

389
Б91

Г. Д. БУРДУН, Б. Н. МАРКОВ

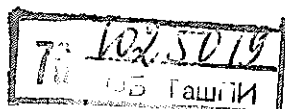
ИЗДАТЕЛЬСТВО
96

ОСНОВЫ МЕТРОЛОГИИ

*Под редакцией заслуженного деятеля
науки и техники профессора, д-ра техн.
наук Г. Д. Бурдуна*

Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР в качестве
учебного пособия для студентов вузов,
обучающихся по специальности «Приборы
точной механики»

Издание второе, дополненное



ИЗДАТЕЛЬСТВО СТАНДАРТОВ
Москва — 1975

УДК 389.001(075)

Основы метрологии. Б у р д у н Г. Д., М а р к о в Б. Н. Учебное пособие для вузов. Издание второе, дополненное. М., Издательство стандартов, 1975, 1—336 с.

В учебном пособии рассмотрены основы метрологии как науки об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства; рассмотрены способы достижения требуемой точности; приведены основные сведения о единицах физических величин, эталонах и образцовых средствах измерения, способах передачи размеров единиц от эталонов образцовым и от них рабочим средствам измерений; даны теория погрешностей и методы математической обработки результатов измерений, рассмотрены методы и средства измерений, приведены основные сведения о Государственной метрологической службе СССР, а также данные о международных метрологических организациях.

Учебное пособие предназначено для студентов машиностроительных вузов, а также может быть использовано широким кругом специалистов, работающих в области измерительной техники.

Табл. 30, илл. 51, библи. 25.

Б 30104
085(02)-75

ПРЕДИСЛОВИЕ

Научно-техническая революция, происходящая во всех областях науки и техники, повышает роль метрологии как науки об измерениях. Это объясняется тем, что без опережающего развития метрологии невозможен прогресс многих научных направлений, а также невозможно создание и эффективное использование современной измерительной техники. Как известно, важнейшей задачей, возникающей в процессе измерения, является обеспечение единства измерений и достоверности их результатов. Это связано с тем, что за последнее время резко повысились требования к точности измерений, увеличилось количество измеряемых величин и расширились диапазоны их измерения. Возникла необходимость измерять быстроизменяющиеся величины, их совокупности, характеристики процессов и систем.

Повышение роли метрологии в научном и техническом прогрессе, расширение ее задач обусловило введение в учебные планы по ряду специальностей высших учебных заведений курса «Основы метрологии». Данное пособие написано в соответствии с программой курса «Основы метрологии» для специальности «Приборы точной механики» машиностроительных высших учебных заведений и отражает опыт преподавания этого курса на приборостроительном факультете Московского станкоинструментального института (Станкина). Читаемый в Станкине курс «Основы метрологии» имеет некоторые особенности, нашедшие свое отражение и в данном учебном пособии.

Первая особенность заключается в том, что студенты приборостроительной специальности изучают в соответствии с учебным планом ряд специальных дисциплин, таких как «Приборы точной механики», «Измерительные приборы в машиностроении», «Приборы автоматического контроля размеров», «Основы теории точности средств измерений» и другие, в связи с чем отпадает необходимость изложения в курсе «Основы метрологии», а следовательно, и в данном учебном пособии ряда вопросов, относящихся непосредственно к измерительным приборам, их точностному расчету и применению в машиностроении. В частности, в курсе «Измерительные приборы в машиностроении» подробнее рассматриваются поверочные схемы для мер длины и средств измерений линейных и угловых величин.

Вторая особенность состоит в том, что Ученым советом Станкина за счет часов, отводимых по учебному плану на дисциплины приборостроительного факультета, введен специальный курс «Теория вероятностей и математическая статистика» в объеме 32 часов, дополняющий раздел основ теории вероятностей, который читается в общем курсе «Высшая математика». В соответствии с этим разделы курса «Основы метрологии», посвященные теории погрешностей, излагаются несколько более подробно.

При написании учебного пособия была использована литература по метрологии и новые утвержденные за последние годы стандарты на Государственную систему обеспечения единства измерений.

Авторы выражают искреннюю признательность рецензентам: докт. техн. наук проф. И. В. Дунину-Барковскому, проф. А. Н. Журавлеву, докт. техн. наук проф. К. П. Широкову и докт. техн. наук В. Я. Эйдинову за ценные замечания и предложения, которые авторы стремились учесть при подготовке учебного пособия к печати.

Главы I, III, IV, V и XI написал Г. Д. Бурдун, главы VI, VII, VIII и IX — Б. Н. Марков, главы II и X — Г. Д. Бурдун и Б. Н. Марков.

Во втором издании сделаны некоторые уточнения в тексте и дополнения в соответствии с вышедшими в 1972 и 1973 гг. Государственными стандартами на Государственную систему обеспечения единства измерений.

Авторы выражают благодарность руководителю отдела ВНИИМ им. Д. И. Менделеева канд. техн. наук Е. Ф. Долинскому за ценные замечания по первому изданию книги.

Авторы будут благодарны за все замечания и предложения, которые просят направлять в адрес издательства (Москва, Д-22, Новопресненский пер., д. 3, Издательство стандартов).

§ 1. МЕТРОЛОГИЯ — НАУКА ОБ ИЗМЕРЕНИЯХ

В практической жизни человек всюду имеет дело с измерениями. На каждом шагу встречаются и известны с незапамятных времен измерения таких величин, как длина, объем, вес, время и др.

Измерения являются одним из важнейших путей познания природы человеком. Они дают количественную характеристику окружающего лица, раскрывая человеку действующие в природе закономерности. Математика, механика, физика стали именоваться точными науками потому, что благодаря измерениям они получили возможность устанавливать точные количественные соотношения, выражающие объективные законы природы. Д. И. Менделеев выразил значение измерений для науки следующим образом: «Наука начинается с тех пор, как начинают измерять. Точная наука немислима без меры».

Все отрасли техники — от строительной механики и машиностроения до ядерной энергетики — не могли бы существовать без развернутой системы измерений, определяющих как все технологические процессы, контроль и управление ими, так и свойства и качество выпускаемой продукции.

Велико значение измерений в современном обществе. Они служат не только основой научно-технических знаний, но имеют первостепенное значение для учета материальных ресурсов и планирования, для внутренней и внешней торговли, для обеспечения качества продукции, взаимозаменяемости узлов и деталей и совершенствования технологии, для обеспечения безопасности труда и других видов человеческой деятельности.

Особенно возросла роль измерений в наш век широкого внедрения новой техники, развития электроники, автоматизации, атомной энергетики, космических полетов. Высокая точность управления полетами космических аппаратов достигнута благодаря современным совершенным средствам измерений, устанавливаемым как на самих космических аппаратах, так и в измерительно-управляющих центрах.

Большое разнообразие явлений, с которыми приходится сталкиваться, определяет широкий круг величин, подлежащих измерению. Если в конце XVIII в. при установлении метрической систе-

мы мер существовала необходимость лишь в измерении длины, площади, объема, вместимости и веса, то в настоящее время круг величин, подлежащих измерению, значительно расширился, включив механические, тепловые, электрические, световые и другие величины.

Во всех случаях проведения измерений, независимо от измеряемой величины, метода и средства измерений, есть общее, что составляет основу измерений, — это сравнение опытным путем данной величины с другой подобной ей, принятой за единицу. При всяком измерении мы с помощью эксперимента оцениваем физическую величину в виде некоторого числа принятых для нее единиц, т. е. находим ее значение.

В настоящее время установлено следующее определение измерения: *измерение* есть нахождение значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств.

Простейшим примером измерения является определение с помощью микрометра диаметра обрабатываемого на станке металлического стержня. Вместе с тем в современной технике существуют и более сложные измерения, выполняемые с помощью комплекса специальных средств измерений.

Отраслью науки, изучающей измерения, является метрология. Слово «метрология» образовано из двух греческих слов: метрон — мера и логос — учение. Дословный перевод слова «метрология» — учение о мерах.

Долгое время метрология оставалась в основном описательной наукой о различных мерах и соотношениях между ними. С конца прошлого века благодаря прогрессу физических наук метрология получила существенное развитие. Большую роль в становлении современной метрологии как одной из наук физического цикла сыграл Д. И. Менделеев, руководивший отечественной метрологией в период 1892—1907 гг.

Метрология в ее современном понимании — наука об измерениях, методах и средствах обеспечения их единства и способах достижения требуемой точности.

Единство измерений — такое состояние измерений, при котором их результаты выражены в узаконенных единицах и погрешности измерений известны с заданной вероятностью. Единство измерений необходимо для того, чтобы можно было сопоставить результаты измерений, выполненных в разных местах, в разное время, с использованием разных методов и средств измерений.

Точность измерений характеризуется близостью их результатов к истинному значению измеряемой величины.

Таким образом, важнейшей задачей метрологии является обеспечение единства и необходимой точности измерений.

В большинстве стран мира мероприятия по обеспечению единства и требуемой точности измерений (узаконение определенных единиц измерений, проведение регулярной поверки мер и измерительных приборов, находящихся в эксплуатации, испытания

вновь выпускаемых средств измерений) установлены законодательно. Поэтому один из разделов метрологии называется *законодательной метрологией* и включает комплексы взаимосвязанных и взаимообусловленных общих правил, требований и норм, а также другие вопросы, нуждающиеся в регламентации и контроле со стороны государства, направленные на обеспечение единства измерений и единообразия средств измерений.

§ 2. ЗНАЧЕНИЕ МЕТРОЛОГИИ ДЛЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОГО ПРОГРЕССА И ЕЕ РОЛЬ В НАРОДНОМ ХОЗЯЙСТВЕ СТРАНЫ

Метрология имеет большое значение для прогресса естественных и технических наук, ибо повышение точности измерений — один из путей совершенствования познания природы человеком, открытий и практического применения точных знаний.

Точные измерения неоднократно позволяли делать фундаментальные открытия. Так, ученым Майкельсоном был поставлен опыт для обнаружения небольшого ожидаемого смещения интерференционной картины, вызываемого, по существовавшему в то время мнению, взаимным движением источника и приемника света. Однако тщательные измерения показали, что смещения не происходит. Результаты этого эксперимента были использованы А. Эйнштейном при создании одной из важнейших теорий современной физики — теории относительности. Повышение точности измерения плотности воды привело в 1932 г. к открытию тяжелого изотопа водорода — дейтерия, ничтожное содержание которого в обычной воде увеличивает ее плотность.

Современная научно-техническая революция обусловила развитие метрологии, связанное с усовершенствованием эталонов, разработкой новых методов точных измерений, осуществлением мероприятий по обеспечению единства и требуемой точности измерений.

Велико практическое значение метрологии для народного хозяйства страны. Она служит научной основой измерительной техники.

Под *измерительной техникой*, в широком смысле этого слова, понимают как все технические средства, с помощью которых выполняют измерения, так и технику проведения измерений.

Измерительная техника в торговле, промышленности, транспорте, связи, медицине и других отраслях народного хозяйства занимает значительное место среди материальных и трудовых ресурсов современного общества. Только в СССР ежедневно выполняются несколько миллиардов различных измерений, они составляют сущность профессии не менее 3 миллионов трудящихся. Доля затрат на измерительную технику в настоящее время составляет не менее 15% всех затрат на оборудование в машиностроении и свыше 25% в радиоэлектронной, химической, самолетостроительной и ряде других отраслей промышленности.

Для удовлетворения нужд народного хозяйства страны в проведении измерений на необходимом научно-техническом уровне создана Государственная метрологическая служба СССР, задача которой — обеспечение единства и достоверности измерений и единообразия средств измерений.

Особую роль играет метрология в решении важнейшей задачи, поставленной XXIV съездом КПСС — повышении качества продукции, и не только потому, что все показатели качества представляют собой величины, контролируемые при помощи соответствующих средств измерений. Современное развитие технологии производства свидетельствует об органической связи ее с метрологией и требует обеспечения необходимых параметров качества в процессе производства продукции. В машиностроении это достигается путем применения активного контроля при изготовлении изделий на металлообрабатывающих станках, в металлургической, химической и других отраслях промышленности путем автоматического регулирования производственных процессов.

Для обеспечения научно-технического прогресса метрология должна опережать в своем развитии другие области науки и техники, ибо для каждой из них точные измерения являются одним из основных путей их совершенствования.

§ 3. КЛАССИФИКАЦИЯ И ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗМЕРЕНИЙ

Измерение является важнейшим понятием в метрологии. Это организованное действие человека, выполняемое для количественного познания свойств физического объекта с помощью определения опытным путем значения какой-либо физической величины.

Существует несколько видов измерений. При классификации их обычно исходят из характера зависимости измеряемой величины от времени, вида уравнения измерений, условий, определяющих точность результата измерений, и способов выражения этих результатов.

По характеру зависимости измеряемой величины от времени измерения разделяются на:

статические, при которых измеряемая величина остается постоянной во времени,

динамические, в процессе которых измеряемая величина изменяется и является непостоянной во времени.

Статическими измерениями являются, например, измерения размеров тела, постоянного давления, динамическими — измерения пульсирующих давлений, вибраций.

По способу получения результатов измерений (виду уравнения измерений) их разделяет на прямые, косвенные, совокупные и совместные.

Прямые — это измерения, при которых искомое значение физической величины находят непосредственно из опытных данных. Прямые измерения можно выразить формулой $Q=X$, где Q — искомое значение измеряемой величины, а X — значение, непосредственно получаемое из опытных данных.

При прямых измерениях экспериментальным операциям подвергают измеряемую величину, которую сравнивают с мерой непосредственно или же с помощью измерительных приборов, градуированных в требуемых единицах. Примерами прямых измерений служат измерения длины тела масштабной линейкой, массы при помощи весов и др. Прямые измерения широко применяются в машиностроении (измерения размерных параметров), а также при контроле технологических процессов (измерение давления, температуры и др.).

Косвенные — это измерения, при которых искомую величину определяют на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям.

При косвенных измерениях измеряют не собственно определяемую величину, а другие величины, функционально с ней связанные. Значение измеряемой величины находят путем вычисления по формуле

$$Q=f(X_1, X_2, X_3, \dots),$$

где Q — искомое значение косвенно измеряемой величины; f — знак функциональной зависимости, форма которой и природа связанных ею величин заранее известны; $X_1, X_2, X_3, \dots$ — значения величин, измеренных прямым способом.

Примерами косвенных измерений могут служить определение объема тела по прямым измерениям его геометрических размеров, нахождение удельного электрического сопротивления проводника по его сопротивлению, длине и площади поперечного сечения.

Косвенные измерения широко распространены в тех случаях, когда искомую величину невозможно или слишком сложно измерить непосредственно или когда прямое измерение дает менее точный результат. Роль косвенных измерений особенно велика при измерении величин, недоступных непосредственному экспериментальному сравнению, например размеров астрономического или внутриатомного порядка.

Совокупные — это производимые одновременно измерения нескольких одноименных величин, при которых искомую величину определяют решением системы уравнений, получаемых при прямых измерениях различных сочетаний этих величин.

Примером совокупных измерений является определение массы отдельных гирь набора (калибровка по известной массе одной из них и по результатам прямых сравнений масс различных сочетаний гирь).

Пусть, например, необходимо произвести калибровку разновеса, состоящего из гирь массой 1, 2, 2*, 5, 10 и 20 кг (звездочкой

отмечена гиря, имеющая то же самое номинальное значение). Калибровка состоит в определении массы каждой гири по одной образцовой гире, например по гире массой 1 кг. Для этого проведем измерения, меняя каждый раз комбинацию гирь (цифры показывают массу отдельных гирь, 1 об — обозначает массу образцовой гири в 1 кг):

$$1 = 1 \text{ об} + a,$$

$$1 + 1 \text{ об} = 2 + b,$$

$$2^* = 2 + c,$$

$$1 + 2 + 2^* = 5 + d \text{ и т. д.}$$

Буквы a , b , c и d означают грузики, которые приходится прибавлять или отнимать от массы гири, указанной в правой части уравнения. Решив эту систему уравнений, можно определить значение каждой гири.

Совместные — это производимые одновременно измерения двух или нескольких неоднородных величин для нахождения зависимостей между ними.

В качестве примера совместных измерений можно назвать измерение электрического сопротивления при 20°C и температурных коэффициентов измерительного резистора по данным прямых измерений его сопротивления при различных температурах.

По условиям, определяющим точность результата, измерения делятся на три класса.

1. *Измерения максимально возможной точности*, достижимой при существующем уровне техники.

К ним относятся в первую очередь эталонные измерения, связанные с максимально возможной точностью воспроизведения установленных единиц физических величин, и, кроме того, измерения физических констант, прежде всего универсальных (например, абсолютного значения ускорения свободного падения, гиромагнитного отношения протона и др.).

К этому же классу относятся и некоторые специальные измерения, требующие высокой точности.

2. *Контрольно-поверочные измерения*, погрешность которых не должна превышать некоторое заданное значение.

