ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

Издательство МГТУ имени Н.Э.Баумана

Н. Е. Жуковскаго.

О ПРИСОЕДИНЕННЫХЪ ВИХРЯХЪ.

(Сообщено въ Математическомъ Обществѣ 15 ноября 1905 г.).

МОСКВА.
Университетская типографія, Страстной бульваръ.
1906.

О присоединенныхъ вихряхъ

Н. Е. Жуковскаго

1. Мы будемъ ~~разсматривать~~ изучать движенiе жидкости, слагающееся изъ поступательнаго ~~[illegible]~~, ~~[illegible]~~ и изъ движенiя ~~[illegible]~~ происходящаго отъ эффекта нѣсколькихъ параллельныхъ прямолинейныхъ (вихревыхъ шнуровъ. Эти ~~[illegible]~~ [illegible] вихри [illegible] плоскости, перпендикулярной [illegible] [illegible] будемъ называть [illegible] Для простоты [illegible] пересѣченія съ плоскостью

Газовая динамика

Механика жидкости и газа

Под общей редакцией академика РАН
А.И. Леонтьева

2-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано Министерством общего и профессионального образования РФ в качестве учебника для студентов вузов по специальностям "Турбостроение", "Инженерная теплофизика", "Тепловые двигатели", "Криогенная техника и холодильные установки", "Двигатели летательных аппаратов" и "Нетрадиционные источники энергии"

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана
1997

УДК 533.6
ББК 31.38
Г13

Федеральная целевая программа книгоиздания России

Авторы: д-р техн. наук, проф. В.С.Бекнев
д-р техн. наук, проф. В.М.Епифанов
академик РАН А.И.Леонтьев
канд. техн. наук, доцент М.И.Осипов
канд. техн. наук, доцент О.М.Панков
д-р техн. наук, проф. А.Б.Шабаров
канд. техн. наук, доцент Р.А.Янсон

Рецензенты: *А.И.Кириллов, А.Ф.Слитенко*

Г13 **Газовая динамика. Механика жидкости и газа**:. Учебник для вузов / Бекнев В.С., Епифанов В.М., Леонтьев А.И. и др.; Под общей ред. А.И.Леонтьева. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1997. — 671 с., ил.

ISBN 5-7038-1063-9

Приведены основные сведения о прикладной механике жидкости и газа энергетических установок различного назначения (турбомашин, поршневых установок, сопл, каналов при разных моделях жидкостей и газов). Изложены законы, описывающие течение среды в различных постановках. Рассмотрены основы теории пограничного слоя, особенности течений двухфазных сред, разреженных газов и проводящих сред в скрещенных электромагнитных полях, а также нестационарные течения в трубах и каналах.

Учебник прошел успешную апробацию в МГТУ им. Н.Э.Баумана.

Для студентов энергомашиностроительных специальностей вузов и университетов. Может быть полезен аспирантам, инженерам и научным работникам, занятым в области прикладной механики жидкости и газа.

Ил. 197. Табл. 11. Библиогр. 11 назв.

Печатается по решению Ученого Совета Московского государственного технического университета им Н.Э.Баумана

ББК 31.38

ISBN 5-7038-1063-9

Посвящается светлой памяти нашего учителя профессора Владимира Васильевича Уварова — редактора первого издания книги

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий учебник является одним из серии учебников, охватывающих основные курсы учебного плана по специальности "Газотурбинные и комбинированные установки". В основу учебника положены лекции по газовой динамике, читаемые преподавателями кафедры "Турбостроение" Московского государственного технического университета им. Н.Э.Баумана для студентов энергомашиностроительного факультета.

Первое издание учебника вышло в 1973 г. Материал второго издания существенно переработан и дополнен. Так, переработаны главы о теории пограничного слоя и об осесимметричных движениях, добавлены основные положения метода размерностей. Кроме того, введены новые разделы, связанные с рассмотрением течений разреженных газов и двухфазных систем, нестационарных течений в трубах и каналах. Анализ течения проводящих сред выделен в отдельный параграф главы 7.

При изложении кинематики и динамики жидкой среды широко использованы элементы тензорного исчисления, теории функций комплексного переменного, физики, теоретической механики, уравнений математической физики, основы технической термодинамики и электродинамики. Традиционно для прикладной газовой динамики значительное место отведено анализу одномерных движений газа. Но так как многие прикладные задачи газодинамики проточной части энергоустановок не могут быть решены без привлечения полной системы дифференциальных уравнений газовой динамики, то значительное внимание уделено изложению современной теории пограничного слоя и методов расчета сопротивления трению при обтекании тел различной формы при сложных граничных условиях.

При подготовке учебника широко использованы материалы, изложенные в учебном пособии "Газовая динамика газотурбинных и комбинированных установок" под ред. проф. В.В.Уварова (М.: Машиностроение, 1973).

Дополнительным пособием для изучения курса "Механика жидкости газа" (МЖГ) по представленному учебнику является "Сборник задач и упражнений по газовой динамике" под ред. проф. В.С.Бекнева (М.: Машиностроение, 1992). Настоящий учебник выходит под общей редакцией академика РАН А.И.Леонтьева, которым написаны §2 и гл. 6. Глава 1 написана канд. техн. наук, доцентом О.М.Панковым, §1 и гл. 2 — д-ром техн. наук, проф. В.С.Бекневым, §3, глава 3 и §47 — канд. техн. наук, доцентом Р.А.Янсоном, глава 4 — д-ром техн. наук, проф. В.М.Епифановым, глава 5 — д-ром техн. наук, проф. А.Б.Шабаровым, §46, 48 и 49 — канд. техн. наук, доцентом М.И.Осиповым.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам рукописи д-ру техн. наук, проф. А.И.Кириллову и д-ру техн. наук, проф. А.Ф.Слитенко за ценные замечания по тексту рукописи, которые были учтены, а также Т.И.Агриомати за большую помощь при подготовке рукописи.

Авторы будут признательны всем, кто пришлет свои замечания и пожелания.

ВВЕДЕНИЕ

§1. КРАТКОЕ ОПИСАНИЕ ХАРАКТЕРА ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ УСТАНОВОК

Энергетические установки в настоящее время нашли широчайшее применение во многих отраслях машиностроения. К энергоустановкам обычно относятся как технические устройства, в которых тепловая энергия преобразуется в механическую, так и технические устройства, в которых подведенная энергия расходуется на осуществление заданных процессов. К первым относятся тепловые двигатели различного типа: поршневые двигатели внутреннего сгорания, в которых тепловая энергия выделяется при сгорании топлива в камере над поршнем; поршневые двигатели внешнего сгорания, в которых топливо сжигается вне шатунно-поршневой группы; поршневые паровые машины, работающие на сжатом водяном или каком-либо другом паре; паротурбинные установки и газотурбинные двигатели тоже внутреннего или внешнего сгорания. К этому же классу энергетических установок относятся ветродвигатели, преобразующие скоростной напор воздушной массы в механическую энергию, а также гидравлические турбины, преобразующие напор воды, накопленной в водохранилище, в механическую энергию, а затем и в электрическую в электрогенераторе.

Ко вторым техническим устройствам относятся разнообразные насосы, нагнетатели, вентиляторы и компрессоры, которые также выполняются в виде поршневых машин объемного (прерывистого) принципа действия и лопаточных машин непрерывного действия.

Все эти энергоустановки применяются на тепловых электростанциях в виде дизельных двигателей с турбонаддувом, паровых и газовых турбин, насосов и компрессоров и на компрессорных станциях магистральных газопроводов подачи природного газа; в наземном транспорте в виде поршневых и газотурбинных двигателей; в авиации в виде газотурбинных двигателей; в аэрокосмической технике в виде турбореактивных, прямоточных и ракетных двигателей с турбонасосными агрегатами.

В химическом машиностроении, в системах кондиционирования и в криогенике широкое применение нашли поршневые и лопаточные насосы, компрессоры и детандеры. В ядерном реакторостроении значительное место занимают как циркуляционные насосы для прокачки теплоносителя через теплообменники активной зоны, так и насосы аварийных систем.

В качестве рабочих тел в энергоустановках используются как жидкости с различными физическими свойствами, так и одно- и двухфазные среды, в том числе электропроводящие смеси в каналах МГД-генераторов.

При проектировании энергоустановок всегда выполняют более или менее подробные расчеты параметров рабочего тела в проточной части узлов и элементов установок. От достоверности выполненных расчетов зависит время доводки энергоустановки до расчетных параметров, а сами расчеты постоянно усовершенствуют по мере накопления опыта проектирования и углубления знаний в области механики жидкостей и газов и тепломассообмена.

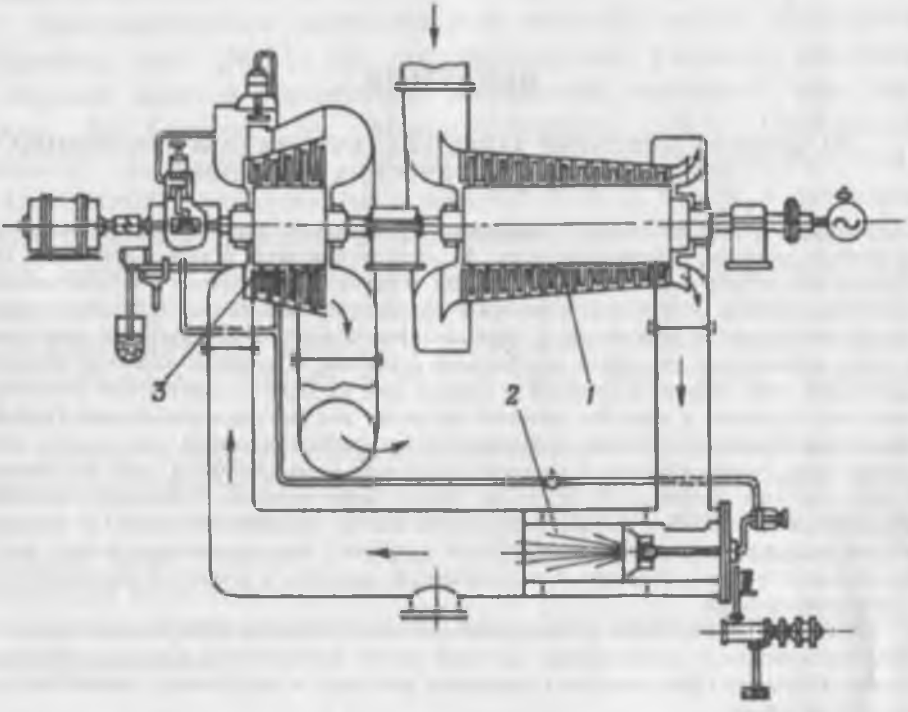


Рис. 1. Схема простейшей газотурбинной установки открытого цикла:
1 — компрессор; *2* — камера сгорания; *3* — газовая турбина

Рабочее тело в проточной части энергоустановки может моделироваться весьма разными по сложности моделями сплошной среды.

Отметим, что в последние годы были выполнены серьезные исследования характера течения двухфазных рабочих тел (влажный водяной пар, эмульсии, двухкомпонентные среды в виде газа с твердыми частицами в ракетной технике, реакторостроении и в смежных областях), низкотемпературной плазмы для МГД-генераторов и МГД-насосов, разреженных газов для вакуум-насосов низкого вакуума и турбомолекулярных насосов глубокого вакуума, а также нестационарных течений в каналах поршневых двигателей внутреннего сгорания.

В качестве примера рассмотрим более подробно характер течения газа в элементах газотурбинного двигателя как энергоустановки, работа которой в наибольшей степени зависит от достоверности методов расчета параметров потока в ее проточной части.

Газотурбинная установка (ГТУ) — это тепловой двигатель непрерывного действия, состоящий из газовых турбин, компрессоров, камер сгорания и теплообменных аппаратов, соединенных между собой трубопроводами. КПД газотурбинной установки в основном зависит от параметров ее термодинамического цикла, но в значительной степени он зависит и от КПД турбомашин, и от потерь в других ее элементах. В частности, как известно из теории ГТУ, при низких значениях КПД турбомашин при запуске ГТУ (на холостом ходу) сильно повышается рабочая температура газов перед турбиной, а это может привести к пережогу ее лопаток, что и наблюдалось на ранних стадиях освоения ГТУ в промышленности.

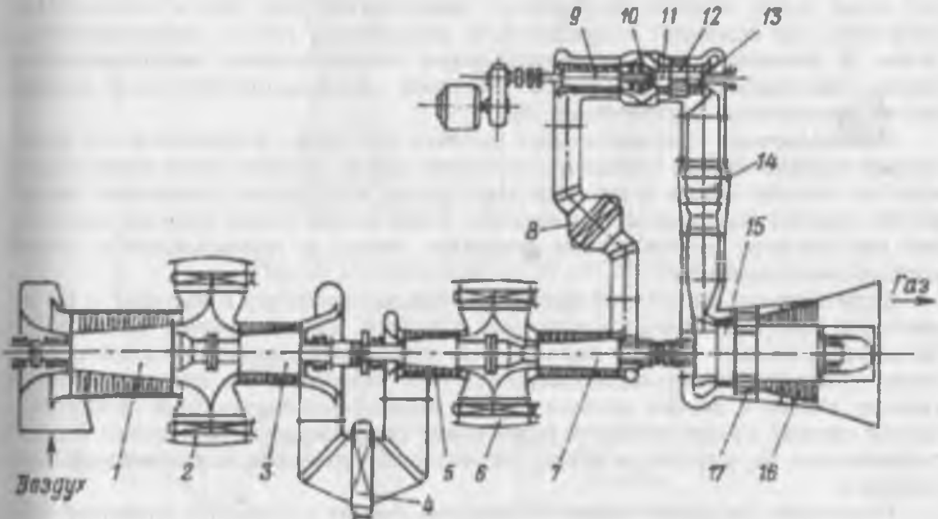


Рис. 2. Схема ГТУ с промежуточными охлаждениями и подогревами воздуха: *1* — компрессор низкого давления; *2* и *6* — встроенные холодильники; *3*, *5* и *7* — компрессоры среднего давления; *4* и *8* — выносные холодильники; *9* — компрессор высокого давления; *10* — тороидальная основная камера сгорания; *11* — турбина высокого давления; *12* и *17* — встроенные промежуточные камеры сгорания; *13* и *15* — турбины среднего давления; *14* — выносная промежуточная камера сгорания; *16* — турбина низкого давления

Поэтому рациональному проектированию высокоэффективных газовых турбин, компрессоров и других элементов ГТУ всегда уделяется большое внимание. Схема простейшей газотурбинной установки показана на рис. 1. В этой установке открытого цикла воздух засасывается из атмосферы компрессором *1*, сжимается в нем до заданного давления и подается в камеру сгорания *2*, где топливо сжигается в потоке сжатого воздуха. После камеры сгорания горячие газы попадают в газовую турбину *3*, где их энергия частично превращается в механическую работу на валу турбины. Из турбины газы выбрасываются в атмосферу. В установках усложненного цикла с регенерацией теплоты уходящих газов после турбины установлен теплообменный аппарат — регенератор, в котором происходит конвективный теплообмен между газами и воздухом, идущим из компрессора в камеру сгорания. В установках с охлаждением воздуха в процессе сжатия в промежуточных холодильниках между компрессорами также происходит конвективный теплообмен (рис. 2).

В ГТУ, работающих на ядерном топливе, вместо камеры сгорания применяется реактор, представляющий собой теплообменный аппарат, в котором теплота ядерной реакции передается газу или жидкости, прокачиваемым по каналам тепловыделяющих элементов (твэлов).

В комбинированной газотурбинной установке с МГД-генератором электроэнергии имеет место течение проводящего электрический ток газа в канале МГД-генератора, где возникает взаимодействие проводящего газа с электромагнитным полем. В установках с жидкометаллическим теплоносителем электромагнитные насосы перемешают по каналу под действием электромагнитного поля жидкий металл, проводящий электрический ток.

При оценочных предварительных расчетах допустимо пользоваться так называемым гидравлическим подходом к решению задачи. В этом случае поток осредняют по сечению канала и рассматривают только осредненное одномерное движение без анализа поля скоростей в сечении. Такой подход нашел широкое применение при расчетах теплообменных аппаратов, твелов и трубопроводов с учетом местных сопротивлений.

Окончательный расчет турбомашин (турбин, компрессоров и насосов) — их лопаточного аппарата, входных и выходных патрубков, камер сгорания, канала МГД-генератора и насоса — нельзя выполнять по одномерной теории; при расчете необходимо учитывать также неравномерность поля скоростей, т.е. пространственный характер потока в данном сечении канала. Правильная оценка поля скоростей в данном сечении канала позволяет рационально профилировать лопаточный аппарат турбомашины, ее патрубки и другие элементы газотурбинной и комбинированной установок.

Рассмотрим несколько подробнее характер течения в основных элементах установки.

Компрессор

Многоступенчатый осевой компрессор состоит обычно из трех основных частей: лопаточного аппарата, входного и выходного патрубков. Лопаточный аппарат — это совокупность ступеней, состоящих из рабочих колес *1* и направляющих аппаратов *2*, расположенных последовательно, один за другим (рис. 3). Если рассечь дозвуковую ступень цилиндрической поверхностью радиусом r и сечение развернуть на плоскость, то получим так называемые плоские решетки рабочего колеса и направляющего аппарата. Решетки состоят из лопаток, образующих диффузорные каналы, в которых кинетическая энергия газа преобразуется в статическое давление.

Форма решетки обычно зависит от радиуса r секущей поверхности. При расчете обтекания решетки на данном радиусе условно рассматривают обтекание прямой решетки плоским потоком. Все сечения обычно рассматривают независимо друг от друга, хотя при малой высоте лопаток и при сверхзвуковом обтекании это допущение не выполняется. Поток в осевых зазорах между рабочими и направляющими лопатками близок к осесимметричному, поэтому для его анализа удобно использовать цилиндрическую систему координат.

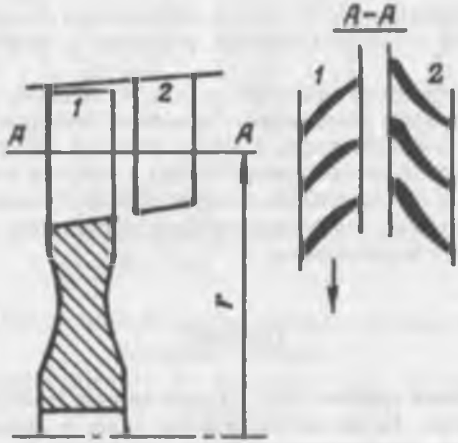


Рис. 3. Продольный разрез ступени осевого компрессора

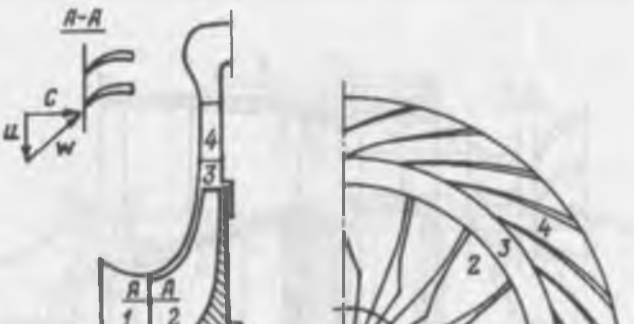


Рис. 4. Продольный разрез ступени центробежного компрессора:
1 – входной патрубок; *2* – рабочее колесо; *3* – безлопаточный диффузор; *4* – лопаточный диффузор

Входной патрубок обычно состоит из подводящего канала и осесимметричного кольцевого конфузора, обеспечивающего равномерный подвод воздуха к первой ступени компрессора. Выходной патрубок состоит из кольцевого диффузора и отводящего канала. В подводящем и отводящем каналах скорости газа обычно невелики, поэтому форма этих каналов слабо влияет на поле скоростей в осесимметричной части патрубка.

При расчете и профилировании осевого компрессора широкое применение получили теория течения в плоских прямых решетках и теория осесимметричных течений газа.

При расчете центробежного компрессора (рис. 4) большое значение имеют осесимметричные течения газа в неподвижных элементах (входном патрубке *1* и безлопаточном диффузоре *3*) конструкции, а также вопросы теории плоских круговых решеток, на основе которой рассчитывают течение в плоском колесе и в лопаточном диффузоре *4*. Течение в осерадиальном рабочем колесе *2* является весьма сложным пространственным течением, поддающимся лишь численному решению на ЭЦВМ или экспериментальному исследованию.

Турбина

Течение газа в газовой турбине (рис. 5) описывается теми же уравнениями, что и течение в компрессоре. Различие заключается лишь в характере течения газа в межлопаточных каналах, где течение является конфузорным, сопровождающимся ростом скорости потока. Осевая, или центростремительная, турбина (рис. 6) представляет собой соответственно как бы обращенный осевой, или центробежный, компрессор. При расчете и профилировании турбины также используются уравнения осесимметричного течения газа и теория плоских решеток.

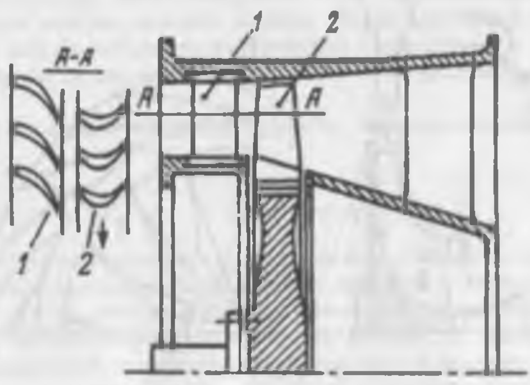


Рис. 5. Продольный разрез ступени осевой газовой турбины:
1 – сопловой аппарат; *2* – рабочее колесо

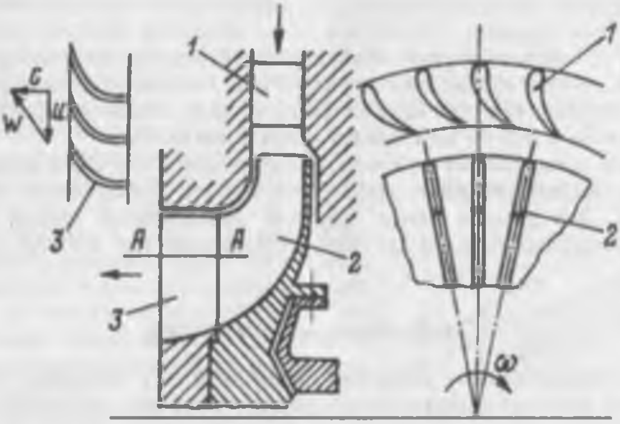


Рис. 6. Продольный разрез ступени центростремительной турбины:
1 — сопловой аппарат; *2* — рабочее колесо; *3* — выходная решетка

Предпринимаются попытки учесть при расчете и профилировании лопаточного аппарата турбомашин влияние пограничных слоев, образующихся не только на профилях лопаток, но и на поверхностях корпуса и втулки. Эти пограничные слои носят пространственный характер, а методы их расчета являются полуэмпирическими.

Камера сгорания

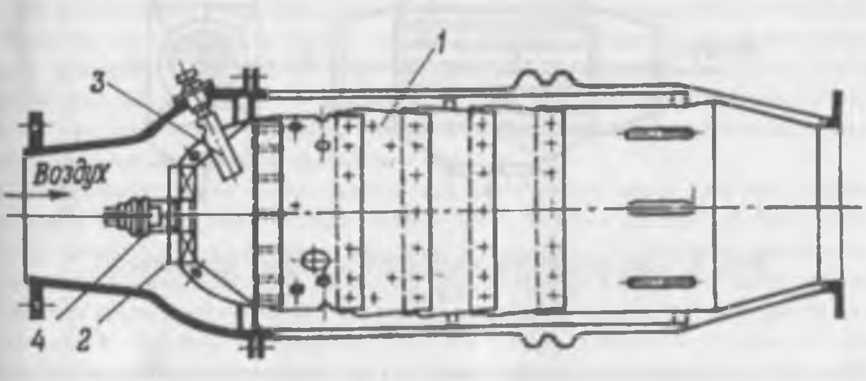


Рис. 7. Камера сгорания ГТУ:
1 — жаровая труба; *2* — завихритель; *3* — запальная свеча; *4* — форсунка

Рабочий процесс камеры сгорания ГТУ — это весьма сложный объект изучения. Течение в ней, как правило, трехмерное и не поддается простой схематизации. В камере (рис. 7) за стабилизаторами находятся циркуляционные зоны обратных токов и происходят сложные взаимодействия струйных течений с движущимся потоком. Теплота при сгорании топлива выделяется при очень сложном характере потоков в камере, т.е. течение в ней не может быть изоэнтропическим.

В настоящее время теория рабочего процесса камер сгорания разработана недостаточно, а потому при создании эффективных камер привлекаются эксперимент и моделирование. Для расчета камер сгорания применяются теория турбулентных струй, теория отрывных течений для плохо обтекаемых тел, а также основы теории подобия.

Теплообменные аппараты

Течение в теплообменных аппаратах анализируется с помощью тех же уравнений сохранения, которые широко используются в механике жидкостей и газов. При расчете течения газа или жидкости по такому каналу часто можно не интересоваться полем скоростей в его поперечном сечении, но обязательно надо учитывать теплообмен через стенку, который определяет изменение параметров газа по оси канала. При определенных значениях длин каналов, их диаметров и тепловых потоков может произойти "запирание" каналов, при котором снижение давления на выходе не позволяет увеличивать расход газа через канал.

К теплообменным аппаратам относятся регенераторы и холодильники трубчатого (рис. 8) и пластинчатого типов, радиаторы систем охлаждения лопаток высокотемпературных турбин, каналы тепловыделяющих элементов ядерных реакторов, а также каналы охлаждаемых лопаток и других деталей газотурбинных и комбинированных установок.

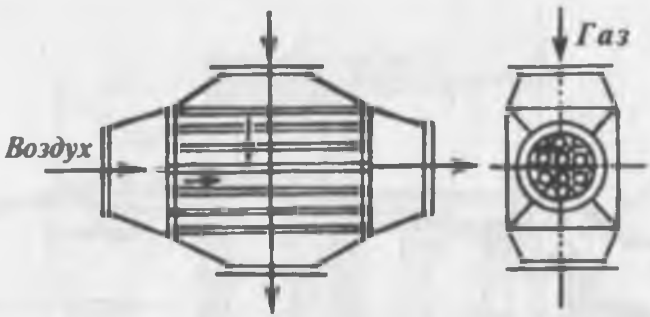


Рис. 8. Элемент теплообменного аппарата трубчатого типа

Все эти аппараты обычно рассчитывают на основе теории одномерных течений. Следует подчеркнуть, что в ряде случаев основную часть длины канала занимает так называемый начальный, или разгонный, участок, на котором формируется устойчивая форма профиля скоростей в данном канале.

Канал МГД-генератора

В комбинированной установке канал МГД-генератора (рис. 9) является основным источником электрической мощности. В линейном канале МГД-генератора кондукционного типа стенки *1* служат шинами, с которых снимается наведенная разность потенциалов, а стенки *2* являются изоляторами (их пронизывает магнитный поток от постоянного магнита).

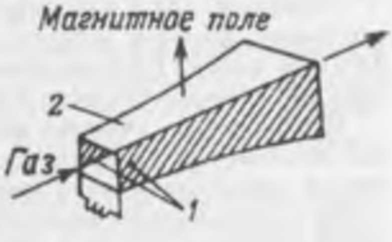


Рис. 9. Канал МГД-генератора

В проводящем газе, частицы которого пересекают магнитные силовые линии, возникает электрический ток, как в замкнутом проводнике, пересекающем силовые линии магнитного поля. Электрическая мощность канала зависит, в частности, от скорости протекающего по нему газа, поэтому перед каналом устанавливают сопло, в котором проводящий газ получает требуемую скорость.

Расчет рассмотренного и других типов МГД-генераторов базируется на решении системы уравнений магнитной газодинамики, сочетающей в себе уравнения газодинамики с уравнениями электромагнитного поля. Работа МГД-насоса описывается теми же уравнениями, что и МГД-генератора. Перемещение проводящей среды (жидкого металла) вызывается изменением электромагнитного поля.

Газотурбинные и комбинированные установки работают на рабочих телах с различными физическими свойствами. Вследствие многообразия свойств рабочих тел их можно считать конструктивными параметрами проектируемой установки, от которых в значительной степени зависят ее экономические, массовые и габаритные характеристики.

§2. ИСТОРИЧЕСКАЯ СПРАВКА ОБ ОСНОВНЫХ ЭТАПАХ РАЗВИТИЯ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

История развития механики жидкости и газа как раздела механики сплошной среды непосредственно связана с историей развития техники, и прежде всего авиационной. Первая проблема гидродинамики — взаимодействие между движущимся телом и средой. Фундаментальные открытия Галилео Галилея, Христиана Гюйгенса и Исаака Ньютона привели к расцвету общей механики в конце XVII в. и послужили предпосылкой мощного скачка в развитии механики жидкости и газа.

Основоположниками гидродинамики как специальной науки являются академики Российской академии наук Леонард Эйлер (1707 — 1783) и Даниил Бернулли (1700 — 1782). В работе "Общие принципы движения жидкости" (1755) Л.Эйлер вывел систему уравнений движения идеальной жидкости. Эйлеру принадлежат также вывод уравнения сплошности среды, формулировка теоремы об изменении количества движения жидкости и газа, вывод турбинного уравнения, создание теории реактивного колеса Сегнера и многое другое. Большое значение для развития механики жидкости и газа имела книга "Гидродинамика" (1783), написанная петербургским академиком Д.Бернулли, в которой впервые была установлена связь между давлением, уровнем и скоростью движения жидкости. Идеи Л.Эйлера и Д.Бернулли получили дальнейшее развитие в трудах французского ученого Жозефа Лагранжа (1736 — 1813).

Следующий этап истории механики жидкости и газа характеризуется разработкой математических методов решения уравнений идеальной жидкости для плоских и пространственных течений и зарождением новых разделов механики жидкости и газа — динамики вязкой жидкости и газодинамики.

Наибольшие успехи в дальнейшем были достигнуты при анализе плоских безвихревых течений идеальной жидкости. Методы комплексной переменной, разработанные Л.Ф.Гельмгольцем и Г.Р.Кирхгоффом, получили дальнейшее развитие в работах профессоров МВТУ Николая Егоровича Жуковского и Сергея Алексеевича Чаплыгина.

Основы учения о движении вязкой жидкости были заложены французским ученым Луи М.А.Навье (1821) и получили свое завершение в работах Джорджа Г.Стокса (1848). Явление перехода ламинарного течения в турбулентное было исследовано в период 1876 — 1883 гг. английским физиком Осборном Рейнольдсом, установившим критерий перехода от ламинарного течения к турбулентному, носящий его имя. О.Рейнольдсу принадлежит вывод дифференциальных уравнений осредненного турбулентного движения жидкости.

Параллельно с развитием гидродинамики вязкой жидкости создавалась газовая динамика. Принципиальные особенности течения газа со сверхзвуковыми скоростями были отмечены впервые Христианом Доплером в 1847 г. Элементарная теория скачка уплотнения была дана Уильямом Ранкином в 1870 г. и П.А.Гюгоньо в 1887 г., образование скачков уплотнения в сверхзвуковом сопле Лаваля было изучено одним из основоположников теории турбомашин словацким ученым Аурелем Стодолой.

Конец XIX в. характеризуется возрастанием интереса к воздухоплаванию. Отцом русской авиации называют профессора МВТУ Н.Е.Жуковского, который в 1902 г. впервые построил аэродинамическую трубу в МВТУ для исследования взаимодействия тел с потоком газа. В дальнейшем на базе лаборатории был создан ЦАГИ. Мало известен в истории науки вклад в газовую динамику выдающегося русского ученого Д.И.Менделеева: он в 1880 г. опубликовал монографию "О сопротивлении жидкостей и воздухоплавании". Н.Е.Жуковский в докладе на Первом Менделеевском съезде (1907) назвал эту книгу капитальной монографией по сопротивлению жидкостей. Следует отметить, что весь доход от этой книги был передан Д.И.Менделеевым на развитие русских исследований по воздухоплаванию.

Бурное развитие авиации в первой половине XX в. способствовало созданию теории крыла и винта. Известная формула Н.Е.Жуковского для подъемной силы крыла получила международное признание. Н.Е.Жуковский вместе с С.А.Чаплыгиным являются основоположниками теории решеток профилей, на основе которой ведутся расчеты рабочих колес и направляющих аппаратов турбомашин.

Фундаментальные идеи Жуковского и Чаплыгина были в дальнейшем развиты их учениками и последователями, например Н.Е.Кочиным, В.В.Уваровым, Г.Ю.Степановым. Большое значение для развития газовой динамики имела диссертация С.А.Чаплыгина "О газовых струях" (1902 г.), в которой изложена идея интегрирования уравнений газовой динамики методом перехода от физической плоскости течения к плоскости годографа скоростей, где нелинейные уравнения газовой динамики становятся линейными. Дальнейшее развитие этот метод получил в исследованиях академика С.А.Христиановича.

В 1904 г. известным гидродинамиком Людвигом Прандтлем были заложены основы теории пограничного слоя. Крупный вклад в теорию пограничного слоя внесли Теодор фон Карман и Карл Польгаузен. Теория пограничного слоя позволила объяснить существенное для практики явление отрыва потока от поверхности тела.

Большим стимулом дальнейшего развития газодинамики послужило освоение в авиации сверхзвуковых и гиперзвуковых течений. С.А.Христианович в 1941 г. дал общий анализ сверхзвуковых течений вблизи линии перехода дозвукового течения в сверхзвуковое и предложил систематическую классификацию этих течений, а также метод построения безударного сопла Лаваля, метод расчета сверхзвуковых эжекторов и др.

Большой вклад в развитие полуэмпирических методов расчета турбулентного пограничного слоя внесли отечественные ученые Л.И.Седов, Л.Г.Лойцянский, В.С.Авдуевский, В.М.Иевлев и др. Первые работы по расчету турбулентного пограничного слоя на уровне дифференциальных уравнений Рейнольдса с привлечением полуэмпирических гипотез А.Н.Колмогорова принадлежат Г.П.Глушко. Дальнейшее развитие эти идеи получили в работах Б.Сполдинга и его школы.

В связи с развитием численных методов в газовой динамике следует отметить научную школу академика О.М.Белоцерковского. Значительное развитие в последнее время как у нас в стране, так и за рубежом получили исследования газодинамики разреженных газов (Ю.А.Кошмаров, Ю.А.Рыжов, А.К.Ребров, М.Н.Коган и др.), газодинамики двухфазных потоков и гетерогенных сред (В.Е.Накоряков, Р.И.Нигматулин, М.Е.Дейч, Г.А.Филиппов и др.), магнитной газодинамики (Г.А.Любимов).

§3. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И МОДЕЛИ ЖИДКОЙ СРЕДЫ

Предметом изучения в механике жидкости и газа является жидкая среда, т.е. вещество в жидком и газообразном (парообразном) фазовых состояниях. Иногда вместо термина "жидкая среда" пользуются понятием "жидкость", понимая этот термин в более широком смысле, чем собственно капельная жидкость.

По физической структуре различают сплошные и разреженные среды. Их разграничивают, используя критерий Кнудсена — отношение длины свободного пробега молекулы l к характерному размеру L рассматриваемого течения жидкой среды (например, к длине тела):

$$\mathrm{Kn} = l/L.$$

Ориентировочно можно считать, что если Kn < 0,01, то среда рассматривается как плотная (сплошная), и в этом случае говорят о режиме течения сплошной среды (жидкости или газа). Если Kn > > 0,01, то среда (газ) в той или иной степени разреженная. Разреженная среда характеризуется тремя режимами течения: 0,01 < Kn < < 0,1 — режим течения со скольжением; 0,1 < Kn < 10 — переходный режим течения; Kn > 10 — режим свободномолекулярного течения.

На рис. 10 области различных режимов течения изображены в координатах: критерий Рейнольдса Re — Критерий Маха M. Критерий Рейнольдса представляет собой отношение сил инерции в потоке жидкой среды к силам вязкости:

$$Re = vL/\nu,$$

где v — скорость потока; L — характерный размер; ν — коэффициент кинематической вязкости.

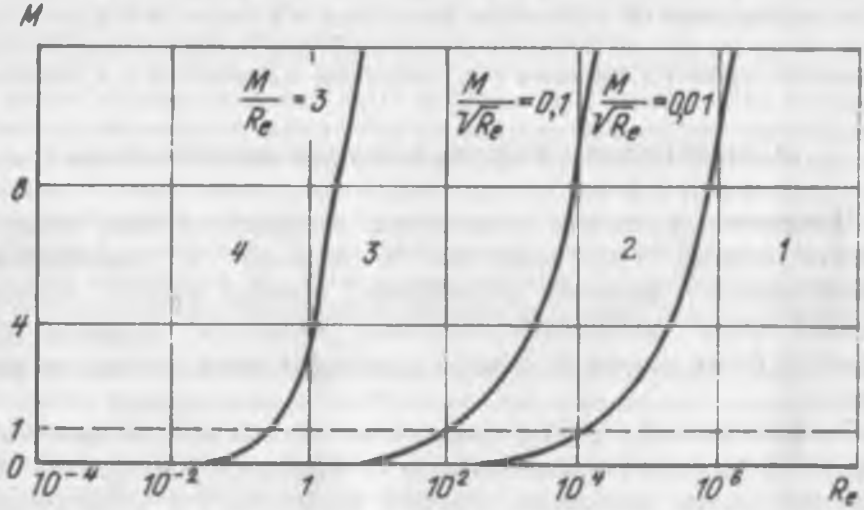


Рис. 10. Области различных режимов течения жидкой среды (M/Re):
1 — течение сплошной среды; *2* — со скольжением; *3* — в переходном режиме; *4* — в свободномолекулярном режиме

Критерий Маха представляет собой отношение скорости течения среды v к скорости распространения в упругой среде бесконечно малых возмущений (эта скорость называется скоростью звука a):

$$M = v/a.$$

Отметим наиболее существенные общие особенности каждого из режимов течения. Сплошная (плотная) жидкая среда представляет собой континуум — непрерывную совокупность молекул, заполняющих сплошь пространство и постоянно сталкивающихся между собой. При течении в режиме сплошной жидкой среды молекулы жидкости тормозятся на поверхностях, ограничивающих область течения. В результате на обтекаемой поверхности скорость жидкой среды всегда равна скорости этой поверхности, а температура жидкости в прилегающих к поверхности слоях равна температуре поверхности, так что отсутствует разрыв в значениях величин скорости и температуры на границе раздела поток — стенка. Изменение значений скорости и температуры от их значений в текущей жидкой среде до значений на обтекаемой поверхности происходит в пределах относительно узкой зоны течения, называемой пограничным слоем (соответственно динамическим или тепловым).

Другой важной особенностью жидкой сплошной (плотной) среды является существование в ней двух характерных режимов течения: ламинарного и турбулентного. Ламинарный (слоистый) режим характеризуется неперемешиваемым движением слоев жидкости. В этом случае процессы переноса всех физических субстанций (вещества, количества движения, энергии) поперек потока происходят только за счет теплового молекулярного движения. При достижении определенного значения числа Рейнольдса, называемого критическим, ламинарный режим течения становится неустойчивым по отношению к существующим в потоке малым возмущениям. Течение переходит в турбулентный режим, когда значения всех параметров становятся пульсирующими, однако осредненные их значения могут сохранять свои стационарные значения.

В этом трехмерном движении (с нестационарными параметрами в рассматриваемой точке) возникают непрерывно распределенные в пространстве пульсации скоростей. Эти пульсации характеризуются длинами волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течения. Пульсации создают мощный турбулентный перенос физических субстанций в потоке, что приводит к интенсификации теплопередачи, диффузии вещества, увеличению потерь на трение.

В режиме течения со скольжением сохраняется зона пограничного слоя, однако из-за растущего влияния разрежения возникает проскальзывание молекул вдоль твердой обтекаемой поверхности (скачок значений скоростей потока и стенки). Возможен также и скачок значения температуры между средой и стенкой. Режим течения является в основном ламинарным.

В переходном режиме течения проявляются особенности как сплошной, так и разреженной среды. Исчезает смысл понятия пограничного слоя как зоны изменения параметров потока от их значения в ядре потока до значения на стенке. Возникает необходимость изучать поведение жидкой среды с учетом анализа ее внутренней структуры уже не как континуума, а как ансамбля частиц (молекул, атомов, ионов), которые заполняют пространство дискретно. При этом в силу еще относительно малого (по сравнению со свободномолекулярным режимом) разрежения среды молекулы в период времени между столкновениями со стенкой испытывают многократные соударения. Это может существенно изменить их максвелловское распределение по скоростям, которые они имели непосредственно после отражения от стенки

Свободномолекулярный режим течения разреженной среды характеризуется такой степенью разрежения, при которой молекулы после соударения с твердой поверхностью и отражения от нее практически не сталкиваются друг с другом. В результате можно пренебречь процессом межмолекулярного взаимодействия в сравнении с процессами, характеризующими энергетическое взаимодействие молекул с твердой поверхностью. Характеристики потока газа в свободномолекулярном режиме течения определяются закономерностями, вытекающими из существующего максвелловского распределения по скоростям молекул до и после их взаимодействия со стенкой. Пограничный слой на обтекаемой поверхности в этом режиме течения отсутствует.

Отметим, что для свободномолекулярного режима течения и для режима течения сплошной среды механизм силового взаимодействия среды с поверхностью различен, поэтому понятия нормального давления и напряжения трения в каждом режиме формулируются по-разному.

В связи с особенностями различных режимов течения при анализе явлений в механике сплошной среды и в механике разреженной среды используют различные методологические подходы к изучаемым процессам. Для описания явлений в плотной (сплошной) среде пользуются, как правило, феноменологическим подходом, при котором свойства жидкой среды на уровне ее молекулярного строения подробно не анализируются. Достаточным оказывается рассмотрение макроскопических процессов и их характеристик для среды в целом на основе общих, подтвержденных экспериментами феноменологических законов сохранения массы, количества движения, момента количества движения, энергии. К ним добавляется еще ряд дополнительных, тоже феноменологических законов, таких, как уравнение состояния среды, связь вязких (касательных) напряжений с изменением скорости среды, законы теплопроводности, диффузии, турбулентности и т.п.

Для описания явлений в разреженных газах необходим анализ особенностей структуры вещества и происходящих в нем процессов на уровне молекулярного взаимодействия частиц. При изучении таких микроскопических процессов движения и взаимодействия молекул и атомов используются физико-математический аппарат и методический подход молекулярно-кинетической теории газов.

Реальной жидкой среде при ее изучении в механике жидкости и газа ставится в соответствие ее физико-математическая модель. Очевидно, что точность расчетов при замене реальной жидкой среды и пдушпх в ней процессов их математическими моделями во многом зависит от того, как сохранились при такой схематизации в условиях рассматриваемой задачи те свойства среды и процессов, которые являются наиболее существенными, определяющими. Критерием точности, естественно, служит эксперимент, однако степень несовпадения теоретических и экспериментальных результатов может зависеть и от погрешностей измерительной аппаратуры.

Математическая модель жидкой среды включает в себя совокупность данных о характере структуры среды, режима течения и ее свойствах, о ее составе, теплофизических и термодинамических параметрах в зависимости от температуры и давления. В случае реагирующей жидкой среды сведения о составе среды получают на основе анализа идущих в ней физических и химических процессов, для описания которых необходимы соответствующие зависимости с добавлением начальных и граничных условий.

Рассмотрим особенности математической модели сплошной жидкой среды. Ее структура является структурой континуума, а наиболее общие свойства — деформируемость, однородность, сплошность, сжимаемость, квазинейтральность. Режимы ее течения могут быть ламинарными или турбулентными.

Свойство деформируемости жидкой сплошной среды выражается в неограниченном изменении первоначальной формы выделенного жидкого объема под действием приложенных к нему внешних сил. При снятии приложенных сил в отличие от упругого твердого тела деформация жидкого объема оказывается необратимой (т.е. не является пластической). Неограниченная деформируемость жидкой среды обусловливает такое ее свойство, как текучесть.

По особенностям деформируемости жидкие среды разделяют на ньютоновские и реологические (неньютоновские). В ньютоновской жидкости существует прямая пропорциональная зависимость (закон Ньютона для молекулярной вязкости) между возникающими касательными напряжениями трения τ и скоростью деформации сдвига, определяемой величиной $\partial v/\partial n$:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial n},$$

где n — нормаль к вектору скорости потока $\bar{v}$; $\mu = \nu\rho$ — коэффициент динамической вязкости; ρ — плотность среды.

Жидкости с иными закономерностями (вар, смолы, варенье) называются реологическими.

При рассмотрении свойства однородности жидкой сплошной среды в математической модели игнорируется сложное внутреннее строение вещества, состоящего из молекул, атомов, ионов, свободных электронов, которые взаимодействуют между собой; взамен этого рассматривается некоторая однородная физическая структура, обладающая теми же теплофизическими и термодинамическими свойствами, что и реальная анализируемая жидкая среда (одножидкостная модель).

Свойство сплошности (неразрывности структуры) жидкой среды — это свойство ее физической пространственной непрерывности, одна из основных особенностей математической модели жидкой среды. Если мысленно раздробить анализируемую область движения жидкой среды на бесконечно малые объемы ΔV (малые в сравнении с характерным размером обтекаемого тела или канала), то в рассматриваемый момент времени в каждом таком объеме ΔV всегда будет находиться еще столь большое количество молекул (частиц), что можно провести осреднение теплофизических и термодинамических параметров внутри этого выделенного объема. Если при переходе к соседним бесконечно малым объемам эти осредненные параметры изменяются непрерывно как в данный момент, так и с течением времени, то можно в математической модели жидкой среды рассматривать все характеристики реальной среды как непрерывные функции координат точки и времени, использовать в анализируемой области течения аппарат математического анализа непрерывных функций и саму жидкую среду считать непрерывной.

Например, плотность жидкой среды ρ в данной точке и в данный момент времени можно определить как предел отношения массы всех молекул $M(x,y,z,t)$ к объему ΔV, в котором они находятся в данный момент времени, при стремлении величины этого объема вблизи рассматриваемой точки к нулю:

$$\rho(x,y,z,t) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{M(x,y,z,t)}{\Delta V}.$$

Отметим, что до некоторой степени свойство сплошности (непрерывности) распространяется и на разреженные газы даже в свободномолекулярном режиме течения. Хотя в этом случае длина свободного пробега молекулы l во много раз больше характерного размера L тела или канала, в выделенном малом объеме газа ΔV все же находится еще достаточно большое количество молекул, чтобы их хаотическое индивидуальное тепловое движение не влияло на макроскопические параметры среды, определяемые осредненным, коллективным поведением всех частиц.

В реальной жидкой среде могут существовать поверхности, на которых параметры среды претерпевают разрыв (скачок значений), однако в целом жидкая среда свою физическую сплошность не теряет. По обе стороны такой поверхности разрыва параметры жидкой среды остаются непрерывными, и в этих областях попрежнему может использоваться математический аппарат непрерывных функций. При расчете перехода через поверхность разрыва необходимо вводить дополнительные соотношения, учитывающие изменение параметров на поверхности разрыва. Примером такой поверхности разрыва является контактная поверхность соприкосновения двух несмешивающихся жидкостей.

При течении газа со скоростью, большей скорости звука (в режиме течения сплошной среды и в режиме течения со скольжением), такой поверхностью разрыва параметров, возникающей при определенных условиях, является поверхность скачка уплотнения (ударной волны). При переходе через ударную волну параметры газа изменяются практически скачкообразно на длине, равной всего нескольким длинам свободного пробега молекулы. По мере увеличения разрежения толщина ударной волны возрастает.

Жидкая среда обладает свойством сжимаемости. Сжимаемая среда способна изменять объем (плотность) при изменении давления и температуры. Сжимаемость капельных жидкостей значительно меньше, чем газов и паров.

Для сжимаемой жидкости математическая зависимость $\rho = f(p, T)$, определяющая связь плотности $\rho = 1/V_{\text{уд}}$ (где $V_{\text{уд}}$ — удельный объем) с давлением p и температурой T, называется термическим уравнением состояния.

Для реальных газов и паров такие аналитические зависимости оказываются весьма сложными, и поэтому часто пользуются табулированными значениями величин или диаграммами состояния. Для газов широко используют упрощенное уравнение состояния

$$\rho = p / (RT),$$

в котором отсутствует учет взаимодействия между молекулами, их собственный объем считается равным нулю, а R — газовая постоянная.

Иногда газ, подчиняющийся этому соотношению, называют идеальным в термодинамическом смысле (совершенным газом).

Для области больших давлений плотность газообразных сред неудовлетворительно описывается этим уравнением состояния, и в него вводят поправку — коэффициент сжимаемости $z = p / (\rho RT)$. Значение этого коэффициента можно считать одним и тем же для многих газов, если его зависимость от давления и температуры изображать в приведенных (по отношению к критической точке) параметрах: $\tilde{\pi} = p / p_{кр}$, $\tilde{\tau} = T / T_{кр}$ (рис. 11).

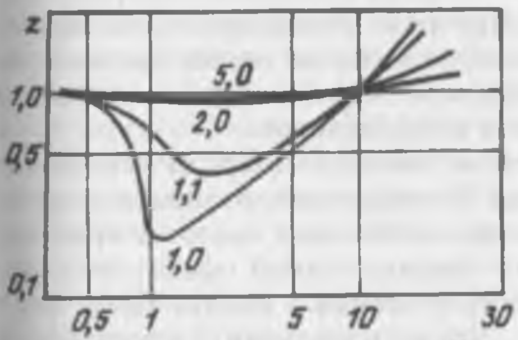


Рис. 11. Изменение коэффициэнта сжимаемости z для группы газов в зависимости от приведенных величин давления $\tilde{\pi}$ и температуры $\tilde{\tau}$ (цифры у кривых)

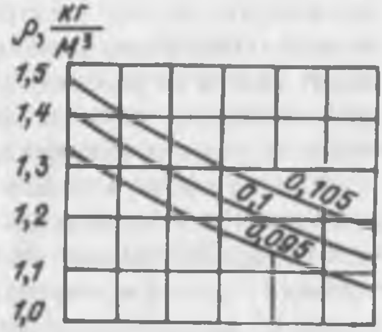


Рис. 12. Зависимость плотности сухого воздуха от температуры и давления (цифры у кривых, МПа)

На рис. 12 приведена зависимость плотности сухого воздуха от давления и температуры. Наличие влаги в воздухе сильно влияет на его плотность. В несжимаемой жидкости ее плотность имеет постоянное значение: $\rho = \text{const}$.

Электропроводящая жидкая среда, т.е. среда, в которой имеются носители свободных электрических зарядов, характеризуется свойством квазинейтральности — практическим равенством концентрации положительных и отрицательных зарядов — электронов и ионов: $n_e = n_i$. Это явление следует рассматривать как в пространстве (в пределах анализируемых объемов), так и во времени (в течение промежутков времени, характеризующих протекание процессов в этих объемах), например за время прохождения частицы газа через канал МГД-генератора.

Нарушение квазинейтральности в пространстве, т.е. эффект пространственного разделения электрических зарядов, становится существенным лишь в областях, размеры которых меньше диаметра экранирования Дебая. По порядку величины этот размер равен расстоянию, на которое тепловое движение может отдалить друг от друга электрически заряженные частицы противоположных знаков. Нарушение квазинейтральности во времени может происходить за счет электростатических колебаний, которым подвержены электроны и ионы. При таких колебаниях часть зарядов может выйти из рассматриваемого объема на период времени, не превосходящий периода колебаний, нарушив тем самым в его пределах условие электрической нейтральности.

Жидкая среда в общем случае может состоять из нескольких компонентов и нескольких фаз. Компонентами называются химически индивидуальные вещества, наименьшее число которых достаточно для формирования состава любой фазы вещества (твердой, жидкой, газообразной), входящей в жидкую среду как в термодинамическую систему. Число компонентов определяется как разность между числом составляющих данную систему веществ и числом независимых химических реакций, могущих идти в этой системе.

В качестве примера однокомпонентной сплошной жидкой среды укажем на жидкость, содержащую пузырьки своего пара. Примеры двухкомпонентных жидких сред: дым (газ и твердые частицы), туман (газ и капельки жидкости), газированная жидкость (жидкость и пузырьки газа). Наиболее общей моделью жидкой среды является многокомпонентная жидкая среда, например, в зоне впрыскивания и горения жидкого топлива в камере сгорания ГТУ.

Фазой термодинамической системы называется вещество в равновесном состоянии, отличающееся по физическим свойствам от других фаз. Однофазные жидкие среды могут быть однокомпонентными (жидкость, пар, газ) и многокомпонентными (например, смесь газов). Среди двухфазных жидких сред примерами однокомпонентной среды является влажный пар (пар и капельки жидкости); двухкомпонентной среды — влажный воздух, туман, дым, газированная жидкость, многокомпонентной среды — продукты неполного сгорания органических топлив. Течение двухфазных жидких сред может сопровождаться процессами фазовых переходов (испарение, конденсация, сублимация), происходящих с выделением или поглощением теплоты фазового перехода.

Важной составной частью математической модели жидкой сплошной среды является описание происходящих в ней физических и химических процессов: фазовых превращений, процессов переноса, химических реакций.

Процессами переноса называют физические явления, при которых в результате движения молекул происходит перенос в пространстве массы, импульса (количества движения), энергии. Процесс переноса, вызванный тепловым движением молекул, называется молекулярным переносом. Перенос, вызванный макродвижением молекул в направлении, совпадающем со среднемассовой скоростью потока, называется конвективным переносом (конвекцией). Процессы переноса определяют существование таких явлений, как диффузия, вязкость, теплопроводность.

Диффузией называют перенос в пространстве массы какого-либо компонента вследствие градиента концентрации вещества (концентрационная диффузия) или градиента температуры (термодиффузия).

Вязкостью называют перенос в пространстве величины количества движения. При ламинарном режиме течения проявляется механизм чисто молекулярной вязкости, когда в силу хаотического теплового движения отдельные частицы (молекулы, группы молекул, атомы, ионы и т.п.), сталкиваясь, или обмениваются имеющимся количеством движения, или теряют его, т.е. переносят от точки к точке. Энергия их движения переходит в какой-либо другой вид энергии, например рассеивается в виде теплоты в жидкой среде. При турбулентном режиме течения в этот процесс вовлекаются более крупные объемы жидкой среды (моли) и обмен количеством движения интенсифицируется. Механизм проявления турбулентной вязкости носит сложный характер и определяется общими закономерностями процесса турбулентности.

С повышением температуры молекулярная вязкость в газах увеличивается из-за роста скорости хаотического движения молекул и увеличения числа их соударений.

В жидкости механизм молекулярной вязкости несколько иной, чем в газах. Это связано с различием во внутреннем строении газа и жидкости: в газах длина свободного пробега молекул существенно больше размера молекулы, так как кинетическая энергия теплового движения молекул больше сил притяжения между ними. В жидкостях молекулы находятся одна от другой на расстояниях, соизмеримых с их размерами. Кроме того, молекулы жидкости объединяются в группы. Такая плотная упаковка молекул препятствует их разлету на расстояния, существенно превышающие их размеры. Основой механизма молекулярной вязкости в жидкостях является главным образом взаимодействие межмолекулярных силовых полей и в меньшей степени — обмен энергией путем столкновения молекул. С повышением температуры молекулярная вязкость в жидкостях уменьшается из-за увеличения частоты колебания молекул и уменьшения сил взаимодействия между ними.

Вязкая жидкость оказывает сопротивление сдвигу, поскольку в ней существуют касательные напряжения (напряжения трения). В модели невязкой жидкости касательные напряжения отсутствуют, такая модель называется также идеальной (в гидродинамическом смысле) жидкостью.

В общем случае процесс переноса теплоты в сплошной жидкой среде осуществляется тремя способами: теплопроводностью (кондукция), перемешиванием (конвекция) и излучением (радиация).

Теплопроводностью называют процесс молекулярного переноса теплоты в пространстве вследствие градиента температур. Передача теплоты в этом случае осуществляется при непосредственном соприкосновении частиц.

Конвекцией называется перенос теплоты путем перемещения конечных объемов среды в пространстве, а процесс теплообмена между жидкой средой и поверхностью твердого тела называют конвективным теплообменом.

При высокой температуре газа или поверхности перенос теплоты электромагнитными волнами представляет собой процесс теплового излучения.

Если жидкая среда полностью или частично состоит из электрически заряженных частиц, несущих отрицательные заряды (электроны) и положительные заряды (ионы), то процесс переноса этих зарядов представляет собой электрический ток.

Химические процессы, происходящие в жидкой среде (рабочем теле ГТ и КУ), также весьма разнообразны. Это может быть процесс сгорания органических топлив, в результате чего температура рабочего тела возрастает, а его химический состав и свойства изменяются. Такие же изменения могут происходить в теплообменных аппаратах при нагреве или охлаждении рабочего тела.

В газообразных рабочих телах с повышением температуры от 3000 K и выше может начаться диссоциация молекул на более простые или распад их до атомов. Одновременно, конечно, идет и обратный процесс — их ассоциация. Может также начаться процесс термической ионизации, особенно если в рабочее тело добавлена специальная ионизирующая присадка для увеличения его удельной электрической проводимости σ. Процессы диссоциации и ионизации происходят с поглощением теплоты и приводят к изменению ряда теплофизических и термодинамических свойств рабочих тел.

Если жидкая среда электропроводящая, то протекание по ней электрического тока плотностью j (А/м^2) приводит к выделению джоулевой теплоты в количестве j^2/σ (Вт/м^3). Это тепловыделение обусловлено потерей энергии заряженными частицами при столкновениях.

При создании математической расчетной модели жидкой среды необходимо знать, как изменяются в зависимости от давления и температуры основные термодинамические и теплофизические коэффициенты, характеризующие процессы, идущие в рассматриваемой среде: коэффициент динамической вязкости μ, коэффициент теплопроводности λ, молекулярная масса μ_m, удельная электрическая проводимость σ, удельная теплоемкость c (причем для газа необходимо различать удельные теплоемкости при постоянном давлении c_p и при постоянном объеме c_V); газовая постоянная R; для области влажного пара — степень его влажности x, а при фазовых превращениях — значения теплоты фазовых переходов.

По отношению к существующим в данный момент времени внешним условиям (давлению, температуре) происходящие в жидкой среде физические и химические процессы могут быть равновесными или неравновесными, т.е. физико-химические свойства среды и ее состав могут соответствовать или не соответствовать существующим в данный момент температуре и давлению. Время установления нарушенного равновесия параметров среды называется временем релаксации $t_р$.

Равновесными называются процессы, в которых время релаксации мало ($t_р \to 0$), т.е. существенно меньше характерного времени t для газодинамических процессов в данной задаче (например, времени пролета частицы газа по какому-либо элементу тракта КУ). В этом случае изменение физико-химических свойств жидкой среды и ее состава практически моментально следует за локальным изменением ее температуры и давления. Иначе это означает, что при $t_р \ll t$ скорость протекания реакций в жидкой среде велика. Конвективный и диффузионный переносы компонента в жидкой среде в этом случае практически не влияют на изменение состава жидкой среды.

Неравновесными называются процессы, в которых время релаксации $t_р$ существенно больше, чем характерное время t для рассматриваемого газодинамического процесса ($t_р \geq t$). В этом случае физико-химические свойства и состав жидкой среды не соответствует мгновенным значениям температуры и давления. Скорость реакций в жидкой среде оказывается малой. Учет изменения состава и физико-химических свойств такой реагирующей жидкой среды происходит путем введения в математическую модель течения уравнений химической кинетики.

В предельном случае неравновесного течения характерное время релаксации t_p химических реакций может быть очень велико: $t_p \to \infty$, т.е. скорость химических реакций будет близка к нулю. В этом случае состав и свойства жидкой среды во время ее движения будут соответствовать своим начальным значениям. В таких течениях с "замороженными" свойствами по отношению к начальным значениям температуры и давления изменение свойств жидкой среды и концентрации ее компонентов будет происходить только за счет процессов конвекции и диффузии.

Контрольные вопросы к §3

1. Дайте определение критериев Маха, Рейнольдса, Кнудсена.
2. Какими свойствами отличается режим течения сплошной среды от режима течения со скольжением, режим течения со скольжением от переходного режима течения, переходный режим от свободномолекулярного режима течения?
3. Каковы общие свойства математической модели сплошной жидкой среды и каков их физический смысл?
4. В чем различие понятий "фаза" и "компонент" термодинамической системы?
5. Какие процессы переноса свойственны жидкой сплошной среде, как они связаны с явлениями диффузии, вязкости, передачи теплоты, протеканием электрического тока?
6. В чем различие между равновесными и неравновесными физико-химическими процессами?

Глава 1. ОСНОВЫ КИНЕМАТИКИ ЖИДКОЙ СРЕДЫ

§4. ДВИЖЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ ЧАСТИЦЫ ЖИДКОСТИ. ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Общие сведения

Движение жидкости отличается от движения твердого тела. Любое перемещение твердого тела в пространстве можно осуществить путем поступательного движения вместе с выбранным полюсом и вращательного движения вокруг оси, проходящей через этот полюс. При движении частицы жидкости изменяется ее форма, т.е. кроме поступательного и вращательного появляется деформационное движение, искажающее геометрическую форму данной частицы.

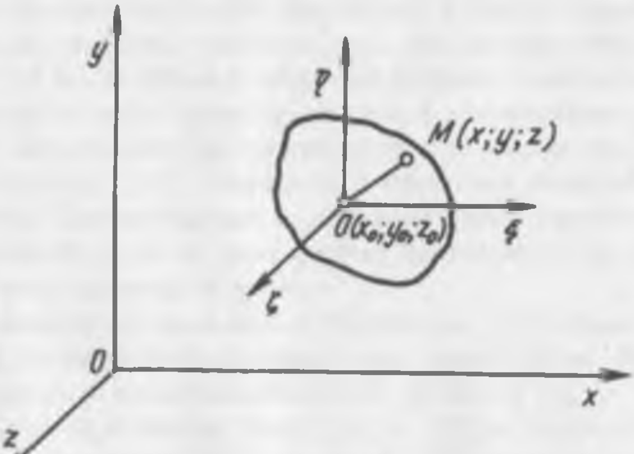


Рис. 13. Бесконечно малая "жидкая" частица

Для выяснения общих закономерностей движения жидкого тела рассмотрим движение бесконечно малой "жидкой" частицы, распределение скоростей в которой с определенной точностью можно считать линейным относительно выбранного полюса *O* (рис. 13).

Пусть в точке *O* проекции скорости равны v_{x0}, v_{y0} и v_{z0}, тогда в соседней точке *M* с координатами $x = x_0 + \xi$, $y = y_0 + \eta$, $z = z_0 + \zeta$ проекции скорости будут равны v_x, v_y и v_z. Разлагая проекции скорости в точке *M* в ряд Тейлора с точностью до бесконечно малых первого порядка, получаем

$$\left.\begin{aligned} v_x &= v_{x0} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial}\right)_0 \xi + \left(\frac{\partial v_x}{\partial}\right)_0 \eta + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)_0 \zeta; \\ v_y &= v_{y0} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial}\right)_0 \xi + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_0 \eta + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)_0 \zeta; \\ v_z &= v_{z0} + \left(\frac{\partial v_z}{\partial}\right)_0 \xi + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)_0 \eta + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)_0 \xi, \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

причем очевидно, что $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} = \dfrac{\partial v_x}{\partial \xi}$; $\dfrac{\partial v_x}{\partial y} = \dfrac{\partial v_x}{\partial \eta}$ и т.п.

Эти равенства в силу малости частицы (ξ, η, ζ — бесконечно малые первого порядка) можно считать точными. Чем меньше ξ, η, ζ, тем точнее выполняется равенство (1.1). Допуская известное неравенство правой и левой частей выражений (1.1), например равное 1%; 0,1% и т.п., определяем размер частицы, т.е. ее малость.

Произвольная деформация "жидкой" частицы в рассматриваемом случае сводится к растяжению (сжатию) "жидких" отрезков и к изменению углов между двумя "жидкими" отрезками. Искривление "жидкого" отрезка исключено в силу принятой линейной зависимости проекций скоростей от координат ξ, η, ζ. Поворот плоскости "жидкого" угла будет учитываться при оценке вращательного движения частицы как твердого тела.

Далее отдельные составляющие деформационного движения жидкости будем рассматривать, выражая их через характеристики поля скоростей.

Рассмотрим движение элементарного отрезка длиной dx, выделенного мысленно в бесконечно малой "жидкой" частице. Для простоты анализа оси координат расположим так, чтобы ось x проходила по отрезку, а начало отрезка совпадало с началом координат (рис. 14).

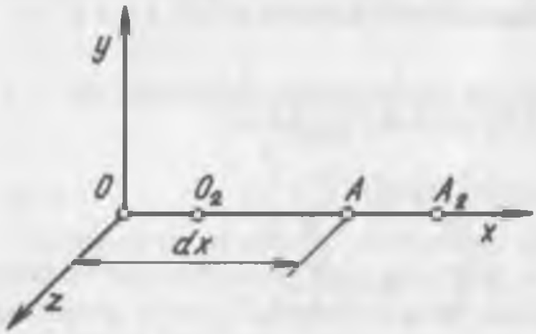


Рис. 14. Схема деформации "жидкого" отрезка

Если проекция скорости в точке O на ось x равна v_{x0}, то для точки A по формулам (1.1) получим

$$v_{xA} = v_{x0} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_0 \mathrm{d}x,$$

так как dy = 0; dz = 0.

Через бесконечно малый промежуток времени dt отрезок OA переместится в новое положение, а его проекция на ось x — в положение O_2A_2, причем в соответствии с формулами (1.1) он останется прямолинейным, изменившим лишь длину и положение в пространстве.

За время dt точка O в направлении оси x пройдет расстояние v_{x0} dt, точка A отрезка OA за то же время переместится на расстояние $\left(v_{x0} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$. Вычитая из последнего выражения первое, получаем линейную деформацию отрезка dx в направлении оси x в виде $\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$. Деля линейную деформацию на dx, получаем относительную линейную деформацию, а деля ее на dt, получаем скорость относительной линейной деформации отрезка в направлении оси x в виде $\varepsilon_x = \partial v_x / \partial_x$ (здесь и далее индекс 0 опущен).

Рассуждая аналогично для отрезков dy и dz, имеем скорости относительных линейных деформаций отрезков в направлении осей y и z:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Следовательно, частные производные от проекций скоростей по одноименным координатам представляют собой скорости относительных линейных деформаций отрезков в направлениях соответствующих осей.

Деформация "жидкого" прямого угла

Выделим мысленно в "жидкой" частице прямой угол AOB со сторонами dx и dy и рассмотрим его деформацию за время dt (рис. 15). Для упрощения анализа расположим оси координат так, чтобы оси x и y совпали со сторонами угла, а начало координат совпало с вершиной угла (см. рис. 15).

Если проекции скорости в точке O равны v_{x0}, v_{y0} и v_{z0}, то в точке A в соответствии с формулами (1.1) получим

$$v_{xA} = v_{x0} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \mathrm{d}x;$$

$$v_{yA} = v_{y0} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \mathrm{d}x;$$

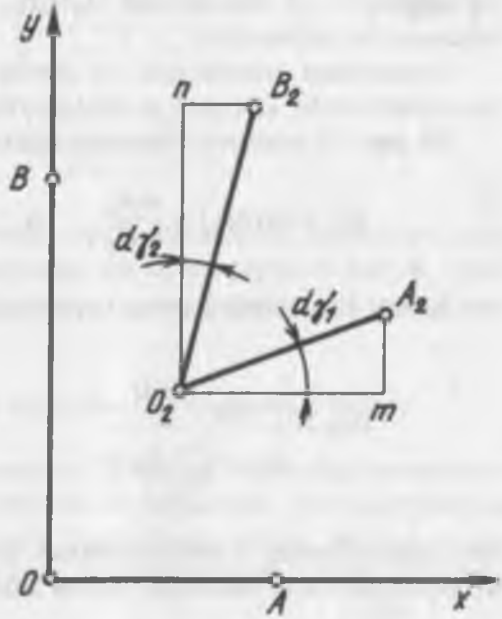


Рис. 15. Схема деформации "жидкого" прямого угла

$$v_{zA} = v_{z0} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,,$$

а в точке B —

$$v_{xB} = v_{x0} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,;$$

$$v_{yB} = v_{y0} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\,\mathrm{d}y;$$

$$v_{zB} = v_{z0} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,.$$

За бесконечно малый промежуток времени $\mathrm{d}t$ прямой угол AOB переместится в новое положение, а его проекция на плоскость xOy — в положение $A_2O_2B_2$, причем в общем случае угол прямым не останется.

Определим изменение за время $\mathrm{d}t$ проекции прямого угла в плоскости xOy, которое складывается из углов $\mathrm{d}\gamma_1$ и $\mathrm{d}\gamma_2$.

Из рис. 15 следует, что при малых углах

$$\mathrm{d}\gamma_1 \approx \mathrm{tg}(\mathrm{d}\gamma_1) = \frac{mA_2}{mO_2} \quad \text{и} \quad \mathrm{d}\gamma_2 \approx \mathrm{tg}(\mathrm{d}\gamma_2) = \frac{nB_2}{nO_2}\,.$$

Далее, вычислив длины отрезков mA_2, mO_2, nO_2 и nB_2, получим

$$\mathrm{d}\gamma_1 = \frac{\frac{\partial v_y}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x + \frac{\partial v_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t}\,; \qquad \mathrm{d}\gamma_2 = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y + \frac{\partial v_y}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}\,,$$

или, пренебрегая в знаменателях бесконечно малыми величинами второго порядка малости, будем иметь

$$\mathrm{d}\gamma_1 = \frac{\partial v_y}{\partial x}\,\mathrm{d}t\,; \qquad \mathrm{d}\gamma_2 = \frac{\partial v_x}{\partial y}\,\mathrm{d}t\,.$$

Скорость изменения прямого угла в плоскости xOy выразится формулой

$$\frac{d\gamma_1 + d\gamma_2}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Обозначим половину скорости изменения прямого угла через $\theta_{xy} = \theta_{yx}$; тогда

$$\theta_{xy} = \theta_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

Проведя аналогичные рассуждения для двух других плоскостей, получим

$$\theta_{yz} = \theta_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right);$$

$$\theta_{zx} = \theta_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right); \qquad (1.2)$$

$$\theta_{xy} = \theta_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

Следовательно, сумма частных производных от проекций скоростей по разноименным координатам представляет собой удвоенную скорость изменения прямого угла в соответствующей плоскости.

Вращательное движение частицы без изменения формы

Как уже было сказано, движение "жидкой" частицы отличается от движения твердого тела наличием деформации. Рассмотренные выше скорости деформационного движения можно ввести в выражения для проекций скорости произвольной точки частицы жидкости. Тогда, прибавляя и вычитая члены $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\eta$ и $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\zeta$ из первой строчки выражения (1.1), получаем

3*

$$v_x = v_{x0} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\xi + \frac{\partial v_x}{\partial y}\eta + \frac{\partial v_x}{\partial z}\zeta \pm \frac{1}{2}\frac{\partial v_y}{\partial x}\eta \pm \frac{1}{2}\frac{\partial v_z}{\partial x}\zeta,$$

или

$$v_x = v_{x0} + \varepsilon_x\xi + \theta_{xy}\eta + \theta_{xz}\zeta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\zeta - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\eta. \qquad (1.3)$$

Первое слагаемое v_{x0} представляет собой проекцию на ось x скорости поступательного движения частицы жидкости как твердого тела. Слагаемые типа $\varepsilon_x\xi + \theta_{xy}\eta + \theta_{xz}\zeta$ представляют собой проекции на оси координат скоростей деформационного движения, состоящего из растяжения (сжатия) отрезка длиной ξ и изменений прямых углов в плоскостях xOy и xOz.

Оставшиеся слагаемые типа

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\zeta - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\eta \qquad (1.4)$$

могут выражать собой только скорость вращательного движения частицы жидкости как твердого тела, ибо деформационное движение уже учтено.

Полученные выше девять характеристик скоростей деформационного движения малой частицы сплошной среды образуют тензор скоростей деформации

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \theta_{xy} & \theta_{xz} \\ \theta_{yx} & \varepsilon_y & \theta_{yz} \\ \theta_{zx} & \theta_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Проекции скорости деформационного движения выражаются через компоненты этого тензора

$$v_{x\,\text{деф}} = \varepsilon_x\xi + \theta_{xy}\eta + \theta_{xz}\zeta \quad \text{и т.д.}$$

Покажем, что выражение типа (1.4) представляет собой проекцию на ось x скорости произвольной точки частицы жидкости при вращении ее как твердого тела вокруг оси, проходящей через полюс с угловой скоростью $\bar{\omega}$. В этом случае скорость точки равна векторному произведению $\bar{\omega}$ на dl, т.е.

$$\bar{v}_{\text{вр}} = \left(\bar{\omega} \times \mathrm{d}\bar{l}\right) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix}.$$

Проекции скорости $\bar{v}_{\text{вр}}$ на оси координат имеют вид

$$v_{x\,\text{вр}} = \omega_y\zeta - \omega_z\eta; \qquad v_{y\,\text{вр}} = \omega_z\xi - \omega_x\zeta; \qquad v_{z\,\text{вр}} = \omega_x\eta - \omega_y\xi.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_{x\,\text{вр}}}{\partial z} - \frac{\partial v_{z\,\text{вр}}}{\partial x}\right) = \omega_y; \qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_{y\,\text{вр}}}{\partial x} - \frac{\partial v_{x\,\text{вр}}}{\partial y}\right) = \omega_z.$$

Следовательно,

$$v_x = v_{x0} + \varepsilon_x\xi + \theta_{xz}\zeta + \theta_{xy}\eta + \omega_y\zeta - \omega_z\eta;$$

$$v_y = v_{y0} + \varepsilon_y\eta + \theta_{xz}\xi + \theta_{yz}\zeta + \omega_z\xi - \omega_x\zeta; \tag{1.5}$$

$$v_z = v_{z0} + \varepsilon_z\zeta + \theta_{yz}\eta + \theta_{xz}\xi + \omega_x\eta - \omega_y\xi.$$

В то же время

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\theta_{xz} + \omega_y - \theta_{xy} + \omega_y\right) = \omega_y \qquad \text{и т.п.,}$$

т.е. выражения типа (1.4) представляют собой проекции скорости вращательного движения "жидкой" частицы, что и требовалось доказать.

Поступая аналогично для осей y и z, получаем

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right);$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right); \tag{1.6}$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

Следовательно, скорость произвольной точки частицы жидкости можно записать в виде

$$v_x = v_{x\,0} + v_{x\,\text{деф}} + v_{x\,\text{вр}}.$$

Пользуясь круговой подстановкой, получим для проекций скорости на оси y и z:

$$v_y = v_{y\,0} + v_{y\,\text{деф}} + v_{y\,\text{вр}}; \qquad v_z = v_{z\,0} + v_{z\,\text{деф}} + v_{z\,\text{вр}}$$

или в векторной форме

$$\bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{V}_{\text{вр}} + \bar{V}_{\text{деф}}.$$

Полученный результат формулируется в виде первой теоремы Гельмгольца, т.е. произвольное движение бесконечно малой частицы жидкости можно разложить на три движения: поступательное вместе с выбранным полюсом; вращательное вокруг мгновенной оси, проходящей через полюс, и деформационное, состоящее из линейной деформации и деформации скоса прямого угла.

Контрольные вопросы к §4

1. С чем связано понятие малости "жидкой" частицы?
2. Почему при деформации малой "жидкой" частицы "жидкий" отрезок остается прямолинейным?
3. Из чего складывается деформация "жидкой" частицы?

§5. КЛАССИФИКАЦИЯ ДВИЖЕНИЙ ЖИДКОСТИ

В зависимости от характера изменения параметров потока во времени различают установившееся, или стационарное, и неустановившееся, или нестационарное, движения жидкости. При установившемся движении параметры в данной точке пространства неизменны во времени, т.е. частная производная по времени от любой величины равна нулю, например $\partial v_x / \partial t = 0$.

На основании доказанной выше теоремы Гельмгольца, рассматривая внутренний характер движения частицы, можно выделить важный класс движений жидкости — безвихревое, или потенциальное, движение.

Потенциальным называется такое движение жидкости, при котором во всем потоке или за исключением некоторых его областей отсутствует вращение частиц жидкости. В тех областях потока, где $\overline{\omega} \neq 0$, движение называется вихревым, или непотенциальным. Математическим условием потенциальности движения является тождество $\overline{\omega} = 0$. Следовательно, условие потенциальности требует, чтобы поле скоростей в жидкости подчинялось равенствам

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$$

или согласно выражениям (1.6)

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}; \qquad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}; \qquad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y}. \tag{1.7}$$

Условия (1.7) свидетельствуют, что трехчлен $v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz$ в этом случае является полным дифференциалом некоторой функции координат. Если обозначить эту функцию через $\varphi\ (x,\ y,\ z)$, то

$$d\varphi = v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz,$$

откуда

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \qquad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \qquad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Потенциал скорости φ является важной кинематической функцией и широко применяется при анализе течений как несжимаемой, так и сжимаемой жидкости. Выразим потенциал φ через характеристики деформационного движения жидкости ε и θ. В самом деле, при $\theta_{xy} = \theta_{yx}$; $\theta_{xz} = \theta_{zx}$; $\theta_{yz} = \theta_{zy}$

$$v_x = v_{x\,0} + \varepsilon_x x + \theta_{xy} y + \theta_{xz} z = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$v_y = v_{y\,0} + \varepsilon_y y + \theta_{yz} z + \theta_{yz} x = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad (1.8)$$

$$v_z = v_{z\,0} + \varepsilon_z z + \theta_{z\,x} x + \theta_{zy} y = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Подчеркнем, что величины ε и θ в этих выражениях постоянны и относятся к полюсу частицы. Координаты точки ξ, η, ζ для удобства заменены соответственно на x, y, z.

Для построения функции φ проинтегрируем первую строку выражений (1.8) по x; тогда

$$\varphi = v_{x0} x + \frac{1}{2}\varepsilon_x x^2 + \theta_{xy} yx + \theta_{xz} zx + f(y, z). \qquad (1.9)$$

Теперь продифференцируем полученное выражение для φ по y и z и, использовав выражения (1.8) и (1.9), найдем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \theta_{xy} x + \frac{\partial f}{\partial y} = v_{y0} + \varepsilon_y y + \theta_{xy} x + \theta_{yz} z;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \theta_{xz} x + \frac{\partial f}{\partial z} = v_{z0} + \varepsilon_z z + \theta_{yz} y + \theta_{xz} x.$$

Откуда

$$\frac{\partial f}{\partial y} = v_{y0} + \varepsilon_y y + \theta_{yz} z; \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = v_{z0} + \varepsilon_z z + \theta_{yz} y$$

или, интегрируя, получаем

$$f = v_{y0} y + \frac{1}{2}\varepsilon_y y^2 + \theta_{yz} zy + f_1(z)$$

или

$$f = v_{z0} z + \frac{1}{2}\varepsilon_z z^2 + \theta_{yz} yz + f_2(y).$$

что даст

$$v_{y0}y + \frac{1}{2}\varepsilon_y y^2 - f_2(y) = v_{z0}z + \frac{1}{2}\varepsilon_z z^2 - f_1(z).$$

Таким образом, имеем равенство двух функций разных аргументов. Следовательно, каждая из них равна постоянной, т.е.

$$v_{y0}y + \frac{1}{2}\varepsilon_y y^2 - f_2(y) = -c,$$

откуда

$$f_2(y) = v_{y0}y + \frac{1}{2}\varepsilon_y y^2 + c.$$

Тогда

$$f = v_{y0}y + v_{z0}z + \frac{1}{2}\varepsilon_y y^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_z z^2 + \theta_{yz}yz + c.$$

Для потенциала φ получим

$$\varphi = \left(v_{x0}x + v_{y0}y + v_{z0}z\right) + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_x x^2 + \varepsilon_y y^2 + \varepsilon_z z^2\right) + \\ + \left(\theta_{yz}yz + \theta_{zx}zx + \theta_{xy}xy\right) + c. \tag{1.10}$$

Следовательно, безвихревое движение описывается функцией φ (x, y, z), зависящей от характеристик ε и θ. Для вихревого движения функцию, аналогичную функции φ (x, y, z), построить нельзя.

При геометрической классификации движений жидкости пользуются либо понятием о траектории частицы, либо понятием о линии тока, которые связаны с представлением о жидкости как о непрерывной среде. Понятие о траектории в механику жидкости и газа ввел Ж.Лагранж, перенеся его из механики твердого тела. В этом случае наблюдатель следит за движением индивидуальной частицы, находившейся в начальный момент времени z_0 в точке с координатами (x_0, y_0, z_0). Однако оказалось, что в большинстве случаев этот подход формален и не отвечает практическому требованию эффективного расчета распределения давлений по контуру обтекаемого тела либо получения поля скоростей в сечении канала. Этими вопросами и занимается прикладная газодинамика.

В отличие от Ж.Лагранжа Л.Эйлер считал, что движение жидкости удобно характеризовать полем скоростей в потоке в каждый момент времени. Геометрической характеристикой течения по Эйлеру служат векторные линии, которые мысленно проведены в жидкости в данный момент времени так, что в каждой точке потока вектор скорости направлен по касательной к векторной линии. Эта линия проведена через разные частицы потока в данный момент времени. Для неустановившегося движения векторные линии постоянно изменяются, а для установившегося движения сохраняются неизменными. Векторную линию в поле скоростей удобно называть линией тока. По траектории движется выделенная частица потока, а при установившемся движении траектории совпадают с линиями тока.

В общем случае как траектории, так и линии тока не пересекаются, ибо в одной точке потока может быть только одна скорость, которая направлена по касательной к траектории или к линии тока. В точке пересечения линий тока скорость должна быть равна или нулю (критическая точка), или бесконечности (особая точка в потоке — например, сток или источник).

В непотенциальном потоке можно провести вихревые линии. В каждой точке вихревой линии вектор $\vec{\omega}$ направлен к ней по касательной. Если векторы поля скоростей и поля вихрей совпадают или направлены в противоположные стороны, то движение жидкости называется винтовым.

Когда линии тока представляют собой параллельные прямые, движение называется прямолинейным. Такое движение наблюдается, например, в трубах. По нормали к линиям тока параметры потока могут быть непостоянными.

Если параметры жидкости при движении зависят только от одной координаты, то движение называется одномерным. Такой координатой может быть расстояние l, измеренное вдоль оси криволинейного канала. Поперечное сечение такого канала должно быть таким, чтобы параметры жидкости по этому сечению можно было считать постоянными. На практике часто приходится иметь дело с осредненными по сечению параметрами жидкости. Одномерное движение несжимаемой жидкости обычно изучает гидравлика.

Плоским называется такое движение, при котором во всех плоскостях, параллельных выделенной плоскости, картина течения повторяется. Параметры плоского течения зависят от двух пространственных координат, поэтому плоское течение иногда называют двумерным.

Плоское течение можно себе представить, рассматривая обтекание крыла бесконечного размаха неограниченным потоком жидкости. На рис. 16 дано одно из сечений такого потока плоскостью, перпендикулярной к оси крыла.

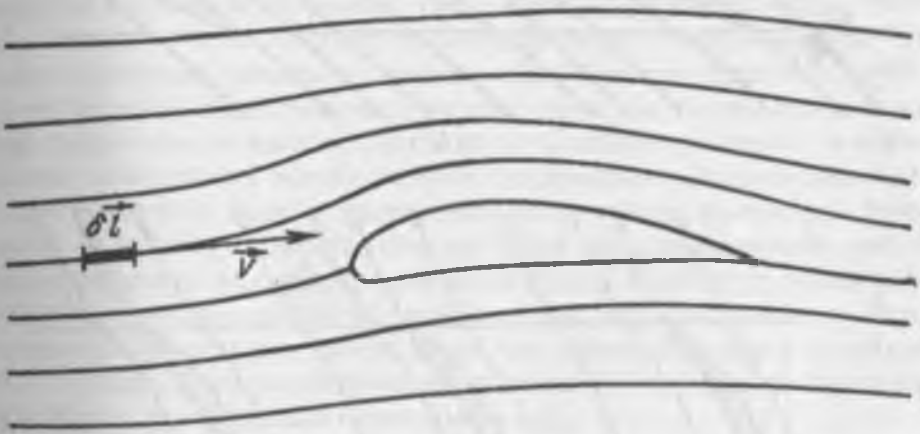


Рис. 16. Поле линий тока при обтекании крыла бесконечного размаха неограниченным потоком жидкости

К плоскому движению можно схематично свести обтекание кольцевой решетки ступени осевой турбины (рис. 17, *а*) или осевого компрессора (рис. 17, *б*). Для этого рассекают кольцевую решетку ступени цилиндрической поверхностью определенного радиуса и разворачивают сечение на плоскость. Получается бесконечная прямая решетка из профилей, соответствующих данному радиусу сечения. Сечение на другом радиусе даст другую решетку — с другим расстоянием между профилями (с другим шагом решетки t) и другими профилями.

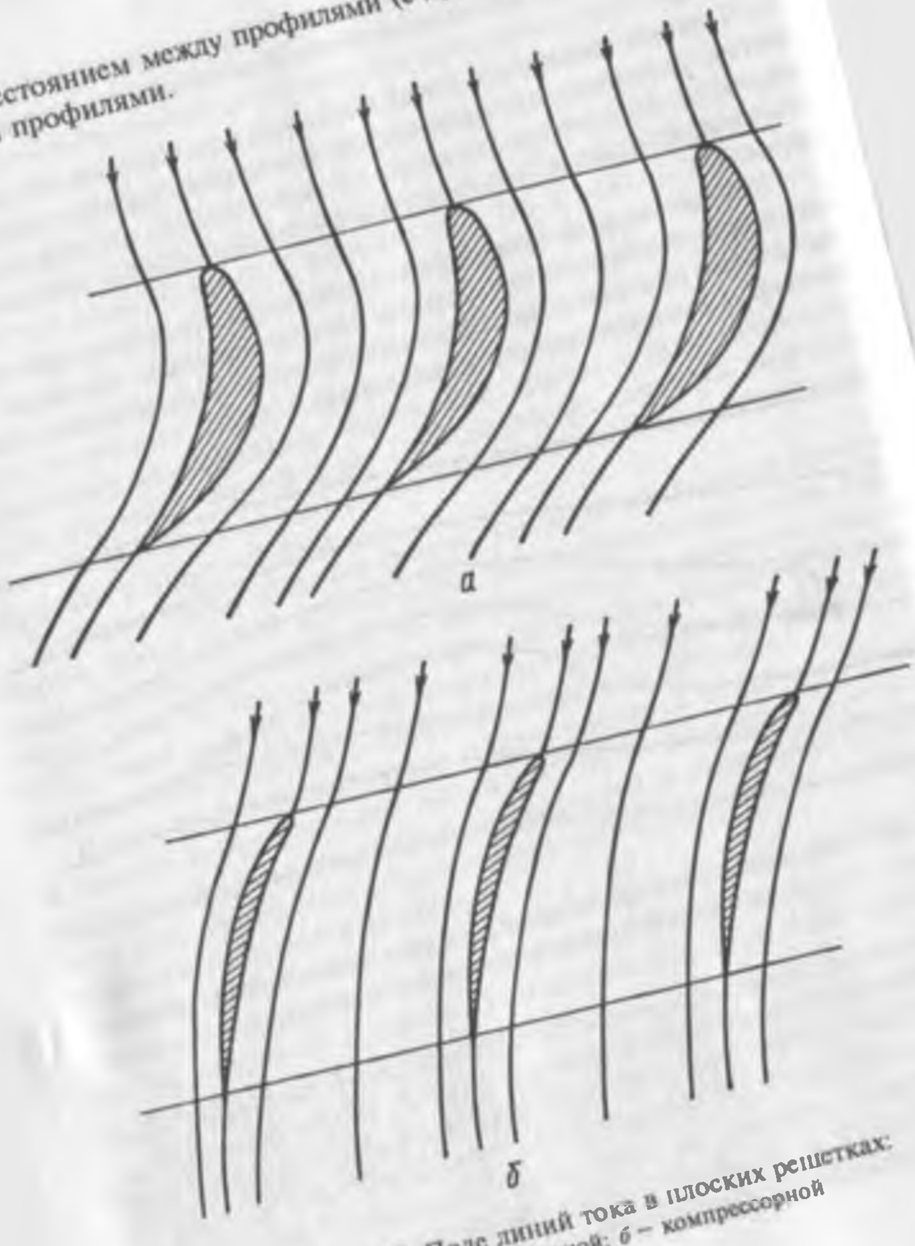


Рис. 17. Поле линий тока в плоских решетках:
а – турбинной; *б* – компрессорной

Пользуясь принципом независимости работы решеток сечений, профилируют лопатку осевой турбомашины по радиусу. При профилировании широко используются экспериментальные данные продувок плоских решеток в аэродинамических трубах. Надо отметить, что детальные исследования течения в ступени турбомашины показали, что газ движется не по цилиндрическим поверхностям, а по поверхностям, близким к поверхностям вращения с синусоидальной образующей. Следовательно, расчет ступени турбомашины, по данным продувок плоских решеток, достаточно условен, не полно отражает действительную картину течения и должен рассматриваться как первое приближение.

Осесимметричным называется такое движение, при котором во всех плоскостях, проходящих через выделенную прямую (ось), картина течения повторяется. Параметры осесимметричного течения зависят также от двух пространственных координат, но по своей структуре уравнения, описывающие это течение, отличаются от уравнений для плоского течения (см., например, уравнения неразрывности потока и движения). Осесимметричное течение можно наблюдать в осевых зазорах турбомашин. Однако при этом следует иметь в виду осредненные по сечению параметры жидкости. В действительности течение будет не осесимметричным, а периодическим вследствие конечного числа лопаток в решетке и наличия аэродинамических следов от предыдущих лопаток. Осесимметричное течение имеет место при обтекании ракет и других тел, а также в осесимметричных каналах (например, во входном устройстве центробежного компрессора).

Все течения, не относящиеся к рассмотренным, называются пространственными, или трехмерными, так как их параметры зависят от трех координат. Изучение такого движения связано с большими математическими трудностями.

Как уже было сказано, линия тока является основной геометрической характеристикой течения. Выведем уравнение линии тока. Для этого воспользуемся условием параллельности вектора скорости $\bar{v}$ элементу линии тока $\delta\bar{l}$ (см. рис. 16).

Пусть вектор $\bar{v}$ имеет проекции v_x, v_y, v_z, а вектор $\delta\bar{l}$ — проекции δ_x, δ_y, δ_z. Условие параллельности этих векторов можно записать в виде равенства нулю их векторного произведения:

$$\left(\bar{v} \times \delta \bar{l}\right) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ \delta_x & \delta_y & \delta_z \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, развернув определитель, получим

$$v_x \delta_y = v_y \delta_x; \qquad v_x \delta_z = v_z \delta_x; \qquad v_y \delta_z = v_z \delta_y,$$

или

$$\frac{\delta_x}{v_x} = \frac{\delta_y}{v_y} = \frac{\delta_z}{v_z}. \tag{1.11}$$

Система двух дифференциальных уравнений (1.11) дает линию в пространстве. Функции $v_x = v_x(x, y, z, t)$; $v_y = v_y(x, y, z, t)$; $v_z = v_z(x, y, z, t)$ считаются заданными. Время t в этих уравнениях является параметром, определяющим картину линий тока для данного момента времени. Форма линий тока не определяет структуру течения жидкости. Для пояснения этого положения рассмотрим два примера.

Пусть эпюра скоростей около твердой стенки имеет линейный характер. Скорость на твердой стенке равна нулю вследствие "прилипания" к ней частиц жидкости; при удалении от стенки скорость быстро растет (рис. 18). Такой характер поля скоростей наблюдается вблизи стенки в пограничном слое при течении вязкой жидкости.

Итак, около твердой стенки

$$v_x = ky; \qquad v_y = v_z = 0.$$

Определим характер движения жидкости в этих условиях:

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = -\frac{k}{2} \neq 0.$$

Следовательно, течение около твердой стенки с линейным полем скоростей — вихревое, угловая скорость вращения ω направлена перпендикулярно к линейным скоростям v и прямо пропорциональна градиенту скорости k.

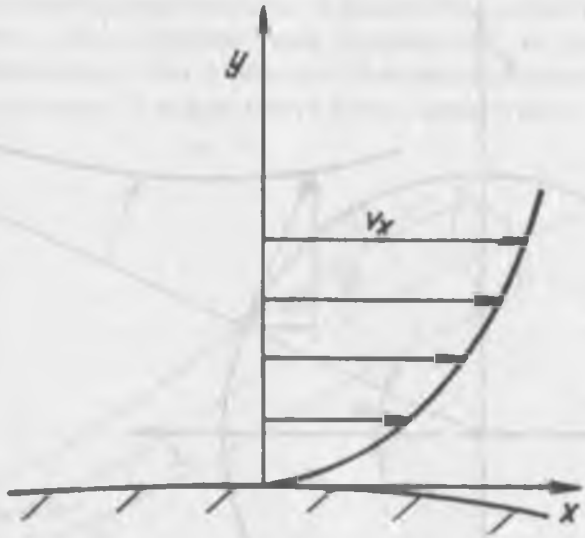


Рис. 18. Поле скоростей около твердой стенки при течении вязкой жидкости

В качестве второго примера рассмотрим круговое движение жидкости, при котором окружные скорости уменьшаются обратно пропорционально расстоянию от оси вращения (рис. 19). Итак, будем анализировать характер течения, скорость которого $v = c / r$, где c — константа.

Составим выражение для угловой скорости ω_z.

Из выражения (1.6)

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

Но

$$v_x = -v\sin\alpha = -c\frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$v_y = v\cos\alpha = c\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

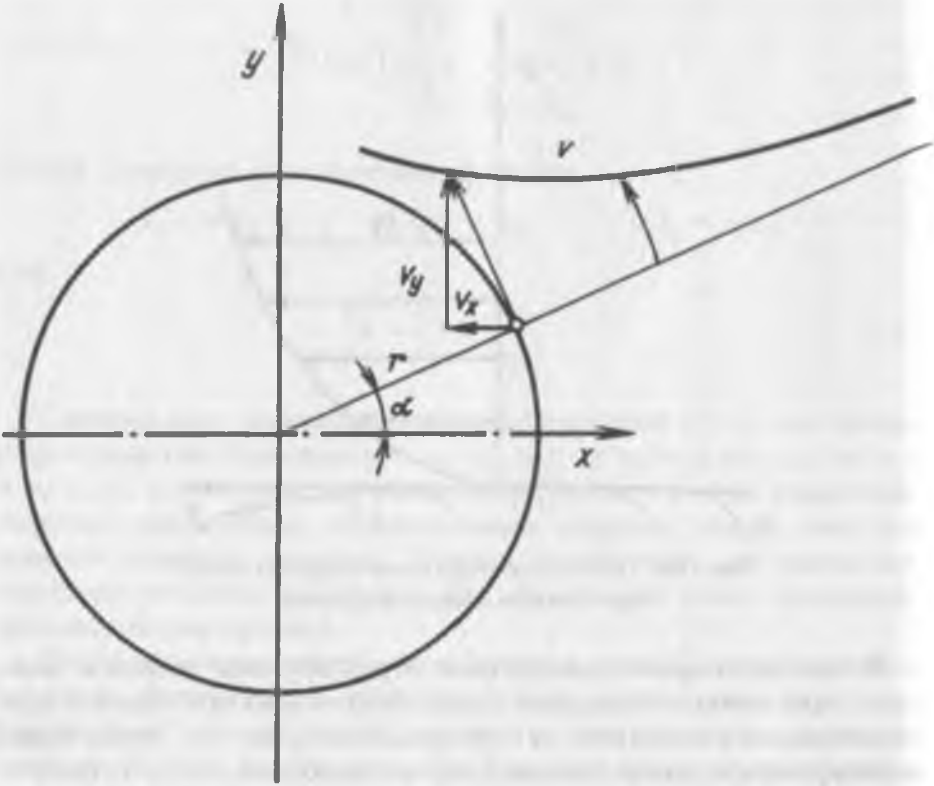


Рис. 19. Круговое движение жидкости с условием vr = const

Тогда найдем

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = -c\frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}; \qquad \frac{\partial v_y}{\partial x} = c\frac{y^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

Отсюда $\omega_z = 0$, т. е. круговое движение, у которого $v = c/r$ является потенциальным.

В технических задачах часто встречаются понятия "струйка тока" и "вихревой шнур". Струйкой тока называется масса жидкости, ограниченная поверхностью тока, состоящей из линий тока, через которую жидкость не протекает, и двумя сечениями S_1

и S_2, обычно перпендикулярными к скоростям в соответствующих сечениях (рис. 20). Струйки тока начинаются и заканчиваются или в бесконечности, или в области покоящейся жидкости, или в источниках и стоках, а также могут быть замкнутыми.

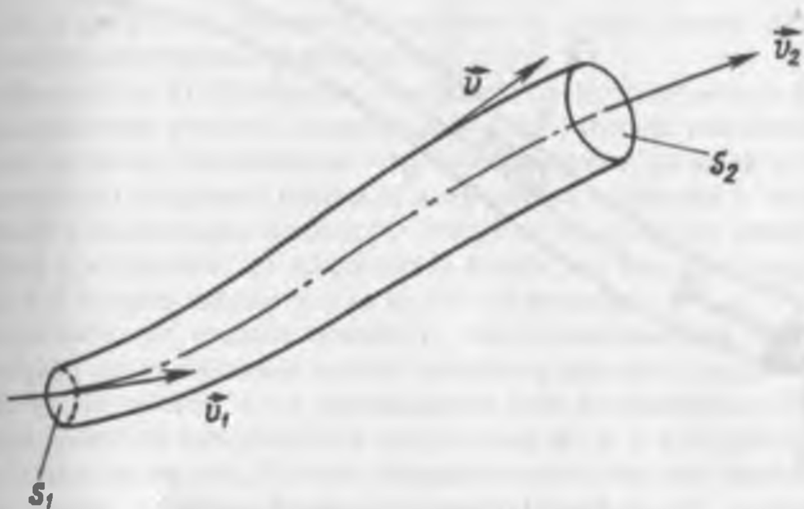


Рис. 20. Струйка тока

Вихревым шнуром называется масса жидкости, находящаяся во вращении по закону твердого тела. Вихревые шнуры своими концами или уходят в бесконечность, или замыкаются в вихревые кольца, или упираются в границы жидкости. Для доказательства этого положения рассмотрим отрезок вихревого шнура (рис. 21).

Пусть площади сечений s_1 и s_2 настолько малы, что векторы $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ можно считать постоянными для всех точек сечений.

Применим теперь к выделенному объему V формулу Остроградского — Гаусса

$$\int\limits_s \bar{\omega}\, d\bar{s} = \int\limits_V \operatorname{div} \bar{\omega}\, dV,$$

где $d\bar{s}$ — элемент поверхности, который имеет направление, соответствующее внешней нормали.

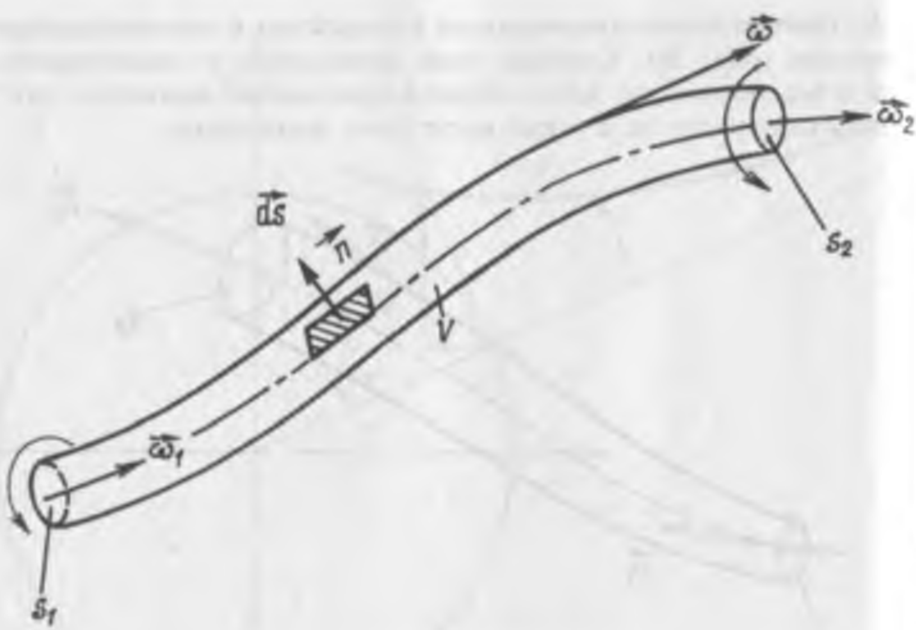


Рис. 21. Отрезок вихревого шнура

Вычислим

$$\operatorname{div}\bar{\omega} = \frac{\partial\omega_x}{\partial x} + \frac{\partial\omega_y}{\partial y} + \frac{\partial\omega_z}{\partial z} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial z\partial x} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y\partial z}\right) = 0,$$

т. е. дивергенция вектора вихря всегда равна нулю. Такое векторное поле называется соленоидальным.

Следовательно, из формулы Остроградского — Гаусса получаем

$$\int_s \bar{\omega}\, d\bar{s} = 0.$$

Для вихревого шнура получим $\bar{\omega}_1\bar{s}_1 + \omega_2\bar{s}_2 = 0$ или, учитывая направления внешних нормалей к сечениям s_1 и s_2,

$$\omega_1 s_1 = \omega_2 s_2 , \qquad (1.12)$$

так как интеграл по боковой поверхности шнура равен нулю в силу перпендикулярности векторов $\bar{\omega}$ и $d\bar{s}$.

Из равенства (1.12) следует, что вдоль тонкого вихревого шнура произведение угловой скорости вихря на площадь нормального сечения остается постоянным. Это произведение называется интенсивностью вихревого шнура, а полученный результат — второй теоремой Гельмгольца. Отсюда же следует, что шнур не может ни начаться в жидкости, ни закончиться в ней, так как при стремлении $s \to 0$ угловая скорость $\omega \to \infty$, что не реально.

В заключение следует отметить, что потенциальное течение моделирует лишь частный случай течения сплошной среды — без вращения ее частиц — и наблюдается вне пограничных слоев, образующихся на поверхностях обтекаемых тел и в аэродинамических следах после них. Внутри пограничного слоя, как уже отмечалось выше, течение всегда вихревое с переменной завихренностью $\bar{\omega}$. Понятия потенциального и вихревого течения вводятся при анализе течения невязкой среды и не связаны с ее сжимаемостью.

Анализ течения вязкой среды привел к понятиям ламинарного и турбулентного режимов течения. Ламинарный режим наблюдается обычно в прямолинейных или в слабоискривленных каналах с параболическим полем скоростей в сечении и с нулевыми скоростями на стенках. Такое движение всегда является вихревым. При потере устойчивости такого ламинарного режима возникает турбулентный режим: в потоке наблюдаются хаотические пульсации молей и ассоциаций молекул, а также завихренных частиц разных размеров, образовавшихся после разрушения ламинарного (вихревого) течения. Ядро течения в канале может быть турбулентным, а пограничный слой — турбулентным с ламинарным подслоем у самой стенки.

Ламинарный режим характеризуется четко выраженной устойчивой картиной линий тока. При таком течении практически нет

4*

переноса массы из струйки в струйку в поперечном направлении. Взаимодействие между слоями определяется силами трения. Напряжение трения вычисляется по формуле Ньютона

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial n},$$

где μ — коэффициент динамической вязкости; $\partial v / \partial n$ — градиент скорости по нормали к линии тока.

Турбулентный режим течения является неустановившимся движением жидкости, для которого характерен интенсивный массообмен в поперечном направлении. Твердые границы задают лишь общее направление осредненного движения, на которое наложены пульсации скорости и других параметров по всем трем осям. Турбулентный режим течения возникает при потере устойчивости ламинарного режима, вызванной внешними или внутренними явлениями, происходящими в самом течении.

Более подробные сведения о характеристиках турбулентного режима течения вязкой среды приведены в гл. 2.

Контрольные вопросы к § 5

1. Какова математическая формулировка стационарного течения?
2. Что такое потенциальное течение? Приведите примеры.
3. Что такое непотенциальное течение? Приведите примеры.
4. Можно ли выразить потенциал скорости через характеристики деформационного движения?
5. Существует ли потенциал скорости для вихревого движения?
6. Чем отличается линия тока от траектории?
7. Какие формы двумерных течений изучает механика жидкостей и газа?
8. Какие формы может иметь вихревой шнур в потоке жидкости?
9. В чем различие между ламинарным и турбулентным режимами течения?

§6. УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ. УРАВНЕНИЕ РАСХОДА

Общие сведения

Представим себе поле течения жидкости с известными плотностью ρ и скоростью v в каждой точке поля. Мысленно в пространстве, занятом жидкостью, выделим произвольный объем V, ограниченный поверхностью S (рис. 22), через которую жидкость может свободно проходить в обе стороны.

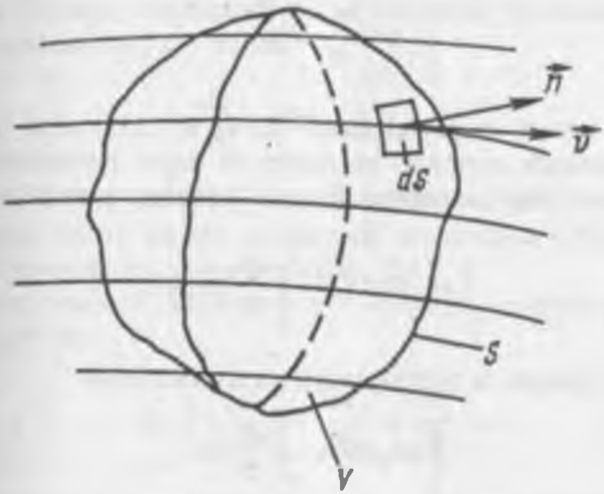


Рис. 22. Произвольная замкнутая поверхность S в поле течения жидкости

Количество жидкости, заключенное в объеме V, уменьшается (или увеличивается) на количество вытекающей (или втекающей) через поверхность S жидкости. Это — известный закон сохранения массы.

Количество жидкости, вытекающей через поверхность S за время dt, представится интегралом

$$\int_S \rho v_n dt\, dS\,. \tag{1.13}$$

где v_n — проекция скорости $\bar{v}$ жидкости на внешнюю нормаль $\bar{n}$ поверхности S.

Масса жидкости в объеме V вначале равна

$$\int_V \rho dV, \tag{1.14}$$

а спустя время dt она изменится и будет равна

$$\int_V \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\right) dV. \qquad (1.15)$$

Разность между выражениями (1.14) и (1.15) есть количество жидкости, которое вытекло за время dt через граничную поверхность S, т. е. эта разность будет соответствовать выражению (1.13):

$$\int_S \rho v_n dt\, dS = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dt\, dV.$$

Разделив правую и левую части на dt, получим

$$\int_S \rho v_n dS = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

Интеграл, стоящий в левой части, преобразуем по формуле Остроградского — Гаусса:

$$\int_S \rho v_n dS = \int_V \operatorname{div}(\rho \bar{v}) dV.$$

Следовательно, будем иметь

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v})\right] dV = 0.$$

Последнее равенство действительно для любого, произвольно взятого объема, в том числе и для бесконечно малого; следовательно, подынтегральная функция должна быть равна нулю:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0. \qquad (1.16)$$

Это и есть один из видов уравнения неразрывности. Развернем $\operatorname{div}(\rho \bar{v})$; тогда

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0.$$

Первые четыре слагаемых дают полную производную плотности по времени $d\rho/dt$; тогда

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0. \tag{1.17}$$

Таким образом, второй вид уравнения неразрывности (1.17) устанавливает связь между скоростью изменения объема ($\operatorname{div}\bar{v}$) и скоростью изменения плотности ($d\rho / dt$).

Для несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, а уравнение неразрывности примет вид

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{1.18}$$

Следовательно, для несжимаемой жидкости скорость изменения элементарного объема жидкости равна нулю. Иначе говоря, при движении объема несжимаемой жидкости изменяется лишь его форма. Имея в виду в дальнейшем исследования осесимметричных движений, рассмотрим вывод выражений для вихря скорости и уравнения неразрывности в цилиндрических координатах.

Выражения для вихря скорости

Воспользовавшись обозначениями на рис. 23, составим циркуляции по контурам граней элементарного объема.

Для грани *MADE*

$$d\Gamma_{MADE} = \frac{\partial}{\partial r}(v_\theta r d\theta)dr - \frac{\partial}{r\partial\theta}(v_r dr)r d\theta,$$

или

$$d\Gamma_{MADE} = \left[\frac{\partial}{r\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{r\partial\theta}\right] r d\theta dr,$$

Рис. 23. Элементарный объем в цилиндрической системе координат

Отсюда, сократив на $r\,d\theta\,dr\,dz$, получим уравнение неразрывности в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(\rho r v_z)}{\partial z}+\frac{\partial(\rho r v_\theta)}{r\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r}\right]=0. \qquad (1.22)$$

Полученные выше уравнения неразрывности связывают поле скоростей в потоке жидкости с распределением плотности жидкости по потоку. Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности устанавливает соотношение между изменениями проекций скорости по координатным осям, при котором не нарушается основная гипотеза о сплошности потока жидкой среды.

Уравнение неразрывности является одним из основных уравнений гидрогазодинамики как непроводящей, так и проводящей жидкой среды, без которого нельзя решить ни одной задачи о течении сплошной среды. В технических задачах часто приходится иметь дело с течением в каналах, причем считают, что скорости по сечению канала одинаковые (осредненные). В этом случае вместо уравнения неразрывности пользуются уравнением расхода.

Уравнение расхода

Рассмотрим произвольный установившийся поток жидкости и выделим в нем элементарный контур c_1 (рис. 24).

Пусть через точки этого контура проходят линии тока, образующие так называемую трубку тока, в которой жидкость течет как в струйке тока.

Проведем на некотором расстоянии от контура c_1 второй контур c_2. К полученному объему, ограниченному сечениями s_1, s_2 и боковой поверхностью $s_б$ трубки тока, применим формулу Остроградского — Гаусса:

$$\int_s \rho v_n ds=\int_V \mathrm{div}(\rho\vec{v})dV.$$

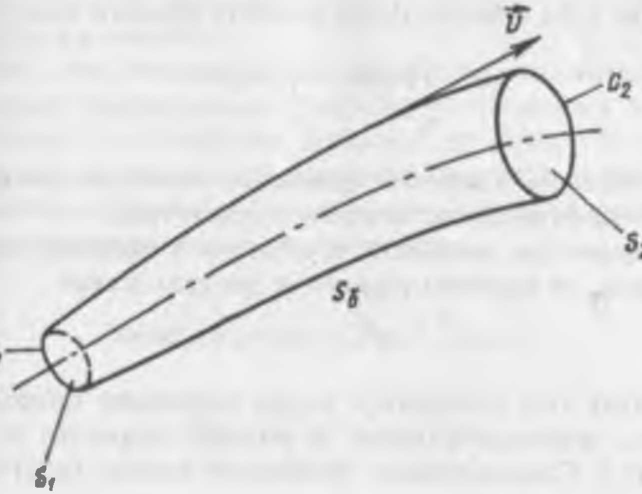


Рис. 24. Трубка тока

Так как движение принято установившимся, то из уравнения (1.16) следует, что для всего объема жидкости

$$\operatorname{div}(\rho\bar{v}) = 0.$$

Следовательно, для струйки тока

$$\int\limits_s \rho v_n ds = 0.$$

Интеграл по поверхности s можно представить в виде суммы трех интегралов: по сечениям s_1 и s_2 и по боковой поверхности $s_б$ трубки тока. Но на боковой поверхности $s_б$ трубки тока скорость жидкости не имеет нормальной составляющей, т. е. $v_n = 0$. Следовательно,

$$\int\limits_{s_б} \rho v_n ds = 0; \qquad \int\limits_{s_1} \rho v_n ds + \int\limits_{s_2} \rho v_n ds = 0.$$

Если для сечения s_1 скорость составляет тупой угол с внешней нормалью, т. е. $v_n > 0$, то для сечения $s_2 v_n > 0$ и наоборот.

Итак, для двух произвольных сечений струйки тока

$$\int\limits_{s_1} \rho v_n ds = \int\limits_{s_2} \rho v_n ds.$$

Таким образом, получено равенство массовых расходов жидкости через произвольные сечения струйки тока.

Если параметры жидкости в сечении s струйки тока считать постоянными, то получим уравнение расхода в виде

$$\rho_1 v_{n1} s_1 = \rho_2 v_{n2} s_2 = \rho v_n s = \text{const}.$$

В практике под сечением s всегда понимают проходное сечение канала, перпендикулярное к вектору скорости, и вместо v_n всегда берут v. Следовательно, уравнение расхода будет иметь вид

$$G = \rho v s = \text{const}. \tag{1.23}$$

Контрольные вопросы к §6

1. Какие параметры связывает уравнение неразрывности?
2. Справедливо ли уравнение неразрывности для вязкой жидкости?
3. Чем отличается уравнение расхода от уравнения неразрывности?
4. Как учитывается вязкость жидкости при составлении уравнения расхода через канал?

§7. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА. ТЕОРЕМА СТОКСА

Потенциальное движение

Выше было введено понятие о потенциальном движении и получена структурная формула для потенциала скорости φ. Если известен φ, то путем дифференцирования можно найти проекции скорости. Следовательно, вместо нахождения трех неизвестных функций v_x, v_y, v_z, задачу можно свести к определению одной неизвестной функции.

Потенциал скорости есть кинематическая функция, характеризующая собой потенциальное движение жидкости. Каждому потенциальному потоку соответствует собственный потенциал скорости φ (x, y, z, t), причем жидкость может быть как несжимаемой, так и сжимаемой.

Покажем, что потенциальное движение несжимаемой жидкости обладает рядом важных свойств, учитываемых в гл. 4 при решении задач. Эти свойства вытекают из того, что потенциал скорости φ для несжимаемой жидкости является результатом решения уравнения Лапласа. В самом деле, для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

но

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \text{и т. д.}$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi = 0.$$

Полученное уравнение называется уравнением Лапласа, а функция φ, удовлетворяющая этому уравнению, — гармонической функцией.

1. Докажем, что потенциал скорости φ для несжимаемой жидкости не может иметь экстремума внутри жидкости.

Для этого покажем, что проекция скорости на любое направление равна производной от φ по этому направлению, т. е. $v_n = \partial\varphi / \partial n$.

Возьмем в жидкости произвольное направление, характеризуемое ортом $\bar{n}$, вектор скорости $\bar{v}$ и составим скалярное произведение

$$\bar{v} \cdot \bar{n} = v_n = v_x \cos(\bar{n}, x) + v_y \cos(\bar{n}, y) + v_z \cos(\bar{n}, z).$$

Затем продифференцируем функцию φ по n; тогда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n} =$$

$$= v_x \cos(\bar{n}, x) + v_y \cos(\bar{n}, y) + v_z \cos(\bar{n}, z).$$

Сравнивая полученные выражения, получаем

$$v_n = \partial\varphi \,/\, \partial n.$$

Воспользуемся формулой Остроградского — Гаусса и заменим в ней $vn = \partial\varphi / \partial n$, учитывая, что $\operatorname{div}\bar{v} = 0$, тогда

$$\int\limits_s v_n \mathrm{d}s = \int\limits_s \frac{\partial\varphi}{\partial n} \mathrm{d}s = \int\limits_V \operatorname{div}\bar{v}\mathrm{d}V = 0.$$

т. е. для несжимаемой жидкости

$$\int\limits_s \frac{\partial\varphi}{\partial n} \mathrm{d}s = 0. \qquad (1.24)$$

Итак, предположим, что в некоторой точке M значение φ имеет максимум. Окружим эту точку достаточно малой сферой так, чтобы вся сфера была внутри жидкости. Тогда для каждой точки сферы будем иметь

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} < 0\,,$$

и, следовательно,

$$\int\limits_s \frac{\partial\varphi}{\partial n} \mathrm{d}s < 0,$$

что противоречит условию (1.24). Аналогичные рассуждения можно провести и для случая минимума.

Следовательно, функция φ не может достигать экстремума внутри жидкости. Однако она может получить наибольшее или наименьшее значение на границе области, занятой жидкостью, но это значение не обязательно соответствует аналитическому экстремуму.

2. Докажем, что скорость потока v внутри жидкости не может иметь максимума.

Предварительно покажем, что компоненты скорости v_x, v_y и v_z при потенциальном течении удовлетворяют уравнению Лапласа, т. е. являются гармоническими функциями. В самом деле, продифференцировав уравнение Лапласа по x, получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Delta\varphi) = \Delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \Delta v_x = 0.$$

Поступая аналогично, будем иметь

$$\Delta v_y = 0; \qquad \Delta v_z = 0.$$

Следовательно, компоненты скорости при потенциальном течении не могут иметь экстремума внутри жидкости.

Посмотрим, может ли модуль скорости потока иметь экстремум внутри жидкости.

Пусть в некоторой точке A скорость имеет максимальное значение. Поместив начало осей координат в точке A и направив ось x по вектору $\bar{v}_A$, получим, что $v_{xA} = v_A = v_{max}$. Однако в силу доказанного ранее в жидкости найдется точка B, где $v_{xB} > v_{xA}$.

Следовательно,

$$v_B = \sqrt{v_{xB}^2 + v_{yB}^2 + v_{zB}^2} \geq v_{xB} > v_{xA} = v_A,$$

т. е. при потенциальном течении модуль скорости не может иметь максимума внутри потока жидкости.

Этот результат используется при решении задачи о потенциальном истечении несжимаемой жидкости с образованием свободной струи при построении годографа скорости в плоскости ζ (см. гл. 4)

Относительно минимума модуля скорости таких рассуждений провести нельзя. В самом деле, допустив минимум модуля скорости в точке A, для соседней точки B получим $v_{xB} < v_{xA} = v_A$. Однако вследствие существования компонентов v_{yB} и v_{zB} можем получить $v_B > v_A$, т. е. минимум модуля возможен. Поскольку минимум модуля скорости — это нуль, то, следовательно, внутри потока модуль скорости может иметь нулевое значение.

3. Докажем свойство единственности потенциала скорости. Для этого докажем, что значение функции φ внутри какой-то замкнутой области определяется: 1) однозначно, если на границах области заданы значения функции φ; 2) с точностью до произвольной постоянной, если на границах области заданы значения $\partial\varphi / \partial n$, где n — внешняя нормаль к контуру.

Для доказательства этого воспользуемся интегралом

$$\int\limits_V \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] \mathrm{d}V = \int\limits_s \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial x} \mathrm{d}s, \qquad (1.25)$$

где φ — гармоническая функция.

Рассмотрим первую часть свойства. Пусть на контуре поверхности s задано значение функции $\varphi = \varphi_s$. Предположим, что внутри области имеются два решения: φ_1 и φ_2, но на поверхности они совпадают, т. е. $\varphi_{1s} = \varphi_{2s}$.

Рассмотрим новую функцию $\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2$, причем на поверхности s значение $\varphi_{3s} = 0$, и применим к ней равенство (1.25). Правая часть равенства равна нулю, так как $\varphi_{3s} = 0$, а значит, равна нулю и левая часть. Но подынтегральное выражение представляет собой сумму квадратов, следовательно, каждое слагаемое должно быть равно нулю:

$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial z} = 0,$$

т. е. $\varphi_3 = \mathrm{const}$ по всей области.

Но на поверхности $\varphi_3 = 0$, следовательно, $\mathrm{const} = 0$ и $\varphi_1 = \varphi_2$ по всей области течения жидкости.

Таким образом, первая часть свойства доказана.

При доказательстве второй части свойства также рассмотрим новую функцию

$$\varphi_3 = \varphi_1 - \varphi_2.$$

На этот раз на границе задано значение производной $\partial\varphi / \partial n$.

Тогда при $\left.\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_s = \left.\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_s$ получим, что на поверхности

$$\left.\frac{\partial \varphi_3}{\partial n}\right|_s = 0.$$

Правая часть равенства (1.25) опять обращается в нуль, но уже вследствие того, что $\partial\varphi_3 / \partial n = 0$. Тогда будет равна нулю и левая часть:

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} = 0,$$

т. е. $\varphi_3 = \text{const}$ и, следовательно, $\varphi_1 = \varphi_2 + \text{const}$.

Таким образом, доказана и вторая часть свойства.

4. Докажем, что кинетическая энергия массы несжимаемой жидкости при потенциальном движении минимальна. Докажем, что кинетическая энергия T массы жидкости при потенциальном течении меньше кинетической энергии T' при любом непотенциальном течении, т. е. $T' - T > 0$ при условии, что нормальные составляющие скорости к поверхности выделенного объема в обоих случаях равны:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_n = v'_n = v'_x \cos(n, x) + v'_y \cos(n, y) + v'_z \cos(n, z).$$

Кинетическая энергия массы жидкости при потенциальном потоке

$$T = \int_V \rho \frac{v^2}{2} \mathrm{d}V = \frac{\rho}{2} \int_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] \mathrm{d}V.$$

Для вихревого потока

$$T' = \frac{\rho}{2} \int_V \left(v_x'^2 + v_y'^2 + v_z'^2 \right) \mathrm{d}V,$$

откуда их разность запишется в виде

$$T' - T = \frac{\rho}{2} \int_V \left[v_x'^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + v_y'^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + v_z'^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] \mathrm{d}V. \quad (1.26)$$

Как известно, уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости при любом течении имеет вид $\operatorname{div}\bar{v} = 0$, т. е. для вихревого потока

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x} = \frac{\partial v'_y}{\partial y} = \frac{\partial v'_z}{\partial z} = 0,$$

а для потенциального потока $\Delta\varphi = 0$.

Сделаем следующие преобразования:

$$\left(v'_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 = v'^2_x - 2v'_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 \pm \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2.$$

Откуда

$$v'^2_x - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 = \left(v'_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2v'_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} - 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2.$$

Аналогично

$$v'^2_y - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = \left(v'_y - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + 2v'_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} - 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2;$$

$$v'^2_z - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = \left(v'_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + 2v'_z\frac{\partial\varphi}{\partial z} - 2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2.$$

Уравнение (1.26) с учетом преобразований можно записать в виде

$$\frac{\rho}{2}(T' - T) = \int\limits_V \left[\left(v'_x - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(v'_y - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(v'_z - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dV +$$
$$+ 2\int\limits_V \left[v'_x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v'_y\frac{\partial\varphi}{\partial y} + v'_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right] dV - \tag{1.27}$$
$$- 2\int\limits_V \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dV.$$

Преобразуем в правой части последние два интеграла. Последний член в равенстве (1.27) можно преобразовать так:

$$2\int_V \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dV = 2\int_s \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds.$$

Далее, так как

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(v'_x\varphi\right) = v'_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi \frac{\partial v'_x}{\partial x},$$

то

$$v'_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(v'_x\varphi\right) - \varphi \frac{\partial v'_x}{\partial x}.$$

Аналогично

$$v'_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(v'_y\varphi\right) - \varphi \frac{\partial v'_y}{\partial y};$$

$$v'_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(v'_z\varphi\right) - \varphi \frac{\partial v'_z}{\partial z}.$$

Второй член правой части равенства (1.27) можно написать в виде

$$\begin{aligned}
&2\int_V \left[v'_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + v'_y \frac{\partial\varphi}{\partial y} + v'_z \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right] dV = \\
&= 2\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v'_x\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v'_y\varphi\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(v'_z\varphi\right)\right] dV - \\
&- 2\int_V \left[\varphi\left(\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} + \frac{\partial v'_z}{\partial z}\right)\right] dV.
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Но так как по формуле Остроградского — Гаусса

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial x}(v'_x \varphi) + \frac{\partial}{\partial y}(v'_y \varphi) + \frac{\partial}{\partial z}(v'_z \varphi)\right] dV =$$

$$= \int_V \operatorname{div}(\varphi \bar{v}') dV = \int_s \varphi v'_n \, ds = \int_s \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds$$

и, кроме того, $\operatorname{div} \bar{v}' = 0$, то равенство (1.28) перепишется в виде

$$2\int_V \left[v'_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v'_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + v'_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right] dV = 2\int_s \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} ds.$$

После всех преобразований равенство (1.27) будет иметь вид

$$T' - T = \frac{\rho}{2}\int_V \left[\left(v'_x - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(v'_y - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(v'_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] dV > 0$$

или $(T' - T) > 0$, так как подынтегральное выражение представляет собой сумму квадратов, т. е. всегда положительная величина.

Итак, несжимаемая жидкость при непотенциальном движении обладает большей кинетической энергией, чем при потенциальном, при условии равенства нормальных составляющих скорости на поверхности выделенного объема. Этому свойству можно дать наглядное механическое толкование.

Представим себе частицы жидкости в виде круглых дисков. Тогда потенциальное движение можно отождествить со скольжением диска без трения вдоль какой-то направляющей. Кинетическая энергия диска $T_\text{д} = m\dfrac{v_c^2}{2}$, где v_c — скорость центра диска. Вихревое движение (диск при движении вращается вокруг своего центра) будет соответствовать качению диска с трением вдоль той же направляющей. Кинетическая энергия диска в этом случае $T_\text{д} = m\dfrac{v_c^2}{2} + \dfrac{\omega^2}{2}$, т. е. будет больше на величину $T = \dfrac{\omega^2}{2}$.

Следовательно, для движения жидкости с потенциалом скорости надо затратить меньше энергии, чем для движения с теми же скоростями, но без потенциала скорости, т. е. для вихревого движения. Вихри всегда аккумулируют в себе часть энергии потока, поэтому течение жидкости в турбомашине целесообразно по возможности приближать к потенциальному.

Однако следует отметить, что модель потенциального движения может быть близка течению в ядре потока, т. е. вне пограничных слоев на лопатках турбомашин и вне аэродинамических следов от предыдущих лопаток. В случае непотенциального (завихренного) течения в ядре потока пограничные слои будут отличаться от таковых при потенциальном ядре, и суммарные потери во втором случае могут быть меньше, чем в первом.

В технических задачах часто приходится иметь дело с потоками жидкости, в которых дискретно расположены вихревые шнуры. Вихревой шнур — это некоторая масса жидкости, вращающаяся как твердое тело вокруг своей криволинейной в общем случае оси (гибкий вал бормашины). Вихревой шнур нельзя рассматривать изолированно от всей массы жидкости, он представляет собой особую область в поле скоростей жидкости. Положение вихревого шнура и интенсивность вращения жидкости в его окрестности можно найти с помощью теоремы Стокса и понятия о циркуляции скорости.

В векторном анализе имеется понятие о циркуляции Γ вектора $\bar{a}$ по замкнутому контуру c, которое формально напоминает понятие работы некоторой силы на пути $d\bar{l}$:

$$A = \oint_c \bar{a} d\bar{l}.$$

Применяя это понятие к полю скоростей, получаем

$$\Gamma = \oint_c \bar{v} d\bar{l}$$

или, раскрывая скалярное произведение векторов $\bar{v}, d\bar{l}$ можем записать

$$\Gamma = \oint_c v_x dx + v_y dy + v_z dz.$$

Для потенциального потока

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Тогда

$$\Gamma = \oint_c \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathrm{d}z \right) = \oint_c \mathrm{d}\varphi.$$

В случае однозначного потенциала скорости φ, когда интеграл по замкнутому контуру c от φ равен нулю, циркуляция по этому контуру тоже равна нулю.

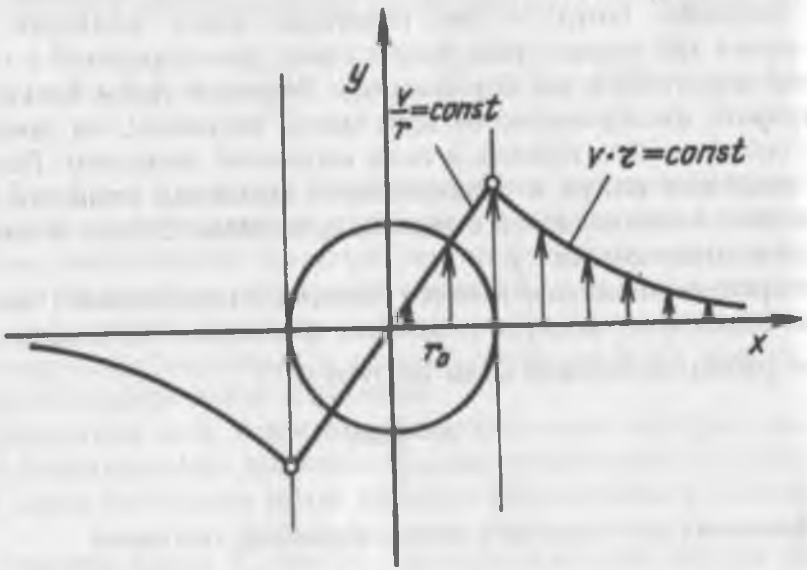


Рис. 25. Поле скоростей в окрестности вихревого шнура

Другой результат получается при наличии вихревого шнура внутри контура c. Если ось шнура прямолинейная, то остальная масса жидкости вращается вокруг вихревого шнура со скоростями, обратно пропорциональными расстоянию произвольной точки жидкости от оси шнура, т. е. vr = const (рис. 25). При этом ско-

рость жидкости постоянна на окружности радиусом r, и циркуляция скорости по контуру c

$$\Gamma = \oint_c \bar{v}\,\mathrm{d}\bar{l} = \oint_0^{2\pi} vr\,\mathrm{d}\alpha = 2\pi vr = \mathrm{const} \neq 0.$$

Следовательно, потенциал скорости φ в этом случае не может быть однозначным. При каждом обходе вихревого шнура по контуру c, взятому в потенциальном потоке, интеграл возрастает на величину $2\pi r\,v$. Этот результат сохраняется до тех пор, пока vr = const. При выборе контура c внутри вихревого шнура, где, как в твердом теле, $v = \omega r$, циркуляция будет зависеть от радиуса r.

Теорема Стокса

Соотношение между циркуляцией скорости и завихренностью внутри контура c устанавливается теоремой Стокса, которая гласит, что циркуляция скорости по замкнутому контуру равна сумме удвоенных интенсивностей вихрей, охваченных этим контуром.

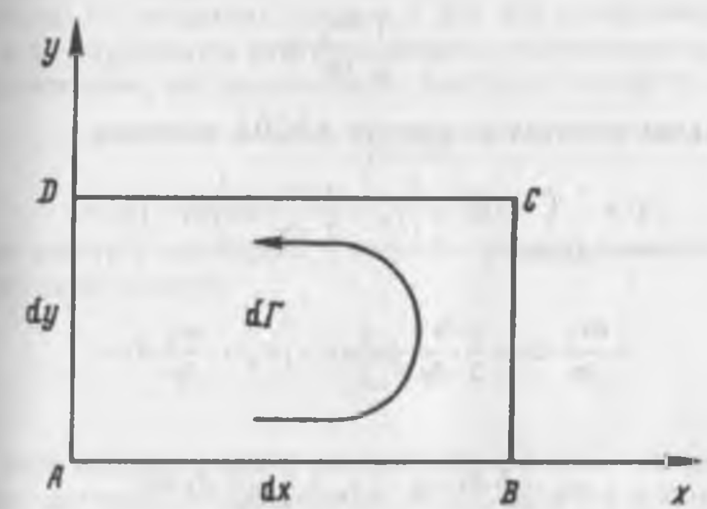


Рис. 26. Элементарный контур *ABCD* в поле течения жидкости

Таким образом, можно найти положение и размеры вихревого шнура в жидкости путем измерения скоростей в точках выбранных контуров и подсчета циркуляций по этим контурам.

Контрольные вопросы к §7

1. Как пояснить физический смысл наличия минимума модуля скорости внутри области течения?

2. Как пояснить, что кинетическая энергия завихренного потока выше, чем потенциального при тех же граничных условиях?

3. Как можно было бы найти положение стационарного вихревого шнура в потоке?

§8. ФОРМУЛА БИО — САВАРА

В различных технических задачах приходится определять поле скоростей в области вихревых шнуров. Таковы, например, задачи определения так называемого индуктивного сопротивления крыла конечного размаха, а также теория гребного винта и ветроколеса, разработанная Н.Е.Жуковским.

Пусть имеется бесконечно тонкий вихревой шнур (вихревая нить), радиус поперечного сечения которого ε; отрезок ab этой нити представлен на рис. 27.

Циркуляция, взятая по любому контуру, охватывающему нить, равна Γ и не зависит от ε. Скорость на поверхности вихревой нити, нормальная к оси нити, $v = \Gamma/(2\pi\varepsilon)$.

Направление вращения жидкости принимаем против часовой стрелки, если смотреть на нить от a к b. Обозначим боковую поверхность нити через s, внутреннюю нормаль к ней через n, единичный вектор нормали через $\bar n$, единичный вектор касательной к оси нити через $\bar j$. Будем искать скорость в начале координат 0, связанную с элементарным отрезком вихревой нити[1] dl.

Для несжимаемой жидкости при потенциальном установившемся течении компоненты скорости удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta v_x = \Delta v_y = \Delta v_z = 0;$$

следовательно, в силу тождества

$$\bar v = v_x \bar i + v_y \bar j + v_z \bar k$$

имеем

$$\Delta \bar v = \Delta v_x \bar i + \Delta v_y \bar j + \Delta v_z \bar k,$$

вектор $\bar v$ есть гармоническая функция.

---

[1] Подчеркнем, что вихревой шнур (вихревая нить) — это область потока, возникшая в нем по каким-либо причинам. Поэтому не следует думать о том, что вихревая нить индуцирует около себя поле скоростей, — она сама является частью окружающего ее потока.

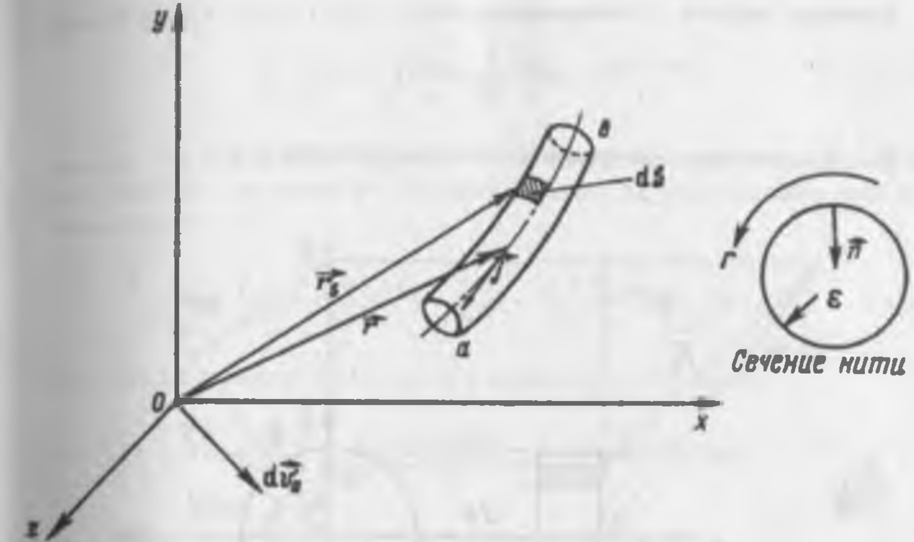


Рис. 27. Отрезок вихревой нити

Для гармонических функций имеет место формула

$$\bar v_0 = -\frac{1}{4\pi}\int_s \left(\bar v \frac{\partial \frac{1}{r_s}}{\partial n} - \frac{1}{r_s}\frac{\partial \bar v}{\partial n} \right) ds,$$

позволяющая найти значение гармонической функции $\bar v$ в произвольной точке объема по ее значениям на границе s этого объема.

На рис. 28 показано сечение нити и дана плоскость векторов $\bar r, \bar j$.

Элемент поверхности

$$ds = \varepsilon\, d\alpha\, dl,$$

где α — угол, отсчитываемый от плоскости векторов $\bar r, \bar j$; dl — элемент длины нити.

Скорость, связанная с кольцевым элементом поверхности нити длиной dl,

$$d\bar v_0 = -\frac{dl}{4\pi}\int_0^{2\pi} \left[\bar v \frac{\partial \frac{1}{r_s}}{\partial n} - \frac{1}{r_s}\frac{\partial \bar v}{\partial n} \right] \varepsilon\, d\alpha. \qquad (1.30)$$

Очевидно, скорость $\vec{v}$ можно записать как

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi\varepsilon}\left(\vec{n} \times \vec{j}\right),$$

где $\left(\vec{n} \times \vec{j}\right)$ — векторное произведение единичных векторов $\vec{n}$ и $\vec{j}$.

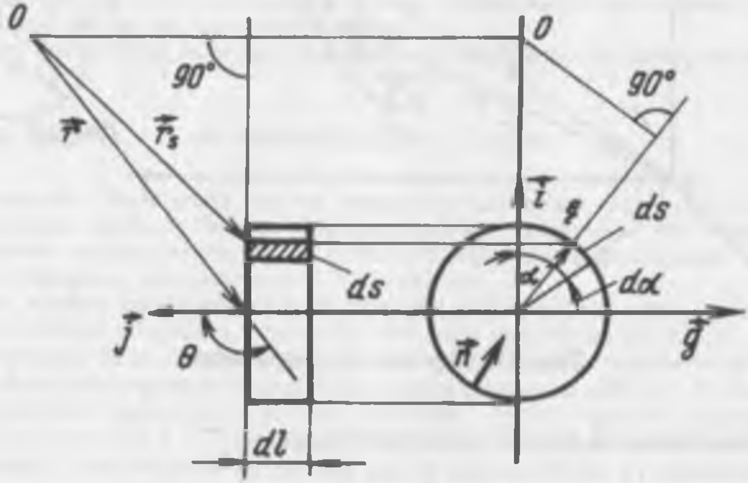


Рис. 28. Сечение вихревой нити

Пользуясь рис. 28, определим значения

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_s}\right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial n}.$$

Затем получим

$$r_s^2 = r^2 + \varepsilon^2 - 2r\varepsilon\cos(r,\varepsilon); \quad \cos(r,\varepsilon) = \frac{r\sin\theta\cos\alpha}{r},$$

или

$$r_s = \sqrt{r^2 + \varepsilon^2 - 2r\varepsilon\sin\theta\cos\alpha}.$$

Ввиду малости ε, пренебрегая ε^2, имеем

$$r_s = r\sqrt{1 - 2\frac{\varepsilon}{r}\sin\theta\cos\alpha} \approx r - \varepsilon\sin\theta\cos\alpha.$$

Далее учитывая, что $\partial r_s / \partial n = -\partial r_s / \partial \varepsilon$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_s}\right) = -\frac{1}{r_s^2}\frac{\partial r_s}{\partial n} = \frac{1}{r_s^2}\frac{\partial r_s}{\partial \varepsilon} = -\frac{\sin\theta\cos\alpha}{r_s^2} \qquad (1.31)$$

Замечая, что направление скорости $\bar{v}$ не изменяется при перемещении по нормали, получаем, что вектор $\partial \bar{v} / \partial n$ будет совпадать по направлению с вектором $\bar{v}$. Следовательно,

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial n} = \frac{\Gamma}{2\pi}\left(\bar{n}\times\bar{j}\right)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\left(\bar{n}\times\bar{j}\right)\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{\Gamma}{2\pi\varepsilon^2}\left(\bar{n}\times\bar{j}\right). \qquad (1.32)$$

Подставляя выражения (1.31) и (1.32) в выражение (1.30), имеем

$$d\bar{v}_0 = \frac{dl}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left\{-\frac{\Gamma}{2\pi\varepsilon}\cdot\frac{\cos\alpha\sin\theta}{r_s^2} - \frac{1}{r_s}\frac{\Gamma}{2\pi\varepsilon^2}\right\}\left(\bar{n}\times\bar{j}\right)\varepsilon d\alpha,$$

или

$$d\bar{v}_0 = \frac{dl}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\cos\alpha\sin\theta}{r_s^2} + \frac{1}{r_s\varepsilon}\right\}\frac{\Gamma}{2\pi}\left(\bar{n}\times\bar{j}\right)d\alpha. \qquad (1.33)$$

В данном случае будем считать, что

$$r_s^2 = r^2, \text{ а } r_s\varepsilon = r\varepsilon^2\sin\theta\cos\alpha,$$

так как очевидно, что при $r >> \varepsilon$ и $r_s >> \varepsilon$ $1/r^2$ ближе к $1/r_s^2$, чем $1/r$ к $1/r_s$.

Выразим единичный вектор $\bar{n}$ через орты $\bar{i}$ и $\bar{g}$, тогда

$$\bar{n} = -\bar{i}\cos\alpha - \bar{g}\sin\alpha\,. \qquad (1.34)$$

Единичный вектор $\bar{n}$ в пределах длины dl можно считать постоянным.

Подставив значение $\bar{n}$ из (1.34) в (1.33), разобьем интеграл на два слагаемых, помня, что θ и r в этом интеграле постоянны.

Первое слагаемое дает вектор

$$d\bar{v}_{01} = -\frac{\Gamma dl\sin\theta}{8\pi^2 r^2}\int_0^{2\pi}\cos\alpha\left(\bar{i}\cos\alpha + \bar{g}\sin\alpha\right)d\alpha\bar{j}.$$

Вычислим отдельно интегралы

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \pi;$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\alpha \sin\alpha d\alpha = 0.$$

Следовательно,

$$d\vec{v}_{01} = -\frac{\Gamma dl \sin\theta}{8\pi r^2}\left(\vec{i} \times \vec{j}\right).$$

Второе слагаемое дает вектор

$$d\vec{v}_{02} = -\frac{\Gamma dl}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\frac{\vec{i}\cos\alpha + \vec{g}\sin\alpha}{r\varepsilon - \varepsilon^2\cos\alpha\sin\theta}d\alpha\,\vec{j} =$$

$$= -\frac{\Gamma dl}{8\pi^2 r}\int_0^{2\pi}\frac{\left(r - \varepsilon\sin\theta\cos\alpha + \varepsilon\sin\theta\cos\alpha\right)\left(\vec{i}\cos\alpha + \vec{g}\sin\alpha\right)}{\left(r - \varepsilon\sin\theta\cos\alpha\right)\varepsilon}d\alpha\,\vec{j} =$$

$$= -\frac{\Gamma dl \sin\theta}{8\pi^2 r^2}\int_0^{2\pi}\cos\alpha\left(\vec{i}\cos\alpha + \vec{g}\sin\alpha\right)d\alpha\vec{j} = d\vec{v}_{01}.$$

В последнем выражении отброшено слагаемое

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{\varepsilon}\left(\vec{i}\cos\alpha + \vec{g}\sin\alpha\right)d\alpha = 0.$$

Следовательно,

$$d\vec{v}_0 = 2d\vec{v}_{01} = -\frac{\Gamma\sin\theta dl}{4\pi r^2}\left(\vec{i} \times \vec{j}\right).$$

Но так как плоскости $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ и $\left(\vec{r},\vec{j}\right)$ совпадают и, кроме того, из рис. 28 следует, что

$$-\left(\bar{i} \times \bar{j}\right) r \sin\theta = \left(\bar{r} \times \bar{j}\right),$$

окончательно получаем так называемую формулу Био — Савара[1]

$$d\bar{v}_0 = \frac{\Gamma dl}{4\pi r^3}\left(\bar{r} \times \bar{j}\right). \tag{1.35}$$

Пользуясь формулой Био — Савара, рассмотрим поле скоростей в области прямолинейной бесконечной вихревой нити (рис 29) и найдем скорость в центре вихревого кольца (рис. 30).

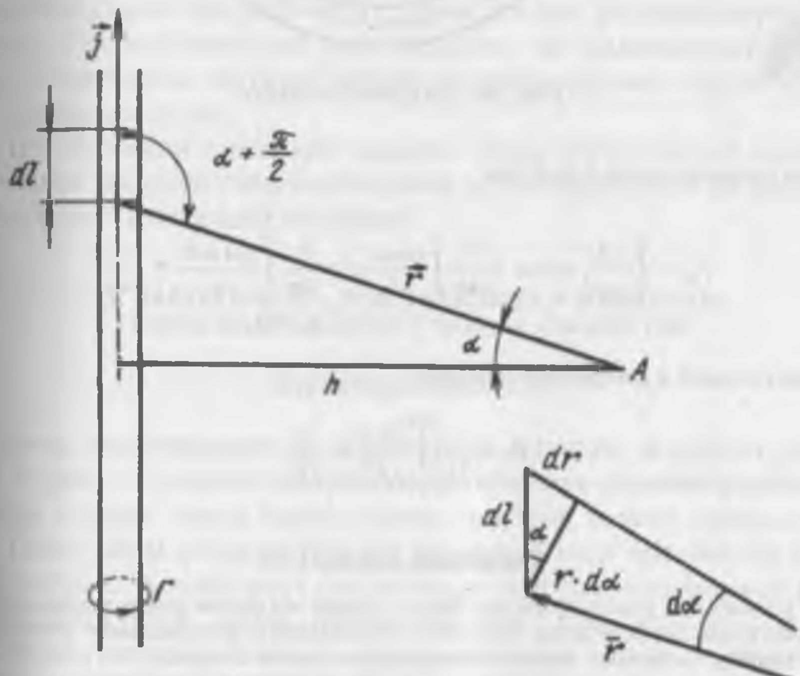


Рис. 29. Прямолинейная бесконечная вихревая нить

[1] Изложенный вывод формулы Био — Савара принадлежит проф. В.В.Уварову.

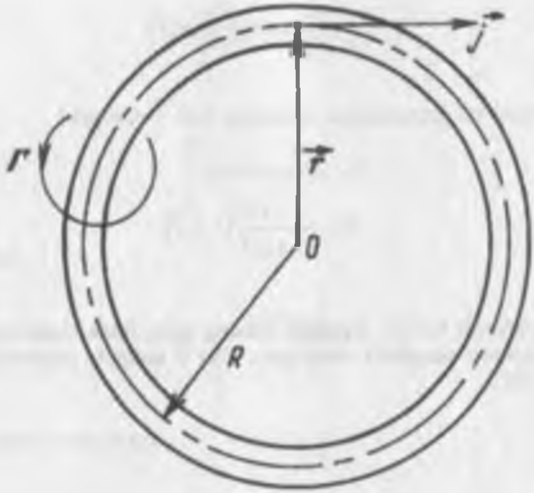


Рис. 30. Вихревое кольцо

Для скорости точки A получим

$$\bar{v}_A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma \mathrm{d}l}{4\pi r^3} r \cos\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\alpha}{r^2} \mathrm{d}l = \frac{\Gamma}{4\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\alpha\, \mathrm{d}l}{h} = \frac{\Gamma}{4\pi h}.$$

Для скорости в центре кольца имеем

$$\bar{v}_0 = \frac{\Gamma}{4\pi} \int\limits_{0}^{2\pi R} \frac{R\, \mathrm{d}l}{R^3} = \frac{\Gamma}{2R}.$$

Контрольные вопросы к §8

1. Почему при выводе формулы Био — Савара мы имеем право воспользоваться формулами для гармонических функций, описывающих потенциальные течения?
2. Почему свободный вихревой шнур перемещается в потоке?
3. Может ли свободное вихревое кольцо не перемещаться в потоке?

Глава 2. ДИНАМИКА ЖИДКОЙ СРЕДЫ

В предыдущей главе уже отмечалось, что жидкая среда, как правило, характеризуется сплошностью и непрерывностью распределения параметров по объему выделенной частицы. В силу этого все связи частицы могут иметь только распределенный характер. Сосредоточенных сил жидкость не выдерживает. Равновесное состояние частицы можно получить только под действием распределенных сил.

При изучении динамики жидкой среды в отличие от изучения движения твердого тела необходимо установить связи выделенной частицы с окружающей ее средой.

§9. ХАРАКТЕР СИЛ, ДЕЙСТВУЮЩИХ В ЖИДКОСТИ. СВЯЗЬ НАПРЯЖЕНИЙ С ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ

Характеристика сил

Силы, действующие на выделенную в потоке жидкости частицу Δm (рис. 31), имеют различное физическое происхождение, но во всех случаях здесь будут рассматриваться только внешние силы. Такие силы разделяются на массовые (или объемные) и поверхностные. К массовым силам относятся гравитационные (вес), пондеромоторные силы взаимодействия проводящей среды с электромагнитным полем и силы инерции, которые подсчитываются как произведение массы частицы на величину ускорения ее центра масс с обратным знаком. Массовые силы, очевидно, прямо пропорциональны массе частицы, поэтому в расчеты вводят единичную массовую силу, т. е. силу, отнесенную к единице массы:

$$\vec{f}_m = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta \vec{F}_m}{\Delta m},$$

где $\Delta \vec{F}_m$ — массовая сила, действующая на массу выделенной частицы Δm объемом ΔV, причем $\Delta m = \rho \Delta V$, где ρ — плотность жидкости.

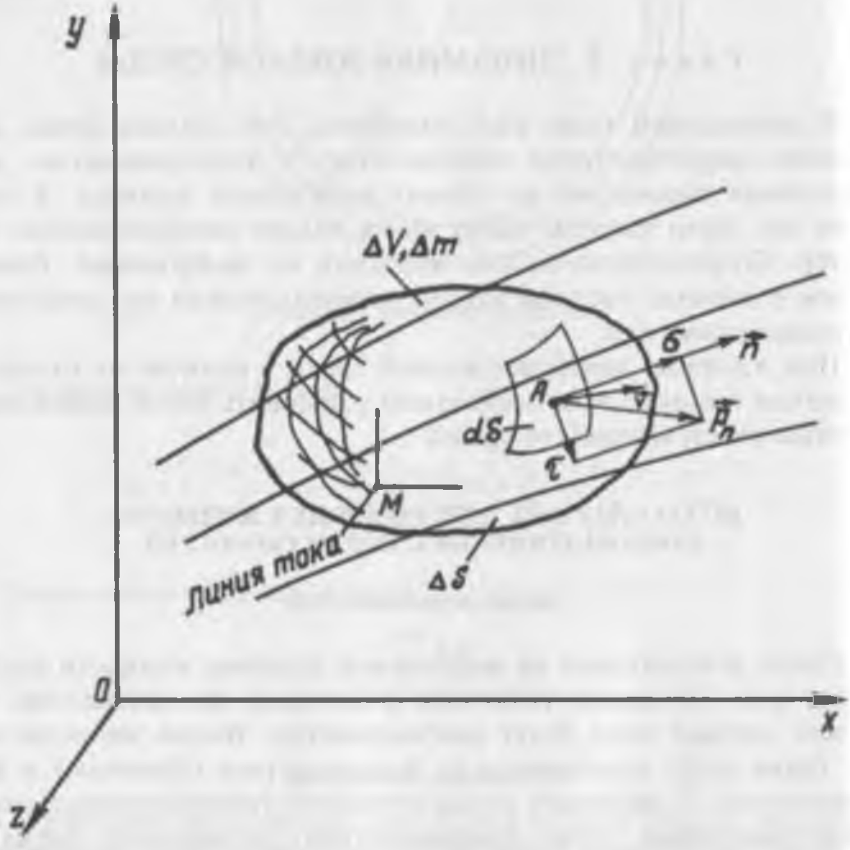


Рис. 31. Схема сил, действующих на элементарные объем ΔV и поверхность ΔS частицы в потоке жидкой среды

Единичная объемная сила

$$\vec{f}_V = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{F}_V}{\Delta V},$$

причем поскольку для выделенной частицы

$$\Delta\bar{F}_V = \Delta\bar{F}_m \quad \text{или} \quad \int_{\Delta m} \bar{f}_m \mathrm{d}m = \int_{\Delta V} \bar{f}_V \mathrm{d}V, \quad \text{а} \quad \mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V,$$

то $\rho\bar{f}_m = \bar{f}_V$, т. е. единичная объемная сила всегда в ρ раз больше единичной массовой силы. Эти единичные силы относятся к точке M в потоке, к которой стягивается объем ΔV (см. рис. 31). Нетрудно заметить, что единичная массовая сила имеет размерность ускорения. Для веса это будет земное ускорение g, всегда направленное вертикально вниз (к центру Земли).

К поверхностным силам относятся силы взаимодействия выделенной частицы с окружающей средой. Если при изучении массовых (объемных) сил рассматривалась масса (объем) всей этой частицы с последующим предельным переходом к точке M ($\Delta V \to 0$ и $\Delta m \to 0$), то для перехода к точке при изучении поверхностных сил требуется рассмотреть лишь элемент поверхности $\mathrm{d}S$, выделенной в потоке частицы жидкости объемом ΔV (см. рис. 31), с внешней нормалью $\bar{n}$, проведенной через точку A.

Единичная поверхностная сила (напряжение) в точке A, лежащей на площадке $\mathrm{d}S$ с нормалью $\bar{n}$, равна

$$\bar{p}_n = \lim_{\mathrm{d}S \to 0} \frac{\mathrm{d}\bar{F}_S}{\mathrm{d}S},$$

где $\mathrm{d}\bar{F}_S$ — поверхностная сила, действующая на элемент поверхности.

Поскольку элемент поверхности $\mathrm{d}S$ может быть расположен в любом месте поверхности объема ΔV, то и нормаль $\bar{n}$ может составить любой угол с вектором скорости $\bar{v}$. Вследствие молекулярного строения вещества поверхность $\mathrm{d}S$ испытывает как нормальные силы давления, так и касательные силы трения со стороны окружающего потока, причем касательные силы трения сильно зависят от расположения площадки в потоке, т. е. от направления $\bar{n}$. В случае, когда вектор $\bar{v}$ оказывается перпендикулярным к площадке $\mathrm{d}S$, касательные силы трения исчезают. Следовательно.

6*

величина $\bar{p}_{nA}$ зависит не только от координат точки A и времени, но и от расположения площадки dS, т. е. от направления $\bar{n}$ в точке A. Такая физическая величина называется тензором в отличие от скаляра и вектора, которые полностью определяются координатой точки и временем. Единичные массовые (объемные) силы являются векторными величинами.

Величина $\bar{p}_n$ называется полным гидродинамическим давлением в потоке вязкой жидкости. Главный вектор поверхностных сил, действующих на выделенную частицу с поверхностью ΔS, равен $\oint_{\Delta S} \bar{p}_n \mathrm{d}S$. Проектируя величину $\bar{p}_n$ на нормаль $\bar{n}$ и на площадку dS, получаем нормальную составляющую σ (обратную по знаку нормальному давлению) и касательную составляющую τ (рис. 32).

