нуктада ўтказилган уринма кесмаси билан алмаштирилади. Бу уринманинг бурчак коэффиценти ушбуга тенг:

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0},$$

бундан y_1 нинг қийматини топамиз:

$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)f(x_0, y_0)$$

ёки қисқача

$$y_1 = y_0 + hy'_0, \text{ бунда } y'_0 = y'(x_0).$$

$M_1(x_1, y_1)$ нуктада ўтказилган уринма тенгламасидан:

$$y_2 = y_1 + h \cdot y'_1, \text{ бунда } y'_1 = y'(x_1).$$

Шунга ўхшаш,

$$y_3 = y_2 + hy'_2, \text{ бунда } y'_2 = y'(x_2) \text{ ва х. к.}$$

Эйлернинг тавсифланган усулининг умумий формуласи ушбу кўринишга эга бўлади:

$$y_{i+1} = y_i + hy'_i, \text{ бунда } y'_i = y'(x_i),$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Уринмалар кесмаларидан ташкил топган синик чизик *Эйлер синик чизиги* дейилади, бу чизик берилган $M_0(x_0, y_0)$ нуктадан ўтади ҳамда изланаётган интеграл эгри чизикни аппроксимация қилади.

1-мисол. Эйлер усулидан фойдаланиб $y' = y - x$ дифференциал тенгламанинг $[0; 1,5]$ кесмада $y(0) = 1,5$ бошланғич шартни каноатлантирувчи ечимини топинг. Интеграллаш кадами $h = 0,25$ деб олинг.

Ечиш. $x_0 = 0, y_0 = 1,5$ га эгамиз; интеграллаш кадами $h = \frac{1,5}{6} = 0,25$, яъни $n = 6$. $hy' = \Delta y_i = hf(x_i, y_i) = h(y_i - x_i)$ деб белгилаб, ушбу жадвални тузамиз:

i	x_i	y_i	$y'_i = y_i - x_i$	$\Delta y_i = hy_i$
0	0	1,5000	1,5000	0,3750
1	0,25	1,8750	1,6250	0,4062
2	0,50	2,2812	1,7812	0,4453
3	0,75	2,7265	1,9765	0,4941
4	1,00	3,2206	2,2206	0,5552
5	1,25	3,7758	2,5258	0,6314
6	1,50	4,4702		

15.3.2. Эйлернинг такомиллаштирилган усулини караймиз. Унинг моҳияти бундай: масала олдингидек қўйилгани ҳолда, изланаётган функциянинг $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$ нукталардаги $y_{i+\frac{1}{2}}$ ёрдамчи қийматлари

$$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} y'_i$$

формула ёрдамида ҳисобланади. Шундан кейин $y' = f(x, y)$ тенгламанинг ўнг қисмининг

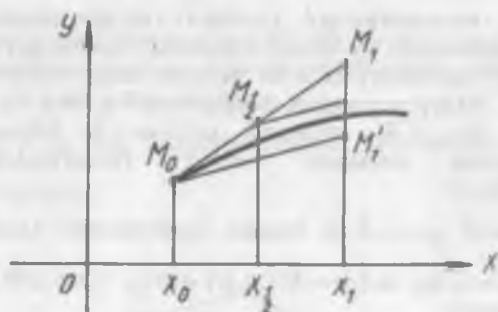
$$y'_{i+\frac{1}{2}} = f\left(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)$$

ўрта нуктадаги қиймати топилади ва

$$y_{i+1} = y_i + h y'_{i+\frac{1}{2}}$$

аникланади. Бу графикда қуйидагидек бўлади: M_1 нукта Эйлер усули билан, M'_1 нукта эса Эйлернинг такомиллаштирилган усули билан топилган (83-шакл).

2-мисол. 1-мисолдаги дифференциал тенгламани Эйлернинг такомиллаштирилган усули билан ечинг.



83-шакл

Ечиш. Тегишли белгилашлар киритиб, ҳисоблаш натижаларини ушбу жадвалда келтирамиз:

i	x_i	y_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$\frac{h}{2} y'_i$	$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}$	$y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} y'_i$	$y'_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$	$\Delta y_i = h y'_{i+\frac{1}{2}}$
0	0	1,5000	1,5000	0,1875	0,125	1,6875	1,5625	0,3906
1	0,25	1,8906	1,6406	0,2051	0,3750	2,0957	1,7207	0,4302
2	0,50	2,3208	1,8208	0,2276	0,6750	2,5484	1,8734	0,4684
3	0,75	2,7892	2,0392	0,2549	0,8750	3,0441	2,1691	0,5423
4	1,00	3,3315	2,3315	0,2914	1,1250	3,6229	2,4974	0,6243
5	1,25	3,9558	2,7058	0,3382	1,3750	4,2940	2,9190	0,7298
6	1,50	4,6856						

15.3.3. Эйлер — Кошининг такомиллаштирилган усулининг моҳияти бундай: олдин

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + h y'_i$$

ёрдамчи қиймат топилади, сўнг

$$\bar{y}_{i+1} = f(x_{i+1}, \bar{y}_{i+1})$$

ҳисобланади. Шундан кейин

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \frac{y'_i + \bar{y}'_{i+1}}{2}$$

формула бўйича тегишли ечим топилади.