К ним относятся измерения, выполняемые лабораториями государственного надзора за внедрением и соблюдением стандартов и состоянием измерительной техники и заводскими измерительными лабораториями и осуществляемые такими средствами измерений и по такой методике, которые гарантируют погрешность результата, не превышающую некоторого, заранее заданного значения.

3. *Технические измерения*, в которых погрешность результата определяется характеристиками средств измерений.

Примерами технических измерений являются измерения, выполняемые в процессе производства на машиностроительных пред-

приборах, на щитах распределительных устройств электрических станций и др.

По способу выражения результатов измерений различают абсолютные и относительные измерения.

Абсолютными называются измерения, которые основаны на прямых измерениях одной или нескольких основных величин или на использовании значений физических констант.

Примером абсолютных измерений может служить определение длины в метрах, силы электрического тока в амперах, ускорения свободного падения в метрах на секунду в квадрате.

Относительными называются измерения отношения величины к одноименной величине, играющей роль единицы, или измерения величины по отношению к одноименной величине, принимаемой за исходную.

В качестве примера относительных измерений можно привести измерение относительной влажности воздуха, определяемой как отношение количества водяных паров в 1 м³ воздуха к количеству водяных паров, которое насыщает 1 м³ воздуха при данной температуре.

Основными характеристиками измерений являются: принцип измерений, метод измерений, погрешность, точность, правильность и достоверность измерений.

Принцип измерений — физическое явление или совокупность физических явлений, положенных в основу измерений. Например, измерение массы тела при помощи взвешивания с использованием силы тяжести, пропорциональной массе, измерение температуры с использованием термоэлектрического эффекта.

Метод измерений — совокупность приемов использования принципов и средств измерений. Средствами измерений являются используемые технические средства, имеющие нормированные метрологические свойства.

Погрешность измерений — разность между полученным при измерении X' и истинным Q значениями измеряемой величины. Погрешность измерения Δ определяется формулой

$$\Delta = X' - Q.$$

Погрешность измерений вызывается несовершенством методов и средств измерений, непостоянством условий наблюдения, а также недостаточным опытом наблюдателя или особенностями его органов чувств.

Как указывалось выше, точность измерений — это характеристика измерений, отражающая близость их результатов к истинному значению измеряемой величины.

Количественно точность можно выразить величиной, обратной модулю относительной погрешности:

$$\varepsilon = \left| \frac{\Delta}{Q} \right|^{-1}.$$

Например, если погрешность измерений равна $10^{-2}\% = 10^{-4}$, то точность равна 10^4 .

Правильность измерения определяется как качество измерения, отражающее близость к нулю систематических погрешностей результатов (т. е. таких погрешностей, которые остаются постоянными или закономерно изменяются при повторных измерениях одной и той же величины). Правильность измерений зависит, в частности, от того, насколько действительный размер единицы, в которой выполнено измерение, отличается от ее истинного размера (по определению), т. е. от того, в какой степени были правильны (верны) средства измерений, использованные для данного вида измерений.

Важнейшей характеристикой качества измерений является их *достоверность*; она характеризует доверие к результатам измерений и делит их на две категории: достоверные и недостоверные, в зависимости от того, известны или неизвестны вероятностные характеристики их отклонений от истинных значений соответствующих величин. Результаты измерений, достоверность которых неизвестна, не представляют ценности и в ряде случаев могут служить источником дезинформации.

Наличие погрешности ограничивает достоверность измерений, т. е. вносит ограничение в число достоверных значащих цифр числового значения измеряемой величины и определяет точность измерений.

§ 4. ГОСУДАРСТВЕННЫЕ НАУЧНЫЕ МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ УЧРЕЖДЕНИЯ СССР

Первым научным метрологическим учреждением в России была созданная в 1893 г. Д. И. Менделеевым Главная палата мер и весов. Ее задача состояла в «сохранении в государстве единообразия, верности и взаимосоответствия мер и весов». Главная палата провела большую работу по организации метрологической службы в России, а в период 1918—1927 гг. — по внедрению метрической системы мер в СССР.

Д. И. Менделеев, руководя Главной палатой мер и весов в течение последних пятнадцати лет своей жизни, не только лично участвовал в важнейших научных метрологических исследованиях (возобновлении прототипов русских мер, точных измерениях массы, определении плотности спиртовых растворов, измерении ускорения свободного падения и др.), но и создал центральное метрологическое учреждение, стоящее на уровне науки своего времени, организовал поверочное дело в стране.

В настоящее время на базе Главной палаты существует высшее научное метрологическое учреждение нашей страны — Всесоюзный ордена Трудового Красного Знамени научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева (ВНИИМ).

В лабораториях института разрабатываются и хранятся государственные эталоны единиц измерений, разрабатываются и совершенствуются методы точных измерений физических величин, определяются физические константы, характеристики веществ и материалов. Тематика научных работ института охватывает: линейные, угловые, оптические и фотометрические измерения, измерения массы, плотности, вязкости, силы, твердости, скорости, ускорений, вибраций, давлений, вакуума, измерения температурных, теплофизических и термохимических характеристик, pH-измерения, измерения влажности, составов газов, акустические, электрические и магнитные, радиотехнические и ионизирующих излучений.

В 1955 г. под Москвой был создан второй крупнейший метрологический центр нашей страны — Всесоюзный научно-исследовательский институт физико-технических и радиотехнических измерений (ВНИИФТРИ). Институт разрабатывает эталоны и средства точных измерений в ряде важнейших областей науки и техники, имеющих особое значение для научно-технического прогресса в радиоэлектронике, службе времени и частоты, акустике, в области ионизирующих излучений, высоких давлений, низких температур, автоматизации, анализа и обработки информации.

В Москве на базе существовавшего с 1934 г. Московского государственного института мер и измерительных приборов в 1955 г. создан Всесоюзный научно-исследовательский институт Государственного комитета стандартов Совета Министров СССР (ВНИИГК), являющийся головной научной организацией в области прикладной и законодательной метрологии. С 1972 г. институт реорганизован во Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологической службы (ВНИИМС).

Кроме трех всесоюзных научно-исследовательских метрологических институтов в настоящее время работают научно-исследовательские метрологические институты в Харькове, Новосибирске, филиалы ВНИИМ в Свердловске и Тбилиси и филиалы ВНИИФТРИ в Казани, Иркутске, Хабаровске и Львове.

В союзных республиках организованы республиканские центры по метрологии и стандартизации, а в областных центрах и крупных городах — лаборатории государственного надзора за внедрением и соблюдением стандартов и состоянием измерительной техники (ЛГН) и их отделения.

Руководство метрологическими учреждениями страны осуществляет Государственный комитет стандартов Совета Министров СССР (Госстандарт СССР).

§ 5. МЕЖДУНАРОДНЫЕ МЕТРОЛОГИЧЕСКИЕ ОРГАНИЗАЦИИ

Рост культурных и экономических связей между странами поставил в качестве неотложной задачи обеспечение международного единообразия мер.

Первым шагом в этом направлении было установление в конце XVIII века во Франции, в период Великой Французской революции, метрической системы мер, которая, по мысли ее создателей, должна была служить «на все времена, для всех народов». Однако только во второй половине XIX века метрическая система получила признание в качестве международной. В этом направлении большую роль сыграла Петербургская Академия наук.

В 1870 г. в Париже по предложению Петербургской Академии наук было созвано совещание, которое должно было «принять меры для привлечения внимания правительств разных стран к необходимости установления прототипов мер». Петербургская Академия наук предложила организовать международную комиссию, которой было бы поручено изготовить прототипы мер длины и массы. Такая комиссия была организована и в 1872 г. приняла решение о создании платино-иридиевых эталонов метра и килограмма, которые должны были представлять основные единицы метрической системы.

20 мая 1875 г. 17 государств, в том числе и Россия, на Международной Дипломатической конференции по метру (в которой участвовали дипломатические представители этих стран) «для обеспечения международного единства и усовершенствования метрической системы» подписали Метрическую конвенцию.

В соответствии с этой конвенцией устанавливалось международное сотрудничество стран, подписавших ее, путем:

а) создания научного учреждения — Международного бюро мер и весов, содержащегося на средства всех стран, подписавших Метрическую конвенцию;

б) учреждения Международного комитета мер и весов в составе ученых разных стран (в настоящее время 18 человек), осуществляющего руководство деятельностью Международного бюро мер и весов;

в) созыва не реже одного раза в шесть лет генеральных конференций по мерам и весам для «обсуждения и принятия необходимых мер по распространению и усовершенствованию метрической системы».

Международное бюро мер и весов, находящееся в Севре (близ Парижа), хранит международные прототипы мер (метра и килограмма), имеет международные эталоны электрических и световых единиц и радиоактивности, организует регулярные международные сличения национальных эталонов длины, массы, электродвижущей силы, электрического сопротивления, силы света, светового потока, источников ионизирующих излучений, а также отдельные международные сличения исходных образцовых мер (платиновых термометров сопротивления, температурных ламп, измерительных приборов на сверхвысоких частотах и др.).

При Международном комитете мер и весов функционируют семь консультативных комитетов: по единицам, по определению

метра, по определению секунды, по термометрии, по электричеству, по фотометрии и по эталонам для измерений ионизирующих излучений.

В настоящее время Метрическую конвенцию подписала 41 страна, метрическая же система мер узаконена в более чем 110 странах мира.

В 1933 г. ученые ВНИИМ поставили на Генеральной конференции по мерам и весам вопрос о международном сотрудничестве и в области законодательной метрологии. Этот вопрос изучался на Международной конференции по прикладной метрологии (1937 г.) и во Временном международном комитете законодательной метрологии (1946—1956 гг.). В результате этого в 1956 г. была подписана межправительственная конвенция об учреждении Международной организации законодательной метрологии (МОЗМ). В настоящее время членами этой организации являются 35 стран мира. МОЗМ призвана решить следующие основные задачи:

а) создание центра документации и информации о национальных службах контроля за измерительными приборами, подлежащими надзору в соответствии с правилами, установленными законами, и об их поверке;

б) перевод и издание текстов законодательных правил об измерительных приборах и их использовании;

в) изучение с целью унификации методов и правил решения тех задач законодательного и распорядительного характера в области законодательной метрологии, которые представляют международный интерес;

г) составление типового проекта закона и регламента, относящихся к измерительным приборам и их применению;

д) разработка проекта материальной организации типовой службы по поверке измерительных приборов и контролю за ними;

е) установление характеристик и качеств, которые должны быть присущи измерительным приборам, рекомендованным для применения в международном масштабе.

При организации существует Международное бюро законодательной метрологии, находящееся в Париже. Его деятельностью руководит Международный комитет законодательной метрологии. В соответствии с конвенцией не реже одного раза в шесть лет созываются Международные конференции по законодательной метрологии, в которых участвуют полномочные представители всех стран — членов организации.

В Международной организации законодательной метрологии в настоящее время функционируют 66 секретариатов-докладчиков, закрепленных за метрологическими службами отдельных стран и разрабатывающих как общие вопросы законодательной метрологии (понятие о типах, образцах и системах измерительных приборов, классы точности измерительных приборов, клеймение

и маркировка мер и измерительных приборов, составление словаря законодательной метрологии), так и вопросы, относящиеся к отдельным видам измерительных приборов (весам, тахометрам, манометрам, водомерам, счетчикам горючего, электрическим счетчикам, влагомерам зерна, спиртомерам, медицинским термометрам и др.).

В 1958 г. по инициативе научно-технических обществ ряда стран была создана Международная Конференция по измерительной технике и приборостроению (ИМЕКО), объединяющая в настоящее время 19 научно-технических обществ по измерительной технике и приборостроению разных стран мира.

ИМЕКО регулярно, раз в три года, созывает Международные конгрессы по измерительной технике и приборостроению. В промежутках между конгрессами проводятся симпозиумы по отдельным проблемам метрологии, измерительной техники и технологии приборостроения.

Генеральный Комитет ИМЕКО находится в г. Будапеште (Венгрия).

§ 6. АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ МЕТРОЛОГИИ

Программа КПСС устанавливает, что «максимальное ускорение научно-технического прогресса — важнейшая всенародная задача». Научно-технический прогресс определяет и уровень материального благосостояния народа, и темпы строительства материально-технической базы коммунизма. Ускорение научно-технического прогресса находится в прямой связи с интенсивным развитием метрологии и техники точных измерений, необходимых как для развития естественных и точных наук, так и для создания новой технологии и усовершенствования средств технического контроля и управления. Все это ставит перед метрологией ряд важнейших задач.

В области единиц измерений одной из основных задач является унификация их на базе широкого внедрения единой Международной системы единиц (СИ). Эта система обеспечивает единообразие применяемых единиц для всех областей науки и техники.

Значительно повышаются требования к высшему звену в средствах измерений — к эталонам. Точность измерений в промышленности во многих случаях приближается к предельно возможной при данном состоянии техники и, следовательно, к точности самих эталонов. На очереди дня все более широкое использование фундаментальных физических констант и атомных постоянных, характеризующихся высокой стабильностью, в качестве основы новых, более совершенных эталонов.

Для поддержания единства измерений, проводимых в разных местах и в разное время, необходимо обеспечить передачу размера

единиц от эталонов образцовым, а от них рабочим средствам измерений с наименьшей потерей точности. Устройство современных эталонов и способы передачи размера единиц должны обеспечивать выполнение этого требования.

Неотложной задачей является распространение точных измерений на области очень малых и больших значений измеряемых величин (малых и больших масс, глубокого вакуума и сверхвысоких давлений, сверхнизких и сверхвысоких температур, сверхвысоких частот и др.). Необходимость передачи размера единиц измерений приборам, измеряющим исчезающе малые или сверхбольшие значения величин, часто не позволяет ограничиваться одним эталоном и требует создания нескольких независимых специальных эталонов для одной и той же величины.

Большое значение также приобретают вопросы проведения предельно точных измерений в особых нестационарных условиях, при динамических режимах, при больших ускорениях, высоких или очень низких температурах, давлениях, частотах.

Развитие измерительных и измерительно-управляющих систем привело к качественным изменениям самого процесса измерения. Кроме величин, сравнивают процессы, имеющие многочисленные параметры и характеристики. Метрологическое обеспечение должно быть распространено и на измерительно-управляющие системы.

Важные задачи стоят и в области теории измерений. Развитие математической статистики и теории случайных функций оказывает влияние на вопросы метрологической обработки результатов измерений.

Широкое применение автоматических методов контроля и регулирования требует дополнений к сложившимся метрологическим понятиям и представлениям. Методы и средства измерений, используемые в медицине, строительстве, химической промышленности и других отраслях науки и техники, должны быть усовершенствованы.

Служа научной основой измерительной техники, метрология должна обеспечивать необходимую надежность и правильность получаемой измерительной информации, а также законодательно определять единство измерений в стране, единство методов и средств контроля технологических процессов и испытания продукции. Метрология и обобщает практический опыт в этой области, и соответственно направляет развитие измерительной техники.

Метрология органически связана со стандартизацией, и эта связь выражается прежде всего в стандартизации единиц измерений, системы государственных эталонов, средств измерений и методов поверки, в создании стандартных образцов свойств и состава веществ. В свою очередь, стандартизация опирается на метрологию, обеспечивающую правильность и сопоставимость результатов испытаний материалов и изделий, а также заимствует из метрологии методы определения и контроля показателей качества.

Одна из важных задач, поставленных XXIV съездом КПСС, —

повышение качества продукции — находится в прямой зависимости от степени метрологического обслуживания производства. Первоочередной задачей метрологического обеспечения качества продукции является разработка и введение в стандарты научно обоснованных критериев качества и методов испытаний.

В тесном взаимодействии метрология и стандартизация являются важными рычагами технического прогресса во всех областях науки и народного хозяйства страны.

§ 7. ВИДЫ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Понятие о физической величине — одно из наиболее общих в физике и метрологии. Согласно ГОСТ 16263—70 «Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Термины и определения», под *физической величиной* понимается «свойство, общее в качественном отношении многим физическим объектам (физическим системам, их состояниям и происходящим в них процессам), но в количественном отношении индивидуальное для каждого объекта». Так, все тела обладают массой и температурой, но для каждого из них эти параметры различны. То же самое можно сказать и о других величинах — электрическом токе, вязкости жидкостей или потоке излучения.

Для того, чтобы можно было установить различия в количественном содержании в каждом данном объекте свойства, отображаемого физической величиной, вводится понятие *размера физической величины*.

Между размерами каждой физической величины существуют отношения, которые, как оказывается при их подробном изучении, имеют ту же логическую структуру, что и отношения между числовыми формами (целыми, рациональными или действительными числами, векторами, матрицами). Поэтому множество числовых форм с определенными отношениями между ними (типа «больше», «меньше», «равенства», «суммы» и т. д.) может служить моделью физической величины, т. е. множества ее размеров с отношениями между ними.

Если соответствие между формальной моделью и самой физической величиной оказывается достаточно строгим и точным, то изучение физических величин и связей между ними можно свести к исследованию лишь их моделей.

Комплекс правил, в соответствии с которыми числовые формы приписываются размерам величин, определяется наличием тех или иных отношений на множестве их размеров. В связи с этим можно выделить три группы физических величин, измерение которых осуществляется по принципиально различным правилам.