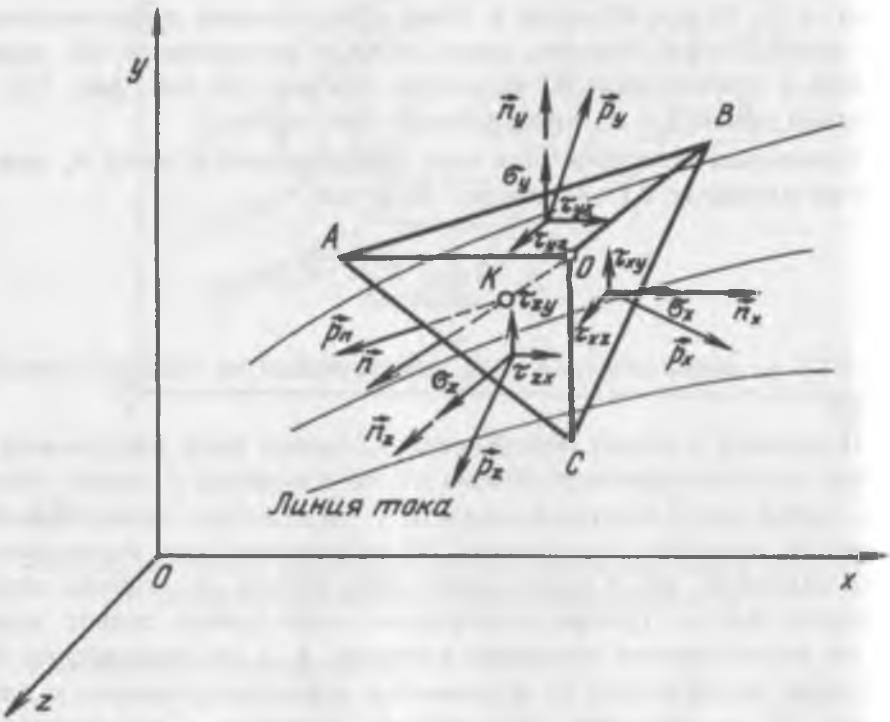


Рис. 32. Схема поверхностных сил, действующих на грани тетраэдра

Общая формула для полного гидродинамического давления связывает величину $\bar{p}_n$ с полным гидродинамическим давлением $\bar{p}_x, \bar{p}_y$ и $\bar{p}_z$ в координатных плоскостях, проходящих в пределе через ту же точку в потоке жидкости. Не нарушая общности вывода, рассмотрим площадку ΔS в виде треугольника ABC (см. рис. 32) и построим на ней тетраэдр $OABC$; внешние нормали к его граням параллельны осям координат. Значения $\bar{p}_x, \bar{p}_y$ и $\bar{p}_z$ считаем известными. Для определения значения $\bar{p}_n$ рассмотрим равновесие тетраэдра по принципу Даламбера. Обозначив площадки граней с нормалями x, y и z через ΔS_x, ΔS_y и ΔS_z, причем $\Delta S_x = -\Delta S \cos(\bar{n}, x)$, $\Delta S_y = -\Delta S \cos(\bar{n}, y)$ и $\Delta S_z = -\Delta S \cos(\bar{n}, z)$, где знаки минус компенсируют отрицательные значения косинусов тупых углов между $\bar{n}$ и осями координат, так как площади граней отрицательными быть не могут, получим

$$\left(\bar{f}_m - \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t}\right)\rho\frac{1}{3}\Delta Sh + \bar{p}_x \Delta S\cos(\bar{n},x) -$$

$$-\bar{p}_y \Delta S\cos(\bar{n},y) - \bar{p}_z \Delta S\cos(\bar{n},z) = 0.$$

При $\Delta S \to 0$ высота тетраэдра $h \to 0$, т. е. первое слагаемое уравнения равновесия является малой величиной второго порядка малости по сравнению с остальными, откуда, деля на ΔS, получаем

$$\bar{p}_n = \bar{p}_x\cos(\bar{n},x) + \bar{p}_y\cos(\bar{n},y) + \bar{p}_z\cos(\bar{n},z). \qquad (2.1)$$

Величины $\bar{p}_x$, $\bar{p}_y$ и $\bar{p}_z$ являются векторами и называются составляющими тензора напряжений в осях x, y, z. В проекциях на оси координат эти векторы имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{p}_x &= \sigma_x \bar{i} + \tau_{xy}\bar{j} + \tau_{xz}\bar{k}, \\ \bar{p}_y &= \tau_{yx}\bar{i} + \sigma_y\bar{j} + \tau_{yz}\bar{k}, \\ \bar{p}_z &= \tau_{zx}\bar{i} + \tau_{zy}\bar{j} + \sigma_{zyz}\bar{k}. \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Первая буква в двойном индексе у τ соответствует направлению нормали к площадке, а вторая — направлению оси, которому параллельна эта составляющая касательного напряжения. Положительное значение σ направлено в сторону внешней нормали, а положительное значение τ — к ребру между гранями.

Таблица из девяти коэффициентов при единичных ортах в системе (2.2) служит обозначением тензора гидродинамического давления, а входящие в таблицу величины называются компонентами тензора:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_y \end{pmatrix}.$$

Ниже будет показано, что существует парность касательных напряжений, т. е. $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ и т. п. Следовательно, для вычисления полного гидродинамического давления в данной точке потока вязкой жидкости необходимо знать шесть величин: три нормальные и три касательные составляющие напряжения.

Помимо понятия полного гидродинамического давления вводится понятие среднего статического давления в данной точке M потока вязкой жидкости как среднего значения напряжений сжатия на поверхности сферы с центром в данной точке при стягивании этой сферы в точку, т. е.

$$p = -\frac{\int\limits_0^{2\pi} \varepsilon^2 \cdot \bar{n} \cdot \bar{p}_n \mathrm{d}\omega}{4\pi\varepsilon^2} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{4\pi} \bar{n}\, \bar{p}_n \mathrm{d}\omega, \tag{2.3}$$

где $\mathrm{d}\omega$ — элементарный телесный угол с вершиной в центре сферы; $\bar{n}$ — внешняя нормаль к сфере (совпадает с направлением радиуса сферы ε); $\bar{p}_n$ — полное гидродинамическое давление в площадке с нормалью $\bar{n}$ (рис. 33).

Вычисление величины p выполняем в сферических координатах ε, φ, ν. Тогда

$$\mathrm{d}S = \varepsilon^2 \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\nu, \qquad \mathrm{d}\omega = \mathrm{d}S / \varepsilon^2 = \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\nu;$$

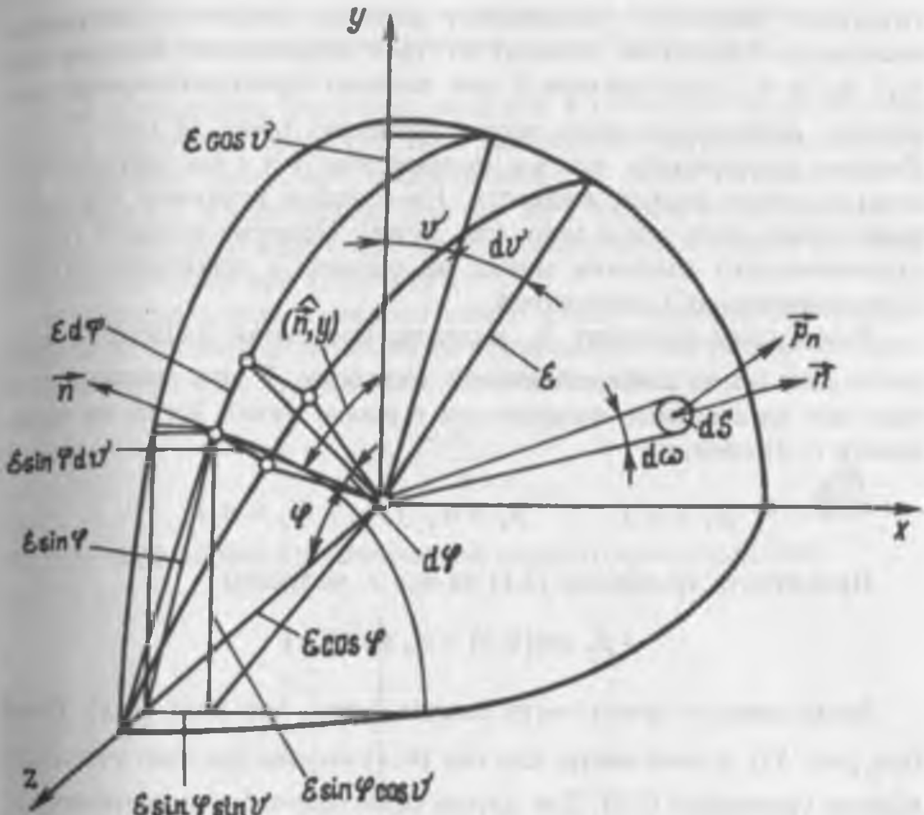


Рис. 33. К выводу среднего значения статического давления в точке потока вязкой жидкости

$\cos(\bar{n}, z) = \cos\varphi$, $\cos(\bar{n}, y) = \sin\varphi\cos\nu$, $\cos(\bar{n}, x) = \sin\varphi\cos\nu$.

Пользуясь формулами (2.1) и (2.2) с учетом приведенных выше зависимостей, из формулы (2.3) получаем

$$p = -\frac{1}{3}\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right). \qquad (2.4)$$

Касательные напряжения τ в каждой площадке dS "пропадают" при вычислении произведений $\bar{n}\,\bar{p}_n$, а среднее значение статического давления оказывается равным среднему арифметическому (с обратным знаком) от трех нормальных напряжений σ_x, σ_y и σ_z, действующих в трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через рассматриваемую точку M при $\varepsilon \to 0$. Следует подчеркнуть, что все напряжения σ и τ рассматривались здесь в потоке вязкой жидкости. Ни о каком условном торможении потока здесь нет и речи (см. ниже). Понятие полного гидродинамического давления никак не связано с понятием полных ("заторможенных") параметров.

Рассмотрим величину $\bar{p}_n$ в потоке идеальной (невязкой) жидкости или в неподвижной вязкой жидкости. В этих частных случаях все касательные напряжения τ равны нулю. Тогда из выражений (2.2) следует:

$$\bar{p}_x = \sigma_x \bar{i}, \qquad \bar{p}_y = \sigma_y \bar{j}, \qquad \bar{p}_z = \sigma_z \bar{k}.$$

Проектируя уравнение (2.1) на ось x, получаем

$$-p_n \cos(\bar{n}, x) = \sigma_x \cos(\bar{n}, x).$$

Знак минус в левой части связан с тем, что угол $(\bar{n}, x)$ тупой (см. рис. 32), а знак минус для cos $(\bar{n}, x)$ справа уже был учтен при выводе уравнения (2.1). Для других осей получаем аналогично:

$$-p_n \cos(\bar{n}, y) = \sigma_y \cos(\bar{n}, y),$$

$$-p_n \cos(\bar{n}, z) = \sigma_z \cos(\bar{n}, z),$$

откуда с учетом формулы (2.4)

$$p_n = -\sigma_x = -\sigma_y = -\sigma_z = p,$$

т. е. величина полного гидродинамического давления $\bar{p}_n$ для движущейся идеальной и неподвижной вязкой жидкости не зависит от ориентации площадки, к которой оно приложено, а одинаково в любом направлении, т. е. $\bar{p}_n = -p\bar{n}$.

Связь тангенциальных и нормальных напряжений с полем скоростей в потоке вязкой жидкости

При построении расчетных моделей в механике твердого тела (теория упругости, сопротивление материалов) широкое применение получили линейные представления о связи напряжений с деформациями в виде закона Гука $\sigma = E\varepsilon$ в задачах на растяжение — сжатие, а также в виде связи между напряжением сдвига и углом поворота сечения при кручении $\tau = G\,\theta$.

В гидродинамике линейная связь между касательным напряжением на стенке, обтекаемой потоком вязкой жидкости, и изменением скорости у стенки была установлена Ньютоном в виде

$$\tau_0 = \mu\left(\frac{dv_x}{dy}\right)_{y=0},$$

где μ — коэффициент динамической вязкости среды (рис. 34).

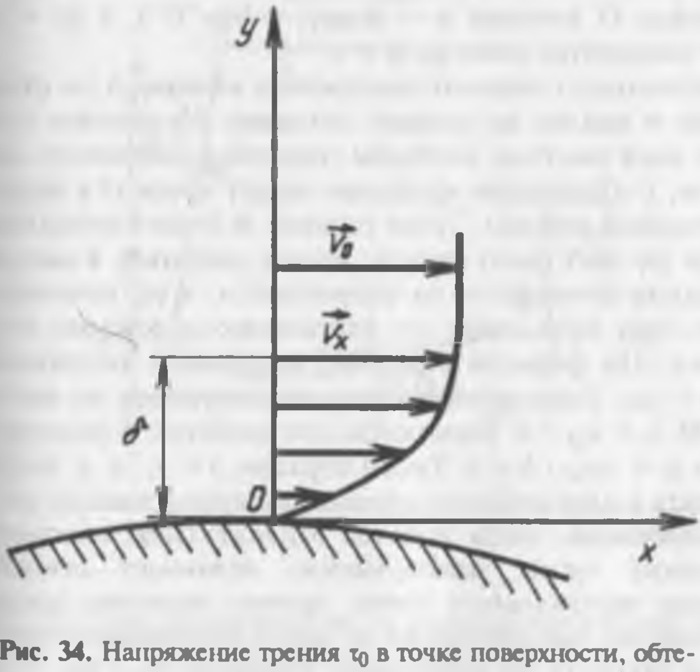


Рис. 34. Напряжение трения τ_0 в точке поверхности, обтекаемой вязкой жидкостью при ламинарном режиме

Формула Ньютона описывает поведение лишь так называемых ньютоновых жидкостей при ламинарном режиме течения. Неньютоновыми жидкостями занимается специальный раздел гидродинамики — реология. Турбулентный характер течения у стенки и в потоке учитывается эмпирическими соотношениями, хотя формула Ньютона считается справедливой в окрестности точки и при турбулентном режиме для данного момента времени.

Рассмотрим сначала касательные напряжения в потоке вязкой жидкости на гранях "жидкого" прямого угла в случае, когда одна его грань остается неподвижной (рис. 35, *а*). Выделим в жидкости два нормальных сечения m и n, расположенных одно от другого на малом расстоянии b. При движении плоскости A относительно плоскости B вправо сечение m за время Δt встанет на место сечения m' и сечение n — на место сечения n'; очевидно, что эти два сечения как бы проскальзывают одно относительно другого, поворачиваясь вокруг точек O и O'. Угловая скорость вращения этих сечений $\omega = \Delta\gamma / \Delta t$ (в момент, когда сечения расположены нормально к движению жидкости, причем сечение m вращается вокруг точки O, сечение n — вокруг точки O'), а $\Delta\gamma$ — угол, на который повернутся сечения m и n.

Относительную скорость скольжения сечения n по отношению к сечению m найдем по правилу механики. Остановим сечение m, для чего всей системе сообщим движение, обратное движению сечения m, т. е. создадим вращение вокруг точки O в направлении против часовой стрелки. Тогда сечение m станет неподвижным, а сечение n (во всех своих точках) начнет двигаться в направлении, параллельном сечению m со скоростью ω, т. е. сечение n будет скользить при этом вверх по отношению к сечению m со скоростью ωb. По формуле Ньютона, касательное напряжение $\tau_1 = \mu b / b = \mu\omega$. Угловую скорость ω подсчитываем по скорости v_M в точке M: $\omega = v_M / h$. Подставляя это значение в формулу для τ_1, получаем $\tau_1 = \mu v_M / h = \tau$. Таким образом, $\tau = \tau_1$, т. е. касательные напряжения в двух взаимно перпендикулярных плоскостях равны.

Следовательно, когда имеется относительное скольжение горизонтальных слоев, одновременно возникает относительное скольжение вертикальных слоев, причем величина касательного напряжения на них одинакова и прямо пропорциональна производной от скорости по координате, например $\partial v_x / \partial y$.

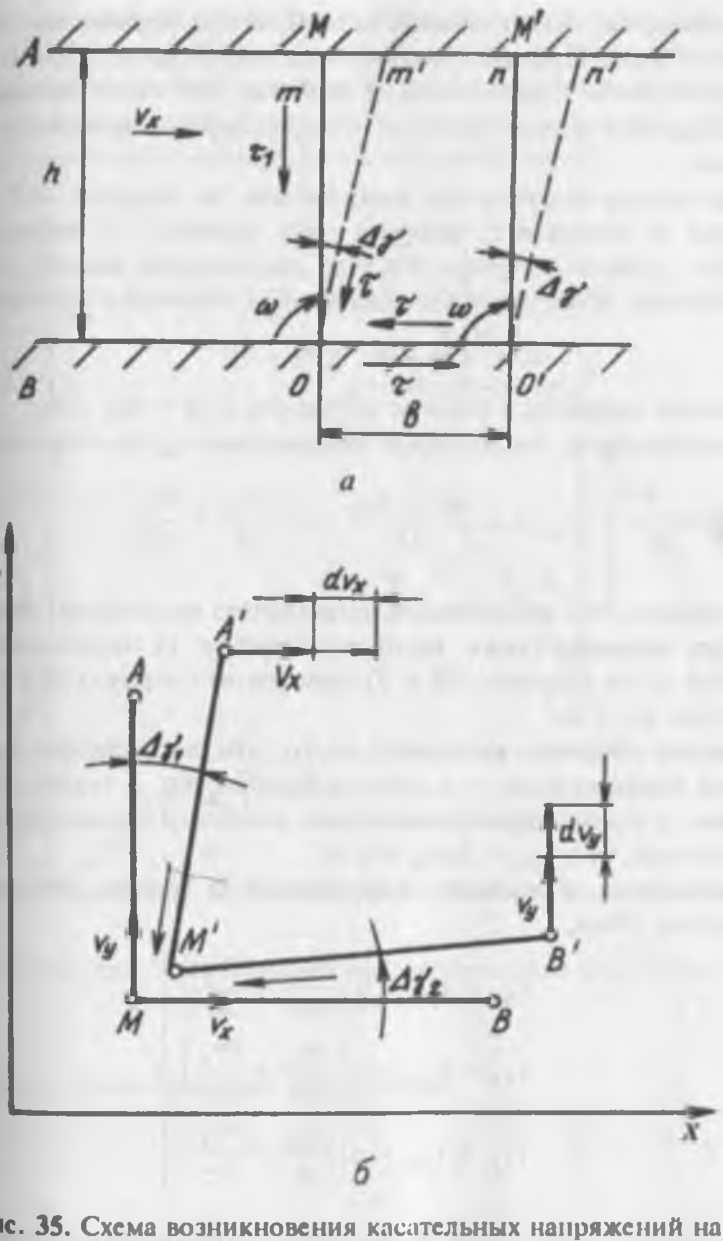


Рис. 35. Схема возникновения касательных напряжений на сторонах прямого "жидкого" угла:

а – одна сторона угла неподвижна; *б* – обе стороны угла подвижны

Рассмотрим теперь общий случай, когда подвижны обе грани "жидкого" угла. Прямой "жидкий" угол AMB (рис. 35, *б*) за время Δt переместится в положение $A'M'B'$ так, что его стороны $A'M'$ и $B'M'$ образуют малые углы $\Delta\gamma_1$ и $\Delta\gamma_2$ с первоначальными направлениями.

Подсчитаем касательное напряжение на стороне MB, которое сложится в результате влияния двух причин: 1) непостоянства скорости v_x вдоль стороны MA (что рассмотрено выше) и 2) поворота стороны MB (ранее неподвижной) с угловой скоростью

$$\Delta\gamma_2 / \Delta t = \partial v_y / \partial x.$$

Угловая скорость в первом случае $\partial v_x / \partial y = \Delta\gamma_1 / \Delta t$.

Следовательно, касательное напряжение τ_{yx} на стороне MB

$$\tau_{yx} = \mu \frac{\Delta\gamma_1 + \Delta\gamma_2}{\Delta t} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right).$$

Очевидно, что касательное напряжение на стороне MA, равное τ_{xy}, будет вызвано также двумя причинами: 1) неравномерностью скорости v_y по стороне MB и 2) поворотом стороны MA с угловой скоростью $\Delta\gamma_1 / \Delta t$.

Следует обратить внимание на то, что напряжения действуют в одном направлении, т. е. они складываются, а также на то, что величина τ прямо пропорциональна скорости скошения жидкого прямого угла, т. е. $\tau_{xy} = 2\mu\theta_{xy}$ и т. п.

Аналогично возникают напряжения в других координатных плоскостях. Итак,

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right), \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} &= \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

Проанализируем связь нормальных напряжений σ с производными от скорости потока. Сначала рассмотрим движение в плос кости xy и свяжем нормальные напряжения σ_x и σ_y с выбранным касательным напряжением τ, действующим на площадке, наклоненной под углом $\alpha = 45°$ к оси x. Выделим для этого призму высотой h с основанием ABC (рис. 36) и запишем условие ее динамического равновесия в проекции на направление AB.

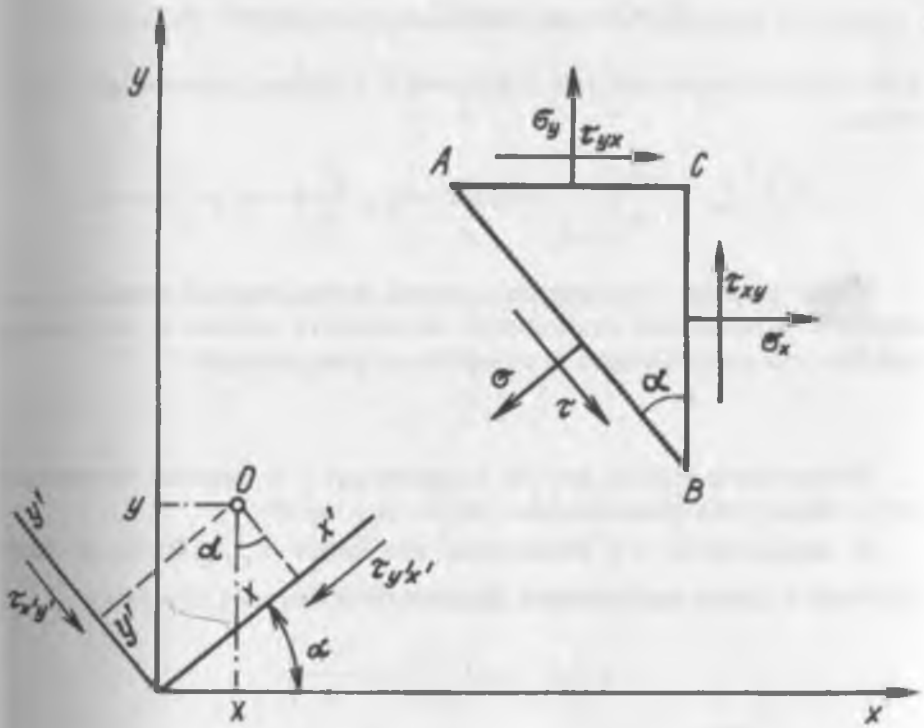


Рис. 36. Схема сил, действующих на призму в плоском потоке вязкой среды

Проекция силы инерции будет равна

$$-\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_{AB} \rho V,$$

где $V = a^2 h / 2$ — объем призмы; $\bar{v}$ — скорость ее центра масс.

Проекцию единичной массовой силы на линию AB обозначим $f_{m\,AB}$, так что полная проекция массовой силы равна $f_{m\,AB}\,\rho V$.

Проекцию поверхностной силы подсчитаем через отдельные ее составляющие, проектируя их на отрезок AB, равный $a/\cos 45°$. За положительное направление примем направление от A к B. Тогда

$$\tau \cdot AB \cdot h + \sigma_x a \cdot \cos 45° \cdot h - \sigma_y a \cdot \cos 45° \cdot h,$$

а остальные составляющие сократятся. Условие равновесия примет вид

$$\rho \frac{a^2 h}{2}\left[\bar{f}_m - \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)\right]_{AB} + \tau a\sqrt{2}h + \sigma_x a \frac{\sqrt{2}}{2} h - \sigma_y a \frac{\sqrt{2}}{2} h = 0.$$

Пусть размер a стремится к нулю, тогда первый член в сравнении с остальными становится бесконечно малым и получается нужная для дальнейшего искомая связь напряжений

$$2\tau = \sigma_y - \sigma_x.$$

Рассмотрим теперь это же напряжение τ в системе координат $x'y'$, повернутой относительно осей x и y на 45°.

В координатах $x'y'$ обозначим его через $\tau_{x'y'}$; тогда в соответствии с ранее полученной формулой (2.5)

$$\tau = \tau_{x'y'} = \mu\left(\frac{\partial v_{x'}}{\partial y'} + \frac{\partial v_{y'}}{\partial x'}\right).$$

Вторым этапом вывода будет переход от скоростей в системе $x'y'$ к скоростям в системе x, y. Из рис. 36 следует, что

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos 45° - y'\sin 45° = \left(\sqrt{2}/2\right)\left(x' - y'\right),\\ y &= x'\sin 45° + y'\cos 45° = \left(\sqrt{2}/2\right)\left(x' + y'\right).\end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

Отсюда

$$x' = \left(\sqrt{2}/2\right)(x + y); \quad y' = (y - x),$$

так что

$$\begin{aligned} dx'/dt = v_{x'} &= \left(\sqrt{2}/2\right)\left(v_x + v_y\right); \\ dy'/dt = v_{y'} &= \left(\sqrt{2}/2\right)\left(v_y - v_x\right). \end{aligned} \tag{2.7}$$

По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$\frac{\partial v_{x'}}{\partial y'} = \frac{\partial v_{x'}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial v_{x'}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'};$$

$$\frac{\partial v_{y'}}{\partial x'} = \frac{\partial v_{y'}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial v_{y'}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'}.$$

Делаем подстановки, пользуясь формулами (2.6) и (2.7):

$$\frac{\partial v_{x'}}{\partial y'} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial v_{y'}}{\partial x'} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

Сложив оба равенства и умножив их на μ, получим

$$\tau = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\right).$$

Иначе,

$$\sigma_x - \sigma_y = 2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y}\right).$$

Если аналогичные выкладки сделать относительно плоскости xOz, то получим

$$\sigma_x - \sigma_z = 2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial z}\right).$$

Запишем тождество

$$\sigma_x - \sigma_x = 2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial x}\right)$$

и сложим три последних равенства. Тогда

$$3\sigma_x - \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right) = 6\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} - 2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right).$$

Отсюда нормальное напряжение

$$\sigma_x = -p + 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \bar{v}.$$

Аналогичный вид имеют остальные составляющие. Следовательно, нормальные напряжения в координатных плоскостях имеют вид

$$\sigma_x = -p + 2\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \bar{v},$$

$$\sigma_y = -p + 2\mu\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \bar{v},$$

$$\sigma_z = -p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \bar{v}. \qquad (2.8)$$

Для идеальной жидкости, лишенной сил трения, коэффициент $\mu = 0$; тогда, естественно, получаем

$$p = -\sigma_x = -\sigma_y = -\sigma_z.$$

Это же условие сохраняется и для вязкой покоящейся или равномерно и прямолинейно движущейся жидкости, когда порознь равны нулю все производные.

Полученные формулы для τ и σ позволяют определить напряжения в жидкости, если известны кинематическая картина се движения и коэффициент динамической вязкости μ. Формулы (2.5) и (2.8) можно считать обобщенным законом Ньютона для сплошной вязкой среды.

Контрольные вопросы к §9

1. Что такое полное гидродинамическое давление в потоке вязкой жидкости?
2. Как направлены положительные нормальные и касательные напряжения?
3. Что такое среднее статическое давление в точке потока вязкой жидкости?
4. Зависит ли полное гидродинамическое давление в данной точке потока вязкой жидкости от ориентации выбранной площадки?
5. Чем отличаются касательные напряжения в потоке вязкой жидкости на неподвижной стенке и на грани "жидкого" прямого угла, первоначально параллельной твердой стенке?
6. Как связаны нормальные напряжения в потоке вязкой жидкости с полем скоростей этого потока?

§10. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОЙ СРЕДЫ

Полученные выше выражения для единичных массовых (объемных) и поверхностных сил позволяют вывести уравнение движения жидкой среды, которое, по существу, является выражением второго закона механики Ньютона в применении к жидкой среде.

Уравнение движения, выраженное через напряжения

Для вывода уравнения движения рассмотрим элементарный объем ΔV в декартовой системе координат, ограниченный поверхностью ΔS (рис. 37). Равновесие выделенного объема жидкости требует равенства нулю главного вектора и главного момента сил, действующих на объем, включая силы инерции, т. е.

$$S\vec{F} = 0 \quad \text{и} \quad \sum\left(\vec{r} \times \vec{F}\right) = 0. \tag{2.9}$$

На выделенный объем действуют массовая сила $\int\limits_{\Delta V} \vec{f}_m \rho \mathrm{d}V$, поверхностная сила $\int\limits_{\Delta S} \vec{p}_n \mathrm{d}S$ и сила инерции $\left(-\int\limits_{\Delta V} \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \rho \mathrm{d}V\right)$. Тогда первое уравнение (2.9) принимает вид

7- 3078

$$\int_{\Delta V}\left(\bar f_m - \frac{d\bar v}{dt}\right)\rho dV + \int_{\Delta S}\bar p_n dS = 0. \qquad (2.10)$$

Преобразуем выражение для поверхностной силы, выразив ее через объемный интеграл. Тогда получим

$$\int_{\Delta S}\bar p_n dS = -\bar p_x\Delta S_x + \left(\bar p_x + \frac{\partial\bar p_x}{\partial x}dx\right)\Delta S_x -$$

$$-\bar p_y\Delta S_y + \left(\bar p_y + \frac{\partial\bar p_y}{\partial y}dy\right)\Delta S_y - \bar p_z\Delta S_z +$$

$$+\left(\bar p_z + \frac{\partial\bar p_z}{\partial z}dz\right)\Delta S_z = \left(\frac{\partial\bar p_x}{\partial x} + \frac{\partial\bar p_y}{\partial y} + \frac{\partial\bar p_z}{\partial z}\right)\Delta V.$$

Так как сумму $\left(\frac{\partial\bar p_x}{\partial x} + \frac{\partial\bar p_y}{\partial y} + \frac{\partial\bar p_z}{\partial z}\right)$ в силу малости объема ΔV можно считать постоянной для этого объема, то

$$\int_{\Delta S}\bar p_n dS = \int_{\Delta V}\left(\frac{\partial\bar p_x}{\partial x} + \frac{\partial\bar p_y}{\partial y} + \frac{\partial\bar p_z}{\partial z}\right)dV. \qquad (2.11)$$

Подставляя выражение (2.11) в формулу (2.10) и учитывая, что выражение (2.11) справедливо для произвольного объема, получаем уравнение движения сплошной среды, выраженное через напряжения

$$\frac{d\bar v}{dt} = \bar f_m + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\bar p_x}{\partial x} + \frac{\partial\bar p_y}{\partial y} + \frac{\partial\bar p_z}{\partial z}\right). \qquad (2.12)$$

Полученное уравнение справедливо для любой точки в потоке сплошной среды при условии непрерывности ее параметров. Это уравнение является развитием второго закона механики Ньютона, когда учитываются силы взаимодействия выделенного объема с оставшейся жидкостью.

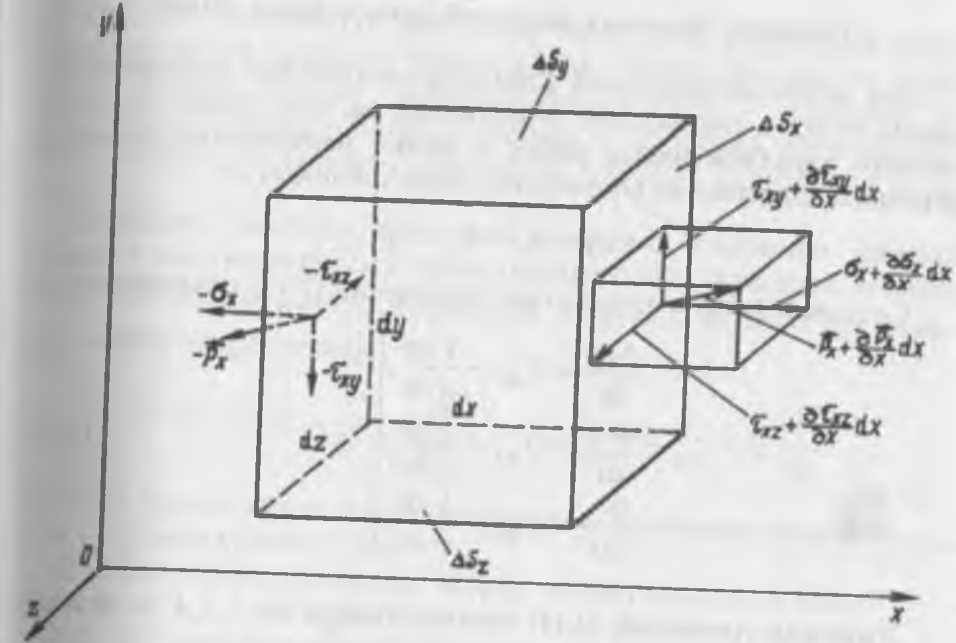


Рис. 37. Схема поверхностных напряжений, действующих в левой и в правой гранях параллелепипеда

В проекциях на оси координат уравнение (2.12) с учетом выражений для p_x, p_y, p_z принимает вид

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= \bar f_{mx} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right),\\
\frac{dv_y}{dt} &= \bar f_{my} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right),\\
\frac{dv_z}{dt} &= \bar f_{mz} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}\right).
\end{aligned} \qquad (2.13)$$

Уравнение движения идеальной среды в форме Эйлера

Для невязкой идеальной жидкости касательные напряжения τ равны нулю, а нормальные напряжения во всех гранях рассмотренного параллелепипеда равны и имеют направление, обратное действию давления на соответствующую площадку, т. е.

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p.$$

Следовательно, в этом случае выражения (2.13) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= f_{mx} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= f_{my} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{dv_z}{dt} &= f_{mz} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

Умножая уравнения (2.14) соответственно на $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ и складывая их, получаем уравнение Эйлера в векторной форме

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{f}_m - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p. \tag{2.15}$$

Второе слагаемое правой части уравнения (2.15) и отличает механику идеальной жидкости от механики твердого тела. Оно определяет силу взаимодействия выделенного объема жидкости с оставшейся ее массой.

Раскрывая производные от проекций скорости по времени в уравнениях (2.14), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}\right), \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}\right), \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Следует подчеркнуть, что левые части этих выражений представляют собой проекции полного или субстанционального ускорения частицы, первые слагаемые правой части — проекции локального ускорения, а члены в скобках — проекции конвективного ускорения, связанные с переносом среды со скоростями v_x, v_y и v_z.

Нетрудно заметить, что три последних слагаемых каждой строки в выражениях (2.16) представляют собой проекцию вектора $(\bar{v}\nabla)\bar{v}$ на оси координат. Выражение в круглых скобках представляет собой оператор вида

$$(\bar{v}\nabla) = \bar{v}\left(\partial \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{dy} + v_z \frac{\partial}{\partial z},$$

который применяется последовательно к проекциям скорости v_x, v_y и v_z в выражениях (2.16).

Следовательно, уравнение Эйлера можно записать в виде

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)\bar{v} = \bar{f}_m - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p. \tag{2.17}$$

Уравнение Эйлера справедливо для любого (потенциального и вихревого) течения идеальной среды. Однако в отдельных случаях бывает удобно рассматривать уравнения движения идеальной среды с явно выделенной вихревой частью движения. Такая форма записи уравнений движения была предложена русским ученым И.С.Громекой и английским гидромехаником Г. Лэмбом в конце XIX в.

Уравнение движения идеальной среды в форме Громеки – Лэмба

Рассматривая выражения (2.16), добавим к правым частям каждой строки члены

$$\left(\pm v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} \pm v_z \frac{\partial v_z}{\partial x}\right); \quad \left(\pm v_x \frac{\partial v_x}{\partial y} \pm v_z \frac{\partial v_z}{\partial y}\right); \quad \left(\pm v_x \frac{\partial v_x}{\partial z} \pm v_y \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$$

соответственно. Тогда получим вместо первой строки (2.16)

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} +$$

$$+ v_z\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) - v_y\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial xy}\right)$$

или

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2(\bar{\omega} \times \bar{v})_x.$$

Делая те же преобразования с двумя оставшимися строчками выражения (2.16), умножая каждую строку на $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ соответственно и складывая, получаем

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2(\bar{\omega} \times \bar{v}),$$

что полностью соответствует известному тождеству из векторного анализа для вектора $\bar{v}$

$$(\bar{v}\,\nabla)\bar{v} = \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) + \mathrm{rot}\ \bar{v} \times \bar{v} = \frac{d\bar{v}}{dt} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}.$$

Следовательно, уравнение Громеки — Лэмба принимает вид

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + 2(\bar{\omega} \times \bar{v}) = \bar{f}_m - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\ p. \qquad (2.18)$$

Уравнение движения в форме Громеки — Лэмба будет использовано затем в ряде разделов нашего курса. Эта форма записи уравнения движения идеальной жидкости в явном виде содержит члены с угловой скоростью вращения, которые обращаются в нуль для потенциального движения.

Уравнение движения вязкой среды в форме Навье — Стокса

Для вывода уравнения Навье — Стокса воспользуемся уравнениями (2.13) движения, выраженными через напряжения, и выражениями (2.5) и (2.8) для касательных и нормальных напряжений. Подставляя выражения (2.5) и (2.8) в первую строку уравнения (2.13) и считая $\mu = \mathrm{const}$, получаем

$$\frac{dv_x}{dt} = f_{mx} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + 2\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\,\bar{v} +$$

$$+\frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\right].$$

Собирая члены со вторыми производными v_x по координатам и с производными по x от $\mathrm{div}\,\bar{v}$, получаем

$$\frac{dv_x}{dt} = f_{mx} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\Delta v_x + \frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\,\bar{v},$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

Выполнив аналогичные преобразования со второй и третьей строками уравнения (2.13), получаем

$$\frac{dv_y}{dt} = f_{my} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\Delta v_y + \frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{div}\,\bar{v};$$

$$\frac{dv_z}{dt} = f_{mz} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\Delta v_z + \frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{div}\,\bar{v}.$$

В векторной форме уравнение Навье — Стокса принимает вид

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{f}_m - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\ p + \frac{\mu}{\rho}\Delta\bar{v} + \frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\bar{v}\right). \qquad (2.19)$$

Для несжимаемой жидкости $\mathrm{div}\bar{v} = 0$, и уравнение Навье – Стокса имеет вид

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{j}_m - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \frac{\mu}{\rho}\Delta\bar{v}. \qquad (2.20)$$

Подчеркнем, что в уравнение Навье – Стокса входят истинные значения скоростей и давлений и их производные. Уравнение Навье – Стокса справедливо как для установившегося, так и для неустановившегося течения вязкой жидкости. Однако при анализе турбулентного течения вязкой жидкости, которое является по своей природе неустановившимся, целесообразно провести осреднение потока по времени и рассматривать осредненное движение. Впервые такое осреднение было сделано О. Рейнольдсом в 1895 г.

Уравнения движения вязкой среды в форме Рейнольдса[1]

Турбулентное течение (см. §5) можно представить себе как бы состоящим из двух потоков: пульсационного и основного (осредненного). Частицы потока в пульсационном движении перемещаются хаотически по различным направлениям и одновременно переносятся по течению основным, осредненным потоком. Турбулентное движение возникает в результате трения в жидкости, а также при потере устойчивости ламинарного движения и при отрыве пограничного слоя. Особенно такое движение интенсивно в местах, расположенных непосредственно за обтекаемыми телами.

Турбулентное движение является всегда неустановившимся, и хотя пульсация скорости по сравнению с осредненной скоростью потока мала, она оказывает заметное влияние на важнейшие характеристики потока.

Количественно турбулентные потоки оценивают в основном двумя величинами: степенью турбулентности ε и коэффициентом корреляции R. Если взять в потоке рабочего тела точку A и проследить, как с течением времени в ней меняются параметры потока, то, зная законы изменения параметров в этой точке во вре-

---

[1] Эта часть параграфа написана совместно с О.М.Панковым

мени, можно найти осредненные значения этих параметров. В самом деле, пусть изменение проекции скорости в точке A за время t будет представлено кривой, изображенной на рис. 38; тогда средняя скорость за период времени $t_1 = t_2 - t_1$

$$\bar{v}_{A_1} = \frac{1}{t_1}\int_{t_1}^{t_2} v_A \mathrm{d}t.$$

По определению, средняя величина пульсационной скорости $\bar{v}' = 0$. Мгновенное значение скорости будет выражаться суммой величин

$$v = \bar{v} + v'.$$

Так как пульсационная скорость v' является переменной величиной по абсолютному значению и знаку, то ее удобно выражать в виде среднеквадратичного значения $\sqrt{\overline{(v')^2}}$.

Рис. 38. Осциллограмма изменения проекции скорости потока в точке A

Степень турбулентности определяется соотношением

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\overline{(v')^2}}}{\bar{v}} = \frac{\sqrt{\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}(v')^2\,dt}}{\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{t_1}^{t_2}v\,dt},$$

т. е. отношением среднеквадратичной пульсационной скорости к осредненному значению скорости турбулентного движения. Обычно величину ε выражают в процентах.

Если рассматривается изменение параметров не только в одной точке, то оценка характера движущегося потока по степени его турбулентности будет недостаточной. Возьмем на некотором расстоянии dx от точки A по линии, перпендикулярной к средней скорости потока, точку B (рис. 39). Если средняя скорость потока равна $\bar{v}$, а пульсационные скорости в точках A и B соответственно v'_A и v'_B, то отношение среднего произведения пульсационных скоростей $\overline{v'_A v'_B}$ к произведению средних квадратичных пульсационных скоростей в этих точках называют коэффициентом корреляции $R = \dfrac{\overline{v'_A v'_B}}{\sqrt{\left(\overline{v'_A}\right)^2}\sqrt{\overline{v'_B}}}$, а величину $L = \int_0^\infty R(x)\,dx$ — масштабом турбулентности.

Турбулентность потока оказывает большое влияние на характеристики испытуемых тел. Изменяя ее, можно изменять условия обтекания тел, например условия отрыва пограничного слоя и т. п.

Полученные выше уравнения Навье — Стокса для движения вязкой жидкости не удобны при исследовании турбулентного течения вязкой жидкости, так как содержат фактические значения скорости и давления, а не осредненные. Хотя следует отметить, что в настоящее время получены численные решения уравнения Навье — Стокса для турбулентных течений несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса. Вернемся к выводу уравнений Рейнольдса.

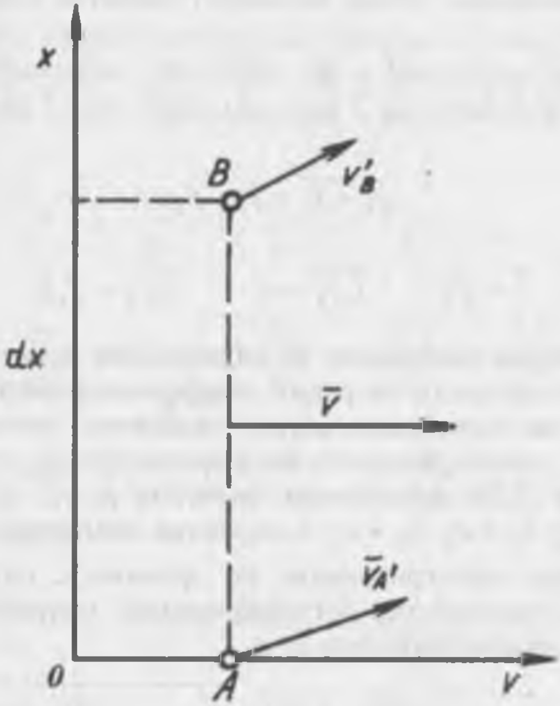


Рис. 39. Пульсационные скорости в соседних точках потока

Если в уравнениях (2.20) скорости и давления заменить средними и пульсационными значениями

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x; \quad v_y = \bar{v}_y + v'_y; \quad v_z = \bar{v}_z + v'_z; \quad p = \bar{p} + \bar{p},$$

а затем произвести осреднение по времени, то получим уравнения Рейнольдса для несжимаемой вязкой жидкости. Для осреднения уравнения воспользуемся статистическим методом и его свойствами осреднения.

Пусть значение некоторой функции f в интервале t равно $f = \bar{f} + f'$, где $\bar{f}$ — среднее значение функции, а f' — пульсационная составляющая. Тогда, используя свойства осреднения, получим

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t};\quad \overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x};\quad \overline{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y};\quad \overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z};$$

$$\overline{f_1 + f_2} = \bar{f}_1 + \bar{f}_2;$$

$$\bar{\bar{f}} = \bar{f};\qquad \overline{\bar{f}_1 f_2'} = 0;\qquad \overline{\bar{f}_1 f_2} = \bar{f}_1 \bar{f}_2.$$

Первая строка получается из определения осредненной величины и переставимости операций дифференцирования и интегрирования. Двумя черточками вверху обозначено повторное осреднение. Затем, считая жидкость несжимаемой, т. е. $\rho = \rho_0$, заменив в уравнениях (2.20) мгновенные значения p, v_x, v_y, v_z суммами $\bar{p} + p'; \bar{v}_x + v_x'; \bar{v}_y + v_y'; \bar{v}_z + v_z'$ и осреднив слагаемые по времени, т. е. произведя интегрирование по времени с одновременным делением на промежутки интегрирования, получим следующее выражение в направлении оси x:

$$\overline{\frac{\partial v_x}{\partial t}} + \overline{(\bar{v}_x + v_x')\frac{\partial(\bar{v}_x + v_x')}{\partial x}} + \overline{(\bar{v}_y + v_y')\frac{\partial(\bar{v}_y + v_y')}{\partial y}} +$$

$$+ \overline{(\bar{v}_z + v_z')\frac{\partial(\bar{v}_z + v_z')}{\partial z}} = f_{mx} - \overline{\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}} + \nu\overline{\Delta v_x}.$$

На каждом участке интегрирования $\bar{v}_x = \text{const}$, но так как в данном случае выполняется осреднение для n участков, то $\overline{\frac{\partial v_x}{\partial t}} \neq 0$.

Так как произведения $\overline{v_x' \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x}}$ и $\overline{\bar{v}_x \frac{\partial v_x'}{\partial x}}$ по свойству осреднения равны нулю, то второе слагаемое левой части уравнения будет иметь вид

$$\bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \overline{v_x' \frac{\partial v_x'}{\partial x}}.$$

Аналогично можно поступить с третьим и четвертым членами левой части уравнения, учитывая, что в каждом промежутке интегрирования $\overline{v'} + \overline{p'} = 0$. Окончательно в направлении оси x будем иметь:

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} = f_{mx} -$$

$$- \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta\bar{v}_x - \left(\overline{v_x' \frac{\partial v_x'}{\partial x}} + \overline{v_y' \frac{\partial v_x'}{\partial y}} + \overline{v_z' \frac{\partial v_x'}{\partial z}}\right),$$

или, учитывая, что $\frac{\partial}{\partial x}(v_x' v_x') = v_x' \frac{\partial v_x'}{\partial x} + v_x' \frac{\partial v_x'}{\partial x}$ и т. п., а $\operatorname{div}\bar{v}' = 0$, получим для оси x

$$v_x' \frac{\partial v_x'}{\partial x} + v_y' \frac{\partial v_x'}{\partial y} + v_z' \frac{\partial v_x'}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(v_x' v_x') - v_x' \frac{\partial v_x'}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(v_y' v_x') - v_x' \frac{\partial v_y'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}(v_z' v_x') - v_x' \frac{\partial v_z'}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(v_x' v_x') +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}(v_y' v_x') + \frac{\partial}{\partial z}(v_z' v_x') - v_x'\left(\frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{\partial v_y'}{\partial y} + \frac{\partial v_z'}{\partial z}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(v_x' v_x') + \frac{\partial}{\partial y}(v_y' v_x') + \frac{\partial}{\partial z}(v_z' v_x').$$

Поступив аналогично для осей y и z и осреднив результаты, получим для всех трех осей:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar v_x}{\partial t} + \bar v_x \frac{\partial \bar v_x}{\partial x} + \bar v_y \frac{\partial \bar v_x}{\partial y} + \bar v_z \frac{\partial \bar v_x}{\partial z} = f_{mx} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar p}{\partial x} + \nu\Delta \bar v_x + \\
&+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\rho_0\overline{v'_x v'_x}\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho_0\overline{v'_y v'_x}\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(-\rho_0\overline{v'_z v'_x}\right),\\
&\frac{\partial \bar v_y}{\partial t} + \bar v_x \frac{\partial \bar v_y}{\partial x} + \bar v_y \frac{\partial \bar v_y}{\partial y} + \bar v_z \frac{\partial \bar v_y}{\partial z} = f_{my} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar p}{\partial y} + \nu\Delta \bar v_y + \\
&+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\rho_0\overline{v'_x v'_y}\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho_0\overline{v'_y v'_y}\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(-\rho_0\overline{v'_z v'_y}\right),\\
&\frac{\partial \bar v_z}{\partial t} + \bar v_x \frac{\partial \bar v_z}{\partial x} + \bar v_y \frac{\partial \bar v_z}{\partial y} + \bar v_z \frac{\partial \bar v_z}{\partial z} = f_{mz} - \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \bar p}{\partial z} + \nu\Delta \bar v_z + \\
&+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\rho_0\overline{v'_x v'_z}\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}\left(-\rho_0\overline{v'_y v'_z}\right) + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(-\rho_0\overline{v'_z v'_z}\right).
\end{aligned}
\right\}
\tag{2.21}
$$

Эти уравнения называются уравнениями Рейнольдса для турбулентного движения несжимаемой жидкости, а величины $\left(-\rho_0\overline{v'_x v'_x}\right)$, $\left(-\rho_0\overline{v'_x v'_y}\right)$, $\left(-\rho_0\overline{v'_x v'_z}\right)$ и т. д. (причем $\rho_0\overline{v'_x v'_y} = \rho_0\overline{v'_y v'_x}$ и т. д.) называют рейнольдсовыми напряжениями, образующими тензор, содержащий нормальные и касательные напряжения Рейнольдса:

$$
\begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho_0\overline{v'_x v'_x} & -\rho_0\overline{v'_x v'_y} & -\rho_0\overline{v'_x v'_z} \\ -\rho_0\overline{v'_y v'_x} & -\rho_0\overline{v'_y v'_y} & -\rho_0\overline{v'_y v'_z} \\ -\rho_0\overline{v'_z v'_x} & -\rho_0\overline{v'_z v'_y} & -\rho_0\overline{v'_z v'_z} \end{pmatrix}.
$$

Уравнения Рейнольдса отличаются от уравнений Навье – Стокса наличием девяти (точнее говоря, шести) дополнительных членов, учитывающих пульсации скорости. Наличие пульсационных скоростей в турбулентном потоке приводит к образованию как бы дополнительных напряжений, которые имелись бы в ламинарном потоке, если бы распределение скоростей в нем совпадало с распределением осредненных скоростей в турбулентном потоке.

Если вернуться к выводу уравнений Навье – Стокса из уравнений (2.13) для несжимаемой жидкости ($\mathrm{div}\bar v = 0$) и сопоставить их с полученными выше уравнениями Рейнольдса, то увидим, что полные нормальные и касательные напряжения выражаются в виде алгебраической суммы обычных напряжений в осредненном потоке вязкой жидкости [см. формулы (2.8) при $\mathrm{div}\bar v = 0$ и (2.5)] и напряжений Рейнольдса в виде

$$
\sigma_x = -p + 2\mu\frac{\partial \bar v_x}{\partial x} - \rho\overline{v_x'^2},
$$

$$
\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial \bar v_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar v_y}{\partial x}\right) - \rho\overline{v'_x v'_x}
$$

и т.д.

В большинстве случаев в ядре потока турбулентные напряжения больше ламинарных, поэтому последние часто можно не учитывать. Граничные условия с физической точки зрения остаются теми же, что и при ламинарном режиме течения (условия прилипания), т. е. на стенке обращаются в нуль все составляющие скорости, в том числе и пульсационные. На стенке остаются только нормальные и касательные напряжения ламинарного течения. У самой стенки образуется так называемый ламинарный подслой, в котором силы вязкости значительно превышают силы инерции (более подробно об этом см. в гл. 6). Следует подчеркнуть, что для расчета параметров осредненного течения необходимо знать связь между пульсационными скоростями и скоростями осредненного движения, что часто формируется в виде проблемы замыкания уравнений Рейнольдса.

В основе проблемы замыкания до сих пор лежит эмпирика, хотя и были предложены некоторые обобщения экспериментальных данных, приведшие к созданию полуэмпирических методов расчета (см. в гл. 6).

В данном разделе ограничимся лишь упоминанием в качестве примера результатов термоанемометрических измерений турбулентных пульсаций в прямоугольном канале шириной 1 м и высотой $H = 24{,}4$ см. Скорость воздуха в средней части потока $v_0 = 100$ м/с. На рис. 40 приведены эпюра скорости $\bar v_x / v_0$, осредненные значения продольной и поперечной пульсаций $\sqrt{\overline{v_x'^2}}$ и $\sqrt{\overline{v_y'^2}}$, касательных напряжений τ / ρ_0 и осредненной величины $\left(-\overline{v'_x v'_y}\right)$, пропорцио-нальной с точностью до плотности потока ρ_0 турбулентному каса-тельному напряжению.

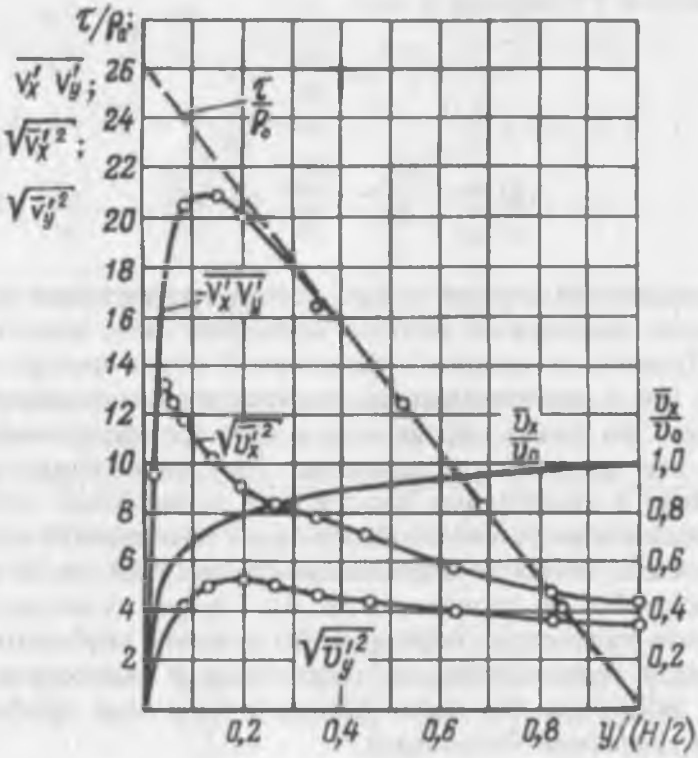


Рис. 40. Результаты измерений некоторых параметров потока в сечении канала

Пульсации и турбулентное касательное напряжение на стенке равны нулю, но имеют максимумы вблизи стенки. Ламинарное трение равно разности между ординатами кривых τ/ρ_0 и $\left(-\overline{v'_x v'_y}\right)$, оно максимально на стенке и быстро исчезает при удалении от нее.

Первая попытка найти связь турбулентного касательного напряжения с полем осредненных скоростей была сделана Буссинеском. По аналогии с формулой Ньютона для ламинарного режима, когда $\tau_л = \mu\,(\mathrm{d}\bar{v}_x / \mathrm{d}y)$, где μ — физическая величина коэффициента динамической вязкости, Буссинеск ввел понятие коэффициента турбулентного обмена $A_т$; тогда

$$\tau_т = -\rho_0 \overline{v'_x v'_y} = A_т\,(\mathrm{d}\bar{v}_x / \mathrm{d}y),$$

причем величина $A_т$ не является физической величиной, а зависит от расстояния до стенки и от эпюры скоростей в соответствии с рис. 40.

По аналогии с коэффициентом кинематической вязкости $\nu = \mu / \rho_0$ вводят кинематический коэффициент турбулентной вязкости $\nu_т = A_т / \rho_0$; тогда

$$\tau_т = -\rho_0\,\nu_т\,(\mathrm{d}\bar{v}_x / \mathrm{d}y).$$

В соответствии с рис. 40, коэффициент $\nu_т$ должен быть функцией некоторой длины и производной от скорости, т. е.

$$\nu_т = f\,(l,\ \mathrm{d}\bar{v}_x / \mathrm{d}y).$$

В соответствии с методом размерностей положим, что

$$\nu_т = l^a\,(\mathrm{d}\bar{v}_x / \mathrm{d}y)^b.$$

Но размерность величины $\nu_т$ в системе масса — длина — время

$$[\nu_т] = \left[\frac{A_т}{\rho_0}\right] = \left[\frac{\tau_т}{(\mathrm{d}\bar{v}_x / \mathrm{d}y)\rho_0}\right] = \left[\frac{\dfrac{ML}{L^2T^2}}{\dfrac{L}{LT}\,\dfrac{M}{L^3}}\right] = L^2T^{-1},$$

или

$$[\nu_т] = L^a\left(\frac{L}{TL}\right)^b = L^aT^{-b}.$$

8-3375

Следовательно, $a = 2$, $b = 1$, откуда

$$\nu_т = l^2 (d\bar{v}_x/dy)$$

и

$$\tau_т = \rho_0 l^2 (d\bar{v}_x/dy)^2.$$

Таким образом установлена искомая связь касательных напря-жений Рейнольдса с полем осредненных скоростей. Физический смысл характерной длины l был ранее установлен Прандтлем при анализе турбулентного течения над плоской пластиной (рис. 41).

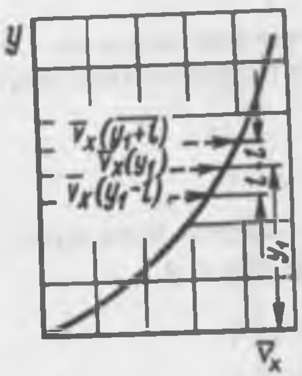


Рис. 41. К объяснению по-нятия о пути смешения

При турбулентном течении в потоке возникают жидкие объемы, имеющие собственную скорость и движущиеся в продольном и поперечном направлениях с сохранением продольной составляющей импульса. Пусть один из таких объемов, возникший в нижнем слое $(y_1 - l)$ и имеющий продольную скорость $\bar{v}_x(y_1 - l)$, перемещается в поперечном направлении на расстояние l (см. рис. 41). Этот объем, попав в слой y_1 со скоростью $(y_1 - l)$, будет тормозить частицы слоя y_1, т. е. разность продольных скоростей можно считать продольной пульсацией v'_x. Эта разность может быть выражена в форме ряда Тейлора

$$\bar{v}_x(y_1) = \bar{v}_x(y_1 - l) + l\,(d\bar{v}_x / dy),$$

откуда

$$v'_{xн} = l\,(d\bar{v}_x / dy) < 0.$$

Для объема, попавшего в слой y_1 из верхнего слоя $(y_1 + l)$ и ускоренного его частицами, получим

$$\bar{v}_x(y_1 + l) = \bar{v}_x(y_1) + l\,(d\bar{v}_x / dy),$$

откуда

$$\bar{v}_{xв} = l\,(d\bar{v}_x / dy) > 0.$$

Средняя по времени пульсация скорости

$$|\bar{v}_x|_{ср} = \frac{1}{2}\left(|\bar{v}_{xн}| + |\bar{v}_{xв}|\right) = l\,|d\bar{v}_x / dy|.$$

Поперечные пульсации скорости в силу уравнения неразрывности должны иметь тот же порядок, что и продольные пульсации. Следует лишь отметить, что положительная поперечная пульсация (из слоя $(y_1 - l)$ в слой y_1) дает отрицательную продольную пульсацию и наоборот, т. е. выражение v'_x / v'_y всегда отрицательно.

Для касательного напряжения Рейнольдса Прандтль получил формулу

$$\tau_т = -\rho_0 \overline{v'_x v'_y} = \rho_0 l^2 (d\bar{v}_x / dy)^2 = \rho_0 l^2 \left|\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right| \frac{d\bar{v}_x}{dy},$$

так как касательное напряжение имеет тот же знак, что и производная продольной скорости по нормали к направлению потока.

Полученная формула Прандтля совпадает с формулой для $\tau_т$, полученной выше из теории размерностей.

Величина l называется путем перемешивания, что напоминает понятие свободного пути молекулы в физике.

Опыт показывает, что вблизи стенки путь перемешивания прямо пропорционален расстоянию от стенки, т. е.

$$l = æy,$$

где $æ \approx 0,4$.

Для внешней части пограничного слоя иногда берут отношение длины l к толщине слоя δ

$$l/\delta = 0,08 \ldots 0,10$$

или полагают

$$l/\delta = 0,4\,(y/\delta) - 0,5\,(y/\delta)^2 + 0,2\,(y/\delta)^3.$$

8*

Из предположения о подобии полей пульсационных скоростей во всем потоке Карман получил формулу для l в виде

$$l = \varkappa|(d\bar{v}_x / dy)/(d^2\bar{v}_x / dy^2)|,$$

где $\varkappa$ = const, определяемая из опыта.

Согласно гипотезе Ван-Дрийста величина

$$l = \varkappa\eta\left[1 - \exp\left(-\eta / A^*\right)\right],$$

где $\eta = y/l_*$, $l_* = \nu/v_*$; $v_* = \sqrt{\tau_0 / \rho_0}$ — динамическая скорость, $A^* = 26$.

Существуют и другие подходы к замыканию уравнений Рейнольдса.

Уравнения движения вязкой жидкости в цилиндрических координатах

На практике при решении задач о течении вязкой жидкости в узлах энергоустановок часто приходится иметь дело с осесимметричными каналами различной формы (трубы, патрубки и т. п.), и в этих случаях удобно применение уравнений движения в цилиндрических координатах.

Воспользовавшись обозначениями, введенными при выводе уравнения неразрывности и для выражений вихря скорости в цилиндрических координатах (см. §6), запишем выражение для проекций скорости в произвольной точке потока:

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\theta = \frac{dr\theta}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

В векторной форме записи:

$$\bar{v} = v_r\bar{i} + v_\theta\bar{j} + v_z\bar{k},$$

или

$$\bar{v} = \frac{dr}{dt}\bar{i} + \frac{dr\theta}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k},$$

где орты $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — единичные векторы, причем направления $\bar{i}$ и $\bar{j}$ зависят от выбора в пространстве, а направление $\bar{k}$ остается постоянным (параллельным оси z) для всех точек потока.

Уравнение движения вязкой жидкости в цилиндрических координатах получим при помощи уравнения движения Навье — Стокса в векторной форме, которая не зависит от выбора системы координат:

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{f}_m - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\mu}{\rho}\Delta\bar{v}\frac{1}{3}\frac{\mu}{\rho}\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\bar{v}\right).$$

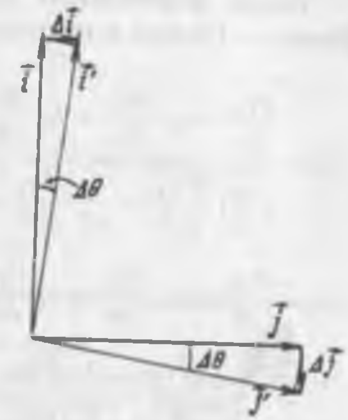


Рис. 42. К выводу уравнения движения в цилиндрических координатах

Из рис. 42 следует, что производные по времени от $\bar{i}$ и $\bar{j}$ будут равны соответственно

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\bar{i}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{1 \cdot \Delta\theta \cdot \bar{j}}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}\bar{j}$$

и аналогично

$$\frac{d\bar{j}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\bar{j}}{\Delta t} = -\frac{d\theta}{dt}\bar{i}.$$

Подставляя эти значения в выражение для dv/dt и объединяя члены при $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, получаем

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\bar{i} + \left[\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d}{dr}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)\right]\bar{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}.$$

Но

$$\left[\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)\right] + \frac{1}{r}\left(\frac{dr^2}{dt}\frac{d\theta}{dr} + r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right),$$

тогда

$$\frac{d\bar v}{dt} = \left[\frac{dv_r}{dt} - \frac{v_\theta^2}{r}\right]\bar i + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\frac{d\theta}{dt}(rv_\theta)\right]\bar j + \frac{d^2 z}{dt}\bar k.$$

После формальных преобразований правой части уравнения Навье — Стокса в векторной форме получим

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta\frac{\partial v_r}{r\partial\theta} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = f_{mr} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \\
&+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} - \frac{v_r}{r^2}\right),\\
&\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\theta\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta} + v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} = f_{m\theta} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial\theta} + \\
&+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2}\right),\\
&\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_\theta\frac{\partial v_z}{r\partial\theta} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = f_{mz} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \\
&+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (2.22)$$

При этом уравнение неразрывности имеет вид (1.22)

$$\operatorname{div}\bar v = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Нормальные и касательные напряжения в координатных площадках элемента объема в цилиндрической системе координат (см. рис. 23) подсчитываются по формулам

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r},\\
\sigma_\theta &= -p + 2\mu\left(\frac{\partial v_\theta}{r\partial\theta} + \frac{v_r}{r}\right),\\
\sigma_z &= -p + 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \quad (2.23)$$

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{r\theta} &= \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right],\\
\tau_{\theta z} &= \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right],\\
\tau_{zr} &= \mu\left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (2.24)$$

Выражения (1.22), (2.22) − (2.24) будут использованы при точных решениях ряда задач.

Контрольные вопросы к §10

1. Какой вид имеет уравнение движения сплошной среды, выраженное через массовые и поверхностные напряжения?
2. Какой вид имеет уравнение движения невязкой среды?
3. Применимо ли уравнение Громеки — Лэмба к анализу течения вязкой среды?
4. Какие допущения лежат в основе вывода уравнения Навье − Стокса?
5. Какое допущение лежит в основе вывода уравнений Рейнольдса из уравнений Навье — Стокса?
6. Какими величинами в основном оцениваются турбулентные потоки?
7. Сформулируйте свойства осреднения параметров турбулентных потоков?
8. Чем различаются нормальные и касательные рейнольдсовы напряжения?
9. Чем отличаются уравнения Рейнольдса от уравнений Навье — Стокса?
10. Какие составляющие входят в состав полных нормальных и касательных напряжений в осредненном потоке вязкой жидкости?
11. Что такое кинематический коэффициент турбулентной вязкости?
12. Как связано касательное напряжение Рейнольдса с полем осредненных скоростей?
13. Что такое путь перемешивания в турбулентном потоке?
14. В чем заключается проблема замыкания уравнений Рейнольдса?

§11. УРАВНЕНИЕ СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ. ДИССИПАТИВНАЯ ФУНКЦИЯ

Рассмотреные выше уравнения неразрывности (1.16) и движения (2.19) (кроме уравнений Рейнольдса) являются четырьмя дифференциальными уравнениями в частных производных относительно пяти неизвестных величин: трех проекций вектора скорости (v_x, v_y, v_z), давления p и плотности ρ. В случае течения несжимаемой жидкости плотность ρ можно исключить, считая ее постоянной величиной: $\rho = \rho_0$. Тогда число неизвестных становится равным числу уравнений — четырем, т. е. система замыкается, и при наличии граничных и начальных (при нестационарном режиме течения) условий эта система может быть решена — получено поле скоростей и давлений в заданной области во времени. Коэффициент вязкости μ при этом решении тоже считается постоянной величиной. Нелинейность уравнений даже в этом простейшем случае приводит к необходимости получать решение численными методами с помощью ЭВМ.

В случае же решения задач на течение сжимаемой среды, т.е. при $\rho \neq \mathrm{const}$, или задач, в которых требуется учесть зависимость μ от температуры среды T, даже при $\rho = \mathrm{const}$ упомянутая выше система четырех уравнений становится незамкнутой. Замыкающим пятым уравнением становится уравнение сохранения энергии, то самое третье уравнение, которое наряду с уравнением сохранения массы (уравнение неразрывности) и уравнением сохранения импульса (уравнение движения) образует систему трех уравнений сохранения, на которых построена современная физика макромира.

Итак, в дополнение к уравнению неразрывности и уравнениям движения, связывающим параметры потока и их производные по координатам и по времени в произвольной материальной точке, необходимо получить уравнение сохранения энергии для этого потока. Для этого рассматривается некоторая масса жидкости, которую можно было бы "стянуть" в точку в связи с непрерывностью изменения параметров потока.

Закон сохранения энергии этой системы заключается в том, что приращение полной энергии Э массы жидкости за единицу времени равно работе L, совершенной внешними силами, и притоку теплоты Q за то же время:

$$\frac{dЭ}{dt} = L + Q,$$

причем положительными считаются подведенная работа и подведенная теплота. Под полной энергией единицы массы здесь понимается сумма ее внутренней энергии $\varepsilon = c_V T$ и кинетической энергии $v^2 / 2$.

В интегральной форме уравнение сохранения энергии для выделенного объема ΔV с поверхностью ΔS принимает вид

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Delta V}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)\rho\, dV = \int\limits_{\Delta V}\bar{f}_m\bar{\nabla}\rho\, dV + \int\limits_{\Delta S}\bar{p}_n\bar{v}\, dS + \int\limits_{\Delta S}\bar{Q}\bar{n}\, dS + \int\limits_{\Delta V}Q_V\, dV. \quad (2.25)$$

Первый и второй члены правой части определяют работу внешних сил — массовых $\bar{f}_m$ и поверхностных $\bar{p}_n$, а третий и четвертый члены — подведенную теплоту, причем теплота $\bar{Q}$ состоит из теплоты от теплопроводности $\bar{Q}_т$, конвекции $\bar{Q}_к$, излучения $\bar{Q}_{изл}$, а теплота Q_V включает в себя теплоту химических реакций $Q_{хим}$, диссоциации $Q_{дис}$ и ионизации $Q_{ион}$. Теплота джоулева нагрева $Q_{дж}$ в случае движения проводящей среды в электромагнитном поле связана с работой пондеромоторных сил, входящих в первый член правой части уравнения (2.25).

Для перехода к дифференциальной форме записи уравнения сохранения энергии выполняется следующая операция с учетом того, что $\rho\, dV = dm = \mathrm{const}$ для данного объема:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Delta V}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)\rho\, dV = \int\limits_{\Delta V}\frac{d}{dt}\left[\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)(\rho\, dV)\right] = \int\limits_{\Delta V}\rho\, dV\frac{d}{dt}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right) =$$

$$= \int\limits_{\Delta V}\rho\frac{d}{dt}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)dV.$$

Третий член уравнения (2.25) преобразуется по формуле Остроградского — Гаусса:

$$\int\limits_{\Delta S}\bar{Q}\bar{n}\, dS = \int\limits_{\Delta V}\mathrm{div}\, Q\, dV.$$

Работу поверхностных сил [второй член (2.25)] подсчитываем для параллелепипеда объемом $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ (общность полученных при этом результатов не нарушится, так как выделенный объем затем "стягивается" в точку).

Пользуясь формулой (2.1), получаем

$$\int\limits_{\Delta S} \bar{p}_n \bar{v}\, dS = \int\limits_{\Delta S} \bar{p}_x \bar{v} \cos(\bar{n}, x)\, dS + \int\limits_{\Delta S} \bar{p}_y \bar{v} \cos(\bar{n}, y)\, dS +$$

$$+ \int\limits_{\Delta S} \bar{p}_z \bar{v} \cos(\bar{n}, z)\, dS.$$

При вычислении каждого из интегралов в правой части равенства учитываем, что косинус угла между $\bar{n}$ и осью координат равен нулю для всех граней параллелепипеда, кроме двух граней, перпендикулярных к данной оси (рис. 43).

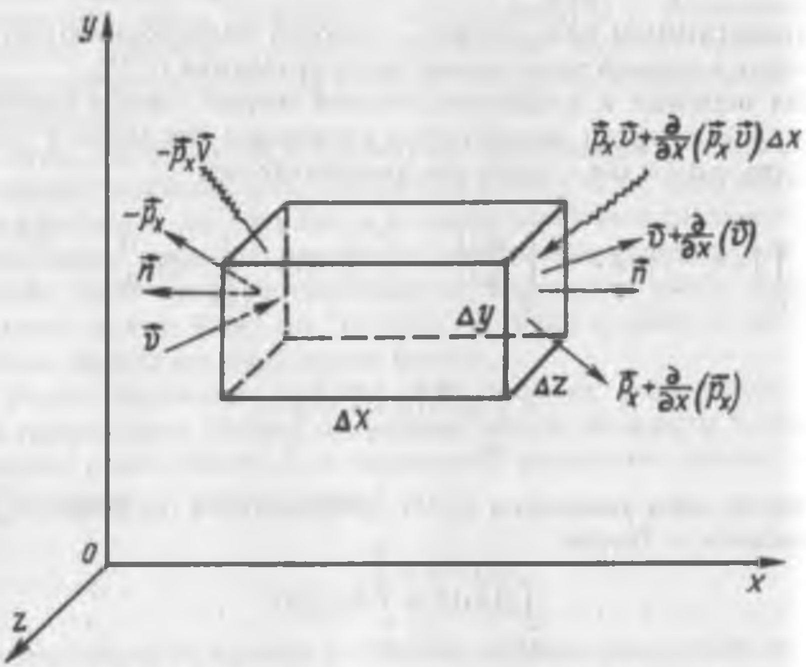


Рис. 43. К выводу уравнения сохранения энергии

Следовательно, разлагая в ряд Тейлора произведение $\bar{p}_x\bar{v}$ и считая его постоянным для грани, получаем

$$\int\limits_{\Delta S} \bar{p}_x \bar{v} \cos(\bar{n}, x)\, dS = (-p_x \bar{v})\Delta z\, \Delta y + \left[\bar{p}_x \bar{v} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{p}_x \bar{v})\Delta x\right]\Delta z\, \Delta y =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\bar{p}_x \bar{v})\Delta x\, \Delta z\, \Delta y = \frac{d}{dx}(\bar{p}_x \bar{v})\Delta V,$$

откуда следует, что

$$\int\limits_{\Delta S} \bar{p}_n \bar{v}\, dS = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p}_x \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{p}_y \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{p}_z \bar{v})\right] =$$

$$= \int\limits_{\Delta V} \left[\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p}_x \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{p}_y \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{p}_z \bar{v})\right] dV,$$

где производные типа $\frac{\partial}{\partial x}(\bar{p}_x \bar{v})$ вычисляются в одной из точек объема ΔV и остаются постоянными для всего объема ΔV.

Интегрируя все члены (2.25) по объему ΔV и сокращая результат на ΔV, получаем уравнение сохранения энергии в дифференциальной форме:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) = \bar{f}_m \rho \bar{v} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{p}_x \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{p}_y \bar{v}) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(\bar{p}_z \bar{v}) + \operatorname{div} \bar{Q} + Q_V, \qquad (2.26)$$

справедливой для произвольной точки потока.

Выполняя дифференцирование произведений типа $\bar{p}_x \bar{v}$ и группируя члены уравнения (2.26) в две строки, получаем

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} - \left[\bar{p}_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{p}_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{p}_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \operatorname{div} \bar{Q} + Q_V\right] +$$

$$+ \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) - \bar{v}\left[\bar{f}_m \rho + \left(\frac{\partial \bar{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{p}_z}{\partial z}\right)\right] = 0. \qquad (2.27)$$

Первый член нижней строки (2.27) может быть переписан в виде

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\rho v\frac{dv}{dt};$$

но

$$\rho\bar{v}\frac{dv}{dt}=\rho\left(\bar{v}_x\bar{i}+\bar{v}_y\bar{j}+\bar{v}_z\bar{k}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{v}_x\bar{i}+\bar{v}_y\bar{j}+\bar{v}_z\bar{k}\right)=\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right),$$

поэтому

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\rho\bar{v}\frac{d\bar{v}}{dt}.$$

Следовательно, нижняя строка (2.27) представляет собой полученное выше уравнение движения сплошной среды (2.12), умноженное на вектор скорости $\bar{v}$ в данной точке потока, а потому эта строка всегда равна нулю.

Таким образом, уравнение сохранения энергии распадается на две (равные нулю каждая) строки — нижняя указывает, что полное изменение кинетической энергии единицы массы $\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)$ происходит под воздействием работы единичной массовой силы $\bar{f}_m\bar{v}$ и работы единичных нормальных и касательных сил (напряжений), т. е. может быть истолковано как уравнение сохранения единицы массы без учета внутренних энергетических процессов, происходящих в движущейся среде.

Первые три слагаемых в квадратных скобках верхней строки (2.27) могут быть переписаны с учетом того, что $\bar{v}=v_x\bar{i}+v_y\bar{j}+v_z\bar{k}$, а $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$ определяются выражениями (2.2), в которых напряжения σ и τ связаны с полем скоростей в потоке формулами (2.5) и (2.8). Тогда

$$\bar{p}_x\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}+\bar{p}_y\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\bar{p}_z\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}=-p\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\bar{k}\right)+$$

$$+ \mu D = -p \operatorname{div} \bar{v} + \mu D,$$

где скалярная величина D называется диссипативной функцией и подсчитывается по выражению

$$D = 2\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right] - \frac{2}{3}(\operatorname{div} \bar{v})^2 +$$

$$+\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2. \qquad (2.28)$$

Следует отметить, что диссипатнвная функция D по физической природе связана со скоростями деформации "жидких" отрезков $\varepsilon_x = \dfrac{\partial v_x}{\partial x}$ и т. п. и "жидких" прямых углов $\theta_{xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right)$, рассмотренных в гл. 1, а также с величиной $\operatorname{div} \bar{v}$, определяющей скорость объемной деформации выделенной частицы. Член μD учитывает работу внутренних для выделенной частицы сил трения (множитель μ) при ее деформации. Эта работа целиком переходит в теплоту и рассеивается (диссипирует) в жидкости. Следовательно, верхняя строка уравнения (2.27) принимает вид

$$\rho \frac{d\varepsilon}{dt} + p \operatorname{div} \bar{v} = \mu D + \operatorname{div} \bar{Q} + Q_V. \qquad (2.29)$$

Физически это означает, что полное изменение внутренней энергии единицы объема $\rho \dfrac{d\varepsilon}{dt}$ и работа ее деформации под действием сил давления $p \operatorname{div} \bar{v}$ происходят в результате работы сил трения в объеме частицы, подвода теплоты $\bar{Q}$ в объеме через его поверхность и выделения теплоты Q_V внутри объема.

Помимо полученной формы записи уравнения сохранения энергии (2.29) в расчетах применяется запись уравнения сохранения энергии через энтальпию $h = \varepsilon + p/\rho$.

Подставляя dε в уравнение (2.29), получаем

$$\rho\frac{dh}{dt} - \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) + p\,\mathrm{div}\,\bar{v} = \mu D + \mathrm{div}\,\bar{Q} + Q_V$$

или, раскрывая второе слагаемое левой части с заменой $d\rho/dt = -\rho\,\mathrm{div}\,\bar{v}$ по уравнению (1.17), получаем

$$\rho\frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} + \mu D + \mathrm{div}\,\bar{Q} + Q_V, \tag{2.30}$$

откуда следует, что изменение энтальпии связано как с тепловыми процессами, так и с изменением статического давления в потоке (последнее находит применение в теории лопаточных машин).

Если ввести энтальпию в исходную форму записи уравнения (2.25) и учесть преобразования, сделанные при выводе уравнения Навье — Стокса (2.19) и уравнения (2.29), то уравнение сохранения энергии получит вид

$$\rho\frac{d}{dt}\left(h + \frac{v^2}{2}\right) = \bar{f}_m\rho\bar{v} + \left[\mu\,\Delta\bar{v} + \frac{1}{3}\mu\,\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\,\bar{v}\right)\right]\bar{v} + \tag{2.31}$$

$$+ \mu D + \mathrm{div}\,\bar{Q} + Q_V.$$

Уравнения (2.29) – (2.31) справедливы для произвольной точки потока сжимаемой вязкой жидкости при наличии теплообмена.

В частном случае течения невесомой ($\bar{f}_m = 0$) и невязкой ($\mu = 0$) жидкости при отсутствии теплообмена ($\bar{Q} = 0$ и $Q_V = 0$) получим уравнение сохранения энергии в виде

$$\frac{d}{dt}\left(h + \frac{v^2}{2}\right) = \frac{dh^*}{dt} = \frac{\partial h^*}{\partial t} + \left(\bar{v}\nabla\right)h^* = 0 \tag{2.32}$$

или

$$h + \frac{v^2}{2} = h^* = \mathrm{const},$$

откуда в установившемся течении скалярное произведение $\left(\bar{v}\nabla\right)h^* = \bar{v}\cdot\nabla h^* = 0$, т. е. вектор скорости $\bar{v}$ перпендикулярен к градиенту энтальпии заторможенного потока. Следовательно, полная энтальпия в этом случае постоянна вдоль линии тока.

Следует подчеркнуть, что уравнение сохранения энергии в форме (2.32), строго говоря, соответствует изоэнтропийному течению газа [см. (2.34)]. В то же время в термодинамике уравнение энергии для потока газа без внешнего тепло- и энергообмена записывается в виде $d\left(h + \frac{v^2}{2}\right) = 0$, причем не оговаривается характер процесса. Следовательно, уравнение (2.32) можно применять как при изоэнтропийном процессе, так и в других случаях, когда работа трения полностью переходит в теплоту (см., например, гл. 3).

Наконец, выражая уравнения сохранения энергии через энтропию s и помня, что

$$T ds = d\varepsilon + p\,d\,(1/\rho) = d\varepsilon + (p/\rho)\,(\mathrm{div}\,\bar{v})\,dt,$$

пользуясь уравнением (2.29), получаем

$$\rho T\frac{ds}{dt} = \mu D + \mathrm{div}\,\bar{Q} + Q_V. \tag{2.33}$$

Из уравнения (2.33) следует, что рост энтропии в произвольной точке потока обусловлен работой трения (диссипацией) и подводом теплоты к частице.

Для течения невязкого газа, подчиняющегося уравнению состояния $p/\rho = RT$, при отсутствии теплообмена уравнение сохранения энергии принимает вид

$$ds = 0,$$

или

$$p/\rho^\gamma = \mathrm{const}. \tag{2.34}$$

Последняя форма записи уравнения сохранения энергии термодинамически совершенного (идеального) газа получила широкое применение в газовой динамике газотурбинных двигателей в качестве замыкающего уравнения для системы дифференциальных уравнений неразрывности и движения (кроме уравнений Рейнольдса для турбулентных потоков) с пятью неизвестными v_x, v_y, v_z, p и ρ.

Уравнение движения в форме Крокко

При расчете параметров газа в ступени турбомашины можно воспользоваться уравнением движения в энергетической форме, впервые предложенным Л. Крокко.

Для вывода уравнения Крокко рассмотрим уравнение Громеки – Лэмба (2.18) и выражение для энтальпии любой газообразной среды $h = \varepsilon + p/\rho$.

Вычисляя далее оператор ∇ от энтальпии и пользуясь первым и вторым законами термодинамики, получаем

$$\nabla Q = T\nabla s = \nabla\varepsilon + p\nabla(1/\rho),$$

откуда

$$T\nabla s = \nabla h - (1/\rho)\nabla p = \nabla h^{*} - \nabla v^2/2 - (1-\rho)\nabla p.$$

Исключив из (2.18) выражение $(-\nabla v^2/2 - (\nabla p)/\rho)$, получим уравнение

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + 2(\bar{\omega}\times\bar{v}) = \bar{f}_m + T\nabla s + \nabla h^{*}, \qquad (2.35)$$

которое для совершенного газа при $h^{*} = c_pT^{*}$ принимает вид

$$\frac{d\bar{v}}{dt} + 2(\bar{\omega}\times\bar{v}) = \bar{f}_m + T\nabla s - \frac{\gamma}{\gamma-1}R\nabla T^{*}. \qquad (2.35.\text{ а})$$

Выражение (2.35. а) называется уравнением движения в энергетической форме, или уравнением движения газа в форме Крокко. Оно позволяет сделать вывод, что установившееся течение газа при отсутствии поля внешних сил и при постоянном значении энтальпии торможения является потенциальным, если энтропия газа постоянна. Если энтропия переменна, то при тех же условиях течение будет вихревым (особый случай винтового дви жения, когда $\bar{\omega} \parallel \bar{v}$, в данном случае не рассматривается, хотя можно заметить, что в винтовом установившемся движении при $\bar{f}_m = 0$ и $S = \text{const}$ h^* постоянна для всего потока).

Теорема Томсона

Если массовые силы имеют потенциал, жидкость идеальна и течение баротропно (плотность зависит только от давления), то циркуляция скорости по любому замкнутому "жидкому" контуру остается постоянной при движении жидкости.

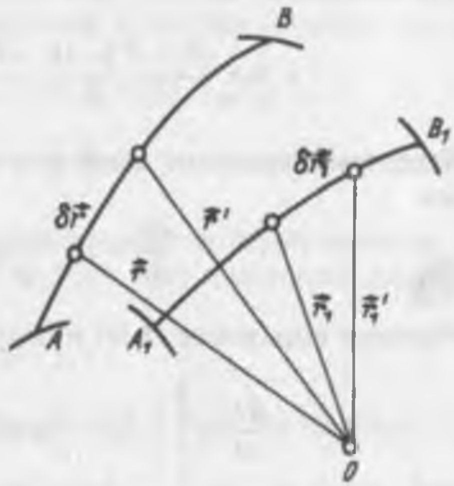


Рис. 44. Схема перемещения элемента "жидкой" линии *AB*

Предположим, что среда и поле скоростей непрерывны. Для доказательства теоремы выделим в движущейся жидкости линию, состоящую из одних и тех же частиц, т. е. "жидкую" линию *AB* (рис. 44). В силу непрерывности среды и поля скоростей через промежуток времени Δt линия *AB* может переместиться в положение A_1B_1, причем ее длина может измениться.

Рассмотрим интеграл $I = \int\limits_A^B \bar{v}\delta\bar{r}$, являющийся циркуляцией вектора скорости $\bar{v}$ вдоль *AB*, где $\delta\bar{r}$ берется вдоль "жидкой" линии, а δ означает дифференциал параметра для жидкой линии.

Составим производную по времени от этого интеграла:

$$\frac{dI}{dt} = \int\limits_A^B \left[\frac{d\bar{v}}{dt}\delta\bar{r} + \bar{v}\frac{d\delta\bar{r}}{dt} \right], \tag{2.36}$$

9–3078

$$\frac{d(\delta \bar{r})}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta \bar{r}_1 - \delta \bar{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\bar{r}_1' - \bar{r}_1) - (\bar{r}' - \bar{r})}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\bar{r}_1' - \bar{r}') - (\bar{r}_1' - \bar{r})}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{r}_1' - \bar{r}'}{\Delta t} -$$

$$- \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\bar{r}_1' - \bar{r}') - (\bar{r}_1' - \bar{r})}{\Delta t} = \bar{v}' - \bar{v} = \delta \bar{v}.$$

Используя уравнение движения в форме Эйлера в векторно записи

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{f}_m - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

преобразуем выражение (2.36) и получим, что

$$\frac{dI}{dt} = \int_A^B \left\{ \left(\bar{f}_m - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \right) \delta \bar{r} + \bar{v} \delta \bar{v} \right\}.$$

По предположению, массовые силы имеют потенциал (U), т.

$$\bar{f}_m = \operatorname{grad} U.$$

Очевидно, что

$$\bar{f}_m \delta \bar{r} = \operatorname{grad} U \delta \bar{r} = \delta U;$$

$$\operatorname{grad} p \cdot \delta p; \qquad \bar{v} \delta \bar{v} = \delta \left(\frac{v^2}{2} \right).$$

Подставляя эти выражения в формулу (2.36), получаем

$$\frac{dI}{dt} = \int_A^B \left\{ \delta U - \frac{\delta p}{\rho} + \delta \left(\frac{v^2}{2} \right) \right\},$$

или

$$\frac{dI}{dt} = U_B - U_A - \int_A^B \frac{\delta p}{\rho} + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2}.$$

Таким образом изменяется значение интеграла, взятого вдоль "жидкой" линии AB.

Если точки A и B совпадают, т. е. "жидкая" линия AB замыкается, то интеграл I дает циркуляцию Γ вектора скорости по замкнутому контуру.

В этом случае $U_A = U_B$, $v_A = v_B$, и тогда

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint \frac{\delta p}{\rho}. \qquad (2.37)$$

Используем последнее предположение о баротропности течения жидкости. В этом случае $\delta p / \rho = f(p)$ и интеграл по замкнутому контуру

$$\oint \delta p / \rho = 0,$$

так как в одной и той же точке не может быть двух разных давлений.

Таким образом, получаем $d\Gamma/dt = 0$, т. е. $\Gamma = \text{const}$. Теорема доказана.

Отсюда следует, что если в идеальной жидкости при баротропном и непрерывном течении и при наличии потенциала массовых сил в начальный момент времени не было вихрей, то их не будет и в дальнейшем. Этот результат находит применение при анализе появления подъемной силы в теории крыла.

Контрольные вопросы к §11

1. При решении каких задач механики жидкости и газа необходимо использовать уравнение сохранения энергии?
2. Сформулируйте уравнение сохранения энергии в интегральной форме.
3. Покажите, что уравнение сохранения энергии в дифференциальной форме распадается на две части, каждая из которых равна нулю.
4. Что такое диссипативная функция?
5. Чем вызывается полное изменение внутренней энергии под действием сил давления?
6. В каких условиях уравнение изоэнтропы заменяет собой уравнение энергии?
7. Какие параметры связывает уравнение движения в форме Крокко?
8. При каких условиях сохраняется циркуляция скорости по замкнутому контуру?

9*

§12. УРАВНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ И МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

В практических расчетах при решении многих задач приклад- ной механики жидкости и газа широкое применение получили уравнения количества движения и момента количества движения. Эти уравнения относятся к конечному объему жидкой среды и записываются в алгебраической форме, хотя в исходном положе- нии в соответствии с формулировкой Эйлера (изменение коли- чества движения выделенной массы Δm жидкости за время dt рав- но импульсу внешних сил за это же время) $d\bar{K} = \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i\right)dt = \bar{F}_\Sigma dt$, т. е. это уравнение имеет дифференциальную форму записи, где $\bar{K}$ — вектор количества движения (для массы Δm величина $\bar{K} = \bar{v}\Delta m$); $\bar{v}$ — скорость жидкой частицы Δm; $\bar{F}_i$ — i-я внешняя сила, действующая на массу Δm.

По существу, формулировка Эйлера тождественна второму за- кону механики Ньютона для некоторой постоянной массы Δm:

$$\frac{d}{dt}\bar{K} = \Delta m \frac{d\bar{v}}{dt} \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i = \bar{F}_\Sigma .$$

Формулировка Эйлера особенно удобна при определении си- лового взаимодействия потока с ограничивающими его стенками при установившемся движении жидкости в каналах, для которых скорости потока можно считать постоянными при входе и выходе из канала (рис. 45). Тогда, рассматривая массу жидкости в объеме V_{12} в момент времени t_1 и в объеме $V_{1'2'}$ через время dt, можно записать, что

$$d\bar{K} = \bar{K}_{1'2'} - \bar{K}_{12} = \bar{F}_\Sigma dt. \qquad (2.$$

Но поскольку при установившемся движении скорости потока во всех точках объема не изменяются во времени, то количество движения в объеме $V_{1'2}$ остается постоянным и равным

$$\bar{K}_{1'2} = \int_{V'2} \bar{v}\rho dV = \text{const}.$$

Следовательно, изменение количества движения всей массы жидкости

$$d\bar{K} = \left[\left(\bar{K}_{1'2'} + \bar{K}_{22'}\right) - \left(\bar{K}_{11'} + \bar{K}_{1'2}\right)\right] =$$

$$= \bar{K}_{22'} - K_{11'} = \bar{v}_2\left(v_2 dt\rho_2 A_2\right) - \bar{v}_1\left(v_1 dt\rho_1 A_1\right) = \left(\bar{v}_2 - \bar{v}_1\right)G dt,$$

где произведения $v_1\rho_1 A_1 = v_2\rho_2 A_2 = G$, т. е. равны расходу жид- кости через данный канал.

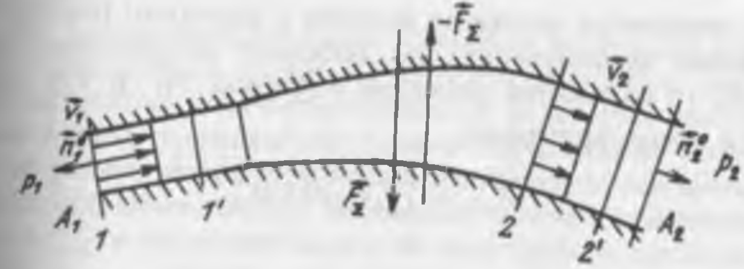


Рис. 45. К выводу уравнения Эйлера для импульса силы

Сумму внешних сил $\bar{F}_\Sigma$ можно представить в виде трех сла- гаемых: две поверхностные силы в торцовых сечениях *1* и *2* соот- ветственно и боковая поверхностная сила, действующая на боко- вую поверхность объема V_{12}, которая по третьему закону механи- ки Ньютона равна силе, с которой поток действует на боковые стенки канала, т. е. равна силе $(-\bar{F}_\Sigma)$. Поверхностные силы в торцовых сечениях при сделанном предположении о постоянстве скоростей потока в каждом сечении можно считать равными про- изведениям статических давлений на площади соответствующих сечений (силы трения в них равны нулю).

Следовательно,

$$d\bar{K} = \left(\bar{v}_2 - \bar{v}_1\right)G dt = \left(\bar{F}_\Sigma - p_1 n_1^0 A_1 - p_2 n_2^0 A_2\right)dt$$

или, сокращая на dt и выражая силу, с которой поток действует на канал, т. е. $(-\bar{F}_\Sigma)$, получаем

$$\bar{F}_\Sigma = -p_1 A_1 \bar{n}_1^0 - p_2 A_2 \bar{n}_2^0 - G(\bar{v}_2 - \bar{v}_1), \qquad (2.39)$$

где знаки минус у первых двух слагаемых правой части связаны с тем, что давление p всегда направлено против внешней нормали к сечению A, а знаки проекций всех векторов, входящих в уравнение (2.39), зависят от выбранной системы координат.

Подчеркнем, что при применении формулы (2.39) требуется знать лишь параметры потока при входе и выходе из канала, а также расход среды. Структура потока внутри канала значения не имеет.

Если параметры потока во входном и выходном плоских сечениях канала неравномерны, но движение по-прежнему установившееся, то количества движения в объемах $V_{11'}$ и $V_{22'}$ подсчитываются в виде интегралов

$$K_{11'} = \int_{A_1} \bar{v}_1 v_{1n} \rho \mathrm{d}A\, \mathrm{d}t,$$

$$K_{22'} = \int_{A_2} \bar{v}_2 v_{2n} \rho \mathrm{d}A\, \mathrm{d}t;$$

силы давления тоже примут вид интегралов:

$$\bar{F}_{A_1} = -\int_{A_1} p_1 \bar{n}_1^0 \mathrm{d}A,$$

$$\bar{F}_{A_2} = -\int_{A_2} p_2 \bar{n}_1^0 \mathrm{d}A.$$

В случае неустановившегося движения жидкой среды должны быть известны зависимости параметров потока от координат и времени, тогда вместо выражения (2.39) пользуются исходным выражением (2.38), при анализе которого нельзя считать, что ко-

личество движения общей части рассматриваемой массы жидкости постоянно. Отметим, что при установившемся движении боковые границы выделенной массы могут быть не только твердыми стенками канала, но и линиями (поверхностями) тока, тогда как при неустановившемся движении необходимо следить за перемещением выделенной массы либо в канале заданной формы, либо в потоке с изменяющимися боковыми границами, которые становятся траекториями частиц, проходящих через контур сечения A_1 в момент времени t_1.

Если выделенная масса жидкости находится в относительном движении по вращающемуся каналу, т. е. находится в неинерциальной системе координат, то к внешним силам необходимо относить и силы инерции от центростремительного и кориолисова ускорений.

Кроме рассмотренного выше уравнения количества движения широко применяется уравнение момента количества движения, причем моментом количества движения называется вектор, равный векторному произведению количества движения выделенной массы на радиус-вектор этой массы относительно оси вращения.

В формулировке Эйлера: изменение момента количества движения $\bar{m}_{\text{к.дв}}$ выделенной массы Δm жидкости за время dt равно импульсу момента внешних сил. Обычно моментом внешних сил считается крутящий момент, приложенный (получаемый) к ротору турбомашины[1], т.е.

$$\mathrm{d}(\bar{m}_{\text{к.дв}}) = \mathrm{d}(r \times \bar{K}) = (r \times \bar{F}_\Sigma)\mathrm{d}t = \bar{M}_\Sigma \mathrm{d}t.$$

Записанное выражение получается из второго закона механики Ньютона путем векторного умножения его обеих частей на вектор $\bar{r}$.

Поскольку вектор $\bar{K} = \bar{v}\Delta m$ можно представить в виде суммы проекций по трем осям цилиндрических координат

[1] Если радиальные зазоры между лопатками и корпусом из-за прогиба оси ротора оказываются различными по окружности, то возникают неодинаковые внешние силы на лопатках ротора, приводящие к крутящему моменту и силе, которая влияет на прогиб оси ротора, но не дает момента относительно оси вращения за это же время.

$\left[r(\bar{i}), u(\bar{j}), z(\bar{k})\right]$, вектор $\bar{r}$ имеет только одну проекцию на ось r, вектор $\bar{M}_\Sigma = M_\Sigma \cdot \bar{k}$ направлен по оси z, то в выражении

$$\left(\bar{r} \times \bar{k}\right) = \left(\bar{r} \times \bar{v}\right)\Delta m = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ r & 0 & 0 \\ v_r & v_u & v_z \end{vmatrix} \Delta m$$

нас интересует только член при орте $\bar{k}$ (ось z), т. е.

$$\left(\bar{r} \times \bar{k}\right)_z = r v_u \Delta m.$$

Следовательно, уравнение момента количества движения массы Δm запишется в виде

$$\mathrm{d}\left(r v_u \Delta m\right) = M_\Sigma \mathrm{d}t. \qquad (2.40)$$

Рассматривая, как и выше, установившееся движение жидкости в абсолютной (неподвижной) системе координат, можем записать, что изменение момента количества движения в проекции на ось z при перемещении массы жидкости из положения (12) в положение (1'2') можно подсчитать в виде разности (рис. 46)

$$\left(r_2 v_{u_2} - r_1 v_{u_1}\right)\Delta m = M_\Sigma \mathrm{d}t, \qquad (2.41)$$

где Δm — масса жидкости в объемах $V_{22'}$ и $V_{11'}$, которая попала в них за время $\mathrm{d}t$. Следовательно, $\Delta m/\mathrm{d}t = G$ — расход жидкости через вращающийся канал; $\left(r_1 v_{u_1}\right)$ и $\left(r_2 v_{u_2}\right)$ — осредненные значения произведений $\left(r v_u\right)$ для объемов $V_{11'}$ и $V_{22'}$ соответственно.

Умножая (2.41) на угловую скорость вращения канала ω, получим

$$\left(u_2 v_{u_2} - u_1 v_{u_1}\right)G = \omega M_\Sigma,$$

или

$$u_2 v_{u_2} - u_1 v_{u_1} = H_{\text{т. компр. (насоса)}}, \qquad (2.42)$$

где $H_{\text{т. компр. (насоса)}} = \omega M_\Sigma / G$ — работа, подведенная к 1 кг массы газа (жидкости), протекающего через вращающийся канал компрессора (насоса) с угловой скоростью ω и приложенным извне моментом M_Σ.

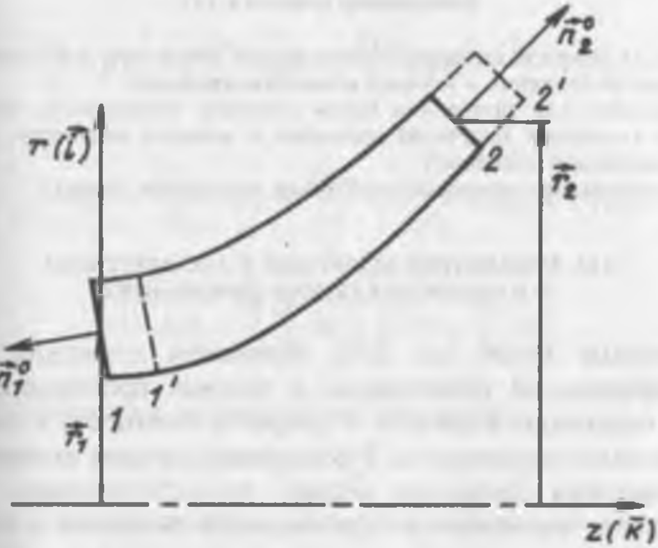


Рис. 46. К выводу уравнения Эйлера для импульса момента

Выражение (2.42) справедливо также для вращающегося рабочего колеса лопаточной машины с учетом того, что расход G равен расходу через рабочее колесо, а не через один межлопаточный канал, момент M_Σ равен моменту, подведенному ко всему рабочему колесу.

В случае анализа турбины изменится лишь знак правой части выражения (2.42), т. е. для турбины

$$u_1 v_{u_1} - u_2 v_{u_2} = H_{\text{т. турб}}. \qquad (2.43)$$

Полученное выражение называется турбинным уравнением Эйлера.

Здесь тоже следует подчеркнуть, что полученная (или затраченная) работа полностью определяется параметрами при входе и выходе из рабочего колеса, а внутренняя структура потока в рабочем колесе значения не имеет. Эта структура влияет на потери в каналах рабочего колеса, т. е. на его КПД, что рассматривается в теории турбомашин.

Контрольные вопросы к §12

1. Имеет ли значение структура потока внутри канала при использовании уравнений количества движения и момента количества движения?
2. К внешним или внутренним силам относятся инерционные силы при использовании уравнений количества движения и момента количества движения в случае относительного движения?
3. Какое выражение называется турбинным уравнением Эйлера?

§13. УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ В АБСОЛЮТНОМ И В ОТНОСИТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ

Полученные выше (см. §10) уравнения движения являются дифференциальными уравнениями в частных производных, связывающими параметры жидкости — скорость, плотность и давление — с координатами и временем. В отдельных случаях движения жидкости уравнения движения можно проинтегрировать, получив алгебраические соотношения для скорости, давления и плотности.

Уравнение Бернулли для неустановившегося движения

Рассмотрим неустановившееся движение невязкой жидкости. Геометрической характеристикой такого движения, как известно, служит поле линий тока, которое зависит от времени.

Уравнения Эйлера для этого случая имеют вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}=f_{mx}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x};$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}=f_{my}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y};$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=f_{mz}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Умножая каждое из этих уравнений соответственно на проекции элемента линии тока $\delta\bar{l}$ (δx, δy, δz) и складывая по вертикальным столбцам, получаем

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}\delta x+\frac{\partial v_y}{\partial t}\delta y+\frac{\partial v_z}{\partial t}\delta z\right)+\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x\delta x+\frac{\partial v_y}{\partial x}v_x\delta y+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial v_z}{\partial z}v_x\delta z\right)+\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}v_y\delta x+\frac{\partial v_y}{\partial y}v_y\delta y+\frac{\partial v_z}{\partial y}v_y\delta z\right)+$$

$$+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}v_z\delta x+\frac{\partial v_y}{\partial z}v_z\delta y+\frac{\partial v_z}{\partial z}v_z\delta z\right)=\left(f_{mx}\delta x+f_{my}\delta y+\right.$$

$$\left.+f_{mz}\delta z\right)-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\delta x+\frac{\partial p}{\partial y}\delta y+\frac{\partial p}{\partial z}\delta z\right).$$

Воспользовавшись уравнениями линии тока

$$(\delta x / v_x) = (\delta y / v_y) = (\delta z / v_z),$$

преобразуем коэффициенты при производных от скоростей по координатам в левой части уравнения. Тогда

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}\delta x+\frac{\partial v_y}{\partial t}\delta y+\frac{\partial v_z}{\partial t}\delta z\right)+\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+v_z\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\delta x+\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\delta y+$$

$$+\left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial z}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial z}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\delta z.$$

Вводя потенциал массовых сил $U\,(x,\ y,\ z,\ t)$, такой, что $f_{mx} = \partial U/dx$ и т. п., и учитывая, что $v^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2$, получаем, пользуясь понятиями скалярного произведения и полного дифференциала,

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}\delta\bar{l} + \delta\left(\frac{v^2}{2}\right) = \delta U - \frac{\delta p}{\rho}.$$

Это уравнение, записанное в дифференциальной форме, справедливо только для линии тока в данный момент времени. Проинтегрировав его вдоль линии тока, от точки *1* до точки *2*, получим

$$\int_1^2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}\delta\bar{l} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = U_2 - U_1 - \int_1^2 \frac{\delta p}{\rho}. \qquad (2.44)$$

Уравнение (2.44) называется уравнением Бернулли; оно связывает параметры жидкости на линии тока при неустановившемся движении в алгебраической форме, т. е. является первым интегралом системы дифференциальных уравнений Эйлера.

Уравнения Бернулли для установившегося движения

Если движение жидкости установившееся, то уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + U_1 - U_2 - \int_1^2 \frac{\delta p}{\rho} = 0.$$

Потенциал U массовых сил обычно связывают с силами тяжести. Если ось z направить вертикально вверх, то

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f_{mx} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = f_{my} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial z} = f_{mz} = -g,$$

откуда

$$U = -gz + \text{const}.$$

Для вычисления интеграла $\int_1^2 \delta p / \rho$ необходимо знать зависимость между ρ и p в процессе течения по линии тока.

Рассмотрим два наиболее распространенных случая.

1. Несжимаемая жидкость $\rho = \rho_0 = \text{const}$.

В этом случае

$$\int \delta p / \rho = p / \rho_0 + \text{const}.$$

Следовательно, уравнение Бернулли для несжимаемой невязкой жидкости

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho_0} = \text{const}. \qquad (2.45)$$

Таким образом, для двух точек на линии тока параметры жидкости связаны соотношением

$$\frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_0} = \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_0}.$$

2. Сжимаемая жидкость при изоэнтропической связи между плотностью и давлением $p / \rho^\gamma = m = \text{const}$.

Интеграл $\int \delta p / \rho$ в данном случае принимает вид

$$\int \frac{\delta p}{\rho} = \int \frac{m\gamma\rho^{\gamma-1}}{\rho} d\rho = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} + \text{const}.$$

Тогда уравнение Бернулли для сжимаемой невязкой жидкости или идеального газа запишется в форме

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \text{const}. \qquad (2.46)$$

При движении газов, как показывают расчеты, можно пренебречь влиянием потенциальной энергии положения gz на распределение давления. В самом деле, скорость $v = 10$ м/с дает 1 кг газа такую кинетическую энергию, которая соответствует потенциальной энергии массы 1 кг, поднятой на 5 м. В практике же энергомашиностроения такие вертикальные перемещения встречаются редко, а скорости течения газов обычно намного превосходят 10 м/с.

Следовательно, уравнение Бернулли для идеального газа можно записать в виде

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \text{const}. \qquad (2.47)$$

При расчетах часто применяют и другие формы записи уравнения Бернулли.

Используя термодинамические соотношения для совершенных газов

$$p / \rho = RT; \quad h = c_p T; \quad c_p - c_v = R; \quad c_p / c_v = \gamma,$$

получаем следующую форму записи уравнения Бернулли:

$$v^2 / 2 + h = \text{const} \qquad (2.48)$$

или

$$v^2 / \left(2c_p\right) + T = \text{const}. \qquad (2.49)$$

Вводя известное выражение для скорости звука в газе

$$a = \sqrt{\gamma RT},$$

имеем

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \text{const}. \qquad (2.50)$$

Первое слагаемое определяет кинетическую энергию 1 кг газа, а второе — его энтальпию. Правую часть уравнения Бернулли можно определить по характерным параметрам газа. Например, при истечении газа в пустоту $a = 0$, $v = v_{max}$. Тогда из выражения (2.50) получим

$$\text{const} = v_{max}^2 / 2.$$

Тогда уравнение Бернулли примет вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{v_{max}^2}{2}.$$

Если рассмотреть истечение газа из сосуда неограниченного объема, то можно считать, что в сосуде $v = 0$; $a = a^*$, где a^* — скорость звука в неподвижном газе. В этом случае уравнение Бернулли имеет вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{a^{*2}}{\gamma - 1} = \frac{\gamma RT^*}{\gamma - 1} = \text{const},$$

где T^* — температура неподвижного газа.

При изменении параметров газа вдоль струйки уменьшению кинетической энергии соответствует увеличение энтальпии, т. е. при уменьшении скорости газа растет местная скорость звука. Может наступить момент, когда скорость газа станет численно равна местной скорости звука. Такая скорость газа называется критической и обозначается через $a_{кр}$. В этом случае уравнение Бернулли можно записать в форме

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{a_{кр}^2}{2} + \frac{a_{кр}^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_{кр}^2 = \text{const}.$$

Следовательно, критическая скорость газа $a_{кр}$, максимальная скорость газа v_{max} и температура неподвижного газа T^* характеризуют энергию струйки газа и постоянны вдоль этой струйки.

Между ними существует соотношение

$$\frac{v_{max}^2}{2} + \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_{кр}^2 = \frac{\gamma RT^*}{\gamma - 1} = \text{const},$$

где

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} RT^*}; \qquad a_{кр} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1} RT^*}.$$

Уравнение Бернулли для относительного движения

В турбине и компрессоре (насосе) газ проходит по вращающемуся межлопаточному каналу, т. е. имеет место относительное движение газа. При расчетах турбомашин широко используется соотношение между параметрами газа при его относительном движении во вращающемся канале рабочего колеса.

Рассмотрим установившееся относительное течение газа во вращающемся канале колеса центробежного компрессора (рис. 47).

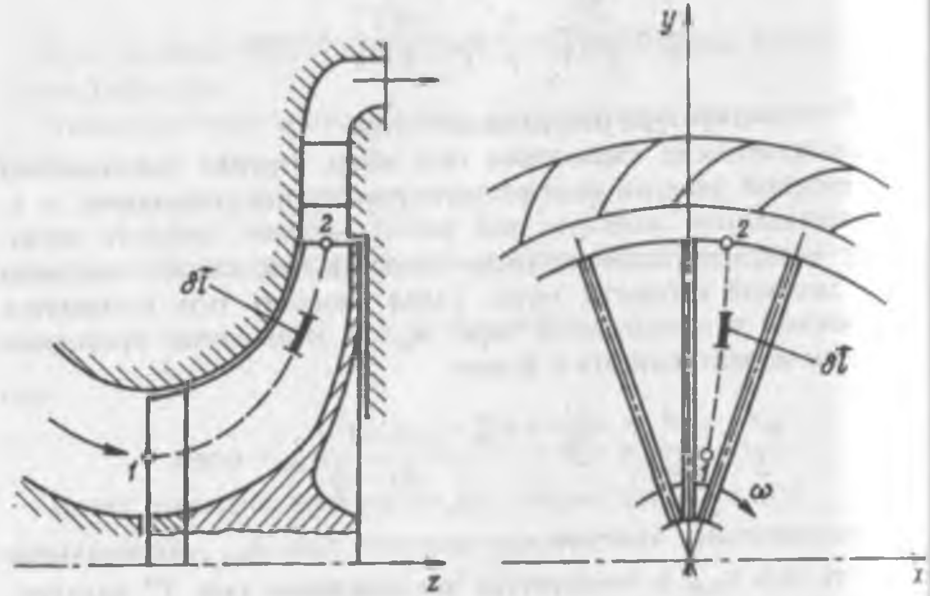


Рис. 47. К выводу уравнения Бернулли для струйки в относительном движении

Уравнение Эйлера для идеальной жидкости имеет вид

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{f}_m - \frac{1}{\rho}\text{grad } p.$$

Абсолютное ускорение частицы $d\bar{v}/dt$ можно представить в виде суммы трех слагаемых:

1) относительного ускорения $\delta\bar{w}/dt$, где $\bar{w}$ — относительная скорость в канале; $\delta\bar{w}$ — дифференциал относительной скорости по линии тока (знак δ будет означать дифференциал параметра для линии тока);

2) центростремительного (переносного) ускорения $-\omega^2\bar{r}$; знак минус говорит о том, что ускорение направлено к оси вращения, т. е. противоположно направлению $\bar{r}$;

3) ускорения Кориолиса $2(\bar{\omega} \times \bar{w})$.

Тогда уравнение движения

$$\frac{\delta\bar{w}}{dt} = \bar{f}_m - \frac{1}{\rho}\text{grad } p + \omega^2\bar{r} - 2(\bar{\omega} \times \bar{w}).$$

Умножив члены этого уравнения на элемент линии тока $\delta\bar{l} = \bar{w}\,dt$, получим работу сил при элементарном перемещении по линии тока. Итак,

$$\bar{w}\,dt\frac{\delta\bar{w}}{dt} = \bar{f}_m\delta\bar{l} - \frac{1}{\rho}\text{grad } p\delta\bar{l} + \omega^2\bar{r}\delta\bar{l} - 2(\bar{\omega} \times \bar{w})\bar{w}\,dt$$

или, имея в виду, что

$$\bar{w}\,dt\frac{\delta\bar{w}}{dt} = \bar{w}\delta\bar{w} = w_x\delta w_x + w_y\delta w_y + w_z\delta w_z = \delta\left(\frac{w^2}{2}\right);$$

$$\bar{r}\delta\bar{l} = x\delta x + y\delta y + 0\cdot\delta z = \delta\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = \delta\left(\frac{r^2}{2}\right),$$

где вектор $\bar{r}$ имеет проекции x и y, так как перпендикулярен к оси вращения z, а вектор $\delta\bar{l}$ имеет проекции δx, δy и δz; $(\bar{\omega} \times \bar{w})\bar{w} = 0$, так как вектор $(\bar{\omega} \times \bar{w})\perp\bar{w}$, $\bar{f}_m\delta\bar{l}$ — потенциал массовой силы;

$$(1/r)\text{ grad } p\,d\bar{l} = (1/r)\,dp = 0,$$

получим уравнение энергии. Следует отметить, что уравнение Бернулли получается при интегрировании уравнений движения, которые входят составной частью в общее уравнение энергии (2.27). Можно сказать, что уравнение Бернулли является уравнением энергии без учета внутренних процессов, связанных с изме-

10-3075

нением внутренней энергии частиц газа для относительного движения

$$\delta(w^2/2) - \omega^2 \delta (r^2/2) - \delta U + (1/\rho)\, \delta p = 0.$$

Интегрирование этого уравнения вдоль линии тока от точки *1* до точки *2* (см. рис. 47) дает

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} - \frac{\omega^2 r_2^2 - \omega^2 r_1^2}{2} - (U_2 - U_1) + \int_1^2 \frac{\delta p}{\rho} = 0.$$

Для несжимаемой жидкости уравнение энергии в форме Бернулли при относительном движении имеет вид

$$\frac{\omega^2}{2} - \frac{u^2}{2} + gy + \frac{p}{\rho_0} = \text{const},$$

где $u = \omega r$ — переносная скорость (окружная скорость точки колеса, с которой в данный момент совпадает частица жидкости); $U = -gy + \text{const}$ — потенциал массовых сил.

Для газа, как было показано выше, можно пренебречь влиянием потенциальной энергии на распределение давлений; тогда при изоэнтропическом течении газа уравнение Бернулли для относительного движения примет вид

$$\frac{\omega^2}{2} - \frac{u^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho} = \frac{\omega^2}{2} - \frac{u^2}{2} + h = \text{const}. \qquad (2.51)$$

Применение уравнения Бернулли к анализу течения газа в лопаточных машинах

При помощи уравнения Бернулли, записанного применительно к относительному движению, можно проанализировать работу ступени лопаточной машины — турбины и компрессора.

Рассмотрим течение газа в ступени осевой турбины, состоящей из соплового аппарата (СА) и рабочего колеса (РК) (рис. 48). Для средней линии тока можно приближенно записать, что $u_1 = u_2$, т. е. частицы газа выходят из рабочего колеса на том же радиусе, на котором они в него входят.

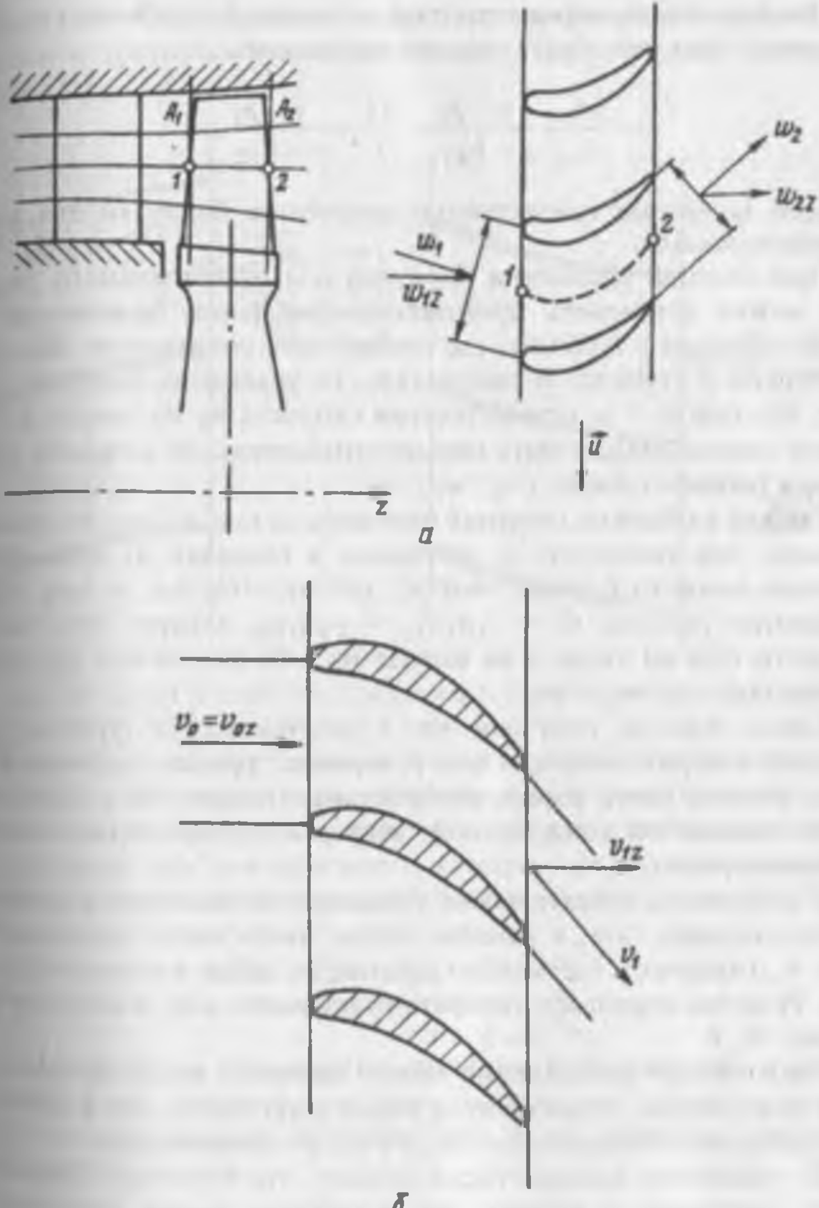


Рис. 48. Схема течения газа в ступени осевой турбины:
а — решетка рабочего колеса; *б* — решетка соплового аппарата

Следовательно, параметры газа на входе *1* в рабочее колесо и на выходе *2* из него будут связаны уравнением

$$\frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_1}{\rho_1} = \frac{\omega_2^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_2}{\rho_2},$$

которое по форме тождественно уравнению Бернулли для неподвижного канала.

При помощи уравнения Бернулли для относительного движения можно установить принципиальную форму дозвуковой решетки профилей турбины, где происходит уменьшение давления от ступени к ступени. В самом деле, из уравнения Бернулли следует, что при $p_2 < p_1$ относительная скорость w_2 на выходе из рабочего колеса должна быть больше относительной скорости w_1 на входе в рабочее колесо, т. е. $w_2 > w_1$.

Так как в обычных ступенях плотность ρ_2 газа на выходе немного меньше, чем плотность ρ_1 на входе, а площадь A_2 проходного сечения немного больше, чем A_1, но так, что $A_1\rho_1 \approx A_2\rho_2$, то из уравнения расхода $G = \rho_1 A_1 w_{1z} = \rho_2 A_2 w_{2z}$ следует, что осевые скорости газа на входе и на выходе из рабочего колеса примерно одинаковы, т. е. $w_{1z} \approx w_{2z}$.

Таким образом, получаем, что в рабочем колесе турбины происходят поворот потока и его ускорение, причем турбинная решетка должна иметь форму, изображенную на рис. 48, *а*. Такая решетка называется конфузорной; вектор u указывает направление вращения решетки.

В сопловом аппарате также уменьшается давление и увеличивается скорость газа; в данном случае имеет место соотношение $v_{0z} \approx v_{1z}$ (индексом 0 отмечено сечение на входе в сопловой аппарат). Решетка соплового аппарата будет иметь вид, изображенный на рис. 48, *б*.

Аналогичные рассуждения можно провести и для ступени осевого компрессора. Только в этом случае надо учесть, что в компрессоре давление повышается, т. е. $p_2 < p_1$, и, следовательно, $w_2 < w_1$.

Из уравнения расхода также следует, что $w_{2z} \approx w_{2z}$. Таким образом, приходим к выводу, что в рабочем колесе компрессора происходит поворот потока с замедлением; такая решетка называется диффузорной.

На рис. 49 изображены решетки профилей компрессорной ступени и треугольники скоростей для РК и направляющего аппарата (НА).

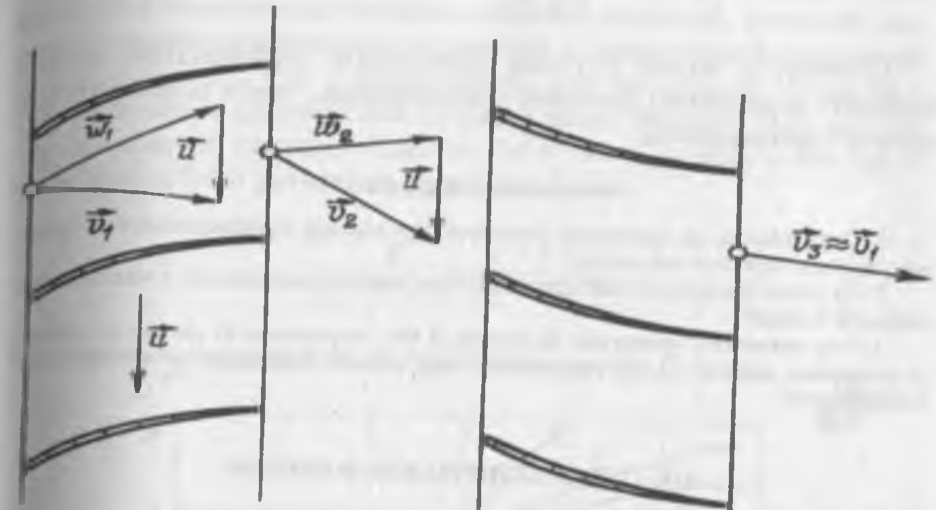


Рис. 49. Схема течения газа в решетках ступени осевого компрессора

Следует подчеркнуть, что в осевой турбомашине перепад давлений зависит только от разности квадратов относительных скоростей w_2 и w_1. Для радиальной турбомашины (центростремительной турбины или центробежного компрессора) в уравнении Бернулли сохраняется член, зависящий от окружной скорости:

$$\frac{w_1^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} - \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{w_2^2}{2}.$$

Следовательно, повышение давления (температуры) в колесе центробежного компрессора будет зависеть не только от торможения относительной скорости, но и от разности квадратов окружных скоростей:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1}\right) = \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}$$

или

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2c_p}\left[\left(w_1^2 - w_2^2\right) + \left(u_2^2 - u_1^2\right)\right].$$

Поэтому в одной ступени радиальной турбомашины можно получить (сработать) больший теплоперепад, чем в одной ступени осевой турбомашины.

Контрольные вопросы к §13

1. Справедливо ли уравнение Бернулли при анализе неустановившегося вихревого течения невязкой жидкости?

2. От каких физических характеристик газа зависят критическая и максимальная скорости потока?

3. Чем отличается уравнение Бернулли (2.46), полученное из уравнения Эйлера, от уравнения энергии (2.51), полученного при анализе одномерного течения совершенного газа?

§14. ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

При рассмотрении течения струйки газа удобно пользоваться параметрами изоэнтропийно заторможенного потока, или параметрами торможения. Вообще говоря, для произвольного сечения струйки термодинамические параметры заторможенного потока являются воображаемыми, которые были бы действительными при полном изоэнтропийном торможении потока в данном сечении.

Параметры движущегося потока (T, p, ρ) связаны с параметрами торможения (T^*, p^*, ρ^*) формулами адиабаты Пуассона

$$\frac{p}{p^*} = \left(\frac{T}{T^*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \quad \frac{\rho}{\rho^*} = \left(\frac{p}{p^*}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = \left(\frac{T}{T^*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Следует заметить, что давление и температуру торможения в данной точке потока можно измерить, помещая в поток приемник полного давления в виде трубки Пито с расположенной в ней термопарой. В приемнике трубки Пито газ находится в неподвижном состоянии (манометр измерит p^*), и если не учитывать теплоотдачу газа через стенки трубки, то термопара практически измерит температуру T^* изоэнтропийно заторможенного потока.

Расчет параметров потока в ряде случаев удобно вести с помощью так называемых газодинамических функций, которые связывают термодинамические параметры с приведенной скоростью потока $\lambda = v/a_{кр}$, т.е. с отношением действительной скорости в данной точке к критической. Приведенная скорость λ в данном газе однозначно связана с числом $M = v/a$. Для получения такой связи рассмотрим уравнение Бернулли в виде

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_{кр}^2$$

и разделим это уравнение на его правую часть.

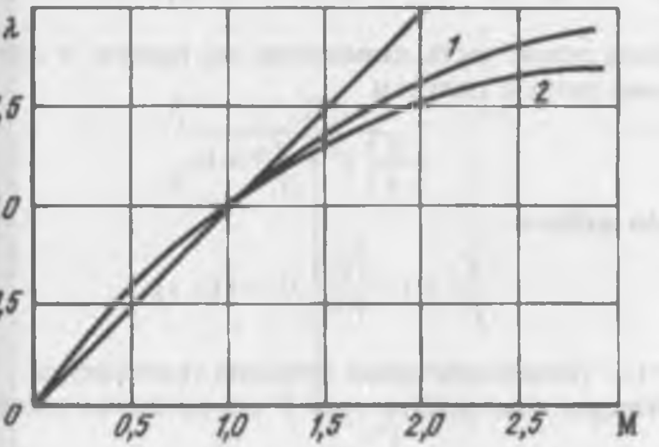


Рис. 50. Зависимость числа М от приведенной скорости λ для γ = 1,4 (*1*) и 1,67 (*2*)

Тогда после несложных преобразований получим

$$\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\lambda^2 + \frac{2}{\gamma + 1}\frac{\lambda^2}{M^2} = 1 ,$$

или

$$\lambda^2 = \frac{1}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1}\frac{\lambda^2}{M^2}}. \qquad (2.52)$$

Анализ формулы (2.52) показывает, что при M = 1 $\lambda = 1$, при M = 0 $\lambda = 0$, а при $M \to \infty$ $\lambda \to \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} = \lambda_{max}$.

Зависимость M от λ при $\gamma = 1{,}4$ и $\gamma = 1{,}67$ приведена на рис. 50.

Газодинамическая функция температуры

Уравнение Бернулли для газа имеет вид

$$\frac{V^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma-1}RT = \frac{\gamma}{\gamma-1}RT^* = \frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}a_{кр}^2.$$

Разделив левую часть выражения на правую в соответствующих формах записи, получим

$$\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\gamma^2 + \frac{T}{T^*} = 1.$$

Отсюда найдем

$$\frac{T}{T^*} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2 = \tau(\lambda,\gamma), \qquad (2.53)$$

где $\tau(\lambda, \gamma)$ — газодинамическая функция температуры.

Статическая температура газа T определяется теперь по формуле

$$T = T^*\tau(\lambda,\gamma).$$

Газодинамическая функция давления

Так как торможение газа предполагается изоэнтропийным, то

$$\frac{p}{p^*} = \left(\frac{T}{T^*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \pi(\lambda,\gamma), \qquad (2.54)$$

где $\tau(\lambda, \gamma)$ — газодинамическая функция давления.

Статическое давление p газа определяют по формуле

$$p = p^*\pi(\lambda,\gamma).$$

Газодинамическая функция плотности

Для изоэнтропийного торможения получим

$$\frac{p}{p^*} = \left(\frac{T}{T^*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \varepsilon(\lambda,\gamma), \qquad (2.55)$$

где $\varepsilon(\lambda, \gamma)$ — газодинамическая функция плотности.

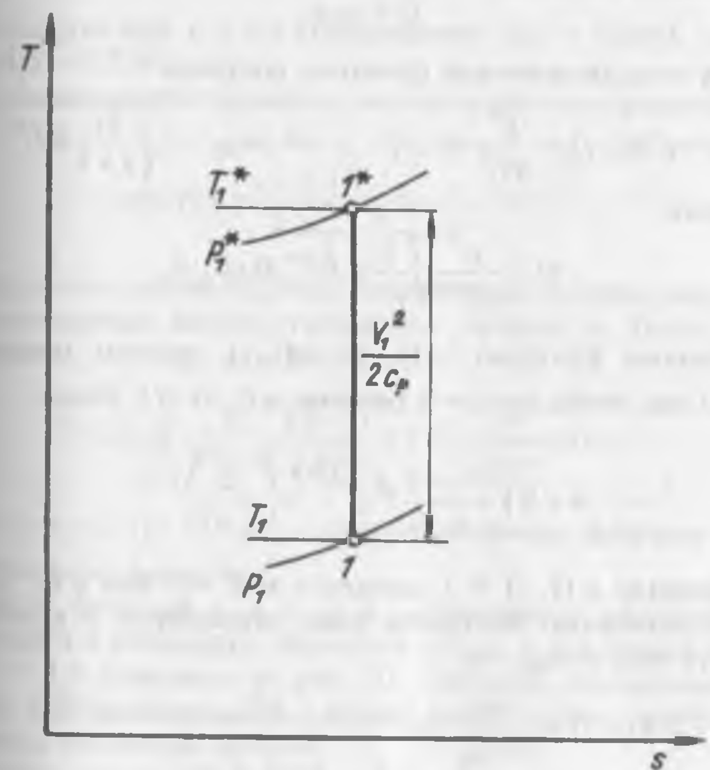


Рис. 51. Статические и заторможенные параметры потока в $T-s$ -диаграмме

Плотность газа ρ находят по формуле $\rho = \rho^* \varepsilon(\lambda, \gamma)$.

Изображение статических и заторможенных параметров потока в $T - s$-диаграмме приведено на рис. 51.

Разность температур изоэнтропийно заторможенного и движущегося потоков подсчитывают по уравнению Бернулли в виде

$$T - T^* = \frac{\gamma - 1}{2R\gamma} v^2 = \frac{v^2}{2c_p}.$$

Газодинамическая функция расхода

Расход газа через любое поперечное сечение канала выражается следующим образом:

$$G = \rho v A.$$

Вводя газодинамические функции, получаем

$$\rho = \rho^* \varepsilon(\lambda, \gamma) = \frac{p^*}{RT^*} \varepsilon(\lambda, \gamma); \qquad v = \lambda a_{\text{кр}} = \lambda \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1} RT^*},$$

расход газа

$$G = \frac{p^*}{RT^*} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1} RT^*} A \lambda \varepsilon(\lambda, \gamma).$$

Обозначим функцию $\lambda\varepsilon(\lambda, \gamma) = nq(\lambda, \gamma)$, причем множитель n подберем так, чтобы при $\lambda = 1$ значение $q(\lambda, \gamma) = 1$. Тогда

$$n = 1\left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} 1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}.$$

Требование $q(1, \gamma) = 1$ связано с тем, что под $q(\lambda, \gamma)$ понимают безразмерную плотность тока, отнесенную к критической плотности тока $(\rho v)_{\text{кр}}$, т.е.

$$q(\lambda, \gamma) = \frac{\rho v}{(\rho v)_{\text{кр}}} = \frac{\rho v}{\rho^* \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} 1^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} a_{\text{кр}}} = \frac{\varepsilon \lambda}{n}. \qquad (2.56)$$

Тогда уравнение расхода примет вид

$$G = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1}} \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} A \frac{p^*}{\sqrt{RT^*}} q(\lambda, \gamma), \qquad (2.57)$$

или

$$G = \beta(\gamma) \frac{p^* A}{\sqrt{RT^*}} q(\lambda, \gamma),$$

где $\beta(\gamma) = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1}}$ — коэффициент, зависящий от рода газа.

Для воздуха при $\gamma = 1{,}4$ коэффициент $\beta(\gamma) = 0{,}6847$, при $\gamma = 1{,}67$ $\beta(\gamma) = 0{,}7265$.

Газодинамическую функцию расхода найдем по формуле

$$q(\lambda, \gamma) = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \lambda \left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \lambda^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}.$$

В отдельных случаях удобно в выражение расхода вместо давления торможения ввести статическое давление p. Тогда уравнение расхода

$$G = \beta(\gamma) A \frac{p}{\pi(\lambda, \gamma)} \frac{q(\lambda, \gamma)}{\sqrt{RT^*}} = \beta(\gamma) \frac{pA}{\sqrt{RT^*}} y(\lambda, \gamma), \qquad (2.58)$$

где $y(\lambda, \gamma) = q(\lambda, \gamma) / \pi(\lambda, \gamma)$ — газодинамическая функция расхода по статическому давлению.

Таблицы функций τ, π, ε, q и y для разных значений λ и γ можно найти в литературе. Значения τ, π, ε, q, y в зависимости от λ для $\gamma = 1{,}4$ показаны на рис. 52. Значения газодинамических функций для произвольных γ можно найти путем линейной интерполяции табличных данных.

Помимо рассмотренных выше газодинамических функций термодинамических параметров потока и расхода газа при одноерном течении широкое применение получили *газодинамические функции импульса*, основанные на теореме об изменении количества движения.

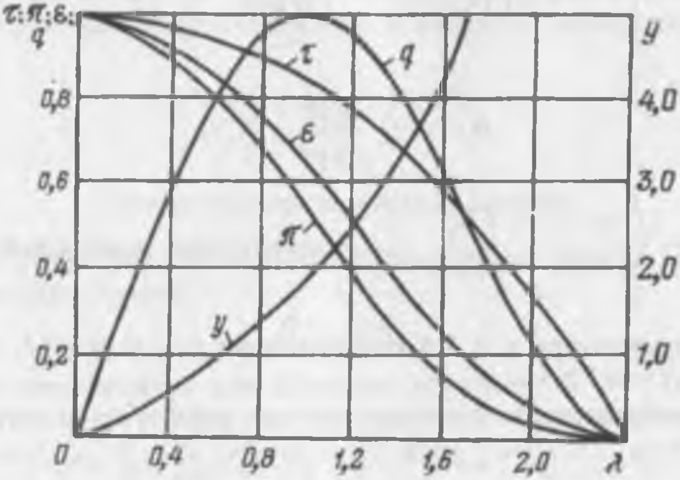


Рис. 52. Зависимости газодинамических функций τ, π, ε, q и y от λ при γ = 1,4

Рассмотрев одномерное установившееся течение невязкого газа в трубе с поперечным сечением A, можем записать, что расход газа $G = \rho v A$, а изменение количества движения массы газа, выделенной между сечениями *1* и *2*, за время dt равно импульсу сил давления за то же время, т.е.

$$G\, dt\, (v_2 - v_1) = (p_1 - p_2)\, A\, dt, \tag{2.59}$$

или

$$Gv_1 + p_1A = Gv_2 + p_2A = Gv + pA = \text{const}.$$

Выражение $Gv + pA = I$ называется полным импульсом потока, который можно выразить через газодинамические функции от приведенной скорости λ.

Воспользовавшись выражениями $G = \rho v A$ и $a^2 = \gamma p/\rho$, получим

$$I = Gv\left(1 + \frac{pA}{Gv}\right) = Gv\left(1 + \frac{1}{\gamma}\frac{a^2}{v^2}\right).$$

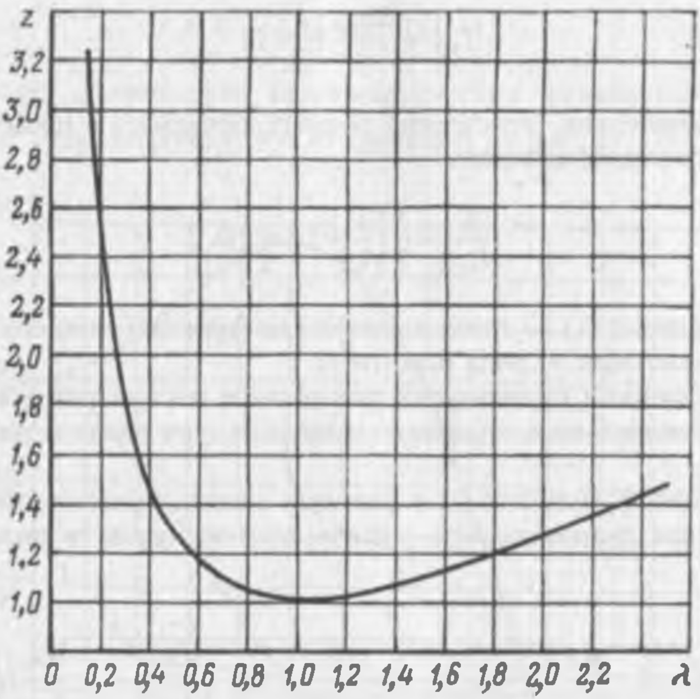


Рис. 53. Зависимость газодинамической функции z от λ.

Но из уравнения Бернулли в виде

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} a_{кр}^2$$

следует, что

$$\frac{a^2}{v^2} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}\left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\frac{1}{\lambda} - 1\right).$$

Тогда

$$I = \frac{Gv}{2\gamma}(\gamma + 1)\left(\frac{1}{\pi^2} + 1\right). \qquad (2.60)$$

Для критического сечения $v = a_{кр}$ и $\lambda = 1$; тогда

$$I_{\text{кр}} = \frac{Ga_{\text{кр}}}{\gamma}(\gamma + 1). \tag{2.61}$$

Следовательно, отношение полных импульсов в произвольном и в критическом сечениях

$$\frac{I}{I_{\text{кр}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \lambda\right) = z(\lambda), \tag{2.62}$$

где функция $z(\lambda)$ — газодинамическая функция полного импульса, не зависящая от рода газа (от γ).

Эта функция применяется при расчете параметров в каналах с учетом теплообмена; характер изменения z от числа λ показан на рис. 53.

Помимо функции $z(\lambda)$ в расчетах нашли применение газодинамическая функция доли статического импульса в полном импульсе

$$r(\lambda,\gamma) = \frac{pA}{I} = \frac{1}{1 + \frac{Gv}{pA}\frac{\gamma}{\gamma}} = \frac{1}{1+\gamma \mathrm{M}^2} = \frac{1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\gamma^2}{1+\gamma^2} = \frac{\tau(\lambda,\gamma)}{1+\gamma^2} \tag{2.63}$$

и доля полного импульса в полном импульсе адиабатически заторможенного потока

$$f(\lambda,\gamma) = \frac{I}{I^*} = \frac{pA + Gv}{p^* A} = \frac{pA + Gv}{pA}\frac{p}{p^*} =$$

$$= \frac{\pi(\lambda,\gamma)}{r(\lambda,\gamma)} = \varepsilon(\lambda,\gamma)\left(1 + \lambda^2\right). \tag{2.64}$$

Полный импульс потока в данном сечении канала может быть выражен через рассмотренные газодинамические функции

$$I = I_{\text{кр}} z(\lambda) = \frac{\gamma + 1}{\lambda} Ga_{\text{кр}} z(\lambda), \quad I = pA\frac{1}{r(\lambda,\gamma)};$$

$$I = I^{*} f(\lambda, \gamma) = p^{*} A f(\lambda, \gamma). \qquad (2.65)$$

Характер зависимости газодинамических функций $r(\lambda, \gamma)$ и $f(\lambda, \gamma)$ от λ для воздуха ($\gamma = 1{,}4$) приведен на рис. 54.

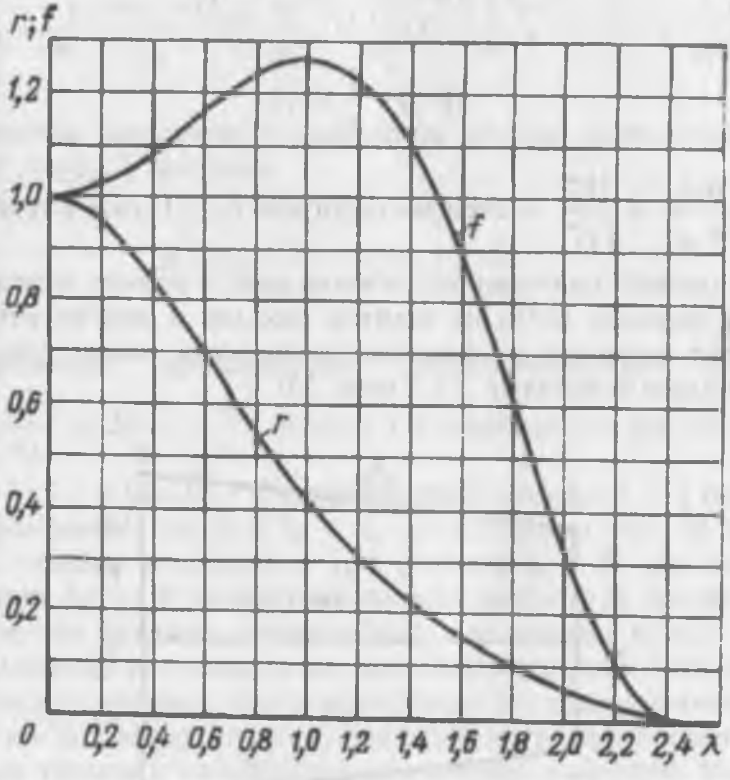


Рис. 54. Зависимости газодинамических функций r и f от λ при $\gamma = 1{,}4$

Формула (2.59) справедлива при течении газа по цилиндрической трубе (A = const) без трения; но при течении может быть учтен теплообмен через стенки трубы величиной полной температуры T^{*}, влияющей на величину $a_{кр}$.

Пользуясь формулой (2.60) при G = const и γ = const для двух сечений трубы с $T_1^{*} \neq T_2^{*}$ получаем

$$a_{\text{кр}_1}\lambda_1\left(\frac{1}{\lambda_1^2}+1\right)=a_{\text{кр}_2}\lambda_2\left(\frac{1}{\lambda_2^2}+1\right),$$

$$\left(\lambda_2+\frac{1}{\lambda_2}\right)=\frac{1}{\nu}\left(\lambda_1+\frac{1}{\lambda_1}\right),$$

$$z(\lambda_2)=\frac{1}{\nu}z(\lambda_1),$$

где $\nu=\dfrac{a_{\text{кр}_2}}{a_{\text{кр}_1}}=\sqrt{\dfrac{T_2^*}{T_1^*}}$ — степень подогрева ($\nu > 1$) газа в трубе.

Для расчета одномерного течения газа в канале переменного сечения формула (2.59) не годится, так как в ней не учтен импульс сил давления на боковую поверхность массы газа между выделенными сечениями *1* и *2* (рис. 55).

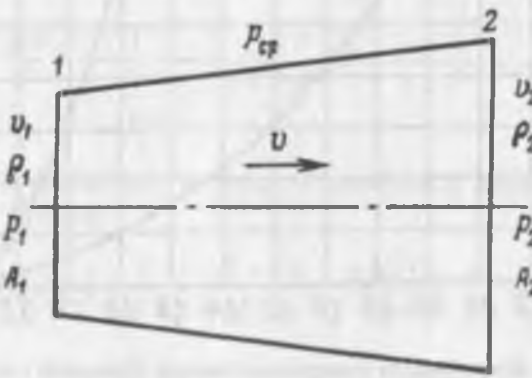


Рис. 55. Схема канала переменного поперечного сечения

Считая приближенно, тогда, когда это возможно, что на боковую поверхность действует давление $p_{ср}=\dfrac{1}{2}(p_1+p_2)$, которое даст осевую силу, равную $p_{ср}(A_2-A_1)$, вместо (2.59) при $G = \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$ получим

$$G\,dt(v_2 - v_1) = (p_1A_1 - p_2A_2)dt + \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(A_2 - A_1)dt$$

или, деля на G и собирая члены с λ_2 слева, а с λ_1 — справа, получим

$$\left[\lambda_2 + \frac{\gamma+1}{4\gamma}\frac{\tau(\lambda_2,\gamma)}{\lambda_2}\left(1+\frac{A_1}{A_2}\right)\right] = \frac{1}{\nu}\left[\lambda_1 + \frac{\gamma+1}{4\gamma}\frac{\tau(\lambda_1,\gamma)}{\lambda_1}\left(1+\frac{A_2}{A_1}\right)\right].$$

Обозначая выражение в квадратных скобках слева через B, а справа — через E, получаем

$$B\left(\lambda_2,\gamma,\frac{A_1}{A_2}\right) = \frac{1}{\nu}E\left(\lambda_1,\gamma,\frac{A_2}{A_1}\right). \qquad (2.66)$$

Графическое представление газодинамических функций $B\left(\lambda_2,\gamma,\frac{A_1}{A_2}\right)$ и $E\left(\lambda_1,\gamma,\frac{A_2}{A_1}\right)$ для $\gamma = 1{,}4$ приведено на рис. 56.

При $\lambda_1 < 1$ и $(A_2/A_1) > 1$ (диффузорный канал) и $\nu = 1$ (течение без теплообмена) получим $\lambda_2 < \lambda_1$. По графикам рис. 56 можно оценить степень подогрева ν, при которой $\lambda_2 = \lambda_1$ для данного отношения A_2/A_1. В конкретных задачах вводятся и другие газодинамические функции, которые будут рассмотрены в гл. 3.

Рассмотрим, как изменяется давление заторможенного потока при течении с трением без энергообмена. Из термодинамики известно, что рассеяние энергии, имеющее место при необратимых процессах (трение), оценивается изменением энтропии. Изменение энтропии газа, подчиняющегося уравнению состояния $p/\rho = RT$, выражается формулой

$$\Delta s = s_2 - s_1 = c_v \ln\left[\left(p_2 / \rho_2^\gamma\right) / \left(p_1 / \rho_2^\gamma\right)\right].$$

Так как параметры газа при изоэнтропийном торможении связаны со статическими параметрами уравнением изоэнтропы

$$p / \rho^\gamma = p^* / \rho^{*\gamma},$$

а

$$\rho^* = p^* / \left(RT^*\right),$$

то

$$p / \rho^{\gamma} = \left(T^* R\right)^{\gamma} / p^{*(\gamma-1)},$$

откуда

$$\Delta s = \Delta s^* = c_v \ln\left[\left(T_2^* / T_1^*\right)^{\gamma} / \left(p_1^* / p_2^*\right)^{\gamma-1}\right].$$

Поскольку в этом случае $T_2^* = T_1^*$, а для реальных (необратимых) процессов $\Delta s > 0$, то для течения с трением давление торможения уменьшается, т.е. $p_1^* > p_2^*$.

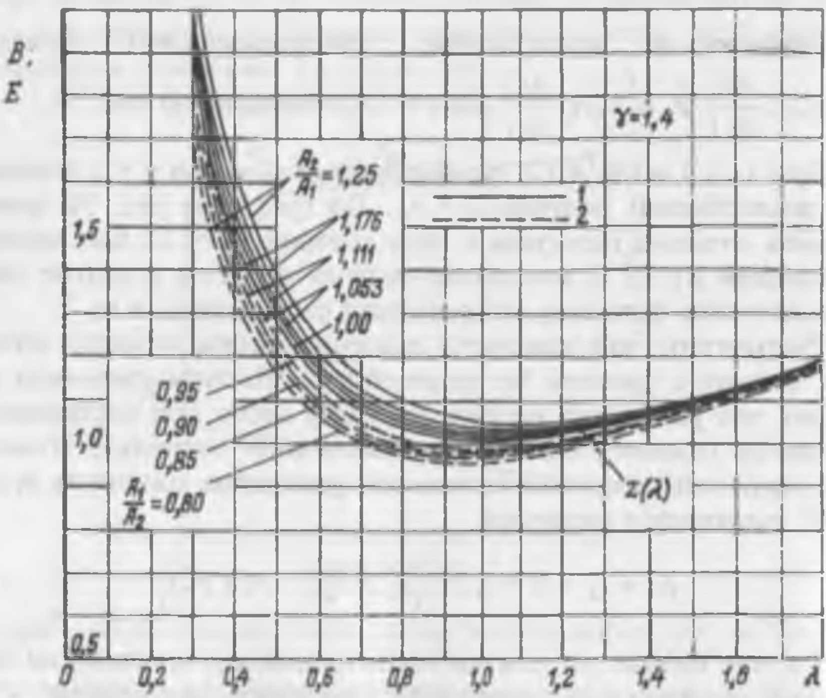


Рис. 56. Зависимости газодинамических функций B и E от λ и (A_1/A_2) для $\gamma = 1{,}4$:
1 – $E(\lambda_1)$; *2* – $B(\lambda_2)$

Следовательно, течение с трением без энергообмена характеризуется постоянством температуры торможения T^* и падением давления торможения p^*.

Потери давления торможения, или полного давления p^*, принято определять либо коэффициентом сохранения полного давления, равным отношению полных давлений в конце процесса и в его начале, т.е. $\sigma = p_2^* / p_1^* < 1$, либо коэффициентом потерь ζ, равным отношению разности между полными давлениями в начале (1) и в конце процесса (2), т.е. $\Delta p^* = p_1^* - p_2^*$, к скоростному напору по большей скорости (в начале процесса для диффузорных дозвуковых каналов и в конце процесса для конфузорных дозвуковых каналов, что связано с получением большей точности при измерении больших величин), т.е. $\Delta p^* = \zeta\rho v^2/2$, причем ζ обычно определяется при малых скоростях потока, т.е. при $\rho = \rho^*$.

Для диффузорного канала, пользуясь приведенными выше определениями для $a_{кр}$, λ, получим в случае совершенного газа

$$\Delta p^* = p_1^*\left(1 - \sigma_{диф}\right) = \zeta_{диф}\gamma p_1^*\lambda_1^2 / \left(\gamma + 1\right),$$

откуда

$$\sigma_{диф} = 1 - \zeta_{диф}\gamma\lambda_1^2 / \left(\gamma + 1\right). \qquad (2.67)$$

Поступая аналогично для конфузорного канала, получаем

$$\sigma_{конф} = \left[1 + \zeta_{конф}\gamma\lambda_2^2 / \left(\gamma + 1\right)\right]^{-1}. \qquad (2.68)$$

При наличии энергообмена (рабочие решетки турбомашин) анализ течений совершенного газа с трением выполняют, вводя понятие обобщенной адиабаты

$$(p/\rho^\gamma)\ \sigma_и^{\gamma-1} = \text{const},$$

где $\sigma_и$ — коэффициент изоэнтропичности, который связан с изменением энтропии совершенного газа для точек конца и начала процесса соотношением

$$\left(s_2 - s_1\right) / c_v = -(\gamma - 1)\ln\left(\sigma_2 / \sigma_1\right)_и$$

или

$$\left(\sigma_2 / \sigma_1\right)_и = \exp\left[\Delta s / \left(c_v - c_p\right)\right]. \qquad (2.69)$$

При рассмотрении потерь на участке 1 — 2 можно положить $\sigma_1 = 1$, что равносильно отсчету роста энтропии от параметров в точке *1*.

Из уравнения обобщенной адиабаты с учетом уравнения состояния нетрудно получить соотношение для полных параметров

$$\frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \left(\frac{T_2^*}{T_1^*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

При отсутствии энергообмена $\left(T_2^* = T_1^*\right)$ и $\sigma_1 = 1$ получаем известное выражение для коэффициента сохранения полного давления

$$\sigma = p_2^* / p_1^*.$$

При наличии энергообмена $T_2^* > T_1^*$ для компрессора и $T_2^* < T_1^*$ для турбины. Тогда, вводя понятия изоэнтропийных КПД компрессора и турбины в виде

$$\eta_к^* = \left[\left(p_2^* / p_1^*\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right] / \left(\frac{T_2^*}{T_1^*} - 1\right)$$

и

$$\eta_т^* = \left(1 - \frac{T_2^*}{T_1^*}\right) / \left(1 - \frac{p_2^*}{p_1^*}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

получаем

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)_{\text{к}} = \frac{p_2^*}{p_1^*}\left[1+\frac{\left(p_2^*/p_1^*\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}-1}{\eta_{\text{к}}^*}\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

и

$$\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)_{\text{т}} = \frac{p_2^*}{p_1^*}\left\{1-\left[1-\left(p_2^*/p_1^*\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]\eta_{\text{т}}^*\right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

При повышении КПД растет значение σ_2, всегда оставаясь меньше единицы.

Показатель политропы процесса m от точки *1* до точки *2* можно найти с помощью первого закона термодинамики, применив его к частице движущегося газа.

Подведенная к частице теплота dQ, как извне, так и в результате трения, идет на повышение внутренней энергии и на совершение работы расширения, т.е.

$$dQ = d\,(\pm Q_{\text{вн}} + Q_{\text{тр}}) = d\varepsilon + p\,d\,(1/\rho),$$

или, используя понятие энтальпии, получаем

$$dQ = d\,(\pm Q_{\text{вн}} + Q_{\text{тр}}) = dh - dp/\rho.$$

Интегрируя это выражение от состояния *1* до состояния *2*, найдем

$$\pm Q_{\text{вн}} + Q_{\text{тр}} = c_p\,(T_2 - T_1) - \int_1^2 dp/\rho;$$

вычисляя интеграл при политропном процессе между p и ρ и заменяя $c_p = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$, получаем при $Q_{\text{тр}} = L_{\text{тр}}$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}R(T_2-T_1)-\frac{m}{m-1}R(T_2-T_1)=L_{тр}+Q_{вн},$$

откуда

$$\frac{m}{m-1}=\frac{\gamma}{\gamma-1}-\frac{L_{тр}\pm Q_{вн}}{R(T_2-T_1)}. \tag{2.70}$$

Вычитая единицу из обеих частей равенства (2.70), получаем

$$\frac{1}{m-1}=\frac{1}{\gamma-1}-\frac{L_{тр}\pm Q_{вн}}{R(T_2-T_1)}.$$

Работу сил трения подсчитываем по формуле

$$L_{тр}=\zeta\frac{v^2}{2},$$

где ζ — коэффициент потерь, определяемый обычно экспериментально; v — скорость газа, к которой отнесен коэффициент потерь ζ.

Для процесса расширения $T_2 < T_1$ и $m < \gamma$, для процесса сжатия $T_2 > T_1$ и $m > \gamma$.

Из уравнения энергии, написанного для течения с трением, но без энергообмена, следует важный вывод о постоянстве температуры торможения вдоль струйки, т.е. $T_1^* = T_2^*$. При этом имеется в виду, что вся кинетическая энергия струйки, т.е. энергия поступательного и вихревого движения, переходит в теплоту при изоэнтропийном торможении потока.

Помимо рассмотренных выше газодинамических функций параметров потока в абсолютном движении в расчетах лопаточных машин широко применяются газодинамические функции для расчета параметров потока в относительном движении.

Рассматривая уравнение Бернулли для относительного движения совместно с треугольником скоростей (см. рис. 49), из которого по теореме косинусов всегда

$$w^2=u^2+v^2-2uv_u,$$

получаем

$$\frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} + h = \frac{v^2}{2} - uv_u + h.$$

Вводя энтальпии торможения по относительной и по абсолютной скоростям, получаем

$$h_w^* - \frac{u^2}{2} = h^* - uv_u = H = \text{const}. \tag{2.71}$$

Величина H постоянна вдоль линии тока, проходящей не более чем через одну рабочую решетку турбомашины. Следовательно, температуры торможения в абсолютном и в относительном движениях связаны для произвольной точки на линии тока таким образом:

$$T^* - T_w^* - \frac{uv_u}{c_p} - \frac{u^2}{2c_p} = \frac{v^2}{2c_p} - \frac{w^2}{2c_p}.$$

Уравнение (2.53) для рабочего колеса турбомашины с учетом выражений (2.42) и (2.43) и при отсутствии теплообмена с окружающей средой ($\pm Q_{вн} = 0$) позволяет записать для компрессора

$$h_2^* - h_1^* = H_{т.комп} = u_2 v_{2u} - u_1 v_{1u}$$

и для турбины

$$h_2^* - h_1^* = -H_{т.турб} = -u_1 v_{1u} - u_2 v_{2u}.$$

По аналогии с абсолютным движением вводятся газодинамические функции в относительном движении. Приведенная скорость

$$\lambda_w = w / b_{кр},$$

где $b_{кр} = \sqrt{\dfrac{2\gamma}{\gamma + 1} R T_w^*}$ — критическая скорость в относительном движении.

Следует подчеркнуть, что величина T_w^* связана с квадратом окружной скорости и только в осевых турбомашинах остается практически постоянной вдоль линии тока. Полное давление p_w^* изменяется вдоль линии тока в соответствии с выражением

$$p_{2w}^* \,/\, p_{1w}^* = \sigma\left(T_{2w}^* \,/\, T_{1w}^*\right)^{\gamma/(\gamma-1)}.$$

Контрольные вопросы к §14

1. Какое предположение положено в основу получения параметров заторможенного потока?

2. Почему при измерении скорости потока сжимаемой среды необходимо измерять температуру заторможенного потока?

3. Как изменяется давление заторможенного потока при течении с трением без энергообмена?

4. Как изменяется давление заторможенного потока при течении с трением и энергообменом?

5. Как связан показатель политропы процесса с работой трения и теплообменом?

6. Как изменяется критическая скорость в относительном движении при течении по вращающемуся каналу?

§15. ТЕОРИЯ СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ. УДАРНАЯ АДИАБАТА

Скорость звука

Скачок уплотнения (или ударная волна) представляет собой физическое явление, возникающее при торможении сверхзвукового потока сжимаемой среды. Как известно из курса физики, звук — это малое возмущение, распространяющееся в упругой (сжимаемой) среде с некоторой скоростью a, которая и называется скоростью звука. Звуковая волна представляет собой продольное колебание упругой среды. Если среда неподвижна и в ней имеется точечный источник возмущения (возбуждения колебаний), то волны, имея сферическую форму, будут распространяться во все стороны равномерно (рис. 57).