3-мисол. Эйлер — Кошининг такомиллаштирилган усулидан фойдаланиб, 1-мисолдаги дифференциал тенгламани ечинг.

Е чи ш. Тегишли белгилашлар киритиб, ҳисоблашлар натижаларини ушбу жадвалга киритамиз:

i	x_i	y_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$h y_i$	x_{i+1}	$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h y_i$	$\tilde{y}'_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$	$h \tilde{y}'_{i+1}$	$\frac{\Delta y_i = y'_i + \tilde{y}'_{i+1}}{2}$
0	0	1,5000	1,5000	0,3750	0,25	1,8750	1,625	0,4062	0,3906
1	0,25	1,8906	1,6406	0,4102	0,50	2,3008	1,8008	0,4506	0,4302
2	0,50	2,3208	1,8208	0,4552	0,75	2,7760	2,0260	0,5065	0,4808
3	0,75	2,8016	2,0616	0,5129	1,00	3,3145	2,3145	0,5786	0,5458
4	1,00	3,3474	2,3474	0,5868	1,25	3,9342	2,6842	0,6710	0,6289
5	1,25	3,9763	2,7263	0,6816	1,50	4,6579	3,1579	0,7895	0,7355
6	1,50	4,7118							

3- дарсхона топшириғи

1. Эйлер усулидан фойдаланиб, $y' = \frac{y-x}{y+x}$ дифференциал тенгламани $y(0) = 1$ бошланғич шартда ечинг. Интеграллаш кадамини $h = 0,1$ деб олинг. Унинг дастлабки 4 та қийматини топиш билан чекланинг.
Ж:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,18	1,25	1,31

2. Эйлернинг такомиллаштирилган усулидан фойдаланиб, 1- масаладаги дифференциал тенгламани ечинг.

3. Эйлер — Кошининг такомиллаштирилган усулидан фойдаланиб, 1- масаладаги дифференциал тенгламани ечинг.

3- мустақил иши

1. Эйлер усули билан $y' = x + y$ дифференциал тенгламанинг $[0; 0,4]$ кесмада $y(0) = 1$ бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг. $h = 0,1$ деб олинг.

Ж:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,22	1,36	1,52

2. Эйлернинг такомиллаштирилган усулидан фойдаланиб, 1- масаладаги дифференциал тенгламани ечинг.

3. Эйлер — Кошининг такомиллаштирилган усулидан фойдаланиб, 1- масаладаги дифференциал тенгламани ечинг.

5- лаборатория машгулоти

Оддий дифференциал тенгламаларнинг тақрибий
ечимларини топиш

Эйлер усули ва унинг модификацияларидан фойдаланиб, берилган $y' = f(x, y)$ дифференциал тенгламанинг $y(x_0) = y_0$ бошланғич шарт билан $[x_0, b]$ кесмада 0,0001 гача аниқликда ечимини топинг (бўлинишлар сонини $n=5$ ва $n=10$ деб олинг).

1	$y' = y^2 - x;$ $y(0) = 1; [0; 0.5]$	2	$y' = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{x+y};$ $y(0.3) = 1.5; [0.3; 1.3]$
3	$y' = x^2 y^2 - 1;$ $y(0) = 1; [0; 0.5]$	4	$y' = x - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{y}};$ $y(1) = 2; [1; 2]$
5	$y' = x^2 - y^2;$ $y(0) = 0; [0; 0.2]$	6	$y' = x + \sqrt{1+y^2};$ $y(0.3) = 0.2; [0.3; 1.3]$
7	$y' = \frac{1-x^2}{y} + 1;$ $y(0) = 1; [0; 1]$	8	$y' = x + \cos \frac{y}{2.25};$ $y(1) = 2.2; [1; 2]$
9	$y' = \frac{xy}{1+x+y};$ $y(0) = 1; [0; 0.5]$	10	$y' = x^2 + 2y;$ $y(0) = 0.2; [0; 1]$
11	$y' = e^x + xy;$ $y(0) = 0; [0; 0.1]$	12	$y' = x + \sin \frac{y}{3};$ $y(1) = 1; [1; 2]$
13	$y' = \sin y - \sin x;$ $y(0) = 0; [0; 1]$	14	$y' = x + y^2;$ $y(0) = 0.3; [0; 1]$
15	$y' = 1 + x + x^2 - 2y^2$ $y(1) = 1; [1; 1.5]$	16	$y' = \frac{y^2 + x^3}{y^2};$ $y(0) = 1; [0; 1]$
17	$y' = \frac{x^2 + y^2}{10};$ $y(1) = 1; [1; 1.5]$	18	$y' = x - y^2$ $y(0) = 1; [0; 1]$
19	$y' = \frac{1}{x^2 + y^2};$ $y(0.5) = 0.5; [0.5; 1]$	20	$y' = 2x - 0.1y^2;$ $y(0) = 1; [0; 1]$
21	$y' = xy^2 + x^2;$ $y(0) = 1; [0; 0.5]$	22	$y' = xy^2 - 1;$ $y(0) = 0; [0; 1]$
23	$y' = y^2 \sqrt{x+1};$ $y(1) = 0; [1; 1.5]$	24	$y' = x^2 - \frac{y}{x};$ $y(1) = 1; [1; 2]$