К первой группе отнесем величины, на множестве размеров которых определены лишь отношения типа «тверже—мягче», «теплее—холоднее», «одинаково твердые—одинаково теплые». В математике эти отношения получили названия отношений порядка и эквивалентности. Существование подобных отношений устанавливается теоретически, исходя из общефизических соображений, или экспериментально с помощью специальных технических устройств (средств измерений) либо наблюдателем. Так, мы без труда находим, что медь тверже резины, но для обнаружения различия в твердости двух образцов твердости приходится прибегать к помощи измерительных приборов.

К величинам первой группы относится, например, твердость, определяемая как способность тела оказывать сопротивление проникновению в него другого тела, или температура, понимаемая просто как степень нагретости тела.

Вторая группа величин характеризуется тем, что отношения порядка и эквивалентности имеют место не только между их размерами, но и между различиями (разностями) в парах размеров. К этой группе относятся такие величины, как время, потенциал, энергия или температура, связанная, по определению, со шкалой ртутного термометра. Возможность сравнения разностей их размеров вытекает из самих определений этих величин. Так, разности температур считаются равными, если равны расстояния между соответствующими отметками на шкале ртутного термометра. Способ градуировки шкалы не имеет при этом никакого значения. Ясно, что проверить равенство разностей температуры, определенной просто как степень нагретости тел, не представляется возможным.

На множестве размеров величин третьей группы определены, кроме вышеперечисленных, еще и отношения, называемые операциями, подобные арифметическому сложению и вычитанию. Операция считается определенной, если ее результат (сумма или разность) снова является размером той же физической величины, и существует способ ее технической реализации. Операция сложения определяет операцию умножения размеров величин на любое целое число n . Результат такого умножения есть просто сумма n размеров данной величины. К числу подобных величин относятся, например, длина, давление, масса или термодинамическая температура.

Сумма двух масс — это масса такого тела, которое уравнивает на весах первые два, положенные на одну чашу, а разностью является масса тела, которое нужно положить на чашу весов, где помещено более легкое тело, чтобы привести весы в равновесие. Но такие величины, как электрический потенциал или время, уже не относятся к этой группе, поскольку разность двух потенциалов уже не потенциал, а разность двух моментов времени не является снова моментом.

Нетрудно заметить, что к величинам третьей группы можно отнести и множество различий (разностей) в размерах величин второй

группы, поскольку для них тоже могут быть найдены операции, подобные сложению. Поскольку все арифметические операции сводятся, по существу, к сложению, то эти величины оказываются наиболее удобными для применения в физике. Поэтому часто только такие величины и относят к числу физических.

Интересно отметить, что определения многих физических величин не являются неизменными, а постоянно уточняются. Уточнение определений происходит в направлении, позволяющем вскрыть все большее число отношений на множестве их размеров и ввести их, таким образом, в число величин третьей или хотя бы второй группы, что позволяет значительно упростить аналитические выражения физических законов.

Не случайно температура была упомянута среди величин всех трех групп. Вначале ее определяли интуитивно как степень нагретости тела. Определенная таким образом температура могла входить в законы физики только в неявном виде. Уравнение состояния идеальных газов могло бы при этом иметь только следующий вид: $pV = f(\Theta)$, где $f(\Theta)$ — никоим образом не определенная функция температуры.

Определение, связавшее температуру с ртутной шкалой, позволило перевести ее во вторую группу величин. Благодаря этому температура вошла в некоторое, правда, еще очень ограниченное число уравнений физики. И только определение, которое дал Кельвин, и определение, основанное на явлении теплового расширения идеальных газов, а также данное тем же Кельвином доказательство идентичности этих двух определений, позволили перевести температуру в разряд величин третьей группы и сделать ее равноправной физической величиной.

§ 8. КОЛИЧЕСТВЕННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН

Для того чтобы обосновать возможность количественного представления, т. е. измерения величин различных групп, необходимо остановиться еще на одном метрологическом понятии — *измерительном преобразовании*. Это такой вид преобразования, при котором устанавливается *взаимно-однозначное соответствие между размерами двух величин, сохраняющее для некоторого множества размеров преобразуемой величины все определенные для нее отношения и операции*. В большинстве случаев измерительные преобразования могут быть осуществлены техническими устройствами, называемыми преобразователями. Преобразуемая величина называется тогда входной, а результат преобразования — выходной величиной. Множество размеров входной величины, подвергаемой преобразованию с помощью данного преобразователя, называется диапазоном преобразования.

Операции сложения и умножения на целое число размеров величин третьей группы и разностей размеров величин второй груп-

ны позволяют проверить (теоретически и экспериментально) *линейность преобразований* их друг в друга.

Измерительное преобразование называется линейным, если при увеличении преобразуемой величины Q на ΔQ результат преобразования — величина R — увеличивается (или уменьшается) на ΔR , а при увеличении ΔQ в n раз ΔR увеличивается также в n раз и ΔQ и n таковы, что Q и $Q + n\Delta Q$ лежат в диапазоне преобразований. Очевидно, что линейность преобразований, в которых участвуют величины первой группы, проверить нельзя. Все же остальные величины могут быть переведены друг в друга линейными измерительными преобразованиями.

Длина относится к величинам третьей группы, поэтому способ приписания чисел размерам величин этой группы должен быть принципиально тем же, что и способ числового представления длин, рассматриваемый в классической геометрии. Возможность измерения этих величин обосновывается следующей теоремой, доказательство которой основано на аксиомах, подобных аксиомам евклидовой геометрии.

Каждому размеру величины Q можно приписать положительное действительное число q , являющееся наименьшим из рациональных чисел m/n , где m и n — целые числа, определяемые из соотношения

$$nQ \leq m[Q],$$

где $[Q]$ — некоторый размер физической величины, называемый единицей данной физической величины. Число q называется *числовым значением* величины Q , а ее количественное выражение в виде некоторого числа принятых для нее единиц — *значением физической величины**:

$$Q = q [Q]. \quad (\text{II.1})$$

Из уравнения (II.1) следует, что числовое значение величин третьей группы показывает, во сколько раз значение измеряемой величины больше некоторого значения, принятого за единицу. Отсюда вытекает следующее определение измерения таких величин: «измерением мы называем познавательный процесс, заключающийся в сравнении путем физического эксперимента данной величины с некоторым ее значением, принятым за единицу сравнения»**.

Уравнение (II.1) является основным уравнением измерения. Оно показывает, что числовое значение величины зависит от размера принятой единицы. Для единиц $[Q]_1$ и $[Q]_2$ числовые значения одной и той же величины составляют

* Правильнее было бы говорить о значении и о числовом значении не самих величин, а размеров величин. Однако в дальнейшем мы будем использовать именно эти термины, поскольку они приведены в ГОСТ 16263—70.

** М а л и к о в М. Ф. Основы метрологии. М., Изд. Комитета по делам мер и измерительных приборов, 1949.

$$q_1 = \frac{Q}{[Q]_1}; \quad q_2 = \frac{Q}{[Q]_2},$$

откуда непосредственно следует:

$$q_2 = q_1 \frac{[Q]_1}{[Q]_2} = k_{1-2} q_1, \quad (\text{II.2})$$

где k_{1-2} — переводной множитель, т. е. отвлеченное число, на которое нужно умножить числовое значение величины, выражаемое в первой единице, чтобы получить ее числовое значение, выраженное во второй единице.

Соотношение (II.2) показывает, что *числовые значения для величин третьей группы единственны до преобразования подобия*.

Для величин второй группы можно написать выражение, аналогичное выражению (II.1):

$$S_2 - S_1 = s_{21} [S],$$

где $S_2 - S_1$ — измеряемая разность размеров; s_{21} — числовые значения этой разности; $[S]$ — единица данной величины, равная любой заранее выбранной разности размеров.

Для того, чтобы путем сравнения разностей можно было сравнивать размеры самих величин, необходимо измерять разности между интересующими нас размерами S величины и некоторым ее вполне определенным размером S_0 , принимаемым за начало отсчета. Тогда

$$S - S_0 = s[S], \quad (\text{II.3})$$

и числовое значение любой разности $S_2 - S_1$ можно найти из равенств

$$S_2 - S_1 = (S_2 - S_0) - (S_1 - S_0) = s_2[S] - s_1[S] = s_{21}[S].$$

Уравнение (II.3) формально можно записать в виде

$$S = S_0 + s[S]. \quad (\text{II.3}')$$

Определяемая уравнением (II.3) совокупность числовых значений величин второй группы называется *шкалой данной величины*. Шкала полностью определяется заданием начала отсчета S_0 и единицы $[S]$.

Практически шкалу можно осуществить двояко:

1. Выбирают два размера S_0 и S_1 величины, которые относительно просто могут быть реализованы физически в наиболее чистом виде. Эти размеры называются *опорными точками* или *основными реперами*, а интервал $S_1 - S_0$ — *основным интервалом*. Одну из опорных точек S_0 принимают за начало отсчета, а какую-либо долю основного интервала — за единицу.

Так, во введенной Фаренгейтом температурной шкале первой опорной точкой и началом отсчета служила температура смеси льда, поваренной соли и нашатыря, а в качестве второй опорной точки была выбрана температура человеческого тела. Единица температуры определялась как девятая часть полученного таким образом основного интервала и получила название градуса Фаренгейта ($[t] = ^\circ\text{F}$). Температура таяния льда оказалась равной 32°F , а температура кипения воды — 212°F .

В температурной шкале Цельсия началом отсчета является температура таяния льда, второй опорной точкой служит температура кипения воды, а за единицу температуры — градус Цельсия ($[t] = ^\circ\text{C}$) — принята одна сотая часть основного интервала.

2. Единица воспроизводится непосредственно как интервал, его некоторая доля или некоторое число интервалов размеров данной величины, а начало отсчета выбирают каждый раз по-разному в зависимости от конкретных условий изучаемого явления. Именно так строятся шкалы измерения времени или электрических потенциалов. Например, за единицу времени принимается секунда, равная 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133, а за начало отсчета принимается начало изучаемого явления.

Для единиц $[S]_1$ и $[S]_2$ и начал отсчета S_{01} и S_{02} числовые значения s_1 и s_2 определяют из уравнения (II.3')

$$S = S_{01} + s_1 [S]_1; \quad S = S_{02} + s_2 [S]_2,$$

которое приводит к следующему соотношению между числовыми значениями s_1 и s_2 величины по разным шкалам:

$$s_2 = \left(s_1 - \frac{S_{02} - S_{01}}{[S]_1} \right) \frac{[S]_1}{[S]_2}. \quad (\text{II.4})$$

Так, поскольку значение разности температур между точкой кипения воды и точкой таяния льда по шкале Фаренгейта составляет $212 - 32 = 180^\circ\text{F}$, а по шкале Цельсия — 100°C , то $100^\circ\text{C} = 180^\circ\text{F}$ и отношение размеров единиц

$$\frac{[S]_1}{[S]_2} = \frac{^\circ\text{F}}{^\circ\text{C}} = \frac{100}{180} = \frac{5}{9}.$$

Числовое значение интервала между началами отсчета по этим двум шкалам, измеренного в градусах Фаренгейта $[S]_1 = ^\circ\text{F}$, равно 32. Поэтому для перехода от числовых значений t_F температуры в градусах Фаренгейта к числовым значениям t_C в градусах Цельсия необходимо использовать формулу, следующую из соотношения (II.4):

$$t_C = (t_F - 32) \cdot \frac{5}{9}.$$

Соотношение (II.4) показывает, что числовые значения величин второй группы единственны до линейного преобразования, сами же шкалы, описываемые уравнением (II.3'), будем называть линейными.

Возможность измерения величин первой группы обосновывается следующим образом.

Подбирают измерительное преобразование, переводящее размеры изучаемой величины в некоторую совокупность размеров какой-либо величины третьей группы. Числовые значения последних или некоторые их функции и принимают за числовые значения данной величины. Совокупность этих числовых значений и лежащее в основе их получения измерительное преобразование называется шкалой данной величины.

Обобщая определения шкал величин первой и второй групп, приходим к общему определению шкалы, приводимому в ГОСТ 16263—70: *шкала физической величины* — это «последовательность значений, присвоенная в соответствии с правилами, принятыми по соглашению, последовательности одноименных физических величин различного размера».

Как уже было сказано, линейность преобразований величин первой группы проверить нельзя. Можно лишь утверждать, что ее числовые значения в различных шкалах связаны друг с другом некоторым монотонным преобразованием или *единственны до монотонного преобразования*. Сами же шкалы этих величин будем называть монотонными шкалами.

Так, например, твердость по шкале Бринелля измеряют, вдавливая стальной закаленный шарик в образец с определенным усилием, а числовое значение твердости HB подсчитывают как отношение этого усилия к площади отпечатка на образце. Аналогично определяют твердость HV по шкале Виккерса, с той только разницей, что здесь стальной шарик заменен алмазной пирамидой. По шкале С Роквелла числовые значения твердости подсчитывают по формуле $HRC = 100 - 2e$, где e — глубина проникновения алмазного конуса в образец, выражаемая в тысячных долях миллиметра, под действием силы 150 кгс.

Поскольку во всех трех случаях используются различные измерительные преобразования, то и числовые значения твердости различны. Из определения шкал Бринелля и Виккерса следует, что числовые значения твердости в них должны быть связаны преобразованием, близким к линейному, их же связь с числовыми значениями твердости по шкале Роквелла должна быть иной.

Поскольку в уравнении физики входят только величины третьей группы и разности размеров величин второй группы, то в дальнейшем мы будем заниматься только ими.

§ 9. ОСНОВНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И ОСНОВНЫЕ ЕДИНИЦЫ СИСТЕМЫ ВЕЛИЧИН И СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

Описание свойства, характеризующего данной величиной, осуществляется на языке других, ранее определенных величин. Эта возможность обуславливается наличием объективно существующих взаимосвязей между свойствами объектов, которые, будучи переведены на язык величин, становятся их моделями, образующими в своей совокупности систему уравнений, описывающих данный раздел физики. Эти уравнения, записанные в самом общем виде, называются *уравнениями между величинами**. С их помощью формулируются определения одних величин на языке других и указываются способы измерения. Если бы число уравнений равнялось числу связываемых ими величин, то все они могли бы быть определены не друг через друга, а в каких-то других терминах, понятных нам и без вышеприведенных рассуждений. Но число уравнений в любом разделе науки всегда меньше числа входящих в них величин, поэтому принято выделять в отдельную группу некоторые величины, число k которых должно равняться разности между числом n величин и числом m независимых уравнений между ними. Эти величины и соответствующие им единицы называются *основными величинами* и *основными единицами*. Все остальные величины и единицы¹ определяются однозначно через основные и называются *производными*. Совокупность выбранных основных величин и образованных с их помощью величин производных называется *системой величин*. Так же создаются и *системы единиц*. Важно отметить, что в рамках одной концепции система основных величин вовсе не обязана совпадать с системой основных единиц в том смысле, что за основные единицы могут приниматься единицы не тех величин, которые принимаются за основные.

В уравнения между величинами входят также универсальные постоянные и физические константы; они отличаются от коэффициентов пропорциональности тем, что характеризуют какие-то определенные свойства физических объектов. Коэффициенты пропорциональности появляются в уравнениях между величинами лишь из-за несогласованности единиц измерения или характеризуют свойства симметрии физических законов.

Правила, по которым тот или иной комплекс единиц выбирают в качестве основного, не могут быть обоснованы теоретически. Единственным аргументом в пользу выбора может служить лишь эффективность и целесообразность использования данной системы.

Для практических целей измерения в качестве основных величин и единиц следует выбирать такие, которые могут быть вос-

* В противоположность уравнениям типа эмпирических формул, справедливых лишь при указанных для них единицах измерения.

произведены с наибольшей точностью. В механике это длина, масса и время. Изучение термодинамики приводит к необходимости введения четвертой величины — температуры и ее единиц. В электродинамике и фотометрии появляются еще две основные величины и две единицы — сила электрического тока и сила света.