В зависимости от соотношения между скоростью потока и скоростью звука получаются разные картины распространения возмущений в движущейся сжимаемой среде. При дозвуковых скоростях течения звуковые волны сносятся потоком, но они всетаки распространяются по всему потоку. При звуковой скорости потока эти волны не могут выйти за пределы плоскости, в которой расположен их источник. При сверхзвуковой скорости потока волны оказываются сосредоточенными внутри конуса с углом α_M при вершине, синус которого равен отношению скорости звука к скорости потока

$$\sin\alpha_M = \frac{at}{vt} = \frac{a}{v} = \frac{1}{M}, \tag{2.72}$$

а образующая конуса называется линией малых возмущений, или характеристикой. Угол α_M называется углом Маха, а отношение (v/a) часто называют числом Маха, хотя этот безразмерный параметр был известен специалистам намного раньше (см., например, работы Л.Эйлера и русского ученого-артиллериста Н.В.Маиевского). Формулу для скорости звука как скорости распространения малого возмущения в сжимаемой среде можно получить с помощью уравнений движения в форме Эйлера.

Поскольку звук представляет собой распространение малого возмущения в виде продольной волны, то местное значение плотности газа можно записать в виде

$$\rho = \rho_0(1 + \sigma),$$

где ρ_0 — плотность невозмущенного газа; $\sigma = \dfrac{\Delta\rho}{\rho_0} = \sigma(x, y, z, t)$ – относительное изменение плотности газа в продольной волне. Малость величины σ позволяет записать $1/(1 + \sigma) \approx 1$.

Отметим, что при распространении малого возмущения сама среда практически остается неподвижной, т.е. скорость газа $v = 0$ (даже мощные звуки симфонического оркестра не вызывают движения воздуха в зале).

Рассмотрим теперь процесс распространения звуковой волны в произвольном направлении x (любой из радиусов сферы на рис. 57) с помощью уравнения Эйлера для невязкого газа

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} = f_{mx} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

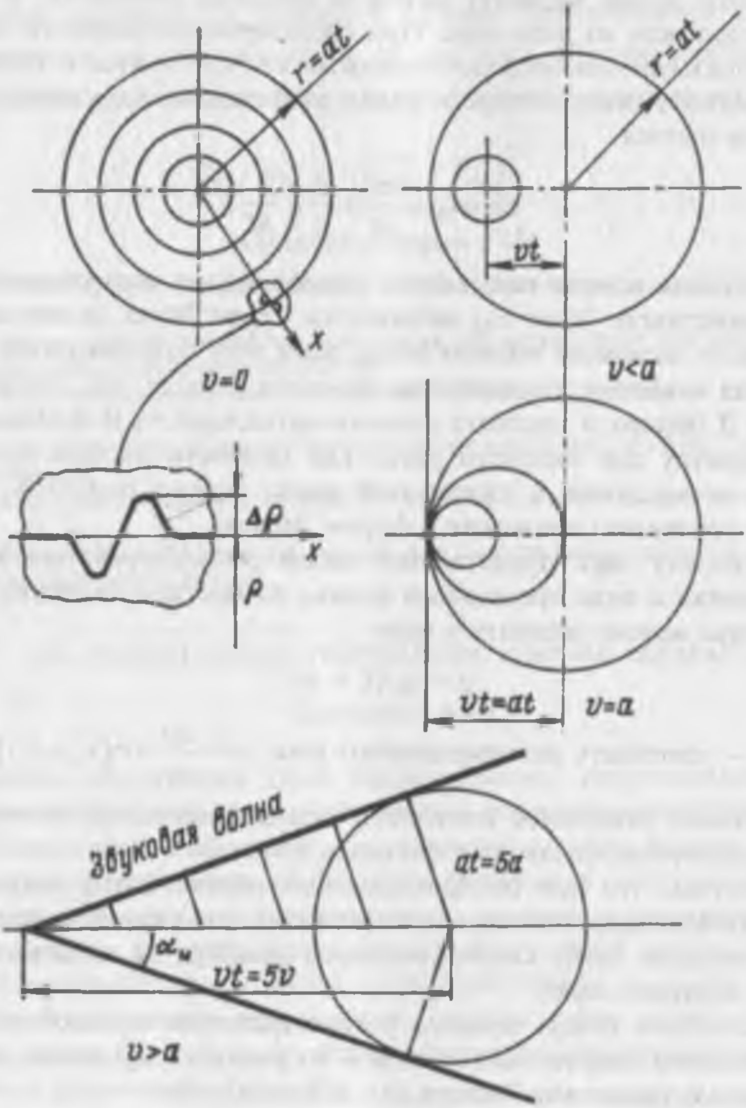


Рис. 57. Схема распространения звуковых волн от точечного источника возмущений в газе

Пренебрегая влиянием массовых сил тяжести ($f_{mx} = 0$) и учитывая, что $v_x \approx 0$, получаем

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \approx -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Предположив теперь, что в процессе распространения звука теплообмена между частицами не происходит (быстрый процесс), можем считать, что плотность ρ и давление p связаны уравнением изоэнтропы $p/\rho^\gamma = m = \text{const}$. Тогда

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}.$$

Для изоэнтропийного процесса

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = m\gamma\rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma p}{\rho}.$$

Но по условию задачи

$$\rho = \rho_0(1 + \sigma);$$

тогда

$$\rho^\gamma = \rho_0^\gamma(1+\sigma)^\gamma \approx \rho_0^\gamma(1+\gamma\sigma)$$

и

$$p = m\rho^\gamma = m\rho_0^\gamma(1+\gamma\sigma) = p_0(1+\gamma\sigma).$$

Следовательно,

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\gamma p_0(1+\gamma\sigma)}{\rho_0(1+\sigma)} \approx \frac{\gamma p_0}{\rho_0} = \text{const}.$$

Обозначим положительную величину

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = a_0^2.$$

Тогда

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} a_0^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} a_0^2 \rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} = -a_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Пользуясь теперь уравнением неразрывности для одномерного течения сжимаемой среды

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0,$$

при $\rho = \rho_0 (1 + \sigma)$ получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\rho_0 (1 + \sigma) \frac{\partial v_x}{\partial x},$$

откуда

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}.$$

Следовательно, совместное рассмотрение уравнения Эйлера и уравнения неразрывности дает для функции $\sigma (x, t)$ два равенства:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -a_0^2 \frac{\partial \sigma}{\partial t};$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}.$$

Дифференцируя первое из них по x, а второе по t и исключая v_x, получаем так называемое волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}. \qquad (2.73)$$

Решением этого дифференциального уравнения является функция

$$\sigma (x, t) = f_1 (x - a_0 t) + f_2 (x - a_0 t)$$

в виде суммы двух произвольных функций f_1 и f_2 указанных аргументов, в чем легко убедиться непосредственной подстановкой.

Поскольку функции f_1 и f_2 произвольны, то, приняв $f_2 = 0$, получим

$$\sigma(x, t) = f_1(x - a_0 t).$$

Если аргумент $(x - a_0 t) = x_0$, то и $\sigma = \sigma_0$. Следовательно, из условия $x = x_0 + a_0 t$ получим, что заданное значение $\sigma = \sigma_0$ перемещается по оси x со скоростью a_0, т.е. a_0 и есть скорость распространения малого возмущения σ, т.е. скорость звука

$$a_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\gamma R T_0}. \tag{2.74}$$

Если источником звука может быть колеблющаяся струна, голосовая связка, зуммер, то источником малого возмущения в потоке является риска на поверхности обтекаемого тела и даже любая точка криволинейной поверхности, обтекаемой сверхзвуковым потоком. Когда рассматривается плоское течение, можно говорить не о сферических, а о цилиндрических волнах, порождаемых не точечными, а линейными источниками возмущений. Эти линии малых возмущений отчетливо видны на теневых фотографиях, получаемых при помощи приборов, реагирующих на малейшие изменения плотности потока, а именно такое малое изменение плотности потока и возникает в звуковой волне.

Схематическое изображение картины линий малых возмущений при обтекании выпуклой и вогнутой поверхностей приведено на рис. 58. При обтекании выпуклой поверхности линии расходятся, а в случае вогнутой поверхности — сходятся. Теневая фотография в этом случае показывает некоторую узкую область, в которой можно провести линию. При ее пересечении поток получает резкое (почти ступенчатое) повышение плотности.

Если вогнутую стенку заменить вогнутым тупым углом с небольшим поворотом потока, то на теневой фотографии обнаруживается узкая область резкого повышения плотности потока (рис. 59, *а*). Подобная картина получается и при обтекании клина сверхзвуковым потоком, хотя наблюдаемое различие может быть связано с наличием пограничного слоя, образовавшегося на стороне тупого угла до точки излома стенки (рис. 59, *б*). При обтекании клина никакого пограничного слоя в потоке до его кромки, естественно, нет. Следует отметить, что при обтекании конуса с тем же углом при его вершине, как и у клина, угол наклона поверхности с резким изменением плотности будет другим (меньшим) из-за меньшего возмущения потока конусом (точечная вершина у конуса при линейной форме ребра у клина).

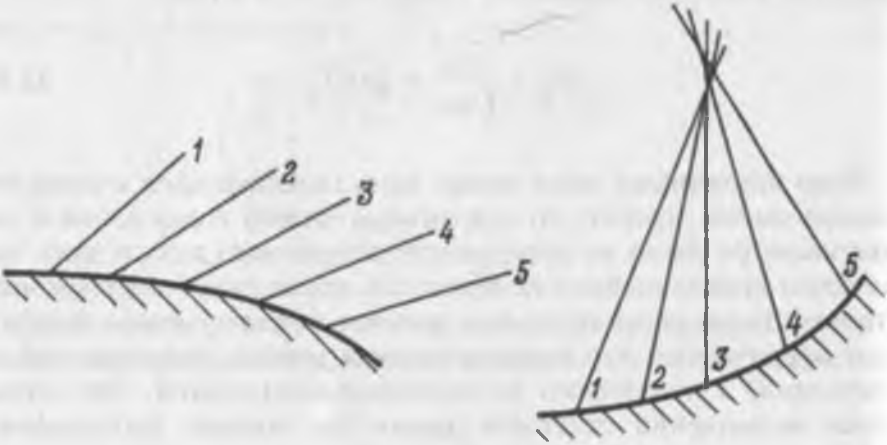


Рис. 58. Схематическое изображение картины линий малых (звуковых) возмущений при обтекании выпуклой и вогнутой поверхностей (*1 – 5* звуковые волны)

При изучении истечения газа через сверхзвуковое сопло в нерасчетных условиях, когда давление на выходе из сопла превышает расчетное значение, теневая фотография показывает наличие более или менее узкой области, расположенной поперек потока, в которой происходит резкое увеличение плотности газа. Перед этой областью поток сверхзвуковой, а после нее скорость потока дозвуковая. Можно считать, что все возмущения, которые появляются в среде, куда происходит истечение газа через сопло, распространяются в ней, но не могут войти в сопло дальше, чем до той узкой области. Там они накладываются друг на друга и приводят к появлению области резкого повышения плотности (рис. 59, *в*). Проникновение возмущений через дозвуковую часть пограничных слоев здесь не учитывается.

Одновременно с резким повышением плотности происходит резкое повышение статического давления и статической температуры газа при переходе через эту узкую область потока. Поперечный размер этой области обычно очень мал — составляет несколько длин свободного пробега молекул газа. Поэтому в технических приложениях эта область схематически заменяется поверхностью, а само явление называется скачком уплотнения, или ударной волной, в которой происходит разрыв параметров газа.

После рассмотрения физической картины перейдем к получению формул, связывающих параметры газа до и после скачка уплотнения. Следует отметить, что вследствие разрыва параметров газа невозможно использовать дифференциальные уравнения, выведенные ранее в условиях непрерывности изменения параметров потока. Поэтому будем пользоваться

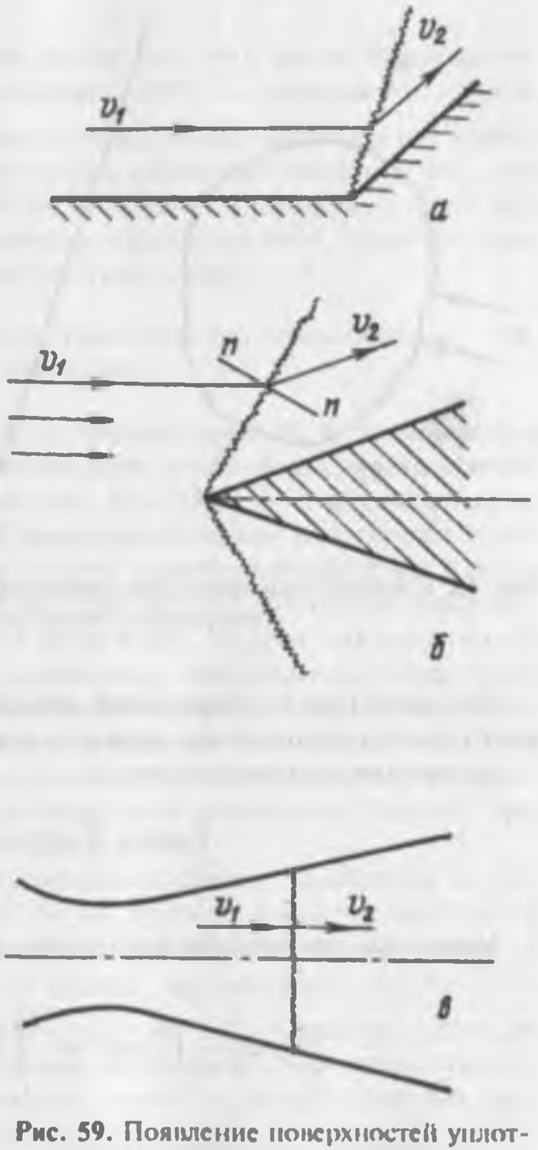


Рис. 59. Появление поверхностей уплотнения газа в сверхзвуковых потоках

уравнениями сохранения в интегральной форме для струйки газа при ее переходе через поверхность скачка уплотнения.

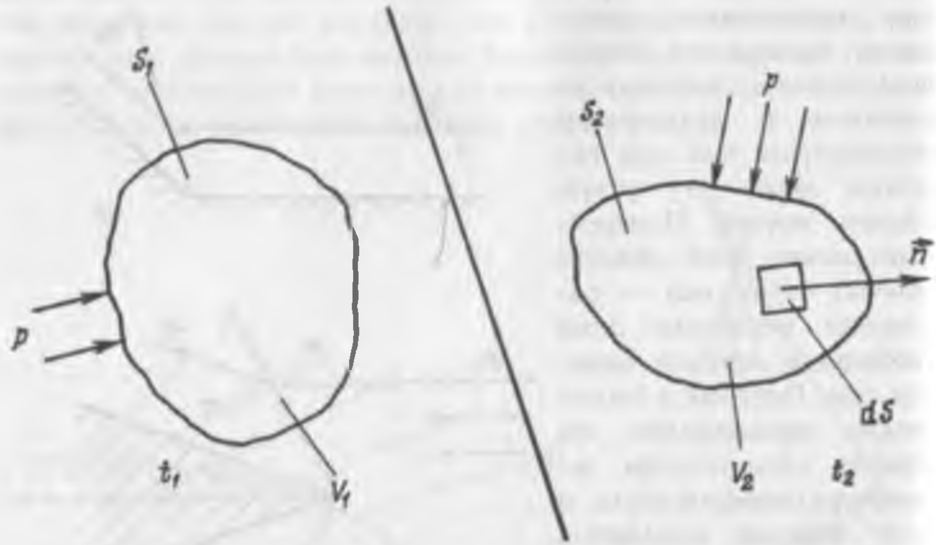


Рис. 60. К выводу символического уравнения сохранения при переходе через поверхность скачка уплотнения

Рассматривая произвольный объем газа V до и после поверхности скачка уплотнения, запишем для него:

уравнение сохранения массы

$$\int\limits_{V_2} \rho \mathrm{d}V - \int\limits_{V_1} \rho \mathrm{d}V = 0, \tag{2.75}$$

уравнение сохранения количества движения

$$\int\limits_{V_2} \bar{v} \rho \mathrm{d}V - \int\limits_{V_1} \bar{v} \rho \mathrm{d}V = -\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \int\limits_{S(t)} p \bar{n} \mathrm{d}S \tag{2.76}$$

и уравнение сохранения энергии

$$\int_{V_2}\left(c_V T + \frac{v^2}{2}\right)\rho\, dV - \int_{V_1}\left(c_V T + \frac{v^2}{2}\right)\rho\, dV = -\int_{S(t)} p\bar{n}\bar{v}\, dS, \qquad (2.77)$$

где V_1 и V_2 — объемы данной массы газа до и после перехода через поверхность скачка уплотнения; $S(t)$ — поверхность объема массы газа в процессе перехода через поверхность скачка уплотнения, знак минус в правых частях уравнений связан с тем, что давление p всегда противоположно внешней нормали $\bar{n}$ (рис. 60). Силами тяжести и касательными напряжениями пренебрегаем, т.е. рассматриваем невесомую невязкую среду.

Уравнения динамической совместности параметров при скачке

Для получения связи между параметрами до и после скачка уплотнения рассмотрим произвольную поверхность скачка в потоке газа, текущего слева направо (рис. 61). Пусть v_1 — скорость газа до скачка, v_2 — после скачка. Поверхность скачка уплотнения в общем случае нестационарной задачи может перемещаться в пространстве. Например, если клин (или конус) обтекается сверхзвуковым потоком с переменной скоростью, то угол наклона скачка к оси клина (конуса) будет изменяться, поверхность скачка будет как бы поворачиваться относительно вершины клина. Для малого участка этой поверхности можно говорить о нормальной скорости перемещения скачка, продольная же скорость скачка никакой роли не играет, так как параметры газа изменяются только при переходе через скачок по нормали к нему.

Нормальная скорость перемещения скачка характерна и для течения через сопло (см. рис. 59, *в*). Произвольная частица газа в потоке имеет абсолютную скорость $\bar{v}$ и относительную скорость $\bar{w}$ (относительно поверхности скачка, перемещающегося со скоростью $\bar{C}$) (см. рис. 61), причем $\bar{v} = \bar{w} + \bar{C}$. Отметим, что $v_n = w_n + N$, а $v_\tau = w_\tau + T$. Помимо нормальной проекции относительной скорости w_n газа введем скорость распространения поверхности скачка по движущемуся газу θ, которая обратна по знаку величине w_n, т.е. $\theta = -w_n$.

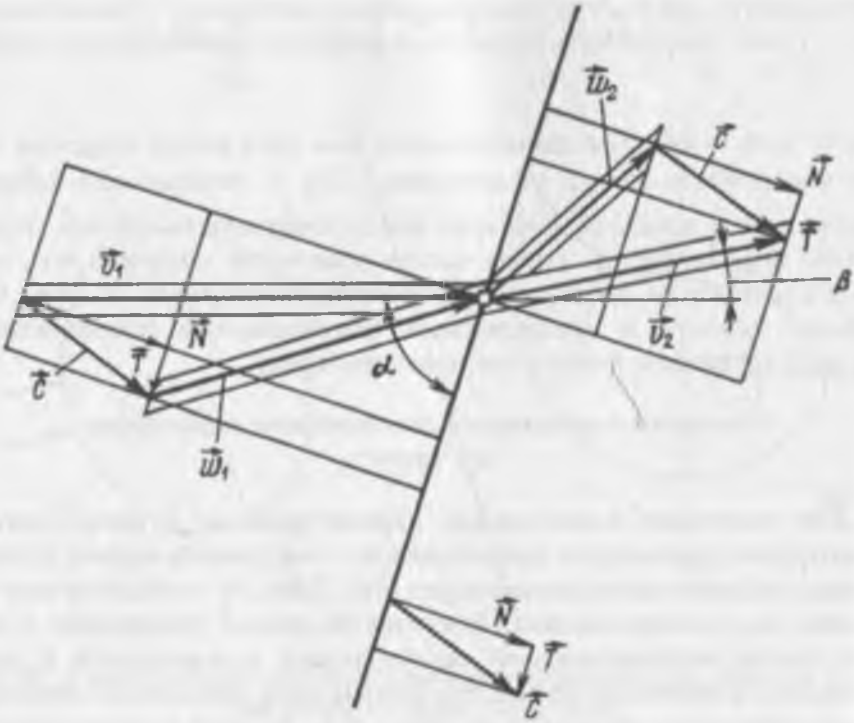


Рис. 61. К выводу уравнения динамической совместности параметров при скачке

Рассматривая теперь струйку газа площадью сечения dA, параллельного поверхности скачка в произвольный момент времени t в ее относительном движении, можем использовать уравнения сохранения массы, количества движения и энергии, приведенные выше в интегральной форме. За время dt весь объем струйки V_1 переходит через поверхность скачка и занимает объем V_2. В процессе перехода через поверхность скачка эта струйка имеет излом на его поверхности, причем площади сечений dA остаются слева и справа. Пусть S_1 есть часть незамкнутой поверхности струйки до скачка, а S_2 — после него, $\bar{n}_0$ — нормаль к скачку. Тогда, считая dA и dt малыми величинами, можем вместо (2.75) записать

$$\int_{V_2} \rho \mathrm{d}V = \rho_2 \mathrm{d}A w_{2n} \mathrm{d}t \quad \text{и} \quad \int_{V_1} \rho \mathrm{d}V = \rho_1 \mathrm{d}A w_{1n} \mathrm{d}t,$$

откуда, приравняв эти выражения, получим

$$\rho_2 w_{2n} = \rho_1 w_{1n} = \rho w_n \tag{2.78}$$

или

$$\rho_2 \theta_2 = \rho_1 \theta_1 = \rho \theta.$$

Отметим, что поскольку $v_n = w_n + N$, то

$$\rho_2 v_{2n} = \rho_1 v_{1n} + N(\rho_2 - \rho_1), \tag{2.79}$$

т.е. при $N \neq 0 \quad \rho_2 v_{2n} \neq \rho_1 v_{1n}$.

Итак, из закона сохранения массы следует, что при скачке уплотнения произведение плотности на нормальную составляющую относительной скорости не изменяется.

Из закона сохранения количества движения (2.76) имеем

$$\int_{V_2} \vec{v} \rho \mathrm{d}V = \vec{v}_2 \rho_2 \mathrm{d}A w_{2n} \mathrm{d}t \quad \text{и} \quad \int_{V_1} \vec{v} \rho \mathrm{d}V = \vec{v}_1 \rho_1 \mathrm{d}A w_{1n} \mathrm{d}t.$$

Рассматривая правую часть (2.76), интеграл по поверхности $S(t)$ представим в виде суммы двух интегралов, т.е.

$$\int_{S(t)} p\vec{n} \mathrm{d}S = \int_{S_1(t)} p\vec{n} \mathrm{d}S + \int_{S_2(t)} p\vec{n} \mathrm{d}S, \tag{2.80}$$

где $S_1(t)$ и $S_2(t)$ — незамкнутые поверхности струйки соответственно до и после скачка.

Дополняя величину $S_1(t)$ "крышечкой" $\mathrm{d}A_1$ слева от скачка с внешней нормалью $\vec{n}_0$, а величину $S_1(t)$ "крышечкой" $\mathrm{d}A_2 = \mathrm{d}A_1 = \mathrm{d}A$ справа от скачка с внешней нормалью $(-\vec{n}_0)$, получаем вместо (2.80) выражение

$$\int\limits_{S(t)} p\bar{n}\mathrm{d}S = \int\limits_{S_1'(t)} p\bar{n}\mathrm{d}S = \int\limits_{S_2'(t)} \bar{n}\mathrm{d}S = \int\limits_{\mathrm{d}A} p\bar{n}_0\mathrm{d}S = \int\limits_{\mathrm{d}A} p\bar{n}_0\mathrm{d}S,$$

где интегралы по замкнутым поверхностям $S_1'(t)$ и $S_2'(t)$ равны нулю, поскольку p_1 и p_2 постоянны на границах малых объемов с поверхностями $S_1'(t)$ и $S_2'(t)$.

Следовательно,

$$\int\limits_{S(t)} p\bar{n}\mathrm{d}S = (p_2 - p_1)\bar{n}_0\mathrm{d}A$$

и

$$\int\limits_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\int\limits_{S(t)} p\bar{n}\mathrm{d}S = -(p_2 - p_1)\bar{n}_0\mathrm{d}A\,\mathrm{d}t.$$

Тогда вместо (2.76) получаем

$$(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)\rho w_n\mathrm{d}A\,\mathrm{d}t = -(p_2 - p_1)\bar{n}_0\mathrm{d}A\,\mathrm{d}t$$

или, сокращая на $\mathrm{d}A\,\mathrm{d}t$,

$$(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)\rho w_n = -(p_2 - p_1)\bar{n}_0. \tag{2.81}$$

Проектируя (2.81) на нормаль $\bar{n}_0$ и на $\bar{\tau}_0$, получаем

$$(\bar{v}_{2n} - \bar{v}_{1n})\rho w_n = -(p_2 - p_1) \tag{2.82}$$

и

$$(\bar{v}_{2\tau} - \bar{v}_{1\tau})\rho w_n = 0.$$

Таким образом, при переходе через поверхность скачка повышению статического давления $(p_2 - p_1)$ соответствует понижение нормальной проекции скорости $(v_{2n} < v_{1n})$, причем разности нормальных проекций абсолютных и относительных скоростей одинаковы, т.е. $v_{1n} - v_{2n} = w_{1n} - w_{2n}$, поскольку величина N разрыва не имеет.

Тангенциальные проекции абсолютных и относительных скоростей при переходе через поверхность скачка не изменяются; физически это связано с тем, что вдоль поверхности скачка никакие силы не действуют, т.е.

$$v_{1\tau} = v_{2\tau} = w_{1\tau} = w_{2\tau}. \tag{2.83}$$

Для уравнения сохранения энергии (2.77) по аналогии с предыдущим рассуждением получим

$$\rho w_n\left[\left(c_V T_2 + \frac{v_2^2}{2}\right) - \left(c_V T_1 + \frac{v_1^2}{2}\right)\right] = -\left(p_2\bar{v}_2 - p_1\bar{v}_1\right)n_0 =$$

$$= -\left(p_2 v_{2n} - p_1 v_{1n}\right).$$

Заменяя $v_{1n} = w_{1n} + N$ и $v_{2n} = w_{2n} + N$, получаем правую часть этого выражения в виде

$$-(p_2 w_{2n} + p_2 N - p_1 w_{1n} - p_1 N) = -(p_2 w_{2n}\rho_2/\rho_2 -$$

$$- p_1 w_{1n}\rho_1/\rho_1) - (p_2 - p_1)N = \rho w_n (p_2/\rho_2 - p_1/\rho_1) +$$

$$+ (p_2 - p_1)N.$$

Но, как известно из термодинамики, $c_V T = \dfrac{1}{\gamma - 1}\dfrac{p}{\rho}$;

тогда

$$\left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2}\right) - \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2}\right) = -\frac{p_2 - p_1}{\rho w_n} N \tag{2.84}$$

или

$$T_2^* - T_1^* = -\frac{p_2 - p_1}{\rho w_n c_p} N. \tag{2.85}$$

Из выражения (2.85) следует, что при $N = 0$, т.е. в условиях стационарной задачи, температура заторможенного потока при переходе через поверхность скачка сохраняется. При $N \neq 0$, например при работе сопла ракетного двигателя в нерасчетных условиях, когда давление на срезе сопла больше расчетного и уменьшается, скачок перемещается к срезу сопла ($N > 0$). В этом случае $T_2^* < T_1^*$, т.е. поверхность скачка разделяет области с разной энтальпией заторможенного потока. Это объясняется тем, что при понижении внешнего давления изменение давления распространяется со скоростью звука и не может войти внутрь сопла через поверхность скачка, перед которым поток имеет сверхзвуковую скорость.

Из уравнения (2.84) следует, что при $N = 0$ и потерях, сосредоточенных в области скачка уплотнения, параметры до и после скачка связаны уравнением энергии (2.32) или уравнением Бернулли (2.47).

Ударная адиабата. Скачки уплотнения

При переходе через поверхность скачка плотность и давление резко (ударом) изменяются. Процесс перехода необратим, хотя его можно считать адиабатическим (при скачке нет теплообмена с окружающей средой). Такой процесс назовем естественным.

Для вывода уравнения ударной адиабаты рассмотрим соотношения (2.82) и (2.84), из которых исключим скорости. Для этого, умножая выражение (2.82) на сумму $(v_{1n} + v_{2n})$ и учитывая, что $v_{1\tau} = v_{2\tau}$, получаем

$$v_{2n}^2 - v_{1n}^2 = v_2^2 - v_1^2 = \frac{1}{\rho w_n}(p_2 - p_1)(v_{1n} + v_{2n}). \qquad (2.86)$$

Найдем разность квадратов скоростей из выражения (2.84)

$$v_2^2 - v_1^2 = \frac{1}{\rho w_n}(p_2 - p_1)2N + \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right),$$

заменив $2N = -(w_{1n} + w_{2n}) + (v_{1n} + v_{2n})$ и учтя выражение (2.86), будем иметь

$$(p_2 - p_1)\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right) = 0$$

или

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{[(\gamma + 1)/(\gamma - 1)](\rho_1/\rho_2) - 1}{[(\gamma + 1)/(\gamma - 1)](\rho_1/\rho_2)}. \qquad (2.87)$$

Уравнение (2.87) называется уравнением ударной адиабаты, или адиабаты Гюгонио.

Изоэнтропийная адиабата, или адиабата Пуассона, описывается уравнением

$$p_2 / p_1 = (\rho_2 / \rho_1)^\gamma.$$

На рис. 62 дано графическое изображение этих адиабат. Нетрудно обнаружить, что в точке $\rho_2 / \rho_1 = 1$ и $p_2 / p_1 = 1$ обе адиабаты совпадают с точностью до кривизны, т.е. совпадают их первые и вторые производные. Ударная адиабата имеет асимптоту при $\rho_2 / \rho_1 = (\gamma + 1) / (\gamma - 1)$, которая означает, что плотность газа остается конечной величиной даже при $p_2 / p_1 \to \infty$. Это связано с резким повышением температуры T при скачке, так как $\rho = p/(RT)$, и резкий рост давления сопровождается резким повышением температуры.

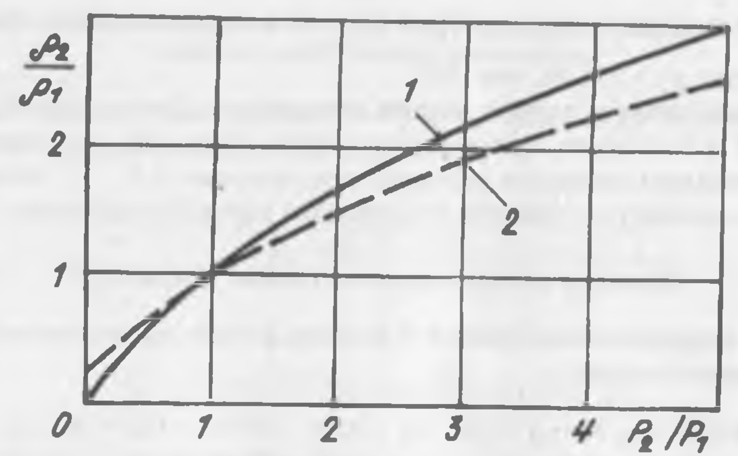


Рис. 62. Обычная (*1*) и ударная (*2*) адиабаты

В естественных условиях возникают только скачки уплотнения; скачки разрежения невозможны. Чтобы доказать это положение, обратимся к выражению для энтропии совершенного газа

$$S = c_V \ln (p/\rho^\gamma) + \text{const}.$$

При необратимых процессах

$$\Delta S = S_2 - S_1 = c_V \ln\left[\left(p_2 / \rho_2^\gamma\right) / \left(p_1 / \rho_1^\gamma\right)\right] > 0.$$

Следовательно, при $\Delta S > 0$ должно быть

$$\frac{(p_2 / p_1)}{(\rho_2 / \rho_1)^\gamma} = \frac{(p_2 / p_1)_{\text{уд}}}{(p_2 / p_1)_{\text{из}}} > 1$$

или

$$(p_2 / p_1)_{\text{уд}} > (p_2 / p_1)_{\text{из}}.$$

Отношение давлений $(p_2 / p_1)_{\text{уд}}$ в ударной адиабате превышает отношение давлений $(p_2 / p_1)_{\text{из}}$ в изоэнтропийной адиабате только при $p_2 > p_1$ (см. рис. 62).

Следовательно, только скачки уплотнения соответствуют условию $\Delta S > 0$. Скачок разрежения можно было бы получить при искусственном создании условий, при которых $\Delta S < 0$, например отнимая теплоту из области возможного скачка разрежения.

Скорость распространения скачка уплотнения

Для определения скорости θ воспользуемся выражением (2.82), из которого следует

$$-\rho w_n (-w_{1n} + w_{2n}) = p_2 - p_1 \quad \text{или} \quad \rho\theta (\theta_1 - \theta_1) = p_2 - p_1.$$

Умножая и деля каждое значение θ в скобках на соответствующие ρ при $\rho_1\theta_1 = \rho_2\theta_2$, получаем

$$\rho^2\theta^2 (1/\rho_1 - 1/\rho_2) = p_1 (p_2 / p_1 - 1). \tag{2.88}$$

Подставив в выражение (2.88) отношение давлений из формулы (2.87) и сделав преобразовании, получим

$$\theta_1^2 = \gamma \frac{p_1}{\rho^1} \frac{[2/(\gamma-1)](\rho_2/\rho_1)}{[(\gamma+1)/(\gamma-1)] - (\rho_2/\rho_1)} =$$

$$= a_1^2 \frac{2/(\gamma-1)}{[(\gamma+1)/(\gamma-1)](\rho_1/\rho_2) - 1}. \qquad (2.89)$$

Если отношение плотностей $\rho_2/\rho_1 \to 1$, то $\theta_1 \to a_1$. При $(\rho_2/\rho_1) > 1$ получим $\theta_1 > a_1$. Следовательно, сильный скачок уплотнения $(\rho_2/\rho_1 > 1)$ распространяется по газу со сверхзвуковой скоростью $(\theta_1 > a_1)$.

Если где-то произошел сильный взрыв и образовалась взрывная волна, то воздух при этом практически остается неподвижным, т.е. $v_n \approx 0$, тогда $\theta \approx N$: взрывная же волна движется со сверхзвуковой скоростью и вызывает сильные разрушения вследствие возникающей разности давлений.

Зависимость между нормальными составляющими скоростей при переходе через скачок уплотнения

Для стационарной задачи $N = 0$, $\theta = -v_n$ и $\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}$. В этом случае из выражения (2.89) получаем

$$v_{1n}^2 = \theta_1^2 = a_1^2 \frac{2/(\gamma-1)}{[(\gamma+1)/(\gamma-1)](v_{2n}/v_{1n}) - 1},$$

откуда

$$a_1^2 = [(\gamma+1)/2] v_{1n} v_{2n} - [(\gamma-1)/2] v_{1n}^2.$$

Найдем a_1^2 из уравнения Бернулли, которое остается справедливым при $N = 0$ [см. (2.84)]:

$$a_1^2 = [(\gamma+1)/2] a_{\text{кр}}^2 - [(\gamma-1)/2] v_{1n}^2 - [(\gamma-1)/2] v_\tau^2.$$

Приравнивая выражения для a_1^2, находим искомую зависимость (формулу Прандтля)

$$v_{1n}v_{2n} = a_{\text{кр}}^2 = \left[(\gamma - 1) / (\gamma + 1)\right]v_\tau^2$$

или

$$\lambda_{1n}\lambda_{2n} = 1 - \left[(\gamma - 1) / (\gamma + 1)\right]\lambda_\tau^2. \qquad (2.90)$$

Из соотношения (2.90) для прямого скачка уплотнения, когда $\lambda_\tau = 0$, получим

$$v_1 v_2 = a_{\text{кр}}^2 \quad \text{или} \quad \lambda_1\lambda_2 = 1,$$

т.е. прямой скачок всегда переводит сверхзвуковой поток в дозвуковой. При косом скачке уплотнения скорость за скачком может оставаться сверхзвуковой.

Ударная поляра. Коэффициент сохранения давления заторможенного потока при скачке

Анализ плоского течения при переходе через стационарный скачок уплотнения произвольной формы удобно вести с помощью ударной поляры. Ударная поляра представляет собой геометрическое место точек концов векторов скорости (годограф) после перехода через скачок уплотнения при заданном значении скорости до скачка (рис. 63) и произвольном угле α.

Введем систему координат с началом в точке O, ось x направлена по вектору скорости λ_1. В принятой системе координат

$$\lambda_{2n} = \lambda_x \sin\alpha - \lambda_y \cos\alpha; \quad \lambda_{1n} = \lambda_1 \sin\alpha;$$

$$\lambda_{2\tau} = \lambda_{1\tau} = \lambda_\tau = \lambda_1 \cos\alpha = \lambda_x \cos\alpha + \lambda_y \sin\alpha.$$

Величины λ_x и λ_y представляют собой проекции вектора скорости λ_2 на оси координат.

Подставляя значения λ_{2n}, λ_{1n} и λ_τ в выражение (2.90) и учитывая, что $\operatorname{tg}\alpha = (\lambda_1 - \lambda_x) / \lambda_y$, получаем

$$\lambda_y^2 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_x)^2(\lambda_1\lambda_x - 1)}{1 + [2/(\lambda+1)]\lambda_y^2 - \lambda_1\lambda_x}. \qquad (2.91)$$

Ветви кривой справа от точки B уходят в бесконечность. Для них $|\bar{\lambda}_2| > |\bar{\lambda}_1|$. Но при скачке уплотнения скорость должна уменьшаться; следовательно, эти ветви кривой не отвечают условию $\Delta S > 0$ и рассмотрению не подлежат.

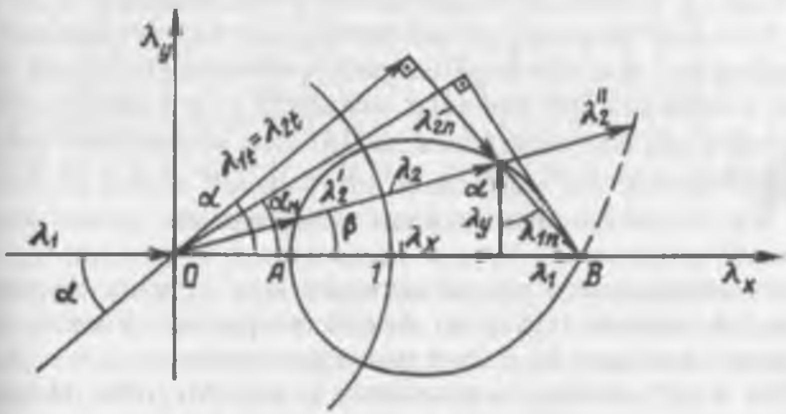


Рис. 63. Ударная поляра — годограф скорости после перехода через скачок уплотнения

Рассмотрим ударную поляру более подробно. Точка A поляры соответствует скорости после прямого скачка уплотнения, точка B — скорости до скачка или скорости после волны Маха. Луч, проведенный под углом β к оси x, пересекает поляру в двух точках. Обе скорости λ_2' и λ_2 меньше скорости λ_1 и реализуются в действительности.

Если угол раскрытия клина β мал, то образуется косой, или присоединенный, скачок уплотнения и скорость λ_2 после скачка должна мало отличаться от λ_1 [при $\beta = 0$ (пластина) скорость $\lambda_2 = \lambda_1$]. Если обтекается тело без острия или клин с углом β больше $\beta_{кр}$, то перед этим телом образуется так называемая головная волна, или отсоединенный скачок уплотнения, содержащий зону прямого скачка напротив передней точки тела. В соседних точках головной волны параметры после скачка должны быть близки параметрам после прямого скачка даже при малом угле β поворота вектора скорости.

Присоединенный (косой) скачок уплотнения образуется при обтекании клина с углом раскрытий $\beta < \beta_{кр}$, причем, очевидно, что угол $\beta_{кр}$ зависит от скорости λ_1 потока. Если угол раскрытия клина больше $\beta_{кр}$, то поток на этот угол повернуться не может: возникает головная волна, в которой угол поворота потока изменяется от 0 до $\beta_{кр}$ и опять до 0, проходя все точки поляры от *A* до *B*.

С помощью ударной поляры графически рассчитываются многие параметры газа при переходе через поверхность скачка уплотнения. Например, при заданных значениях λ_1 и β можно найти λ_2 для косого скачка уплотнения и λ_2' для отошедшей головной волны. Отметим, что расстояние от головной волны до обтекаемого тела можно найти методом установления, решая систему уравнений сохранения. Угол α определяется из условия $\lambda_{1\tau} = \lambda_{2\tau}$, для чего соединяются концы векторов λ_1 и λ_2 и на эту прямую опускается перпендикуляр из начала координат. Угол α и есть угол между вектором λ_1 и этим перпендикуляром.

Углы α и β связаны с величиной λ_1 или M_1 либо диаграммой ударных поляр (рис. 64), либо графиком (рис. 65), построенным по формуле (2.92), выведенной следующим образом.

Пользуясь формулой (2.90) для косого скачка уплотнения и соотношениями для λ_{1n}, λ_{2n} и λ_τ (см. рис. 63), получим

$$\left[\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right]\cos^2\alpha = \lambda_1^{-1}.$$

Затем, выразив $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ и $\cos^2\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$, получим после преобразований искомую зависимость

$$\operatorname{tg}\beta = \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \operatorname{tg}^2\alpha - \frac{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}{\lambda_1^2}\right] \Big/ \left[\frac{2}{\gamma + 1} + \frac{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}{\lambda_1^2}\right]\operatorname{tg}\alpha. \qquad (2.92)$$

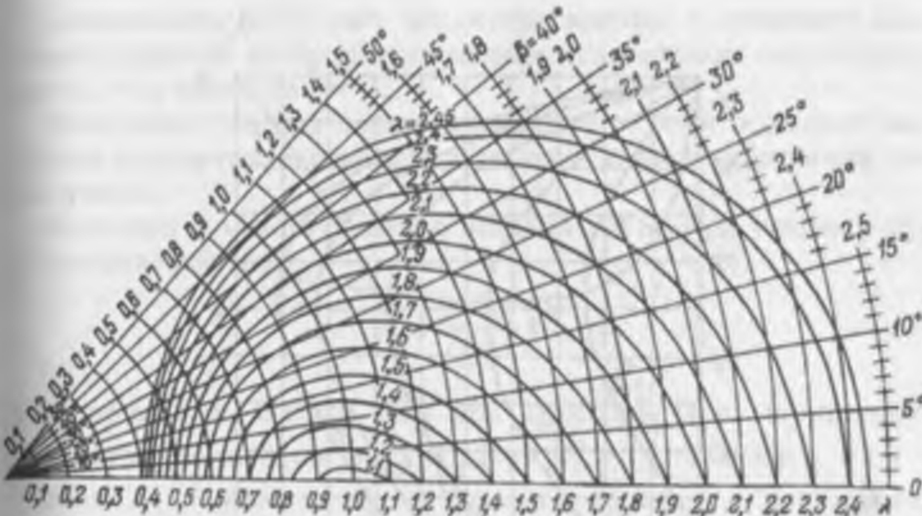


Рис. 64. Диаграмма ударных поляр

Следует отметить, что присоединенным косым скачкам уплотнения соответствует нижняя часть рис. 65, расположенная под линией, соединяющей точки максимальных значений β_{max} для данного M_1 (λ_1, γ). Верхняя часть графика соответствует отошедшим ударным волнам.

При переходе через стационарный скачок уплотнения энтропия растет при неизменной температуре заторможенного потока. Мерой роста энтропии служит падение давления заторможенного потока.

Отношение давлений заторможенного потока после и до скачка называется коэффициентом сохранения давления заторможенного потока при скачке

$$\sigma = p_2^* / p_1^* < 1.$$

Пользуясь формулой (2.87) и газодинамическими функциями $\pi(\lambda, \gamma)$ и $\varepsilon(\lambda, \gamma)$, можно выразить σ через скорости λ_1 и λ_2 до и после скачка уплотнения:

$$\sigma = \left(p_2 / p_1\right)\left(\pi_1 / \pi_2\right) = \frac{\pi_1}{\pi_2}\frac{\left[(\gamma+1)/(\gamma-1)\right]\left(\varepsilon_2 / \varepsilon_1\right)\sigma - 1}{\left[(\gamma+1)/(\gamma-1)\right] - \left(\varepsilon_2 / \varepsilon_1\right)\sigma}.$$

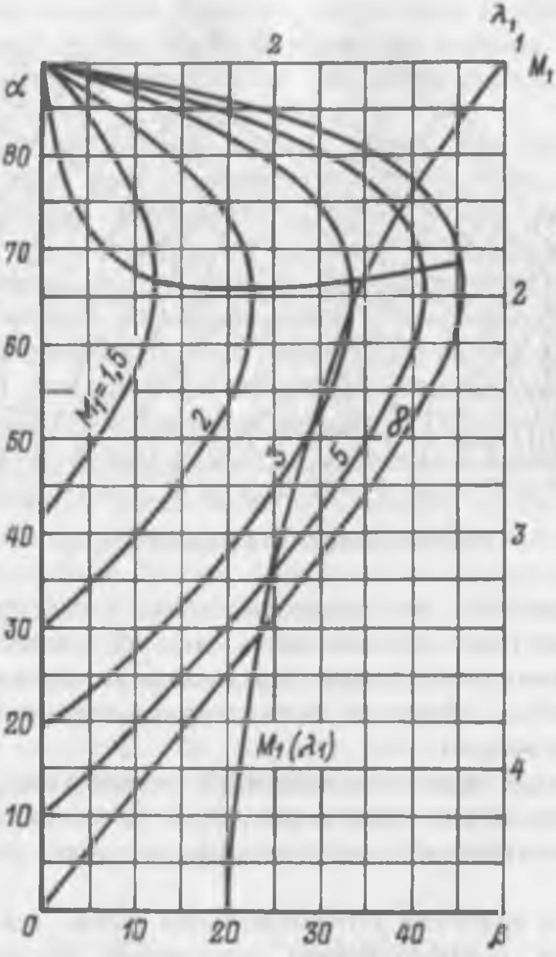


Рис. 65. Связь углов α и β для заданных значений числа $M_1(\lambda_1)$ до скачка при $\gamma = 1{,}4$

откуда

$$\sigma = \frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - \frac{\pi_1}{\pi_2}\right) + \sqrt{\left[\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} - \frac{\pi_1}{\pi_2}\right)\right]^2 + \frac{\pi_1\varepsilon_1}{\pi_2\varepsilon_2}}, \qquad (2.93)$$

Зависимость (2.93) дает замкнутые кривые в плоскости диаграммы ударных поляр, симметричные относительно оси абсцисс. При $\lambda_1 = \lambda_2$ значение $\sigma = 1$.

Диаграмма ударных поляр с кривыми σ = const позволяет рассчитать параметры плоского потока после скачка уплотнения любой формы.

Величину σ можно связать с величинами λ_1, λ_2 и углами α и β по формуле расхода

$$G = \beta(\gamma)\frac{p^* A_\perp}{\sqrt{RT^*}} g(\lambda, \gamma),$$

примененной к струйке газа при переходе через поверхность скачка уплотнения (см. рис. 61). При $T_1^* = T_2^*$, R = idem, $\beta(\gamma)$ = = idem, $A_{1\perp} = A \sin\alpha$, $A_{2\perp} = A \sin(\alpha - \beta)$, где A — площадь сечения струйки, параллельного поверхности скачка, получаем

$$\sin\alpha \; p_1^* q(\lambda_1, \gamma) = \sin(\alpha - \beta) p_2^* q(\lambda_2, \gamma),$$

откуда

$$\sigma = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{q(\lambda_1, \gamma)}{q(\lambda_2, \gamma)} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}. \quad (2.94)$$

Особенно простое выражение получает формула (2.94) для прямого скачка уплотнения ($\alpha = 90^\circ$, $\beta = 0$).

$$\sigma = q(\lambda_1, \gamma) \,/\, q\left[(1/\lambda_1), \gamma\right]. \quad (2.95)$$

В заключение покажем, что после криволинейного скачка уплотнения потенциальный поток становится вихревым.

Связь между завихренностью потока и энтропией

Выражение (2.35) показывает, что для установившегося потенциального потока ($\vec{\omega} = 0$) при $\vec{f}_m = 0$ и T^* = const энтропия газа постоянна. Случай винтового движения, когда $\vec{\omega} \parallel \vec{v}$, здесь не рассматривается, хотя при этом s = const.

При переходе через поверхность скачка уплотнения, если поверхность скачка плоская или коническая, все линии тока находятся в равных условиях. Потенциальный поток после скачка остается тоже потенциальным: возникновение винтового движения после скачка не реально. Если поверхность скачка в плоском потоке криволинейна, то разные линии тока получают разные приращения параметров, в том числе энтропии. Следовательно, плоский потенциальный поток становится вихревым при переходе через головную волну или через присоединенный криволинейный скачок уплотнения.

Контрольные вопросы к §15

1. Как связан угол Маха с числом М?
2. При каких условиях возникает скачок уплотнения (ударная волна)?
3. Почему при анализе течений со скачками уплотнения уравнения сохранения записываются в интегральной форме?
4. Что такое скорость распространения скачка уплотнения по движущемуся газу?
5. Почему при переходе через поверхность скачка уплотнения тангенциальная проекция скорости не изменяется?
6. Как объяснить появление разрыва величины энтальпии заторможенного потока при переходе через нестационарный скачок уплотнения?
7. Как объяснить существование конечного отношения плотностей газа при переходе через поверхность скачка уплотнения при любом повышении давления?
8. С чем связано появление только скачков повышения давления?
9. От каких параметров зависит скорость распространения ударной волны по газу?
10. При каких условиях может существовать сверхзвуковой поток после скачка уплотнения?
11. С чем связано понижение давления заторможенного потока при переходе через поверхность скачка уплотнения?
12. Почему коэффициент сохранения давления заторможенного потока минимален для прямого скачка?
13. Как объяснить существование оптимальной системы скачков уплотнения при торможении заданного сверхзвукового потока?

§16. ПРИМЕРЫ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ – СТОКСА И УРАВНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

При рассмотрении уравнений Эйлера для нестационарного движения невязкой среды был получен первый интеграл системы дифференциальных уравнений в частных производных для линии тока [см. формулу (2.44)], а затем и для линии тока при стационарном движении несжимаемой и сжимаемой невязкой среды [см. формулы (2.45) и (2.46)]. Этот первый интеграл называется уравнением Бернулли.

Система уравнений Эйлера, энергии и неразрывности в общем виде не интегрируется, ее решение получается лишь численно с помощью ЭВМ при заданных граничных и начальных условиях.

Уравнение Навье — Стокса не позволяет получить его первый интеграл, но при заданной форме линий тока возможно найти его некоторые точные решения, прекрасно подтверждаемые экспериментом, что свидетельствует о справедливости принятых при выводе допущений.

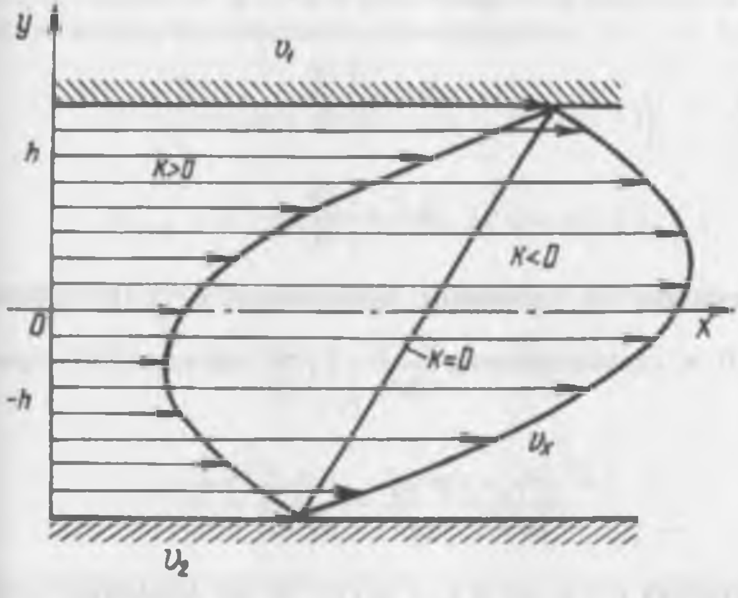


Рис. 66. Схема течения вязкой жидкости между параллельными пластинами при различных значениях градиента давления κ

1. Рассмотрим установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости между бесконечно длинными плоскими параллельными пластинами, движущимися вдоль оси x с постоянными скоростями (рис. 66) при следующих граничных условиях:

$$\text{при } y = h \qquad v_x = v_1; \tag{2.96}$$

$$\text{при } y = -h \qquad v_x = v_2.$$

В данной задаче можно считать, что $v_y = v_z = 0$, $\dfrac{\partial v_x}{\partial t} = 0$ и $\dfrac{\partial v_x}{\partial z} = 0$. Тогда, пренебрегая влиянием сил тяжести, т.е. положив $f_{mx} = f_{my} = f_{mz} = 0$, из уравнений Навье — Стокса (2.19) получим

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right),$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{2.97}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Поскольку из уравнения неразрывности (1.18) следует, что $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} = 0$ и, следовательно, $\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0$, то система (2.97) принимает вид

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x},$$

но поскольку $p = p(x)$, а $v_x = v_x(y)$, то это возможно только тогда, когда

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \text{const} = k, \tag{2.98}$$

где k — постоянная величина, причем при напорном движении слева направо при линейном уменьшении давления из-за потерь на трение величина $k < 0$, при безнапорном движении под действием сил трения со стороны пластин $k = 0$ и при увлечении вязкой жидкости силами трения против положительного градиента давления $k > 0$.

Интегрируя уравнение (2.98) по y дважды, получаем

$$v_x = ky^2/2 + c_1 y + c_2.$$

Постоянные c_1 и c_2 определим из граничных условий (2.96). Тогда

$$v_x = k\,(y^2 - h^2)/2 + (v_1 + v_2)/2 + (v_1 - v_2)\,y/(2h). \qquad (2.99)$$

Эпюры скоростей $v_x\,(y)$ для различных k приведены на рис. 66. Расход жидкости и средняя скорость равны:

$$G = \int_{-h}^{h} \rho v_x \mathrm{d}y = \rho 2h\left[(v_1 + v_2)/2 - kh^2/3\right],$$

$$v_{x\,\text{ср}} = G/(2h\rho) = (v_1 + v_2)/2 - kh^2/3.$$

Напряжения трения на стенках со стороны жидкости

$$\tau_1 = -\mu\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}\right)_{y=h} = -\mu\left(kh + \frac{v_1 - v_2}{2h}\right),$$

$$\tau_2 = \mu\left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}y}\right)_{y=h} = \mu\left(-kh + \frac{v_1 - v_2}{2h}\right).$$

Для частного случая при $v_1 = v_1 = 0$, $k < 0$, т.е. для напорного движения в щели между двумя неподвижными пластинами, получим

$$v_x = -k\left(y^2 - h^2\right)/2; \qquad G = -\frac{2}{3}\rho h^3 k;$$

$$v_{x\,\max} = v_{x/y=0} - kh^2/2; \qquad v_{x\,\text{ср}} = -kh^2/3;$$

$$\tau_1 = \tau_2 = -\mu kh = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}h; \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = k\mu.$$

Для частного случая при $v_2 = 0$; $v_1 \neq 0$; $k < 0$, т.е. для напорного движения в щели с одной подвижной стенкой, получим

$$v_x = -k\left(y^2 - h^2\right) / 2; \qquad G = -\frac{2}{3}\rho h^3 k;$$

$$v_{x\,\max} = v_{x/y=0} - kh^2 / 2; \qquad v_{x\,\text{ср}} = -kh^2 / 3;$$

$$\tau_1 = -\mu kh - \mu \frac{v_1}{2h}; \quad \tau_2 = -\mu kh + \mu \frac{v_1}{2h}.$$

2. Рассмотрим установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости вдоль оси x в цилиндрической трубе произвольного поперечного сечения A в плоскости (y, z). В этом случае также можно считать, что $v_y = v_z = 0$, $\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0$; $f_{mx} = f_{my} = f_{mz} = 0$, $\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0$. Тогда из (2.97) получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right); \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Следовательно, $p = p\,(x)$, а $v_x = v_x\,(y, z)$; это означает, что скорость v_x в данной задаче должна удовлетворять уравнению Пуассона $\Delta v_x = \text{const}$ при условии, что v_x обращается в нуль на контуре поперечного сечения $A\,(y, z)$.

К этому же уравнению Пуассона сводятся некоторые физические задачи из различных областей техники: а) о поле относительных скоростей при плоском движении невязкой несжимаемой жидкости во вращающемся канале того же поперечного сечения $A\,(y, z)$ с постоянной угловой скоростью; б) о касательных напряжениях при кручении призматического бруса того же поперечного сечения $A\,(y, z)$; в) о прогибе тонкой мембраны, натянутой на контур того же сечения $A\,(y, z)$, под действием постоянного перепада давлений.

Это сходство различных задач рассматривается в теории аналогий, которая бывает весьма результативной (как, например, применение формулы Био — Савара в гидродинамике и электротехнике).

3. Рассмотрим установившееся незакрученное осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости в трубе кругового поперечного сечения радиусом R.

Воспользовавшись уравнениями Навье — Стокса, записанными в цилиндрической системе координат (2.22) с учетом физических условий

$$v_r = 0,\ v_\theta = 0,\ f_{m\,r} = f_{m\,z} = 0\ ,\ \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial v_z}{r\partial\theta} = 0,$$

получим

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial p}{r\partial\theta} = 0, \tag{2.100}$$

$$v_z\,\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

при удовлетворении уравнению неразрывности (1.22), которое в условиях задачи получает вид $\partial v_z / \partial z = 0$.

Тогда уравнения (2.100) принимают вид

$$\frac{1}{\mu}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \left(\frac{\mathrm{d}^2 v_z}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right) = \mathrm{const} = k, \tag{2.101}$$

причем для напорного движения $k < 0$.

Уравнение (2.101) для v_z можно преобразовать к виду

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right) = k,$$

разделив переменные в котором и дважды проинтегрировав по r, получим

$$v_z = \frac{k}{4} r^2 + c_1 \ln r + c_2. \tag{2.102}$$

Произвольные постоянные определяются из граничных условий:

при $r = R$ $v_z = 0$;
при $r = 0$ $v_z = v_{max}$ или $dv_z / dr = 0$.

Но $\frac{dv_z}{dr} = \frac{k}{2} r + c_1 \frac{1}{r}$; тогда условие $\frac{dv_z}{dr} = 0$ при $r = 0$ может выполняться только при $c_1 = 0$.

Из первого условия

$$c_2 = -\frac{k}{4} R^2,$$

следовательно,

$$v_{z\,max} = -\frac{k}{4}\left(R^2 - r^2\right), \tag{2.103}$$

т.е. скорость имеет параболический характер изменения по r.

Скорость на оси трубы при ($r = 0$)

$$v_{z\,max} = -\frac{k}{4} R^2.$$

Расход через трубу

$$G = \rho \int_0^R v_z 2\pi r \, dr = -\frac{\pi}{8} k R^4 \rho = -\frac{\pi}{8\mu} k R^4 \rho \left(\frac{dp}{dz}\right).$$

Средняя скорость по сечению трубы

$$v_{cp} = \frac{G}{\rho \pi R^2} = -\frac{k}{8} R^2 = -\frac{R^2}{8\mu}\left(\frac{dp}{dz}\right). \tag{2.104}$$

Напряжение трения на стенке трубы подсчитывается по формуле (2.24):

$$\tau\Big|_{r=R} = -\tau_{rz}\Big|_{r=R} = -\mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)\Bigg|_{r=R} = -\mu\frac{k}{2}R = -\frac{R}{2}\frac{dp}{dz}, \qquad (2.105)$$

где знак минус учитывает направление нормали к площадке ($-\vec{r}$).

В технических расчетах перепад давлений в трубе обычно связывают со средней скоростью $v_{ср}$ через коэффициент сопротивления ξ в виде

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\xi}{2R}\frac{\rho}{2}v_{ср}^2. \qquad (2.106)$$

Подставляя это выражение в формулу (2.105), получаем

$$\tau = \frac{\xi}{2R}\frac{\rho}{2}v_{ср}^2\frac{R}{2} = \frac{\xi}{8}\frac{\rho}{2}v_{ср}^2.$$

Выражая коэффициент ξ из формул (2.106) и (2.104), получаем

$$\xi = \frac{32\mu}{\rho v_{ср} R}$$

или, вводя число Рейнольдса $\mathrm{Re} = \dfrac{v_{ср}\rho d}{\mu}$ по диаметру трубы $d = 2R$, получаем

$$\xi = 64 / \mathrm{Re}.$$

Полученная зависимость прекрасно подтверждается многочисленными экспериментами для ламинарного режима течения при $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{кр}$. Отсюда же можно сделать вывод о том, что формула (2.103) для параболического распределения скоростей по сечению трубы также строго соответствует ламинарному режиму течения при постоянном по длине трубы отрицательном градиенте давления $\left(\dfrac{dp}{dz} = \mathrm{const} < 0\right)$ и при постоянном значении коэффициента вязкости μ.

При турбулентном режиме течения в трубе поле скоростей имеет более наполненный характер, средняя скорость ближе к ее максимальному значению. Помимо молекулярной вязкости слои движущейся жидкости связаны турбулентной вязкостью, которая выравнивает поле скоростей. Анализ турбулентного режима течения в этом разделе не рассматривается.

4. Рассмотрим установившееся незакрученное осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости в трубе кольцевого поперечного сечения радиусами R_1 и $R_2 > R_1$ (рис. 67).

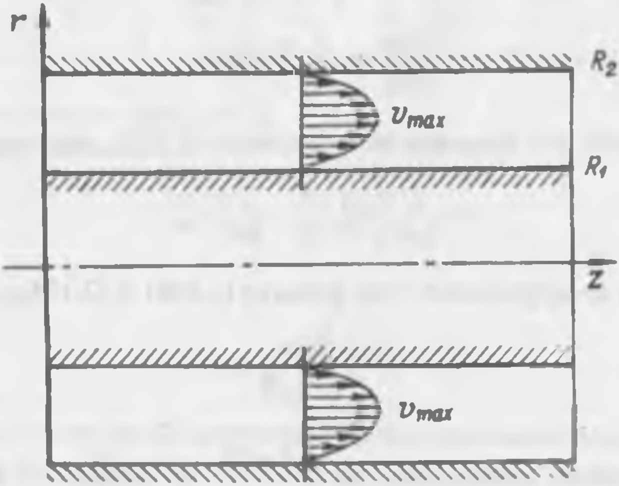


Рис. 67. Схема течения вязкой жидкости в трубе кольцевого сечения

Поле скоростей должно удовлетворять уравнению (2.102) со следующими граничными условиями: при $r = R_1 v_{z1} = 0$, при $r = R_2 v_{z2} = 0$. Тогда, вычисляя значения c_1 и c_2 в выражении (2.102), получаем

$$v_z = \frac{k}{4}\left[\left(R_2^2 - R_1^2\right) - \left(R_2^2 - R_1^2\right)\frac{\ln R_2 - \ln r}{\ln R_2 - \ln R_1}\right]. \qquad (2.107)$$

Расход жидкости через трубу кольцевого сечения

$$G = \int_{R_1}^{R_2} \rho v_z 2\pi r \, dr = \rho\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)v_{\text{ср}} =$$

$$= -\frac{k}{8}\rho\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)\left[R_2^2 + R_1^2\,\frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2 / R_1)}\right],$$

откуда средняя скорость по сечению

$$v_{\text{ср}} = -\frac{k}{8}\left[R_2^2 + R_1^2\,\frac{R_2^2 - R_1^2}{\ln(R_2 / R_1)}\right].$$

Отметим, что при $R_1 \to 0$ значение $v_{\text{ср}}$ для трубы кольцевого сечения стремится к значению $v_{\text{ср}}$ для трубы кругового сечения. В то же время из формулы (2.107) следует, что при $r \to R_1$ для всех значений R_1 скорость $v_z \to 0$, в том числе и при $R_1 \to 0$. Следовательно, в случае движения вязкой жидкости течение в трубе кольцевого сечения не должно переходить в течение в трубе кругового сечения, при котором на оси трубы $v_z = v_{z\ \max} \neq 0$.

Если в плоском течении (пластина на оси симметрии канала) это очевидно, то в случае осесимметричного канала (бесконечно тонкая струна на оси трубы) в действительности, по-видимому, будет происходить срыв потока со струны, так как при $R_1 \to 0$ исчезает поверхность контакта с вязкой жидкостью, чего нет в случае тонкой пластины.

5. Рассмотрим установившееся плоское осесимметричное движение вязкой несжимаемой жидкости между двумя соосными круговыми цилиндрами R_1 и R_2 (рис. 68), вращающимися с угловыми скоростями ω_1 и ω_2.

Полагая, что $v_r = v_z = 0$ и $f_{mr} = f_{m\theta} = f_{mz} = 0$, из уравнений (2.22) получаем

$$-\frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r};$$

$$0 = \nu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2}\right); \qquad (2.108)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Рис. 68. Схема течения вязкой жидкости между двумя соосными круговыми цилиндрами, вращающимися с угловыми скоростями ω_1 и ω_2

Уравнение неразрывности (1.22) в этом случае удовлетворяется всегда.

Из уравнений (2.108) следует, что скорости движения жидкости должны удовлетворять уравнению

$$\frac{dv_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r^2} = 0, \qquad (2.109)$$

в котором частные производные по r заменены обыкновенными производными, поскольку $v_\theta(r)$.

При решении уравнения (2.109) его удобно переписать в виде

$$\frac{d^2v_\theta}{dr^2} + \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = \frac{d}{dr}\left(\frac{dv_\theta}{dr} + \frac{v_\theta}{r^2}\right).$$

Тогда, вводя новую переменную $t(r) = \dfrac{v_\theta}{r}$, получим уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, решение которого дает

$$v_\theta = Ar + \frac{B}{r}.$$

Граничные условия, при которых $v_\theta = v_{\theta_1} = \omega_1 R_1$ при $r = R_1$ и $v_\theta = v_{\theta_2} = \omega_2 R_2$ при $r = R_2$, дают

$$A = \frac{\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}; \qquad B = \frac{R_1^2 R_2^2(\omega_1 - \omega_2)}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Следовательно,

$$v_\theta(r) = \frac{1}{R_2^2 - R_1^2}\left[\left(\omega_2 R_2^2 - \omega_1 R_1^2\right)r + R_1^2 R_2^2(\omega_1 - \omega_2)\frac{1}{r}\right]. \qquad (2.110)$$

Распределение давлений по радиусу определяется уравнением (2.108):

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{v_\theta^2}{r},$$

откуда

$$p(r) = p_1 + \frac{\rho}{2}\left[A^2\left(r^2 - R_1^2\right) + 4AB\ln\left(\frac{r}{R_1}\right) + \frac{B^2\left(r^2 - R_1^2\right)}{R_1^2 r^2}\right]. \quad (2.111)$$

Касательные напряжения на поверхностях вращающихся цилиндров определяем по формуле (2.24)

$$\tau_{r\theta} = \mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right)\right] = \mu\left(\frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r}\right)$$

или, подставляя выражение для $v_\theta = Ar + \dfrac{B}{r}$, получаем

$$\tau_{r\theta} = \mu\left(A - \frac{B}{r^2} - A - \frac{B}{r^2}\right) = -\mu\frac{2B}{r^2}.$$

Момент трения, действующий на цилиндр высотой h, равен

$$M = \tau_{r\theta} 2\pi r h r = -4\pi B h \mu,$$

т.е. не зависит от радиуса; это означает, что жидкость передает момент трения без изменения.

В частном случае, когда внутренний цилиндр радиусом R_1 и высотой h вращается в неподвижном кожухе радиусом R_2 ($\omega_2 = 0$), то

$$B = \omega_1 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad \text{и} \quad M = -4\pi h \mu \omega_1 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \quad (2.112)$$

С таким моментом внутренний вращающийся цилиндр действует на неподвижный кожух. Если рассмотреть внутренний цилиндр в неограниченном объеме жидкости ($R_2 \to \infty$), то

$$M = -4\pi h\mu\omega_1 R_1^2,$$

откуда коэффициент момента трения в формуле $M_{тр} = c_{M\,тр}\rho\dfrac{v_1^2}{2}h2\pi R_1^2$, можно (приравняв модули моментов) выразить в виде $c_{M\,тр} = 8\ /\ \mathrm{Re}$, где число Рейнольдса по диаметру внутреннего цилиндра

$$\mathrm{Re} = v_1 2R\ /\ \mu.$$

Структурно коэффициент $c_{M_{тр}}$ напоминает коэффициент трения $\xi = 64\ /\ \mathrm{Re}$ в трубе при ламинарном режиме течения.

Следует отметить, что в данной постановке задачи коэффициент $c_{M_{тр}} = \mathrm{Re}\left[1 - \left(\dfrac{R_1}{R_2}\right)^2\right]$ был подсчитан для плоского ламинарного течения, т.е. не учитывались концевые течения, характерные для цилиндра конечной высоты (длины) в кожухе, а также возможная турбулентность потока в кольцевом зазоре между цилиндрами.

В случае $\omega_1 = 0$ момент трения на неподвижном внутреннем цилиндре, погруженном в цилиндрический сосуд высотой h, вращающийся со скоростью ω_2, подсчитывается по формуле

$$M_{тр} = 4\pi\mu h\omega_2\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2},$$

по которой можно найти коэффициент вязкости μ.

К подобному классу задач можно отнести расчет повышения температуры масла в подшипнике скольжения на основе точного решения уравнения Навье — Стокса. В такой постановке задачи подшипник заменяется схемой, изображенной на рис. 69.

Тогда по величине момента трения можно определить мощность трения $N_{тр} = M_{тр}\omega_1$ и затем, допуская, что вся мощность трения переходит в теплоту, которая идет на нагрев масла в зазоре между валом и корпусом, найти ежесекундное повышение температуры Δt по формуле

$$M_{\text{тр}}\,\omega_1 = mc\Delta t,$$

где m — масса масла в зазоре; $m = \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)h\rho$; c — удельная теплоемкость масла.

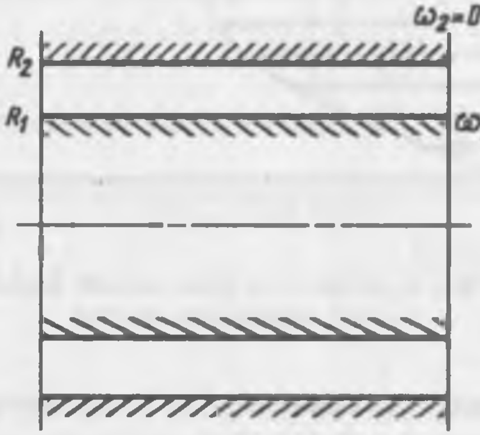


Рис. 69. Схема опорного подшипника скольжения к расчету повышения температуры масла в нем

Отсюда

$$\Delta t = \frac{M_{\text{тр}}\omega_1}{cm} = \frac{4\nu\omega_1^2 R_1^2 R_2^2}{c\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2}. \qquad (2.113)$$

В реальных условиях всегда происходит циркуляция масла через полость подшипника и, кроме того, учитывается влияние температуры на коэффициент вязкости μ, что приводит к более низким значениям Δt, чем дает формула (2.113).

6. Рассмотрим задачу о подогреве вязкой жидкости за счет трения при ламинарном установившемся течении между пластинами (рис. 70).

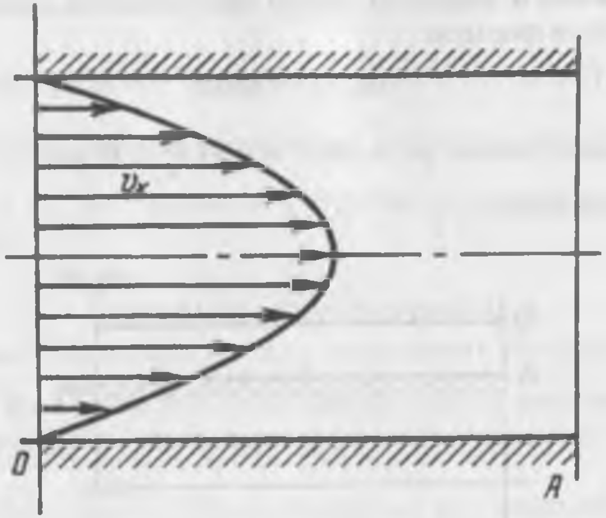


Рис. 70. К расчету подогрева вязкой жидкости за счет диссипации энергии

Теплопроводностью, внешним теплоподводом и сжимаемостью среды пренебрежем, т.е. $\operatorname{div}\vec{Q} = 0$, $Q_V = 0$ и $\operatorname{div}\vec{v} = 0$.

Поле скоростей имеет параболический характер:

$$v_x = -\frac{1}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(h^2 - y^2\right) = \frac{v_m}{h^2}\left(h^2 - y^2\right).$$

Рассматривая уравнение энергии (2.29) с учетом оговоренных условий $\vec{Q} = 0$ и $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, получаем

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} = \rho c\frac{dT}{dt} - \mu D, \qquad (2.114)$$

где диссипативная функция D (2.28) в данной задаче принимает вид

$$D = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{dv_x}{dy}\right)^2 = \frac{4v_m^2}{h^4}y^2,$$

поскольку в силу уравнения неразрывности при $v_y = 0$ $\dfrac{\partial v_x}{\partial x} = 0$. Тогда, преобразовав уравнение (2.114) к виду

$$\rho c\frac{dT}{dx}\frac{dx}{dt} = \rho c v_x\frac{dT}{dx} = \mu\frac{4v_m^2}{h^4}y^2$$

и интегрируя его по x от 0 до A, получим

$$\rho c\left(T_A - T_0\right)_y = \mu\frac{4v_m^2}{h^4}\frac{y^2 l}{v_x(y)}.$$

Средневзвешенная разность температур

$$\left(T_A - T_0\right)_{\text{ср}} = \frac{2\int\limits_0^h \left(T_A - T_0\right)_y v_x dy}{2\int\limits_0^h v_x dy} = \frac{2\mu v_m l}{h^2 c}. \qquad (2.115)$$

Подогрев жидкости в этом случае полностью определяется диссипацией энергии, связанной с работой сил деформации — скоростью скошения прямого жидкого угла $\theta_{xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial v_x}{\partial y}$, остальные деформации жидких отрезков и углов, а следовательно, и объемов в этом потоке отсутствуют.

7. Рассмотрим задачу о движении вязкой несжимаемой жидкости вблизи плоской пластины, мгновенно получившей продольное движение с постоянной скоростью v_0 (рис. 71) — 1-ю задачу Стокса.

Предполагаем и в этом случае, что возникающее течение происходит с линиями тока, параллельными плоскости пластины, т.е. $v_y = 0$. Тогда из уравнения неразрывности следует, что $\partial v_x / \partial x = 0$, и уравнение движения при $p = \text{const}$ примет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}. \qquad (2.116)$$

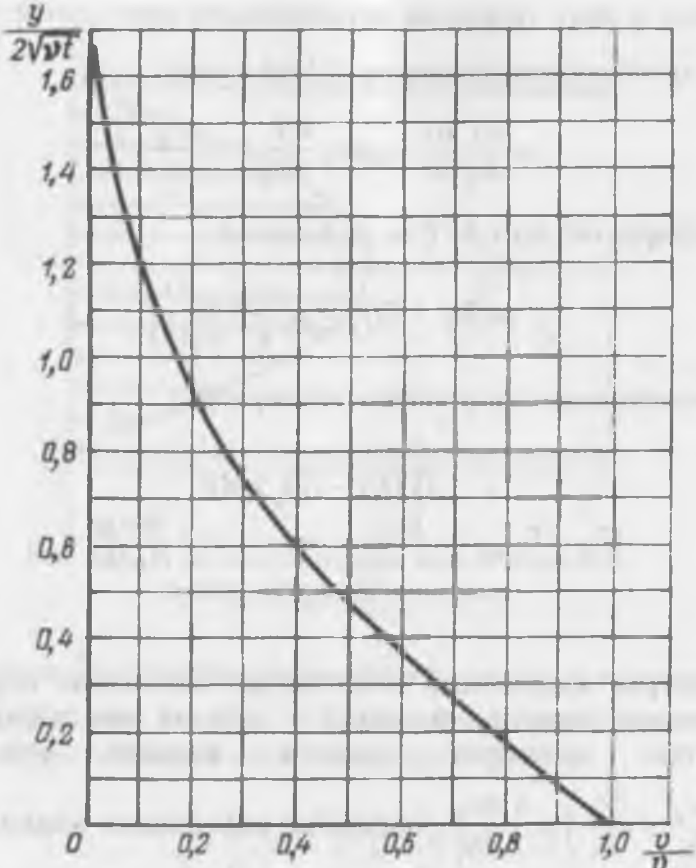


Рис. 71. К решению 1-й задачи Стокса

Начальные условия для данной задачи:

при $t = 0$ $\quad v_x = 0$ для всей плоскости,
при $t > 0$ $\quad v_x = v_0$ для $y = 0$, $\quad v_x \to 0$ для $y \to \infty$.

Вводя новую безразмерную переменную

$$\eta = y / \left(2\sqrt{\nu t}\right),$$

уравнение (2.116) можно преобразовать в обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $f(\eta) = v_x / v_0$ в виде

$$f'' + 2\eta f' = 0 \qquad (2.117)$$

с граничными условиями:

при $\eta = 0$ $\quad f = 1$;
при $\eta = \infty$ $\quad f = 0$.

Заменив $f' = p(\eta)$, получим $f'' = p(\eta)$ и $p' + 2\eta p = 0$, откуда, разделяя переменные, найдем

$$f(\eta) = c_1 \int e^{-\eta^2} d\eta + c_2.$$

Однако поскольку входящий в решение интеграл не выражается через элементарные функции, а $\int e^{-\eta^2} d\eta = \int\limits_0^{\eta} e^{-\eta^2} + \text{const}$, то решение будем искать в виде

$$f(\eta) = c_1 \int\limits_0^{\eta} e^{-\eta^2} d\eta + c_3,$$

позволяющем использовать заданные граничные условия.

При $\eta = 0$ получим $1 = c_1 \cdot 0 + c_3$, т.е. $c_3 = 1$. При $\eta = \infty$ получим $0 = c_1 \int\limits_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta + 1$, откуда

$$c_1 = \frac{1}{\int\limits_0^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta} = -\frac{1}{\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

поскольку последний интеграл в знаменателе второй дроби называется интегралом Пуассона и равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta = \sqrt{\pi}.$$

Следовательно, решение уравнения (2.117) принимает вид

$$f(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\eta^2}\,d\eta,$$

и скорость жидкости вблизи пластины

$$v_x = v_0\left[1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\eta} e^{-\eta^2}\,d\eta\right]. \qquad (2.118)$$

При $\eta = 1{,}8$ величина $f \approx 0{,}01$ (см. рис. 71), т.е. толщина слоя, увлекаемого пластиной под влиянием трения, составляет

$$y\big|_{v_x = 0{,}01 v_0} = \delta = 2\sqrt{\nu t}\cdot 1{,}8 = 3{,}6\sqrt{\nu t},$$

т.е. прямо пропорциональна корню квадратному из кинематической вязкости и корню квадратному из времени.

Кроме рассмотренных выше примеров точных решений имеются точные решения для ламинарного течения в плоских диффузорах и конфузорах. Эти течения моделируются течением от точечного источника или стока (т.е. опять задается форма линии тока). Точно рассчитываются также течения вблизи вращающегося плоского тонкого диска, плоское и осесимметричное течение в окрестности критической точки и разгонное течение в плоском канале и в круглой трубе. При отбрасывании некоторых слагаемых в силу их малости в частных условиях получены также некоторые приближенные решения уравнений Навье — Стокса (см., например, задачи о ползущих движениях — задача Стокса об обтекании шара, течение Хил-Шоу — течение вязкой жидкости в тонком слое между плоскими пластинами, позволяющее получить картины линий тока для плоского потенциального течения около тел различной формы).

Контрольные вопросы к §16

1. При каких условиях имеет место линейное падение давления при течении вязкой жидкости между параллельными стенками?

2. При каких условиях возможны точные аналитические решения уравнения Навье — Стокса?

3. Какие схемы лабораторных стендов можно рекомендовать для измерения коэффициента вязкости данной жидкости?

§17. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ И МЕТОДА РАЗМЕРНОСТЕЙ

В механике жидкости и газа огромную роль играет экспериментальное исследование течений в каналах и взаимодействий потока с обтекаемыми телами. Справедливость перенесения полученных в частных экспериментах результатов в другие условия, да и сама организация эксперимента тесно связаны с понятием подобия процессов.

Подобие процессов позволяет использовать при проектировании ранее накопленные результаты, а также получать новые данные о еще не построенных объектах путем моделирования процессов на более простых и дешевых установках.

Для *полного подобия* рассматриваемых явлений необходима пропорциональность всех величин, характеризующих процесс. Часто говорят о нескольких гранях подобия.

1. *Геометрическое подобие* предполагает точное соответствие пропорций двух объектов, которые могут различаться лишь масштабом (например, величины относительных шероховатостей поверхностей лопаток турбомашин, относительные толщины их входных и выходных кромок, зазоров и т.п.). Так называемый масштабный фактор часто связан с нарушением геометрического подобия.

2. *Кинематическое подобие* связано с возникающей при течении картиной линии тока (например, углы атаки и отставания в решетках профилей турбомашин и изолированных профилей крыльев и т.п.).

3. *Динамическое подобие* связано с локальными значениями параметров силовых полей в исследуемых потоках (например, поля сил инерции, сил вязкости, сил упругости — сжимаемость среды и

т.п.). Динамическое подобие рассматривается на базе анализа уравнения движения Навье — Стокса.

4. *Тепловое подобие* связано с подобием полей температур и тепловых потоков. Тепловое подобие анализируется на базе уравнения энергии в дифференциальной форме.

Практически нередко ограничиваются частичным подобием только некоторых, наиболее существенных для данного случая сторон рассматриваемого явления. Существуют общие теоремы о подобии явлений, которые позволяют методически правильно подойти к отысканию необходимых правил подобия.

Первая теорема подобия утверждает, что для подобных явлений можно составить безразмерные сочетания параметров, имеющих одинаковые значения в сравниваемых явлениях. Эти сочетания параметров называют критериями подобия. Умножение или деление критериев подобия одного на другое дает новый критерий подобия.

Вторая теорема о подобии (так называемая П-теорема) утверждает, что всякое уравнение, описывающее какой-либо физический процесс и записанное в размерной форме в определенной системе единиц, можно преобразовать в безразмерное уравнение, состоящее из критериев подобия П. Необходимо только, чтобы это уравнение учитывало все связи между рассматриваемыми величинами.

Пусть в такое уравнение входит m разных величин и пусть k из них будут независимыми между собой. Тогда полученное безразмерное уравнение для критериев подобия будет представлять собой функциональную зависимость между $(m - k)$ критериями подобия:

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{m-k}) = 0.$$

Если это соотношение разрешить относительно какого-либо критерия подобия, например относительно критерия Π_1, то полученное уравнение $\Pi_1 = \Phi(\Pi_2, \Pi_3, \ldots, \Pi_{m-k})$ показывает, что из всевозможно составленных критериев подобия независимых будет только $(m - k - 1)$ критериев.

Первая и вторая теоремы предполагают, что факт существования подобия уже установлен. На вопрос, будет ли этот факт подобия явлений существовать и каковы условия подобия, отвечает *третья теорема*: подобие процессов осуществляется при равенстве критериев подобия, составленных из параметров, входящих в условия однозначности, и при подобии граничных условий.

Критерии подобия можно получить двумя основными способами: 1) использованием П-теоремы; 2) преобразованием заранее известного уравнения, описывающего физический процесс. Первый способ более универсален, так как им можно пользоваться и тогда, когда уравнения, описывающие процесс, еще не известны, а известны только параметры, его характеризующие. Этот способ сразу дает возможность получить $(m - k - 1)$ независимых критериев. Второй способ позволяет выявить ряд критериев подобия, но не отвечает на вопрос, какие из них надо считать независимыми.

Тем не менее воспользуемся вторым способом, так как располагаем уравнениями, описывающими процесс движения жидкой среды. Кроме того, этот способ позволяет познакомиться с основными критериями подобия, используемыми в механике жидкости и газа.

Безразмерная форма уравнения движения, которая понадобится для этого, получается преобразованием размерного уравнения движения (2.19). Запишем его для единицы массы жидкости:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + (\bar{v}\nabla)\bar{v} = -\frac{1}{r}\operatorname{grad} p + \bar{f}_m + \frac{\eta}{3}\operatorname{grad}(\operatorname{div}\bar{v}) + \nu\Delta\bar{v}.$$

Заменим размерные значения всех входящих в уравнение величин (например, проекцию скорости v_x) произведениями выбранного размерного масштаба v_0 и безразмерной величины $\tilde{v}_x$, которая является функцией координат и времени и ответственна только за закон изменения v_x в пространстве и во времени. Масштаб же v_0 определяет абсолютное значение величины v_x. Если по всем осям масштабы одинаковы, то вектор скорости $\bar{v}$ преобразуется так:

$$\bar{v} = v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k} = v_0\left(\tilde{v}_x\bar{i} + \tilde{v}_y\bar{j} + \tilde{v}_z\bar{k}\right) = v_0\bar{\tilde{v}}.$$

Аналогично введем масштабы для других переменных:

$$t = t_0\tilde{t}; \quad \rho = \rho_0\tilde{\rho}; \quad p = p_0\tilde{p}; \quad \nu = \nu_0\tilde{\nu};$$

$$\bar{f}_m = f_0\tilde{\bar{f}}_m; \quad x = l_0\tilde{x}; \quad y = l_0\tilde{y}; \quad z = l_0\tilde{z}.$$

Подстановка величин в размерное уравнение движения преобразует его к виду

$$\frac{v_0}{t_0}\frac{\partial\bar{v}}{\partial t} + \frac{v_0^2}{l_0}(\bar{v}\nabla)\bar{v} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{p_0}{l_0}\frac{1}{\tilde{\rho}}\,\text{grad}\,\tilde{p} +$$

$$+f_0\tilde{f}_m + \frac{\nu_0 v_0}{l_0^2}\frac{\tilde{\nu}}{3}\,\text{grad}\left(\text{div}\,\tilde{\bar{v}}\right) + \frac{\nu_0 v_0}{l_0^2}\Delta\tilde{\bar{v}}.$$

При преобразовании следует иметь в виду, что постоянные значения масштабов выносятся за символы операций, например:

$$(\bar{v}\nabla)\bar{v} = \left\{\left(v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\right\}\times$$

$$\times\left(v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}\right) = \left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\times$$

$$\times\left(v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k}\right) = v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}\bar{i} + \ldots = v_0\tilde{v}_x\frac{\partial\left(v_0\tilde{v}_x\right)}{\partial\left(l_0\tilde{x}\right)}\bar{i} + \ldots =$$

$$= \frac{v_0^2}{l_0}\tilde{v}_x\frac{\partial\tilde{v}_x}{\partial\tilde{x}}\bar{i} + \ldots = \frac{v_0^2}{l_0}\left(\tilde{\bar{v}}\nabla\right)\tilde{\bar{v}}$$

или

$$\frac{\nu}{3}\,\text{grad}\left(\text{div}\,\bar{v}\right) = \frac{\nu}{3}\,\text{grad}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\nu_0\tilde{\nu}}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\bar{i} + \ldots =$$

$$= \frac{\nu_0 \nu}{3} \frac{\partial}{\partial (l_0 \tilde{x})} \left[\frac{\partial (v_0 \tilde{v}_x)}{\partial (l_0 \tilde{x})} + \ldots \right] \bar{i} + \ldots =$$

$$= \frac{\nu_0 v_0}{l_0^2} \frac{\tilde{\nu}}{3} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left[\frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} + \ldots \right] \bar{i} + \ldots = \frac{\nu_0 v_x}{l_0^2} \frac{\tilde{\nu}}{3} \operatorname{grad}\left(\operatorname{div} \tilde{\bar{v}}\right).$$

В полученной записи уравнения движения каждый член имеет одинаковую размерность, которая определяется масштабным множителем. Для приведения членов уравнения к безразмерному значению надо разделить их на какой-либо выбранный масштабный множитель. Соразмерив все члены уравнения движения с членом, характеризующим силы инерции от конвективной составляющей, получим

$$\frac{l_0}{t_0 v_0} \frac{\partial \tilde{\bar{v}}}{\partial \tilde{t}} + \left(\tilde{\bar{v}} \nabla\right) \tilde{\bar{v}} = \frac{p_0}{\rho_0 v_0^2} \frac{1}{\tilde{\rho}} \operatorname{grad} \tilde{p} +$$

$$+ \frac{f_0 l_0}{v_0^2} \tilde{\bar{f}}_m + \frac{\nu_0}{v_0 l_0} \left[\frac{\tilde{\nu}}{3} \operatorname{grad}\left(\operatorname{div} \tilde{\bar{v}}\right) + \tilde{\nu} \Delta \tilde{\bar{v}} \right]. \qquad (2.119)$$

Полученная безразмерная форма уравнения движения позволяет утверждать следующее. Пусть имеются два различных движения жидкой среды, и в обоих случаях преобразование размерных уравнений движения привело их к одинаковому безразмерному уравнению (2.119). Следовательно, рассматриваемые движения будут подобны, а условием их подобия является равенство для обоих случаев безразмерных масштабных комплексов. Если равными окажутся только некоторые из безразмерных масштабных комплексов, то подобие будет частичным.

Ниже рассмотрим критерии гидродинамического подобия, согласно уравнению движения (2.119).

Критерий Струхала $\mathrm{Sh} = l/(tv)$ является соотношением локальных и конвективных сил инерции и представляет собой безразмерную частоту явлений. Эта характеристика важна в нестационарных процессах. При стационарном процессе характерное время t между повторяющимися событиями стремится к бесконечности, а критерий Sh — к нулю.

Критерий Эйлера $\mathrm{Eu} = p/(\rho v^2)$ является отношением сил давления к силам инерции (конвективным). В сжимаемой жидкости величина $\gamma p/\rho = a^2$, и критерию Эйлера можно придать следующий вид:

$$\mathrm{Eu} = \frac{p}{\rho v^2} = \frac{a^2}{\gamma v^2} = \frac{1}{\gamma \mathrm{M}^2}.$$

Критерий Фруда $\mathrm{Fr} = gl/v^2$ является отношением силы тяжести к силам инерции, если в качестве массовых сил рассматривать силу тяжести с масштабом, равным $f_0 = g$, где g — ускорению силы тяжести.

Критерий Рейнольдса $\mathrm{Re} = vl/\nu$ является отношением сил инерции к силам вязкости.

С учетом обозначений критериев в безразмерном виде уравнение движения примет вид (знак ~ опущен)

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + -(\bar{v}\,\nabla)\bar{v} = -\mathrm{Eu}\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \mathrm{Fr}\,\bar{f}_m +$$

$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\nu}{3}\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\bar{v}\right) + \nu\Delta\bar{v}\right].$$

Удобство такой записи заключается в том, что можно сравнивать отдельные члены уравнения и упрощать уравнение путем отбрасывания заведомо малых членов без решения. Для этого надо только оценить ожидаемые значения критериев подобия.

В случае, если в газодинамических явлениях тепловые потоки столь велики, что их неучет вносит искажения в конечные результаты, необходимо моделирование с учетом критериев теплового подобия. Последние могут быть получены из рассмотрения уравнения сохранения энергии (2.31), записанного для единицы объема. Напомним, что при преобразовании уравнения энергии к этой форме были использованы такие уравнения, как уравнения движения, неразрывности, состояния. Это позволяет рассмотреть на основе уравнения (2.31) наиболее употребительные критерии теплового подобия путем сопоставления необходимых членов.

Критерий Прандтля (Pr) является отношением теплового потока, возникающего вследствие работы сил трения, к потоку теплоты, обусловленному теплопроводностью. Отношение этих величин можно найти, рассмотрев отношение членов μD к члену $\operatorname{div} Q = \operatorname{div}(-\lambda' \operatorname{grad} T)$. Величина μD структурно имеет такое строение:

$$\mu D \sim 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

С учетом масштабов и безразмерных величин отношение этих членов

$$\frac{\mu D}{\operatorname{div}(-\lambda' \operatorname{grad} T)} = \frac{\dfrac{\mu_0 v_0^2}{l_0^2} 2\bar{\mu} \dfrac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}} \dfrac{\partial \tilde{v}_x}{\partial \tilde{x}}}{\dfrac{\lambda_0 T_0}{l_0^2} \operatorname{div}\left(-\overline{\lambda}' \operatorname{grad} \tilde{T}\right)}$$

Из левой части уравнения энергии (2.31) следует, что величины h и v^2 имеют одинаковый порядок. Поэтому критерий Прандтля после замены порядка величины v^2 на порядок величины $c_p T$ равен:

$$\Pr = \mu c_p / \lambda' = \nu \rho c_p / \lambda' = \nu / a',$$

где $a' = \lambda' / (c_p \rho)$.

Представление критерия Прандтля как отношения коэффициента кинематической вязкости ν (иначе — коэффициент диффузии ν вихря ω в уравнении для распространения вихря) к коэффициенту температуропроводности a' (иначе — коэффициенту диффузии температуры в уравнении для распространения температуры $\partial T/\partial t = a' \Delta T$) позволяет толковать число Pr как критерий, сравнивающий скорости диффузии (рассеяния) вихря и диффузии температуры.

Для газов $\Pr \approx 1$, в неметаллических жидкостях он всегда больше единицы, иногда существенно ($\Pr > 1$), а в жидких металлах часто намного меньше единицы ($\Pr \ll 1$).

Критерий Пекле (Ре) является отношением теплоты вследствие конвекции к потоку теплоты теплопроводности. Отношение этих величин можно найти, рассмотрев вектор плотности потока теплоты (количество теплоты, переносимой через единицу поверхности в единицу времени):

$$\bar{Q} = \bar{Q}_{\text{т}} + \bar{Q}_{\text{к}} + \bar{Q}_{\text{изл}} = -\lambda' \operatorname{grad} T + h\bar{v}\rho + \bar{Q}_{\text{изл}}.$$

Взяв отношение второго члена к первому (с использованием масштабов и безразмерных величин), получим

$$\frac{h_0 \bar{v}_0 \rho_0}{\lambda'_0 \dfrac{T_0}{l_0}} \cdot \frac{\tilde{h}\tilde{\bar{v}}\tilde{\rho}}{\tilde{\lambda}' \operatorname{grad} \tilde{T}} = \mathrm{Re} \frac{\tilde{h}\tilde{\bar{v}}\tilde{\rho}}{\tilde{\lambda}' \operatorname{grad} \tilde{T}}.$$

Если масштаб энтальпии раскрыть как $h_0 = c_{p_0} T_0$, то $\mathrm{Pe} = vl/a$.

Очевидно, что Pe = Pr Re, обычно критерий Re больше критерия Pr, а величина критерия Pe всегда существенно больше единицы.

Критерий Нуссельта Nu является безразмерным градиентом температуры на поверхности нагрева со стороны потока омывающей ее жидкости. Для его получения рассмотрим поток теплоты теплопроводностью в направлении нормали к стенке

$$Q_{\text{т}} = -\lambda' \frac{\partial T}{\partial n}$$

(это соотношение следует из уравнения $\bar{Q}_{\text{т}} = -\lambda' \operatorname{grad} T$.

Величина $\bar{Q}_{\text{т}}$ может быть определена так же, как $Q_{\text{т}} = \alpha\,(T_{\text{ж}} - T_{\text{ст}})$, где α — коэффициент теплоотдачи; $T_{\text{ж}}$ и $T_{\text{ст}}$ — температура соответственно жидкости и стенки.

С учетом масштабов и безразмерных величин получаем уравнение для $\dfrac{\partial T}{\partial n}$:

$$\alpha_0 T_0 \tilde{\alpha}\left(\tilde{T}_{\text{ж}} - \tilde{T}_{\text{ст}}\right) = -\lambda'_0 \frac{T_0}{l_0} \tilde{\lambda}' \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{n}}$$

или

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{n}} = \frac{\alpha_0 l_0}{\lambda'_0} \tilde{\alpha}\left(\tilde{T}_{ж} - \tilde{T}_{ст}\right).$$

Отсюда следует, что величину $Nu = \alpha l / \lambda'$ можно называть безразмерным коэффициентом теплоотдачи.

В литературе часто встречается еще критерий Стэнтона, представляющий собой комплекс критериев Nu, Re и Pr, которыми часто пользуются в задачах теории теплообмена, т.е.

$$St = Nu / (Re\ Pr) = \alpha / (c_p \rho v).$$

Найденные выше критерии динамического подобия можно получить и на *основе метода размерностей*, который оказался весьма удобным для применения к различным задачам как механики твердого тела, так и механики жидкости и газа.

Рассматривая все задачи механики в системе СИ, основа которой — три основных физических величины: длина L [м], масса M [кг] и время T [с], и пользуясь упомянутой выше П–теоремой, любую физическую зависимость типа

$$A = f(A_1, A_2, ..., A_n) = f(A_i), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

записанную в размерном виде, можно написать в безразмерной форме.

Записанная выше зависимость может считаться правильной, если все входящие в нее слагаемые, состоящие из комбинаций определяющих факторов A_i, и сама величина A имеют одинаковые размерности, а входящие в нее постоянные являются безразмерными величинами. Эта зависимость останется правильной при любой системе основных единиц.

Выберем теперь три фактора A_k, A_q и A_p и примем их за новые единицы измерения в данном опыте. Эти факторы должны иметь такие независимые размерности, чтобы никакая одночленная комбинация двух факторов не могла иметь размерность третьего фактора. Тогда размерность любого фактора A_i (кроме A_k, A_q, A_p) и величины A может быть записана в системе СИ в виде

$$[A_i] = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma},$$

а в новой системе в виде

$$[A_i] = A_k^{\kappa} A_q^{\delta} A_p^{\varepsilon}.$$

Но выбранные единицы в системе СИ имеют размерности

$$[A_k] = L^{\alpha_1} M^{\beta_1} T^{\delta_1},$$

$$[A_q] = L^{\alpha_2} M^{\beta_2} T^{\delta_2},$$

$$[A_p] = L^{\alpha_3} M^{\beta_3} T^{\delta_3}.$$

Подставляя эти величины в $[A_i]$, получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными $\oplus$, δ и ε:

$$\alpha = \oplus\alpha_1 + \delta\alpha_2 + \varepsilon\alpha_3;$$

$$\beta = \oplus\beta 1 + \delta\beta_2 + \varepsilon\beta_3;$$

$$\gamma = \oplus\gamma_1 + \delta\gamma_2 + \varepsilon\gamma_3.$$

Тогда размерная физическая зависимость $A = f(A_i)$ примет безразмерный вид

$$\Pi = f(\Pi_1, \Pi_2, ..., 1, 1, 1, ..., \Pi_n),$$

т.е. число безразмерных факторов уменьшилось на число выбранных новых единиц измерения, т.е. на три.

Если требуется экспериментально изучить зависимость $A = f(A_i)$ при пяти значениях каждого фактора A_i, то при $n = 1$ потребуется провести пять опытов, при $n = 2$ потребуется $5^2 = 25$ опытов, при $n = 3$ потребуется $5^3 = 125$ опытов и т.д. Следовательно, при сокращении числа факторов на три число опытов при пяти значениях каждого фактора уменьшается в 125 раз!

Для иллюстрации применения метода размерностей рассмотрим два примера.

Пример 1. Рассмотреть колебания маятника массой m, подвешенного на невесомой нити длиной l. Искомый период колебаний T, по мнению экспериментатора, должен зависеть от m, l и φ — угла первоначального отклонения нити от вертикали, т.е. $T = f(m, l, \varphi)$.

Но предложенная зависимость не удовлетворяет условию "правильной" зависимости, так как левая часть имеет размерность времени в секундах $|c|$, а в правой части нет размерности времени, ибо в данной постановке задачи не учтено влияние силы тяжести (или ускорения свободного падения $g\left[\dfrac{L}{c^2}\right]$). С учетом g следует записать $T = f(l, m, \varphi, g)$.

Теперь, выбрав в качестве новых единиц измерения l - A_k $|L|$, m - Aq $|m|$, g - A_p $\left[\dfrac{L}{c^2}\right]$ и взяв для T - A_0 $|c|$, составим выражения

$$\left[A_k\right] = L^{\alpha_1} M^{\beta_1} T^{\gamma_1} \to \alpha_1 = 1, \beta_1 = 0, \gamma_1 = 0;$$

$$\left[A_q\right] = L^{\alpha_2} M^{\beta_2} T^{\gamma_2} \to \alpha_2 = 0, \beta_2 = 1, \gamma_2 = 0;$$

$$\left[A_p\right] = L^{\alpha_3} M^{\beta_3} T^{\gamma_1} \to \alpha_1 = 1, \beta_3 = 0, \gamma_3 = 2;$$

$$\left[A_0\right] = L^{\alpha_0} M^{\beta_0} T^{\gamma_0} \to \alpha_0 = 0, \beta_0 = 0, \gamma_0 = 1.$$

Тогда система трех уравнений примет вид

$$\alpha_0 = 0 = æ \cdot 1 + \delta \cdot 0 + \varepsilon \cdot 1;$$

$$\beta_0 = 0 = æ \cdot 0 + \delta \cdot 1 + \varepsilon \cdot 0;$$

$$\gamma_0 = 0 = æ \cdot 0 + \delta \cdot 0 + \varepsilon \cdot (-2),$$

откуда $\varepsilon = -\frac{1}{2}$, $\delta = 0$, $\text{æ} = \frac{1}{2}$.

Следовательно,

$$[A_0] = A_k^{\text{æ}} A_q^{\delta} A_p^{\varepsilon} = l^{\frac{1}{2}} \cdot 1 \cdot g^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

и

$$\Pi_0 = \frac{A_0}{\sqrt{l / g}}; \quad \Pi_k = \frac{l}{[A_k]} = 1; \quad \Pi_q = \frac{m}{[A_q]} = 1; \quad \Pi_p = \frac{g}{[A_p]} = 1.$$

Для угла $\varphi \sim A_\varphi$ $[-]$ при $[A_\varphi] = L^\alpha M^\beta T^\gamma \to \alpha = \beta = \gamma = 0$, для $[A_\varphi] = A_k^{1} A_q^{\delta_1} A_p^{\varepsilon_1}$ получим систему в виде

$$\begin{cases} 0 = \text{æ}_1 \cdot 1 + \delta_1 \cdot 0 + \varepsilon_1 \cdot 1, \\ 0 = \text{æ}_1 \cdot 0 + \delta_1 \cdot 1 + \varepsilon_1 \cdot 0, \\ 0 = \text{æ}_1 \cdot 0 + \delta_1 \cdot 0 + \varepsilon_1 \cdot (-2), \end{cases}$$

откуда $\text{æ}_1 = \delta_1 = \varepsilon_1 = 0$, т.е. $A_\varphi = [-]$, а φ, как и ожидается, не имеет размерности.

Окончательно получаем

$$T / \sqrt{l / g} = f(1, 1, \varphi, 1) = f(\varphi).$$

Период колебаний маятника $T = f(\varphi)\sqrt{l / g}$, т.е. остается экспериментально найти вид функции угла φ. Метод размерностей позволил установить правильное число определяющих факторов.

Для перехода к безразмерным параметрам удобно составить следующую таблицу:

Переменная A_i	Размерность в СИ	Новая единица	Новая переменная
T	с	$\sqrt{l/g}$	$T/\sqrt{l/g}$
l	м	l	1
m	кг	m	1
φ	—	—	φ
g	м/с^2	g	1

Пример II. Найти потерю давления при течении жидкости вязкостью μ, плотностью ρ и скоростью v в круглой цилиндрической трубе длиной l, диаметром d и шероховатостью k.

Искомая потеря давлений может быть оценена в виде

$$\Delta p = f(l, d, v, \rho, \mu, k).$$

Число определяющих факторов равно шести, т.е. минимальное число опытов при пяти значениях каждого фактора составляет $5^6 = 15625$.

Для перехода к безразмерной форме записи следует выделить три новые единицы измерений с независимыми размерностями. Для данной задачи ими могут быть либо 1-й набор (d, v, ρ), либо 2-й набор (d, v, μ), причем факторы p и μ должны быть выражены в СИ. Так, запишем для давления p

$$p\left[\frac{H}{\text{м}^2}\right] = p\left[\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{м}^2}\right] = p\left[\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}\cdot\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}\right] = p\left[\frac{\text{кг}}{\text{с}\cdot\text{м}}\cdot\frac{\text{м}}{\text{с}}\cdot\frac{1}{\text{м}}\right] = p\left[\frac{\text{кг}}{\text{с}^2\cdot\text{м}}\right],$$

для коэффициента вязкости μ

$$\mu\left[\frac{H\cdot\text{с}\cdot\text{м}}{\text{м}^2\cdot\text{м}}\right] = \mu\left[\frac{\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}\cdot\text{м}}{\text{с}^2\cdot\text{м}^2\cdot\text{м}}\right] = \mu\left[\frac{\text{кг}}{\text{с}\cdot\text{м}}\right].$$

Теперь, поступая аналогично сделанному выше в примере I, можем записать исходное выражение для $\Delta p = f(A_i)$ в безразмерном виде

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = f_1\left(\frac{l}{d}, \frac{\mu}{vd\rho}, \frac{k}{d}\right)$$

или

$$\frac{\Delta p}{\mu v/d} = f_{11}\left(\frac{l}{d}, \frac{vd\rho}{\mu}, \frac{k}{d}\right)$$

и составить следующую таблицу:

Переменная A_i	Размерность в СИ	Вариант I		Вариант II	
		новая единица	новая переменная Π_i	новая единица	новая переменная Π_i
Δp	кг/(м · с^2)	ρv^2	$\frac{\Delta p}{\rho v^2}$	$\frac{\mu v}{d}$	$\frac{\Delta p}{\mu v / d}$
l	м	d	$\frac{l}{d}$	d	$\frac{l}{d}$
d	м	d	1	d	1
v	м/с	v	1	v	1
ρ	кг/м^3	ρ	1	$\frac{\mu}{vd}$	$\frac{\rho v d}{\mu}$
μ	кг/(с · м)	$vd\rho$	$\frac{\mu}{vd\rho}$	μ	1
k	м	d	$\frac{k}{d}$	d	$\frac{k}{d}$

П р и м е ч а н и е . Штриховой линией обведены выбранные исходные параметры.

Оба варианта равноправны и могут послужить основой для экспериментального исследования.

Если принять, что при равномерном течении в трубе величина $\Delta p \sim l$ (при $d = \text{const}$), то можно записать для варианта I

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = \frac{l}{d}\varphi_{\text{I}}\left(\frac{\mu}{vd\rho}, \frac{k}{d}\right)$$

или

$$\Delta p = \frac{l}{d}\rho v^2 \varphi_{\text{I}},$$

а для варианта II

$$\frac{\Delta p}{\mu v / d} = \frac{l}{d}\varphi_{\text{II}}\left(\frac{vd\rho}{\mu}, \frac{k}{d}\right)$$

или

$$\Delta p = \frac{\mu v l}{d^2}\varphi_{II}.$$

Полученные формулы для Δp эквивалентны, что видно при их приравнивании.

В самом деле,

$$\varphi_{II}\left(\frac{vd\rho}{\mu},\frac{k}{d}\right) = \frac{vd\rho}{\mu}\varphi_{I}\left(\frac{\mu}{vd\rho},\frac{k}{d}\right),$$

где множитель $vd\rho/\mu$ является безразмерной величиной, известной как критерий Re.

Следовательно, потерю давления можно выразить в виде

$$\Delta p = 2\varphi_{I}\left(\frac{\mu}{vd\rho},\frac{k}{d}\right)\frac{\rho v^2}{2}\frac{l}{d},$$

где член $2\varphi_{I}\left(\frac{\mu}{vd\rho},\frac{k}{d}\right)$ можно назвать коэффициентом трения $\xi = f\left(\mathrm{Re},\frac{k}{d}\right)$ для трубы, и потерю давления записать в виде известной формулы

$$\Delta p = \xi\rho\frac{v^2}{2}\frac{l}{d}.$$

Рассмотренные примеры иллюстрируют применение метода размерностей при исследовании различных явлений. Выбор единиц измерений зависит от исследователя; в задачах гидродинамики обычно берут такие факторы, как плотность, скорость и линейный размер. Привлечение новых факторов, определяющих то или иное явление, приводит к появлению новых критериев подобия, например в случае исследования тепловых процессов.

Контрольные вопросы к §17

1. Чем отличается частичное подобие от полного?

2. При каких условиях возникает целесообразность применения метода размерностей?

3. Как оценить "правильность" составленной зависимости при использовании метода размерностей?

течения. Будем пользоваться теоремой о переносе потоком жидкости какой-либо физической величины Φ через поверхность S, которая ограничивает контрольный объем V. Согласно этой теореме, субстанциональная производная по времени t от интеграла по выделенному объему V равна:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V \Phi dV\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V dV\right) + \oint_S \Phi v_n dS, \qquad (3.4)$$

где v_n — нормальная к боковой поверхности составляющая скорости жидкости.

Составим квазиодномерное уравнение неразрывности для случая течения жидкости в канале (рис. 72) с проницаемыми боковыми стенками, через которые осуществляется изменение массы жидкости в канале – массообмен (вдув или отсос жидкости). Выделим малый элемент объема канала ΔV длиной Δx и площадью поперечного сечения A. Поверхность боковых стенок элемента канала обозначим $S_к$, а часть поверхности боковых стенок, через которую осуществляется массообмен, $S_м$. Общая поверхность, ограничивающая объем ΔV, равна $S = A_1 + A_2 + S_к$.

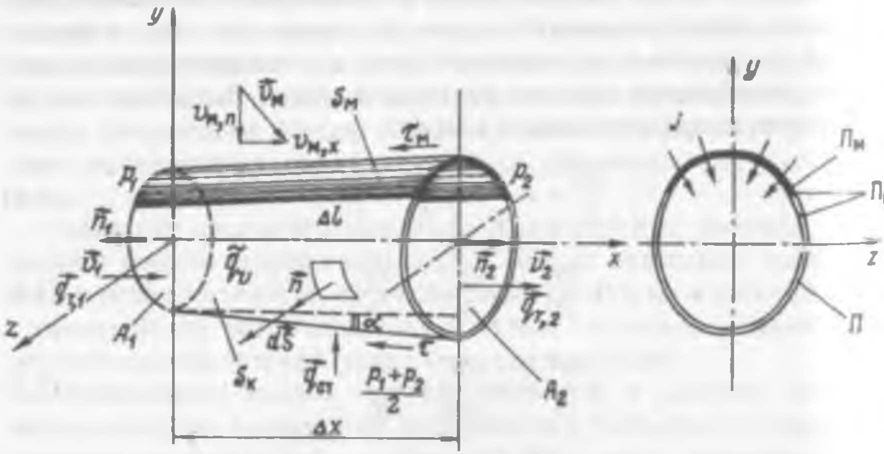


Рис. 72. Элемент объема канала ΔV

Условие сохранения массы для движущийся в канале жидкости, $M = \int\limits_{\Delta V} \rho \mathrm{d}V$, находящейся в выделенном элементе объема $\Delta V = A \cdot \Delta x$, имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int\limits_{\Delta V} \rho \mathrm{d}V\right) = 0. \tag{3.5}$$

Применим к выражению (3.5) соотношение (3.4), полагая $\Phi = \rho$ и учитывая отдельно перенос массы через каждый проницаемый для потока элемент A_1, A_2, $S_{\text{м}}$ поверхности S, ограничивающей выделенный объем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{\Delta V} \rho \mathrm{d}V\right) - \int\limits_{A_1} \rho v \,\mathrm{d}A + \int\limits_{A_2} \rho v \,\mathrm{d}A \mp \int\limits_{S_{\text{м}}} \rho_{\text{м}} v_{\text{м}\,n} \mathrm{d}S_{\text{м}} = 0. \tag{3.6}$$

Здесь ρ, v — плотность основного потока в канале и его скорость вдоль оси x, которая перпендикулярна к поперечному сечению A; $\rho_{\text{м}}$, $v_{\text{м}\,n}$ — плотность вдуваемого или отсасываемого потока и нормальная к проницаемой боковой стенке составляющая скорости этого потока (отметим, что на рис. 72 показан случай вдува жидкости). Знаки плюс и минус перед интегралами определяются взаимной направленностью вектора внешней нормали $\bar{n}$ к элементу поверхности $\mathrm{d}S$ и вектора скорости потока $\bar{v}$ на каждой проницаемой для потока поверхности A_1, A_2, $S_{\text{м}}$: знак плюс соответствует совпадению направления этих векторов, а знак минус — их противоположной направленности. Это правило следует из рассмотрения произведения $v_n \cdot \mathrm{d}S$ как результата скалярного перемножения вектора скорости $\bar{v}$ и вектора элемента площади $\mathrm{d}\vec{S}$.

В силу близости сечений A_1 и A_2 можно принять, что

$$\int\limits_{\Delta V} \rho \mathrm{d}V = \Delta x \int\limits_{A} \rho \mathrm{d}A. \tag{3.7}$$

Введем в рассмотрение среднее значение какого-либо параметра потока, например величину плотности $<\rho>$, посредством осреднения по поперечному сечению канала истинного значения этого параметра, используя следующее правило:

$$<\rho> = \frac{1}{A}\int\limits_A \rho \mathrm{d}A, \tag{3.8}$$

где

$$A = \int\limits_A \mathrm{d}A \equiv <A>. \tag{3.9}$$

Применяя зависимость (3.7) к первому члену соотношения (3.6) и зависимости (3.8) и (3.9) к его последнему члену, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta x\int\limits_A \rho \mathrm{d}A\right) - \int\limits_{A_1} \rho v\, \mathrm{d}A + \int\limits_{A_2} \rho v \mathrm{d}A = \mp < \rho_{\text{м}} v_{\text{м}n} > S_{\text{м}}. \tag{3.10}$$

Величину проницаемой боковой поверхности элемента канала $S_{\text{м}}$ представим в виде

$$S_{\text{м}} = \int\limits_{S_{\text{м}}} \mathrm{d}S_{\text{м}} = \Pi_{\text{м}}\frac{\Delta x}{\cos\alpha}, \tag{3.11}$$

где $\Pi_{\text{м}}$ — периметр поперечного сечения проницаемой части $S_{\text{м}}$ боковой поверхности канала; $\Delta x / \cos\alpha = \Delta l$ (см. рис. 72) — образующая.

Делим соотношение (3.10) на величину Δx и, рассматривая третий и второй члены в (3.10) совместно, устремляем Δx к нулю и переходим к пределу. В результате получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_A \rho\, \mathrm{d}A\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\int\limits_A \rho v\, \mathrm{d}A\right) = \pm < \rho_{\text{м}} v_{\text{м}n} > \frac{\Pi_{\text{м}}}{\cos\alpha}. \tag{3.12}$$

Воспользуемся снова соотношением (3.8) как правилом для определения осредненной величины, а также примем, что средняя величина произведения двух каких-либо величин равна произведению их средних значений

$$<ab> = <a> <b>.$$

С учетом сказанного выражение (3.12) принимает вид квазиодномерного уравнения неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(< \rho > A\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(< \rho >< v > A\right) = \pm < j > \frac{\Pi_{м}}{\cos\alpha}, \tag{3.13}$$

где

$$< j > = < \rho_{м} >< v_{м,n} > \tag{3.14}$$

– поток жидкости через стенку, а знаки плюс или минус соответствуют вдуву или отсосу.

Полученная дифференциальная форма (3.13) уравнения неразрывности для квазиодномерного течения может быть названа канальной в отличие от локальной формы (3.1), в которой отсутствует учет изменения площади поперечного сечения канала. Для стационарности движения уравнение (3.13) можно проинтегрировать от сечения входа в канал, где $x = 0$, до сечения с координатой x:

$$< \rho >< v > A = \left(< \rho >< v > A\right)_0 \pm j(x)\Pi_{м}(x)\frac{dx}{\cos\overline{\alpha}}. \tag{3.15}$$

Если величины j и $\Pi_{м}$ постоянны, а $\cos\alpha \approx 1$, то интеграл в правой части (3.15) равен величине $j\,\Pi_{м}x$. Если поток через проницаемую стенку отсутствует, то получаем обычное уравнение расхода для средних параметров потока

$$< \rho >< v > A = \text{const} = G. \tag{3.16}$$

Составим квазиодномерное уравнение изменения количества движения. Рассмотрим жидкость в выделенном объеме канала ΔV как некоторую систему материальных точек, занимающих этот объем в момент времени t (см. рис. 72). При таком подходе согласно общей теореме механики субстанциональная производная по времени от количества движения системы материальных точек равняется сумме всех действующих на эту систему внешних сил:

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{\Delta V}\rho\bar{v}dV\right)_x = \int\limits_{\Delta V}\rho\bar{f}_m dV + \int\limits_{S}\bar{p}_n dS, \tag{3.17}$$

где $\bar{f}_m$ — вектор плотности массовой силы, например силы от механического воздействия на поток лопаток компрессора; $\bar{p}_n$ — вектор полного гидродинамического давления в жидкости, который в общем случае имеет две составляющие: нормальное давление p и касательное напряжение τ.

Уравнение (3.17) проектируем на ось x и делаем соответствующие преобразования. Проектируя на ось x субстанциональную производную в левой части (3.17), преобразуем ее при помощи соотношения (3.4), полагая в нем $\Phi = \rho\bar{v}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{\Delta V}\rho\bar{v}dV\right)_x = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{\Delta V}\rho v dV\right) - \int\limits_{A_1}\rho vv dA +$$

$$+\int\limits_{A_2}\rho vv dA \mp \int\limits_{S_м}\rho_м v_{м,x} v_{мn} dS_м. \tag{3.18}$$

Здесь все обозначения аналогичны обозначениям в выражении (3.6), а величина $v_{м,x}$ есть x-составляющая скорости потока через проницаемую стенку канала; знаки минус и плюс перед последним интегралом соответствуют вдуву и отсосу согласно принятому выше правилу.

Подобно соотношению (3.7) заменим интеграл по объему ΔV в правой части полученного выражения интегралом по поверхности A. Затем, пользуясь правилом (3.8) перехода к осредненным величинам, преобразуем x-ю проекцию субстанциональной производной с учетом (3.11) и (3.14) к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{\Delta V}\rho\bar{v}\,dV\right)_x = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta x < \rho v > A) - < \rho_1 v_1^2 > A_1 +$$

$$+ < \rho_2 v_2^2 > A_2 \mp < j v_{m,x} > \Pi_м \frac{\Delta x}{\cos\alpha}. \tag{3.19}$$

В правой части уравнения (3.17) проекция массовой силы на ось x по такой же схеме преобразуется к виду

$$\left(\int\limits_{\Delta V}\rho\bar{f}_m dV\right)_x = \Delta x < \rho f_{mx} > A. \tag{3.20}$$

Проекцию на ось x интеграла от поверхностных сил $\oint_S \bar{P}_n dS$ в (3.17) представим состоящей из интегралов по отдельным участкам замкнутой поверхности $S = A_1 + A_2 + S_к$. Вычислим эти интегралы при помощи осредненных величин, действующих на поверхностях A_1, A_2 и $S_к$. Отметим, что на поверхностях A_1 и A_2 касательные напряжения перпендикулярны к оси x и при вычислении интегралов не дадут соответствующих составляющих. На боковой поверхности канала $S_к$ будем различать касательные напряжения τ, действующие на непроницаемом участке стенки, и $\tau_м$, действующие на проницаемом участке поверхности канала. Соответственно будем различать периметры частей поперечного сечения канала для непроницаемой части стенки Π и для проницаемой ее части $\Pi_м$. Общий периметр поперечного сечения канала $\Pi_к = \Pi + \Pi_м$. Значения нормального давления на участках A_1 и A_2 равны соответственно p_1 и p_2, а на боковой стенке $S_к$ нормальное давление примем $(p_1 + p_2)/2$. В результате x-я проекция поверхностных сил будет равна:

$$\left(\oint\limits_S \bar{p}_n dS\right)_x = < p_1 A_1 > - < p_2 A_2 > + < \frac{p_1 + p_2}{2}(A_2 -$$

$$-A_1) > -(\tau\Pi + \tau_м\Pi_м)\frac{\Delta x}{\cos\alpha}. \quad (3.21)$$

Если принять, что

$$p_2 = p_1 + \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x \quad и \quad A_2 - A_1 = \Delta A,$$

то с точностью до бесконечно малых второго порядка

$$< \frac{p_1 + p_2}{2}(A_2 - A_1) > \approx < p_1 \Delta A >. \quad (3.22)$$

Подставляем в (3.17) полученные выражения (3.19) – (3.21), группируем попарно члены вида $<\rho v> A$ и $<pA>$, делим уравнение (3.17) на Δx и переходим к пределу, устремляя Δx к нулю. В результате получаем канальную форму уравнения изменения количества движения для квазиодномерного течения жидкости

$$\frac{\partial}{\partial t}(< \rho >< v > A) + \frac{\partial}{\partial x}\left(< \rho >< v^2 > A\right) = -A\frac{\partial < p >}{\partial x} + < \rho >< f_{m,x} > A -$$

$$-\left[\tau\left(1 - \overline{\Pi}_м\right) + \tau_м\overline{\Pi}_м\right]\frac{\Pi_к}{\cos\alpha} \pm < j >< v_{м,x} > \frac{\Pi_м}{\cos\alpha}, \quad (3.23)$$

где $\overline{\Pi}_м = \Pi_м / \Pi_к$, а знаки плюс и минус перед последним членом соответствуют вдуву и отсосу.

Придадим уравнению (3.23) иную форму. Умножим уравнение неразрывности (3.13) на скорость потока $<v>$, вычтем из (3.23) и поделим на A. Кроме того, выразим касательное напряжение τ на стенке в долях скоростного напора

$$\tau = c_f \frac{<\rho><v^2>}{2}, \quad (3.24)$$

где c_f — коэффициент трения.

Учтем, что гидравлический диаметр канала равен

$$D_г = 4A / \Pi_к. \quad (3.25)$$

В результате квазиодномерное уравнение изменения количества движения в канальной форме примет вид

$$<\rho>\frac{\partial<v>}{\partial t}+<\rho><v>\frac{\partial<v>}{\partial x}=-\frac{\partial<p>}{\partial x}+<\rho><f_{mx}>-$$

$$-\left[c_f\left(1-\overline{\Pi}_{\text{м}}\right)+c_{f\text{м}}\overline{\Pi}_{\text{м}}\right]\frac{2<\rho><v^2>}{D_{\text{г}}\cos\alpha}\pm \qquad (3.26)$$

$$\pm<j>\left(<v_{m,x}>-<v>\right)>\frac{4\overline{\Pi}_{\text{м}}}{D_{\text{г}}\cos\alpha}.$$

При отсутствии массовой силы, сил трения и массообмена уравнение (3.26) совпадает с уравнением (3.2).

Составим квазиодномерное уравнение энергии. Это уравнение является энергетическим балансом для текущей в канале жидкости, составленным на основе закона сохранения и превращения энергии (первого начала термодинамики).

Используем формулировку закона, в которой учтены действующие факторы, существенные для рассматриваемых энергоустановок. В данном случае это означает, что изменение в единицу времени суммы внутренней ε и кинетической $v^2/2$ энергии системы, состоящей из частиц жидкости, которые находятся в выделенном объеме, складывается из работы за единицу времени (мощности) всех действующих на систему внешних сил, которую эти силы совершили над объемом, и из теплоты, подведенной к этому объему. Отметим, что в такой формулировке положительными считаются подведенные к системе работа и теплота, в то время как в технической термодинамике положительный знак имеют отведенная от системы работа и подведенная к системе теплота.

В качестве внешних сил рассматриваем плотность массовой силы $\bar{f}_m$ и полное гидродинамическое давление $\bar{p}_n$, действующее в жидкости. Подведенную теплоту рассматриваем состоящей из двух величин: из притока теплоты с вектором плотности теплового потока $\bar{q}$ (Вт/м^2) через поверхность S, ограничивающую объем.

$$-A_1) > -(\tau\Pi + \tau_м \Pi_м)\frac{\Delta x}{\cos\alpha}. \qquad (3.21)$$

Если принять, что

$$p_2 = p_1 + \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x \quad \text{и} \quad A_2 - A_1 = \Delta A,$$

то с точностью до бесконечно малых второго порядка

$$< \frac{p_1 + p_2}{2}(A_2 - A_1) > \approx < p_1 \Delta A >. \qquad (3.22)$$

Подставляем в (3.17) полученные выражения (3.19) — (3.21), группируем попарно члены вида $<\rho v> A$ и $<pA>$, делим уравнение (3.17) на Δx и переходим к пределу, устремляя Δx к нулю. В результате получаем канальную форму уравнения изменения количества движения для квазиодномерного течения жидкости

$$\frac{\partial}{\partial t}(<\rho><v>A) + \frac{\partial}{\partial x}(<\rho><v^2>A) = -A\frac{\partial <p>}{\partial x} + <\rho><f_{m,x}>A -$$

$$-\left[\tau\left(1 - \overline{\Pi}_м\right) + \tau_м \overline{\Pi}_м\right]\frac{\Pi_к}{\cos\alpha} \pm <j><v_{м,x}>\frac{\Pi_м}{\cos\alpha}, \qquad (3.23)$$

где $\overline{\Pi}_м = \Pi_м / \Pi_к$, а знаки плюс и минус перед последним членом соответствуют вдуву и отсосу.

Придадим уравнению (3.23) иную форму. Умножим уравнение неразрывности (3.13) на скорость потока $<v>$, вычтем из (3.23) и поделим на A. Кроме того, выразим касательное напряжение τ на стенке в долях скоростного напора

$$\tau = c_f \frac{<\rho><v^2>}{2}, \qquad (3.24)$$

где c_f — коэффициент трения.

Учтем, что гидравлический диаметр канала равен

$$D_г = 4A / \Pi_к. \qquad (3.25)$$

В результате квазиодномерное уравнение изменения количества движения в канальной форме примет вид

$$< \rho > \frac{\partial < v >}{\partial t} + < \rho >< v > \frac{\partial < v >}{\partial x} = -\frac{\partial < p >}{\partial x} + < \rho >< f_{mx} > -$$

$$-\left[c_f\left(1 - \overline{\Pi}_{м}\right) + c_{fм}\overline{\Pi}_{м}\right]\frac{2 < \rho >< v^2 >}{D_{г}\cos\alpha} \pm \tag{3.26}$$

$$\pm < j > \left(< v_{m,x} > - < v >\right) > \frac{4\overline{\Pi}_{м}}{D_{г}\cos\alpha}.$$

При отсутствии массовой силы, сил трения и массообмена уравнение (3.26) совпадает с уравнением (3.2).

Составим квазиодномерное уравнение энергии. Это уравнение является энергетическим балансом для текущей в канале жидкости, составленным на основе закона сохранения и превращения энергии (первого начала термодинамики).

Используем формулировку закона, в которой учтены действующие факторы, существенные для рассматриваемых энергоустановок. В данном случае это означает, что изменение в единицу времени суммы внутренней ε и кинетической $v^2/2$ энергии системы, состоящей из частиц жидкости, которые находятся в выделенном объеме, складывается из работы за единицу времени (мощности) всех действующих на систему внешних сил, которую эти силы совершили над объемом, и из теплоты, подведенной к этому объему. Отметим, что в такой формулировке положительными считаются подведенные к системе работа и теплота, в то время как в технической термодинамике положительный знак имеют отведенная от системы работа и подведенная к системе теплота.

В качестве внешних сил рассматриваем плотность массовой силы $\bar{f}_m$ и полное гидродинамическое давление $\bar{p}_n$, действующее в жидкости. Подведенную теплоту рассматриваем состоящей из двух величин: из притока теплоты с вектором плотности теплового потока $\bar{q}$ (Вт/м^2) через поверхность S, ограничивающую объем, и из тепловыделения (теплопоглощения) от источников (стоков) внутри объема, характеризуемых мощностью объемного тепловыделения q_V (Вт/м³).

В интегральной форме записи применительно к рассматриваемому объему канала (см. рис. 72) уравнение энергии имеет вид

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int\limits_{\Delta V}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)\rho\mathrm{d}V\right]=\oint\limits_S(\bar{p}_n\bar{v})\mathrm{d}S+$$

$$+\int\limits_{\Delta V}\rho\bar{f}_m\bar{v}\,\mathrm{d}V+\oint\limits_S\bar{q}\mathrm{d}S+\int\limits_{\Delta V}q_V\mathrm{d}V. \qquad (3.27)$$

Заменим в производной слева в этом уравнении величину внутренней энергии ε полной энтальпией, согласно определению понятия энтальпии

$$h=\varepsilon+\frac{p}{\rho}; \qquad h^*=h+\frac{v^2}{2}. \qquad (3.28)$$

Далее, используя выражение (3.4) и полагая в нем сначала $\Phi=\rho\cdot h^*$, а затем $\Phi=p$, представим эту производную в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int\limits_{\Delta V}\left(h^*-\frac{p}{\rho}\right)\rho\mathrm{d}V\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left(\oint\limits_{\Delta V}h^*\rho\mathrm{d}V\right)+$$

$$+\oint\limits_S h^*\rho v_n\mathrm{d}S-\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{\Delta V}p\,\mathrm{d}V\right)-\oint\limits_S p v_n\mathrm{d}S. \qquad (3.29)$$

В правой части выражения (3.27) мощность поверхностных сил разложим на две составляющие: от работы сил давления $(-p\bar{n})$ и от работы сил трения, не раскрывая конкретного содержания последней величины

$$\oint\limits_S (\bar{p}_n\bar{v})\,\mathrm{d}S = -\oint\limits_S p\bar{n}\bar{v}\,\mathrm{d}S + \oint\limits_S (\bar{p}_n\bar{v})_{\text{тр}}\,\mathrm{d}S. \qquad (3.30)$$

Подстановка (3.29) и (3.30) в (3.27) приводит к записи уравнения энергии в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{\Delta V} h^*\rho\,\mathrm{d}V\right) + \oint\limits_S h^*\rho v_n\,\mathrm{d}S = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{\Delta V} p\,\mathrm{d}V\right) +$$

$$+ \oint\limits_S (\bar{p}_n\bar{v})_{\text{тр}}\,\mathrm{d}S + \int\limits_{\Delta V} \rho\bar{f}_m\bar{v}\,\mathrm{d}V + \oint\limits_S \bar{q}\,\mathrm{d}\vec{S} + \int\limits_{\Delta V} q_V\,\mathrm{d}V. \qquad (3.31)$$

Отметим, что при таком переходе от формы записи уравнения энергии (3.27) через величину внутренней энергии ε к форме записи (3.31) через величину полной энтальпии h^* из него в явном виде исчезла мощность сил нормального давления $\oint\limits_S p v_n \mathrm{d}S$.

Преобразуем уравнение энергии (3.31) к квазиодномерной форме. В (3.31) левая часть представляет собой субстанциональную производную от полной энтальпии $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int\limits_{\Delta V} h^*\rho\,\mathrm{d}V\right)$. Эту производную при помощи (3.4), правила (3.8) и соотношения (3.11) преобразуем, как и в предыдущем выводе, в квазиодномерную форму

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int\limits_{\Delta V} h^*\rho\,\mathrm{d}V\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta x < h^*\rho > A\right) - < h_1^*\rho_1 v_1 > A_1 +$$

$$+ < h_2^*\rho_2 v_2 > A_2 \mp < h_{\text{м}}^*\rho_{\text{м}} v_{\text{м}\,n} > \Pi_{\text{м}} \frac{\Delta x}{\cos\alpha}. \qquad (3.32)$$

Рассмотрим правую часть (3.31). Преобразуем здесь первый и второй члены к квазиодномерному виду, используя (3.7) и (3.8):

$$\int\limits_{\Delta V} \rho \bar{f}_m \bar{v}\, \mathrm{d}V = \Delta x < \rho >< \bar{f}_m \bar{v} > A, \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_{\Delta V} p\, \mathrm{d}V \right) = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta x < p > A). \tag{3.34}$$

Величина $\oint\limits_S \bar{q} \mathrm{d}\vec{S}$ теплопритока в объем ΔV обусловлена двумя факторами — плотностью теплового потока через стенки канала $q_{\text{ст}}$ и плотностью теплового потока $q_{\text{т}}$, идущего через поперечные сечения A_1 и A_2 объема вследствие теплопроводности жидкости:

$$\oint\limits_S \bar{q}\, \mathrm{d}\vec{S} = < q_{\text{ст}} > \Pi_{\text{к}} \frac{\Delta x}{\cos \alpha} + \left(< q_{\text{т}2} A_2 > - < q_{\text{т}1} A_1 > \right), \tag{3.35}$$

где $q_{\text{т}} = -\lambda \dfrac{\partial T}{\partial x}$; λ — коэффициент теплопроводности; T — температура.

В величине тепловыделения от источников (стоков) внутри объема ΔV выделим тепловыделение $\Delta q_{\text{тр}}$ от работы сил трения:

$$\int\limits_V q_V \mathrm{d}V = \Delta q_{\text{тр}} + < \bar{\bar{q}}_V > \Delta x A, \tag{3.36}$$

где $\bar{\bar{q}}_V$ — тепловыделение в объеме ΔV за счет источников (стоков), помимо работы сил трения.

Будем далее полагать, что работа сил трения, отводимая от потока, полностью переходит в теплоту:

$$-\oint\limits_S \left(\bar{p}_n \bar{v} \right)_{\text{тр}} \mathrm{d}S = \Delta q_{\text{тр}}. \tag{3.37}$$

Подставляем в (3.31) полученные выражения (3.32) – (3.37), группируем попарно члены вида $< i^* \rho\, v > A$ и $A q_{\text{т}}$, делим уравнение на Δx, устремляем Δx к нулю и переходим к пределу. В результате получаем канальную форму уравнения энергии для квазиодномерного течения жидкости (с использованием величины полной энтальпии h^*)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(< h^* >< p > A\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(< h^* >< \rho v > A\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(< p > A\right) + < p >< \bar{f}_m \bar{v} > A +$$

$$+ \frac{\overline{\Pi}_\text{к} < q_\text{ст} >}{\cos\alpha} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda A \frac{\partial T}{\partial x}\right) +$$

$$+ < \bar{q}_V > A \pm < h^*_\text{м} >< j > \frac{\overline{\Pi}_\text{м}}{\cos\alpha}, \qquad (3.38)$$

где знаки плюс и минус перед последним членом соответствуют вдуву и отсосу.

Умножим уравнение неразрывности (3.13) на величину $<h^*>$, вычтем результат из (3.38) и поделим на A. В результате квазиодномерное уравнение энергии в канальной форме примет вид

$$< \rho > \frac{\partial < h^* >}{\partial t} + < \rho >< v > \frac{\partial < h^* >}{\partial t} = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial t}\left(< p > A\right) +$$

$$+ < \rho >< \bar{f}_m \bar{v} > + \frac{4 < q_\text{ст} >}{D_\text{г}\cos\alpha} - \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\, A \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \qquad (3.39)$$

$$+ <\tilde{q}_V> \pm \left(< h^*_\text{м} > - < h^* >\right) < j > + \frac{4\Pi_\text{м}}{D_\text{г}\cos\alpha}.$$

В случае отсутствия действия массовой силы, тепломассообмена и постоянства площади поперечного сечения канала уравнение (3.39) превращается в уравнение (3.3).

Полученная в канальной форме система квазиодномерных уравнений или (3.13) и (3.23), или (3.26) и (3.28), или (3.39) совместно с уравнением состояния

$$< \rho > = \frac{< p >}{R < T >} \tag{3.40}$$

позволяет производить численный расчет нестационарного движения газа в каналах.

Уравнение энергии (3.39) можно записать с использованием величины внутренней энергии ε. Для этого необходимо вернуться к уравнению (3.31) и, не производя в нем замены на (3.28), проделать преобразования, аналогичные предыдущим:

$$< \rho > \frac{\partial}{\partial t}\left(< \varepsilon + \frac{v^2}{2} > \right) + < \rho >< v > \frac{\partial}{\partial x}\left(< \varepsilon + \frac{v^2}{2} > \right) = -\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}(< pv > A) +$$

$$+ < \rho >< \bar{f}_m \bar{v} > + \frac{4 < q_{\text{ст}} >}{D_{\text{г}} \cos\alpha} - \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda A \frac{\partial T}{\partial x} \right) + < \tilde{q}_V > \pm \tag{3.41}$$

$$\pm \left(< \varepsilon_{\text{м}} + \frac{v_{\text{м}}^2}{2} > - < \varepsilon + \frac{v^2}{2} > \right) < j > \frac{4\Pi_{\text{м}}}{D_{\text{г}} \cos\alpha},$$

где $\varepsilon_{\text{м}}$ — полная энергия единицы массообменного потока.

Контрольные вопросы к §18

1. В чем отличие одномерного течения от пространственного, одномерного от квазиодномерного?

2. В чем состоит содержание теоремы о переносе потоком жидкости какой-либо физической величины через поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем?

3. Какие особенности пространственного течения жидкости отражены в полученной системе нестационарных квазиодномерных (канальных) уравнений неразрывности, изменения количества движения, энергии, состояния?

§19. МЕТОДЫ ОСРЕДНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ПОТОКА

Реальные газовые потоки имеют переменные по сечению канала параметры. При расчетах таких течений с использованием квазиодномерной модели течения правильность осреднения параметров приобретает исключительное значение, так как в противном случае теряется смысл принятой математической модели расчета.

Задача правильного осреднения параметров какого-либо неравномерного потока заключается в его описании "посредством наименьшего числа параметров при сохранении всех свойств потока, существенных при оценке процессов, происходивших в потоке ранее или имеющих значение для дальнейшего использования потока в рассматриваемом техническом вопросе. При осреднении каждый неравномерный поток газа в некотором сечении заменяется соответствующим каноническим потоком (в общем случае вновь неравномерным), характеризующимся наименьшим числом параметров, при котором сохраняются все свойства неравномерного потока, существенные для рассматриваемых задач. Правила, по которым устанавливается такое соответствие, и составляют метод осреднения"[1].

Поскольку при осреднении происходит уменьшение числа параметров, необходимых для описания канонического потока в сравнении с исходным, то какие-то свойства исходного потока могут не сохраниться в осредненном (каноническом) потоке. Само осреднение может быть проведено различными способами, т.е. его процедура неоднозначна, а в ряде случаев и вообще выполнить корректно его невозможно.

При выборе того или иного способа осреднения необходимо стремиться сохранять в осредненном потоке значения параметров, определяющих самые существенные характеристики течения, такие же, как и в исходном, неравномерном потоке. Выбор этих параметров диктуется условиями конкретной технической задачи. Например, при вычислении потерь или КПД турбомашины в число сохраняемых и определяющих параметров обязательно должно входить изменение энтропии потока как величины, харак-

[1] *Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1967.

теризующей преобразование энергии. В случае осреднения параметров потока, вытекающего из реактивного сопла двигателя, обязательным является выбор в качестве сохраняемого и определяющего параметра величины полного импульса потока, характеризующего реактивную тягу.

Поскольку состояние стационарного одномерного газового потока полностью определяется тремя независимыми параметрами, то при его осреднении число определяющих величин не может превышать трех.

Рассмотрим процедуру осреднения параметров неравномерного стационарного потока на примере поступательного движущегося потока, принимая в исходном и осредненном потоках одинаковыми следующие величины: поток массы (массовый расход газа) G, поток полной энтальпии $J^* \equiv H^*$, поток энтропии $S = sG$

Предположим, что поля статической температуры T, полного p^* и статического p давлений или измерены, или каким-то образом заданы в поперечном сечении исходного неравномерного потока. Тогда в каждой точке этого поперечного сечения по величине отношений p/p^* можно последовательно найти: газодинамическую функцию $\pi(\lambda)$, коэффициент скорости λ, функцию $\tau(\lambda)$, полную температуру T^*, а также функцию расхода $q(\lambda)$.

Далее определим интегральные величины, являющиеся сохраняемыми и определяющими для данного исходного потока в целом.

Поток массы [с использованием формулы (2.59)]

$$G_{\text{исх}} \equiv \langle G \rangle = \int_G \mathrm{d}G = \int_A \beta(\gamma) \frac{p^* q(\lambda)}{\sqrt{RT^*}} \mathrm{d}A. \tag{3.42}$$

Поток полной энтальпии

$$h^*_{\text{исх}} \equiv \langle h^* \rangle = \int_G h \,\mathrm{d}G = \int_A c_p \sqrt{T^*} \beta(\gamma) \frac{p^* q(\lambda)}{\sqrt{R}} \mathrm{d}A. \tag{3.43}$$

Поток энтропии

$$S^{*}_{\text{исх}} = \langle S \rangle = \int\limits_G s\,\mathrm{d}G = \int\limits_A R \ln \frac{\left(T^{*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{p^{*}}\,\mathrm{d}A. \tag{3.44}$$

Интегралы в этих выражениях вычисляются графически или численно. Полученные значения величин $\langle G \rangle$, $\langle h^{*} \rangle$ и $\langle S \rangle$ позволяют определить осредненные значения двух параметров: $\langle T^{*} \rangle$ и $\langle p^{*} \rangle$.

Из условия

$$\langle h^{*} \rangle = c_p \langle T^{*} \rangle \langle G \rangle, \tag{3.45}$$

выражающего равенство потоков полной энтальпии в исходном и каноническом потоках, определяем осредненную полную температуру (температуру торможения)

$$\langle T^{*} \rangle = \frac{\int\limits_A \sqrt{T^{*}}\, p^{*} q(\lambda)\,\mathrm{d}A}{\int\limits_A \frac{p^{*} q(\lambda)}{\sqrt{T^{*}}}\,\mathrm{d}A}. \tag{3.46}$$

Из этого соотношения с учетом (3.42) следует, что при данном методе осреднения найденное значение $\langle T^{*} \rangle$ является среднемассовым, т.е. полученным осреднением по потоку массы

$$\langle T^{*} \rangle = \frac{1}{\langle G \rangle} \int\limits_G T^{*}\mathrm{d}G.$$

Из условия

$$\langle S \rangle = \langle G \rangle R \ln \frac{\langle T^{*} \rangle^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\langle p^{*} \rangle}, \tag{3.47}$$

выражающего равенство потоков энтропии в исходном и каноническом потоках, с учетом (3.42) и (3.44) находим осредненное давление торможения $\langle p^{*} \rangle$:

$$\ln < p^* > = \frac{\beta}{< G > \sqrt{R}} \int_A \left[\ln p^* - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T^*}{< T^* >} \right] \frac{p^* q(\lambda)}{\sqrt{T^*}} \mathrm{d}A.$$

Часто температура T^* является постоянной по поперечному сечению канала, и тогда

$$\ln < p^* > = \frac{1}{< G >} \int_G \ln p^* \mathrm{d}G.$$

Таким образом, для рассматриваемого метода осреднения среднее значение давления торможения находится посредством осреднения не значений давления торможения, а его логарифма.

Осредненные значения остальных параметров находятся следующим способом. Осредненное значение коэффициента скорости потока $<\lambda>$ определяется из уравнения расхода для осредненных значений параметров:

$$q(< \lambda >) = \frac{< G > \sqrt{R < T^* >}}{\beta(\gamma) < p^* > A}.$$

Определив осредненное значение критической скорости

$$< a_{\text{кр}} > = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1} R < T^* >},$$

найдем осредненную скорость потока

$$<v> = < a_{\text{кр}} > <\lambda>.$$

Осредненную плотность $<\rho>$ находим, используя уравнение состояния для осредненных параметров

$$< \rho^* > = \frac{< p^* >}{R < T^* >}$$

и газодинамическую функцию $\varepsilon\,(<\lambda>)$

$$< r > = < r^* > e\,(< I >).$$

Осредненное значение полного импульса определяем через значение газодинамической функции $z\,(<\lambda>)$:

$$< I > = \frac{\gamma + 1}{\gamma} < G >< a_{\text{кр}} > z(< \lambda >). \qquad (3.48)$$

Можно показать, что найденное таким образом значение полного импульса будет больше, чем полный импульс исходного неравномерного потока.

Рассмотрим другой способ осреднения параметров стационарного поступательно движущегося потока, когда в исходном и каноническом потоках приняты одинаковыми: поток массы G (3.42), поток полной энтальпии h^* (3.43) и поток полного импульса (2.66):

$$I_{\text{исх}} \equiv < I > = \int_A p^* f(\lambda)\, \mathrm{d}A. \qquad (3.49)$$

Найденные значения величин $< G >$, $< h^* >$ и $< I >$ позволяют провести процедуру осреднения в такой последовательности. Из условия равенства потоков полной энтальпии по (3.45) и (3.46) определяют температуру $< T^* >$. Из условия равенства потоков полного импульса (3.49) и (3.48) определяют газодинамическую функцию $z\,(<\lambda>)$ и осредненный коэффициент скорости $<\lambda>$. Затем из уравнения расхода для осредненных параметров определяют осредненное значение давления торможения

$$< p^* > = \frac{< G > \sqrt{R < T^* >}}{\beta(\gamma) A q(< \lambda >)}.$$

Осредненное значение полного давления $< p^* >$ в данном случае оказывается близким к осредненному значению, полученному путем осреднения по площади

$$< p^* > = \frac{1}{A}\int\limits_A p^* \mathrm{d}A .$$

Это следует из равенства потоков полного импульса в исходном и каноническом потоках, если равенство потоков полного импульса записать в виде

$$< p^* > f(< \lambda >)A = \int\limits_A p^* f(\lambda)\mathrm{d}A$$

и учесть, что $f(< \lambda >) \approx < f(\lambda) >$ для широкого диапазона изменения коэффициента скорости λ.

Осредненные скорости $<v>$ и $<\rho>$ определяют как и в предыдущем случае. Осредненное значение энтропии $< S >$ находят по формуле (3.47), и по данному методу осреднения оно оказывается большим, чем у исходного потока.

В рассмотренных двух методах осреднения, когда в исходном и каноническом потоках сохранялись одинаковыми сочетания параметров $<G>$, $<h^*>$, $< S >$ или $<G>$, $<h^*>$, $< I >$, предполагались также одинаковые значения площадей поперечного сечения канала A в обоих потоках. В связи с этим можно показать, что при определенных сочетаниях параметров осреднение поступательных потоков при неизменной площади поперечного сечения с сохранением величины потока полного импульса оказывается невозможным. Однако такое же осреднение с постоянным потоком энтропии возможно всегда.

В ряде случаев оказывается удобным в качестве канонического (однородного осредненного) выбирать поток с измененной площадью поперечного сечения канала. Например, при течении с трением в трубе можно рассматривать однородный осредненный поток, площадь поперечного сечения которого равна

$$<A> = A_{\text{к}} - A^* \quad \text{или} \quad <A> = A_{\text{к}} - A^{**},$$

где $A_{\text{к}}$ — площадь поперечного сечения канала; A^* и A^{**} — площадь вытеснения и площадь потери импульса соответственно.

которые являются величинами, учитывающими воздействие на поток сил трения.

Еще одним важным классом осредненных потоков являются осредненные неравномерно закрученные потоки. В этом случае исходный поток, имеющий на радиусе r окружную составляющую скорости v_u, может быть заменен осредненным потоком, для которого потоки массы $<G>$, полной энтальпии $<h^*>$, энтропии $<S>$ и поток момента количества движения $<M> = \int\limits_G r v_u \mathrm{d}G$ имеют те же значения, что и у исходного потока. Особенности такого осреднения можно найти в курсе теории лопаточных машин.

Иногда пользуются различными упрощенными способами осреднения (по площади поперечного сечения, по расходу и т.п.), а также используют в качестве сохраняемых и определяющих параметров какие-либо иные величины, нежели рассмотренные выше (например, статическое давление). Такое осреднение может быть оправдано только соображениями практического характера, например большой простотой расчетных формул. Однако всегда необходима специальная проверка этих упрощенных методов на получаемую погрешность в сравнении с рассмотренными более строгими методами осреднения.

Контрольные вопросы к §19

1. Что такое осредненный (канонический) квазиодномерный поток?
2. Почему в исходном и осредненном потоках нельзя принимать произвольное число определяющих величин?
3. Почему осреднение параметров неравномерного потока только по площади его поперечного сечения может привести к погрешностям определения осредненных значений величин?

§20. ВИДЫ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ПОТОК. ОБРАЩЕНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Поток газа может испытывать на себе разнообразные внешние физические воздействия, влияние которых проще всего проанализировать при рассмотрении стационарного одномерного течения газа вдоль струйки тока. Для обсуждаемых энергетических установок наиболее существенными являются следующие виды элементарных физических воздействий на поток газа, движущегося в канале: 1) геометрическое воздействие путем изменения площади поперечного сечения канала; 2) воздействие сил трения на поверхностях, окружающих поток газа; 3) тепловое воздействие в виде подвода и отвода теплоты посредством теплообмена через стенки канала или в виде внутреннего выделения и поглощения теплоты за счет сгорания введенного в поток топлива, конденсации или испарения одной из его фаз, выделения джоулевой теплоты; 4) расходное воздействие вдувом или отсосом; 5) механическое воздействие подводом или отводом механической работы от потока газа, проходящего через компрессор или турбину; 6) электромагнитное воздействие путем наложения электромагнитного поля на движущуюся электропроводящую среду (это воздействие в данной главе не рассматривается).

Все рассмотренные внешние воздействия на поток газа, за исключением воздействия трением и джоулева нагрева, обратимы, т.е. могут менять свое направление действия, входя в систему уравнений со знаками плюс и минус. Преодоление сил трения и джоулево тепловыделение — процессы необратимые; поток газа при этих воздействиях может только аккумулировать теплоту, а не отдавать ее.

Принцип обращения воздействия, который в самом общем виде был установлен Л.А.Вулисом[1], состоит в следующем: "Невозможен непрерывный переход скорости движения через критическое значение ее (т.е. переход из дозвукового потока в сверхзвуковой или обратно) посредством одностороннего по характеру своему воздействия".

Если в процессе движения газового потока используются несколько элементарных воздействий, то для обеспечения непрерывного перехода скорости движения через критическое ее значение необходимо задание такого закона распределения внешних воздействий по длине канала, который обеспечил бы изменение знака элементарного суммарного воздействия в критическом сечении.

Если при достижении газовым потоком скорости, равной местной скорости звука (критической скорости), что соответству-

---

[1] *Вулис Л.А.* Термодинамика газовых потоков. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1950

ет значению М = 1, знак воздействия не изменяется, то из-за невозможности непрерывного перехода через критическую скорость возникает состояние, называемое "кризисом" течения, или "запиранием" потока.

Для проведения анализа явлений, возникающих при наложении на газовый поток различных физических воздействий, используем модель стационарного квазиодномерного течения. Уравнениями, описывающими течение в канале для такого анализа, удобно пользоваться в безразмерном виде (отличном от их формы записи в §18), в котором параметры течения представлены как относительные приращения своих абсолютных значений (например, как $\frac{dp}{p}, \frac{dA}{A}, \frac{dG}{G}$ и т.п.).

Уравнения в такой форме записи получим, используя теорему (3.4) о переносе потоком жидкости физической величины через поверхность, которая окружает контрольный объем, с добавлением условия стационарности течения.

На рис. 73 показан рассматриваемый малый объем канала ΔV длиной dx. Все параметры в каждом из поперечных сечений канала A_1 и A_2 и на боковой, целиком проницаемой поверхности выделенного объема $S_к$, считаются осредненными, однако знак осреднения <...> для простоты записи опущен. Отметим, что при переходе от сечения A_1 к сечению A_2 на длине dx величина какого-либо параметра изменяется со своего значения a на новое значение $a + da$.

Для вывода стационарного квазиодномерного уравнения неразрывности используем условие сохранения массы жидкости в рассматриваемом объеме $\Delta V = A dx$, которое в случае стационарности движения, согласно (3.6), может быть записано в виде

$$-\rho v A + \left[\rho v A + d(\rho v A)\right] - dG_м = 0. \qquad (3.50)$$

Здесь первые два члена представляют собой поток массы (массовый расход) через сечения A_1 и A_2, а $dG_м$ — осредненную величину потока, проникающего в данном случае в канал через всю боковую поверхность $S_к$ выделенного объема. Общее правило знаков здесь и далее соответствует приведенному в §18.

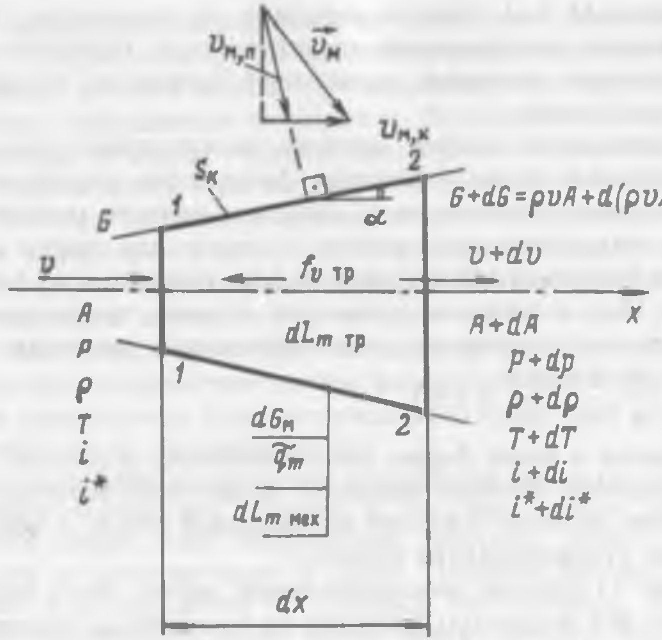


Рис. 73. Параметры потока и элементарные воздействия для объема канала ΔV

Разделим (3.50) на поток массы через сечение A

$$G = \rho v A, \tag{3.51}$$

который можно трактовать как уравнение неразрывности в размерных переменных, рассматривая величину $G(x)$ как функцию координаты x. В результате из (3.50) получим уравнение неразрывности для квазиодномерного стационарного течения в форме записи через относительные приращения параметров с безразмерным видом каждого его члена:

$$\frac{dv}{v} + \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dG_м}{G_м} - \frac{dA}{A}. \tag{3.52}$$

Слева в (3.52) находятся параметры течения, справа — воздействующие факторы. Вывод уравнения (3.52) на основе соотношения (3.50) демонстрирует общий метод перехода от описания реального движения жидкости к его описанию при помощи квазиодномерной схемы. Формально уравнение (3.52) можно получить из (3.51) путем дифференцирования.

Стационарное квазиодномерное уравнение изменения количества движения (в проекции на ось x) получим, используя общую теорему (3.17). Применяя соотношение (3.18), при стационарности течения получаем, что изменение потока количества движения через ограничивающие объем жидкости ΔV поверхности A_1, A_2, $S_к$ равно действующим на этот объем силам, которые учитываются при данном анализе:

$$-Gv + \left(G + \mathrm{d}G_м\right)\left(v + \mathrm{d}v\right) - \mathrm{d}G_м v_{м,x} =$$

$$= pA - \left[pA + \left(p + \mathrm{d}p\right)\left(A + \mathrm{d}A\right)\right] p\,\mathrm{d}A - \tag{3.53}$$

$$-f_{V\,тр}\Delta V + f_{V\,мех}\Delta V\,.$$

Здесь первые два члена в левой части равенства представляют собой потоки количества движения через сечения A_1 и A_2; третий член — поток количества движения, входящего в объем ΔV за счет x-й составляющей $v_{м,x}$ скорости потока, идущего через стенку. В правой части равенства первые члены выражают действие сил давления на поверхностях A_1 и A_2, третий член (с точностью до бесконечно малых второго порядка) — действие сил давления вдоль оси x на боковую поверхность $S_к$. Четвертый член описывает действие на весь объем $\Delta V = A\,\mathrm{d}\,x$ сил трения на боковой поверхности, которые представим через величину объемной плотности силы трения $f_{V\,тр}$ (Н/м^3). Если действие силы выражать через массовую плотность силы f_m (Н/м^2), то из очевидного равенства

$$\int\limits_V \bar{f}_m(\rho \mathrm{d}V) = \int\limits_V \bar{f}_V \mathrm{d}V$$

следует, что плотности массовой и объемной сил связаны соотношением

$$\rho\bar{f}_m = \bar{f}_V. \tag{3.54}$$

Последний член в (3.53) выражает действие распределенной по объему силы механического воздействия (массовой силы), объемная (или массовая) плотность которой равна $f_{V\,\text{мех}}$ (или $f_{m\,\text{мех}}$).