25	$y' = y^2 + xy + x^2;$ $y(0) = 1; [0; 0.5]$	26	$y' = x^2 + y^2;$ $y(0) = 1; [0; 1]$
27	$y' = xy^2 - 1;$ $y(0) = 0; [0; 1]$	28	$y' = -\frac{x}{y} - x^2;$ $y(1) = 1; [1; 2]$
29	$y' = \sqrt{1+x^2+y};$ $y(0.2) = 1; [0.2; 1.2]$	30	$y' = \frac{x^2 + y}{y^2};$ $y(0) = 1; [0; 1]$

ИЛОВАЛАР

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

функция қийматларининг жадвали

1- илова

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0,707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2-й ялов

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad \text{функция қийматларининг жадвали}$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,000	0,33	0,1293	0,66	0,2454	0,99	0,3389
0,01	0,0040	0,34	0,1331	0,67	0,2486	1,00	0,3413
0,02	0,0080	0,35	0,1368	0,68	0,2517	1,01	0,3438
0,03	0,0120	0,36	0,1406	0,69	0,2549	1,02	0,3461
0,04	0,0160	0,37	0,1443	0,70	0,2580	1,03	0,3485
0,05	0,0199	0,38	0,1480	0,71	0,2611	1,04	0,3508
0,06	0,0239	0,39	0,1517	0,72	0,2642	1,05	0,3531
0,07	0,0279	0,40	0,1554	0,73	0,2673	1,06	0,3554
0,08	0,0319	0,41	0,1591	0,74	0,2703	1,07	0,3577
0,09	0,0359	0,42	0,1628	0,75	0,2734	1,08	0,3599
0,10	0,0398	0,43	0,1664	0,76	0,2764	1,09	0,3621
0,11	0,0438	0,44	0,1700	0,77	0,2794	1,10	0,3643
0,12	0,0478	0,45	0,1736	0,78	0,2823	1,11	0,3665
0,13	0,0517	0,46	0,1772	0,79	0,2852	1,12	0,3686
0,14	0,0557	0,47	0,1808	0,80	0,2881	1,13	0,3708
0,15	0,0596	0,48	0,1844	0,81	0,2910	1,14	0,3729
0,16	0,0636	0,49	0,1879	0,82	0,2939	1,15	0,3749
0,17	0,0675	0,50	0,1915	0,83	0,2967	1,16	0,3770
0,18	0,0714	0,51	0,1950	0,84	0,2995	1,17	0,3790
0,19	0,0753	0,52	0,1985	0,85	0,3023	1,18	0,3810
0,20	0,0793	0,53	0,2019	0,86	0,3051	1,19	0,3830
0,21	0,0832	0,54	0,2054	0,87	0,3078	1,20	0,3869
0,22	0,0871	0,55	0,2088	0,88	0,3106	1,21	0,3869
0,23	0,0910	0,56	0,2123	0,89	0,3133	1,22	0,3883
0,24	0,0948	0,57	0,2157	0,90	0,3159	1,23	0,3907
0,25	0,0987	0,58	0,2190	0,91	0,3186	1,24	0,3925
0,26	0,1026	0,59	0,2224	0,92	0,3212	1,25	0,3944
0,27	0,1064	0,60	0,2257	0,93	0,3238	1,26	0,3962
0,28	0,1103	0,61	0,2291	0,94	0,3264	1,27	0,3980
0,29	0,1141	0,62	0,2324	0,95	0,3289	1,28	0,3997
0,30	0,1179	0,63	0,2357	0,96	0,3315	1,29	0,4015
0,31	0,1217	0,64	0,2389	0,97	0,3340	1,30	0,4032
0,32	0,1255	0,65	0,2422	0,98	0,3365	1,31	0,4049