§ 10. МЕХАНИЗМ ОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ВЕЛИЧИН И ПРОИЗВОДНЫХ ЕДИНИЦ. ПОНЯТИЕ О РАЗМЕРНОСТЯХ

Положим, что исследуемая величина Q связана с величинами $A, B, C, \dots$, единицы которых предварительно установлены, следующим уравнением:

$$Q = F(A, B, C, \dots). \quad (II.5)$$

Входящие в уравнение (II.5) величины можно представить в виде

$$Q = q[Q]; A = a[A]; B = b[B]; C = c[C]; \dots, \quad (II.6)$$

где строчными буквами обозначены числовые значения, а буквы в квадратных скобках — единицы величин $Q, A, B, C, \dots$. Уменьшим единицы величин $A, B, C, \dots$ в $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \dots$ раз. Тогда числовое значение q исследуемой величины Q увеличится в ε число раз, зависящее от $\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \dots$, и будет составлять

$$q' = q\varepsilon(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \dots).$$

Теперь снова уменьшим единицы исходных величин в $\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \dots$ раз. Тогда числовое значение q' увеличится в $\varepsilon(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \dots)$ раз, и, следовательно,

$$\begin{aligned} q'' &= q'\varepsilon(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \dots) = \\ &= q\varepsilon(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \dots)\varepsilon(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \dots). \end{aligned} \quad (II.7)$$

Но такое последовательное уменьшение единиц в $\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \dots$, а затем $\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \dots$ число раз равносильно их одновременному уменьшению в $\alpha_1\alpha_2; \beta_1\beta_2; \gamma_1\gamma_2; \dots$ раз. Поэтому

$$q'' = q\varepsilon(\alpha_1\alpha_2; \beta_1\beta_2; \gamma_1\gamma_2; \dots). \quad (II.8)$$

Сравнивая формулы (II.7) и (II.8), легко заметить, что функция $\varepsilon(\alpha; \beta; \gamma; \dots)$ должна удовлетворять условию

$$\varepsilon(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \dots)\varepsilon(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \dots) = \varepsilon(\alpha_1\alpha_2; \beta_1\beta_2; \gamma_1\gamma_2; \dots). \quad (II.9)$$

Предположим, что функция $\varepsilon(\alpha; \beta; \gamma; \dots)$ является дифференцируемой. Тогда, дифференцируя выражение (II.9) по α_1 и α_2 , получаем:

$$\varepsilon'_{\alpha_1}(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \dots)\varepsilon(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \dots) = \alpha_2\varepsilon'_{\alpha_1\alpha_2}(\alpha_1\alpha_2; \beta_1\beta_2; \gamma_1\gamma_2; \dots),$$

$$\varepsilon'_{\alpha_2}(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \dots)\varepsilon(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \dots) = \alpha_1\varepsilon'_{\alpha_1\alpha_2}(\alpha_1\alpha_2; \beta_1\beta_2; \gamma_1\gamma_2; \dots).$$

Разделим первое равенство на второе и сгруппируем в разных частях полученного выражения функции с одинаковыми индексами аргументов:

$$\alpha_1 \frac{\varepsilon'_{\alpha_1}(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \dots)}{\varepsilon(\alpha_1; \beta_1; \gamma_1; \dots)} = \alpha_2 \frac{\varepsilon'_{\alpha_2}(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \dots)}{\varepsilon(\alpha_2; \beta_2; \gamma_2; \dots)}.$$

Но так как числа α_1 и α_2 произвольны, то приходится сделать следующий вывод:

$$\alpha \frac{\varepsilon'_\alpha(\alpha; \beta; \gamma; \dots)}{\varepsilon(\alpha; \beta; \gamma; \dots)} = \omega_\alpha(\beta; \gamma; \dots), \quad (\text{II.10})$$

где $\omega_\alpha(\beta; \gamma; \dots)$ — некоторая функция, не зависящая от α . Разделив переменные в дифференциальном уравнении (II.10), приведем его к виду

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \omega_\alpha(\beta; \gamma; \dots) \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Интегрирование полученной формулы приводит к выражению

$$\varepsilon(\alpha; \beta; \gamma; \dots) = C \alpha^{\omega_\alpha(\beta; \gamma; \dots)},$$

где C — постоянная интегрирования. Для ее определения положим $\alpha=1$. Тогда обнаружится, что $C=\varepsilon(1; \beta; \gamma; \dots)$, и, таким образом,

$$\varepsilon(\alpha; \beta; \gamma; \dots) = \varepsilon(1; \beta; \gamma; \dots) \alpha^{\omega_\alpha(\beta; \gamma; \dots)}.$$

Но функция $\varepsilon(1; \beta; \gamma; \dots)$ обладает, очевидно, тем же свойством, и поэтому может быть представлена как

$$\varepsilon(1; \beta; \gamma; \dots) = \varepsilon(1; 1; \gamma; \dots) \beta^{\omega_\beta(\gamma; \dots)},$$

и, следовательно,

$$\varepsilon(\alpha; \beta; \gamma; \dots) = \varepsilon(1; 1; \gamma; \dots) \alpha^{\omega_\alpha(\beta; \gamma; \dots)} \beta^{\omega_\beta(\gamma; \dots)}.$$

Дальнейшие рассуждения приводят нас к выражению

$$\varepsilon(\alpha; \beta; \gamma; \dots) = \varepsilon(1; 1; 1; \dots) \alpha^{\omega_\alpha(\beta; \gamma; \dots)} \beta^{\omega_\beta(\gamma; \dots)} \dots$$

Если бы начать дифференцировать выражение (II.9) не с переменной α , а с любой другой, то показатели степеней при числах $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ оказались бы функциями других чисел. Поэтому можно сделать вывод о независимости этих степеней от чисел $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Кроме того, очевидно, что $\varepsilon(1, 1, 1, \dots, 1) = 1$, поэтому

$$\varepsilon(\alpha; \beta; \gamma; \dots) = \alpha^{\omega_\alpha} \beta^{\omega_\beta} \gamma^{\omega_\gamma} \dots \quad (\text{II.11})$$

Полученное выражение называется формулой размерности, а его правая часть — размерностью (dimension) величины Q относительно величин $A, B, C \dots$. Последнее предложение обычно записывается в виде

$$\dim(Q) = [A^{\omega_A} B^{\omega_B} C^{\omega_C} \dots]. \quad (\text{II.12})$$

Если величины $A, B, C, \dots$ являются основными, то формула размерности (II.12) определяет размерность производной величины относительно основных величин. Размерности же основных величин выражаются через обозначения этих величин. Так, размерности длины, массы, времени, температуры записываются как

$$\dim(l) = L; \quad \dim(m) = M; \quad \dim(t) = T; \quad \dim(t^\circ) = \Theta.$$

Вычисления размерностей существенно упрощается, если принять во внимание два следующих очевидных правила:

$$1) \text{ если } P = RQ, \text{ то } \dim(P) = \dim(R) \dim(Q);$$

$$2) \text{ если } P = \frac{R}{Q}, \text{ то } \dim(P) = \frac{\dim(R)}{\dim(Q)}.$$

Пользуясь этими правилами, вычислим размерности некоторых величин:

размерность скорости $v = \frac{\Delta l}{\Delta t}$ составляет

$$\dim(v) = \frac{\dim(\Delta l)}{\dim(\Delta t)} = \frac{L}{T} = LT^{-1};$$

размерность ускорения находим из уравнения

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t};$$

$$\dim(a) = \frac{\dim(\Delta v)}{\dim(\Delta t)} = LT^{-2};$$

размерность силы определяется вторым законом Ньютона $F = ma$:

$$\dim(F) = \dim(m) \cdot \dim(a) = LMT^{-2}.$$

Если величины $A, B, C, \dots$ сами являются производными и имеют относительно основных величин $L, M, T, \dots$ размерности

$$\dim(A) = L^{k_A} M^{l_A} T^{m_A} \dots;$$

$$\dim(B) = L^{k_B} M^{l_B} T^{m_B} \dots;$$

$$\dim(C) = L^{k_C} M^{l_C} T^{m_C} \dots;$$

.....

то размерность величины Q относительно основных составит

$$\dim(Q) = [L^{\omega_A k_A + \omega_B k_B + \dots} M^{\omega_A l_A + \omega_B l_B + \dots} T^{\omega_A m_A + \omega_B m_B + \dots}] = L^k M^l T^m \dots,$$

где

$$\begin{aligned}k &= \omega_{\alpha} k_A + \omega_{\beta} k_B + \omega_{\gamma} k_C + \dots; \\l &= \omega_{\alpha} l_A + \omega_{\beta} l_B + \omega_{\gamma} l_C + \dots; \\m &= \omega_{\alpha} m_A + \omega_{\beta} m_B + \omega_{\gamma} m_C + \dots\end{aligned}$$

До сих пор мы рассматривали ϵ как величину, на которую изменяется числовое значение Q вследствие изменения в $\alpha; \beta; \gamma; \dots$ раз единиц величин $A, B, C, \dots$ при постоянной единице $[Q]$. Если же мы хотим оставить неизменным числовое значение q , то единицу $[Q]$ нужно изменить в то же число раз ϵ . Поэтому наряду с равенствами

$$[A] = \alpha[A]'; [B] = \beta[B]'; [C] = \gamma[C]'; \dots,$$

определяющими числа $\alpha; \beta; \gamma; \dots$, действительно и равенство

$$[Q] = \epsilon(\alpha; \beta; \gamma; \dots) \cdot [Q]'.$$

Таким образом, формула (II.11) размерностей приобретает вид:

$$\frac{[Q]}{[Q]'} = \left(\frac{[A]}{[A]'} \right)^{\omega_{\alpha}} \left(\frac{[B]}{[B]'} \right)^{\omega_{\beta}} \left(\frac{[C]}{[C]'} \right)^{\omega_{\gamma}} \dots$$

или

$$[Q] = K [A]^{\omega_{\alpha}} [B]^{\omega_{\beta}} [C]^{\omega_{\gamma}} \dots, \quad (\text{II.13})$$

где K — любое постоянное число.

Если единицы $[A], [B], [C], \dots$ являются основными, то формула (II.13) определяет размерность производной единицы $[Q]$ относительно основных единиц, что записывается также в форме выражения

$$\dim [Q] = [A]^{\omega_{\alpha}} [B]^{\omega_{\beta}} [C]^{\omega_{\gamma}} \dots \quad (\text{II.14})$$

Нетрудно видеть, что размерности единиц совпадают с размерностями величин, если совпадают выбранные системы единиц и величин. Формула (II.13) показывает размерность производной единицы, но еще ничего не говорит о размере единицы, поскольку множитель K пока не определен.

Среди производных величин особое место занимают такие, для которых все показатели степени в формуле размерности (II.12) обращаются в нуль. Эти величины называются безразмерными и остаются такими в любой системе величин. Согласно уравнению (II.13) их единицей может служить любое число, в частности — арифметическая единица. К таким величинам относятся, например, коэффициент полезного действия, число Рейнольдса в аэродинамике, $\cos \varphi$ в электродинамике.

§ 11. АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ И КОГЕРЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

Понятие размерности физических величин широко используется в физике при проверке правильности сложных расчетных формул, выяснении зависимости между величинами (анализе размерностей) и в теории физического подобия, где анализ размерностей позволяет сократить объем экспериментальных работ по определению некоторых зависимостей.

Широкое применение понятия размерности объясняется особой структурой уравнений между величинами, устанавливаемой основной теоремой анализа размерностей.

Для вывода этой теоремы представим уравнение (II.5) между величинами в форме

$$q[Q] = F(a[A]; b[B]; c[C]; \dots),$$

где q является функцией числовых значений исходных величин. Это уравнение справедливо для любых числовых значений, в том числе и для $a=b=c=\dots=1$. Таким образом,

$$q(1; 1; 1; \dots)[Q] = F([A]; [B]; [C]; \dots)$$

и

$$[Q] = \frac{F([A]; [B]; [C]; \dots)}{q(1; 1; 1; \dots)}. \quad (\text{II.15})$$

Но производная единица $[Q]$ выражается через единицы $[A]; [B]; [C]; \dots$ по формуле (II.13). Сравнивая формулы (II.13) и (II.15), приходим к выводу, что функция F должна обладать следующей структурой:

$$F([A]; [B]; [C]; \dots) = Kq(1; 1; 1; \dots) [A]^{w_a} [B]^{w_b} [C]^{w_c} \dots,$$

и, следовательно,

$$Q = F(A; B; C; \dots) = Kq(1; 1; 1; \dots) A^{w_a} B^{w_b} C^{w_c} \dots \quad (\text{II.16})$$

Разделив уравнение (II.16), связывающее величины, на уравнение (II.13), связывающее единицы, получим уравнение, относящееся к числовым значениям:

$$q(a; b; c; \dots) = q(1; 1; 1; \dots) a^{w_a} b^{w_b} c^{w_c} \dots \quad (\text{II.17})$$

Таким образом, функция определяющая исследуемую производную величину Q через некоторые исходные величины $A, B, C, \dots$ всегда может быть представлена в форме произведения постоянного коэффициента K , зависящего от размеров выбранных единиц, безразмерного выражения $q(1, 1, \dots)$ и степеней рассматриваемых величин. Само же уравнение (II.5) между величинами распадается на уравнение (II.13), связывающее единицы, и уравнение (II.17), относящееся к числовым значениям.

Но функция F , определяющая величину Q , может содержать, кроме размерных величин, еще и безразмерные величины $\Phi_1, \Phi_2, \dots$, которые должны иметь ту же структуру (II.16), т. е. представлять собой произведения постоянного коэффициента и степеней отдельных размерных величин:

$$Q = F(A; B; C; \dots; \Phi_1; \Phi_2; \dots).$$

Поэтому уравнение (II.16) в более общей форме должно быть записано как

$$Q = Kq(\Phi_1; \Phi_2; \dots) A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} \dots \quad (\text{II.18})$$

Последнее выражение и представляет собой формулу основной теоремы анализа размерностей; *уравнение между величинами всегда может быть приведено к выражению, определяющему одну из величин как произведение коэффициента пропорциональности, функции безразмерных комплексов и степеней исходных величин.*

Если построить еще один безразмерный комплекс

$$\Phi = \frac{Q}{A^{\alpha} B^{\beta} C^{\gamma} \dots},$$

то уравнение (II.5) можно представить в безразмерной форме

$$\Phi = Kq(\Phi_1; \Phi_2; \dots). \quad (\text{II.19})$$

В предыдущем параграфе было отмечено, что формула (II.13) позволяет установить единицы производных величин через основные единицы, но размер производной единицы зависит от выбора значения коэффициента пропорциональности K .

Коэффициент K желательно выбрать таким, чтобы уравнение между величинами формально совпало с уравнением между числовыми значениями; при этом вычисления по уравнениям физики значительно упрощаются. Сравнивая уравнения (II.16) и (II.17), приходим к выводу, что для этого достаточно положить $K=1$, и тогда производную единицу можно определить как

$$[Q] = [A]^{\alpha} [B]^{\beta} [C]^{\gamma} \dots \quad (\text{II.20})$$

Системы единиц, производные единицы которых образованы по формуле (II.20), называются *согласованными*, или *когерентными*. Когерентные системы отличаются от остальных большей простотой выполняемых расчетов и поэтому шире распространены.

Основные единицы обозначаются символами, происходящими от их названия. Так, единицами длины, массы и времени служат метр, килограмм и секунда, что обозначается следующим образом:

$$[l] = \text{м}; [m] = \text{кг}; [t] = \text{с}.$$

Производные единицы находят из уравнений физики после приведения их к виду (II.18). Так, единицей скорости в когерентной системе единиц $[\text{м}, \text{кг}, \text{с}]$ будет

$$[v] = \left[\frac{\Delta l}{\Delta t} \right] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1};$$

единица ускорения составляет

$$[a] = \left[\frac{\Delta v}{\Delta t} \right] = \text{м} \cdot \text{с}^{-2};$$

единица силы

$$[F] = [ma] = \text{м} \cdot \text{кг} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Некоторые из производных единиц имеют собственные наименования, например, единица силы — ньютон ($1\text{Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$) или единица электрического сопротивления — ом. Другие производные единицы собственных наименований не имеют и обозначаются как произведения степеней основных единиц. Так, единица плотности в когерентной системе единиц $[\text{м}, \text{кг}, \text{с}]$ обозначается как $[\rho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3}$, единица динамической вязкости $[\mu] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}$.

В заключение рассмотрим простейший пример использования метода размерностей.

Пусть требуется определить силу R , действующую на тело в потоке жидкости. Допустим, что движение жидкости настолько медленно, что инерционными силами по сравнению с силами вязкости можно пренебречь. В этом случае сила R должна зависеть от скорости v , линейного размера тела l и динамической вязкости μ . Эта зависимость должна в соответствии с формулой (II.16) иметь вид

$$R = Cl^\alpha v^\beta \mu^\gamma,$$

где C — постоянная, зависящая от формы тела и расположения его относительно потока, или, возможно, функция некоторых безразмерных комплексов, составленных из тех же величин l , v и μ .

Формула размерностей имеет вид

$$\dim(R) = \dim(l^\alpha v^\beta \mu^\gamma) = \{\dim(l)\}^\alpha \{\dim(v)\}^\beta \{\dim(\mu)\}^\gamma.$$

Но $\dim(R) = LMT^{-2}$; $\dim(l) = L$; $\dim(v) = LT^{-1}$; $\dim(\mu) = L^{-1}MT^{-1}$, поэтому

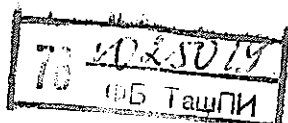
$$LMT^{-2} = L^\alpha (LT^{-1})^\beta (L^{-1}MT^{-1})^\gamma = L^{\alpha+\beta-\gamma} M^\gamma T^{-\beta-\gamma}.$$

Для определения показателей α , β и γ имеем, таким образом, систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 1; \\ \gamma = 1; \\ -\beta - \gamma = -2. \end{cases}$$

откуда получаем $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ и, следовательно,

$$R = C l v \mu = \frac{C}{\text{Re}} \rho v^2 l^2,$$



где $Re = \frac{\rho v l}{\mu}$ — безразмерный параметр, называемый числом Рейнольдса.