Введем в рассмотрение удельную элементарную работу, совершаемую за время dt силами трения над элементом ΔV (Дж/кг),

$$\mathrm{d}L_{m\,\text{тр}} = f_{m\,\text{тр}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\rho}\mathrm{d}L_{V\,\text{тр}} \tag{3.55}$$

и удельную элементарную механическую работу

$$\mathrm{d}L_{m\,\text{мех}} = f_{m\,\text{мех}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\rho}\mathrm{d}L_{V\,\text{мех}}. \tag{3.56}$$

Обозначим

$$y = \pm\frac{v_{\text{м},x}}{v}. \tag{3.57}$$

Сделаем в уравнении (3.53) приведение подобных членов, поделим его на величину $G = \rho vA$, и, учтя (3.54) – (3.57), получим квазиодномерное стационарное уравнение изменения количества движения, в котором каждый его член имеет размерность джоуль на килограмм (Дж/кг):

$$v\mathrm{d}v = -\frac{\mathrm{d}p}{\rho} - \mathrm{d}L_{m\,\text{тр}} + \mathrm{d}L_{m\,\text{мех}} - v^2(1-y)\frac{\mathrm{d}G_\text{м}}{G}. \tag{3.58}$$

Используя соотношения $v = a$M и $a^2 = \gamma p/\rho$, преобразуем (3.58) к форме записи через относительные приращения параметров с безразмерным видом каждого члена и с коэффициентом, равным единице, перед величиной dv/v:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{1}{\gamma\text{M}^2}\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{1}{a^2\text{M}^2}\mathrm{d}L_{m\,\text{тр}} +$$

$$+\frac{1}{a^2\text{M}^2}\,\mathrm{d}L_{m\,\text{мех}}-(1-y)\frac{\mathrm{d}G_{\text{м}}}{G}. \tag{3.59}$$

При выводе стационарного квазиодномерного уравнения энергии используем соотношение (3.31), согласно которому при стационарности течения изменение за единицу времени потока полной энтальпии $H^* = \oint_S h^*\rho v_n \mathrm{d}S$ через ограничивающие объем жидкости ΔV поверхности A_1, A_2, $S_\text{к}$ равно теплоте $\tilde{Q}_V$, подведенной (отведенной) к этому объему, и работе за единицу времени (мощности) $P_\text{мех}$, действующей на этот объем внешней механической силы, Дж:

$$-H_1+H_2-H_\text{м}=\tilde{Q}_V+P_\text{мех}. \tag{3.60}$$

Первый член в левой части уравнения энергии (3.60) представляет собой поток полной энтальпии, входящий в объем ΔV через сечение A_1:

$$H_1^* = Gh'_{\text{о.п}}+G\frac{\left(v'_{\text{о.п}}\right)^2}{2}. \tag{3.61}$$

Здесь и далее индекс "о.п" обозначает параметры основного потока газа G, идущего по каналу, а параметры потока, проникающего через стенки канала, будут обозначаться индексом "м". Будем также помечать штрихом параметры основного потока в сечении A_1 или параметры потока, проникающего через боковую поверхность $S_\text{к}$. Два штриха будут обозначать параметры потока в выходном сечении A_2.

Второй член слева в выражении (3.60) дает поток полной энтальпии, выходящий из объема ΔV через сечение A_2. Формальным образом его можно записать с точностью до бесконечно малых второго порядка, согласно принятой схеме приращения параметров на длине канала $\mathrm{d}x$, в виде

$$H_2^* = h^*G+\mathrm{d}\left(h^*G\right)=h^*G+G\,\mathrm{d}h^*+h^*\mathrm{d}G. \tag{3.62}$$

При таком подходе дифференциал $\mathrm{d}h^*$ в выражении (3.62) должен выражать действие двух факторов: изменения полной энтальпии потока, входящего в рассматриваемый объем, как за счет перемещения потока вдоль координаты x, так и за счет влияния на основной поток массы и параметров потока через проницаемую стенку, т.е. $\mathrm{d}h^* = f(x, \mathrm{d}G_\text{м})$, где дифференциал $\mathrm{d}G_\text{м} \equiv \mathrm{d}G$ отражает влияние только одного второго фактора — изменения массы.

Однако, имея в виду конечную форму получаемого результата, удобнее рассматривать влияние указанных факторов иным образом. Запишем поток полной энтальпии H_2^*, выходящий через сечение A_2, как сумму трех потоков (учитывая, что $h^* = h + \frac{v^2}{2}$) следующим образом:

$$H_2^* = \left(h'_\text{о.п} + \mathrm{d}h'_\text{о.п}\right)G + h''_\text{м}\mathrm{d}G_\text{м} +$$

$$+\left(G + \mathrm{d}G_\text{м}\right)\left[\frac{\left(v'_\text{о.п}\right)^2}{2} + \mathrm{d}\frac{\left(v'_\text{о.п}\right)^2}{2}\right]. \qquad (3.63)$$

В такой записи первый член — поток статической энтальпии в сечении A_2, обусловленный только изменением параметров основного потока неизменного состава при его перемещении вдоль оси x. Второй член — поток статической энтальпии в сечении A_2, определяемый только процессом изменения массы, причем величина $h''_\text{м}$ — энтальпия потока через стенку при температуре, равной температуре основного потока в сечении A_2. Третий член представляет собой суммарный поток кинетической энергии в сечении A_2. Форма записи величины H_2^* в виде (3.63) дает возможность рассматривать в дифференциале $\mathrm{d}h^*_\text{о п} = c_{p\,\text{о п}}\mathrm{d}T$ теплоемкость c_p как функцию только давления и температуры, а не состава газа, как это дополнительно имеет место для значения c_p в величине $\mathrm{d}h^*$ в формуле (3.62).

Третий член слева в (3.60) выражает поток полной энтальпии потока через боковую поверхность элемента $S_к$:

$$H_м^* = h_м' \mathrm{d}G_м + \frac{(v_м')^2}{2}\mathrm{d}G_м. \qquad (3.64)$$

В правой части (3.60) первая величина $\bar{Q}_V$ является тепловой мощностью (поглощенной или выделенной) в рассматриваемом объеме ΔV за счет всех теплообменных процессов, кроме выделения теплоты трения. Как и ранее, полагаем, что мощность сил трения и теплота трения равны по величине и обратны по знаку. Представим $\bar{Q}_V$ в виде

$$\bar{Q}_V = \bar{q}_V \Delta V, \qquad (3.65)$$

где $\bar{q}_V$ — мощность объемного тепловыделения, Вт/м^3.

Второй член в правой части (3.60) — механическая мощность $P_{мех}$ — с учетом (3.56) равен:

$$P_{мех} = \int\limits_V \rho \bar{f}_{m\,мех} \cdot \bar{v}\,\mathrm{d}V = \rho f_{m\,мех} v \Delta V = G\,\mathrm{d}L_{m\,мех}. \qquad (3.66)$$

Подставляя в (3.60) выражения (3.61), (3.63) — (3.66), проводим упрощения и делим на G. Получаем квазиодномерное стационарное уравнение энергии, в котором каждый его член имеет размерность джоуль на килограмм (Дж/кг):

$$\mathrm{d}h^* = \bar{q}_m - D\frac{\mathrm{d}G_м}{G} + \mathrm{d}L_{m\,мех}, \qquad (3.67)$$

где

$$\mathrm{d}h^* = \mathrm{d}h'_{о.\,п} + \mathrm{d}\frac{\left(v'_{о.\,п}\right)^2}{2}; \qquad (3.68)$$

$\bar{q}_m = \dfrac{\bar{q}_V}{\rho v}\mathrm{d}x$ — удельное массовое тепловыделение, Дж/кг;

$$D = \left(h^*_{\text{о.п}}\right)' \left[1 - \frac{\left(h^*_{\text{м}}\right)'}{\left(h^0_{\text{о.п}}\right)} + \frac{h''_{\text{м}} - h'_{\text{о.п}}}{\left(h^*_{\text{о.п}}\right)'}\right]. \tag{3.69}$$

Возвращаясь к исходным обозначениям $h'_{\text{о.п}} \equiv h$, $v'_{\text{о.п}} \equiv v$ и используя соотношение $\mathrm{d}h = \dfrac{a^2}{\gamma - 1}\dfrac{\mathrm{d}T}{T}$, преобразуем (3.67) к форме записи через относительные приращения параметров с безразмерным видом каждого члена:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{1}{(\gamma - 1)\mathrm{M}^2}\frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{1}{a^2\mathrm{M}^2}\bar{q}_m -$$

$$- \frac{1}{a^2\mathrm{M}^2} D \frac{\mathrm{d}G_{\text{м}}}{G} + \frac{1}{a^2\mathrm{M}^2}\mathrm{d}L_{m\ \text{мех}}. \tag{3.70}$$

Придадим такую же безразмерную форму размерному уравнению состояния

$$\rho = p/(RT), \tag{3.71}$$

для чего его продифференцируем. Ограничимся далее случаем, когда основной поток в канале и поток через проницаемую стенку имеют одинаковую молекулярную массу $\mu_{\text{мол}}$. В результате при условии $R = \dfrac{8314}{\mu_{\text{мол}}} = \text{const}$ получим

$$-\frac{\mathrm{d}p}{p} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{\mathrm{d}T}{T} = 0. \tag{3.72}$$

Итак, для описания квазиодномерного стационарного движения газа, испытывающего рассматриваемые физические воздействия, получены: система размерных уравнений (3.51), (3.58), (3.67) и (3.71), где неизвестными являются относительные приращения переменных, или система безразмерных уравнений (3.52), (3.59), (3.70) и (3.72), где неизвестными являются абсолютные приращения переменных. Эта система линейна относительно своих неизвестных, а члены в правых частях уравнений отражают свойства каждого из рассматриваемых воздействий. Найдя решения системы, например методом определителей, получим структурно одинаковые выражения для каждого неизвестного. Они будут представлять собой суммы, каждый член которой описывает влияние какого-либо одного воздействия.

В качестве примера приведем решение для относительного приращения скорости:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{M^2 - 1}\frac{dA}{A} - \frac{1}{M^2 - 1}\frac{\gamma}{a^2}dL_{m\,тр} - \frac{1}{M^2 - 1}\times$$

$$\times\frac{(\gamma - 1)}{a^2}\bar{q}_м - \frac{1}{M^2 - 1}\left[1 + \gamma M^2(1 - \gamma) - \frac{\gamma - 1}{a^2}D\right]\frac{dG_м}{G} + \qquad (3.73)$$

$$+\frac{1}{a^2\left(M^2 - 1\right)}dL_{m\,мех}.$$

Множители перед величиной каждого из воздействий являются коэффициентами влияния данного воздействия на относительное изменение рассматриваемого параметра, и их знак определяет направление изменения этого параметра. В знаменателе каждого множителя величина ($M^2 - 1$) меняет свой знак в зависимости от того, больше или меньше единицы число M^2. Именно этим и объясняется математическая необходимость изменения знака воздействия для того, чтобы не прерывать монотонное и непрерывное изменение параметров потока. Иначе можно сказать, что характер влияния отдельных элементарных физических воздействий на поток газа противоположен при дозвуковом и сверхзвуковом режимах течения.

Действительно, рассмотрим, например, только одно геометрическое воздействие. Тогда из (3.73) следует, что при уменьшении площади поперечного сечения $\left(\frac{dA}{A} < 0\right)$ с ростом скорости v от дозвуковой ($M < 1$) до значения, когда $M \to 1$, относительное приращение $\frac{dv}{v} \to +\infty$ при подходе к точке $M = 1$ слева (рис. 74). В то же время при подходе к точке $M = 1$ справа при том же условии $\frac{dA}{A} < 0$ значение $\frac{dv}{v} \to -\infty$. Возникающий разрыв указывает на то, что непрерывный переход скорости через значение, равное критической скорости (т.е. от дозвукового течения к сверхзвуковому или обратно), невозможен, если не изменено направление (знак) воздействия со значения $\frac{dA}{A} < 0$ на $\frac{dA}{A} > 0$.

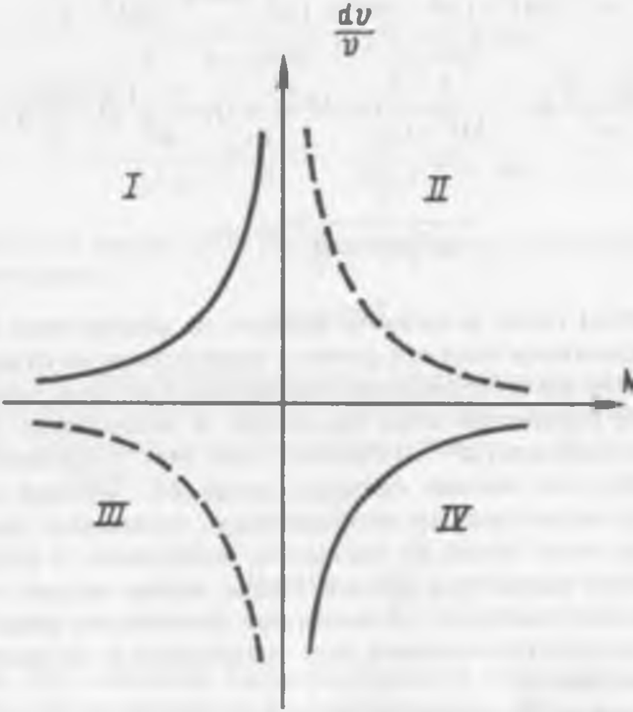


Рис. 74. Характер изменения дифференциала скорости потока:

I и IV – $\frac{dA}{A} < 0$; II и III – $\frac{dA}{A} > 0$

Контрольные вопросы к §20

1. Какие элементарные воздействия на поток являются обратимыми, а какие необратимыми?

2. В чем заключается принцип обращения воздействия и какой смысл вкладывается в понятие "кризис течения"?

3. Каким образом при выводе стационарных квазиодномерных уравнений воздействия учтен механизм воздействия на поток сил трения, процессов тепло- и массообмена, механического воздействия?

4. Каким образом при выводе квазиодномерного стационарного уравнения энергии (3.67) вычислены потоки полной энтальпии через различные составляющие поверхности контрольного объема?

§21. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА ПОТОК

Рассмотрим квазиодномерное стационарное течение невязкого нетеплопроводного газа при наличии только одного геометрического воздействия на поток, т.е. течение газа в канале переменного сечения A в отсутствие сил трения, без теплового, расходного и механического воздействий при неизменном показателе адиабаты γ и газовой постоянной R. В данных условиях размерная система уравнений неразрывности (3.51), уравнения изменения количества движения (3.58), уравнения энергии (3.67) и уравнения состояния (3.71) имеет вид

$$\begin{cases} \rho v A = G; & (3.74) \\ v\,\mathrm{d}v = -\dfrac{\mathrm{d}p}{\rho}; & (3.75) \\ \mathrm{d}h^* = 0; & (3.76) \\ \rho = \dfrac{p}{RT}. & (3.77) \end{cases}$$

Эту систему уравнений можно преобразовать к безразмерной форме записи через относительные приращения входящих в нее параметров. В результате получится система уравнений, являющаяся частным случаем системы уравнений (3.52), (3.59), (3.70) и (3.72), если в них все виды воздействий, кроме геометрического $\mathrm{d}A/A$, положить равными нулю. После этого можно в явном виде найти зависимость относительных приращений переменных v, p, ρ, T от относительного изменения площади A поперечного сечения канала (геометрического воздействия):

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{M^2 - 1} \frac{dA}{A}; \tag{3.78}$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\gamma M^2}{M^2 - 1} \frac{dA}{A}; \tag{3.79}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{M^2}{M^2 - 1} \frac{dA}{A}; \tag{3.80}$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{(\gamma - 1)M^2}{M^2 - 1} \frac{dA}{A}. \tag{3.81}$$

Соотношение (3.78) называется уравнением Гюгонио (получено им в 1880 г.). Система уравнений (3.74) — (3.77) может быть проинтегрирована. Одним интегралом системы (фактически интегралом уравнения Гюгонио) является газодинамическая функция расхода $q(\lambda, \gamma) = A/A_{кр}$. Другой интеграл дает уравнение адиабаты $p/\rho^{\gamma} = \text{const}$.

Форма записи выражений переменных (3.78) — (3.81) позволяет анализировать самые общие особенности течения газа, исключая из рассмотрения индивидуальные черты конкретного потока. Проанализируем на основе уравнения (3.78) три характерные ситуации.

1. Число $M < 1$ (дозвуковое течение); тогда знак изменения скорости dv противоположен знаку изменения площади поперечного сечения dA. Это означает, что, как и в случае несжимаемой жидкости, скорость потока увеличивается с уменьшением площади поперечного сечения канала и уменьшается с увеличением этой площади.

2. Число $M > 1$ (сверхзвуковое течение); тогда знак изменения скорости dv совпадает со знаком изменения площади поперечного сечения dA. В этом случае в отличие от несжимаемой жидкости скорость потока увеличивается с увеличением площади поперечного сечения канала и уменьшается при ее уменьшении.

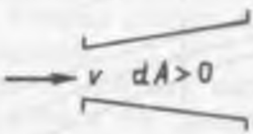
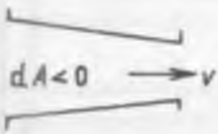
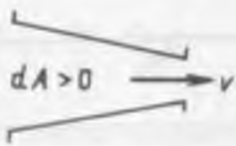
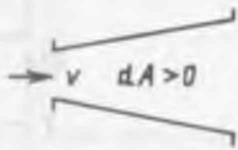
3. Число $M = 1$; при этом $dA = 0$, скорость потока газа оказывается равной критической скорости (местной скорости звука). Сечение с такой скоростью потока называется критическим. Условие $dA = 0$ математически отражает существование экстремума в случае непрерывной функции $A(x)$. Из физических сообра-

жений следует, что это сечение должно быть минимальным в потоке. В противном случае, т.е. если бы оно было максимальным сечением, при подходе к нему дозвуковой поток должен был бы замедляться, а сверхзвуковой — ускоряться, т.е. удаляться от критической скорости. Такая ситуация не может привести к существованию течения в сечении, где $dA = 0$, со скоростью, равной критической.

Обычно канал с уменьшающимся по потоку поперечным сечением называется геометрическим конфузором, а канал с увеличивающимся поперечным сечением — геометрическим диффузором. Характер необходимого изменения площади поперечного сечения в зависимости от типа течения (торможение или ускорение потока) показан в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Геометрическое воздействие на поток

Режим течения	Тип потока	
	дозвуковой, $M < 1$	сверхзвуковой, $M > 1$
Торможение потока, $dv < 0$		
Ускорение потока, $dv > 0$		

Ускорение дозвукового потока газа необходимо осуществлять в геометрическом конфузоре, в котором скорость дозвукового потока можно увеличить до значения, равного критическому. Для дальнейшего ускорения потока необходимо изменить знак геометрического воздействия и ускорение сверхзвукового потока газа осуществлять в геометрическом диффузоре. Канал такой геометрии (геометрический конфузор с последующим геометрическим диффузором) называется соплом Лаваля (рис. 75) и используется для ускорения дозвукового потока до сверхзвуковой скорости.

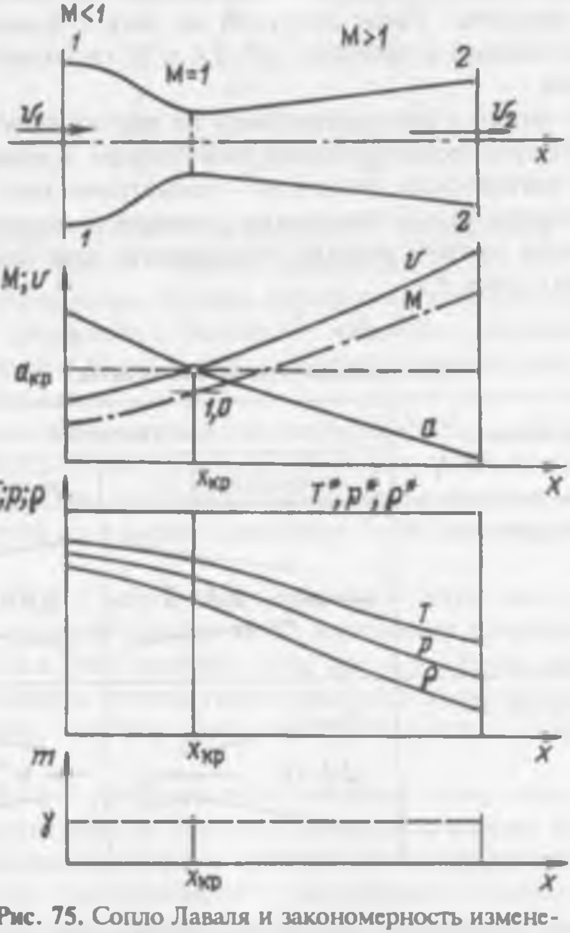


Рис. 75. Сопло Лаваля и закономерность изменения параметров газа по его длине на расчетном режиме течения

Торможение дозвукового потока газа следует осуществлять в геометрическом диффузоре (рис. 76), а торможение сверхзвукового потока газа при рассматриваемых условиях следовало бы сначала осуществлять в геометрическом конфузоре, а после достижения потоком критической скорости — в геометрическом диффузоре. Однако торможение сверхзвукового потока в реальных условиях течения в канале рассмотренной геометрии (повторяющей геометрию сопла Лаваля) при наличии на стенках пограничного слоя происходит в условиях, не описываемых полностью одномерной схемой течения. Из-за наличия пограничного слоя и уменьшения поперечного сечения в сверхзвуковой зоне течения возникают скачки уплотнения.

В рассматриваемых условиях течения закономерность изменения относительной величины площади поперечного сечения канала в функции скорости потока можно определить по уравнению расхода, записанному с использованием газодинамической функции $q(\lambda, \gamma)$:

$$\frac{A}{A_{кр}} = \frac{\rho_{кр} v_{кр}}{\rho v} = \frac{1}{q(\lambda, \gamma)}.$$

Функция $q(\lambda, \gamma)$ (см. рис. 52) изменяется от нуля (при $\lambda = 0$) до нуля при ($\lambda = \lambda_{пред}$), проходя через максимальное значение, равное единице при $\lambda = 1$. Отсюда следует, что критическое сечение в потоке будет минимальным.

Рассмотрим физическое объяснение наличия минимального критического сечения в потоке из уравнения неразрывности (3.52). Для данного случая следует, что

$$\frac{dA}{A} = -\frac{d\rho}{\rho} - \frac{dv_x}{v_x}.$$

Здесь временно скорость потока обозначена v_x для того, чтобы отличить ее от удельного объема $v_{уд}$. Поскольку $v_{уд} = \dfrac{1}{\rho}$, то $\dfrac{d\rho}{\rho} = -\dfrac{dv_{уд}}{v_{уд}}$, и тогда

$$\frac{dA}{A} = \frac{dv_{уд}}{v_{уд}} - \frac{dv_x}{v_x}. \qquad (3.82)$$

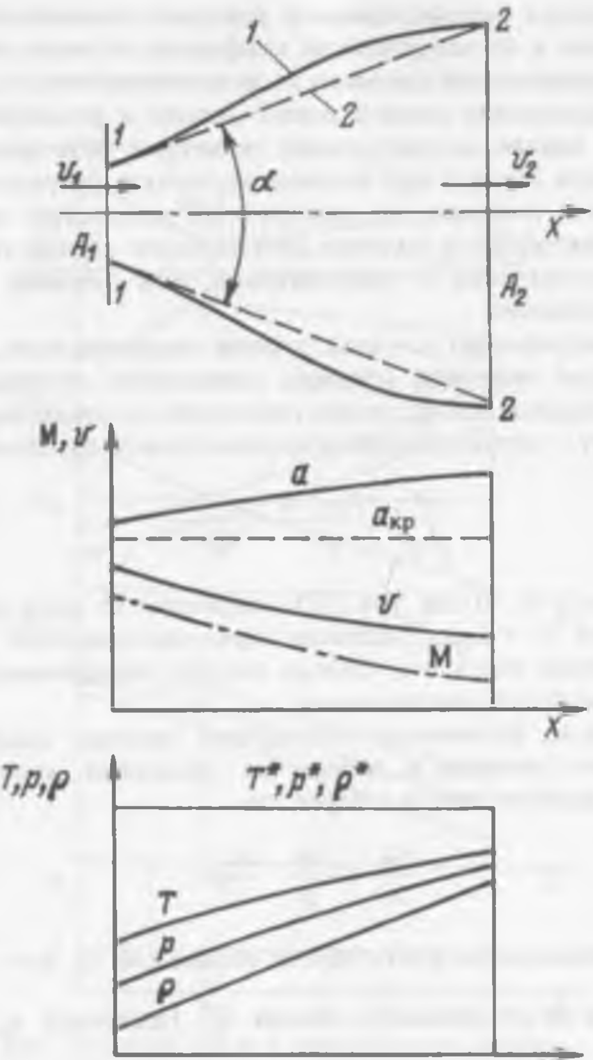


Рис. 76. Дозвуковой диффузор и закономерность изменения параметров газа по его длине на расчетном режиме течения:
1 — осесимметричный диффузор с криволинейным обводом; *2* — конический диффузор

Таким образом, относительное изменение площади dA/A при течении газа вызвано противоположным действием двух факторов. Один фактор — относительное изменение скорости dv_x / v_x, другой фактор — относительное изменение удельного объема газа $dv_{уд} / v_{уд}$, которое отсутствует при движении несжимаемой жидкости. Из (3.78) и (3.80) следует, что

$$\frac{dv_{уд}}{v_{уд}} = -\frac{d\rho}{\rho} = M^2 \frac{dv_x}{v_x}. \qquad (3.83)$$

В результате из (3.82) видно, что если течение дозвуковое ($M < 1$), то абсолютное значение относительного прироста скорости dv_x / v_x превышает относительное увеличение удельного объема $dv_{уд} / v_{уд}$, определяемого по (3.83). И поэтому при ускорении потока, когда $dv_x > 0$, поперечное сечение уменьшается: $dA/A < 0$. В сверхзвуковом течении ситуация обратная: абсолютная величина относительного прироста скорости меньше относительного увеличения удельного объема. И поэтому $dA/A > 0$.

Рассмотрим закономерности изменения параметров вдоль оси сопла Лаваля (см. рис. 75) на расчетном режиме истечения газа. Поскольку анализируется процесс без потерь энергии и без теплообмена, то параметры заторможенного потока (p^*, T^*, ρ^*) и критическая скорость $a_{кр}$ вдоль оси сопла не изменяются. Характер изменения статических параметров в зависимости от увеличения числа λ вдоль оси x подобен закономерностям изменения соответствующих газодинамических функций (см. рис. 52)

$$p = p^*\pi(\lambda, \gamma); \qquad T = T^*\tau(\lambda, \gamma); \qquad \rho = \rho^*\varepsilon(\lambda, \gamma),$$

а именно значения статических параметров уменьшаются по мере увеличения скорости v вдоль оси x сопла. Величина местной скорости звука a уменьшается вдоль оси в соответствии с уменьшением статической температуры T.

Рассмотрим закономерности изменения параметров вдоль оси дозвукового диффузора на расчетном режиме течения газа (см. рис. 76). Как и в предыдущем случае, параметры заторможенного потока

p^*, T^*, ρ^* в диффузоре постоянны. Статические параметры p, T, ρ увеличиваются вдоль оси x согласно закономерностям изменения функций π, τ, ε при уменьшении скорости потока.

Определим показатель элементарного политропного процесса при геометрическом воздействии на поток в рассматриваемых условиях течения. Согласно уравнению политропы

$$m = \frac{\mathrm{d}p\ /\ p}{\mathrm{d}\rho\ /\ \rho}.$$

В данном случае из (3.79) и (3.80) получаем, что $m = \gamma$, так как процесс изоэнтропиен. Таким образом, m = const для всего процесса, который изображается на $T - s$-диаграмме вертикальной линией.

Схема одномерного потока может быть использована при анализе геометрического воздействия на осесимметричный закрученный поток газа, движущийся в пространстве между двумя дисками, центростремительный или центробежный (рис. 77, *а*). Для анализа такого течения в рассмотренной выше постановке к системе уравнений (3.74) — (3.77) необходимо добавить связь между радиальной v_r и окружной v_u составляющими скорости

$$v^2 = v_r^2 + v_u^2,$$

уравнение сохранения момента количества движения, например в виде

$$\mathrm{d}\ (v_u\ r) = 0,$$

и зависимость площади A поперечного сечения канала от радиуса

$$A = 2\pi rb,$$

где b — расстояние между поверхностями дисков, образующих канал. Кроме того, в уравнении (3.74) величину v следует заменить величиной v_r.

Из рассмотренной системы уравнений можно получить зависимости, подобные (3.78) — (3.81). Ограничимся, однако, только анализом аналога уравнения Гюгонио:

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{M^2 \sin^2 \alpha - 1}\left(\frac{dr}{r} + \sin^2 \alpha \frac{db}{b}\right),$$

где $\sin \alpha = v_r / v$.

Рассмотрим поток газа между двумя плоскими дисками (b = const). Для закрученного центробежного потока с $dr > 0$ (см. рис. 77, *а*) при значениях числа Маха $M_1 > 1/\sin^2 \alpha_1$ при входе в щелевой канал из соотношения для dv / v следует, что поток при дальнейшем движении будет ускоряться. При значениях $M_1 <$ $< 1/\sin^2 \alpha_1$ поток будет тормозиться. Эта ситуация реализуется в безлопаточном (щелевом) диффузоре за рабочим колесом центробежного компрессора.

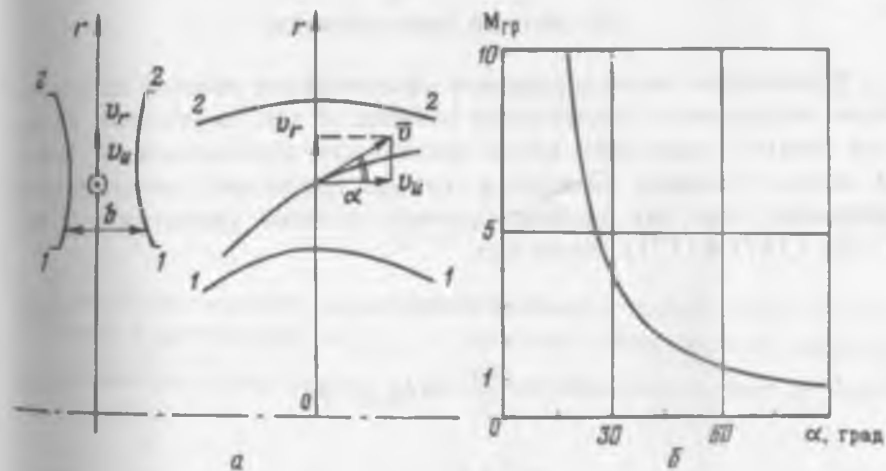


Рис. 77. Схема течения в радиальном щелевом канале (*а*) и граничное значение числа Маха при входе в щелевой канал постоянной ширины (b = const) в зависимости от угла α (*б*)

Зависимость граничного числа $M_{гр} = 1/\sin^2 \alpha$ (для случая b = const) от текущего значения угла α дана на рис. 77, *б*. Для закрученного центробежного потока с $dr < 0$ при значениях $M_1 > 1/\sin^2 \alpha_1$ поток после входа в щелевой канал будет тормозиться, а при $M_1 < 1/\sin^2 \alpha_1$ — ускоряться (течение за сопловым аппаратом центростремительной турбины).

Контрольные вопросы к §21

1. Какое сечение в одномерном потоке газа называется критическим?

2. Как математически связаны между собой относительное изменение скорости и относительное изменение площади поперечного сечения канала при геометрическом воздействии на поток?

3. Как следует изменять поперечное сечение канала, чтобы затормозить сверхзвуковой поток до критической скорости?

4. Есть ли отличие в характере изменения скорости при течении в расширяющемся канале несжимаемой жидкости и газа со сверхзвуковой скоростью?

5. Как изменяются параметры потока вдоль сопла Лаваля, вдоль дозвукового диффузора?

6. Рассмотрите движение дозвукового (сверхзвукового) потока между двумя плоскими дисками в направлении от центра к периферии вдоль радиуса: поток будет ускоряться или тормозиться? Повторите анализ при движении от периферии к центру.

§22. ВОЗДЕЙСТВИЕ ТРЕНИЕМ

Рассмотрим квазиодномериое стационарное течение газа в канале постоянного поперечного сечения A при отсутствии, кроме сил трения, каких-либо других физических воздействий на поток. В данных условиях размерная система уравнений, описывающая движение газа как частный случай системы уравнений (3.51), (3.58), (3.67) и (3.71), имеет вид

$$r\, vA = G, \tag{3.84}$$

$$v\mathrm{d}v = -\frac{\mathrm{d}p}{\rho} - \mathrm{d}L_{m\,\text{тр}}; \tag{3.85}$$

$$\mathrm{d}h^{*} = 0; \tag{3.86}$$

$$\rho = \frac{p}{RT}. \tag{3.87}$$

Обратим внимание на то, что в условиях энергоизолированности течения величина h^{*} полной энтальпии постоянна, поскольку вся работа сил трения переходит в теплоту, поглощаемую газом.

Систему уравнений (3.84) — (3.87) можно преобразовать к безразмерной форме записи через относительные приращения входящих в нее параметров. В результате получится система уравнений, которая является частным случаем системы уравнений (3.52), (3.59), (3.70) и (3.72), если все виды воздействий в них, кроме работы сил трения $\mathrm{d}L_{m\,\text{тр}}$, положить равными нулю. После этого выразим в явном виде зависимость относительных приращений переменных v, p, ρ, T от воздействий работой сил трения $\mathrm{d}L_{m\,\text{тр}}$:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = -\frac{1}{\mathrm{M}^2 - 1}\frac{\gamma}{a^2}\mathrm{d}L_{m\,\text{тр}}; \tag{3.88}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{\mathrm{M}^2(\gamma - 1) + 1}{\mathrm{M}^2 - 1}\frac{\gamma}{a^2}\mathrm{d}L_{m\,\text{тр}}; \tag{3.89}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = \frac{1}{\mathrm{M}^2 - 1}\frac{\gamma}{a^2}\mathrm{d}L_{m\,\text{тр}}; \tag{3.90}$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{\mathrm{M}^2(\gamma - 1)}{\mathrm{M}^2 - 1}\frac{\gamma}{a^2}\mathrm{d}L_{m\,\text{тр}}. \tag{3.91}$$

Для стационарного одномерного потока в канале связь его параметров с величиной $\mathrm{d}L_{m\,\text{тр}}$ — удельной элементарной работой сил трения на длине канала $\mathrm{d}x$ за время $\mathrm{d}t$ — определяют по формуле, Дж/кг,

$$\mathrm{d}L_{m\,\text{тр}} = \xi_{\text{тр}}\frac{v^2}{2D_{\text{г}}}\mathrm{d}x. \tag{3.92}$$

Отсюда в соответствии с соотношением (3.55) плотность массовой силы трения, тормозящей поток, Н/кг,

$$f_{m\,\text{тр}} = \xi_{\text{тр}}\frac{v^2}{2D_{\text{г}}}. \tag{3.93}$$

Зависимость (3.92) основана на формуле Дарси — Вейсбаха для потери напора при течении несжимаемой жидкости. Коэффициент трения $\xi_{тр}$ связан с ранее использованным в (3.24) коэффициентом трения

$$c_f = \frac{\tau}{\rho v^2 / 2}$$

соотношением $\xi_{тр} = 4c_f$.

Воздействие сил трения является односторонним, поскольку величина работы сил трения $dL_{m\ тр}$ всегда больше нуля. Поэтому, как следует из уравнения (3.88), дозвуковой поток всегда будет ускоряться, а сверхзвуковой — тормозиться (табл. 3.2). Под воздействием трения как дозвуковой, так и сверхзвуковой потоки могут лишь достигнуть критической скорости, однако не могут перейти через нее, ибо невозможно изменить знак этого воздействия.

Таблица 3.2

Воздействие трением на поток

Режим течения	Тип потока	
	дозвуковой, $M < 1$	сверхзвуковой, $M > 1$
Торможение потока	Неосуществимо	$dv < 0$
Ускорение потока	$dv > 0$	Неосуществимо

Изменение параметров потока в канале при воздействии трением показано на рис. 78. При ускорении дозвукового потока с увеличением числа M, как следует из уравнений (3.89) — (3.91), значение статических параметров будет уменьшаться. При торможении сверхзвукового потока с уменьшением числа M значения статических параметров будут возрастать (см. рис. 78). Полное давление p^* в направлении движения потока будет падать в результате затраты энергии на преодоление сил трения. Полная температура T^* будет постоянна вследствие энергоизолированности процесса, величина $\rho^* = p^*/\left(RT^*\right)$ повторяет закономерность p^*.

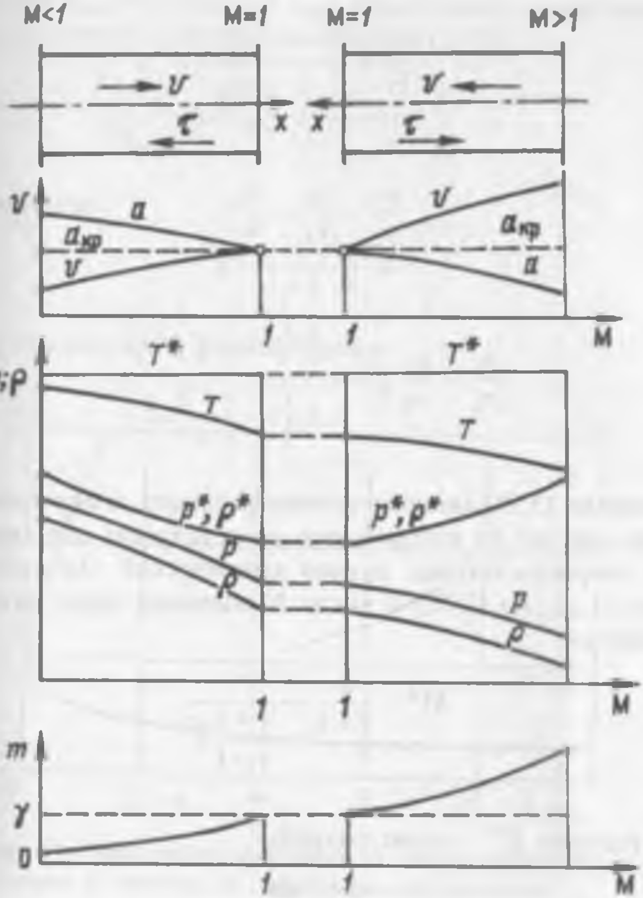


Рис. 78. Изменение параметров движущегося в трубе газа под воздействием сил трения

Соотношение параметров потока в двух различных сечениях трубы (*1* и *2*) при воздействии только сил трения определяется условием $T^* = \dfrac{T}{\tau(\lambda,\gamma)} = \text{const}$. В результате имеем

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{1-\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_1^2}{1-\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_2^2};$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{v_2}{v_1}=\frac{\lambda_2}{\lambda_1};$$

$$\frac{p_1}{p_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{T_1}{T_2}=\frac{\lambda_2\left(1-\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_1^2\right)}{\lambda_1\left(1-\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda_2^2\right)}.$$

Уравнение (3.88) можно проинтегрировать и определить длину трубы, на выходе из которой под воздействием сил трения установится скорость потока, равная критической. Заменим в (3.88) величину $\mathrm{d}L_{m\ \text{тр}}$ из (3.92), а число М выразим через коэффициент λ по формуле

$$\mathrm{M}^2=\frac{2}{\gamma+1}\frac{\lambda^2}{1-\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}\lambda^2}.$$

При условии T^* = const получим

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}.$$

В результате (3.88) примет вид

$$\left(\frac{1}{\lambda^2}-1\right)\frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda}=\frac{\gamma}{\gamma+1}\frac{\xi_{\text{тр}}}{D_\text{г}}\,\mathrm{d}x. \qquad (3.94)$$

Если принять, что $\xi_{\text{тр}}$ = const (например, равно среднему значению на длине данной трубы), то после интегрирования (3.94) от сечения входа ($x_{вх} = 0$ при $\lambda = \lambda_{вх}$) до сечения с координатой x и значением λ получим интеграл уравнения (3.88):

$$\left(\frac{1}{\lambda_{вх}^2} + \ln \lambda_{вх}^2\right) - \left(\frac{1}{\lambda^2} + \ln \lambda^2\right) = \chi. \tag{3.95}$$

Здесь величина

$$\chi = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{\xi_{тр}}{D_г} x$$

называется приведенной длиной трубы.

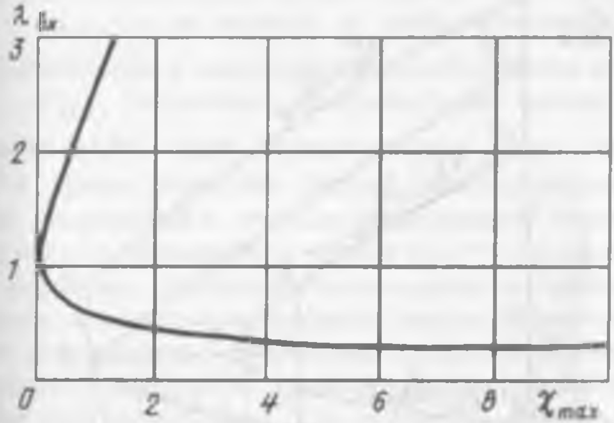


Рис. 79. Зависимость критической длины трубы при течении с трением от коэффициента скорости $\lambda_{вх}$ при входе в трубу

Анализируя (3.95) на экстремум, можно установить, что функция χ имеет максимум при $\lambda = 1$:

$$\chi_{max} = \frac{1}{\lambda_{вх}^2} + \ln \lambda_{вх}^2 - 1. \tag{3.96}$$

Длина трубы $x_{кр}$, у которой на выходе установилась критическая скорость потока, т.е. значение $\lambda = 1$, называется критической длиной. Этой предельной длине трубы соответствует значение $\chi = \chi_{max}$ (рис. 79). Поскольку под влиянием трения дальнейшее изменение скорости невозможно, то приведенная длина χ_{max} характеризует кризис течения для фиксированных условий при входе в трубу (в случае как дозвукового, так и сверхзвукового потока) при входе. Зная входные параметры и величину $\lambda_{вх}$, по формуле расхода (2.59) можно определить предельно возможный массовый расход через трубу.

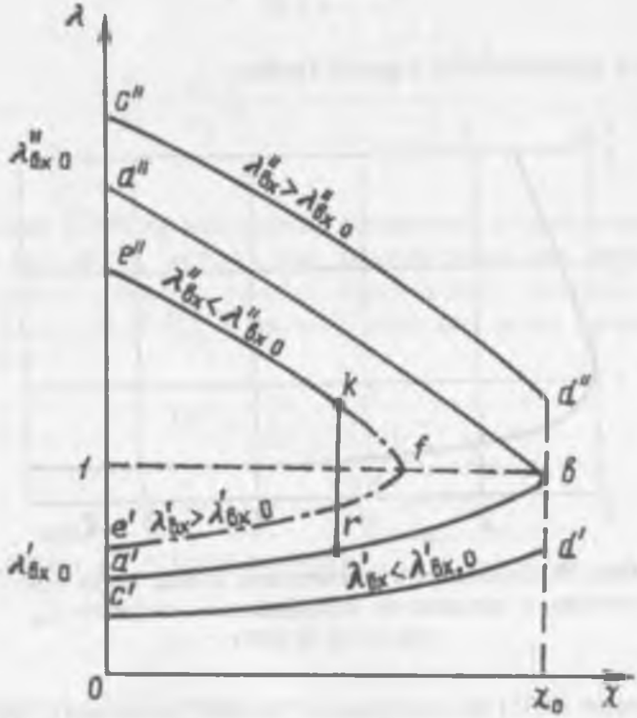


Рис. 80. Зависимость коэффициента скорости λ от приведенной длины трубы при течении газа под воздействием трения

Проанализируем закономерность изменения коэффициента скорости λ вдоль трубы с приведенной длиной $\chi = \chi_0$ (рис. 80).

которой соответствуют входные значения $\lambda'_{\text{вх}\,0} < 1$ или $\lambda''_{\text{вх}\,0} > 1$. В расчетных условиях изменение λ вдоль трубы определяется формулой (3.95) и изображено на рис. 80 кривыми $a'b$ и $a''b$. Будем изменять значение $\lambda_{\text{вх}}$ при входе в трубу.

Рассмотрим случай дозвукового течения при входе в трубу.

Если $\lambda'_{\text{вх}} < \lambda'_{\text{вх}\,0}$, то на выходе из трубы критическая скорость не будет достигнута, а изменение λ характеризуется кривой $c'd'$. Если $\lambda'_{\text{вх}} > \lambda'_{\text{вх}\,0}$, то реализация течения по кривой $e'f$ согласно (3.95) невозможна, так как ранее уже при меньших значениях $\lambda_{\text{вх}} = \lambda'_{\text{вх}\,0}$ в выходном сечении трубы наступит кризис течения.

Рассмотрим случай сверхзвукового течения при входе в трубу. Если $\lambda''_{\text{вх}} > \lambda''_{\text{вх}\,0}$, то на выходе из трубы установится скорость больше критической, а изменение λ характеризуется кривой $c''d''$. Если $\lambda''_{\text{вх}} < \lambda''_{\text{вх}\,0}$, то течение с торможением потока по кривой $e''f$ согласно (3.95) будет осуществляться только частично на участке $e''k$. Затем возникнет прямой скачок уплотнения kr, переводящий сверхзвуковое течение в дозвуковое. Местоположение скачка, на котором выполняется условие $\lambda_k\lambda_r = 1$, определяется критической скоростью, установившейся на выходе из трубы в результате ускорения за скачком дозвукового потока. Изменение величины λ будет происходить в этом случае по кривой $e''k\,r\,b$.

Рассмотрим определение местоположения прямого скачка $x_{\text{ск}}$ уплотнения kr в трубе длиной l, на выходе из которой достигается значение $\lambda_{\text{вых}} = 1$. Для решения задачи имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_k\lambda_r = 1, \\ \left(\dfrac{1}{\lambda_{\text{вх}}^2} + \ln\lambda_{\text{вх}}^2\right) - \left(\dfrac{1}{\lambda_k^2} + \ln\lambda^2\right) = \dfrac{2\gamma}{\gamma+1}\dfrac{\xi_{\text{тр}}}{D_{\text{г}}}x_{\text{ск}}, \\ \left(\dfrac{1}{\lambda_r^2} + \ln\lambda_r^2\right) - 1 = \dfrac{2\gamma}{\gamma+1}\dfrac{\xi_{\text{тр}}}{D_{\text{г}}}\left(l - x_{\text{ск}}\right). \end{cases}$$

18*

Совместным решением этих уравнений определим неизвестные величины λ_k, λ_r, $x_{ск}$.

Получим еще один интеграл системы уравнений (3.84), (3.87). Используя соотношения $h^* = \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma R}{\gamma - 1}T$ и $a^2 = \gamma RT$, можно уравнения (3.85) — (3.87) преобразовать к виду

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} + \frac{\gamma(\gamma - 1)}{a^2} dL_{m\,тр}.$$

Интегрирование дает искомое выражение

$$\frac{p_2}{\rho_2^\gamma} = \frac{p_1}{\rho_1^\gamma} e^\Delta,$$

где

$$\Delta = \gamma(\gamma - 1)\int_1^2 \frac{dL_{m\,тр}}{a^2} \equiv \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2}\int_1^2 \frac{\xi_{тр}M^2}{D_г} dx.$$

При отсутствии сил трения ($\Delta = 0$) получается обычная адиабата. Рассматриваемое течение газа хотя и представляет собой энергоизолированный процесс, но происходит с ростом энтропии в силу необратимых потерь от работы сил трения, переходящих в теплоту. Используя уравнения (3.89) и (3.90), можно определить величину местного показателя политропического процесса

$$m = \frac{d\ln p}{d\ln \rho} = M^2(\gamma - 1) + 1. \tag{3.97}$$

Видно, что величина m в условиях анализируемого течения не равна γ и переменна вдоль канала. Качественное изображение этого процесса в T — s-диаграмме показано на рис. 81. При дозвуковом потоке при входе в трубу (особенно при очень малых числах M), как следует из (3.97), $m \approx 1$ и процесс близок к изотермическому. При сверхзвуковом потоке при входе в трубу (особенно при больших числах М) $m \to \infty$ и процесс близок к изохронному. При критической скорости, когда $M = 1$, величина $m = \gamma$ и процесс близок к изоэнтропийному. Следовательно, в трубе предельной длины процесс течения дозвукового потока происходит по кривой ab, а процесс сверхзвукового течения — по кривой cb. Непрерывный переход через точку b невозможен.

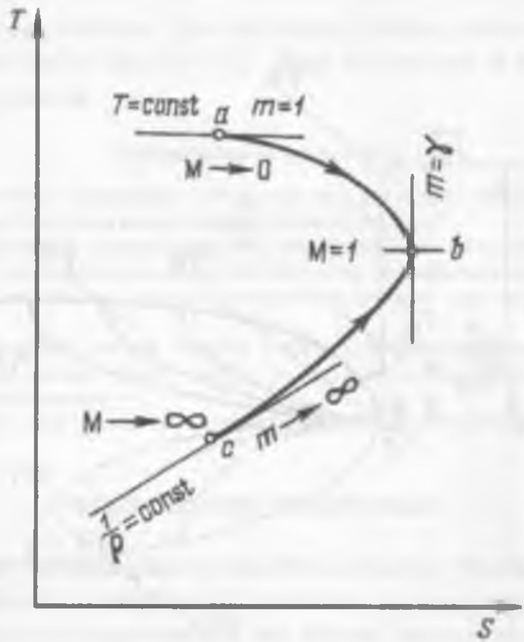


Рис. 81. Процесс в $T - s$-диаграмме при воздействии сил трения на поток

Изменение параметров при течении одномерного потока в трубе постоянного поперечного сечения под воздействием только сил трения может быть охарактеризовано двумя условиями: $h^* = \text{const}$, $G = \text{const}$. Сетка кривых, отвечающая этим условиям, построенная в $T - s$-диаграмме, называется линиями Фанно (рис. 82). Точкой a, c отмечено состояние газа при входе в трубу. Верхние, сплошные кривые соответствуют сверхзвуковому течению, нижние, пунктирные — дозвуковому. Расход газа вдоль каждой кривой постоянен, а от кривой к кривой различен. Параметры газа вдоль кривой определяются из условия c_pT = const. На кривых ab и cb' скорость газа равна критической, так как они соответствуют состоянию при выходе из трубы, имеющей предельную длину χ_{max}.

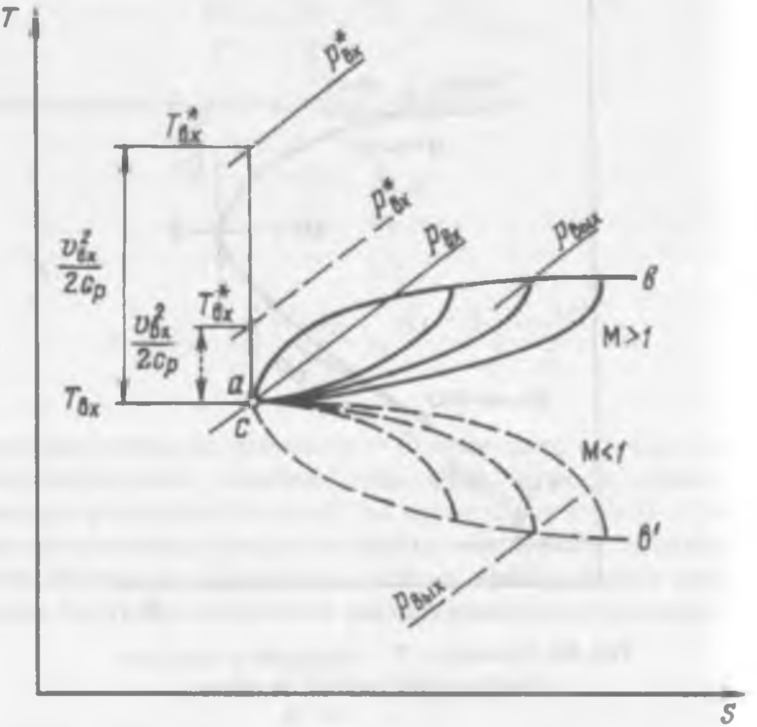


Рис. 82. Линии Фанно при адиабатическом течении газа в трубе постоянного поперечного сечения под действием сил трения при условии G = const, h^* = const

На параметры реального течения часто действуют совместно изменение геометрии канала и сила трения. Рассмотрим на примере сопла Лаваля такое совместное воздействие на изменения местоположения критического сечения. Из (3.73) в случае, когда все воздействия, кроме $\frac{dA}{A}$ и $dL_{m\ \text{тр}}$, равны нулю, при $M = 1$ следует, что

$$\frac{dA}{A} = \frac{\gamma}{a^2} dL_{m\,\text{тр}} > 0,$$

т.е. критическое сечение при наличии трения смещается от минимального сечения, где $dA = 0$, вниз по потоку и в горле поток остается дозвуковым.

Контрольные вопросы к §22

1. Как изменяются параметры потока при его движении вдоль трубы под действием сил трения при дозвуковом (сверхзвуковом) течении?
2. В чем заключается "кризис течения" при воздействии сил трения?
3. Возможно ли избежать кризиса течения при воздействии сил трения, изменяя длину трубы, ее диаметр, форму поперечного сечения и не изменяя параметры при входе в нее?
4. Как надо изменить режим течения в трубе критической длины при сверхзвуковой скорости на выходе, чтобы внутри нее возник скачок уплотнения? Как рассчитать его местоположение?
5. Как влияют силы трения по стенкам сопла Лаваля на положение критического сечения?

§23. ТЕПЛОВОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ

Рассмотрим квазиодномерное стационарное течение газа в канале постоянного поперечного сечения A при отсутствии всех других физических воздействий на поток, кроме теплового, осуществляемого в виде обмена теплотой ($\bar{q}_m$ — удельное массовое тепловыделение в потоке). В данных условиях размерная система уравнений, описывающая движение газа как частный случай системы уравнений (3.51), (3.58), (3.67) и (3.71), имеет вид

$$\left|\begin{array}{ll} \rho v A = G; & (3.98) \\ v\,dv = -\dfrac{dp}{\rho}; & (3.99) \\ dh^* = \bar{q}_m; & (3.100) \\ \rho = \dfrac{p}{RT}. & (3.101) \end{array}\right.$$

Эту систему уравнений можно преобразовать к безразмерной форме записи через относительные приращения входящих в нее параметров. В результате получится система уравнений, которая является частным случаем системы уравнений (3.52), (3.59), (3.70) и (3.72), если все виды воздействий в них, кроме удельного массового тепловыделения в потоке $\tilde{q}_m$ (Дж/кг), положить равными нулю. После этого можно выразить в явном виде зависимость отдельных приращений переменных v, p, ρ, T от воздействия удельного массового тепловыделения $\tilde{q}_m$ (теплового воздействия)

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{M^2 - 1}\frac{\gamma - 1}{a^2}\tilde{q}_m; \tag{3.102}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma M^2}{M^2 - 1}\frac{\gamma - 1}{a^2}\tilde{q}_m; \tag{3.103}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{M^2 - 1}\frac{\gamma - 1}{a^2}\tilde{q}_m; \tag{3.104}$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1}\frac{\gamma - 1}{a^2}\tilde{q}_m. \tag{3.105}$$

Из анализа уравнения (3.102) можно установить, что при подводе необходимого количества теплоты можно изменить скорость потока таким образом, что она станет равной критической в случае как дозвукового, так и сверхзвукового течения при входе в трубу. Это явление носит название теплового кризиса, ибо дальнейшее изменение скорости осуществить невозможно, если не изменить знак воздействия. Охлаждением достичь этого явления нельзя, потому что при отводе теплоты, как это следует из (3.102) дозвуковой поток будет тормозиться, а сверхзвуковой — ускоряться, т.е. их скорости будут удаляться от критического значения.

В табл. 3.3 приведены возможные сочетания типов течения и теплового воздействия на поток. Можно видеть, что для непрерывного ускорения дозвукового потока теплоту надо подводить до момента достижения потоком критической скорости, после чего в критическом сечении канала для продолжения дальнейшего ускорения сверхзвукового потока следует сменить знак воздействия и перейти к охлаждению потока (рис. 83). Такое устройство для ускорения потока называется тепловым соплом.

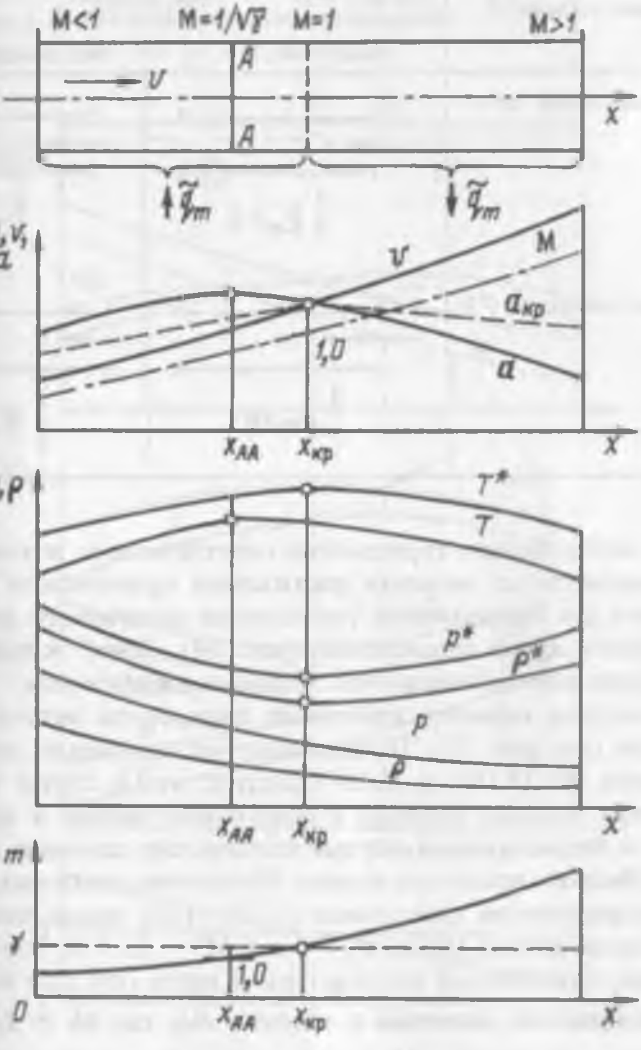


Рис. 83. Закономерность изменения параметров газа при ускорении потока в тепловом сопле

Таблица 3.3

Тепловое воздействие на поток

Режим течения	Тип потока	
	дозвуковой, М < 1	сверхзвуковой, М > 1
Торможение потока, $dv < 0$	v, $\tilde{q}_m < 0$	v, $\tilde{q}_m > 0$
Ускорение потока, $dv > 0$	v, $\tilde{q}_m > 0$	v, $\tilde{q}_m < 0$

Для непрерывного торможения сверхзвукового потока теплоту надо подводить до момента достижения критической скорости, после чего для продолжения торможения дозвукового потока следует перейти к его охлаждению (рис. 84). Такое устройство для торможения потока называется тепловым диффузором.

Рассмотрим характер изменения параметров потока в тепловом сопле (см. рис. 83). Проанализируем изменение статических параметров. Из (3.103) и (3.104) следует, что в случае ускорения потока при подводе теплоты в дозвуковом потоке и при отводе теплоты в сверхзвуковом потоке статические давление p и плотность ρ убывают вдоль оси канала. Изменение статической температуры определяется уравнением (3.105). При малых числах Маха в дозвуковом потоке $(M^2 - 1) < 0$ и $(\gamma M^2 - 1) < 0$. Это вызывает повышение статической температуры T вдоль оси x до некоторого ее максимального значения в сечении AA, где $M = 1/\sqrt{\gamma}$. При дальнейшем увеличении М до единицы и более статическая температура будет уменьшаться. Отметим, что снижение статической температуры в интервале изменения М от $1/\sqrt{\gamma}$ до 1 происходит в условиях подвода теплоты $\tilde{q}_m$ к потоку.

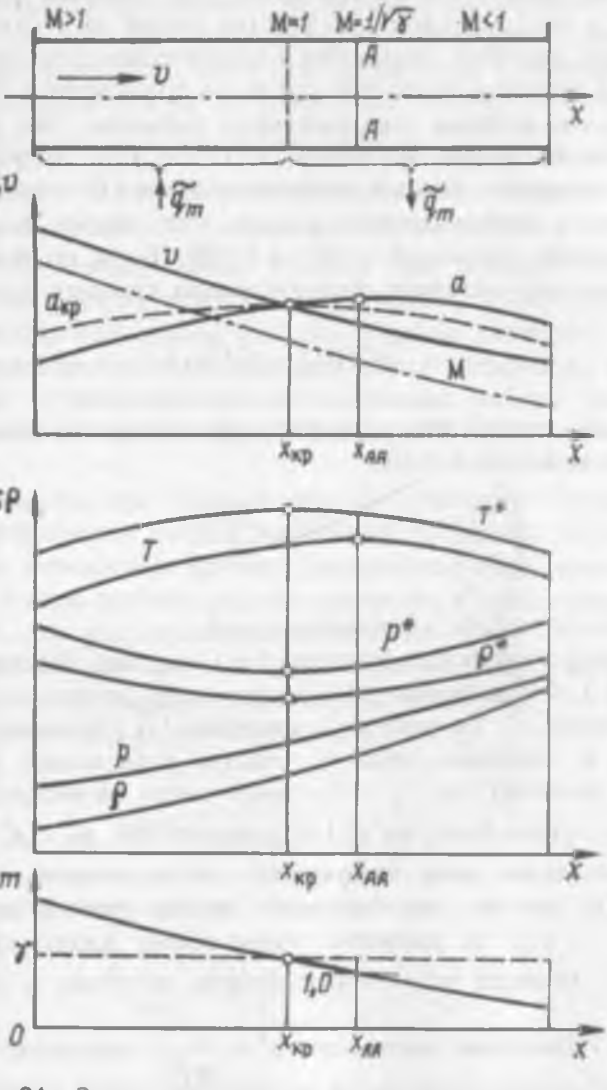


Рис. 84. Закономерность изменения параметров газа при торможении потока в тепловом диффузоре

Проанализируем изменение параметров торможения в тепловом сопле. Из уравнения (3.100) следует, что температура торможения T^* на дозвуковом участке сопла при подводе теплоты повышается, а на сверхзвуковом участке сопла при отводе теплоты снижается, достигая максимума в критическом сечении.

Иным образом ведет себя давление торможения p^*, достигая в критическом сечении минимального значения. Это можно показать на основе анализа величины $I = G\,v + Ap$ — полного импульса потока, который в данных условиях течения ($G = \text{const}$, $A = \text{const}$) постоянен в любом сечении канала, что следует из совместного рассмотрения уравнений (3.98) и (3.99). Тогда по формуле (2.66) можно для двух соседних сечений канала записать условие

$$p_1^* f(\lambda_1) = p_2^* f(\lambda_2).$$

Отсюда следует, что величина относительного изменения давления торможения в трубе

$$\sigma^* = \frac{p_2^*}{p_1^*} = \frac{f(\lambda_1)}{f(\lambda_2)} \tag{3.106}$$

определяется только значениями λ_1 и λ_2.

Характер изменения функции $f(\lambda)$ (см. рис. 54) таков, что для значений $\lambda < 1$ величина $f(\lambda)$ возрастает с ростом λ от 0 до 1, а для значений $\lambda > 1$ с ростом λ величина $f(\lambda)$ уменьшается. Таким образом, в тепловом сопле на участке дозвукового потока (при подводе теплоты) для $\lambda_2 > \lambda_1$ имеет место соотношение $f(\lambda_2) > f(\lambda_1)$, и, стало быть, из (3.106) следует, что $p_2^* < p_1^*$, т.е. давление торможения вдоль дозвукового участка теплового сопла снижается. На участке сверхзвукового потока (при отводе теплоты) $f(\lambda_1) > f(\lambda_2)$ и давление торможения вдоль сопла растет ($p_2^* > p_1^*$), проходя через минимальное значение в критическом сечении. Изменение плотности $\rho^* = \dfrac{p^*}{RT^*}$ определяется изменением величин p^* и T^*. Изменения местной скорости звука a и критической скорости $a_{кр}$ вдоль оси теплового сопла повторяют законы изменения статической температуры и температуры торможения.

Аналогичный анализ изменения параметров потока в тепловом диффузоре (см. рис. 84) показывает, что статическое давление и плотность увеличиваются вдоль оси диффузора. Статическая температура T повышается на сверхзвуковом участке с уменьшением М и, достигнув максимального значения при $\mathrm{M} = 1/\sqrt{\gamma}$ за критическим сечением (в дозвуковом потоке), далее понижается. Температура торможения T^*, изменяясь в соответствии с (3.100), повышается на сверхзвуковом участке при подводе теплоты и, достигнув максимума в критическом сечении, понижается на дозвуковом участке при отводе теплоты. Полное давление p^* уменьшается на сверхзвуковом участке теплового диффузора при подводе теплоты и увеличивается на дозвуковом участке при отводе теплоты, достигая минимального значения в критическом сечении.

Таким образом, при подводе теплоты существует эффект теплового сопротивления: полное давление p^* уменьшается при подогреве потока независимо от того, дозвуковой или сверхзвуковой поток. При отводе теплоты полное давление p^* увеличивается как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом потоках.

Диапазон максимального изменения полного давления в трубе при подогреве газа определяется формулой (3.106). В случае дозвукового потока при входе в трубу (для $\gamma = 1{,}4$)

$$\sigma^*_{пред} = \frac{f(\lambda_{вх} \to 0)}{f(\lambda_{вых} = 1)} = 0{,}79.$$

При сверхзвуковом потоке

$$\sigma^*_{пред} = \frac{f(\lambda_{вх} \to \lambda_{пред})}{f(\lambda_{вых} = 1)} = 0.$$

Найдем связь между числами $\lambda_{вх}$ и $\lambda_{вых}$ при входе и выходе из трубы и степенью подогрева (охлаждения) газа в ней:

$$\theta = T^*_{\text{вых}} \,/\, T^*_{\text{вх}}. \tag{3.107}$$

Поскольку в условиях рассматриваемого течения полный импульс потока I постоянен вдоль трубы, то в соответствии с формулой (2.66) имеем

$$a_{\text{кр. вх}}\, z(\lambda_{\text{вх}}) = a_{\text{кр. вых}}\, z(\lambda_{\text{вых}}).$$

Отсюда получаем величину подогрева (охлаждения) газа в трубе

$$\theta = \left[\frac{z(\lambda_{\text{вх}})}{z(\lambda_{\text{вых}})}\right]^2. \tag{3.108}$$

Уравнения (3.106) и (3.108) определяют однозначную связь параметров торможения p^* и T^* с коэффициентами $\lambda_{\text{вх}}$ и $\lambda_{\text{вых}}$ на входе и выходе из трубы при тепловом воздействии.

При возникновении теплового кризиса на выходе из трубы (при $\lambda_{\text{вых}} = 1$) формула (3.108) определяет величину критического подогрева $\theta_{\text{кр}}$ для фиксированного значения числа $\lambda_{\text{вх}}$ при входе в трубу, равного в этом случае $\lambda_{\text{вх. кр}}$:

$$\theta_{\text{кр}} = \left[z\left(\lambda_{\text{вх. кр}}\right)\right]^2. \tag{3.109}$$

Переписав уравнение (3.109) с учетом конкретной зависимости (2.62) для функции z от λ, получим квадратное уравнение

$$\lambda^2_{\text{вх. кр}} - 2\sqrt{\theta_{\text{кр}}}\,\lambda_{\text{вх. кр}} + 1 = 0,$$

решение которого

$$\lambda_{\text{вх. кр}} = \sqrt{\theta_{\text{кр}}} \pm \sqrt{\theta_{\text{кр}} - 1}$$

дает явную зависимость предельно допустимого числа $\lambda_{\text{вх. кр}}$ при входе в трубу (рис. 85) от критического подогрева $\theta_{\text{кр}}$ в условиях теплового кризиса. Протяженность кривой *1* в сторону возрастания значения $\lambda_{\text{вх. кр}}$ ограничивается для каждого конкретного значения γ величиной $\lambda_{\text{пред}} = \sqrt{\dfrac{\gamma + 1}{\gamma - 1}}$.

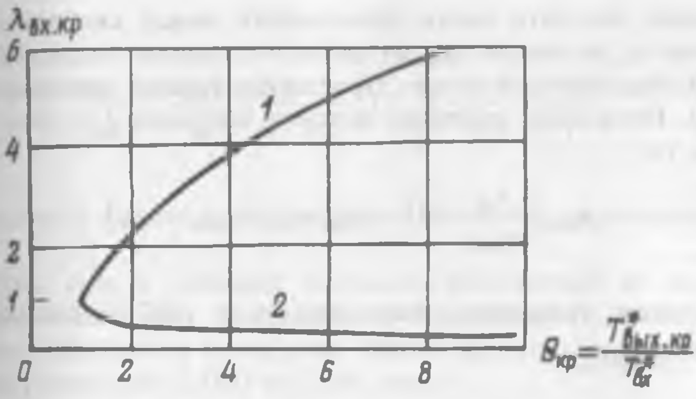


Рис. 85. Зависимость предельно допустимого коэффициента скотости λ при выходе в трубу от степени критического подогрева:
1 — сверхзвуковой поток; *2* — дозвуковой поток

Если после достижения теплового кризиса при условии постоянства температуры торможения $T^*_{вх}$ при входе в трубу продолжать дальнейший нагрев потока, то общий характер течения не изменится. В выходном сечении по-прежнему будет соблюдаться условие $\lambda_{вых} = 1$, но при большем значении величины подогрева $\theta_{кр}$. Из-за повышения температуры торможения $T^*_{вых}$ на выходе из трубы увеличится абсолютное значение критической скорости $a_{кр\ вых}$. В результате, как и ранее, дозвуковой поток будет ускоряться, а сверхзвуковой — тормозиться, но до нового увеличенного значения скорости на выходе из трубы, равной критической.

На рис. 85 видно, что с ростом величины $\theta_{кр}$ величина $\lambda_{вх\ кр}$ уменьшается при дозвуковом потоке и возрастает при сверхзвуковом. И в том и в другом случае полное давление $p^*_{вых}$ на выходе согласно (3.106) должно уменьшаться, если считать, что давление $p^*_{вх}$ при входе остается неизменным. Уменьшается также и массовый расход через трубу, что можно видеть из уравнения (2.59), вследствие изменения коэффициента $\lambda_{вх\ кр}$ и уменьшения функции $q(\lambda, \gamma)$.

Можно получить явную зависимость между скоростями газа при входе $v_{вх}$ и выходе $v_{вых}$ из трубы и степенью подогрева θ (вывод Г.Н.Абрамовича в книге "Прикладная газовая динамика", ч. 1, 1991 г.). Поскольку величина полного импульса $I = Gv + pA = \text{const}$, то

$$p_{вых}\left(\frac{p_{вх}}{p_{вых}} - 1\right) = \rho_{вых} v_{вых}(v_{вых} - v_{вх}).$$

С учетом уравнения состояния $p = \rho RT$ и соотношения $\frac{\gamma p}{\rho} = a^2$ получим

$$\frac{\rho_{вх}}{\rho_{вых}}\frac{T_{вх}}{T_{вых}} - 1 = \gamma M^2_{вых}\left(1 - \frac{\rho_{вых}}{\rho_{вх}}\right).$$

Используя уравнение Бернулли $T = T^* - \frac{v^2}{2c_p}$, отношению температур можно придать вид

$$\frac{T_{вх}}{T_{вых}} = \left[\frac{T^*_{вх}}{T^*_{вых}} - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\left(\frac{\rho_{вых}}{\rho_{вх}}\right)^2 \lambda^2_{вых}\right] : \left[1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\lambda^2_{вых}\right].$$

Число Маха M заменяем по формуле (2.52). В результате получается квадратное уравнение

$$\left(\frac{\rho_{вых}}{\rho_{вх}}\right)^2 \frac{\lambda^2_{вых}}{1 + \lambda^2_{вых}} - \frac{\rho_{вых}}{\rho_{вх}} + \frac{T^*_{вх}}{T^*_{вых}}\frac{1}{1 + \lambda^2_{вых}} = 0.$$

Его решение:

$$\frac{\rho_{вых}}{\rho_{вх}} = \frac{v_{вх}}{v_{вых}} = \frac{1 + \lambda^2_{вых}}{2 \cdot \lambda^2_{вых}}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\lambda^2_{вых}}{\left(1 + \lambda^2_{вых}\right)^2}\frac{1}{\theta}}\right].$$

или

$$\frac{\rho_{вх}}{\rho_{вых}} = \frac{v_{вых}}{v_{вх}} = \frac{1+\lambda_{вх}^2}{2\cdot\lambda_{вх}^2}\left[1 \pm \sqrt{1-\frac{4\lambda_{вх}^2}{\left(1+\lambda_{вх}^2\right)}\theta}\right].$$

Дозвуковой скорости соответствует знак минус, сверхзвуковой — плюс.

Течение газа в условиях теплового воздействия не является энергоизолированным процессом и происходит с изменением энтропии. Показатель политропы такого процесса непостоянен и с учетом уравнений (3.103) и (3.104) равен

$$m = \frac{d\ln p}{d\ln\rho} = \gamma M^2.$$

Качественно протекание процесса в T — s-диаграмме при тепловом воздействии показано на рис. 86. Рассматриваемый случай движения газа характеризуется постоянством следующих параметров: массового расхода G и площади поперечного сечения потока A, т.е. постоянством величины ρv, а также полного импульса $I = Gv + Ap$. Если рассмотреть случай ускорения потока (см. рис. 86, *а*), то при дозвуковом потоке на входе (особенно при очень малых М) значение $m \to 0$ и процесс близок к изобарному. Ускорение потока вызывает рост показателя политропы m, который становится равным единице при значении $M = 1/\sqrt{\gamma}$, что соответствут изотермическому процессу вблизи этой точки диаграммы. В момент достижения потоком критической скорости показатель политропы становится равным $m = \gamma$, а процесс происходит адиабатически. При дальнейшем ускорении потока необходимо заменить подвод теплоты ее отводом, что соответствует протеканию процесса с уменьшением энтропии s потока. Ускорение потока до больших значений М приближает процесс к изохорическому с $m \to \infty$.

На рис. 86, *б* изображен процесс торможения потока при тепловом воздействии. Кривые, характеризующие протекание этих процессов, называются линиями Релея.

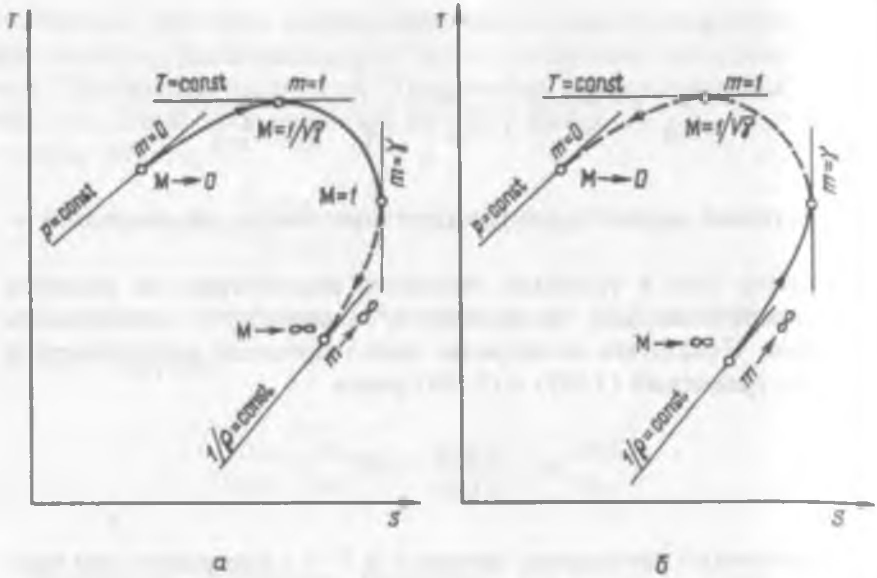


Рис. 86. Процесс в $T - s$-диаграмме при течении газа в трубе постоянного поперечного сечения при тепловом воздействии на поток при условии G = const, I = const:

а – ускорение газа в тепловом сопле; *б* – торможение газа в тепловом диффузоре; сплошные линии – подвод теплоты; пунктирные линии – отвод теплоты

Контрольные вопросы к §23

1. В чем заключается "тепловой кризис течения" при нагреве потока? Почему это явление не реализуется при течении газа с охлаждением?

2. Как изменяются параметры потока при течении в тепловом сопле (диффузоре)?

3. Как изменяется полное давление вдоль потока при его подогреве в случае дозвуковой (сверхзвуковой) скорости течения?

4. Как изменяется полное давление вдоль потока при его охлаждении в случае дозвуковой (сверхзвуковой) скорости течения?

5. Как рассчитать величину критического подогрева и перепад полного давления в потоке, если известны параметры при входе в трубу?

6. За счет подогрева поток при выходе из трубы достиг критической скорости. Как изменится массовый расход, если подогрев будет продолжен?

§24. РАСХОДНОЕ И МЕХАНИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Основные особенности расходного воздействия на поток можно рассмотреть, анализируя квазиодномерное стационарное течение невязкого газа в канале постоянного поперечного сечения A при отсутствии других физических воздействий на поток. В этом случае размерная система уравнений, описывающая движение газа как частный случай системы уравнений (3.51), (3.58), (3.67), (3.71), имеет вид

$$\begin{cases} \rho v A = G(x), & (3.110) \\ v\,\mathrm{d}v = -\dfrac{\mathrm{d}p}{\rho} - v^2(1-y)\dfrac{\mathrm{d}G_{\text{м}}}{G(x)}, & (3.111) \\ \mathrm{d}h^* = -D\dfrac{\mathrm{d}G_{\text{м}}}{G(x)}, & (3.112) \\ \rho = p/(RT). & (3.113) \end{cases}$$

Вдоль канала массовый расход $G\ (x)$ в общем случае является функцией координаты x, поскольку функциональная зависимость подвода или отвода массы $G_{\text{м}}(x)$ может быть произвольна. Также произвольными могут быть и параметры вдуваемого газа, в то время как термодинамические параметры отсасываемого газа совпадают с параметрами основного потока в каждом его поперечном сечении. Ранее, преобразуя формулу (3.71), мы ограничились случаем, когда молекулярные массы $\mu_{\text{мол}}$ основного потока и потока через проницаемую стенку одинаковы, считая, что $R = \text{const}$. Систему уравнений (3.110) — (3.113) можно преобразовать к безразмерной форме записи через относительные приращения входящих в нее параметров. В результате получается система уравнений, которая является частным случаем системы уравнений (3.52), (3.59), (3.70), (3.72), если все виды воздействий в них, кроме расходного $\mathrm{d}G_{\text{м}}\ /\ G_{\text{м}}$, положить равными нулю. После этого можно выразить в явном виде зависимость отдельных приращений переменных v, p, ρ, T от величины расходного воздействия:

19*

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{M^2-1}\left[1+\gamma M^2(1-y)-\frac{\gamma-1}{a^2}D\right]\frac{dG_м}{G}, \qquad (3.114)$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{\gamma M^2}{M^2-1}\left\{1+\left[1+(\gamma-1)M^2\right](1-y)-\frac{\gamma-1}{a^2}D\right\}\frac{dG_м}{G}, \qquad (3.115)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{M^2-1}\left[M^2+\gamma M^2(1-y)-\frac{1}{\gamma a^2}D\right]\frac{dG_м}{G}, \qquad (3.116)$$

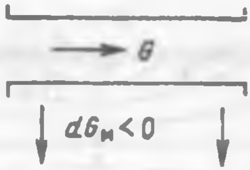
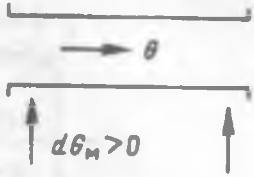
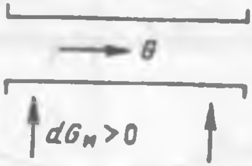
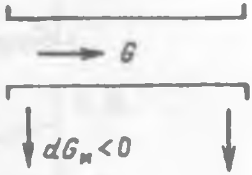
$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma-1}{M^2-1}\left[M^2+\gamma M^4(1-y)+\frac{\gamma M^2+1}{a^2}D\right]\frac{dG_м}{G}. \qquad (3.117)$$

Как можно видеть, расходное воздействие характеризуется тремя параметрами: D по (3.69), $y = \pm\frac{v_{м,x}}{v}$ и расходом через проницаемую стенку $dG_м = \rho_м v_{м,n} dS_x = dG$ (см. рис. 73). Далее рассмотрим один из частных случаев расходного воздействия, когда выполняются условия $y = +1$; $D = 0$. Первое условие означает, что x-я составляющая скорости потока через стенку равна скорости основного потока. Равенство нулю параметра D по (3.69) может трактоваться как совпадение параметров обоих потоков в каждом промежуточном сечении; при этом из (3.112) следует, что энтальпия торможения h^* будет постоянна вдоль оси канала.

В табл. 3.4 на основе анализа уравнения (3.114) приведены возможные виды течения для этих условий воздействия. Вдув газа ускоряет дозвуковой поток и тормозит сверхзвуковой, т.е. всегда приближает скорость потока к критической. Отсос тормозит дозвуковой поток и ускоряет сверхзвуковой, т.е. всегда удаляет скорость потока от критической.

Таблица 3.4

Расходное воздействие на поток ($y = +1$, $D = 0$)

Режим течения	Тип потока	
	дозвуковой, $M < 1$	сверхзвуковой, $M > 1$
Торможение потока, $dv < 0$		
Ускорение потока, $dv > 0$		

Очевидно, что для ускорения дозвукового потока необходимо сначала вдувать газ, а при достижении потоком критической скорости сменить знак воздействия и, отсасывая газ, получить сверхзвуковой режим течения. Такое устройство (рис. 87) называется расходным соплом, и для рассматриваемых условий течения ($y = +1$, $D = 0$) его можно представить как совокупность концентрических сопел Лаваля, образованных поверхностями тока.

В расходном сопле критическое сечение является границей между участками подвода и отвода массы газа. Параметры заторможенного потока в нем сохраняют постоянное значение, так как течение изоэнтропийно из-за отсутствия сил трения и потерь от смешения потоков при вдуве. Статические параметры вдоль сопла согласно уравнениям (3.115) — (3.117) уменьшаются как в обычном сопле Лаваля.

Для торможения сверхзвукового потока необходимо сначала иметь участок со вдувом в сверхзвуковой поток, а затем участок с отсосом из дозвукового потока и с расположением критического сечения между ними. Такое устройство может быть названо расходным диффузором. Как видно, направления течения потока через проницаемую стенку для расходного сопла и расходного диффузора одинаковы (сначала вдув, потом отсос). Распределения параметров вдоль оси расходного диффузора аналогичны таковым в обычном геометрическом диффузоре.

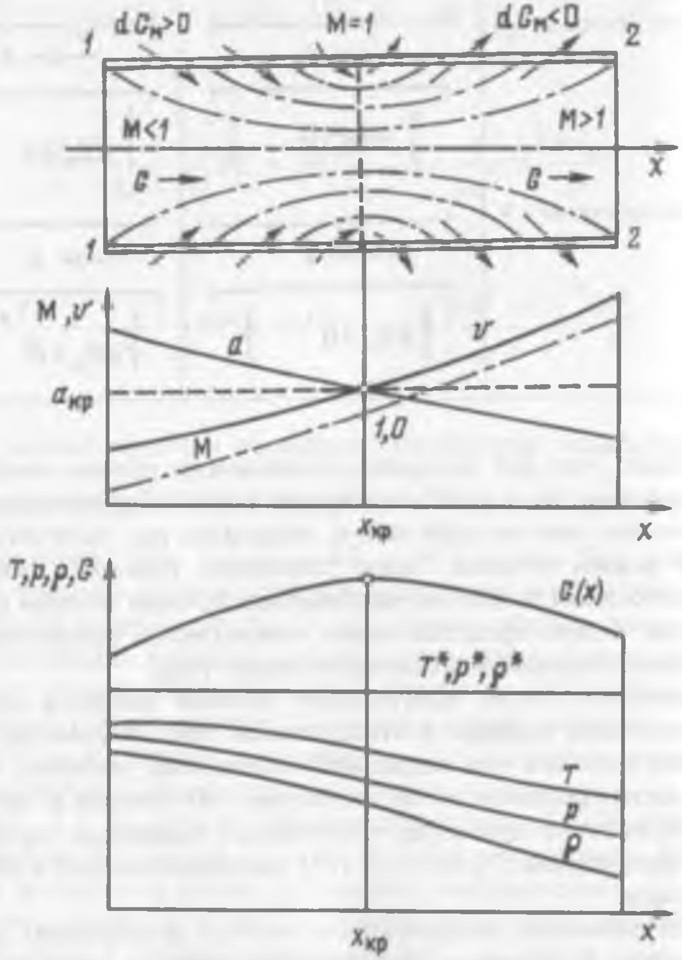


Рис. 87. Схема расходного сопла и закономерность изменения параметров газа по его длине

Определим величину необходимого расхода $\Delta G_м = \Delta G_{кр}$, подаваемого в дозвуковой или сверхзвуковой поток и обеспечивающего при заданных условиях на входе в канал в сечении *1 — 1* (см. рис. 87) возникновение критической скорости в сечении между участками вдува и отсоса. Согласно уравнению (2.59), имеем (для условий $y = +1$, $D = 0$)

$$G_{кр} = \beta(\gamma)\frac{P_1^* A}{\sqrt{RT_1^*}} q(\lambda = 1, \gamma) = G_1 + \Delta G_{кр}.$$

Кроме того,

$$\frac{q(\lambda_1 \gamma)}{G_1} = \frac{q(\lambda = 1, \gamma)}{G_{кр}}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\Delta G_{кр}}{G_1} = \frac{1}{q(\lambda_1 \gamma)}.$$

Эта зависимость показана на рис. 88. Можно видеть, что при $\lambda_1 \approx 0{,}5$ необходимо иметь вдув, равный примерно половине основного расхода при входе в канал.

Рассмотрим изменения в характере течения на участке вдува при отклонении от условия $\Delta G_М = \Delta G_{кр}$. Если $\Delta G_М < \Delta G_{кр}$, то дозвуковой поток на входном участке вдува расходного сопла будет ускоряться, оставаясь дозвуковым, а сверхзвуковой поток в расходном диффузоре на участке вдува будет тормозиться, оставаясь сверхзвуковым. При условии $\Delta G_М < \Delta G_{кр}$ потоки не смогут достигнуть критической скорости.

Если $\Delta G_М > \Delta G_{кр}$, то дозвуковой поток в расходном сопле достигнет критической скорости в месте расположения прежнего критического сечения (на границе раздела участков вдува и отсоса), однако массовый расход G_1 при входе в канал уменьшится. Если условие $\Delta G_М > \Delta G_{кр}$ выполняется на сверхзвуковом участке вдува расходного диффузора, то это приведет к возникновению скачка уплотнения в сечении перед границей раздела участков вдува и отсоса. Непосредственно за скачком, на оставшемся участке вдува поток, ставший за скачком дозвуковым, будет ускоряться.

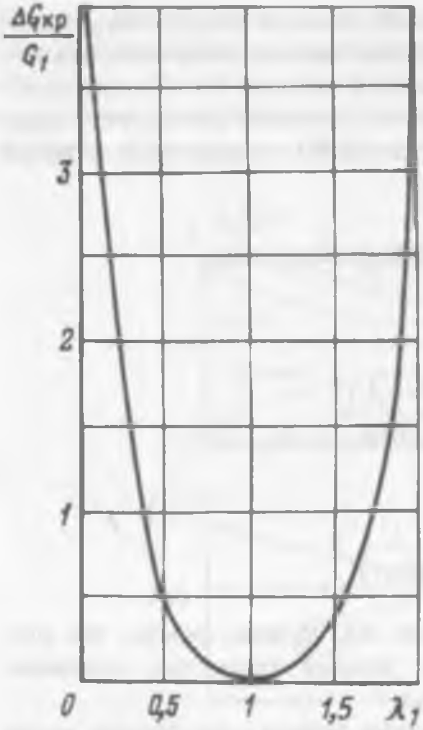


Рис. 88. Зависимость относительной величины местного массообменного расхода, вызывающего критическую скорость в расходном сопле, от коэффициента λ_1 при входе в трубу

Показатель политропы процесса с расходным воздействием в рассматриваемых условиях течения ($y = +1$, $D = 0$) равен $m = \gamma$, что следует из (3.115) и (3.116).

Рассматривая механическое воздействие на поток с использованием турбомашин, следует иметь в виду, что назначение турбины — это получение механической работы на ее валу, а назначение компрессора — повышение давления газа. Поэтому проводимое рассмотрение процессов ускорения и торможения газа посредством подвода и отвода от него механической работы представляет собой лишь распространение принципа обращения воздействия на случай механического воздействия на поток. Это рассмотрение не дает анализа всех процессов, происходящих в турбомашинах. Реальный поток, движущийся через лопаточные решетки турбомашин, формирует в них сложную пространственную структуру течения, причем в сверхзвуковом потоке возникают скачки уплотнения. Реальное течение сопровождается потерями, что делает процесс неизоэнтропийным.

Используем для теоретического анализа механического воздействия модель стационарного квазиодномерного течения невязкого газа в условном канале (струйка потока) постоянного поперечного сечения при отсутствии других физических воздействий на поток. В этих условиях размерная система уравнений, описывающая течение газа как частный случай системы уравнений (3.51), (3.58), (3.67) и (3.71), имеет вид

$$\begin{cases} \rho v A = G; & (3.118) \\ v\,\mathrm{d}v = -\dfrac{\mathrm{d}p}{\rho} + \mathrm{d}L_{m\ \text{мех}}; & (3.119) \\ \mathrm{d}h^* = \mathrm{d}L_{m\ \text{мех}}; & (3.120) \\ \rho = p/(RT). & (3.121) \end{cases}$$

Эту систему уравнений можно преобразовать к безразмерной форме записи через относительные приращения входящих в нее параметров. В результате получится система уравнений, которая является частным случаем системы уравнений (3.52), (3.59), (3.70) и (3.72), если все виды воздействий в них, кроме величины удельной элементарной механической работы $\mathrm{d}L_{m\ \text{мех}}$, положить равными нулю. После этого можно выразить в явном виде зависимость отдельных приращений переменных v, p, ρ, T от величины механического воздействия:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v}{v} = \dfrac{1}{a^2\left(\mathrm{M}^2 - 1\right)}\mathrm{d}L_{m\ \text{мех}}; & (3.122) \\ \dfrac{\mathrm{d}p}{p} = -\dfrac{\gamma}{a^2\left(\mathrm{M}^2 - 1\right)}\mathrm{d}L_{m\ \text{мех}}; & (3.123) \\ \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\rho} = -\dfrac{1}{a^2\left(\mathrm{M}^2 - 1\right)}\mathrm{d}L_{m\ \text{мех}}; & (3.124) \\ \dfrac{\mathrm{d}T}{T} = -\dfrac{\gamma - 1}{a^2\left(\mathrm{M}^2 - 1\right)}\mathrm{d}L_{m\ \text{мех}}. & (3.125) \end{cases}$$

В табл. 3.5 на основе анализа уравнения (3.122) изображены возможные теоретические случаи течения с использованием механического воздействия на поток. Очевидно, что для ускорения дозвукового потока необходимо сначала отводить от потока работу при помощи турбины, а при достижении потоком критической скорости — сменить знак воздействия и, подведя работу при помощи компрессора, получить сверхзвуковое течение. Такое устройство получило название механического сопла (рис. 89).

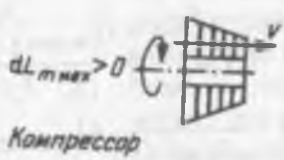
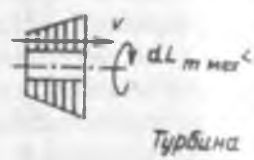
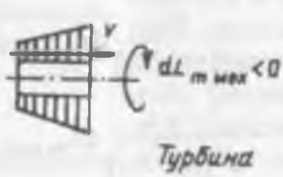
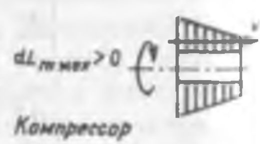
Такое же устройство (турбина — компрессор с критической скоростью потока между ними) теоретически является механическим сверхзвуковым диффузором, если поток при входе в турбину сверхзвуковой.

Показатель политропы процесса в рассматриваемых условиях течения постоянен и равен $m = \gamma$, что следует из (3.123) и (3.124).

В механическом сопле, как можно видеть из анализа уравнений (3.122) — (3.125), статические параметры и местная скорость звука вдоль потока уменьшаются, в то время как в механическом диффузоре они возрастают.

Таблица 3.5

Механическое воздействие на поток

Режим течения	Тип потока	
	дозвуковой, M < 1	сверхзвуковой, M > 1
Торможение потока, $dV < 0$		
Ускорение потока, $dV > 0$		

Закономерность изменения параметров торможения определяется уравнением (3.120)

$$d\left(c_p T^*\right) = dL_{m\ мех}$$

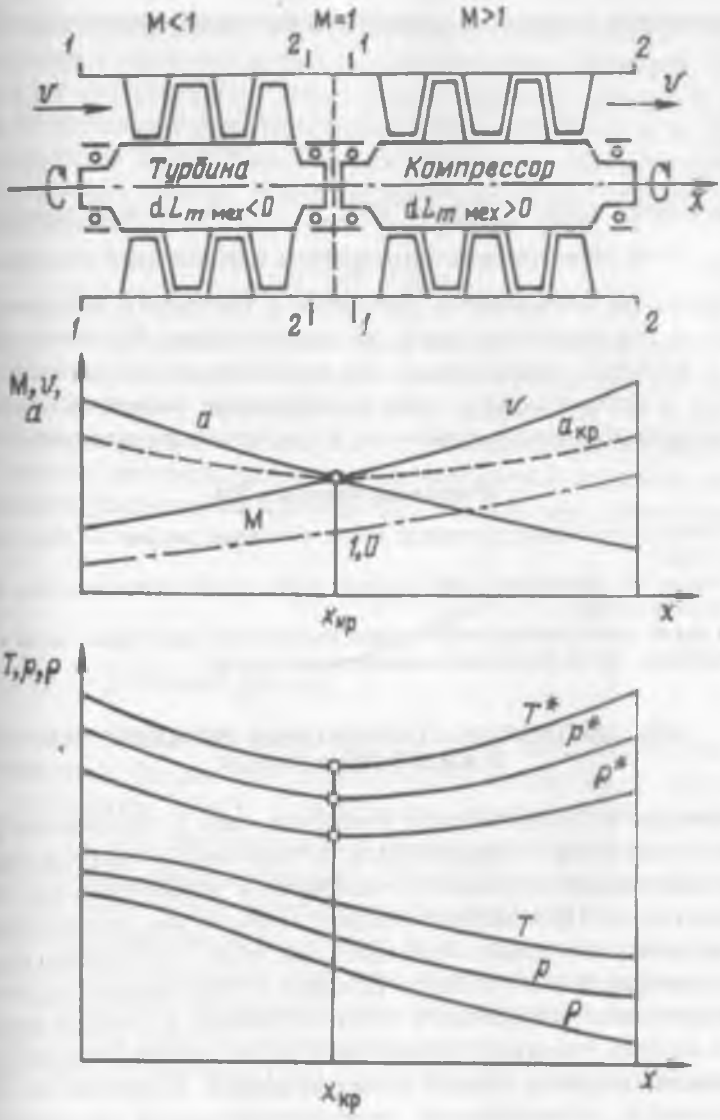


Рис. 89. Схема механического сопла и закономерность изменения параметров газа по его длине

и уравнениями изменения параметров в рассматриваемом процессе

$$p_2^* = p_1^*\left(\frac{T_2^*}{T_1^*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \rho_2^* = \rho_1^*\left(\frac{T_2^*}{T_1^*}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Поскольку для турбины $\mathrm{d}L_{m\,\text{мех}} < 0$, а для компрессора $\mathrm{d}L_{m\,\text{мех}} > 0$, то в турбине температура торможения понижается, а в компрессоре повышается. Давление и плотность заторможенного потока подчиняются такой же зависимости. Критическая скорость в турбине уменьшается, а в компрессоре возрастает. Таким образом, в механических сопле и диффузоре значения параметров торможения достигают минимума в критическом сечении.

Контрольные вопросы к §24

1. Можно ли ускорить дозвуковой поток, отсасывая (вдувая) газ через пористые стенки трубы?
2. Можно ли затормозить сверхзвуковой поток, вдувая (отсасывая) газ через пористые стенки трубы?
3. В какой последовательности следует расположить проточные части компрессора и турбины, чтобы реализовать механическое сопло?

§25. ОДНОМЕРНОЕ СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ГАЗА И ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ

Рассмотрим стационарное движение газа с осредненной скоростью v по каналу с переменным поперечным сечением под действием сил трения в условиях теплового и механического воздействий на поток. Проанализируем это течение как термодинамический процесс, который совершает система, состоящая из жидкости, движущейся по каналу. Проведем координатную ось x через центры масс поперечных сечений канала и, используя одномерную модель течения, отождествим ее со средней линией тока.

Согласно первому началу термодинамики, в результате подвода теплоты к произвольной термодинамической системе (телу) температура тела повышается, и вследствие увеличения его объема производится внешняя термодинамическая работа. Как уже отмечалось в §18, в технической термодинамике в соответствии с данной формулировкой положительные знаки имеют теплота, подведенная к системе, и работа, совершаемая системой, т.е. отводимая от системы, в то время как в механике жидкости и газа работа, отводимая от системы, имеет отрицательный знак. Далее в этом параграфе будем пользоваться правилом знаков технической термодинамики. Тогда, согласно формулировке первого начала термодинамики,

$$\mathrm{d}q = \mathrm{d}\varepsilon + \mathrm{d}L_c, \tag{3.126}$$

где $\mathrm{d}q$ — элементарная теплота всех видов, которой система обменивается с окружающей средой в рассматриваемом термодинамическом процессе, включая теплоту трения; $\mathrm{d}\varepsilon$ — изменение внутренней энергии системы; $\mathrm{d}L_c$ — элементарная термодинамическая работа системы, которая в данном случае является работой деформации (растяжения или сжатия) объема газа, движущегося в канале:

$$\mathrm{d}L_c = p\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right), \tag{3.127}$$

где $\dfrac{1}{\rho} = v_{уд}$ — удельный объем.

Уравнение (3.126) записано для единицы газа. Ранее (см. §18) энергетический баланс для одномерного потока был получен в форме уравнения (3.41). Сопоставим между собой уравнения (3.41) и (3.126) как две возможные формы записи закона сохранения энергии для анализируемых условий течения. Установим на этой основе связь между термодинамической работой системы $\mathrm{d}L_c$ (совершаемой движущимся потоком газа) и различными факторами, противодействующими или способствующими этому движению. С этой целью проанализируем физический смысл членов в уравнении (3.41), опустив знаки осреднения.

Левая часть уравнения (3.41) представляет собой умноженную на ρ субстационарную производную от суммы $\left(\varepsilon + \dfrac{v^2}{2}\right)$ внутренней и кинетической энергии. В правой части уравнения (3.41) в первом члене производная после преобразования (с учетом, что

$vA = \frac{G}{\rho}$) может быть записана в виде $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(p v_{\text{уд}}\right)$. Она описывает работу по перемещению объема под действием сил давления. Второй член в правой части описывает работу массовых сил и в данном случае отождествляется с механической работой $L_{m\,\text{мех}}$ и работой сил трения $L_{m\,\text{тр}}$. Третий, четвертый и пятый члены описывают подвод (отвод) теплоты. В уравнении (3.126) теплота, подведенная (отведенная) ко всем рассматриваемым источникам, обозначена через q. (Отметим, что теплота трения $q_{\text{тр}} = L_{m\,\text{тр}}$ пока не выделена, а включена в q.) Последний член в уравнении (3.41) описывает изменение массы газа через проницаемые стенки канала и в рассматриваемом случае равен нулю.

В результате уравнение (3.41) после сокращения на $G = \rho v A$ и перехода к дифференциалам примет вид

$$d\varepsilon + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + g dz = -d\left(\frac{p}{\rho}\right) - dL_{m\,\text{тр}} - dL_{m\,\text{мех}} + dq. \quad (3.128)$$

Здесь в левую часть равенства для полноты анализа добавлено изменение потенциальной энергии жидкости $g dz$, которой до этого пренебрегали (z — координата по вертикали). В результате левая часть (3.128) представляет собой изменение суммы внутренней, кинетической и потенциальной энергии единицы массы жидкости. Перед величинами $dL_{m\,\text{тр}}$ и $dL_{m\,\text{мех}}$ стоит знак минус, так как использовано правило знаков технической термодинамики, это соответствует подводу работы к системе.

Сопоставив (3.126) и (3.128) как две возможные формы записи энергетического баланса системы, получим

$$p d\left(\frac{1}{\rho}\right) = d\left(\frac{v^2}{2}\right) + g dz + d\left(\frac{p}{\rho}\right) + dL_{m\,\text{тр}} + dL_{m\,\text{мех}}. \quad (3.129)$$

Таким образом, термодинамическая работа системы $p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$ в качестве работы потока газа затрачивается на изменение кинетической энергии потока $\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)$, на изменение его потенциальной энергии $g\mathrm{d}z$, на совершение работы $\mathrm{d}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \mathrm{d}(pv_{\text{уд}})$ по перемещению единицы объема газа под действием сил давления (эта составляющая иногда носит в технической термодинамике название работы проталкивания газа через систему); на преодоление сил трения $\mathrm{d}L_{m\,\text{тр}}$ и на совершение механической работы $\mathrm{d}L_{m\,\text{мех}}$. Часто выражение (3.129) просто постулируется, исходя из энергетического баланса в движущемся стационарном потоке газа.

С учетом преобразования

$$\mathrm{d}\left(\frac{p}{\rho}\right) = p\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\mathrm{d}p \tag{3.130}$$

уравнению энергии (3.129) можно придать вид энергетического баланса только механических составляющих, и тогда его можно будет рассматривать как обобщенное уравнение Бернулли в дифференциалах для газа при его стационарном движении вдоль струйки тока (в расчете на единицу массы):

$$\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right) + g\,\mathrm{d}z = -\frac{\mathrm{d}p}{\rho} - \mathrm{d}L_{m\,\text{тр}} - \mathrm{d}L_{m\,\text{мех}}. \tag{3.131}$$

Отметим, что здесь в отличие от (3.58) перед величиной $\mathrm{d}L_{m\,\text{мех}}$ стоит знак минус, так как использовано правило знаков технической термодинамики.

Если рассмотреть процесс между двумя какими-либо состояниями потока в канале, то после интегрирования (3.131) получим

$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}p}{\rho} + \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right) + g(z_2 - z_1) = -L_{m\,\text{тр}}\Big|_1^2 - L_{m\,\text{мех}}\Big|_1^2. \tag{3.132}$$

Интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dp}{\rho}$ имеет различное значение для случаев движения жидкости, когда $\rho = \text{const}$, и для случая движения газа, когда его параметры связаны уравнениями состояния $\rho = p/(RT)$ и процесса $p = \rho^m \text{ const}$. Непосредственное интегрирование даст в случае жидкости

$$\int\limits_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{p_2 - p_1}{\rho}$$

и в случае газа

$$\int\limits_1^2 \frac{dp}{\rho} = \frac{m}{m-1} R(T_2 - T_1). \tag{3.133}$$

В результате обобщенное уравнение Бернулли для жидкости при стационарном движении вдоль струйки тока имеет вид

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + L_{m\,\text{тр}}\Big|_1^2 + L_{m\,\text{мех}}\Big|_1^2. \tag{3.134}$$

Такое же уравнение Бернулли для газа имеет вид

$$\frac{m}{m-1}\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 = \frac{m}{m-1}\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + L_{m\,\text{тр}}\Big|_1^2 + L_{m\,\text{мех}}\Big|_1^2. \tag{3.135}$$

Получим форму записи обобщенного уравнения Бернулли для газа с использованием величин, явно отражающих тепловое воздействие на поток. Представим для этого теплоту dq, которой система обменивается с окружающей средой, в виде суммы теплоты от внешнего теплообмена и теплоты, подведенной к системе за счет работы сил трения:

$$dq = dq_{\text{внеш}} + dq_{\text{тр}}. \tag{3.136}$$

Учитывая выражение (3.28) и то, что $dq_{тр} = dL_{m\ тр}$, из (3.128) получаем обобщенное уравнение Бернулли для газа при его стационарном движении вдоль струйки тока в искомом виде

$$dh + d\left(\frac{v^2}{2}\right) + g dz = dq_{внеш} - dL_{m\,мех}. \qquad (3.137)$$

Если рассмотреть процесс между двумя конечными состояниями потока в канале, то

$$(h_2 - h_1) + \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right) + g(z_2 - z_1) = q_{внеш}\Big|_1^2 - L_{m\,мех}\Big|_1^2. \qquad (3.138)$$

В частном случае стационарного адиабатического течения газа $\left(q_{внеш}\Big|_1^2 = 0\right)$ вдоль струйки тока без обмена механической работой $\left(L_{m\,мех}\Big|_1^2 = 0\right)$ и при условии малости величины $g(z_2 - z_1)$ из (3.138) получаем

$$h + \frac{v^2}{2} = h^* = \text{const} \qquad (3.139)$$

или

$$T + \frac{v^2}{2c_p} = T^* = \text{const}. \qquad (3.140)$$

Отметим, что в силу условия $dq_{тр} = dL_{m\ тр}$ уравнения энергетического баланса (3.137) — (3.140) оказываются верными в процессе течения как при наличии сил трения, так и при их отсутствии. Трение не изменяет величину начальной полной энергии потока, но взаимопревращение отдельных составляющих полной энергии потока осуществляется по-разному для течения с трением и без трения.

Рассмотрим это на примерах стационарного течения газа с ускорением (в сопле) в одном случае без трения и теплообмена, а в другом случае с трением, но тоже без теплообмена. Изображение этих процессов в T — s-диаграмме (рис. 90) дается линиями $1 - 2_{из}$ и $1 - 2$ соответственно. Оба процесса имеют одинаковые начальные параметры заторможенного потока p_1^* и T_1^* и заканчиваются при одинаковом статическом давлении p_2. Они описываются одним и тем же уравнением (3.140). В обоих процессах температура торможения остается постоянной, поэтому в конечных их точках $T_2^* = T_{2из}^*$, однако конечные статические температуры $T_{2из}$ и T_2 в обоих процессах будут разными. Из-за работы сил трения, перешедшей в теплоту, которая затем подогревает газ, статическая температура T_2 в процессе с трением будет больше температуры $T_{2из}$ в изоэнтропийном процессе. При одинаковом значении температур торможения T^* и $T_{из}^*$ это приведет к различным конечным скоростям v_2 и $v_{2из}$.

Потеря кинетической энергии потока $\Delta E_{тр}$ в результате действия сил трения может быть определена по уравнению (3.140), примененному для процесса с трением и без него:

$$\frac{\Delta E_{тр}}{c_p} = \frac{v_{2из}^2}{2c_p} - \frac{v_2^2}{2c_p} = T_2 - T_{2из}.$$

Отсюда следует, что конечная скорость v_2 при течении с трением меньше, чем конечная скорость $v_{2из}$ при течении без трения. В T — s-диаграмме потеря кинетической энергии $\Delta E_{тр}$ представляет собой площадку под изобарой $2 - 2_{из}$. Действительно, из уравнений (3.126), (3.127), соотношений $h = \varepsilon + \frac{p}{\rho}$ и $dq = Tds$ следует, что

$$T\,ds = dh - \frac{dp}{\rho}.$$

Тогда для изобарного процесса $2 - 2_{из}$ при $dp = 0$ имеем

$$\int_{2из}^{2} T ds = h_2 - h_{2из} = \Delta E_{тр}.$$

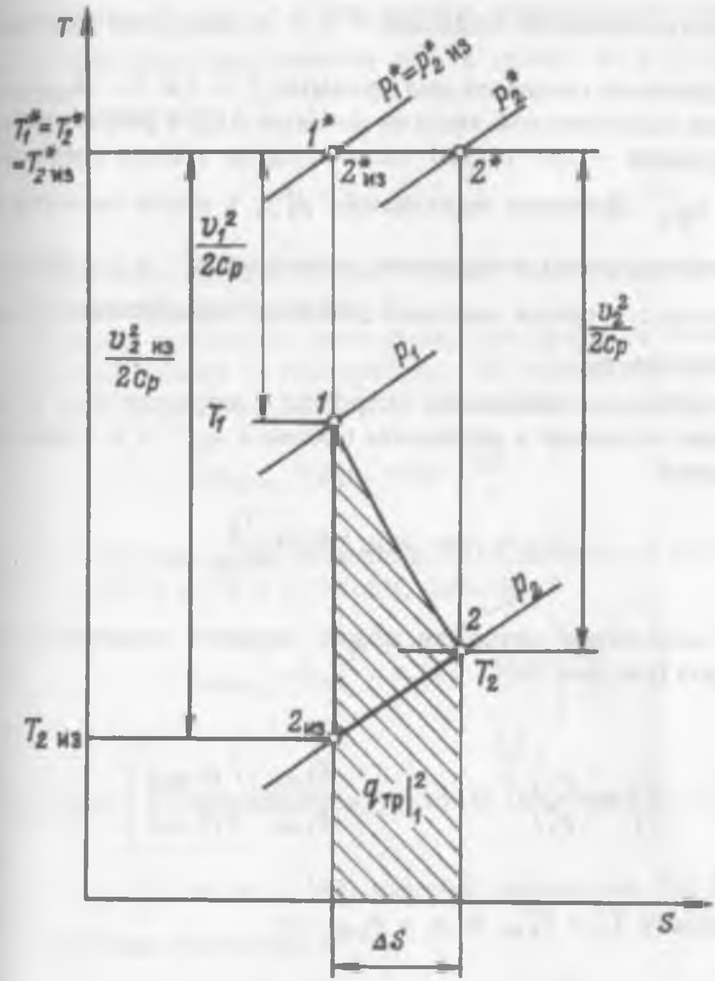


Рис. 90. Процесс в $T - s$-диаграмме при изоэнтропийном и политропном течении газа при ускорении потока в сопле

Выделившаяся теплота трения

$$q_{тр}\Big|_1^2 = \int_1^2 T\mathrm{d}s$$

равна заштрихованной площадке в T — s-диаграмме под кривой $1 - 2$.

Из сравнения площадок под кривыми $1 - 2$ и $2 - 2_{из}$ следует, что потеря кинетической энергии потоком $\Delta E_{тр}$ в результате работы сил трения — это только часть теплоты трения (работы сил трения) $q_{тр}\Big|_1^2$. Давление торможения $p^*_{2\,из}$ в конце изоэнтропийного процесса равно начальному значению p^*_1, в то время как при течении с трением конечное давление торможения p^*_2 меньше начального p^*_1.

Действительно, изменение энтропии в процессе $1 - 2$ равно изменению энтропии в изобарном процессе $2_{из} - 2$ и определяется формулой

$$s_2 - s_1 = s_2 - s_{2\,из} = c_p \ln \frac{T_2}{T_{2\,из}}.$$

При постоянной энтропии можно записать следующую связь параметров (см. рис. 90):

$$\frac{T_2}{T^*_2} = \left(\frac{p_2}{p^*_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \qquad \frac{T_{2\,из}}{T^*_{2\,из}} = \left(\frac{p_{2\,из}}{p^*_{2\,из}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Поскольку $T^*_2 = T^*_{2\,из}$ и $p_2 = p_{2\,из}$, то

$$s_2 - s_1 = c_p \ln \left(\frac{p^*_{2\,из}}{p^*_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}},$$

где $p^*_{2\,из} = p^*_1$.

Разность $s_2 - s_1 > 0$, следовательно $p^*_2 < p^*_1$.

Если через $\sigma^* = p_2^* \ / \ p_1^*$ обозначить коэффициент сохранения полного давления при течении газа в сопле, то с учетом, что $c_p = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$, получим

$$s_2 - s_1 = R \ln \frac{1}{\sigma^*}.$$

Аналогичные процессы при течении газа с торможением (в диффузоре) изображены на рис. 91.

Определим показатель политропы для процесса течения газа при наличии трения и теплообмена. Из выражения (3.126), используя (3.127), (3.130), (3.136) и (3.28), получаем

$$\mathrm{d}q_{\text{внеш}} + \mathrm{d}q_{\text{тр}} = \mathrm{d}h - \frac{\mathrm{d}p}{\rho}. \qquad (3.141)$$

После интегрирования уравнения (3.141) от точки *1* до точки *2*, с учетом, что $\mathrm{d}h = c_p \mathrm{d}T$ и $c_p = \mathrm{const}$, найдем

$$q_{\text{внеш}}\Big|_1^2 + q_{\text{тр}}\Big|_1^2 = c_p(T_2 - T_1) - \int_1^2 \frac{\mathrm{d}p}{\rho}, \qquad (3.142)$$

где интеграл $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}p}{\rho}$ определяется по (3.133). Поскольку $c_p = \gamma R \ / \ (\gamma - 1)$ и $q_{\text{тр}}\Big|_1^2 = L_{m\,\text{тр}}\Big|_1^2$, то из (3.142) находим выражение для определения показателя политропы m:

$$\frac{m}{m-1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} - \frac{q_{\text{внеш}}\Big|_1^2 + L_{m\,\text{тр}}\Big|_1^2}{R(T_2 - T_1)}. \qquad (3.143)$$

Отметим, что полученный показатель политропы m позволяет рассчитывать связь параметров газа только между начальным *1* и конечным *2* состояниями и не связывает между собой параметры в промежуточных состояниях процесса.

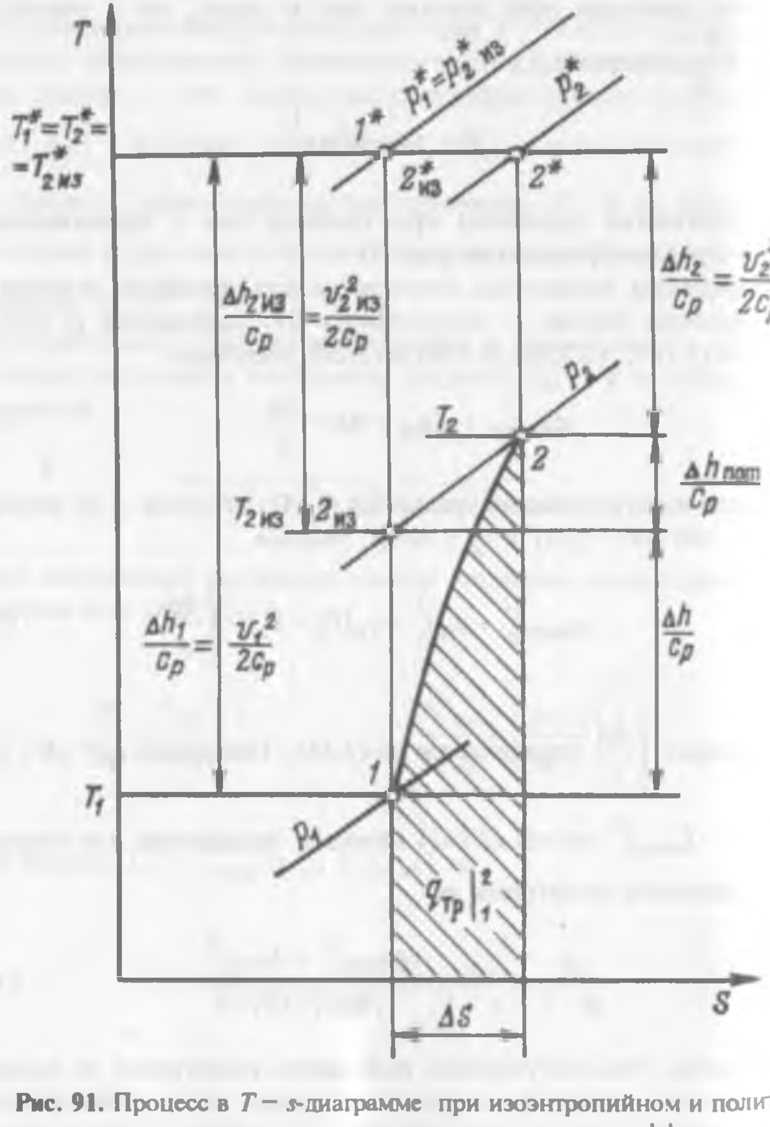


Рис. 91. Процесс в $T-s$-диаграмме при изоэнтропийном и политропном течении газа при торможении потока в диффузоре

Уравнения (3.138) и (3.134) позволяют определить мощность турбомашины P, например компрессора и насоса. С этой целью обычно используют формулу

$$P_{к,н} = GL_{m\,мех}^{из} \frac{1}{\eta_{к,н}},$$

где $L_{m\,мех}^{из}$ — затраченная механическая работа для сжатия 1 кг газа в изоэнтропийном процессе, т.е. без трения и теплообмена.

Учет этих факторов осуществляется при помощи КПД компрессора или насоса $\eta_{к,\,н} < 1$.

При сжатии газа в компрессоре из (3.138) для условий $q_{внеш}\Big|_1^2 = 0$ и $z_2 \approx z_1$ получаем

$$L_{m\,мех}^{из} = h_2^* - h_1^* = \frac{\gamma}{\gamma - 1} R(T_2^* - T_1^*) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} RT_1^* \left[\left(\frac{p_2^*}{p_1^*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1\right].$$

В случае подачи жидкости насосом из (3.134) при условии $L_{m\,тр}\Big|_1^2 = 0$ получаем

$$L_{m\,мех}^{из} = \frac{p_2 - p_1}{\rho} + g(z_2 - z_1) + \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}\right).$$

Рассмотрим графическую интерпретацию уравнения Бернулли для жидкости при ее течении по трубопроводу, когда отсутствует подвод механической энергии ($L_{m\,мех} = 0$). Разделив все величины в уравнении (3.134) на g, получим уравнение Бернулли, выраженное через напоры:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + z_{тр}\Big|_1^2. \tag{3.144}$$

В этом уравнении величины $p/(\rho g)$, $v^2/(2g)$ и z представляют собой соответственно пьезометрический, скоростной и геометрический напоры, величина $z_{тр}\Big|_1^2 = \frac{1}{g} L_{m\,тр}\Big|_1^2$ является потерей напора на преодоление сил трения на участке канала между сечениями *1 — 1* и *2 — 2* (см. рис. 92).

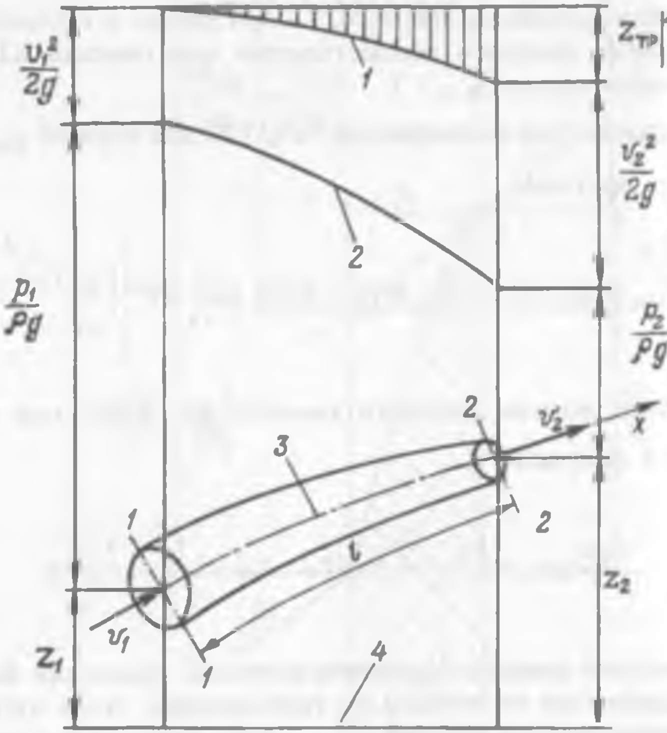


Рис. 92. Графическое изображение уравнения Бернулли при движении жидкости в трубе:

1 — линия напоров; *2* — пьезометрическая линия; *3* — линия геометрических напоров (потенциальной энергии положения); *4* — нивелирная линия ($h = 0$)

В случае существенного изменения скорости v по поперечному сечению канала A учитывают неравномерность распределения кинетической энергии в поперечном сечении посредством осредненного скоростного напора в виде $\alpha \frac{v_{\text{ср}}^2}{2g}$, где поправочный коэффициент α (коэффициент кинетической энергии) получается путем осреднения кинетической энергии по расходу

$$\alpha = \frac{1}{A}\int\limits_A \left(\frac{v}{v_{\text{ср}}}\right)^3 \mathrm{d}A.$$

Потеря напора на преодоление сил трения

$$z_{\text{тр}}\Big|_1^2 = \xi_{\text{тр}} \frac{l}{D_{\text{г}}} \frac{v^2}{2g} \qquad (3.145)$$

определяется формулой Дарси — Вейсбаха, согласно которой для канала длиной $l = x_2 - x_1$ гидравлический уклон i прямо пропорционален квадрату средней скорости потока:

$$i = \xi_{\text{тр}} \frac{v^2}{2gD_{\text{г}}}. \qquad (3.146)$$

При течении в трубах коэффициент $\xi_{\text{тр}}$ является функцией числа Рейнольдса, отношения $D_{\text{г}} / k$ и структуры шероховатости стенки, где k — высота бугорков шероховатости (рис. 93). В технически гладких трубах, в которых высота k бугорков шероховатости существенно меньше толщины вязкого подслоя в пограничном слое, коэффициент трения определяется числом $\mathrm{Re} = vD_{\text{г}}/\nu$. В случае ламинарного пограничного слоя пользуются формулой Пуазейля

$$\xi_{\text{тр}} = 64/\mathrm{Re},$$

а в случае турбулентного пограничного слоя — формулой Блазиуса

$$\xi_{\text{тр}} = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}.$$

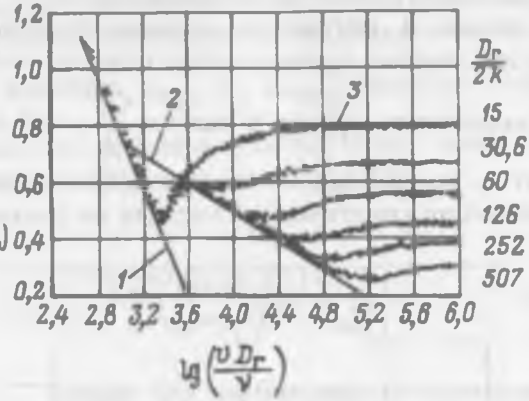


Рис. 93. Закон сопротивления трения для труб:
1 – зависимость Пуазейля $\xi_{тр} = 64/\mathrm{Re}$ для гладких труб при ламинарном режиме течения; *2* – зависимость Блазиуса $\xi_{тр} = \dfrac{0{,}3164}{\sqrt[4]{\mathrm{Re}}}$ для гладких труб при турбулентном режиме течения; *3* – опытные данные Никурадзе для турбулентного режима течения в трубах с равномерно-зернистой шероховатостью из зерен песка с высотой бугорков k

В условиях течения, когда высота k бугорков шероховатости больше толщины вязкого пограничного слоя, коэффициент трения $\xi_{тр}$ перестает зависеть от числа Re и целиком определяется относительной высотой бугорков и их структурой. На рис. 93 видно, что начиная с некоторого значения $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{кр}$ величина $\xi_{тр}$ остается постоянной при неизменном значении $D_г/k$. Наступает режим автомодельности по числу Re.

Между двумя этими режимами течения располагается переходный режим, характеризующийся воздействием обоих факторов и характером шероховатости (волнистой зернистой формой бугорков, распределением их по площади, расстоянием между ними и т.п.). Для переходного режима течения используют формулу Колбрука

$$\frac{1}{\sqrt{\xi_{тр}}} = -2\lg\left(\frac{k_э}{3{,}71D_г} + \frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{\xi_{тр}}}\right),$$

где $k_э$ — высота выступов эквивалентной равномерно-зернистой шероховатости. Для такой шероховатости высота бугорков равна расстоянию между ними.

Величина $k_э$ определяется расчетом на основе обработки экспериментальных данных гидравлических испытаний трубопроводов. Под эквивалентной равномерно-зернистой шероховатостью $k_э$ понимают такую высоту выступов песка, которая создает гидравлическое сопротивление, равное действительному сопротивлению испытываемого трубопровода. Эквивалентная равномерно-зернистая шероховатость интегральным образом характеризует среднюю высоту бугорков, их форму, распределение по поверхности и т.п. Отношение действительной средней высоты k выступов шероховатости к высоте выступов эквивалентной равномерно-зернистой шероховатости $k_э$ составляет не менее 0,1...10. Равномерно-зернистая шероховатость в опытах Никурадзе имела $k = k_э$. Величина $k_э$ зависит от материала поверхности, способа ее обработки, условий эксплуатации и т.п. Существуют экспериментальные данные для расчетных значений $k_э$ в зависимости от перечисленных факторов.

Из формулы (3.146) можно получить выражение (3.145) и (3.92), если величину $\frac{1}{g} L_{m\,тр}\Big|_1^2$ отождествить с потерями геометрического напора z. Как видно на рис. 92, где дано графическое изображение различных величин, входящих в уравнение (3.144), сумма геометрического и пьезометрического напоров z определяет положение пьезометрической линии, сумма геометрического, пьезометрического и скоростного напоров дает линию полных напоров.

При расчетах реальных трубопроводов и газовых коммуникаций необходимо также учитывать потери напора в различных местных сопротивлениях. Ими являются задвижки, колена (места поворота потока), диафрагмы, участки внезапного расширения или сжатия трубопровода, участки перестроения потока (в том числе начальный участок трубы) и т.п.

Потери напора в каком-либо j-м местном сопротивлении ($z_{мj}$, м) определяются по формуле

$$z_{мj} = \xi_j \frac{v_j^2}{2g},$$

где ξ_j — безразмерный коэффициент потери напора для данного j-го местного сопротивления; v_j — характерная скорость потока, обычно — средняя скорость в сечении трубопровода перед участком местного сопротивления или за ним.

С учетом потери напоров в местных сопротивлениях обобщенное уравнение Бернулли в случае движения по каналу жидкости примет, согласно (3.134), вид

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_2 + z_{\text{тр}}\Big|_1^2 + \sum_j z_{\text{м}j},$$

а в случае движения газа примет, согласно (3.145), вид

$$\frac{m}{m-1}\frac{p_1}{\rho_1 g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{m}{m-1}\frac{p_2}{\rho_2 g} + \frac{v_2^2}{2g} + z_{\text{тр}}\Big|_1^2 + \sum_j z_{\text{м}j}.$$

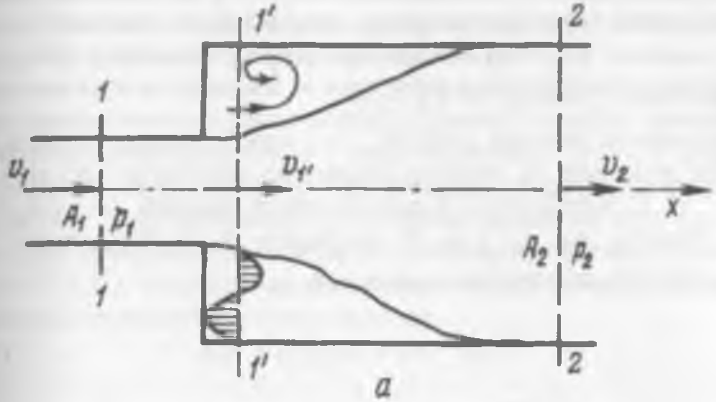
Рассмотрим определение потерь при внезапном расширении потока несжимаемой жидкости, движущейся в цилиндрической трубе без теплообмена и трения (рис. 94, *а*). Выделим сечение *1 — 1* перед внезапным расширением и сечение *2 — 2* за ним в том месте, где образовавшаяся в результате внезапного расширения жидкость целиком заполняет поперечное сечение трубопровода большого диаметра. Потеря между сечениями *1 — 1* и *2 — 2* определяется потерей давления торможения

$$\Delta \overset{*}{p}_{12} = \overset{*}{p}_1 - \overset{*}{p}_2, \tag{3.147}$$

где

$$\overset{*}{p}_1 = p_1 + \frac{\rho V_1^2}{2}; \qquad \overset{*}{p}_2 = p_2 + \frac{\rho V_2^2}{2}. \tag{3.148}$$

Уменьшение давления $\Delta \overset{*}{p}_{12}$ вызывается затратой энергии на поддержание процесса вихреобразования за уступом между сечениями *1' — 1'* и *2 — 2*.



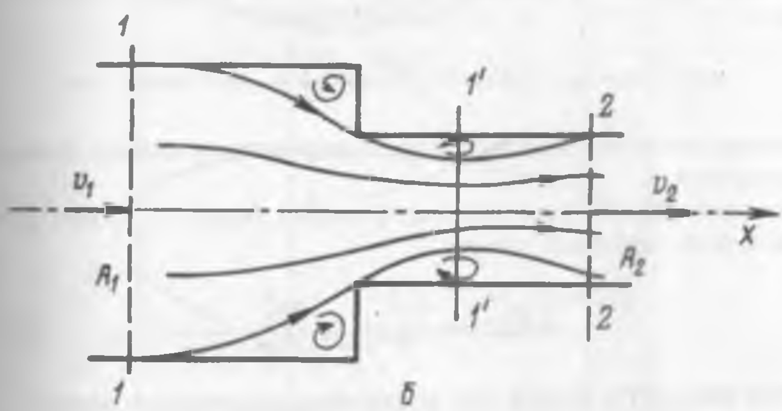


Рис. 94. Схема течения жидкости на участках с внезапным изменением площади поперечного сечения канала:
а — внезапное расширение; *б* — внезапное сужение

Выделим контрольный объем между сечениями *1' — 1'* и *2 — 2*. В рассматриваемых условиях течения полный импульс потока в каждом из этих сечений постоянен:

$$Gv_{1'} + p_{1'}A_2 = Gv_2 + p_2A_2. \qquad (3.149)$$

Циркуляционный поток в сечении $1' - 1'$ не изменяет величину суммарного количества движения в этом сечении, поэтому можно записать $Gv_{1'} = Gv_1$. По параметрам в сечении $2 - 2$ определим величину расхода $G = \rho v_2 A_2$.

Из опытных данных следует, что при течении несжимаемой жидкости давление за уступом примерно постоянно по всему сечению $1' - 1'$. Кроме того, в силу близости сечений $1 - 1$ и $1' - 1'$ можно считать, что $p_{1'} = p_1$. В результате из (3.149) можно определить разность статических давлений

$$p_1 - p_2 = \rho v_2 (v_2 - v_1). \tag{3.150}$$

Тогда из (3.147) с учетом (3.148) и (3.150) потеря полного давления

$$\Delta p^*_{12} = \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right)^2,$$

т.е. потеря полного давления равна скоростному напору потерянной скорости.

Эта зависимость известна как формула Борда — Карно (отца) и может быть записана в виде

$$\Delta p^*_{12} = \xi_1 \frac{\rho v_1^2}{2} = \xi_2 \frac{\rho v_2^2}{2}, \tag{3.151}$$

где коэффициенты потерь при внезапном расширении равны

$$\xi_1 = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2;$$

$$\xi_2 = \left(\frac{v_1}{v_2} - 1\right)^2 = (n - 1)^2,$$

поскольку

$$n = \frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}.$$

Несмотря на то что теоретически формула (3.151) получена для течения несжимаемой жидкости, она дает достаточные результаты и для течения газа при умеренных числах Маха.

При внезапном сужении потока потери оказываются меньшими, чем при внезапном его расширении. Однако структура течения при внезапном сужении (рис. 94, *б*) иная: в сечении $I' - I'$ наблюдаются сужение струи и вихреобразование, после которых струя расширяется. Это затрудняет получение формулы для определения потери давления теоретически, и поэтому обычно применяют формулу (3.151) с экспериментальными значениями коэффициентов потерь для данного случая течения.

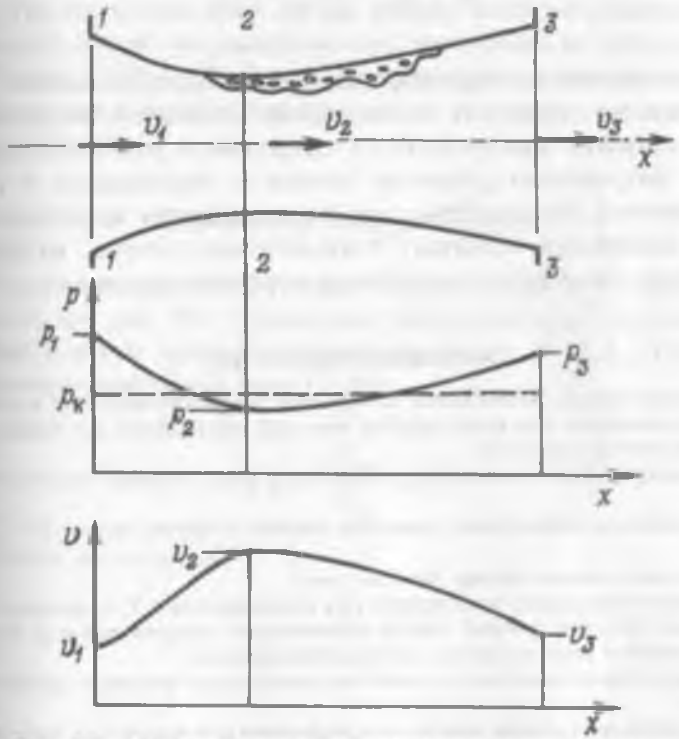


Рис. 95. Схема течения жидкости при возникновении кавитации

Рассмотрим различие в поведении жидкости и газа при течении в местах сужения потока. Согласно уравнению Бернулли, местное сужение вызывает местное ускорение потока и последующее его торможение, т.е. сначала снижение, а затем повышение статического давления. При движении по каналу газа под влиянием местного сужения фазовое состояние газа не изменяется.

Иным может быть поведение жидкости в тех же условиях течения (рис. 95). В соответствии с уравнением Бернулли при течении идеальной несжимаемой жидкости статическое давление в узком месте, равное величине

$$p_1 - p_2 - \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right),$$

может снизиться до значения давления парообразования $p_к$ или даже ниже, что приведет к вскипанию капельной жидкости. Явление вскипания жидкости из-за снижения в ней давления в результате возрастания скорости потока и образования в связи с этим полостей, заполненных паром, называется кавитацией. Появление кавитации приводит к увеличению потерь, возникновению шумов, разрушению материала поверхности канала.

Контрольные вопросы к §25

1. В каких формах записывается обобщенное уравнение Бернулли в случае стационарного движения газа вдоль струйки тока при учете работы сил трения, теплообмена, механической работы?

2. Рассматривается стационарное течение газа вдоль струйки тока без теплообмена. Возможно ли применение уравнения энергии в форме записи $T + \frac{v^2}{2c_p} = T^*$ как для течения с силами трения, так и без них?

3. Какими площадками при течении газа изображаются в T—s-диаграмме работа сил трения (теплота трения), потеря кинетической энергии потоком из-за действия сил трения и теплота трения, поглощенная потоком?

4. Как рассчитать показатель политропы процесса при течении с трением и теплообменом?

5. Как вычисляют потери напора на преодоление сил трения при течении в шероховатых трубах и при внезапном изменении поперечного сечения канала?

6. Как учитываются в обобщенном уравнении Бернулли при стационарном течении жидкости в канале потери напора от местных сопротивлений?

§26. ТЕЧЕНИЕ В СОПЛАХ И ДИФФУЗОРАХ

Геометрические сопла и диффузоры являются важными элементами газодинамического тракта энергоустановок. Сопла предназначены для ускорения потока газа, диффузоры — для его торможения и повышения статического давления потока. Геометрические формы и конструктивное исполнение этих элементов очень разнообразны. Реальная пространственная структура течения в них характеризуется наличием пограничных слоев (гидродинамического и теплового), неравномерностью параметров в поперечном сечении, зонами отрыва потока, наличием звуковых и ударных волн в случае сверхзвукового течения и другими явлениями. Тем не менее одномерная модель течения позволяет описать многие общие его особенности, некоторые из которых были рассмотрены в §21 — 23. Далее мы продолжим изучение течения в геометрических соплах и диффузорах на расчетных и нерасчетных режимах течения.

Особенности течения в соплах

Изображение процесса течения газа в сопле T — s-диаграмме было дано на рис. 90. Определим теоретическую скорость $v_{2\,\text{из}}$ истечения в конце изоэнтропийного процесса $1^* - 2_{\text{из}}$. Использовав уравнение энергии в виде (3.140)

$$T_{2\,\text{из}} + \frac{v_{2\,\text{из}}^2}{2c_p} = T_1^*$$

и уравнения изоэнтропы

$$\frac{T_{2\,\text{из}}}{T_1^*} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

с учетом соотношения $c_p = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$, получим теоретическую скорость

$$v_{2\,из} = T_{2\,из}\sqrt{2\frac{\gamma}{\gamma-1}RT_1^*\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}. \tag{3.152}$$

Действительная скорость истечения v_2 меньше теоретической $v_{2\,из}$ из-за наличия в реальном процессе потерь. Отношение скоростей в действительном и теоретическом (изоэнтропийном) процессах называется коэффициентом скорости

$$\varphi = v_2 / v_{2\,из}. \tag{3.153}$$

Коэффициент скорости φ определяется по экспериментальным измерениям и зависит от формы, геометрических параметров сопла и условий течения (рис. 96).

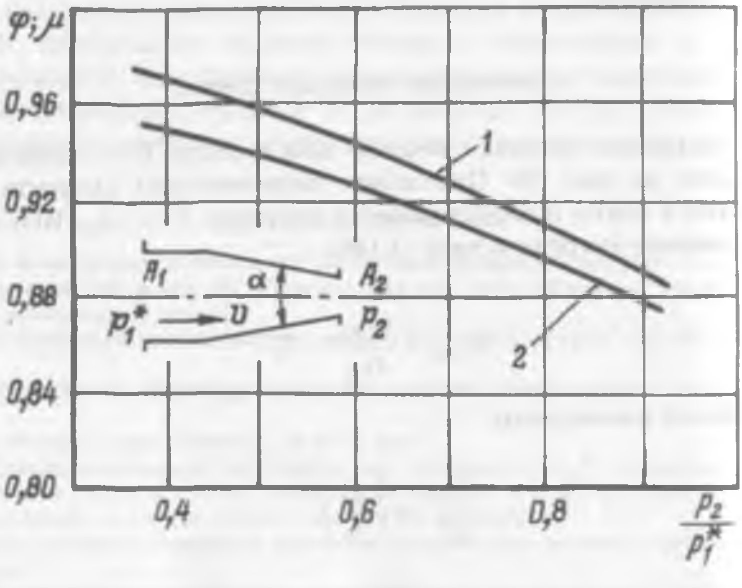


Рис. 96. Характеристики конического сопла (с углом конусности α = 15° и отношением площадей поперечных сечений $A_1/A_2 = 4$) в зависимости от перепада давлений в нем:
1 — коэффициент скорости φ; *2* — коэффициент расхода μ

Формула для теоретического массового расхода через сопло $G_{из} = \rho_{2\,из} v_{2\,из} A_2$ может быть получена с учетом уравнения изоэнтропы

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

и уравнения состояния $\rho_1^* = \dfrac{p_1^*}{RT_1^*}$ в виде

$$G_{из} = A_2 \sqrt{2\frac{\gamma}{\gamma-1} p_1^* \rho_1^* \left(\frac{p_2}{p_1^*}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1^*}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}. \quad (3.154)$$

С использованием газодинамической функции $q\,(\lambda, \gamma)$ теоретический расход $G_{из}$ можно определить из уравнения (2.59).

Действительный массовый расход $G = \rho_2 v_2 A_2$ меньше теоретического из-за наличия потерь. Отношение действительного расхода через сопло к теоретическому (в изоэнтропийном процессе) называется коэффициентом расхода (см. рис. 96)

$$\mu = G/G_{из}. \quad (3.155)$$

Коэффициент φ больше коэффициента μ. Действительно, из формулы (3.155) следует, что $\mu = \dfrac{\rho_2}{\rho_{2\,из}}\varphi$. А так как соотношение $\dfrac{\rho_2}{\rho_{2\,из}} = \dfrac{T_{2\,из}}{T_2}$, поскольку точки 2 и $2_{из}$ лежат на одной изобаре, то

$$\mu = \frac{T_{2\,из}}{T_2}\varphi,$$

где $\dfrac{T_{2\,из}}{T_2} < 1$.

21*

Сопла могут быть дозвуковые (сужающиеся) и сверхзвуковые (сопла Лаваля). Рассмотрим особенности течения в сужающихся соплах. Распределение параметров в таком сопле вдоль его оси на расчетном режиме при изоэнтропийном течении совпадает с распределением параметров для такого же течения на дозвуковом участке сопла Лаваля (рис. 97). В расчетном режиме течения на срезе сопла давление $p_{2\ \text{р}}$ равняется давлению окружающей среды $p_{\text{ср}}$, а скорость потока $v_{2\ \text{из}}$ меньше критической.

Проанализируем изменение характера изоэнтропийного течения при изменении противодавления $p_{\text{ср}}$ при условии неизменности входных параметров p_1^*, T_1^*, ρ_1^*. Если давление среды равно давлению входа в сопло $p_{\text{ср}} = p_1^*$, то никакого движения газа не будет. При понижении противодавления $p_{\text{ср}}$ до расчетного значения $p_{2\ \text{р}}$ массовый расход газа через сопло будет возрастать до расчетного значения по формуле (3.154). При дальнейшем понижении противодавления $p_{\text{ср}}$ ниже расчетного значения $p_{2\ \text{р}}$ скорость $v_{2\ \text{из}}$ будет расти до тех пор, пока давление $p_{\text{ср}}$ не достигнет значения $p_{\text{кр}}$. В этот момент в выходном сечении сопла установится скорость потока, равная критической, т.е. численно равная местной скорости звука a_2.

Скорость звука представляет собой скорость распространения бесконечно малых возмущений в упругой среде, которые в данном случае возникают вследствие понижения давления в среде $p_{\text{ср}}$ за соплом. При достижении потоком на выходе из сопла скорости $v_{2\ \text{из}} = a_2 = a_{\text{кр}}$ никакое понижение давления вверх по потоку от среза сопла уже распространиться не сможет. Массовый расход (при неизменном давлении торможения p_1^* при входе в сопло) достигает своего предельного значения, не изменяющегося при дальнейшем снижении давления за соплом $p_{\text{ср}}$ ниже $p_{2\ \text{кр}}$. Возникает явление, называемое "запиранием" потока.

Перепад давлений

$$\pi_{\text{кр}} = p_{2\ \text{кр}} / p_1^*,$$

вызывающий (на срезе сужающего сопла) критическую скорость, называется критическим.

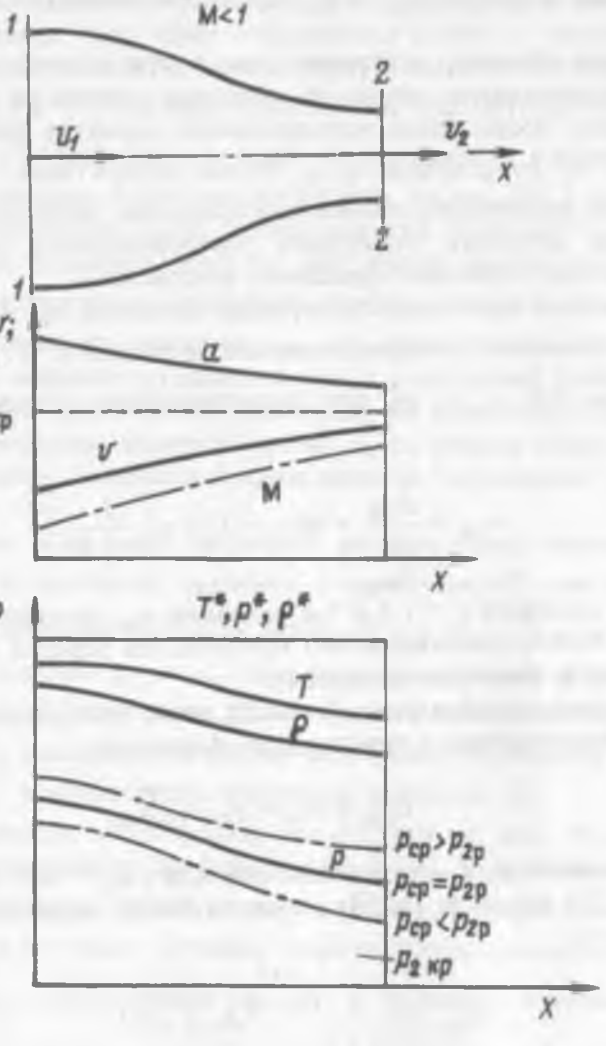


Рис. 97. Закономерность изменения параметров газа при ускорении потока в сужающемся сопле (М < 1)

При дальнейшем понижении давления среды $p_{ср}$ ниже $p_{2\ кр}$ на срезе сопла будет существовать неизменное давление $p_{2\ кр}$, а избыточный перепад ($p_{2\,кр} - p_{ср}$) будет срабатываться в вытекающей струе.

Таким образом, ускорение газа в сужающемся сопле может быть осуществлено только до скорости, равной ее критическому значению, посредством использования перепада давления от величины p_1^* до величины $p_{2\,кр}$. Чтобы осуществить ускорение потока при дальнейшем понижении давления, необходимо за минимальным сечением установить расширяющийся патрубок, как этого требует принцип обращения воздействия.

Величину критического перепада давлений $\pi_{кр}$ можно определить с помощью газодинамической функции $\pi(\lambda, \gamma) = p_2 / p_2^*$, учитывая, что $p_1^* = p_2^*$ при изоэнтропийном процессе, а $\lambda_2 = 1$. Тогда

$$\pi_{кр} = \frac{p_{2кр}}{p_1^*} = \pi(\lambda_2 = 1, \gamma) = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}. \qquad (3.156)$$

Для значений $\gamma = 1{,}3$ и $1{,}4$ величина $\pi_{кр}$ соответственно равна 0,546 и 0,528 (ориентировочно критический перепад соответствует двойному понижению давления).

Максимальный массовый расход через сужающееся сопло является критическим и определяется формулой

$$G_{max} = G_{кр} = \rho_{кр}\, a_{кр}\, A_{кр}$$

через параметры в критическом сечении ($A_{кр} = A_2$) при значении $\lambda_1 = 1$. По формуле (3.154) с учетом (3.156) критический расход равен, кг/с:

$$G_{кр} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} A_2 \sqrt{\gamma\, p_1^* \rho_1^*}, \qquad (3.157)$$

или

$$G_{кр} = \beta(\gamma)\, \frac{p_1^* A_2}{\sqrt{R T_1^*}}.$$

Рассмотрим изменение массового расхода $G_{из}$ при изоэнтропийном движении газа через сужающееся сопло с изменением давления p_2 за соплом, на его срезе (при изменении перепада давлений $\pi = p_2 / p_1^*$) в условиях постоянства параметров торможения p_1^*, ρ_1^*, T_1^* при входе в сопло и постоянства площади его поперечного сечения A_2 при выходе из него. На рис. 98, *а* кривая *1* соответствует формуле (3.154), однако реальное изменение массового расхода при указанных условиях дает только участок кривой *1*, находящийся в диапазоне изменения перепада давлений $\pi = p_2 / p_1^*$ от 1 до критического значения $\pi_{кр}$. На этом участке кривой с уменьшением значения π (давление $p_2 = p_{ср}$) массовый расход растет и, достигнув критического значения, не изменяется при последующем снижении давления среды $p_{ср}$ за соплом ниже значения $p_{2\ кр}$ в связи с возникновением явления "запирания" сужающегося сопла.

Рассмотрим изменение массового расхода через сужающееся сопло в случае изменения давления торможения p_1^* при входе в сопло (при изменении перепада давлений $\pi = p_2 / p_1^*$) в условиях постоянства давления ($p_2 = p_{ср}$) при выходе из сопла и температуры торможения T_1^* при входе. В этом случае изменение массового расхода $G_{из}$ определяется двумя факторами: перепадом давлений $\pi = p_2 / p_1^*$ и абсолютным значением давления p_1^*.

Закономерности этого изменения следуют из рис. 98, *б*, где представлено изменение массового расхода $G_{из}$ через сужающееся сопло под действием давления торможения p_1^* перед соплом и давления p_2 на его срезе. Сечения, параллельные плоскости координат $\dfrac{G_{из}}{A_2}$; p_2, соответствуют рис. 98, *а*. Сечения, параллельные плоскости координат $\dfrac{G_{из}}{A_2}$; p_1^*, определяют изменение массового расхода $G_{из}$ по формуле (3.154) в анализируемых условиях $p_1^* =$ = varia, $p_2 =$ const.

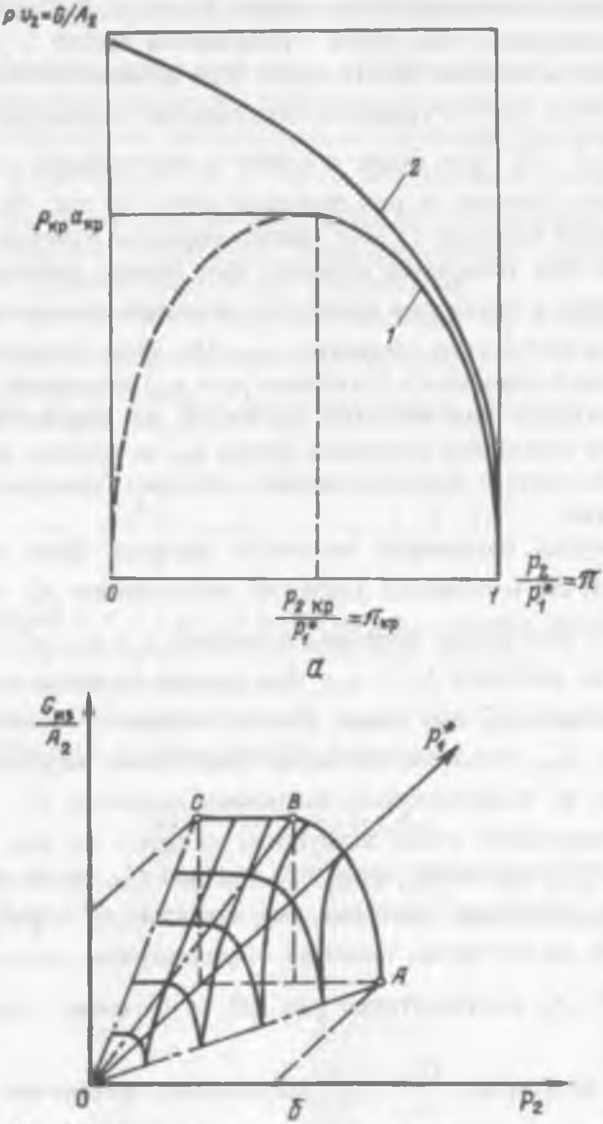


Рис. 98. Зависимость изменения плотности тока от: *а* — относительного перепада давления газа (*1*) и жидкости (*2*) за сужающимся соплом; *б* — давления газа перед сужающимся соплом и за ним

На криволинейной поверхности OAB массовый расход меньше своего критического значения. На участке поверхности OCB массовый расход равен своему критическому значению, которое изменяется с изменением давления p_1^* при входе в сопло. Очевидно, что с ростом давления p_1^* перед соплом при постоянстве давления p_2 на выходе из него массовый расход $G_{из}$ возрастает.

Рассмотренными особенностями процесс истечения газа из сужающегося сопла отличается от процесса истечения жидкости, при котором не наблюдается явление кризиса течения в минимальном поперечном сечении (явления "запирания" потока).

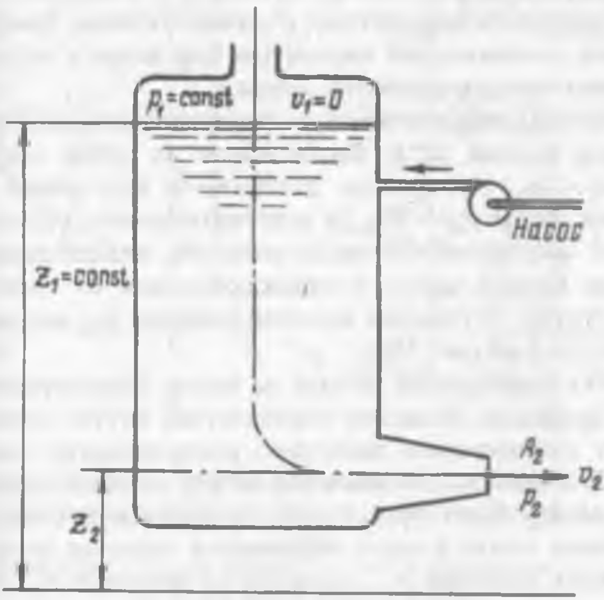


Рис. 99. Схема истечения жидкости из бака через сужающийся насадок (сопло)

Действительно, при истечении идеальной капельной жидкости из резервуара через сужающийся насадок (рис. 99) по уравнению Бернулли (3.134) при $v_1 = 0$ получаем скорость течения

$$v_2 = \sqrt{2\frac{p_1 - p_2}{\rho} + g(z_1 + z_2)}. \qquad (3.158)$$

Согласно (3.158) массовый расход $G = \rho v_2 A_2$ в случае истечения жидкости при постоянных значениях p_1 и z_1 будет монотонно возрастать с уменьшением перепада давления p_2/p_1 (кривая 2 на рис. 98, *а*), пока эту закономерность не нарушит явление кавитации.

Перейдем к особенностям течения в сверхзвуковых соплах. Течение газа в сопле Лаваля на расчетном режиме (см. рис. 75) было рассмотрено в §21. Проанализируем качественно структуру течения, возникающую внутри сопла Лаваля и в вытекающей из него струе при различных нерасчетных режимах течения (рис. 100). Будем полагать постоянными параметры при входе в сопло и изменять величину противодавления среды $p_{ср}$.

На расчетном режиме течения распределение давления вдоль сопла дается кривой *АОВ*. Вытекающая из сопла сверхзвуковая струя однородна, статическое давление в ней равно давлению окружающей среды $p_{ср} = p_{2\ р}$ (в действительности структура струи может быть возмущена слабыми волнами, отходящими от конструктивных кромок сопла и отражающимися от свободной поверхности струи). Установим противодавление $p_{ср}$ меньше расчетного $p_{2\ р}$ (зона *I* на рис. 100).

Поскольку скорость на выходе из сопла сверхзвуковая, то это изменение давления не может передаваться внутрь сопла. Внутри сопла будет существовать расчетное распределение давления по кривой *АОВ*, а понижение давления от $p_{2\ р}$ на срезе сопла до противодавления $p_{ср}$ будет происходить в вытекающей струе. У выходных кромок сопла в струе образуются секторы волн разрежения, в которых давление $p_{2\ р}$ снизится до значения $p_{ср}$; затем происходит чередование волн разрежения и сжатия по длине струи.

Если установить противодавление $p_{ср}$ несколько больше расчетного давления $p_{2\ р}$ (зона *II*), то в выходном сечении сопла по-прежнему будет сверхзвуковая скорость; изменение противодавления внутрь сопла не проникнет и не нарушит хода кривой *АОВ* Необходимое возрастание давления от значения $p_{2\ р}$ на срезе сопла до противодавления $p_{ср}$ произойдет в образующихся косых скачках уплотнения, отошедших от кромок сопла. Пересекаясь, скачки образуют Х-образную систему скачков, за которой возникнет серия отраженных и затухающих по длине струи волн разрежения и сжатия. Структура волн определяется закономерностями их отражения от свободной поверхности.

Рис. 100. Распределение статического давления по длине сопла Лаваля на расчетном и нерасчетном режимах течения и схемы структуры вытекающей струи:
1 – волна разрежения; *2* – волна сжатия; *3* – скачок уплотнения; *4* – характеристика на расчетном режиме течения

При дальнейшем повышении противодавления (зона *III*) условия течения не смогут формировать Х-образный выходной скачок и он трансформируется в мостообразный скачок (мостообразным скачком называют прямой скачок с двумя λ-образными ножками у границ струи). Поток за прямым скачком в центре струи будет дозвуковым, но под воздействием окружающего сверхзвукового течения он ускорится до сверхзвуковой скорости. Далее структура струи будет повторять предыдущую ситуацию.

По мере повышения противодавления $p_{ср}$ прямой скачок будет приближаться к соплу и расположится на срезе сопла (точка L на рис. 100). При дальнейшем росте противодавления $p_{ср}$ (зона IV) прямой скачок войдет в расширяющуюся часть сопла.