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.32	0.4066	1.63	0.4484	1.94	0.4738	2.50	0.4938
1.33	0.4082	1.64	0.4496	1.95	0.4744	2.52	0.4941
1.34	0.4099	1.65	0.4505	1.96	0.4750	2.54	0.4945
1.35	0.4115	1.66	0.4515	1.97	0.4756	2.56	0.4948
1.36	0.4131	1.67	0.4525	1.98	0.4761	2.58	0.4951
1.37	0.4147	1.68	0.4535	1.99	0.4767	2.60	0.4953
1.38	0.4162	1.69	0.4545	2.00	0.4772	2.62	0.4956
1.39	0.4177	1.70	0.4554	2.02	0.4783	2.64	0.4959
1.40	0.4192	1.71	0.4564	2.04	0.4793	2.66	0.4961
1.41	0.4207	1.72	0.4573	2.06	0.4803	2.68	0.4963
1.42	0.4222	1.73	0.4582	2.08	0.4812	2.70	0.4965
1.43	0.4236	1.74	0.4591	2.10	0.4821	2.72	0.4967
1.44	0.4251	1.75	0.4599	2.12	0.4830	2.74	0.4969
1.45	0.4265	1.76	0.4608	2.14	0.4838	2.76	0.4971
1.46	0.4279	1.77	0.4616	2.16	0.4836	2.78	0.4973
1.47	0.4292	1.78	0.4625	2.18	0.4854	2.80	0.4974
1.48	0.4306	1.79	0.4633	2.20	0.4861	2.82	0.4976
1.49	0.4319	1.80	0.4641	2.22	0.4868	2.84	0.4977
1.50	0.4332	1.81	0.4649	2.24	0.4875	2.86	0.4979
1.51	0.4345	1.82	0.4656	2.26	0.4881	2.88	0.4980
1.52	0.4357	1.83	0.4664	2.28	0.4887	2.90	0.4981
1.53	0.4370	1.84	0.4671	2.30	0.4893	2.92	0.4982
1.54	0.4382	1.85	0.4678	2.32	0.4898	2.94	0.4984
1.55	0.4394	1.86	0.4686	2.34	0.4904	2.96	0.4985
1.56	0.4406	1.87	0.4693	2.36	0.4909	2.98	0.4986
1.57	0.4418	1.88	0.4699	2.38	0.4913	3.00	0.49865
1.58	0.4429	1.89	0.4706	2.40	0.4918	3.20	0.49931
1.59	0.4441	1.90	0.4713	2.42	0.4922	3.40	0.49966
1.60	0.4452	1.91	0.4719	2.44	0.4927	3.60	0.499841
1.61	0.4463	1.92	0.4726	2.46	0.4931	3.80	0.499928
1.62	0.4474	1.93	0.4732	2.48	0.4934	4.00	0.499968
						4.50	0.499997
						5.00	0.499997

$t_{\gamma} = t(\gamma, n)$ ning qiymatlari jadvali

$\gamma \backslash n$	0,95	0,99	0,999	$\gamma \backslash n$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	2,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,26	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

 $q = q(\gamma, n)$ ning qiymatlari jadvali

$\gamma \backslash n$	0,95	0,99	0,999	$\gamma \backslash n$	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

х_и- квадрат тақсимотини х_к , критик нуқталари жадвали

$\begin{matrix} r \\ n \end{matrix}$	0,01	0,025	0,05	0,95	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,004	0,001
2	9,2	7,4	5,0	0,103	0,02
3	11,3	9,4	7,8	0,4	0,1
4	13,3	11,1	9,5	0,7	0,3
5	15,1	12,8	11,1	1,2	0,6
6	16,8	14,4	12,6	1,6	0,9
7	18,5	16,0	14,1	2,2	1,2
8	20,1	17,5	15,5	2,7	1,7
9	21,7	19,0	16,9	3,3	2,1
10	23,2	20,5	18,3	3,9	2,6
11	24,7	21,9	19,7	4,6	3,1
12	26,2	23,3	21,0	5,2	3,6
13	27,7	24,7	22,4	5,9	4,1
14	29,1	26,1	23,7	6,6	4,7
15	30,6	27,5	25,0	7,3	5,2
16	32,0	28,8	26,3	8,0	5,8
17	33,4	30,2	27,6	8,7	6,4
18	34,8	31,5	28,9	9,4	7,0
19	36,2	32,9	30,1	10,1	7,6
20	37,6	34,2	31,4	10,9	8,3
21	38,9	35,5	32,7	11,6	8,9
22	40,3	36,8	33,9	12,3	9,5
23	41,6	38,1	35,2	13,1	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,9	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	12,9
28	48,0	44,5	41,3	17,0	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	15,0

