

Томский ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового
Красного Знамени государственный университет имени
В.В.Куйбышева

А.Ф.Вахгельт

ЛЕКЦИИ ПО ПРИКЛАДНОЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Учебное пособие

Под редакцией кандидата физико-математических наук
В.А.Безпрозванных

Издательство Томского университета

Томск - 1991

УДК 533.0

Вахгельт А.Ф. Лекции по прикладной газовой динамике: Учебное пособие. - Томск: Изд-во Том. ун-та, 1991. - 67с. - 15к. 300экз. I6C3040100.

Учебное пособие является продолжением вышедшего в Издательстве Томского университета в 1988 году пособия Вахгельта А.Ф., Егорова В.М. "Внутренние задачи прикладной газовой динамики". Оно составлено, как и первая часть, согласно программе курса лекций по прикладной газовой динамике, читаемого студентам физико-технического факультета Томского университета.

В учебном пособии изложены вопросы, связанные с движением газа с гиперзвуковыми скоростями и течениями разреженных газов. Обсуждены основные особенности гиперзвуковых течений и на этой основе излагается приближенный закон сопротивления Ньютона, с использованием которого находится сопротивление тела в гиперзвуковом потоке. При рассмотрении течения разреженных газов на основе молекулярно-кинетической теории получены уравнения сохранения для газа и решены задачи о сопротивлении тел в потоке разреженного газа. Приведен обзор некоторых методов решения уравнения Больцмана с целью нахождения функции распределения.

Для студентов физико-технических специальностей университетов.

Рецензенты: доктор физико-математических наук
И.М.Васенин, кандидат физико-математических наук
О.В.Троицкий

JSBN 5-7511-0168-5

В. I6C3040100 46-91
I77(012)-91

© Вахгельт А.Ф., 1991

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	4
1. Гиперзвуковые течения газа	5
1.1. Введение.	5
1.2. Особенности течений с гиперзвуковыми скоростями	6
1.3. Соотношения между параметрами течения в гиперзвуковом потоке	11
1.4. Скачки уплотнений в гиперзвуковом потоке	14
1.5. Закон сопротивления Ньютона	20
1.6. Использование закона Ньютона для нахождения тел, имеющих минимальное сопротивление	22
1.7. Формула Буземана	25
1.8. Метод касательных клиньев и касательных конусов	26
2. Течение разреженных газов	29
2.1. Введение	29
2.2. Молекулярное строение газа и функция распределения. Концентрация молекул, плотность. Определение макроскопических характеристик	33
2.3. Уравнение Больцмана. Общее уравнение переноса молекулярных характеристик	35
2.4. Уравнения макроскопического движения газа	39
2.5. Обзор методов решения уравнения Больцмана	45
2.6. Расчёт аэродинамических сил при свободномолекулярном обтекании твердых тел	50
2.7. Свободномолекулярное течение газа в трубе бесконечной длины	56
2.8. Граничные условия при течении газа со скольжением	60
2.9. Течение газа со скольжением в трубе	62
2.10. Сопротивление тел при обтекании потоком разреженного газа при наличии скольжения	65
Литература	67

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данном учебном пособии собран и систематизирован материал из различных литературных источников. Сделано это с целью облегчить работу студентам, изучающим газовую динамику гиперзвуковых и разреженных течений.

Пособие состоит из двух глав.

В первой главе, посвящённой газовым течениям с гиперзвуковыми скоростями, излагаются основные особенности гиперзвуковых течений, рассмотрен приближённый закон сопротивления Ньютона и на его основе находится тело, имеющее наименьшее сопротивление. Приведена формула Вузмана, уточняющая закон Ньютона, а также изложена суть методов каавательных клиньев и конусов.

Во второй главе рассмотрены вопросы течений разреженных газов. Приведена классификация областей газовой динамики и даны их характеристики. На основе молекулярно-кинетической теории газов получены уравнения сохранения массы, количества движения и энергии. Проведён обзор некоторых методов решения уравнения Больцмана. Рассмотрены вопросы свободномолекулярного течения газов и получены коэффициенты сопротивления и подъёмной силы, действующие на тело, обтекаемое таким потоком. Приведён вывод граничных условий для течений со скольжением, а также рассмотрено течение со скольжением в трубе и при обтекании сферы и цилиндра.

В работе проведена сквозная нумерация рисунков, а формулы нумеруются по главам. При этом в некоторых местах осуществляется возврат к некоторым выражениям с целью их преобразования и их обозначение проводится под теми же номерами, что и прежде, но со штриховой индексацией.

1. ГИПЕРЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА

1.1. Введение

Развитие авиации, космонавтики, ракетостроения выдвинуло на передний план ряд аэродинамических проблем. Большое число их связано со скоростями движения тел, намного превышающими скорость звука. В отличие от течений с умеренными сверхзвуковыми скоростями здесь появляется ряд особенностей, которые вынуждают выделить эту область газовой динамики в отдельную. Чтобы отличать течения, характеризующиеся новыми свойствами, употребляется термин "гиперзвуковой", в отличие от уже установившегося "сверхзвуковой".

Особенности гиперзвуковых течений можно разделить на динамические, обусловленные тем, что число Маха для таких течений велико, и физические или химические, которые обусловлены большой кинетической энергией потока.

Свойства гиперзвуковых течений динамического характера приводят как к постановке некоторых упрощающих предположений, так и к появлению некоторых усложнений по сравнению с обычными сверхзвуковыми течениями. Так, к примеру, метод линеаризации уравнений в газовой динамике гиперзвуковых скоростей неприменим. Неприменимым является также перенос граничных условий на некоторую среднюю поверхность тела. В гиперзвуковых течениях существенными могут быть явления, связанные с взаимодействием между внешним потоком и пограничным слоем или, что то же самое, взаимодействие ударных волн с пограничным слоем.

Химические или физические свойства гиперзвуковых течений проявляются в том, что такие течения сопровождаются высокими температурами, которые вызываются характерными для этого случая весьма сильными ударными волнами. Высокие температуры вызывают диссоциацию молекул на атомы, а также ионизацию молекул или свободных атомов. А это приводит к возможности взаимодействия гиперзвуковых течений с электрическим или магнитным полем. Но процессы, в которых происходит взаимодействие такого потока с электрическим или магнитным полем, рассматриваются магнитной газодинамикой. Газодинамика гиперзвуковых течений основывается на предположении о том, что влияние физических процессов является локальным и что основные характеристики поля течения могут быть

получены без знания физических параметров

и. В литературе особенно много можно найти также взаимодействия газа с твердыми телами, жидкостями.

Мы будем рассматривать гиперзвуковые течения газа с целью определения параметров поля течения вблизи твердого тела. При этом считаем поток газа однородным в смысле химического состава, термодинамического состояния и динамических свойств.

Определение скоростей невозвращающегося потока газа, относенного к гиперзвуковому, определить однозначно трудно. Дело в том, что в зависимости от формы тела, влиятельного газа, от того, какая часть поля течения рассматривается, могут появляться особенности газозвуковых потоков при различных значениях числа Маха набегающего потока. При этом часть пограничной области течения некоторыми свойствами гиперзвуковых течений характеризуется уже при числе Маха набегающего потока $M_0 \approx 3$, близкого к 3. В других случаях особые свойства гиперзвуковых течений проявляются лишь при $M_0 \approx 10$ и выше. Таким образом, при определении нижней границы скоростей гиперзвуковых течений существует некий произвол, и он может быть устранен только в том случае, когда мы имеем дело с конкретным течением и его характерными свойствами.

1.2. Особенности течений с гиперзвуковыми скоростями

При рассмотрении течений с гиперзвуковыми скоростями в окрестности тонких тел выявляется ряд явлений, которыми можно пренебречь при рассмотрении обычных сверхзвуковых течений.

К этим явлениям относятся следующие: возмущения скорости, малые по сравнению со скоростью набегающего потока, могут быть сравнимы по величине со скоростью звука; кинетическая энергия гиперзвукового потока может во много раз превосходить его тепловую энергию; малое относительное изменение кинетической энергии гиперзвукового потока приводит к существенному изменению теплового содержания и как следствие - всех параметров состояния газа (давления, плотности и температуры).

Рассмотрим подробнее эти особенности гиперзвуковых течений.

При гиперзвуковых скоростях кинетическая энергия потока значительно превосходит внутреннюю энергию. Так, для совершенно-го газа, то есть удовлетворяющего уравнению состояния Клайперона-Менделеева $p/p = RT$, внутренняя энергия записывается

$E = C_v T$. Здесь P, ρ, T — соответственно давление, плотность и температура газа; R — газовая постоянная; E — удельная внутренняя тепловая энергия газа; C_v — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Нам известно, что $C_p = \gamma C_v$ и (законение Майора) $C_p - C_v = R$. Здесь γ — местная скорость звука; C_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении, а $E = C_v T$.

Подставим выражение для тепловой энергии газа, получим

$$E = C_v T = C_v \frac{P}{\rho R} = \frac{C_v}{C_p - C_v} \frac{P}{\rho} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{a^2}{\rho} = \frac{1}{(\gamma - 1)\rho} \rho a^2.$$

Получим теперь отношение кинетической энергии потока к внутренней:

$$\frac{\frac{\rho V^2}{2}}{\frac{1}{(\gamma - 1)\rho} \rho a^2} = \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2} M^2. \quad (1.1)$$

Здесь V — местная скорость потока, $M = V/a$ — число Маха.

Из полученного выражения видно, что при обычных сверхзвуковых скоростях кинетическая энергия потока имеет одинаковый порядок с внутренней энергией или меньше её. При гиперзвуковых скоростях тепловая энергия становится много меньше кинетической энергии. Например, для воздуха, то есть при $\gamma = 1,4$ и $M = 1$,

$$\frac{\rho V^2}{2} \approx \frac{1}{5} \rho a^2.$$

при $M = 2$ кинетическая и внутренняя энергии почти равны;

при $M = 5$ $\frac{\rho V^2}{2} \approx 7 \rho a^2$ и при $M = 10$ $\frac{\rho V^2}{2} \approx 30 \rho a^2$.

В гиперзвуковых газах об динамический метод линейных и нелинейных возмущений, столь успешно применяемый для умеренных сверхзвуковых течений, становится неприменимым по той причине, что малые изменения скорости набегающего потока влекут за собой большие изменения параметров течений.

Для определения относительных изменений параметров течений можно воспользоваться уравнением Бернулли в дифференциальной форме

$$v dv + \frac{dP}{\rho} = 0.$$

Из этого уравнения найдём

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\rho}{\rho} \frac{\rho}{\rho} = -v dv$$

или

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\rho}{\rho} v dv = -\frac{\rho}{\rho} v^2 \frac{dv}{v}.$$

Учитывая, что $x \rho / \rho = a^2$, получим

$$\frac{d\rho}{\rho} = -x M^2 \frac{dv}{v}. \quad (1.2)$$

При рассмотрении изэнтропического течения

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{x} \frac{d\rho}{\rho},$$

подставляя в полученное выражение значение $d\rho/\rho$ из (1.2), имеем

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dv}{v}. \quad (1.3)$$

Для совершенного газа имеем уравнение состояния

$$\rho = \rho R T.$$

Взяв от этого уравнения логарифмический дифференциал, получаем

$$\frac{dT}{T} = \frac{d\rho}{\rho} - \frac{d\rho}{\rho}.$$

Подставляя в последнее выражение значения $d\rho/\rho$ и $d\rho/\rho$ по формулам (1.2) и (1.3), приходим к выражению для относительного изменения температуры

$$\frac{dT}{T} = -(x-1) M^2 \frac{dv}{v}. \quad (1.4)$$

Найдём изменение местной скорости звука

$$a^2 = x R T.$$

Продифференцируем это выражение

$$2a da = x R dT$$

и разделим на $a^2 = x R T$. В результате получим

$$\frac{da}{a} = \frac{1}{2} \frac{dT}{T}.$$

Подставляя сюда dT/T из (1.4), имеем

$$\frac{da}{a} = -\frac{1}{2}(\chi-1)M^2 \frac{dv}{v}. \quad (1.5)$$

Из полученных формул (1.2)–(1.5) следует, что при больших значениях M , что имеет место при гиперзвуковых скоростях, малое относительное изменение скорости приводит к значительным изменениям относительных значений давления, плотности, температуры и скорости звука. Например, для воздуха при $\chi = 1,4$ и $M = 2$ относительное изменение скорости вызывает относительное изменение параметров газа того же порядка, то есть

$$\frac{dP}{P} = -56 \frac{dv}{v}; \quad \frac{d\rho}{\rho} = -4 \frac{dv}{v}; \quad \frac{dT}{T} = -1,6 \frac{dv}{v}; \quad \frac{da}{a} = -0,8 \frac{dv}{v},$$

при $M = 10$ изменение параметров газа во много раз превосходит изменение скорости, то есть

$$\frac{dP}{P} = -140 \frac{dv}{v}; \quad \frac{d\rho}{\rho} = -100 \frac{dv}{v}; \quad \frac{dT}{T} = -40 \frac{dv}{v}; \quad \frac{da}{a} = -20 \frac{dv}{v}.$$

Вышеуказанное даёт возможность сделать вывод о невозможности использования линейной теории, которая применяется при обтекании тонких тел при умеренных сверхзвуковых скоростях. Значит в случае обтекания тонких тел гиперзвуковым потоком приходится исследовать нелинейные уравнения. Отсюда следует особенность гиперзвуковых течений – их существенная нелинейность.

При обтекании тел гиперзвуковым потоком необходимо учитывать взаимодействие сильно наклонённой к телу ударной волны с пограничным слоем, чего не следовало делать при обтекании тел дозвуковыми и умеренными сверхзвуковыми потоками, так как толщина вытеснения при этом мала.

Гиперзвуковой поток с увеличением числа M сжимает область возмущений, и в этом случае скачок уплотнения приближается к поверхности тела, взаимодействуя тем самым с пограничным слоем. При больших скоростях происходит как бы увеличение толщины тела за счёт сильно уплотнённого слоя газа между скачком уплотнения и поверхностью тела. Сильное сжатие газа и его торможение в пограничном слое приводят к росту температуры, что влечёт за собой увеличение кинематического коэффициента вязкости и, следовательно, уменьшение числа Re . В результате толщина пограничного слоя возрастает, а это приводит к возрастанию

танию угла наклона скачка уплотнения и изменению распределения давления на поверхности тела. В этом заключается еще одна особенность гиперзвуковых течений — значительное взаимодействие скачка уплотнения с пограничным слоем.

Вследствие сжатия газа за скачком уплотнения следует значительное повышение температуры, что может привести к изменению химических и физических свойств газа. При этом газ может сильно отличаться от совершенного. Когда температура газа становится близкой к 1500 К, происходит возбуждение колебательных степеней свободы атомов вследствие деформации молекул, имеющих большие тепловые скорости. При повышении температуры до 2500 К появляется диссоциация составных частей газа. Так, например, в воздухе молекулярные кислород и азот превращаются в атомарные, что происходит, когда силы столкновения становятся больше внутримолекулярных.

Скорость диссоциации зависит от числа сталкивающихся молекул, имеющих большие тепловые скорости. Поэтому через некоторое время после установления температуры газа диссоциация стабилизируется, так как наряду с ней начинает происходить обратная реакция ассоциации, то есть слияние атомов в молекулы. Скорость ассоциации зависит от числа свободных атомов. Равновесная диссоциация появляется в случае, когда число распадающихся молекул равно их количеству, образующихся вновь. Время, в течение которого диссоциация становится равновесной, называется временем релаксации. Когда характерное время процесса, например, обтекания меньше времени релаксации, процессы, происходящие в газе, нельзя считать равновесными, и это осложняет задачу исследования обтекания какого-либо профиля гиперзвуковым потоком газа.

При повышении температуры газа до 5000–6000 К возникает ионизация газа, то есть атомов и молекул. Газ становится электропроводящим и на него можно воздействовать с помощью магнитного поля, причем, чем выше температура, тем больше ионизованных частиц находится в газе.

Проблемой взаимодействия ионизированного газа с магнитными полями занимается магнитная газодинамика, это не входит в круг рассматриваемых нами вопросов.

При высоких температурах теплоемкость газов также значительно меняется.

Таким образом, необходимость учета явлений, связанных с

высокими температурами, - ещё одна отличительная особенность газовой динамики гиперзвуковых потоков.