В действительности возможно существование даже двух прямых скачков, вызывающих, как правило, отрыв пограничного слоя. Между скачками дозвуковой поток ускоряется до сверхзвукового в своеобразном внутреннем сопле Лаваля, у которого жидкие границы образуют внешний поток. При одиночном прямом скачке давление распределяется по кривой $AOREN$, и его месторасположение может быть найдено по условию связи коэффициентов скорости на прямом скачке $\lambda_R \lambda_E = 1$. Из сопла вытекает дозвуковой поток.

При дальнейшем росте противодавления $p_{ср}$ скачок, ослабляясь, продвигается к критическому сечению и, дойдя до него, исчезает. Распределение давления в сопле соответствует кривой AOM.

Наконец, если противодавление $p_{ср}$ приближается к значению входного давления p_1 (зона V), то течение в сопле Лаваля повсюду дозвуковое с максимальной скоростью (меньше критической) в минимальном сечении сопла и с распределением давления по кривой $AO'M'$.

Особенности течения в диффузорах

Изображение процесса торможения газа в диффузоре в $T - s$-диаграмме дано на рис. 91. Реальный процесс $1 - 2$ повышения статического давления в диффузоре отклоняется от изоэнтропийного $1 - 2_{из}$ за счет различных потерь, в результате этого давление торможения p_2^* на выходе из диффузора меньше, чем давление торможения p_1^* при входе. При адиабатичности сопоставляемых процессов ($T_1^* = T_2^* = T_{2\,из}^*$) это приводит к уменьшению действительного выходного скоростного напора Δh_2 в сравнении с изоэнтропийным $\Delta h_{2\,из}$ на величину

$$\Delta h_{\text{пот}} = \Delta h_{2\,\text{из}} - \Delta h_2 = \frac{v_{2\,\text{из}}^2}{2} - \frac{v_2^2}{2}.$$

Величина $\Delta h_{\text{пот}}$ может рассматриваться как потеря скоростного напора, сопровождающая процесс действительного повышения статического давления в диффузоре. В результате из располагаемого входного скоростного напора Δh_1 преобразуется в статическое давление величина

$$\Delta h = \Delta h_1 - \Delta h_{2\,\text{из}} = \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_{2\,\text{из}}^2}{2}.$$

Эффективность процесса повышения статического давления в диффузорах оценивают при помощи следующих коэффициентов (см. рис. 91):

коэффициента восстановления статического давления

$$\xi_{\text{с.д}} = \frac{\Delta h}{\Delta h_1} = 1 - \frac{v_{2\,\text{из}}^2}{v_1^2};$$

коэффициента внутренних потерь

$$\xi_{\text{в.п}} = \frac{\Delta h_{\text{пот}}}{\Delta h_1} = 1 - \frac{v_{2\,\text{из}}^2 - v_2^2}{v_1^2};$$

коэффициента потерь с выходной скоростью

$$\xi_{\text{в.с}} = \frac{\Delta h_2}{\Delta h_1} = \frac{v_2^2}{v_1^2}.$$

Очевидно (см. рис. 91), что $\xi_{\text{с.д}} + \xi_{\text{в.п}} + \xi_{\text{в.с}} = 1$, так как $\Delta h_1 = \Delta h_2 + \Delta h + \Delta h_{\text{пот}}$.

Отношение

$$\xi_{\text{п.п}} = \frac{\Delta h_2 + \Delta h_{\text{пот}}}{\Delta h_1}$$

называется коэффициентом полных потерь;

$$\xi_{с.\,д} = 1 - \xi_{п.\,п}.$$

Коэффициентом полезного действия (КПД) диффузора называют отношение

$$\eta = \frac{\Delta h}{\Delta h_1 - \Delta h_2} = \frac{v_1^2 - v_{2из}^2}{v_1^2 - v_2^2}.$$

Потери в диффузорах оценивают при помощи коэффициента восстановления полного давления $\sigma^* = p_2^* / p_1^*$. Найдем его связь со скоростным напором. Выразим потери полного давления $\Delta p_{12}^* = p_1^* - p_2^*$ в зависимости от скоростного напора подобно формуле (3.151) для внезапного расширения канала

$$p_1^* - p_2^* = \xi_{д\,1} \frac{\rho_1^* v_1^*}{2} = \xi_{д\,2} \frac{\rho_2^* v_2^*}{2}.$$

Рассмотрим в качестве определяющего скоростной напор при выходе из диффузора. Установим связь между коэффициентом потерь в диффузоре $\xi_{д\,2}$ и величиной σ^*:

$$\sigma^* = 1 - \frac{\Delta p_{12}^*}{p_1^*} = 1 - \xi_{д\,2} \frac{\rho_2^* v_2^*}{2}.$$

Обычно относительные потери полного давления $\frac{\Delta p_{12}^*}{p_1^*}$ в диффузоре составляют несколько процентов, и поэтому при условии $T_1^* \approx T_2^*$ можно считать, что $\rho_1^* \approx \rho_2^*$. С учетом того, что

$$a_{кр\,1}^2 = \frac{2\gamma R T_1^*}{\gamma + 1} \simeq a_{кр\,2}^2,$$

получим

$$\sigma^* = 1 - \xi_{д\,2} \frac{\gamma}{\gamma + 1} \lambda_2^2.$$

Коэффициент потерь в диффузоре $\xi_{д\,2}$ учитывает как потери на отрыв потока от стенок, так и потери на трение. Потери на отрыв могут быть оценены в долях ψ от коэффициента ξ_2 в формуле (3.151). Величина ψ называется коэффициентом смягчения (полноты) удара. Согласно экспериментам, ψ зависит от угла α раскрытия диффузора, и для конического диффузора при $\alpha = 0$ коэффициент $\psi = 0$, при $\alpha = 60°$ коэффициент ψ достигает максимального значения 1,2 и далее уменьшается до единицы с ростом α.

Диффузоры в зависимости от скорости потока при входе в них могут быть дозвуковыми и сверхзвуковыми.

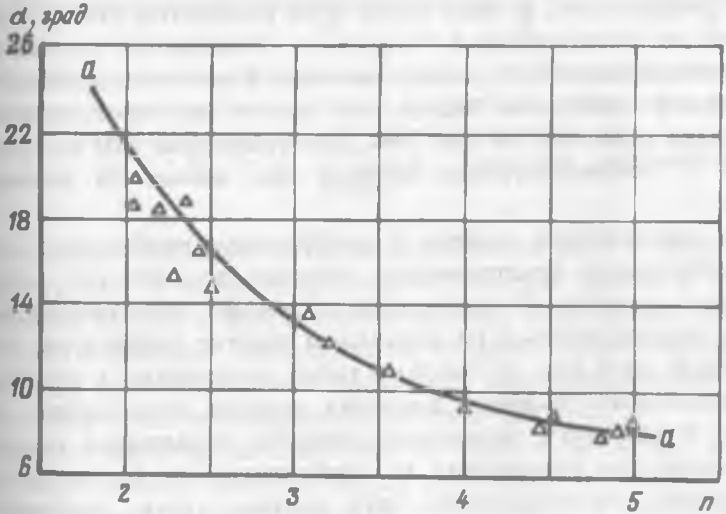


Рис. 101. Экспериментальная зависимость параметров α (угол раскрытия диффузора) и n (отношение площадей поперечных сечений выхода A_2 и входа A_1) конического диффузора, определяющая область ниже линии *aa*, где течение в диффузоре безотрывно

Рассмотрим особенности течения в дозвуковых диффузорах. Распределение параметров при изоэнтропийном течении в таком диффузоре (расширяющемся патрубке) на расчетном режиме (см. рис. 76) проанализировано в §21. Потери в дозвуковом диффузоре вызываются трением и отрывом потока от стенки. Существование зон отрыва связано с возникновением условий для отрыва пограничного слоя. Определяющими факторами для возникновения этих условий являются числа Маха и Рейнольдса при входе в диффузор, характер пограничного слоя (ламинарный или турбулентный), закон изменения градиента давления dp/dx вдоль оси диффузора (закон изменения площади его поперечного сечения), форма эпюры скорости при входе в диффузор, шероховатость стенок.

На рис. 101 показана экспериментальная зависимость, определяющая возможности безотрывного течения в конических дозвуковых диффузорах, в виде связи угла раскрытия диффузора α и степени его расширения $n = A_2/A_1$ — отношения площадей поперечного сечения при входе и выходе. В качестве примера закономерность изменения потерь для одного из типов дозвукового диффузора показана на рис. 102. Для сравнения там же показана кривая *5*, соответствующая потерям при внезапном расширении потока.

Для уменьшения потерь в диффузорах необходимо прежде всего обеспечить безотрывность течения по всей его длине на расчетном режиме. С этой целью основное торможение потока должно осуществляться на начальном участке диффузора, где пограничный слой еще достаточно тонок и устойчив к отрыву. Далее продольный градиент давления должен непрерывно уменьшаться. Существуют различные способы управления потоком в диффузорах для увеличения их эффективности (промежуточные перегородки, пристеночный вдув потока, отсос пограничного слоя, профилирование обвода стенки и т.п.).

При изменении расчетных условий на входе или на выходе из дозвукового диффузора характер течения в нем будет изменяться чаще всего в сторону снижения эффективности вследствие образования стационарных и нестационарных отрывных зон или возникновения струйного течения с отделением потока от стенок

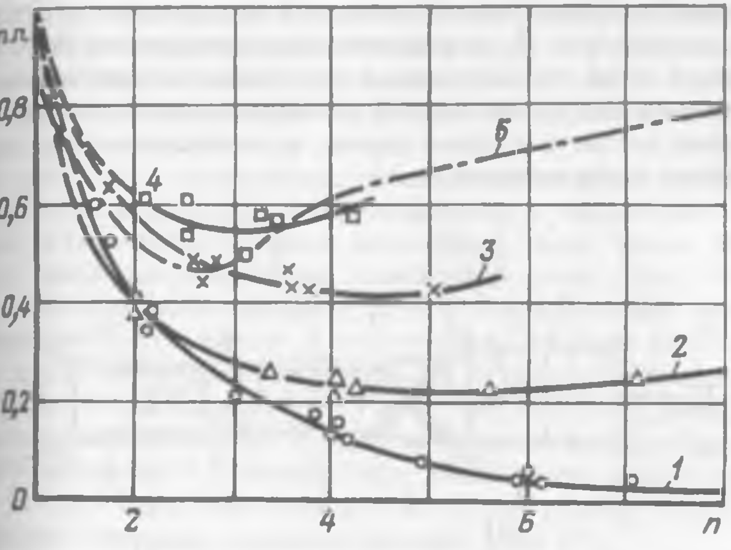


Рис. 102. Экспериментальная зависимость МЭИ коэффициента полных потерь для звукового конического диффузора от степени расширения *n* и угла раскрытия α, град:
1 — 7; *2* — 15; *3* — 22; *4* — 30; *5* — канал с внезапным расширением потока

Рассмотрим особенности процесса течения газа в сверхзвуковом диффузоре. В таком диффузоре к потерям трения и отрыва добавляются потери в возникающих скачках уплотнения. Ограничимся рассмотрением особенностей течения применительно к конструкции прямолинейного диффузора для сверхзвуковой аэродинамической трубы непрерывного действия (рис. 103, *а*).

Обычно в такой трубе поток газа выходит из ресивера, ускоряется в сопле Лаваля (участок между сечениями 0 — 0 и *I'* — *I'*), проходит рабочую часть (участок от *I'* — *I'* до *1* — *1*), в которой размещается испытуемая модель, и тормозится в сверхзвуковом диффузоре (участок от *1* — *1* до *4* — *4*). Этот реальный сверхзвуковой диффузор, как и теоретический, рассмотренный в §21, имеет сужающийся сверхзвуковой участок от *1* — *1* до *2* — *2* и расширяющийся дозвуковой участок от *3* — *3* до *4* — *4*. Между ними располагается участок от *2* — *2* до *3* — *3* с постоянным поперечным сечением (горло), имеющий относительную протяженность, равную 8 — 15, гидравлическим диаметрам горла $D_г$. Необходимость этого участка вызвана тем, что из-за наличия на стенках пограничного слоя переход от сверхзвукового течения к дозвуковому растянут по длине канала, а возникающая зона течения называется псевдоскачком.

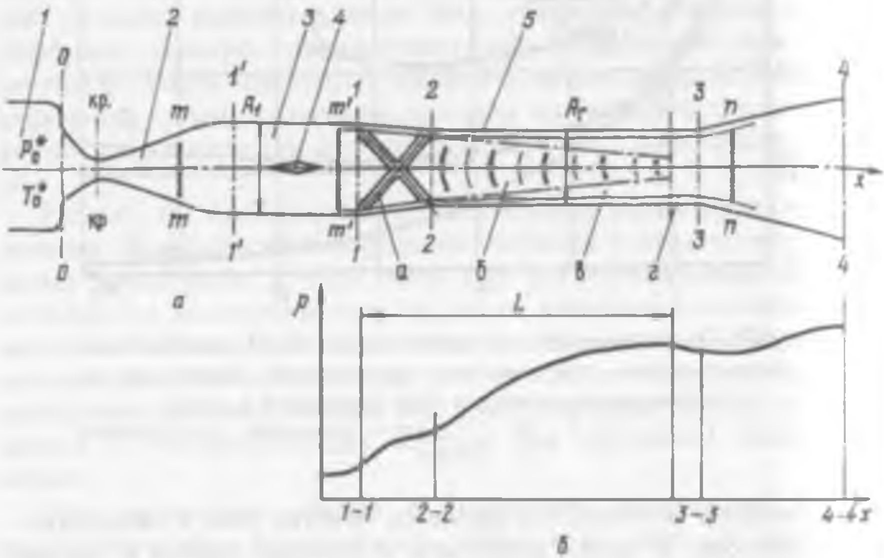


Рис. 103. Схема сверхзвуковой аэродинамической трубы (*а*) и распределение статического давления в сверхзвуковом диффузоре (*б*):
1 — ресивер; *2* — сопло Лаваля; *3* — рабочий участок трубы; *4* — испытуемая модель; *5* — сверхзвуковой диффузор; *а* — зона входных Х-образных скачков; *б* — зона сверхзвукового течения; *в* — зона дозвукового течения; *г* — пограничный слой

Эта область представляет собой сочетание скачков уплотнения и сверхзвукового течения в ядре потока с областью дозвукового течения, примыкающей к стенкам. Структура скачков уплотнения зависит от значения числа Маха M_1 при входе в диффузор, относительной толщины $\delta_1/D_г$ пограничного слоя и условий течения (чисел Эйлера Eu_1 и Рейнольдса Re_1). Длина области псевдоскачка L определяется как расстояние от места, где начинается рост статического давления p на стенке (сечение *1 — 1*), до места, где рост статического давления заканчивается, и под действием трения оно начинает снижаться (перед сечением *3 — 3*). В ряде случаев в псевдоскачке возможен локальный отрыв пограничного слоя на стенке.

На рис. 103, *а* схематически показана также возможная структура течения в прямолинейном диффузоре с квадратным постоянным поперечным сечением для случая, когда число $M_1 > 2$. Можно выделить следующие характерные зоны: зона "а" с X-образными входными скачками; зона "б" сверхзвукового течения в центральной части канала с относительно слабыми мостообразными или C-образными скачками; зона "в" дозвукового течения (с интенсивной турбулентностью) между сверхзвуковой зоной "б" и пограничным слоем; зона "г" турбулентного пограничного слоя.

При числах $M_1 < 2$ псевдоскачок имеет другую структуру и состоит из ряда расположенных друг за другом прямых скачков с λ-образными "ножками" у стенок (рис. 100, зона *IV*).

Очевидно, что одномерный анализ не в состоянии описать все особенности такого процесса торможения сверхзвукового потока. Однако при помощи одномерной модели течения имеется возможность изучить изменение площади поперечного сечения диффузора вдоль его длины. Минимально допустимая площадь горла $A_г$ определяется из условия запуска диффузора, т.е. вывода течения в аэродинамической трубе на расчетный режим, при котором на рабочем участке трубы устанавливается сверхзвуковая скорость.

Будем предполагать, что запуск производится посредством повышения давления p_0^* в ресивере, куда газ подается при помощи компрессора. На начальном этапе запуска скорость потока на всей длине рассматриваемого тракта между сечениями *0 — 0* и *4 — 4* дозвуковая. По мере увеличения массового расхода газа скорость потока будет расти и приблизится к своему критическому значению прежде всего в самом узком поперечном сечении $A_{кр.с}$, которым является критическое сечение *кр — кр* сопла Лаваля. Во всех остальных местах до и после этого критического сечения скорость потока будет дозвуковой.

После возникновения критической скорости в критическом сечении сопла Лаваля дальнейшее увеличение массового расхода

22*

при повышении давления в ресивере p_0^* приведет к появлению непосредственно за критическим сечением области сверхзвукового течения. Для рассматриваемого в данный момент нерасчетного режима течения эта сверхзвуковая зона будет состыковываться с существующим дозвуковым течением на выходе из сопла Лаваля посредством прямого скачка уплотнения в сечении $m - m$.

По мере увеличения давления p_0^* в ресивере скачок $m - m$ будет продвигаться в направлении к диффузору. Из-за потерь в прямом скачке $m - m$ удельный объем газа за скачком будет больше, чем перед ним. Именно это и делает необходимым соблюдение следующего условия: площадь горла $A_г$ должна быть больше площади критического сечения $A_{кр\ с}$ сопла Лаваля. Действительно, дозвуковой поток за скачком $m - m$, дойдя до участка от $1 - 1$ до $2 - 2$, где площадь поперечного сечения уменьшается, начнет разгоняться. Если площадь горла $A_г$ окажется недостаточной, то в горле может возникнуть критическая скорость и произойдет явление запирания горла диффузора. Таким образом, между скачком $m - m$, находящимся в рабочей части трубы, и сечением горла, где возникла критическая скорость, будет располагаться зона дозвукового течения. Диффузор не запустится, так как скачок $m - m$ не сможет пройти горло. Если же площадь горла $A_г$ достаточна, то скачок $m - m$ при соответствующем возрастании давления p_0^* сможет проскочить через горло, а между сечениями от $1 - 1$ до $3 - 3$ сформируется структура псевдоскачка. Произойдет запуск диффузора.

Иногда, исходя из условий устойчивости работы диффузора, в нем формируют несколько иную структуру потока. На участке между сечениями от $1 - 1$ до $3 - 3$ обеспечивают торможение сверхзвукового потока до небольших чисел Маха в сечении $3 - 3$ на выходе из горла. Далее в расширяющейся части диффузора (от $3 - 3$ до $4 - 4$) сверхзвуковой поток несколько ускоряется и переходит в дозвуковой через относительно слабый прямой скачок $n - n$. При возникновении по каким-либо причинам возмущений давления или расхода скачок $n - n$ колеблется около своего номинального положения, не входя в горло, и предохраняет от срыва сверхзвуковое течение на рабочем участке трубы.

Оценим площадь горла $A_г$, необходимую для запуска аэродинамической трубы и диффузора. Идеализируем процесс, предполагая отсутствие пограничного слоя и теплообмена. Это означает, что давления торможения до скачка $m - m$ и после него постоянны, но, естественно, различны. Температура торможения вдоль всего тракта предполагается постоянной, так как рассматриваются квазистационарные положения скачков.

Рассмотрим предельно допустимую ситуацию, допускающую запуск, когда в обоих сечениях аэродинамического тракта в сопле $A_{кр.\,с}$ и в горле $A_г$ установится критическая скорость, одинаковая для этих сечений в силу равенства $T_c^* = T_г^*$.

Скачок $m - m$ в тот момент займет положение $m' - m'$ непосредственно перед сечением $1 - 1$. Обозначим коэффициент скорости перед скачком $m' - m'$ через $\lambda_{1'}$, а за скачком — через $\lambda_1 = 1/\lambda_{1'}$. Площадь поперечного сечения рабочего участка от $1' - 1'$ до $1 - 1$ обозначим через A_1.

Найдем относительное значение площади критического сечения сопла $A_{кр.\,с}/A_1$, для чего запишем уравнение расхода (2.59) для критического сечения сопла и для сечения рабочего участка перед скачком $m' - m'$:

$$\beta(\gamma)\frac{p_c^* A_{кр.\,с}}{\sqrt{RT_c^*}}q(\lambda_c = 1, \gamma) = \beta(\gamma)\frac{p_{1'}^* A_1}{\sqrt{RT_{1'}^*}}q(\lambda_{1'}, \gamma).$$

Поскольку $T_c^* = T_{1'}^*$, $p_c^* = p_{1'}^*$ и $q(\lambda_c = 1) = 1$, то отношение площадей

$$\frac{A_{кр.\,с}}{A_1} = q(\lambda_{1'}). \qquad (3.159)$$

Найдем относительное значение площади горла $A_г/A_1$, для чего запишем уравнение расхода для сечения $1 - 1$ рабочего участка за скачком $m' - m'$ и для сечения в горле:

$$\beta(\gamma)\frac{p_1^* A_1}{\sqrt{RT_1^*}}q(\lambda_1, \gamma) = \beta(\gamma)\frac{p_г^* A_г}{\sqrt{RT_г^*}}q(\lambda_г = 1, \gamma).$$

Поскольку $T_1^* = T_г^*$, $p_1^* = p_г^*$ и $q(\lambda_г = 1) = 1$, то отношение площадей

$$\frac{A_г}{A_1} = q\left(\lambda_1 = \frac{1}{\lambda_{1'}}\right). \tag{3.160}$$

Из (3.159) и (3.160) можно найти отношение площадей поперечного сечения горла и критического сечения сопла

$$\frac{A_г}{A_{кр.\,с}} = \frac{q(1/\lambda_{1'})}{q(\lambda_{1'})}. \tag{3.161}$$

Соотношение (3.161) определяет минимальное значение площади горла, при котором возможен запуск сверхзвукового диффузора. Обычно из-за наличия пограничного слоя площадь горла $A_г$, определенную по (3.161), увеличивают на 10 — 15 %.

Зависимости (3.159) — (3.161) графически показаны на рис. 104 в функции числа М перед диффузором.

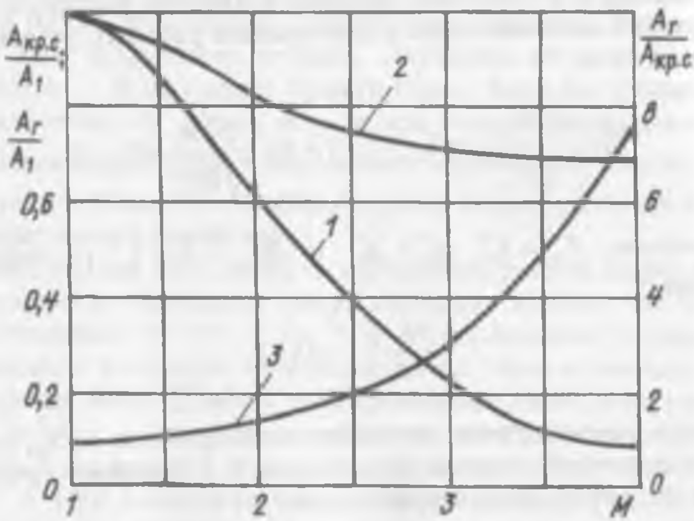


Рис. 104. Зависимость относительных величин проходных сечений сверхзвуковой трубы от числа М в ее рабочей части:
1 — $A_{кр.\,с}/A_1$; *2* — $A_г/A_1$; *3* — $A_г/A_{кр.\,с}$

Контрольные вопросы к §26

1. Рассматривается стационарное, изоэнтропийное истечение газа из сужающегося сопла, на срезе которого под действием перепада давлений $p_{ср} / p_1^* = \pi_{кр}$ установилась скорость истечения, равная критической. Изменится ли массовый расход G (кг/с) через сопло, если уменьшится (увеличится) только полное давление при входе p_1^*, только противодавление среды $p_{ср}$, перепад давлений $p_{ср} / p_1^*$?

2. Какова структура сверхзвуковой струи за соплом Лаваля в случае истечения в среду с противодавлением меньше (больше) расчетного?

3. Какими коэффициентами оценивают эффективность процесса в диффузоре?

4. Чем вызвано появление системы скачков уплотнения (псевдоскачка) при торможении потока в сверхзвуковом диффузоре?

5. Почему в сверхзвуковом диффузоре имеется ограничение величины площади поперечного сечения горла?

6. Для каких сечений записываются уравнения расхода при вычислении теоретического отношения площадей поперечного сечения горла и критического сечения сопла Лаваля в процессе расчета сверхзвуковой аэродинамической трубы?

Глава 4. ПЛОСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

§27. КОМПЛЕКСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ПОТОКА И КОМПЛЕКСНАЯ СОПРЯЖЕННАЯ СКОРОСТЬ

Ранее при изучении основных закономерностей кинематики жидкости было введено понятие о потенциальном (безвихревом) потоке (см. §7) и рассмотрены его свойства. Показано также, что при интегрировании уравнений движения идеальной жидкости предположение об отсутствии вращения частиц жидкости ($\vec{\omega} = 0$), соответствующее представлениям о физических особенностях потенциального течения, позволяет достаточно просто установить связь между скоростью потока и давлением (см. уравнение Бернулли, §13).

Таким образом, постановка и решение задач динамики жидкости, связанные с расчетом полей давления и результирующих сил, например воздействующих на тело, погруженное в поток, требуют решения кинематических задач для картины течения (линий тока), полей скорости и т.д. Решение кинематических задач существенно упрощается при использовании модели потенциального потока. Как будет показано далее, в этом случае представляется возможным эффективное использование математического аппарата теории функций комплексного переменного (ТФКП) для решения задач гидродинамики.

Рассмотрим двумерное, плоское установившееся (стационарное) потенциальное течение несжимаемой жидкости в плоскости действительных координат $x - y$ (рис. 105). Выделим в рассматриваемом плоском потоке произвольную линию тока l. Напомним, что по определению, в каждой точке A линии тока вектор скорости $\vec{V}$ совпадает по направлению с элементарным вектором касательной к линии тока $d\vec{l}$ (см. рис. 105), так что

$$d\vec{l} = k\vec{v}. \qquad (4.1)$$

Как показано в §7, для кинематического описания потенциального потока можно использовать так называемую потенциальную функцию φ (потенциал скорости), связанную с проекциями вектора скорости рассматриваемого плоского потока соотношениями

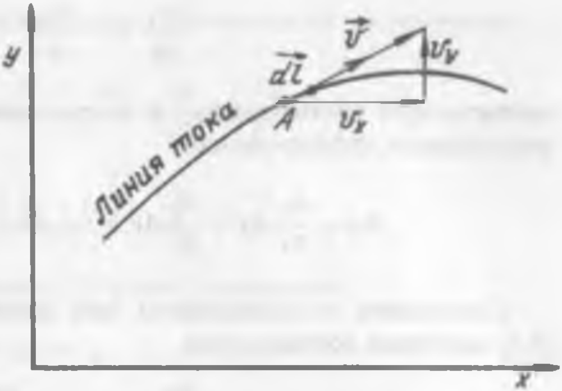


Рис. 105. Картина потенциального течения несжимаемой жидкости

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}. \qquad (4.2)$$

Используем также уравнение неразрывности, записанное для плоского потока несжимаемой жидкости в виде

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \qquad (4.3)$$

Векторное уравнение (4.1) в проекциях на координатные оси запишется в виде $dx = kv_x$, $dy = kv_y$, где dx, dy — проекции вектора $d\vec{l}$ (dx, dy). Из последних соотношений имеем дифференциальное уравнение линии тока $\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$, которое приводится к виду

$$v_x dy - v_y dx = 0. \qquad (4.4)$$

Покажем, что левая часть уравнения (4.4) представляет собой полный дифференциал некоторой функции, которую обозначим $\psi = \psi(x, y)$ и назовем функцией тока.

Действительно, нетрудно убедиться в том, что вытекающее из соотношения (4.3) равенство производных

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}$$

соответствует необходимому и достаточному условию существования полного дифференциала

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy = -v_y dx + v_x dy = 0. \quad (4.5)$$

Сопоставив коэффициенты при дифференциалах dx, dy, из (4.5) получаем соотношения

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.6)$$

Наконец, сравнив выражения для v_x и v_y, записанные с помощью соотношений (4.2) и (4.6), получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.7)$$

Соотношения (4.7) математически тождественны условиям Коши — Римана

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (4.8)$$

связывающим действительную $\xi = \xi(x, y)$ и мнимую $\eta = \eta(x, y)$ части аналитической голоморфной функции комплексного переменного $\zeta(z) = \xi + i\,\eta$, имеющей производную $d\zeta/dz$ в области существования функции, за исключением так называемых особых точек. Следовательно, условия (4.7) математически обосновывают существование аналитической функции, которую обозначим $W(z) = \varphi + i\varphi$ и назовем комплексным потенциалом потока, или характеристической функцией.

Таким образом, соотношения (4.7) обеспечивают существование производной dW/dz, величина которой в рассматриваемой точке не зависит, как показано в ТФКП, от направления, по которому вычисляются приращения независимой переменной. В частности,

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial(\varphi + i\psi)}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{i\partial y}(\varphi + i\psi) = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}.$$

Учитывая соотношения (4.2) и (4.6), получаем

$$dW/dz = v_x - iv_y = |v|\, e^{-i\alpha}. \tag{4.9}$$

Из (4.9) следует, что производная комплексного потенциала представляет собой ФКП (аналитическую, как и все высшие производные аналитической функции), которую можно интерпретировать как функцию, описывающую распределение в плоскости $z = x + iy$ вектора "комплексной сопряженной скорости" $\bar{v} = v_x - iv_y$. Нетрудно заметить, что величина $\bar{v}$ отличается от вектора физической скорости $\bar{v} = v_x + iv_y$ лишь знаком вертикальной проекции (рис. 106).

Подведем основные итоги рассмотренного выше.

Установив математическую тождественность понятия "комплексный потенциал" понятию "аналитическая ФКП", можно свести задачу о кинематическом исследовании потенциального потока несжимаемой жидкости к задаче об определении функции $W = W(z)$ в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$. Для последующего целесообразно отметить, что, интегрируя дифференциальное уравнение $d\psi = 0$ [см. (4.5)], можно получить уравнение линии тока в виде

$$\psi\,(x, y) = \text{const}. \tag{4.10}$$

Соотношение (4.10) описывает картину рассматриваемого течения, которая, как это следует из сказанного выше, может быть определена после нахождения функции комплексного потенциала $W(z) = \varphi + i\,\psi$.

Линии равного потенциала (эквипотенциали) $\varphi = \varphi\,(x, y) = \text{const}$ и линии тока $\psi = \psi\,(x, y) = \text{const}$ ортогональны в точках пересечения (см. рис. 106). Действительно, вектор скорости представляет собой градиент скалярной функции $\varphi = \varphi(x, y)$:

$$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi.$$

При этом вектор $\overrightarrow{\text{grad}}\,\varphi$ ортогонален линиям $\varphi = \text{const}$, одновременно совпадая по направлению с вектором касательной к линии тока (см. упомянутое выше свойство линии тока).

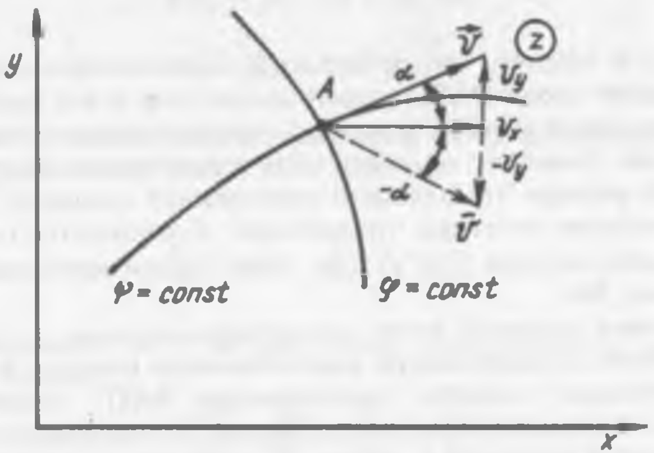


Рис. 106. Взаимное расположение векторов скорости потока $\bar{v}$ и комплексной сопряженной скорости $\check{v}$, линий тока и эквипотенциалей

Понятию "функции тока" можно дать конкретное физическое толкование. Для этого выделим в потоке две соседние линии тока, проходящие через точки A и B (рис. 107).

Объемный расход жидкости через элементарную площадку $\mathrm{d}F = \mathrm{d}l \cdot 1$ на произвольной поверхности AB можно вычислить следующим образом:

$$\mathrm{d}Q = \bar{v} \cdot \mathrm{d}\bar{l} = v_x \mathrm{d}l_x + v_y \mathrm{d}_y = [v_x \cos(x\hat{,}n) + v_y \cos(y\hat{,}n)]\,\mathrm{d}l.$$

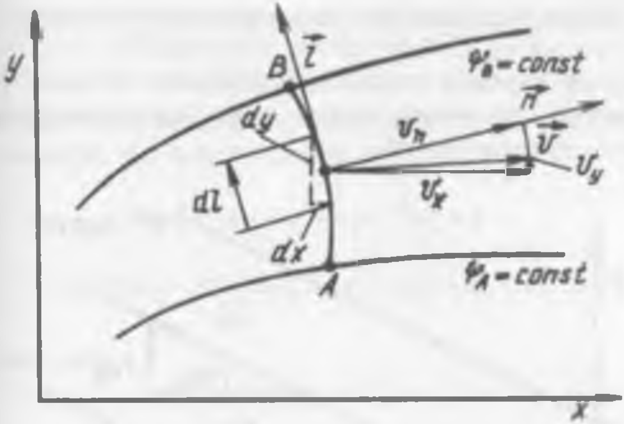


Рис. 107. К определению физического смысла понятия "функция тока"

Рассматривая пары углов со взаимно перпендикулярными сторонами $(n,\hat{x}) - (l,\hat{y})$ и $(n,\hat{y}) - (l,\hat{x})$, получаем

$$dQ = \left[v_x \cos(l,\hat{y}) - v_x \cos(l,\hat{x}) \right] d\bar{l} = v_x dy - v_y dx.$$

Интегрирование полученного выражения дает объемный расход жидкости через площадь AB, т.е. между соседними линиями тока,

$$Q = \int_A^B dQ = \int_A^B dQ v_x dy - v_y dx = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A$$

[при интегрировании использовано выражение (4.5)].

Таким образом установлено, что объемный расход жидкости, протекающей между линиями тока, равен разности между значениями констант соответствующих функций тока, а его величина не зависит от формы линии AB. В дальнейшем целесообразно получить выражения для комплексного потенциала ряда простейших (элементарных) течений, пользуясь которыми можно, как будет показано ниже, "конструировать" сложные течения.

Плоскопараллельное (поступательное) течение

Рассмотрим картину плоскопараллельного течения (рис. 108), характеризуемую наличием линий тока, представляющих собой совокупность прямых линий.

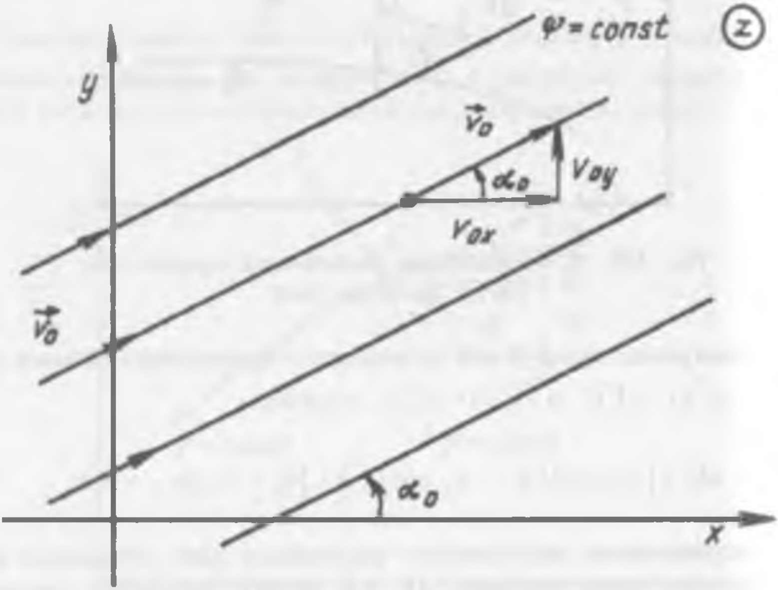


Рис. 108. Картина плоскопараллельного течения

Применим соотношение (4.9) для рассматриваемого течения, используя его очевидное свойство — постоянство скорости во всех точках:

$$\bar{v}(z) = \frac{dW}{dz} = v_0 e^{-i\alpha_0} = v_0(\cos\alpha_0 - i\sin\alpha_0) = \text{const}.$$

После интегрирования последнего выражения, выполняемого для определения искомой величины $W = W(z)$ при условии $v_0 =$ $=$ const и $\alpha_0 =$ const, имеем

$$W(z) = \int \frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z = v_0 e^{-i\alpha_0} z + c. \tag{4.11}$$

Линии тока получаем из соотношения (4.10), выделив предварительно мнимую часть в соотношении (4.11)

$$W(z) = \varphi + i\psi = v_0 e^{-i\alpha_0} z + c =$$

$$= v_0(\cos\alpha_0 - i\sin\alpha_0)(x + iy) + C_1 + iC_2 = \mathrm{const}$$

с учетом того, что

$$C = C_1 + iC_2,$$

$$\psi = \psi(x, y) = v_0(y\cos\alpha_0 - x\sin\alpha_0) + C_2 = \mathrm{const}. \tag{4.12}$$

Отметим, что изменение величины константы интегрирования C в (4.11) приводит к смещению картины течения в плоскости без изменения ее геометрии. Нетрудно получить и выражение для семейства эквипотенциалей.

Течение в окрестности точечного источника (стока) жидкости

Рассмотрим течение в окрестности точки (центра), полагая, что жидкость вытекает из этой точки — источника с одинаковой во всех направлениях радиальной скоростью v_r (рис. 109).

Проанализируем сначала течение в окрестности источника обильностью $+Q$, расположенного в

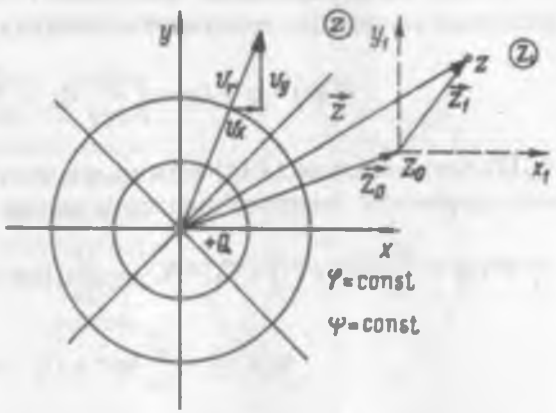


Рис. 109. Картина течения в окрестности источника (стока)

начале координат. Комплексный потенциал рассматриваемого течения определим в той же последовательности, что и для плоскопараллельного течения: в начале получим выражение для $\bar{v} = \bar{v}(z)$ и затем его проинтегрируем.

Учитывая принятые допущения об особенностях течения, имеем (см. рис. 109)

$$v_x = v_r \cos\alpha,$$

$$v_y = v_r \sin\alpha,$$

где
$$v_r = \frac{Q}{2\pi r}. \tag{4.13}$$

Комплексную сопряженную скорость получим, как и ранее, пользуясь соотношением (4.9) и очевидными преобразованиями:

$$\bar{v}(z) = \frac{dW(z)}{dx} = v_x - iv_y = (\cos\alpha - i\sin\alpha) =$$

$$= \frac{Q}{2\pi r}\frac{(\cos\alpha - i\sin\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = \frac{Q}{2\pi z}.$$

После интегрирования последнего выражения имеем комплексный потенциал точечного источника

$$W(z) = \varphi + i\psi = \int \frac{Q}{2\pi z}dz = \frac{Q}{2\pi}\ln z + C. \tag{4.14}$$

Из соотношения (4.14) можно после его преобразования получить уравнения эквипотенциалей и линий тока:

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln\left(re^{i\alpha}\right) + C_1 + iC_2 = \frac{Q}{2\pi}(\ln r + i\alpha) + C_1 + iC_2; \tag{4.15}$$

$$\varphi(x,y) = \frac{Q}{2\pi}\ln r + C_1 = \text{const}; \tag{4.16}$$

$$\varphi(x,y) = \frac{Q}{2\pi}\alpha + C_2 = \text{const}. \tag{4.17}$$

Из соотношений (4.16) и (4.17) вытекает, что линии равного потенциала представляют собой семейство окружностей $r = \text{const}$, а линии тока — семейство лучей $\alpha = \text{const}$. При смещении источника из начала координат в точку z_0 (см. рис. 109) выражение (4.15) с учетом векторного сложения комплексных величин $\bar{z} = \bar{z}_0 + \bar{z}_1$ ($\bar{z}_1$ — координата источника в новой системе координат с центром в z_0) преобразуется к виду

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln z_1 = \frac{Q}{2\pi}\ln(z - z_0) + C. \qquad (4.18)$$

При наличии источника с "отрицательной" обильностью $-Q$, который назовем стоком, вместо (4.15) и (4.18) имеем соответственно

$$W(z) = -\frac{Q}{2\pi}\ln z + C; \quad W(z) = -\frac{Q}{2\pi}\ln(z - z_0) + C.$$

Поскольку радиальная скорость течения изменяется обратно пропорционально радиусу, при $r \to 0$ $v_r \to \infty$; так что в центре источника имеем "особую" точку в области существования аналитической функции.

Циркуляционное течение в окрестности единичного вихря (вихревой точки)

Расположим единичный вихрь, например левого вращения, т.е. против часовой стрелки, в начале координат плоскости z (рис. 110). Предположим, что циркуляция вектора скорости по любому замкнутому контуру s, охватывающему вихрь, равна $\Gamma = \int\limits_L \bar{v}\,d\bar{s}$, где Γ — интенсивность вихря.

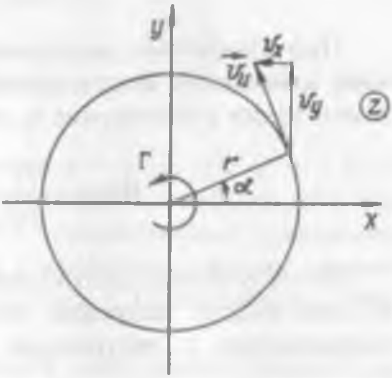


Рис. 110. Картина течения в окрестности единичного вихря

Поскольку частицы жидкости вращаются по дугам окружностей со скоростями, то

$$\Gamma = \oint \bar{v}\, d\bar{s} = v_u 2\pi r.$$

С учетом данного соотношения имеем[1]:

$$\bar{v} = \frac{dW}{dz} = v_x - iv_y = -v_u \sin\alpha - iv_u \cos\alpha =$$

$$= -\frac{i\Gamma}{2\pi r}\frac{(\cos\alpha - i\sin\alpha)(\cos\alpha + i\sin\alpha)}{(\cos\alpha + i\sin\alpha)} = -\frac{i\Gamma}{2\pi z}.$$

После интегрирования последнего соотношения получим комплексный потенциал вихревой точки левого вращения

$$W(z) = -\int \frac{i\Gamma}{2\pi z} dz = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z + C_1 + iC_2, \tag{4.19}$$

а уравнения эквипотенциалей и линий тока (соответствующие простые преобразования опущены) принимают вид

$$\varphi(x, y) = \frac{\Gamma}{2\pi}\alpha + C_1; \tag{4.20}$$

$$\psi(x, y) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r + C_2. \tag{4.21}$$

При изменении направления вращения (вихрь правого вращения) изменяется знак в уравнении (4.19), которое при сдвиге вихревой точки в положение z_0 примет вид

$$W(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi z}\ln(z - z_0) + C_1 + iC_2. \tag{4.22}$$

Из полученных соотношений вытекает, что частицы жидкости в окрестности вихревой точки движутся по концентрическим окружностям с постоянной скоростью v_u, которая изменяется

[1] В преобразованиях учтены соотношения между v_r, v_x и v_y, вытекающие из треугольника скоростей (см. рис. 110)

обратно пропорционально радиусу так, что при $r \to 0$ $v_u \to \infty$, т.е. в центре вихря, имеем особую точку в области аналитической функции.

Рассмотрим следующий вопрос: будет ли потенциальным поток, образованный сложением (суперпозицией) нескольких потенциальных потоков? В этой связи вспомним, что действительная и мнимая части аналитической (дифференцируемой) функции комплексного переменного являются гармоническими функциями двух действительных переменных. Это свойство прямо вытекает из условий Коши — Римана (4.8). Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y}\right] \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x\, \partial y}.$$

После сложения левых и правых частей полученных уравнений имеем

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta^2 \xi = 0. \tag{4.23}$$

Аналогичным путем можно показать, что

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \Delta^2 \eta = 0. \tag{4.24}$$

Поскольку кинематические функции $\varphi = \varphi\,(x, y)$ и $\psi = \psi\,(x, y)$ связаны между собой идентичными условиями, получаем, что они также являются гармоническими, т.е. удовлетворяют уравнению Лапласа (4.23), (4.24) — линейному дифференциальному уравнению в частных производных 2-го порядка с постоянными коэффициентами.

Известно, что линейная комбинация (или сумма) частных решений линейных дифференциальных уравнений является новым (или общим) решением данного уравнения.

Например,

$$\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y) + \ldots + \varphi_n(x, y) = \varphi_\Sigma(x, y) \quad \text{и} \quad \Delta^2\varphi_\Sigma = 0;$$

$$\psi_1(x, y) + \psi_2(x, y) + \psi_n(x, y) = \psi_\Sigma(x, y) \quad \text{и} \quad \Delta^2\psi_\Sigma = 0.$$

Здесь $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ — частные решения уравнения Лапласа, т.е. гармонические функции и одновременно кинематические функции отдельных потенциальных течений. Вследствие гармоничности функции $\varphi_\Sigma = \varphi_\Sigma(x, y)$ и $\psi_\Sigma = \psi_\Sigma(x, y)$ могут рассматриваться как действительная и мнимая части аналитической функции комплексного переменного $W_\Sigma(z) = \varphi_\Sigma + i\,\psi_\Sigma$, представляющей собой комплексный потенциал результирующего течения, полученного сложением нескольких (n) потенциальных течений.

Таким образом, сложением нескольких простых (элементарных) течений можно образовать более сложный потенциальный поток, описываемый комплексным потенциалом течения

$$W_\Sigma(z) = W_1(z) + W_2(z) + \ldots + W_n(z),$$

где $W_1(z)$, $W_2(z)$, ..., $W_n(z)$ — комплексные потенциалы слагаемых течений.

Контрольные вопросы к §27

1. В чем заключается связь теории функций комплексного переменного и теории потенциального течения несжимаемой жидкости?

2. С какой целью целесообразно определять функцию комплексного потенциала $W = W(z)$?

3. Каково взаимное расположение линий тока и эквипотенциалей?

4. Каков физический смысл понятия "функции тока"?

5. Дать обоснование возможности сложения потенциальных потоков несжимаемой жидкости.

§28. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРОФИЛЯ КРЫЛА В СВОБОДНОМ ПОТОКЕ

Определение комплексного потенциала течения — функции $W = W(z)$ — позволяет, как будет показано далее, рассчитывать также и динамические характеристики, характеризующие воздиствие потока на погруженное в него тело или систему тел, например на изолированный профиль крыла или совокупность профилей — гидродинамическую решетку турбомашины. Соответствующие соотношения получены из фундаментальных теорем (формул) Блазиуса — Чаплыгина и Жуковского.

Формулы Блазиуса — Чаплыгина для аэродинамической силы и момента силы, действующих на профиль крыла в свободном потоке

Рассмотрим обтекание профиля потенциальным потоком несжимаемой жидкости (рис. 111); при этом набегающий на профиль поток, строго говоря, в бесконечности перед профилем будем считать плоскопараллельным. Возвращаясь к рассмотренной ранее концепции невозмущенного телом потока, мы, таким образом, будем считать его плоскопараллельным. Поскольку в идеальном потоке возмущения, вносимые телом в поток, распространяются на бесконечное расстояние ввиду отсутствия демпфирующего воздействия вязкости, мы можем рассматривать поток плоскопараллельным только на бесконечном от тела расстоянии.

Вычислим равнодействующую $P = \oint\limits_s p\bar{n}\,\mathrm{d}S$, характеризующую воздействие сил давления на тело в потоке, начав вычисления с определения проекций этой силы P_x и P_y.

При принятом направлении вычисления контурных интегралов — против часовой стрелки — имеем:

$$P_x = \oint\limits_s \mathrm{d}P_x = \oint\limits_s p\cos(\widehat{n,x})\,\mathrm{d}S = -\oint\limits_s p\,\mathrm{d}y,$$

$$P_y = \oint\limits_s \mathrm{d}P_y = \oint\limits_s p\cos(\widehat{n,y})\,\mathrm{d}S = \oint\limits_s p\,\mathrm{d}x, \qquad (4.25)$$

Здесь $\bar{n}$ — внешняя по отношению к области течения нормаль к контуру профиля s (см. рис. 111).

Можно убедиться в том, что результат вычислений по формулам (4.25) не зависит от положения элементарного отрезка $\mathrm{d}s$ на профиле (на его спинке или вогнутой стороне) при зафиксированном направлении обхода.

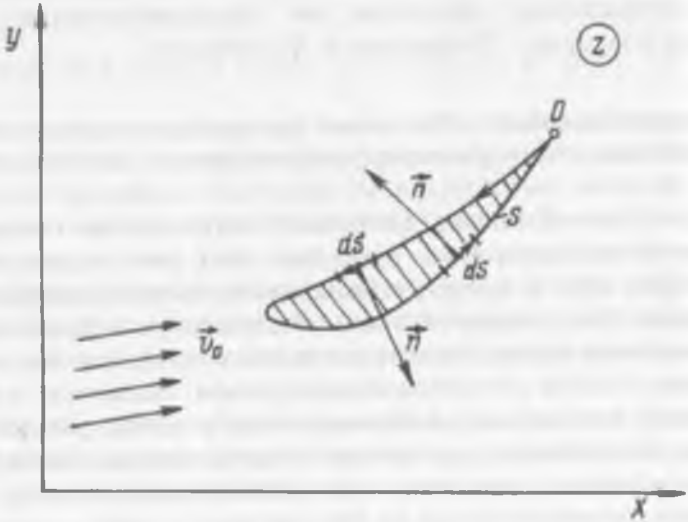


Рис. 111. К выводу формулы Блазиуса — Чаплыгина для силы, действующей на профиль в потоке

Свяжем с помощью уравнения Бернулли статическое давление в потоке на поверхности крыла p со скоростью потока v

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = p^* = C.$$

Тогда соотношения (4.25) примут следующий вид:

$$P_x = -\oint_s \left(C - \frac{\rho v^2}{2} \right) dy = -\oint_s C\, dy + \oint_s \frac{\rho v^2}{2} dy = \frac{\rho}{2} \oint_s v^2 dy,$$

$$P_н = \oint_s \left(C - \frac{\rho v^2}{2} \right) dx = -\frac{\rho}{2} \oint_s v^2 dx.$$

Модуль скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ можно определить через выражение для комплексной сопряженной скорости v. Действительно,

$$\bar{v} = \frac{dW(z)}{dz} = v_x - iv_y = ve^{-i\alpha};$$

отсюда модуль скорости

$$v = \frac{dW(z)}{dz} e^{i\alpha}.$$

С учетом полученного соотношения перепишем выражения для P_x и P_y:

$$P_x = \frac{\rho}{2} \int_s \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 e^{i2\alpha} dy,$$

$$P_y = \frac{\rho}{2} \int_s \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 e^{i2\alpha} dx.$$

Последние соотношения позволяют определить равнодействующую силу в комплексной плоскости. По аналогии с комплексной сопряженной скоростью определим и комплексную сопряженную силу:

$$\overline{P} = P_x - iP_y.$$

$$\overline{P} = \frac{i\rho}{2} \oint_s \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 e^{i2\alpha} (dy - i\,dx) =$$

$$= \frac{i\rho}{2} \oint_s \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 e^{i2\alpha} (dx - i\,dy).$$

Отрезок $dz = dx + i dy = |dz| e^{i\alpha}$ в плоскости z сопоставим с сопряженным отрезком $d\bar{z} = dx - i dy = |dz| e^{-i\alpha}$. Нетрудно убедиться, что $d\bar{z} = dz e^{-i2\alpha}$.

Отсюда окончательное выражение формулы Блазиуса – Чаплыгина

$$\bar{P} = P_x - iP_y = \frac{i\rho}{2}\oint_s \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz. \tag{4.26}$$

Вычислим теперь момент силы $\bar{P}$ относительно начала координат, если радиус-вектор точки приложения силы в плоскости z равен $\bar{h}(x, y, 0)$. Элементарный момент силы, действующий в рассматриваемой плоскости и создающий вращение относительно оси z (не путать с обозначением z комплексной плоскости $z = x + iy$), определяется векторным произведением $\bar{h}$ и $d\bar{P}$.

$$dM = \left(d\bar{M}\right)_z = \left(\bar{h} \times d\bar{P}\right)_z = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & 0 \\ dP_x & dP_y & 0 \end{vmatrix} = x dP_y - y dP_x.$$

Дифференциал силы $\bar{P}$ в соответствии с (4.26) запишем в виде

$$d\bar{P} = dP_x - i dP_y = \frac{i\rho}{2}\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz.$$

После умножения обеих сторон последнего выражения на $z = x + iy$ имеем:

$$x dP_x + y dP_y + i\left(y dP_x - x dP_y\right) =$$

$$= x dP_x + y dP_y - i dM = \frac{i\rho}{2}\left(\frac{dW}{dz}\right)^2 z dz.$$

В результате величина $\mathrm{d}M$ соответствует после деления последнего равенства на i действительной части (сокращенно д.ч.) выражения $\left[-\frac{\rho}{2}\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right)^2 z\mathrm{d}z\right]$.

В итоге, после интегрирования получаем вторую формулу Блазиуса — Чаплыгина для момента

$$M = \text{д.ч.}\left[-\frac{\rho}{2}\oint_s \left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right)^2 z\mathrm{d}z\right].$$

Формула Н.Е.Жуковского для подъемной силы крыла в плоскопараллельном потоке

Формулу Н.Е.Жуковского для подъемной силы крыла можно получить традиционным для механики путем, используя теорему импульсов (изменения количества движения). Вместе с тем ее можно получить непосредственно из первой формулы Блазиуса — Чаплыгина, как это было проделано профессором В.В.Уваровым.
Рассмотрим обтекание профиля крыла плоскопараллельным потоком, при этом, как и ранее при выводе формул Блазиуса — Чаплыгина, используем комплексную сопряженную величину, в данном случае скорости $\bar{v}_0 = v_0 e^{-i\alpha_0}$ (рис. 112), причем физическая скорость $\bar{v}_0 = v_0 e^{i\alpha_0}$.

В произвольной точке области течения — комплексной плоскости z — комплексная сопряженная скорость $\bar{v} = \bar{v}(z)$ может быть представлена как результат суперпозиции скорости невозмущенного (плоскопараллельного) потока v_0 и скорости V, обусловленной возмущающим воздействием крыла на поток:

$$\bar{v} = \frac{\mathrm{d}W(z)}{\mathrm{d}z} = v_x - iv_y = v_0 e^{-i\alpha_0} + V(z).$$

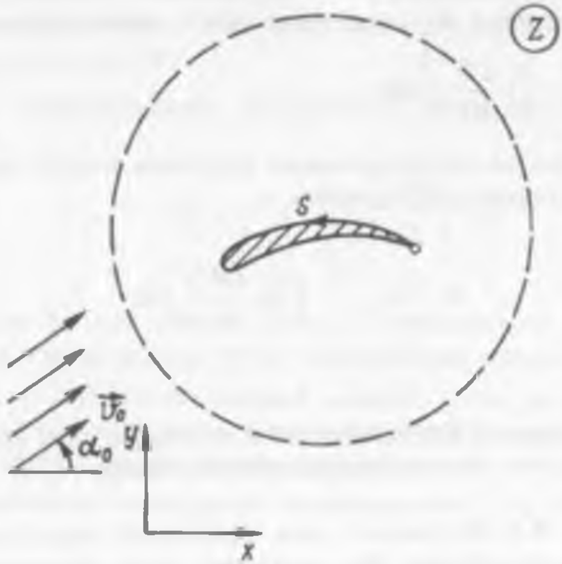


Рис. 112. К выводу формулы Н.Е.Жуковского для подъемной силы, действующей на профиль в потоке

Отметим, что, как сказано выше, функция $V(z)$ должна изменяться таким образом, чтобы выполнялось условие

$$z \to \infty, \qquad V(z) \to 0, \tag{4.27}$$

соответствующее наличию невозмущенного идеального потока только на бесконечном удалении от крыла.

Вывод формулы Н.Е.Жуковского выполним по следующим этапам.

1. Вычислим контурный интеграл $\oint\limits_K \overline{v}(z)\,dz$ по произвольному контуру K, охватывающему профиль, полагая отсутствие источников и стоков внутри контура:

$$\oint\limits_K \bar{v}(z)\,dz = \oint\limits_K (v_x - iv_y)(dx + i\,dy) = \oint\limits_K (v_x dx + v_y dy) +$$

$$+i\oint\limits_K (v_x dy - v_y dx) = \oint\limits_K \bar{v}\,d\bar{z} + i\oint\limits_K (v_x dy - v_y dx) =$$

$$= \Gamma + i\oint\limits_K d\psi = \Gamma + i\oint\limits_K dQ = \Gamma.$$

Нетрудно заметить, что при вычислении интеграла $\oint\limits_K (v_x dy - v_y dx) = d\psi$ учтено ранее полученное соотношение (4.5) и затем соотношение, устанавливающее равенство $d\psi = dQ$. Интеграл $\oint\limits_K dQ = 0$ при отсутствии источников и стоков внутри контура s, поскольку равен нулю расход через замкнутый контур, и, кроме того,

$$\oint\limits_K \bar{v}(z)\,dz = \oint\limits_K [\bar{v}_0 + V(z)]\,dz = \oint\limits_K \bar{v}_0 dz + \oint\limits_K V(z)\,dz =$$

$$= \bar{v}_0 \oint\limits_K dz + \oint\limits_K V(z)\,dz = \oint\limits_K V(z)\,dz = \Gamma.$$

Таким образом, циркуляция вектора скорости Г по произвольному контуру К непосредственно определяется введенной нами возмущающей функцией $V(z)$. Другими словами, возмущающее воздействие крыла на плоскопараллельный поток сводится к индуцированию чисто циркуляционного течения, интенсивность которого (величина Г) не зависит от размеров и формы замкнутого контура, окружающего крыло (в том числе она может быть вычислена и по контуру профиля s) (см. рис. 112).

2. Разложим функцию $V(z)$ в ряд Лорана:

$$V(z) = \frac{a_{-n}}{z^n} + \frac{a_{-(n-1)}}{z^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} +$$

$$+a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n. \quad (4.28)$$

Поскольку функция $V(z)$ должна удовлетворять условию (4.27), то разложение (4.28) не должно иметь свободного члена и членов с положительными степенями z ("регулярной" части разложения), т.е. имеет лишь главную часть – члены с отрицательными степенями z.

3. С учетом полученных соотношений вычислим силу $\overline{P}$ из формулы (4.26)

$$\overline{P} = P_x - Pi_y = (i\rho / 2)\oint_s \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz =$$

$$= (i\rho / 2)\oint_s \left[v(z)\right]^2 dz = (i\rho / 2)\oint_s \left[\overline{v}_0 + V(z)\right]^2 dz = \quad (4.30)$$

$$= (i\rho / 2)\left\{\overline{v}_0^2 \oint_s dz + 2\overline{v}_0 \oint_s \overline{V} dz + \oint_s V^2 dz\right\} = i\rho\overline{v}_0\Gamma =$$

$$= i\rho v_0 e^{-i\alpha_0}\Gamma = i\rho v_0(\cos\alpha_0 - i\sin\alpha_0)\Gamma.$$

При вычислении первого и третьего интегралов в фигурной скобке учтено, что в первом интеграле $\overline{v}_0 = \text{const}$, а в третьем – подынтегральная функция не содержит членов с z^{-1}, т.е. оба интеграла обращаются в нули.

Полученное соотношение — формула Н.Е.Жуковского для силы, действующей на крыло в потоке, — позволяет вычислить раздельно проекции физической силы $\overline{P}$, т.е. значения P_x и P_y:

$$P_x = \rho v_0 \sin\alpha_0 \Gamma,$$

$$P_y = -\rho v_0 \cos\alpha_0 \Gamma.$$

Полученные выражения полностью соответствуют как физическому смыслу задачи (см. рис. 111), так и правилу Н.Е.Жуковского: "Для получения направления подъемной силы вектор $\bar{v}_0$ надо повернуть на 90° против циркуляции". Сила $\bar{P}$ всегда перпендикулярна к $\bar{v}_0$, в чем легко убедиться, рассмотрев скалярное произведение $v_0 P$. Получаем ноль. В условиях задачи есть только сила $\bar{P}$, перпендикулярная к вектору $\bar{v}_0$, силы сопротивления нет. Этот результат известен как "Парадокс Даламбера".

Из сказанного выше, в частности, вытекает, что для создания подъемной силы, действующей, например, на профиль крыла, необходимо, чтобы в его окрестности сформировалось поле скоростей, циркуляция которого по произвольному замкнутому контуру вокруг крыла отличалась бы от нуля. Нетрудно убедиться в том, что для тела несимметричной формы, каковым является крыло, величина циркуляции, а следовательно, и подъемной силы при прочих равных условиях возрастает с увеличением кривизны его контура. Вместе с тем (см. гл. 6) при обтекании сильно изогнутых профилей реальным — вязким — потоком, в особенности с большими углами атаки i (рис. 113), может произойти ранний отрыв пограничного слоя от поверхности, что приведет к снижению величины G и подъемной силы.

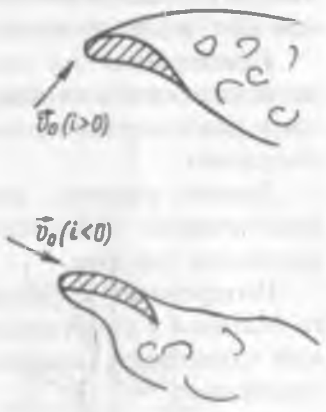


Рис. 113. Картины обтекания профилей с большими углами атаки

В этом случае применяют различные способы "управления пограничным слоем", например отсос заторможенной части пристенного слоя в предотрывной зоне или, наоборот, вдув ее в той же зоне. В обоих случаях профиль пограничного слоя становится "более заполненным" и соответственно более устойчивым к отрыву.

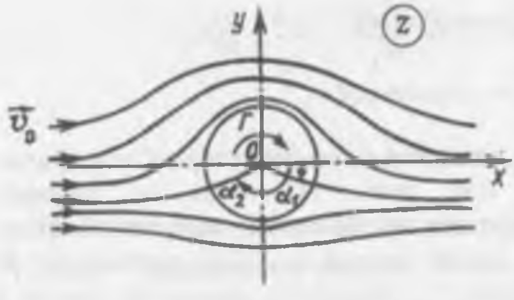


Рис. 114. Картина обтекания вращающегося цилиндра

Для тела симметричной формы, например цилиндра, асимметрии распределенной по контуру скорости и давления относительно направления вектора скорости набегающего потока, а следовательно, конечного значения подъемной силы можно достичь вращением цилиндра относительно точки O (рис. 114). При этом за счет воздействия вращения возникает циркуляционное течение в окрестности цилиндра с интенсивностью Γ, что по указанной выше теореме Жуковского и обеспечивает возникновение подъемной силы.

Приведенная на рис. 114 картина линий тока соответствует комплексному потенциалу сложного потока, полученного сложением равномерного потока вдоль оси x, диполя и вихря в начале координат.

Данное явление, известное как "эффект Магнуса", находит практическое применение при создании так называемых цилиндрических парусов.

Интересным представляется практическое применение эффекта Магнуса в спортивных играх для подачи мяча по криволинейной траектории, например, в обход футбольной "стенки" ударом "сухой лист".

Контрольные вопросы к §28

1. Дать физическое обоснование граничного условия (4.27).
2. Какова физическая природа эффекта Магнуса?

§29. ПЛОСКИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ ТУРБОМАШИН

Турбомашины — гидравлические, паровые, газовые турбины, а также насосы, вентиляторы, компрессоры — служат для преобразования потенциальной энергии рабочего тела в механическую работу (турбины) или для транспортирования жидкости и повышения ее потенциальной энергии при использовании подводимой энергии (насосы, компрессоры).

Преобразование потенциальной энергии в механическую работу (или наоборот) происходит в лопаточном аппарате (гидродинамическая решетка) турбомашин в результате взаимодействия лопаток с потоком рабочего тела, при котором изменяется момент количества движения любого контрольного объема протекающей жидкости, а следовательно, создается соответствующий момент сил, определяющий совершаемую в турбине или затрачиваемую в насосе (компрессоре) механическую работу. В реальной турбомашине лопаточный аппарат представляет собой пространственную конструкцию — кольцевую гидродинамическую решетку, т.е. систему идентичных конструктивных элементов (лопаток), расположенных между двумя соосными поверхностями вращения на равном расстоянии одной от другой (шаг решетки) вокруг оси вращения.

На рис. 115 в качестве примера представлена схема лопаточного аппарата осевой газовой турбины.

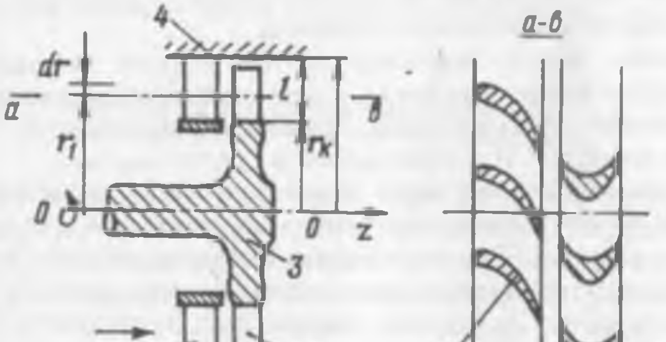


Рис. 115. Ступень осевой турбомашины:
1 — неподвижная кольцевая решетка соплового аппарата;
2 — вращающаяся решетка рабочего колеса; *3* — рабочее колесо;
4 — корпус

Применительно к газовым турбинам в лопаточном аппарате имеет место пространственное (трехмерное) нестационарное неизотермическое течение вязкой сжимаемой жидкости, теоретическое исследование которого связано с решением полной системы дифференциальных уравнений, описывающих это течение. В такой постановке рассматриваемая задача принципиально может быть решена, например, численными методами с применением ЭВМ. Однако практические возможности сегодняшнего поколения ЭВМ делают решение этой задачи в настоящее время нереальным. Поэтому объектом постановки и решения теоретических задач, связанных с исследованием гидродинамических решеток, являются не реальные, а схематизированные потоки или различные теоретические модели.

Наиболее разработанной к настоящему времени является модель двумерного (плоского или осесимметричного) стационарного (установившегося) течения невязкой (идеальной) жидкости. На первом этапе развития теории гидродинамических решеток разрабатывалась наиболее простая модель двумерного течения в слое постоянной толщины — установившегося плоского течения идеальной несжимаемой жидкости. При этом эффективно использовались методы исследования потенциального (безвихревого) течения идеальной несжимаемой жидкости.

Поясним способ перехода от трехмерного к двумерному (плоскому) течению в решетке, связанный с применением основополагающей гипотезы об "элементарной ступени" или о "плоских сечениях" Н.Е.Жуковского и С.А.Чаплыгина.

Рассмотрим течение через решетку, ограниченную по высоте лопаток l двумя цилиндрическими поверхностями корпуса радиусом $r_к$ и втулки $r_{вт}$. Течение, близкое к описываемому, характерно для ступеней турбомашины при достаточно больших отношениях среднего диаметра $d_{ср}$ к длине лопаток l ($d_{ср}/l \geq 8...10$). Выделим в потоке "слой жидкости постоянной толщины" между радиусами r_1 и (r_1 + dr), который называют также "элементарной ступенью". После развертки цилиндрического сечения радиусом r на плоскость получаем плоскую гидродинамическую решетку, например, в плоскости $x - y$, обтекаемую в простейшем случае установившимся потенциальным потоком несжимаемой жидкости (см.

рис. 115). В представленной на рис. 115 решетке поток рассматривается без учета вращения: для неподвижного соплового аппарата это соответствует действительности, а в рабочем колесе справедливо для относительного движения. При переходе от кольцевой решетки к плоской для выполнения условия "периодичности" течения в межлопаточных каналах необходимо предположить число лопаток в плоской решетке стремящимся к бесконечности.

В теории гидродинамических решеток решают две основные задачи — прямую и обратную. Прямая задача заключается в определении параметров потока в плоскости течения при заданных геометрических параметрах решетки и заданных граничных условиях в потоке на входе в решетку (в теории турбомашин показано, что для определения основных силовых характеристик лопаточного аппарата — мощности и крутящего момента достаточно ограничиться определением параметров потока за решеткой). Обратная задача заключается в проектировании (профилировании) решетки при заданных параметрах на входе в решетку и выходе из нее.

Контрольные вопросы к §29

1. Дать характеристику физической картины течения в ступени турбомашины.
2. Пояснить содержание прямой и обратной задач теории гидродинамических решеток.

§30. МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА РЕШЕТОК

Интегральные уравнения могут быть получены различными способами и, в частности, путем подбора системы "особенностей", создающей картину течения, идентичную картине течения через решетку. Поэтому данный метод называется также "методом особенностей" (вихревым) или методом наложения потоков, так как при таком подходе к решению задачи на невозмущенный плоскопараллельный поток накладывается поток, индуцированный системой особенностей, например вихрей.

Принципиально применение метода особенностей для изучения течения в решетках ничем не отличается от его применения при расчете обтекания одиночных тел. Точно так же, используя различные комбинации особенностей, можно получить различные варианты интегральных уравнений.

В значительной мере данное направление расчета гидродинамических решеток развито отечественными учеными: И.Н.Вознесенским, Н.Е.Кочиным, А.Ф.Лесохиным, П.В.Мелентьевым, В.В.Уваровым, М.И.Жуковским и др. Известны также зарубежные работы Г.Шлихтинга, Н.Шольца, Э.Мартенсена, С.Либляйна и др. Разработка интегральных методов началась еще в тридцатых годах, однако их стали применять лишь через 20 лет. Это связано с тем, что численное решение интегральных уравнений практически невозможно при ручном счете. Однако, как будет показано далее, эти уравнения легко решаются на ЭЦВМ с использованием стандартных программ решения систем алгебраических уравнений.

Широкое использование ЭЦВМ в практике расчетных исследований и обусловило внедрение рассматриваемого метода, который к настоящему времени является наиболее распространенным.

Вывод интегрального уравнения

Эффективным способом определения скорости потока в гидродинамической решетке является использование соотношений, связывающих аналитические функции внутри (вне) области с ее контурными значениями, например интегральных формул Коши. В области D (рис. 116), расположенной в плоскости комплексного переменного z, имеем для аналитической функции $f(z)$ интеграл типа Коши[1]

$$f(z)_a = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L+}\frac{f(z)_{\text{к}}\,dz_{\text{к}}}{z_{\text{к}}-z_a}, \tag{4.30}$$

где $f(z)_a$ — значение искомой функции в некоторой точке a области D; $f(z)_{\text{к}}$ — контурные значения искомой функции; $z_{\text{к}}$ — значение комплексной переменной на контуре.

Отметим, что интеграл типа Коши справедлив лишь для аналитических функций.

---

[1] Здесь и далее интеграл с обходом контура против часовой стрелки обозначается знаком плюс, а по часовой стрелке — знаком минус.

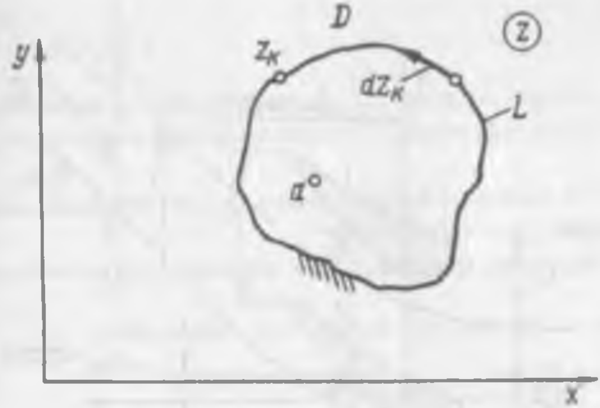


Рис. 116. К определению аналитических функций комплексного переменного с помощью интегральной формулы Коши (4.30)

Обобщим соотношение (4.30) для решетчатой области, рассмотрев установившееся течение несжимаемой идеальной жидкости в плоской гидродинамической решетке, составленной из бесконечно большого числа профилей и расположенной в плоскости z (рис. 117). Решетка геометрически полностью определена: заданы координаты профилей s, причем вследствие конгруэнтности профилей достаточно задать координаты одного из них; задан шаг решетки t. Заданы также параметры потока на входе в решетку (теоретически в бесконечности перед решеткой), например, скорость v_1 и угол α_1 потока с положительным направлением оси x. Требуется определить скорость потока в любой точке плоскости течения.

Однако в инженерных задачах часто не требуется определять поток полностью по всей плоскости течения. Для определения силового взаимодействия потока с решеткой и ее КПД достаточно найти лишь распределение скорости по контуру профиля — функцию $v(s)$, а также скорость v_2 и угол α_2 потока в бесконечности за решеткой. Математически рассматриваемую область течения можно характеризовать как бесконечносвязную решетчатую область с размером $0 \le z \le \infty$. Обобщение интеграла типа Коши для такой области получается простым и наглядным, если рассматриваемую область z предварительно конформно отобразить в плоскость ζ.

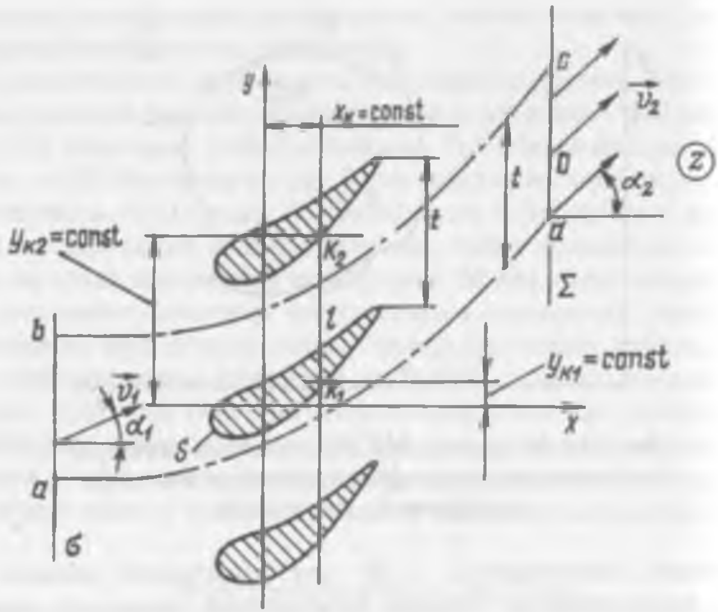


Рис. 117. Расчетная схема течения в плоской гидродинамической решетке

Вследствие периодичности течения в решетке функция отображения также должна быть периодической (для конформности отображения она должна быть, разумеется, и аналитической). Используем для отображения функцию

$$\zeta = \xi + i\eta = e^{\frac{2\pi z}{t}} = \exp\left(\frac{2\pi z}{t}\right). \tag{4.31}$$

Учитывая, что $z = x + iy$ и $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\alpha}$, получаем соотношение для определения модуля ρ и аргумента α комплексного переменного ζ:

$$e^{\frac{2\pi}{t}z} = e^{\frac{2\pi}{t}(x+iy)} = e^{\frac{2\pi}{t}x}\, e^{\frac{2\pi}{t}iy} = \rho e^{i\alpha}, \tag{4.32}$$

где $\rho = e^{\frac{2\pi}{t}x}$, $\alpha = \frac{2\pi}{t}y$.

На основании соотношения (4.32) можно сделать некоторые выводы о геометрии произведенного с помощью (4.31) преобразования.

Прямые $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, расположенные в плоскости z, преобразуются соответственно в окружности радиусом $\rho = e^{\frac{2\pi}{t}x}$ и лучи $\alpha = \frac{2\pi}{t}y$, исходящие из начала координат в плоскости ζ (рис. 118).

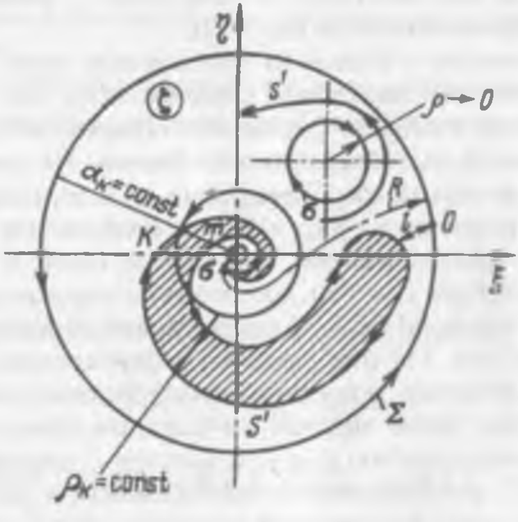


Рис. 118. Область конформного отображения течения в плоской гидродинамической решетке с помощью функции (4.31)

Конгруэнтные точки, расположенные с периодом, равным t (например, K_1 и K_2 — на рис. 117), отобразятся в точки, расположенные на окружности радиусом $\rho_K = e^{\frac{2\pi}{t}x_K}$ с угловым шагом (периодом), равным 2π, поскольку для этих точек выполняется соотношение

$$\alpha = \frac{2\pi}{t}\left(y + nt\right) = \frac{2\pi}{t} y + n2\pi. \quad (4.33)$$

Таким образом, область течения в плоскости z с периодом, равным t, отображается в область ζ с периодом, равным 2π, представляющую собой так называемую бесконечнолистную поверхность Римана. Каждый лист этой поверхности соответствует одной из полос в плоскости z, образованной двумя конгруэнтными линиями bc и ad (см. рис. 117) либо любыми иными линиями, отстоящими одна от другой на расстояние t. Границы шаговой полосы ad, bc соответствуют в плоскости ζ линии (разрезу) R (штрихпунктирная линия на рис. 118).

Картины течения в каждой из этих шаговых полос вследствие периодичности течения идентичны. Следовательно, для анализа характеристик течения в области ζ возможно ограничиться изучением его лишь на одном из листов поверхности Римана. На рис. 117 показана одна из шаговых полос с границами ad и bc, содержащая один из профилей решетки; на рис. 118 — ее отображение в плоскости ζ линии $ab = t$, расположенной, как сказано выше, в бесконечности перед решеткой (при $x \to -\infty$), соответствует окружность σ радиусом $\rho \to 0$ (4.32); линии cd ($x \to \infty$) соответствует окружность $\Sigma(\rho \to \infty)$. Профиль s на рис. 117 отображается в спиралевидный контур s' на рис. 118. Областью течения в плоскости конформного отображения является, таким образом, двухсвязная область, ограниченная снаружи окружностью $\rho \to \infty$, а изнутри — окружностью $\rho \to 0$ и контуром s', которую можно преобразовать в односвязную область разрезом (Ol) (см. рис. 118).

Запишем интеграл типа Коши для определения комплексной сопряженной скорости $\bar{v}(\zeta)$ в области ζ, являющейся однозначной аналитической функцией [производной от аналитической функции $W(\zeta)$]:

$$\bar{v}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L+} \frac{\bar{v}(\zeta)_{\text{к}}\, d\zeta_{\text{к}}}{\zeta_{\text{к}} - \zeta}. \quad (4.34)$$

Контур области L в плоскости ζ составлен из окружности Σ, разреза Ol, контура s', разреза R и окружности σ (см. рис. 118). Соответственно интеграл (4.34) может быть представлен суммой интегралов по отдельным перечисленным участкам контура. При этом интегралы на разрезах Ol и lO, bc и da при сложении попарно дадут сумму, равную нулю. Следовательно, интеграл (4.34) может быть представлен в виде суммы интегралов

$$\bar{v}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\Sigma+} \frac{\bar{v}(\zeta)_\kappa \, d\zeta_\kappa}{\zeta_\kappa - \zeta} + \int\limits_{\sigma-} \frac{\bar{v}(\zeta)_\kappa \, d\zeta_\kappa}{\zeta_\kappa - \zeta} + \int\limits_{s'-} \frac{\bar{v}(\zeta)_\kappa \, d\zeta_\kappa}{\zeta_\kappa - \zeta}\right), \qquad (4.35)$$

при вычислении которых область существования функции должна оставаться слева в соответствии с правилом вычисления контурных интегралов.

Вычислим отдельно каждый из этих интегралов, предварительно определив $\bar{v}(\zeta)_\kappa$ на контурах Σ и σ. По определению:

$$\bar{v}(\zeta)_\kappa = \int\limits_{\Sigma+} \frac{d\dot{W}(\zeta)_\kappa}{d\zeta_\kappa}.$$

При конформном отображении на сходственных участках

$$W(z)_\kappa = W(\zeta)_\kappa + \text{const}.$$

Следовательно, $W(z)_{cd} = W(\zeta)_\Sigma$; $W(\zeta)_{ab} = W(\zeta)_\sigma$ (с точностью до постоянной). В бесконечности за решеткой и перед ней имеем плоскопараллельные потоки, не возмущенные решеткой, с комплексными потенциалами

$$W(z)_{ab} = v_1 e^{-i\alpha_1} z_\kappa,$$

$$W(z)_{cd} = v_2 e^{-i\alpha_2} z_\kappa.$$

Из соотношения (4.31) получаем для точек на участках контура ab и cd

$$z_к = \frac{t}{2\pi}\ln\zeta_к, \quad W(z)_{ab} = v_1 e^{-i\alpha_1}\frac{t}{2\pi}\ln\zeta_к,$$

$$W(z)_{cd} = v_2 e^{-i\alpha_2}\frac{t}{2\pi}\ln\zeta_к, \quad \bar{v}(\zeta)_{к_{cd}} = v_2 e^{-i\alpha_2}\frac{t}{2\pi}\frac{1}{\zeta_к} =$$

$$= \frac{t}{2\pi}\frac{v_2(\cos\alpha_2 - i\sin\alpha_2)}{\zeta_к} = \frac{1}{2\pi}\frac{v_2 t\cos\alpha_2 - i\sin\alpha_2}{\zeta_к} = \frac{1}{2\pi}\frac{Q_2 - i\Gamma_2}{\zeta_к}.$$

Аналогичным образом можно получить $\bar{v}(\zeta)_{к_{ab}} = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{Q_1 - i\Gamma_1}{\zeta_к}$.

Здесь $Q_2 = v_2 t\cos\alpha_2$ — объемный расход жидкости в межлопаточном канале на выходе из решетки; $Q_1 = v_1 t\cos\alpha_1$ — то же на входе в решетку; $\Gamma_2 = v_2 t\sin\alpha_2$ — циркуляция вектора скорости на участке cd; $\Gamma_1 = v_1 t\sin\alpha_1$ — то же на ab.

Отметим, что для рассматриваемого случая течения несжимаемой жидкости $Q_1 = Q_2 = Q$.

Перепишем (4.35) с учетом полученных соотношений:

$$\bar{v}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{Q - i\Gamma_2}{2\pi}\int\limits_{\Sigma+}\frac{d\zeta_к}{\zeta_к(\zeta_к - \zeta)} + \right.$$

$$\left. + \frac{Q - i\Gamma_1}{2\pi}\int\limits_{\sigma-}\frac{d\zeta_к}{\zeta_к(\zeta_к - \zeta)} + \int\limits_{s'-}\frac{\bar{v}(\zeta)_к d\zeta_к}{\zeta_к - \zeta}\right] \tag{4.36}$$

Преобразуем вначале подынтегральную функцию в первом и во втором интегралах, заметив, что

$$\frac{1}{\zeta_к - \zeta} - \frac{1}{\zeta_к} = \frac{\zeta}{\zeta_к(\zeta_к - \zeta)},$$

и тогда

$$\frac{\zeta}{\zeta_к(\zeta_к - \zeta)} = \frac{1}{\zeta}\left(\frac{1}{\zeta_к - \zeta} - \frac{1}{\zeta_к}\right),$$

$$\int\limits_{\Sigma+} \frac{d\zeta_к}{\zeta_к(\zeta_к - \zeta)} = \frac{1}{\zeta}\left[\int\limits_{\Sigma+} \frac{1}{\zeta_к - \zeta} - \int\limits_{\Sigma+} \frac{1}{\zeta_к}\right]$$

Подынтегральная функция $\frac{1}{\zeta_к - \zeta}$ имеет особую точку внутри области Σ. По теореме Коши для области, в которой определяется аналитическая функция, при наличии особой точки контурный интеграл равен $2\pi i$, а при отсутствии таковой — нулю. Подынтегральная функция $\frac{1}{\zeta_к}$ имеет особую точку $\zeta = 0$.

Учитывая сказанное выше, определяем интегралы в (4.36):

$$\frac{Q - i\Gamma_2}{2\pi} \int\limits_{\Sigma+} \frac{d\zeta_к}{\zeta_к(\zeta_к - \zeta)} = \frac{1}{\zeta}\frac{Q - i\Gamma_2}{2\pi}\left[\int\limits_{\Sigma+} \frac{d\zeta_к}{\zeta_к - \zeta} -\right.$$

$$\left. - \int\limits_{\Sigma+} \frac{d\zeta_к}{\zeta_к}\right] = \frac{1}{\zeta}\frac{Q - i\Gamma_2}{2\pi}(2\pi i - 2\pi i) = 0;$$

$$\frac{Q - i\Gamma_1}{2\pi} \int\limits_{\sigma-} \frac{d\zeta_к}{\zeta_к(\zeta_к - \zeta)} = \frac{1}{\zeta}\frac{Q - i\Gamma_1}{2\pi}\left[\int\limits_{\sigma-} \frac{d\zeta_к}{\zeta_к - \zeta} -\right.$$

$$\left. - \int\limits_{\sigma-} \frac{d\zeta_к}{\zeta_к}\right] = \frac{1}{\zeta}\frac{Q - i\Gamma_1}{2\pi}(0 + 2\pi i).$$

При этом учтено, что $\int\limits_{\sigma-}\frac{d\zeta_к}{\zeta_к-\zeta}=0$, так как точки ζ расположены вне области σ, т.е. подынтегральная функция в данном случае не имеет особой точки, а $\int\limits_{\sigma-}\frac{d\zeta_к}{\zeta_к}=-2\pi i$, так как обход идет по часовой стрелке, а точка $\zeta=0$ лежит внутри контура σ. Соотношение (4.36) теперь значительно упрощается:

$$\bar{v}(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s'-}\frac{\bar{v}(\zeta)_к d\zeta_к}{\zeta_к-\zeta}+\frac{1}{\zeta}\frac{Q-i\Gamma_1}{2\pi}. \qquad (4.37)$$

С помощью (4.37) можно определить искомую функцию $\bar{v}(\zeta)$, использовав (4.31), а также известные соотношения $\bar{v}(z)=\bar{v}(\zeta)\frac{d\zeta}{dz}$, где

$$\frac{d\zeta}{dz}=\frac{d}{dz}\left(e^{\frac{2\pi}{t}z}\right)=\frac{2\pi}{t}e^{\frac{2\pi}{t}z},$$

тогда

$$\frac{\bar{v}(z)}{\frac{2\pi}{t}e^{\frac{2\pi}{t}z}}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-}\frac{\bar{v}(z)_к dz_к}{e^{\frac{2\pi}{t}z_к}-e^{\frac{2\pi}{t}z}}+\frac{Q-i\Gamma_1}{2\pi}\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{t}z}}.$$

Умножая обе части последнего уравнения на $f(z)=\frac{2\pi}{t}e^{\frac{2\pi}{t}z}$ и производя преобразования подынтегральных функций, получаем

$$\bar{v}(z)=\frac{1}{ti}\int\limits_{s-}\frac{\bar{v}(z)_к dz_к}{e^{\frac{2\pi}{t}(z_к-z)}-1}+\frac{Q-i\Gamma_1}{t}. \qquad (4.38)$$

Преобразуем подынтегральную функцию в (4.38), обозначив $\pi/t=a$, $z_к-z=b$:

$$\frac{1}{e^{\frac{2\pi}{t}(z_к-z)}-1}=\frac{1}{e^{2ab}-1}=\frac{e^{-ab}}{e^{ab}-e^{-ab}}=\frac{\mathrm{ch}(ab)-\mathrm{sh}(ab)}{2\mathrm{sh}(ab)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\mathrm{cth}(ab)-1\right]=\frac{1}{2}\left\{\mathrm{cth}\left[\frac{\pi}{2}(z_к-z)\right]-1\right\},$$

$$\frac{1}{ti}\int\limits_{s-}\frac{\bar{v}(z)_к dz_к}{e^{\frac{2\pi}{t}(z_к-z)}-1}=\frac{1}{2ti}\int\limits_{s+}\bar{v}(z)_к\left\{\mathrm{cth}\left[\frac{\pi}{t}(z_к-z)\right]+1\right\}dz_к=I(z)_к.$$

В последнем интеграле одновременно изменены направление обхода контура при интегрировании и знак аргумента cth; целесообразно также представить этот интеграл как сумму двух интегралов:

$$I(z)_к=\frac{1}{2ti}\left\{\int\limits_{s+}\bar{v}(z)_к\mathrm{cth}\left[\frac{\pi}{t}(z-z_к)\right]dz_к+\int\limits_{s+}\bar{v}(z)_к dz_к\right\}=$$

$$=\frac{1}{2ti}\int\limits_{s+}\bar{v}(z)_к\mathrm{cth}\left[\frac{\pi}{t}(z-z_к)\right]dz_к+\frac{\Gamma}{2ti}.$$

Здесь $\Gamma=\int\limits_{s+}\bar{v}(z)_к dz_к$ — циркуляция скорости на профиле.

Подставив выражение для $I(z_к)$ в (4.38), получим

$$\bar{v}(z)=\frac{1}{2ti}\int\limits_{s+}\bar{v}(z)_к\mathrm{cth}\left[\frac{\pi}{t}(z-z_к)\right]dz_к+\frac{Q-i\Gamma_1}{t}+\frac{\Gamma}{2ti}.$$

Проанализируем выражение $\left(\frac{Q-i\Gamma_1}{t}+\frac{\Gamma}{2ti}\right)$, предварительно преобразовав его:

$$\frac{Q - i\Gamma_1}{t} + \frac{\Gamma}{2ti} = \frac{Q - i\Gamma_1}{t} + \frac{\Gamma i}{2t} = \frac{Q - i\left(\Gamma_1 - \frac{\Gamma}{2}\right)}{t}. \qquad (4.39)$$

На рис. 119 даны треугольники скоростей для рассматриваемого случая течения в решетке, на котором, в частности, показан вектор среднегеометрической скорости $\vec{v}_0 = \dfrac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$, называемый также вектором скорости невозмущенного решеткой потока.

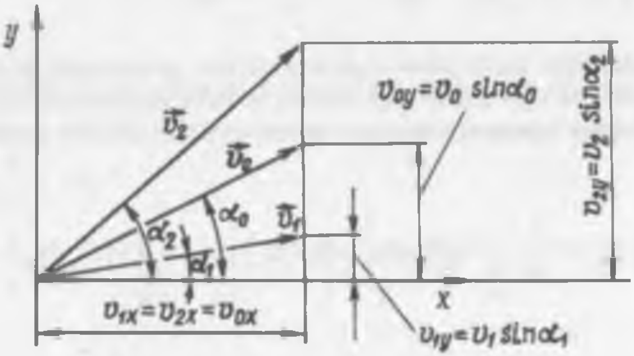


Рис. 119. Треугольники скоростей для течения несжимаемой жидкости в гидродинамической решетке

Очевидны соотношения:

$$v_{2y} - v_{1y} = 2\left(v_{0y} - v_{1y}\right),$$

$$v_{0y} = \frac{v_{1y} + v_{2y}}{2}$$

или

$$v_0 \sin\alpha_0 = \frac{v_1 \sin\alpha_1 + v_2 \sin\alpha_2}{2}.$$

Умножив последнее соотношение на t, получим

$$v_0 \sin\alpha_0 t = \frac{v_1 \sin\alpha_1 t + v_2 \sin\alpha_2 t}{2} \quad \text{или} \quad \Gamma_0 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2}.$$

Однако $\Gamma_2 - \Gamma_1 = v_2 \sin\alpha_2 t - v_1 \sin\alpha_1 t = \Gamma$, поскольку отклонение потока решеткой на угол $(\alpha_2 - \alpha_1)$ гидродинамически интерпретируется как результат наложения на невозмущенный плоскопараллельный поток со скоростью v_0 циркуляционного потока с циркуляцией Γ.

Получаем

$$\Gamma_0 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma}{2} = \Gamma_1 + \frac{\Gamma}{2}$$

и далее

$$\frac{Q - i(\Gamma_1 + \Gamma / 2)}{t} = \frac{Q - i\,\Gamma_1}{t} = \frac{v_0 \cos\alpha_0 t - i\,v_0 \sin\alpha_0 t}{t} =$$

$$= v_0(\cos\alpha_0 - i\sin\alpha_0) = \bar{v}_0. \tag{4.40}$$

С учетом выражения (4.40) перепишем (4.39):

$$\bar{v}(z) = \bar{v}_0 + \frac{1}{2ti}\int_{s+} \bar{v}(z_\text{к})\,\text{cth}\left[\frac{\pi}{t}(z - z_\text{к})\right] dz_\text{к}. \tag{4.41}$$

В результате получили исходное уравнение для определения скорости в плоскости течения z. Впервые уравнение (4.41) выведено академиком Н.Е.Кочиным путем преобразования интеграла Коши (4.34), записанного непосредственно для исходной области течения. Описанный выше вывод принадлежит профессору В.В.Уварову.

Уравнению (4.41) можно дать гидродинамическую интерпретацию. Обратим внимание на то, что в ядре интеграла содержится выражение $\bar{v}(z)_\text{к} dz_\text{к}$, имеющее вполне конкретное гидродинамическое истолкование. Действительно,

$$\bar{v}(z)_{\text{к}}\,\mathrm{d}z_{\text{к}} = \frac{\mathrm{d}W(z)_{\text{к}}}{\mathrm{d}z_{\text{к}}} = \frac{\mathrm{d}\left[\varphi(z)_{\text{к}} + \psi(z)_{\text{к}}\right]\mathrm{d}z_{\text{к}}}{\mathrm{d}z_{\text{к}}} = \frac{\mathrm{d}\varphi(z)_{\text{к}}}{\mathrm{d}z_{\text{к}}}\,\mathrm{d}z_{\text{к}},$$

так как на контуре профиля, являющемся одновременно одной из линий тока (нулевой линией), выполняется условие $\psi(z)_{\text{к}} = \text{const}$.

Теперь можем полагать, что на каждом элементарном участке контура профиля $\mathrm{d}z_{\text{к}}$ помещен вихрь интенсивностью $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\varphi(z)_{\text{к}}}{\mathrm{d}z_{\text{к}}}$, изменяющийся вдоль контура, $\gamma = \bar{v}\,(z)_{\text{к}}$.

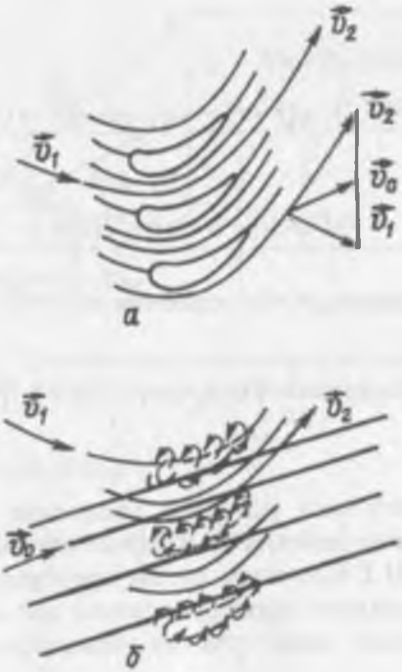


Рис. 120. К физической интерпретации интегрального уравнения (4.41):
а – решетка профилей; *б* – решетка вихревых контуров

Таким образом, механическое воздействие решетки профилей на поток жидкости, заключающееся в повороте потока (рис. 120), можно в соответствии со сказанным выше представить как результат наложения на невозмущенный плоскопараллельный поток со скоростью $\bar{v}_0$ потока, индуцированного системой вихрей, расположенных вдоль контуров, геометрически идентичных контурам профилей рассматриваемой решетки (см. рис. 120). При этом комплексную сопряженную скорость потока в любой точке плоскости можно определить как сумму $\bar{v}(z) = \bar{v}_0 + \bar{v}_i$, где $\bar{v}_i = \frac{1}{2ti}\int\limits_{s} \gamma(z)_{\text{к}} \operatorname{cth}\left[\frac{\pi}{t}(z - z_{\text{к}})\right] dz_{\text{к}}$ — составляющая скорости, индуцированная системой вихрей.

Преобразование интегрального уравнения (4.41)

Для определения скоростей потока в решетке преобразуем уравнение (4.41), предварительно проинтегрировав его по переменной z:

$$\int \bar{v}(z)\,dz = W(z) = \varphi(z) + i\,\psi(z) =$$

$$= \bar{v}_0 z + \frac{1}{2ti}\int\left\{\int\limits_{s+} \bar{v}(z)_{\text{к}} \operatorname{cth}\left[\frac{\pi}{t}(z - z_{\text{к}})\right] dz_{\text{к}}\right\} dz =$$

$$= \bar{v}_0 z + \frac{1}{2ti}\int\limits_{s+}\left\{\int \bar{v}(z)_{\text{к}} \operatorname{cth}\left[\frac{\pi}{t}(z - z_{\text{к}})\right] \frac{t}{\pi}\frac{\pi}{t} d(z - z_{\text{к}})\right\} dz_{\text{к}}. \quad (4.42)$$

Преобразования в ядре внутреннего интеграла были проведены для его приведения к табличному виду $\int \operatorname{cth} u\,du = \ln \operatorname{sh} u$, где $u = \frac{\pi}{t}(z - z_{\text{к}})$. Учтем также, что после изменения порядка интегрирования внутренний интеграл содержит постоянную $\bar{v}(z)_{к}$. Следовательно,

$$\varphi(z) + i\,\psi(z) = \bar{v}_0 z + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s+} \bar{v}(z)_{к} \ln\left\{\mathrm{sh}\left[\frac{\pi}{t}(z - z_{к})\right]\right\} dz_{к}.$$

Рассмотрим выражение в ядре интеграла

$$\ln\left\{\mathrm{sh}\left[\frac{\pi}{t}(z - z_{к})\right]\right\} = \ln\left\{\mathrm{sh}\left[\frac{\pi}{t}(x - x_{к}) + i\frac{\pi}{t}(y - y_{к})\right]\right\} = \ln\{\mathrm{sh}[\alpha + i\beta]\},$$

где $\frac{\pi}{t}(x - x_{к}) = \alpha, \quad \frac{\pi}{t}(y - y_{к}) = \beta.$

Если использовать известные соотношения $\mathrm{ch}(i\beta) = \cos\beta$ и $\mathrm{sh}(i\beta) = i\sin\beta$, то можно получить

$$\ln\{\mathrm{sh}[\alpha + i\beta]\} = \ln\{\mathrm{sh}\,\alpha\,\mathrm{ch}\,(i\beta)\mathrm{ch}\,\alpha\,\mathrm{sh}\,(i\beta)\} =$$

$$= \ln\{\mathrm{sh}\,\alpha\cos\beta + i\,\mathrm{ch}\,\alpha\cdot\sin\beta\} = \ln\left\{\rho e^{i\theta}\right\} = \ln\rho + i\theta.$$

Здесь ρ и θ — соответственно модуль и аргумент комплексной величины, заключенной в фигурные скобки последнего выражения.

Описанные преобразования имели целью разделение действительной и мнимой частей в ядре интеграла, что позволяет получить уравнение линии тока путем установления равенства мнимых членов в обеих частях интегрального уравнения (4.42).

Действительно,

$$\varphi(z) + i\,\psi(z) = \left(v_{x_0} - iv_{y_0}\right)(x + iy) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s+} \bar{v}(z)_{к}\{\ln\rho + i\theta\}\,dz_{к}.$$

Учтя, что $v_{x_0} = v_0\cos\alpha_0$ и $v_{y_0} = v_0\sin\alpha_0$, получим с учетом рассмотренного ранее

$$\psi(z) = v_0(y\cos\alpha_0 - x\sin\alpha_0) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{s+}\bar{v}(z)_\text{к}\ln\rho\, dz_\text{к}.$$

Здесь

$$\ln\rho = \ln\sqrt{\text{sh}^2\alpha\,\cos^2\beta + \text{ch}^2\alpha\,\sin^2\beta} =$$

$$= \ln\sqrt{\left(\frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2}\right)^2\cos^2\beta + \left(\frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}\right)^2\sin^2\beta} =$$

$$= \ln\sqrt{\frac{\text{ch}2\alpha - \cos 2\beta}{2}} = \ln\sqrt{\frac{\text{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x - x_\text{к})\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y - y_\text{к})\right]}{2}}$$

(в последнем преобразовании опущены очевидные промежуточные действия).

Используя известные свойства логарифмов, можно переписать интегральное уравнение следующим образом:

$$\psi(z) = v_0(y\cos\alpha_0 - x\sin\alpha_0) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{s+}\bar{v}(z)_\text{к}\times$$

$$\times\ln\left\{\text{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x - x_\text{к})\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y - y_\text{к})\right]\right\}dz_\text{к} - \frac{\ln 2}{4\pi}\int\limits_{s+}\bar{v}(z)_\text{к}\,dz_\text{к}.$$

Второй интеграл в последнем уравнении есть постоянная величина, пропорциональная циркуляции скорости на контуре профиля. Переписав уравнение с точностью до этой постоянной, получим

$$\psi(z) = v_0(y\cos\alpha_0 - x\sin\alpha_0) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{s+}\bar{v}(z)\times$$

$$\times\ln\left\{\text{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x - x_\text{к})\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y - y_\text{к})\right]\right\}dz_\text{к}.$$

Рассмотрим произведение $\bar{v}(z)_{\text{к}}\mathrm{d}z_{\text{к}}$, где $\bar{v}(z)_{\text{к}} = ve^{-i\beta}$; $\mathrm{d}z_{\text{к}} = \mathrm{d}se^{i\beta_{\text{к}}}$ (рис. 121), причем v есть модуль скорости в точке контура профиля s.

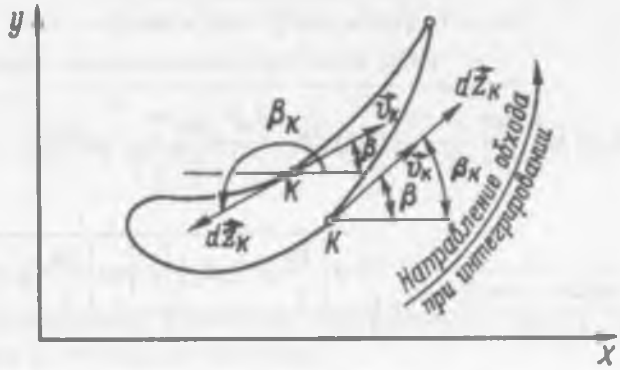


Рис. 121. К выводу интегрального уравнения (4.43)

При совпадении направления обхода контура при интегрировании с направлением скорости имеем равенство $\beta = \beta_{\text{к}}$; на участках контура, где направление обхода противоположно направлению вектора скорости, $\beta = \beta_{\text{к}} - \pi$ (см. рис. 121).

Следовательно,

$$\bar{v}(z)_{\text{к}}\mathrm{d}z_{\text{к}} = ve^{-i\beta}\mathrm{d}se^{i\beta_{\text{к}}} = v\mathrm{d}se^{i(\beta_{\text{к}}-\beta)} =$$

$$= v\mathrm{d}s\left[\cos(\beta_{\text{к}} - \beta) + i\sin(\beta_{\text{к}} - \beta)\right] = \pm v\mathrm{d}s.$$

Теперь интегральное уравнение для функции тока ψ запишется следующим образом:

$$\psi = v_0(y\cos\alpha_0 - x\sin\alpha_0) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{s+} v \times$$

$$\times \ln\left\{\mathrm{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x - x_{\text{к}})\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y - y_{\text{к}})\right]\right\} ds. \qquad (4.43)$$

Отметим, что в выражении (4.43) уже не содержатся комплексные величины, расчет скоростей через решетку проводится в обычной прямоугольной системе координат $x - y$, где ось y совпадает с направлением фронта решетки.

Численное решение интегрального уравнения (4.43)

Полученное уравнение (4.43) принадлежит к классу интегральных уравнений типа Фредгольма и содержит в подынтегральном выражении неизвестную функцию $v(s)$. Кроме того, не известно значение постоянной в левой части уравнения ψ = const. В принципе не известны и величины v_0 и α_0 (поскольку не известны v_2 и α_2), однако, как будет показано далее, выражение, содержащее v_0 и α_0 в уравнении (4.43), можно преобразовать к виду, не содержащему других неизвестных, кроме функции $v(s)$ и значения функции тока ψ.

Таким образом, в исследуемом уравнении (4.43) имеем в качестве неизвестных постоянную ψ и функцию $v(s)$.

Интегральное уравнение, в котором неизвестная функция входит в подынтегральное выражение, можно решить приближенным численным методом, используя аппроксимацию искомой функции на малых участках ее изменения какой-либо простейшей функцией. Например, функцию $v = v(s)$ можно аппроксимировать функцией $v = v(s) \approx v_i$ = const (v_i — значение скорости в центре отрезка Δs_i, рис. 122, что соответствует известному способу приближенного интегрирова-

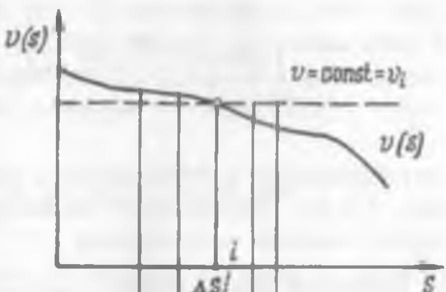


Рис. 122. Графическая интерпретация численного интегрирования по правилу прямоугольника

ния по правилу "прямоугольника", площадь которого приблизительно равна площади криволинейной трапеции под неизвестной функцией $v(s)$).

При этом точность решения повышается как с уменьшением длины отрезка контура (участка интегрирования), что видно на рис. 122 (сравним соотношение площадей криволинейных трапеций и прямоугольников с основаниями Δs_i и $\Delta s_i' < \Delta s_i$), так и с применением более сложных аппроксимирующих функций.

Точно таким же образом можно аппроксимировать другую функцию, образующую ядро интеграла, заменяя переменные $x_к$, $y_к$ постоянными x_i, y_i:

$$\Phi(s) = \ln\left\{\mathrm{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x - x_к)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y - y_к)\right]\right\};$$

$$\Phi_i = \ln\left\{\mathrm{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x - x_i)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y - y_i)\right]\right\},$$

где x_i, y_i — координаты точки i — центра участка Δs_i.

Следовательно, на любом отрезке контура Δs_i интеграл, входящий в выражение (4.43), можно приближенно вычислить по соотношению

$$\int\limits_{\Delta s_i} v \ln\left\{\mathrm{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x - x_к)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y - y_к)\right]\right\} \mathrm{d}s \approx$$

$$\approx v_i \ln\left\{\mathrm{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x - x_к)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y - y_к)\right]\right\} \Delta s_i. \qquad (4.44)$$

Разобъем далее контур профиля исследуемой решетки на конечное число достаточно малых участков, центру каждого участка присвоим порядковый индекс $i = 1, 2, 3, ..., n$ (см. рис. 122).

Тогда с учетом (4.44) интегральное уравнение (4.43) можно привести к простому алгебраическому:

$$\psi = \psi_0 - \frac{1}{4\pi}\left\{\int\limits_{\Delta s_1} v \ln\left\{\mathrm{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x - x_1)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y - y_1)\right]\right\} \mathrm{d}s + \ldots +\right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Delta s_n} v \ln\left\{\mathrm{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x - x_n)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y - y_n)\right]\right\} \mathrm{d}s\right\} \approx$$

$$\approx \psi_0 - \frac{1}{4\pi}\left\{v_1 \ln\left\{\mathrm{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x - x_1)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y - y_1)\right]\right\}\Delta s_1 + \ldots +\right.$$

$$\left. + v_n \ln\left\{\mathrm{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x - x_n)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y - y_n)\right]\right\}\Delta s_n\right\} =$$

$$= \psi_0 - \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{i=n} v_i \ln\left\{\mathrm{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x - x_i)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y - y_i)\right]\right\}\Delta s_i, \qquad (4.45)$$

где $\psi_0 = v_0(y\cos\alpha_0 - x\sin\alpha_0)$.

В уравнении (4.45) содержится $(n + 1)$ неизвестных; это n значений v_i (v_1, v_2, ..., v_n) и ψ. Как сказано выше, ψ_0 приводится к виду, не содержащему новых неизвестных. Следовательно, необходимо записать еще n уравнений, которые в совокупности образовали бы замкнутую систему.

Естественным было бы составить такую систему уравнений путем последовательного использования применения (4.45) для определения функции тока в $(n + 1)$ произвольно взятых точках плоскости течения. Однако при таком подходе система из $(n + 1)$ уравнений получается, как нетрудно заметить, незамкнутой, так как число неизвестных в ней больше числа уравнений.

Действительно, если точки, для которых записаны уравнения (4.45), брать произвольно, то тогда в левых частях этих уравнений значения постоянных ψ будут различными, так как условию $\psi =$

= const удовлетворяют лишь точки, лежащие на одной линии тока. Между тем, систему уравнений можно составить таким образом, чтобы во всех уравнениях левые части были равными одной величине ψ, если уравнения записывать для точек, расположенных на одной линии тока, например на нулевой линии тока – контуре профиля решетки, удовлетворяющего уравнению $\psi =$ = const.

Запишем теперь систему уравнений (4.45) для n точек на контуре исследуемого профиля s (ψ = const), в качестве которых удобно принять центры отдельных участков контура:

$$\psi_1 = \psi = \psi_0 - \frac{1}{4\pi}\left\{v_1 \ln\left\{\operatorname{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x_1 - x_1)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y_1 - y_1)\right]\right\}\Delta s_1 + \ldots +\right.$$

$$\left. + v_n \ln\left\{\operatorname{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x_1 - x_n)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y_1 - y_n)\right]\right\}\Delta s_n\right\}; \tag{4.46}$$

$$\psi_2 = \psi = \psi_0 - \frac{1}{4\pi}\left\{v_1 \ln\left\{\operatorname{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x_2 - x_1)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y_2 - y_1)\right]\right\}\Delta s_1 + \ldots +\right.$$

$$\left. + v_n \ln\left\{\operatorname{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x_2 - x_n)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y_2 - y_n)\right]\right\}\Delta s_n\right\}$$

. . . .

$$\psi_n = \psi = \psi_0 - \frac{1}{4\pi}\left\{v_1 \ln\left\{\operatorname{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x_n - x_1)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y_n - y_1)\right]\right\}\Delta s_1 + \ldots +\right.$$

$$\left. + v_n \ln\left\{\operatorname{ch}\left[\frac{2\pi}{t}(x_n - x_n)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}(y_n - y_n)\right]\right\}\Delta s_n\right\}.$$

Введем обозначения коэффициентов в уравнениях системы (4.46), а именно:

$$\ln\left\{\mathrm{ch}\left[\frac{2\pi}{t}\left(x_j - x_i\right)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}\left(y_i - y_i\right)\right]\right\} = a_{ji}\left(j = 1, 2, \ldots, n\right).$$

Соответственно перепишем (4.46):

$$\psi = \psi_0 - \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{i=n} v_i a_{1i}\Delta s_i$$

$$\psi = \psi_0 - \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{i=n} v_i a_{2i}\Delta s_i \qquad (4.47)$$

. . . .

$$\psi = \psi_0 - \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{i=n} v_i a_{ni}\Delta s_i .$$

Поскольку число уравнений системы $j = n$, а число неизвестных, как сказано выше, равно $(n + 1)$, система (4.47) является незамкнутой — не хватает одного уравнения.

Для получения дополнительного уравнения воспользуемся сведениями о характере обтекания выходной кромки профиля, которое в соответствии с известным постулатом Жуковского — Чаплыгина происходит со сходом с острия задней кромки (рис. 123, *a*).

В практически интересном случае обтекания профиля с конечным углом заострения кромки γ_A при выполнении данного постулата получаем нулевую скорость в точке A: $v_A = 0$ (см. рис. 123, *a*).

Следовательно, если в число участков контура включить участок Δs_A с центром в точке A, то, записав соответствующее уравнение для определения $\psi = \psi_A$ и дополнив этим уравнением систему (4.47), можно получить замкнутую систему уравнений, поскольку это дополнительное уравнение не содержит дополнительных неизвестных (вспомним, что $v_A = 0$).

Таким образом, расчет сведен к решению системы алгебраических линейных уравнений; однако для получения удовлетворительной точности результатов число участков n должно быть достаточно большим — в зависимости от типа решетки $n = 50...100$

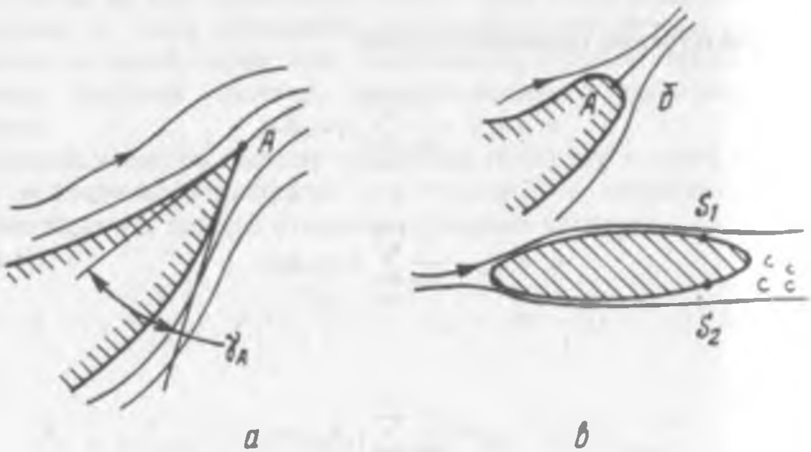


Рис. 123. К решению интегрального уравнения (4.43):
а — обтекание заостренной выходной кромки профиля; *б* — то же скругленной по радиусу выходной кромки; *в* — то же эллиптического цилиндра

Решение системы уравнений столь высокого порядка невозможно без применения ЭЦВМ, чем, кстати, и объясняется то, что интегральные методы, принципиально известные с 30-х годов нашего века, нашли практическое применение лишь двадцать лет спустя.

В заключение преобразуем выражение для функции тока невозмущенного решеткой потока ψ_0 к более удобному для расчетов виду.

Ранее получены соотношения:

$$\Gamma_0 = v_0 \sin \alpha_0 t = \Gamma_1 + \Gamma/2 = v_1 \sin \alpha_1 t + \Gamma/2,$$

$$Q = v_0 \cos \alpha_0 t = v_1 \cos \alpha_1 t.$$

Следовательно,

$$\psi_0 = v_0 (\cos \alpha_0 y - \sin \alpha_0 x) = v_1 (\cos \alpha_1 y - \sin \alpha_1 x) - \frac{\Gamma}{2t} x =$$

$$= v_1(\cos\alpha_1\, y - \sin\alpha_1\, x) - \frac{x}{2t}\int\limits_{s+} v\, ds.$$

Окончательно уравнения системы (4.47) могут быть представлены в виде

$$\psi = v_1\,(\cos\alpha_1\, y - \sin\alpha_1\, x) - \frac{x}{2t}\sum_{i=1}^{i=n} v_i \Delta s_i - \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{i=n} v_i a_{ij} \Delta s_i\,. \quad (4.48)$$

В уравнении (4.48) в качестве неизвестных имеем ψ и n значений v_i.

На рис. 124 показаны результаты проведенных расчетов по определению распределения скорости в плоской турбинной решетке типа Т-203, сопоставленные с экспериментальными данными. Можно отметить вполне удовлетворительное совпадение результатов теоретического и экспериментального исследований обтекания решетки. Дальнейшее повышение точности расчетов может быть достигнуто за счет применения более сложных аппроксимирующих функций на отдельных участках контура.

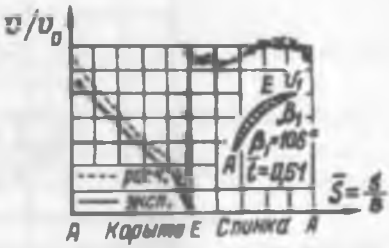


Рис. 124. Сопоставление расчетного и экспериментального распределения скорости по профилю турбинной решетки

Приведенные выше соображения, связанные с использованием постулата Жуковского — Чаплыгина для составления дополнительного уравнения системы, в принципе применимы для решеток с любой геометрической формой выходных кромок.

Однако если на выходной кромке с углом заострения $\gamma = \gamma_A$ (см. рис. 123, *а*) положение точки схода A нулевой линии тока вполне определено (на острие выходной кромки), то на скругленной по радиусу кромке, не имеющей геометрического острия, положение точки схода заранее не известно (см. рис. 123, *б*).

Если выбрать точку схода произвольно, то при ее различных положениях результаты расчета обтекания решеток получаются заметно отличающимися. На рис. 125 приведены результаты расчетов одной и той же решетки при одинаковых условиях на входе, отличающиеся лишь положением точки схода *A*, показанной в различных вариантах расчета цифрами *I*, *II*, *III*, *IV* и *V*. Это различие вполне объяснимо, если учесть, что положение точки схода на профиле определяет величину циркуляции скорости Г на профиле в решетке.

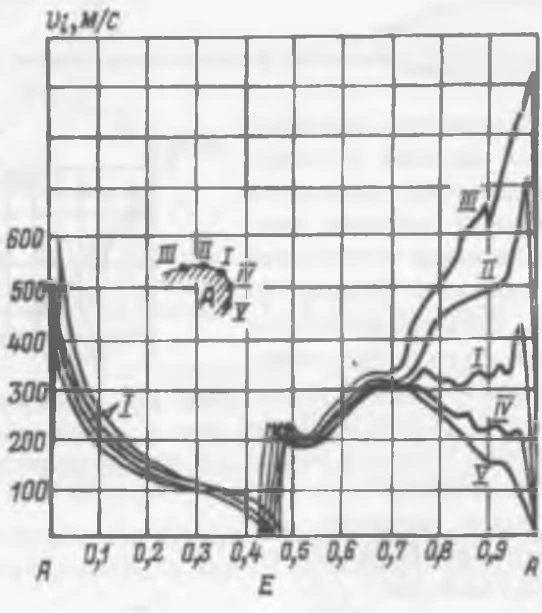


Рис. 125. Изменение расчетного распределения скорости по профилю турбинной решетки при различных положениях точки схода нулевой линии тока *A* профиля (внутри рисунка показано положение точки *A* на кромке)

Спрашивается: при каком из пяти приведенных положений точки схода расчетное распределение скорости v (s) более соответствует действительному? Ответ на данный вопрос можно получить, рассмотрев особенности обтекания твердых тел потоком реальной (вязкой) жидкости, изученные, в частности, Л.Хауэрзом. В опытах с поперечным обтеканием цилиндров эллиптического сечения (см. рис. 123, *в*) им было экспериментально установлено, что в точках отрыва пограничного слоя s_1 и s_2 модули скорости v_{s_1} и v_{s_2} на внешней границе пограничного слоя равны: $|v_{s_1}| = |v_{s_2}|$.

Следовательно, можно сделать такой вывод: если теоретическое обтекание твердого тела потоком идеальной (невязкой) жидкости соответствует реальному, то при последующем расчете параметров пограничного слоя, в частности положения точек отрыва s_1 и s_2, должен получиться результат, соответствующий равенству $|v_{s_1}| = |v_{s_2}|$.

В соответствии со сказанным выше может быть реализована следующая схема расчета обтекания решетки:

1) задается произвольно на выходной кромке профиля положение точки схода A нулевой линии тока потенциального потока;

2) рассчитывается распределение скорости $v\ (s)$ на профиле решетки решением на ЭЦВМ системы уравнений (4.48);

3) по полученному $v\ (s)$ рассчитывается каким-либо известным методом пограничный слой на поверхности профиля, в том числе определяется положение точек отрыва s_1 и s_2 на выходной кромке;

4) сравниваются модули скорости в полученных расчетом точках отрыва: если равенство $|v_{s_1}| = |v_{s_2}|$ не выполняется, изменяют положение точки схода A и повторяют расчет по описанной схеме до тех пор, пока не будет установлено равенство модулей скорости в точках отрыва.

Расчеты по приведенной схеме, включающие расчет параметров пограничного слоя, можно существенно упростить следующим образом.

Профессор М.И.Жуковский разработал методику расчета обтекания решеток с использованием данных Л.Хауэрза, отличающуюся более простым способом установления равенства $|v_{s_1}| = |v_{s_2}|$. Поясним ее, рассмотрев для примера течение в плоском канале с диффузорной частью. Как известно, отрыв пограничного слоя от стенок обтекаемого твердого тела происходит на участках течения с положительным градиентом давления $\partial p/\partial s > 0$, например на диффузорных участках — в расширяющихся каналах при дозвуковом течении жидкости (рис. 126). Чем больше $\partial p/\partial s$, тем раньше при прочих равных условиях возникает отрыв, т.е. тем ближе к началу диффузорного участка смещаются точки отрыва s_1 и s_2 (см. рис. 126).

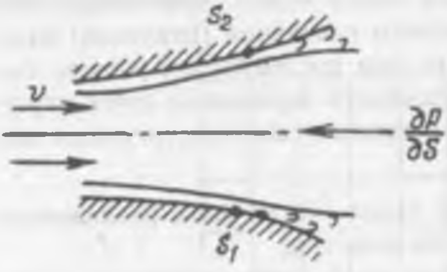


Рис. 126. Схема течения в дозвуковом диффузорном канале

В решетках турбомашин диффузорные участки на выходе межлопаточного канала отличаются очень высокими положительными значениями градиентов $\partial p/\partial s$ из-за резкого расширения канала в зоне, скругленной по малому радиусу кромки. Практически можно с достаточной степенью точности считать, что отрыв возникает в самом начале диффузорного участка, т.е. в точке с максимальным в зоне выходной кромки значением скорости: $v_{\max_b}$ на вогнутой стороне профиля и $v_{\max_c}$ — на спинке.

В соответствии со сказанным выше уточним ранее описанные рекомендации по выбору положения точки схода на выходной кромке: точка A выбирается таким образом, чтобы на расчетной кривой распределения скорости $v\,(s)$ (см. рис. 125) максимальные значения скорости у выходной кромки на спинке и вогнутой стороне получились равными:

$$|v_{\max_b}| = |v_{\max_c}|,$$

где $v_{\max_b} \approx v_{s_1}$ и $v_{\max_c} \approx v_{s_2}$.

На рис. 125 этому условию соответствует положение I точки A

Вычисление особого коэффициента системы уравнений

Прежде чем перейти к некоторым особенностям вычисления коэффициентов a_{ij}, следует сделать некоторые замечания общего порядка, относящиеся к вычислению этих коэффициентов.

В уравнениях нашей системы имеются n^2 коэффициентов типа

$$a_{ij} = \ln\left\{\operatorname{ch}\left[\frac{2\pi}{t}\left(x_j - x_i\right)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}\left(y_j - y_i\right)\right]\right\}.$$

Проанализировав данное выражение, нетрудно отметить равенство "симметричных" коэффициентов $a_{ji} = a_{ij}$, вытекающее из четности функций $\cos x$ и $\operatorname{ch} x$: $\cos x = \cos(-x)$, $\operatorname{ch} x = \operatorname{ch}(-x)$. При этом число неизвестных коэффициентов сокращается и в системе из n уравнений их будет $\frac{n^2+n}{2}$, в чем можно убедиться, рассмотрев главный определитель, составленный из коэффициентов системы, например, 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Из главного определителя системы, записанного выше, вычеркнуты коэффициенты, которые уже найдены по значениям равных им соответствующих симметричных коэффициентов. За вычетом этих коэффициентов число неизвестных в данной системе равно 10, что соответствует формуле $\frac{n^2+n}{2} = \frac{4^2+4}{2} = 10$.

В процессе численного определения коэффициентов a_{ji} встречаются особые случаи, требующие специального рассмотрения, в частности, при определении коэффициентов типа a_{jj}. Коэффициент a_{jj} встречается по одному разу в каждом из уравнений системы (см. коэффициенты a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}). Математическая особенность вычисления этого коэффициента состоит в том, что при

$$x_j \to x_i \quad \text{и} \quad y_j \to y_i$$

$$\ln\left\{\operatorname{ch}\left[\frac{2\pi}{t}\left(x_j - x_i\right)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}\left(y_j - y_i\right)\right]\right\} \to 0 = -\infty.$$

Рассмотрим определенный интеграл, в котором встречается указанный случай совпадения координат зафиксированной точки $j(x_j, y_j)$ и переменной $i(x_i\, y_i)$:

$$I_{jj} = \int\limits_{\Delta s_j} v \ln\left\{\operatorname{ch}\left[\frac{2\pi}{t}\left(x_j - x_i\right)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}\left(y_j - y_i\right)\right]\right\} \mathrm{d}s.$$

Данный интеграл относится к разряду несобственных, у которых точка разрыва подынтегральной функции находится внутри участка интегрирования, поскольку совпадение точек i и j происходит в центре j отрезка $\Delta\, s_j$.

Отметим, что участок интегрирования $\Delta\, s_j$ с достаточной степенью точности можно считать отрезком прямой.

Используем известные тригонометрические соотношения

$$\operatorname{sh}^2 \frac{\pi}{t}\left(x_j - x_i\right) = \frac{\operatorname{ch}\dfrac{2\pi}{t}\left(x_j - x_i\right) - 1}{2},$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{t}\left(y_j - y_i\right) = \frac{1 - \cos\dfrac{2\pi}{t}\left(y_j - y_i\right)}{2}.$$

Перепишем подынтегральную функцию, учтя эти соотношения:

$$\ln\left\{\operatorname{ch}\left[\frac{2\pi}{t}\left(x_j - x_i\right)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}\left(y_j - y_i\right)\right]\right\} =$$

$$= \ln\left\{2\mathrm{sh}^2\left[\frac{\pi}{t}\left(x_j - x_i\right)\right] + 2\sin^2\left[\frac{\pi}{t}\left(y_j - y_i\right)\right]\right\}.$$

Для достаточно близко расположенных точек j и i принимаем

$$\frac{\pi}{t}\left(x_j - x_i\right) \to 0; \qquad \frac{\pi}{t}\left(y_j - y_i\right) \to 0;$$

$$\mathrm{sh}\,\frac{\pi}{t}\left|\left(x_j - x_i\right)\right| \to \frac{\pi}{t}\left|\left(x_j - x_i\right)\right|; \qquad \sin\,\frac{\pi}{t}\left|\left(y_j - y_i\right)\right| \to \frac{\pi}{t}\left|\left(y_j - y_i\right)\right|.$$

Следовательно,

$$2\mathrm{sh}^2\left[\frac{\pi}{t}\left(x_j - x_i\right)\right] + 2\sin^2\left[\frac{\pi}{t}\left(y_j - y_i\right)\right] \approx \frac{2\pi^2}{t^2}\left[\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2\right];$$

$$I_{ji} = \int\limits_{\Delta s_j} v \ln\left\{\mathrm{ch}\left[\frac{2\pi}{t}\left(x_j - x_i\right)\right] - \cos\left[\frac{2\pi}{t}\left(y_j - y_i\right)\right]\right\} \mathrm{d}s \approx$$

$$\approx \int\limits_{\Delta s_j} v \ln\left[\frac{2\pi^2}{t^2}\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2\right] \mathrm{d}s.$$

Нетрудно заметить, что в пределах рассматриваемого участка интегрирования переменное расстояние между точками j и i, обозначенное s на рис. 127, равно $s = \sqrt{\left(x_j - x_i\right)^2 + \left(y_j - y_i\right)^2}$.

Следовательно,

$$I_{jj} = \int\limits_{\Delta s_j} v \ln\left(2\pi^2 \frac{s^2}{t^2}\right) \mathrm{d}s =$$

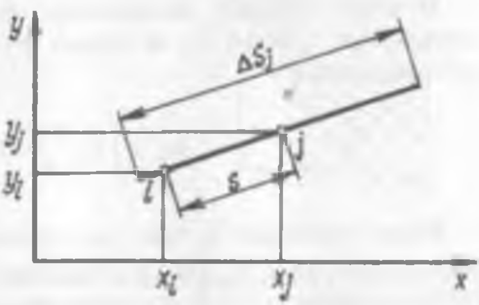


Рис. 127. К выводу формулы для вычисления особого коэффициента a_{ii}

$$= 2 \int_0^{\Delta s_j/2} v\left(\ln 2\pi^2 \frac{s^2}{t^2}\right) ds \approx$$

$$\approx 2v_j \int_0^{\Delta s_j/2} \left(\ln 2\pi^2 + 2\ln\frac{s}{t}\right) ds.$$

Напомним табличный интеграл, который применим при вычислении интеграла I_{jj} с использованием подстановки $s/t = u$ Действительно,

$$\int \ln\frac{s}{t} ds = t\int \ln u\, du = tu(\ln u - 1) = s\left(\ln\frac{s}{t} - 1\right).$$

Учитывая это соотношение, получаем

$$J_{jj} = 2v_j \int_0^{\Delta s_j/2} \left(\ln 2\pi^2 + \ln\frac{s}{t}\right) ds = 2v_j\left[\ln 2\pi^2 \frac{\Delta s_j}{2} + \frac{\Delta s_j}{2}\left(\ln\frac{\Delta s_j}{2t} - 1\right)\right] =$$

$$= v_j \Delta s_j\left(\ln 2 + 2\ln\pi + 2\ln\frac{\Delta s_j}{t} - 2\ln 2 - 2\right) = v_j \Delta s_j\left(\ln\frac{\Delta s_j}{t} - 0{,}202\right)2.$$

Используя ранее выведенную формулу приближенного интегрирования $I_{jj} \approx a_{jj}\, v_j\, \Delta s_j$ и только что полученное соотношение для I_{jj}, определяем

$$a_{jj} = \left(\ln\frac{\Delta s_j}{t} - 0{,}202\right)2.$$

Выше интеграл I_{jj} был рассчитан по верхнему пределу интегрирования $\Delta s_j / 2$, т.е. в предположении, что при подстановке нижнего предела $s = 0$ его величина тоже равна нулю. Однако при подстановке $s = 0$ при решении интеграла получается неопределенность типа $0 \cdot \infty$. Предлагаем самостоятельно убедиться в том.

что при раскрытии неопределенности действительно получается величина, равная нулю.

В большинстве реальных ситуаций лопаточный аппарат турбины обтекается неизотермическим потоком сжимаемой жидкости (газа) при числе Маха на выходе из межлопаточного канала $M_2(0,3...0,4)$, вплоть до $M_2 \geq 1,0$ (в последнем случае речь идет о транс- и сверхзвуковых решетках).

В связи с широким применением ЭВМ в настоящее время возможными для практического применения стали расчетные методы, основанные на численных решениях задач газовой динамики, в том числе, при наличии сверхзвуковых течений.

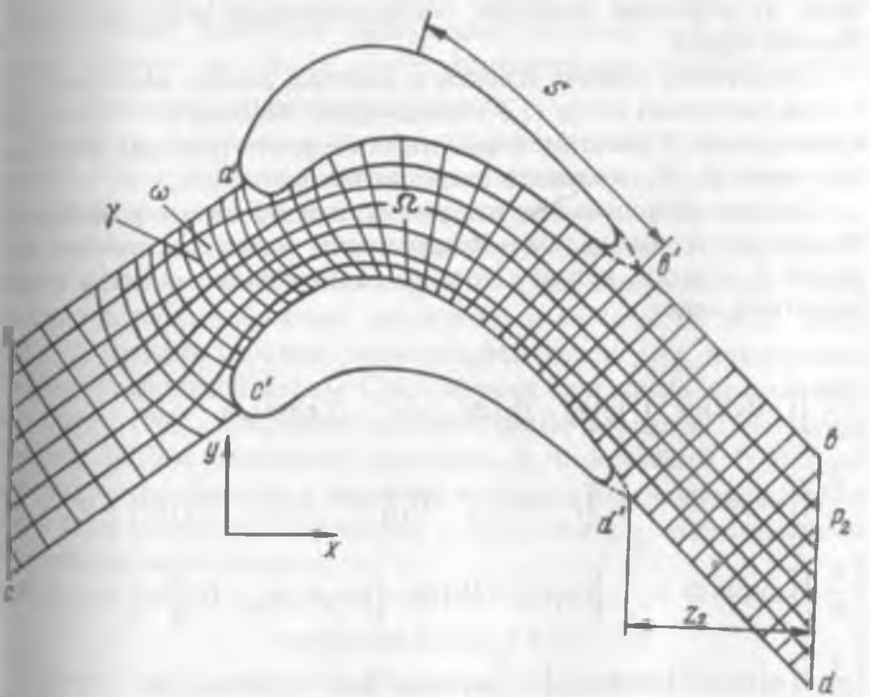


Рис. 128. Расчетная сетка для осуществления численного расчета параметров газа в решетке

Рассмотрим установившееся (стационарное) течение идеального (невязкого) нетеплопроводного газа в плоской решетке. При этом в общем случае на отдельных участках межлопаточного канала местные значения чисел Маха $M \gtrless 1{,}0$. Используем для решения задачи "принцип установления параметров потока во времени", который заключается в том, что решение стационарных задач получают в процессе решения последовательных по времени нестационарных задач, асимптотически сходящихся к решению стационарной задачи. При этом задаются одни и те же граничные условия, не зависящие от времени. В соответствии с исходной постановкой задачи исследователя интересует не эволюция параметров во времени, т.е. в процессе установления параметров, а лишь их конечные значения, соответствующие решению стационарной задачи.

Представим область течения в шаговой полосе *abcd* (рис. 128) в виде расчетной сетки Ω с элементарной ячейкой $\omega = \omega(t)$ с контуром $\gamma = \gamma(t)$. Проекции нормальной скорости границы D обозначим через D_x, D_y, проекции скорости потока — v_x, v_y.

Для рассматриваемого течения запишем систему уравнений в форме интегральных законов сохранения массы, количества движения и энергии, которые должны выполняться в каждой ячейке расчетной сетки:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\iint\limits_{\omega(t)} \rho\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int\limits_{\gamma(t)-} \left[\rho\left(v_x - D_x\right)\mathrm{d}y - \rho\left(v_y - D_y\right)\mathrm{d}x\right] = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\iint\limits_{\omega(t)} \rho v_x\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int\limits_{\gamma(t)-} \left\{\left[p + \rho v_x\left(v_x - D_x\right)\right]\mathrm{d}y - \rho v_x\left(v_y - D_y\right)\mathrm{d}x\right\} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\iint\limits_{\omega(t)} \rho v_y\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int\limits_{\gamma(t)-} \left\{\rho v_y\left(v_x - D_x\right)\mathrm{d}y - \left[p + \rho v_y\left(v_y - D_y\right)\right]\mathrm{d}x\right\} = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\displaystyle\iint\limits_{\omega(t)} \rho\left(2\varepsilon + v^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int\limits_{\gamma(t)-} \left\{\left[\rho\left(2\varepsilon + v^2\right)\left(v_x - D_x\right) + 2\rho v_x\right]\mathrm{d}y - \right. \\ \left. -\left[\rho\left(2\varepsilon + v^2\right)\left(v_y - D_y\right) + 2\rho v_y\right]\mathrm{d}x\right\} = 0, \end{cases} \tag{4.49}$$

где $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$; ε — внутренняя энергия.

Решение задачи (интегрирования уравнений системы) выполняется численным (конечно-разностным методом) при следующих граничных условиях: на входе в решетку заданы энтропия s_1, полная энтальпия h^*, угол потока α_1; на выходе из решетки задано давление p_2; на контуре лопаток (отрезки $a'b'$ и $c'd'$) удовлетворяется условие "непротекания" профилей $v_n = 0$.

Выполняется также требование постулата Жуковского — Чаплыгина об обтекании выходных кромок, для чего скругленная по радиусу кромка заменяется искусственно заостренной (см. рис. 128), при построении расчетной области линии ac и bd располагаются на расстоянии, примерно равном шагу от входа или выхода решетки. Линии aa', bb', cc', $d'd$ — произвольные эквидистантные линии, отстоящие на расстоянии шага.

Точность результатов расчета (распределения параметров потока по узлам расчетной стенки, в том числе на контуре профилей, углов выхода, формы границ скачков и их интенсивности, если таковые имеются), а также время "установления параметров" до выхода на решение стационарной задачи определяются типом конечно-разностной схемы, размерами расчетной области, формой и размерами (числом) элементарных ячеек. При применении конечно-разностной схемы С.К.Годунова при числе прямоугольных ячеек 1000...1200 время расчета одного варианта течения на мощной ЭЦВМ составляет примерно 1 ч. Хорошим "нулевым" приближением расчетных значений искомых параметров являются результаты расчетов, полученные с применением описанного выше интегрального метода.

Контрольные вопросы к §30

1. Каким образом используется интегральная формула Коши (4.30) для расчета скоростей в гидродинамической решетке?
2. Как определить скорость невозмущенного решеткой потока?
3. В чем заключается основная идея численного решения интегрального уравнения (4.43)?
4. Каким образом формируется замкнутая система алгебраических уравнений для численного решения уравнения (4.43)?

5. Как используется постулат Жуковского — Чаплыгина при осуществлении численного решения уравнения (4.43)?

6. Каким образом осуществляется численное решение уравнения (4.43) при расчете течения в решетках профилей со скругленными выходными кромками?

§31. ЭЛЕМЕНТЫ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОТОКОВ

Вывод уравнений потенциала скорости и функции тока

Основным уравнением гидродинамики потенциальных течений несжимаемой жидкости является, как известно, уравнение Лапласа, которое можно применять для определения потенциала скорости φ и функции тока ψ:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0.$$

Определив φ и ψ, можно далее найти и скорости в различных точках потока. Например,

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad \text{и} \qquad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Переходя к изучению сверхзвуковых потоков газа, выведем уравнение потенциала для данного случая, поскольку наличие такого уравнения позволяет, как и для течения несжимаемой жидкости, свести расчет кинематических характеристик потока к определению потенциала.

При выводе используем ряд основных уравнений гидродинамики при наличии некоторых допущений.

а. Уравнение неразрывности для плоского нестационарного потока газа:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\bar{v}) = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0.$$

Учитывая, что в стационарном потоке все его параметры не зависят от времени t, в том числе и плотность ρ, еще раз перепишем уравнение неразрывности, произведя дифференцирование членов:

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}v_x + \rho\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial y}v_y + \rho\frac{\partial v_y}{\partial y} = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right)\rho + \frac{\partial\rho}{\partial x}v_x + \frac{\partial\rho}{\partial y}v_y = 0.$$

Для определения производных $\partial\rho/\partial x$ и $\partial\rho/\partial y$ в уравнении неразрывности применим зависимость плотности от давления в баротропном процессе, в котором в отличие от реальных процессов плотность является функцией лишь давления (см. зависимость плотности от давления в изоэнтропийном процессе).

б. Введем функцию $\rho = \rho(p)$ для баротропного процесса, дифференцируя которую, определим производные $\partial\rho / \partial x$ и $\partial\rho / \partial y$:

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{\partial\rho}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{d\rho}{dp}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{4.50}$$

При дифференцировании было учтено, что для функции одного переменного частная производная равна полной ($\partial\rho/\partial p = d\rho/dp$), а также использована ранее полученная зависимость для определения скорости звука $a = \sqrt{dp / d\rho}$.

Аналогично можно получить

$$\frac{\partial\rho}{\partial y} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{4.51}$$

Для определения производных давления $\partial p/\partial x$ и $\partial p/\partial y$ необходимо пользоваться уравнениями, в которые входят эти производные.

в. Вводим уравнения движения в форме Эйлера для определения производных $\partial p/\partial x$ и $\partial p/\partial y$, записанные для рассматриваемого случая стационарного плоского потока газа, пренебрегая при этом массовыми силами $A(x, y)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial v_x}{\partial y} = f_x - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}, & (4.52) \\ \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{\partial v_y}{\partial t} + v_x\dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y\dfrac{\partial v_y}{\partial y} = f_y - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}. & (4.53) \end{cases}$$

С учетом особенностей потока получим

$$\begin{cases} v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}, & (4.54) \\ v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y}. & (4.55) \end{cases}$$

Теперь используем для подстановки в (4.54) и (4.55) значения производных $\frac{\partial p}{\partial x}$ и $\frac{\partial p}{\partial y}$, полученные из (4.50) и (4.51):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}; \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = a^2 \frac{\partial \rho}{\partial y}.$$

После подстановки имеем

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y = -\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y};$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y = -\frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}.$$

Из последней системы уравнений можно извлечь соотношения для искомых производных $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial y}$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\left(\frac{\rho}{a^2}\right)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y\right);$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = -\left(\frac{\rho}{a^2}\right)\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_y}{\partial y} v_y\right).$$

Подставим полученные выражения производных в уравнение неразрывности:

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)-\rho\frac{v_x}{a^2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_x}{\partial y}v_y\right)-\rho\frac{v_y}{a^2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_y}{\partial y}v_y\right)=0.$$

Сократив уравнение на ρ, произведем группировку членов по одинаковым производным:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}\left(1-\frac{v_x^2}{a^2}\right)+\frac{\partial v_y}{\partial y}\left(1-\frac{v_y^2}{a^2}\right)-\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{v_x v_y}{a^2}-\frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{v_x v_y}{a^2}=0.$$

Умножив обе части уравнений на (-1) и приведя к общему знаменателю, после простых преобразований и с учетом условия $\operatorname{rot}\vec{\omega}=0$ и $\frac{\partial v_x}{\partial y}=\frac{\partial v_y}{\partial x}$ получим

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}\left(v_x^2-a^2\right)+\frac{\partial v_y}{\partial y}\left(v_y^2-a^2\right)+2v_x v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=0. \qquad (4.56)$$

Введя в (4.56) выражение для скоростей потенциального потока $v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, получим искомое уравнение потенциала

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2-a^2\right]+\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2-a^2\right]\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=0. \qquad (4.57)$$

Уравнение (4.57) в отличие от уравнения Лапласа является нелинейным дифференциальным уравнением; следовательно, для его решения нельзя применять принцип суперпозиции (или наложения) потоков, широко применяемый при решениях гидродинамических задач.

Отметим, что из уравнения (4.57) легко получить уравнение Лапласа, сделав предельный переход к течению несжимаемой жидкости, т.е. введя в уравнение величину $a\to\infty$.

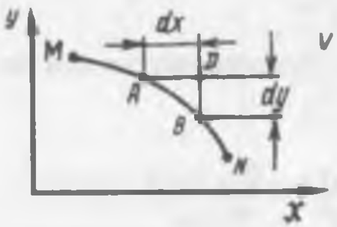


Рис. 129. К постановке задачи Коши о расчете параметров в потенциальном потоке газа

Предположим, что в плоском потенциальном потоке газа в каждой точке на некоторой линии M_N известны значения скоростей через их проекции v_x, v_y (рис. 129).

Требуется определить распределение скоростей в потоке в окрестности линии M_N.

Рассмотрим две соседние точки A и B на линии MN, расположенные так, что

$$x_B - x_A = \mathrm{d}x; \qquad y_B - y_A = \mathrm{d}y.$$

В то же время точка D, расположенная в окрестности точек A и B в потоке, геометрически определяется на плоскости как точка с координатами (см. рис. 129)

$$x_D = x_A + \mathrm{d}x; \qquad y_D = y_B + \mathrm{d}y.$$

Определим скорость в точке D (v_{xD}, v_{yD}) по известным условиям задачи v_{xA}, v_{yA}, v_{xB}, v_{yB}, $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$ с помощью разложения функции, описывающей изменение скорости в окрестности AB, в ряд Тейлора. В общем случае разложение в ряд Тейлора для $f(x)$ в окрестности точки $x = a$ определяется формулой

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} +$$

$$+ \ldots + \frac{(x-a)^n f^n(a)}{n!} + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ — остаточный член (ошибка) разложения.

В нашем случае, пренебрегая членами порядка малости выше первого, получаем

$$v_{xD} = v_{xA} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)_A \mathrm{d}x; \quad v_{xD} = v_{xB} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_B \mathrm{d}y; \qquad (4.58)$$

$$v_{yD} = v_{yA} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_A \mathrm{d}x; \quad v_{yD} = v_{yB} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)_B \mathrm{d}y. \qquad (4.59)$$

Из уравнений (4.58), (4.59) следует, что для определения v_{xD} и v_{yD}, и аналогично v_x, v_y в любой точке окрестности линии MN, необходимо определить частные производные типа $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, $\frac{\partial v_y}{\partial y}$, $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ и $\frac{\partial v_y}{\partial x}$ для точек, расположенных на линии MN, учитывая при этом вытекающее из свойств потенциального потока равенство

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Для определения трех неизвестных производных $\frac{\partial v_x}{\partial x}$, $\frac{\partial v_y}{\partial y}$ и $\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$ необходимо составить систему из трех уравнений, в которые входили бы исходные производные.

Первым уравнением является полученное ранее уравнение для потенциала сверхзвукового потока газа, которое при замене

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = v_x, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v_y$$

записывается в виде (4.56)

$$\left(v_x^2 - a^2\right)\frac{\partial v_x}{\partial x} + \left(v_y^2 - a^2\right)\frac{\partial v_y}{\partial y} + 2v_x v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = 0.$$

Дополнительно используем два уравнения, задающие значения полных дифференциалов v_x и v_y на MN через искомые частные производные:

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy; \tag{4.60}$$

$$dv_y = \frac{\partial v_y}{\partial x}dx + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy. \tag{4.61}$$

Уравнения (4.56), (4.60) и (4.61) составляют замкнутую систему алгебраических уравнений относительно неизвестных производных, которую можно переписать в соответствии с расположением аналогичных членов (с аналогичными производными) в (4.56):

$$\begin{cases} \left(v_x^2 - a^2\right)\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \left(v_y^2 - a^2\right)\dfrac{\partial v_y}{\partial y} + 2v_x v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \\ dx \quad \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \quad 0 \quad \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \quad dy \quad \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = dv_x, \\ 0 \quad \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \quad dy \quad \dfrac{\partial v_y}{\partial y} + \quad dx \quad \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = dv_y. \end{cases} \tag{4.62}$$

Алгебраические системы линейных уравнений типа (4.62) решаются в соответствии с правилом Крамера следующим образом: любое неизвестное x_k из ряда x_1, x_2, x_3, ..., x_k, ..., x_n определяется из соотношения

$$x_k = \frac{D_k}{D}\left(k = 1, 2, 3, \ldots, n\right).$$

Здесь

$$D = \det\left[a_{ik}\right] = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1k}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2k}\ldots a_{2n} \\ \ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nk}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$ — определитель (детерминант) системы

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\dots b_1 \dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots b_2 \dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots b_n \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$ — вспомогательный определитель.

Вспомогательный определитель получен заменой столбца из коэффициентов a_{1k} a_{2k} столбцом, составленным из свободных членов b_1, b_2, ..., b_n.

Решением системы (4.62), следовательно, будут:

$$x_1 = \frac{\partial v_k}{\partial x} = \frac{D_1}{D}; \quad x_2 = \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{D_2}{D}; \quad x_3 = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{D_3}{D}. \qquad (4.63)$$

Здесь

$$D_k = \begin{vmatrix} \left(v_x^2 - a^2\right) & \left(v_y^2 - a^2\right) & 2v_x v_y \\ \mathrm{d}x & 0 & \mathrm{d}y \\ 0 & \mathrm{d}y & \mathrm{d}x \end{vmatrix};$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & \left(v_y^2 - a^2\right) & 2v_x v_y \\ \mathrm{d}v_x & 0 & \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}v_y & \mathrm{d}y & \mathrm{d}x \end{vmatrix};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \left(v_x^2 - a^2\right) & 0 & 2v_x v_y \\ \mathrm{d}x & \mathrm{d}v_x & \mathrm{d}y \\ 0 & \mathrm{d}v_y & \mathrm{d}x \end{vmatrix};$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} \left(v_x^2 - a^2\right) & \left(v_y^2 - a^2\right) & 0 \\ \mathrm{d}x & 0 & \mathrm{d}v_x \\ 0 & \mathrm{d}y & \mathrm{d}v_y \end{vmatrix}.$$

По уравнениям (4.63) находим частные производные, после подстановки которых в (4.58), (4.59) скорость в точке D определена. Аналогично можно найти скорости и в других точках окрестности линии M_N.

Понятие о характеристиках

Решение задачи Коши указанным способом становится неопределенным, если выполняется условие

$$D_1 = D_2 = D_3 = D = 0. \tag{4.64}$$

Линии на плоскости, в которых выполняется условие (4.64), называются характеристиками. Найдем уравнение характеристик в плоскости потока $x - y$, для чего наложим на решение определителей условие (4.64). В частности, определим соотношения, вытекающие из равенства $D = 0$.

Предварительно разложим определитель D по правилу

$$D = \det\left[a_{ik}\right] = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{ik}, \tag{4.65}$$

где a_{ik} — элемент определителя (коэффициент, находящийся в k-м столбце i-й строки); $A_{ik} = (-1)^{i+k}$ — алгебраическое дополнение элемента a_{ik}; D_{ik} — минор элемента; a_{ik} — определитель $(n - 1)$ порядка, получающийся из определителя D n-го порядка вычеркиванием i-й строки. Разлагая с помощью (4.65) определитель D, получаем

$$D = \left(v_x^2 - a^2\right)\begin{vmatrix} 0 & dy \\ dy & dx \end{vmatrix}(-1)^{1+1} + \left(v_x^2 - a^2\right)\begin{vmatrix} dx & dy \\ 0 & dx \end{vmatrix}(-1)^{1+2} +$$

$$+ 2v_x v_y \begin{vmatrix} dx & 0 \\ 0 & dy \end{vmatrix}(-1)^{1+3} = \left(v_x^2 - a^2\right)\left(-dy^2\right) - \left(v_y^2 - a^2\right)\left(dx^2\right) + 2v_x v_y dx\, dy = 0$$

или

$$\left(v_x^2 - a^2\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2v_x v_y \frac{dy}{dx} + \left(v_y^2 - a^2\right) = 0.$$

Следовательно, уравнение характеристики в плоскости $x - y$ — квадратное уравнение относительно производной dy/dx с решением:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{2v_x v_y \pm \sqrt{4v_x^2 v_y^2 - 4\left(v_x^2 - a^2\right)\left(v_y^2 - a^2\right)}}{2\left(v_x^2 - a^2\right)} = \frac{v_x v_y}{v_x^2 a^2} \pm$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{v_x^2 v_y^2}{v_x^2 - a^2}\right) - \frac{v_y^2 - a^2}{v_x^2 - a^2}} = \frac{v_x v_y}{v_x^2 - a^2} \pm \sqrt{\frac{v_x^2 v_y^2 - v_x^2 v_y^2 + v_y^2 a^2 + v_x^2 a^2 - a^4}{\left(v_x^2 - a^2\right)^2}} =$$

$$= \frac{v_x v_y \pm a\sqrt{v_x^2 + v_y^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2} = \frac{v_x v_y \pm a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2} \qquad (4.66)$$

Действительные решения типа (4.66) существуют лишь при $v > a$, что следует понимать как условие существования действительных характеристик. Первое решение квадратного уравнения $\left(\frac{dy}{dx}\right)_1$ будем рассматривать в качестве уравнения характеристик 1-го рода; аналогично $\left(\frac{dy}{dx}\right)_2$ — 2-го рода (рис. 130).

Определим далее соответствия, вытекающие из условия $D_2 = 0$. Опуская преобразования, аналогичные сделанным выше при исследовании условия $D = 0$, запишем сразу уравнение

$$\left(v_x^2 - a^2\right)\left(dv_x dx - dv_y dy\right) + 2v_x v_y dx = 0. \qquad (4.67)$$

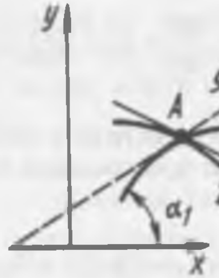


Рис. 130. Расположение характеристики сверхзвукового потенциального газа в плоском потоке

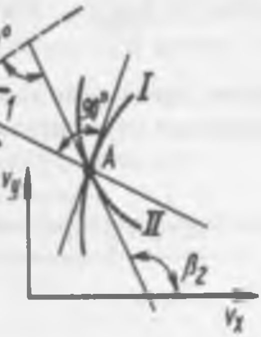


Рис. 131. Расположение характеристик сверхзвукового плоского потенциального потока газа в плоскости годографа скорости

Отсюда

$$\frac{dv_y}{dv_x} = \frac{\left(v_x^2 - a^2\right)dx}{\left(v_x^2 - a^2\right)dy - 2v_xv_y\,dx} =$$

$$= \frac{\left(v_x^2 - a^2\right)}{\left(v_x^2 - a^2\right)\left(\dfrac{dy}{dx}\right) - 2v_xv_y}.$$

Подставив в последнее уравнение соотношение (4.66), получим

$$\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_{1,2} = \frac{v_x^2 - a^2}{\left(v_x^2 - a^2\right)\left(\dfrac{v_xv_y \pm a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2}\right) - 2v_xv_y} =$$

$$= \frac{v_x^2 - a^2}{-v_x v_y \pm a\sqrt{v^2 - a^2}}. \tag{4.68}$$

Анализируя полученное уравнение (4.68), можно отметить, что оно является уравнением характеристик I и II рода в плоскости переменных v_x, v_y, т.е. в плоскости годографа скорости (рис. 131).

Выясним взаимное расположение характеристик в обеих плоскостях — в плоскости течения и в плоскости годографа скорости.

Рассмотрим пару характеристик — характеристику I рода в плоскости $x - y$ и II рода в плоскости $v_x - v_y$; их уравнения запишутся соответственно

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = \frac{v_x v_y + a\sqrt{v_x^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2} = \operatorname{tg}\alpha_1 \quad \text{(см. рис. 130);}$$

$$\left(\frac{dv_x}{dv_y}\right)_2 = \frac{v_x^2 - a^2}{-v_x v_y - a\sqrt{v_x^2 - a^2}} = \operatorname{tg}\beta_2 \quad \text{(см. рис. 131).}$$

Как известно, при перпендикулярности двух кривых выполняется условие, которое в нашем случае запишется так:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 \left(\frac{dv_x}{dv_y}\right)_2 = -1.$$

Проверим, выполняется ли это условие.

Действительно,

$$\frac{v_x v_y + a\sqrt{v_x^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2} \cdot \frac{v_x^2 - a^2}{-v_x v_y - a\sqrt{v^2 - a^2}} = -1.$$

Аналогично можно доказать, что характеристика II рода в плоскости потока перпендикулярна к характеристикам I рода в плоскости годографа. Однако мы еще не показали практическую целесообразность введения характеристик при расчетах сверхзвукового потока газа.

Чтобы ответить на данный вопрос, предварительно дадим газодинамическую интерпретацию понятия "характеристика".

Запишем уравнение характеристики в плоскости $x - y$, сориентировав ее таким образом, чтобы в некоторой точке A $v_x = v$, а $v_y = 0$ (рис. 132). Получим

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{v_x v_y + a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_x^2 - a^2} = \pm\frac{a}{\sqrt{v^2 - a^2}} = +\mathrm{tg}\,\alpha_A \text{ (см. рис. 131)}.$$

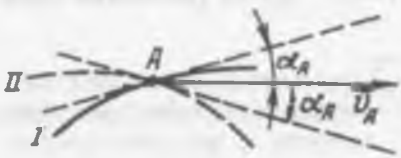


Рис. 132. К физической интерпретации понятия "характеристика сверхзвукового потока газа в плоскости течения"

Здесь угол наклона характеристики I рода к оси x — $(+\alpha_A)$, характеристики II рода — $(-\alpha_A)$. Следовательно, ось x делит угол между обеими характеристиками пополам, т.е. является биссектрисой этого угла.

Одновременно, как сказано выше, вектор скорости v_A совпадает также с осью x, а следовательно, с направлением биссектрисы.