В ряде случаев возникает необходимость, имея единицу какой-либо величины, применять кратные и дольные единицы от нее для выражения больших или малых значений измеряемой величины.

Кратными называют единицы, составляющие целое число основных или производных единиц, например, километр, мегагерц и др. Дольными называют единицы, в целое число раз меньшие основной или производной единицы, например, миллиметр, наносекунда и др.

§ 12. СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Исторически первой системой единиц физических величин была принятая в 1791 г. Национальным собранием Франции метрическая система мер. Она не являлась еще системой единиц в современном понимании, а включала в себя единицы длин, площадей, объемов, вместимостей и веса, в основу которых были положены две единицы: метр и килограмм.

В 1832 г. ученый К. Гаусс предложил методику построения системы единиц как совокупности основных и производных. Он построил систему единиц, в которой за основу были приняты три произвольные, независимые друг от друга единицы — длины, массы и времени. Все остальные единицы можно было определить с помощью этих трех. Такую систему единиц, связанных определенным образом с тремя основными единицами длины, массы и времени, Гаусс назвал абсолютной системой. За основные единицы он принял миллиметр, миллиграмм и секунду.

В дальнейшем с развитием науки и техники появился ряд систем единиц физических величин, построенных по принципу, предложенному Гауссом, базирующихся на метрической системе мер, но отличающихся друг от друга основными единицами.

Рассмотрим главнейшие системы единиц физических величин.

Система СГС

Система единиц физических величин СГС, в которой основными единицами являются сантиметр как единица длины, грамм как единица массы и секунда как единица времени, была установлена в 1881 г. первым Международным конгрессом электриков. Конгресс установил систему СГС по принципам, предложенным Гауссом, и ввел наименование для двух важнейших производных единиц: дина — для единицы силы и эрг — для единицы работы. Для измерения мощности в системе СГС применяется эрг в секунду, для измерения кинематической вязкости — стокс, динамической — пуаз.

Давление в системе СГС измеряют в динах на квадратный сантиметр. Эта единица в прошлом называлась бар, однако в связи с переименованием в бар единицы давления, равной 10^5 Н/м², для единиц давления СГС иногда применяют наименование барий и одновременно микробар (так как она равна одной миллионной нового бара).

В области механических измерений система СГС опирается на три основные единицы, из которых остальные образуются как производные.

Сложнее обстоит дело с применением системы СГС для электрических и магнитных измерений. Исторически сложилось так, что для них к настоящему времени существует семь видов системы СГС для электрических и магнитных величин, из которых наиболее распространены следующие три:

1. Система СГСЭ, построенная на трех основных единицах — сантиметре, грамме, секунде; диэлектрическая проницаемость вакуума принята равной безразмерной единице. Эта система называется также абсолютной электростатической системой единиц.

2. Система СГСМ, основные единицы которой такие же, как и системы СГСЭ, — сантиметр, грамм, секунда, а магнитная проницаемость вакуума принята равной безразмерной единице. Эта система называется также абсолютной электромагнитной системой единиц.

3. Система СГС, называемая также системой СГС симметричной или системой Гаусса. В ней электрические единицы совпадают с электрическими единицами СГСЭ, а магнитные с магнитными единицами СГСМ.

Система СГС (симметричная) отличается стройностью и логичностью построения, она когерентна (согласованна) и широко применяется в физике для выражения измеряемых физических величин и расчетов. Система была допущена к применению в СССР государственным стандартом на электрические и магнитные единицы (ГОСТ 8033—56). До настоящего времени значительное число физических констант выражалось в единицах СГС. Однако большинство единиц СГС (дина, эрг, единицы электрических величин СГС и др.) имеет неудобные размеры и в практике не применяется.

Система МКГСС

Как известно, в период установления метрической системы мер, в конце XVIII столетия, килограмм был принят как единица веса.

Применение килограмма как единицы веса, а в последующем как единицы силы вообще привело в конце XIX века к формированию системы единиц физических величин с тремя основными единицами: метр — единица длины, килограмм-сила — единица силы и секунда — единица времени (система МКГСС). Килограмм-сила (кгс) — это сила, которая сообщает массе, равной массе меж-

дународного прототипа килограмма, ускорение $9,80665 \text{ м/с}^2$ (нормальное ускорение свободного падения).

Эта система единиц широко распространилась в механике и в технике, получив неофициальное наименование «техническая». Одной из причин распространения системы МКГСС явилось удобство выражения сил в единицах веса и удобный размер основной единицы силы — килограмм-силы.

В некоторых странах (например, Бельгии) система МКГСС была названа метрической исходя из того, что первоначально, при установлении метрической системы мер, килограмм служил не единицей массы, а единицей веса. Однако наряду с распространением системы МКГСС в технике все больше вырисовывались ее недостатки, связанные с использованием в качестве основной единицы силы, а не массы.

Первый недостаток состоит в том, что нарушается принцип выбора в качестве основной единицы той, которая может наиболее точно воспроизводиться. Единица силы воспроизводится менее точно, чем единица массы.

Второй недостаток заключается в сходности наименования единицы силы — килограмм-силы и метрической единицы массы — килограмма, что часто приводит к путанице. Частичным решением этого вопроса явилось принятие в отдельных странах (Австрия, ГДР, ФРГ) нового наименования килограмм-силы: килопонд.

Третьим крупным недостатком системы МКГСС является ее неогерентность (несогласованность) с единицами электрических и магнитных величин. Если единицей работы и энергии в системе МКГСС служит килограмм-сила-метр, то в системе практических электрических единиц работа и энергия измеряется джоулями, поэтому при переходе в расчетах от механических величин к электрическим (а также к тепловым, световым и т. д.) требуется переходный множитель.

За единицу массы в системе МКГСС принята масса тела, получающего ускорения 1 м/с^2 под действием приложенной силы 1 кгс . Эта единица (килограмм-сила-секунда в квадрате на метр) иногда называется технической единицей массы (т. е. м.) или инертой, хотя оба эти наименования не установлены ни в одной из рекомендаций на единицы физических величин. Единица массы МКГСС — $\text{кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м} \approx 9,81 \text{ кг}$ — единицы массы СИ.

Широко применялись в технике единица работы и энергии МКГСС — килограмм-сила-метр ($\text{кгс} \cdot \text{м}$) и единица мощности — килограмм-сила-метр в секунду ($\text{кгс} \cdot \text{м/с}$).

Система МТС

В системе единиц МТС основными единицами являются: единица длины — метр, единица массы — тонна и единица времени — секунда.

Эта система единиц впервые установлена в 1919 г. во Франции, где была принята в законоположении о единицах измерений. В 1927—1933 гг. система МТС была рекомендована советскими стандартами на механические единицы. Выбор тонны в качестве основной единицы массы казался удачным, так как достигалось соответствие между единицами длины и объема, с одной стороны, и единицей массы — с другой (с точностью, достаточной для большинства технических расчетов, 1 т соответствует массе 1 м^3 воды). Кроме того, единица работы и энергии в этой системе (килоджоуль) и единица мощности (киловатт) совпадали с соответствующими кратными практическими электрическими единицами.

В системе МТС единицей силы служит стен (сн), равный силе, сообщающей массе 1 т ускорение 1 м/с^2 , единицей давления — пьеа — 1 сн/м^2 .

Однако в СССР система МТС не нашла практического распространения и в 1955 г. при утверждении ГОСТ 7664—55 «Механические единицы» не была в него включена. Во Франции применение этой системы также отменено законоположением от 3 мая 1961 г.

Абсолютная практическая система электрических единиц

Абсолютная практическая система электрических единиц была установлена в 1881 г. первым Международным конгрессом электриков в качестве производной от системы СГСМ и предназначалась для практических измерений в связи с тем, что электрические и магнитные единицы системы СГС оказались неудобными для практики (одни слишком велики, другие слишком малы). В абсолютной практической системе электрические и магнитные единицы были образованы из соответствующих единиц абсолютной электромагнитной системы СГСМ путем умножения их на соответствующие степени числа 10.

В числе первых практических электрических единиц были приняты:

а) практическая единица электрического сопротивления, равная 10^9 единицам сопротивления СГСМ, которая получила впоследствии наименование «ом»;

б) практическая единица электродвижущей силы, равная 10^9 единицам электродвижущей силы СГСМ, названная «вольт»;

в) практическая единица силы электрического тока — ампер, равная 10^{-1} электромагнитным единицам силы тока СГСМ;

г) практическая единица электрической емкости, равная 10^{-9} единицам электрической емкости СГСМ, названная «фарада».

Множитель 10^9 для практической единицы сопротивления взят из тех соображений, что единица сопротивления должна была по размеру быть близка к большинству существовавших в то время

единиц сопротивления, особенно к ртутной единице Сименса (сопротивление столбика ртути длиной 100 см и поперечным сечением 1 мм²), тогда широко распространенной. Множитель 10⁸ для практической единицы электродвижущей силы был выбран с целью возможного приближения к электродвижущей силе элемента Даниэля, наиболее распространенного в то время и имевшего э.д.с., близкую к 1 В.

Второй Международный конгресс электриков в 1889 г. включил в список практических электрических единиц еще три:

а) джоуль как единицу энергии, равную 10⁷ единицам энергии СГСМ;

б) ватт, равный 10⁷ единицам мощности СГСМ;

в) квадрант (впоследствии это наименование заменено на «генри») как единицу индуктивности, равную 10⁹ единицам индуктивности СГСМ.

В дальнейших решениях Международной электротехнической комиссии и генеральных конференций по мерам и весам были установлены другие практические электрические и магнитные единицы (вебер, сименс, тесла и др.).

Международные электрические единицы

В 1893 г. в Чикаго Третий Международный конгресс электриков принял международные электрические единицы, отличавшиеся от единиц абсолютной практической системы электрических единиц тем, что они базировались не на теоретическом определении единиц, а на их эталонах. Это объяснялось трудностями точного воспроизведения теоретически установленных абсолютных практических электрических единиц. Взамен их были установлены практические электрические единицы, основанные на соответствующих абсолютных единицах, но определяемые с помощью условных эталонов, служащих для их воспроизведения. Этим электрическим единицам в отличие от абсолютных, определяемых теоретически через единицы длины, массы и времени, было присвоено наименование «международных электрических единиц».

Конгресс установил три основные международные электрические единицы: международный ом, для определения которого использовали ртутный эталон, международный ампер, определяемый с помощью серебряного вольтметра, и международный вольт, определяемый по элементу Кларка. Остальные электрические единицы (международный кулон, международная фарада и др.) были определены как производные от них.

Завершением работы по установлению международных электрических единиц и четкому разграничению абсолютных практических единиц и международных явились решения Международной Лондонской конференции электриков в 1908 г. В качестве единиц, которые с достаточным приближением при практических измере-

ниях и для законодательных целей воспроизводят электрические единицы, конференция рекомендовала принять международный ом, международный ампер, международный вольт и международный ватт. Конференция утвердила спецификации для воспроизведения международного ома и международного ампера.

После этого международные электрические единицы начали вводить законодательными актами в разных странах, и они получили широкое распространение до отмены их с 1 января 1948 г. решением Международного комитета мер и весов, когда был совершен переход на абсолютные электрические единицы с соотношениями: 1 международный ом = 1,00049 абсолютного ома; 1 международный вольт = 1,00034 абсолютного вольта.

Международные электрические единицы были введены в нашей стране постановлением Высшего Совета Народного Хозяйства РСФСР от 7 февраля 1919 г. «Об электрических единицах» и общесоюзным стандартом ОСТ 515 «Международные электрические единицы», утвержденным в 1929 г. Они отменены с 1 мая 1948 г. в связи с переходом на абсолютные практические электрические единицы.

Система МКСА

Основы этой системы были предложены в 1901 г. итальянским ученым Джорджи (поэтому система имеет и второе наименование, принятое в 1958 г. Международной электротехнической комиссией, — «система Джорджи», но не получившее, однако, распространения). Основными единицами системы МКСА являются метр, килограмм, секунда и ампер. В системе МКСА сила измеряется в ньютонах, работа и энергия в джоулях, мощность в ваттах.

В системе МКСА механические единицы полностью согласованы с единицами абсолютной практической системы электрических и магнитных единиц — ампером, вольт, ом, кулоном и др. Система МКСА является частью Международной системы единиц (СИ), применяемой для измерения электрических и магнитных величин.

Система МКСА установлена в качестве основной в ГОСТ 8033—56 «Электрические и магнитные единицы», действующем в СССР с 1 января 1957 г. В этом стандарте система МКСА принята для рационализованной формы уравнений электромагнитного поля (в которой множитель 4π исключен из наиболее важных и часто применяемых уравнений). В соответствии с этим взяты следующие значения постоянных: для электрической постоянной

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \quad \text{Ф/м и для магнитной постоянной } \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м,}$$

где c — числовое значение скорости света в вакууме, равное $2,997925 \cdot 10^8$ м/с.

§ 13. ВНЕСИСТЕМНЫЕ ЕДИНИЦЫ

Наряду с системами единиц физических величин в практику измерений вводились единицы, не входящие ни в одну из систем, — так называемые внесистемные единицы. Число их довольно велико, причем возникновение большинства связано с соображениями удобства при измерениях тех или иных величин. Так, исторически возникла единица давления — атмосфера, равная давлению, производимому силой 1 кгс на площадь 1 см², ибо атмосфера близка по размеру к среднему давлению атмосферного воздуха на уровне моря.

К числу важнейших внесистемных единиц, имеющих широкое применение, относятся единицы длины — ангстрем, икс-единица, световой год, парсек; площади — ар, гектар; объема — литр; массы — карат; давления — атмосфера, бар, миллиметр ртутного столба, миллиметр водяного столба; количества теплоты — калория; электрической энергии — электронвольт, киловатт-час; акустических величин — децибел, фон, октава; ионизирующих излучений — рентген, рад, кюри.

Внесистемными единицами являются также такие распространенные единицы времени, как минута и час, а также кратные и дольные единицы измерения, иногда имеющие собственные наименования, например единица длины — микрон (мк), равный 10⁻⁶ м и в соответствии с правилами образования дольных единиц называемый в настоящее время микрометром (мкм); единица массы — тонна (т), равная 1000 кг и как кратная единица массы, называемая также мегаграмм (Мг) и т. д.

В связи с унификацией единиц и принятием единой системы единиц число применяемых внесистемных единиц будет сведено к минимуму, определяемому потребностью в них для практических целей. Отдельные же распространенные внесистемные единицы, являющиеся собственными наименованиями некоторых кратных и дольных единиц СИ, — тонна, гектар и т. д. — могут сохраниться при практических измерениях.

§ 14. ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ И ЕДИНИЦЫ

В науке и технике широко распространены относительные и логарифмические величины и их единицы, которыми характеризуют состав и свойства материалов, отношения энергетических и силовых величин, например, относительное удлинение, относительная плотность, относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости, усиление и ослабление мощностей и т. п.

Относительная величина представляет собой безразмерное отношение физической величины к одноименной физической величине, принимаемой за исходную. В число относительных величин вхо-

дят и относительные атомные или молекулярные массы химических элементов, выражаемые по отношению к одной двенадцатой ($1/12$) массы атома углерода-12

Относительные величины могут выражаться в безразмерных единицах (когда отношение двух одноименных величин равно 1), в процентах (когда отношение равно 10^{-2}), промилле (отношение равно 10^{-3}) или в миллионных долях (отношение равно 10^{-6}).

Логарифмическая величина представляет собой логарифм (десятичный, натуральный или при основании 2) безразмерного отношения двух одноименных физических величин. Логарифмические величины применяют для выражения уровня звукового давления, усиления, ослабления, выражения частотного интервала и т. п.

Единицей логарифмической величины является бел (Б), определяемый соотношением $1Б = 10 \lg \frac{P_2}{P_1}$ при $P_2 = 10 P_1$ (где P_1 и P_2 — одноименные энергетические величины мощности, энергии, плотности энергии и т. п.).

В случае, если берется логарифмическая величина для отношения двух одноименных «силовых» величин (напряжения, силы тока, давления, напряженности поля и т. п.), бел определяется по формуле $1Б = 20 \lg \frac{F_2}{F_1}$ при $F_2 = \sqrt{10} F_1$. Дольной единицей от бела является децибел, равный 0,1 Б.

Так, в случае характеристики усиления электрических мощностей при отношении полученной мощности P_2 к исходной P_1 , равном 10, логарифмическая величина усиления будет составлять один бел или 10 дБ, при увеличении или уменьшении мощности в 1000 раз логарифмическая величина усиления составит 3 Б или 30 дБ и т. д.

Иногда применяют единицу логарифмической величины — непер (Нп), который определяется из соотношения $1 Нп = \ln \left| \frac{F_2}{F_1} \right|$ при $\frac{F_2}{F_1} = e$ или $1 Нп = 0,5 \ln \left| \frac{P_2}{P_1} \right|$ при $\frac{P_2}{P_1} = e$. Здесь также F_1 и

F_2 — одноименные «силовые» величины, а P_1 и P_2 — одноименные энергетические величины; e — основание натуральных логарифмов. Соотношение между непером и белом следующее: $1 Нп = 0,8686 Б$.