На современном этапе гиперзвуковые скорости уже нельзя рассматривать как единый диапазон скоростей, имеющий нижнюю грань. Обычно этот интервал разбивают на три: первый - от нижней границы до появления ощутимой диссоциации, то есть когда газ можно считать совершенным с постоянным молекулярным весом; второй - до появления процессов ионизации, то есть когда молекулярный вес можно считать постоянным, а теплоёмкость становится функцией температуры и давления; третий - с появления существенной ионизации и когда существенным становится тепловое излучение, то есть и молекулярный вес, и теплоёмкость являются функциями процесса. Признак появления ощутимого теплового излучения - яркое свечение газа.

Задачами газовой динамики гиперзвуковых скоростей являются: определение сил, действующих на обтекаемое тело; нагрев тела за счёт энергии гиперзвукового потока и способы его снижения.

1.3. Соотношения между параметрами течения в гиперзвуковом потоке

Рассматривая изэнтропическое гиперзвуковое течение совершенного газа, получим несколько важных соотношений.

Число Маха выражается $M = v/a$, откуда $v = M a$. Продифференцируем последнее выражение и затем, поделив на себя, получим

$$\frac{dv}{v} = \frac{dM}{M} + \frac{da}{a}.$$

Отсюда

$$\frac{dM}{M} = \frac{dv}{v} - \frac{da}{a}.$$

Заменив da/a из (1.5), имеем

$$\frac{dM}{M} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right) \frac{dv}{v}.$$

Принимая во внимание, что в гиперзвуковом потоке $M^2 \gg 1$, можно пренебречь 1 по сравнению со вторым членом в скобке и тогда

$$\frac{dM}{M} = \frac{x-1}{2} M^2 \frac{dv}{v}. \quad (1.6)$$

Подставляя полученное из (1.6)

$$\frac{dv}{v} = \frac{dM}{M} \cdot \frac{2}{(x-1)M^2}$$

в выражение (1.2), получим

$$\frac{dP}{P} = \frac{2xM^2}{(x-1)M^2} \frac{dM}{M} = -\frac{2x}{x-1} \frac{dM}{M}.$$

Принтегрируем последнее выражение

$$\ln P - \ln P_1 = -\frac{2x}{x-1} (\ln M - \ln M_1)$$

и окончательно получаем

$$\frac{P}{P_1} = \left(\frac{M_1}{M} \right)^{\frac{2x}{x-1}}. \quad (1.2')$$

Здесь и дальше индексом "1" обозначаем какое-то фиксированное сечение потока.

Таким же образом поступаем с выражением (1.3) для $d\rho/\rho$:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{2}{x-1} \frac{dM}{M}$$

и после интегрирования получаем

$$\frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{M_1}{M} \right)^{\frac{2}{x-1}}. \quad (1.3')$$

Для dT/T имеем из (1.4)

$$\frac{dT}{T} = -2 \frac{dM}{M}$$

и окончательно для этого выражения имеем

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{M_1}{M} \right)^2. \quad (1.4')$$

Взяв из (1.5) da/a , после подобной процедуры получаем

$$\frac{a}{a_1} = \frac{M_1}{M}. \quad (1.5')$$

Представим (1.6) в следующем виде:

$$\frac{dM}{M^3} = \frac{x-1}{2} \frac{dv}{v}.$$

Проинтегрируем это соотношение:

$$\ln v - \ln v_1 = -\frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{M^2} - \frac{1}{M_1^2} \right)$$

или

$$\ln \frac{v}{v_1} = \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M^2} \right).$$

Но так как значения скоростей гиперзвукового потока v и v_1 велики, а разница между ними сравнительно невелика, поскольку мы рассматриваем течение газа без присутствия препятствий, то вследствие этого $v/v_1 \approx 1$. Исходя из этого, разложим функцию $\ln v/v_1$ в ряд Тейлора в окрестности $x = 1$, где $x = v/v_1$:

$$\ln x = \ln \frac{v}{v_1} = \ln 1 + \frac{x-1}{1!} (\ln x)'_{x=1} + \frac{(x-1)^2}{2!} (\ln x)''_{x=1} + \dots$$

Ограничиваясь величинами первого порядка малости в этом выражении относительно $(x-1)$, получаем

$$\ln \frac{v}{v_1} = \frac{v}{v_1} - 1.$$

Подставляя это выражение вместо $\ln(v/v_1)$, имеем

$$\frac{v}{v_1} = 1 + \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M^2} \right). \quad (1.6')$$

Таким образом, получили соотношения между параметрами течения и скоростями для гиперзвукового потока. Собирая эти формулы вместе, получаем следующую группу формул:

$$\rho = \left(\frac{M_1}{M} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}; \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \left(\frac{M_1}{M} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}}; \quad \frac{T}{T_1} = \left(\frac{M_1}{M} \right)^2; \quad \frac{a}{a_1} = \frac{M_1}{M};$$

$$\frac{v}{v_1} = 1 + \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{M_1^2} - \frac{1}{M^2} \right). \quad (1.7)$$

Как уже было сказано выше, индексом "1" обозначены параметры, отвечающие некоторому характерному состоянию течения, а без индексов здесь представлены местные параметры течения.

Первую, вторую и третью формулы (1.7) можно получить из формул для обычного околосредового течения, пренебрегая единицей в скобках. Формулы (1.7) справедливы для тех областей ги-

перезвукового потока, где местные значения M велики. Но так как при гиперзвуковом обтекании могут иметь место области с обычными сверхзвуковыми или даже дозвуковыми скоростями в случае, когда ударная волна отсоединенная, то формулы (1.7) для этих областей потока неприменимы.

1.4. Скачки уплотнений в гиперзвуковом потоке

Гиперзвуковые обтекания тел сопровождаются скачками уплотнения как прямыми, так и косыми. Рассмотрим вначале прямой скачок уплотнения.

Три закона сохранения (массы, количества движения и энергии) записываются для прямого скачка в гиперзвуковом потоке в следующем виде:

$$\rho_{\infty} v_{\infty} = \rho_s v_s = m, \quad (1.8)$$

$$\rho_{\infty} + \rho_{\infty} v_{\infty}^2 = \rho_s + \rho_s v_s^2 = P, \quad (1.9)$$

$$h_{\infty} + \frac{1}{2} v_{\infty}^2 = h_s + \frac{1}{2} v_s^2 = H_n, \quad (1.10)$$

где m , P , H_n — некоторые постоянные. Индексы „ ∞ “ и „ s “ относятся соответственно к параметрам перед и после прямого скачка уплотнений. Удельная энтальпия h определяется через внутреннюю энергию e в следующем виде:

$$h = e + \frac{P}{\rho}. \quad (1.11)$$

Во всех соотношениях (1.8)–(1.10) v — скорость течения, направленная по нормали к скачку уплотнений. H_n — полная энтальпия прямого скачка.

Так как известными являются параметры течения перед скачком, то искомыми — значения соответствующих параметров за скачком. Для определения этих значений надо иметь уравнение состояния газа за скачком, которое бы связало величины ρ_s , ρ_s и h_s . Возьмем это уравнение в следующем виде:

$$h = h(s, p), \quad (1.12)$$

где S - удельная энтропия. При этом температура T и плотность ρ получаются из уравнения (1.12) в соответствии с хорошо известными формулами:

$$T = \left(\frac{\partial h}{\partial S} \right)_\rho, \quad \frac{1}{\rho} = \left(\frac{\partial h}{\partial \rho} \right)_S. \quad (1.13)$$

При этом предполагается наличие такого уравнения состояния, которое имеет место не всегда. Оно не существует при отсутствии термодинамического равновесия.

Из уравнений (1.8)-(1.10) могут быть получены некоторые дополнительные соотношения:

$$v_\infty \pm v_s = m \left(\frac{1}{\rho_\infty} \pm \frac{1}{\rho_s} \right) = v_\infty (1 \pm \varepsilon), \quad (1.14)$$

$$P_s - P_\infty = m(v_\infty - v_s) = \rho_\infty v_\infty^2 (1 - \varepsilon), \quad (1.15)$$

$$h_s - h_\infty = \frac{1}{2} v_\infty^2 (1 - \varepsilon^2), \quad (1.16)$$

$$\frac{P_s - P_\infty}{\frac{1}{\rho_\infty} - \frac{1}{\rho_s}} = m^2, \quad (1.17)$$

$$\text{где } \varepsilon = \rho_\infty / \rho_s. \quad (1.18)$$

После исключения v_∞ из (1.15) и (1.16) приходим к соотношению Гюгонио

$$h_s - h_\infty = \frac{P_s - P_\infty}{2\rho_\infty} (1 + \varepsilon) = \frac{1}{2} (P_s - P_\infty) \left(\frac{1}{\rho_\infty} + \frac{1}{\rho_s} \right). \quad (1.19)$$

Полученное соотношение Гюгонио связывает термодинамические параметры по обе стороны скачка. Задавшие дополнительно к уравнению состояния величины v_∞ , $v_\infty - v_s$ или P_s полностью определяют скачок через соотношение Гюгонио (1.19).

Выразив из соотношения Гюгонио в явном виде отношение плотностей

$$\varepsilon = \frac{P_s / P_\infty}{h_s + \varepsilon_s (h_\infty + P_\infty) + P_\infty / P_s}. \quad (1.20)$$

При реализации основного предельного перехода теории гиперзвуковых течений, при котором температура и давление перед скачком стремятся к нулю, а M_∞ к бесконечности, мы получаем из (I.20)

$$\varepsilon_{\text{прег.}} = \frac{P_s/\rho_s}{h_s + e_s}. \quad (\text{I.21})$$

Таким образом, в предельном случае очень сильного скачка отношение плотностей является функцией только термодинамического состояния газа за скачком и имеет конечное значение.

В теории гиперзвуковых течений мы рассматриваем произвольный газ, для которого совершенный газ является частным случаем. Это оправданно, так как особенности гиперзвуковых течений, отмеченные выше, говорят о серьезных основаниях для того, чтобы эти потоки отличались от свойств, присущих совершенному газу. К таким случаям относится, например, диссоциированный газ. В случае произвольного газа отношение удельных теплоемкостей c_p/c_v , где c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, а c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме, не является важным параметром. Поэтому обозначим через $\mathcal{X}$ некоторые безразмерные параметры, которые в случае совершенного газа совпадают с отношением удельных теплоемкостей. К таким безразмерным параметрам относится "показатель адиабаты", или "эффективное отношение удельных теплоемкостей" $\mathcal{X}_e$, которое определяется как $\rho a^2/\rho$, где a — скорость звука, определяемая при постоянной энтропии:

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s. \quad (\text{I.22})$$

За исключением специальных течений газ в невозмущенном потоке можно считать совершенным и в этом случае величину $\mathcal{X}_e$ будем обозначать через $\mathcal{X}$.

Получим выражение для отношения плотностей ε через число Маха набегающего потока. Для этого введём следующие обозначения:

$$M_\infty = \frac{v_\infty}{a_\infty}, \quad (\text{I.23a})$$

$$\mathcal{X} = \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{\rho_s}, \quad (\text{I.23b})$$

$$\varepsilon_{\infty} = \frac{p_{\infty}/\rho_{\infty}}{h_{\infty} + e_{\infty}}. \quad (1.23)$$

Величина M_n представляет собой число Маха, составленное по нормальной составляющей скорости набегающего потока и равное величине M_{∞} только в случае прямого скачка. Так что эти величины отличаются между собой только для косоого скачка, где M_n есть нормальная составляющая к скачку от величины M_{∞} .

Запишем отношение давлений при переходе потока через скачок, используя (1.15):

$$\frac{p_s}{p_{\infty}} = 1 + \alpha M_n^2 (1 - \varepsilon). \quad (1.24)$$

Решая уравнения (1.20) и (1.24) относительно ε и считая при этом $\varepsilon_{\text{прср}}$ из (1.21) величиной постоянной, приходим к такому выражению:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_{\text{прср}})(1 + \alpha^{-1} M_n^{-2}) - \frac{1}{2} \sqrt{[1 - \varepsilon_{\text{прср}} - (1 + \varepsilon_{\text{прср}})\alpha^{-1} M_n^{-2}]^2 + 4(1 - \varepsilon_{\text{прср}} \cdot \varepsilon_{\infty}^{-1})\alpha^{-1} M_n^2}. \quad (1.25)$$

Второй корень решения системы уравнений (1.20) и (1.24) даёт тривиальное решение $\varepsilon = 1$. При больших значениях M_n полученное решение можно разложить в ряд

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{прср}} \left[1 + \frac{\varepsilon_{\infty}^{-1} - \varepsilon_{\text{прср}}}{1 - \varepsilon_{\text{прср}}} \alpha^{-1} M_n^{-2} \right] + O(M_n^{-4}). \quad (1.26)$$

Если же $|1 - \varepsilon_{\text{прср}} \cdot \varepsilon_{\infty}^{-1}|$ — величина малая, то решение можно представить в виде ряда

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{прср}} + (1 + \varepsilon_{\text{прср}})\alpha^{-1} M_n^{-2} - \frac{(1 - \varepsilon_{\text{прср}} \cdot \varepsilon_{\infty}^{-1})\alpha^{-1} M_n^{-2}}{1 - \varepsilon_{\text{прср}} - (1 + \varepsilon_{\text{прср}})\alpha^{-1} M_n^{-2}} + (1 - \varepsilon_{\text{прср}} \cdot \varepsilon_{\infty}^{-1}) O(M_n^{-4}). \quad (1.27)$$

В случае совершенного газа мы имеем

$$\varepsilon_{\infty} = \varepsilon_{\text{прср}} \quad (1.28)$$

и тогда решение имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{прсж}} + (1 + \varepsilon_{\text{прсж}}) x^{-1} M_n^{-2} \quad (1.29)$$

Равенство (1.28) выполняется не только для совершенного газа, такое равенство случайным образом может быть реализовано и для несовершенного газа. В случае же совершенного газа (1.28) выполняется всегда и тогда

$$\varepsilon_{\text{прсж}} = \frac{x-1}{x+1} \quad (1.30)$$

и (1.29) принимает вид

$$\varepsilon = \frac{x-1}{x+1} \left(1 + \frac{2}{x-1} M_n^{-2} \right) \quad (1.31)$$

Таким образом, нами получены выражения для отношения плотностей до и после скачка в зависимости от некоторых параметров.

Рассмотрим теперь косой скачок в гиперзвуковом потоке.

Скачок, который огибает обтекаемое тело в гиперзвуковом потоке, почти на всем протяжении является косым и искривлённым. Рассмотрим полученные выше результаты применительно к косому скачку.

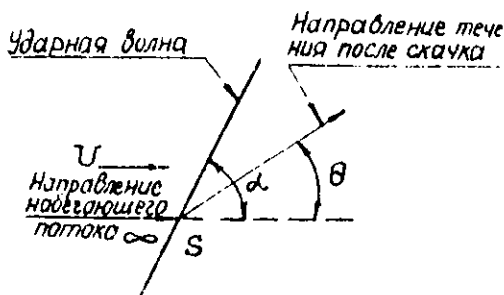


Рис. 1. Косой скачок

В случае косого скачка представим себе наблюдателя, движущегося вдоль косого скачка со скоростью

$$u_\infty = u_s - V \cos \alpha, \quad (1.32)$$

где V — скорость невозмущённого потока, а α — угол наклона скачка относительно направления набегающего потока. Для такого наблюдателя скачок оказывается прямым, и для него скорость и число Маха набегающего потока перед скачком будут

$$v_\infty = \varepsilon^{-1} v_s = U \sin \alpha, \quad (1.33)$$

$$M_n = \frac{U \sin \alpha}{a_\infty} = M_\infty \sin \alpha. \quad (1.33 \text{ в})$$

Полная энтальпия H_n не совпадает для этого наблюдателя с полной энтальпией невозмущенного потока H , а может быть найдена из соотношения

$$H - H_n = \frac{1}{2} u_\infty^2 = \frac{1}{2} U \cos^2 \alpha. \quad (1.34)$$

Вычислим теперь угол между скачком и направлением течения за скачком (рис. 1):

$$\operatorname{tg}(\alpha - \theta) = \frac{v_z}{u_z} = \varepsilon \operatorname{tg} \alpha, \quad (1.35)$$

где θ — угол отклонения линии тока после скачка. При этом если ε мало и косой скачок сильно отличается от прямого, то линии тока за скачком должны проходить вблизи от этого скачка.