Рассмотрим особенности распространения бесконечно малых возмущений, индуцированных источником, движущимся со скоростью $v > a$. Фронт распространения возмущений, индуцированных источником, движущимся со скоростью $v > a$, представляет собой на плоскости прямую (линию Маха), наклоненную к направлению v под углом α (рис. 133), где

$$\alpha = \arcsin\frac{a}{v} \quad \text{или} \quad \sin\alpha = \frac{a}{v}.$$

Подставив α, получим

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \pm\,\mathrm{tg}\,\alpha_A = \pm\frac{a}{\sqrt{v^2 - a^2}} = \pm\frac{a}{\sqrt{v^2 - v^2\sin\alpha}} = \pm\frac{a}{v\cos\alpha} =$$

$$= \pm \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm \operatorname{tg}\alpha.$$

Следовательно, из равенства углов α_A и α можно сделать вывод о том, что линию Маха можно рассматривать в качестве характеристики сверхзвукового потока.

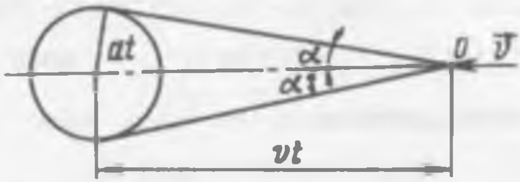


Рис. 133. Картина распространения бесконечно малых возмущений, вызванных источником (генератором возмущений), движущимся со сверхзвуковой скоростью

Практически целесообразность определения характеристик заключается в том, что, зная их положение на плоскости, можно определить направление скоростей в точках пересечения характеристик I и II рода (см. рис. 130), поскольку, как показано выше, в каждой точке вектор скорости направлен по биссектрисе угла, образованного характеристиками. Далее можно определить и поле линий тока.

Обратимся снова к уравнению характеристик в плоскости годографа:

$$\left(\frac{dv_y}{dv_x}\right)_{\mathrm{I,II}} = \frac{v_x^2 - a^2}{-v_x v_y \pm a\sqrt{v^2 - a^2}}.$$

Учтем, что по уравнению Бернулли v_x, v_y и a связаны между собой вполне однозначно, а именно

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{a_{\text{кр}}^2}{2} \qquad \text{или} \qquad \frac{v_x^2 + v_y^2}{2} + \frac{a}{\gamma - 1} = \text{const}.$$

Следовательно, в плоскости годографа геометрическая форма характеристик не зависит от особенностей конкретного движения, а одинакова для всех сверхзвуковых потоков.

Преобразуем уравнение характеристик в плоскости годографа к такому виду, для которого можно было бы провести анализ геометрической формы линий характеристик.

Введем обозначения:

$$v_x = v\cos\theta; \qquad v_y = v\sin\theta; \qquad \theta = \operatorname{arctg}\frac{v_y}{v_x}.$$

Соответственно, получим

$$dv_y = dv\sin\theta + v\cos\theta\, d\theta;$$

$$dv_x = dv\cos\theta - v\sin\theta\, d\theta;$$

$$\frac{dv_y}{dv_x} = \frac{dv\sin\theta + v\cos\theta\, d\theta}{dv\cos\theta - v\sin\theta\, d\theta} = \frac{v^2\cos^2\theta - a^2}{-v^2\cos\theta\sin\theta \pm a\sqrt{v^2 - a^2}}.$$

Записанное выше уравнение характеристик в полярных координатах приведем к общему знаменателю, а затем проведем группировку членов при дифференциалах переменных dv и $d\theta$:

$$dv\sin^2\theta\cos\theta\left(-v^2\right) - v^3\cos^2\theta\sin\theta\, d\theta \pm a\sqrt{v^2 - a^2}\, dv\sin\theta \pm$$

$$\pm\, av\sqrt{v^2 - a^2}\cos\theta\, d\theta = v^2 dv\cos^3\theta - a^2 dv\cos\theta - v^3\sin\theta\cos^2\theta\, d\theta +$$

$$+\, a^2 v\sin\theta\, d\theta,$$

или

$$dv\left(-v^2\sin^2\theta\cos\theta \pm a\sqrt{v^2 - a^2}\sin\theta - v^2\cos^3\theta + a^2\cos\theta\right) =$$

$$= d\theta\left(v^3\cos^2\theta\sin\theta \mp av\sqrt{v^2 - a^2}\cos\theta - v^3\sin\theta\cos^2\theta + a^2 v\sin\theta\right)$$

Сделаем замену $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ и приведем подобные члены:

$$dv\left[-v^2\left(1-\cos^2\theta\right)\cos\theta \pm a\sqrt{v^2-a^2}\sin\theta - v^2\cos^3\theta + a^2\cos\theta\right] =$$

$$= dv\left(-v^2\cos^2\theta \pm a\sqrt{v^2-a^2}\sin\theta + a^2\cos\theta\right) =$$

$$= d\theta\left(-av\sqrt{v^2-a^2}\cos\theta + a^2 v\sin\theta\right).$$

После деления обеих частей уравнения на $\cos\theta$ имеем

$$dv\left(a^2 - v^2 \pm a\sqrt{v^2-a^2}\,\mathrm{tg}\,\theta\right) = d\theta\, av\left(a\,\mathrm{tg}\,\theta \pm a\sqrt{v^2-a^2}\right).$$

Поскольку $v > a$, то $(a\,\mathrm{tg}\,\theta \pm \sqrt{v^2-a^2}) \neq 0$.

Поделив на выражение в скобках обе части уравнения и разделив переменные, получим дифференциальное уравнение

$$\pm\, dv\sqrt{v^2-a^2} = d\theta\, av; \quad d\theta = \pm\frac{\sqrt{v^2-a^2}}{av}dv.$$

Выделим выражение для скорости звука по уравнению Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{a_{\text{кр}}^2}{2} \qquad \text{или} \qquad v^2(\gamma-1) + 2a^2 = (\gamma+1)a_{\text{кр}}^2;$$

$$a^2 = a_{\text{кр}}^2\frac{\gamma+1}{2} - v^2\frac{\gamma-1}{2}.$$

Преобразуем выражение для $(v^2 - a^2)$:

$$v^2 - a^2 = v^2 - a_{\text{кр}}^2 \frac{\gamma + 1}{2} + v^2 \frac{\gamma - 1}{2} = v^2\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right) - a_{\text{кр}}^2 \frac{\gamma + 1}{2} =$$

$$= \frac{\gamma + 1}{2}\left(v^2 - a_{\text{кр}}^2\right).$$

Теперь полученное выше дифференциальное уравнение запишется так:

$$d\theta = \pm \frac{\sqrt{v^2 - a^2}}{av} dv = \frac{\pm\sqrt{\dfrac{v^2 - a^2}{a^2}} v dv}{v^2} = \pm \frac{\sqrt{\dfrac{v^2 - a^2}{a^2}} v dv}{v^2}.$$

Обозначим отношение $\dfrac{v^2}{a^2} = x$, учтем полученные выше соотношения для a^2 и $\left(v^2 - a^2\right)$ и продолжим преобразования дифференциального уравнения:

$$d\theta = \pm \sqrt{\frac{\dfrac{\gamma + 1}{2} a_{\text{кр}}^2 \left(\dfrac{v^2}{a_{\text{кр}}^2} - 1\right)}{\dfrac{\gamma + 1}{2} a_{\text{кр}}^2 \left(1 - \dfrac{v^2}{a_{\text{кр}}^2} \dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)}} \frac{d\left(\dfrac{v^2}{a_{\text{кр}}^2}\right)}{2\dfrac{v^2}{a_{\text{кр}}^2}} = \pm \sqrt{\frac{x - 1}{1 - x\dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}} \frac{dx}{2x} = \pm z \frac{dx}{2x}.$$

Здесь

$$z = \sqrt{\frac{x - 1}{1 - x\dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}}.$$

Выразим величину x через z из последнего соотношения:

$$z^2 = \frac{x - 1}{1 - x\dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}; \qquad x = \frac{z^2 + 1}{1 - z^2 \dfrac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}.$$

Найдем dx:

$$dx = \frac{2z\left(1 - z^2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) - \left(z^2+1\right)\left(2z\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)}{\left(1 + z^2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2}dz =$$

$$= \frac{2z + 2z^3\frac{\gamma-1}{\gamma+1} - 2z^3\frac{\gamma-1}{\gamma+1} - 2z\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}{\left(1 + z^2\frac{k-1}{k+1}\right)^2}dz = \frac{2z\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)}{\left(1 + z^2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2}dz.$$

Подставив x и dθ, выраженные через z, в дифференциальное уравнение для dθ, получим

$$d\theta = \pm z\frac{dx}{2x} = \pm\frac{z\,2z\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)\left(1 + z^2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)}{\left(1 + z^2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2 2\left(z^2+1\right)}dz = \frac{z^2\frac{2}{\gamma+1}dz}{\left(1 + z^2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\left(z^2+1\right)}.$$

Отсюда

$$\theta = \pm\frac{2}{\gamma+1}\int\frac{z^2dz}{\left(z^2+1\right)\left(1 + z^2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)}.$$

Представим подынтегральную функцию $\Phi(z)$ следующим образом:

$$\Phi(z) = \frac{z^2}{\left(z^2+1\right)\left(1 + z^2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)} = \frac{A}{z^2+1} + \frac{B}{1 + z^2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}.$$

Определим коэффициенты A и B в представленном разложении, сделав предварительно простые преобразования:

$$\frac{A}{z^2+1}+\frac{B}{1+z^2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}=\frac{A+Az^2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+Bz^2+B}{\left(z^2+1\right)\left(1+z^2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)}=\frac{z^2}{\left(z^2+1\right)\left(1+z^2\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)},$$

$$(A+B)+z^2\left(A\frac{\gamma-1}{\gamma+1}+B\right)=z^2.$$

Сравнивая коэффициенты при z^2 в обеих частях равенства и свободные члены, получаем систему уравнений относительно A и B:

$$\begin{cases} A+B=0, \\ A\dfrac{\gamma-1}{\gamma+1}+B=1. \end{cases}$$

Из полученной системы нетрудно определить, что

$$A=-\frac{\gamma+1}{2}; \quad B=\frac{\gamma+1}{2}.$$

Теперь можно получить окончательное выражение для $\Phi(z)$. Для этого подставим полученные значения A и B в исходное дифференциальное уравнение:

$$\Phi(z)=\frac{-\frac{\gamma+1}{2}}{z^2+1}+\frac{\frac{\gamma+1}{2}}{1+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}z^2}=\frac{\gamma+1}{2}\left[-\frac{1}{z^2+1}+\frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}z^2}\right].$$

После подстановки последнего уравнения в интеграл получим

$$\theta=\pm\int\left(\frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}z^2}-\frac{1}{z^2+1}\right)dz+\text{const}=$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}z - \operatorname{arctg} z + \mathrm{const}\right)$$

(интегрирование проведено с помощью табличной формулы типа $\int \frac{dz}{a^2+z^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{z}{a}$).

Все описанные выше преобразования уравнений характеристик в плоскости годографа проведены, как сказано ранее, для приведения исходного уравнения характеристик к такому виду, который позволил бы провести следующий анализ геометрии этих линий.

Рассмотрим два предельных случая: 1) при $z \to 0$, $\theta \to 0$, что следует из решения дифференциального уравнения; 2) при $z \to \infty$, $\theta \to \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} - 1\right) > \frac{\pi}{2}$.

Расшифруем условия $z \to 0$ и $z \to +\infty$. Из равенства $z = \sqrt{\frac{x-1}{1-x\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}}$ следует, что $z \to 0$ при $x = +\frac{v^2}{a_{кр}^2} \to 1$, т.е. при $v \to a_{кр}$. Условие $z \to +\infty$ выполняется при $\left(1 - x\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right) \to 0$, что соответствует $x \to \frac{k+1}{k-1}$ или $v \to \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$ $a_{кр} = v_{max}$ (v_{max} — максимальная скорость адиабатического истечения газа).

Таким образом, в двух предельных случаях получили условия, определенным образом характеризующие геометрию линий характеристик в полярных координатах θ — v:

$$\text{при } \theta \to 0 \quad v \to a_{кр}, \qquad \text{при } \theta \to \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} - 1\right) \quad v \to v_{max}.$$

Следовательно, эти линии представляют собой семейство кривых, соответствующих различным значениям постоянных (const) и разным знакам ("+" или "–") в интеграле дифференциального уравнения и лежащих в кольце, образованном двумя окружностями — внутренней с радиусом $a_{кр}$ и внешней с v_{max} (рис. 134). Можно убедиться в том, что этими линиями являются эпициклоиды — кривые, образованные точкой окружности диаметром (v_{max} – – $a_{кр}$), катящейся без скольжения по внутренней окружности (см. рис. 134); при качении этой окружности по часовой стрелке получаются характеристики I рода, а против часовой стрелки – II рода.

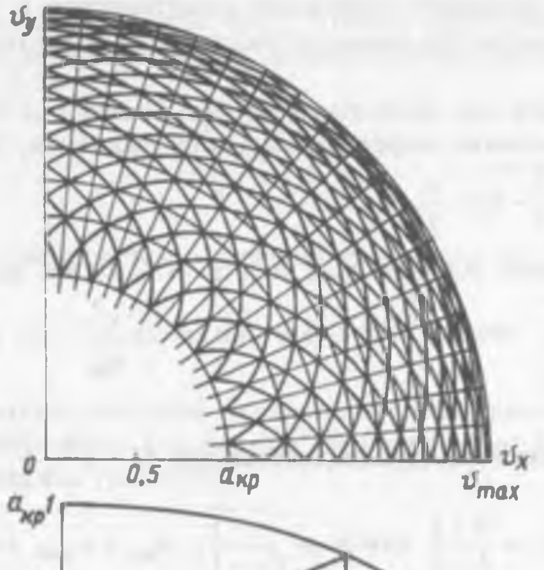


Рис. 134. Характеристика сверхзвукового потока воздуха в плоскости годографа скорости

На рис. 134 показана часть плоскости годографа с характеристиками I и II рода для воздуха, нанесенными с шагом значения постоянной (const), равным 5°. Покажем, что по характеристикам потока в плоскости годографа можно очень простым графическим способом построить характеристики в плоскости потока.

Предварительно получим значение скорости v в произвольной точке потока из уравнения Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\frac{a_{кр}^2}{2} = \frac{v_{max}^2}{2};$$

$$\frac{v^2}{2}\left(1 + \frac{\frac{a^2}{v^2}2}{\gamma - 1}\right) = \frac{v_{max}^2}{2};$$

$$v^2 = \frac{v_{max}^2}{1 + \frac{2}{\gamma - 1}\sin^2\alpha},$$

где $\sin\alpha = a/v$ — синус угла Маха.

Можно убедиться в том, что последнее выражение является уравнением эллипса в полярных координатах $v - \alpha$. Для этого каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

перепишем в полярных координатах $r - \theta$, где $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$:

$$\frac{r^2\cos^2\theta}{c^2} + \frac{r^2\sin^2\theta}{b^2} = 1; \qquad r^2\left(\frac{\cos^2\theta}{c^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) =$$

$$= r^2\left(\frac{1-\sin^2\theta}{c^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) = r^2\left[\frac{b^2+\left(c^2-b^2\right)\sin^2\theta}{c^2b^2}\right] = 1;$$

$$r^2 = \frac{c^2}{1+\dfrac{c^2-b^2}{b^2}\sin^2\theta}.$$

Это уравнение структурно аналогично уравнению $c^2 = v_{\max}^2$.

$$\frac{c^2-b^2}{b^2} = \frac{2}{\gamma-1} \quad \text{или} \quad b^2 = c^2\frac{\gamma-1}{\gamma+1} = v_{\max}^2\frac{\gamma-1}{\gamma+1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}a_{\text{кр}}^2\frac{\gamma-1}{\gamma+1} = a_{\text{кр}}^2$$

Следовательно, большая полуось эллипса, представляющего собой кривую зависимости $v(\alpha)$, равна $v_{\max}$, а меньшая — $a_{\text{кр}}$.

Совместим теперь центр полученного эллипса с началом координат в плоскости годографа (рис. 135). Радиус-вектор произвольной точки M, лежащий на контуре эллипса, представляет собой вектор скорости v в точке M, поскольку годограф вектора есть кривая зависимости $v(\alpha)$. Большая полуось эллипса с направлена под углом α к вектору $\bar{v}$, где $\alpha = \arcsin\frac{a}{v}$. Выше было показано, что этот угол α характеризует угол между вектором скорости в точке M и характеристикой, проходящей через данную точку M в плоскости потока.

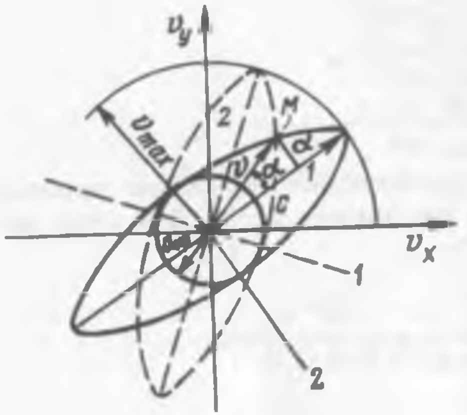


Рис. 135. Использование адиабатного эллипса Буземана для построения характеристик сверхзвукового потенциального потока газа в плоскости течения

Следовательно, если в некоторой точке потока известен вектор скорости, то определить направление характеристики в данной точке плоскости можно с помощью адиабатного эллипса (эллипса Буземана, поз. *1*), сориентированного, как показано на рис. 135, в плоскости годографа.

Нетрудно убедиться в том, что через одну точку M в плоскости годографа можно провести два эллипса (второй показан пунктиром на рис. 135, поз. *2*); большая полуось второго эллипса определит направление характеристики II рода в данной точке.

Примеры задач со сверхзвуковым потенциальным течением газа, решаемых методом характеристик

Пример 1 (рис. 136)

В плоскости потока задана линия AB с известным распределением скоростей. Определить поле скоростей в окрестности линии AB.

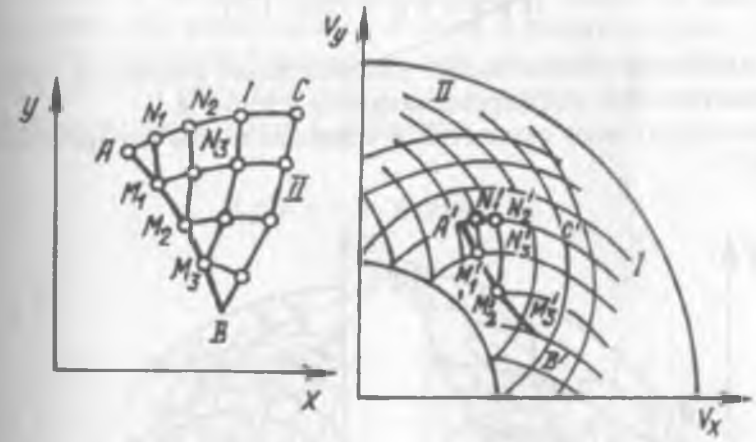


Рис. 136. К постановке и решению задачи, данной в примере 1

Решение. Зная величину и направление скоростей в ряде точек A, M_1, M_2, M_3, B на линии AB в плоскости потока, построим линию $A'B'$ в плоскости годографа по значениям $\bar{v}_A, \bar{v}_{M1}, \bar{v}_{M2}$,

$\bar{v}_{M3}, \bar{v}_B$ и с помощью эллипса построим направления характеристик I и II рода в точках A, M_1, ..., B. В плоскости годографа через все зафиксированные нами на линии $A'B'$ точки проходят уже известные характеристики.

Выделим в плоскости годографа точку пересечения двух характеристик N'_1. Скорость в ней v_{N1} известна, поскольку само положение точки N'_1 в плоскости годографа однозначно определяет скорость в этой точке. Если найти положение этой точки в плоскости потока, то мы определим в потоке точку с известной скоростью.

Точка N'_1 является точкой пересечения направлений характеристик из точек A и M_1, т.е. ее положение зависит от числа участков линии AB. Аналогично определены скорости в точках N_3 и далее везде внутри треугольника ABC.

Предлагаем самостоятельно продумать решение следующих примеров, используя приемы, аналогичные описанным выше.

Пример 2 (рис. 137)

В плоскости потока задано распределение скоростей вдоль характеристик AB и AC, пересекающихся в точке A.

Определить поле скоростей в криволинейном четырехугольнике $ABCD$.

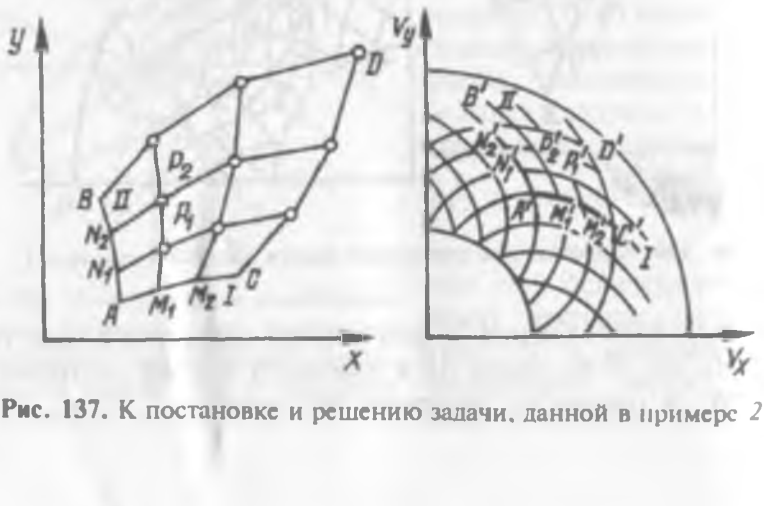


Рис. 137. К постановке и решению задачи, данной в примере 2

П р и м е р 3 (рис. 138)

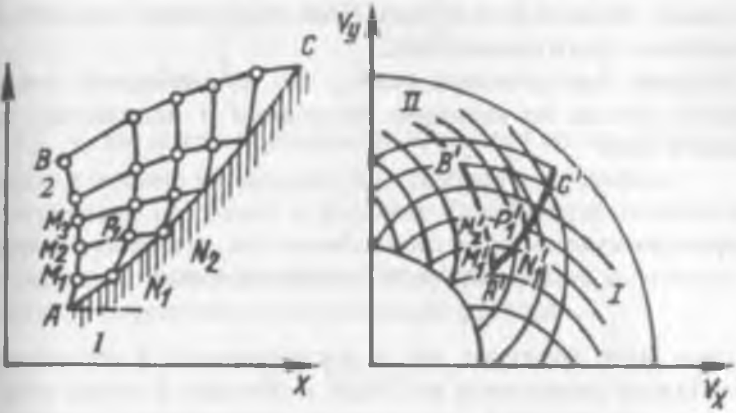


Рис. 138. К постановке и решению задачи, данной в примере 3

В плоскости потока задано распределение скоростей вдоль характеристики AB, пересекающей в точке A твердую стенку. Определить поле скоростей в криволинейном треугольнике ABC.

Указание: при решении учесть, что скорость потока на стенке направлена по касательной к ее контуру.

П р и м е р 4 (рис. 139)

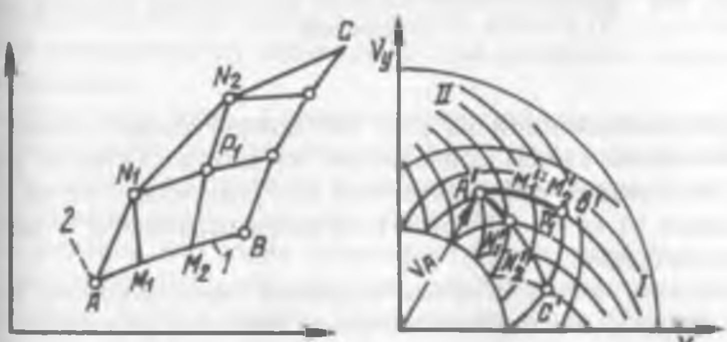


Рис. 139. К постановке и решению задачи, данной в примере 4

В плоскости потока задано распределение скоростей вдоль характеристики AB, пересекающей в точке A свободную поверхность (например, поверхность струи). Определить поле скоростей в криволинейном треугольнике ABC.

Указание: при решении учесть, что на свободной поверхности скорость потока по величине постоянна и направлена по касательной к ней.

Профилирование плоского сопла Лаваля для получения равномерного параллельного потока на выходе

Ранее было показано, что в суживающемся и расширяющемся сопле Лаваля дозвуковой на входе в сечении 0 поток газа можно разогнать до звуковой скорости в критическом сечении и до сверхзвуковой — в выходном сечении (рис. 140).

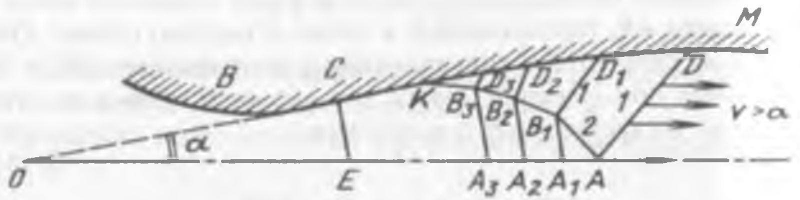


Рис. 140. Профилирование плоского сопла Лаваля методом характеристик

При изображенной на рис. 140 конфигурации стенок (пунктир) плоского канала сопла поток на выходе является радиальным, что снижает реактивную тягу по сравнению с тягой в сопле, на выходе из которого поток плоскости параллелен и направлен вдоль оси сопла z.

Поставим задачу о проектировании сверхзвукового плоского сопла Лаваля с плоскопараллельным потоком на выходе со скоростью v_1, которая определяется по уже известному соотношению (формула Сен-Венана):

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} R T_0^* \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0^*} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right]},$$

где p_0^*, T_0^* — параметры заторможенного потока на входе; p_1 — статическое давление на выходе; R — газовая постоянная.

Все величины, входящие в формулу Сен-Венана, полагаем известными.

При заданном расходе воздуха G (кг/с) площадь выходного сечения сопла f_1 определится из уравнения расхода

$$f_1 = G/(\rho_1 v_1),$$

где $\rho_1 = p_1/(RT_1)$ — плотность газа в выходном сечении, определенная по заданному давлению на выходе p_1 и температуре T_1, вычисленной из соотношений адиабатического процесса расширения в сопле

$$T_1 = T_0^* \left(\frac{p_1}{p_0^*} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}.$$

Задавшись углом раскрытия расширяющейся части сопла $\alpha = 5...8°$ (см. рис. 140), определим длину OA, при которой площадь выходного сечения сопла получается равной f_1, т.е. соответствующей определенному значению v_1 при истечении в радиальном направлении.

Проведем через точку A характеристики первого и второго рода, используя ранее описанные приемы — с помощью адиабатного эллипса, сориентированного в плоскости годографа по направлению v_A, параллельной z (см. рис. 135 и 140).

Будем считать, что вдоль характеристики первого рода поток уже плоскопараллелен; следовательно, эта характеристика на всей длине является прямой линией. Проведем из точки O окружность радиусом $OA_1 < OA$ до пересечения с элементом характеристики второго рода, проведенной из A, в точке B_1. При достаточно малом отрезке AA_1 этот участок характеристики второго рода с достаточной степенью точности можно рассматривать как отрезок прямой. Проведем через B_1 характеристику первого рода в виде прямой (предлагаем самостоятельно рассмотреть частный случай примера 2, когда характеристика AC, рис. 137, прямолинейна. Тогда все характеристики того же рода тоже прямолинейны), а также элемент характеристики второго рода до пересечения в точке B_2 с дугой окружности $KA_2 < KA_1$. Такого рода построения повторим до пересечения одной из характеристик второго рода со стенкой сопла, например, в точке M.

Через точку пересечения последней характеристики первого рода со стенкой канала D_3 проведем линию, параллельную направлению KB_3, и посмотрим, каково будет направление потока в сечении B_3D_3. Поскольку B_3D_3 — характеристика первого рода, геометрически прямая линия, то во всех точках этой прямой поток будет параллелен направлению KB_3 или, другими словами, стенке D_3D_2.

Если провести линию D_2D_1 параллельно KB_2, а D_1D параллельно OB и, наконец, DD параллельно z, то в сечениях B_2D_2, D_1B_1, AD поток будет плоскопараллельным и постепенно, от сечения к сечению поворачивающимся к осевому направлению вдоль z.

Таким образом, контур $KD_3D_2D_1D$ можно рассматривать как стенку плоского сопла на выходном его участке, осуществляющем поворот потока от радиального направления к осевому.

Для получения более плавных очертаний стенки сопла необходимо уменьшить расстояния AA_1, A_1A_2, A_2A_3 и т.д.

Аналогично строится нижняя стенка сопла (на рис. 140 не показано).

Контрольные вопросы к §31

1. Почему невозможна суперпозиция потенциальных потоков газа?

2. Получить из уравнения (4.57) уравнение Лапласа для потенциала скорости несжимаемого потока.

3. Дать математическое и физическое определения понятию "характеристики сверхзвукового потока газа".

4. Каким образом используется адиабатный эллипс Буземана при расчете потенциального течения газа?

Глава 5. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ДВИЖЕНИЯ

§32. УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

Математические соотношения

Векторная форма уравнений движения сплошной среды (см. гл. 2) инвариантна относительно Эйлеровой инерциальной системы координат. Однако при решении конкретных газодинамических задач производят арифметические действия со скалярами (числами). Для преобразования векторного уравнения в эквивалентную систему скалярных уравнений вводят ту или иную систему координат.

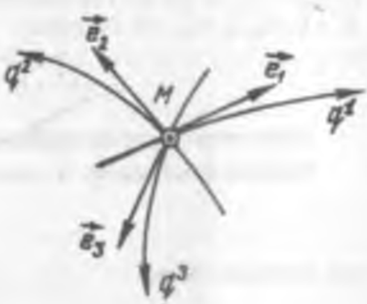


Рис. 141. Схема расположения векторов основного базиса

Направления криволинейных координатных линий в произвольной точке M пространства задают при помощи трех линейно независимых координатных векторов $\bar{e}_i$ (i = 1, 2, 3), называемых основным базисом трехмерного пространства. Каждый из векторов основного базиса направлен по касательной к координатной линии q^i в сторону возрастания соответствующей координаты (рис. 141).

Система координат называется ортогональной, если векторы $\bar{e}_i$ (i = 1, 2, 3) взаимно перпендикулярны. Примером ортогональной системы координат является прямоугольная Декартова система, в которой векторный базис $\bar{e}_i = \bar{i}_i$ (i = 1, 2, 3) одинаков для всех точек пространства. В случае обобщенных координат векторный базис $\bar{e}_i$ (i = 1, 2, 3) является локальным (местным), т.е. зависит от положения точки M в пространстве.

Базис $\bar{e}^k$ (k = 1, 2, 3), где верхний индекс k обозначает номер вектора, называется взаимным базисом к основному базису $\bar{e}_i$ (i = 1, 2, 3), если векторы удовлетворяют соотношению

$$\vec{e}_i\vec{e}^k = \delta_i^k = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k; \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases} \quad (5.1)$$

Из данного определения следует, что каждый вектор базиса перпендикулярен к плоскости, проходящей через два вектора взаимного базиса $\vec{e}^k$ $(i \neq k)$. Заметим, что объемы параллелепипедов, построенных на векторах основного базиса $V^1\left|\vec{e}^1\left(\vec{e}^2 \times \vec{e}^3\right)\right|$, связаны соотношением $V_1 V^1 = 1$.

Из сопоставления выражений для V_1 и V^1 следуют соотношения, определяющие векторы взаимного базиса:

$$\vec{e}^l = \frac{\vec{e}^j \times \vec{e}^k}{V^1} = \frac{\vec{e}^j \times \vec{e}^k}{\vec{e}^l\left(\vec{e}^m \times \vec{e}^n\right)}.$$

Для ортогональных базисов, имеющих единичные координатные векторы $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$, с учетом очевидных равенств $\vec{i}_l\vec{i}_k = 0$ при $l \neq k$ и $\vec{i}_l\vec{i}_k = 1$ при $l = k$ $\vec{i}_k \times \vec{i}_l = \vec{i}_m, \vec{i}_n \times \vec{i}_n = 0$ получаем

$$\vec{i}_1 = \vec{e}^1 = \vec{i}_1; \quad \vec{i}_2 = \vec{e}^2 = \vec{i}_2; \quad \vec{i}_3 = \vec{e}^3 = \vec{i}_3.$$

Таким образом, ортогональный базис совпадает со своим взаимным.

Произвольный вектор $\vec{A}$ может быть расположен по векторам основного базиса

$$\vec{A} = A^l\vec{e}_l \quad (5.2)$$

или взаимного базиса

$$\vec{A} = A^k\vec{e}_k, \quad (5.3)$$

где числа $A^l = \vec{A}\vec{e}_k$ называются контравариантными компонентами (проекциями) вектора $\vec{A}$, а $A^k = \vec{A}\vec{e}_l$ — ковариантными; в выражениях (5.2), (5.3) и далее подразумевается суммирование от 1 до 3 по повторяющимся произвольно обозначенным индексам, например

$$A^l\vec{e}_l = A^1e_1 + A^2e_2 + A^3e_3.$$

Для введения "физических" компонент вектора, размерности которых совпадают с размерностями рассматриваемого вектора, определяется единичный векторный базис e_i^* $(i = 1, 2, 3)$, и взаимный ему базис $\vec{e}^{*k}$ $(k = 1, 2, 3)$:

$$\vec{e}_i^* = \vec{e}_i \,/\left|\vec{e}_i\right|, \qquad \vec{e}^{*k} = \vec{e}^k \,/\left|\vec{e}^k\right|.$$

В этих базисах вектор $\bar{A}$ выражается в виде

$$\bar{A} = A^{*i}\bar{e}_i^* = A_k^*\bar{e}^{*k} . \tag{5.4}$$

В случае ортогональных систем координат физические компоненты (проекции) A^{*i} A_i^* совпадают, поскольку ортогональный базис совпадает со своим взаимным. Физические компоненты A^{*i} вектора A выражаются через контравариантные проекции A^i, так как $\bar{A} = A^i\bar{e}_i = A^{*i}\bar{e}_i^* = A^{*i}\bar{e}_i / |\bar{e}_i|$, откуда

$$A^{*i} = A^i|\bar{e}_i| = A^i\sqrt{|\bar{e}_i||\bar{e}_i|} = \sqrt{g_{ii}}\,A^i$$

и, следовательно,

$$A^{*i} = H_i A^i, \tag{5.5}$$

где $H_i = \sqrt{g_{ii}}$.

Связь между ковариантными A_k и контравариантными компонентами A^i вектора $\bar{A}$ в произвольном базисе получим, умножив разложение (5.2) на $\bar{e}_k$, а (5.3) на $\bar{e}^i$:

$$A_k = \bar{e}_k\bar{A} = \bar{e}_i\bar{e}_k A^i = g_{ik}A^i; \tag{5.6}$$

$$A^i = \bar{e}^i\bar{A} = \bar{e}^i\bar{e}_k A_k = g^{ik}A_k ,$$

где $g_{ik} = \bar{e}_i\bar{e}_k = |\bar{e}_i||\bar{e}_k|\cos(\bar{e}_i,\bar{e}_k)$, $g^{ik} = \bar{e}^i\bar{e}^k$.

При линейном преобразовании векторов

$$\bar{e}'_i = \alpha^k_{i'}\bar{e}_k , \qquad \bar{e}_j = \alpha^{k'}_j\bar{e}'_k , \tag{5.7}$$

где $\alpha^k_{i'}$, $\alpha^{k'}_j$ — коэффициенты прямого и обратного преобразований.

Девять величин g_{ik} (а также g^{ik}) образуют тензор второго ранга, называемый метрическим тензором. Величины g_{ik} и g^{ik} подчиняются закону преобразования компонент тензора второго ранга

$$g'_{ik} = \bar{e}'_i\bar{e}'_k = \alpha^j_{i'}\bar{e}_j \cdot \alpha^l_{k'}\bar{e}_l = \alpha^j_{i'}\alpha^l_{k'}g_{jl},$$

и

$$g'^{ik} = \bar{e}'^i\bar{e}'^k = \alpha^{i'}_j\bar{e}^j \cdot \alpha^{k'}_l\bar{e}^l = \alpha^{i'}_j\alpha^{k'}_l g^{jl}.$$

Скалярное произведение векторов с использованием компонент выражается как $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b}) = g_{ij}a^ib^j$.

Через компоненты метрического тензора выражаются также элементы длины дуги, площади поверхности и объема. Квадрат длины дуги dl между двумя бесконечно близкими точками x^i и $x^i + dx^i$ в системе координат с базисом $(\bar e_1, \bar e_2, \bar e_3)$ выражается через компоненты метрического тензора g_{ik}:

$$dl^2 = \left|\overrightarrow{dr}\right|^2 = \overrightarrow{dr}\,\overrightarrow{dr} = \bar e_i dx^i \bar e_k dx^k = g_{ik} dx^i dx^k, \tag{5.8}$$

где dx^i (i = 1, 2, 3), dx^k (k = 1, 2, 3) — контравариантные компоненты элементарного радиуса-вектора $\overrightarrow{dr}$.

Вектор $\overrightarrow{dr}$ выражается как

$$\overrightarrow{dr} = \frac{\partial \vec r}{\partial x_i} dx^i = \bar e_i dx^i \ (i = 1, 2, 3),$$

откуда

$$\frac{\partial \vec r}{\partial x_i} = \bar e_i; \quad \frac{\partial \bar e_i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \vec r}{\partial x^i \partial x^k} = \frac{\partial \bar e_k}{\partial x^i}. \tag{5.9}$$

В ортогональном базисе $g_{ik} = 0$ при $i \ne k$. Тогда из (5.6) следует:

$$A_1 = g_{11} A^1, \quad A_2 = g_{22} A^2, \quad A_3 = g_{33} A^3,$$

$$A^1 = g^{11} A_1, \quad A^2 = g^{22} A_2, \quad A^3 = g^{33} A_3,$$

откуда

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}}, \quad g_{22} = \frac{1}{g^{22}}, \quad g_{33} = \frac{1}{g^{33}}. \tag{5.10}$$

Квадрат длины малой дуги в ортогональной криволинейной системе координат может быть выражен по соотношению (5.8) в виде

$$dl^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2. \tag{5.11}$$

Числа $H_i = \sqrt{g_{ii}}$ (нет суммирования) называются коэффициентами Ламэ. Если элементарная дуга dl совпадает с элементом i-й координатной линии q^i (i = 1, 2, 3) (см. рис. 141), то из соотношения (5.11)

$$dl_i = dq^i = H_i dx^i \quad \text{(нет суммирования)}. \tag{5.12}$$

Следовательно, коэффициент Ламэ H_i (i = 1, 2, 3) представляет собой отношение бесконечно малой длины дуги dq^i, расположенной вдоль координатной линии q^i к соответствующему бесконечно малому приращению координаты dx^i.

Элемент площади dS_1 координатной поверхности x^1 = const выражается через векторное произведение векторов $\bar e_2 dx^2$ и $\bar e_3 dx^3$:

$$dS_1 = |\bar e_2 \times \bar e_3| dx^2 dx^3 = \sqrt{(\bar e_2 \times \bar e_3)(\bar e_2 \times \bar e_3)}\, dx^2 dx^3 =$$

$$= \sqrt{(\bar e_2 \bar e_2)(\bar e_3 \bar e_3) - (\bar e_2 \bar e_3)(\bar e_3 \bar e_3)}\, dx^2 dx^3 =$$

$$= \sqrt{q_{22} q_{33} - q_{23}^2}\, dx^2 dx^3.$$

Аналогично для элемента произвольной i-й координатной поверхности получаем

$$dS_i = \sqrt{q_{jj} q_{kk} - q_{jk}^2}\, dx^j dx^k \quad \text{(нет суммирования)}. \tag{5.13}$$

Элементы объема, построенного на векторах $\bar e_1 dx^1$, $\bar e_2 dx^2$, $\bar e_3 dx^3$, выражаются через их смешанное произведение:

$$dV = \bar e_1(\bar e_2 \bar e_3) dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{G}\, dx^1 dx^2 dx^3, \tag{5.14}$$

где

$$G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}.$$

В случае ортогональной системы координат элементы площади и объема выражаются по формулам (5.13) и (5.14) с использованием коэффициентов Ламэ:

$$dS_i = H_j H_k dx^j dx^k \quad \text{(нет суммирования)}, \tag{5.15}$$

$$dV = H_1 H_2 H_3 dx^1 dx^2 dx^3.$$

При расчете осесимметричных течений широко применяется цилиндрическая система координат (r, φ, z) (рис. 142). Длины элементарных дуг вдоль координатных линий q^1, q^2, q^3 выражаются по соотношению (5.12) через приращение координат:

$$dx_1 = dx^1 = dr, \quad dx_2 = dx^2 = d\varphi, \quad dx_3 = dx^3 = dz.$$

$$dq^1 = dr = H_1 dr; \quad dq^2 = r\, d\varphi = H_2 d\varphi; \quad dq_3 = dz = H_3 dz;$$

откуда

$$H_1 = 1, \; H_2 = r, \; H_3 = 1. \tag{5.16}$$

Элементы площади на координатных поверхностях $x_1 = r$ = const, $x_2 = \varphi$ = const, $x_3 = z$ = const с учетом (5.15) могут быть представлены в виде

$$dS_1 = r\, d\varphi\, dz, \quad dS_2 = dr\, dz, \quad dS_3 = r\, d\varphi\, dr.$$

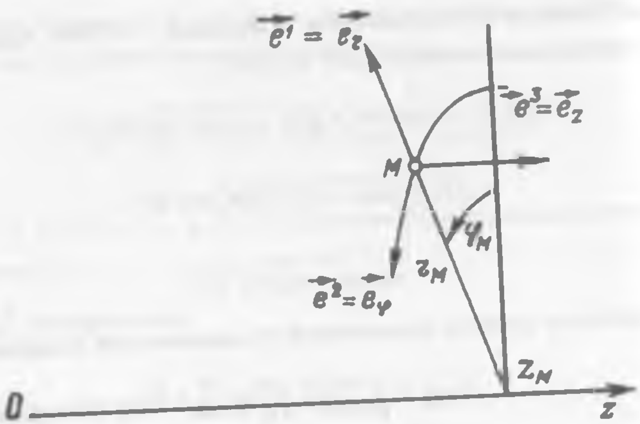


Рис. 142. Схема цилиндрической системы координат

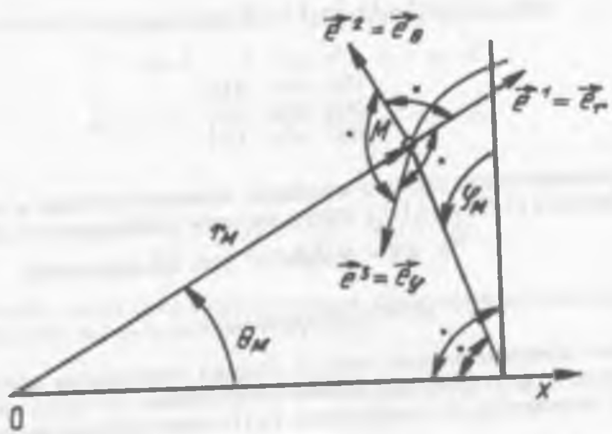


Рис. 143. Схема сферической системы координат

Элементарный объем (5.15) в цилиндрической системе координат

$$dV = r\,dr\,d\varphi\,dz.$$

В сферической системе координат r, θ, φ (рис. 143) длины элементарных ду вдоль координатных линий $dq^1 = dr$, $dq^2 = r\,d\theta$, $dq^3 = r\sin\theta\,d\varphi$ выражаются через приращения координат и коэффициенты Ламэ по формулам (5.12)

$$dr = H_1 dr, \qquad r\,d\theta = H_2 d\theta, \qquad r\sin\theta\,d\varphi = H_3 d\varphi,$$

откуда

$$H_1 = 1, \qquad H_2 = r, \qquad H_3 = r\sin\theta. \tag{5.17}$$

Дифференциальные операторы в ортогональных криволинейных координатах

Проекция градиента скалярной функции Φ на направление координатного вектора $\bar e_i$ равна производной данной функции по направлению координатной линии q^i:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial q^i} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial x^i}{\partial q^i} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \qquad \text{(нет суммирования)}.$$

Поэтому вектор градиента скалярной функции (оператор Гамильтона "набла") имеет вид

$$\operatorname{grad}\Phi = \nabla\Phi = \frac{1}{H_1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\bar e_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\bar e_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\bar e_3. \tag{5.18}$$

По определению дивергенции вектора $\bar A$

$$\operatorname{div}\bar A = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_S \bar A\bar n\,dS'. \tag{5.19}$$

Для вычисления поверхностного интеграла в правой части соотношения (5.19) найдем поток вектора $\bar A$ через противоположные грани элементарного объема:

$$dV = d\,l_1\,d\,l_2\,d\,l_3 = H_1H_2H_3\,d\,x_1\,d\,x_2\,d\,x_3.$$

В направлении q_1 получим поток вектора $\bar A$:

$$-A_1 dS_2 dS_3 + \left(A_1 dS_2 dS_3 + \frac{\partial\left(A_1 dS_2 dS_3\right)}{\partial x_1}dx_1\right) =$$

$$= \frac{\partial\left(A_1 dS_2 dS_3\right)}{\partial x_1}dx_1,$$

где $A_1 = \bar e_1\bar A$ — проекция вектора $\bar A$ на вектор $\bar e_1$, направленный вдоль координатной линии q^1.

Аналогичным образом вычисляют потоки вектора $\bar A$ через поверхности q^2 = const и q^3 = const. Тогда по определению (5.19) получим

$$\operatorname{div}\bar{A}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial(A_1H_2H_3)}{\partial x_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial(A_2H_3H_1)}{\partial x_2}+\frac{\partial(A_3H_1H_2)}{\partial x_3}\right] \tag{5.20}$$

Таким же образом по определению вихря вектора $\bar{A}$ находим

$$\operatorname{rot}\bar{A}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_S\left(\bar{n}\times\bar{A}\right)dS'=$$

$$=\frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial(A_3H_3)}{\partial x_2}-\frac{\partial(A_2H_2)}{\partial x_3}\right]\bar{e}_1+$$

$$+\frac{1}{H_1H_3}\left[\frac{\partial(A_1H_1)}{\partial x_3}-\frac{\partial(A_3H_3)}{\partial x_1}\right]\bar{e}_2+$$

$$+\frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial(A_2H_2)}{\partial x_1}-\frac{\partial(A_1H_1)}{\partial x_2}\right]\bar{e}_3. \tag{5.21}$$

Для выражения дифференциального оператора Лапласа (лапласиана) скалярной функции Ф воспользуемся формулой векторного анализа $\Delta\Phi=\nabla\cdot\nabla\Phi=\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi$ С учетом формул (5.18), (5.20) получим

$$\Delta\Phi=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}\right)\right] \tag{5.22}$$

Вектор $\Delta\bar{A}$ определяется по формуле векторного анализа

$$\Delta\bar{A}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{A}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A}. \tag{5.23}$$

Пространственная производная от тензорной функции $\bar{\bar{P}}$ по определению

$$\operatorname{Div}\bar{\bar{P}}=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\int_S\bar{n}P\,dS',$$

где $\bar{n}P$ — вектор, имеющий проекции $(\bar{n}P)_j=n_iP_{ij}$.

Вычисляя потоки тензора $\bar{P}$ через грани элементарного объема dV, ограниченного ортогональными поверхностями $q^i = C_1$, $q^i + dq^i = C_2$ $(i = 1, 2, 3)$, получают проекции вектора Div $\bar{P}$ на оси координат:

$$\left(\mathrm{Div}\,\bar{P}\right)^1 = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q^1}(H_2H_3P_{11}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial q^2}(H_3H_1P_{21}) + \frac{\partial}{\partial q^3}(H_1H_2P_{31})\right] +$$

$$+ \frac{P_{12}}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q^2} + \frac{P_{13}}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q^3} - \frac{P_{22}}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q^1} - \frac{P_{33}}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q^1};$$

$$\left(\mathrm{Div}\,\bar{P}\right)^2 = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q^1}(H_2H_3P_{12}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial q^2}(H_3H_1P_{22}) + \frac{\partial}{\partial q^3}(H_1H_2P_{32})\right] +$$

$$+ \frac{P_{21}}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q^1} + \frac{P_{23}}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q^3} - \frac{P_{11}}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q^2} - \frac{P_{33}}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q^2};$$

$$\left(\mathrm{Div}\,\bar{P}\right)^3 = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q^1}(H_2H_3P_{13}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial q^2}(H_3H_1P_{23}) + \frac{\partial}{\partial q^3}(H_1H_2P_{33})\right] +$$

$$+ \frac{P_{31}}{H_1H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q^1} + \frac{P_{32}}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q^2} - \frac{P_{11}}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q^3} - \frac{P_{22}}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q^3}. \qquad (5.24)$$

В частном случае цилиндрической системы координат (r, φ, z), используя предшествующие соотношения, а также (5.15), (5.18), (5.20) – (5.24), получаем

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\bar{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\bar{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\bar{e}_z;$$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(A_r r\right) + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right);$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\varphi + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(A_\varphi r\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right]\vec{e}_z;$$

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}; \qquad (5.25)$$

$$\Delta\vec{A} = \left(\Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r +$$

$$+ \left(\Delta A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_\varphi + \Delta A_z \vec{e}_z;$$

$$\left(\mathrm{Div}\,\tilde{P}\right)_r = \frac{\partial P_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_{zr}}{\partial z} + \frac{P_{rr} - P_{\varphi\varphi}}{r};$$

$$\left(\mathrm{Div}\,\tilde{P}\right)_\varphi = \frac{\partial P_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{P_{r\varphi} + P_{\varphi r}}{r};$$

$$\left(\mathrm{Div}\,\tilde{P}\right)_z = \frac{\partial P_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial P_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} + \frac{P_{rz}}{r}.$$

Аналогичные формулы могут быть получены из соотношений (5.24) для сферической системы координат (r, θ, φ), в которой $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r\sin\theta$. Так, например,

$$\nabla\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi;$$

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(A_r r^2\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi};$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(A_\varphi \sin\theta\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right]\vec{e}_r + \left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \right.$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\varphi\right)\Bigg]\bar{e}_\varphi+\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(A_\theta r\right)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\bar{e}_\varphi; \tag{5.26}$$

$$\left(\mathrm{Div}\ \bar{P}\right)_{r}=\frac{\partial P_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial P_{\theta r}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P_{\varphi r}}{\partial\varphi}+$$

$$+\frac{1}{r}\left(2P_{rr}+P_{\theta r}\operatorname{ctg}\theta-P_{\theta\theta}-P_{\varphi\varphi}\right).$$

Векторы локального базиса $\bar{e}_i$ (i = 1, 2, 3) изменяются при переходе от одной точки пространства к другой и являются функциями координат x^i. Следовательно, полный дифференциал вектора $\bar{A}=\bar{e}_i A^i$ равен:

$$\mathrm{d}\bar{A}=\bar{e}_i\mathrm{d}A^i+A^i\,\mathrm{d}\bar{e}_i. \tag{5.27}$$

Умножив обе части этого равенства на $\bar{e}^j$, с учетом (5.1), (5.5) и (5.9), получим

$$\left(\mathrm{d}\bar{A}\right)^j=\mathrm{d}\bar{A}\bar{e}^j=\mathrm{d}A^j+A^i\bar{e}^j\mathrm{d}\bar{e}_i=\mathrm{d}A^j+\Gamma^j_{ik}A^i\mathrm{d}x^k, \tag{5.28}$$

где

$$\Gamma^j_{ik}=\Gamma^j_{ki}=\bar{e}^j\frac{\partial\bar{e}_i}{\partial x^k}=\bar{e}^j\frac{\partial^2\bar{r}}{\partial x^i\partial x^k} \tag{5.29}$$

называются символами Кристоффеля второго рода.

Перепишем Γ^j_{ik} (5.29) в виде

$$\Gamma^j_{ik}=\bar{e}^j\frac{\partial\bar{e}_i}{\partial x^k}=g^{j\alpha}\bar{e}_\alpha\frac{\partial\bar{e}_i}{\partial x^k}=g^{j\alpha}\Gamma_{\alpha,ik}, \tag{5.30}$$

где $\Gamma_{\alpha,ik}$ — символы Кристоффеля первого рода,

$$\Gamma_{\alpha,ik}=\bar{e}_\alpha\frac{\partial\bar{e}_i}{\partial x^k}=\frac{1}{2}\left(\bar{e}_\alpha\frac{\partial\bar{e}_i}{\partial x^k}+\bar{e}_\alpha\frac{\partial\bar{e}_k}{\partial x^i}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\bar{e}_\alpha\cdot\bar{e}_i\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\bar{e}_\alpha\cdot\bar{e}_k\right)-\bar{e}_i\frac{\partial\bar{e}_k}{\partial x^\alpha}-\bar{e}_k\frac{\partial\bar{e}_i}{\partial x^\alpha}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\bar{e}_\alpha\cdot\bar{e}_i\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\bar{e}_\alpha\cdot\bar{e}_k\right)-\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\bar{e}_i\cdot\bar{e}_k\right)\right]$$

Следовательно,

$$\Gamma_{ik}^{j} = \frac{1}{2} g^{j\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha i}}{\partial x^{k}} + \frac{\partial g_{\alpha k}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{\alpha}} \right). \tag{5.31}$$

Умножая равенство $\Gamma_{ik}^{j} = \bar{e}^{j} \frac{\partial \bar{e}_i}{\partial x^k}$ на $\bar{e}_j$ получаем $\bar{e}_j \Gamma_{ik}^{j} = \frac{\partial \bar{e}_i}{\partial x^k}$, откуда следует, что Γ_{ik}^{j} — есть компоненты разложения вектора $\frac{\partial \bar{e}_i}{\partial x^k}$ по векторам основного базиса $\bar{e}_j$.

В ортогональной системе координат получим из (5.31), используя соотношения $g^{j\alpha} = 0$ при $j \neq \alpha$ и $g^{jj} = \frac{1}{g_{jj}}$,

$$\Gamma_{ik}^{j} = \frac{1}{2 g_{jj}} \left(\frac{\partial g_{ji}}{\partial x^{k}} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^{i}} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{j}} \right). \tag{5.32}$$

Из соотношения (5.32) следует

$$\Gamma_{ik}^{j} = 0,$$

если значения i, j, k различны, а

$$\Gamma_{ii}^{i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x^i}; \qquad \Gamma_{ik}^{i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_i}{\partial x^k}; \qquad \Gamma_{ii}^{j} = -\frac{H_i}{H_j} \frac{\partial H_i}{\partial x^j}. \tag{5.33}$$

В цилиндрической системе координат $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = z$ с учетом $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = 1$, $g_{11} = 1$, $g_{22} = r^2$, $g_{33} = 1$ имеем

$$\Gamma_{ik}^{j} = 0, \quad \text{кроме} \quad \Gamma_{22}^{1} = -r; \ \Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = 1/r. \tag{5.34}$$

В сферической системе координат $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$ с учетом $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r \sin\theta$ получим

$$\Gamma_{ik}^{j} = 0, \quad \text{кроме} \quad \Gamma_{22}^{1} = -r, \ \Gamma_{33}^{1} = -r\sin^2\theta,$$
$$\Gamma_{33}^{2} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{13}^{3} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^{3} = \mathrm{ctg}\,\theta. \tag{5.35}$$

Рассмотрим выражение абсолютного ускорения, равное полной производной по времени от вектора скорости $\bar{v} = v^i \bar{e}_i$, имеющего проекции v^i в базисе $\bar{e}_i$ инерциальной системы координат q^i ($i = 1, 2, 3$):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\left(v^l \vec{e}_l\right)}{dt} = \frac{dv^l}{dt}\vec{e}_l + v^l \frac{d\vec{e}_l}{dt} =$$

$$= \left(\frac{\partial v^l}{\partial t} + v^k \frac{\partial v^l}{\partial x^k}\right)\vec{e}_l + v^k\left(\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial t} + \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial t}\right) = \tag{5.36}$$

$$= \left(\frac{\partial v^l}{\partial t} + v^k \frac{\partial v^l}{\partial x^k} + v^k v^s \Gamma^l_{ks}\right)\vec{e}_l.$$

Физические составляющие вектора скорости v^{*l} выражаются формулой (5.5) через контравариантные проекции v^l: $v^{*l} = H_l v^l$.

Далее индекс для выражения физических проекций опускается.

Проекции вектора ускорения в цилиндрической системе координат записываются с помощью соотношений (5.36), (5.34):

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_r = \frac{\partial v^1}{\partial t} + v^1 \frac{\partial v^1}{\partial x^1} + v^2 \frac{\partial v^1}{\partial x^2} + v^3 \frac{\partial v^1}{\partial x^3} +$$

$$+ \left(v^1\right)^2 \Gamma^1_{11} + \left(v^2\right)^2 \Gamma^1_{22} + \left(v^3\right)^2 \Gamma^1_{33} +$$

$$+ 2v^1v^2\Gamma^1_{12} + 2v^1v^3\Gamma^1_{13} + 2v^2v^3\Gamma^1_{23} =$$

$$= \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r}; \tag{5.37}$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_\varphi = \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r};$$

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

В сферической системе координат с учетом (5.35), (5.36) получим

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r};$$

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \tag{5.38}$$

$$+ \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{v_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta}{r};$$

$$\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\right)_\varphi = \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi \operatorname{ctg}\theta}{r}.$$

Тензор напряжений в криволинейных ортогональных координатах

Для большого количества газообразных и жидких сред тензор напряжений $\bar{P}$ связан с тензором скоростей деформации $\bar{S}$ обобщенным законом Ньютона

$$\bar{P} = 2\mu\bar{S} - \left(p + \frac{2}{3}\operatorname{div}\bar{v}\right)\bar{E}, \tag{5.39}$$

где компонентами тензора $\bar{S}$ являются скорости деформации проекций жидких отрезков на оси координат $S_{11} = \varepsilon_1$, $S_{22} = \varepsilon_2$, $S_{33} = \varepsilon_3$, а также скорости деформации скашивания углов между координатными осями $S_{12} = S_{21} = \frac{1}{2}\theta_3$; $S_{13} = S_{31} = \frac{1}{2}\theta_2$; $S_{23} = S_{32} = \frac{1}{2}\theta_1$.

С целью определения компонент S_{ij} в криволинейной ортогональной системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$) рассмотрим бесконечно малый жидкий отрезок M_1M_2 длиной δl, имеющий проекции δx_i. Жидкие частицы M_1 и M_2 имеют в момент времени $t = t_1$ координаты x_{1i} и x_{2i} соответственно. В момент времени $t_2 = t_1 + dt$ координаты этих частиц с учетом формулы (5.12) равны:

$$x'_{1i} = x_{1i} + dx_i = x_{1i} + \frac{dl_{1i}}{H_{1i}} = x_{1i} + \frac{v_{1i}}{H_{1i}}dt; \tag{5.40}$$

$$x'_{2i} = x'_{1i} + \delta(x'_i) = x_{1i} + \delta x'_i + \frac{v_{2i}}{H_{2i}}dt.$$

Отсюда получаем проекции рассматриваемого жидкого отрезка в момент времени t

$$\delta(x'_i) = x'_{2i} - x'_{1i} = \delta x'_i + \delta\left(\frac{v_i}{H_i}\right)dt, \tag{5.41}$$

где $\delta\left(\frac{v_i}{H_i}\right) = \frac{v_{2i}}{H_{2i}} - \frac{v_{1i}}{H_{1i}}$.

Тогда с учетом выражения $\delta x'_i = \delta x_i + d\left(\delta x'_i\right)$ имеем

$$d(\delta x_i) = \delta\left(\frac{v_i}{H_i}\right)dt = \frac{\partial\left(\frac{v_i}{H_i}\right)}{\partial x_k}dx_k\,dt. \tag{5.42}$$

(в формулах (5.40) — (5.42) нет суммирования по i).

Квадрат длины отрезка $M_1M_2 = \delta l$ может быть найден как сумма квадратов его проекций на оси x_i:

$$\delta l^2 = H_i^2 dx_i^2. \tag{5.43}$$

Скорость деформации жидкого отрезка $\frac{d(\delta l)}{\delta l\,dt}$ включает в себя составляющие, связанные с линейной деформацией жидких отрезков и с деформацией скашивания углов (см. гл. 1):

$$\frac{d(\delta l)}{\delta l\,dt} = \frac{1}{\delta l}\left(\varepsilon_1\delta l_1^2 + \varepsilon_2\delta l_2^2 + \varepsilon_3\delta l_3^2 + \right.$$

$$\left. + \theta_1\delta l_2\,\delta l_3 + \theta_2\delta l_3\,\delta l_1 + \theta_3\delta l_1\delta l_2\right). \tag{5.44}$$

Для вычисления этой величины продифференцируем (5.43) с учетом (5.42).

$$\delta l d(\delta l) = H_i dH_i \delta x_i^2 + H_i^2 \delta x_i d(\delta x_i) =$$

$$= H_i\left(\frac{\partial H_i}{\partial x_k}\delta x_k\right)\frac{v_k}{H_k}dt\frac{\delta l_i^2}{H_i^2} + H_i^2\frac{\delta l_i}{H_i}\frac{\partial\left(\frac{v_i}{H_i}\right)}{\partial x_k}\frac{\delta l_k}{H_k}dt.$$

Тогда скорость деформации

$$\frac{d(\delta l)}{\delta l\,dt} = \frac{1}{\delta l}\left(\frac{\partial H_i}{\partial x_k}\frac{v_k}{H_iH_k}\delta l_i^2 + \frac{H_i}{H_k}\frac{\partial\left(\frac{v_i}{H_i}\right)}{\partial x_k}\delta l_i\,\delta l_k\right). \tag{5.45}$$

Из сопоставления (5.44) и (5.45) следуют соотношения для компонент тензора скоростей деформации

$$\varepsilon_i = \frac{v_k}{H_i H_k}\frac{\partial H_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\left(\dfrac{v_i}{H_i}\right)}{\partial x_k} \tag{5.46}$$

($i = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3$; нет суммирования по i);

$$\theta_1 = \frac{H_2}{H_3}\frac{\partial(v_2 / H_2)}{\partial x_3} + \frac{H_3}{H_2}\frac{\partial(v_3 / H_3)}{\partial x_2};$$

$$\theta_2 = \frac{H_3}{H_1}\frac{\partial(v_3 / H_3)}{\partial x_1} + \frac{H_1}{H_3}\frac{\partial(v_1 / H_1)}{\partial x_3}; \tag{5.47}$$

$$\theta_3 = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial(v_1 / H_1)}{\partial x_2} + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial(v_2 / H_2)}{\partial x_1}.$$

В случае прямоугольных координат $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$; $H_1 = H_2 = H_3 = 1$; $v_1 = v_x$, $v_2 = v_y$, $v_3 = v_z$; $\delta l_1 = \delta x$, $\delta l_2 = \delta y$, $\delta l_3 = \delta z$ получаем соотношения, приведенные в гл. 2.

В цилиндрических координатах $x_1 = r$, $x_2 = \varphi$, $x_3 = z$; $H_1 = H_r = 1$, $H_2 = H_\varphi = r$, $H_3 = H_z = 1$; $\delta l_1 = \delta r$, $\delta l_2 = r\,\delta\varphi$, $\delta l_3 = \varphi z$ и по формулам (5.46), (5.47) получаем компоненты тензора скоростей деформации:

$$S_{11} = \varepsilon_1 = \frac{\partial v_r}{\partial r}; \qquad S_{22} = \varepsilon_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}; \qquad S_{33} = \varepsilon_3 = \frac{\partial v_z}{\partial z};$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{1}{2}\theta_3 = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}; \tag{5.48}$$

$$S_{13} = S_{31} = \frac{1}{2}\theta_2 = \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r};$$

$$S_{23} = S_{32} = \frac{1}{2}\theta_1 = \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}.$$

Составляющие тензора напряжений P_{ij} для ньютонианской среды в криволинейной ортогональной системе координат определяются соотношением (5.39):

$$P_{ij} = 2\mu S_{ij} - \left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\vec{v}\right)\delta_{ij}. \tag{5.49}$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, а компоненты скоростей деформаций вычисляются по формулам (5.46), (5.47), дивергенция вектора скорости – по соотношению (5.20).

В цилиндрической системе координат компоненты тензора напряжений находим из (5.48), (5.49):

$$P_{11} = P_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} - \left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{v}\right),$$

$$P_{22} = P_{\varphi\varphi} = 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}\right) - \left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{v}\right),$$

$$P_{33} = P_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \vec{v}\right),$$

$$P_{12} = P_{21} = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{\varphi}\right); \qquad (5.50)$$

$$P_{13} = P_{31} = \tau_{rz} = \tau_{zr} = \mu\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right);$$

$$P_{23} = P_{32} = \tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} = \mu\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}\right),$$

где $\operatorname{div} \vec{v} = \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial (r v_z)}{\partial z}\right]$.

В сферической системе координат аналогичные компоненты применительно к движению несжимаемой среды имеют вид

$$P_{11} = P_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r};$$

$$P_{22} = P_{\theta\theta} = -p + 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}\right);$$

$$P_{33} = P_{\varphi\varphi} = -p + 2\mu\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r}\right); \qquad (5.51)$$

$$P_{12} = P_{21} = P_{r\theta} = P_{\theta r} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right);$$

$$\varepsilon_i = \frac{v_k}{H_i H_k}\frac{\partial H_i}{\partial x_k} + \frac{\partial\left(\frac{v_i}{H_i}\right)}{\partial x_k} \qquad (5.46)$$

(i = 1, 2, 3; k = 1, 2, 3; нет суммирования по i);

$$\theta_1 = \frac{H_2}{H_3}\frac{\partial(v_2 / H_2)}{\partial x_3} + \frac{H_3}{H_2}\frac{\partial(v_3 / H_3)}{\partial x_2};$$

$$\theta_2 = \frac{H_3}{H_1}\frac{\partial(v_3 / H_3)}{\partial x_1} + \frac{H_1}{H_3}\frac{\partial(v_1 / H_1)}{\partial x_3}; \qquad (5.47)$$

$$\theta_3 = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial(v_1 / H_1)}{\partial x_2} + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial(v_2 / H_2)}{\partial x_1}.$$

В случае прямоугольных координат $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$; $H_1 = H_2 = H_3 = 1$; $v_1 = v_x$, $v_2 = v_y$, $v_3 = v_z$; $\delta l_1 = \delta x$, $\delta l_2 = \delta y$, $\delta l_3 = \delta z$ получаем соотношения, приведенные в гл. 2.

В цилиндрических координатах $x_1 = r$, $x_2 = \varphi$, $x_3 = z$; $H_1 = H_r = 1$, $H_2 = H_\varphi = r$, $H_3 = H_z = 1$; $\delta l_1 = \delta r$, $\delta l_2 = r\,\delta\varphi$, $\delta l_3 = \varphi z$ и по формулам (5.46), (5.47) получаем компоненты тензора скоростей деформации:

$$S_{11} = \varepsilon_1 = \frac{\partial v_r}{\partial r}; \qquad S_{22} = \varepsilon_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}; \qquad S_{33} = \varepsilon_3 = \frac{\partial v_z}{\partial z};$$

$$S_{12} = S_{21} = \frac{1}{2}\theta_3 = \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}; \qquad (5.48)$$

$$S_{13} = S_{31} = \frac{1}{2}\theta_2 = \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r};$$

$$S_{23} = S_{32} = \frac{1}{2}\theta_1 = \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}.$$

Составляющие тензора напряжений P_{ij} для ньютонианской среды в криволинейной ортогональной системе координат определяются соотношением (5.39):

$$P_{ij} = 2\mu S_{ij} - \left(p + \frac{2}{3}\mu \operatorname{div}\bar{v}\right)\delta_{ij}. \qquad (5.49)$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, а компоненты скоростей деформаций вычисляются по формулам (5.46), (5.47), дивергенция вектора скорости – по соотношению (5.20).

В цилиндрической системе координат компоненты тензора напряжений находим из (5.48), (5.49):

$$P_{11} = P_{rr} = 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r} - \left(p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \bar{v} \right),$$

$$P_{22} = P_{\varphi\varphi} = 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right) - \left(p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \bar{v} \right),$$

$$P_{33} = P_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \left(p + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \bar{v} \right),$$

$$P_{12} = P_{21} = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{\varphi} \right); \tag{5.50}$$

$$P_{13} = P_{31} = \tau_{rz} = \tau_{zr} = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right);$$

$$P_{23} = P_{32} = \tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} = \mu \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right),$$

где $\operatorname{div} \bar{v} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial (r v_z)}{\partial z} \right]$.

В сферической системе координат аналогичные компоненты применительно к движению несжимаемой среды имеют вид

$$P_{11} = P_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial v_r}{\partial r};$$

$$P_{22} = P_{\theta\theta} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right);$$

$$P_{33} = P_{\varphi\varphi} = -p + 2\mu \left(\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r} \right); \tag{5.51}$$

$$P_{12} = P_{21} = P_{r\theta} = P_{\theta r} = \mu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right);$$

$$+\frac{1}{r}\Big[2P_{r\theta}+P_{\theta r}+\left(P_{\theta\theta}-P_{\varphi\varphi}\right)\mathrm{ctg}\,\theta\Big]\Big\};$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{v_r v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{v_\theta v_\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}=$$

$$=F_\varphi+\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial P_{r\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial P_{\theta\varphi}}{\partial\theta}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi}+\frac{1}{r}\Big[2P_{r\varphi}+P_{\varphi r}+\left(P_{\theta\varphi}-P_{\varphi\theta}\right)\mathrm{ctg}\,\theta\Big]\right\}.$$

Уравнения движения несжимаемой жидкости в сферической системе координат получим, используя (5.51) и (5.56):

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}-\frac{v_\theta^2+v_\varphi^2}{r}=\\
&=F_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\varphi^2}+\right.\\
&\left.+\frac{2}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{2}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}-\frac{2v_r}{r^2}-\frac{2\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2}v_\theta\right);\\
&\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}-\frac{v_\theta v_r}{r}-\frac{v_\varphi^2\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}=\\
&=F_\theta-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial\varphi^2}+\right.\\
&\left.+\frac{2}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}-\frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta}-\frac{v_\theta}{r^2\sin^2\theta}\right);\\
&\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}+\frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{v_r v_\varphi}{r}+\frac{v_\theta v_\varphi\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}=\\
&=F_\varphi-\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\varphi^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\right.\\
&\left.+\frac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}+\frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}+\frac{2}{r^2}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}-\frac{v_\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right).
\end{aligned}\right.\tag{5.57}$$

Система уравнений (5.57) замыкается уравнением неразрывности $\mathrm{div}\,\vec{v}=0$ (5.20) в сферических координатах

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{2v_r}{r}+\frac{v_\theta\,\mathrm{ctg}\,\theta}{r}=0.$$

Система уравнений изоэнтропийного движения невязкого газа имеет следующий вид:

а) в цилиндрических координатах

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\dfrac{\partial v_r}{\partial r} + \dfrac{v_\varphi}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z\dfrac{\partial v_r}{\partial z} - \dfrac{v_\varphi^2}{r} = \\ = F_r - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r}; \\ \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \dfrac{v_\varphi}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \dfrac{v_r v_\varphi}{r} = \\ = F_\varphi - \dfrac{1}{\rho r}\dfrac{\partial p}{\partial \varphi}; \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\dfrac{\partial v_z}{\partial r} + \dfrac{v_\varphi}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z\dfrac{\partial v_z}{\partial z} = \\ = F_z - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z}; \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{1}{r}\left[\dfrac{\partial}{\partial t}(\rho v_r r) + \dfrac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \varphi} + r\dfrac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right] = 0; \\ p = c\rho^\gamma, \end{cases} \tag{5.58}$$

неизвестными функциями в этой системе являются v_r, v_φ, v_z, ρ, p;

б) в сферической системе координат

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\dfrac{\partial v_r}{\partial r} + \dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} + \dfrac{v_\varphi}{r\sin\theta}\dfrac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \dfrac{v_\theta^2 + v_\varphi^2}{r} = \\ = F_r - \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r}; \\ \dfrac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} + \dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{v_\varphi}{r\sin\theta}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} + \dfrac{v_r v_\theta}{r} - \dfrac{v_\varphi^2 \operatorname{ctg}\theta}{r} = \\ = F_\theta - \dfrac{1}{\rho r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta}; \\ \dfrac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \dfrac{v_\theta}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \dfrac{v_\varphi}{r\sin\theta}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \dfrac{v_r v_\varphi}{r} + \dfrac{v_\theta v_\varphi \operatorname{ctg}\theta}{r} = \\ = F_\varphi - \dfrac{1}{\rho r\sin\theta}\dfrac{\partial p}{\partial \varphi}; \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\rho v_r\right) + \dfrac{1}{\rho r\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}(\rho v_\theta \sin\theta) + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \varphi} = 0; \\ p = c\rho^\gamma. \end{cases} \tag{5.59}$$

Система уравнений (5.59) является замкнутой, так как содержит пять неизвестных функций r, v_φ, v_z, ρ, p.

При решении конкретных газодинамических задач на основе систем уравнений (5.55) – (5.59) необходимо задавать начальные и граничные условия

Контрольные вопросы к §32

1. Что такое ортогональная система координат? Какие ортогональные системы Вы знаете?
2. Что такое коэффициенты Ламэ?
3. Выразить коэффициенты Ламэ в цилиндрической системе координат.
4. Выразить коэффициенты Ламэ в сферической системе координат.
5. Что такое обобщенный закон Ньютона?

§33. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛАХ

Во многих случаях расчета и проектирования диффузоров и конфузоров различных технических устройств может быть принято допущение об осесимметричности течения. Осесимметричным называется течение, при котором поле газодинамических параметров симметрично относительно некоторой прямолинейной оси.

Расчет осесимметричных течений удобно проводить в цилиндрической или сферической системе координат. Ось цилиндрической системы координат направлена вдоль оси симметрии. Условие осесимметричности сводится к равенству нулю производных от параметров по окружной координате.

Стационарное осесимметричное потенциальное течение несжимаемой жидкости

Уравнение неразрывности с учетом (5.20) имеет вид

$$\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial(rv_z)}{\partial z} = 0.$$

При безвихревом течении $\operatorname{rot}\vec{v} = 0, \dfrac{\partial v_r}{\partial z} = \dfrac{\partial v_z}{\partial r}$ и, следовательно, существует потенциал скорости $\varphi = \varphi\ (r,\ z)$. Выразив проекции скорости $v_r = \partial\varphi/\partial r$, $v_z = \partial\varphi/\partial z$, получим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0. \tag{5.60}$$

Рассмотрим обратную задачу профилирования канала, образующие которого являются поверхностями вращения $r_{\text{ст}} = r_{\text{ст}}(z)$ (рис. 144). Распределение скорости вдоль прямолинейной оси канала $v_z|_{r=0} = v_{z0}(z)$ считаем известным. Здесь

$$\varphi\ (z,\ r)_{r=0} = \varphi\ (z,\ 0) = \varphi_0\ (z) \tag{5.61}$$

— известное на оси z распределение потенциала скорости.

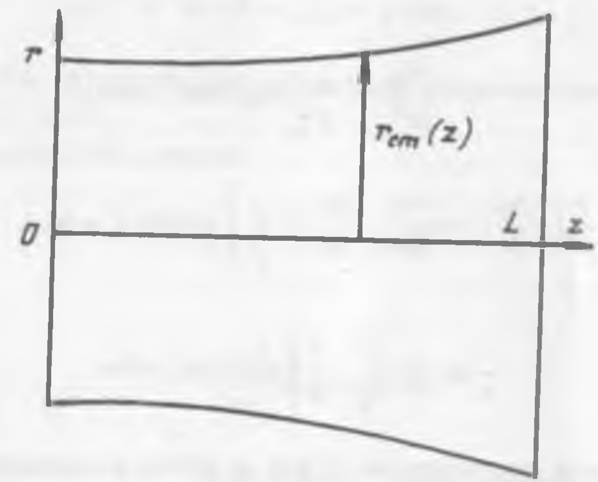


Рис. 144. Контур осесимметричного канала

Решением уравнения (5.60), удовлетворяющим заданному условию на оси канала (5.61), является функция вида

$$\varphi(z,r) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi_0(z + ir\cos\omega)\,d\omega, \tag{5.62}$$

где $\varphi_0(z + ir\cos\omega) = \varphi_0(z)$ — аналитическая в области течения функция комплексного переменного $z = z + ir\cos\omega$. На оси симметрии $r = 0$ из (5.62) получаем $\varphi(z, 0) = \varphi_0(z)$. Слагаемые, входящие в уравнение (5.60), вычисляем, дифференцируя частным образом выражение (5.62) по переменным z и r:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = r\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{r}{\pi}\int_0^\pi \varphi_0''(z)\,d\omega; \tag{5.63}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{i}{\pi}\int_0^\pi \varphi_0' \cos\omega\,d\omega = \frac{i}{\pi}\varphi_0' \sin\omega\Big|_0^\pi - \frac{r}{\pi}\int_0^\pi \varphi_0''(z)\sin^2\omega\,d\omega;$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi_0''(z)\cos^2\omega\,d\omega; \tag{5.64}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = r\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{r}{\pi}\int_0^\pi \varphi_0''(z)\cos^2\omega\,d\omega +$$

$$+\frac{i}{\pi}\varphi_0' \sin\omega\Big|_0^\pi - \frac{r}{\pi}\int_0^\pi \varphi_0''(z)\sin^2\omega\,d\omega.$$

Подставляя соотношения (5.63) и (5.64) в уравнение (5.60), убеждаемся, что (5.62) является решением уравнения (5.60), что и требовалось доказать.

Проекции скорости в канале могут быть вычислены как определенные интегралы по формулам

$$v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varphi_0'(z)\,d\omega;$$

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{i}{\pi}\int_0^\pi \varphi_0'(z)\cos\omega\,d\omega. \tag{5.65}$$

На оси симметрии канала при $r = 0$

$$v_{z0} = \varphi_0'(z);$$

$$v_{r0} = \frac{i}{\pi}\varphi_0'(z)\int_0^{\pi}\cos\omega\,d\omega = 0.$$

Обозначим $\varphi_0'(z) = f_0(z) = f_0(z + ir\cos\omega)$ и разложим эту функцию в ряд по степеням малого параметра

$$f_0(z + ir\cos\omega) = f_0(z) + ir\cos\omega\ f_0'(z) + \ldots . \tag{5.66}$$

При этом функция $f_0(z)$ зависит от распределения скорости $v_{z0} = f_0(z) = \varphi_0'(z)$.

Из формул (5.65) следует:

$$v_z = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f_0(z)\,d\omega; \tag{5.67}$$

$$v_r = \frac{i}{\pi}\int_0^{\pi} f_0(z)\cos\omega\,d\omega.$$

Поверхности тока, являющиеся поверхностями вращения, определяются условием постоянства функции тока $\Psi(r, z) = \text{const}$, где

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} = rv_z = \frac{r}{\pi}\int_0^{\pi} f_0(z)\,d\omega. \tag{5.68}$$

Интегрируя (5.68) по r, получаем

$$\Psi = \frac{1}{\pi}\int_0^{r} r\left[\int_0^{\pi} f_0(z + ir\cos\omega)\,d\omega\right]dr + \Psi_1(z). \tag{5.69}$$

Функция $\Psi_1(z)$ может быть принята равной нулю, если за нулевую линию тока принять ось симметрии $r = 0$.

Рассмотрим построение меридиональных обводов осесимметричного канала.

Задают распределение скорости $v_{z0} = f_0(z)$ вдоль оси канала. Из разложения функции $f_0(z)$ в ряд (5.66) вычисляют функцию $f_0(x + ir\cos\omega)$. Необходимое число членов разложения определяют при численном эксперименте из условия малого (в пределах требуемой точности расчета) влияния дополнительных членов на распределение $f_0(z)$ в области течения.

По формуле (5.69) вычисляют значения функции тока. Находят линии тока из условия $\Psi(z, r) = \text{const}$, в том числе находят граничную линию тока $\Psi(z, r) = \Psi_{\text{ст}}$, определяющую форму меридионального обвода стенки канала $r_{\text{ст}} = r^0_{\text{ст}}(z)$.

После скорости в построенном канале находят как проекции скорости, которые вычисляют как определенные интегралы (5.67).

Прямая задача расчета течения в канале заданной формы $r_{\text{ст}} = r^0_{\text{ст}}(z)$ может быть решена вариационным методом. Функцию $f_0(z)$ находят из условия минимума функционала

$$I\left[f_0(z)\right] = \int_0^L \left(r_{\text{ст}} - r^0_{\text{ст}}\right)^2 dz \to \min,$$

где L — осевая длина канала [расчет радиусов стенок канала $r_{\text{ст}} = r^0_{\text{ст}}(z)$ описан выше].

Приближенное значение функции $f_0(z)$, соответствующей заданной форме стенок канала, можно найти прямым методом. Для этого аппроксимируем $f_0(z)$ параметрической зависимостью, содержащей n искомых параметров x_i ($i = 1, 2, ..., n$):

$$f_0(z) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(z),$$

где $f_i(z)$ — заданная система ортогональных функций.

Задача свелась к многопараметрической минимизации: найти сочетание параметров x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), обеспечивающее минимум функции

$$I\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \int_0^L \left(r_{\text{ст}} - r_{\text{ст}}^0\right)^2 \mathrm{d}z \to \min.$$

Данная задача решается одним из стандартных методов нелинейной многопараметрической оптимизации.

Стационарное осесимметричное сверхзвуковое течение невязкого газа

Уравнения движения и неразрывности запишем в цилиндрической системе координат (r, φ, z), ось z которой совпадает с осью симметрии канала. Будем полагать

$$\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} = \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} = v_\varphi = 0.$$

Тогда из (5.54) при $\nu = 0$, $\dfrac{\partial v_r}{\partial t} = \dfrac{\partial v_z}{\partial t} = 0$ получим уравнения движения

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{v^2}{2} - v_z\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right); \tag{5.70}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{v^2}{2} + v_r\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right).$$

Уравнение неразрывности сжимаемой среды

$$\frac{\partial\left(r\rho v_r\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(r\rho v_z\right)}{\partial z} = 0. \tag{5.71}$$

Течение считаем адиабатическим: $p = c\rho^\gamma$; $\quad \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0$ и

$$v_r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) + v_z \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho^\gamma}\right) = 0. \qquad (5.72)$$

Учитывая соотношения $\gamma \dfrac{p}{\rho} = a^2$ и $\dfrac{v^2}{2} + \dfrac{a^2}{\gamma - 1} = i_0^*$, получаем

$$\left(a^2 - v_z^2\right)\frac{\partial v_z}{\partial z} - v_r v_z \frac{\partial v_z}{\partial r} - v_r v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \left(a^2 - v_r^2\right)\frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{a^2 v_r}{r}. \qquad (5.73)$$

Следует отметить, что данное уравнение, в отличие от аналогичного уравнения для плоского течения, содержит свободный член — $-\dfrac{a^2 v_r}{r}$.

При сверхзвуковом течении $v > a$ введем характеристики

$$r = r(z). \qquad (5.74)$$

Вдоль характеристик выполняются условия

$$\frac{dv_r}{dz} = \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_r}{\partial r}\frac{dr}{dz}; \quad \frac{dv_z}{dz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\frac{dr}{dz}.$$

Выражая из этих соотношений производные $\dfrac{\partial v_r}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial v_z}{\partial z}$ и учитывая уравнение для вихря $\omega_\varphi = \dfrac{\partial v_r}{\partial z} - \dfrac{\partial v_r}{\partial z}$, из (5.73) находим

$$\frac{\partial v_z}{\partial r}\left[v_r v_z + r'\left(a^2 - v_z^2\right)\right] - \frac{\partial v_r}{\partial r}\left(r' v_r v_z + a^2 - v_r^2\right) =$$

$$= \left(a^2 - v_z^2\right)\frac{dv_z}{dz} - v_r v_z \frac{dv_r}{dz} + \frac{a^2 v_r}{r}; \qquad (5.75)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} + r'\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{dv_r}{dz} - \omega_\varphi,$$

где $r' = dr/dz$.

Уравнения характеристик в меридиональной плоскости потока (r, z) получим, приравняв нулю главный определитель из коэффициентов при $\dfrac{\partial v_z}{\partial r}$ и $\dfrac{\partial v_r}{\partial r}$ системы (5.75):

$$\begin{vmatrix} v_r v_z + r'\left(a^2 - v_z^2\right) & v_r^2 - a^2 - r' v_r v_z \\ 1 & r' \end{vmatrix} = 0. \qquad (5.76)$$

Отсюда получаем соотношения для определения углов наклона характеристик первого (индекс 1 и знак плюс перед радикалом) и второго семейства (индекс 2 и знак минус перед радикалом)

$$\left(\frac{dr}{dz}\right)_1 = \frac{v_r v_z \pm a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_z^2 - a^2}. \qquad (5.77)$$

Уравнение характеристик в плоскости годографа получим, приравняв нулю дополнительный определитель системы (5.75)

$$\begin{vmatrix} v_r v_z + r'\left(a^2 - v_z^2\right) & \left(a^2 - v_z^2\right)v_z' - v_r v_z v_r' + \dfrac{a^2 v_r}{r} \\ 1 & -\omega_\varphi + v_r' \end{vmatrix} = 0,$$

где $v_z' = \dfrac{dv_z}{dv_r}$.

Раскрыв данный определитель, получим соотношения, выполняемые вдоль характеристик в плоскости годографа скорости (v_r, v_z):

$$\frac{dv_r}{dz}\left[r'\left(a^2 - v_z^2\right) + 2v_r v_z\right] - \left(a^2 - v_z^2\right)\frac{dv_z}{dz} =$$

$$= \omega_\varphi\left[r'\left(a^2 - v_z^2\right) + v_r v_z\right] + \frac{a^2 v_r}{r},$$

откуда с учетом (5.77) и равенства $r_1' r_2' = \dfrac{v_r^2 - a^2}{v_z^2 - a^2}$ имеем

$$
dv_{r1,2} + \frac{1}{r'_{2,1}} dv_{z1,2} = \left[\frac{\mp a\omega_\varphi \sqrt{v^2 - a^2}\, r'_{1,2}}{v_r^2 - a^2} + \right.
$$

$$
\left. + \frac{a^2 v_r}{r\left(v_r^2 - a^2\right)} r'_{1,2} \right]. \tag{5.78}
$$

При безвихревом течении ($\omega_\varphi = 0$) из формул (5.78) получим соотношения, выполняемые вдоль характеристик:

первого семейства

$$
dv_{r1} + \frac{1}{r'_2} dv_{z1} = \frac{a^2 v_r}{r\left(v_r^2 - a^2\right)} r'_1 dz; \tag{5.79}
$$

второго семейства

$$
dv_{r2} + \frac{1}{r'_1} dv_{z2} = \frac{a^2 v_r}{r\left(v_r^2 - a^2\right)} r'_2 dz. \tag{5.80}
$$

Из уравнения Бернулли для газа

$$
\frac{v_r^2 + v_z^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{a_{\text{кр}}^2}{2} \tag{5.81}
$$

следует, что движению в плоскости годографа скорости (v_r, v_z) отвечают точки, находящиеся между кругом $v^2 = v_r^2 + v_z^2 = a^2$ и $v^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{a_{\text{кр}}^2}{2}$.

В отличие от характеристик плоского течения характеристики (5.79), (5.80) не будут являться эпициклоидами и не могут быть построены в плоскости годографа (v_r, v_z) независимо от характеристик в меридиональной плоскости потока (r, z).

Для приближенного расчета сверхзвукового течения в канале, как и при плоском течении, необходимо решать четыре основные задачи метода характеристик. Рассмотрим следующие основные расчетные операции.

1. Вычисление скорости в точке пересечения N_1 характеристик разных семейств, выходящих из двух близких точек M_1 и M_2 плоскости (r, z) (рис. 145), в которых известны скорости v_r и v_z.

Рис. 145. К определению координат z_{N1}, r_{N1} точки пересечения характеристик и скорости $\vec{v}_{N1}$

Расчетная операция заключается в решении двух алгебраических уравнений в плоскости потока, получающихся из соотношений (5.77) заменой (в простейшем случае) производных отношением конечных приращений координат $\frac{dr}{dz} = \frac{\Delta r}{\Delta z}$:

$$\begin{cases} r'_{1M1} = \dfrac{r_{N1} - r_{M1}}{z_{N1} - z_{M1}} = \left(\dfrac{v_r v_z + a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_z^2 - a^2}\right)_{M1}; \\ r'_{2M2} = \dfrac{r_{N1} - r_{M2}}{z_{N1} - z_{M2}} = \left(\dfrac{v_r v_z - a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_z^2 - a^2}\right)_{M2}. \end{cases} \tag{5.82}$$

В плоскости годографа решается система двух уравнений

$$
\begin{cases}
v_{rN1} - v_{rM1} + \dfrac{1}{r'_{2M1}}\left(v_{zN1} - v_{zM1}\right) = \left[\dfrac{a^2 v_r}{r\left(v_r^2 - a^2\right)} r'_1\right]_{M1} \left(z_{N1} - z_{M1}\right); \\
v_{rN1} - v_{rM2} + \dfrac{1}{r'_{1M2}}\left(v_{zN1} - v_{zM2}\right) = \left[\dfrac{a^2 v_r}{r\left(v_r^2 - a^2\right)} r'_2\right]_{M2} \left(z_{N1} - z_{M1}\right).
\end{cases} \tag{5.83}
$$

Из системы (5.82) вычисляются r_{N1}, z_{N1}, а из системы (5.83) — v_{rN1}, v_{zN1}. Таким образом определяются координаты точки N_1 и проекции скорости в этой точке.

2. Вычисление скорости в точке пересечения N_1 характеристики с заданным элементом стенки канала (рис. 146).

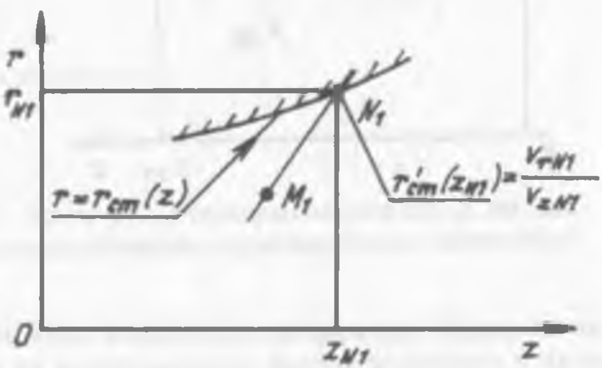


Рис. 146. К определению координат z_{N1}, r_{N1} точки пересечения характеристики с твердой стенкой и скорости $\vec{v}_{N1}$

Известно уравнение, описывающее участок стенки $r = r_{ст}(z)$, координаты r_{M1}, z_{M1} точки M_1, расположенной вблизи стенки, а также проекции скорости v_{r1}, v_{z1} в данной точке.

Координаты r_{N1}, z_{N1} находятся решением системы двух алгебраических уравнений характеристики первого или второго семейства (5.77) и уравнения, описывающего форму стенки:

$$r_1' = \frac{r_{N1} - r_{M1}}{z_{N1} - z_{M1}} = \left(\frac{v_r v_z + a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_z^2 - a^2}\right)_{M1}; \quad r_{N1} = r_{\text{ст}}(z). \qquad (5.84)$$

Проекции скорости v_{rN1}, v_{zN1} определяем из системы уравнений

$$v_{rN1} - v_{rM1} + \frac{1}{r'_{2M1}}\left(v_{zN1} - v_{zM1}\right) = \left[\frac{a^2 v_r}{r\left(v_r^2 - a^2\right)} r_1'\right]_{M1} \left(z_{N1} - z_{M1}\right);$$

$$r'_{\text{ст}}(z_{N1}) = \frac{v_{rN1}}{v_{zN1}}, \qquad (5.85)$$

где производная r'_{2M1} вычисляется по формуле

$$r'_{2M1} = \left(\frac{v_r v_z - a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_z^2 - a^2}\right)_{M1}$$

3. **Вычисление скорости в точке пересечения** N_1 **характеристики с элементом свободной поверхности (рис. 147).**

Рис. 147. К определению координат z_{N1}, r_{N1} точки пересечения характеристики со свободной поверхностью и скорости $\bar{v}_{N1}$

Известны координаты r_{M1}, z_{M1} и проекции скорости v_{rM1}, v_{zM1} в точке M_1, координаты r_A и z_A и угол наклона γ_A свободной границы в точке A, а также статическое давление $p = \text{const}$ на свободной поверхности. Скорость на свободной границе также постоянна и находится из уравнений Бернулли и адиабаты.

Проекции скорости v_{rN1}, v_{zN1} в точке N_1 и координаты r_{N1}, z_{N1} определим из следующей системы уравнений:

характеристики (5.79) или (5.80) в плоскости годографа

$$v_{r\,N1} - v_{r\,M1} + \frac{1}{r'_{2M1}}\left(v_{z\,N1} - v_{z\,M1}\right) =$$

$$= \left[\frac{a^2 v_r}{r\left(v_r^2 - a^2\right)} r'_1\right]_{M1} \left(z_{N1} - z_{M1}\right);$$

характеристики (5.77) в плоскости потока

$$r'_{1M1} = \frac{r_{N1} - r_{M1}}{z_{N1} - z_{M1}} = \left(\frac{v_r v_z + a\sqrt{v^2 - a^2}}{v_z^2 - a^2}\right)_{M1}$$

соотношения для координат точки N_1 на свободной поверхности

$$\frac{r_{N1} - r_A}{z_{N1} - z_A} = \operatorname{tg} \gamma_A;$$

условия постоянства скорости на свободной границе

$$v^2 = v_{rN1}^2 + v_{z\,N1}^2.$$

Рассмотрим задачу о потенциальном сверхзвуковом течении газа в осесимметричном канале (рис. 148). Считаем известными параметры газа на линии AB ($v > a$), пусть она является характеристикой. Разобьем линию AB на ряд малых участков AM_1, M_1M_2, ..., M_nB. Через каждую из точек M_1, M_2, ..., B, пользуясь (5.77), проведем элементы характеристик первого семейства. Координаты и проекции скорости в точке N_1 на стенке найдем, пользуясь операцией 2. Из точки N_1 проведем элемент характеристики второго семейства до точки N_2, являющейся точкой пересечения с характеристикой первого семейства из точки M_2. Проекции скорости и координаты точки M_2 найдем с помощью операции 1. При расчете параметров точки N_n используем операцию 2, так как известно направление скорости в этой точке $v_r = 0$ при $r = 0$.

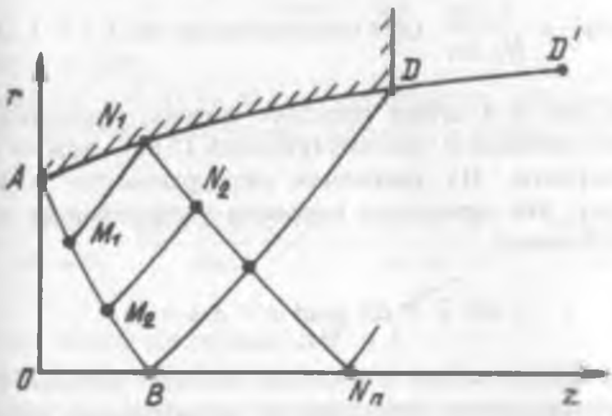


Рис. 148. Схема осесимметричного канала

Вычислительный процесс продолжаем для всей расчетной области внутри канала и в случае истечения из канала — в области струи. При этом координаты границы струи DD' и проекции скорости в точках на этой линии находим с использованием расчетной процедуры 3.

Контрольный вопрос к §33

Чем отличаются характеристики осесимметричных и плоских сверхзвуковых течений?

§34. ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Безвихревое обтекание сферы несжимаемой жидкостью

При безвихревом пространственном течении существует потенциал скорости $\varphi\ (x_1,\ x_2,\ x_3)$, градиент которого равен вектору скорости $\bar{v}\ =\ \mathrm{grad}\ \varphi$. Проекции вектора скорости на оси криволинейной ортогональной системы координат вычисляются по формулам

$$v_i = (\mathrm{grad}\,\varphi)_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \text{ (нет суммирования по } i;\ i = 1,\ 2,\ 3). \quad (5.86)$$

Записав, как и в случае плоского потока, проекции скорости простейшего течения и проинтегрировав (5.86), можно найти потенциал скорости. Из уравнения неразрывности и выражения (5.86) следует, что потенциал скорости удовлетворяет линейному уравнению Лапласа

$$\mathrm{div}\ \bar{v}\ = \mathrm{div}\ \mathrm{grad}\ \varphi = \Delta\,\varphi = 0,$$

что дает возможность, как и в случае плоского потока, применять принцип суперпозиции потенциалов элементарных потоков. Потенциал скорости плоскопараллельного потока, имеющего скорость v_0 и направленного по оси z

$$\varphi = v_0\, z, \quad (5.87)$$

находится интегрированием выражения для проекции скорости

$$v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} = v_0; \qquad v_x = v_y = 0.$$

Течение от источника Q, помещенного в начале сферической системы координат, характеризуется проекциями скорости

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi r^2}; \qquad v_\theta = v_\varphi = 0$$

и потенциалом скорости

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r}. \qquad (5.88)$$

Потенциал скорости в произвольной точке M потока, образованного стоком $-Q$ в точке A и источником $+Q$, расположенным в точке A' на расстоянии Δl в направлении $\bar{l}$ от точки A, может быть найден как

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi r'} + \frac{Q}{4\pi r},$$

где $r = AM$, $r' = A'M$.

Устремив $\Delta l \to 0$, $Q \to \infty$ при постоянстве дипольного момента $m = Q\Delta l$, получим потенциал скорости в потоке, образованном диполем:

$$\varphi = \lim_{\Delta l \to 0}\left[-\frac{Q(1/r' - 1/r)}{4\pi\Delta l}\right] = -\frac{m}{4\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{m\cos\theta}{4\pi r^2}, \qquad (5.89)$$

где θ — угол между векторами $\overrightarrow{AM}$ и $\bar{l}$.

В общем случае пространственного течения не удается ввести функцию тока Ψ (x_1, x_2, x_3) по аналогии с плоским течением, однако в частном случае осесимметричного течения

$$\frac{\partial v_3}{\partial q_3} = \frac{\partial H_1}{\partial q_3} = \frac{\partial H_2}{\partial q_3} = 0$$

уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 H_3 v_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3 H_1 v_2) = 0$$

и существует функция тока Ψ (x_1, x_2,) в криволинейных ортогональных координатах, удовлетворяющая равенствам

$$H_2 H_3 v_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial q_2}; \qquad H_3 H_1 v_2 = -\frac{\partial \Psi}{\partial q_1}. \qquad (5.90)$$

Отсюда, например, в сферических координатах

$$v_r = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}; \qquad v_\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial r}. \tag{5.91}$$

Введенная функция тока Ψ $(x_1, x_2,)$ постоянна вдоль линий тока при q_3 = const (dq_3 = 0), так как на этих линиях $\frac{H_1 dq_1}{v_1} = \frac{H_2 dq_2}{v_2}$ и с учетом формул (5.90)

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial q_2}dq_2 = 0.$$

Рассмотрим функции тока простейших течений в сферической системе координат (r, θ, φ).

В плоскопараллельном потоке $\bar{v} = \bar{v}_0$

$$v_r = v_0\cos\theta = \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta};$$

$$v_\theta = -v_0\sin\theta = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Psi}{\partial r} \tag{5.92}$$

и

$$\Psi = \frac{1}{2}v_0 r^2\sin^2\theta.$$

При течении, образованном диполем,

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{m\cos\theta}{2\pi r^3} = \frac{1}{r^2}\sin^2\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta};$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{m\sin\theta}{4\pi r^3} \tag{5.93}$$

и

$$\Psi = \frac{m\sin^2\theta}{4\pi r}.$$

Рассмотрим обтекание сферы радиусом R плоскопараллельным невязким потоком, имеющим скорость $\bar{v} = \bar{v}_0$ и направленным вдоль оси z (рис. 149). Начало координат поместим в центр сферы. Обтекание сферы можно рассчитывать путем суперпозиции потенциалов скорости плоскопараллельного потока с диполем m, вектор $\bar{e}$ которого направлен противоположно вектору $\bar{v}_0$. Функция тока такого течения определяется как сумма выражений (5.92) и (5.93)

$$\Psi(r,\theta) = \left(\frac{1}{2}v_0 r^2 - \frac{m}{4\pi r}\right)\sin^2\theta. \tag{5.94}$$

Уравнение нулевой поверхности тока Ψ $(r, \theta) = 0$ описывает поверхность сферы радиусом $r = R = \sqrt[3]{\frac{m}{2\pi v_0}}$, а также включает уравнение оси Oz ($\sin\theta = 0$).

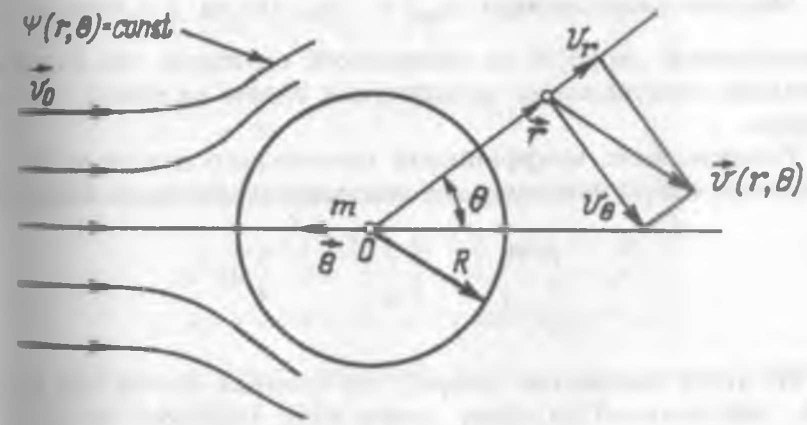


Рис. 149. Безвихревое обтекание сферы

Таким образом, для нахождения функции тока по формуле (5.94) необходимо предварительно вычислить дипольный момент $m = 2\pi R^3 v_0$, соответствующий радиусу R сферы и скорости v_0 невозмущенного течения.

Потенциал скорости изучаемого течения получаем суммированием (5.87) и (5.89):

$$\varphi(r,\theta) = v_0 r\cos\theta + \frac{m\cos\theta}{4\pi r^2} = v_0 r\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\cos\theta,$$

откуда

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = v_0\left[1-\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\cos\theta;$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -v_0\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3\right]\sin\theta.$$

На поверхности сферы при $r = R$ $v_r = 0$, $v_\theta = -\frac{3}{2}v_0 \sin\theta$.

Максимальная скорость $|v_{max}| = \frac{3}{2}v_0$, что на $\frac{1}{2}v_0$ меньше, чем максимальная скорость на поверхности цилиндра, что связано с меньшим возмущающим воздействием сферы на поток, чем цилиндра.

Распределение коэффициента статического давления на поверхности сферы находим с использованием уравнения Бернулли

$$c_p = \frac{p-p_0}{\frac{1}{2}\rho v_0^2} = 1-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 = 1-\frac{9}{4}\sin^2\theta.$$

Из этого выражения следует, что главный вектор сил давления, действующий на сферу, равен нулю (парадокс Даламбера), что объясняется пренебрежением вязкостью среды.

Обтекание сферы вязкой жидкостью при малых числах Рейнольдса

Центр покоящейся сферы радиусом R совместим с началом сферической системы координат. На бесконечности поток имеет скорость v_0 (v, 0, 0), направленную по оси z. Следуя Стоксу, бучем пренебрегать инерционными членами $d\bar{v} / dt$ в уравнениях движения, что соответствует течению с малыми числами Рейнольдса ($\mathrm{Re} = vR / \nu$), а также пренебрегать внешними силами. Вследствие симметрии течения относительно оси z будем иметь

$$v_r = v_r (r, \theta); \quad v_\theta = v_\theta (r, \theta); \quad v_\varphi = 0; \quad p = p (r, \theta).$$

При сделанных допущениях уравнения движения (5.57) вместе с уравнением неразрывности образуют замкнутую систему относительно неизвестных функций v_r, v_θ и p:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial r} + \dfrac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - \right. \\ \left. -\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \dfrac{2v_r}{r} - \dfrac{2\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2} v_\theta\right) = 0; \\ -\dfrac{1}{\rho r}\dfrac{\partial p}{\partial \theta} + \nu\left(\dfrac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial r} + \dfrac{\mathrm{ctg}\,\theta}{r^2}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v_r}{\partial \theta} - \dfrac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta}\right) = 0. \\ \dfrac{\partial v_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{2v_r}{r} + \dfrac{v_\theta \mathrm{ctg}\,\theta}{r} = 0. \end{cases} \tag{5.95}$$

Граничные условия запишем в виде

$$v_r (r, \theta) = v_\theta (r, \theta) = \theta \ \text{ при } r = R; \tag{5.96}$$

$$v_r \to v \cos \theta, \ v_\theta \to -v \sin \theta \ \text{ при } r \to \infty.$$

Решение системы уравнений (5.95) с граничными условиями (5.96) будем искать в виде

$$v_r (r, \theta) = f (r) \cos \theta; \qquad v_\theta (r, \theta) = -g (r) \sin \theta; \tag{5.97}$$

$$p (r, \theta) = \mu\, h (r) \cos \theta.$$

Подставляя выражения (5.97) в уравнения (5.95), получаем три дифференциальных уравнения:

$$h^{I} = f^{II} + \frac{2}{r}f^{I} - \frac{4(f-g)}{r^2}; \tag{5.98}$$

$$\frac{h}{r} = g^{II} + \frac{2}{r}g^{I} + \frac{2(f-g)}{r^2}; \tag{5.99}$$

$$f^{I} + \frac{2(f-g)}{r} = 0. \tag{5.100}$$

Из граничных условий (5.96) следует

$$f(R) = 0; \quad g(R) = 0; \quad f(\infty) = v; \quad g(\infty) = v. \tag{5.101}$$

Из уравнения (5.100) находим $g(r)$

$$g = \frac{1}{2}f^{I}r + f.$$

Вычислив производные g^{I} и g^{II} и подставив их, а также g в уравнение (5.99), получим

$$h = \frac{1}{2}f^{III}r^2 + 3rf^{II} + 2f^{I}. \tag{5.102}$$

Уравнение (5.98) преобразуем к уравнению типа Эйлера:

$$r^3 f^{IV} + 8r^2 f^{III} + 8rf^{II} - 8f^{I} = 0. \tag{5.103}$$

Частные решения уравнения (5.103) имеют вид $f = r^k$, где k находится из уравнения четвертой степени

$$k(k-1)(k-2)(k-3) + 8k(k-1)(k-2) + 8k(k-1) - 8k = 0,$$

откуда

$$k(k-2)(k+1)(k+3) = 0;$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = -1, \quad k_4 = -3.$$

Частными решениями являются

$$f_1 = 1, \quad f_2 = r^2, \quad f_3 = \frac{1}{r}, \quad f_4 = \frac{1}{r^3}.$$

Общее решение уравнения (5.103) имеет вид

$$f(r) = \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2.$$

Функции g и h находим из выражений (5.100), (5.102):

$$g(r) = -\frac{A}{2r^3} + \frac{B}{2r} + C + 2Dr^2;$$

$$h(r) = \frac{B}{r^2} + 10Dr.$$

Из граничных условий (5.101) определяем константы

$$A = \frac{1}{2}vR^2; \qquad B = -\frac{3}{2}vR; \qquad C = v; \qquad D = 0.$$

Следовательно, решением задачи являются следующие соотношения:

$$v_r(r, \theta) = v\cos\theta\left(1 - \frac{3}{2}\frac{R}{r} + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^3}\right);$$

$$v_\theta(r, \theta) = -v\sin\theta\left(1 - \frac{3}{4}\frac{R}{r} - \frac{1}{4}\frac{R^3}{r^3}\right);$$

$$p(r, \theta) = -\frac{3}{2}\frac{\mu v R}{r^2}\cos\theta.$$

Напряжения, действующие на элементы сферы, могут быть вычислены по формулам (5.50). Так, например,

$$P_{rr} = -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad P_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right).$$

$$h^{\mathrm{I}} = f^{\mathrm{II}} + \frac{2}{r} f^{\mathrm{I}} - \frac{4(f-g)}{r^2}; \tag{5.98}$$

$$\frac{h}{r} = g^{\mathrm{II}} + \frac{2}{r} g^{\mathrm{I}} + \frac{2(f-g)}{r^2}; \tag{5.99}$$

$$f^{\mathrm{I}} + \frac{2(f-g)}{r} = 0. \tag{5.100}$$

Из граничных условий (5.96) следует

$$f(R) = 0; \quad g(R) = 0; \quad f(\infty) = v; \quad g(\infty) = v. \tag{5.101}$$

Из уравнения (5.100) находим $g(r)$

$$g = \frac{1}{2} f^{\mathrm{I}} r + f.$$

Вычислив производные g^{I} и g^{II} и подставив их, а также g в уравнение (5.99), получим

$$h = \frac{1}{2} f^{\mathrm{III}} r^2 + 3r f^{\mathrm{II}} + 2 f^{\mathrm{I}}. \tag{5.102}$$

Уравнение (5.98) преобразуем к уравнению типа Эйлера:

$$r^3 f^{\mathrm{IV}} + 8r^2 f^{\mathrm{III}} + 8r f^{\mathrm{II}} - 8 f^{\mathrm{I}} = 0. \tag{5.103}$$

Частные решения уравнения (5.103) имеют вид $f = r^k$, где k находится из уравнения четвертой степени

$$k(k-1)(k-2)(k-3) + 8k(k-1)(k-2) + 8k(k-1) - 8k = 0,$$

откуда

$$k(k-2)(k+1)(k+3) = 0;$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = -1, \quad k_4 = -3.$$

Частными решениями являются

$$f_1 = 1,\quad f_2 = r^2,\quad f_3 = \frac{1}{r},\quad f_4 = \frac{1}{r^3}.$$

Общее решение уравнения (5.103) имеет вид

$$f(r) = \frac{A}{r^3} + \frac{B}{r} + C + Dr^2.$$

Функции g и h находим из выражений (5.100), (5.102):

$$g(r) = -\frac{A}{2r^3} + \frac{B}{2r} + C + 2Dr^2;$$

$$h(r) = \frac{B}{r^2} + 10Dr.$$

Из граничных условий (5.101) определяем константы

$$A = \frac{1}{2}vR^2;\qquad B = -\frac{3}{2}vR;\qquad C = v;\qquad D = 0.$$

Следовательно, решением задачи являются следующие соотношения:

$$v_r\,(r,\theta) = v\cos\theta\left(1 - \frac{3}{2}\frac{R}{r} + \frac{1}{2}\frac{R^3}{r^3}\right);$$

$$v_\theta\,(r,\theta) = -v\sin\theta\left(1 - \frac{3}{4}\frac{R}{r} - \frac{1}{4}\frac{R^3}{r^3}\right);$$

$$p\,(r,\theta) = -\frac{3}{2}\frac{\mu v R}{r^2}\cos\theta.$$

Напряжения, действующие на элементы сферы, могут быть вычислены по формулам (5.50). Так, например,

$$P_{rr} = -p + 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r};\qquad P_{r\theta} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r}\right).$$

На поверхности сферы при $r = R$ из граничных условий (5.96) и уравнения неразрывности имеем

$$\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial v_r}{\partial r} = 0,$$

и, следоватсльно,

$$P_{rr} = -p = \frac{3}{2}\frac{\mu v}{R}\cos\theta; \qquad P_{r\theta} = \mu\frac{\partial v_\theta}{\partial r} = -\frac{3\mu v}{2R}\sin\theta.$$

Направление равнодействующей всех сил, действующей на сферу, в силу симметрии совпадает с направлением вектора скорости $\bar{v}_0$. Сила сопротивления, испытываемая сферой, обтекаемой вязкой жидкостью, находится по формуле, полученной Стоксом:

$$W = \iint\limits_S \left(P_{rr}\cos\theta - P_{r\theta}\sin\theta\right)2\pi R^2 \sin\theta d\theta = 6\pi\mu v R. \tag{5.104}$$

Более точное решение данной задачи найдено Оссеном, учитывавшим в уравнениях движения важнейшие из инерционных членов в виде

$$v\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu\Delta\bar{v}.$$

Полученная Осесном формула

$$W = 6\pi\mu v R\left(1 + \frac{3vR\rho}{8\mu}\right) \tag{5.105}$$

дает несколько лучшее, чем формула Стокса (5.104), соответствие с экспериментальными данными. Однако применение как формулы (5.104), так и формулы (5.105) ограничено малыми числами Рейнольдса. Формула Стокса для чисел $\mathrm{Re} = \frac{vd}{\nu} < 1$, формула Осеена – для чисел $\mathrm{Re} < 5$.

Сверхзвуковое осесимметричное обтекание круглого конуса

Рассмотрим безвихревое продольное обтекание круглого конуса (ось конуса совпадает с направлением скорости невозмущенного потока $\bar{v}$) в области, ограниченной присоединенным коническим скачком уплотнения (рис. 150) и поверхностью конуса. Следует отметить, что в отличие от течения за плоским скачком уплотнения линии тока в данном потоке являются криволинейными.

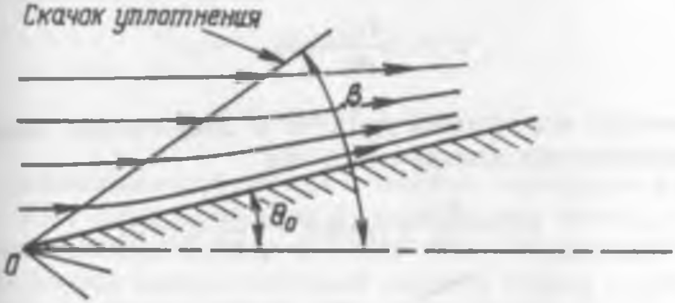


Рис. 150. Конический скачок уплотнения и линии тока при обтекании конуса

Условия на поверхности разрыва, выражающие постоянство проекции скорости на направление образующей конического скачка и постоянство удельного расхода газа при прохождении через скачок, имеют вид

$$v_{r2} = v_1 \cos\beta; \qquad v_{\theta 2} = -\frac{\rho_1}{\rho_2} v_1 \sin\beta, \tag{5.106}$$

где β — угол образующей конического скачка уплотнения с направлением скорости потока $\bar{v}_1 = \bar{v}_0$ перед скачком; v_r, v_θ — проекции скорости в сферической системе координат, начало которой помещено в вершину конуса.

На поверхности обтекаемого конуса выполняется условие

$$v_\theta = 0 \text{ при } \theta = \theta_0. \tag{5.107}$$

Учитывая осевую симметрию течения $\frac{\partial \ldots}{\partial \varphi} = 0$, $v_\varphi = 0$ и независимость условий (5.106), (5.107) при $\theta = \beta$ и $\theta = \theta_0$ от координаты r, будем искать автомодельное, не зависящее от φ и r распределение скоростей $v_r = v_r(\theta)$, $v_\theta = v_\theta(\theta)$. При этом $p = p(\theta)$, $\rho = \rho(\theta)$.

Уравнение отсутствия завихренности $\operatorname{rot} \bar{v} = 0$ в проекции на направление $\bar{e}_\varphi$ сферической системы координат (5.26) с учетом $\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$ запишется в виде

$$\frac{dv_r}{d\theta} = v_\theta. \tag{5.108}$$

Уравнение неразрывности (5.59) в сферических координатах при сделанных допущениях имеет вид

$$2v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\theta \operatorname{ctg}\theta + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \theta} v_\theta = 0.$$

Используя соотношение $\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{d\rho}{dp}\frac{dp}{d\theta} = \frac{1}{a^2}\frac{dp}{d\theta}$ и проекцию уравнения движения на направление $\bar{e}_\theta$ (5.59)

$$\frac{v_\theta}{r}\frac{dv_\theta}{d\theta} + \frac{v_r v_\theta}{r} = -\frac{1}{\rho r}\frac{dp}{d\theta},$$

получаем с учетом (5.108)

$$\frac{dv_\theta}{d\theta} = \frac{a^2\left(v_r + v_\theta \operatorname{ctg}\theta\right)}{v_\theta^2 - a^2} - v_r, \tag{5.109}$$

где квадрат скорости звука a^2 выражается из уравнения Бернулли для газа

$$\frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \text{const}.$$

Решая стандартными численными методами систему двух дифференциальных уравнений первого порядка с обыкновенными производными (5.108), (5.109) при различных начальных данных

$$v_r = v_{ri}, \; v_\theta = v_{\theta i} \quad \text{при } \theta = \theta_i, \tag{5.110}$$

строят семейство решений ($i = 1, 2, ..., n$) в плоскости (v_x, v_y) годографа скорости, где ось x направлена по оси конуса, а ось y — перпендикулярна к ней. Проекции скорости v_x, v_y выражаются через v_r, v_θ:

$$v_x = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta;$$

$$v_y = v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta.$$

При графическом построении семейства годографов скорости газа (рис. 151) задаются числом λ_1 набегающего потока, а также некоторыми значениями угла β. Через точку O проводят луч OC под углом β к оси конуса; выбирают ударную поляру (строфоиду), соответствующую заданной скорости набегающего потока $v_1 = \lambda_1 a_{кр}$. Находят точку E пересечения поляры и перпендикуляра к лучу OC, проведенного через двойную точку B поляры.

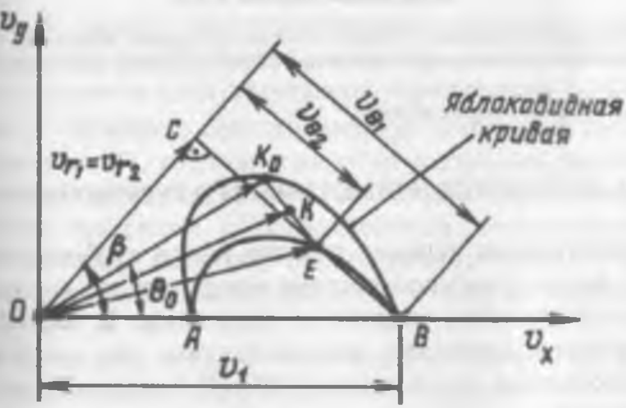


Рис. 151. Плоскость годографа скорости при сверхзвуковом обтекании круглого конуса

Графическим или численным методом по уравнениям (5.108), (5.109) строят годограф скорости, соответствующий обтеканию данного конуса. Начальное условие (5.107) определяет точку K_0, соответствующую скорости вблизи поверхности конуса, где скорость направлена под углом θ_0 к оси конуса (см. рис. 151). Задаваясь различными значениями угла β и повторяя построения при фиксированной скорости $\bar{v}_1$, находим геометрическое место точек K_0, называемое яблоковидной кривой.

Построив предварительно строфоиды и яблоковидные кривые для различных чисел λ_1, можно определять положение присоединенного к конусу скачка уплотнения (угол β) и параметры газа при различных значениях координаты θ. Для этого в плоскости годографа (v_x, v_y) проводят луч OK_0 под углом θ_0 к вектору $\bar{v}_1$ до пересечения с яблоковидной кривой, соответствующей числу λ_1 набегающего потока. Точки на годографе скорости EK соответствуют скоростям газа при различных θ ($\theta_E \le \theta \le \theta_0$).

Давление и плотность газа определяют при найденных скоростях газа решением уравнения Бернулли и уравнения процесса или с использованием газодинамических функций. Проведя перпендикуляр OC к лучу, проходящему через точки B и E, найдем угол β между образующей скачка уплотнения и осью конуса.

Контрольные вопросы к §34

1. Чем отличаются решения Стокса и Осеена для задачи обтекания сферы?
2. Чем отличаются характеры обтекания клина и конуса при сверхзвуковом течении?
3. Что такое яблоковидная кривая?

§35. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ТУРБОМАШИНАХ

Пространственное течение вязкого газа в турбомашинах описывается в цилиндрической системе координат уравнениями движения, неразрывности, энергии и состояния. В частном случае изоэнтропийного движения невязкого газа эта система существенно упрощается и имеет вид (5.58). В проточной части выделяются области лопаточных аппаратов (вращающихся рабочих колес и неподвижных сопловых и направляющих аппаратов).

также области, свободные от лопаточных венцов (выходные, переходные и выходные патрубки).

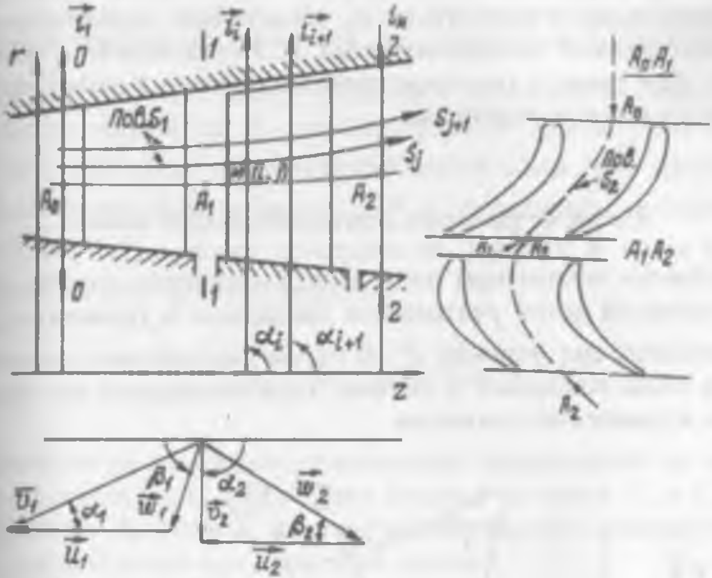


Рис. 152. Схема течения в турбинной ступени

Расчетный анализ пространственных потоков в лопаточных аппаратах турбомашин обычно проводят, следуя Г.Ю.Степанову, путем рассмотрения двух двумерных осредненных течений. Первое из них — течение в слое переменной толщины h (z) на поверхностях вращения S_1, расположенных на различных расстояниях $r = r$ (z) от оси вращения ротора Oz. Линии пересечения данных поверхностей вращения с поверхностями неподвижных и вращающихся лопаток образуют периодическую решетку профилей. Обтекание профилей рассматривается в теории гидродинамических решеток.

Второе двумерное течение — это осредненное по окружной координате φ осесимметричное течение на поверхности S_2 (рис. 152). В результате расчета параметров в меридиональной плоскости (z, r) определяют осредненные по координате φ параметры газа: радиальную проекцию скорости v_r (z, r), окружную проекцию v_φ (z, r), осевую проекцию скорости v_z (z, r), давление p (z, r), плотность ρ (z, r) и температуру T (z, r). Находят также линии тока $\Psi = \Psi_j$ в меридиональной плоскости (z, r), образующие осредненные по φ осесимметричные поверхности тока S_1. Осредненные поверхности тока S_2 при расчете осесимметричных потоков в лопаточных аппаратах считаются заданными

$$\varphi = \varphi\ (z, r). \tag{5.111}$$

Система уравнений осесимметричного потока

В области лопаточных аппаратов воздействие лопаток на осесимметричный поток учитывается введением в уравнения движения массовых сил Лоренца $\bar{F}$. В случае бесконечно тонких лопаток эти силы совпадают с силами, получающимися при осреднении по φ уравнений движения.

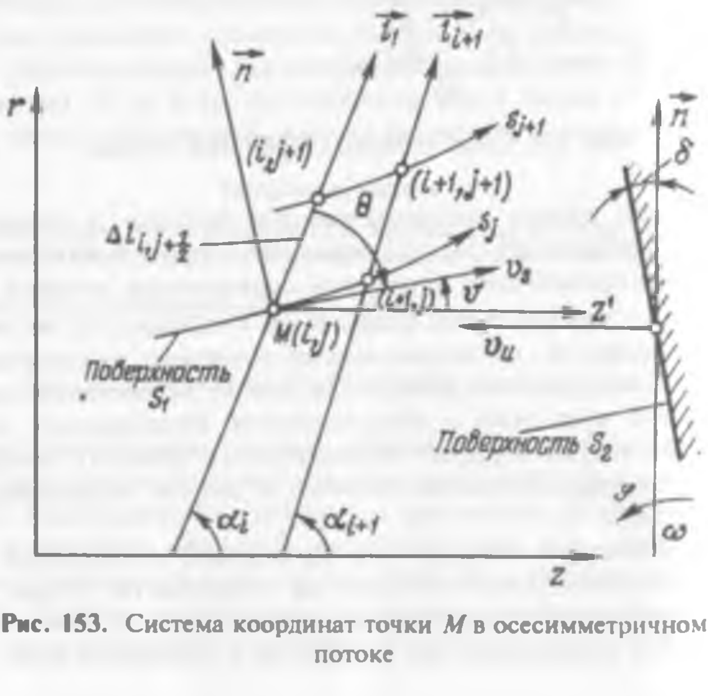


Рис. 153. Система координат точки M в осесимметричном потоке

Рассмотрим уравнение осесимметричного движения невязкого газа в проекции на нормаль $\bar{n}$ к поверхности тока, проходящей через произвольную точку M (рис. 153). Проекция на $\bar{n}$ силы, вызванной градиентом давления $\frac{\partial p}{\partial n}$, равна сумме центробежной силы криволинейного меридионального движения со скоростью v_s и радиусом кривизны R_s меридиональной линии тока в виде $-\rho v_s^2 / R_s$, проекции на $\bar{n}$ центробежной силы при вращении с окружной проекцией скорости $v_u = v_\varphi$ и радиусом вращения r в виде $\rho v_u^2 \cos \upsilon / r$, а также проекции на нормаль $\bar{n}$ силы реакции лопатки на поток (силы Лоренца)

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho v_s^2 / R_s + \rho v_u^2 \cos \upsilon / r + \rho F_n. \qquad (5.112)$$

Проекция на окружное направление осредненной по координате φ удельной силы воздействия лопаток на поток $F_u \equiv F_\varphi$ может быть найдена по теореме об изменении момента количества движения относительно оси вращения ротора

$$rF_u = \frac{\partial (v_u r)}{\partial s} v_s. \qquad (5.113)$$

Проекции силы $\bar{F}$ на нормаль $\bar{n}$ к меридиональной линии тока s и касательную к ней линию выражаются из геометрических соотношений (см. рис. 153)

$$F_n = -F_u \operatorname{tg} \delta, \; F_s = -F_u \operatorname{ctg} \beta, \qquad (5.114)$$

где δ — угол наклона лопаток к радиальному направлению; β — осредненный по координате φ угол между вектором относительной скорости $\bar{w} = \bar{v} - \bar{u}$ и окружным направлением:

$$\operatorname{tg} \delta = r \, \partial \varphi / \partial n, \qquad (5.115)$$

$$\operatorname{ctg} \beta = r \, \partial \varphi / \partial s. \qquad (5.116)$$

31*

Меридиональная проекция скорости v_s выражается из треугольника скоростей

$$v_s = (v_u - r\omega) \operatorname{tg} \beta \tag{5.117}$$

и

$$v_r = v_s \sin \nu, \quad v_z = v_s \cos \upsilon. \tag{5.118}$$

Параметры газа вдоль линий тока связаны обобщенным уравнением Бернулли

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{v_u^2 + v_s^2}{2} - u v_u = H^*(\Psi). \tag{5.119}$$

Течение считается адиабатическим

$$p / \rho^\gamma = C(\Psi), \tag{5.120}$$

газ — нетеплопроводным ($\lambda = 0$) и калорически совершенным:

$$p = \rho R T. \tag{5.121}$$

Уравнение неразрывности может быть записано в виде

$$\mathrm{d}G = 2\pi r \chi \rho v_s \, \mathrm{d}n, \tag{5.122}$$

где $\chi = 1 - d/t'$ — коэффициент загромождения потока; t' — шаг решетки в данном сечении; d — толщина профиля в этом сечении.

В случае неподвижных направляющих венцов компрессоров и сопловых венцов турбин уравнения несколько упрощаются, так как отсутствует переносная скорость вращения и, следовательно, $u = 0$, $w_u = v_u$, $\operatorname{ctg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha$. В пределах безлопаточных каналов сила Лоренца равна нулю ($\bar{F} = 0$), что упрощает уравнение (5.112), а из соотношения (5.113) следует, что вдоль линии тока выполняется условие

$$v_u r = \text{const}. \tag{5.123}$$

Уравнения (5.112), (5.119), (5.122) с замыкающими соотношениями (5.113) — (5.118) и заданными условиями на границе об-

...асти течения определяют распределение термогазодинамических параметров осесимметричного потока.

Расчет параметров осесимметричного потока в полуфиксированной сетке

В меридиональной плоскости (z, r) вводится полуфиксированная (в общем случае) неортогональная система координат $s, l)$, где s — координата вдоль линий тока, которые заранее не известны и уточняются в процессе расчета; l — фиксированные координатные прямые, составляющие с осью z угол α. В частном случае выбирают направление l совпадающим с радиальным направлением. Производная от произвольного параметра по переменной l, например от статистического давления p, выражается в виде

$$\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial p}{\partial n}\sin\theta + \frac{\partial p}{\partial s}\cos\theta. \tag{5.124}$$

Тогда уравнение движения (5.112) в проекции на координатную ось будет иметь вид

$$\frac{\partial p}{\partial l} = f_{\text{п}} = -\rho\frac{v_s^2}{R_s}\sin\theta + \rho\frac{v_u^2}{r}\cos\upsilon\sin\theta -$$

$$-\rho\frac{\partial(v_u r)}{\partial s}\frac{v_s}{r}\operatorname{tg}\delta\sin\theta + \frac{\partial p}{\partial s}\cos\theta. \tag{5.125}$$

При расчете дозвуковых по меридиональной проекции скорости потоков ($v_s / a < 1$) задаются следующие граничные условия:

а) координаты внутреннего и внешнего обводов проточной части $r_1 = r_1(z)$, $r_м = r_м(z)$;

б) распределение параметров, удовлетворяющее условию заданного расхода G, во входном сечении l_1: $v = v_1(l_1)$, $v_u = v_{u_1}(l_1)$, $\upsilon = \upsilon_1(l_1)$, $p = p_1(l_1)$, $\rho = \rho_1(l_1)$, $T = T_1(l_1)$;

в) координаты среднелопаточных поверхностей S_2 в области лопаточных венцов $\varphi = \varphi(z, r)$, через которые по формулам

(5.115) и (5.116) определяется распределение углов $\delta = \delta(z, r)$, $\beta = \beta(z, r)$, а также коэффициенты загромождения $\chi = \chi(z, r)$;

г) в выходном сечении l_N задается распределение углов выхода потока в меридиональной плоскости; кроме того, считаются известными: угловая скорость вращения ротора ω и теплофизические характеристики газа γ и R.

В области течения 0 — 2 (см. рис. 152) строят сетку с помощью координатных линий l_i ($i = 1, 2, ..., N$), составляющих углы α_i с осью O_z, и линий тока S_j ($j = 1, 2, ..., M$). Численное решение задачи находят в узлах сетки (i, j), где $i = 1, 2, ..., N$, $j = 1, 2, ..., M$, т.е. производят дискретизацию решения.

Расчет проводят методом последовательных приближений. В начальном приближении предварительно задаются координаты узлов $l^0_{i,j}$ на линиях тока S_j, а также статическое давление $p^0_{i,j}$. Из геометрических соотношений в узлах сетки находят $z^0_{i,j}$, $r^0_{i,j}$, $\theta^0_{i,j}$, $\upsilon^0_{i,j}$, $R^0_{s,i,j}$, $\delta^0_{i,j}$, $\beta^0_{i,j}$, $\chi^0_{i,j}$; из уравнения (5.120) определяют $\rho^0_{i,j}$; из уравнений (5.117) и (5.119) вычисляют $v^0_{u,i,j}$ и $v^0_{s,i,j}$.

Производные вдоль линий тока $\left.\dfrac{\partial(v_u r)}{\partial s}\right|_{i,j}$, $\left.\dfrac{\partial p}{\partial s}\right|_{i,j}$ вычисляют по формулам центральных разностей

$$\left.\frac{\partial(v_u r)}{\partial s}\right|_{i,j} = \frac{v_{u,i+1,j} r_{i+1,j} - v_{u,i-1,j} r_{i-1,j}}{s_{i+1,j} - s_{i-1,j}}; \tag{5.126}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial s}\right|_{i,j} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i-1,j}}{s_{i+1,j} - s_{i-1,j}}.$$

На каждом шаге последовательных приближений при переходе от предшествующего приближения $(m - 1)$ к последующему приближению (m) в фиксированном сечении $l = \text{const}$ уравнение движения (5.125) рассматривают как дифференциальное уравнение первого порядка с обыкновенными производными вида

$$\frac{dp^m}{dl} = f_\text{п}^{m-1}(l).$$

Статическое давление в узловой точке $(i, j+1)$ вычисляют по конечно-разностной формуле

$$p_{i,j+1}^{(m)} = p_{i,j}^{(m)} + 0{,}5\left(f_{\text{п}\,i,j}^{(m-1)} + f_{\text{п}\,i,j+1}^{(m-1)}\right)\left(l_{i,j+1}^{(m-1)} - l_{i,j}^{(m-1)}\right). \quad (5.127)$$

Плотность и температуру газа определяют из уравнений процесса (5.120) и состояния (5.121):

$$\rho_{i,j+1} = (p_{i,j+1} / c_{j+1})^{1/n};$$

$$T_{i,j+1} = p_{i,j+1} / (R\,\rho_{i,j+1}). \quad (5.128)$$

Проекцию скорости на окружное направление $v_{u,\,i,\,j+1}$ находят из квадратного уравнения, полученного из обобщенного уравнения Бернулли (5.119) с учетом геометрического соотношения (5.117):

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_{i,j+1}}{\rho_{i,j+1}} + \frac{v_{u_{i,j+1}}^2 + \left(v_{u_{i,j+1}} - \omega r_{i,j+1}\right)^2 \operatorname{tg}^2\beta_{i,j+1}}{2} -$$

$$-u_{i,j+1}v_{u_{i,j+1}} = H_{j+1}^*. \quad (5.129)$$

Расход газа $\Delta G_{j+1/2}$ через сечение $(i, j+1) - (i, j)$ подсчитывают по разностной формуле, аналогичной (5.122):

$$\Delta G_{j+\frac{1}{2}} = 2\pi 0{,}5\left[\left(r\chi\rho v_s\sin\theta\right)_{i,j} + \left(r\chi\rho v_s\sin\theta\right)_{i,j+1}\right]\Delta l_{i,j+\frac{1}{2}}, \quad (5.130)$$

где v_s подсчитывают по формуле (5.117), а

$$\Delta l_{i,j+1/2} = \sqrt{\left(r_{i,j+1} - r_{i,j}\right)^2 - \left(z_{i,j+1} - z_{i,j}\right)^2}.$$

Расход газа через сечение $(i, j+1) - (i, j)$ (см. рис. 152) определяют суммированием расходов по струйкам тока от внутренней меридиональной линии тока $j = 1$ до текущей ($j + 1$)-й линии тока:

$$G_j^{(m)} = \sum_1^j \Delta G_{j+1/2}. \qquad (5.131)$$

В сечении $i = \text{const}$ расчет проводят для всех узлов (i, j) $j = 2, 3, ..., M$. Вычисленный расход $G_{M-1}^{(m)}$ сравнивают с заданным расходом G. В случае, если $\left|\dfrac{G - G_{M-1}^{(m)}}{G}\right| > \varepsilon_G$, где ε_G — допустимая относительная погрешность вычисления расхода, расчет повторяют до сходимости при уточненном значении $p_{i,1}^{(m)}$.

После достижения необходимой по расходу точности в сечении $i = \text{const}$ находят обратной квадратичной интерполяцией уточненные отрезки $\Delta l_{i,j+1/2}^{(m)}$ и координаты узлов $z_{i,j}^{(m)}$, $r_{i,j}^{(m)}$. Далее расчет повторяют для всех сечений $i = 2, 3, ..., N$, в результате чего находят параметры в следующем m-м приближении: $z_{i,j}^{(m)}$, $r_{i,j}^{(m)}$, $v_{u,i,j}^{(m)}$, $v_{s,i,j}^{(m)}$, $p_{i,j}^{(m)}$, $\rho_{i,j}^{(m)}$, $T_{i,j}^{(m)}$.

Координаты узлов могут сглаживаться с помощью сплайнов, например кубических сплайн-кривых. Вычисляют максимальную для всех узлов величину $\left|\dfrac{p_{i,j}^{(m)} - p_{i,j}^{(m-1)}}{p_{1,1}^{*}}\right|$. Если эта величина превышает допустимую относительную погрешность вычисления давления ε_p, делают повторный расчет для всех сечений $i = 2, 3, ..., N$ с применением нижней релаксации. При этом каждый параметр $f_{i,j}$ ($l_{i,j}$, $p_{i,j}$) в следующем приближении принимают как линейную комбинацию $f_{i,j}^{(m)} = æ_1 f_{i,j}^{(m)} + (1 - æ_1) f_{i,j}^{(m-1)}$, где $æ_1 = 0...0{,}5$ коэффициент релаксации.

В качестве простейшего, применяемого на практике подхода рассмотрим поток невязкого газа в осевых зазорах турбомашин в предположении цилиндричности течения. Такое допущение приближенно выполняется в областях между рабочими колесами и неподвижными лопаточными аппаратами, а также в безлопаточных каналах при цилиндрической форме корпуса и втулки или при малых углах раскрытия проточной части осевых компрессоров и турбин.

При цилиндрическом течении радиальная проекция скорости равна нулю, а радиус кривизны меридиональных линий тока бесконечен:

$$v_r = 0, \quad R_s = \infty. \tag{5.132}$$

Фиксированные координатные линии l_i (i = 0, 1, 2) расположим в осевых зазорах и направим в радиальном направлении ($\alpha = \pi/2$) (см. рис. 152). В безлопаточных осевых зазорах [см. формулу (5.113)]

$$\partial (v_u r) / \partial s = 0,$$

и при сделанных допущениях уравнение осесимметричного движения (5.125) в проекции на радиус (z_i = const), будет иметь вид

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{v_u^2}{r}. \tag{5.133}$$

Это же уравнение получается непосредственно из уравнения движения в проекции на радиус (5.58) при $v_r = 0$.

Воспользовавшись уравнением Бернулли в дифференциальной форме $v\,dv + dp/\rho = 0$ при постоянстве полной энтальпии ($h^* =$ const) с учетом $v_u = v \cos \alpha$, где α — угол между вектором скорости $\vec{v}$ и окружным направлением, исключим давление в уравнении (5.133). Тогда получим

$$v\,dv = -\frac{v_u^2}{r} dr. \tag{5.134}$$

или, разделяя переменные v и r,

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\cos^2 \alpha}{r} dr.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от $r_{ср}$ до произвольного r из диапазона $r_{вт} \le r \le r_к$, будем иметь уравнение, описывающее изменение скорости v по радиусу при заданной $v_{ср}$ при $r = r_{ср}$ и заданном законе закрутки угла потока по радиусу $\alpha = \alpha\ (r)$:

$$v = v_{ср} \exp\left[-\int_{r_{ср}}^{r} \frac{\cos^2 \alpha}{r'} dr'\right]. \qquad (5.135)$$

Иногда при проектировании ступеней вместо угла закрутки потока $\alpha\ (r)$ задают распределение по радиусу момента скорости $\Gamma\ (r) = v_u r$. Для получения расчетной формулы в этом случае преобразуем уравнение (5.134) следующим образом:

$$v dv = v_u dv_u + v_z dv_z = -\frac{v_u^2}{r} dr,$$

откуда

$$v_z dv_z = -v_u dv_u - \frac{v_u^2}{r} dr.$$

Проинтегрировав это уравнение по радиусу в пределах от $r_{ср}$ до r, получим

$$v_z^2 = v_{ср}^2 - v_u^2 - 2\int_{r_{ср}}^{r} \frac{v_u^2}{r'} dr', \qquad (5.136)$$

или при заданной величине $v_u r = \Gamma\ (r)$

$$v_z^2 = v_{ср}^2 - \frac{\Gamma^2(r)}{r^2} - 2\int_{r_{ср}}^{r} \frac{\Gamma^2(r')}{r'^3} dr'. \qquad (5.137)$$

Радиусы меридиональных линий тока при цилиндрическом течении в зазоре могут изменяться при переходе от одного осевого зазора к другому в результате изменения по радиусу удельного расхода $q(r) = \rho v_z$, что следует из уравнения неразрывности (5.122). Численные значения радиусов линий тока могут быть уточнены обратным квадратичным интерполированием в зависимости от распределения расхода по радиусу в соответствии с изложенной выше методикой расчета параметров осесимметричного потока в полуфиксированной сетке.

Профилирование ступени по закону постоянства циркуляции скорости по радиусу

При данном методе профилирования, предложенном В.В. Уваровым, лопатки турбомашин закручены по радиусу таким образом, что в осевых зазорах моменты скорости постоянны по радиусу, а поток закручен по закону свободного вихря

$$v_{u1}r_1 = \Gamma_1 = \text{const}; \qquad v_{u2}r_2 = \Gamma_2 = \text{const}.$$

При условии $\Gamma = v_u r = \text{const}$ распределение осевой проекции по радиусу найдем из уравнения (5.137)

$$v_z^2 = v_{\text{ср}}^2 - \frac{\Gamma^2}{r^2} - 2\Gamma^2 \int_{r_{\text{ср}}}^{r} \frac{dr'}{r'^3} = v_{\text{ср}}^2 - \frac{\Gamma^2}{r^2} + \frac{\Gamma^2}{r^2} - \frac{\Gamma_{\text{ср}}^2}{r_{\text{ср}}^2} = v_{z\,\text{ср}}^2.$$

Таким образом, проекция скорости, углы потока в абсолютном и относительном движении изменяются по радиусу при данных условиях профилирования следующим образом:

$$v_u = \frac{v_{u\,\text{ср}} r_{\text{ср}}}{r}; \qquad v_z = v_{z\,\text{ср}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{v_{z1}}{v_{u1}} \frac{v_{z\,1\text{ср}} r}{v_{u\,1\text{ср}} r_{\text{ср}}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{v_{z2}}{v_{u2}} \frac{v_{z\,2\text{ср}} r}{v_{u\,2\text{ср}} r_{\text{ср}}}; \qquad (5.138)$$

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{v_{z1}}{v_{u1} - u} = \frac{v_{z1\text{ср}}}{\left(v_{u1\text{ср}} r_{1\text{ср}}\right)/r - \omega r};$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{v_{z2}}{v_{u2} - u} = \frac{v_{z2\text{ср}}}{\left(v_{u2\text{ср}} r_{2\text{ср}}\right)/r - \omega r}.$$

Из формул (5.138) следует, что окружная составляющая скорости обратно пропорциональна радиусу, осевая скорость не изменяется по радиусу, тангенсы угла потока в абсолютном движении линейно увеличиваются с увеличением радиуса.

При известных параметрах заторможенного потока T^*, p^*, ρ^*, зная распределение по радиусу скорости газа $v = \sqrt{v_u^2 + v_z^2}$, можно вычислить изменение статических температуры T, давления p и плотности ρ:

$$T = T^* - \frac{v^2}{2c_p}; \qquad p = p^*\left(\frac{T}{T^*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \qquad \rho = \rho^*\left(\frac{p}{p^*}\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \tag{5.139}$$

Степень реактивности R ступени турбомашины характеризуется отношением теплоперепада в рабочем колесе к теплоперепаду в ступени. Приняв обозначения, принятые в теории турбин, запишем степень реактивности:

$$R' = c_p T_1\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] : H_0, \tag{5.140}$$

где H_0 — теплоперепад в ступени (H_0 = const при $v_{2u} = 0$, p_2 = const).

Степень реактивности на среднем радиусе $r = r_{\text{ср}}$

$$R_{\text{ср}} = c_p T_{1\text{ср}}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_{1\text{ср}}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] : H_0.$$

Следовательно, степень реактивности на произвольном радиусе связана со степенью реактивности $R_{\text{ср}}$ зависимостью

$$R' = R_{\text{ср}}\frac{p_1^{(\gamma-1)/\gamma} - p_2^{(\gamma-1)/\gamma}}{p_{1\text{ср}}^{(\gamma-1)/\gamma} - p_2^{(\gamma-1)/\gamma}} = R_{\text{ср}}\frac{\pi_л^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{\pi_{л\,\text{ср}}^{(\gamma-1)/\gamma} - 1},$$

где $\pi_л$ и $\pi_{л\ \text{ср}}$ — степени понижения давления в рабочих лопатках на радиусах r и $r_{\text{ср}}$.

Уменьшение проекции v_{u1} по радиусу при постоянстве v_{z1} приводит к снижению v_1, повышению в соответствии с (5.139) температуры T_1, давления p_1 и степени реактивности R [см. (5.140)].

В гомогенной компрессорной ступени ($i = 1, 2, 3$; $v_{z2} = v_{z1}$; $v_3 = v_1$; $T_3^* = T_2^*$; $u_2 = u_1$) степень реактивности вводят как отношение работ сжатия по статическим параметрам

$$R = \frac{c_p(T_2 - T_1)}{c_p(T_3 - T_1)} = \frac{c_p\left(T_2^* - T_1^*\right) - \left(v_{u2}^2 - v_{u1}^2\right)/2}{c_p\left(T_2^* - T_1^*\right)} = \tag{5.141}$$

$$= 1 - \frac{v_{u1} + v_{u2}}{2u},$$

где $c_p\left(T_2^* - T_1^*\right) = u\,(v_{u2} - v_{u1})$.

Из формулы (5.141) также следует рост степени реактивности по радиусу, так как

$$R = 1 - \frac{r v_{u2} - r v_{u1}}{2\omega r^2} = 1 - \frac{\text{const}}{r^2}.$$

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{v_{z1}}{v_{u1} - u} = \frac{v_{z1\text{ср}}}{\left(v_{u1\text{ср}} r_{1\text{ср}}\right) r - \omega r};$$

$$\operatorname{tg}\beta_2 = \frac{v_{z2}}{v_{u2} - u} = \frac{v_{z2\text{ср}}}{\left(v_{u2\text{ср}} r_{2\text{ср}}\right) r - \omega r}.$$

Из формул (5.138) следует, что окружная составляющая скорости обратно пропорциональна радиусу, осевая скорость не изменяется по радиусу, тангенсы угла потока в абсолютном движении линейно увеличиваются с увеличением радиуса.

При известных параметрах заторможенного потока T^*, p^*, ρ^*, зная распределение по радиусу скорости газа $v = \sqrt{v_u^2 + v_z^2}$, можно вычислить изменение статических температуры T, давления p и плотности ρ:

$$T = T^* - \frac{v^2}{2c_p}; \qquad p = p^*\left(\frac{T}{T^*}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \qquad \rho = \rho^*\left(\frac{p}{p^*}\right)^{\frac{1}{\gamma}}. \qquad (5.139)$$

Степень реактивности R ступени турбомашины характеризуется отношением теплоперепада в рабочем колесе к теплоперепаду в ступени. Приняв обозначения, принятые в теории турбин, запишем степень реактивности:

$$R' = c_p T_1\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] : H_0, \qquad (5.140)$$

где H_0 — теплоперепад в ступени (H_0 = const при v_{2u} = 0, p_2 = const).

Степень реактивности на среднем радиусе $r = r_{\text{ср}}$

$$R_{ср} = c_p T_{1ср}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_{1ср}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right] : H_0.$$

Следовательно, степень реактивности на произвольном радиусе связана со степенью реактивности $R_{ср}$ зависимостью

$$R' = R_{ср}\,\frac{p_1^{(\gamma-1)/\gamma} - p_2^{(\gamma-1)/\gamma}}{p_{1ср}^{(\gamma-1)/\gamma} - p_2^{(\gamma-1)/\gamma}} = R_{ср}\,\frac{\pi_л^{(\gamma-1)/\gamma} - 1}{\pi_{л\,ср}^{(\gamma-1)/\gamma} - 1},$$

где $\pi_л$ и $\pi_{л\ ср}$ — степени понижения давления в рабочих лопатках на радиусах r и $r_{ср}$.

Уменьшение проекции v_{u1} по радиусу при постоянстве v_{z1} приводит к снижению v_1, повышению в соответствии с (5.139) температуры T_1, давления p_1 и степени реактивности R [см. (5.140)].

В гомогенной компрессорной ступени ($i = 1, 2, 3$; $v_{z2} = v_{z1}$; $v_3 = v_1$, $T_3^* = T_2^*$; $u_2 = u_1$) степень реактивности вводят как отношение работ сжатия по статическим параметрам

$$R = \frac{c_p(T_2 - T_1)}{c_p(T_3 - T_1)} = \frac{c_p\left(T_2^* - T_1^*\right) - \left(v_{u2}^2 - v_{u1}^2\right)/2}{c_p\left(T_2^* - T_1^*\right)} = \tag{5.141}$$

$$= 1 - \frac{v_{u1} + v_{u2}}{2u},$$

где $c_p\left(T_2^* - T_1^*\right) = u\,(v_{u2} - v_{u1})$.

Из формулы (5.141) также следует рост степени реактивности R по радиусу, так как

$$R = 1 - \frac{r v_{u2} - r v_{u1}}{2\omega r^2} = 1 - \frac{\mathrm{const}}{r^2}.$$

Следует отметить важные свойства ступеней рассматриваемого типа.

1. Осесимметричное течение в осевых зазорах является безвихревым (потенциальным), так как проекции вихря $\bar{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\bar{v}$ [см. (5.21)] на оси цилиндрической системы координат равны нулю:

$$\omega_r = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_z}{r\partial\varphi} - \frac{\partial(r v_u)}{r\partial z}\right] = 0; \qquad \omega_\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right];$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial(v_u r)}{r\partial r} - \frac{\partial v_r}{r\partial\varphi}\right] = 0.$$

2. В теории гидродинамических решеток доказано, что циркуляция скорости вокруг профиля в решетке выражается по формулам (при $r_1 = r_2$)

$$\Gamma = t(v_{u2} - v_{u1}) = \frac{2\pi r}{z_0}(v_{u2} - v_{u1}) = \frac{2\pi}{z_0}(\Gamma_2 - \Gamma_1),$$

где z_0 — число лопаток.

Следовательно, из условия постоянства по радиусу моментов скорости $\Gamma_1 = \text{const}$ и $\Gamma_2 = \text{const}$ следует постоянство циркуляции скорости вокруг профилей в решетках, расположенных на разных радиусах.

3. Удельная работа, подведенная к единице массы газа (или отведенная от единицы массы), определяется по уравнению Эйлера

$$L_e = (u_1 v_{u1} - u_2 v_{u2}) = \Gamma_1 - \Gamma_2.$$

Эта величина постоянна по радиусу при условиях профилирования $\Gamma_1 = \text{const}$, $\Gamma_2 = \text{const}$. При этом, если при входе в ступень постоянна величина T^*, то полная температура за ступенью тоже не изменяется по радиусу. Следует также отметить, что условие профилирования осевой турбины $\Gamma_1 = \text{const}$, $\Gamma_2 = \text{const} = 0$ соответствует осевому выходу потока из ступени, минимальным потерям с выходной скоростью и, следовательно, при идеальном (без потерь) течении в сопловом аппарате и рабочем колесе максимальной работе, отводимой от ступени.

Профилирование турбинной ступени по закону постоянства по радиусу угла потока в абсолютном движении и постоянстве удельной работы

Данный закон профилирования ($\alpha_1 = \text{const}$, $L_e = \text{const}$) применяется для уменьшения градиента угла закрутки лопаток по радиусу по сравнению с градиентом угла закрутки в ступенях с постоянной циркуляцией. При этом также может быть несколько снижен радиальный градиент реактивности.

Абсолютная скорость истечения из лопаток соплового аппарата на разных радиусах определяется по формуле (5.135):

$$v_1 = v_{1\text{ср}} \exp\left[-\int_{r_{\text{ср}}}^{r} \frac{\cos^2\alpha_1}{r'}\,dr'\right] = \tag{5.142}$$

$$= v_{1\text{ср}} \exp\left[-\cos^2\alpha_1 \ln\left(\frac{r}{r_{\text{ср}}}\right)\right] = v_{1\text{ср}}\left(\frac{r_{\text{ср}}}{r}\right)^{\cos^2\alpha_1}.$$

Проекции абсолютной скорости v_1 на направления φ и r находятся из геометрических соотношений

$$v_{u1} = v_1\cos\alpha_1 = v_{u1\text{ср}}\left(\frac{r_{\text{ср}}}{r}\right)^{\cos^2\alpha_1}; \tag{5.143}$$

$$v_{z1} = v_1\sin\alpha_1 = v_{z1\text{ср}}\left(\frac{r_{\text{ср}}}{r}\right)^{\cos^2\alpha_1}.$$

Условие постоянства удельной работы по радиусу определяет распределение момента скорости за рабочим колесом

$$\Gamma_2 = v_{u2} r_2 = \Gamma_1 - L_e = Ar^{\sin^2 \alpha_1} - L_e, \tag{5.144}$$

где $A = v_{u1\text{ср}} r_{\text{ср}}^{\cos^2 \alpha_1}$.

Осевая проекция скорости v_{z2} находится из уравнения (5.137).

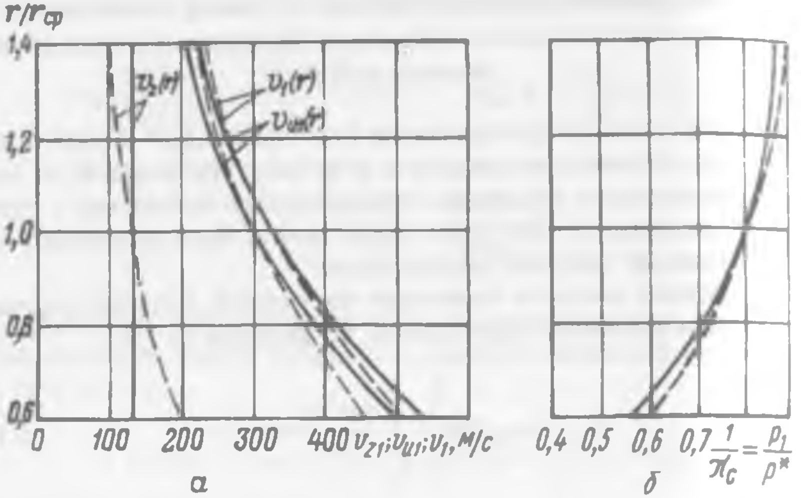


Рис. 154. Изменение проекций скорости и давления по высоте лопатки для случаев Γ = const (сплошные линии) и α = const (штриховые линии)

Сравнительные расчеты по формулам (5.138) и (5.142) показывают, что в ступени, спроектированной по закону α_1 = const, скорость v_1 уменьшается с увеличением радиуса r несколько слабее, чем при профилировании Γ_1 = const. Это приводит к уменьшению градиента давления p и степени реактивности R по радиусу (рис. 154).

Профилирование компрессорной ступени по закону постоянства по радиусу степени реактивности и напора

Рассматриваемый метод профилирования позволяет уменьшить осевую составляющую скорости в периферийных сечениях и число $M_{w1} = w_1/a_1$ в этой области, что бывает важно для уменьшения потерь при около- и сверхкритических течениях газа.

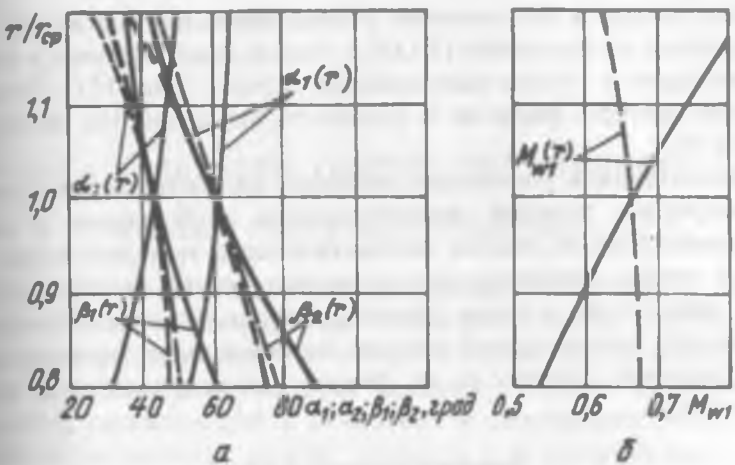


Рис. 155. Изменение углов потока α и β (*а*) и чисел M (*б*) по высоте лопатки для случаев Г = const (сплошные линии) и *R* = const (штриховые линии)

Рассматривая совместно условия $R = 1 - \dfrac{v_{u1} + v_{u2}}{2u} = \text{const}$ (5.141) и $H_T = u(v_{u2} - v_{u1}) = \text{const}$, найдем изменение по радиусу окружных проекций абсолютной скорости в осевых зазорах до рабочего колеса и за ним:

$$v_{u1} = (1 - R)\,\omega r - H_{\text{T}} / (2\omega r); \tag{5.145}$$

$$v_{u2} = (1 - R)\,\omega r + H_{\text{T}} / (2\omega r);$$

Подставляя выражения (5.145) в уравнение (5.136), находим изменение по радиусу осевых проекций скорости:

$$v_{z1} = \sqrt{v_{z1\text{cp}}^2 - 2(1 - R)^2\left(u^2 - u_{\text{cp}}^2\right) + 2(1 - R)H_{\text{T}}\ln\left(r / r_{\text{cp}}\right)};$$

$$v_{z2} = \sqrt{v_{z2\text{ср}}^2 - 2(1 - R)^2\left(u^2 - u_{\text{ср}}^2\right) - 2(1 - R)H_\text{T}\ln\left(r / r_{\text{ср}}\right)}.$$

Углы потока в абсолютном и относительном движении подсчитываются по формулам (5.138) с учетом принимаемых в теории компрессоров и турбин направлений отсчета (рис. 155). Статические температура, давление и плотность определяются по формулам (5.139).