§ 15. ЕСТЕСТВЕННЫЕ СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

В физической литературе в отдельных случаях применяются естественные системы единиц, основанные на универсальных (мировых) физических постоянных (константах), которые, будучи приняты в качестве основных единиц, определяют единицы различных физических величин. Практическое значение таких систем заключается в значительном упрощении вида отдельных уравнений физики.

Так, в системе единиц, предложенной М. Планком, в основу положены гравитационная постоянная, скорость света, постоянная Планка и постоянная Больцмана. Преимущество этой системы заключается в неизменности основания системы. Но размеры единиц делают эту систему мало удобной для практики: единица длины равна в ней $4,02 \cdot 10^{-33}$ см, единица массы равна $5,43 \cdot 10^{-5}$ г и единица времени равна $1,34 \cdot 10^{-43}$ с. Вторая причина, не позволяющая ставить вопрос о переходе на такую систему, заключается в том, что еще не достигнута точность измерений выбранных универсальных констант, необходимая для установления всех произвольных единиц.

В атомной физике в отдельных случаях нашла применение система атомных единиц Хартри. В ней в качестве основных приняты заряд электрона, масса электрона, радиус первой боровской орбиты атома водорода и постоянная Планка. В этой системе единица энергии составляет $4,359 \cdot 10^{-11}$ эрг, единица времени $2,419 \cdot 10^{-17}$ с. При рассмотрении атомных объектов в такой системе единиц уравнения освобождаются от лишних числовых множителей, благодаря чему законы физики приобретают более простой вид.

В релятивистской квантовой механике пользуются системой, в которой основными единицами являются постоянная Планка, скорость света и масса какой-либо элементарной частицы (электрона или протона), в зависимости от того, какие процессы рассматриваются. В качестве четвертой единицы принимают постоянную Больцмана. В этой системе единицей длины является комптоновская длина волны электрона, равная $\sim 3,85 \cdot 10^{-11}$ см, единица времени, равна $\sim 1,28 \cdot 10^{-21}$ с, и единица энергии, равная энергии покоя электрона $0,82 \cdot 10^{-12}$ эрг.

В настоящее время продолжают возвращаться к вопросу о построении такой унифицированной системы единиц, которая зиждлась бы на неизменных основаниях — универсальных физических постоянных. В этом отношении представляет интерес работа польского ученого Людовичи. Он считает, что система единиц должна удовлетворять следующим требованиям: быть неразрушимой, неизменяемой во времени, независимой от местоположения. Кроме того, эталоны должны быть легко и точно воспроизводимыми и повсеместными. Исходя из этих требований, Людовичи предлагает систему единиц, в которой за основу приняты три разных поля: гравитационное, электрическое и магнитное. В соответствии с этим предлагаются в качестве трех основных единиц следующие физические константы: гравитационная постоянная, диэлектрическая проницаемость свободного пространства и магнитная проницаемость свободного пространства. В качестве четвертой основной единицы Людовичи предлагает принять атомную константу — электрический заряд электрона.

Следует признать, что точность измерения основных единиц предлагаемой естественной системы еще недостаточна и значитель-

но уступает точности исходных единиц современной Международной системы единиц. Кроме того, единицы распространенных величин в предложенной системе имеют неудобные для практики размеры (единица длины равна $\sim 4,88 \cdot 10^{-36}$ м, единица массы $\sim 6,60 \cdot 10^{-9}$ кг и т. д.).

В силу указанных соображений предложенные естественные системы единиц не могут в настоящее время найти применения при решении вопроса об унификации единиц измерения.

§ 16. УСТАНОВЛЕНИЕ ЕДИНОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ
СИСТЕМЫ ЕДИНИЦ

Наличие ряда систем единиц физических величин, а также значительного числа внесистемных единиц, неудобства, связанные с пересчетом при переходе от одной системы единиц к другой, настойчиво выдвигали требование унификации единиц измерений. Рост научно-технических и экономических связей между разными странами обуславливал необходимость такой унификации в международном масштабе.

Требовалась единая система единиц физических величин, практически удобная и охватывающая различные области измерений. При этом она должна была сохранить принцип когерентности (равенство единице коэффициента пропорциональности в уравнениях связи между физическими величинами).

Применявшаяся в механике и механических прикладных науках система МКГСС не отвечала этим требованиям, так как не была согласована с практическими электрическими единицами. Размеры единиц системы СГС, широко применяемых физиками, были слишком неудобны для использования в технике.

В 1954 г. X Генеральная конференция по мерам и весам установила шесть основных единиц (метр, килограмм, секунда, ампер, градус Кельвина и свеча) практической системы единиц для международных сношений. Одновременно Международный комитет по мерам и весам выделил из своего состава комиссию по разработке единой Международной системы единиц.

Эта комиссия в 1956 г. разработала проект Международной системы единиц, который был принят Международным комитетом по мерам и весам и в 1960 г. утвержден XI Генеральной конференцией по мерам и весам. Система, основанная на утвержденных в 1954 г. шести основных единицах, была названа Международной системой единиц, сокращенно СИ (SI — начальные буквы французского наименования *Système International*). Был утвержден перечень шести основных, двух дополнительных и первый список двадцати семи производных единиц, а также приставки для образования кратных и дольных единиц.

Принятие Международной системы единиц явилось важным прогрессивным актом, подытожившим большую многолетнюю под-

готовительную работу в этом направлении и обобщившим опыт работы научно-технических кругов разных стран и международных организаций по метрологии, стандартизации, физике и электротехнике.

Решения Генеральной конференции и Международного комитета мер и весов по Международной системе единиц учтены в рекомендациях Международной организации по стандартизации (ИСО) по единицам измерений, приняты Международной организацией законодательной метрологии и уже нашли отражение в законодательных положениях о единицах и в стандартах на единицы во многих странах мира.

Международная система единиц вошла в рекомендации по единицам Международного союза чистой и прикладной физики, принята Международной электротехнической комиссией и рядом других международных организаций. Организация объединенных наций по образованию, науке и культуре (ЮНЕСКО) призвала все страны—члены организации принять Международную систему единиц.

В 1961 г. Комитет стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР утвердил ГОСТ 9867—61 «Международная система единиц», которым устанавливается предпочтительное применение этой системы во всех областях науки и техники и при преподавании.

В 1970 г. в СССР была издана окончательная редакция проекта стандарта «Единицы физических величин», в котором в основу единиц, принятых для обязательного применения, положены единицы Международной системы.

Международная система единиц имеет ряд достоинств, важнейшими из которых являются:

1) универсальность — охват ею всех областей науки, техники, народного хозяйства;

2) унификация единиц для всех видов измерений; так, вместо ряда единиц давления (атмосфера, миллиметр ртутного столба, миллиметр водяного столба, бар, пьеза, дина на квадратный сантиметр и др.) в СИ применяется единая единица давления — паскаль; вместо ряда единиц работы и энергии (килограмм—сила—метр, эрг, калория, килокалория, киловаттчас, электрон—вольт и др.) — одна единица для измерения работы и всех видов энергии — джоуль.

3) применение удобных для практики основных и большинства производных единиц (площади — квадратный метр, объема — кубический метр, электрического напряжения — вольт, электрического сопротивления — ом и др.);

4) когерентность (связность, согласованность) системы; коэффициенты пропорциональности в физических уравнениях, определяющих единицы производных величин, равны безразмерной единице;

5) четкое разграничение в СИ единиц массы (килограмма) и силы (ньютон);

6) упрощение записи уравнений и формул, отсутствие в них переводных коэффициентов, появлявшихся в связи с тем, что величины, входящие в эти формулы, давались в разных системах единиц;

7) облегчение педагогического процесса в средней и высшей школе (отпадает необходимость подробного изучения множества систем единиц и внесистемных единиц);

8) лучшее взаимопонимание при дальнейшем развитии научно-технических и экономических связей между различными странами.

§ 17. ОСНОВНЫЕ ЕДИНИЦЫ СИ

Основные единицы Международной системы единиц были выбраны в 1954 г. X Генеральной конференцией по мерам и весам. При этом исходили из того, чтобы: 1) охватить системой все области науки и техники, 2) создать основу образования производных единиц для различных физических величин, 3) принять удобные для практики размеры основных единиц, уже получившие широкое распространение, 4) выбрать единицы таких величин, воспроизведение которых с помощью эталонов возможно с наибольшей точностью.

В 1971 г. XIV Генеральная конференция по мерам и весам приняла седьмую основную единицу СИ — единицу количества вещества — моль. Основные единицы СИ с указанием сокращенных обозначений русскими и латинскими буквами приведены в табл. 1.

Таблица 1

Основные единицы СИ

Величина	Единица измерения	Сокращенное обозначение единицы	
		русское	международное
Длина	метр	м	m
Масса	килограмм	кг	kg
Время	секунда	с	s
Сила электрического тока	ампер	А	A
Термодинамическая температура	кельвин	К	K
Сила света	кандела	кд	cd
Количество вещества	моль	моль	mol

Определения основных единиц, соответствующие решениям Генеральной конференции по мерам и весам, следующие:

Метр — длина, равная 1650763,73 длин волн в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86.

Килограмм — единица массы, равная массе международного прототипа килограмма.

Секунда — 9192631770 периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

Ампер — сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 м один от другого в вакууме, создал бы между этими проводниками силу, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Кельвин* — единица термодинамической температуры — $1/273,16$ часть термодинамической температуры тройной точки воды.

Кандела — сила света, испускаемого с площади $1/600000$ м² сечения полного излучателя в перпендикулярном к этому сечению направлении при температуре излучателя, равной температуре затвердевания платины при давлении 101325 Па.

Моль — количество вещества, содержащее столько же молекул (атомов, частиц), сколько атомов содержится в нуклиде углерода-12 массой 0,012 кг.

§ 18. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЕДИНИЦЫ СИ

Международная система единиц включает в себя две дополнительные единицы — для измерения плоского и телесного углов.

Угловые единицы не могут быть введены в число основных, так как это вызвало бы затруднение в трактовке размерностей величин, связанных с вращением (дуги окружности, площади круга, работы пары сил и т. д.). Вместе с тем они не являются и производными единицами, так как не зависят от выбора основных единиц. Действительно, при любых единицах длины размеры радиана истерадиана остаются неизменными.

Единица плоского угла — **радиан** (рад) — угол между двумя радиусами окружности, дуга между которыми по длине равна радиусу. В градусном исчислении радиан равен $57^{\circ}17'44,8''$.

Стерadian (ср), принимаемый за единицу телесного угла, — телесный угол, вершина которого расположена в центре сферы и который вырезает на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, по длине равной радиусу сферы.

Измеряют телесные углы путем определения плоских углов и проведения дополнительных расчетов по формуле

$$\Omega = 2\pi \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2}\right), \quad (\text{III.1})$$

где Ω — телесный угол; α — плоский угол при вершине конуса, образованного внутри сферы данным телесным углом.

* XIII Генеральная конференция по мерам и весам в 1967 г. изменила прежнее наименование этой единицы «градус Кельвина» на «кельвин».

Телесному углу 1 ср соответствует плоский угол, равный $65^{\circ}32'$, углу π ср — плоский угол 120° , углу 2π ср — плоский угол 180° .

Дополнительные единицы СИ использованы для образования единиц угловой скорости, углового ускорения и некоторых других величин. Сами по себе радиан и стерадиан применяются в основном для теоретических построений и расчетов (например, стерадиан используется в светотехнике), для практических же измерений их не применяют, так как большинство важных для практики значений углов (полный угол, прямой угол и т. д.) в радианах выражаются трансцендентными числами (2π , $\frac{\pi}{2}$ и т. д.).

Практически плоские углы чаще всего измеряют в угловых градусах, минутах и секундах, и в этих единицах проградуировано большинство угломерных приборов. Применяют и другие угловые единицы (полный оборот, прямой угол, градус, равный 0,01 прямого, и т. д.). Измерительных приборов, шкала которых была бы градуирована в радианах, не изготавливают; нет приборов и для измерения телесных углов в стерадианах.

Во ВНИИМ им. Д. И. Менделеева в качестве эталона радиана принят комплекс средств измерений для воспроизведения единицы плоского угла с помощью многогранных призм. Для этой цели используют кварцевую 36- или 24-гранную призму, углы между гранями которой измеряют с помощью двух автоколлиматоров. Обычно сличают аттестуемый многогранник и эталонный, помещая их один на другой на оптической головке, играющей роль поворотного устройства.

§ 19. ПРОИЗВОДНЫЕ ЕДИНИЦЫ СИ ДЛЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Производные единицы Международной системы образуются на основании законов, устанавливающих связь между физическими величинами, или на основании определений физических величин.

Соответствующие производные единицы СИ выводятся из уравнения связи между величинами (определяющего уравнения), выражающего данный физический закон или определение; если другие величины выражаются в единицах СИ.

Площадь. Определяющее уравнение (для прямоугольника или квадрата):

$$S = lb. \quad (\text{III.2})$$

При длине l и ширине b , выраженных в метрах, площадь S выражается в квадратных метрах (сокращенное обозначение м^2).

Единица площади СИ — квадратный метр — площадь квадрата с длиной стороны, равной 1 м.

Объем. Определяющее уравнение (для прямоугольного параллелепипеда или куба):

$$V = lbh. \quad (\text{III.3})$$

Если l , b и h — длина, ширина и высота — выражены в метрах, объем V выражается в кубических метрах (сокращенное обозначение м^3).

Единица объема СИ — кубический метр — объем куба, длина ребер которого равна 1 м.

Частота. Определяющее уравнение (для колебаний с периодом T):

$$f = \frac{1}{T}. \quad (\text{III.4})$$

Если T — время завершения одного цикла или полного колебания — выражено в секундах, то f — частота колебаний — выражается в герцах (сокращенное обозначение Гц).

Единица частоты СИ — герц — частота периодического процесса, при котором за время 1 с происходит один цикл периодического процесса.

Скорость (линейная). Определяющее уравнение (для равномерного движения):

$$v = \frac{l}{t}. \quad (\text{III.5})$$

При длине пройденного пути l , выраженного в метрах, и времени t , за которое пройден этот путь, выраженного в секундах, скорость выражается в метрах в секунду (сокращенное обозначение м/с).

Единица скорости СИ — метр в секунду — скорость прямолинейно и равномерно движущейся точки, при которой она за время 1 с перемещается на расстояние 1 м.

Ускорение. Определяющее уравнение (для прямолинейного равнопеременного движения):

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t}. \quad (\text{III.6})$$

Если скорость v выражена в метрах в секунду и время t — в секундах, ускорение a выражается в метрах на секунду в квадрате (сокращенное обозначение м/с²).

Единица ускорения СИ — метр на секунду в квадрате — ускорение прямолинейно и равноускоренно движущейся точки, при котором за время 1 с ее скорость увеличивается на 1 м/с.

Угловая скорость. Определяющее уравнение (для равномерно вращательного движения):

$$\omega = \frac{\varphi}{t}. \quad (\text{III.7})$$

При выражении φ — угла, описанного при вращении, в радианах,

времени t — в секундах угловая скорость выражается в радианах в секунду (сокращенное обозначение рад/с).

Единица угловой скорости — радиан в секунду — угловая скорость такого равномерного вращательного движения, при котором в течение 1 с описывается угол, равный 1 рад.

Угловое ускорение. Определяющее уравнение (для равнопеременного вращательного движения):

$$\epsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t}. \quad (\text{III.8})$$

Если угловую скорость ω выражать в радианах в секунду, а время t в секундах, угловое ускорение ϵ выразится в радианах на секунду в квадрате (сокращенное обозначение рад/с²).

Единица углового ускорения СИ — радиан на секунду в квадрате — угловое ускорение равноускоренного вращательного движения, при котором за время 1 с угловая скорость изменяется на 1 рад/с.

Плотность. Определяющее уравнение:

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (\text{III.9})$$

При выражении массы m в килограммах и объема V в кубических метрах плотность ρ выражается в килограммах на кубический метр (сокращенное обозначение кг/м³).

Единица плотности СИ — килограмм на кубический метр — плотность однородного тела, имеющего в объеме 1 м³ массу 1 кг.

Под объемной массой понимают среднюю плотность неоднородного тела. Измеряется объемная масса в тех же единицах, что и плотность.

Удельный объем. Определяющее уравнение:

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{m}. \quad (\text{III.10})$$

При плотности ρ в килограммах на кубический метр, объеме V в кубических метрах и массе m в килограммах удельный объем выражается в кубических метрах на килограмм (сокращенное обозначение м³/кг).

Единица удельного объема СИ — кубический метр на килограмм — удельный объем однородного тела, при массе 1 кг занимающего объем 1 м³.

Количество движения. Определяющее уравнение (для тела, движущегося с постоянной скоростью):

$$p = mv. \quad (\text{III.11})$$

Если масса тела m выражена в килограммах, скорость v — в метрах в секунду, количество движения p выразится в килограмм-метрах в секунду (сокращенное обозначение кг · м/с).