После дифференцирования (1.35) имеем

$$(1 + \varepsilon^2 \operatorname{tg}^2 \alpha) \frac{d\theta}{d\alpha} = (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon \operatorname{tg}^2 \alpha) - \operatorname{tg} \alpha \frac{d\varepsilon}{d\alpha}. \quad (1.36)$$

При значении угла наклона скачка относительно направления набегающего потока α , равного углу Маха набегающего потока, имеем $\varepsilon = 1$, $\theta = 0$ и $d\varepsilon/d\alpha < 0$, при этом $d\theta/d\alpha > 0$. В случае прямого скачка $\alpha = \pi/2$, $\theta = 0$ и $d\theta/d\alpha = -\varepsilon^{-1}(1 - \varepsilon) < 0$. Между этими значениями угла α находится значение $d\theta/d\alpha = 0$, которое соответствует как минимум одному значению α , которое определяется при постоянном значении ε условием $\operatorname{tg} \alpha = \varepsilon^{-1/2}$. Для соответствующего угла точка на кривой возможных скачков называется точкой отхода скачка. В этой точке угол отклонения потока θ принимает свое максимальное значение. Скачок называется слабым или сильным в зависимости от значения угла наклона α , по сравнению со значением α в точке отхода. Сильным скачок называется, если угол наклона меньше, чем его значение в точке отхода, и слабым — если больше.

Звуковой точкой на кривой возможных скачков называется точка, соответствующая такому скачку, за которым скорость равна скорости звука. Вообще говоря, существует всего одна точка, для которой имеет место

$$u_s^2 + v_s^2 = a_s^2. \quad (1.37)$$

Эта точка отделяет скачки, переводящие течение в сверхзвуковое, от скачков, переводящих течение в дозвуковое. В частном случае совершенного газа при постоянном соотношении удельных теплём — костей эти две точки сливаются при предельном переходе при $M_\infty \rightarrow \infty$.

1.5. Закон сопротивления Ньютона

Имя Ньютона присвоено целому направлению теории гиперзвуковых течений, которое основано на предположении о равенстве нулю на скачке отношения плотностей и на предположении о бесконечно тонком ударном слое. При расчёте сил сопротивления, которые действуют на тело, движущееся с гиперзвуковой скоростью, можно воспользоваться законом сопротивления Ньютона, который основан на гипотезе, что набегающий поток представляет собой пространство, равномерно заполненное одинаковыми и невзаимодействующими между собой частицами.

Ньютон предполагал, что закон соударения, определяющий потерю нормальной составляющей количества движения, не зависит от угла встречи частицы с поверхностью тела и что при ударе не происходит изменения касательной составляющей количества движения. Таким образом, Ньютон предполагал, что импульс пропорционален синусу угла встречи и направлен по нормали к поверхности тела. В результате возникает давление на тело. Составляющая импульса от одной частицы, влияющая на сопротивление, пропорциональна квадрату синуса угла встречи.

Если масса газа, действующая на элемент поверхности $d\sigma$ будет равна $\rho_\infty U \sin \omega d\sigma$, угол ω принимается за угол наклона элемента поверхности к σ и набегающему потоку. Тогда сила давления на элемент поверхности $d\sigma$ согласно гипотезе Ньютона будет

$$dP = \rho_\infty U^2 \sin^2 \omega d\sigma \quad (1.38)$$

Избыточное давление на тело с учётом того, что на область, находящуюся в аэродинамической тени, давление считаем отсутствующим, получим из (1.38)

$$\frac{dP}{d\sigma} = P_s + P_w + \rho U^2 \sin^2 \alpha \quad (1.38)$$

Формула Ньютона (1.39) не является абсолютно верной. Решение Ньютона может быть реальным только в случае течений при очень больших числах Маха с большой плотностью и при отсутствии вязкости. При очень высоких числах Маха течение перед скачком является, по существу, разреженным и только в ударном слое его можно считать сплошной средой. Если ударный слой очень тонкий, то скачок имеет практически тот же угол наклона, что и тело, при этом нормальная составляющая движения ударяющейся молекулы передается телу через ударный слой. При отсутствии вязкости в ударном слое касательная составляющая движения молекулы будет сохраняться. Так как условил, при которых закон сопротивления Ньютона справедлив, трудно выполнить, то и само решение Ньютона не всегда достаточно точно. Однако оно бывает полезным для многих практических расчетов. Ученые баллистики пользовались этим законом давно, вводя при этом эмпирический коэффициент. При больших гиперзвуковых скоростях формула (1.39) хорошо описывает реальную картину течения по той причине, что между ударной волной и поверхностью тела находится очень тонкий слой сильно сжатого газа. При этом плотность ρ_w и скорость U набегающего потока постоянны, а линии тока между ударной волной и поверхностью тела практически параллельны поверхности тела и имеют почти одинаковые скорости.

Как следует из закона Ньютона (1.39), давление в данной точке поверхности тела определяется её местным углом встречи с набегающим потоком. Отсюда возникла идея метода касательных клиньев для плоского течения и касательных конусов для пространственных течений. Эти методы были разработаны в 1949 году Валан-дерсом и основаны на предположении, что давление в какой-либо точке поверхности равно давлению на клине, касательном в этой точке (в плоском случае), или на конусе для пространственного случая.

Для лучшего совпадения экспериментальных и расчетных результатов было предложено использовать вместо (1.39) следующей формулы:

$$\frac{P_s}{P_w} = \tilde{P} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \tilde{\alpha}} \quad (1.40)$$

где $\tilde{P}$ — безразмерное давление в передней точке тела. Это давление легко определяется методами теоретической газовой динамики. Например, при обтекании тупого тела возникает отсоединённая ударная волна и в точке торможения давление определяется по формуле Рэлея:

$$\tilde{P} = \frac{P_0}{P_\infty} = \frac{P_2}{P_\infty} \left\{ 1 + \frac{x-1}{4x} \left[x-1 + (x-1) \frac{P_\infty}{P_2} \right] \right\}^{\frac{x}{x-1}},$$

где $\frac{P_2}{P_\infty} = \frac{2x}{x+1} M_1^2 - \frac{x-1}{x+1}$, P_0 — давление в точке торможения.

$\tilde{\omega}$ в формуле (1.40) есть угол встречи передней точки с набегающим потоком.

1.6. Использование закона Ньютона для нахождения тел, имеющих минимальное сопротивление

С помощью формулы Ньютона (1.39) можно решить задачу о нахождении формы тел наименьшего сопротивления при некоторых заданных условиях. Например, при заданном объёме тела и его длине или при заданном объёме и площади наибольшего поперечного сечения. В "Математических началах натуральной философии" Ньютон определяет форму тела с заданной длиной и заданным диаметром кормового среза, которое по его модели имеет минимальное сопротивление. Этот результат представляет собой самое раннее решение некоторой вариационной задачи.

Рассмотрим, исходя из закона сопротивления Ньютона, задачу о нахождении тела наименьшего сопротивления в плоском и осесимметричном случае.

Чтобы решить задачу, необходимо составить выражение для силы сопротивления, используя формулу (1.39). Для этого спроектируем элементарную силу dP на направление набегающего потока

$$dP_x = \rho_\infty U^2 \sin^3 \omega d\sigma. \quad (1.41)$$

Тогда лобовое сопротивление тела, имеющего площадь поперечного сечения σ , найдётся интегрированием выражения (1.41)

$$P_x = \rho_\infty U^2 \int_{(\sigma)} \sin^3 \omega d\sigma = \rho_\infty U^2 \int_{(\sigma_y)} \sin^3 \omega d\sigma_y. \quad (1.42)$$

где σ_y - площадь, перпендикулярная направлению набегающего потока.

Проекция элементарной силы на направление, перпендикулярное набегающему потоку, имеет вид

$$dP_y = -\rho_\infty U^2 \sin^2 \omega \cdot \cos \omega \cdot d\sigma \quad (1.43)$$

и интегрируя по площади поперечного сечения, получим

$$P_y = -\rho_\infty U^2 \int_{(\sigma)} \sin^2 \omega \cdot \cos \omega \, d\sigma = -\rho_\infty U^2 \int_{(\sigma_y)} \sin \omega \cdot \cos \omega \cdot d\sigma_y \quad (1.44)$$

Задаваясь в формуле (1.42) той или иной зависимостью угла ω от длины тела, можно провести интегрирование и исследовать полученную формулу.

Рассмотрим плоский случай. Для него

$$d\sigma = 2 dS = 2 \frac{dx}{\cos \omega}.$$

При рассмотрении осесимметричного случая мы бы имели

$$d\sigma = 2\pi y dS = 2\pi y \frac{dx}{\cos \omega}.$$

Но мы рассмотрим, для простоты, только плоский случай. В осесимметричном случае решение ищется аналогичным образом и мы его в дальнейшем опускаем

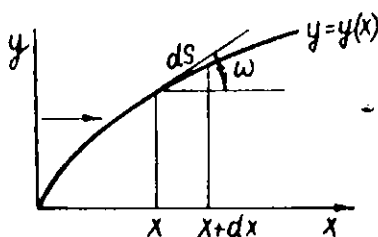


Рис. 2. Схема обтекания произвольного плоского тела гиперзвуковым потоком

Подставляя выражение для dS в (1.42), получим

$$P_x = 2\rho_\infty U^2 \int_0^{\ell} \frac{\sin^3 \omega}{\cos \omega} dx = 2\rho_\infty U^2 \int_0^{\ell} \operatorname{tg} \omega \sin^2 \omega dx,$$

где ℓ - длина участка тела, сопротивление которого рассматривается; в случае использования закона Ньютона ℓ можно считать как расстояние от носика тела до точки, имеющей наибольшую площадь поперечного сечения.

Заменяя под интегралом выражение

$$\lg \omega = y' \quad \text{и} \quad \sin^2 \omega = \frac{\lg^2 \omega}{1 + \lg^2 \omega} = \frac{y'^2}{1 + y'^2}.$$

В результате получаем

$$P_1 = 2\rho_{\infty} U^{\infty} \int_0^{\xi} \frac{f^3}{1 + y'^2} dx \quad (1.45)$$

Интеграл в (1.45) представляет собой функционал типа $\int_0^{\xi} F(y, y') dx$, следовательно, необходимо решать задачу на экстремум функционала, входящего в формулу (1.45).

Как известно, экстремальные значения дают функции $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$, которые удовлетворяют уравнению Эйлера

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} = 0.$$

Причем кривую, удовлетворяющую уравнению Эйлера, называют экстремалью.

Так как функция $\mathcal{F}$ не зависит явно от x , то

$$\frac{d\mathcal{F}}{dx} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} y' + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} y''.$$

Умножив уравнение Эйлера на y' и заменяя $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} y'$ из последнего соотношения, имеем

$$\frac{d\mathcal{F}}{dx} = \left(y' \frac{d}{dx} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} y'' \right) = 0$$

или

$$\frac{d\mathcal{F}}{dx} = \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} \right) = 0.$$

Проинтегрировав один раз это выражение, получаем первый интеграл

$$\mathcal{F} - y' \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'} = \text{const} \quad (1.46)$$

В случае рассмотрения плоской задачи мы имеем $F(y, y') = \frac{y'^3}{1 + y'^2}$.

Подставляя в (1.46), получаем

$$y'^3 - y' \frac{3y'^2}{1 + y'^2} = y'^3 - \frac{3y'^3}{1 + y'^2} = \text{const}$$

После преобразований приходим к выражению

$$\frac{2y'^3}{(1+y'^2)^2} = \text{const.}$$

Учитывая, что $y' = \tan \omega$, получаем

$$\frac{\tan^3 \omega}{(1+\tan^2 \omega)^2} = \text{const.}$$

Чтобы выполнялось данное условие, необходимо равенство $\tan \omega = \text{const}$, то есть чтобы обтекаемое тело было клином в плоском случае. В осесимметричном случае решение имеет более сложный вид.

Полученный результат является справедливым в рамках теории Ньютона. Если же исходить из точной газодинамической теории, то результат может быть другим, то есть тело наименьшего сопротивлений для плоского течения будет иметь более сложную форму.

1.7. Формула Буземана

Формула закона сопротивления Ньютона (1.39) справедлива в предельном случае, когда отношение плотностей на скачке равно нулю, и при условии, что форму скачка и форму тела можно считать одинаковыми. При этом формула (1.39) даёт значение давления непосредственно за скачком. Это давление равно давлению на теле только в случае, когда после скачка каждая частица набегающего потока движется равномерно, то есть без ускорения или по свободной траектории. Это имеет место в случае клина или конуса при нулевом угле атаки.

При обтекании тела с криволинейной образующей каждая частица движется в криволинейном ударном слое. Поэтому необходимо учитывать силы, которые требуются для искривления траектории частицы. В соответствии с этим будет иметь место изменение давления поперек ударного слоя. Это изменение давления будет измеряться произведением потока количества движения в этом слое на кривизну слоя. Необходимость этой поправки при расчёте давления на поверхности тела, движущегося с гиперзвуковой скоростью, была доказана Буземаном. Для выпуклого тела давление на поверхности будет меньше, чем это определяется по формуле (1.39), и при достаточно большой кривизне может уменьшаться до нуля в некоторой точке поверхности, в которой касательная ещё образует

положительный угол с направлением набегающего потока.

Модификация формулы (I.39) заключается в том, что в неё введён дополнительный член, за счёт которого эта формула даёт точное значение давления торможения, а вычисляемое значение давления равно давлению на теле. Эта формула не сложна и проста в употреблении, однако не опирается на какую-либо теорию, а выведена из эмпирических соображений.

Поправка Буземана, учитывающая центробежные силы, равна количеству движения на единицу ширины $U P_1 \gamma^{-\gamma}$, умноженному на кривизну тела, то есть на $-\kappa \omega \frac{d\omega}{d\psi}$. Здесь γ — целочисленный параметр, который для плоского течения равен нулю, а для осесимметричного течения $\gamma = 1$.

Следовательно, давление на поверхности тела можно выразить

$$P_s - P_\infty = P_\infty U^2 \kappa n^2 \omega - P_\infty P_1 U^2 \frac{d\omega}{d\psi}, \quad (I.47)$$

где P_1 — давление на внешней границе ударного слоя, которое показывает, что интеграл для давления вычисляется по внешней границе ударного слоя; ψ — функция тока, которая для плоского набегающего потока $\psi = P_\infty U y$, а для осесимметричного течения

$$\psi = \frac{1}{2} P_\infty U r^2.$$

Формула (I.47) была выведена Буземаном, и она носит название формулы Буземана, или же формулы Ньютона-Буземана.

I.8. Метод касательных клиньев и касательных конусов

Как уже было сказано в п. I.5, согласно закону Ньютона (I.39) давление в каждой точке поверхности тела определяется местным углом встречи с набегающим потоком. На этом основана идея приближенных методов получения давления на поверхности умеренно тонких тел в гиперзвуковом потоке невязкого газа. Этими методами являются приближение "касательных клиньев" для двумерных тел и "касательных конусов" для осесимметричных тел. Методы легки в применении, но вместе с тем они не дают никакой информации о структуре ударного слоя и не учитывают центробежных сил. Применяются эти методы как эмпирически обоснованные в оговорённой выше области для умеренно тонких тел.

Давление в любой точке поверхности твёрдого тела с дисиз-

вольным углом атаки берётся равным давлению на клине для плоских течений или на конусе для осесимметричных тел, половина угла раствора каждого из них равна местному углу наклона линии тока к направлению течения. Это оправданно, так как при гиперзвуковых скоростях ударный слой достаточно тонок, вследствие этого изменение угла наклона линий тока очень мало. Поэтому можно считать, что давление на поверхности тела такое же, как и на ударной волне.

Простота этих методов заключается в том, что давление на поверхности тела является функцией только угла наклона тела.

Точность этих методов тем выше, чем меньше отношение плотностей $\rho_\infty/\rho_s = \varepsilon$.

В частном случае тонкого тела в гиперзвуковом потоке идеального газа с постоянным значением отношения теплоёмкостей γ можно записать формулу для давления на поверхности тела:

$$\frac{P_\theta}{P_\infty} = 1 + \gamma K^2 \left[\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 + \frac{1}{K^2}} + \frac{\gamma+1}{4} \right], \quad (1.48)$$

где вместо угла наклона касательной в точке к направлению потока ω берётся величина $K = M_{\infty} \cdot \omega$; P_θ — давление на поверхности тела.