Эффективность различных способов профилирования зависит от конкретных условий проектирования турбомашин и может быть определена на основе математического моделирования ступеней с учетом профильных и концевых потерь, наклона и кривизны линий тока, а также других факторов, не рассматриваемых в настоящей элементарной теории. Вариационный метод оптимизации закрутки лопаток и их формы рассматривается в курсах турбомашин.

Контрольные вопросы к §35

1. Когда учитывается сила взаимодействия лопаток с потоком?
2. Сформулируйте особенности расчета параметров потока в осевых зазорах турбомашины при Γ = const, R = const и α = const по радиусу.
3. Какие обстоятельства учитываются при расчете параметров в осевых зазорах в случае отказа от допущения о цилиндричности потока?

Глава 6. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

§36. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Опыт показывает, что при обтекании тел потоком жидкости около обтекаемого тела можно выделить область, в которой скорость изменяется от нуля на стенке (условие прилипания) до скорости набегающего потока на внешней границе. В тонком слое жидкости, прилегающей к поверхности обтекаемого тела и заторможенной вследствие трения, скорость и ее производная по поперечной координате изменяются очень быстро. Этот слой называют пограничным. Внутри пограничного слоя касательное напряжение от трения весьма велико даже при малой вязкости жидкости, поскольку велик градиент скорости в направлении, перпендикулярном к поверхности тела. Во внешнем потоке инерционные силы преобладают над силами вязкости, и уравнение Навье — Стокса переходит в уравнение движения идеальной жидкости (Эйлера).

Деление потока на пограничный слой и внешний поток существенно облегчает решение многих задач газодинамики. В этом случае внешний поток рассчитывается методами теории потенциальных течений идеальной жидкости, а для пограничного слоя уравнения движения существенно упрощаются.

При наличии теплообмена и диффузии кроме динамического пограничного слоя у поверхности обтекаемого тела образуются тепловой и диффузионный пограничные слои. На рис. 156 показана схема развития динамического и теплового пограничных слоев при обтекании криволинейной поверхности. Строго говоря, толщины динамического и теплового пограничных слоев простираются до бесконечности по нормали к поверхности тела. Однако удобно ввести понятие пограничного слоя конечной толщины,

32*

когда скорость на внешней границе пограничного слоя отличается на 1 % от скорости набегающего потока.

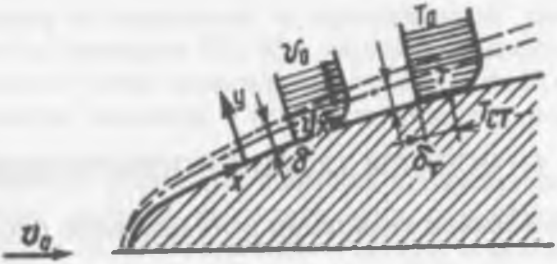


Рис. 156. Схема развития динамического и теплового пограничных слоев при обтекании криволинейной поверхности

Течение жидкости в пограничном слое может быть ламинарным, переходным или турбулентным. Впервые уравнения ламинарного пограничного слоя были получены Прандтлем в 1904 г.

Рассмотрим плоское течение несжимаемой вязкой жидкости при отсутствии объемных сил. Уравнения Навье — Стокса для этого случая запишутся в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta v_x; \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y; \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{6.1}$$

Оценим порядок величины отдельных членов уравнений Навье — Стокса. Примем, что толщина пограничного слоя δ мала по сравнению с характерным размером тела L. Поскольку скорость v_x изменяется внутри пограничного слоя от нуля до v_0 при изменении y от 0 до δ, среднее значение $\partial v_x / \partial y$ имеет порядок v_0 / δ, а среднее значение $\partial^2 v_x / \partial y^2$ — порядок v_0 / δ^2.

Для оценки порядка производных по координате x учтем, что при движении жидкости вдоль обтекаемого тела на отрезок поряд-

...ха характерного размера L скорость v_x может измениться на величину порядка v_0 (например, от 0 до v_0), т.е. в этом случае

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0\left(\frac{v_0}{L}\right) \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0\left(\frac{v_0}{L^2}\right),$$

где 0 — обозначение порядка.

Из третьей строки системы (6.1) имеем

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(v_y\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(v_x\right),$$

следовательно,

$$v_y = -\int_0^y \frac{\partial}{\partial x}\left(v_x\right)\mathrm{d}y \quad \text{и} \quad v_y = 0\left(\frac{v_0}{L}\delta\right).$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = 0\left(\frac{v_0\delta}{L^2}\right); \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} = 0\left(\frac{v_0\delta}{L^3}\right); \quad \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = 0\left(\frac{v_0}{L\delta}\right).$$

Если в качестве масштабов для давления p и времени t принять $p = \rho v_0^2$ и $t = L / v_0$, то, подставив порядки величин в первую строку системы (6.1), получим, что все члены этой системы, кроме последнего (вязкостного),

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}, \quad v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

будут иметь порядок $0\left(\frac{v_0^2}{L}\right)$.

Что касается вязкостных членов, то их порядки будут

$$\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} = 0\left(\frac{\nu v_0}{L^2}\right); \qquad \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0\left(\frac{\nu v_0}{\delta^2}\right).$$

Если все члены первой строки системы (6.1) разделить на v_0^2 / L, то для вязкостных членов будем иметь

$$\frac{\nu v_0}{L_2}\frac{L}{v_0^2}=\frac{\nu}{v_0 L}=\frac{1}{\mathrm{Re}};\qquad \frac{\nu v_0}{\delta_2}\frac{L}{v_0^2}=\frac{\nu}{v_0 L}\left(\frac{L}{\delta}\right)^2=\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{L}{\delta}\right)^2.$$

Учитывая, что $\delta/L << 1$, приходим к выводу о крайней малости [порядка $\left(\frac{\delta}{L}\right)$] первого члена $\partial^2 v_x / \partial x^2$ по сравнению с $\partial^2 v_x / \partial y^2$, что позволяет сохранить в уравнении только второй член.

Учитывая ранее введенное определение пограничного слоя как той области, в которой силы вязкости соизмеримы с силами инерции и силами давления, заключаем, что вязкостный член $\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$ должен быть того же порядка, что и остальные члены уравнения, т.е. порядка v_0^2 / L:

$$0\left(\frac{\nu v_0}{\delta^2}\right)=0\left(\frac{v_0^2}{L}\right)\quad\text{или}\quad\frac{\delta}{L}=0\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\right).$$

Таким образом, мы определили порядок толщины пограничного слоя $\frac{\delta}{L}\sim\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$. В дальнейшем будет показано, что из точного решения Блазиуса $\frac{\delta}{L}=\frac{5{,}2}{\sqrt{\mathrm{Re}}}$.

Проведя оценку величин второй строки системы (6.1), получим

$$\frac{\partial v_y}{\partial\tau}=0\left(\frac{v_0^2\delta}{L^2}\right)=0\left(\frac{v_0^2}{L\sqrt{\mathrm{Re}}}\right),$$

члены $v_x \frac{\partial v_y}{\partial x}, v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}, \nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$ будут иметь порядок $0\left(\frac{v_0^2}{L\sqrt{\mathrm{Re}}}\right)$, а член $\nu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}$ получит порядок $0\left(\frac{v_0}{L}\frac{1}{\mathrm{Re}\sqrt{\mathrm{Re}}}\right)$.

Как видно, последний член может быть отброшен. Нормальная к поверхности тела производная от давления будет иметь тот же порядок, что и сохраняемые члены:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0\left(\frac{v_0^2}{L\sqrt{\mathrm{Re}}}\right),$$

и ею можно пренебречь по сравнению с продольной производной давления

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0\left(\frac{v_0^2}{L}\right).$$

Следовательно, величина разности давлений в поперечном направлении очень мала, и поэтому давление в пограничном слое остается практически равным давлению на внешней границе пограничного слоя.

Итак, после всех выполненных упрощений уравнения пограничного слоя запишутся в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{6.2}$$

Эта система уравнений называется уравнениями Прандтля для пограничного слоя. Из уравнений Эйлера для идеальной жидкости на внешней границе пограничного слоя имеем

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + v_0 \frac{\partial v_0}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}. \tag{6.3}$$

Применяя (6.3), получаем другой вид уравнений пограничного слоя Прандтля:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial v_x}{\partial y}=\dfrac{\partial v_0}{\partial t}+v_0\dfrac{dv_0}{dx}+\nu\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2};\\ \dfrac{\partial v_x}{\partial x}+\dfrac{\partial v_y}{\partial y}=0.\end{cases}\tag{6.4}$$

Уравнения (6.2) представляют собой систему уравнений в частных производных параболического типа. К системе уравнений (6.4) присоединяются и граничные условия

$$v_x=v_x\,(0,\,x,\,y)\ \text{при}\ t=0,$$

$$v_x=0,\ v_y=0\ (\text{или}\ v_y=v_{\text{ст}})\ \text{при}\ y=0,$$

$$v_x\,(t,\,x,\,y)\to v_0\,(t,\,x)\ \text{при}\ y\to\infty,\tag{6.5}$$

$$v_x=v_x\,(t,\,y)\quad\text{при}\ x=x_0.$$

В частном случае стационарного течения $\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial t}=0;\dfrac{\partial v_0}{\partial t}=0\right)$ начальные условия исчезают и уравнения Прандтля принимают более простой вид:

$$\begin{cases}v_x\dfrac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\dfrac{\partial v_x}{\partial y}=-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dx}+\nu\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2};\\ \dfrac{\partial v_x}{\partial x}+\dfrac{\partial v_y}{\partial y}=0.\end{cases}\tag{6.6}$$

Если ввести функцию тока

$$v_x=\frac{\partial\Psi}{\partial y},\quad v_y=-\frac{\partial\Psi}{\partial x},$$

то предыдущая система уравнений сведется к одному

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=v_0\frac{dv_0}{dx}+\nu\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^3}\qquad(6.7)$$

при граничных условиях

$$\Psi=\frac{\partial\Psi}{\partial y}=0\ \text{ при } y=0,\ \ \frac{\partial\Psi}{\partial y}\to v_0\ \text{ при } y\to\infty,\qquad(6.8)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}=v_{x_1}(y)\ \text{ при } x=x_0.$$

Контрольные вопросы к §36

1. Чему равен порядок толщины пограничного слоя?
2. Чему равен порядок разности статических давлений по толщине пограничного слоя?
3. Как определяется изменение статического давления вдоль пограничного слоя?

§37. АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Продольное обтекание бесконечно тонкой пластины

Рассмотрим поток несжимаемой вязкой жидкости с заданными параметрами вдоль плоской пластины (рис. 157).

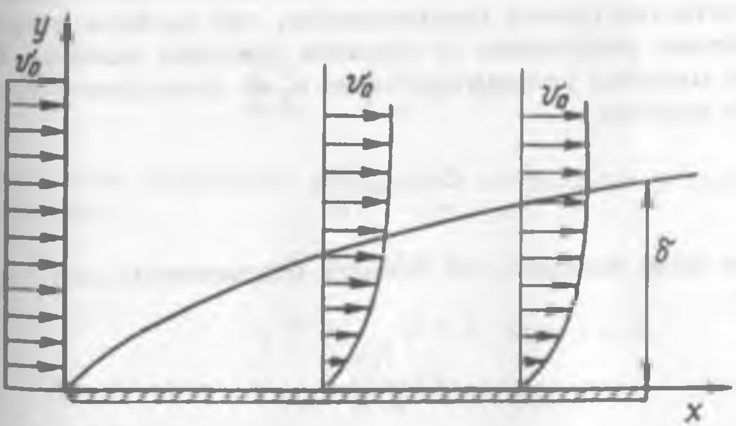


Рис. 157. Схема пограничного слоя на плоской пластине

Уравнения пограничного слоя для этих условий имеют вид

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \tag{6.9}$$

поскольку $\frac{dp}{dx} = 0$. Граничные условия запишутся так:

$$v_x = 0,\ v_y = 0 \text{ при } y = 0 \text{ и } x > 0,$$

$$v_x \to v_0 \text{ при } y \to \infty, \tag{6.10}$$

$$v_x = v_0 \text{ при } x = 0.$$

Так как в уравнения не входит вторая производная $\partial^2 v_x / \partial x^2$, то невозможно поставить два граничных условия по координате x: при $x = 0$ и $x = L$. Поэтому длина пластины L не входит в граничные условия.

Впервые эта система уравнений была решена Блазиусом в 1908 г. Поскольку в рассматриваемую систему не входит характерная длина, естественно сделать предположение, что профили скоростей на различных расстояниях от передней пластины подобны. Введя понятие толщины пограничного слоя δ, из предыдущего предположения получим

$$\frac{v_x}{v_0} = \varphi_1\left(\frac{y}{\delta}\right).$$

Ранее было показано, что толщина пограничного слоя δ имеет порядок

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu x}{v_0}}.$$

Вводя новую переменную, получаем

$$\eta = 2\frac{y}{\delta} = \frac{y}{2}\sqrt{\frac{v_0}{\nu x}}. \tag{6.11}$$

Тогда для функции тока Ψ имеем

$$\Psi = \int_0^y v_x dy = v_0 \sqrt{\frac{\nu x}{v_0}} \int_0^\eta \varphi_1(\eta)\, d\eta = \sqrt{\nu v_0 x}\, \varphi(\eta),$$

где $\varphi(\eta) = \int_0^\eta \varphi_1(\eta)\, d\eta$.

Вычисляя, получаем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{1}{2} v_0 \varphi'(\eta); \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{1}{4} v_0 \sqrt{\frac{v_0}{\nu x}}\, \varphi''(\eta);$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{1}{8} \frac{v_0^2}{\nu x} \varphi'''(\eta); \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu v_0}{x}}\left[\varphi(\eta) - \eta\varphi'(\eta)\right];$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x\, \partial y} = -\frac{1}{4} \frac{v_0}{x} \eta \varphi''(\eta).$$

Подставляя полученные результаты вычислений в уравнение (6.7), находим

$$\varphi''' + \varphi\varphi'' = 0;$$

$$\varphi = 0, \quad \varphi' = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \tag{6.12}$$

$$\varphi' \to 2 \quad \text{при } \eta \to \infty. \tag{6.13}$$

Результаты интегрирования этого уравнения приведены в табл. 6.1.

Таблица 6 1

Значения функций $\varphi, \varphi', \varphi''$ для продольной обтекаемой пластины

η	φ	φ'	φ''	$\frac{v}{v_0}$	η	φ	φ'	φ''	$\frac{v_x}{v_0}$
0	0	0	1,32824	0	2,0	2,3058	1,9110	0.2570	0.9555
0,2	0,0266	0,2655	1,3260	0,1328	2,2	2,6924	1,9518	0.1558	0.9759
0,4	0,1061	0,5294	1,3095	0,2647	2,4	3,0853	1,9756	0.0875	0.9878
0,6	0,2380	0,7876	1,2664	0,3938	2,6	3,4819	1,9885	0.0454	0.9943
0,8	0,4203	1,0336	1,1867	0,5108	2,8	3,8803	1,9950	0.0217	0.9915
1,0	0,6500	1,2596	1,0670	0,6298	3,0	4,2796	1,9980	0.0096	0.9990
1,2	0,9223	1,4580	0,9124	0,7290	3,2	4,6794	1,9992	0.0039	0.9996
1,4	1,2310	1,6230	0,7360	0,8115	3,4	5,0793	1,9998	0.0015	0.9999
1,6	1,5691	1,7522	0,5565	0,8761	3,6	5,4793	2,0000	0.0005	1.0000
1,8	1,9295	1,8466	0,3924	0,9233	3,8	5,8792	2,0000	0.0002	1.0000

Примечание. $\varphi'(\eta) = 2\frac{v_x}{v_0}$.

На рис. 158 показано распределение продольной составляющей скорости в сечениях пограничного слоя, сопоставленное с экспериментальными данными. Распределение поперечной скорости в соответствии с уравнением

$$\frac{v_y}{v_0} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{v_0 x}}(\eta\varphi' - \varphi)$$

показано на рис. 159.

Интересно отметить, что на внешней границе пограничного слоя

$$v_{y_\delta} = 0{,}860\, v_0\sqrt{\frac{\nu}{x v_0}}.$$

Таким образом, на внешней границе пограничного слоя имеется поперечная составляющая скорости, которая обусловлена оттеснением жидкости от стенки вследствие нарастания пограничного слоя по длине пластины.

Местное касательное напряжение на стенке равно

$$\tau_{ст}(x) = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{ст} =$$

$$= \frac{\mu v_0}{4}\sqrt{\frac{v_0}{\nu x}}\,\varphi''(0). \qquad (6.14)$$

Из табл. 6.1. следует, что $\varphi''(0) = 1{,}328$.

Значит, для локального коэффициента трения получаем формулу

$$C_f = \frac{\tau_{ст}}{\rho v_0^2/2} = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}. \qquad (6.15)$$

Этот закон Блазиуса для сопротивления продольно обтекаемой пластины шириной b применим только для ламинарного течения.

Сопротивление трения с одной стороны пластины равно:

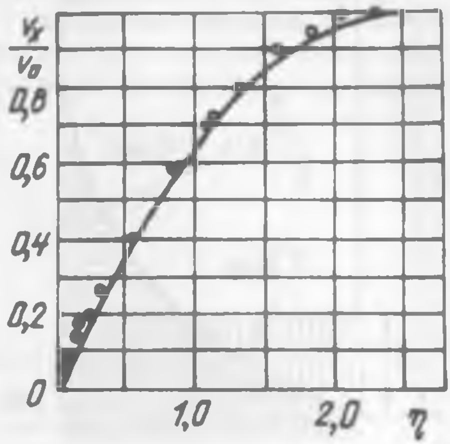


Рис. 158. Распределение продольной составляющей скорости в пограничном слое на пластине:
кривая – расчет; точки — эксперимент

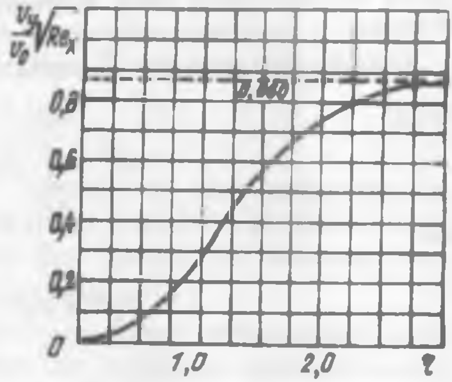


Рис. 159. Распределение поперечной составляющей скорости в пограничном слое

$$F_{тр} = 0{,}332 b\mu v_0\sqrt{\frac{v_0}{\nu}}\int_0^l \frac{dx}{\sqrt{x}} = 0{,}664 v_0\sqrt{\mu\rho l v_0}.$$

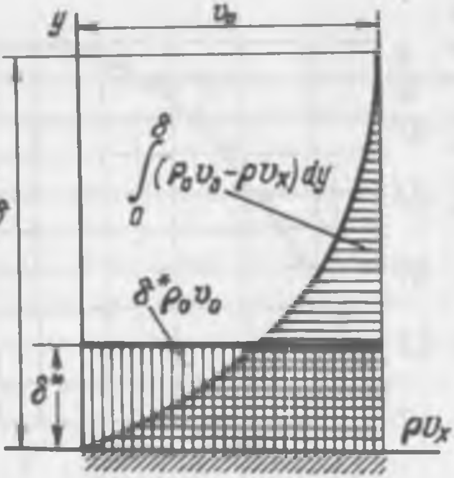


Рис. 160. К определению толщины вытеснения

Для полного сопротивления

$$F_п = 1{,}328 b\sqrt{v_0^3 \mu \rho l}. \quad (6.16)$$

Как было отмечено ранее, понятие толщины пограничного слоя является условным. Если за толщину пограничного слоя принять то расстояние от стенки, где $v_x = 0{,}99 v_0$, то из табл. 6.1 следует, что этому значению скорости соответствует $\eta \approx 2{,}5$.

Значит,

$$\delta \approx 5{,}0\sqrt{\frac{\nu x}{v_0}}. \quad (6.17)$$

Для практических расчетов удобно ввести интегральные толщины пограничного слоя, величины которых не зависят по определению от толщины пограничного слоя.

Толщина вытеснения δ^* определяется соотношением (рис. 160)

$$v_0 \delta^* = \int_{y=0}^{\infty} (v_0 - v_x)\,\mathrm{d}y, \quad (6.18)$$

или

$$v_0 \delta^* = v_0 \delta - \int_0^{\delta} v_x \mathrm{d}y.$$

Здесь $v_0\delta$ — расход жидкости через пограничный слой при допущении неизменности скорости в нем (т.е. если бы этого слоя не было); $\int_0^{\delta} v_x \mathrm{d}y$ — реальный расход жидкости через пограничный слой.

Следовательно, толщина вытеснения, умноженная на скорость набегающего потока, определяет уменьшение расхода жидкости через слой высотой δ из-за того, что поток вязкой жидкости в этом слое тормозится от скорости v_0 на внешней границе пограничного слоя до нуля на стенке.

Так как

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{v_0}\right) dy =$$

$$= \sqrt{\frac{\nu x}{v_0}} \int_0^\infty \left[1 - \frac{\varphi'(\eta)}{2}\right] d\eta = \sqrt{\frac{\nu x}{v_0}} \left[\eta_1 - \frac{\varphi(\eta_1)}{2}\right],$$

а из табл. 6.1. следует

$$\eta_1 - \varphi(\eta_1) = 1{,}7208,$$

значит,

$$\delta^* = 1{,}7208 \sqrt{\frac{\nu x}{v_0}} \qquad (6.19)$$

или с учетом (6.17)

$$\delta^* / \delta = 0{,}344. \qquad (6.20)$$

Именно на это расстояние δ^* линии тока потенциального течения оттесняются от стенки вследствие торможения потока жидкости в пограничном слое за счет сил трения. По аналогии вводится понятие толщины потери импульса δ^{**}.

Вследствие трения поток импульса через пограничный слой уменьшается по сравнению с потоком импульса потенциального течения через ту же толщину на величину

$$\rho \int_0^\infty v_x (v_0 - v_x) dy = \rho v_0 \int_0^\infty v_x dy - \rho \int_0^\infty v_x^2 dy.$$

Следовательно.

$$\rho v_0^2\delta^{**} = \rho\int_0^\infty v_x(v_0 - v_x)\,dy.$$

Отсюда

$$\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{v_x}{v_0}\left(1 - \frac{v_x}{v_0}\right)dy.$$

С учетом данных табл. 6.1. получаем

$$\delta^{**} = \sqrt{\frac{v_x}{v_0}}\int_0^\infty \frac{\varphi'}{2}\left(1 - \frac{\varphi'}{2}\right)d\eta = 0{,}664\sqrt{\frac{v_x}{v_0}}. \tag{6.21}$$

С учетом (6.17) имеем

$$\delta^{**}/\,\delta = 0{,}1325. \tag{6.22}$$

Клиновидные течения несжимаемой вязкой жидкости

Для случая обтекания клиновидных тел скорость внешнего потока представляет собой линейную функцию продольной координаты:

$$v_0 = Cx^m, \tag{6.23}$$

где m зависит от угла раскрытия клина β (рис. 161), причем

$$\beta = \frac{2m}{m+1}. \tag{6.24}$$

Это решение содержит как частный случай продольное обтекание плоской пластины ($m = 0$ и $C = v_0$). Для ускоренного потока $m > 0$, для замедленного потока $m < 0$.

Градиент давления на внешней границе пограничного слоя с учетом уравнения Бернулли и зависимости (6.23) равен

$$\frac{dp}{dx} = -\rho Cx^m Cmx^{m-1} = \frac{\rho v_0^2 m}{x}. \tag{6.25}$$

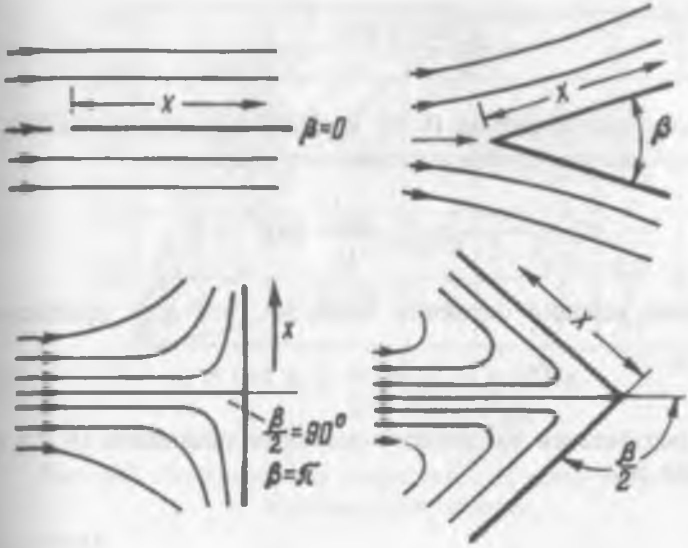


Рис. 161. Схема клиновидных течений несжимаемой вязкой жидкости

Следовательно, уравнение движения можно записать в форме

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{v_0^2 m}{x}. \qquad (6.26)$$

Решение уравнения (6.26) будем искать в тех же переменных

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\frac{\nu x}{v_0}}}, \quad \Psi = \sqrt{\nu x v_0}\,\varphi(\eta). \qquad (6.27)$$

С учетом уравнения неразрывности и уравнения (6.23) получаем

$$v_x = Cx^m \varphi'(\eta); \qquad (6.28)$$

$$v_y = -\sqrt{\frac{2C\nu}{m+1}}\, x^{m-1}\left[\frac{m-1}{2}\eta\varphi'(\eta) + \frac{m-1}{2}\varphi(\eta)\right];$$

$$\eta = \sqrt{\frac{m+1}{2}\frac{Cx^{m-1}}{\nu}}. \tag{6.29}$$

Подставляя соотношения (6.28) и (6.29) в уравнение (6.26), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\varphi''' + \left(\frac{m+1}{2}\right)\varphi\varphi'' + m\left[1 - (\varphi')^2\right] = 0. \tag{6.30}$$

Граничные условия остаются теми же, что и в предыдущем случае:

$$\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = 0,\ \varphi'(\infty) = 1. \tag{6.31}$$

Сводка результатов численного решения уравнения (6.30) приведена в табл. 6.2.

Таблица 6.2

Результаты решения уравнения движения ламинарного пограничного слоя с постоянными физическими свойствами на непроницаемой стенке при $v_0 = Cx^m$

β	m	$\varphi''(0)$
2π	∞	∞
π	1,0	1,233 критическая точка
1,57	0,333	0,759 —
0,627	0,111	0,510 —
0	0	0,332 плоская пластина
−0,314	−0,0476	0,220 —
−0,624	−0,091	0 отрыв пограничного слоя

График семейства скоростей представлен на рис. 162. Как видно на рисунке, с увеличением угла β (ускоренные потоки) профили скоростей становятся более заполненными, при отрицательных значениях β (замедленные потоки) профили скоростей становятся менее заполненными, при $\beta = -0{,}199$ производная $\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{ст} = 0$ и трение на стенке $\tau_{ст}$ тоже равно нулю.

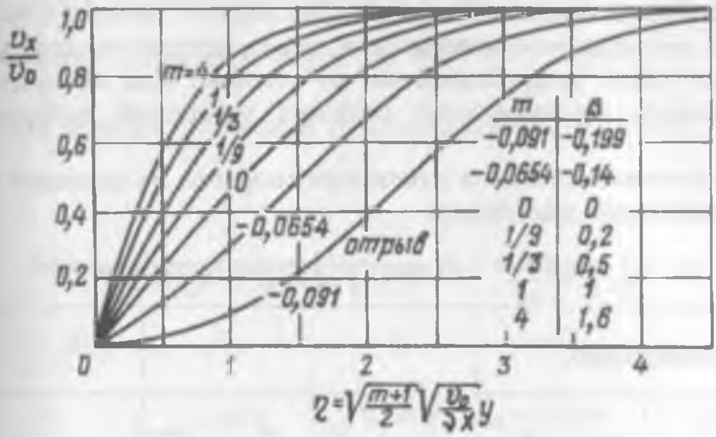


Рис. 162. Распределение скоростей в пограничном слое для клиновидных течений

Трение на стенке равно:

$$\tau_{ст} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{ст} = \sqrt{\frac{\mu\rho v_0^3}{x}}\,\varphi''(0) \tag{6.32}$$

или

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\varphi''(0)}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}.$$

В табл. 6.2 приведены значения $\varphi''(0)$ для различных условий течения (разные m).

Когда трение на стенке во всех точках поверхности обтекаемого тела равно нулю ($\beta = -0{,}199$, $m = -0{,}09$), это соответствует предельному безотрывному обтеканию тела на всем протяжении пограничного слоя. При $\beta < -0{,}19$ пограничный слой отрывается от поверхности тела. Случай $m = 1$ имеет простой физический смысл и соответствует поперечному обтеканию пластины. Эти же условия реализуются вблизи передней критической точки плохо обтекаемого тела.

Для многих прикладных задач представляет интерес случай обтекания проницаемой поверхности, через которую осуществляется вдув или отсос газа. Определим те условия, при которых будут существовать автомодельные решения уравнений пограничного слоя.

Для степенного закона изменения скорости на внешней границе пограничного слоя имеем

$$v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \qquad \Psi = \sqrt{\nu x v_0}\,\varphi, \quad v_0 = Cx^m.$$

Следовательно,

$$v_y = -\varphi\left(\frac{m-1}{2}\right)x^{\frac{m+1}{2}}\sqrt{C\nu} - Cy\frac{1}{2}\varphi' x^{m-1}. \tag{6.33}$$

На стенке при $y = 0$, $\eta = 0$ $v_y = v_{\text{ст}}$; следовательно,

$$v_{\text{ст}} = -\varphi(0)\left(\frac{m+1}{2}\right)x^{\frac{m-1}{2}}\sqrt{C\nu}, \tag{6.34}$$

или

$$v_{\text{ст}} = -\left(\frac{m+1}{2}\right)\varphi(0)\frac{v_0}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}, \tag{6.35}$$

и

$$\varphi(0) = -\left(\frac{2}{m+1}\right)\frac{v_{\text{ст}}}{v_0}\mathrm{Re}_x^{1/2}. \tag{6.36}$$

Таким образом, чтобы φ (0) не зависела от x, необходимо изменение скорости вдуваемого газа по закону

$$v_{\text{ст}} \approx x^{\frac{m-1}{2}}. \tag{6.37}$$

В частности, в окрестности лобовой точки ($m = 1$) $v_{\text{ст}} = \text{const}$, а при продольном обтекании плоской пластины ($m = 1$), $v_{\text{ст}} \sim x^{-\frac{1}{2}}$.

Результаты численного решения уравнения (6.30) для различных значений параметра вдува $b_x = \frac{v_{ст}}{v_0}\frac{2}{C_{f_0}}$, где $\frac{2}{C_{f_0}} = \frac{0{,}332}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$, для случая обтекания плоской пластины приведены в табл. 6.3.

Таблица 6.3

Решение уравнения Блазиуса с отсосом ($b_x > 0$) и вдувом ($b_x < 0$)

$b_x = 2\frac{v_{ст}}{v_0}\sqrt{\mathrm{Re}_x}$	b_x	δ_1^*	δ_1^{**}	H
2,0	1,16812	0,73561	0,33624	2,188
1,50	0,94449	0,86761	0,38898	2,230
1,0	0,72828	1,04911	0,45646	2,30
0,5	0,52254	1,31187	0,54508	2,407
0	0,33206	1,72074	0,66412	2,591
−0,250	0,24492	2,03821	0,73984	2,755
−0,500	0,16507	2,46571	0,83014	2,970
−0,750	0,09433	3,1243	0,93866	3,328
−1,000	0,03618	4,36353	1,07236	4,069
−1,238	0,00017	12,8814	1,23834	10,402

На рис. 163 представлены распределения скоростей в зависимости от параметра вдува $\frac{v_{ст}}{v_0}\sqrt{\mathrm{Re}_x}$, который связан с введенным соотношением

$$b_x = \frac{2v_{ст}}{C_{f_0}v_0} \approx 3\frac{v_{ст}}{v_0}\sqrt{\mathrm{Re}_x}.$$

Кривые на рис. 163 показывают, что с ростом интенсивности вдува пограничный слой утолщается, а при достижении $\frac{v_{ст}}{v_0}\sqrt{\mathrm{Re}_x} =$

= 0,619 (что соответствует $b_x = b_{кр} = 1{,}86$) происходит оттеснение пограничного слоя от поверхности пластины.

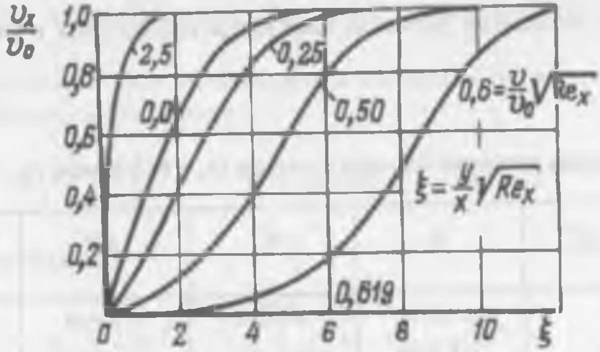


Рис. 163. Влияние вдува газа на распределение скоростей

Контрольные вопросы к §37

1. Что такое автомодельное решение уравнений ламинарного пограничного слоя?

2. Каков физический смысл толщины вытеснения и потери импульса?

3. Как влияет продольный градиент давления на распределение скоростей в ламинарном пограничном слое для клиновидных течений?

4. Как влияют вдув и отсос газа на распределение скоростей в ламинарном пограничном слое?

§38. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Дифференциальные уравнения пограничного слоя могут быть решены численными методами с привлечением современных ЭВМ. Однако полученные таким образом результаты не позволяют сделать обобщающих заключений о закономерностях газодинамических процессов, развивающихся в пограничном слое. Кроме того, для разработки систем автоматизированного проектирования (САПР) различного энергетического оборудования, особенно при решении оптимизационных задач, требуются приближенные и простые методы расчета пограничного слоя.

Впервые приближенный метод расчета ламинарного пограничного слоя был предложен в 1921 г. Т. Карманом и К. Польгаузеном. Он заключается в следующем. Получаем интегральное уравнение импульсов (уравнение Кармана); представляем уравнение импульсов и уравнение неразрывности в виде

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_0 \frac{dv_0}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y};$$

$$\frac{\partial (v_x v_0)}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_y}{\partial y} = v_x \frac{dv_0}{dx}. \tag{6.38}$$

Вычитая обе части первого уравнения из второго, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[v_x(v_0 - v_x)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[v_y(v_0 - v_x)\right] + (v_0 - v_x)\frac{dv_0}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}. \tag{6.39}$$

Проинтегрировав обе части уравнения по y в пределах от 0 до ∞, получим

$$\int\limits_0^{\infty,\delta} \frac{\partial}{\partial x}\left[v_x(v_0 - v_x)\right]dy + \left[v_y(v_0 - v_x)\right]_{y=0}^{y=\infty,\delta} +$$

$$+\frac{dv_0}{dx}\int\limits_0^{\infty,\delta}(v_0 - v_x)\,dy = \frac{+\tau_{\text{ст}}}{\rho}. \tag{6.40}$$

С учетом того, что

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left[v_x(v_0 - v_x)\right]dy = \frac{d}{dx}\int\limits_0^{\infty} v_x(v_0 - v_x)\,dy$$

и

$$\int\limits_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x}\left[v_x(v_0 - v_x)\right]dy = \frac{d}{dx}\int\limits_0^{\delta} v_x(v_0 - v_x)\,dy -$$

$= 0{,}619$ (что соответствует $b_x = b_{кр} = 1{,}86$) происходит оттеснение пограничного слоя от поверхности пластины.

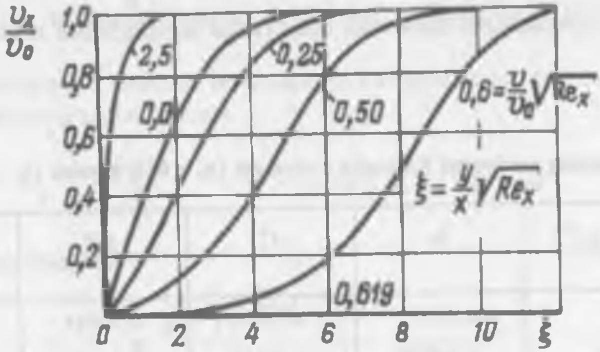


Рис. 163. Влияние вдува газа на распределение скоростей

Контрольные вопросы к §37

1. Что такое автомодельное решение уравнений ламинарного пограничного слоя?
2. Каков физический смысл толщины вытеснения и потери импульса?
3. Как влияет продольный градиент давления на распределение скоростей в ламинарном пограничном слое для клиновидных течений?
4. Как влияют вдув и отсос газа на распределение скоростей в ламинарном пограничном слое?

§38. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Дифференциальные уравнения пограничного слоя могут быть решены численными методами с привлечением современных ЭВМ. Однако полученные таким образом результаты не позволяют сделать обобщающих заключений о закономерностях газодинамических процессов, развивающихся в пограничном слое. Кроме того, для разработки систем автоматизированного проектирования (САПР) различного энергетического оборудования, особенно при решении оптимизационных задач, требуются приближенные и простые методы расчета пограничного слоя.

Впервые приближенный метод расчета ламинарного пограничного слоя был предложен в 1921 г. Т. Карманом и К. Польгаузеном. Он заключается в следующем. Получаем интегральное уравнение импульсов (уравнение Кармана); представляем уравнение импульсов и уравнение неразрывности в виде

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_0 \frac{dv_0}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y};$$

$$\frac{\partial (v_x v_0)}{\partial x} + v_0 \frac{\partial v_y}{\partial y} = v_x \frac{dv_0}{dx}. \quad (6.38)$$

Вычитая обе части первого уравнения из второго, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[v_x(v_0 - v_x)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[v_y(v_0 - v_x)\right] + (v_0 - v_x)\frac{dv_0}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (6.39)$$

Проинтегрировав обе части уравнения по y в пределах от 0 до ∞, получим

$$\int\limits_0^{\infty,\delta} \frac{\partial}{\partial x}\left[v_x(v_0 - v_x)\right]dy + \left[v_y(v_0 - v_x)\right]_{y=0}^{y=\infty,\delta} +$$

$$+\frac{dv_0}{dx}\int\limits_0^{\infty,\delta}(v_0 - v_x)\,dy = \frac{+\tau_{ст}}{\rho}. \quad (6.40)$$

С учетом того, что

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x}\left[v_x(v_0 - v_x)\right]dy = \frac{d}{dx}\int\limits_0^{\infty} v_x(v_0 - v_x)\,dy$$

и

$$\int\limits_0^{\delta} \frac{\partial}{\partial x}\left[v_x(v_0 - v_x)\right]dy = \frac{d}{dx}\int\limits_0^{\delta} v_x(v_0 - v_x)\,dy -$$

$$-\left[v_x(v_0-v_x)\right]_{y=\delta}\frac{d\delta}{dx}=\frac{d}{dx}\int_0^{\delta}v_x(v_0-v_x)dy, \qquad (6.41)$$

имеем

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\infty,\delta}v_x(v_0-v_x)dy+\frac{dv_0}{dx}\int_0^{\infty,\delta}(v_0-v_x)dy=\frac{\tau_{ст}}{\rho}+v_0v_{ст}. \qquad (6.42)$$

Вводя условные толщины пограничного слоя: толщину вытеснения

$$\delta^*=\int_0^{\infty,\delta}\left(1-\frac{v_x}{v_0}\right)dy$$

и толщину потери импульса

$$\delta^{**}=\int_0^{\infty,\delta}\frac{v_x}{v_0}\left(1-\frac{v_x}{v_0}\right)dy,$$

из уравнения (6.42) получаем

$$\frac{d}{dx}\left(v_0^2\delta^{**}\right)+v_0\frac{dv_0}{dx}\delta^*=\frac{\tau_{ст}}{\rho}v_0v_{ст}$$

или

$$\frac{d\delta^{**}}{dx}+(2+H)\frac{\delta^{**}}{v_0}\frac{dv_0}{dx}=\frac{\tau_{ст}}{\rho v_0^2}+\frac{v_{ст}}{v_0}. \qquad (6.43)$$

Вводя безразмерные параметры

$$\mathrm{Re}^{**}=\frac{v_0\delta^{**}}{\nu_0},\quad \frac{C_f}{2}=\frac{\tau_{ст}}{\rho_0v_0^2},\quad \mathrm{Re}_L=\frac{v_0L}{\nu_0},\quad \bar{j}_{ст}=\frac{v_{ст}}{v_0},$$

$$\bar{x}=\frac{x}{L},$$

получаем

$$\frac{d\,\mathrm{Re}^{**}}{d\bar{x}}+(H+1)\frac{\mathrm{Re}^{**}}{v_0}\frac{dv_0}{d\bar{x}}=\mathrm{Re}_L\left(\frac{C_f}{2}+\bar{j}_{ст}\right). \qquad (6.44)$$

Для непроницаемой стенки

$$\frac{d\,\mathrm{Re}^{**}}{d\bar{x}}+(H+1)\frac{\mathrm{Re}^{**}}{v_0}\frac{dv_0}{d\bar{x}}=\mathrm{Re}_L\frac{C_f}{2}. \qquad (6.45)$$

Для обтекания непроницаемой пластины $\left(\frac{dv_0}{d\bar{x}}=0\right)$

$$\frac{d\,\mathrm{Re}^{**}}{d\bar{x}}=\mathrm{Re}_L\frac{C_f}{2}. \qquad (6.46)$$

Чтобы получить выражение для толщины потери импульса δ^{**}, надо выбрать некоторый профиль скоростей в пограничном слое, удовлетворяющий граничным условиям. Принимаем профиль скоростей в виде кубической параболы

$$v_x=ay+cy^2+by^3+d, \qquad (6.47)$$

где a, b, c, d определяются из следующих граничных условий:

$$y=0,\quad v_x=0,$$

$$y=\delta,\quad v_x=v_0,$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial^2v_x}{\partial y^2}=0.$$

Последнее условие следует из дифференциального уравнения движения для пограничного слоя

$$\rho v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+\rho v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}=\mu\frac{\partial^2v_x}{\partial y^2}$$

при

$$y = \delta, \qquad \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0.$$

С учетом граничных условий,

$$\frac{v_x}{v_0} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3. \tag{6.48}$$

Следовательно,

$$\delta^* = \delta\int_0^1\left(1 - \frac{v_x}{v_0}\right)\mathrm{d}\left(\frac{y}{\delta}\right) = 0{,}3\delta, \quad \delta^{**} = 0{,}118\delta.$$

С учетом уравнения $\tau_{\text{ст}} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$ имеем

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\nu}{v_0}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{\text{ст}} = \frac{\delta^{**}}{\delta}\frac{1}{\mathrm{Re}^{**}}. \tag{6.49}$$

Подставляя это выражение в уравнение (6.46), получаем

$$\mathrm{Re}^{**}\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Re}^{**}}{\mathrm{d}\bar{x}} = \frac{v_0 L}{\nu_0}\frac{\delta^{**}}{\delta} \tag{6.50}$$

или

$$\mathrm{Re}^{**}\,\mathrm{d}\,\mathrm{Re}^{**} = \frac{\delta^{**}}{\delta}\mathrm{d}\,\mathrm{Re}_x. \tag{6.51}$$

Интегрируя это уравнение при граничных условиях $\mathrm{Re}^{**} = 0$ при $\mathrm{Re}_x = 0$, получаем связь между Re^{**} и Re_x.

$$\mathrm{Re}^{**} = 0{,}365\sqrt{\mathrm{Re}_x}. \tag{6.52}$$

После подстановки уравнения (6.52) в уравнение (6.49) получаем формулу для коэффициента трения на непроницаемой пластине

$$C_f / 2 = 0{,}323 / \sqrt{\mathrm{Re}_x}. \tag{6.53}$$

Этот результат с точностью 3 % совпадает с точным решением Блазиуса.

Изложенный метод можно распространить и на градиентные течения, т.е. на обтекание тел произвольной формы, если при определении констант в аппроксимации использовать следующие граничные условия:

при $y = 0$

$$v_x = 0; \quad \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\rho v_0 \frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}x}; \quad \frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} = 0;$$

при $y = \delta$

$$v_x = v_0; \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 v_x}{\partial y^3} = 0.$$

Аппроксимируя профиль скоростей в виде полинома четвертой степени

$$\frac{v_x}{v_0} = a\left(\frac{y}{\delta}\right) + b\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + c\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \mathrm{d}\left(\frac{y}{\delta}\right)^4 \qquad (6.54)$$

и привлекая записанные выше граничные условия, определяем коэффициенты

$$a = 2 + \frac{1}{b}\lambda, \quad b = -\frac{1}{2}\lambda, \quad c = -2 + \frac{1}{2}\lambda, \quad d = 1 - \frac{1}{6}\lambda,$$

где

$$\lambda = \frac{\delta^2}{\nu}\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}x} = -\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\delta^2}{\mu v_0}. \qquad (6.55)$$

Из уравнения (6.55) следует физический смысл безразмерного параметра λ, который представляет собой отношение сил давления к силам трения.

Тогда

$$\frac{v_x}{v_0} = \left(2\eta - 2\eta^3 + \eta^4\right) + \frac{\lambda}{6}\left(\eta - 3\eta^2 + 3\eta^3 - \eta^4\right). \qquad (6.56)$$

Рис. 164. Распределение скоростей в ламинарном пограничном слое с градиентом давления (цифры у кривых — значения λ)

На рис. 164 показаны распределения скоростей для различных значений формпараметра λ. При $\lambda = 0$ получаем распределение скоростей для случая обтекания плоской пластины

$$\frac{v_x}{v_0} = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4.$$

С учетом уравнений (6.54) и (6.55) имеем

$$\frac{C_f}{2} = \frac{\nu\delta^{**}}{\delta\delta^{**}v_0}\left(2 + \frac{\lambda}{6}\right); \tag{6.57}$$

$$\frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{1}{315}\left(37 - \frac{\lambda}{3} - \frac{3\lambda^2}{144}\right); \tag{6.58}$$

$$\frac{\delta^{*}}{\delta} = \frac{1}{120}(36 - \lambda). \tag{6.59}$$

Следует отметить, что при $\lambda = -12$ трение на стенке равно нулю. Эти условия соответствуют отрыву пограничного слоя от поверхности тела в области замедленных течений.

Отрыв пограничного слоя от поверхности тела можно наблюдать при обтекании профиля. В этом случае поток жидкости ускоряется от передней лобовой точки профиля до сечения, где статическое давление достигает минимального значения. По мере продвижения к концу профиля давление начинает возрастать, а поток — замедляться, так как в пограничном слое $\partial p / \partial y = 0$, т.е. $p =$ const по y. Это значит, что частицы жидкости, прилегающие к стенке и имеющие меньшую кинетическую энергию, будут тормозиться быстрее, чем отдаленные от поверхности.

В некотором критическом сечении жидкость, прилегающая к стенке, остановится и затем начнет под воздействием положительного градиента давления двигаться навстречу потоку, что и приведет к отрыву пограничного слоя и образованию вихревого следа за плохо обтекаемым следом. В практических задачах явление отрыва потока является нежелательным, так как связано с большими потерями энергии.

Предельным случаем является течение жидкости в окрестности передней критической точки, где формпараметр $\lambda = 7{,}05$. При $\lambda > 12$ в пограничном слое $v_x / v_0 > 1$, что при стационарном слое невозможно. Таким образом, формпараметр λ может изменяться в пределах $-12 \le \lambda \le 12$.

Из уравнения (6.57) следует

$$\frac{C_f}{C_{f_0}} = 1 + \frac{1}{6}\frac{\delta}{v_0}\frac{dv_0}{dx} = 1 + \frac{315}{\left(37 - \frac{\lambda}{3} - \frac{3\lambda^2}{144}\right)}\frac{\delta^{**}}{v_0}\frac{dv_0}{dx}. \tag{6.60}$$

Введя формпараметр $f = \frac{\delta^{**}}{v_0}\frac{dv_0}{dx}$, получим

$$f_{\text{кр}} = -\lambda_{\text{кр}}\frac{12\left(\frac{\delta}{\delta^{**}}\right)^2}{\text{Re}^{**}} \quad \text{и} \quad \tilde{f} = \frac{f}{f_{\text{кр}}};$$

тогда

$$\frac{C_f}{C_{f_0}} = 1 - \tilde{f} f_{\text{кр}}. \tag{6.61}$$

Уравнение импульсов можно записать в виде

$$\frac{1}{\mathrm{Re}_L}\frac{\mathrm{d\,Re}^{**}}{\mathrm{d}\bar{x}} = \frac{C_f}{2} - (1 + H)\tilde{f} f_{\text{кр}}. \tag{6.62}$$

Правую часть уравнения можно аппроксимировать линейной функцией

$$\frac{C_f}{2} - (1 + H)\tilde{f} f_{\text{кр}} = \frac{C_{f_0}}{2} - \left(1 + H_{\text{кр}}\right)\tilde{f} f_{\text{кр}}, \tag{6.63}$$

где в соответствии с уравнениями (6.58) и (6.59)

$$H_{\text{кр}} = \frac{\delta^*_{\text{кр}}}{\delta^{**}_{\text{кр}}} = 3{,}7.$$

Возвращаясь к уравнению (6.62), имеем

$$\frac{\mathrm{d\,Re}^{**}}{\mathrm{d}\bar{x}} + \left(1 + H_{\text{кр}}\right)\frac{\mathrm{Re}^{**}}{v_0}\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}\bar{x}} = \mathrm{Re}_L\frac{C_{f_0}}{2}. \tag{6.64}$$

С учетом уравнения (6.49)

$$\frac{\mathrm{d\,Re}^{**}}{\mathrm{d}\bar{x}} + \left(1 + H_{\text{кр}}\right)\frac{\mathrm{Re}^{**}}{v_0}\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}\bar{x}} = \mathrm{Re}_L\frac{0{,}22}{\mathrm{Re}^{**}}. \tag{6.65}$$

После интегрирования уравнения (6.65) получаем (при условии $\mathrm{Re}^{**} = 0$, $\bar{x} = 0$)

$$\mathrm{Re}^{**} = \frac{1}{v_0^{1+H_{\text{кр}}}}\left[0{,}44\int_0^{\bar{x}} v_0^{1+H_{\text{кр}}}\,\mathrm{Re}_L\,\mathrm{d}\bar{x}\right]^{0{,}5}. \tag{6.66}$$

Зная закон изменения скорости на внешней границе пограничного слоя по длине обтекаемого тела, определяем локальные значения Re^{**}, по уравнению (6.60) — локальные значения формпараметра f и по уравнению (6.61) — локальные коэффициенты трения. Сечение, в котором формпараметр f достигает критического значения и коэффициент трения становится равным нулю, соответствует отрыву пограничного слоя от стенки.

Контрольный вопрос к §38

Каков физический смысл отрыва пограничного слоя от поверхности обтекаемого тела?

§39. ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Для вывода основных уравнений ламинарного течения газа воспользуемся приемом, уже примененным для течения несжимаемой жидкости.

Уравнения Навье — Стокса, уравнение неразрывности и уравнение энергии для плоского стационарного движения сжимаемого газа при отсутствии объемных сил записываются в следующем виде:

$$\rho v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\times$$

$$\times\left(\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v_y}{\partial x}\right); \tag{6.67}$$

$$\rho v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho v_y\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\right) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \frac{4}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial x}\right);$$

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\rho v_x\left(h + \frac{v_x^2}{2} + \right.\right.$$

$$\left.+\frac{v_y^2}{2}\right) - \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h}{\mathrm{Pr}} + \frac{4}{3}\frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2}\right) - \mu v_y\frac{\partial v_x}{\partial y} +$$

$$+\frac{2}{3}\mu v_x \frac{\partial v_y}{\partial y}\Bigg] + \frac{\partial}{\partial y}\Bigg[\rho v_y\left(h + \frac{v_x^2}{2} + \frac{v_y^2}{2}\right) - \mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{h}{\Pr} + \frac{v_x^2}{2} + \frac{4}{3}\frac{v_y^2}{2}\right) -$$

$$-\mu v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu v_y \frac{\partial v_x}{\partial x}\Bigg] = 0;$$

$$\frac{p}{\rho} = \frac{k-1}{k}h; \quad \frac{\mu}{\mu_1} = f\left(\frac{h}{h_1}\right).$$

Оценивая порядок членов уравнений и отбрасывая члены второго порядка малости, как это было сделано в §36, получаем систему уравнений ламинарного пограничного слоя газа в виде

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} = 0; \tag{6.68}$$

$$\rho v_x \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial h}{\partial y} = v_x \frac{dP}{dx} + \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 +$$

$$+\frac{1}{\Pr}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial h}{\partial y}\right).$$

Если от энтальпии газа перейти к абсолютной температуре $h = c_p T$, то уравнение энергии запишется в виде

$$\rho c_p\left(v_x\frac{\partial T}{\partial x} + v_y\frac{\partial T}{\partial y}\right) = v_x\frac{dP}{dx} +$$

$$+\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 + \frac{c_p}{\Pr}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial T}{\partial y}\right). \tag{6.69}$$

К системе уравнений необходимо сформулировать граничные условия:

$$y = 0,\ v_x = 0,\ v_y = v_{ст},\ T = T_{ст}$$

и

$$y = \infty,\ v_x = v_0,\ T = T_0.$$

В случае обтекания теплоизолированной стенки $q_{ст} = 0$, следовательно, граничное условие для температуры при $y = 0$ запишется как $\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{ст} = 0$.

В уравнение энергии (6.69) для случая $c_P = \text{const}$ удобно ввести температуру торможения $T^* = T + \frac{v_x^2}{2c_P}$.

Умножая уравнения (6.68) на v_x и складывая с (6.69), получаем

$$\rho v_x \frac{\partial T^*}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial T^*}{\partial y} = \frac{1}{c_P}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\mu}{\Pr}(\Pr -$$

$$-1)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v_x^2}{2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{\Pr}\frac{\partial T^*}{\partial y}\right), \tag{6.70}$$

где $\Pr = \eta / a$ — число Прандтля, характеризующее отношение теплоты, выделяющейся за счет трения, к теплоте, передаваемой за счет теплопроводности; число Прандтля для газов мало отличается от единицы.

Систему уравнений (6.68), (6.69) удобно преобразовать, используя уравнение Бернулли для внешней части пограничного слоя:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho_0 v_0 \frac{dv_0}{dx}. \tag{6.71}$$

Тогда первое уравнение (6.68) запишется в виде

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \rho_0 v_0 \frac{dv_0}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \tag{6.72}$$

Из уравнения неразрывности следует

$$\rho v_y = -\int_0^y \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}dy = -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y \rho v_x dy. \tag{6.73}$$

Академик А.А. Дородницын в 1942 г. предложил преобразование координат, при которых уравнения пограничного слоя газа принимают форму, близкую к уравнениям пограничного слоя несжимаемой жидкости. Переменные Дородницына имеют вид

$$\xi = \int_0^x \frac{p}{p_0^*}dx, \quad \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0^*}dy,$$

где p_0^* и ρ_0^* — параметры торможения во внешнем потоке.

Рассмотрим случай обтекания плоской пластины потоком сжимаемого газа. В этом случае переменные Дородницына удобно записать в виде

$$\xi = x, \quad \eta = \int_0^y \frac{\rho}{\rho_0}dy.$$

Формулы перехода от дифференцирования по координатам x и y к дифференцированию по координатам ξ и η:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \rho\frac{\partial}{\partial \eta}.$$

С учетом этих формул первое уравнение (6.68) преобразуется к виду

$$\rho v_x\frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \rho v_x\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial v_x}{\partial \eta} + \rho v_y\rho\frac{\partial v_x}{\partial \eta} = \rho\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mu\rho\frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right) \tag{6.74}$$

или

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \left(v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y\right)\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\mu\rho\frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right). \tag{6.75}$$

Из уравнения неразрывности имеем

$$\rho v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho\frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \rho v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} =$$

$$= -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \eta}{\partial x}v_x.$$

Следовательно,

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v_x\frac{\partial \eta}{\partial x} + \rho v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}. \tag{6.76}$$

Если ввести обозначение

$$v_x\frac{\partial \eta}{\partial x} + \rho v_y = \tilde{v}_y, \tag{6.77}$$

то уравнения (6.68) можно привести к виду

$$v_x\frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \tilde{v}_y\frac{\partial v_x}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\rho\mu\frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right);$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \frac{\partial v_y}{\partial \eta} = 0, \tag{6.78}$$

где

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad \tilde{v}_y = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}.$$

Аналогичным образом преобразуется уравнение энергии, которое в переменных Дородницына будет иметь вид

$$v_x\frac{\partial h}{\partial \xi} + \tilde{v}_y\frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{1}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\rho\mu\frac{\partial h}{\partial \eta}\right) + (\gamma-1)M_0^2\rho\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial \eta}\right)^2. \tag{6.79}$$

Как и в задаче обтекания пластины потоком несжимаемой жидкости введем обобщенную переменную Блазиуса

34*

$$\zeta = \frac{\eta}{2\sqrt{\xi}}.$$

Тогда

$$\psi = \int_0^{\eta} v_x\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\xi}}\right)d\eta = 2\sqrt{\xi}\int_0^{\frac{\eta}{2\sqrt{\xi}}} v_x\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\xi}}\right)d\left(\frac{\eta}{2\sqrt{\xi}}\right) = 2\sqrt{\xi}\int_0^{\zeta} v_x d\zeta.$$

Введя обозначение

$$2\int_0^{\zeta} v_x(\zeta)d\zeta = \varphi(\zeta),$$

будем иметь

$$\psi = \sqrt{\xi}\varphi(\zeta), \quad v_x = \frac{1}{2}\varphi'(\zeta), \quad \tilde{v}_y = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}(\xi\varphi' - \varphi).$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial \xi} = -\frac{1}{4\xi}\zeta\varphi''(\zeta), \quad \frac{\partial v_x}{\partial \eta} = \frac{1}{4\xi}\zeta\varphi'(\zeta).$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial \eta^2} = \frac{1}{8\xi}\varphi'''(\zeta), \quad \frac{\partial h}{\partial \xi} = -\frac{1}{2\xi}\zeta h',$$

$$\frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}h'.$$

Подставляя эти выражения в (6.78) и (6.79), получаем систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций φ и h:

$$\begin{cases} (\rho\mu \cdot \varphi'')' + \varphi \cdot \varphi'' = 0, & (6.80) \\ (\rho\mu h')' + \frac{\Pr}{4}(\gamma - 1)M_0^2(\rho\mu)(\varphi'')^2 + \Pr\varphi h' = 0. & (6.81) \end{cases}$$

Для простейшего случая, когда $\mu\rho = \mu_0\rho_0 = \text{const}$, получим

$$\varphi''' + \varphi \cdot \varphi'' = 0, \tag{6.82}$$

$$h'' + \Pr\varphi h' + \frac{\Pr}{4}(\gamma - 1)M_0^2(\varphi'')^2 = 0. \tag{6.83}$$

Граничные условия для φ будут те же, что и для несжимаемой жидкости:

$$\varphi = 0,\ \varphi' = 0 \quad \text{при } \zeta = 0; \tag{6.84}$$

$$\varphi' = 2 \quad \text{при } \zeta = \infty,$$

и решение уравнения (6.82) формально ничем не отличается от решения, полученного в §37 для случая несжимаемой жидкости (см. табл. 6.1).

Если на пластине отсутствует теплообмен (обтекание теплоизолированной пластины), то граничные условия для температуры

$$\frac{\partial T}{\partial \zeta} = 0 \text{ при } \zeta = 0,$$

$$T = T_0 \text{ при } \zeta = \infty. \tag{6.85}$$

Интегрируя уравнение (6.83) при этих граничных условиях, получаем

$$C_p T = \frac{1}{8}(\gamma - 1)M_0^2 \nu(\zeta) - \frac{C}{8}\int_{\zeta}^{\infty}\left[\varphi''(\zeta)\right]^{\Pr} d\zeta + C_1,$$

где

$$\nu = 2\Pr\int_{\zeta}^{\infty}\left[\varphi''(\zeta)\right]^{\Pr} d\zeta \int_{0}^{\zeta}\left[\varphi''\left(\zeta^*\right)\right]^{2-\Pr} d\zeta^*. \tag{6.86}$$

С учетом граничных условий (6.85)

$$C_1 = 1 \quad \text{и} \quad C = 0,$$

Результаты расчетов хорошо описываются приближенной формулой Янга

$$C_f\sqrt{\mathrm{Re}_x} = 0{,}664\left[1 + 0{,}73\left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)\sqrt{\mathrm{Pr}}\,M_0^2\right]^{\frac{n-1}{2}}.$$

Вводя коэффициент трения для несжимаемой жидкости при тех же значениях критерия Re_x, имеем

$$\left(\frac{C_f}{C_{f_0}}\right)_{\mathrm{Re}_x} = \left[1 + 0{,}73\sqrt{\mathrm{Pr}}\,\frac{\gamma - 1}{2}M_0^2\right]^{\frac{n-1}{2}}, \qquad (6.92)$$

и для $n = 0{,}75$, $\mathrm{Pr} = 0{,}7$, $\gamma = 1{,}4$.

$$\left(\frac{C_f}{C_{f_0}}\right)_{\mathrm{Re}_x} = \left[1 + 0{,}124M_0^2\right]^{-0{,}13}. \qquad (6.93)$$

Контрольные вопросы к §39

1. В каком случае уравнения ламинарного пограничного слоя для сжимаемого газа совпадают с уравнениями для несжимаемой жидкости?

2. Чему равна температура поверхности теплоизолированной пластины при $\mathrm{Pr} \to 0$ и $\mathrm{Pr} \to \infty$?

§40. ПЕРЕХОД ОТ ЛАМИНАРНОГО РЕЖИМА ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ К ТУРБУЛЕНТНОМУ

Из гидравлики известно, что при достижении определенных значений критерия Рейнольдса ламинарное течение жидкости в трубе переходит в турбулентное. При $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{кр}} = 2000$ течение в трубе остается ламинарным при любых возмущениях потока. Вместе с тем было замечено, что при уменьшении возмущений в потоке переход от ламинарного режима течения к турбулентному можно "затянуть" до значения критерия Рейнольдса, равного $5 \cdot 10^4$. Аналогичные явления наблюдаются и в пограничном слое при внешнем обтекании тел (рис. 166). Если скорость на внешней границе пограничного слоя в первом приближении сопоставить со скоростью на оси трубы, а толщину пограничного слоя — с радиусом трубы, то можно записать критическое значение критерия Рейнольдса для пограничного слоя $Re_{кр} = v_0\delta/\nu$, которое близко к критическому значению критерия Рейнольдса при течении жидкости в трубе.

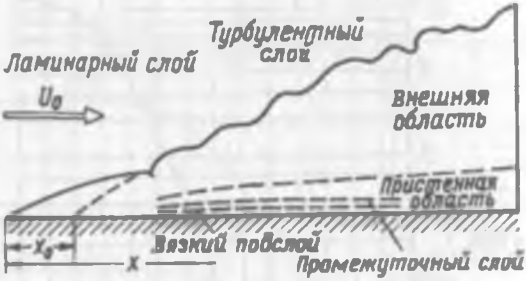


Рис. 166. Схема развития турбулентного пограничного слоя

Как показывают опыты, на пластине с острой передней кромкой, обтекаемой потоком воздуха, переход от ламинарного течения к турбулентному происходит на расстоянии $x = x_{кр}$, определяемом из равенства

$$Re_{x_{кр}} = \left(\frac{v_0 x}{\nu}\right)_{кр} = 3{,}5 \cdot 10^5 \ldots 10^6$$

С учетом уравнения (6.17) получаем $Re_{\delta_{кр}} = 3 \cdot 10^3 \ldots 5 \cdot 10^3$, что близко к соответствующим значениям для течения жидкости в трубе. Обычно вместо Re_δ, включающего недостаточно определенную величину δ, используют $Re^{**}_{кр} = v_0\delta^{**}/\nu_0$. С учетом (6.22) $Re^{**}_{кр} =$ $= 600 \ldots 1300$.

Существенное влияние на $Re^{**}_{кр}$ оказывает продольный градиент давления. В области ускоренного течения (конфузорного) $Re^{**}_{кр}$ имеет большие значения, чем в области замедленного течения. Влияние продольного градиента давления на переход от ламинарного течения к турбулентному можно оценить по кривой на


ОВАЯ ДИНАМИКА
ОВАЯ
ГАЗОВ
ДИНАМ

тогда

$$h^{*} = h\left[1 + \frac{1}{8}(\gamma - 1)M_0^2 \nu\right]$$

или

$$T_{\text{ст}}^{*} = T_0\left[1 + \frac{1}{8}\nu(0)(\gamma - 1)M_0^2\right].$$

Функция

$$\nu(0) = 2\,\mathrm{Pr}\int\limits_0^{\infty}\left[\varphi''(\zeta)\right]^{\mathrm{Pr}} d\zeta \int\limits_0^{\zeta}\left[\varphi''\left(\zeta^{*}\right)\right]^{2-\mathrm{Pr}} d\zeta^{*}. \qquad (6.87)$$

Как следует из формулы (6.87), функция $\nu(0)$ зависит от критерия Прандтля. Для газа критерий Прандтля изменяется от 0,6 до 1,0 ($\mathrm{Pr} = 0,6;\ 0,8;\ 1,0$) соответственно $\nu(0)$ равна:

$$\nu(0) = 3{,}08;\ 3{,}58;\ 4{,}00.$$

Из формулы (6.87) следует, что при $\mathrm{Pr} = 1{,}0$

$$T_{\text{ст}}^{*} = T_0\left[1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_0^2\right], \qquad (6.88)$$

т.е. в этом случае температура поверхности теплоизолированной пластины равна температуре адиабатического торможения газа.

При Pr, отличных от единицы, вводя понятие коэффициента восстановления $r = \frac{1}{4}\nu(0)$, получаем

$$T_{\text{ст}}^{*} = T_0\left[1 + r\frac{\gamma - 1}{2}M_0^2\right].$$

Из расчетов следует, что $r = \sqrt{\mathrm{Pr}}$.

Для определения коэффициента трения с учетом формулы (6.87) имеем

$$\tau_{ст} = \mu_{ст}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{ст} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{v_0}{\nu_0 x}}v_0\frac{T_0}{T_{ст}}\mu_0\frac{T_{ст}}{T_0}\varphi''(0)$$

или, поскольку $\rho_0\mu_0 = \rho_{ст}\mu_{ст}$, получим

$$C_f = \frac{\tau_{ст}}{\frac{1}{2}\rho_0 v_0^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0 v_0 x}}\varphi''(0). \tag{6.89}$$

Так как $\varphi''(0) = 1{,}328$, то

$$\tau_{ст} = 0{,}332\sqrt{\frac{\mu_0\rho_0}{x}v_0^3}, \tag{6.90}$$

$$C_f = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}, \quad \overline{C}_f = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}_0}}. \tag{6.91}$$

Таким образом, для газов, у которых $\rho\mu \approx \mathrm{const}$, коэффициенты трения останутся такими же, как и для несжимаемой жидкости, если критерий Рейнольдса определить по параметрам набегающего потока. Результаты расчета коэффициентов трения газа о пластину для других степенных законов зависимости вязкости от температуры $\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^n$ представлены на рис. 165.

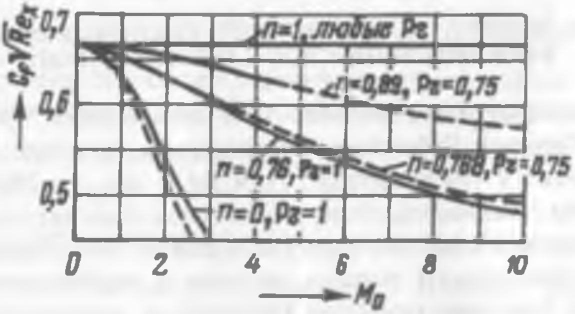


Рис. 165. Влияние сжимаемости и числа Pr на коэффициент трения в ламинарном пограничном слое

тогда

$$h^{*} = h\left[1 + \frac{1}{8}(\gamma - 1)M_0^2\nu\right]$$

или

$$T_{\text{ст}}^{*} = T_0\left[1 + \frac{1}{8}\nu(0)(\gamma - 1)M_0^2\right].$$

Функция

$$\nu(0) = 2\,\text{Pr}\int\limits_0^{\infty}\left[\varphi''(\zeta)\right]^{\text{Pr}}d\zeta\int\limits_0^{\zeta}\left[\varphi''\left(\zeta^{*}\right)\right]^{2-\text{Pr}}d\zeta^{*}. \qquad (6.87)$$

Как следует из формулы (6.87), функция $\nu(0)$ зависит от критерия Прандтля. Для газа критерий Прандтля изменяется от 0,6 до 1,0 ($\text{Pr} = 0{,}6;\ 0{,}8;\ 1{,}0$) соответственно $\nu(0)$ равна:

$$\nu(0) = 3{,}08;\ 3{,}58;\ 4{,}00.$$

Из формулы (6.87) следует, что при $\text{Pr} = 1{,}0$

$$T_{\text{ст}}^{*} = T_0\left[1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_0^2\right], \qquad (6.88)$$

т.е. в этом случае температура поверхности теплоизолированной пластины равна температуре адиабатического торможения газа.

При Pr, отличных от единицы, вводя понятие коэффициента восстановления $r = \frac{1}{4}\nu(0)$, получаем

$$T_{\text{ст}}^{*} = T_0\left[1 + r\frac{\gamma - 1}{2}M_0^2\right].$$

Из расчетов следует, что $r = \sqrt{\text{Pr}}$.

Для определения коэффициента трения с учетом формулы (6.87) имеем

$$\tau_{ст} = \mu_{ст}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{ст} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{v_0}{v_0 x}} v_0 \frac{T_0}{T_{ст}} \mu_0 \frac{T_{ст}}{T_0} \varphi''(0)$$

или, поскольку $\rho_0\mu_0 = \rho_{ст}\mu_{ст}$, получим

$$C_f = \frac{\tau_{ст}}{\frac{1}{2}\rho_0 v_0^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0 v_0 x}}\varphi''(0). \tag{6.89}$$

Так как $\varphi''(0) = 1{,}328$, то

$$\tau_{ст} = 0{,}332\sqrt{\frac{\mu_0\rho_0}{x} v_0^3}, \tag{6.90}$$

$$C_f = \frac{0{,}664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}, \quad \overline{C}_f = \frac{1{,}328}{\sqrt{\mathrm{Re}_0}}. \tag{6.91}$$

Таким образом, для газов, у которых $\rho\mu \approx \mathrm{const}$, коэффициенты трения останутся такими же, как и для несжимаемой жидкости, если критерий Рейнольдса определить по параметрам набегающего потока. Результаты расчета коэффициентов трения газа о пластину для других степенных законов зависимости вязкости от температуры $\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^n$ представлены на рис. 165.

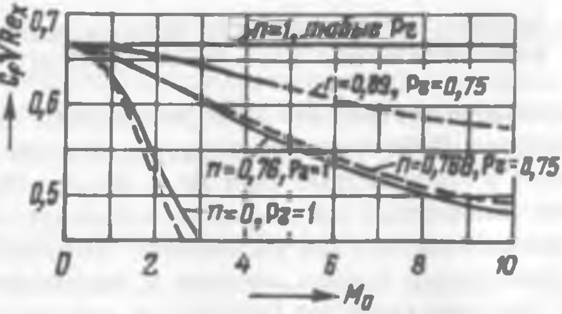


Рис. 165. Влияние сжимаемости и числа Pr на коэффициент трения в ламинарном пограничном слое

Результаты расчетов хорошо описываются приближенной формулой Янга

$$C_f\sqrt{\mathrm{Re}_x} = 0{,}664\left[1+0{,}73\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)\sqrt{\mathrm{Pr}}\,M_0^2\right]^{\frac{n-1}{2}}.$$

Вводя коэффициент трения для несжимаемой жидкости при тех же значениях критерия Re_x, имеем

$$\left(\frac{C_f}{C_{f_0}}\right)_{\mathrm{Re}_x} = \left[1+0{,}73\sqrt{\mathrm{Pr}}\,\frac{\gamma-1}{2}\,M_0^2\right]^{\frac{n-1}{2}}, \qquad (6.92)$$

и для $n = 0{,}75$, $\mathrm{Pr} = 0{,}7$, $\gamma = 1{,}4$.

$$\left(\frac{C_f}{C_{f_0}}\right)_{\mathrm{Re}_x} = \left[1+0{,}124\,M_0^2\right]^{-0{,}13}. \qquad (6.93)$$

Контрольные вопросы к §39

1. В каком случае уравнения ламинарного пограничного слоя для сжимаемого газа совпадают с уравнениями для несжимаемой жидкости?

2. Чему равна температура поверхности теплоизолированной пластины при $\mathrm{Pr} \to 0$ и $\mathrm{Pr} \to \infty$?

§40. ПЕРЕХОД ОТ ЛАМИНАРНОГО РЕЖИМА ТЕЧЕНИЯ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ К ТУРБУЛЕНТНОМУ

Из гидравлики известно, что при достижении определенных значений критерия Рейнольдса ламинарное течение жидкости в трубе переходит в турбулентное. При $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{кр}} = 2000$ течение в трубе остается ламинарным при любых возмущениях потока. Вместе с тем было замечено, что при уменьшении возмущений в потоке переход от ламинарного режима течения к турбулентному можно "затянуть" до значения критерия Рейнольдса, равного $5 \cdot 10^4$. Аналогичные явления наблюдаются и в пограничном слое при внешнем обтекании тел (рис. 166). Если скорость на внешней границе пограничного слоя в первом приближении сопоставить со скоростью на оси трубы, а толщину пограничного слоя — с радиусом трубы, то можно записать критическое значение критерия Рейнольдса для пограничного слоя $Re_{кр} = v_0\delta/\nu$, которое близко к критическому значению критерия Рейнольдса при течении жидкости в трубе.

Рис. 166. Схема развития турбулентного пограничного слоя

Как показывают опыты, на пластине с острой передней кромкой, обтекаемой потоком воздуха, переход от ламинарного течения к турбулентному происходит на расстоянии $x = x_{кр}$, определяемом из равенства

$$Re_{x_{кр}} = \left(\frac{v_0 x}{\nu}\right)_{кр} = 3{,}5 \cdot 10^5 ... 10^6$$

С учетом уравнения (6.17) получаем $Re_{\delta_{кр}} = 3 \cdot 10^3 ... 5 \cdot 10^3$, что близко к соответствующим значениям для течения жидкости в трубе. Обычно вместо Re_δ, включающего недостаточно определенную величину δ, используют $Re^{**}_{кр} = v_0\delta^{**}/\nu_0$. С учетом (6.22) $Re^{**}_{кр} = 600...1300$.

Существенное влияние на $Re^{**}_{кр}$ оказывает продольный градиент давления. В области ускоренного течения (конфузорного) $Re^{**}_{кр}$ имеет большие значения, чем в области замедленного течения. Влияние продольного градиента давления на переход от ламинарного течения к турбулентному можно оценить по кривой на рис. 167, где $f_{кр} = \frac{v_0'\delta^2}{v_0}$. Из графика следует, что ламинарный поток в конфузорной области более устойчив, чем в диффузорной.

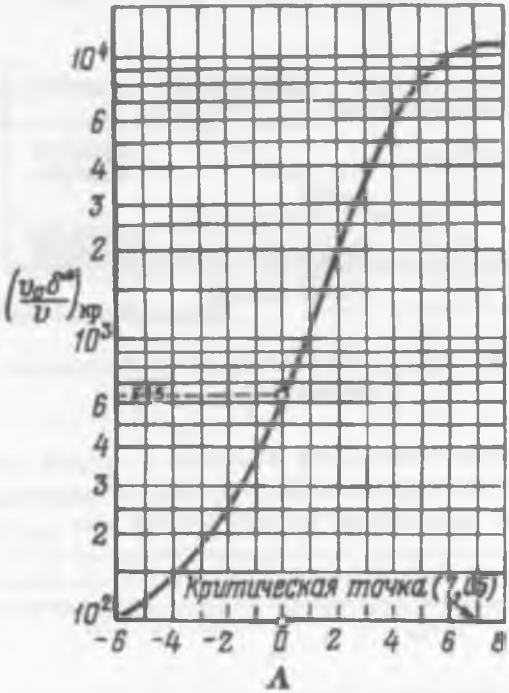


Рис. 167. Влияние продольного градиента давления на критическое число Рейнольдса

Значительное влияние на переход ламинарного течения в турбулентное оказывают степень турбулентности ε набегающего потока и шероховатость поверхности (рис. 168). В качестве меры шероховатости удобно использовать параметр k/δ_k^*, где k — высота бугорка шероховатости; δ_k^* — толщина вытеснения в точке расположения бугорка на поверхности. Как следует из графика, при малой относительной шероховатости $Re_{кр}^{**}$ существенно зависит от степени турбулентности набегающего потока, однако с увеличением шероховатости это влияние уменьшается. Отсос газа через обтекаемую поверхность приводит к существенным увеличениям критических значений $Re_{кр}$ (охлаждение поверхности то же) и, кроме того, к устойчивости ламинарного течения.

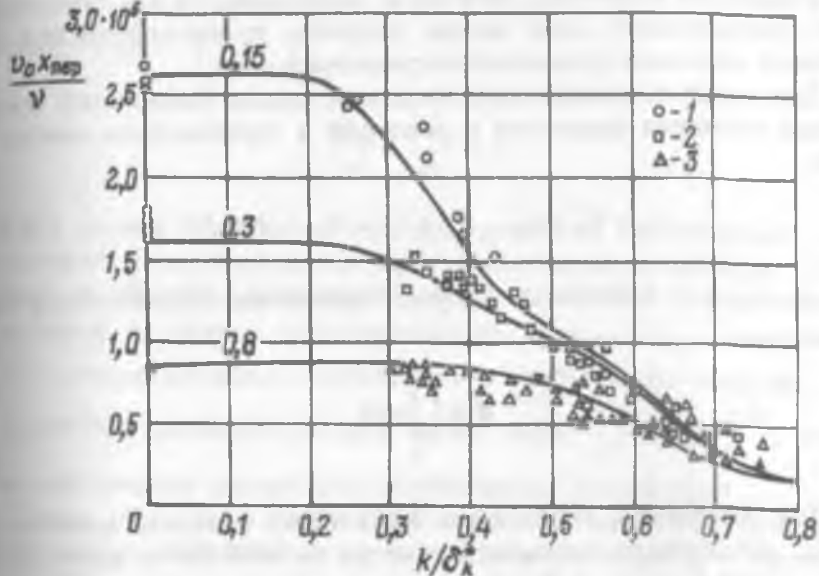


Рис. 168. Влияние степени турбулентности потока ε и шероховатости поверхности на переход ламинарного течения в турбулентное по данным:

1 – Тани, Юти, Ямамото; 2 – Тани, Хама, Мицуси; 3 – Файндат; цифры у кривых $\varepsilon = 100\frac{\sqrt{v_x'^2}}{v_0}$

Следует отметить, что переход от ламинарного течения к полностью турбулентному осуществляется в переходной области, протяженность которой может быть существенной и зависит от многих факторов. В настоящее время нет строгой теории течения жидкости в переходной области.

Контрольный вопрос к §40

Какие факторы способствуют переходу ламинарного пограничного слоя в турбулентный?

§41. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Уравнения движения, энергии и неразрывности для турбулентного пограничного слоя можно получить путем осреднения по времени исходных уравнений пограничного слоя.

Для течения несжимаемой жидкости, следуя Рейнольдсу, представим значения скоростей и давлений в турбулентном потоке в виде

$$v_x = \bar{v}_x + v'_x, \quad v_y = \bar{v}_y + v'_y, \quad p = \bar{p} + p', \tag{6.94}$$

где $\bar{v}_x, \bar{v}_y$ и $\bar{p}$ средние по времени параметры, определяемые равенством

$$\bar{a} = \frac{1}{t}\int_0^t a\,\mathrm{d}t.$$

Для осреднения необходимо брать такой интервал времени t, чтобы осредненное значение параметра не зависело от времени. В этом случае $\bar{v}'_x = \bar{v}'_y = \bar{p}' = 0$.

Воспользуемся следующими правилами осреднения:

$$\text{а)}\ \overline{v_x + v_y} = \bar{v}_x + \bar{v}_y, \quad \text{б)}\ \bar{\bar{v}}_x = \bar{v}_x,$$

$$\text{в)}\ \overline{\bar{v}_x v_y} = \bar{v}_x \cdot \bar{v}_y, \qquad \text{г)}\ \overline{\frac{\partial v_x}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{v}_x\right).$$

Из уравнения движения и неразрывности для пограничного слоя имеем

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho\frac{\partial v_x^2}{\partial x} + \rho\frac{\partial\left(v_x v_y\right)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}.$$

Подставляя вместо v_x, v_y и p их значения в соответствии с (6.94) и проводя осреднение по времени левой и правой частей уравнения, получаем

$$\begin{cases} \rho\bar{v}_x \dfrac{\partial\bar{v}_x}{\partial x} + \rho\bar{v}_y \dfrac{\partial\bar{v}_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial\bar{p}}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\mu\dfrac{\partial\bar{v}_x}{\partial y} - \rho_1 \overline{v'_x v'_y}\right], \\ \dfrac{\partial\bar{p}}{\partial x} = 0, \end{cases} \tag{6.95}$$

$$\frac{\partial\bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial\bar{v}_y}{\partial y} = 0.$$

Как видно, полученная система уравнений турбулентного пограничного слоя, записанная через осредненные параметры, отличается от обычных уравнений пограничного слоя появлением в уравнении движения дополнительного члена $\rho\overline{v_x v_y}$, имеющего смысл дополнительного турбулентного касательного напряжения. В уравнении движения опущен малый член $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\overline{v'^2_x} - \overline{v'^2_y}\right)$, отражающий влияние нормальных турбулентных напряжений.

Таким образом, в турбулентном течении помимо вязкостного касательного напряжения $\tau_л$, определяемого формулой Ньютона $\tau_л = \mu\dfrac{\partial\bar{v}_x}{\partial y}$, действует дополнительное касательное напряжение $\tau_т$, обусловленное турбулентным перемешиванием жидкости. В этом случае исходная система уравнений турбулентного пограничного слоя является незамкнутой, так как нет соотношения для $\tau_т$ и его связи с осредненными параметрами потока.

По аналогии с ламинарным потоком представим турбулентное касательное напряжение в виде

$$\tau_т = \rho\nu_т \frac{\partial\bar{v}_x}{\partial y}, \tag{6.96}$$

где $\nu_т$ — турбулентная кинематическая вязкость.

Тогда уравнения турбулентного пограничного слоя запишутся в виде

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_\Sigma}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \tag{6.97}$$

(для простоты знак усреднения по времени опускаем).

Здесь

$$\tau_\Sigma = \tau_л + \tau_т = (\mu + \mu_т)\frac{\partial v_x}{\partial y}. \tag{6.98}$$

В настоящее время не существует строгой теории турбулентности, поэтому все существующие методы расчета турбулентного пограничного слоя носят полуэмпирический характер и называются полуэмпирическими теориями турбулентности. Сложность проблемы заключается в том, что коэффициент турбулентной вязкости, в отличие от коэффициента молекулярной вязкости, зависит от геометрических и кинематических характеристик потока жидкости.

Записанные через полное касательное напряжение дифференциальные уравнения турбулентного пограничного слоя ничем не отличаются от уравнений ламинарного пограничного слоя. Поэтому интегральное соотношение импульсов остается без изменений:

$$\frac{d\mathrm{Re}^{**}}{d\bar{x}} + (1 + H)\frac{\mathrm{Re}^{**}}{v_0}\frac{dv_0}{d\bar{x}} = \mathrm{Re}_L\left(\frac{C_f}{2} + j_{ст}\right). \tag{6.99}$$

Полуэмпирическими называются методы расчета, в которых используются исходные дифференциальные уравнения турбулентного пограничного слоя (6.97) или интегральное соотношение импульсов (6.99) и одна из полуэмпирических формул для определения турбулентного трения. Если решается исходная система дифференциальных уравнений, то такие методы называются численными, или дифференциальными.

Эмпирическими называются методы, основанные на использовании интегрального соотношения импульсов с привлечением эмпирических соотношений для $C_f/2$ и H. Эти соотношения удобно представить в относительном виде $\dfrac{C_f}{C_{f_0}}$ и $\dfrac{H}{H_0}$, где C_{f_0} и H_0 — значения коэффициентов трения и форм параметра H для "стандартных" условий обтекания плоской пластины потоком несжимаемой жидкости с постоянными свойствами. Соотношение $\left(\dfrac{C_f}{C_{f_0}}\right)_{\mathrm{Re}^{**}} = \psi$ при одинаковых значениях Re^{**} называется относительным законом трения.

Получим формулу для коэффициента трения C_{f_0} в "стандартных" условиях, т.е. при обтекании плоской непроницаемой пластины потоком несжимаемой жидкости с постоянными свойствами. Соотношение между ν и $\nu_т$ в выражении для суммарного касательного напряжения

$$\tau_\Sigma = \tau_л + \tau_т = \rho(\nu + \nu_т)\frac{\partial v_x}{\partial y}$$

изменяется по толщине турбулентного пограничного слоя (рис. 169). На малых расстояниях от стенки (область I) касательное напряжение определяется только молекулярной вязкостью, т.е. $\tau_л >> \tau_т$. Эта область называется вязким подслоем, и ее толщина составляет 0,001—0,01 толщины всего турбулентного слоя. Во внешней области турбулентного пограничного слоя (III) основной вклад в касательное напряжение вносит турбулентное касательное напряжение, т.е. $\tau_т >> \tau_л$. Толщина этой области составляет 0,8—0,9 толщины пограничного слоя. Между вязким подслоем и областью с развитой турбулентностью находится переходная область (II), где $\tau_л$ и $\tau_т$ соизмеримы.

Из уравнения движения для области вязкого подслоя (при $y \to 0$) можно записать

$$\tau = \tau_{ст} + \left(\frac{dp}{dx}\right)y + 0\left(y^3\right). \qquad (6.100)$$

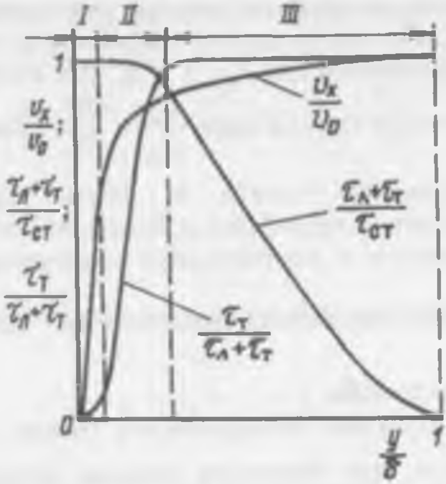


Рис. 169. Профили скорости и касательного напряжения в турбулентном пограничном слое

С учетом формулы Ньютона получаем профиль скоростей в вязком подслое

$$\varphi = \eta + \frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\left(\rho v^*\right)^3}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right)\eta^2,$$

где $\varphi = \frac{v_x}{v^*}$; $\eta = \frac{yv^*}{\nu}$; $v^* = \sqrt{\frac{\tau_{\text{ст}}}{\rho}}$ — скорость трения.

При отсутствии продольного градиента давления $\varphi = \eta$ и скорость в вязком подслое изменяется по линейному закону.

В другом предельном случае — в сечении отрыва пограничного слоя ($\tau_{\text{ст}} = 0$) — из формулы следует

$$v_x = \frac{1}{2\mu}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}y^2. \tag{6.101}$$

Для области развитой турбулентности (III) профиль скоростей можно получить на основании метода размерностей. Полагая, что влиянием вязкости в области III можно пренебречь, можно утверждать, что градиент скорости $\partial v_x / \partial y$ в каждой точке определяется параметрами $\tau_т$, ρ и расстоянием от стенки, тогда в соответствии с π-теоремой метода размерностей должен быть один безразмерный критерий

$$\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{\frac{\tau_т}{\rho}}}=\bar{k} \tag{6.102}$$

или

$$\tau = \rho y^2\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2. \tag{6.103}$$

Впервые эта формула была получена Прандтлем в 1925 г. на основании аналогии между молекулярным и турбулентным перемешиванием.

В турбулентном течении возникают жидкие объемы, сохраняющие свою индивидуальность на некотором расстоянии l, называемом длиной пути смешения. Предположим, что такой объем жидкости, возникающий в слое $(y_1 - l)$ (см. рис. 41) и обладающий скоростью v_x, перемещается на расстояние l в направлении, перпендикулярном к главному течению. Когда этот объем жидкости попадет в слой с координатой y_1, то скорость в этом слое изменится на величину

$$v_x' = \bar{v}_x(y_1 - l) - \bar{v}_x(l) = -l\left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}\right)_1,$$

т.е. на величину пульсационной составляющей продольной скорости.

Когда в слой y_1 попадет в объем жидкости из слоя $y_1 + l$, пульсационная составляющая будет равна:

$$v_x' = \bar{v}_x(y_1 + l) - \bar{v}_x(\bar{y}_1) = \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}\right)_1 l.$$

Положительная пульсация скорости в слое y_1 в соответствии с уравнением неразрывности приведет к отрицательной пульсации поперечной составляющей скорости v'_y. Можно предположить, что

$$v'_y = -kv'_x.$$

Тогда произведение $v'_x v'_y$ будет отличным от нуля и отрицательным

$$\overline{v'_x v'_y} = -k\overline{v'_x}^2 = -kl^2\left(\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right)^2. \quad (6.104)$$

Включая коэффициент пропорциональности k в длину пути смешения, имеем

$$\tau_т = \rho v'_x v'_y = \rho l^2\left(\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right)^2. \quad (6.105)$$

Принимая простейшую гипотезу, что вблизи стенки длина пути смешения пропорциональна расстоянию от стенки

$$l = æy,$$

получаем формулу Прандтля для турбулентного касательного напряжения

$$\tau_т = \rho æ^2 y^2\left(\frac{d\bar{v}_x}{dy}\right)^2. \quad (6.106)$$

Принимая $\tau_т = \tau_{ст}$ и интегрируя уравнение (6.106) по сечению пограничного слоя, получаем

$$v_x = \frac{1}{æ}\sqrt{\frac{\tau_{ст}}{\rho}}\ln y + C. \quad (6.107)$$

Это соотношение можно записать в виде

$$\varphi = \frac{1}{æ}\ln y + C_1. \quad (6.108)$$

На рис. 170 представлены результаты измерений скорости в турбулентном пограничном слое в универсальных координатах φ и η. Как было показано ранее, в области вязкого подслоя $\varphi = \eta$. Из рис. 170 следует, что толщина вязкого подслоя примерно равна 11,5. Первая универсальная константа $\text{æ} = 0{,}4$; вторая константа получается после подстановки в уравнение (6.108) значений φ и η на границе вязкого подслоя.

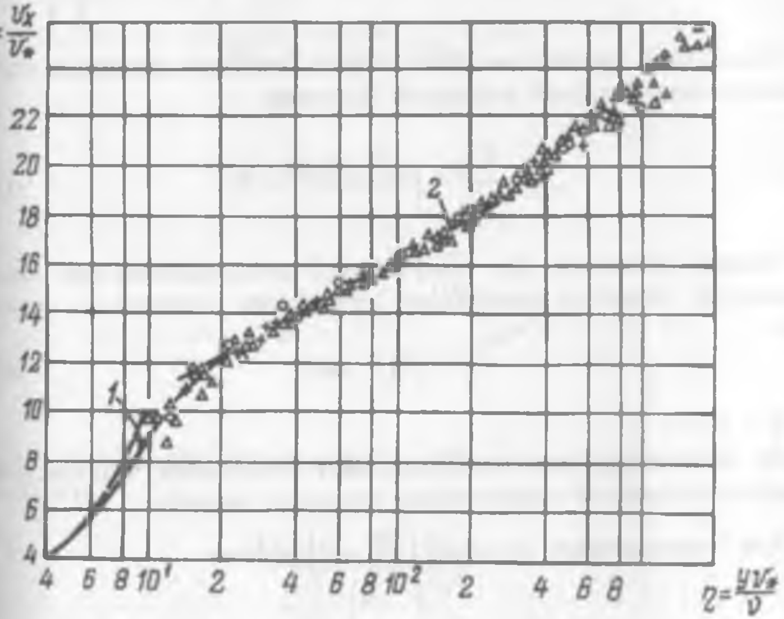


Рис. 170. Универсальный профиль скоростей в турбулентном пограничном слое:
1 — $\varphi = \eta$; *2* — $\varphi = 2{,}5 \ln \eta + 5{,}5$

После такой подстановки имеем

$$\varphi = 2{,}5 \ln \eta + 5{,}5. \qquad (6.109)$$

Из полученного логарифмического закона распределения скоростей имеем формулы

$$\tilde{\delta}^{*} = 2{,}5\sqrt{\frac{C_f}{2}}, \quad \tilde{\delta}^{**} = 2{,}5\sqrt{\frac{C_f}{2}} - 6{,}25C_f; \tag{6.110}$$

$$H = \left(1 - 2{,}5\sqrt{2C_f}\right)^{-1}, \quad \sqrt{\frac{2}{C_f}} = 5{,}5 + 2{,}5\ln\left[\frac{\mathrm{Re}^{**}}{2{,}5 - 12{,}5\sqrt{\frac{C_f}{2}}}\right].$$

Последнее уравнение достаточно хорошо аппроксимируется относительно простой формулой Кармана

$$\frac{C_f}{2} = \left(2{,}5\ln \mathrm{Re}^{**} + 3{,}8\right)^{-2}. \tag{6.111}$$

Можно показать, что полученный логарифмический профиль скоростей является огибающей семейства степенных профилей вида

$$\varphi = A\eta^n, \tag{6.112}$$

где $0 < n < 1$.

Во многих случаях использование степенной аппроксимации профиля скоростей существенно упрощает расчеты.

Для "стандартных" условий $\left(\frac{dp}{dx} = 0\right)$ имеем:

$$\omega = \xi^n,$$

$$\frac{\delta^*}{\delta} = \frac{n}{1+n}, \quad \frac{\delta^{**}}{\delta} = \frac{n}{(1+n)(1+2n)}, \quad H = 1 + 2n,$$

$$C_f = B / \left(\mathrm{Re}^{**}\right)^m, \quad m = \frac{2n}{1+n}, \quad B = 2\left[A \cdot \left(\frac{\delta^{**}}{\delta}\right)^m\right]^{-\frac{2}{1+n}}. \tag{6.113}$$

Из интегрального соотношения импульсов для "стандартных" условий

$$\frac{d\,\mathrm{Re}^{**}}{d\mathrm{Re}_x} = \frac{C_f}{2}$$

получаем следующие формулы:

$$\mathrm{Re}^{**} = \left(\frac{1+m}{2} B\,\mathrm{Re}_x\right)^{\frac{1}{1+m}};$$

$$C_f = B_1\,\mathrm{Re}_x^{-m_1}, \quad m_1 = \frac{m}{1+m}; \tag{6.114}$$

$$B_1 = \left(\frac{2B^{\frac{1}{m}}}{1+m}\right)^{\frac{m}{1+m}}.$$

Для практической области $\mathrm{Re}^{**} < 10^4$ можно принять $n = 1/7$, тогда получим

$$\frac{C_f}{2} = \frac{0{,}0128}{\left(\mathrm{Re}^{**}\right)^{0,25}};$$

$$\mathrm{Re}^{**} = \mathrm{Re}_x^{0,8}; \quad H = 1{,}286; \tag{6.115}$$

$$\frac{\delta^*}{\delta} = 0{,}125 \quad \frac{\delta^{*}}{\delta} = 0{,}097.$$

Формула (6.115) определяет закон трения для "стандартных" условий обтекания плоской непроницаемой пластины потоком несжимаемой жидкости.

Ранее были получены предельные относительные законы трения $\left(\dfrac{C_f}{C_{f_0}}\right)_{\mathrm{Re}^{**}}$ для области $\mathrm{Re}^{**} \to \infty$, учитывающие влиянис различных факторов (продольный градиент давления, поперечный поток вещества, неизотермичность, сжимаемость и т.п.). Опыты показывают, что в большинстве практических случаев предельные относительные законы трения справедливы и для конечных чисел Re^{**}, и в качестве первого приближения они могут быть использованы в практических расчетах.

В табл. 6.4 приведены относительные законы трения для различных условий.

Таблица 6.4

Предельные относительные законы трения $\left(\dfrac{C_f}{C_{f_0}}\right)_{\mathrm{Re}^{**}}$

Возмущающий фактор	Относительный закон трения
Неизотермичность	$\Psi = \left(\dfrac{2}{\sqrt{\dfrac{T_{\text{ст}}}{T_0}}+1}\right)^2$
Сжимаемость	$\Psi = \dfrac{\left(\arcsin\sqrt{\dfrac{\psi^* - 1}{\psi^*}}\right)^2}{\psi^* - 1}$; $\psi^* = 1 + r\dfrac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}^2$
Теплообмен и сжимаемость (аппроксимация Сполдинга)	$\Psi = \left\{\dfrac{1}{4}\left[\psi^{1/2}+1\right]^2 + 0{,}03M_0^2\right\}^{-1}$; $\psi = \dfrac{T_0}{T_{\text{ст}}}$
Поперечный поток вещества	$\Psi = \left(1 - \dfrac{b}{4}\right)^2$, где $b = \dfrac{j_{\text{ст}}}{\rho_0 v_0}\dfrac{2}{C_{f_0}}$

окончание табл. 6.4.

Возмущающий фактор	Относительный закон трения
Поперечный поток вещества и теплообмен (аппроксимация Сполдинга)	$\Psi = \left[\dfrac{1}{4}\left\{\psi^{1/2} + (1+b_1)^{1/2}\right\}^2 + \dfrac{1}{6}b_1(\psi - 1)\right]^{-1}$, где $b_1 = \dfrac{j_{\text{ст}}}{\rho_0 v_0}\dfrac{2}{C_f}$
Вдув инородного газа, теплообмен (аппроксимация Сполдинга)	$\Psi = \left[\dfrac{1}{4}\left\{\psi_1^{1/2} + (1+b_1)^{1/2}\right\}^2 + \dfrac{1}{6}b_1(\psi_1 - 1)\right]^{-1}$, где $\psi_1 = \psi\left[1 + \dfrac{b_1}{1+b_1}\left(\bar{R} - 1\right)\right]$; $\bar{R} = \dfrac{R_1}{R_0}$;
Продольный градиент давления	$\psi = \left(1 - f/f_{\text{кр}}\right)^{1{,}5}$; $\dfrac{H-1}{H_0-1} = \left(\dfrac{H_{\text{кр}}-1}{H_0-1}\right)^{f/f_{\text{кр}}}$, где $f = \dfrac{\delta^{**}}{v_0}\dfrac{dv_0}{dx}$; $f_{\text{кр}} = -0{,}004$; $H_{\text{кр}} = 2{,}36$
Совместное влияние продольного градиента давления и вдува газа	$\Psi = \left(1 - \dfrac{b}{4}\right)^2\left[1 - \sqrt{\bar{f}\left(2 - \bar{f}\right)}\right]$, где $\bar{f} = f/f_{\text{кр}}$.

Интегральное соотношение импульсов с учетом линеаризации правой части для турбулентного пограничного слоя имеет такой же вид, как и для ламинарного (6.64). Для плоского пограничного слоя имеем

$$\frac{d\,\mathrm{Re}^{**}}{d\bar{x}} + \frac{\mathrm{Re}^{**}}{v_0}\frac{dv_0}{d\bar{x}}\left(1 + H_{\text{кр}}\right) = \mathrm{Re}_L\left(\frac{C_f}{2} + \bar{j}_{\text{ст}}\right). \qquad (6.116)$$

Для случая непроницаемой пластины и с учетом закона трения (6.115) интеграл уравнения (6.116) равен:

$$\mathrm{Re}_{\text{ст}}^{**} = \tilde{v}_0^{-æ}\left[\frac{1+m}{2}B\,\mathrm{Re}_{0_{\text{ст}}}\Psi_t\int_0^{\bar{x}}\tilde{v}_0^{1+(1+m)æ}\,d\bar{x}\right]^{\frac{1}{1+m}},$$

где

$$\mathrm{Re}_{\text{ст}}^{**} = \frac{\rho_0 v_0 \delta^{**}}{\mu_{\text{ст}}};\quad \mathrm{Re}_{0_{\text{ст}}} = \frac{\rho_0 v_{01} L}{\mu_{\text{ст}}};\quad \tilde{v}_0 = \frac{v_0}{v_{01}};\quad \bar{x} = \frac{x}{L};$$

$$\Psi_t = \left(\frac{2}{\sqrt{\Psi}+1}\right)^2;\quad æ = 1 + H_{\text{кр}}.$$

Локальные значения коэффициента трения определяются по формуле

$$C_f = \Psi_t \Psi_f \frac{B}{\left(\mathrm{Re}_{\text{ст}}^{**}\right)^m}, \tag{6.117}$$

причем

$$\Psi_f = \left(1 - \frac{f}{f_{\text{кр}}}\right)^{1,5} \quad \text{и} \quad f = \frac{\mathrm{Re}_{\text{ст}}^{**}}{\mathrm{Re}_L}\frac{1}{v_0}\frac{dv_0}{d\bar{x}}.$$

Для случая обтекания плоской непроницаемой пластины

$$\frac{d\,\mathrm{Re}^{**}}{d\bar{x}} = \mathrm{Re}_L\,\Psi\frac{B}{2\left(\mathrm{Re}^{**}\right)^m}.$$

Интегрируя при граничных условиях $x = 0$, $\mathrm{Re}^{**} = 0$, т.е. когда турбулентный пограничный слой нарастает с передней кромки пластины, имеем

$$\mathrm{Re}_{\text{ст}}^{**} = \left(\frac{m+1}{2}B\,\mathrm{Re}_{L_{\text{ст}}}\int_0^{\bar{x}}\Psi\,d\bar{x}\right)^{\frac{1}{m+1}}. \tag{6.118}$$

Локальный коэффициент трения определяется из уравнения

$$C_f = B_1 \Psi^{\frac{1}{m+1}} \mathrm{Re}_{x_{\text{ст}}}^{-\frac{1}{m+1}}, \tag{6.119}$$

где

$$\Psi = \Psi_m = \Psi_t = \left[\frac{\operatorname{arctg} \mathrm{M}_0\sqrt{r\frac{\gamma-1}{2}}}{\mathrm{M}_0\sqrt{r\frac{\gamma-1}{2}}}\right]^2 \left(\frac{2}{\sqrt{\frac{T_{\text{ст}}}{T^*_{\text{ст}}}}+1}\right)^2,$$

а коэффициенты B_1 и m берутся из табл. 6.3. В частности, для $B_1 =$ $= 0{,}0128$ и $m = 0{,}25$ имеем

$$\mathrm{Re}^{**}_{\text{ст}} = (0{,}016)^{0,8} \Psi^{0,8} \mathrm{Re}^{0,8}_{x_{\text{ст}}}; \tag{6.120}$$

$$C_f = 0{,}0576 \Psi^{0,8} \mathrm{Re}^{-0,2}_{x_{\text{ст}}}. \tag{6.121}$$

Для осесимметричного пограничного слоя интегральное соотношение импульсов можно записать в виде (рис. 171)

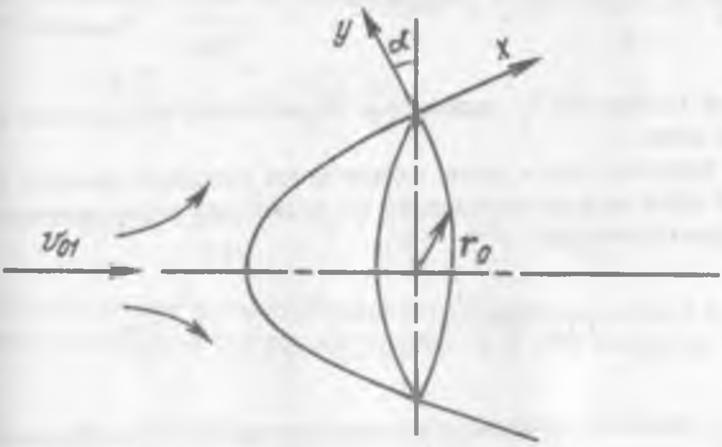


Рис. 171. К расчету осесимметричного пограничного слоя

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_{00}^{**}}{d\bar{x}} + \frac{\mathrm{Re}_{00}^{**}}{r_0}\frac{dr_0}{d\bar{x}} = \mathrm{Re}_L\left[\Psi_M\Psi_t\Psi_f\,\frac{C_{f_0}}{2} - \left(1 + H_{\text{кр}}\right)f_{\text{кр}}\bar{f}\right]. \qquad (6.122)$$

Осуществляя линеаризацию правой части уравнения, имеем

$$\frac{d\,\mathrm{Re}_{00}^{**}}{d\bar{x}} + \mathrm{Re}_{00}^{**}\left[\frac{1 + H_{\text{кр}}}{v_0}\frac{dv_0}{d\bar{x}} + \frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{d\bar{x}}\right]\mathrm{Re}_L\,\Psi_M\Psi_t + \frac{C_{f_0}}{2}. \qquad (6.123)$$

Интеграл уравнения (6.123) при $H_{\text{кр}} = \text{const}$ равен

$$\mathrm{Re}_{00}^{**} = \frac{1}{U^{1+H_{\text{кр}}}r_0}\left[\frac{1+m}{2}B\,\mathrm{Re}_{00}\int\limits_0^{\bar{x}}(\Psi_t\Psi_M)\left(\frac{\mu_{\text{ст}}}{\mu_{00}}\right)^m U^{1+(1+m)H_{\text{кр}}}r_0^{1+m}\left(1 - U^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}d\bar{x}\right]^{\frac{1}{1+m}}, \qquad (6.124)$$

где

$$\mathrm{Re}_{00}^{**} = \frac{\rho v_0 \delta^{**}}{\mu_{00}}; \quad \mathrm{Re}_{00} = \frac{v_{\max}\rho_{00}L}{\mu_{00}}; \quad U = \frac{v_0}{v_{\max}}; \quad v_{\max} = \sqrt{2h_{00}}.$$

Злесь индекс 00 — параметры торможения на границе пограничного слоя.

Для течения газа в сопле скорость на внешней границе пограничного слоя можно определить из уравнения неразрывности для одномерного течения

$$U\left(1 - U^2\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{0,5}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\frac{F_{\text{кр}}}{F}, \qquad (6.125)$$

где $F_{\text{кр}}$ — площадь критического сечения сопла; F — текущая площадь.

Следовательно,

$$\mathrm{Re}_{00}^{**} = \frac{1}{U^{1+H}}\left\{\frac{1+m}{2} B\,\mathrm{Re}_{00}\,\overline{D}^{-(1+m)}\int^{\bar{x}}(\Psi_t\Psi_M)\left(\frac{\mu_{\text{ст}}}{\mu_{00}}\right)^m \times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{0,5}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} U^{(1+m)H}\,\overline{\mathrm{D}}^{m-1}\mathrm{d}\bar{x}\right\}^{\frac{1}{m+1}}, \qquad (6.126)$$

где $\overline{D} = \dfrac{D}{D_{\text{кр}}}$.

Локальные коэффициенты трения находятся по формуле

$$C_f = \Psi\Psi_f\,\frac{B}{\left(\mathrm{Re}_{00}^{**}\right)^m}\left(\frac{\mu_{\text{ст}}}{\mu_{00}}\right)^m. \qquad (6.127)$$

Аналогичным образом рассчитывается развитие турбулентного пограничного слоя на проницаемой поверхности.

Интегральное соотношение импульсов для плоского турбулентного пограничного слоя на проницаемой поверхности можно записать в виде

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Re}_{00}^{**}}{\mathrm{d}\bar{x}} + (1+H)\frac{\mathrm{Re}_{00}^{**}}{v_0}\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}\bar{x}} = \mathrm{Re}_L\,\frac{C_{f_0}}{2}(\Psi + b), \qquad (6.128)$$

где

$$\mathrm{Re}_{00}^{**} = \frac{\rho_0 v_0 \delta^{**}}{\mu_{00}};\quad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}},\quad \mathrm{Re}_L = \frac{\rho_0 v_0 L}{\mu_{00}}.$$

Для постоянного значения параметра проницаемости b при постоянной температуре стенки из уравнения (6.128) получаем

$$\mathrm{Re}_{\text{ст}}^{**} = \bar{v}_0^{\,\varkappa}\left[\frac{1+m}{2} B\,\mathrm{Re}_{0_{\text{ст}}}(\Psi + b)\int_0^{\bar{x}} \bar{v}_0^{\,1+(1+m)\varkappa}\mathrm{d}\bar{x}\right]^{\frac{1}{1+m}}. \qquad (6.129)$$

где

$$\mathrm{Re}^{**}_{\text{ст}} = \frac{\rho_0 v_0 \delta^{**}}{\mu_{\text{ст}}}, \quad \mathrm{Re}_{0_{\text{ст}}} = \frac{\rho_0 v_{01} L}{\mu_{\text{ст}}}; \quad \bar{v}_0 = \frac{v_0}{v_{01}}, \quad æ = 1 + H.$$

Для осесимметричного пограничного слоя имеем

$$\mathrm{Re}^{**}_{\text{ст}} = \frac{1}{\bar{v}_0^{æ}}\left[\frac{1+m}{2} B\,\mathrm{Re}_{0_{\text{ст}}}\,\bar{D}^{-(1+m)}(\Psi + b)\int\limits_0^{\bar{x}} \bar{v}_0^{\,1+(1+m)æ}\,\bar{D}^{m+1}\,\mathrm{d}\bar{x}\right]^{\frac{1}{1+m}}. \tag{6.130}$$

Локальные коэффициенты трения определяются по формуле

$$C_f = \Psi \frac{B}{\left(\mathrm{Re}^{**}_{\text{ст}}\right)^m}, \tag{6.131}$$

где

$$\Psi = \Psi_t \cdot \Psi_b;$$

$$\Psi_t = \left(\frac{2}{\sqrt{\dfrac{T_{\text{ст}}}{T_0}} + 1}\right)^2; \quad \Psi_b = \left(1 - \frac{b}{b_{\text{кр}}}\right)^2;$$

$$b_{\text{кр}} = \frac{4}{\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\dfrac{T_{\text{ст}}}{T_0}}.$$

Контрольный вопрос к §41

Как влияет охлаждение стенки на коэффициент турбулентного трения?

§42. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОФИЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ РЕШЕТКИ ПРОФИЛЕЙ

Полное сопротивление крыла конечного размаха, т.е. его лобовое сопротивление, состоит из индуктивного и профильного сопротивлений. Индуктивное сопротивление является проекцией подъемной силы на направление набегающего на крыло потока. Как известно, в потенциальном потоке жидкости сопротивление отсутствует (парадокс Даламбера), на профиль действуют только силы давления, равнодействующая которых, согласно теореме Жуковского, равна подъемной силе профиля $R = R_y$.

Влияние вязкости приводит к прилипанию потока к поверхности профиля и возникновению на ней силы трения. Кроме того, ввиду обратного влияния пограничного слоя на основной поток происходит перераспределение давления по поверхности профиля. В результате изменяется величина подъемной силы и возникает сила профильного сопротивления, состоящая из силы сопротивления от перераспределения $\left(R_{x_п}\right)$ и силы трения $\left(R_{x_f}\right)$:

$$R_x = R_{x_п} + R_{x_f}. \tag{6.132}$$

Отношение подъемной силы профиля к его сопротивлению называется качеством профиля $K = R_y / R_x$. Обратная величина называется обратным качеством профиля:

$$\mu = \frac{1}{k} = \frac{R_x}{R_y}.$$

Безразмерные коэффициенты

$$C_y = R_y \Big/ \left(\frac{\rho_0 V_0^2}{2} b\right), \quad C_x = R_x \Big/ \left(\frac{\rho_0 V_0^2}{2} b\right) \tag{6.133}$$

называются коэффициентом подъемной силы и коэффициентом профильного сопротивления соответственно.

Коэффициент профильного сопротивления можно представить в виде суммы коэффициента сопротивления давления $C_{x_д}$ и коэффициента сопротивления трения C_{x_f}:

$$C_x = \frac{R_{x_д}}{\frac{\rho_0 v_0^2}{2} b} + \frac{R_{x_f}}{\frac{\rho_0 v_0^2}{2} b} = C_{x_д} + C_{x_f}.$$

На рис. 172 показаны для сравнения кривые зависимости коэффициентов сопротивления трения и давления для симметричных профилей Жуковского от их относительной толщины $\overline{C}$. На рисунке отчетливо видно увеличение роли сопротивления давления с увеличением относительной толщины профиля. Расчет сопротивления давления связан с большими трудностями, поэтому его обычно определяют как разность между профильным сопротивлением и сопротивлением трения.

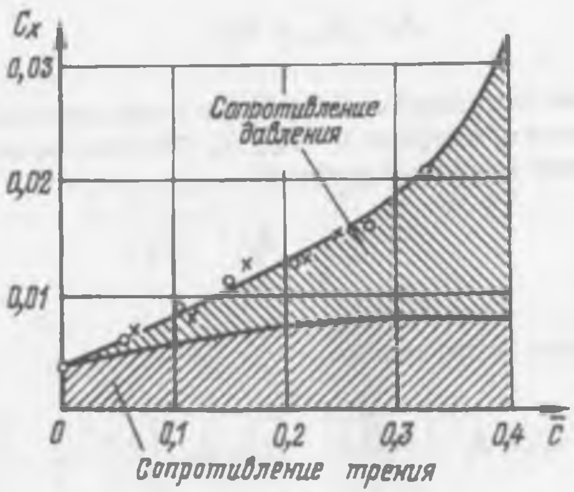


Рис. 172. Соотношение между сопротивлением трения и сопротивлением давления для симметричного профиля Жуковского

Рассмотрим обтекание профиля крыла безграничным потоком жидкости со скоростью v_0 на бесконечности и плотностью ρ_0 (рис. 173).

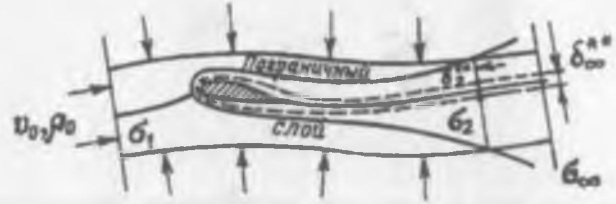


Рис. 173. Схема обтекания профиля крыла

Для определения силы сопротивления профиля запишем уравнение количества движения для трубки тока, включающей сечения σ_1 и σ_2:

$$R_x = \rho_0 v_0 \int_{\sigma_2} v_x \mathrm{d}y - \rho_0 \int_{\sigma_2} v_x^2 \mathrm{d}y = \rho_0 \int_{\sigma_2} v_x (v_0 - v_x) \mathrm{d}y = \rho_0 v_0^2 \delta_\infty^{**}, \quad (6.134)$$

где δ_∞^{**} — толщина потери импульса в сечении σ_2 следа, удаленном на бесконечность от профиля крыла.

Тогда

$$C_x = \frac{R_x}{(1/2)\rho_0 v_0^2 b} = 2\frac{\delta_0^{**}}{b} = 2\frac{\mathrm{Re}_\infty^{**}}{\mathrm{Re}_b}. \quad (6.135)$$

Следовательно, для определения профильного сопротивления необходимо знать толщину потери импульса в следе за телом. Это можно сделать, установив приближенную связь δ_∞^{**} с толщиной потери импульса на задней кромке профиля крыла. Интегральное соотношение импульсов для $x > x_к$ (где $\tau_{ст} = 0$ на поверхности трубки тока) запишется в виде

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Re}^{**}}{\mathrm{d}\bar{x}} + (1 + H_{cp})\frac{\mathrm{Re}^{**}}{v_0}\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}\bar{x}} = 0. \quad (6.136)$$

Принимая $H = H_{ср} = \dfrac{H_k + H_\infty}{2}$, после интегрирования в пределах от $x_к$ до $x = \infty$, имеем

$$\frac{\mathrm{Re}^{**}_\infty}{\mathrm{Re}^{**}_к} = \left(\frac{v_{0\,к}}{v_{0\,к}}\right)^{2+H_{ср}}$$

или

$$\frac{\delta^{**}_\infty}{\delta^{**}_к} = \left(\frac{v_{0\,к}}{v_0}\right)^{2+H_{ср}}. \qquad (6.137)$$

Принимая $H_{ср} \approx 1{,}4$, получаем

$$\delta^{**}_\infty = \delta^{**}_к\left(\frac{v_{0\,к}}{v_0}\right)^{3,4}. \qquad (6.138)$$

Толщина потери импульса на кромке профиля определяется из расчета пограничного слоя по рассмотренным выше методам.

Интегрируя уравнение импульсов от $x = 0$ до $x = x_к$ с учетом того, что до $\mathrm{Re}^{**} = \mathrm{Re}_{пер}$ развивается ламинарный пограничный слой, имеем

$$\frac{\mathrm{Re}^{**}_к}{\mathrm{Re}_L} = \bar{v}_{0\,к}^{-\varkappa}\left[\frac{(1+m)B}{2}\,\frac{\mathrm{Re}_{ост}}{\mathrm{Re}_L^{m+1}}\int\limits_{\bar{x}_{пер}}^{\bar{x}_к}\bar{v}_0^{\,1+(1+m)\varkappa}\,d\bar{x} + \left(\frac{\mathrm{Re}^{**}\bar{v}_{0пер}^{-\varkappa}}{\mathrm{Re}_L}\right)^{m+1}\right]^{m+1}. \qquad (6.139)$$

В результате получаем следующую формулу для определения коэффициента профильного сопротивления:

$$C_x = 2(\bar{V}_{0\text{к}})^{2+H_{\text{ср}}-\text{æ}}\left[\frac{(1+m)B}{2}\frac{\mathrm{Re}_{\text{ост}}}{\mathrm{Re}_L^{m+1}}\int\limits_{\bar{x}_{\text{пер}}}^{\bar{x}_k}\bar{V}_0^{1+(1+m)\text{æ}}\,\mathrm{d}\bar{x} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\mathrm{Re}^{**}\bar{V}_0^{-\text{æ}}}{\mathrm{Re}_L}\right)^{m+1}_{\text{пер}}\right]^{\frac{1}{m+1}}. \qquad (6.140)$$

Расчеты следует провести по формуле (6.140) как для верхней, так и для нижней поверхностей, а результаты сложить. Изложенный метод расчета профильного сопротивления крыла нетрудно распространить и для решеток профилей. Рассмотрим обтекание плоской решетки профилей (рис. 174).

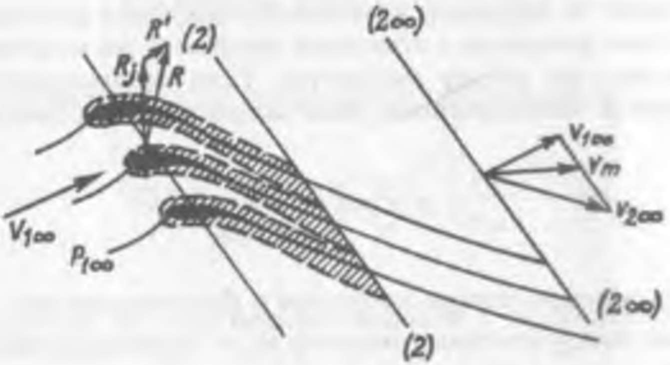


Рис. 174. Схема обтекания плоской решетки профилей

Используя теорему количества движения, получаем формулу для главного вектора сил, приложенных к профилю решетки:

$$R = \left(p_{1\infty} - p_{2\infty}\right)\bar{t} + \rho\left(tV_{1\infty}\right)\left(V_{1\infty} - V_{2\infty}\right). \qquad (6.141)$$

Обозначив

$$p' = \left(p_{1\infty} + \frac{1}{2}\rho V_{10}^2\right) - \left(p_{2\infty} + \frac{1}{2}\rho V_{20}^2\right),$$

получим

$$\overline{R} = \frac{1}{2}\rho\left(v_{2\infty}^2 - v_{1\infty}^2\right)t + \rho\left(t\, v_{1\infty}\right)\left(v_{1\infty} - v_{2\infty}\right) + p't\,,$$

или

$$\overline{R} = \rho\left(v_m v_d\right)t - \rho\left(t\, v_m\right)v_d + p't. \tag{6.142}$$

Первое слагаемое представляет силу Жуковского, второе — силу сопротивления профиля в решетке

$$\overline{R} = \overline{R}_j + \overline{R}'$$

причем

$$\overline{R}' = p't.$$

В отличие от обтекания единичного профиля в решетке пограничные слои, сходящие с отдельных профилей, на некотором расстоянии вниз по потоку смыкаются. Если предположить, что в этом сечении неоднородность поля скоростей мала, можно показать

$$p' = \rho v_{2\infty}^2 \frac{\delta_2^{**}}{t\cos\beta_{2\infty}}, \tag{6.143}$$

где δ_2^{**} — толщина потери импульсов в рассматриваемом сечении; $\beta_{2\infty}$ — угол между вектором скорости $v_{2\infty}$ и перпендикуляром к оси решетки.

Переходя от δ_2^{**} к δ_k^{**} путем расчета, использованного выше для случая обтекания одиночного профиля, получаем

$$p' = \rho v_{2\infty}^2 \left(\frac{v_{0\,\text{к}}}{v_{2\infty}}\right)^{3,2} \frac{\delta_\text{к}^{**}}{t\cos\beta_{2\infty}}; \tag{6.144}$$

$$p' = \rho v_{2\infty}^2 \left(\frac{v_{0\,\text{к}}}{v_{2\infty}}\right)^{3,2} \frac{\delta_\text{к}^{**}}{\cos\beta_{2\infty}}. \tag{6.145}$$

Учитывая очевидную связь между скоростью $v_{2\infty}$ и средней векторной скоростью v_m

$$v_{2\infty}\cos\beta_{2\infty} = v_m\cos\beta_m,$$

имеем

$$p' = \rho v_m^2\left(\frac{v_{0\,\text{к}}}{v_m}\right)^{3,2}\left(\frac{v_m}{v_{2\infty}}\right)_{\text{к}}^{0,2}\frac{\delta_{\text{к}}^{**}}{t\cos\beta_m}. \qquad (6.146)$$

За величину сопротивления можно принять проекцию силы R' на направление средней векторной скорости

$$D = R'\cos\beta_m = \rho v_m^2\left(\frac{v_{0\,\text{к}}}{v_m}\right)^{3,2}\left(\frac{v_m}{v_{2\infty}}\right)^{0,2}\delta_{\text{к}}^{**}, \qquad (6.147)$$

и тогда соответствующий коэффициент сопротивления

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho v_m^2 C} = 2\left(\frac{v_{0\,\text{к}}}{v_m}\right)^{3,2}\left(\frac{v_m}{v_{2\infty}}\right)^{0,2}\frac{\delta_{\text{к}}^{**}}{C}. \qquad (6.148)$$

Формула (6.148) практически совпадает с формулой (6.145) для одиночного профиля, так как множитель $\left(\frac{v_m}{v_{2\infty}}\right)^{0,2}$ мало отличается от единицы.

Расчеты по формуле (6.148) дают удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными для турбинных решеток в отличие от данных для компрессорных решеток, когда возникает отрыв пограничного слоя от поверхности лопатки.

Контрольный вопрос к §42

Что такое качество профиля?

§43. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СКАЧКА УПЛОТНЕНИЯ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Когда скорость потока газа становится сверхзвуковой, в потоке могут возникать скачки уплотнения, взаимодействующие с пограничным слоем. В области взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем скорость и температура существенно изменяются как вдоль, так и поперек потока, что может привести к отрыву пограничного слоя. Как и в случае дозвукового потока, отрыв обусловлен возрастанием давления в направлении течения.

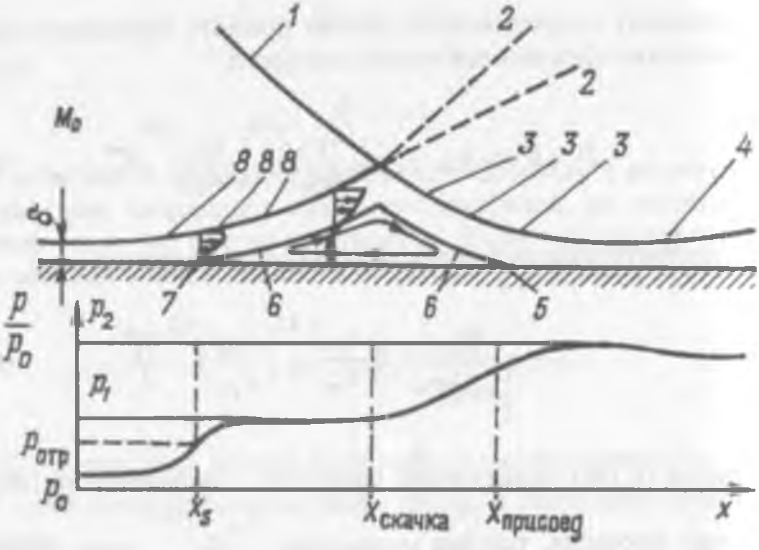


Рис. 175. Схема взаимодействия падающего скачка уплотнения с ламинарным пограничным слоем:
1 — падающий скачок; *2* — волны разрежения; *3*, *8* — волны сжатия; *4* — "горло"; *5* — присоединение; *6* — разделяющая линия тока; *7* — отрыв

На рис. 175 показана схема взаимодействия падающего скачка уплотнения с ламинарным пограничным слоем. В скачке уплотнения происходит скачкообразное изменение давления. Рост давления передается навстречу потоку по дозвуковой части пограничного слоя. Линии тока, отклоняющиеся от стенки, порождают в сверхзвуковой части пограничного слоя семейство волн сжатия, которые, распространяясь во внешний поток, оказывают влияние на форму и интенсивность скачка уплотнения вблизи области взаимодействия. Если скачок слабый, то течение газа в пограничном слое будет осуществляться с положительным продольным градиентом давления, но без отрыва пограничного слоя. Начиная с определенной интенсивности скачка уплотнения, продольный градиент давления приводит к отрыву пограничного слоя с образованием области возвратных течений. В зависимости от параметров течения поток газа после отрыва может снова присоединиться к стенке.

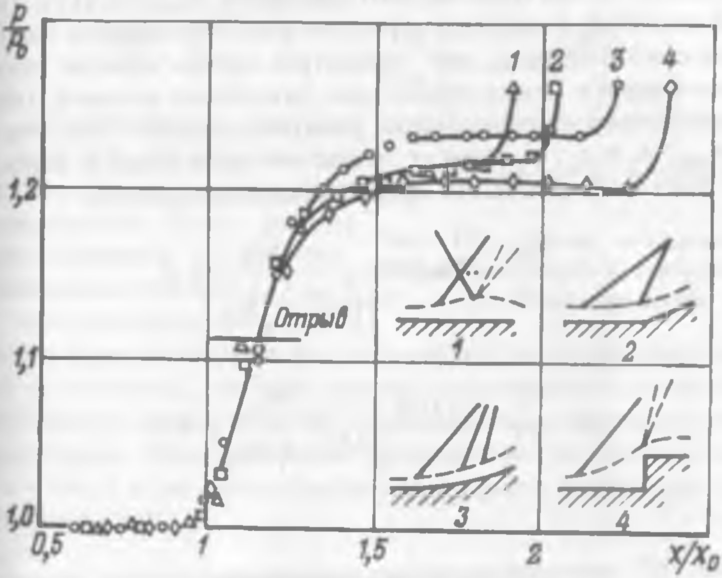


Рис. 176. Распределение давления в зоне отрыва при различных условиях взаимодействия; $M_0 = 2$, $Re_x = 2 \cdot 10^5$ (x – расстояние от передней кромки):

1 – падающий скачок; *2* – обтекание тупого угла; *3* – обтекание вогнутой стенки; *4* – течение перед уступом

Сразу за скачком уплотнения возникают волны разрежения, как при обтекании тупого угла. В месте присоединения поток направлен к стенке под некоторым углом и изменяет направление параллельно стенке через новый скачок уплотнения, который может вызывать новый отрыв пограничного слоя. Характер распределения давления в области взаимодействия с пограничным слоем существенно зависит от режима течения газа в пограничном слое (ламинарное или турбулентное).

В случае взаимодействия падающего скачка уплотнения с ламинарным пограничным слоем при приближении к точке отрыва давление на поверхности пластины увеличивается, достигая некоторого постоянного значения p_1 в области отрыва, и затем снова повышается до давления за падающим и отраженным скачками. В этой области находится место обратного присоединения потока к стенке. Обычно вводятся два безразмерных параметра $p_{отр} / p_0$ и p_1 / p_0, последний параметр называется критическим отношением давлений.

Интересно отметить, что параметры потока вблизи точки отрыва оказываются одинаковыми для различных условий, обусловливающих возникновение скачка уплотнения (рис. 176). Эти параметры $p_{отр} / p_0$ и p_1 / p_0 зависят только от чисел Маха и Рейнольдса и могут быть подсчитаны по приближенным формулам

$$\frac{p_{отр}}{p_0} = 1 + 0{,}57 \frac{\gamma M_0^2}{\left[\left(M_0^2 - 1\right) Re_x\right]^{1/4}}; \qquad (6.149)$$

$$\frac{p_1}{p_0} = 1 + 0{,}94 \frac{\gamma M_0^2}{\left[\left(M_0^2 - 1\right) Re_x\right]^{1/4}}, \qquad (6.150)$$

где $Re_x = \dfrac{v_0 x}{\nu}$.

На рис. 177 показана схема взаимодействия скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем при обтекании внутреннего тупого угла. В этом случае наблюдается непрерывное увеличение давления от p_0 в набегающем невозмущенном потоке до p_2 — давления за скачком уплотнения. Характерным является наличие точки перегиба, где давление p_1 равно давлению после первого косого скачка уплотнения. Следует отметить, что различие между критическим отношением давлений p_1 / p_0 и отношением давлений в точке отрыва $p_{отр} / p_0$ для турбулентного пограничного слоя получается меньше, чем для ламинарного.

Для определения относительных давлений p_1 / p_0 и $p_{отр} / p_0$ можно рекомендовать следующие формулы:

$$\frac{p_1}{p_0} = 1 + 0{,}2\frac{\gamma M_0^2}{\left(M_0^2 - 1\right)^{1/4}}; \quad (6.151)$$

$$\frac{p_{отр}}{p_0} = 1 + 0{,}15\frac{\gamma M_0^2}{\left(M_0^2 - 1\right)^{1/4}}. \quad (6.152)$$

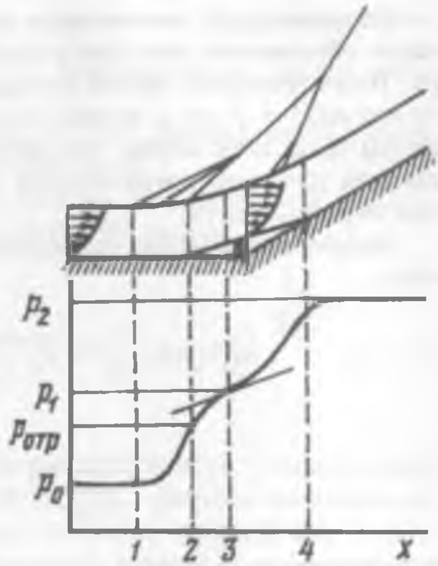


Рис. 177. Схема взаимодействия скачка уплотнения с турбулентным пограничным слоем

Из сопоставления формул (6.152) и (6.149) следует, что отрыв турбулентного пограничного слоя вызывается более интенсивными скачками уплотнения, чем ламинарного, и при $p_1 / p_0 <$ $< 1{,}3$ турбулентный пограничный слой совсем не отрывается от поверхности обтекаемого тела.

Следует отметить, что при отрыве пограничного слоя и образовании вихревой зоны в области взаимодействия скачка уплотнения с пограничным слоем давление непостоянно по сечению пограничного слоя, т.е. не удовлетворяется основное допущение теории пограничного слоя.

Контрольный вопрос к §43

Если скачок уплотнения приводит к отрыву ламинарного пограничного слоя, то произойдет ли отрыв, если пограничный слой будет турбулентным?

§44. ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В предыдущих параграфах мы рассматривали методы расчета плоских пограничных слоев, когда составляющие скорости зависят только от двух координат x и y. Рассмотрим развитие пограничного слоя на поверхности тела вращения (см. рис. 171).

Координату x, как и при плоском слое, будем отсчитывать вдоль обтекаемого контура, а координату y — по нормали к контуру. Тогда, учитывая малую толщину пограничного слоя, координату $r = r_0(x) + y \cos \alpha$ можно заменить радиусом поперечной кривизны r_0. В этом случае уравнение движения останется таким же, как для плоского пограничного слоя, и изменится только уравнение неразрывности.

Дифференциальные уравнения пограничного слоя запишутся в виде

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial (v_x r_0)}{\partial x} + \frac{\partial (v_y r_0)}{\partial y} = 0 \qquad (6.153)$$

при граничных условиях

$$v_x = v_y = 0 \ \text{(или } v_{\text{ст}}) \ \text{ при } y = 0;$$

$$v_x = v_0 \ \text{ при } y = \infty. \qquad (6.154)$$

Интегрируя уравнение движения по сечению пограничного слоя от $y = 0$ до $y = \infty$ и используя уравнение неразрывности, получаем интегральное соотношение импульсов для осесимметричного пограничного слоя

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Re}^{**}}{\mathrm{d}\bar{x}} + (1 + H)\frac{\mathrm{Re}^{**}}{v_0}\left(\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{r_0}\frac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}\bar{x}}\right) = \mathrm{Re}_L\left(\frac{C_f}{2} + \bar{j}_{\text{ст}}\right). \qquad (6.155)$$

По аналогии с выводом уравнения (6.64) для плоского пограничного слоя, осуществляя линеаризацию правой и левой частей уравнения (6.155), получаем

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{Re}^{**}}{\mathrm{d}\bar{x}} + \left(1 + H_{\text{кр}}\right)\mathrm{Re}^{**}\left(\frac{1}{v_0}\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}\bar{x}} + \frac{1}{r_0}\frac{\mathrm{d}r_0}{\mathrm{d}\bar{x}}\right) = \mathrm{Re}_L\left(\frac{C_f}{2} + \bar{j}_{\text{ст}}\right). \qquad (6.156)$$

В отличие от плоского случая в уравнении импульсов появляется дополнительный член $\frac{1}{r_0}\frac{dr_0}{d\bar{x}}$, зависящий от формы обтекаемого тела. При $r_0 \to \infty$ уравнение (6.156) преобразуется в уравнение (6.44) для плоского пограничного слоя.

Считая, что законы трения не зависят от поперечной кривизны, после интегрирования уравнения (6.156) имеем

$$Re^{**} = \frac{1}{\tilde{v}_0^{1+H_{кр}} R_x}\left[\frac{1+m}{2} B \operatorname{Re}_{01} \int_0^{\bar{x}} \tilde{v}_0^{1+(1+m)H_{кр}} (\psi + b) R_x^{1+m} d\bar{x}\right]^{\frac{1}{m+1}}. \quad (6.157)$$

Все последующие расчеты осесимметричного пограничного слоя ведутся по изложенным выше методам расчета плоского пограничного слоя. В общем случае, особенно при расчете пограничных слоев на тонких телах вращения, когда $\delta / r_0 \sim 1$, необходимо учитывать влияние поперечной кривизны.

Контрольный вопрос к §44

Чем отличается уравнение импульсов для пограничного слоя на осесимметричной поверхности от аналогичного уравнения для плоского течения?

§45. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНЫХ СТРУЙ

Выше мы рассматривали развитие турбулентных пограничных слоев вдоль поверхности обтекаемого тела. На практике приходится иметь дело с турбулентными пограничными слоями, образующимися в результате смешения струй, которые не ограничены твердыми стенками. Пограничный слой в этом случае называется струйным турбулентным пограничным слоем. Такие турбулентные слои возникают между двумя потоками жидкости, движущимися в одном направлении, но с разными скоростями (спутный поток), а также при истечении жидкости из отверстия в объем неподвижной жидкости, в следе за плохо обтекаемым телом и т.п. На рис. 178 показана схема истечения жидкости со скоростью v_0 в среду, движущуюся с постоянной скоростью $v_н$.

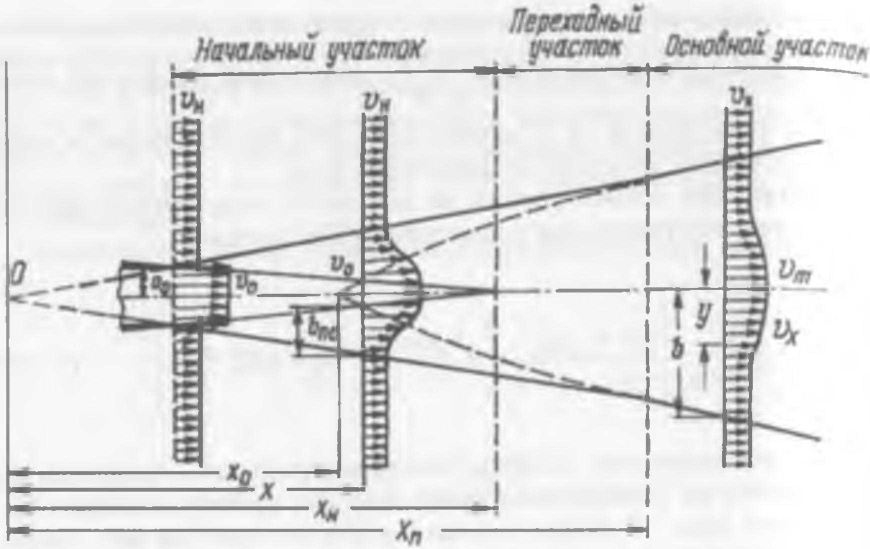


Рис. 178. Схема спутной струи

Часть струи, в которой сохраняется потенциальное, невозмущенное ядро течения, называется начальным участком. Поскольку давление в струе, как показывают эксперименты, сохраняется постоянным, то и скорость в потенциальном ядре течения сохраняется постоянной. При дальнейшем смешении толщина пограничного слоя продолжает увеличиваться с одновременным уменьшением осевой скорости по продольной координате. Этот участок струи называется основным. Между начальным и основным участками находится переходный участок. Когда скорость спутного потока равна нулю, такая струя называется затопленной. В этом случае составляющая скорости на внешней границе пограничного слоя равна нулю, а на внутренней — скорости истечения струи (для начального участка). В основном участке пограничный слой заполняет все сечение струи с максимальной скоростью на оси струи.

На рис. 179 показаны результаты измерения распределения продольных скоростей в турбулентной струе на различных расстояниях от выходного отверстия.

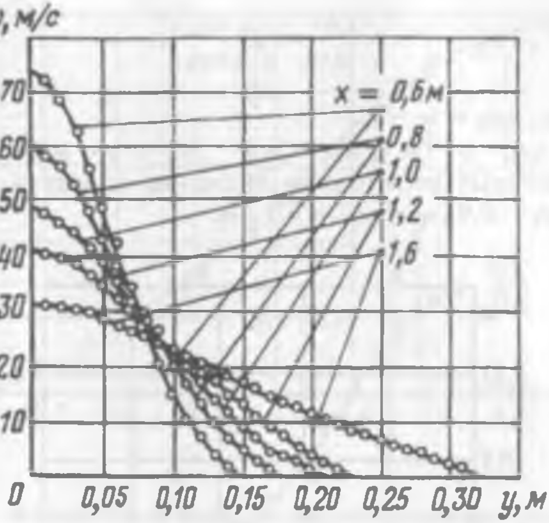


Рис. 179. Распределение продольных скоростей в затопленной струе

На этом рисунке видно, что по мере удаления от начала струи она становится шире, а скорость на оси трубки меньше. Если профили скоростей построить в безразмерных координатах (рис. 180), то они станут универсальными, не зависящими от длины струи. На этом рисунке по оси ординат наносится безразмерная скорость $\frac{v}{v_m}$, где v_m — максимальная скорость на оси струи, и по оси абсцисс — безразмерное расстояние от оси струи y/y_c, где y_c расстояние, на котором скорость равна половине осевой (в качестве линейного масштаба можно взять и ширину струи b). Из графика следует, что профили скоростей подобны друг другу на различных расстояниях от среза сопла.

Аналогичные результаты получаются и для плоской затопленной струи, и для плоской струи, истекающей в спутный поток (рис. 181). На этом рисунке профили скоростей обработаны в безразмерных координатах

$$\frac{\Delta v}{\Delta v_0} = f\left(\frac{\Delta y_c}{\Delta y_b}\right), \qquad (6.158)$$

где $\Delta v = v - v_н$; $\Delta v_0 = v_0 - v_н$.

Значения $\Delta y_c = y - y_{0,5}$; $\Delta y_b = y_{0.9} - y_{0.1}$ — это расстояние между точками, в которых избыточные значения скорости равны соответственно $\Delta v_1 = 0{,}9\Delta v_0$ и $\Delta v_2 = 0{,}1\,\Delta v_0$.

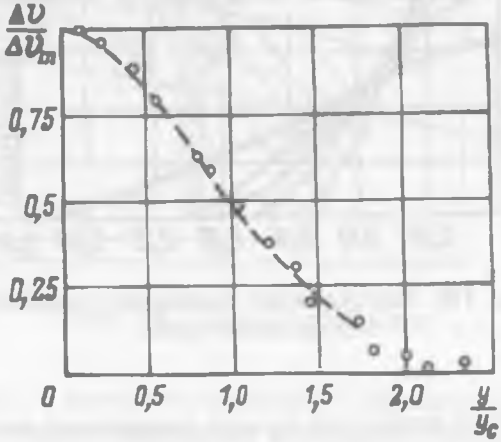


Рис. 180. Безразмерный профиль скоростей в струе (светлые кружки — опытные данные Фореталя и Шапиро)

Распределение скоростей по основному участку струи хорошо описывается формулой Шлихтинга

$$\frac{v - v_н}{v_m - v_н} = f(\eta) = \left(1 - \eta^{3/2}\right)^2, \qquad (6.159)$$

где $\eta = y / b$ — относительное расстояние до оси струи; b — ширина струи.

Для начального участка струи имеем

$$\frac{v_0 - v}{v_0 - v_н} = f(\eta_н) = \left(1 - \eta_н{}^{3/2}\right)^2, \qquad (6.160)$$

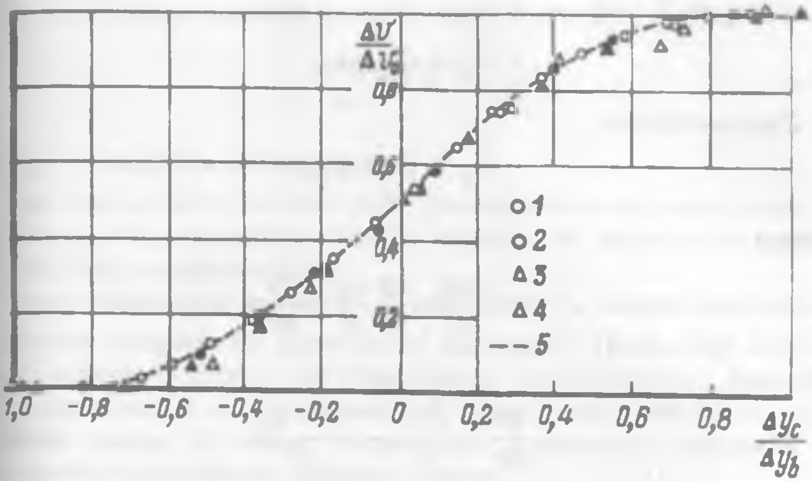


Рис. 181. Безразмерный профиль скорости в плоской спутной струе: *1* – по опытам Б.А.Жесткова и др.; $m = 0$; *2* – то же, $m = 0{,}23$; *3* – то же, $m = 0{,}43$; *4* – то же, $m = 0{,}64$; *5* – по опытам Альбертсона и др.

где

$$\eta_н = \frac{y - y_2}{b} = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2}. \qquad (6.161)$$

Для определения границ турбулентной струи принимаем, что скорость нарастания толщины струи пропорциональна пульсационной составляющей поперечной скорости

$$\frac{db}{dt} \sim v_y'.$$

Из полуэмпирической теории турбулентности Прандтля следует

$$v_y' \sim l\frac{dv_x}{dy}.$$

Из подобия скоростей в различных сечениях струи получаем

$$\frac{dv_x}{dy} \sim \frac{v_1 - v_2}{b}$$

и

$$l \,/\, b = \text{const}.$$

Следовательно,

$$v_y' \sim (v_1 - v_2);$$

отсюда

$$v_y' \sim \frac{db}{dt} = \frac{db}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{db}{dx}v$$

и

$$\frac{db}{dx} \sim \frac{|v_y'|}{v} \sim \frac{|v_1 - v_2|}{|v|}. \qquad (6.162)$$

В качестве характерной скорости удобно взять

$$v \approx 0{,}5\,(|v_1| + |v_2|). \qquad (6.163)$$

Тогда

$$\frac{db}{dx} \sim \frac{|v_1 - v_2|}{|v_1| + |v_2|}. \qquad (6.164)$$

Для двух беспредельных струй (см. рис. 178)

$$\frac{db}{dx} = \text{const} \quad \text{и} \quad b = \text{const} \cdot x,$$

где

$$\text{const} = C\frac{|v_1 - v_2|}{|v_1| + |v_2|}. \qquad (6.165)$$

Для затопленной струи ($v_2 = 0$)

$$b_3 = Cx. \qquad (6.166)$$

Тогда в общем случае

$$\frac{b}{b_3} = \frac{|v_1 - v_2|}{|v_1| + |v_2|}. \qquad (6.167)$$

Для основного участка круглой струи в спутном потоке имеем

$$\frac{db}{dx} = \pm C\frac{v_m - v_н}{v_m + v_н}, \tag{6.168}$$

где v_m — скорость на оси струи.

Так как скорость на оси струи уменьшается по длине струи, то $db / dx = \mathrm{var}$ и граница струи в отличие от начального участка должна быть криволинейной.

Закон изменения скорости на оси струи v_m можно получить из уравнения сохранения количества движения. Поскольку статическое давление в струе, как показывают эксперименты, практически неизменно и для затопленной струи равно давлению окружающей среды, то закон сохранения количества движения затопленной струи можно записать в виде

$$\int_0^m v_m \mathrm{d}m = \int_0^F \rho v_x^2 \mathrm{d}F = \mathrm{const}. \tag{6.169}$$

Для струи круглого сечения

$$v_m^2 \int_0^R \left(\frac{v_x}{v_m}\right)^2 r\,\mathrm{d}r = \mathrm{const}. \tag{6.170}$$

Так как

$$\frac{v}{v_m} = f\left(\frac{y}{R}\right) = \left(1 - \eta^{3/2}\right)^2,$$

то

$$v_m^2 R^2 \int_0^1 \left(\frac{v_x}{v_m}\right)^2 \bar{r}\,\mathrm{d}\bar{r} = \mathrm{const},$$

где

$$\bar{r} = \frac{r}{R} = \eta.$$

Значит,

$$v_m R = \text{const}$$

и в соответствии с уравнением (6.170)

$$v_m = \frac{\text{const}}{R} = \frac{\text{const}}{x}. \qquad (6.171)$$

Таким образом, скорость на оси круглой затопленной турбулентной струи изменяется обратно пропорционально длине струи.

Для плоской затопленной струи уравнение постоянства количества движения запишется в виде

$$v_m^2 b \int_0^1 \left(\frac{v}{v_x}\right)^2 \mathrm{d}\left(\frac{y}{b}\right) = \text{const}. \qquad (6.172)$$

Следовательно,

$$v_m = \text{const} / \sqrt{x}. \qquad (6.173)$$

Контрольный вопрос к §45

Чем отличаются структуры течения в плоских и осесимметричных турбулентных струях?

Глава 7. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

§46. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Нестационарные газодинамические процессы представляют собой наиболее сложные и комплексные физические явления, результаты которых — неустановившиеся течения. Параметры этих течений изменяются в пространстве и во времени и описываются нелинейными дифференциальными уравнениями с записью в дифференциальной форме краевых условий.

Задачи корректного описания неустановившихся (нестационарных, колеблющихся) потоков имеют практическое значение для расчета течений в двигателях и энергетических установках различных типов и различного назначения. Например, неустойчивость процессов горения в камерах сгорания, в ракетных, газотурбинных двигателях, плазменных установках, МГД-генераторах сопровождается колебаниями давления, температуры и скорости потока продуктов сгорания. Результатом неустойчивых режимов работы двигателя могут служить изменения потерь давления и коэффициентов теплоотдачи в проточной части, что приводит к повышению температуры стенок выше предельных значений и к их разрушению. Наряду с указанным неустойчивые (колебательные) процессы в топливных баках, трубопроводах подачи топлива могут приводить к существенному нарушению режима его хранения и подачи.

Теория нестационарных течений в настоящее время не дает точного решения системы нестационарных уравнений Навье — Стокса и в основном базируется на упрощенных моделях. Наиболее обобщенной математической моделью нестационарного трехмерного движения вязкой сжимаемой среды являются уравнения, приведенные в гл. 2.

При описании нестационарного течения в трубах, кольцевых и конических каналах целесообразно перейти к записи уравнений в цилиндрических координатах x, y, θ, (см. гл. 6.)

Из уравнений Эйлера, неразрывности и энергии в пренебрежении массовыми силами получена следующая система уравнений, характеризующая одномерное течение идеальной жидкости и называемая квазилинейной:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + v\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial t} + v\dfrac{\partial S}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Преобразуем систему к характеристической форме так, чтобы производные p, v и s были только по x и t. Из уравнения состояния $P = f(\rho, s)$ следует

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}.$$

Поскольку скорость звука $a^2 = \left(\dfrac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$, после преобразования уравнения состояния с учетом $s = f(x, t, v)$ имеем

$$\frac{\partial p}{\partial t} = v\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) +$$

$$+\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho\left(\frac{\partial s}{\partial t} + v\frac{\partial s}{\partial x}\right) = a^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x}\right). \tag{7.2}$$

Система уравнений (7.1) с учетом (7.2) переписывается в матричной форме

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + B\frac{\partial \bar{V}}{\partial x} = \bar{b},$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + v\dfrac{\partial p}{\partial x} + a^2\rho\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial t} + v\dfrac{\partial s}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

где $\bar{V}$ — вектор неизвестных параметров $\bar{V} = \begin{pmatrix} p \\ v \\ s \end{pmatrix}$; $\bar{b}$ — вектор правых частей системы уравнений, матрица

$$B = \begin{pmatrix} v & a^2\rho & 0 \\ 1/\rho & v & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}.$$

В общем случае $\bar{b} = \{b_1(x_1 t_1 v_1)_1\, b_2(x_1 t_1 v)_1\, b_3(x, t, v)\}$. Найдем собственные значения матрицы B путем решения уравнения

$$\det(B - \xi I) = 0,$$

где I — единичная матрица.

В нашем случае

$$\begin{vmatrix} v-\xi & a^2\rho & 0 \\ 1/\rho & v-\xi & 0 \\ 0 & 0 & v-\xi \end{vmatrix} = (v-\xi)^3 - a^2(v-\xi) =$$

$$= (v-\xi)\left[(v-\xi)^2 - a^2\right] = 0, \tag{7.3}$$

где $\xi_1 = v - a$, $\xi_2 = v + a$, $\xi_3 = v_1$, что показывает вещественность и однородность ξ_1, ξ_2, ξ_3.

37*

После деления уравнения неразрывности на ρ_a и преобразования уравнения движения имеем

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho_a}\left(\dfrac{\partial p}{\partial t} + v\dfrac{\partial p}{\partial x}\right) + a\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ a\dfrac{1}{\rho_a}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial t} + v\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{7.4}$$

Преобразуя систему путем сложения и вычитания составляющих уравнений, получаем

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho_a}\left[\dfrac{\partial p}{\partial t} + (v+a)\dfrac{\partial p}{\partial x}\right] + \left[\dfrac{\partial v}{\partial t} + (v+a)\dfrac{\partial v}{\partial x}\right] = 0, \\ \dfrac{1}{\rho_a}\left[\dfrac{\partial p}{\partial t} + (v-a)\dfrac{\partial p}{\partial x}\right] - \left[\dfrac{\partial v}{\partial t} + (v-a)\dfrac{\partial v}{\partial x}\right] = 0, \end{cases} \tag{7.5}$$

где выражения в квадратных скобках — это выражения в полных производных вдоль линий плоскости $x - t$, представляемых в виде

$$\frac{dx}{dt} = v + a; \quad \frac{dx}{dt} = v - a; \quad \frac{dx}{dt} = v \tag{7.6}$$

и называемых характеристиками.

В приведенной записи уравнения (7.6) — одномерные в характеристической форме, причем вдоль характеристик уравнения определяют дифференциальные соотношения

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v + a; & \dfrac{1}{\rho_a}dp + dv = 0, \\ \dfrac{dx}{dt} = v - a; & \dfrac{1}{\rho_a}dp - dv = 0, \\ \dfrac{dx}{dt} = v; & ds = 0, \end{cases} \tag{7.6, a}$$

где $\dfrac{dx}{dt} = v$ является траекторией и определяет в плоскости $x - t$ положение характеристик $\dfrac{dx}{dt} = v \pm a$, $s = \text{const}$ (процесс изоэнтропийный). Характер расположения характеристик для различных направлений движения жидкости представлен на рис. 182.

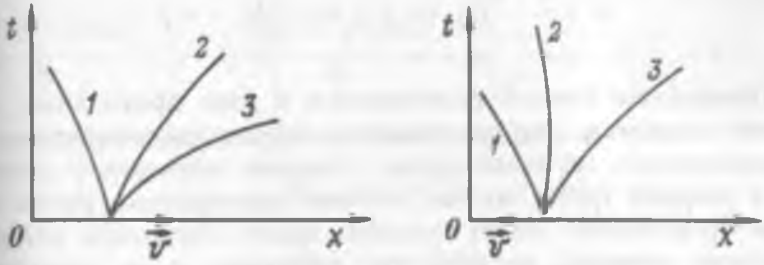


Рис. 182. Характеристики для различных направлений движения нестационарных потоков

При изоэнтропийном течении жидкости $\frac{p}{\rho^{\gamma}} = \frac{p_{н}}{\rho_{н}^{\gamma}}$, где $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$.

Это позволяет после преобразований (7.6) получить

$$f(p) = \frac{2}{\gamma - 1}(a - a_{н}) \quad \text{и} \quad \mathrm{d}f(p) = \mathrm{d}\left(\frac{2}{\gamma - 1}a\right)$$

и сделать вывод о соотношениях на первых двух характеристиках при условии $s = \mathrm{const}$

$$r_{+} = \frac{2}{\gamma - 1}a + v = \mathrm{const},$$

$$r_{-} = \frac{2}{\gamma - 1}a - v = \mathrm{const},$$

которые называют инвариантами Римана.

Обозначив характеристики через C_{+} и C_{-}, получим $(C_{+})\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v + a$; $(C_{-})\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v - a$. Инварианты Римана позволяют определить скорости звука и течения в точках пересечения характеристик

$$a = \frac{\gamma - 1}{\nu}(r_+ + r_-); \quad v = \frac{1}{2}(r_+ - r_-).$$

Инварианты Римана используются в ряде прикладных задач газовой динамики. Эти соотношения можно продемонстрировать на одномерных нестационарных течениях идеального рабочего тела в ударной трубе, так как решение приведенных ранее уравнений представляет собой сложную задачу. Расширим класс одномерного течения, полагая, что движущая среда электропроводна ($\sigma = \infty$) и приложено поперечное магнитное поле $\overline{B}(0{,}0, B_z)$.

Уравнение движения преобразуется к виду

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial\left[p + B^2 / (2\mu_m)\right]}{\partial x} = 0, \tag{7.7}$$

где $B_2/(2\mu)$ — магнитное давление.