АДАБИЁТ

Асосий адабиёт

1. Я. С. Бугров, С. М. Никольский. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, М., «Наука», 1980.
2. Я. С. Бугров, С. М. Никольский. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., «Наука», 1980.
3. Я. С. Бугров, С. М. Никольский. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного, т. I, II, М., «Наука», 1978.
4. Т. А. Азларов, Х. Мансуров. Математик анализ, 1- қисм, Т., «Укитувчи», 1994.
5. Т. А. Азларов, Х. Мансуров. Математик анализ, 2- қисм, Т., «Укитувчи», 1989.
6. Е. У. Соатов. «Олий математика», 1- жилд, Т., «Укитувчи», 1992.
7. Е. У. Соатов. «Олий математика», 2- жилд, Т., «Укитувчи», 1994.
8. М. С. Салохитдинов, Г. Н. Насритдинов. Оддий дифференциал тенгламалар. Т., «Ўзбекистон», 1994.
9. Сборник задач по математике для вузов (Под ред. А. В. Ефимова) ч. I, М., 1986, ч. II, М., 1986, ч. III, М., 1990.
10. Л. А. Кузнецов. Сборник задач по высшей математике (типовые расчеты) М., «Высшая школа», 1983.
11. О. С. Ивашев-Мусатов. Теория вероятностей и математическая статистика, М., «Наука», 1979.
12. В. Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., «Высшая школа», 1975.
13. В. С. Пугачев. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Наука», 1979.
14. С. Х. Сирожиддинов, Н. М. Маматов. Эҳтимолият назарияси ва математик статистика. Т., «Укитувчи», 1980.

Қўшимча адабиёт

1. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике в трех частях. (Под общей редакцией доктора физико-математических наук, профессора А. Н. Рибуско). Минск, «Высшая школа», 1990.

хм- квадрат тахсимотнинг χ^2_r критик нуқталари жадвали

$\begin{array}{c} r \\ \backslash \\ n \end{array}$	0,01	0,025	0,05	0,95	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,004	0,001
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,02
3	11,3	9,4	7,8	0,4	0,1
4	13,3	11,1	9,5	0,7	0,3
5	15,1	12,8	11,1	1,2	0,6
6	16,8	14,4	12,6	1,6	0,9
7	18,5	16,0	14,1	2,2	1,2
8	20,1	17,5	15,5	2,7	1,7
9	21,7	19,0	16,9	3,3	2,1
10	23,2	20,5	18,3	3,9	2,6
11	24,7	21,9	19,7	4,6	3,1
12	26,2	23,3	21,0	5,2	3,6
13	27,7	24,7	22,4	5,9	4,1
14	29,1	26,1	23,7	6,6	4,7
15	30,6	27,5	25,0	7,3	5,2
16	32,0	28,8	26,3	8,0	5,8
17	33,4	30,2	27,6	8,7	6,4
18	34,8	31,5	28,9	9,4	7,0
19	36,2	32,9	30,1	10,1	7,6
20	37,6	34,2	31,4	10,9	8,3
21	38,9	35,5	32,7	11,6	8,9
22	40,3	36,8	33,9	12,3	9,5
23	41,6	38,1	35,2	13,1	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,9	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	12,9
28	48,0	44,5	41,3	17,0	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	15,0

АДАБИЁТ

Асосий адабиёт

1. Я. С. Бугров, С. М. Никольский. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии, М., «Наука», 1980.
2. Я. С. Бугров, С. М. Никольский. Дифференциальное и интегральное исчисление. М., «Наука», 1980.
3. Я. С. Бугров, С. М. Никольский. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного, т. I, II, М., «Наука», 1978.
4. Т. А. Азларов, Х. Мансуров. Математик анализ, 1- қисм, Т., «Уқитувчи», 1994.
5. Т. А. Азларов, Х. Мансуров. Математик анализ, 2- қисм, Т., «Уқитувчи», 1989.
6. Е. У. Соатов. «Олий математика», 1- жилд, Т., «Уқитувчи», 1992.
7. Е. У. Соатов. «Олий математика», 2- жилд, Т., «Уқитувчи», 1994.
8. М. С. Салохитдинов, Г. Н. Насритдинов. Оддий дифференциал тенгламалар. Т., «Ўзбекистон», 1994.
9. Сборник задач по математике для вузов (Под ред. А. В. Ефимова) ч. I, М., 1986, Ч. II, М., 1986, ч. III, М., 1990.
10. Л. А. Кузнецов. Сборник задач по высшей математике (типовые расчеты) М., «Высшая школа», 1983.
11. О. С. Ивашев-Мусатов. Теория вероятностей и математическая статистика, М., «Наука», 1979.
12. В. Е. Гмурман. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М., «Высшая школа», 1975.
13. В. С. Пугачев. Теория вероятностей и математическая статистика. М., «Наука», 1979.
14. С. Х. Сирожиддинов, Н. М. Маматов. Эхтимоллар назарияси ва математик статистика. Т., «Уқитувчи», 1980.