Но, как мы уже говорили, приближение "касательных клиньев" или конусов основывается на предположении о постоянстве давления и угла наклона линии тока поперек ударного слоя. А это приводит к ошибкам по двум причинам. Во-первых, появляющиеся центробежные силы за счёт искривления линий тока при искривлении поверхности тела ведут к появлению градиента давления поперёк ударного слоя. Во-вторых, этот градиент давления приводит к изменению угла наклона линий тока поперёк ударного слоя.

Для очень малых ε поправка на изменение угла наклона линий тока пренебрежимо мала по сравнению с поправкой на появление центробежных сил.

Давление за скачком можно взять для тонкого тела в гиперзвуковом потоке, как для клина, при очень малых значениях ε [1]:

$$\frac{P_s - P_\infty}{\gamma P_\infty M_\infty^2} = (1 - \varepsilon) \alpha^2 = \frac{\theta^2}{1 - \varepsilon}. \quad (1.49)$$

Поправку к давлению за счёт центробежных сил для малого ε можно взять в виде

$$P_s - P_\infty = \alpha P_\infty M_\infty^2 \frac{y_\delta}{R_\delta}. \quad (1.50)$$

Здесь y_δ — координата точки поверхности тела; R_δ — радиус кривизны тела, причём для выпуклого тела он положителен.

Считая $\theta_\delta = \theta_\delta$, из формул (1.49) и (1.50) получим значение давления на поверхности тела, уточнённое на наличие центробежных сил:

$$\frac{P_\delta}{P_\infty} = 1 + \frac{\alpha K^2}{1-\varepsilon} - \alpha M_\infty^2 \frac{y_\delta}{R_\delta}. \quad (1.51)$$

Таким образом, выражение (1.51) даёт значение давления на поверхности умеренно тонкого плоского тела.

Аналогичным образом выводится соответствующее значение для умеренно тонкого тела вращения. Оно имеет вид

$$\frac{P_\delta}{P_\infty} = 1 + \frac{\alpha K^2}{1-\frac{1}{4}\varepsilon} - \frac{\alpha M_\infty^2}{2} \frac{z_\delta}{R_\delta}, \quad (1.52)$$

где z_δ — расстояние точки поверхности тела от оси симметрии тела.

Несмотря на то, что до сих пор нет строгого теоретического обоснования методов касательных клиньев и конусов, эти методы являются практически ценными в ряде случаев, когда другие более сложные методы не работают.

2. ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ

2.1. Введение

Проблемы газовой динамики гиперзвуковых течений нельзя считать решенными без рассмотрения течений разреженного газа, то есть течений при малых значениях числа Рейнольдса. Такие течения имеют место при гиперзвуковых полётах на больших высотах, при движении газа в вакуумных аппаратах, при ультразвуковых колебаниях в газах, а также при рассмотрении структуры сильного скачка, так как в последнем случае характерным размером течения является толщина скачка, которая соизмерима с длиной свободного пробега молекул.

В одной из первых работ по исследованию течений разреженного газа Зигель К. [2] предложил разделение механики жидкости по различным режимам в соответствии со степенью разрежения ρ или — соности от числа Кнудсена. Число Кнудсена определяется отношением средней длины свободного пробега молекул $\bar{\ell}$ к некоторому характерному размеру течения L . В различных случаях в зависимости от рассматриваемой задачи за характерный размер может браться либо характерный размер тела, либо толщина пограничного слоя, либо любой другой размер в зависимости от рассматриваемой задачи. Из различных областей, на которые многие авторы поделили всю область газовой динамики, только две хорошо определены: это обычная газовая динамика сплошной среды, в которой число Кнудсена $\bar{\ell}/L \ll 1$, так что взаимодействие молекул между собой намного превосходит столкновения молекул со стенками, свободномолекулярное течение, где $\bar{\ell}/L \gg 1$, то есть газ настолько разрежен, что столкновения молекул с границами значительно превосходят межмолекулярные взаимодействия. Между этими достаточно хорошо определёнными областями газовой динамики существует целый ряд промежуточных течений.

При нормальном давлении величина свободного пробега молекул $\bar{\ell}$ составляет миллионные доли сантиметра. При понижении плотности газа длина свободного пробега молекул возрастает обратно пропорционально плотности, и если она становится соизмеримой с характерными размерами потока, то дискретная структура газа начинает сказываться на законах газовой динамики и теплообмена.

Число Кнудсена можно выразить через известные параметры подобия — числа Маха (M) и Рейнольдса (Re). Для этого можно

использовать известную формулу Чепмена из кинетической теории газов, связывающую кинематическую вязкость со свободным пробегом и средней скоростью движения молекул

$$\nu = 0,499 \ell \bar{c} \approx \frac{1}{2} \ell \bar{c}. \quad (2.1)$$

Средняя скорость молекул выражается через скорость звука a :

$$\bar{c} = a \sqrt{\frac{\gamma}{\pi x}}, \quad (2.2)$$

где $x = c_r/c_r$.

Тогда

$$\ell = 1,26 \frac{\nu}{a} \sqrt{x}. \quad (2.3)$$

Подставим (2.3) в выражение для числа Кнудсена и после некоторых преобразований получим

$$K = \frac{\ell}{L} = 1,26 \frac{\nu}{aL} \sqrt{x} = 1,26 \frac{\nu}{a} \frac{U}{UL} \sqrt{x} = 1,26 \frac{M}{Re_L} \sqrt{x}. \quad (2.4)$$

Из теории пограничного слоя следует, что при больших значениях числа Рейнольдса ($Re \gg 1$) толщина пограничного слоя δ обратно пропорциональна корню квадратному из числа Re :

$$\frac{\delta}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_x}},$$

где x — координата в направлении длины тела, по которой составлено число Re .

Поэтому если решается задача о гидродинамическом трении и теплообмене, то есть задача пограничного слоя, когда характерным размером является толщина пограничного слоя ($L \sim \delta$), то при $Re_x \gg 1$, согласно (2.4), число Кнудсена становится пропорциональным отношению числа M к корню квадратному из Re :

$$K \sim \frac{M}{\sqrt{Re_x}}.$$

При малых значениях числа Рейнольдса ($Re_x \ll 1$) толщина пограничного слоя сравнима с длиной тела, поэтому

$$K \sim \frac{M}{Re_x}.$$

Вся область газовой динамики, как мы говорили выше, может

быть поделена на несколько узких, из которых две хорошо определены. То есть имеющимися теоретическими и экспериментальными данными показано, что при значениях числа $K < 0,01$ газ ведёт себя как сплошная среда. Вторая хорошо определённая область — та, где значения числа Кнудсена велики, то есть $K > 1$. В этой области пограничный слой у поверхности тела не образуется, так как резонированные (отражённые) поверхностью тела молекулы сталкиваются с молекулами внешнего потока на далёком от него расстоянии, то есть в этом случае тело не вносит искажений в поле течения вблизи поверхности. Этот режим течения носит название "свободномолекулярного течения газа". Для этого режима, который, по имеющимся данным, наблюдается при $M/Re_x > 3$, трение и теплообмен тела с окружающей средой могут быть учтены при условии однократных столкновений молекул газа с поверхностью тела.

В промежутке между течением сплошной среды и свободномолекулярным течением газа находятся менее изученные течения газа. В интервале значений числа Кнудсена $0,01 < K < 0,1$ находится область так называемого "течения со скольжением". В пределах этой области также можно пользоваться уравнениями газовой динамики сплошной среды, но уже граничные условия должны быть отличны от условий прилипания и равенства температуры потока температуре стенки на поверхности тела, обычных для течений сплошной среды. В интервале $0,01 < K < 0,1$ в граничные условия на твердой поверхности следует вводить поправку на так называемое "скольжение" для динамической задачи и "скачок температур" при рассмотрении теплообмена.

Переходная область между течением со скольжением и свободномолекулярным течением до сих пор остаётся малоизученной. В этой области необходимо учитывать как столкновения молекул между собой, что является определяющим при свободномолекулярном режиме, так и столкновения молекул газа с поверхностью твердого тела, а также взаимодействие отражённых молекул с молекулами набегающего потока. Все это создаёт большие теоретические трудности и поэтому данная область остаётся слабо исследованной.

Таким образом, при обтекании твердых тел потоком разреженного газа три критерия подобия, характеризующие вязкость (Re), сжимаемость (M) и разрежение ($K = \frac{c}{L}$), определяют область и соответственно методы решения, которыми следует пользоваться для получения картины течения.

На рис. 3 представлены области течения газа в зависимости от значений M и Re по Тягу [3].

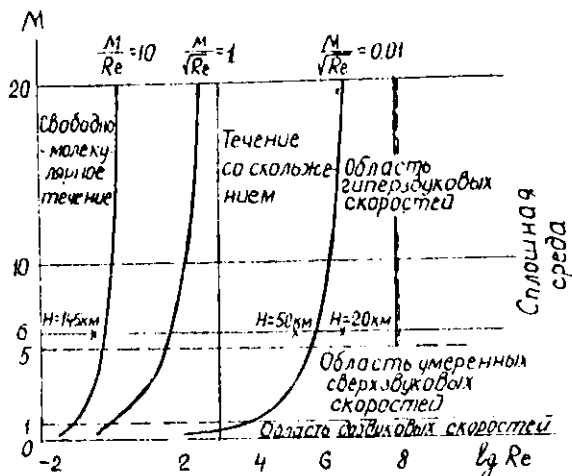


Рис. 3. Области течения разреженных газов [3]

Из рис. 3 видно, что при постоянном значении числа M изменение числа Re может привести к изменению области течения.

И если рассмотреть полёт тела на различных высотах, то оказывается, что при одном и том же значении числа M на различных высотах условия полёта будут соответствовать различным областям течения вследствие изменения кинематического коэффициента вязкости. Так, к примеру, при $M = 6$ для тела длиной $l = 1$ м число Re значительно зависит от высоты полёта:

$H = 20$ км	$Re = 1,07 \cdot 10^5$,
$H = 50$ км	$Re = 1,11 \cdot 10^5$,
$H = 100$ км	$Re = 98,9$,
$H = 145$ км	$Re = 0,595$.

Эти значения числа Re нанесены на рис. 3. Отсюда видно, что для такого тела полёт на высоте 20 км соответствует условиям обычной сплошной среды, на высоте 50–100 км – области течения со скольжением и на высоте 145 км полёт проходит в условиях сво-

бодномолекулярного течения.

Рассмотрение течений в условиях свободномолекулярного режима проводится на основе применения кинетической теории газов.

2.2. Молекулярное строение газа и функция распределения.

Концентрация молекул, плотность. Определение макроскопических характеристик

Кинетическая теория исходит из представления о газе как о совокупности материальных частиц. Эти частицы условно называются молекулами, но такое название не всегда совпадает с физическим определением молекулы. Под "молекулами" в этом случае могут подразумеваться свободные атомы, ионы, электроны и собственно молекулы. Как мы знаем, твердые тела и жидкие вещества также состоят из молекул и атомов, но характерной особенностью газа является то, что его молекулы расположены друг от друга на расстояниях, значительно превосходящих размеры самих молекул. Вследствие этого молекулы газа сравнительно свободно могут перемещаться друг относительно друга.

В большинстве случаев предполагается, что каждая из молекул представляет собой твердый упругий шарик и при своем движении не оказывает силового воздействия на другие молекулы до тех пор, пока не произойдет её столкновение ещё с одной или несколькими молекулами. Расстояние, которое проходит молекула за время между двумя столкновениями, называется свободным пробегом. Очевидно, что в общем случае это расстояние будет различным как для разных молекул одного и того же газа, так и для определённой молекулы в различные моменты времени. Поэтому обычно рассматривается усреднённая величина — средний свободный пробег молекулы газа.

Довольно часто используется и другая схема взаимодействия между молекулами: молекулы рассматриваются как центры силового поля, при этом сила взаимодействия берётся обратно пропорциональной некоторой степени расстояния между молекулами. Примером такого взаимодействия является предложенная Максвеллом модель взаимодействия с силой, обратно пропорциональной пятой степени расстояния между молекулами.

В силу большого количества степеней свободы механической системы, которой можно аппроксимировать любой конечный объём газа с точки зрения кинетической теории, для описания основных свойств

такого объёма газа приходится пользоваться статистическими представлениями. Определим свойства газа, которые обуславливаются особенностями движения его молекул.

В данный момент времени каждая молекула газа обладает присущей ей скоростью и занимает определённое положение в пространстве. Для определения тех или иных свойств газа необходимо иметь представление о поведении отдельных молекул, но так как это является невыполнимым условием, то принято рассматривать макроскопические характеристики газа, которые вычисляются путём осреднения тех или иных молекулярных параметров по достаточно большому числу молекул или по достаточно длительному промежутку времени. Для того, чтобы провести такое осреднение, необходимо знать некоторые статистические данные, для задания которых необходимо ввести так называемую функцию распределения.

Рассмотрим движение газа в некоторой неподвижной декартовой системе координат (x, y, z) . Каждая из молекул имеет свою скорость, компоненты которой обозначим через C_x, C_y, C_z . Если положением и скоростью в данный момент времени t определяется состояние одной молекулы, то состояние газа, занимающего элементарный объём $dx dy dz$, в этот же момент времени можно охарактеризовать числом молекул, скорости которых находятся в диапазоне от C_x, C_y, C_z до $C_x + dC_x, C_y + dC_y, C_z + dC_z$. Тогда число таких молекул можно записать как

$$dN = F(x, y, z, t, C_x, C_y, C_z) dx dy dz dC_x dC_y dC_z. \quad (2.5)$$

где функция распределения молекул по скоростям F зависит от семи переменных. Эта функция играет важнейшую роль во всей кинетической теории газов.

Используя какую-либо функцию распределения, легко можно вычислить концентрацию молекул $n(x, y, z, t)$ — среднее число молекул газа, находящихся в единице объёма в интересующий нас момент времени t . Как видно из (2.5), для этого необходимо проинтегрировать значение величины dN по всем возможным значениям составляющих скорости. Таким образом,

$$n dx dy dz = \left(\int F dV \right) dx dy dz$$

и отсюда, следовательно,

$$n = \int F dV, \quad (2.6)$$

где символом $\int \dots dV$ сокращённо обозначается тройной интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots dC_x dC_y dC_z.$$

Зная концентрацию молекул, можно определить плотность газа $\rho(x, y, z, t)$ с помощью соотношения

$$\rho = n \cdot m, \quad (2.7)$$

где m — масса молекулы.

Выражение (2.7) справедливо для однородного газа, в противном случае m должно быть массой осреднённой молекулы.

Используя функцию распределения, можно составить выражение для среднего значения любой функции, которая зависит от положения, скоростей молекул и времени, то есть $\varphi = \varphi(x, y, z, C_x, C_y, C_z, t)$. Для точки, имеющей координаты x, y, z , в момент времени t среднее значение функции φ можно записать следующим образом:

$$\bar{\varphi} = \frac{\int \varphi F dV}{\int F dV} = \frac{1}{n} \int \varphi F dV. \quad (2.8)$$

В некоторых случаях вместо функции распределения F вводится массовая функция распределения f , связь между которыми осуществляется по формуле

$$f = m F. \quad (2.9)$$

Используя массовую функцию распределения, можно написать выражение для среднего значения функции φ , применяя (2.8):

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{\rho} \int \varphi f dV. \quad (2.8')$$

Записанная в виде (2.8) и (2.8') функция φ представляет собой какую-либо макроскопическую характеристику газа, который описывается представленной функцией распределения.