Единица количества движения СИ — килограмм-метр в секунду — количество движения тела массой 1 кг, движущегося поступательно со скоростью 1 м/с.

Момент количества движения. Определяющее уравнение (для материальной точки относительно центра вращения):

$$L = pr. \quad (\text{III. 12})$$

Если количество движения p дано в килограмм-метрах в секунду, а плечо r материальной точки относительно центра вращения — в метрах, момент количества движения L выражается в килограмм-метрах в квадрате в секунду (сокращенное обозначение $\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$).

Единица момента количества движения СИ — килограмм-метр в квадрате в секунду — момент количества движения материальной точки, движущейся по окружности радиусом 1 м и имеющей количество движения 1 $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}$.

Момент инерции (динамический). Определяющее уравнение:

$$J = mr^2. \quad (\text{III. 13})$$

При измерении массы m в килограммах, радиуса инерции тела относительно оси r в метрах момент инерции J выражается в килограмм-метрах в квадрате (сокращенное обозначение $\text{кг} \cdot \text{м}^2$).

Единица момента инерции СИ — килограмм-метр в квадрате — момент инерции материальной точки массой 1 кг, находящейся на расстоянии 1 м от оси вращения.

Сила. Определяющее уравнение:

$$F = ma. \quad (\text{III. 14})$$

При измерении массы m в килограммах, ускорения a в метрах на секунду в квадрате сила выражается в ньютонах (сокращенное обозначение Н).

Единица силы СИ — ньютон — сила, сообщающая телу массой 1 кг ускорение 1 $\text{м}/\text{с}^2$ в направлении действия силы.

Уравнение для силы тяжести P

$$P = mg, \quad (\text{III. 15})$$

где g — ускорение свободного падения.

Удельный вес. Определяющее уравнение:

$$\gamma = \frac{P}{V}. \quad (\text{III. 16})$$

При выражении веса тела P в ньютонах, объема V в кубических метрах удельный вес γ будет выражен в ньютонах на кубический метр (сокращенное обозначение $\text{Н}/\text{м}^3$).

Единица удельного веса СИ — ньютон на кубический метр — удельный вес однородного тела, вес которого при объеме 1 м^3 равен 1 Н.

Момент силы. Определяющее уравнение:

$$M = Fr. \quad (\text{III. 17})$$

Если силу F выражать в ньютонах, плечо силы r в метрах, то момент силы M будет выражен в ньютонах-метрах (сокращенное обозначение Н·м).

Единица момента силы СИ — ньютон-метр — момент силы 1 Н относительно точки, расположенной на расстоянии 1 м от линии действия силы.

Импульс силы. Определяющее уравнение:

$$J = Ft. \quad (\text{III.18})$$

Измеряя силу F в ньютонах, время ее действия t в секундах, получим импульс силы J в ньютон-секундах (сокращенное обозначение Н·с).

Единица импульса силы СИ — ньютон-секунда — импульс силы, равной 1 Н и действующей в течение 1 с.

Импульс момента силы. Определяющее уравнение:

$$L = Mt. \quad (\text{III.19})$$

Выражая момент силы M в ньютон-метрах, время t в секундах, получим для импульса момента силы L единицу ньютон-метр-секунда (сокращенное обозначение Н·м·с).

Единица импульса момента силы СИ — ньютон-метр-секунда — импульс момента силы, равного 1 Н·м и действующего в течение 1 с.

Давление и нормальное напряжение. Определяющие уравнения (для действия силы, направленной перпендикулярно к поверхности):

$$p = \frac{F}{S} \text{ и } \sigma = \frac{F}{S}. \quad (\text{III.20})$$

При измерении силы F в ньютонах, площади S в квадратных метрах давление p и нормальное напряжение σ выражаются в паскалях (сокращенное обозначение Па).

Единица давления или нормального напряжения СИ — паскаль — давление или нормальное напряжение, вызываемое силой 1 Н, равномерно распределенной по поверхности площадью 1 м², нормальной к ней.

Модуль продольной упругости. Определяющее уравнение:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad (\text{III.21})$$

где ε — относительное удлинение, равное

$$\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{l_1}. \quad (\text{III.22})$$

Так как ε — безразмерная величина, а σ — механическое напряжение выражается в паскалях, единицей модуля продольной упругости E является паскаль.

Единица модуля продольной упругости СИ — паскаль — модуль продольной упругости тела, в котором нормальное напряжение 1 Па вызывает относительное удлинение, равное единице.

Работа и энергия. Определяющее уравнение (для работы силы, перемещающей тело в направлении ее действия):

$$A = Fl. \quad (\text{III.23})$$

При измерении силы F в ньютонах, пройденного пути l в метрах работа A выражается в джоулях (сокращенное обозначение Дж).

Единица работы СИ — джоуль — работа силы, равной 1 Н, при перемещении ею точки приложения на расстояние 1 м в направлении действия силы.

Джоуль является также единицей энергии.

Мощность. Определяющее уравнение:

$$P = \frac{A}{t}. \quad (\text{III.24})$$

При измерении работы A в джоулях, а времени t в секундах мощность P будет выражаться в ваттах (сокращенное обозначение Вт).

Единица мощности СИ — ватт — мощность, при которой за время 1 с выполняется работа 1 Дж.

Ударная вязкость. Определяющее уравнение (для случая разрушения образца под действием удара):

$$a = \frac{A}{S}. \quad (\text{III.25})$$

Если A — работа на излом образца выражается в джоулях, площадь поперечного сечения образца в месте разрушения S — в квадратных метрах, то ударная вязкость a выражается в джоулях на квадратный метр (сокращенное обозначение Дж/м²).

Единица ударной вязкости СИ — джоуль на квадратный метр — ударная вязкость образца площадью поперечного сечения 1 м², разрушающегося при ударе, на который затрачивается работа, равная 1 Дж.

Динамическая вязкость. Определяющее уравнение (для случая ламинарного течения жидкости под действием давления сдвига):

$$\mu = \frac{F}{Sv/l}. \quad (\text{III.26})$$

При измерении давления сдвига F/S в паскалях и изменения скорости жидкости, отнесенного к расстоянию между слоями v/l в секундах в минус первой степени динамическая вязкость μ выражается в паскаль-секундах (сокращенное обозначение Па·с).

Единица динамической вязкости СИ — паскаль-секунда — динамическая вязкость среды, касательное напряжение в которой при ламинарном течении и при разности скоростей слоев, находящихся

на расстоянии 1 м по нормали к направлению скорости, равной 1 м/с, равно 1 Па.

Кинематическая вязкость. Определяющее уравнение (для однородной жидкости при ламинарном движении):

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (\text{III.27})$$

Если динамическая вязкость μ выражена в паскаль-секундах, а плотность ρ в килограммах на кубический метр, кинематическая вязкость ν выражается в квадратных метрах на секунду (сокращенное обозначение м²/с).

Единица кинематической вязкости СИ — квадратный метр на секунду — кинематическая вязкость среды с динамической вязкостью 1 Па·с и плотностью 1 кг/м³.

Поверхностное натяжение. Определяющее уравнение:

$$\sigma = \frac{F}{l}. \quad (\text{III.28})$$

При измерении силы поверхностного натяжения F , действующей нормально к контуру, в ньютонах, а длины контура свободной поверхности жидкости l в метрах поверхностное натяжение (или коэффициент поверхностного натяжения) σ выражается в ньютонах на метр (сокращенное обозначение Н/м).

Единица поверхностного натяжения — ньютон на метр — поверхностное натяжение жидкости, на 1 м контура свободной поверхности которой нормально к контуру и по касательной к поверхности действует сила 1 Н.

Расход вещества. Определяющее уравнение (для объемного расхода):

$$Q = \frac{V}{t}. \quad (\text{III.29})$$

При измерении объема V в кубических метрах, времени t в секундах объемный расход Q выражается в кубических метрах в секунду (сокращенное обозначение м³/с).

Единица объемного расхода СИ — кубический метр в секунду — объемный расход вещества объемом 1 м³ за время 1 с.

Определяющее уравнение (для массового расхода):

$$M = \frac{m}{t}. \quad (\text{III.30})$$

При измерении массы m в килограммах, времени t в секундах массовый расход M выражается в килограммах в секунду (сокращенное обозначение кг/с).

Единица массового расхода СИ — килограмм в секунду — массовый расход вещества массой 1 кг за время 1 с.

§ 20. ПРОИЗВОДНЫЕ ЕДИНИЦЫ СИ ДЛЯ ТЕПЛОВЫХ ВЕЛИЧИН

Количество теплоты (Q) в СИ измеряется в джоулях, поскольку джоуль является универсальной единицей работы, энергии и количества теплоты. В джоулях измеряются и такие термодинамические (характеристические) функции, как внутренняя энергия, энтальпия, свободная энергия и свободная энтальпия.

Теплота фазового превращения и теплота химической реакции (L) измеряется в джоулях.

Удельная теплота фазового превращения (и химической реакции). Определяющее уравнение:

$$l = \frac{L}{m}. \quad (\text{III.31})$$

При измерении теплоты фазового превращения L в джоулях и массы тела m в килограммах удельная теплота фазового превращения l выразится в джоулях на килограмм (сокращенное обозначение Дж/кг).

Единица удельной теплоты фазового превращения или химической реакции СИ — джоуль на килограмм — удельная теплота процесса, при котором 1 кг вещества получает (или отдает) количество теплоты, равное 1 Дж.

Теплоемкость. Определяющее уравнение:

$$C = \frac{Q_{12}}{t_2 - t_1}. \quad (\text{III.32})$$

При измерении начальной t_1 и конечной t_2 температур в кельвинах, количества теплоты Q_{12} , затраченного для нагревания тела в интервале температур от t_1 до t_2 , в джоулях теплоемкость C будет выражена в джоулях на кельвин (сокращенное обозначение Дж/К).

Единица теплоемкости СИ — джоуль на кельвин — теплоемкость тела, повышающего температуру на 1 К при подведении к нему количества теплоты 1 Дж.

Энтропия. Определяющее уравнение:

$$dS = \frac{dQ}{T}. \quad (\text{III.33})$$

Так как элементарное количество теплоты dQ , сообщаемое системе, измеряется в джоулях, абсолютная температура T — в кельвинах, то изменение энтропии dS выражается в джоулях на кельвин (сокращенное обозначение Дж/К).

Единица энтропии системы — джоуль на кельвин равен изменению энтропии системы, которой при температуре n К в изотермическом процессе сообщается количество теплоты n Дж.

Удельная теплоемкость (удельная энтропия, удельная газовая постоянная). Определяющее уравнение (для удельной теплоемкости):

$$c = \frac{C}{m}. \quad (\text{III.34})$$

При измерении теплоемкости C в джоулях на кельвин и массы m в килограммах удельная теплоемкость c выразится в джоулях на килограмм-кельвин [сокращенное обозначение Дж/(кг·К)].

Единица удельной теплоемкости СИ — джоуль на килограмм-кельвин — удельная теплоемкость вещества массой 1 кг, имеющего теплоемкость 1 Дж/К.

В молекулярной физике, химии и термодинамике применяют *молярную теплоемкость*, выражаемую в джоулях на моль-кельвин [сокращенное обозначение Дж/(моль·К)].

Тепловой поток. Определяющее уравнение:

$$\Phi = \frac{Q}{t}. \quad (\text{III.35})$$

Так как в СИ количество теплоты Q измеряется в джоулях, время t в секундах, то единицей теплового потока Φ (тепловой мощности) является ватт (сокращенное обозначение Вт).

Поверхностная плотность теплового потока. Определяющее уравнение:

$$q = \frac{\Phi}{S}. \quad (\text{III.36})$$

При измерении теплового потока Φ в ваттах, поверхности S в квадратных метрах поверхностная плотность теплового потока q выразится в ваттах на квадратный метр (сокращенное обозначение Вт/м²).

Единица поверхностной плотности теплового потока в СИ — ватт на квадратный метр — поверхностная плотность теплового потока, равного 1 Вт и равномерно распределенного на поверхности площадью 1 м².

Коэффициент теплообмена (и коэффициент теплопередачи). Определяющее уравнение:

$$\alpha = \frac{q}{t_2 - t_1}. \quad (\text{III.37})$$

При измерении поверхностной плотности теплового потока q в ваттах на квадратный метр, разности температур $t_2 - t_1$ в кельвинах коэффициент теплообмена α выразится в ваттах на квадратный метр-кельвин [сокращенное обозначение Вт/(м²·К)].

Единица коэффициента теплообмена СИ — ватт на квадратный метр-кельвин — коэффициент теплообмена, соответствующий поверхностной плотности теплового потока 1 Вт/м² при разности температур 1 К.

Температурный градиент. Определяющее уравнение:

$$\frac{\Delta t}{\Delta l} = \frac{t_1 - t_2}{l}. \quad (\text{III.38})$$

Так как начальная t_1 и конечная t_2 температуры тела на длине l нормали к изотермической поверхности выражаются в кельвинах, длина l — в метрах, то температурный градиент $\Delta t/\Delta l$ выразится в кельвинах на метр (сокращенное обозначение К/м).

Единица температурного градиента СИ — кельвин на метр — температурный градиент поля, в котором на участке длиной 1 м в направлении градиента температура изменяется на 1 К.

Коэффициент теплопроводности. Определяющее уравнение:

$$\lambda = \frac{q}{\Delta t/\Delta l} \quad (\text{III.39})$$

При измерении поверхностной плотности теплового потока q в ваттах на квадратный метр, градиента температуры $\Delta t/\Delta l$ в кельвинах на метр коэффициент теплопроводности λ выразится в ваттах на метр-кельвин [сокращенное обозначение Вт/(м·К)].

Единица коэффициента теплопроводности СИ — ватт на метр-кельвин — теплопроводность вещества, в котором при стационарном режиме с поверхностной плотностью теплового потока 1 Вт/м² устанавливается температурный градиент 1 К/м.

Коэффициент температуропроводности. Определяющее уравнение:

$$a = \frac{\lambda}{\rho c_p}. \quad (\text{III.40})$$

Так как λ — коэффициент теплопроводности — измеряется в ваттах на метр-кельвин, ρ — плотность в килограммах на кубический метр, c_p — удельная теплоемкость при неизменном давлении — в джоулях на килограмм-кельвин, то коэффициент температуропроводности a выразится в квадратных метрах на секунду (сокращенное обозначение м²/с).

Единица коэффициента температуропроводности СИ — квадратный метр на секунду — температуропроводность вещества теплопроводностью 1 Вт/(м·К), удельной теплоемкостью при постоянном давлении 1 Дж/(кг·К) и плотностью 1 кг/м³.

Температурный коэффициент длины, объема, электрического сопротивления и т. д. Определяющее уравнение:

$$\alpha = \frac{\frac{x_2 - x_1}{x_1}}{t_2 - t_1}. \quad (\text{III.41})$$

Так как относительное изменение какой-либо величины $\frac{x_2 - x_1}{x_1}$ есть величина безразмерная, а разность температур $t_2 - t_1$ измеряется в кельвинах, то температурный коэффициент α выражается

в кельвинах в минус первой степени (сокращенное обозначение $1/\text{К}$ или К^{-1}).

Единица температурного коэффициента СИ — кельвин в минус первой степени — температурный коэффициент относительного изменения физической величины, при котором изменение температуры на 1 К от принятой за начальную вызывает относительное изменение этой величины, равное единице.

Газовая постоянная. Определяющее уравнение:

$$R = \frac{p v}{T}. \quad (\text{III.42})$$

При измерении давления p в паскалях, удельного объема газа v в кубических метрах на килограмм, абсолютной температуры T в кельвинах газовая постоянная для 1 кг газа (удельная газовая постоянная) R выразится в джоулях на килограмм-кельвин [сокращенное обозначение $\text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$].

Газовая постоянная для 1 моля газа (универсальная газовая постоянная) выражается в джоулях на моль-кельвин [сокращенное обозначение $\text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$].

§ 21. ПРОИЗВОДНЫЕ ЕДИНИЦЫ СИ ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН

Единицы Международной системы электрических и магнитных величин определяются из формул, записанных в рационализованной форме.

Рационализация уравнений электромагнитного поля имеет целью исключение безразмерных коэффициентов 4π и $\frac{1}{4\pi}$ из всех соотношений, в которых наличие этих коэффициентов не оправдано, и введение их в соотношения для частных случаев, характеризующих осевую или сферическую симметрию, т. е. в соотношения, в которых наличие этих коэффициентов является естественным и логичным (коэффициент 4π численно равен площади сферы, а π — площади круга, радиусы которых равны единице).