Қўшимча адабиёт

1. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике в трех частях. (Под общей редакцией доктора физико-математических наук, профессора А. Н. Рыбушко). Минск, «Высшая школа», 1990.

2. П. Е. Д а н к о, А. Г. П о п о в, Т. Я. К о ж е в н и к о в а. Высшая математика в упражнениях и задачах, М., «Высшая школа», 1986.
3. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. (Под редакцией Б. П. Демидовича), М., Государственное издательство физико-математической литературы, 1963.
4. Г. Н. Б е р м а н. Сборник задач по курсу математического анализа, М., «Наука», 1985.
5. А. И. К а р а с е в. Теория вероятностей и математическая статистика, М., «Статистика», 1979.
6. В. Е. Г м у р м а н. Теория вероятностей и математическая статистика, М., «Высшая школа», 1977.
7. Е. С. В е н т ц е л ь. Теория вероятностей. М., «Наука», 1969.
8. В. П. Ч и с т я к о в. Курс теории вероятностей, М., «Наука», 1978.
9. Е. Н. Л ь в о в с к и й. Статистические методы построения эмпирических формул, М., «Высшая школа», 1988.
10. Е. С. В е н т ц е л ь, Л. А. О в ч о р о в. Теория вероятностей, задачи и упражнения М., «Наука», 1969.
11. Х. М. А н д р у х а е в. Сборник задач по теории вероятностей, М., «Просвещение», 1985.
12. Б. В. Г н е д е н к о. Курс теории вероятностей, М., «Физматгиз», 1961.

МУНДАРИЖА

Сўз боши	3
1-боб. Чизикли алгебра ва аналитик геометрия элементлари	5
1-§. Иккинчи ва учинчи тартибли детерминантлар. Детерминантларни ҳисоблаш. Детерминантларнинг асосий хоссаси. Юкори тартибли детерминантлар	5
2-§. Икки ва уч номатълумли чизикли тенгламалар системаси. Крамер кондаси. Гаусс усули	9
3-§. Матрицалар. Матрицалар устида амаллар. Матрицанинг ранги. Чизикли тенгламалар системасини текшириш	15
1-назорат иши	24
1-намунавий ҳисоб топшириқлари	33
4-§. Векторлар устида чизикли амаллар. Базис. Базис бўйича ёйиш. Координаталар орқали берилган векторлар устида чизикли амаллар	45
5-§. Скаляр кўпайтма. Векторнинг узунлиги. Векторлар орасидаги бурчак	50
6-§. Векторларнинг вектор ва аралаш кўпайтмалари	52
2-назорат иши	56
2-намунавий ҳисоб топшириқлари	60
7-§. Текисликнинг тенгласи. Текисликнинг умумий тенгласини текшириш. Тўғри чизикнинг тенгласи	66
8-§. Текисликлар ва тўғри чизикларнинг ўзаро жойлашуви. Текисликлар орасидаги бурчак. Тўғри чизиклар орасидаги бурчак. Нуқтадан тўғри чизикка ва текисликкача бўлган масофа	72
3-назорат иши	77
3-намунавий ҳисоб топшириқлари	81
9-§. Эллипс, гипербала ва параболанинг каноник тенгламалари	86
10-§. Иккинчи тартибли сиртларнинг каноник тенгламалари	91
4-назорат иши	93
4-намунавий ҳисоб топшириқлари	96
2-боб. Математик анализга кириш	101
1-§. Элементар функциялар	101
2-§. Элементар функцияларнинг графиклари	104
3-§. Икки функция йиғиндиси, айирмаси, кўпайтмаси ва бўлинимасининг графиклари	106
4-§. Кетма-кетликнинг лимити. Функциянинг лимити	110
5-§. Функциянинг лимитини ҳисоблаш	114
6-§. Биринчи ва иккинчи ажойиб лимитлар	116
7-§. Эквивалент чексиз кичик функциялар ва улар ёрдамида лимитларни ҳисоблаш	118
8-§. Чексиз кичик функцияларни таккослаш	120