2.3. Уравнение Больцмана. Общее уравнение переноса молекулярных характеристик

Записанная выше функция φ может играть роль какой-либо молекулярной характеристики. Средние значения этих молекулярных

характеристик представляют собой не что иное, как макроскопические характеристики состояния и движения газа. Как было представлено выше, для расчёта этих средних значений нужно знать вид функций распределения F или f . Вид этих функций определяется в результате решения уравнения Больцмана, вывод которого можно найти в специальной литературе по кинетической теории газов, например [4]. Если через X , Y , Z обозначить компоненты внешней силы, действующей на единицу массы каждой из молекул газа, то это уравнение Больцмана можно записать

$$\frac{\partial F}{\partial t} + C_x \frac{\partial F}{\partial x} + C_y \frac{\partial F}{\partial y} + C_z \frac{\partial F}{\partial z} + X \frac{\partial F}{\partial C_x} + Y \frac{\partial F}{\partial C_y} + Z \frac{\partial F}{\partial C_z} = \Delta_c F. \quad (2.10)$$

Здесь член $\Delta_c F$, стоящий в правой части уравнения, выражает собой скорость изменения функции распределения в фиксированной точке за счёт столкновения между молекулами.

Практически в большинстве случаев и, в частности, при рассмотрении течений разреженного газа можно ограничиться учётом столкновений, в которых участвуют по две молекулы, так называемых парных столкновений. Величина $\Delta_c F$ в общем случае имеет вид интеграла, подинтегрируемая функция которого содержит функцию распределения F , так что в общем случае уравнение Больцмана (2.10) является интегродифференциальным уравнением. В зависимости от характера силового взаимодействия при столкновении молекул между собой член $\Delta_c F$ имеет различный конкретный вид. Он носит название интеграла столкновений. В самом простейшем случае, когда все молекулы аппроксимируются гладкими упругими сферами одного и того же диаметра, интеграл столкновений может быть представлен в виде

$$\Delta_c F = \int d\nu \int_0^{2\pi} d\varepsilon \int_0^{\pi/2} g \sigma^2 \sin \Psi \cos \Psi (F' F'' - F F^*) d\Psi. \quad (2.11)$$

Здесь звездочкой сверху (*) отмечены величины, относящиеся к условно выделяемому классу молекул, сталкивающихся с данными; величина

$$g = \sqrt{(C_x - C_x^*)^2 + (C_y - C_y^*)^2 + (C_z - C_z^*)^2}$$

— модуль относительной скорости молекул, участвующих в столкновении; σ — диаметр молекул; Ψ — угол между направлением линии

удара и вектором относительной скорости; $\mathcal{E}$ - угол, определяющий положение плоскости удара в пространстве. Штрихами отмечены символы, соответствующие значениям функций после удара.

Если взять силу взаимодействия $\mathcal{F}$ между молекулами в виде силы отталкивания, которая определена законом

$$\mathcal{F} = k/d^s, \quad (2.12)$$

где d - расстояние между молекулами, то интеграл столкновений можно выразить в виде

$$\Delta_c F = \int dV \int_0^{2\pi} d\mathcal{E} \int_0^\infty k g^s (F' F'^* - F F^*) \mathcal{V} d\mathcal{V}. \quad (2.13)$$

Здесь $k = (2K/m)^{2/(s-1)}$; $g = (s-5)/(s-1)$, а величина $\mathcal{V}$ представляет собой некоторый безразмерный параметр интегрирования (нормированное прицельное расстояние). Из анализа формулы (2.13) становятся ясны некоторые преимущества максвелловской модели взаимодействия между молекулами, по которой в (2.12) показатель степени $s = 5$. При этом варианте, дающем $g = 0$, интеграл столкновений $\Delta_c F$ не зависит явно от относительной скорости g .

В дальнейшем мы часто будем пользоваться обобщённой формулой записи интеграла столкновений $\Delta_c F$, который включает в себя формулы (2.11) и (2.13) как частные случаи в следующем виде:

$$\Delta_c F = \int \int g (F' F'^* - F F^*) d\mathcal{V} dV^*.$$

Символ $d\mathcal{V}$ здесь относится к интегрированию по так называемым параметрам столкновения, конкретный вид которых ясен из формул типа (2.11) или (2.13).

Рассмотрим теперь вывод общего уравнения переноса молекулярных характеристик, роль которых может играть любая функция координат и скоростей молекул, а также времени $\Psi(x, y, z, c_x, c_y, c_z, t)$. Перепишем уравнение Больцмана (2.10), в котором заменим функцию распределения F на массовую функцию распределения f по формуле (2.9). В результате получаем

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c_x \frac{\partial f}{\partial x} + c_y \frac{\partial f}{\partial y} + c_z \frac{\partial f}{\partial z} + \chi \frac{\partial f}{\partial c_x} + \psi \frac{\partial f}{\partial c_y} + \mathcal{Z} \frac{\partial f}{\partial c_z} = \frac{1}{m} \Delta_c f. \quad (2.14)$$

Умножим обе части уравнения (2.14) на $\mathcal{V} dV$ и проинтегрируем по всему диапазону изменения скоростей полученный результат. После интегрирования полученные отдельные слагаемые с помощью формулы (2.8 а) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}\int \mathcal{V} \frac{\partial f}{\partial t} dV &= \frac{\partial}{\partial t} \int \mathcal{V} f dV - \int f \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} dV = \frac{\partial (\overline{P\mathcal{V}})}{\partial t} - \rho \frac{\partial \overline{\mathcal{V}}}{\partial t}, \\ \int \mathcal{V} c_x \frac{\partial f}{\partial x} dV &= \frac{\partial}{\partial x} \int \mathcal{V} c_x f dV - \int f c_x \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} dV = \frac{\partial (\overline{P\mathcal{V}c_x})}{\partial x} - \rho c_x \frac{\partial \overline{\mathcal{V}}}{\partial x}, \\ \int \mathcal{V} \frac{\partial f}{\partial c_x} dV &= \int \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{V} f]_{c_x=-\infty}^{c_x=\infty} dc_y dc_x - \int f \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial c_x} dV = -\rho \frac{\partial \overline{\mathcal{V}}}{\partial c_x}.\end{aligned}$$

Все эти преобразования выполнены с помощью интегрирования по частям. В последнем преобразовании предполагается, что при стремлении составляющих скорости к бесконечности произведения типа $\mathcal{V} f$ стремятся к нулю, так как в противном случае среднее значение функции $\mathcal{V}$ выражалось бы расходящимся интегралом.

Введём обозначения

$$m\rho \Delta_c \mathcal{V} = \int \mathcal{V} \Delta_c f dV$$

и воспользуемся вышеуказанными преобразованиями. В результате получаем из уравнения (2.14)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (\overline{P\mathcal{V}}) + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{P\mathcal{V}c_x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{P\mathcal{V}c_y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{P\mathcal{V}c_z}) &= \rho \left(\frac{\partial \overline{\mathcal{V}}}{\partial t} + c_x \frac{\partial \overline{\mathcal{V}}}{\partial x} + \right. \\ &\left. + c_y \frac{\partial \overline{\mathcal{V}}}{\partial y} + c_z \frac{\partial \overline{\mathcal{V}}}{\partial z} + \chi \frac{\partial \overline{\mathcal{V}}}{\partial c_x} + \gamma \frac{\partial \overline{\mathcal{V}}}{\partial c_y} + \mathcal{I} \frac{\partial \overline{\mathcal{V}}}{\partial c_x} + \Delta_c \mathcal{V} \right). \quad (2.15)\end{aligned}$$

Полученное уравнение (2.15) представляет собой уравнение переноса молекулярных характеристик. Его вывод для частного случая, когда функция $\mathcal{V}$ зависит только от составляющих скорости, был впервые проведён Максвеллом. Приведённое здесь уравнение для общего случая зависимости $\mathcal{V}$ от координат, скоростей и времени было выведено Энскогом.

2.4. Уравнения макроскопического движения газа

Рассмотрим вкратце некоторые свойства парных столкновений. При столкновении двух молекул должны оставаться неизменными суммарная масса, суммарное количество движения и суммарная кинетическая энергия участвующих в столкновении молекул. Таким образом, для парных столкновений можно записать законы сохранения в следующей форме:

$$\begin{cases} m + m^* = m' + m^{*'}, \\ m\mathbf{C} + m^*\mathbf{C}^* = m'\mathbf{C}' + m^{*'}\mathbf{C}^{*'}, \\ \frac{1}{2}mC^2 + \frac{1}{2}m^*C^{*2} = \frac{1}{2}m'C'^2 + \frac{1}{2}m^{*'}C^{*'}^2. \end{cases} \quad (2.16)$$

Здесь m — масса молекул; $\mathbf{C}$ — скорость молекул, штрих и звездочка имеют такой же смысл, как и при записи интеграла столкновений.

При выбранной нами модели взаимодействия молекул масса всех молекул до и после столкновений может считаться одинаковой, так что целесообразно положить $m' = m^{*'} = m^* = m$.

Любые величины, которые удовлетворяют условию $\Psi + \Psi^* = \Psi' + \Psi^{*}$, называются аддитивными инвариантами столкновения. И как видно из (2.16), в нашем случае, то есть при одинаковых массах всех молекул, участвующих в столкновении, существует пять аддитивных инвариантов столкновения:

$$\Psi_0 = 1; \quad \Psi_1 = C_x; \quad \Psi_2 = C_y; \quad \Psi_3 = C_z; \quad \Psi_4 = C^2 = C_x^2 + C_y^2 + C_z^2. \quad (2.17)$$

Как видно из (2.17), Ψ_1 , Ψ_2 и Ψ_3 , по существу, представляют собой три компоненты одного и того же векторного аддитивного инварианта Ψ_4 . Любая молекулярная характеристика Ψ , отличная от Ψ_4 , но также обладающая свойствами аддитивной инвариантности, является линейной комбинацией аддитивных инвариантов Ψ_0 , Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_3 , Ψ_4 .

Еще одним важным свойством парного столкновения является также то, что модуль относительной скорости

$$g = \sqrt{(C_x - C_x^*)^2 + (C_y - C_y^*)^2 + (C_z - C_z^*)^2}$$

в процессе столкновения остается постоянным, то есть

$$g = g'. \quad (2.18)$$

Привлекая вышперечисленные свойства парных столкновений, можно произвести некоторые преобразования над интегралом столкновений

$$\iiint \varphi g (F' F'^* - F F^*) d\mathbf{t} dV dV^*, \quad (2.19)$$

где φ — некоторая молекулярная характеристика, а символ $d\mathbf{t}$ относится к интегрированию по параметрам столкновения. Очевидно, что с точностью до постоянного множителя выражение (2.19) совпадает с последним членом правой части уравнения (2.15). Если в подынтегральном выражении (2.19) поменять ролями скорости C и C^* , то видно, что форма этого соотношения не изменится, и только вместо функции φ необходимо взять функцию φ^* . Несколько менее очевидным является тот факт, что при переходе от совокупности скоростей (C, C^*) к скоростям (C', C'^*) форма нового подынтегрального выражения будет отличаться от прежней лишь противоположным знаком. Обоснование этого факта связано с тем, что, как это следует из свойств парных столкновений, якобиан вышеупомянутого преобразования

$$\frac{D(C, C^*)}{D(C', C'^*)} = 1$$

и, согласно свойству (2.18), $g' = g$.

Отсюда следует, что значение интеграла (2.19) не изменится, если функцию φ в подынтегральном выражении заменить любой из следующих:

$$\varphi^*, -\varphi', -\varphi'^*.$$

А это означает, что можно написать соотношение симметрии

$$\begin{aligned} & \iiint \varphi g (F' F'^* - F F^*) d\mathbf{t} dV dV^* = \\ & - \frac{1}{4} \iiint (\varphi + \varphi^* - \varphi' - \varphi'^*) (F' F'^* - F F^*) d\mathbf{t} dV dV^*. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Из последнего следует очень важный вывод, что если молекулярная характеристика φ представляет собой линейную комбинацию ад -

дитивных инвариантов (2.17), то выражение (2.19) обращается в нуль или же $\Delta_c \mathcal{V} = 0$.

Получим уравнение микроскопического движения газа из уравнения Больцмана, используя вышеприведённое свойство интеграла $\Delta_c \mathcal{V}$. Предварительно дадим некоторые определения для скорости: средней, или макроскопической, скоростью газа назовем величину

$$\bar{v} = \frac{1}{\rho} \int c f dV, \quad (2.21)$$

а собственной, или тепловой, скоростью молекул обозначим значение

$$w = c - \bar{v}. \quad (2.22)$$

При этом очевидно, что

$$\int w f dV = 0; \quad (2.23)$$

$$\int f dV = \rho. \quad (2.24)$$

Введём также в рассмотрение тензор напряжений и вектор теплового потока.

Компоненты тензора напряжений берём в следующем виде:.

$$P_{xy} = \int w_x w_y f dV, \quad (2.25)$$

а вектор теплового потока выразится формулой

$$q = \int \frac{1}{2} w (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2) f dV. \quad (2.26)$$

Удельная внутренняя энергия газа, то есть внутренняя энергия единицы массы газа определяется как

$$\epsilon = \frac{1}{\rho} \int \frac{1}{2} (w_x^2 + w_y^2 + w_z^2) f dV. \quad (2.27)$$

Обратимся вновь к общему уравнению переноса молекулярных характеристик (2.15) и посмотрим, какой вид оно будет принимать, если в качестве молекулярных характеристик последовательно подставлять каждый из пяти аддитивных инвариантов ψ_i (2.17). Согласно сказанному выше, во всех пяти случаях будет иметь место $\Delta_c \psi_i = 0$. Для записи в более удобной форме каждого вновь полученного из (2.15) уравнения, соответствующего различным ψ_i , используем формулы (2.21)–(2.27). При получении выражений, использующих различные аддитивные инварианты, получаются типовые интегралы, которые можно преобразовать следующим образом:

$$\int c_x c_y f dV = \int (w_x + v_x)(w_y + v_y) f dV = \int w_x w_y f dV + v_x \int w_y f dV + \\ + v_y \int w_x f dV + v_x v_y \int f dV = \rho_{xy} + \rho v_x v_y ; \\ \int \frac{1}{2} c_x c f dV = \int \frac{1}{2} (w_x + v_x) [w_x^2 + w_y^2 + w_z^2 + 2(w_x v_x + w_y v_y + w_z v_z) + v_x^2 + \\ + v_y^2 + v_z^2] f dV = g_x v_x \rho_{xx} + v_y \rho_{xy} + v_z \rho_{xz} + \rho v_x [e + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)] .$$

Подставляя в уравнение (2.15) $\varphi = \varphi_0 = 1$, получим без сложностей $\bar{\varphi} = 1$, $\bar{\varphi} c_x = v_x$, $\bar{\varphi} c_y = v_y$, $\bar{\varphi} c_z = v_z$. Кроме того, ясно, что все производные от φ_0 тождественно будут равны нулю. Таким образом, уравнение переноса молекулярных характеристик в случае $\varphi = \varphi_0 = 1$ принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0. \quad (2.28)$$

То есть мы получим уравнение неразрывности.