Уравнение неразрывности записывается с учетом заданных условий в форме

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

и после преобразований с учетом умножения на выражение для скорости распространения поверхности слабого разрыва по частицам при изоэнтропийном течении

$$\frac{\mathrm{d}\left[p + B^2 / (2\mu_m)\right]}{\partial \rho} = a^2$$

имеет вид

$$\frac{\partial\left[p + B^2 / (2\mu_m)\right]}{\partial t} + v \frac{\partial\left[p + B^2 / (2\mu_m)\right]}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{7.8}$$

После преобразований уравнений (7.8) получаем

$$\frac{\partial\left[p+B^2/(2\mu_m)\right]}{\partial t}+(v+a)\frac{\partial\left[p+B^2/(2\mu_m)\right]}{\partial x}+\rho a\left[\frac{\partial v}{\partial x}+(v+a)\frac{\partial v}{\partial x}\right]=0,$$
$$\frac{\partial\left[p+B^2/(2\mu_m)\right]}{\partial t}+(v-a)\frac{\partial\left[p+B^2/(2\mu_m)\right]}{\partial x}-\rho a\left[\frac{\partial v}{\partial x}+(v-a)\frac{\partial v}{\partial x}\right]=0. \qquad (7.8,\ a)$$

Если ввести на плоскости x, t два направления

$$\mathrm{d}x=(v+a)\,\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}x=(v-a)\,\mathrm{d}t$$

и учесть, что уравнения (7.8 а) содержат производные только по одному направлению, то эти уравнения преобразуются к характеристическим:

$$\frac{\partial\left[p+B^2/(2\mu_m)\right]}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial\left[p+B^2/(2\mu_m)\right]}{\partial x}\mathrm{d}x+\rho_a\left[\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}t+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\right]=0.$$

Запись этих уравнений можно упростить:

$$\mathrm{d}\left[p+B^2/(2\mu_m)\right]=\pm\rho_a\mathrm{d}v.$$

За характеристические уравнения, как и ранее, принимается

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\pm a.$$

Характеристическое уравнение с учетом уравнения изоэнтропы приобретает форму

$$\mathrm{d}v\pm\frac{a}{\rho}\mathrm{d}\rho=0,$$

и после интегрирования получаем $v\pm\int\limits_0^\rho\frac{a}{\rho}\mathrm{d}\rho=2r_\pm$, где $r_\pm$ — инварианты Римана.

Величины $r_\pm$ постоянны на двух характеристиках C_+ и C_-, определяемых выражениями для характеристических направлений. С помощью соотношения

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + k^2 b^{n-2} = b^2(1 + \alpha),$$

где $\alpha = k^2 b^{n-2}$, преобразуем так:

$$\int_0^\rho \frac{a}{\rho}\,\mathrm{d}\rho = \frac{2}{\gamma - 1}\int_0^b \sqrt{\left(1 + k^2 y^{n-2}\right)}\mathrm{d}y,$$

где $\gamma = \dfrac{n+2}{2} = \dfrac{c_p}{c_V}$.

Обозначим $x = y/b$, и тогда инварианты Римана представляются в форме

$$r_\pm = \frac{v}{2} \pm \frac{b}{\gamma - 1} I_n(b),$$

где $I_n(b) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\left(1 + \alpha x^{n-2}\right)}\mathrm{d}x.$

При $\alpha = 0$, что соответствует отсутствию магнитного поля, инварианты Римана преобразуются в традиционную форму

$$r_\pm = \frac{v}{2} \pm \frac{b}{\gamma - 1}.$$

Зависимость интеграла $I_n(\alpha)$ от $\sqrt{\alpha}$ при $\gamma = \dfrac{5}{7}$ $(n = 5)$ и $\gamma = \dfrac{5}{3}$ $(n = 3)$ представлена на рис. 183.

Для течения сжимаемой невязкой электропроводной жидкости $(\sigma = \infty)$ в поперечном магнитном поле $B(0,\ 0,\ B_z)$ уравнение движения записывается в форме

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{C^2}{B^2}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{2}{\gamma - 1}b\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)}b^2\frac{\partial s}{\partial x} = 0,$$

где s — энтропия.

Уравнения неразрывности, энергии и вмороженности магнитного поля имеют соответственно вид

$$\frac{\partial b}{\partial t}+v\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{æ-1}{2}b\frac{\partial v}{\partial x}=0;$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}+v\frac{\partial s}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial B}{\partial t}+v\frac{\partial B}{\partial x}+B\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

Характеристиками приведенной системы являются

$$\frac{dx}{dt}=v;\qquad \frac{dx}{dt}=v+a;\qquad \frac{dx}{dt}=v-a.$$

Полагая течение изоэнтропийным, получаем каноническую форму записи приведенной системы уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial x}{\partial \beta}-(v+a)\dfrac{\partial t}{\partial \beta}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial \alpha}-(v-a)\dfrac{\partial t}{\partial \alpha}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial \xi}-v\dfrac{\partial t}{\partial \xi}=0,\\[2mm] \left(b^2+a^2\right)\dfrac{1}{B}\dfrac{\partial B}{\partial \beta}-a\dfrac{\partial v}{\partial \beta}-\dfrac{2}{\gamma-1}b\dfrac{\partial b}{\partial \beta}=0,\\[2mm] \left(b^2-a^2\right)\dfrac{1}{B}\dfrac{\partial B}{\partial \alpha}+C\dfrac{\partial v}{\partial \alpha}-\dfrac{2}{\gamma-1}b\dfrac{\partial b}{\partial x}=0,\\[2mm] \dfrac{1}{B}\dfrac{\partial B}{\partial \xi}-\dfrac{2}{(\gamma-1)b}\dfrac{\partial b}{\partial \xi}=0\end{cases}\tag{7.9}$$

где α, β, ξ — характеристические параметры.

Система решается методом конечных разностей. Из последнего уравнения системы следует постоянство $\dfrac{B}{b^{\frac{2}{\gamma-1}}}=A$ вдоль траектории частицы, и для невозмущенного состояния величина A постоянна во всем потоке и в потоке, образуемом простой волной. Таким образом, в невозмущенном состоянии и в простой волне уравнение системы записывается в форме

$$\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{2}{(\gamma - 1)b} a \frac{\partial b}{\partial \beta} = 0,$$

$$-\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{2}{(\gamma - 1)b} a \frac{\partial b}{\partial \alpha} = 0.$$

Поскольку $B = r_1 b^{2/(\gamma - 1)}$, $\rho = r_2 b^{2/(\gamma - 1)}$ и r_1, r_2 — const, то скорость волны Альфвена определится уравнением

$$C^2 = \frac{r_1^2}{\mu r_2} b^{\frac{2}{\gamma - 1}} = k b^{\frac{2}{\gamma - 1}}$$

и, таким образом, $a^2 = b^2 \left[1 + k^{\frac{2(2-\text{æ})}{\gamma - 1}} \right]$.

При рассмотрении одноатомного газа с $\gamma = 5/3$ после интегрирования уравнений для $\frac{\partial v}{\partial \beta}$ и $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$ получим

$$\begin{cases} \dfrac{v}{2} + (1 + kb)^{3/2} \dfrac{1}{k} = \dfrac{v}{2} + \left(\dfrac{a}{b}\right)^3 \dfrac{1}{k} = \alpha, \\ -\dfrac{v}{2} + (1 + kb)^{3/2} \dfrac{1}{k} = -\dfrac{v}{2} + \left(\dfrac{a}{b}\right)^3 \dfrac{1}{k} = \beta, \end{cases} \tag{7.10}$$

где α и β можно рассматривать как обобщенные инварианты Римана.

На каждой характеристике $\frac{dv}{dx} = v + a$ простой центрированной волны с центром в начале координат значения v, b и B постоянны, и эти характеристики в плоскости x, t — прямолинейны. Таким образом, волна может изображаться уравнениями

$$x = (v + a)t;$$

$$\beta = \beta_0 = (1 + ka_0)^{3/2}\ \frac{1}{k},$$

где a_0 — скорость звука в точке торможения.

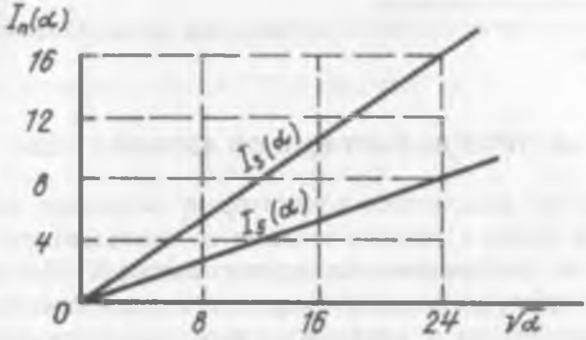


Рис. 183. К рассмотрению интеграла I_n, входящего в инварианты Римана

Из уравнений (7.10) следует система

$$v = \alpha - \beta_0;$$

$$kb = \left[k\left(\frac{\alpha + \beta_0}{2}\right)\right]^{2/3} - 1;$$

$$a = b\left[k\left(\frac{\alpha + \beta_0}{2}\right)\right]^{1/3} = \frac{\alpha + \beta_0}{2} - \left[k\left(\frac{\alpha + \beta_0}{2}\right)\right]^{1/3};$$

$$\frac{3\alpha}{2} - \frac{\beta_0}{2} - \left[k\left(\frac{\alpha + \beta_0}{2}\right)\right]^{1/3} \frac{1}{k} = \frac{x}{t},$$

отражающая изменение параметров потока в простой волне в функции x и t.

Контрольные вопросы к §46

1. Какие уравнения необходимо использовать для описания нестационарных течений?

2. Указать характеристическую форму записи уравнений нестационарного течения.

3. Объяснить, как используются инварианты Римана для расчета нестационарных течений.

4. Объяснить, как проявляется влияние магнитного поля на нестационарное течение электропроводной жидкости.

5. Объяснить физический смысл и изображение волны Альфвена в нестационарном течении

§47. ТЕЧЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОЙ ЖИДКОЙ СРЕДЫ

В §3 кратко рассмотрены некоторые основные особенности разреженной среды в режиме течения со скольжением, а также в переходном и свободномолекулярном режимах. По мере роста разрежения структура жидкой среды все больше приобретает дискретный характер, и в свободномолекулярном режиме течения число Кнудсена становится равным более 10.

Поведение разреженных газов исследуется методами молекулярно-кинетической теории, из которой, в частности, следует, что коэффициент кинематической вязкости

$$\nu \approx \frac{1}{2} l \bar{c}, \tag{7.11}$$

где $\bar{c}$ — средняя скорость теплового (хаотического) движения молекул, определяемая далее по формуле (7.21). Тогда из (7.11) длина свободного пробега молекулы l равна

$$l = 1{,}26 \frac{\nu}{a} \sqrt{\gamma}.$$

В результате критерий Кнудсена

$$\mathrm{Kn} = \frac{l}{L} = 1{,}26 \frac{\mathrm{M}}{vL / \nu} \sqrt{\gamma}. \tag{7.12}$$

В области течения со скольжением, где Re >> 1, за характерный размер L задачи можно брать толщину пограничного слоя δ. Согласно оценкам теории пограничного слоя Прандтля,

$$\frac{\delta}{x} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}},$$

где $\mathrm{Re} = \frac{vx}{\nu}$, x — длина вдоль потока.

В случае, когда $L \sim \delta$, из (7.12) следует:

$$\mathrm{Kn} \sim \frac{\mathrm{M}}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}\sqrt{\gamma}.$$

В режиме свободномолекулярного течения, где Re << 1, за характерный размер задачи следует брать длину обтекаемого тела (или диаметр трубы), так как понятие толщины пограничного слоя в этих условиях течения теряет свой смысл. Тогда в случае, когда $L \sim x$, из (7.12) следует:

$$\mathrm{Kn} \sim \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{Re}_x}\sqrt{\gamma}.$$

Особенности течения газа в свободномолекулярном режиме

При свободномолекулярном режиме течения из-за значительной удаленности молекул друг от друга процессом изменения их количества движения (энергообменом) за счет межмолекулярных столкновений можно пренебречь в сравнении с энергетическим процессом их взаимодействия с твердой поверхностью (стенкой). Это означает, в частности, что падающий на стенку и отраженный от стенки потоки молекул можно рассматривать как энергетически независимые.

В свободномолекулярном режиме течения отсутствуют пограничный слой и ударные волны, и механизм обтекания потоком тела отличается от механизма обтекания тела сплошной средой. Для определения таких величин, как нормальное давление, напряжение трения, тепловой поток и т.п., необходимо знать законы отражения дискретных молекул от стенки (законы их ударного взаимодействия со стенкой). Этот режим течения характеризуется малыми значениями числа Рейнольдса.

В молекулярно-кинетической теории газов динамическое поведения частиц анализируется при помощи понятия фазового пространства. Оно представляет собой зависящую от времени совокупность геометрического пространства и пространства импульсов (скоростей). Задание величин координат и импульсов в момент времени определяет фазовую точку в таком пространстве. Совокупность таких точек называют ансамблем, и их поведение исследуется методами статистической механики.

Основными инструментами исследования здесь являются: функция распределения $f(\bar{r},\bar{c},t)$, зависящая от координат молекулы $\bar{r}(x,y,z)$, ее хаотической тепловой скорости $\bar{c}(c_x,c_y,c_z)$ и времени t, и кинетическое уравнение Больцмана, которому эта функция подчиняется. Зная конкретный вид функции распределения f, можно рассчитать макроскопические средние величины, характеризующие состояние газа и идущие в нем процессы (нормальное давление, напряжение трения, коэффициенты теплопроводности, диффузии и т.п.), как средний результат действия всех молекул газа.

Функция распределения f выделяет в данный момент времени t из общего числа частиц n в единице объема число частиц, имеющих скорости, заключенные в малом интервале $(\bar{c};\bar{c}+\Delta\bar{c})$, и имеющих координаты внутри малого интервала $\bar{r}(\bar{r};\bar{r}+\Delta\bar{r})$ (рис. 184). Рассмотрим элементарный объем $\mathrm{d}V_L = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, расположенный в физическом пространстве в момент времени t, и элементарный объем $\mathrm{d}V_c = \mathrm{d}c_x\,\mathrm{d}c_y\,\mathrm{d}c_z$ в пространстве тепловых хаотических скоростей, т.е. скоростей молекул относительно среднемассового движения газа как целого.

Вероятное число молекул $\mathrm{d}N$, находящихся в момент времени t около точки $\bar{r}(x,y,z)$ физического элементарного объема $\mathrm{d}V_L$ и имеющих в этот момент тепловые скорости в диапазоне значений их проекций $(c_x;\ c_x+\mathrm{d}c_x)$, $(c_y;\ c_y+\mathrm{d}c_y)$, $(c_z,\ c_z+\mathrm{d}c_z)$, пропорционально произведению этих элементарных объемов $dV_L\, dV_c$ с коэффициентами пропорциональности (nf), где n — концентрация частиц в объеме dV_L, равно:

$$dN = nf(\vec{r}, \vec{c}, t)\, dV_L\, dV_c. \tag{7.13}$$

Кинетическое уравнение Больцмана для функции распределения f определяет ее изменение в фазовом пространстве за счет столкновения частиц:

$$\frac{d}{dt} = (nf_1) = I, \tag{7.14}$$

где I — интеграл столкновений.

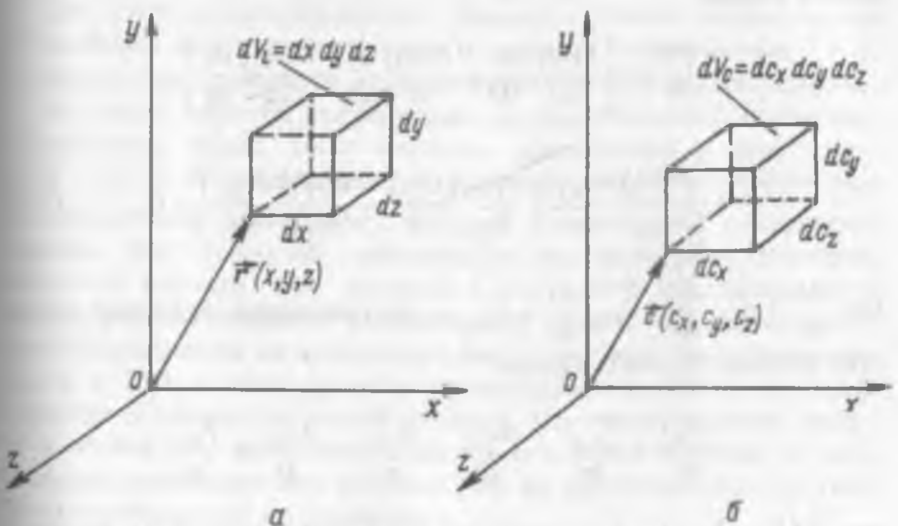


Рис. 184. К определению понятия фазового пространства:
а – геометрическое пространство; *б* – пространство скоростей

Уравнение (7.14) описывает поведение выделенной для рассмотрения из общей массы всех частиц одной, фиксированной группы частиц, характеризуемой своим некоторым энергетическим уровнем и обозначаемой индексом 1. Изменение числа молекул этого класса в элементе объема фазового пространства dV_l dV_c может происходить как за счет входа и выхода молекул через грани объема dV_L физического пространства, так и за счет убыли и прибыли молекул этого класса в объеме dV_c пространства импульсов вследствие столкновений молекул первой группы с молекулами, обозначенными индексом 2.

Таким образом, кинетическое уравнение Больцмана для функции распределения f_1 рассматриваемой группы молекул описывает изменение этой функции во времени как результат одновременного движения частиц газа в пространстве координат и в пространстве тепловых скоростей, действия на частицы внешних сил и их взаимных столкновений.

Раскрывая полную производную, уравнение (7.14) можно записать в виде

$$\frac{\partial(nf_1)}{\partial t}+\left[\frac{\partial(nf_1)}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial(nf_1)}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial(nf_1)}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right]+$$

$$+\left[\frac{\partial(nf_1)}{\partial c_{x,1}}\frac{dc_{x,1}}{dt}+\frac{\partial(nf_1)}{\partial c_{y,1}}\frac{dc_{y,1}}{dt}+\frac{\partial(nf_1)}{\partial c_{z,1}}\frac{dc_{z,1}}{dt}\right]=I, \qquad (7.15)$$

где $\frac{dx}{dt}=c_{x,1}$; $\frac{dy}{dt}=c_{y,1}$; $\frac{dz}{dt}=c_{z,1}$ — составляющие тепловых скоростей молекул первого класса:

$$\frac{dc_{x,1}}{dt}=\frac{F_{x,1}}{m}; \quad \frac{dc_{y,1}}{dt}=\frac{F_{y,1}}{m}; \quad \frac{dc_{z,1}}{dt}=\frac{F_{z,1}}{m}.$$

где $\bar{F}_1\left(F_{x,1};F_{y,1};F_{z,1}\right)$ — внешняя сила, действующая на молекулу массой m.

Первый член уравнения (7.15) характеризует скорость изменения функции распределения f_1 молекул первого класса с течением времени. Члены в первой скобке (конвективные члены) учитывают скорость изменения f_1 в результате движения частиц первого класса в пространстве. Члены во второй скобке определяют изменение функции f_1 под действием внешних сил.

Интеграл столкновений в правой части определяется выражением

$$I = \iint n^2(f_1'f_2' - f_1 f_2)\sigma^2 \Omega \cos\psi \, d\chi \, dV_{L,2}. \qquad (7.16)$$

Интеграл определяет скорость изменения функции f_1 за счет столкновений частиц и зависит как от функции распределения, так и от характера взаимодействия между частицами. Здесь f_1, f_2, f_1', f_2' — функции распределения для молекул двух классов до столкновения (без штриха) и после него (со штрихом); σ — сечение взаимодействия молекул; $\Omega = [(c_{x,2} - c_{x,1})^2 + (c_{y,2} - c_{y,1})^2 + (c_{z,2} - c_{z,1})^2]^{1/2}$ — относительная скорость сталкивающихся молекул; ψ — угол между вектором $\bar{\Omega}$ и линией соударения молекул; $d\chi$ — элементарный телесный угол; $dV_{L,2} = dc_{x,2}\, dc_{y,2}\, dc_{z,2}$.

При свободномолекулярном течении согласно определению солкновения молекул отсутствуют и интеграл столкновений $I = 0$. В общем случае равенство нулю интеграла столкновений I означает, что число молекул, выбывающих из первого класса после взаимодействия, равно числу молекул, приходящих в этот класс ($f_1'f_2' = f_1 f_2$). Возникает однородное стационарное состояние газа (максвелловское равновесие), которое определяется следующим образом. Это — случай равновесного распределения тепловых скоростей молекул, при котором в результате столкновений в каждом рассматриваемом элементарном объеме dV_l геометрического пространства не изменяется число молекул газа, принадлежащих в этот момент времени элементарному объему dV_c пространства тепловых скоростей молекул. Постоянство числа молекул в объеме dV_L допускает их вход в этот объем и выход из него в равном количестве при условии, что их распределение по скоростям в объеме dV_c не изменяется.

Функция распределения f в этом случае стационарна, не зависит от координат $\bar{r}$, времени t и внешних сил $\bar{F}$ и называется функцией распределения Максвелла (рис. 185). Для одноатомного идеального равновесного газа она имеет вид

$$f = \left(\frac{m}{2k\pi T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mc^2}{2kT}\right), \qquad (7.17)$$

где k — постоянная Больцмана ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/к).

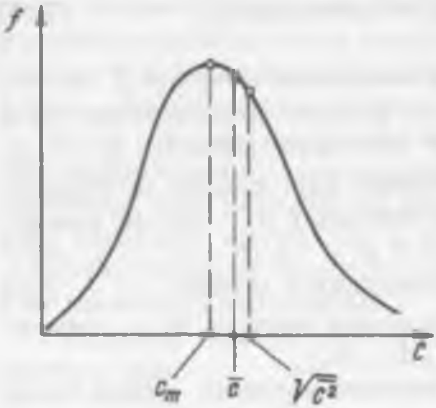


Рис. 185. Кривая функции распределения Максвелла

Дискретность расположения молекул в пространстве и значительная длина l их свободного пробега не исключают, однако, введения в рассмотрение специальным образом определенных макроскопических (средних) величин даже в режиме свободно-молекулярного течения, поскольку концентрация частиц все еще достаточно велика. Например, на высоте 150 км над Землей длина свободного пробега молекулы $l = 18$ м, и концентрация частиц $n \approx 2{,}5 \cdot 10^{11}$ см$^{-3}$.

Понятие среднего макроскопического значения $\overline{Q}$ какой-либо физической величины, свойства которой аддитивны массе молекул и являются функцией скорости и координат, вводится следующим образом (черта над величиной означает среднее значение).

В прямоугольной системе координат можно записать очевидное тождество

$$\overline{Q}mnV_L = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Qmnf\, dV_L dV_c,$$

где

$$mn = \rho \tag{7.18}$$

определяется как плотность в рассматриваемой точке потока.

В силу постоянства массы элемента газа $dM = mndV_L$ получаем, что среднее значение величины равно:

$$\overline{Q} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Qf dV_c. \tag{7.19}$$

Рассмотрим определение характерных скоростей молекул, используемых при описании движения газа.

Среднемассовая скорость $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ движения молекул — это скорость упорядоченного движения газа как единого целого относительно неподвижной системы координат.

Тепловая скорость $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$ движения молекул — это скорость их индивидуального хаотического движения относительно газа, движущегося как единое целое со своей среднемассовой скоростью.

Истинная (полная) скорость $\vec{v}'(v'_x, v'_y, v'_z)$ движения молекул — это скорость их движения относительно неподвижной системы координат

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{c}. \tag{7.20}$$

Средняя скорость теплового (хаотического) движения молекул определяется по формуле (7.11) и согласно кинетической теории равна:

$$\bar{c} = 2\sqrt{\frac{2RT}{\pi}} = a\sqrt{\frac{8}{\pi\gamma}}, \tag{7.21}$$

где a — местная скорость звука; γ — показатель адиабаты.

Наиболее вероятная скорость c_m теплового движения молекул находится из условия максимального значения функции распределения f и определяется формулой

$$c_m = \sqrt{2RT}. \tag{7.22}$$

Среднеквадратичная скорость $\sqrt{\overline{c^2}}$ теплового движения молекул находится из условия равновероятности хаотического движения молекул по всем направлениям

$$\frac{\overline{c^2}}{3} = \overline{c_x^2} = \overline{c_y^2} = \overline{c_z^2}$$

и определяется формулой

$$\overline{c^2} = 3RT. \qquad (7.23)$$

Между скоростями существует зависимость:

$$\sqrt{\overline{c^2}} = \bar{c}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3\pi}{2}} = c_m\sqrt{\frac{3}{2}}, \qquad (7.24)$$

т.е. $$\sqrt{\overline{c^2}} = 1{,}09\bar{c} = 1{,}23c_m.$$

Очевидно, что все эти скорости — порядка величины скорости звука a.

С учетом формулы (7.12) выражение (7.17) для функции распределения Максвелла принимает вид

$$f = \left(\pi c_m^2\right)^{-3/2} \exp\left(-\frac{c^2}{c_m^2}\right). \qquad (7.25)$$

Изучим вопрос отражения молекул от твердой поверхности. Различают два идеализированных способа энергетического взаимодействия движущихся молекул со стенкой.

В случае абсолютно гладкой стенки происходит зеркальное отражение молекулы, при котором абсолютное значение скорости ударяющейся молекулы не изменяется. Остаются неизменными значения как нормальной, так и тангенциальной (касательной) составляющей скорости (рис. 186, *а*), однако нормальная составляющая скорости после отражения меняет свой знак. Температура молекулы не изменится. Вероятность зеркального отражения увеличивается с уменьшением угла падения молекулы на стенку.

При шероховатой стенке может происходить полностью диффузное отражение. В этом случае падающая молекула полностью адсорбируется стенкой, т.е. задерживается на ней и теряет свою первоначальную скорость. После этого, испытав энергетический обмен со стенкой, молекула покидает стенку, реэмитируется. При полностью диффузном отражении скорости отраженных молекул соответствуют их максвелловскому распределению при температуре поверхности стенки.

Для полностью диффузного отражения равновероятны все направления отраженного движения молекулы относительно нормали к поверхности (рис. 186, *б*), и поэтому средняя тангенциальная составляющая скорости молекул в этом случае равна нулю. Касательное напряжение между газом и поверхностью не возникает.

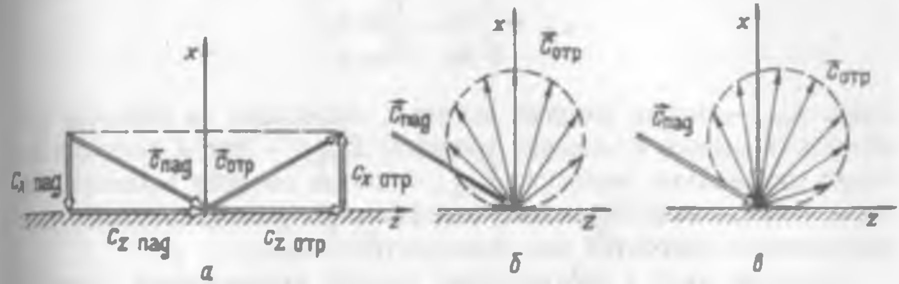


Рис. 186. Различные способы отражения молекулы от стенки при их тепловом движении:
а – зеркальное отражение; *б* – годограф скоростей в случае диффузного отражения; *в* – то же, в случае реального отражения

При реальном взаимодействии потока падающих молекул со стенкой годограф средней скорости отраженных молекул оказывается несимметричным относительно нормали к поверхности за счет наличия небольшой (несколько процентов) доли зеркально отраженных молекул (рис. 186, *в*).

Для характеристики рассматриваемого энергетического взаимодействия молекул и стенки вводят ряд коэффициентов, значения которых определяют эмпирическим путем.

Коэффициентом диффузного рассеяния (долей диффузно отраженных молекул) называют отношение массы диффузно отраженных молекул к массе падающих на стенку молекул:

$$\sigma = \frac{M_{отр.д}}{M_{пад}}. \qquad (7.26)$$

Величина $(1 - \sigma)$ представляет собой долю зеркально отраженных молекул.

Коэффициент термической аккомодации (обмена энергией) представляет собой отношение величины фактического изменения энергии молекул при их отражении от стенки к величине предельно возможного изменения их энергии, когда температура молекул становится равной температуре стенки:

$$\alpha_E = \frac{E_{\text{пад}} - E_{\text{отр.р}}}{E_{\text{пад}} - E_{\text{отр.д}}}.$$

Здесь $E_{\text{пад}}$ — поток энергии молекул, падающих на единицу поверхности стенки в единицу времени; $E_{\text{отр.р}}$ — поток энергии реально отраженных молекул; $E_{\text{отр.д}}$ — поток энергии молекул, которые отразились полностью диффузно (с максвелловским распределением скоростей при температуре стенки).

Значение $\alpha_E = 1$ соответствует полной аккомодации (приспособляемости температуры молекулы к температуре стенки). В этом случае нет зеркально отраженных молекул и все они отражаются диффузно: $E_{\text{отр.р}} = E_{\text{отр.д}}$.

Значение $\alpha_E = 0$ соответствует полностью зеркальному отражению. В этом случае обмена энергией между молекулами и стенкой нет: $E_{\text{пад}} = E_{\text{отр.р}}$.

Для газов с малой молекулярной массой $\alpha E \approx 0{,}4...0{,}5$, для остальных газов $\alpha_E \approx 0{,}90...0{,}95$.

Значение величины α_E зависит от сорта газа (молекулы), молекулярной массы, температуры стенки, угла падения молекулы на стенку, состояния поверхности, скорости молекулы.

Коэффициенты аккомодации для переноса количества движения (коэффициенты обмена количеством движения) соответственно для нормальной и тангенциальной составляющих количества движения молекул (рис. 187) записываются в виде

$$\alpha_p = \frac{I_{x\,\text{пад}} - I_{x\,\text{отр.р}}}{I_{x\,\text{пад}} - I_{x\,\text{отр.д}}}; \qquad (7.27)$$

$$\alpha_\tau = \frac{I_{\tau\,\text{пад}} - I_{\tau\,\text{отр.р}}}{I_{\tau\,\text{пад}} - I_{\tau\,\text{отр.д}}}. \qquad (7.28)$$

Здесь $I_{x\,\text{пад}}$; $I_{\tau\,\text{пад}}$ — соответственно нормальная и тангенциальная составляющие количества движения молекул, падающих на единицу поверхности в единицу времени; $I_{отр.р}$ — то же, для реально отразившихся молекул; $I_{отр.д}$ — то же, для молекул, которые отразились полностью диффузно, причем согласно определению $I_{z\ отр.д} = 0$.

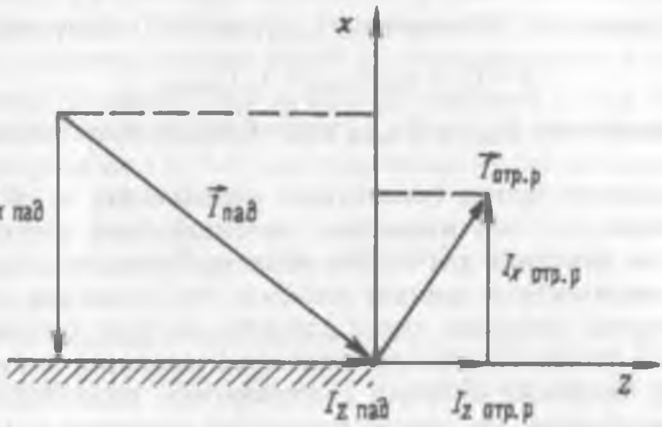


Рис. 187. Схема обмена количеством движения при взаимодействии молекулы со стенкой

При полностью диффузном отражении $\alpha_p = \alpha_\tau = 1$.

При зеркальном отражении ($\alpha_p = \alpha_\tau = 0$)

$$I_{x\ пад} = |I_{x\ отр.р}|;\ I_{z\ пад} = I_{z\ отр.р}.$$

Коэффициенты обмена количеством движения α_p и α_τ в общем случае не равны между собой.

Определения понятий "давление" и "напряжение трения" при течении газа в свободномолекулярном режиме формулируются следующим образом.

Давление (нормальное напряжение) p — это суммарное изменение составляющей количества движения в нормальном к поверхности направлении для потока молекул, соударяющихся с единицей поверхности за единицу времени. Это изменение секундного количества движения слагается из двух составляющих: из секундного количества движения падающих $I_{x\ пад}$ и из секундного количества движения реально отраженных $I_{x\ \text{отр.р}}$ молекул, т.е. от воздействия на единицу поверхности эффекта от их удара и от их отталкивания. В результате давление

$$p = I_{x\ \text{пад}} + I_{x\ \text{отр.р}}. \qquad (7.29)$$

Подставляя в (7.29) величину $I_{x\ \text{отр.р}}$ из (7.27), получаем

$$p = (2 - \alpha_p)\, I_{x\ \text{пад}} + \alpha_p\, I_{x\ \text{отр.д}}, \qquad (7.30)$$

где составляющие $I_{x\ \text{пад}}$ и $I_{x\ \text{отр.д}}$ могут быть рассчитаны теоретически.

Напряжение трения (касательное напряжение) на обтекаемой поверхности τ — это изменение тангенциальной составляющей количества движения для потока молекул, соударяющихся с единицей поверхности за единицу времени. Это изменение секундного количества движения также слагается из двух составляющих. Первая — потеря секундного количества движения потока молекул $I_{\zeta\ \text{пад}}$, падающих на стенку в направлении, касательном к единице поверхности, т.е. потеря количества движения в результате торможения молекул поверхностью. Вторая составляющая — это секундное количество движения $I_{\zeta\ \text{отр.р}}$ в касательном к единице поверхности направлении для потока молекул, отраженных стенкой и создающих эффект отталкивания поверхности.

В результате напряжение трения равно:

$$\tau = I_{\zeta\ \text{пад}} - I_{\zeta\ \text{отр.р}}. \qquad (7.31)$$

Подставляя в (7.31) величину $I_{\zeta\ \text{отр.р}}$ из (7.28), получаем

$$\tau = \alpha_\tau I_{\zeta\ \text{пад}}, \qquad (7.32)$$

где составляющая $I_{\zeta\ \text{пад}}$ может быть рассчитана теоретически.

С ростом коэффициента α_p давление p падает, так как уменьшается число молекул, отражающихся зеркально (уменьшается эффект "реактивной силы" потока молекул). С ростом коэффициента α_τ напряжение трения τ растет, ибо растет число тормозящихся молекул.

Таким образом, определение величин нормального давления p и касательного напряжения τ сводится к расчету составляющих секундного количества движения падающих и отраженных от стенки молекул. Для определения этих величин необходимо знать общее число молекул $N_{\text{пад}}$, ударяющихся в единичную площадку за единицу времени. С этой целью рассмотрим неподвижную единичную поверхность площадью $dA = 1$ м^2, расположенную для определенности перпендикулярно к оси x (рис. 188). Пусть на нее со стороны начала координат падает поток молекул, полная (истинная) скорость которых равна $\bar{v}'$, а среднемассовая скорость $\bar{v}$ постоянна. Очевидно, что за единицу времени с этой площадкой столкнутся молекулы, которые находятся внутри объема косого параллелепипеда $dV_L = v'_x dA$, и их общее число согласно (7.13) составит

$$N_{\text{пад}} = \int n_{\text{пад}} f \, dV_L dV_c.$$

При $\bar{v} = \text{const}$ из (7.20) следует, что $dv'_x = dc_x$; $dv'_y = dc_y$; $dv'_z = dc_z$, поэтому $dV_c = dv'_x dv'_y dv'_z$. В результате число молекул, падающих на единичную площадку,

$$N_{\text{пад}} = n_{\text{пад}} \int_{-\infty}^{+\infty} dv'_y \int_{-\infty}^{+\infty} dv'_z \int_{0}^{+\infty} f \, v'_x dv'_x. \tag{7.33}$$

Интегрирование по осям y и z ведется в этом выражении по всем значениям скоростей молекул, а по оси x — только по положительным их скоростям, так как молекулы с отрицательным направлением скорости уходят от площадки dA. Опуская описание процедуры интегрирования выражения (7.33), запишем конечный результат в виде

$$N_{\text{пад}} = \frac{n_{\text{пад}} c_{m\,\text{пад}}}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{v_x^2}{c_{m\,\text{пад}}^2} \right) + \frac{v_x}{c_{m\,\text{пад}}} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{v_x}{c_{m\,\text{пад}}} \right) \right] \right\}, \tag{7.34}$$

где

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t e^{-r^2} dr$$

представляет собой специальный интеграл вероятностей, $c_{m\,пад} = \sqrt{2RT_{пад}}$ — наиболее вероятная скорость теплового движения падающих молекул; v_x — нормальная составляющая среднемассовой скорости молекул.

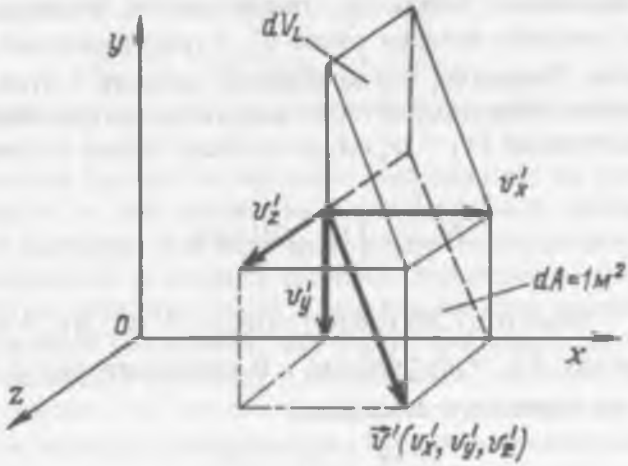


Рис. 188. К определению числа молекул, ударяющихся о площадку в свободномолекулярном режиме

Масса падающих молекул, ударяющихся в единичную площадку за единицу времени,

$$M_{пад} = mN_{пад}. \tag{7.35}$$

В неподвижном газе (при $v_x = 0$) число падающих молекул

$$N_{пад.н} = \frac{n_{пад} c_{m\,пад}}{2\sqrt{\pi}}. \tag{7.36}$$

Масса молекул, ударяющихся о единичную площадку за единицу времени, в неподвижном газе с учетом (7.24) равна:

$$M_{пад.н} = \frac{\rho_{пад} c_{m\,пад}}{2\sqrt{\pi}} = \frac{\rho_{пад}\bar{c}_{пад}}{4}, \tag{7.37}$$

где $\bar{c}_{пад}$ — средняя скорость теплового движения падающих молекул; $\rho_{пад} = mn_{пад}$ — их плотность.

Рассмотрим вычисление нормальной составляющей секундного количества движения $I_{x\ пад}$ молекул, падающих на единичную поверхность. Дифференциал

$$\mathrm{d}I_{x\ пад} = v'_x \mathrm{d}M_{пад}.$$

С учетом (7.13), (7.18) и (7.35) получаем

$$\mathrm{d}I_{x\ пад} = \rho_{пад} f v'_x \mathrm{d}V_L \mathrm{d}V_c.$$

Аналогично (7.33) нормальная составляющая секундного количества движения молекул, падающих на единичную поверхность, равна:

$$I_{x\ пад} = \rho_{пад} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}v'_y \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}v'_z \int_{0}^{+\infty} f\, v'^2_x \mathrm{d}v'_x. \tag{7.38}$$

Опуская процедуру интегрирования (7.38), конечный результат запишем в виде

$$I_{x\ пад} = \frac{\rho_{пад} c_{m\ пад} v_x}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{v_x^2}{c_{m\ пад}^2}\right) +$$

$$+\rho_{пад}\left(\frac{c_{m\ пад}^2}{4} + \frac{v_x^2}{2}\right)\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{v_x}{c_{m\ пад}}\right)\right]. \tag{7.39}$$

Для неподвижного газа (при $v_x = 0$)

$$I_{x\ пад.н} = \frac{\rho_{пад} c_{m\ пад}^2}{4}. \tag{7.40}$$

Рассмотрим вычисление тангенциальной составляющей секундного количества движения $I_{z\ пад}$ молекул, падающих на единичную поверхность. Дифференциал

$$dI_{z\,\text{пад}} = \rho_{\text{пад}} f\, v'_z\, dV_L\, dV_c.$$

Аналогично предыдущему случаю имеем

$$I_{z\,\text{пад}} = \rho_{\text{пад}} \int_0^{+\infty} v'_x dv'_x \int_{-\infty}^{+\infty} dv'_y \int_{-\infty}^{+\infty} f\, v'_z dv'_z.$$

Опуская процедуру интегрирования, запишем конечный результат в виде

$$I_{z\,\text{пад}} = \frac{\rho_{\text{пад}} c_{m\,\text{пад}} v_z}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{v_x^2}{c_{m\,\text{пад}}^2} \right) + \frac{v_x}{c_{m\,\text{пад}}} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{v_x}{c_{m\,\text{пад}}} \right) \right] \right\}. \quad (7.41)$$

Для неподвижного газа (при $v_x = 0$, $v_z = 0$) получаем

$$I_{z\,\text{пад.н}} = 0.$$

Рассмотрим вычисление нормальной составляющей секундного количества движения $I_{x\,\text{отр.д}}$ молекул, отраженных от единичной поверхности диффузным образом. Определим сначала массу $M_{\text{отр.д}}$ этих диффузно отраженных молекул, имеющих максвелловское распределение скоростей, отвечающее температуре стенки $T_{\text{отр.д}} = T_{\text{ст}}$. Поскольку после соударения со стенкой молекулы потеряли свою первоначальную среднемассовую скорость, то их стартовая скорость $v_x = 0$ (как и в неподвижном газе). Можно поэтому воспользоваться формулой (7.37) и получить

$$M_{\text{отр.д}} = \frac{\rho_{\text{отр}} c_{m\,\text{отр.д}}}{2\sqrt{\pi}} = \frac{\rho_{\text{отр}} \bar{c}_{\text{отр.д}}}{4}. \quad (7.42)$$

Аналогично для количества движения $I_{x\,\text{отр.д}}$ по формуле (7.40) имеем

$$I_{x\,\text{отр.д}} = \frac{\rho_{\text{отр}} c_{m\,\text{отр.д}}^2}{4}. \quad (7.43)$$

Объединяя (7.42) и (7.43), получаем

$$I_{x\,\text{отр.д}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} M_{x\,\text{отр.д}} c_{m\,\text{отр.д}}.$$

Если использовать зависимости (7.18), (7.26), (7.34) и (7.35), то окончательно нормальная составляющая секундного количества молекул, отраженных от единичной поверхности диффузным образом, будет равна:

$$I_{x\,\text{отр.д}} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \rho_{\text{пад}} c_{m\,\text{пад}} c_{m\,\text{отр.д}} \sigma \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{v_x^2}{c_{m\,\text{пад}}^2} \right) + \frac{v_x}{c_{m\,\text{пад}}} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{v_x}{c_{m\,\text{пад}}} \right) \right] \right\}, \qquad (7.44)$$

где согласно (7.22)

$$c_{m\,\text{отр.д}} = c_{m\,\text{пад}} \sqrt{\frac{T_{\text{отр.д}}}{T_{\text{пад}}}}.$$

Формулы (7.39), (7.41), (7.44) дают возможность рассчитать нормальное давление p и напряжение трения τ по соотношениям (7.30) и (7.32). Как следует из этих формул, величины p и τ зависят от ориентации площадки относительно вектора среднемассовой скорости $\bar{v}(v_x, v_y, v_z)$, т.е. угла наклона поверхности, числа М и отношения температур $T_{\text{пад}}/T_{\text{отр}}$.

Рассмотрим в качестве примера значения величин p и τ в неподвижном газе, приняв условие полностью диффузного отражения ($\alpha_p = \alpha_\tau = 1$; $\sigma = 1$). Тогда из полученных формул (при $v_x = v_z = 0$) следует:

$$p_{\text{н}} = \frac{\rho_{\text{пад}} c_{m\,\text{пад}}^2}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{T_{\text{отр.д}}}{T_{\text{пад}}}} \right); \quad \tau_{\text{н}} = 0;$$

если

$$T_{\text{отр.д}} = T_{\text{пад}},$$

то

$$p_{\text{н}} = \frac{\rho_{\text{пад}} c_{m\ \text{пад}}}{2}.$$

В случае, если среднемассовая скорость молекул параллельна поверхности ($v_x = 0$; $v_z \neq 0$), нормальное давление p совпадает со значением $p_{\text{н}}$ для неподвижного газа, а касательное напряжение

$$\tau = \frac{\rho_{\text{пад}} c_{m\ \text{пад}} v_z}{2\sqrt{\pi}}.$$

Рассмотрим постановку и некоторые результаты решения задачи о стационарном изотермическом свободномолекулярном течении газа в состоянии максвелловского равновесия в бесконечно длинной трубе постоянного сечения, стенки которой рассеивают молекулы диффузным образом (рис. 189), течение происходит под действием перепада давлений ($p_1 - p_2$), длина трубы L во много раз больше ее диаметра $2r$.

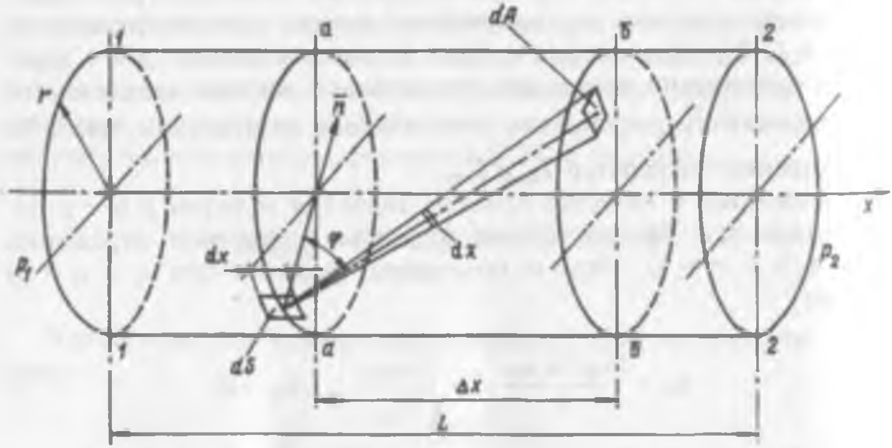


Рис. 189. К расчету свободномолекулярного течения в трубе

Секундный массовый расход G через произвольное поперечное сечение трубы б—б — это поток молекул, проходящих через это сечение за единицу времени. Поскольку труба длинная, то молекулы, прежде чем пройти через поперечное сечение б—б, обязательно испытают отражение от стенки. Межмолекулярными столкновениями в сравнении со столкновениями со стенкой пренебрегаем.

Массу молекул, отраженных в направлении нормали от элемента поверхности стенки трубы $\mathrm{d}S$ в сечении а—а за единицу времени в случае полностью диффузного отражения определяют по формуле (7.42):

$$\mathrm{d}M_{\text{а}} = \frac{\rho_{\text{а}}\bar{c}}{4}\mathrm{d}S,$$

где $\rho_{\text{а}}$ — плотность потока в сечении а—а; $\bar{c}$ — средняя скорость теплового движения молекул.

Секундный массовый расход молекул, отраженных элементарной площадкой $\mathrm{d}S$ и прошедших через элементарную площадку $\mathrm{d}A$ поперечного сечения б—б, отстоящего от сечения а—а на расстоянии Δx, равен:

$$\mathrm{d}G_{\text{а}} = \frac{1}{4}\rho_{\text{а}}\bar{c}\mathrm{d}S\cos\varphi\frac{\mathrm{d}\chi}{\pi},$$

где φ — угол между нормалью к площадке $\mathrm{d}S$ и линией, соединяющей центры площадок $\mathrm{d}S$ и $\mathrm{d}A$; $\mathrm{d}\chi$ — телесный угол, под которым площадка $\mathrm{d}A$ видна из центра площадки $\mathrm{d}S$.

Дробь $\mathrm{d}\chi/\pi$ определяет долю молекул, попадающих на площадку $\mathrm{d}A$ как на элемент внутренней полусферы над площадкой $\mathrm{d}S$.

От площадки $\mathrm{d}A$ в направлении площадки $\mathrm{d}S$ идет обратный поток молекул $\mathrm{d}G_{\text{б}}$, отличающийся от прямого потока знаком и плотностью. Поскольку температура T молекул постоянна вдоль трубы, то средняя скорость $\bar{c}$ их теплового движения также будет постоянна вдоль трубы. Дальнейшие выкладки состоят из интегрирования результирующего потока $\mathrm{d}G = \mathrm{d}(G_{\text{а}} - G_{\text{б}})$ как вдоль трубы от сечения входа до сечения выхода, так и по всему диапазону значений телесного угла.

Если предположить, что градиент давления вдоль трубы постоянен, то конечный результат — массовый секундный расход через трубу — можно получить в виде зависимости

$$G = \left(\rho_1 \bar{c} \pi r^2\right) \frac{2}{3} \frac{r}{L} \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right), \tag{7.45}$$

где индексы 1, 2 относятся к сечению входа и выхода из трубы соответственно. Множитель $\frac{2}{3} \frac{r}{L} \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)$ отражает специфику свободномолекулярного течения в сравнении с формулой для режимов течения сплошной среды.

С учетом формулы (7.21) массовый расход равен

$$G = \frac{4}{3} \frac{r^3}{L} \sqrt{\frac{2\pi}{RT}} (p_1 - p_2). \tag{7.46}$$

Средняя скорость в произвольном сечении трубы с учетом (7.45) и уравнения состояния определяется формулой

$$v = \frac{G}{\rho \pi r^2} = \frac{2}{3} \frac{r}{L} \frac{p_1}{p} \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right) \bar{c},$$

где $p = \frac{p_1 + p_2}{2}$ — среднее давление.

Рассмотрим понятие "пропускная способность трубы". Уравнение состояния $p = \rho RT$ запишем в виде

$$pV = GRT, \tag{7.47}$$

где $V = \frac{G}{\rho}$ — объемный расход, м^3/с.

Перепишем формулу массового расхода (7.46) в виде зависимости

$$GRT = U(p_1 - p_2); \tag{7.48}$$

здесь коэффициент

$$U = \frac{4}{3}\frac{r^3}{L}\sqrt{2\pi RT} \qquad (7.49)$$

называется пропускной способностью (проводимостью) длинной трубы.

Пропускная способность трубы U (м^3/с), как следует из совместного анализа (7.47) и (7.49), может рассматриваться как объем газа V, находящийся под действием давления p, равного единице, и вытесненный из этой трубы под воздействием перепада давления $(p_1 - p_2)$. Величина U в свободномолекулярном режиме не зависит от давления и пропорциональна диаметру трубы в третьей степени.

С учетом формулы (7.21) выражению для пропускной способности трубы можно придать вид

$$U = \frac{4}{3}\frac{\bar{c}}{L}\frac{A^2}{\Pi},$$

где A и Π — соответственно площадь поперечного сечения и периметр трубы.

Поскольку температура газа вдоль трубы постоянна, то объемный расход при выходе из трубы

$$V_2 = \frac{GRT}{p_2} = U\left(\frac{p_1}{p_2} - 1\right)$$

и зависит не от величины давлений p_1 и p_2, а только от их отношений.

Рассмотрим влияние пропускной способности трубы на процесс откачки газа из замкнутой емкости (рис. 190) при помощи вакуумного насоса. Используя уравнения (7.47) и (7.48), можно записать следующую цепочку равенств для баланса расхода газа по длине трубы:

$$GRT = U(p_1 - p_2) = p_1V_1 = p_2V_2. \qquad (7.50)$$

Здесь объемные расходы V_1 и V_2 могут рассматриваться как скорость откачки при соответствующих давлениях p_1 в емкости и p_2

после трубы. Три соотношения (7.50) дают возможность получить зависимость

$$\frac{1}{V_1} = \frac{1}{V_2} + \frac{1}{U}. \tag{7.51}$$

Соотношение (7.51) показывает, что, чем больше пропускная способность трубы U, тем больше скорость откачки из емкости V_1 при постоянной скорости откачки насоса V_2.

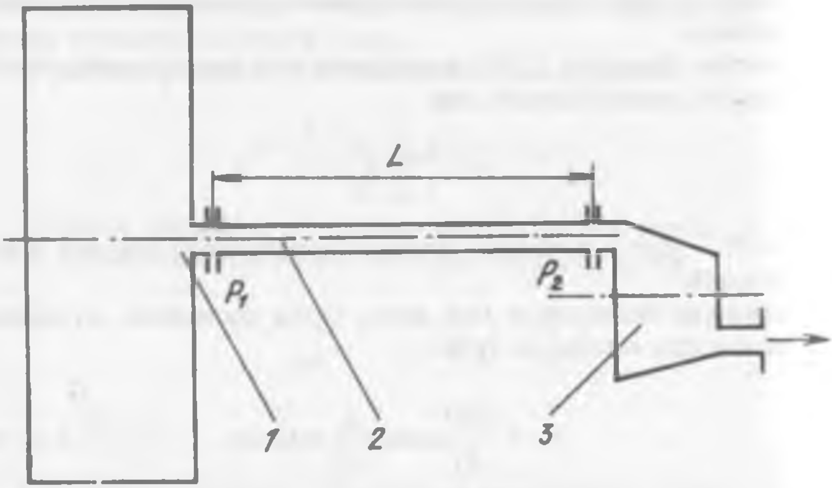


Рис. 190. Схема откачки газа из емкости:
1 – емкость; *2* – труба; *3* – вакуумный насос

Рассмотрим решение задачи о стационарном неизотермическом истечении газа в свободномолекулярном режиме через отверстие радиусом r в стенке толщиной Δ (короткую трубу). По обе стороны стенки давление и температура неподвижного газа различны (рис. 191). Толщина Δ стенки такова, что возможно только однократное взаимодействие молекулы с внутренней поверхностью отверстия в стенке. Отражение молекулы от стенки считаем полностью диффузным.

Масса молекул, проходящая за единицу времени через отверстие из левой области (индекс 1) в правую область (индекс 2), может быть найдена как разность

$$M = M_1 - M_2,$$

где M_1 — суммарный массовый секундный поток молекул (принадлежащих левой области), проходящий через левое входное сечение отверстия; M_2 — суммарный массовый секундный поток молекул (принадлежавших правой области), проходящий через правое входное сечение отверстия.

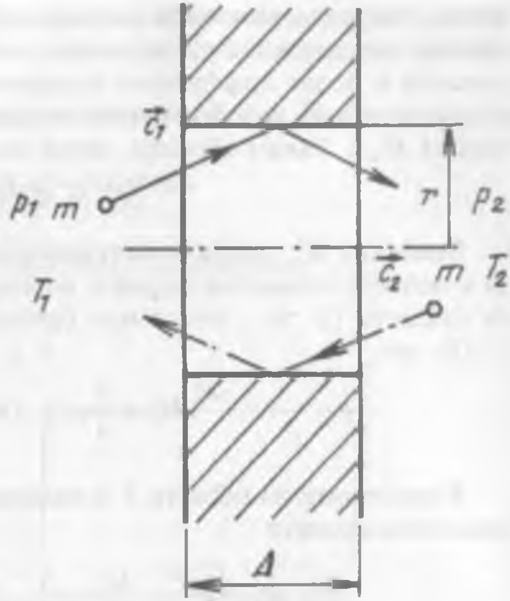


Рис. 191. К расчету свободномолекулярного течения через отверстие в стенке

Поток молекул M_1 слагается из двух составляющих: начального потока молекул $M_{1\Delta}$, идущего из левой области в полость отверстия, и обратного потока молекул $M_{\Delta 1}$, ранее принадлежавших левой области, а теперь возвращающихся из полости отверстия в левую область после диффузного отражения о внутренние стенки отверстия:

$$M_1 = M_{1\Delta} - M_{\Delta 1}.$$

Масса молекул $M_{1\Delta}$, входящих за единицу времени в поперечное сечение отверстия со стороны левой области, по формуле (7.37) равна

$$M_{1\Delta} = \frac{\rho_1 \bar{c}_1}{4} \pi r^2.$$

Обратный поток молекул $M_{\Delta 1}$ может быть приближенно определен из следующих рассуждений. Пусть о внутреннюю поверхность отверстия ударяется секундная масса молекул M_Δ. Предположим, что половина этого потока молекул $M_\Delta/2$ пришла из левой полости и после диффузного отражения о стенки отверстия вернулась в левую полость только половина молекул от начального потока $M_\Delta/2$. Таким образом, поток молекул

$$M_{\Delta 1} = M_\Delta/4.$$

Величину M_Δ найдем следующим образом. Если состояние газа в полости отверстия оценить по его параметрам в левой области (область 1), то с известным приближением можно считать по (7.37), что

$$M_\Delta \simeq \frac{1}{4}\rho_1\bar{c}_1 \cdot 2\pi r\,\Delta.$$

В результате из области 1 в полость отверстия втекает секундная масса молекул

$$M_1 = M_{1\Delta} - \frac{M_\Delta}{4} = \frac{1}{4}\rho_1\bar{c}_1\pi r^2\left(1 - \frac{\Delta}{2r}\right).$$

Аналогично можно вычислить секундную массу молекул, втекающую в отверстие со стороны области 2:

$$M_2 = \frac{1}{4}\rho_2\bar{c}_2\pi r^2\left(1 - \frac{\Delta}{2r}\right).$$

Полагаем, что $\rho_2\bar{c}_2 < \rho_1\bar{c}_1$, и тогда суммарный расход

$$M = M_1 - M_2 = \frac{\pi r^2}{4}\left(\rho_1\bar{c}_1 - \rho_2\bar{c}_2\right)\left(1 - \frac{\Delta}{2r}\right).$$

Используя формулу (7.21) и уравнение состояния $p = \rho RT$, получаем

$$M = r^2\sqrt{\frac{\pi}{2R}}\left(\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} - \frac{p_2}{\sqrt{T_2}}\right)\left(1 - \frac{\Delta}{2r}\right). \tag{7.52}$$

Из формулы (7.52) следует, что свободномолекулярное истечение через отверстие в стенке (короткую трубу) определяется разностью $\left(\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} - \frac{p_2}{\sqrt{T_2}}\right)$, и если температура $T_1 >> T_2$, то возможно истечение в зону более высокого давления.

Особенности течения со скольжением

Анализ движения газа в области течения со скольжением, близкой к области течения сплошной среды, осуществляют в основном методами исследования сплошной среды, но с учетом измененных граничных условий на обтекаемой твердой поверхности, т.е. с учетом наличия скачка скорости и скачка температуры.

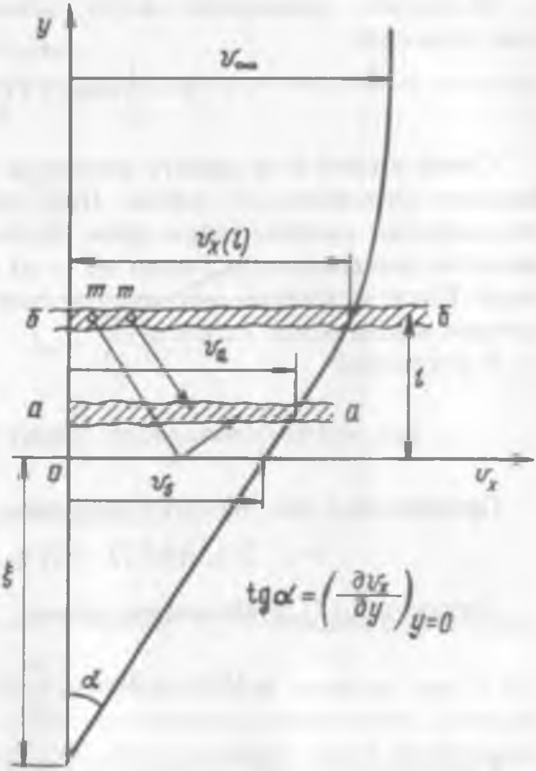


Рис. 192. Эпюра скорости в пограничном слое для режима течения со скольжением

Определим скорость потока на стенке (скорость скольжения) для этого режима течения. Рассмотрим (рис. 192) тонкий слой а—а текущей жидкости вблизи обтекаемой неподвижной стенки. Подсчитаем количество движения молекул $I = nmv_a$, находящихся в единице объема слоя. В силу близости к стенке можно счиность отверстия ударяется секундная масса молекул M_Δ. Предположим, что половина этого потока молекул $M_\Delta/2$ пришла из левой полости и после диффузного отражения о стенки отверстия вернулась в левую полость только половина молекул от начального потока $M_\Delta/2$. Таким образом, поток молекул

$$M_{\Delta 1} = M_\Delta/4.$$

Величину M_Δ найдем следующим образом. Если состояние газа в полости отверстия оценить по его параметрам в левой области (область 1), то с известным приближением можно считать по (7.37), что

$$M_\Delta \simeq \frac{1}{4}\rho_1\bar{c}_1 \cdot 2\pi r\,\Delta.$$

В результате из области 1 в полость отверстия втекает секундная масса молекул

$$M_1 = M_{1\Delta} - \frac{M_\Delta}{4} = \frac{1}{4}\rho_1\bar{c}_1\pi r^2\left(1 - \frac{\Delta}{2r}\right).$$

Аналогично можно вычислить секундную массу молекул, втекающую в отверстие со стороны области 2:

$$M_2 = \frac{1}{4}\rho_2\bar{c}_2\pi r^2\left(1 - \frac{\Delta}{2r}\right).$$

Полагаем, что $\rho_2\bar{c}_2 < \rho_1\bar{c}_1$, и тогда суммарный расход

$$M = M_1 - M_2 = \frac{\pi r^2}{4}\left(\rho_1\bar{c}_1 - \rho_2\bar{c}_2\right)\left(1 - \frac{\Delta}{2r}\right).$$

Используя формулу (7.21) и уравнение состояния $p = \rho RT$, получаем

$$M = r^2\sqrt{\frac{\pi}{2R}}\left(\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} - \frac{p_2}{\sqrt{T_2}}\right)\left(1 - \frac{\Delta}{2r}\right). \qquad (7.52)$$

Из формулы (7.52) следует, что свободномолекулярное истечение через отверстие в стенке (короткую трубу) определяется разностью $\left(\frac{p_1}{\sqrt{T_1}} - \frac{p_2}{\sqrt{T_2}}\right)$, и если температура $T_1 >> T_2$, то возможно истечение в зону более высокого давления.

Особенности течения со скольжением

Анализ движения газа в области течения со скольжением, близкой к области течения сплошной среды, осуществляют в основном методами исследования сплошной среды, но с учетом измененных граничных условий на обтекаемой твердой поверхности, т.е. с учетом наличия скачка скорости и скачка температуры.

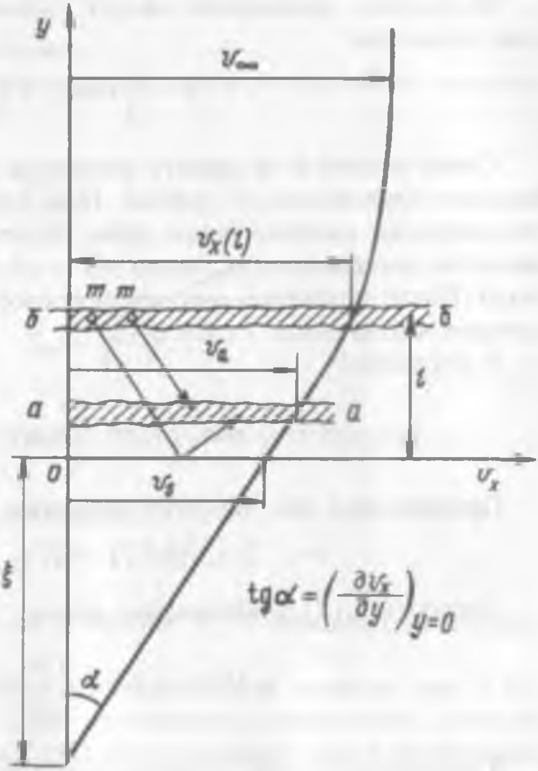


Рис. 192. Эпюра скорости в пограничном слое для режима течения со скольжением

Определим скорость потока на стенке (скорость скольжения) для этого режима течения. Рассмотрим (рис. 192) тонкий слой а—а текущей жидкости вблизи обтекаемой неподвижной стенки. Подсчитаем количество движения молекул $I = nmv_a$, находящихся в единице объема слоя. В силу близости к стенке можно считать, что среднемассовая скорость молекул в слое v_a приближенно равна скорости скольжения газа на стенке $v_s = v_x\big|_{y=0} = v_x(0)$, т.е.

$$I = mnv_x(0).$$

Это же количество движения можно оценить другим способом. В слой а—а половина молекул (в среднем) придет сверху из слоя б—б, находящегося от стенки на расстоянии l, не превышающем длину свободного пробега молекулы. Другая половина молекул придет в слой а—а снизу после отражения от стенки.

Молекулы, пришедшие сверху, принесут в слой а—а количество движения

$$I = \frac{1}{2}nmv_x(l).$$

Снизу в слой а—а придут молекулы после диффузного и зеркального отражения от стенки. При диффузном отражении тангенциальный импульс равен нулю, поэтому вклад в величину количества движения дадут только $n(1-\sigma)$ зеркально отраженных молекул. После отражения они сохранят свое значение скорости $v_x(l)$, которое имели ранее в слое б—б.

В результате

$$I = \frac{1}{2}mnv_x(l) + \frac{1}{2}mn(1-\sigma)v_x(l).$$

Приравнивая оба значения величины I, получаем

$$2v_x(0) = (2-\sigma)v_x(l).$$

Скорость $v_x(l)$ приближенно равна:

$$v_x(l) = v_x(0) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} l.$$

В результате имеем значение скорости скольжения у стенки

$$v_x\big|_{y=0} = v_x(0) = \xi\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0}, \tag{7.53}$$

где коэффициент скольжения

$$\xi = \frac{2-\sigma}{\sigma} l = al \tag{7.54}$$

имеет размерность длины (см. рис. 194); $a = (2 - \sigma)/\sigma$.

Длина свободного пробега молекулы l обратно пропорциональна давлению: $l = b/p$, поэтому

$$\xi = \xi_1/p, \tag{7.55}$$

где $\xi_1 = ab$ — новая постоянная.

При учете градиента температуры вдоль поверхности скорость скольжения станет равной

$$v_x(0) = \xi\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=0} + \xi_T\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{y=0},$$

где коэффициент

$$\xi_T = \frac{3}{4}\frac{\mu}{\rho T}.$$

Скачок температуры у стенки определяется формулой

$$T_{y=0} - T_{\text{ст}} = \frac{2-\alpha_E}{\alpha_E}\frac{2\gamma}{\gamma+1}\frac{l}{\Pr}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0},$$

где $T_{y=0}$ — температура газа у стенки; $T_{\text{ст}}$ — температура стенки; Pr — число Прандтля.

Рассмотрим стационарное изотермическое течение газа в режиме со скольжением в трубе постоянного поперечного сечения наружным радиусом R (рис. 193). Из-за малости числа Рейнольдса реализуется только ламинарный режим течения, в котором можно пренебречь силами инерции в сравнении с силами вязкости. Тогда уравнение равновесия для элементарного цилиндра радиусом r можно записать с учетом только действующих на его поверхности сил от градиента давления вдоль трубы $\left(\frac{dp}{dx} < 0\right)$ и напряжения молекулярного трения $\tau = \mu \frac{dv}{dr}$:

$$p\,\pi r^2 = \tau 2\pi r\,dx + (p - dp)\pi r^2.$$

Отсюда имеем

$$\frac{dv}{dr} = \frac{r}{2\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right). \qquad (7.56)$$

Считая градиент $\frac{dp}{dx}$ = const и заданным, интегрируем (7.56) в пределах изменения скорости потока от значения v на текущем значении радиуса r до значения скорости скольжения $v_s \equiv v_R$ на стенке, где $r = R$:

$$v_R - v = \left(\frac{dp}{dx}\right)\frac{R^2 - r^2}{4\mu}. \qquad (7.57)$$

Для оси трубы, где $r = 0$, а $v = v_m$, имеем

$$v_R - v_m = \left(\frac{dp}{dx}\right)\frac{R^2}{4\mu}. \qquad (7.58)$$

Объединяя (7.57) и (7.58), получаем соотношение

$$\frac{v_R - v}{v_R - v_m} = 1 - \frac{r^2}{R^2}. \qquad (7.59)$$

Скорость скольжения v_R на стенке трубы согласно (7.53) равна

$$v_R = \xi\left(\frac{dv}{dy}\right)_{y=0} = -\xi\left(\frac{dv}{dr}\right)_{r=R}, \qquad (7.60)$$

ибо оси y и r противоположного направления. Используя (7.56), получаем

$$v_R = -\xi\frac{R}{2\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right). \qquad (7.61)$$

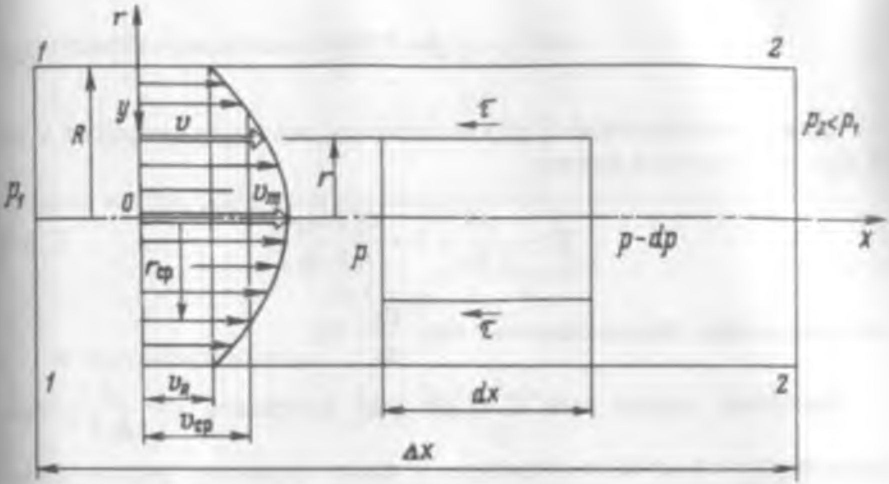


Рис. 193. К расчету течения со скольжением в трубе

Объединяя (7.57) и (7.61), находим значение скорости потока в трубе в зависимости от радиуса r для режима течения со скольжением:

$$v = -\frac{R^2 - r^2 + 2\xi R}{4\mu}\left(\frac{dp}{dx}\right), \tag{7.62}$$

где знак минус указывает на то, что градиент $\dfrac{dp}{dx} < 0$.

В отсутствие скольжения при $\xi = 0$ получаем как частный случай течение Пуазейля.

Объемный расход газа через какое-либо поперечное сечение трубы может быть записан в следующем виде:

$$V = v_{ср}\pi R^2 = \int_0^R 2\pi r v \, dr. \tag{7.63}$$

Отсюда средняя скорость $v_{ср}$ потока в трубе при условии $\rho \approx$ const и значении истинной скорости v, взятой из соотношения (7.59), равна:

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_m + v_R}{2}. \qquad (7.64)$$

Если в соотношение (7.63) подставить значение скорости v из (7.62), то объемный расход

$$V = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\left(1 + \frac{4\xi}{R}\right)\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right), \qquad (7.65)$$

где знак минус обусловлен тем, что $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} < 0$.

Массовый расход газа $G = \rho V$ (где плотность $\rho = \frac{p}{R_г T}$) при условии постоянства температуры T вдоль трубы и с учетом соотношения (7.55) равен:

$$G = -\frac{\pi R^4}{8\mu\, R_г T}\left(p + \frac{4\xi_1}{R}\right)\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right). \qquad (7.66)$$

Если принять, что для трубы в целом градиент $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{p_2 - p_1}{L}$ и обозначить $p = \frac{p_1 + p_2}{2}$, то (7.66) примет вид

$$G = \frac{\pi R^4}{8\mu\, R_г T L}\left[\frac{p_1^2 - p_2^2}{2} + \frac{4\xi_1}{R}(p_1 - p_2)\right]$$

или

$$G R_г T = U(p_2 - p_1),$$

где пропускная способность трубы

$$U = \frac{\pi R^4}{8\mu L}\left[p + \frac{4\xi_1}{R}\right].$$

Можно видеть, что в режиме со скольжением пропускная способность трубы пропорциональна ее диаметру в четвертой степени и зависит от давления.

Величину напряжения трения на стенке

$$\tau_{\text{ст}} = \mu\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R}$$

можно найти, вычислив производную по соотношению (7.59):

$$\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_{r=R} = \frac{2(v_R - v_m)}{R}. \tag{7.67}$$

В результате имеем

$$\tau_{\text{ст}} = -\frac{2\mu(v_R - v_m)}{R}.$$

Получим формулу для потери давления, аналогичную (3.92), но для свободномолекулярного режима течения. Перепишем (7.58) в виде

$$\mathrm{d}p = \frac{4\mu(v_R - v_m)}{R^2}\mathrm{d}x.$$

С учетом (7.64) это выражение можно преобразовать к виду

$$\mathrm{d}p = \frac{64}{\mathrm{Re}_D}\frac{v_R - v_m}{v_R + v_m}\frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2}\frac{\mathrm{d}x}{D}, \tag{7.68}$$

где

$$\mathrm{Re}_D = \frac{\rho v_{\text{ср}} D}{\mu}.$$

Найдем связь скоростей v_R, v_m, $v_{\text{ср}}$. Подставляя в (7.60) значение производной по (7.67) и учитывая (7.54), получаем

$$v_m = v_R\left(1 + \frac{D}{4al}\right). \tag{7.69}$$

Из (7.64) и (7.59) можно определить, что радиус $r_{\text{ср}}$, соответствующий среднему значению скорости $v_{\text{ср}}$, равен:

$$r_{\text{ср}}^2 = 2R^2. \qquad (7.70)$$

Используя (7.59), (7.69) и (7.70), находим значение скоростей

$$v_R = v_{\text{ср}} \frac{4al / D}{(4al / D) + 0{,}5}, \qquad (7.71)$$

$$v_m = v_{\text{ср}} \frac{(4al / D) + 1}{(4al / D) + 0{,}5}. \qquad (7.72)$$

Возвращаясь к формуле (7.68) и подставляя значения (7.71) в (7.72), получаем аналог формулы Дарси − Вейсбаха:

$$dp = \xi_{\text{тр}} \frac{\rho v_{\text{ср}}^2}{2} \frac{dx}{D},$$

где

$$\xi_{\text{тр}} = \frac{64}{\mathrm{Re}_D\left(1 + 8a\dfrac{l}{D}\right)}. \qquad (7.73)$$

Когда длина свободного пробега молекулы $l \to 0$, значение коэффициента $\xi_{\text{тр}}$ переходит в его значение для ламинарного режима течения сплошной среды.

Если в соотношении (7.12) полагать, что $L \sim D$, $a = 1$ (т.е. при $\sigma = 1$), то оценочно можно считать

$$\xi_{\text{тр}} \simeq \frac{64}{\mathrm{Re}_D\left(1 + 10\dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{Re}_D}\sqrt{\gamma}\right)}.$$

Контрольные вопросы к §47

1. Какой физический смысл имеют понятия "фазовое пространство" и "функция распределения частиц по скоростям"?

2. Каким образом поведение молекул в фазовом пространстве описывается при помощи кинетического уравнения Больцмана?

3. Как связаны между собой среднемассовая, тепловая и истинная скорости движения молекул?

4. Исходя из каких условий, можно определить среднюю, наиболее вероятную среднеквадратичную скорость теплового движения молекул?

5. В чем различие между зеркальным и диффузным отражением молекул от поверхности?

6. Каким образом в свободномолекулярном режиме течения определяются понятия "коэффициенты аккомодации для переноса нормальной и тангенциальной составляющих количества движения", "нормальное давление", "напряжение трения"?

7. Каким образом вычисляются нормальная $I_{x\ \text{пад}}$ и тангенциальная $I_{\tau\ \text{пад}}$ составляющие количества движения молекул, падающих на единицу поверхности за единицу времени, и нормальная $I_{x\ \text{отр.д}}$ составляющая количества движения диффузно отраженных молекул?

8. Зависит ли давление на пластинку, обтекаемую потоком в свободномолекулярном режиме, от ориентации в пространстве и числа Маха?

9. От каких параметров зависит пропускная способность трубы в свободномолекулярном режиме течения и в режиме течения со скольжением?

10. При каком условии в свободномолекулярном режиме течения через отверстие возможен поток молекул из области пониженного давления в область повышенного давления?

11. Каким образом скорость скольжения у стенки связана с градиентом скорости?

12. Каким образом в режиме течения со скольжением коэффициент трения связан с числами Рейнольдса, Кнудсена и Маха?

§48. ЭЛЕМЕНТЫ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Течение вязкой проводящей жидкости отличается от обычной гидродинамики наличием двух диссипативных процессов — вязкого и джоулева.

Система уравнений электромагнитной гидродинамики включает уравнения, характеризующие гидродинамические и электродинамические процессы.

Взаимодействие элемента объема dV проводящей среды с электромагнитным полем в данной точке пространства обусловлено действием сил Лоренца на заряженные частицы внутри этого объема и работой полей при движении заряженных частиц. Электромагнитное поле в общем случае определяется векторными величинами, характеризующими электрическое и магнитное поля: $\bar{E}$, $\bar{D}$, $\bar{H}$, и $\bar{B}$, где $\bar{D} = \varepsilon_m \bar{E}$; $\bar{B} = \mu_m \bar{H}$, где ε_m и μ_m — соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Так как источниками полей $\bar{H}$ или $\bar{B}$ являются электрические заряды и токи, положим, что распределение зарядов определяется плотностью электрических зарядов ρ_e, а распределение тока, создаваемое движущимися в пространстве зарядами, — вектором плотности электрического тока $\bar{j}$:

$$\rho_e = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{n} q_i n_i; \quad \bar{j} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{n} q_i \bar{v}_i n_i.$$

Электромагнитная сила на элемент объема среды равна сумме всех сил, действующих на заряженные частицы, сосредоточенные в этом объеме:

$$\bar{f}\,\mathrm{d}V = \sum_{i=1}^{n} q_i\left(\bar{E} + \bar{v}_i \times \bar{B}\right) = \left[\rho_e \bar{E} + \bar{j} \times \bar{B}\right]\mathrm{d}V.$$

Суммарная удельная работа, совершаемая электромагнитным полем над движущимися заряженными частицами в объеме, выражается следующим образом:

$$A = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Sigma q_i \bar{V}_i \bar{E}}{\Delta V} + \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Sigma q_i \left(\bar{V}_i \times \bar{B}\right)\bar{V}_i}{\Delta V} = \bar{j}\bar{E}.$$

Учитывая сказанное выше, уравнения механики, характеризующие законы сохранения массы, импульса и энергии, запишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\displaystyle\int_V \rho \mathrm{d}V\right) = 0; \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\displaystyle\int_V \rho V \mathrm{d}V\right) = \displaystyle\int_S \bar{p}_n \mathrm{d}S + \int_V \left(\rho_e \bar{E} + \bar{j} \times \bar{B}\right)\mathrm{d}V; \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\displaystyle\int_V \rho\left(\varepsilon + \frac{V^2}{2}\right)\mathrm{d}V\right) = -\displaystyle\int_V \bar{f}_V \bar{V} \mathrm{d}V + \int_S \bar{p}_{\text{п}} V \mathrm{d}S + \int_S \bar{Q}\bar{n}\,\mathrm{d}S + \int_V Q_V \mathrm{d}V, \end{cases} \tag{7.74}$$

где ε — внутренняя энергия; $\bar{p}_{\text{п}}$ — плотность поверхностных сил; $\bar{Q}$ — вектор потока теплоты к поверхности S; Q_V — теплота, выделяемая в объеме при учете химических реакций, процессов диссипации, рекомбинаций и протекания химического тока.

Общую систему уравнений магнитной гидродинамики следует дополнить уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot}\frac{\bar{B}}{\mu_m} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t};$$

$$\operatorname{rot}\ \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}; \tag{7.75}$$

$$\operatorname{div}\ \bar{D} = \rho_e;$$

$$\operatorname{div}\ \bar{B} = 0;$$

законом сохранения зарядов (уравнение неразрывности)

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \operatorname{div}\bar{j} = 0 \tag{7.76}$$

и законом Ома для анизотропных сред

$$\bar{j} = \sigma\bar{E} + \sigma\left(\bar{v}\times\bar{B}\right) - \frac{\sigma}{n_e e}\left(\bar{j}\times\bar{B}\right) + \rho_e\bar{v}, \tag{7.77}$$

где e — заряд электрона; n_e — концентрация электронов.

Критерий подобия

Наряду с гидродинамическим критерием подобия — числом Струхаля (Sh), числом Эйлера (Eu), числом Рейнольдса (Re), числом Эккерта (Ec), числом Пекле (П) — в магнитогидродинамических задачах используется ряд других критериев:

магнитное число Рейнольдса

$$\mathrm{Re}_m = \sigma\mu_m vl = \frac{vl}{\nu_m};$$

параметр магнитогидродинамического взаимодействия (число Стюарта)

$$N = \frac{\sigma B_0^2 l}{\rho v} = \frac{\mathrm{Ha}^2}{\mathrm{Re}};$$

число Гартмана

$$\mathrm{Ha} = Bl\sqrt{\frac{\sigma}{\mu_m}} = \sqrt{N \cdot \mathrm{Re}};$$

параметр нагрузки (электрическое число Рейнольдса)

$$K = \frac{E}{vB} = \mathrm{Re}_э;$$

магнитное число Прандтля

$$\mathrm{Pr}_m = \frac{\nu}{\nu_m} = \sigma_m \nu = \frac{\mathrm{Re}_m}{\mathrm{Re}};$$

число Альфвена

$$\mathrm{Al} = B \,/\left(v\sqrt{\mu\rho}\right);$$

магнитное число Эйлера

$$\mathrm{Eu}_м = \frac{B^2 \,/\, \mu_m}{\rho v^2}.$$

Методы расчета течения в скрещенном электрическом и магнитном полях

При создании методик расчета и проектирования установок с безмашинным преобразованием энергии одна из главных проблем состоит в разработке адекватной математической модели расчета, соответствующей физической модели течений электропроводных рабочих тел в приложенном или индуцированном магнитном поле. Вследствие существенных неоднородностей распределения параметров потока по сечению проточной части и немонотонности распределения скорости на стенках прямоугольных каналов преобразователей энергии необходимо рассмотреть влияние электромагнитных сил, обусловленных взаимодействием электропроводящей среды с магнитным и электрическим полями. В связи с этим следует найти решение системы уравнений магнитной гидродинамики, включающей уравнение движения, уравнение электромагнитного поля, уравнение энергии, закон Ома, характеристики магнитного и электрического полей:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \left(\bar{v}\nabla\bar{v}\right) = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \nu\Delta\bar{v} + \frac{1}{\mu_{m0}}\operatorname{rot} \bar{B} \times \bar{B};$$

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_{m0}\sigma}\Delta\bar{B} + \operatorname{rot}\left(\bar{v} \times \bar{B}\right);$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0; \qquad \operatorname{div}\varepsilon_0\bar{E} = \rho_e;$$

$$\bar{j} = \sigma\bar{E} + \sigma\left(\bar{v} \times \bar{B}\right) - \frac{\sigma}{en_e}\left(\bar{j} \times \bar{B}\right) + \rho_e\bar{v};$$

$$\frac{\rho \mathrm{d}\left(v^2 / 2 + \varepsilon\right)}{\mathrm{d}t} = p\bar{v} + \nabla\left(\rho\bar{v}\right) + \bar{j}\bar{E} + \nabla Q + Q_v,$$

где p — тензор давления; Q — подвижная плотность тепловыделения; Q_v — тепловыделение в единице объема; $\bar{j}\bar{E}$ — мощность, подводимая к объему из-за электромагнитного взаимодействия; ε — внутренняя энергия.

Если рассматривать жидкость с постоянными значениями ρ и ν, то уравнение движения записывается в виде

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \psi + \frac{B^2}{2\mu_{m0}\rho}\right) = \bar{v} \times \bar{\omega} + \nu\Delta\bar{v} + \left(\bar{B}\nabla\right)\frac{\bar{B}}{\mu_{m0}\rho}$$

и показывает, что в случае движения идеальной жидкости ($\nu = 0$) завихренность ω определяется электромагнитной силой, причем электромагнитная сила может иметь как вихревой характер, так и потенциальный.

Если течение установившееся, то вдоль вихревой линии или линии тока при $(\bar{v} \times \bar{\omega}) = 0$, $\psi = gz$ имеет место соотношение

$$\nabla\left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{B^2}{2\mu_{m0}\rho}\right) = 0,$$

что является аналогом уравнения Бернулли.

В наиболее практически значительных случаях течение в каналах следует разделять на течение жидкой пленки на твердой поверхности и течение двухфазной среды. При этом важно учитывать не только влияние электромагнитных сил, но и переменность свойств рабочего тела по сечению канала. Разделяя течения на течение жидкой пленки и течение газового потока на жидкой подвижной границе, можно моделировать течение жидкой пленки течением Куэтта в приложенном и индуцированном магнитном полях. При течении изотропной среды уравнение энергии представляется в виде

$$\rho\frac{d\varepsilon}{dt} = -P\,\nabla\bar{v} + \Phi + \frac{j^2}{\sigma} + \nabla Q + Q_V,$$

где $\Phi = \sigma_y \dfrac{\partial V}{\partial x}$ определяет вязкую диссипацию скорости изменения внутренней энергии.

Замыкание системы уравнений требует введения ряда дополнительных функций и допущений. Уравнение для завихренности в несжимаемой проводящей жидкости с $\nu = \text{const}$ представляется в виде

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = \text{rot}\,(v \times \bar{\omega}) + \nu\Delta\bar{\omega}$$

или в безразмерном виде

$$\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial t} = \text{rot}\,(\bar{v} \times \bar{\omega}) + \frac{1}{\text{Re}}\Delta\bar{\omega}.$$

Уравнение электромагнитной индукции, представленное ранее в безразмерном виде, записывается так:

$$\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left(\bar{v} \times \bar{B}\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}_m} \Delta \bar{B}.$$

где $\mathrm{Re}_m = \sigma v l \mu_m$ — магнитное число Рейнольдса, величина которого дает возможность в ряде случаев делать вывод об условии безындукционного приближения.

Анализ приведенных уравнений показывает возможность аналогии процессов. Локальная скорость изменения завихренности $\bar{\omega}$ и $\bar{B}$ определяется конвективным переносом, описываемым $\operatorname{rot}\left(\bar{v} \times \bar{\omega}\right)$ и $\operatorname{rot}\left(\bar{v} \times \bar{B}\right)$, и диффузией вихря $\nu \Delta \bar{\omega}$ и магнитного поля $\nu_m D \bar{B}$, где $\nu_m = \dfrac{1}{\mu_m \sigma}$ — магнитная вязкость.

Таким образом, в реальной жидкости перенос магнитного поля осуществляется конвекцией и диффузией. В случае безындукционного приближения (Re << 1) закон полного тока записывается в виде

$$\operatorname{rot} \bar{B} = \mathrm{Re}_m \bar{j};$$

а закон Ома — в виде

$$j = \sigma\left[\bar{E} + \left(\bar{v} \times \bar{B}\right)\right] = \left[-\operatorname{grad} \varphi + \left(\bar{v} \times \bar{B}\right)\right]\sigma.$$

Потенциальная функция φ определяется из закона Ома и имеет вид

$$\Delta \varphi = \operatorname{div}\left(\bar{v} \times \bar{B}\right).$$

Это позволяет преобразовать уравнение движения к виду

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \Delta \bar{v} = -\operatorname{grad} \varphi + \frac{1}{\mathrm{Re}} \Delta \bar{v} + N\left[-\operatorname{grad} \varphi + \left(\bar{v} \times \bar{B}\right)\right] \times \bar{B},$$

где N — параметр МГД-взаимодействия.

При рассмотрении канального течения типа канала МГДГ с двумя непроводящими стенками контур индуцированного тока замыкается через тонкие пристенные сдвиговые слои, которые могут быть основными, что определяет электрическое сопротивление контура индуцированного тока. ЭДС, индуцированная в потоке, создает полный поток, проходящий на единице длины по сечению слоя толщиной δ_w, т.е. $I \sim \sigma\bar{v}B\delta_w$, и, таким образом, плотность тока в сдвиговом слое определяется как

$$j_y = \sigma\bar{v}B.$$

В пристенной зоне течение зависит в основном от электромагнитной силы и вязкости, причем сила вязкого трения на единицу объема в сдвиговом слое пропорциональна $\mu\bar{V}/\delta_w^2$. Сравнение этой силы с электромагнитной ($\sigma\bar{V}\bar{B}^2$) позволяет получить величину относительной толщины сдвигового слоя $(\delta_w/h) \sim \mathrm{Ha}^{-1}$, называемого гартмановским слоем.

Если на жидкость действует объемная электромагнитная сила, то

$$\oint\limits_C \frac{\bar{F}}{\rho}\,\mathrm{d}\bar{r} = \oint\limits_C \frac{\bar{j}\times\bar{B}}{\rho}\,\mathrm{d}\bar{r},$$

где C — контур, перемещающийся вместе с жидкостью.

Сила, действующая на жидкость ($\bar{F}$), может иметь различную природу, и если $\bar{F}$ — сила вязкости, то

$$\oint \frac{\bar{F}}{\rho}\,\mathrm{d}\bar{r} = \nu\oint\limits_C \left(\Delta\bar{v}\right)\mathrm{d}\bar{r} = -\nu\oint\limits_C \left(\nabla\times\bar{\omega}\right)\mathrm{d}\bar{r}.$$

Анализ приведенного уравнения показывает, что при течении вблизи стенки в двумерном приближении (плоскость x, y) вектор завихренности имеет одну компоненту

$$\omega_z \sim \nu\left(\nabla\times\bar{\omega}\right)\mathrm{d}\bar{r} = -\nu\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\partial y}\mathrm{d}x.$$

При дальнейшем анализе важно рассмотреть фактор взаимодействия приложенного магнитного поля с завихренным элементом жидкости. В поперечном магнитном поле завихренность уменьшается благодаря доминирующему влиянию магнитного поля. Это подтверждается экспериментами Маргетройда, экспериментальными исследованиями, проведенными в АН УССР и в МГТУ им. Н.Э.Баумана.

В ряде практических случаев при взаимодействии потока с объемной силой в рабочем теле генерируется завихренность. Например, при течении на начальном участке канала с мгновенным введением магнитного поля (аналогия между камерой сгорания с соплом и началом рабочего участка канала МГДГ) генерируется ЭДС, равная $\bar{V} \times \bar{B}$, неуравновешенная индуцируемым потенциалом электрического поля, и в области начального участка генерируются вихревые электрические токи, индуцирующие вихревую электромагнитную силу $\bar{j} \times \bar{B}$, так как в этой области

$$\mathrm{rot}\left(\bar{j} \times \bar{B}\right) = -\left(\bar{j}\nabla\bar{B}\right) \neq 0.$$

Направление завихренности различное в пристенных зонах верхней и нижней изоляционных стенок, что приводит к ускоренному течению в части пристенной области с $v > v_n$. Для анализа указанного эффекта и неоднородности течения можно использовать ряд подходов, основным из которых является трехмерная постановка задачи. Отметим, что на характер распределения электромагнитной силы оказывают влияние неоднородность проводимости стенок канала и неоднородность распределения электропроводности рабочего тела.

Для постановки задачи наиболее корректного расчета течения в каналах МГД-генератора и МГД-насоса в дальнейшем проанализируем численное решение задачи в прямоугольном канале МГДГ и квазиодномерный подход при расчете течения в осерадиальном МГД-канале.

При анализе течения электропроводного рабочего тела в прямоугольных линейных каналах с приложенным магнитным полем и индуцированным электрическим полем традиционно считается, что нагружение на рабочем участке является однородным: влиянием неоднородности электрических полей в концевых зонах на структуру потока пренебрегаем. При входе в рабочий участок неоднородность параметров определяется лишь силами вязкости и теплообменом в камере сгорания, на сопловом участке и участке стабилизации потока. В общем случае система уравнений, характеризующая течение, представляется в трехмерной постановке и включает уравнения неразрывности движения, энергии, условие замыкания (модель турбулентности) и пристенные функции:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0;$$

$$\rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\left[(\mu_л + \mu_т)\dfrac{\partial v_x}{\partial y}\right]}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial\left[(\mu_л + \mu_т)\dfrac{\partial v_x}{\partial z}\right]}{\partial z} + j_y B = 0;$$

$$\rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial\left[2(\mu_л + \mu_т)\dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right]}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial\left[(\mu_л + \mu_т)\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z} + \dfrac{\partial \omega}{\partial y}\right)\right]}{\partial z} + j_x B = 0;$$

$$\rho v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial\left[(\mu_л + \mu_т)\left(\dfrac{\partial v_z}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial z}\right)\right]}{\partial y} +$$

$$+ \frac{\partial\left[2(\mu_л + \mu_т)\dfrac{\partial v_z}{\partial z}\right]}{\partial z} = 0;$$

$$\rho v_x \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial h}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial\left[\left(\frac{\mu_л}{\Pr} + \frac{\mu_т}{\Pr}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right]}{\partial y} + \frac{\partial\left[\left(\frac{\mu_т}{\Pr} + \frac{\mu_т}{\Pr}\right)\frac{\partial}{\partial z}\right]}{\partial z} +$$

$$+ v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{j_x^2 + j_y^2 + j_z^2}{\sigma} + (\mu_л + \mu_т)\left\{2\left[\left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2 +\right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)^2\right\} = 0,$$

где $\mu_л$, $\mu_т$ — соответственно молекулярная (в ламинарном потоке) и турбулентная вязкость.

В качестве модели турбулентности в первом приближении могут быть приняты $K - W$, $K - \varepsilon$, а также более простые, например в форме Колмогорова — Прандтля.

В последнее время наиболее широко используется модель $K - \varepsilon$, недостаток которой — отсутствие учета влияния МГД-взаимодействия и других возмущающих факторов, проявляющихся в пограничном слое:

$$\rho v_x \frac{\partial K}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial K}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial K}{\partial z} = \frac{\partial(\mu_г / \sigma_к)\frac{\partial K}{\partial y}}{\partial y} -$$

$$- \frac{\partial(\mu_г / \sigma_к)\frac{\partial K}{\partial z}}{\partial z} + G - \rho E,$$

где

$$G = \mu_г\left\{2\left[\left(\frac{\partial v_г}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right)^2\right\} \sigma_к = 1{,}0;$$

$$\rho v_x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \rho v_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\mu_a}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(\frac{\mu_г}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)}{\partial z} = C_1 \frac{\sigma\varepsilon}{K} - C_2 \frac{\rho\varepsilon^2}{K}.$$

где $\sigma_\varepsilon = 1,3$; $C_1 = 1,47$; $C_2 = 1,92$; $\mu_т = \dfrac{G \rho K^2}{\varepsilon}$; $C_D = 0,09$.

Система уравнений дополняется соотношением для определения теплофизических свойств рабочего тела, а также законом Ома.

Для продуктов сгорания газообразного топлива могут быть приняты следующие аппроксимации, что позволяет существенно уменьшить время процедуры расчета на ЭВМ:

электропроводность, См/м,

$$\sigma = 7,8272(T/2565)^{13,367}(p/1,175)^{-0,893} \exp(8,9547 \cdot 10^{-3} T/2565);$$

подвижность электронов

$$\mu_e = 0,48(T/2565)^{0,9161} p^{1,19};$$

энтальпия, Дж/кг,

$$h = 1,4145 \cdot 10^6 p^{-0,004923}(T \cdot 10^{-3})^{1,3423};$$

плотность, кг/м^3,

$$\rho = 0,39501 p^{1,0086}(T \cdot 10^{-3})^{-1,1182};$$

динамическая вязкость, Па · с,

$$\mu = 4,48699 \cdot 10^{-5}(T \cdot 10^{-3})(T \cdot 10^{-3} + 0,1)^{-1}.$$

Система уравнений электродинамики может быть представлена в форме

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} = 0; \quad \bar{j} = \sigma\left[\bar{E} + \left(\bar{v} \times \bar{B}\right)\right] - \mu_e\left(\bar{j} \times \bar{B}\right);$$

$$\bar{E} = \nabla\left[-E_x(z)_x + \varphi(y_1 z_1 x_1)\right].$$

Отметим, что в процессе генерации энергии и неоднородном распределении электрических параметров возникают вторичные течения, интенсивность которых может изменяться. Например, наличие поперечных объемных сил, возникающих из условия распределения вектора $\bar{j}$, приводит к неоднородности вторичных течений. Интенсивность вторичных течений в основном зависит от поперечных объемных сил и в меньшей мере — от турбулентной вязкости. Вторичные течения, в свою очередь, оказывают влияние на развитие поперечных неоднородностей потока через поперечно-конвективный перенос. Указанный перенос влияет на развитие пограничных слоев на стенках проточной части.

Применимость при расчетах МГД-течений квазитрехмерной модели течения может быть определена условием однородности давления в сечении канала, что в реальных случаях течений в МГД-каналах не выполняется. Тем не менее на основе интегрирования параболизованных уравнений Навье — Стокса и энергии в поперечной плоскости канала $(x - y)$ система уравнений приводится к виду (по работе ИВТ АН СССР)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_x \alpha_1\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v_y \alpha_1\right) = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_x^2 \alpha_2\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v_x v_y \alpha_2\right) = -b(x)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\mu_{эф}\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right]\alpha_4 -$$

$$-\left[\tau_z(0) - \tau_z(b)\right]\gamma_1 + \int\limits_0^{b(x)} B_z j_y \mathrm{d}z;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_x h^* \alpha_3\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v_y h^* \alpha_3\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\mu_л}{\mathrm{Pr}} + \frac{\mu_т}{\mathrm{Pr}_т}\right)\frac{\partial h^*}{\partial y}\right]\alpha_5 +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu_т\left(1 - \frac{1}{\mathrm{Pr}_т}\right)v_x\frac{\partial v_x}{\partial y}\right]\alpha_6 + \left[q_{kz}(0) - q_{kz}(b)\right]\gamma_2 +$$

$$+\frac{\partial q_{py}}{\partial y}\alpha_z + \left[q_{pz}(0) - q_{pz}(b)\right]\gamma_3 + \int\limits_0^{b(x)}\left(j_y E_y + j_x E_x\right)\mathrm{d}z;$$

$$\int_0^{a(x)} \rho v_x \alpha_1 dy = m,$$

где неоднородности распределения параметров по z и y определены в виде

$$\alpha_1 = \int_0^{b(x)} \frac{\rho' v'}{\rho_\infty v_\infty} dz; \quad \alpha_2 = \int_0^{b(x)} \frac{\rho' v'}{\rho_\infty v_\infty} dz;$$

$$\alpha_3 = \int_0^{b(x)} \frac{\rho' v' h^*}{\rho_\infty v_\infty h^*_\infty} dz; \quad \alpha_4 = \int_0^{b(x)} \frac{v'}{v_\infty} dz;$$

$$\alpha_5 = \int_0^{b(x)} \frac{h^{*1} - h^*_{\text{ст}}}{h^*_\infty - h^*_{\text{ст}}} dz; \quad \alpha_6 = \int_0^{b(x)} \frac{v'^2}{v^2_\infty} dz;$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{a(x)} \int_0^{a(x)} \frac{v'}{v_\infty} dy; \quad \gamma_2 = \frac{1}{a(x)} \int_0^{a(x)} \frac{h^{*1} - h^*_{\text{ст}}}{h^*_\infty - h^*_{\text{ст}}} dy; \quad \alpha_z = \gamma_3 = 1,$$

где a и b — размеры канала.

Параметры, включенные в закон Ома, определяются следующим образом:

$$< j_{xz} > = \sigma(x, y) \alpha_\sigma^z E_x - < \beta_{yz} >< j_y >_z;$$

$$< j_{yz} > = \frac{\sigma_0 \alpha_\sigma^z \alpha_\sigma^y}{\left(1 + < \beta_e^2 >_{yz}\right) æ} \left[< E_y >_y + < E_x >< \beta_e >_{yz} b - B_z v_\infty \alpha'_4 \frac{\alpha\sigma_y}{\alpha_\sigma^z} \right];$$

$$E_y(x, y) = \frac{< j_y >_z \left(1 + < \beta_e^2 >_{yz}\right)}{\sigma(x, y) \alpha_\sigma^z} - < \beta >_{yz} E_x + B_z v(x, y) \frac{\alpha\sigma_y}{\alpha_\sigma^z};$$

$\alpha_\sigma^y, \alpha_\sigma^z, \alpha_{\sigma y}$ аналогичны α_i; $æ = \langle\sigma\rangle_{yz} \langle\sigma^{-1}\rangle_{yz}$.

В качестве замыкания может использоваться модель турбулентности, предложенная Себеси — Смитом.

Система уравнений аппроксимируется с помощью неявной конечно-разностной схемы, и решение линеаризованной системы выполняется методом прогонки.

К одной из ряда трудностей, приводящих к неопределенности выбора решения поставленной задачи, следует относить расчет сверхзвуковых МГД-течений при существенном МГД-взаимодействии и генерации прямого скачка уплотнения. Наиболее удобным и простым методом подобных расчетов, включая течение двухфазной среды (газ + жидкая фаза), является метод Годунова, широко используемый в инженерной практике. В ряде задач разностная схема Годунова эффектна благодаря монотонности. Интегральные законы сохранения, формирующие конечно-разностную запись уравнения газовой динамики, приводят к преобразованию уравнений Эйлера

$$\oint\left(\bar{\Gamma}\mathrm{d}t + \bar{V}\mathrm{d}x\right) + \iint_{\Omega} \bar{H}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = 0,$$

где Г — граница области; Ω — область определения решения;

$$\bar{V} = s\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho\varepsilon_t \end{pmatrix}; \quad \bar{\Gamma} = s\begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 \\ (\rho\varepsilon_t + P)v \end{pmatrix}; \quad \bar{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ p\dfrac{\partial s}{\partial x} \\ s(q + f_n) \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon_t = C_v T + v^2 / 2;$$

$f = f_{\text{м.г}} + f_{\text{ж.ч}}$ (массовые силы); $q = q_{\text{к}} + q_{\text{ж.ч}}$, s — площадь сечения канала.

Решение системы является дальнейшей задачей, включающей анализ устойчивости численного метода и обоснованность использования принятой модели турбулентности, не учитывающей специфики пристенных процессов.

Течение в параллельном магнитном поле. Рассмотрим стационарное течение электропроводной невязкой жидкости в магнитном поле, вектор которого параллелен течению $\bar{B}[B;0;0]$.

Из уравнения движения в форме Эйлера имеем

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_x,$$

где F_x — проекция магнитной силы.

Из закона полного тока $\operatorname{rot}\dfrac{\bar{B}}{\mu_m} = \bar{j} + \dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ следует, что при $\dfrac{\partial \bar{D}}{\partial t} \to 0$ для одномерного течения

$$j_{\text{инд}} = \frac{\partial (B/\mu_m)}{\partial x}.$$

С учетом выражения для проекции силы F_x уравнение движения преобразуется к виду

$$v_x \frac{dv_x}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{dx}\left(p + \frac{B^2}{\mu_m^2}\right) = 0, \tag{7.78}$$

где $p + \dfrac{B^2}{2\mu_m} = p_\Sigma$ — суммарное давление; $p_\Sigma = p + p_м$; $v_x = v$.

Переписывая (7.78) в форме

$$v\frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{dp_\Sigma}{dx} = 0$$

и используя формулу для скорости звука $a = \sqrt{dp/d\rho}$, получаем

$$v\frac{dv}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx}\frac{dp_\Sigma}{d\rho}=v\frac{dv}{dx}+\frac{a_m^2}{\rho}\frac{dp}{dx}=0,$$

где $\frac{a_m^2}{\rho}=\frac{dp_\Sigma}{d\rho}$ — скорость распространения возмущений в магнитном поле.

При анализе движения электропроводящего рабочего тела в магнитном поле, используя уравнение неразрывности для трубки тока $F_0\rho_0 dl_0 = F\rho dl$ и уравнения Максвелла, характеризующие магнитное поле $\operatorname{div}\bar{B}=0$ $\frac{B}{\mu_m}F=\frac{B_0}{\mu_m}F_0$ = const, получаем

$$\frac{\rho_0 dl_0}{B_0/\mu_m}=\frac{\rho dl}{B/\mu_m}.$$

При dl = const $\to \frac{B}{\mu_m}=\frac{\rho}{\rho_0}\frac{B_0}{\mu_m}$, что позволяет сделать вывод: индукция магнитного поля зависит от плотности среды.

Следовательно, скорость распространения звука в среде будет определяться

$$a_м^2=a^2+v_{ac}^2=\frac{dp}{d\rho}+\frac{B^2/2\mu_m}{\rho_0},$$

где $v_м^2=\frac{d}{d\rho}\left(\frac{B^2}{2\mu_m}\right)$ — скорость волны Альфвена, которая является характеристической скоростью уравнений магнитной газовой динамики.

В ряде случаев влияние критериев подобия на рабочий процесс несущественно и система уравнений магнитной газовой динамики может быть упрощена. Например, при слабом влиянии индуцированного магнитного поля, определяемом характеристиками рабочей среды (электропроводность, магнитная проницаемость, малые скорости перемещения), магнитное число $Re_m \ll 1$, $B_i \to 0$ и учитывается взаимодействие среды только с приложенным магнитным полем $\bar{B}_{\Sigma} = \bar{B}_0$. Система уравнений, характеризующих течение проводящей жидкости (газа) в магнитном поле, видоизменяется.

При малых числах магнитного давления магнитное поле и изменение газодинамических параметров не зависят друг от друга. Система уравнений (7.74) записывается для неизвестных значений скорости, давления, энтальпии (температуры) и плотности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho\bar{v} = 0, \\ \rho\dfrac{d\bar{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \bar{Д}, \\ \rho\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{\partial p}{\partial t} + \mu\,\bar{Д} - \operatorname{div}\bar{Q}, \end{cases} \tag{7.79}$$

где $\bar{Д}$ — диссипативная функция Релея.

Для течения среды ($\sigma \neq 0$) с малыми числами Маха в ряде случаев можно пренебречь сжимаемостью среды ($\rho = \rho_0 = \text{const}$), а система уравнений (7.79) решается относительно параметров скорости, давления, энтальпии (температуры) и индукции магнитного поля:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \bar{v} = 0, \\ \rho\dfrac{d\bar{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \bar{Д} + \left(\bar{j} \times \bar{B}\right), \\ \rho\dfrac{dh}{dt} = -\operatorname{div}\bar{Q}, \\ \operatorname{rot}\dfrac{\bar{B}}{\mu_m} = \bar{j}, \\ \bar{j} = \sigma\left[\bar{E} + \left(\bar{v} \times \bar{B}\right)\right]. \end{cases} \tag{7.80}$$

При одномерном установившемся течении невязкого электропроводящего рабочего тела в магнитном поле система уравнений включает:

уравнение неразрывности

$$\frac{1}{s}\frac{ds}{dx}+\frac{1}{p}\frac{dp}{dx}+\frac{1}{v}\frac{dv}{dx}=0 \to \rho vF=\text{const},$$

где s — площадь сечения; v — составляющая вектора скорости $\bar{v}(v, 0, 0)$;

уравнение движения

$$v\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}-\left(\bar{j}\times\bar{B}\right)_x,$$

где $\bar{j}\left[j_x, j_y, 0\right]$; $\bar{B}[0, 0, B]$.

Пренебрегая продольной составляющей $\bar{j}_x$, уравнение движения можно записать в виде

$$v\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\sigma\left[E_{\text{н}}-vB\right]B,$$

где $E_{\text{н}}$ — напряженность электрического поля на нагрузке;

уравнение энергии

$$\rho v\frac{d}{dx}\left(h+\frac{v^2}{2}\right)=\bar{j}\bar{E}-\frac{dQ}{dx},$$

где h — энтальпия рабочего тела; $\bar{j}\bar{E}$ — удельная электрическая мощность; Q — теплота, отводимая через поверхность, окружающую объем.

Уравнение состояния при

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx}-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dx}-\frac{1}{T}\frac{dT}{dx}=0.$$

Если принять $c_p = R\gamma/(\gamma-1)$, то уравнение энергии при $c_p = \text{const}$ примет вид

$$\rho v\frac{\gamma}{\gamma-1}R\frac{dT}{dx}+\rho v^2\frac{dv}{dx}=\bar{j}\bar{E}+\frac{dQ}{dx},$$

а с учетом уравнений состояния неразрывности

$$\rho v \frac{\gamma}{\gamma - 1} RT\left[\frac{1}{p}\frac{dp}{dx} + \frac{1}{s}\frac{ds}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}\right] + \rho v^2 \frac{dv}{dx} = \bar{j}\bar{E} + \frac{dQ}{dx}. \quad (7.81)$$

После преобразований с учетом уравнения движения выражение (7.81) принимает вид для решения в квадратурах

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{M^2 - 1}\left[\frac{v}{s}\frac{ds}{dx}\frac{\sigma B^2}{p}\left(\frac{E_s}{B} - v\right)\left(v - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\frac{E}{B}\right) + v\frac{dQ}{dx}\right]. \quad (7.82)$$

При $M = \frac{v}{a} = \frac{v}{\sqrt{RT}}$

$$\frac{dM}{dx} = (\gamma RT)^{-1/2}\frac{dv}{dx} - \frac{v}{2}(\gamma RT)^{-1/2}T^{-1}\frac{dT}{dx}, \quad (7.83)$$

т.е. принимает вид, разрешаемый относительно M.

Течение неидеальной электропроводящей жидкости в канале плоского поперечного сечения в поперечном магнитном поле. Точные решения. Рассмотрим ламинарное течение несжимаемой электропроводной жидкости в плоском канале прямоугольного поперечного сечения, вектор индукции магнитного поля в котором перпендикулярен к ($B_y = B$) — оси течения и поверхности изоляционных стенок. Положим, что на участке стабилизированного течения скорость v_x и индукция магнитного поля B постоянны по оси, а изменяется давление $(\partial p/\partial x) = 0$. Расстояние между электродными стенками канала (рис. 194) значительно превышает расстояние между изоляционными стенками ($a >> b$). Составляющие скорости в направлении осей y, z отсутствуют. Из уравнений Максвелла $\operatorname{div}\bar{B} = 0 \rightarrow \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial Bz}{\partial z} = 0$, и при указанном допущении $B_y = \text{const} = B_0$.

При условии $\bar{B} = \text{const}$ из уравнения электромагнитной индукции следует $\operatorname{rot}\bar{E} = 0$ и $E_y = \text{const}$. Полагая $j_x = 0$, что определяется допущением изотропности электрических параметров рассматриваемой среды, принимаем $E_x = 0$. Из уравнения неразрывности электрических зарядов $\operatorname{div} \bar{j} = -\partial\rho_e/\partial t$ получаем $\operatorname{div} \bar{j} = 0$, $j_y = \text{const}$.

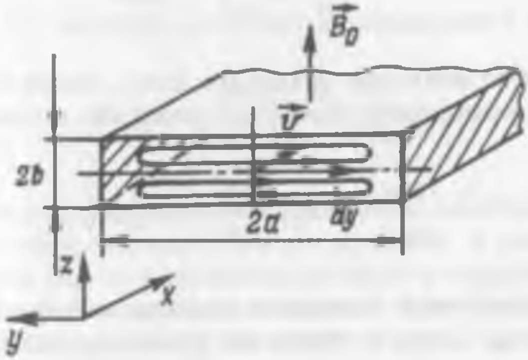


Рис. 194. Течение Гартмана. Поперечное магнитное поле

Напряженность электрического поля между направляющими и проводящими стенками определяется из закона Ома в виде $E_z = j_z/\sigma$, и проекция плотности электрического тока в поперечном направлении $j_y = \sigma[E_y v B_0]$ соответственно. Определяя среднюю скорость в зазоре между изоляционными стенками в виде $v_{\text{ср}} = \int_{-b}^{b} \frac{v}{2b} dz$, получаем напряженность электрического поля $E_y = -v_{\text{ср}} B_z$ и выражение для плотности электрического тока в сечении канала $j_y = \sigma B_{z0}(v_{\text{ср}} - v)$. При $v_x > v_{\text{ср}}$ $j_y < 0$, при $v > v_{\text{ср}}$ $j_y > 0$.

Проекция пондемоторной силы на ось Ox составит

$$f_{v_x} = \left[\bar{j} \times \bar{B}_0\right]_x = \sigma B_{z0}^2 \left(v_{\text{ср}} - v\right),$$

что позволяет сделать вывод о немонотонности распределения f_{v_x} по сечению канала. В пристенной зоне сила f_{v_x} положительна и разгоняет поток.

Из условия v_x = const уравнение движения относительно оси OX имеет вид

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - j_y B_{z0}.$$

Принимая во внимание уравнение для j_y, левая и правая части которого — неоднородное линейное уравнение с постоянными K_0, получаем

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \sigma v B_{z0}^2 = \frac{\partial p}{\partial x} - \sigma v_{cp} B_{z0}^2.$$

При использовании критериев подобия и безразмерных параметров $v = v/v_{cp}$, $\bar{z} = z / b$ уравнение преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2} - \mathrm{Ha}^2 \bar{v} = -k\mathrm{Ha}^2 + \mathrm{Re} \cdot \mathrm{Eu}.$$

Решение, полученное Гартманом, имеет вид

$$\bar{v} = \left(\frac{\mathrm{ch\,Ha} - \mathrm{ch\,Ha}\,\bar{z}}{\mathrm{ch\,Ha}} \right) \left(k - \frac{\mathrm{Re} \cdot \mathrm{Eu}}{\mathrm{Ha}^2} \right).$$

Так как

$$\int_0^b \frac{v}{b}\, dz = v_{cp} \int_0^1 v\, d\bar{z} = v_{cp},$$

имеем

$$K - \frac{\mathrm{Re} \cdot \mathrm{Eu}}{\mathrm{Ha}^2} = \frac{\mathrm{Ha}}{\mathrm{Ha} - \mathrm{th\,Ha}},$$

и распределение скорости $\bar{v} = \dfrac{\mathrm{Ha}(\mathrm{ch\,Ha} - \mathrm{ch\,Ha}\,\bar{z})}{\mathrm{Ha\,ch\,Ha} - \mathrm{sh\,Ha}}$.

Если значение $\text{Ha} \to 0$, то распределение скорости в сечении канала соответствует профилю Пуазейля $\bar{v} = \frac{3\left(1-\bar{z}^2\right)}{2}$. На оси канала при $\bar{z} = 0$ скорость достигает максимального значения

$$\bar{v}_{\max} = \frac{\text{Ha}(\text{ch Ha} - 1)}{\text{Ha ch Ha} - \text{sh Ha}}.$$

Увеличение индукции магнитного поля B, электропроводности жидкости или характерного размера приводят к увеличению не только критерия Ha, но и градиента скорости в окрестности стенки, а также к уплощению скорости в основной части канала (рис. 195). При величине $\text{Ha} \to \infty$ $\bar{v} \to 1$ по всему сечению канала. Градиент скорости у стенки определяется из выражения

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{v_{\text{ср}}}{b}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{v_{\text{ср}}}{b}\frac{\text{Ha}^2\,\text{sh}(\bar{z}\,\text{Ha})}{\text{Ha ch Ha} - \text{sh Ha}},$$

касательное напряжение на стенке ($\bar{z} = 1, z = b$) при ламинарном течении рассчитывается по формуле

$$\tau_{\text{ст}} = -\mu\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{\text{ст}} = \frac{v_{\text{ср}}\mu}{b}\frac{\text{Ha}^2\,\text{sh Ha}}{\text{Ha ch Ha} - \text{sh Ha}}$$

и коэффициент трения –

$$c_{f_{\text{мг}}} = \frac{2}{\text{Re}}\frac{\text{Ha}^2\,\text{sh Ha}}{\text{Ha} - \text{sh Ha}}.$$

Так как при отсутствии МГД-взаимодействия ($\text{Ha} = 0$) и течении Пуазейля $C_{f_0} = 6/\text{Re}$, то относительный закон трения выражается в виде $\psi_{\text{мг}} = \frac{C_{f_{\text{мг}}}}{C_{f_0}} = \frac{\text{Ha}^2}{3}\frac{\text{th Ha}}{\text{Ha} - \text{th Ha}}$. С увеличением числа Ha более 3 значение гиперболического тангенса th Ha $\to$ 1 и $\psi_{мг} = \dfrac{\text{Ha}}{3(1 - 1/\text{Ha})}$.

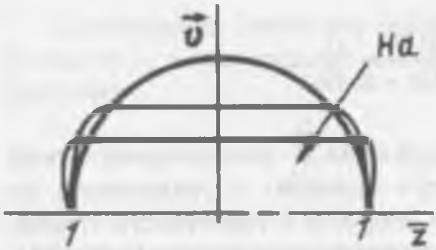


Рис. 195. Распределение осевой составляющей скорости при Ha = var

Дальнейшее решение этой задачи позволяет определить давление по длине канала из граничного условия $z = +b$, $v = 0$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_{ст} = \mu\frac{v_{ср}}{b}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z} =$$

$$= -\mu\frac{v_{ср}}{b^2}\left[\frac{\text{Ha}^3 \operatorname{ch}(\text{Ha}\, z)}{\text{Ha}\operatorname{ch}\text{Ha} - \operatorname{sh}\text{Ha}}\right]_{ст} =$$

$$= -\mu\frac{v_{ср}}{b}\frac{\text{Ha}^3}{\text{Ha} - \operatorname{th}\text{Ha}}.$$

В безразмерных переменных $\bar{p} = \dfrac{p}{\rho v_{ср}^2/2}$; $\bar{x} = \dfrac{x}{b}$, и имеем

$\dfrac{\partial p}{\partial x} = -\dfrac{2}{\text{Re}}\dfrac{\text{Ha}^2 \operatorname{th}\text{Ha}}{\text{Ha} - \operatorname{th}\text{Ha}} = -C_f$, что показывает уравновешивание силами трения на стенке изменения давления по длине. В реальном случае течения суммарный электрический ток $\bar{I} \neq 0$ и условие $\dfrac{\partial p}{\partial x} = -C_f$ является нереальным.

Рассмотрим уравнение движения в проекции на ось z при приведенных условиях ($v_y = 0$, $v_z = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y} = 0$ для всех параметров, исключая давление):

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\bar{j} \times \bar{B}\right)_z,$$

где $\left(\bar{j} \times \bar{B}\right)_z = j_y B_x$.

Здесь составляющая индукции магнитного поля B определяется из закона полного тока rot $\bar{B}/\mu_m = \bar{j}$. Для составляющей j_y имеем

$$\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} = \mu_m \sigma B_{z0}\left(v - v_{\text{ср}}\right).$$

Преобразуя через безразмерные параметры $\overline{B}_x = B_x / B_{z0}$ и $\bar{z}$ при условии $\partial B_z/\partial x = 0$ получаем

$$\frac{\partial \overline{B}_x}{\partial \bar{z}} = \mu_m \sigma b\left(v_{\text{ср}} - v\right) = \mathrm{Re}_m\left(1 - \bar{v}\right).$$

Используя выражение для $\bar{v}$ и решая полученное уравнение при граничных условиях $z = 1$; $\bar{z} = 0 \to B_x = 0$, получаем зависимость

$$\bar{B}_x = \mathrm{\bar{R}e}_m \frac{\mathrm{sh}\left(\bar{z}\,\mathrm{Ha}\right) - \bar{z}\ \mathrm{sh\,Ha}}{\mathrm{Ha\,ch\,Ha} - \mathrm{sh\,Ha}},$$

показывающую, что индукция магнитного поля по направлению Ox пропорциональна Re_m.

Подставим формулу для определения $\overline{B}_x$ в приведенное ранее уравнение движения:

$$\frac{\partial p}{\partial \bar{z}} = -\sigma B_{z0}^2 v_{\text{ср}}\left(1 - \bar{v}\right)\frac{B_x}{B_{z0}}.$$

После преобразования с использованием критерия подобия (N и Eu) и безразмерных переменных получаем

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -2N\left(B_x / B_{z0}\right)\left(1 - \bar{v}\right),$$

где $\bar{p} = 2p / \left(\rho v_{\text{ср}}^2\right)$.

Т е ч е н и е К у э т т а. К другому точному решению задачи плоского стационарного течения электропроводной несжимаемой жидкости в приложенном магнитном поле относится течение в плоскопараллельном канале с одной неподвижной и другой перемещающейся стенкой (рис. 196) в магнитном поле $\bar{B}_0$. При решении задачи пренебрегаем вторичными течениями, концевыми эффектами, считаем приложенное магнитное поле постоянным и однородным по длине канала. Параметры зависят от координаты z. Скорость перемещения стенки v_0. Граничные условия представляются в виде $z = 0 \rightarrow v_x = 0$, $z = \delta' \rightarrow v_x = v_0$.

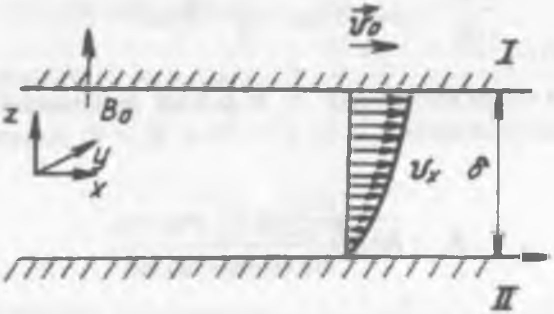


Рис. 196. Течение Куэтта при воздействии на жидкость поперечного магнитного поля:
I – подвижная граница; *II* – неподвижная граница

Индуцированное магнитное поле выражается следующими условиями: $z = 0$, $B = \text{const}$.

Если $\partial p/\partial x = 0$, уравнение движения в указанных условиях имеет вид

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + j_y B_0 = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + j_y B_0 = 0,$$

где $j_y = \sigma(E_y - v_x B_0)$ — составляющая плотности электрического тока.

Преобразовав уравнение движения в безразмерных переменных ($\bar{v}, \bar{z}$) с учетом выражений для j_y и критериев подобия Ha и K, получаем

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}} = \mathrm{Ha}^2(\bar{v} - K),$$

где

$$\mathrm{Ha} = \frac{\sigma}{\mu} B_0^2 \delta^2; \quad K = \frac{E_y}{v B_0}.$$

Решенис этого уравнения дает следующее выражение для распределения скорости в канале:

$$\bar{v} = \frac{K \operatorname{sh} \mathrm{Ha} + (1 - K) \operatorname{sh} \mathrm{Ha}\, \bar{z} - K \operatorname{sh} \mathrm{Ha}\,(1 - \bar{z})}{\operatorname{sh} \mathrm{Ha}}.$$

При отсутствии внешней электрической цепи и при электроизолированных стенках ($E_y = -v_{\text{ср}} B_0$, $K = 1$) имеем

$$\bar{v} = 1 - \frac{\operatorname{sh} \mathrm{Ha}\,(1 - \bar{z})}{\operatorname{sh} \mathrm{Ha}}.$$

Распределение скорости в обоих случаях представлено на рис. 197, *а*. При Ha = 0 получаем классическое решение задачи Куэтта $\bar{v} = \bar{z}$.

Распределение плотности электрического тока представляется в соответствии с законом Ома (рис. 197, *б*):

$$J_y = \frac{j_y}{\sigma B_0 \bar{v}} = K - \bar{v}(z) = \frac{K \operatorname{sh} \mathrm{Ha}(1 - z) - (1 - K) \operatorname{sh} \mathrm{Ha}\, \bar{z}}{\operatorname{sh} \mathrm{Ha}}.$$

Индукционное магнитное поле определяется из формулы

$$B_x = \mu_m \int j_y \mathrm{d}z + C,$$

где $C = \frac{\mu_0}{\delta} \int\limits_0^h j_y \mathrm{d}z$ при условии $B_x = 0$ при $z = 0$, $z = \delta$.

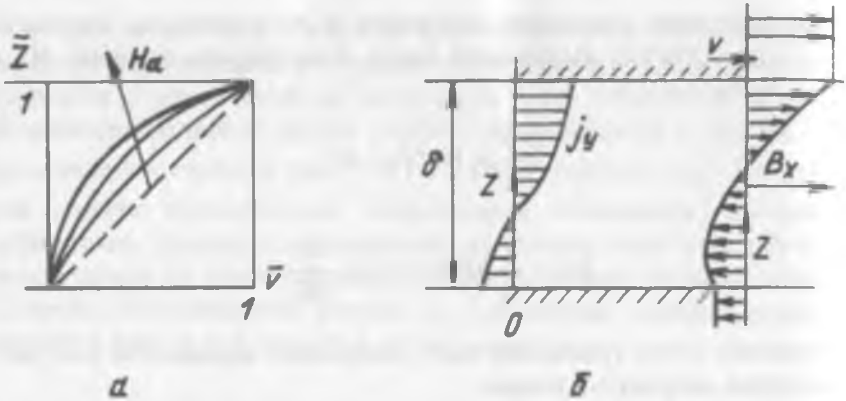


Рис. 197. Распределение скорости по сечению канала при течении Куэтта (*а*) и электродинамических параметров при течении Куэтта (*б*)

После интегрирования

$$\bar{B}_x = \frac{K \operatorname{ch} \mathrm{Ha}(1-\bar{z}) + (1-K) \operatorname{ch} \mathrm{Ha}\, \bar{z}}{\mathrm{Ha} \operatorname{sh} \mathrm{Ha}}.$$

При $B_x = 0$ на границе $\bar{z} = 0$ $\bar{B}_x = \dfrac{\operatorname{ch} \mathrm{Ha} - \operatorname{ch} \mathrm{Ha}\, \bar{z}}{\mathrm{Ha} \operatorname{sh} \mathrm{Ha}}$ (см. рис. 197, *б*). Касательное напряжение на верхней и нижней стенках при отсутствии магнитного поля

$$\bar{v} = \bar{z}, \quad d\bar{v} / d\bar{z} = 1, \quad \tau = \mu;$$

при взаимодействии с магнитным полем

$$\frac{d\bar{v}}{dz} = \frac{(1-K) \mathrm{Ha} \operatorname{ch} \mathrm{Ha}\, \bar{z} + K\, \mathrm{Ha} \operatorname{ch} \mathrm{Ha}\, \bar{z}}{\operatorname{sh} \mathrm{Ha}}$$

и

$$\tau_{\text{ст}}\Big|_{z=0} = \frac{\mathrm{Ha}}{\operatorname{sh} \mathrm{Ha}} \le 1, \quad \tau_{\text{ст}}\Big|_{z=\delta} = \frac{\mathrm{Ha} \operatorname{ch} \mathrm{Ha}}{\operatorname{sh} \mathrm{Ha}} = \frac{\mathrm{Ha}}{\operatorname{th} \mathrm{Ha}} \ge 1.$$

Контрольные вопросы к §48

1. Объяснить физическую картину течения электропроводной жидкости в приложенном магнитном поле.

2. Объяснить физический смысл уравнения Максвелла и сохранения электрических зарядов.

3. Указать критерии подобия в магнитной гидродинамике.

4. Пояснить, при каких условиях уравнение движения в приложенном магнитном поле является аналогом уравнения Бернулли.

5. Объяснить понятие гартмановского слоя.

6. При каких начальных и граничных условиях решается задача Гартмана?

7. Объяснить причины деформации распределения скорости по сечению канала при течении Гартмана.

8. Пояснить отличие (аналогию) распространения звука в электропроводящей среде при наличии магнитного поля.

9. Объяснить особенности течения Куэтта при наличии магнитного поля.

10. Объяснить различие между касательным напряжением на стенке и коэффициентом трения при ламинарном течении электропроводящей жидкости в поперечном магнитном поле и при классическом течении в канале.

11. Пояснить причины появления и распределения по сечению канала индукционного магнитного поля.

§49. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОТОКОВ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД

Общие сведения

К многофазным относятся потоки, включающие непрерывную и дискретные фазы. Это потоки типа газ — твердые частицы, газ — жидкие частицы, пар — капля, жидкость — пузырьки газа. Составляющие среду компоненты обмениваются импульсом и энергией, а также переходят из одного состояния в другое.

Решение задачи о течениях двухфазных потоков определяется физической моделью течения, и в ряде случаев реальная картина течения может быть упрощена за счет идеализации свойств среды и процесса взаимодействия фаз. Вместе с тем в математической модели и системе уравнений, принимаемой для описания течения двухфазной среды, следует учитывать процессы обмена количеством движения, энергией, а также массообмена и разрывность среды.

Наиболее распространенным подходом при записи системы уравнений двухфазного течения является выделение уравнений для отдельных фаз, например жидкой и паровой, жидкой (твердой) и газовой.

Если в потоке пара рассматривается обтекание одной сферической капли жидкости с учетом действия на нее силы Стокса, то уравнение движения капли (уравнение переносного движения) представляется в виде

$$\frac{d\bar{v}_ж}{dt}+\frac{1}{\tau}\left(\bar{v}_ж-\bar{v}_г\right)=0,$$

где $\bar{v}_ж, \bar{v}_г$ — скорости жидкой и газовой фаз; τ — время релаксации движения.

Движение для области внутри капли описывается уравнением относительного движения

$$\frac{d\bar{v}_ж}{dt}+\frac{1}{p_ж}\operatorname{grad} p_ж-\bar{f}_м=0,$$

где $\bar{f}_м$ — массовая сила, действующая на элементарную массу среды массой m и объемом V.

Рассмотрим уравнения сохранения для движущейся двухфазной смеси, занимающей произвольный объем V, часть которого V_i занята i-фазой.

Определив поток количества массы m_R за время τ через F, можно найти скорость многофазной среды без учета пульсаций:

$$v=\frac{1}{\rho}\frac{m_R}{F\tau}.$$

Отметим, что аналогично определится истинная скорость течения каждой фазы:

$$v_i=\frac{m_{iR}}{\rho_i\tau F_i},$$

где m_{iR} — поток количества массы i-й фазы; F_i — площадь, занятая частицами i-й фазы;

$$F_i=\varphi_i F=\left(\lim_{V\to 0}\frac{V_i}{V}\right)F.$$

Здесь φ_i — объемная доля i-й фазы в данной точке.

Истинные скорости фаз и среднемассовая скорость многофазной среды связаны соотношением

$$v = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{iR}}{\rho_i \varphi_i} \frac{m_{iR}}{\tau F} = \sum_{i=1}^{n} x_{iR} v_i ,$$

где $x_{iR} = \lim\limits_{V \to 0} \frac{m_i}{m}$ — массовая доля i-й фазы.

Введем понятие коэффициента скольжения фаз $\alpha = \frac{v_ж}{v_г}$, а также понятие относительных массовых сил B, действующих на элементарную массу m, сосредоточенную в объеме V:

$$b = \lim_{V \to 0} \frac{B}{m}.$$

Если массовую силу, действующую на i-ю фазу, выразить в виде $b_i = \lim\limits_{V \to 0} \frac{B_i}{m_i}$, то $b = \sum\limits_{i=1}^{n} x_{iR} b_i$.

Поверхностное напряжение, обусловленное, например, силами давления, трения, определяется как $p = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i P_i$. Отметим, что силы сопротивления при взаимодействии фаз также относятся к поверхностным и зависят от скольжения одной фазы относительно других.

Уравнение сохранения массы двухфазной среды выведем, рассматривая закон сохранения для одной из фаз:

$$\int_V \frac{d\rho_г}{d\tau} dV = -\int_V v \, dV,$$

где v — скорость фазового перехода первой фазы во вторую.

Преобразуя это уравнение, получаем $\frac{d\rho_г}{d\tau} + \rho_г \mathrm{div}\, \vec{v}_г = -v$ и с учетом массовой доли данной фазы имеем

$$\frac{\partial(\rho x_г)}{\partial\tau} + \mathrm{div}\, x_г \bar{v}_г = -v$$

или

$$\frac{\partial(\rho x_ж)}{\partial\tau} + \mathrm{div}\, x_ж \bar{v}_ж = -v,$$

где $v = -\frac{\rho_г}{x_г}\frac{dx_г}{dt} = \frac{\rho_ж}{x_ж}\frac{dx_ж}{dt}$.

Таким образом, уравнение неразрывности для нестационарного течения имеет вид

$$\Sigma\left[\frac{\partial(\rho x_i)}{\partial\tau} + \frac{\partial(\rho x_i)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho x_i v_{iy})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho x_i v_{iz})}{\partial z}\right] = 0. \qquad (7.84)$$

После преобразований (7.84) с использованием понятия среднерасходной скорости $v = \sum_{i=1}^{n} x_{iR} v_i$ в цилиндрических координатах имеем

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial r} + \frac{\rho v_e}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho v_e)}{\partial\theta}\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0. \qquad (7.85)$$

Выделяя в двухфазной среде объем V, рассмотрим, каким образом формируется главный вектор всех внешних массовых и поверхностных сил, действующих на 1-ю фазу в этом объеме. Воздействие на 1-ю фазу составит $\int_V \rho_1\varphi_1 \bar{B}\, dV$, где $\bar{B}$ — удельный вектор массовой силы.

Силовое воздействие на поверхности S, ограничивающей объем V, складывается из поверхностных сил с напряжениями E внутри 1-й фазы, межфазных поверхностных сил с напряжением D_1 и поверхностных сил со стороны 2-й фазы — удельный вектор $\bar{R}$. В результате получаем

$$\int_S \varphi_1(E\bar{n})\mathrm{d}S + \int_S \varphi_2(D\bar{n})\mathrm{d}S - \int_V \bar{R}\mathrm{d}V.$$

Изменение импульса 1-й фазы в выделенном объеме определяется аналогично:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho_1\varphi_1\bar{v}_1\mathrm{d}V = \int_V \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\rho_1\varphi_1\bar{v}_1\right]\mathrm{d}V.$$

Тогда уравнение импульса 1-й фазы запишется в форме

$$\rho_1\varphi_1\frac{\mathrm{d}\bar{v}_1}{\mathrm{d}t} + v\left(\bar{v}_3 - \bar{v}_1\right) = \operatorname{div}\left(\varphi_1 E + \varphi_2\bar{D}_i\right) - \bar{R} + \rho_1\varphi_1\bar{B}, \qquad (7.86)$$

где $\bar{v}_3$ — вектор скорости массы фазового превращения.

Рассмотрим воздействие на 2-ю фазу массовой силы $\int_V \rho_2\varphi_2\bar{B}\mathrm{d}V$ и поверхностных сил (поверхностные силы с напряжением p внутри 2-й фазы и межфазные напряжения D_2, поверхностные силы от 1-й фазы с удельным вектором $\bar{R}$).

В результате главный вектор массовых и поверхностных сил

$$\int_S \varphi_2 p\bar{n}\mathrm{d}S + \int_S \varphi_2 D_2\bar{n}\mathrm{d}S + \int_V \bar{R}\mathrm{d}V = \int_V\left[\operatorname{div}\varphi_2\left(p - D_2\right) + \bar{R}\right]\mathrm{d}v.$$

Изменения импульсов 2-й и 1-й фаз определяются аналогично:

$$\int_V\left[\rho_2\varphi_2\frac{\mathrm{d}\bar{v}_2}{\mathrm{d}t} + v\left(\bar{v}_2 - v_3\right)\right]\mathrm{d}v,$$

и уравнение импульса имеет вид

$$\rho_2\varphi_2\frac{\mathrm{d}\bar{v}_2}{\mathrm{d}t} + v\left(\bar{v}_2 - v_3\right) = \overline{\operatorname{div}\varphi_2}\left(p - \bar{D}_2\right) + \bar{R} + \rho_2\varphi_2\bar{B}.$$

Для всей двухфазной среды уравнение изменяется так:

$$\rho_1\varphi_1\frac{d\bar{v}_1}{dz}-v\bar{v}_1+\rho_2\varphi_2\frac{d\bar{v}_2}{dz}+v\bar{v}_2=\operatorname{div}\left(\varphi_1E+\varphi_2\bar{p}\right)+\beta\bar{B}+\operatorname{div}\overline{\varphi_2(D_1-D_2)},$$

и в целом

$$\rho\frac{d\bar{v}_p}{dt}=\operatorname{div}\left(\varphi_1E+\varphi_2p+\varphi_2\left(D_1-D_2\right)\right)+\beta\bar{B}.$$

Уравнение сохранения энергии запишем с учетом фазовых превращений 1-й фазы во 2-ю и уравнение энергии для каждой фазы —

$$\rho_1\varphi_1\frac{d}{dt}\left(\varepsilon_1+\frac{v_1^2}{2}\right)+v\left[\left(\varepsilon_3-\varepsilon_1\right)+\frac{v_3^2-v_1^2}{2}\right]=\rho_1\varphi_1\left(\bar{B}\bar{v}_1\right)+N_1-$$

$$-\operatorname{div}\bar{q}_1+Q_{12}+Q_{\text{тр}_1}+\operatorname{div}\left(\varphi_1E\bar{v}_1+\varphi_2D_1v_1\right),$$

$$\rho_2\varphi_2\frac{d}{dt}\left(\varepsilon_2+\frac{v_2^2}{2}\right)+v\left[\left(\varepsilon_2-\varepsilon_3\right)+\frac{v_2^2-v_3^2}{2}\right]=\rho_2\varphi_2\bar{B}\bar{v}_1+$$

$$+\operatorname{div}\varphi_2v_2\left(p-D_2\right)+N_2+Q_{\text{тр}_2}-\operatorname{div}\bar{q}_2\varphi_2-Q_{12},$$

где N — поверхностная сила со стороны частиц 2-й фазы; $\bar{q}_1$ — вектор теплового потока к 1-й фазе через единичную площадку в единицу времени; Q_{12} — теплота, подводимая к 1-й фазе от частиц в объеме V и определяемая теплообменом между фазами; $Q_{\text{тр}}$ — теплота, выделяемая в результате механического взаимодействия фаз.

Уравнение энергии для всей среды, определяющее изменение полной энергии среды в единицу времени:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\varepsilon+\frac{v^2}{2}\right)=\rho\left(\bar{v}\bar{B}\right)+\operatorname{div}\left[\varphi_1E\,\bar{v}_1+\varphi_2p\bar{v}_2+\varphi_2\left(D_1\bar{v}-D_2\bar{v}_2\right)\right]-$$

$$-\operatorname{div}\left(\varphi_1\bar{q}_{11}+\varphi_2\bar{q}_{22}\right)+N+Q_{\text{тр}},$$

где $\varepsilon = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2$ — полная внутренняя энергия среды:

$$N = N_1 + N_2; \quad W^2 = x_1 v_1^2 + x_2 v_2^2; \quad Q_{тр} = Q_{тр_1} + Q_{тр_2}.$$

После преобразования уравнения энергии через энтальпию $h_i = \varepsilon_i + \dfrac{p_i}{\rho_i}$ получаем

$$\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x_i\left(h_i - \frac{p_i}{\rho_i}\right) + x_2\left(h_2 - \frac{p_2}{\rho_2}\right) + \frac{W^2}{2}\right] =$$

$$= \rho\bar{v}\bar{B} + \operatorname{div}\left[\varphi_1 E\bar{v}_1 + \varphi_2 p\bar{v}_2 + \varphi_2\left(D_1\bar{v} - D_2\bar{v}_2\right)\right] -$$

$$- \operatorname{div}\left(\varphi_1\bar{q}_{11} + \varphi_2\bar{q}_{22}\right) + N + Q_{тр}$$

или при

$$h^* = \left[x_1\left(h_i + \frac{v_1^2}{2}\right) + x_2\left(h_2 + \frac{v_2^2}{2}\right)\right] -$$

$$- \rho\frac{\mathrm{d}h_0^*}{\mathrm{d}t} = \rho\bar{v}\bar{B} + \operatorname{div}\varphi_2\left(D_1\bar{v}_1 - D_2\bar{v}_2\right) + N + Q_{тр} -$$

$$- \operatorname{div}\left(\varphi_1\bar{q}_1 + \varphi_2\bar{q}_2\right) + \operatorname{div}\left[\varphi_1\left(E + p_1\right)\bar{v}_1 + \varphi_2\left(p + p_2\right)\bar{v}_2\right]. \quad (7.87)$$

Это уравнение показывает изменение полной энтальпии в потоке вязкого теплопроводного двухфазного рабочего тела при учете необратимых взаимодействий между фазами.

Одномерное течение двухфазной среды

Рассмотрим участок канала длиной $L = z_2 - z_1$ с сечениями s_1 и s_2 (соответственно входу и выходу), боковой поверхностью S_3 ($S = S_1 + S_2 + S_3$). Объем рабочего канала V. Тогда уравнение неразрывности для каждой фазы

$$\frac{d}{dz}(\rho_1\varphi_1 v_1 S) = -vS,$$
$$\frac{d}{dz}(\rho_2\varphi_2 v_2 S) = vS. \qquad (7.88)$$

Это дает для всей фазы $\dfrac{d(\rho vs)}{dz} = p.$

Уравнение движения для среды с учетом ранее полученных уравнений для каждой фазы имеет вид

$$\frac{d\left[\left(\varphi_1\rho_1 v_1^2 S\right) + \left(\varphi_2\rho_2 v_2^2 S\right)\right]}{dz} = S\frac{d(\varphi_1 E + \varphi_1 p)}{dz} + \rho\bar{B}S$$

или

$$G\frac{dv}{dz} = S\frac{d(\varphi_1 E + \varphi_1 p)}{dz} + \rho\bar{B}S, \qquad (7.89)$$

где $v_p = v_1\dfrac{G_1}{G} + v_2\dfrac{G_2}{G} = v_1 x_к + v_2 x_г.$

Уравнение энергии для среды

$$\frac{d}{dz}\left[G_1\left(h_1 + \frac{v_1^2}{2}\right) + G_2\left(h_2 + \frac{v_2^2}{2}\right)\right] = \frac{d}{dz}\varphi_1(p_1 + E)v_1 +$$

$$+ \varphi_2 D(v_1 - v_2) + \varphi_2(p_2 + p)v_2 + Q_{тр} + N + \rho\bar{B}v_\Sigma - \frac{dq}{dz}, \qquad (7.90)$$

где тензоры напряжений

$$E = -p_1 - \frac{4}{3}\mu_1\frac{dv_1}{dz}; \quad p = -p_2 - \frac{4}{3}\mu_2\frac{dv_2}{dz}.$$

При анализе движения невязкого двухфазного потока система уравнений (7.88) и (7.90) упрощается и имеет вид

$$\begin{cases} \rho v F = \text{const}, \\ \rho v \dfrac{dv_z}{dz} = -\dfrac{dp}{dz}, \\ h_\Sigma + \dfrac{v^2}{2} = h^* = \text{const}. \end{cases}$$

Параметры, определяющие состояние системы, можно рассматривать в общем случае как термодинамически неравновесные. При введении параметров, характеризующих равновесное состояние, можно изучать состояние двухфазной среды при одномерном течении в канале.

Двухфазные течения в каналах энергоустановок

В соплах ракетных двигателей, каналах МГД-генераторов процессы газовой динамики анализируют в условиях течения двухфазных рабочих тел (продуктов сгорания твердого топлива). Для таких процессов рассмотрим некоторые теоретические положения.

Уравнения нестационарного течения полидисперсной среды с учетом коагуляции и дробления частиц при МГД-взаимодействии разделяются на уравнения для газовой фазы и уравнения для каждой n-фракции другой фазы.

Для газовой фазы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0;$$

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_x^2 + p\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho v_x v_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho v_x v_z\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \rho_i C_{R_i}\left(v_{ix} - v_x\right) + \left(\bar{j} + \bar{B}\right)_x; \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho h_0^* - p\right) + \frac{\partial}{\partial x}\rho v_x h_0^* +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\rho v_y h_0^* + \frac{\partial}{\partial z}\rho v_z h_0^* = \sum_{i=1}^{n}\rho_i\left\{C_a C_p\left(T_i - T\right) + C_R\bar{v}\left(\bar{v}_i - \bar{v}\right)\right\} + C_V;$$

для i-й фракции частиц (i = 1..., n) уравнения неразрывности, импульсов, энергии и изменения концентрации частиц n_i:

$$\frac{\partial\rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_i v_{ix}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_i v_{iy}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_i v_{iz}\right) = D_{1i};$$

$$\frac{\partial\rho_i v_{ix}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho_i v_x^2 + \frac{\partial}{\partial y}\rho_i v_x v_{iy} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho_i v_x v_{iz}\right) = D_{2i} + \rho_i C_{R_i}\left(v_x - v_{ix}\right);$$

$$\frac{\partial\rho_i T_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho_i v_{ix} T_i + \frac{\partial}{\partial y}\rho_i v_{iy} T_i + \frac{\partial}{\partial z}\rho_i v_{iz} T_i = \rho_i C_{a_i}\frac{C_p}{C_{p_k}}\left(T - T_i\right) + D_{5i};$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}n_i v_{ix} + \frac{\partial}{\partial y}n_i v_{iy} + \frac{\partial}{\partial z}n_i v_{iz} = n_i D_{6i}.$$

Здесь h^* — энтальпия по параметрам торможения; Q_V — теплота, выделяемая (поглощаемая) в объеме; C_R, C_{a_i} — коэффициенты вязкого и теплового взаимодействия соответственно; C_{p_k} — удельная теплоемкость k-фазы; D_{k_i} — коэффициенты взаимодействия, учитывающие коагуляцию, захват и столкновение частиц.

$$D_{1i} = n_i\sum_{j=1}^{i-1}k_{ij}Э_{ij}\theta_{ij}\rho_i - \rho_j\sum_{j=i+1}^{n}k_{ij}Э_{ij}\theta_{ij}n_i;$$

$$D_{2i} = n_i\sum_{j=1}^{i-1}k_{ij}Э_{ij}\rho_i\left(v_j - v_i\right) + v_i D_{1i} + \rho_i\sum_{j=i+1}^{n}k_{ij}Э_{ij}n_j\left(1 - Q_{ij}\right)\left(v_j - v_i\right);$$

$$D_{5i} = \frac{1}{C_{p_k}}\left[n_i\sum_{j=1}^{i-1}k_{ij}Э_{ij}E_{ij} + \rho_i\sum_{j=i+1}^{n}k_{ij}Э_{ij}n_jE_{ij}\left(1 - Q_{ij}\right)\right] + T_i D_{1i}.$$

$$D_{6i} = \sum_{j=i+1}^{n} k_{ij} Э_{ij} \theta_{ij} n_j,$$

где $k_{ij} = \pi(r_i + r_j)^2|v_i - v_j|$ — константа коагуляции; $Э_{ij}$ — коэффициент захвата; θ_{ij} — коэффициент эффективности столкновений;

$$E_{ji} = c_{p_k}\left(T_j - T_i\right) + \left(v_j - v_i\right)^2 / 2.$$

Так как решение приведенной системы уравнений представляет собой сложную задачу, для ряда случаев течения двухфазного рабочего тела в каналах используют в инженерных расчетах приближение монодисперсной среды в квазиодномерной постановке задачи. Для нестационарного течения двухфазной среды при указанных допущениях система уравнений записывается в форме

$$\frac{\partial < \bar{v} >}{\partial t} + \frac{\partial < T >}{\partial x} + \hat{\bar{Q}} + < G > \frac{\mathrm{d} \ln A}{\mathrm{d}x} = 0,$$

где

$$\hat{\bar{v}} = \left[\rho_1;\ \rho_2;\ \rho_1 u_1;\ \rho_2 u_2;\ \rho_1 E_1;\ \rho_2 E_2\right]^T;$$

$$\hat{\bar{h}} = \left[\rho_1 v_1;\ \rho_2 v_2;\ \left(\rho_1 v_1^2 + p\right);\ \rho_2 v_2^2;\ \rho_1 v_1;\ \left(E_1 + \frac{p}{\rho_1}\right);\ \rho_2 v_2 E_2\right]^T;$$

$$\hat{\bar{Q}} = \left[0,\ 0 - \left[\left(\bar{j} \times \bar{B}\right) + F_T\right] F_T,\ \left(Q_T - \bar{j}\bar{E}\right),\ \left(-\theta_T + v_2 F_2\right)\right]^T.$$

$$\hat{\bar{G}}[h] = \hat{\bar{h}}[h];\quad \text{при } h \neq 3 \quad \hat{\bar{G}}[3] = \rho_1 v_1^2.$$

Здесь

$$E_1 = \varepsilon_1 + \frac{v_1^2}{2};\quad \varepsilon_1 = c_{V1} T_1 = R_1 T_1 / \left(\gamma_1 - 1\right);$$

$$\gamma_1 = \frac{c_p}{c_V};\quad E_2 = c_p T_2 + \frac{v_2^2}{2};$$

$$F_T = \frac{3}{4} C_f \rho_2 \frac{\rho_1}{\rho_2^*} \frac{|v_2 - v_1|}{d}; \quad Q_T = \rho_2 \frac{G\alpha}{\rho^* d}\left[T_1\left(1 + r\frac{\gamma - 1}{2}M^2\right) - T_2\right],$$

A — площадь поперечного сечения канала;

$$M = \frac{v_2 - v_1}{\sqrt{\gamma_1 R_1 T_1}} = M_1\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1\right).$$

В случае установившегося течения система уравнений упрощается и разрешается относительно p и T в виде

$$\left(M_1^2 - 1\right)\frac{d\ln\rho}{dx} = -\gamma M_1^2\left(1 - \frac{\gamma - 1}{2}M_1^2\right)\frac{(j \times B + F_T)}{\rho_1 v_1^2} + \gamma(\gamma - 1)M_1^4 \times$$

$$\times \frac{\left(\vec{j}\vec{E} - Q_T + v_a F_T\right)}{\rho_1 v_1^3} - \gamma r M_1^2;$$

$$\left(M_1^2 - 1\right)\frac{d\ln T_1}{dx} = -\frac{\gamma(\gamma - 1)M_1^4}{\rho_1 v_1}\left(\vec{j}\vec{E} + F_T\right) +$$

$$+\frac{(\gamma - 1)M_1^2\left(\gamma M_1^2 - 1\right)\left[\vec{j}\vec{E} - Q_T + v_2 F_T\right]}{\rho_1 v_1^3} - (\gamma - 1)rM_1^2;$$

$$\rho_2 v_2 \frac{dv_2}{dx} = -F_T; \qquad \rho_2 v_2 c_{p_k}\frac{dT_2}{dx} = Q_T.$$

В течениях без МГД-взаимодействия ($\vec{j} \times \vec{B} = 0$, $\vec{j}\vec{E} = 0$) в соплах частицы второй фазы (жидкой) отстают (проскальзывают) от газа и разность скоростей газовой (1) и жидкой (2) фаз приближенно определяется $v_1 - v_2 \approx \rho_2 d_2/(\mu d_{кр})$, где d_2 — размер частицы.

Потери на трение и теплообмен при взаимодействии газа и частицы в предположении стационарного обтекания частицы, принимаемой за сферу, определяются коэффициентами трения и теплоотдачи в виде аппроксимаций, полученных в СО АН СССР:

$$C_f = C_{f_1} + C_{f_2} + C_{f_3},$$

где

$$C_{f_1} = 24\left\{\mathrm{Re} + \mathrm{M}\sqrt{\frac{\gamma}{2}}\left[\left(4{,}33 + 13{,}65 - 1{,}53\frac{T_2}{T_1}\right) \Big/ \left(1 + 0{,}353\frac{T_2}{T_1}\right)\right] e^{-\frac{0{,}243\,\mathrm{Re}}{M\sqrt{8/2}}}\right\}^{-1};$$

$$C_{f_2} = \frac{4{,}5 + 0{,}38\left(0{,}03\,\mathrm{Re} + 0{,}48\sqrt{\mathrm{Re}}\right)}{1 + 0{,}03\,\mathrm{Re} + 0{,}48\sqrt{\mathrm{Re}}} + 0{,}1\left[\mathrm{M}_1\left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right)^2\right] +$$

$$+ 0{,}2\left[\mathrm{M}_1\left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right)^8\right] e^{\frac{\mathrm{M}_1\left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right)}{2\sqrt{\mathrm{Re}}}};$$

$$C_{f_3} = 0{,}6\mathrm{M}_1\left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right)\frac{\sqrt{\gamma}}{2}\left[1 - e^{\frac{\mathrm{M}_1\left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right)}{\mathrm{Re}}}\right];$$

$$\frac{\left(2 + 0{,}46\,\mathrm{Re}^{0{,}55}\cdot \mathrm{Pr}^{0{,}3}\right)\lambda_1}{\mathrm{Re}\,\mathrm{Pr}\left[1 + 3{,}42\left[\mathrm{M}_1\left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right)\right]^2\left(2 + 0{,}46\,\mathrm{Re}^{0{,}55}\cdot \mathrm{Pr}^{0{,}3}\right)\right]\alpha_{\text{г}}} = \alpha.$$

Контрольные вопросы к §49

1. Указать основные закономерности при течении двухфазных сред.
2. Указать, как можно представить истинную картину течения каждой фазы.
3. Как формируется главный вектор внешних массовых и поверхностных сил, действующих на фазы в объеме многофазной среды?
4. Как учитывается взаимодействие фаз при описании картины течения двухфазного потока?

Предметный указатель

Я

Список литературы

Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1991.ч.I — — 600 с.; ч. II — 304 с.

Бекнев В.С., Панков О.М., Янсон Р.А. Газовая динамика газотурбинных и комбинированных установок / Под ред. В.В.Уварова. — М.: Машиностроение, 1973. — 392 с.

Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидродинамика. — — Л - М.: ОГИЗ, 1948 — ч. I — 536 с.; ч. II — 728 с.

Круглов М.Г., Меднов А.А. Газовая динамика комбинированных двигателей внутреннего сгорания. — М.: Машиностроение, 1988. — 360 с.

Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987. — 840 с.

Руднев С.С. Гидродинамика вязкой жидкости. — ч. 1. — М.: РИО МВТУ, 1977. — 48 с.

Самойлович Г.С. Гидрогазодинамика. — М.: Машиностроение, 1990. — 384 с.

Сергель О.С. Прикладная гидрогазодинамика. — М.: Машиностроение, 1981. — 374 с.

Степанов Г.Ю. Гидродинамика решеток турбомашин. — М.: Физматгиз. — 1962. — 512 с.

Теория тепломассообмена / Под ред. А.И. Леонтьева. — М.: Высшая школа, 1979. — 495 с.

Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1969. — 744 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Бекнев Виктор Сергеевич

Епифанов Вячеслав Михайлович

Леонтьев Александр Иванович

Осипов Михаил Иванович

Панков Олег Михайлович

Шабаров Александр Борисович

Янсон Ричард Александрович

ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

Механика жидкости и газа

Редактор *Л.М.Элькинд*

Художник *С.С.Водчиц*

Технический редактор *О.В.Рыбина*

Корректор *Е.В.Авалова*

Изд. лиц. № 020523 от 25.04.97. Подписано в печать 20.08.97. Формат 60x88/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Печ. л. 42,00. Усл. печ. л. 41,16.
Уч.-изд.л. 40,83. Тираж 1 000 экз. Заказ № 3075

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана. 107005, Москва, 2-я Бауманская, 5.
Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНИТИ.
140010, г. Люберцы, Октябрьский просп., 403
Тел. 554-21-86

Н. Е. Жуковскаго.

ПРИСОЕДИНЕННЫХЪ ВИХРЯ

О присоеди

Н. Е. Ж

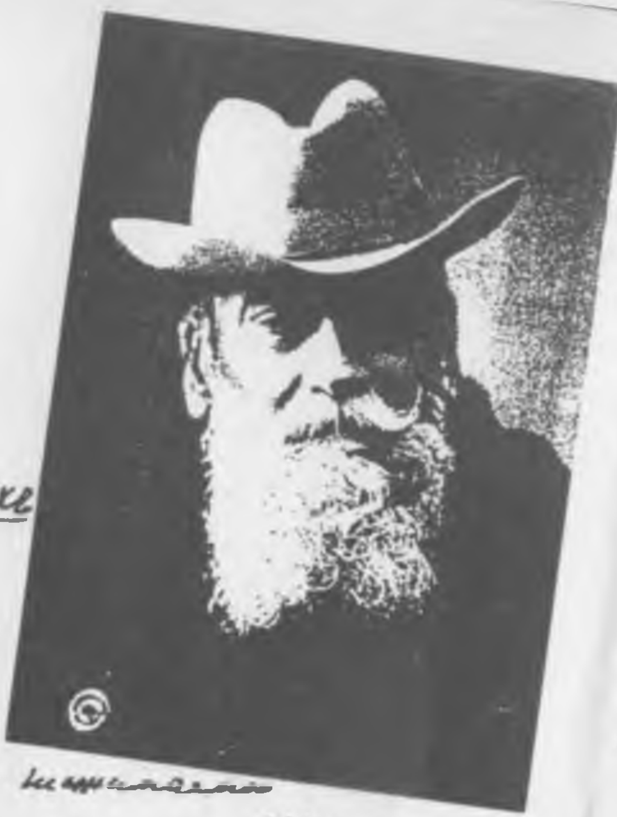
(Сообщено въ Математическомъ Обществѣ 15 ноября 1905 г.).

МОСКВА.
Университетская типографія, Страстной бульваръ.
1906.

НХЪ.

...менныхъ вихряхъ

Жуковскаго



[illegible]