9-§. Функциянинг узлуксизлиги. Функциянинг узилиш нукталари ва уларнинг турлари. Функциянинг ноли	121
5- назорат иши	124
5- намунавий ҳисоб топшириқлари	129
3- б о б. Бир ўзгарувчи функциясининг дифференциал ҳисоби	139
1-§. Ҳосила. Ҳосилалар жадвали	139
2-§. Ҳосилани ҳисоблаш	145
3-§. Юқори тартибли ҳосилалар	148
4-§. Функциянинг дифференциали	151
5-§. Ролл, Лагранж, Коши теоремалари. Лопиталь қондаси	155
6-§. Тейлор формуласи	158
4- б о б. Функцияларни ҳосилалар ёрдамида текшириш	162
1-§. Биринчи тартибли ҳосила ёрдамида функцияларнинг экстремумларини текшириш	162
2-§. Функциянинг кавариклиги ва ботиклиги. Эгилиш нукталари. Асимптоталар	165
3-§. Функцияларнинг графикларини чизиш	168
6- назорат иши	170
5- б о б. Ҳақиқий ўзгарувчининг вектор ва комплекс функциялари	173
1-§. Скаляр аргументнинг вектор функциясини дифференциаллаш	173
2-§. Скаляр аргументли вектор функция ҳосиласининг татбиқи	176
6- намунавий ҳисоб топшириқлари	179
3-§. Комплекс сонлар ва улар устида амаллар. Эйлер формулалари	184
6- б о б. Бир ўзгарувчи функциясининг интеграл ҳисоби	192
1-§. Аникмас интеграл ва интеграллашнинг содда усуллари	192
2-§. Аникмас интегралда ўзгарувчини алмаштириш. Булаклаб интеграллаш	196
3-§. Каср рационал функцияни энг содда касрларга ёйиш. Рационал функцияларни интеграллаш	201
4-§. $\int R(\sin x, \cos x) dx$ кўринишдаги интеграллар	209
5-§. Таркибида тригонометрик функциялар бўлган баъзи интеграллар	213
6-§. Иррационал ифодаларни интеграллаш	219
7-§. Аник интеграл. Ньютон — Лейбниц формуласи. Аник интегралда ўзгарувчини алмаштириш. Булаклаб интеграллаш	225
8-§. Ясси фигураларнинг юзларини ҳисоблаш	231
9-§. Эгри чизик ёйлари узунликларини ҳисоблаш	236
10-§. Ҳажмларни ҳисоблаш	239
11-§. Ҳосмас интеграллар, яқинлашиши, ҳосмас интегрални ҳисоблаш	245
7- назорат иши	252
7- намунавий ҳисоб топшириқлари	256
7- б о б. Бир неча ўзгарувчининг функцияси	268
1-§. Бир неча ўзгарувчи функциясининг хусусий ҳосилалари ва тўлиқ дифференциали	268
2-§. Мураккаб функциянинг ҳосилалари. Ошқормас функциянинг ҳосилалари	272
3-§. Уринма текислик ва сиртга нормал. Юқори тартибли ҳосилалар. Тейлор формуласи	275
4-§. Бир неча ўзгарувчи функциясининг экстремумлари	280
5-§. Шартли экстремум	283
8- назорат иши	286
8- б о б. Оддий дифференциал тенгламалар	291
1-§. Умумий тушунчалар. Ўзгарувчилари ажраладиган ва бир жинсли биринчи тартибли дифференциал тенгламалар	291
2-§. Чизикли, Бернулли, тўлиқ дифференциалли биринчи тартибли дифференциал тенгламалар	296
3-§. Юқори тартибли дифференциал тенгламалар	303
4-§. Ўзгармас коэффициентли бир жинсли чизикли тенгламалар	306