Таким же образом, полагая $\varphi = \varphi_1 = c_x$, имеем

$$\bar{\varphi} = v_x ; \quad \rho \bar{\varphi} c_x = \rho_{xx} + \rho v_x^2 ; \quad \rho \bar{\varphi} c_y = \rho_{xy} + \rho v_x v_y ; \\ \rho \bar{\varphi} c_z = \rho_{xz} + \rho v_x v_z .$$

В этом случае все производные от φ будут равны нулю, за исключением одной $\partial \varphi / \partial c_x = 1$. В случае замены в уравнении (2.15) $\varphi = \varphi_1 = c_x$ получаем уравнение переноса молекулярных характеристик в виде одной из проекций уравнения количества движения:

$$\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x^2 + P_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_x v_y + P_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_x v_z + P_{xz})}{\partial z} - \rho X = 0. \quad (2.29)$$

Подстановки в уравнение переноса молекулярных характеристик (2.15) $\varphi = \varphi_2 = c_y$ и $\varphi = \varphi_3 = c_z$ позволяют получить две другие проекции уравнения количества движения:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x v_x + P_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_x v_y + P_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_x v_z + P_{xz}) - \rho Y = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_y v_x + P_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y v_y + P_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_y v_z + P_{yz}) - \rho Z = 0. \quad (2.31)$$

И, наконец, подстановка $\varphi = \psi_0 = \frac{1}{2} c^2$ даёт нам

$$\bar{\varphi} = c + \frac{1}{2}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = c + \frac{1}{2} v^2,$$

$$\rho \bar{\varphi}_{,x} = \rho v_x (c + \frac{1}{2} v^2) + v_x P_{xx} + v_y P_{xy} + v_z P_{xz} + q_x,$$

$$\rho \bar{\varphi}_{,y} = \rho v_y (c + \frac{1}{2} v^2) + v_x P_{yx} + v_y P_{yy} + v_z P_{yz} + q_y,$$

$$\rho \bar{\varphi}_{,z} = \rho v_z (c + \frac{1}{2} v^2) + v_x P_{zx} + v_y P_{zy} + v_z P_{zz} + q_z,$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial c_x} = \bar{c}_x = v_x, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial c_y} = \bar{c}_y = v_y, \quad \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial c_z} = \bar{c}_z = v_z.$$

Подставляя записанные выше комплексы в уравнение (2.15), получим из уравнения переноса уравнение энергии

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\rho (c + \frac{1}{2} v^2) + \frac{\partial}{\partial x} [\rho v_x (c + \frac{1}{2} v^2) + v_x P_{xx} + v_y P_{xy} + v_z P_{xz} + q_x] + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} [\rho v_y (c + \frac{1}{2} v^2) + v_x P_{yx} + v_y P_{yy} + v_z P_{yz} + q_y] + \frac{\partial}{\partial z} [\rho v_z (c + \frac{1}{2} v^2) + \\ & + v_x P_{zx} + v_y P_{zy} + v_z P_{zz} + q_z] - \rho (v_x X + v_y Y + v_z Z) = 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Если ввести оператор

$$\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}$$

и унифицированные переменные $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, то уравнения (2.28)–(2.32) могут быть переписаны в компактной век-

торной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho v) = 0;$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v \nabla v_i \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} - \rho \chi_i = 0, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$\rho \left(\frac{\partial \ell}{\partial t} + v \nabla \ell \right) + \nabla g + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 P_{jk} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = 0.$$

Макроскопические уравнения движения (2.28)–(2.32) могут быть дополнены соотношением, которое получается как прямое следствие соотношений типа (2.25) и равенства (2.27):

$$P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} = 2\rho\ell. \quad (2.33)$$

В то же время сумму, фигурирующую в левой части (2.33), можно приравнять утроенной величине статического давления P , так что это же уравнение можно переписать в другой форме:

$$\frac{P}{\rho} = \frac{2}{3}\ell. \quad (2.33 \text{ а})$$

Это уравнение может носить название уравнения состояния газа. Но его обычно записывают в другом виде:

$$\frac{P}{\rho} = RT, \quad (2.33 \text{ б})$$

где R – газовая постоянная, а T – термодинамическая температура. Из сравнения записей (2.33 а) и (2.33 б), то есть двух форм записи уравнения состояния газа, видно, что термодинамическая температура может быть определена формулой

$$\ell = \frac{3}{2}RT. \quad (2.34)$$

Нужно иметь в виду, что такая связь имеет место только в случае одноатомного газа, так как в определении внутренней энергии по формуле (2.27) нами была учтена лишь кинетическая энергия поступательного движения молекул. В случае многоатомного газа необходимо было бы учесть энергию вращательного и колебательного движения, а также виды энергии, не связанные с механическими пере-

мещениями, и ввести члены, ответственные за эти виды энергии, в правую часть уравнения (2.27).

Вернемся к случаю одноатомного газа и определим удельную теплоёмкость такого газа при постоянном объёме C_v и отношение удельных теплоёмкостей $\kappa = C_p/C_v$, при этом учтём, что $C_p - C_v = R$. Получаем

$$C_v = \frac{dC_p}{dT} = \frac{3}{2} R \quad (2.35)$$

и также

$$\kappa = \frac{C_p}{C_v} = \frac{R + C_v}{C_v} = \frac{5}{3} \quad (2.36)$$

Для многоатомного газа ясно, что

$$C_v > \frac{3}{2} R, \quad \text{а} \quad \kappa < \frac{5}{3}$$

2.5. Обзор методов решения уравнения Больцмана

Как было уже сказано выше, для нахождения функции распределения необходимо решить уравнение Больцмана. Рассмотрим несколько общеизвестных методов решения этого уравнения. В настоящее время невозможно предложить какой-либо метод построения точных решений уравнения Больцмана и поэтому все предлагаемые ниже методы являются приближёнными.

Один из простейших методов решения основывается на линеаризации исходного уравнения (2.10) или (2.14). Для этого делается предположение о том, что в силу определённых условий функция распределения F слабо отличается от максвелловской функции распределения $F^{(0)}$, и эта связь выражается следующим образом:

$$F = F^{(0)}(1 + \varepsilon G), \quad (2.37)$$

где ε — малый параметр, а G — новая искомая функция.

Подставляя выражение для функции распределения в виде (2.37) в уравнение (2.10) в предположении об отсутствии внешних сил, пренебрегая членами второго порядка малости относительно малого параметра ε , получим уравнение для определения функции G в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} + c_x \frac{\partial G}{\partial x} + c_y \frac{\partial G}{\partial y} + c_z \frac{\partial G}{\partial z} = \\ = \iint F^{(*)} (\zeta' + \zeta^{*'} - \zeta - \zeta^*) g d\mathbf{1} dV^*. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Полученное уравнение (2.38) также интегродифференциальное, но его линейность создаёт ему некоторые преимущества по сравнению с исходным. В частности, для решения этого полученного уравнения можно воспользоваться следующим приёмом: разложение по собственным функциям. Основной недостаток этого метода заключается в том, что часто положенное в основу предположение о малости $\varepsilon \zeta$ в сравнении с единицей оказывается несправедливым, так как в некоторых случаях функция G является неограниченной.

Следующий метод решения уравнения Больцмана, который мы рассмотрим, носит название метода нормальных распределений. Он был впервые предложен Гильбертом, развит Энскогом, Чапменом и Барнетом и подробно изложен в [5], мы же рассмотрим лишь его принципиальную схему.

Рассмотрим уравнение Больцмана (2.10) также в предположении об отсутствии внешних сил, то есть уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} + c_x \frac{\partial F}{\partial x} + c_y \frac{\partial F}{\partial y} + c_z \frac{\partial F}{\partial z} = \Delta_c F. \quad (2.39)$$

Предположим, что решение уравнения (2.39) можно представить в виде следующего бесконечного ряда:

$$F(c, \mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon} F^{(0)} + F^{(1)} + \varepsilon F^{(2)} + \dots, \quad (2.40)$$

где ε — некоторый фиксированный параметр. Подставляя решение (2.40) в уравнение (2.39) и собирая члены, содержащие множителем параметр ε в одной и той же степени, получим цепочку уравнений для последовательного определения функций $F^{(i)}$, где $i = 0, 1, 2, \dots$. В частности, для определения функции начального приближения имеем уравнение

$$\Delta_c F^{(0)} = 0.$$

При этом решение для функции $F^{(0)}$ получается

$$F^{(0)} = n_0 (2\pi R T)^{-3/2} \exp \left[-\frac{(c-v)^2}{2 R T_0} \right], \quad (2.41)$$

где n_0 , T_0 , V - переменные величины, являющиеся функциями x , y , z , t . Поставим дополнительное условие, чтобы эти величины совпадали с тремя основными параметрами, характеризующими макроскопическое состояние газа в конкретной точке в данный момент времени. В таком случае функция $F^{(0)}$, определяемая выражением (2.41), может быть названа локально максвелловской функцией распределения.

При обосновании своего метода Энского предполагал, что плотность, температура и скорость газа полностью определяются начальным приближением. Кроме этого, при записи (2.40) никаких ограничений о величине $\mathcal{E}$ не вводилось. Эту величину вводили только для уяснения последовательности построения очередных приближений и, следовательно, в дальнейшем можно считать $\mathcal{E} = 1$. Тогда решение уравнения (2.39) может быть записано в виде суммы функций, получающихся при различных приближениях $F = \sum_{i=1}^{\infty} F^{(i)}$, и три вышеперечисленных параметра состояния газа не будут зависеть от порядка приближения, то есть от числа фактически вычисленных членов ряда. Зависимость от порядка приближения будет проявляться лишь через более тонкие характеристики состояния газа, такие как вектор теплового потока или тензор напряжений. Полученное таким образом распределение молекул по скоростям получило название нормального, отсюда получил своё название и сам метод.

При определении решения для первого приближения на основе использования функции нулевого приближения $F^{(0)}$ в левой части уравнения (2.39) будут стоять производные от $F^{(0)}$, тогда как под знак интеграла столкновений войдёт комбинация функций $F^{(0)}$ и $F^{(1)}$. Отсюда следует, что для определения функции $F^{(1)}$ необходимо решать неоднородное интегральное уравнение. При этом ясно, что к решению аналогичных уравнений сведётся нахождение функций всех остальных приближений более высокого порядка $F^{(i)}$ при $i > 1$. Известно также, что математические трудности при решении этих уравнений резко возрастают с повышением порядка приближения и на сегодняшний день известны только первые три приближения.

Нужно иметь в виду при построении приближений по методу нормальных распределений, что изменения функции $F(x, y, z, t)$ за счёт столкновений между молекулами на любой стадии исследования считаются преобладающими над чисто конвективными изменениями. Из этого следует, что приближения малых порядков соответствуют малым значениям числа Кнудсена K , то есть достаточно высокой плотности

газа. Теоретически, увеличивая порядок приближения, можно было бы дать решение для газа какой угодно плотности. Но этому препятствуют не только трудности математического характера, как указано выше, но и отсутствие представлений о сходимости рядов типа (2.40). Может оказаться, что, повышая порядок приближения, мы будем не повышать точность аппроксимации истинной функции распределения, а понижать её для течений сильно разреженного газа в силу предположения с преобладанием изменений функции распределения за счёт столкновений между молекулами по сравнению с конвективными изменениями.

Если в силу характера решаемой задачи влияние столкновений на изменение функции распределения можно считать второстепенным, что правдоподобно в случае больших чисел Кнудсена, то вместо ряда (2.40) для приближённого решения уравнения (2.39) лучше взять ряд вида

$$F(c, z, t) = \varepsilon F_0 + \varepsilon^2 F_1 + \varepsilon^3 F_2 + \dots = \varepsilon \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i F_i. \quad (2.42)$$

Используя ряд (2.42) так же как (2.40), вновь получаем бесконечную цепочку уравнений для определения функций соответствующих приближений F_i , но только в этом случае для определения функции начального приближения получаем уравнение

$$\frac{\partial F_0}{\partial t} + c_x \frac{\partial F_0}{\partial x} + c_y \frac{\partial F_0}{\partial y} + c_z \frac{\partial F_0}{\partial z} = 0. \quad (2.43)$$

Это уравнение носит название уравнения свободномолекулярного течения. Последующие приближения строятся, как и в случае для ряда (2.40).

Аналогично приведённым выше схемам получения решения по методу нормальных распределений решается уравнение Больцмана по методу, который впервые предложил Лёффе [6]; практическая реализация этого метода показана в работах Келлера и Еманского [7]. Расчёты функции распределения по этому методу ограничивались построением приближений F_0 и F_1 .

К описанным выше методам решения уравнения Больцмана с помощью разложения по степеням малого параметра прилагает метод разложения по специальным функциям, разработанный Гредом [8].

В настоящее время используется разложение функции распределения по полиномам Эрмита. Этот метод не требует введения малого параметра, однако с тем же успехом можно разложить функцию распределения по

ближения. Грэд в качестве начального приближения выбрал локально максвелловскую функцию распределения для движения газа со сравнительно малым числом Кнудсена. Следующие приближения, построенные Грэдом, в известной степени аналогичны приближениям, построенным Чепменом и Барнетом по методу нормальных распределений. Грэд указал также, что в случае, когда число Кнудсена больше единицы, можно применять этот же метод разложения по полиномам с функцией начального приближения, соответствующей абсолютно максвелловскому распределению. Однако такой приём на наших применениях не применим.

Для решения некоторых задач интегриродифференциальных уравнение (2.10) удобно бывает использовать в чисто интегральной форме. Это бывает возможно после преобразования интеграла столкновений, который можно, расщепив на два, записать в виде

$$\Delta_c F = \iint g F' F'^* d\mathbf{v}^* - \iint g F F^* d\mathbf{v}^*. \quad (2.44)$$

В этом случае функцию F при определённых условиях можно вынести за знак второго интеграла. Тогда в отсутствии внешних сил уравнение (2.10) преобразуется к следующему уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + c_x \frac{\partial F}{\partial x} + c_y \frac{\partial F}{\partial y} + c_z \frac{\partial F}{\partial z} + \gamma F = N, \quad (2.45)$$

$$\gamma = \iint g F^* d\mathbf{v}^*, \quad N = \iint g F' F'^* d\mathbf{v}^*,$$

где параметр γ может быть назван частотой межмолекулярных столкновений. Считая γ и N известными функциями c , z , t , можно записать формальным образом решение (2.45):

$$F(c, z, t) = F(c, z - c(t - t_0), t_0) \exp\left\{-\int_{t_0}^t [c, z - c(t-s), s] ds\right\} + \\ + \int_{t_0}^t N[c, z - c(t-\tau), \tau] \exp\left\{-\int_{\tau}^t [c, z - c(t-s), s] ds\right\} d\tau. \quad (2.46)$$

Это решение по форме соответствует задаче с начальными условиями, но её можно интерпретировать и как задачу с граничными условиями, в этом случае время t_0 можно рассматривать как время, необходимое для попадания молекулы, имеющей скорость c , находящейся в фиксированной точке z , на граничную поверхность.

Формула (2.46), являющаяся интегральной формой представления уравнения Больцмана, может быть использована для нахождения функции F методом итераций. Это делается следующим образом: выбирается начальная функция F_0 , с её помощью определяют γ и N , после этого подставляют в правую часть выражения (2.46) и в результате получают новую функцию F_1 , и так далее. Этот способ хорошо работает, особенно если решение не зависит от z , для этого случая также доказана сходимости итерационного процесса.

Уравнение типа (2.46) было получено также С.В. Валандером на основе механико-статистического анализа одноатомного газа без рассмотрения уравнения Больцмана [9]. Используя метод итераций применительно к (2.46), Валандер с учениками решили ряд задач динамики разреженного газа.

Рассмотренные выше методы являются приближёнными методами решения точного уравнения Больцмана (2.10) или его модификаций. Можно пойти по другому пути — пути упрощения самого уравнения и в первую очередь интеграла столкновений. Так, например, Бхатнагар, Гросс и Крук [10] предложили релаксационную модель уравнения Больцмана, имеющего форму дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + C_x \frac{\partial F}{\partial x} + C_y \frac{\partial F}{\partial y} + C_z \frac{\partial F}{\partial z} = \gamma (F^{(e)} - F). \quad (2.47)$$

Записанная в этом уравнении функция $F^{(e)}$ — локально максвелловская функция распределения, а γ — частота столкновений. В отличие от переменной величины γ , введённой в уравнение (2.46), в данном случае частота столкновений считается величиной постоянной.

Релаксационная модель уравнений Больцмана (2.47), несмотря на значительную простоту по сравнению с исходным (2.10), все же сохраняет многие важные свойства последнего при $\lambda = \eta = \bar{z} = 0$.

2.6. Расчёт аэродинамических сил при свободном молекулярном обтекании твердых тел

При увеличении степени разрежения газа столкновения между молекулами играют все меньшую роль. При очень сильном разрежении столкновения молекул между собой происходят настолько редко, что не искажают картины течения, и тем самым функция распределения в этом случае не учитывает столкновений молекул. Такой режим тече-

ния газа называется свободномолекулярным. При этом необходимо отметить, что такое течение встречается на практике.

Так как режим свободномолекулярного течения наступает при числах Кнудсена $K = \ell/L \gg 1$, то он реализуется, например, при полёте космических аппаратов на околоземной орбите. К примеру, первый искусственный спутник Земли представлял собой сферу диаметром $D = 0,58$ м и двигался по орбите с перигеем 226 км. На этой высоте средний свободный пробег молекулы равен примерно 150 м. Вычисленное для этого случая число $K \approx 260$, то есть удовлетворяет условию свободномолекулярного течения.

Для определения макроскопических характеристик течения необходимо знать функцию распределения. В случае свободномолекулярного течения при отсутствии внешних сил для определения функции распределения необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} + C_x \frac{\partial F}{\partial x} + C_y \frac{\partial F}{\partial y} + C_z \frac{\partial F}{\partial z} = 0. \quad (2.48)$$

Этому уравнению удовлетворяет любая функция, не зависящая от координат и времени, в частности функция распределения Максвелла. Можно также предположить, что на достаточном удалении от тела состояние газа является равновесным и соответствует именно максвелловскому распределению. Следовательно, можно считать, что молекулы, падающие на поверхность твердого тела, обладают максвелловским распределением с постоянными параметрами.