5-§. Ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламалар	309
6-§. Ўзгармас коэффициентли бир жинсли бўлмаган чизикли дифференциал тенгламаларда ўзгармасларни вариациялаш усули	315
8-намунавий ҳисоб топшириқлари	317
7-§. Дифференциал тенгламалар системаларини ечиш	328
9-б о б. Каторлар. Фурье алмаштиришлари	336
1-§. Сонли каторлар	336
2-§. Мусбат ҳадли каторларнинг яқинлашиш ва узоклашиш аломатлари	339
3-§. Ўзгарувчи ишорали каторлар	344
4-§. Функционал каторлар, уларнинг яқинлашиш соҳаси	346
5-§. Даражали каторлар	350
6-§. Функцияларни Тейлор ва Маклорен каторларига ёйиш	355
7-§. Баъзи функцияларнинг Тейлор ва Маклорен каторлари	359
8-§. Даражали каторларнинг татбики	361
9-§. Фурье каторлари	365
10-§. Фурье интеграллари	371
9-назорат иши	375
10-б о б. Каррали интеграллар	382
1-§. Декарт координатларида икки ўлчовли интегралларни ҳисоблаш	382
2-§. Декарт координатларида уч ўлчовли интегралларни ҳисоблаш	388
3-§. Икки ўлчовли интегралда ўзгарувчиларни алмаштириш	391
11-б о б. Эгри чизикли интеграллар ва сирт интеграллари	398
1-§. Биринчи ва иккинчи тур эгри чизикли интеграллар	398
2-§. Биринчи ва иккинчи тур эгри чизикли интегралларнинг татбики	405
3-§. Сирт интеграллари	410
10-назорат иши	415
12-б о б. Вектор анализи	426
1-§. Скаляр майдони. Сатх чизиклари ва сиртлари. Йўналиш буйича ҳосила. Градиент. Вектор майдон. Вектор чизиклар	426
2-§. Вектор майдон оқими. Остроградский теоремаси. Вектор (майдон) дивергенцияси	430
3-§. Вектор майдонидаги чизикли интеграл. Циркуляция Вектор майдон ротори. Стокс теоремаси. Циркуляцияни ҳисоблаш	433
4-§. Потенциал майдон. Потенциал майдондаги чизикли интеграл. Гамельтон ва Лаплас операторлари	436
9-намунавий ҳисоб топшириқлари	442
13-б о б. Математик физиканинг асосий тенгламалари	451
1-§. Тор тебраниш тенгламаси учун Коши масаласини Даламбер усули билан ечиш	451
2-§. Иссиқлик ўтказиш (тўлкин) тенгламаси учун аралаш масалани Фурье усули билан ечиш	457
3-§. Дирихле масаласини доирада Фурье усули билан ечиш	461
14-б о б. Эхтимолликлар назарияси ва математик статистика	464
1-§. Эхтимолликнинг классик ва статистик таърифлари. Геометрик эхтимоллик	464
2-§. Ходисалар алгебраси. Эхтимолликларни қушиш ва қўпайтариш теоремалари. Шартли эхтимоллик	470
3-§. Боғлиқмас синовлар кетма-кетлиги. Бернулли формуласи. Муавр — Лаплас ва Пуассон теоремалари	476
4-§. Дискрет тасодифий микдорлар. Баъзи таксимот қонунлари	481
5-§. Узлуксиз тасодифий микдорлар. Айрим таксимот қонунлари	489
6-§. Дискрет ва узлуксиз тасодифий микдорларнинг математик қўтилиши ва дисперсияси	498
11-назорат иши	506

7- §. Боғлиқмас тасодифий миқдорлар йиғиндисининг тақсимиоти. Тасодифий аргумент функцияси	518
8- §. Икки ўлчовли боғлиқмас тасодифий миқдорлар. Корреляция моменти ва корреляция коэффициенти	528
9- §. Вариацион катор учун полигон ва гистограмма	539
1- лаборатория машғулоти	548
10- §. Математик кутилиш ва дисперсия учун нишончли оралликлар	550
11- §. Гипотезаларни Пирсоннинг мувофиқлик критерийси бўйича текшириш	555
2- лаборатория машғулоти	561
12- назорат иши	570
10- намунавий ҳисоб топшириғи	580
15- б о б. Асосий сонли усуллар	605
1- §. Чизикли тенгламалар системасини ечишнинг Жордано — Гаусс усули ва унинг татбиқи	605
3- лаборатория машғулоти	614
2- §. Тенгламалар ва тенгламалар системаларини ечишнинг итерация усуллари	615
4- лаборатория машғулоти	621
3- §. Оддий дифференциал тенгламаларни ечишнинг сонли усуллари. Эйлер усули ва унинг модификациялари	622
5- лаборатория машғулоти	626
Иловалар	628
Адабиёт	633

Ёлқин Учкунович Соатов

ОЛИЙ МАТЕМАТИКА

3- жилд

*Олий техника ўқув юртлари талабалари
учун дарслик*

Тошкент «Ўзбекистон» 1996

Мухаррир *Н. Ғоипов*
Расмлар муҳаррири *Т. Қаноатов*
Техник муҳаррир *У. Қим*
Мусаххиха *У. Абдуқодирова*

Теришга берилди 22.08.95. Босишга рухсат этилди 24.01.96. Қоғоз формати 60×90¹/₁₆. Тип таймс гарнитуроада. Офсет босма усулида босилди. Шартли босма листи 40,0. Нашр. л. 40,17. Тиражи 5000. Буюртма 665.

«Ўзбекистон» нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий, 30.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг ижарадаги
Тошкент матбаа комбинати. 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30

С 73

Соатов Ё. У.

Олий математика: Олий техника ўқув юртлари учун
дарслик. 5 жилдлик. 3- жилд.— Т.: Ўзбекистон, 1996.—
640 б.

22.11я73

№ 3—96

Алишер Навоий номидаги
Ўзбекистон Республикасининг
Давлат кутубхонаси