Для определения взаимодействия свободномолекулярного потока с твердой стенкой и определения макроскопических характеристик такого течения вводится в рассмотрение некоторые коэффициенты. Коэффициент диффузного отражения θ , определяющий собой среднюю долю всех молекул, ударяющихся о стенку и отражаемых неупорядоченным, то есть диффузным образом. В случае диффузного отражения молекул от поверхности распределение отраженных молекул не зависит от распределения падающих и соответствует максвелловскому с температурой, равной температуре стенки T_w . По величине коэффициента диффузного отражения равен

$$\theta = \frac{\bar{c}_i - \bar{c}_w}{\bar{c}_i - \bar{c}_w}, \quad (2.49)$$

где $\bar{c}$ представляет собой среднее значение касательной составляющей количества движения молекул. Индекс i относится к па-

падающим молекулам, индекс z — к отраженным, а w — к молекулам, имеющим после отражения максвелловское распределение с температурой T_w . Очевидно, что $\tilde{c}_w = 0$. Кроме коэффициента θ вводится в рассмотрение θ' , определяемый соотношением;

$$\theta' = \frac{p_i - p_z}{p_i - p_w}, \quad (2.50)$$

где p — нормальная составляющая количества движения молекул. θ и θ' характеризуют обмен количеством движения между газом и стенкой.

Кроме этих коэффициентов Кнудсен ввел ещё один — коэффициент аккомодации α , который служит характеристикой приспособления удельного потока энергии отраженных молекул к условиям, соответствующим температуре стенки:

$$\alpha = \frac{E_i - E_z}{E_i - E_w}. \quad (2.51)$$

Здесь E означает поток энергии молекул, а индексы те же, что и в формулах (2.49) и (2.50). В случае идеальной аккомодации $E_z = E_w$ и $\alpha = 1$, тогда как при отсутствии энергетического обмена между молекулами и поверхностью $E_i = E_z$, так что $\alpha = 0$. В случае свободномолекулярного течения газа вышеприведённые коэффициенты изменяются в пределах $0,8 < \theta < 1,00$; $0,85 < \alpha < 0,95$.

Рассмотрим обтекание установившимся свободномолекулярным потоком газа твердого тела. Выберем элемент поверхности, а также связанную с ним систему координат x, y, z , причем ось z направим по внутренней нормали (рис. 4). Считая постоянной макроскопическую скорость газа V относительно тела, представим максвелловскую функцию распределения падающих на элемент поверхности тела молекул в виде

$$F = n_{\infty} (2\pi RT_{\infty})^{-3/2} \exp \left\{ - \left[(c_x - V \sin \alpha)^2 + (c_y + V \cos \alpha)^2 + c_z^2 \right] / 2RT_{\infty} \right\} \quad (2.52)$$

c_x, c_y, c_z — проекции молекулярных скоростей на оси координат, индексом ∞ отмечены параметры, относящиеся к набегающему потоку.

Используя функцию распределения, запишем число молекул, падающих в единицу времени на единицу площади поверхности твердого тела:

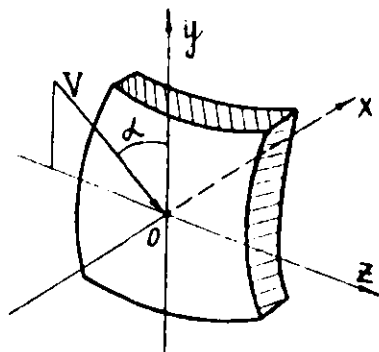


Рис. 4. Схема обтекания элемента поверхности тела свободно-молекулярным потоком

$$N_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F dc_x dc_y dc_z,$$

и, подставляя сюда значение F из (2.52), после интегрирования получим

$$N_i = n_{\infty} \sqrt{\frac{RT_{\infty}}{2\pi}} \left\{ e^{-B^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{\pi} B \sin \alpha [1 - \operatorname{erf}(B \sin \alpha)] \right\}, \quad (2.53)$$

где

$$B = \frac{V}{\sqrt{2RT_{\infty}}} = \sqrt{\frac{x}{2}} M_{\infty}; \quad x = \frac{c_p}{c_r}; \quad M_{\infty} = \frac{V}{a_{\infty}};$$

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx.$$

Влияние падающих молекул на поверхность выражается в виде нормального давления P_i и касательного напряжения τ_i , величины которых могут быть вычислены следующим образом:

$$P_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} m c_x^2 F dc_x dc_y dc_z = \frac{P_{\infty} RT_{\infty}}{\sqrt{\pi}} \left\{ B \sin \alpha e^{-B^2 \sin^2 \alpha} \right.$$

$$+ \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2} + B^2 \sin^2 \alpha \right) [1 + \operatorname{erf}(B \sin \alpha)] \}, \quad (2.54)$$

$$\begin{aligned} \tau_i = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} m c_x c_y F dc_x dc_y dc_z = \rho_{\infty} V_{\infty} \alpha \sqrt{\frac{RT_{\infty}}{2\pi}} \left\{ e^{-B^2 \sin^2 \alpha} + \right. \\ & \left. + \sqrt{\pi} B \sin \alpha [1 + \operatorname{erf}(B \sin \alpha)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Составляющая касательного напряжения, направленная по оси x , отсутствует, так как рассматриваемое течение симметрично относительно плоскости xOy , поэтому касательное напряжение направлено по оси Oy .

Выражения (2.49) и (2.50) при $\theta' = \theta$ и $\tau_w = 0$ позволяют определить вклад в давление и касательное напряжение, который создается отражёнными молекулами:

$$p_z = (1 - \theta) p_i + \theta p_w,$$

$$\tau_z = (1 - \theta) \tau_i.$$

Следовательно, суммарные значения давления и касательного напряжения соответственно равны

$$p = p_i + p_z = (2 - \theta) p_i + \theta p_w,$$

$$\tau = \tau_i - \tau_z = \theta \tau_i. \quad (2.56)$$

Давление p_w , которое встречается выше, — это условная величина, характеризующая воздействие отражённых молекул при наличии максвелловского распределения при отсутствии макроскопической скорости и температуре T_w . Для того чтобы определить p_w , вычислим сначала силу, приходящуюся на одну молекулу в таких условиях. Используем формулу (2.54), подложив в ней $V = 0$ и заменив T_{∞} на T_w . Разделим теперь результат этих преобразований на выражение (2.53), преобразованное таким же образом. В результате имеем, что это отношение равно $m / \sqrt{2\pi RT_w/2}$. А в результате того, что мы рассматриваем установившийся процесс, число падающих молекул равно числу отражённых $N_i = N_r$, и поэтому p_w выразится

$$P_w = \frac{m}{2} \sqrt{2\pi R T_w} \cdot N_i \cdot \quad (2.57)$$

Подставляя вычисленные слагаемые в выражение (2.56), получаем окончательно

$$P = p_\infty R T_\infty \left\{ \left(\frac{2-\theta}{\sqrt{\pi}} B \sin \alpha + \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{T_w}{T_\infty}} \right) e^{-B^2 \sin^2 \alpha} + [(2-\theta)(B^2 \sin^2 \alpha + \frac{1}{2}) + \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{\pi T_w}{T_\infty}} B \sin \alpha] [1 + \operatorname{erf}(B \sin \alpha)] \right\}, \quad (2.58)$$

$$\tau = \theta p_\infty V \cos \alpha \sqrt{\frac{R T_\infty}{2\pi}} \left\{ e^{-B^2 \sin^2 \alpha} + \sqrt{\pi} B \sin \alpha [1 + \operatorname{erf}(B \sin \alpha)] \right\}. \quad (2.59)$$

Используя полученные выражения для давления и касательного напряжения, действующих на элементарную площадку твердого тела со стороны свободномолекулярного потока, можно получить сопротивление и подъемную силу, действующие на простейшее тело в таком потоке. Для этого необходимо проинтегрировать выражения (2.58) и (2.59) по всей обтекаемой поверхности, что не всегда даёт аналитические выражения.

Выберем для простоты плоскую пластину (рис. 5) и проинтегрируем выражения для сопротив-

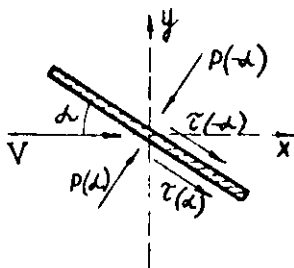


Рис. 5. Схема обтекания пластины свободномолекулярным потоком

ления и касательного напряжения по поверхности. Угол α можно назвать углом атаки. Проекция суммарной силы на ось x даёт силу сопротивления для тела, а проекция на ось y — подъемную силу Y . Таким образом, для пластины площадью S можно записать согласно рис. 5:

$$X = S \{ [P(\alpha) - P(-\alpha)] \sin \alpha + [\tau(\alpha) - \tau(-\alpha)] \cos \alpha \},$$

$$Y = S \{ [P(\alpha) - P(-\alpha)] \cos \alpha + [\tau(\alpha) - \tau(-\alpha)] \sin \alpha \}.$$

Если полученные выражения отнести к динамическому напору, то получим коэффициенты сопротивления и подъёмной силы для пластины, которые соответственно равны

$$C_x = \frac{2X}{\rho V^2 S} = \frac{2}{\sqrt{\pi} B} [2(1-\theta) \sin^2 \alpha + \theta] e^{-\delta^2 \sin^2 \alpha} + 2 \sin \alpha \left\{ [2(1-\theta) \sin^2 \alpha + \theta] + \frac{2-\theta}{2B^2} \right\} \operatorname{erf}(B \sin \alpha) + \theta \frac{\sqrt{\pi}}{B} \sin^2 \alpha, \quad (2.60)$$

$$C_y = \frac{2Y}{\rho V^2 S} = \frac{4(1-\theta)}{\sqrt{\pi} B} \sin \alpha \cos \alpha e^{-\delta^2 \sin^2 \alpha} + 2 \cos \alpha [2(1-\theta) \sin^2 \alpha + \theta + \frac{2-\theta}{2B^2}] \operatorname{erf}(B \sin \alpha) + \theta \frac{\sqrt{\pi}}{B} \sin \alpha \cos \alpha. \quad (2.61)$$

Таким образом, можно получить сопротивление и подъёмную силу для твёрдых тел, движущихся в потоке свободномолекулярного газа.

2.7. Свободномолекулярное течение газа в трубе бесконечной длины

Рассмотрим важный случай течения сильноразреженного газа в цилиндрической трубе произвольного поперечного сечения. Для простоты будем считать, что стенки трубы отражают падающие на них молекулы диффузным образом и что температура потока во всех точках одинакова.

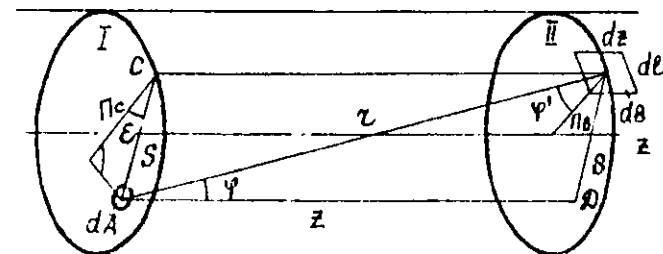


Рис. 6. Схема свободномолекулярного потока в трубе

Запишем число молекул, проходящих через элемент dA , находящийся в сечении I трубы. Это количество равно [11]

$$dN_{A, \varphi} = \frac{n}{\pi} \sqrt{\frac{RT}{2\pi}} \cdot \cos \varphi d\omega. \quad (2.62)$$

Если считать молекулы, попадающие в dA после отражения только от элемента стенки dB , то величину телесного угла ω выразится как

$$d\omega = \frac{dA \cos \varphi}{r^2}.$$

В результате получим число молекул, движущихся в направлении, противоположном оси Z , используя формулу (2.62):

$$dN_{A, \varphi} = \frac{n'}{\pi} \sqrt{\frac{RT}{2\pi}} \frac{dA \cos \varphi \cos \varphi'}{r^2} dB. \quad (2.63)$$

Здесь n' — концентрация газа в окрестности площадки dB . Рассмотрим геометрию течения. Из рис. 6 видно, что $z = z \cos \varphi = \sqrt{z^2 + S^2} \cos \varphi$, а также $z \cos \varphi' = S \cos \varepsilon$. Находя значения $\cos \varphi$ и $\cos \varphi'$ из только что записанных соотношений, а также заменяя dB через $dx d\ell$, подставим в (2.63). Для нахождения всех молекул, проходящих через dA после диффузного отражения от всей поверхности трубы, необходимо проинтегрировать по z от $-\infty$ до ∞ и по всему контуру ℓ сечения C

$$dN_A = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{RT}{2\pi}} dA \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n' z dz}{(z^2 + S^2)^{3/2}} \int_C S \cos \varepsilon d\ell.$$

Для простоты вычислим интеграл, ограничиваясь рассмотрением случая малых градиентов плотности или концентрации, то есть

$$n' = n + z \frac{dn}{dz}.$$

Здесь n — концентрация молекул в сечении I , величины n и dn/dz будем считать постоянными. Подставляя выражение для n' в интеграл, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2 dz}{(z^2 + S^2)^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z^2 + S^2} = \frac{1}{2S} \operatorname{arctg} \frac{z}{S} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{2S},$$

так как интеграл, содержащий n , обращается в нуль. Проектируем $d\ell$ на плоскость, перпендикулярную S , и имеем

$$d\ell \cos \epsilon = S d\psi.$$

Здесь ψ — угол между S и некоторой прямой фиксированного направления, проходящей через центр dA . Окончательно получаем для молекул, движущихся в направлении оси z :

$$dN_A^+ = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{RT}{2\pi}} \cdot \frac{dn}{dz} dA \int_0^{2\pi} S d\psi. \quad (2.63 \text{ а})$$

Если мы проинтегрируем выражение (2.63 а) по всему поперечному сечению трубы, то получим общее число молекул, проходящих в единицу времени через сечение I в направлении оси z :

$$N = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{RT}{2\pi}} \cdot \frac{dn}{dz} \int dA \int_0^{2\pi} S d\psi. \quad (2.64)$$

После умножения (2.64) на m , получим выражение для массового расхода

$$G = \frac{P_2 - P_1}{2L} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi RT}} \int dA \int_0^{2\pi} S d\psi, \quad (2.65)$$

где L — длина трубы, а

$$m \frac{dn}{dz} = \frac{dP}{dz} = \frac{1}{RT} \frac{dP}{dz} = \frac{1}{RT} \frac{P_2 - P_1}{L}.$$

Здесь полагается, что газ удовлетворяет уравнению состояния Клайперона-Менделеева $P/\rho = RT$.

Для получения массового расхода через трубу необходимо проинтегрировать выражение (2.65) по сечению трубы, что довольно сложно для трубы неправильной формы поперечного сечения. Для простоты проведём интегрирование для простейшего случая трубы, имеющей в поперечном сечении круг с радиусом R (рис. 7). Даже в этом простейшем случае интеграл $\int_0^{2\pi} S d\psi$ зависит от положения dA , однако в этом случае можно интегрирование провести до конца, если ввести декартовы координаты x, y ; причём ось y вводится параллельно линии S . Меняя порядок интегрирования в выражении (2.65) согласно формуле

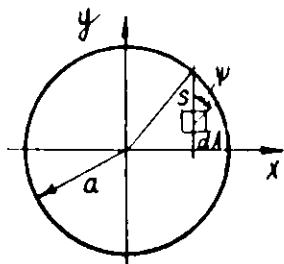


Рис. 7. Течение свободно-молекулярного газа через круглую трубу

$$\int dA \int_0^{2\pi} S d\psi = \int_0^{2\pi} d\psi \int S dA,$$

проинтегрируем выражение $S dA$:

$$\begin{aligned} \int S dA &= \int_{-a}^a dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (\sqrt{a^2-x^2} - y) dy = \\ &= 2 \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{8}{3} a^3. \end{aligned}$$

Подставляя последнее выражение, вычислим

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int S dA = \frac{16}{3} \pi a^3.$$

В результате можем получить выражение для определения массового расхода газа при свободномолекулярном течении через круглую трубу

$$G = \frac{8}{3} \frac{a^3}{L} (P_1 - P_2) \sqrt{\frac{T}{2RT}}. \quad (2.66)$$

Если учесть, что доля частиц, отражающихся диффузным образом от поверхности трубы, составляет ϑ от общего числа попадающих на неё молекул, а остальные отражаются от неё зеркальным образом, то можно записать обобщённую формулу [12]:

$$G = \frac{8}{3} \frac{2-\vartheta}{\vartheta} \frac{a^3}{L} (P_1 - P_2) \sqrt{\frac{T}{2RT}}. \quad (2.66 \text{ а})$$

В случае чисто зеркального отражения молекул от стенок трубы ($\vartheta=0$) формула (2.66 а) не имеет смысла, так как в этом случае стенки не создают гидравлического сопротивления и в этом случае вместе с ϑ стремится к нулю и величина $P_1 - P_2$.

Выведенные выше формулы для определения массового расхода при свободномолекулярном течении через трубу справедливы только для условий, когда диаметр трубы мал по сравнению со средней длиной свободного пробега молекул, а также с теми осевыми расстояниями, на которых происходят заметные изменения давления или плот-

ности в потоке. Из анализа формул (2.66) и (2.66 в) видно, что при $l/a \rightarrow 0$ $G \rightarrow \infty$, хотя понятно, что этого не должно быть. В этом случае, предельном, расход должен выражаться по формуле для истечения через отверстие [12]

$$G_{(l/a) \rightarrow 0} = a^2 (P_1 - P_2) \sqrt{\frac{\pi}{2RT}}. \quad (2.67)$$

Исходя из предельных случаев выражений для массового расхода при свободномолекулярном течении в трубе, Дашман [13] предложил формулу, которая в предельных случаях принимает вид, соответствующий выражениям (2.66) или (2.67) в зависимости от численного значения l/a :

$$G = \frac{a^2(P_1 - P_2)}{1 + \frac{3}{8} \frac{l}{a}} \sqrt{\frac{\pi}{2RT}}$$

Наиболее удачную формулу в смысле совпадения с результатами экспериментальных исследований предложил Клаузинг [12] в следующем виде:

$$G = \frac{20 + 8 \frac{l}{a}}{20 + 19 \frac{l}{a} + 3(\frac{l}{a})^2} a^2 (P_1 - P_2) \sqrt{\frac{\pi}{2RT}},$$

она даёт хорошую точность для выражения массового расхода через трубу свободномолекулярного течения при любых значениях l/a .

2.8. Граничные условия при течении газа со скольжением

Если разрежение газа сравнительно невелико, то есть число Кнудсена меньше единицы, но не пренебрежимо мало, то в некоторых случаях может оказаться, что для описания его движения нет необходимости пользоваться представлениями кинетической теории. В таких случаях бывает возможно для описания течения слабо разреженного газа пользоваться уравнениями движения и энергии в форме Навье-Стокса. Но характерной особенностью таких течений является то обстоятельство, что для них несправедливыми являются принятые для течений при обычных давлениях граничные условия [14].

В тех случаях, когда длину свободного пробега ℓ можно считать пренебрежимо малой по сравнению с характерным размером тела

λ , на поверхности твердого тела ставятся граничные условия равенства температур поверхности тела и потока вблизи стенки, а также условия равенства нулю скорости газа на поверхности твердого тела, то есть условия прилипания. В случае же конечного значения отношения $\ell/\lambda = K$ эти приближенные граничные условия требуют уточнения.

На сравнительно далеком расстоянии от стенки, обычно на расстоянии нескольких длин свободного пробега, градиенты скорости и температуры считаются постоянными и только вблизи стенки их постоянство нарушается. То есть вблизи стенки сказывается влияние столкновений молекул газа с поверхностью. На рис. 8 представлен

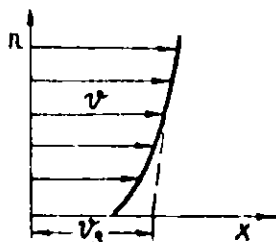


Рис. 8. Профиль скорости у стенки при течении со скольжением

график изменения макроскопической скорости течения газа по нормали к поверхности. При изучении же характера изменения величин скорости и температуры во всем объеме газа граничные эффекты существенного значения не имеют. Для учета граничных эффектов достаточно экстраполировать линейный участок изменения соответствующей величины вплоть до самой стенки. Полученные при такой экстраполяции условные значения скорости и температуры как раз и дадут нам нужные граничные условия.

Для определения структуры выражения скорости скольжения v_s будем рассуждать следующим образом. При отсутствии градиента $\partial v / \partial n$ отсутствовал бы обмен количеством движения между твердым телом и газом. Отсюда можно сделать предположение о пропорциональности между скоростью скольжения и градиентом скорости на некотором расстоянии от стенки, то есть

$$v_s = k_r \frac{\partial v}{\partial n}, \quad (2.68)$$

где коэффициент пропорциональности k_r положителен или равен нулю.

Таким же образом можно записать выражение для температурного скачка на поверхности твердого тела:

$$\delta T = T_s - T_w = k_r \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (2.69)$$

где $k_T \neq 0$.

Коэффициенты пропорциональности в выражениях (2.68) и (2.69) имеют размерность длины и естественно предположить, что они могут зависеть только от средней длины свободного пробега молекул.

Они являются пропорциональными длине свободного пробега $\bar{l}$ и имеют порядок величин $\bar{l}$.

Проводя оценки величины скорости скольжения, можно заметить, что градиент скорости $\partial v / \partial r$ имеет порядок отношения характерной скорости потока к характерной длине, то есть $\partial v / \partial r \approx V / L$, такое же предположение можно сделать и для градиента температуры $\partial T / \partial r \approx T^* / L$, где T^* — характерная температура. На основе этого можно получить из (2.68) и (2.69) приближенные равенства

$$\frac{v_s}{V} \approx \frac{\bar{l}}{L} = K, \quad \frac{\delta T}{T^*} \approx K. \quad (2.70)$$

Соотношения (2.70) свидетельствуют, что относительные величины скорости скольжения и температурного скачка тем меньше, чем меньше число Кудсена, то есть подтверждается этим самым справедливость формы выражений (2.68) и (2.69), которые в пределе, $K \rightarrow 0$, дают граничные условия для газа при обычных давлениях.

На основании вышесказанного можно сделать предположение, что при $K > 0$ скорость скольжения v_s может быть отлична от нуля. Но если в то же самое время K остается настолько малым, что позволяет применять к исследованию движения газа обычные уравнения сплошной среды, то такое течение носит название течения со скольжением.

Приближенные выше граничные условия являются весьма приближенными, но достаточно наглядными. Более строгий вывод граничных условий для течений со скольжением можно пропустить на основании кинетической теории газов с применением функции распределения.

2.9. Течение газа со скольжением в трубе

Рассмотрим ламинарное течение слабопрореженного газа в трубе [15]. Составим баланс сил, приложенных к цилиндрическому элементу жидкости с текущим радиусом r и длиной dx (рис. 9):

$$- \pi r^2 dp = - \tau 2\pi r dx, \quad (2.71)$$

где τ — напряжение трения на боковой поверхности элемента; dp —

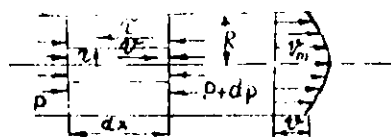


Рис. 9. Ламинарное течение газа со скольжением в трубе

разность давлений на его торцах.

Здесь мы пренебрегли изменением плотности газа в направлении оси трубы, вызванном изменением давления. Подставляя напряжение трения по формуле Ньютона $\tau = \mu \frac{dv}{dz}$, представим (2.71) в виде

$$\frac{dp}{dx} = \frac{2}{z} \mu \frac{dv}{dz} \quad (2.72)$$

Интегрируя это выражение при граничных условиях, учитывающих скорость скольжения на стенке, то есть при $z = R$, $v = v_s$, получим

$$v - v_s = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{R^2 - z^2}{4}.$$

Для оси трубы получаем

$$v_m - v_s = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} \frac{R^2}{4},$$

так как в этом случае $z = 0$.

И окончательно для безразмерного профиля скорости в трубе для течения со скольжением получаем

$$\frac{v - v_s}{v_m - v_s} = 1 - \frac{z^2}{R^2} \quad (2.73)$$

Отсюда легко вычисляются значения соответствующих величин у стенки: градиент скорости

$$\left(\frac{dv}{dz} \right)_R = - \frac{2(v_m - v_s)}{R} \quad (2.74)$$

и напряжение трения

$$\tau_R = - \frac{2\mu(v_m - v_s)}{R} \quad (2.75)$$

Далее вычисляем среднюю скорость по сечению трубы, которая равна среднему арифметическому между скоростями на оси и у стенки

$$V = \frac{\int_0^R v 2\pi r dr}{\pi R^2} = (v_m - v_s) \int_0^R \frac{2}{R^2} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) r dr + v_s = \frac{1}{2}(v_m + v_s). \quad (2.76)$$

По уравнению (2.72) получим формулу для определения падения давления вдоль трубы:

$$dp = \frac{2\tau_r}{R} dx = - \frac{4(v_m - v_s)}{R^2} \mu dx$$

или, приводя к безразмерному виду, после замены $D = 2R$:

$$\frac{dp}{\frac{1}{2} \rho V^2} = - \frac{64}{f V D} \frac{dx}{D} \frac{v_m - v_s}{v_m + v_s}. \quad (2.77)$$

Возьмём скорость скольжения в виде, аналогичном (2.68):

$$v_s = -c \ell \left(\frac{dv}{dx} \right)_R, \quad (2.68')$$

где $C = (2\epsilon)/\theta$, а знак "минус" выбран для того, чтобы значение скорости на стенке было положительным при отрицательном значении градиента скорости (2.74). Подставляя в выражение для скорости скольжения значение градиента скорости, находим

$$v_s = \frac{v_m}{1 + \frac{c\ell}{2R}} = \frac{v_m}{1 + \frac{4c\ell}{D}}. \quad (2.78)$$

Используя формулы (2.73), (2.76), (2.77) и (2.78), получим выражения для максимальной скорости

$$v_m = V \frac{1 + 4c \frac{\ell}{D}}{0,5 + 4c \frac{\ell}{D}}, \quad (2.79)$$

для скорости скольжения у стенки

$$v_s = V \frac{4c \frac{\ell}{D}}{0,5 + 4c \frac{\ell}{D}}, \quad (2.80)$$

для профиля скорости

$$v = V \frac{1 + 4c \frac{\ell}{D} - 4c \frac{z^2}{D^2}}{0,5 + 4c \frac{\ell}{D}} ; \quad (2.81)$$

для падения давления в трубе

$$\frac{dp}{\frac{1}{2} \rho v^2} = - \frac{64 \mu}{\rho V D} \frac{1}{1 + 8c \frac{\ell}{D}} \frac{dx}{D} \quad (2.82)$$

или

$$\frac{dp}{\frac{1}{2} \rho v^2} = - \xi \frac{dx}{D}, \quad \text{где} \quad \xi = \frac{64}{Re (1 + 8c \frac{\ell}{D})}. \quad (2.83)$$

Здесь число Рейнольдса определено

$$Re = \frac{\rho v D}{\mu}.$$

2.10. Сопротивление тел при обтекании потоком разреженного газа при наличии скольжения

Впервые задача о влиянии скольжения на сопротивление тела была решена в 1911 году Р.Милликеном [16] при исследовании скорости падения мелких масляных капель в воздухе под действием силы тяжести. Эти исследования позволили определить гидродинамический эффект скольжения.

Сила сопротивления сферической капли, движущейся с малой скоростью, для которой число Рейнольдса $Re = \rho v_0 a / \mu \leq 1$, определяется по формуле Стокса

$$\chi = 6\pi \mu a v_0, \quad (2.84)$$

где a — радиус капли; v_0 — скорость невозмущенного относительного движения; μ — вязкость воздуха.

Формула (2.84) получена при точном решении уравнения Навье-Стокса для ползущего движения в несжимаемой жидкости при пренебрежении инерционными членами. При этом применялась гипотеза прилипания, то есть скорость на поверхности сферы бралась нулевой.

При учёте эффекта скольжения при пропорциональности скорости

скольжения числу Кнудсена согласно (2.70) справедлив видоизменённый закон сопротивления сферы

$$X = 6\pi\mu a v_0 \frac{1 + 2A \frac{\ell}{a}}{1 + 3A \frac{\ell}{a}}, \quad (2.85)$$

где A — коэффициент пропорциональности, который согласно [16] равен численно 1,22, а это отвечает значению $\theta = 0,9$. Если разложить в ряд по степеням малого параметра $A \frac{\ell}{a}$ последний множитель в (2.85), то придём к приближённому выражению для сопротивления сферы при наличии скольжения:

$$X = 6\pi\mu a v_0 \left(1 + A \frac{\ell}{a}\right)^{-1}, \quad (2.86)$$

которая справедлива при $\ell/a \leq 0,5$, дозвуковых скоростях и малых значениях Re .

Коэффициент сопротивления сферы в потоке со скольжением, по данным Милликена, для $M < 1$

$$C_x = \frac{X}{\frac{1}{2}\rho v_0^2 \pi a^2} = \frac{12}{Re(1 + 1,2 \frac{\ell}{a})}. \quad (2.87)$$

Решение задачи о сопротивлении цилиндра при поперечном обтекании потоком газа со скольжением теоретически было получено Тзяном [3]. Его решение даёт коэффициент сопротивления цилиндра, отнесённый к поперечному сечению:

$$C_x = \frac{X}{\frac{1}{2}\rho v_0^2 2aL} = \frac{4\pi}{Re \left[\ln \frac{4}{Re} - 1,28 + 1,25\sqrt{x} \frac{2-\theta}{\theta} \frac{M}{Re} \right]}, \quad (2.88)$$

где $Re = \rho v_0 a / \mu$; a — радиус цилиндра; L — его длина.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф. Теория гиперзвуковых течений. М.: ИЛ, 1962. 607 с.
2. Зигель К. Границы областей аэромеханики//Механика:Периодич. сб.переводов. 1952. № 3 (13). С. 89-91.
3. Тзян Х.Ш. Аэродинамика разреженных газов//Газовая динамика. М.: ИЛ, 1950. С. 167-211.
4. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
5. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960. 217 с.
6. Jaffe G. Zur Methodik der kinetischen Gas theorie // Ann. der Physik, Ser. 3,6. 1930. С. 195-252.
7. Szymanski Z. Some flow problems of rarefied gases // Archiwum mech. stosowanej. 8, 1956, N4. P. 37 -45.
8. Гред Г. Кинетическая теория разреженных газов//Механика:Периодич.сб.переводов. 1952. № 4. С. 67-82; № 5. С. 32-48.
9. Валандер С.В. Новые кинетические уравнения в теории одноатомных газов//ДАН СССР. 1960. Т. 131, № 1. С. 34-41.
10. Бхатнагар П., Гросс Е., Крук М. Модель столкновений в газах. I. Процессы малой амплитуды в заряженных и нейтральных однокомпонентных системах//Проблемы современной физики. М.: ИЛ, 1956. № 2. С. 172-209.
11. Девиеи Ф. Течение и теплообмен разреженных газов. М.: ИЛ, 1962. 319 с.
12. Шидловский В.П. Введение в динамику разреженного газа. М.: Наука, 1965. 218 с.
13. Дэлман С. Научные основы вакуумной техники. М.: ИЛ, 1950. 193с.
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1944. 624 с.
15. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1969. 824 с.
16. Милликен Р. Газовая динамика. М.: ИЛ, 1950. 260 с.

А н а т о л и й Ф р о и м о в и ч
В а х г е л ь т

Л е к ц и и п о п р и к л а д н о й
г а з о в о й д и н а м и к е

Учебное пособие

Редактор Н.С.Поддубная

Подписано к печати 7.12.1990г. Формат 60 х 84 1/16

Бумага типографская № 3. Печать офсетная. Печ. л. 4,25.

Усл. печ. л. 3,95. Уч - изд. л. 3,4. Тираж 300 экз.

Заказ № 77.

Цена 15 к.

Издательство ТТУ, 634029, Томск, ул. Никитина, 4

Межвузовская типография ОмПИ..