Не оправдано наличие коэффициента 4π в ряде формул, записанных в нерационализованной форме, например, в формуле для электроемкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon_a S}{4\pi d}.$$

Между тем не оправдано отсутствие коэффициента 4π в ряде формул, записанных в нерационализованной форме, например, в формуле закона Кулона $F = \frac{Q_1 Q_2}{\epsilon_a r^2}$, который характеризует действия одного точечного заряда на другой во все стороны, т. е. через сферу; в формуле, выражающей электроемкость шара,

$C = \epsilon_a r$; в выражении для напряженности магнитного поля прямолинейного проводника кругового сечения $H = \frac{2I}{r}$; в выражении для емкости цилиндрического конденсатора $C = \frac{\epsilon_a}{2 \ln \frac{R}{r}}$ или

сферического конденсатора $C = \frac{\epsilon_a r R}{R - r}$ и т. д.

К величинам, единицы которых подвержены рационализации, относятся электрическое смещение (или электрическая индукция) D , поток электрического смещения (или поток электрической индукции) ψ_D , абсолютные диэлектрическая ϵ_a и магнитная μ_a проницаемости (и соответствующие постоянные ϵ_0 и μ_0), напряженность магнитного поля H , магнитодвижущая сила F , магнитная восприимчивость k_m , магнитное сопротивление r_m и магнитная проводимость g_m .

Для рационализации уравнений электромагнитного поля, описывающих электромагнитные и электрические явления и записанных в нерационализованной форме, приписывается множитель 4π к величинам ϵ_a , ϵ_0 , D , ψ_D , H , F , r_m и множитель $\frac{1}{4\pi}$ к величинам μ_a , μ_0 , k_m и g_m . Уравнения, не содержащие приведенных величин, записываются одинаково как в нерационализованной, так и в рационализованной формах.

Плотность электрического тока. Определяющее уравнение:

$$\delta = \frac{I}{S}. \quad (\text{III.43})$$

Так как сила тока I в СИ измеряется в амперах, площадь S в квадратных метрах, то плотность тока δ выражается в амперах на квадратный метр (сокращенное обозначение А/м^2).

Единица плотности электрического тока СИ — ампер на квадратный метр — плотность электрического тока силой 1А, равномерно распределенного по поперечному сечению проводника площадью 1 м².

Линейная плотность электрического тока. Определяющее уравнение:

$$r = \frac{I}{l}. \quad (\text{III.44})$$

При измерении силы электрического тока I в амперах, длины l в метрах линейная плотность электрического тока будет выражаться в амперах на метр (сокращенное обозначение А/м).

Единица линейной плотности электрического тока СИ — ампер на метр — линейная плотность электрического тока, при равномерном распределении которого по ширине 1 м тонкого листового проводника сила тока равна 1А.

Количество электричества (электрический заряд). Определяющее уравнение:

$$Q = It. \quad (\text{III.45})$$

При измерении силы тока I в амперах, времени действия тока t в секундах количество электричества Q выражается в кулонах (сокращенное обозначение Кл).

Единица количества электричества СИ — кулон — количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника в течение 1 с при силе тока 1А.

Объемная плотность электрического заряда. Определяющее уравнение:

$$\rho = \frac{Q}{V}. \quad (\text{III.46})$$

При измерении количества электричества Q в кулонах, объема V в кубических метрах объемная плотность электрического заряда ρ выражается в кулонах на кубический метр (сокращенное обозначение Кл/м³).

Единица объемной плотности электрического заряда СИ — кулон на кубический метр — объемная плотность электрического заряда, равного 1 Кл и равномерно распределенного в объеме 1 м³.

Поверхностная плотность электрического заряда. Определяющее уравнение:

$$\sigma = \frac{Q}{S}. \quad (\text{III.47})$$

При измерении количества электричества Q в кулонах, площади S в квадратных метрах поверхностная плотность электрического заряда σ выразится в кулонах на квадратный метр (сокращенное обозначение Кл/м²).

Единица поверхностной плотности электрического заряда СИ — кулон на квадратный метр — поверхностная плотность электрического заряда, при которой на поверхности площадью 1 м² равномерно распределен заряд 1 Кл.

Линейная плотность электрического заряда. Определяющее уравнение:

$$\tau = \frac{Q}{l}. \quad (\text{III.48})$$

При измерении количества электричества Q в кулонах, длины l в метрах линейная плотность электрического заряда τ выражается в кулонах на метр (сокращенное обозначение Кл/м).

Единица линейной плотности электрического заряда СИ — кулон на метр — линейная плотность электрического заряда, равного 1 Кл и равномерно распределенного на длине 1 м.

Электрический момент диполя. Определяющее уравнение:

$$P = Qr. \quad (\text{III.49})$$

При измерении зарядов диполя Q в кулонах, расстояния между ними r в метрах электрический момент диполя P выразится в кулон-метрах (сокращенное обозначение Кл·м).

Единица электрического момента диполя СИ — кулон-метр — момент электрического диполя, заряды которого, равные каждый 1 Кл, расположены на расстоянии 1 м один от другого.

Электрическое смещение. Определяющее уравнение:

$$D = \frac{Q}{S}. \quad (\text{III.50})$$

При измерении Q — количества электричества, сместившегося при установлении электрического поля, в кулонах, площади поверхности S , нормальной к направлению смещения, в квадратных метрах электрическое смещение D выражается в кулонах на квадратный метр (сокращенное обозначение Кл/м²).

Единица электрического смещения СИ — кулон на квадратный метр — электрическое смещение, при котором сквозь поверхность площадью 1 м² смещается количество электричества 1 Кл.

Поток электрического смещения. Определяющее уравнение:

$$\psi_D = Q. \quad (\text{III.51})$$

При измерении свободного суммарного заряда Q в кулонах поток электрического смещения ψ_D выражается в тех же единицах.

Единица потока электрического смещения СИ — кулон — поток электрического смещения сквозь замкнутую поверхность, внутри которой содержится свободный заряд 1 Кл.

Электрический потенциал, электрическое напряжение, электродвижущая сила. Определяющее уравнение (для электрического потенциала заряда в данной точке поля):

$$\varphi = \frac{A}{Q}. \quad (\text{III.52})$$

При измерении работы A по перемещению электрического заряда из точки с нулевым потенциалом в данную точку поля в джоулях, заряда Q в кулонах электрический потенциал φ выразится в вольтах (сокращенное обозначение В).

Определяющее уравнение (для электрического напряжения):

$$U = \frac{P}{I}. \quad (\text{III.53})$$

При измерении мощности тока P в ваттах и силы тока I в амперах электрическое напряжение U будет выражаться в вольтах.

Единица электрического напряжения СИ — вольт — электрическое напряжение, вызывающее в электрической цепи постоянный ток силой 1 А, при мощности 1 Вт.

Напряженность электрического поля. Определяющее уравнение:

$$E = \frac{F}{Q}. \quad (\text{III.54})$$

При измерении силы F , действующей на заряд в данной точке поля, в ньютонах, заряда Q в кулонах напряженность электрического поля выразится в вольтах на метр (сокращенное обозначение В/м).

Второй вид определяющего уравнения для напряженности электрического поля:

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{l}. \quad (\text{III.55})$$

При измерении разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между двумя точками в вольтах, расстояния между ними l в метрах напряженность поля выражается в вольтах на метр.

Единица напряженности электрического поля СИ — вольт на метр — напряженность электрического поля в точке, где на электрический заряд 1 Кл действует сила 1 Н, или напряженность однородного электрического поля, создаваемая разностью потенциалов 1 В между точками, находящимися на расстоянии 1 м вдоль линии напряженности поля.

Плотность энергии электрического поля. Определяющее уравнение:

$$w = \frac{DE}{2}. \quad (\text{III.56})$$

Выражая электрическое смещение D в кулонах на квадратный метр, напряженность электрического поля E в вольтах на метр, получим для плотности энергии электрического поля w единицу — джоуль на кубический метр (сокращенное обозначение Дж/м³).

Единица плотности энергии электрического поля СИ — джоуль на кубический метр — плотность энергии электрического поля, при которой в объеме 1 м³ заключена энергия электрических зарядов, равная 1 Дж.

Электрическая емкость. Определяющее уравнение:

$$C = \frac{Q}{U}. \quad (\text{III.57})$$

При измерении количества электричества Q в кулонах, потенциала U в вольтах получим для электрической емкости C единицу — фараду (сокращенное обозначение Ф).

Единица электрической емкости СИ — фарада — электроемкость проводника, потенциал которого увеличивается на 1 В при сообщении ему заряда 1 Кл.

Абсолютная диэлектрическая проницаемость. Определяющее уравнение:

$$\epsilon_a = \frac{D}{E}. \quad (\text{III.58})$$

При измерении электрического смещения D в кулонах на квадратный метр, напряженности электрического поля E в вольтах на метр абсолютная диэлектрическая проницаемость ϵ_a выразится в фарадах на метр (сокращенное обозначение Ф/м).

Единица абсолютной диэлектрической проницаемости СИ — фарада на метр — абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, в которой при напряженности электрического поля 1 В/м возникает электрическое смещение 1 Кл/м².

Абсолютная диэлектрическая проницаемость свободного пространства (электрическая постоянная):

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \text{ Ф/м} = 8,85419 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м},$$

где c — скорость распространения электромагнитных волн в свободном пространстве, равная $2,997925 \cdot 10^8$ м/с.

Диэлектрическая проницаемость (относительная). Определяющее уравнение:

$$\epsilon = \frac{\epsilon_a}{\epsilon_0}. \quad (\text{III.59})$$

Относительная диэлектрическая проницаемость ϵ выражается в безразмерных единицах.

Электрическое сопротивление. Определяющее уравнение:

$$r = \frac{U}{I}. \quad (\text{III.60})$$

При измерении напряжения электрического тока U в вольтах, силы тока I в амперах сопротивление r выражается в омах (сокращенное обозначение Ом).

Единица электрического сопротивления СИ — ом — сопротивление проводника, в котором при напряжении на концах его, равном 1 В, возникает ток силой 1 А.

Электрическая проводимость. Определяющее уравнение:

$$g = \frac{1}{r}. \quad (\text{III.61})$$

При измерении электрического сопротивления r в омах электрическая проводимость g будет выражена в сименсах (сокращенное обозначение См).

Единица электрической проводимости СИ — сименс — электрическая проводимость проводника сопротивления 1 Ом.

Удельное электрическое сопротивление. Определяющее уравнение:

$$\rho = \frac{r}{l} S. \quad (\text{III.62})$$

При измерении электрического сопротивления r в омах, длины проводника l в метрах и площади его поперечного сечения S в квадратных метрах удельное электрическое сопротивление ρ выразится в ом-метрах (сокращенное обозначение Ом·м).

Единица удельного электрического сопротивления СИ — ом-метр — удельное электрическое сопротивление цилиндрического прямолинейного проводника площадью поперечного сечения 1 м^2 и длиной 1 м , имеющего сопротивление 1 Ом .

Удельная электрическая проводимость. Определяющее уравнение:

$$\sigma = g \frac{l}{S}. \quad (\text{III.63})$$

При измерении электрической проводимости g в сименсах, длины проводника l в метрах и площади его поперечного сечения S в квадратных метрах удельная электрическая проводимость σ выразится в сименсах на метр (сокращенное обозначение См/м).

Единица удельной электрической проводимости СИ — сименс на метр — удельная электрическая проводимость цилиндрического прямолинейного проводника, который при площади поперечного сечения 1 м^2 и длине 1 м имеет электрическую проводимость 1 См .

Магнитный поток. Определяющее уравнение:

$$\Phi = Qr. \quad (\text{III.64})$$

При измерении в кулонах количества электричества Q , индуцированного в электрической цепи при появлении или исчезновении магнитного потока, сопротивления r в омах магнитный поток Φ выразится в веберах (сокращенное обозначение Вб).

Единица магнитного потока СИ — вебер — магнитный поток, при убывании которого до нуля в электрической цепи, сцепленной с этим потоком и имеющей сопротивление 1 Ом , через поперечное сечение проводника протекает количество электричества 1 Кл .

Магнитная индукция. Определяющее уравнение:

$$B = \frac{\Phi}{S}. \quad (\text{III.65})$$

При измерении магнитного потока Φ в веберах, площади S в квадратных метрах магнитная индукция B выразится в теслах (сокращенное обозначение Т).

Единица магнитной индукции — СИ — тесла — магнитная индукция, при которой магнитный поток сквозь поперечное сечение площадью 1 м^2 равен 1 Вб .

Магнитодвижущая сила. Определяющее уравнение:

$$F = nI. \quad (\text{III.66})$$

При измерении силы тока I в амперах и при n числе витков соленоида или числе обходов вдоль замкнутого контура, сцепленного с электрической цепью, магнитодвижущая сила F выразится в амперах. Иногда единицу магнитодвижущей силы называют ампер-витком.

Единица магнитодвижущей силы СИ — ампер — магнитодвижущая сила вдоль замкнутого контура, сцепленного с контуром постоянного тока силой 1 А.

Напряженность магнитного поля. Определяющее уравнение (для напряженности магнитного поля в центре соленоида):

$$H = \frac{nI}{l}. \quad (\text{III.67})$$

При измерении силы тока I в амперах, длины соленоида l в метрах, при числе витков соленоида n , напряженность магнитного поля H выразится в амперах на метр (сокращенное обозначение А/м).

Единица напряженности магнитного поля СИ — ампер на метр — напряженность магнитного поля в центре длинного соленоида с n витками на 1 м длины, по которому проходит ток силой 1 А.

Индуктивность. Определяющее уравнение:

$$L = \frac{\Phi}{I}. \quad (\text{III.68})$$

При измерении силы постоянного тока I в контуре в амперах, магнитного потока Φ в веберах индуктивность L выразится в генри (сокращенное обозначение Г).

Единица индуктивности СИ — генри — индуктивность контура, с которым при силе постоянного тока в нем 1 А сцепляется магнитный поток 1 Вб.

Абсолютная магнитная проницаемость. Определяющее уравнение:

$$\mu_a = \frac{B}{H}. \quad (\text{III.69})$$

При измерении магнитной индукции B в теслах, напряженности магнитного поля H в амперах на метр абсолютная магнитная проницаемость μ_a выразится в генри на метр (сокращенное обозначение Г/м).

Единица абсолютной магнитной проницаемости — генри на метр — абсолютная магнитная проницаемость среды, в которой при напряженности магнитного поля 1 А/м создается магнитная индукция 1 Т.

Абсолютная магнитная проницаемость свободного пространства (магнитная постоянная):

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Г/м} = 1,256637 \cdot 10^{-8} \text{ Г/м}.$$

Магнитная проницаемость (относительная). Определяющее уравнение:

$$\mu = \frac{\mu_a}{\mu_0}. \quad (\text{III.70})$$

Магнитная проницаемость μ выражается в безразмерных единицах.

Магнитный момент электрического тока. Определяющее уравнение:

$$p_m = I \cdot S. \quad (\text{III.71})$$

При измерении силы тока I в амперах, площади S контура тока в квадратных метрах магнитный момент электрического тока p_m выразится в ампер-квадратных метрах (сокращенное обозначение $\text{А} \cdot \text{м}^2$).

Единица магнитного момента электрического тока СИ — ампер-квадратный метр — магнитный момент электрического тока силой 1 А, проходящего по лежащему в плоскости контуру площадью 1 м^2 .

Намагниченность. Определяющее уравнение:

$$J = \frac{p_m}{V}. \quad (\text{III.72})$$

При измерении магнитного момента p_m в ампер-квадратных метрах, объема V в кубических метрах намагниченность магнетика J выразится в амперах на метр (сокращенное обозначение А/м).

Единица намагниченности СИ — ампер на метр — намагниченность, при которой вещество объема 1 м^3 имеет магнитный момент 1 $\text{А} \cdot \text{м}^2$.

Магнитное сопротивление. Определяющее уравнение:

$$r_m = \frac{F}{\Phi}. \quad (\text{III.73})$$

При измерении магнитодвижущей силы F в амперах, магнитного потока Φ в веберах магнитное сопротивление r_m выразится в амперах на вебер (сокращенное обозначение А/Вб).

Единица магнитного сопротивления СИ — ампер на вебер — магнитное сопротивление магнитной цепи, в которой магнитодвижущая сила 1 А создает магнитный поток 1 Вб.

Магнитная проводимость. Определяющее уравнение:

$$g_m = \frac{1}{r_m}. \quad (\text{III.74})$$

При измерении магнитного сопротивления r_m в амперах на вебер магнитная проводимость g_m выразится в веберах на ампер (сокращенное обозначение Вб/А).

Единица магнитной проводимости СИ — вебер на ампер — магнитная проводимость магнитной цепи с магнитным сопротивлением 1 А/Вб .

Объемная плотность электромагнитной энергии. Определяющее уравнение:

$$\omega = \frac{BH}{2}. \quad (\text{III.75})$$

При измерении магнитной индукции B в теслах, напряженности магнитного поля H в амперах на метр плотность энергии электромагнитного поля ω выразится в джоулях на кубический метр (сокращенное обозначение Дж/м³).

Единица объемной плотности электромагнитной энергии СИ — джоуль на кубический метр — объемная плотность электромагнитной энергии, при которой в объеме 1 м³ заключается 1 Дж энергии.

Активная мощность электрической цепи. Определяющее уравнение для постоянного тока:

$$P = IU; \quad (\text{III.76})$$

определяющее уравнение для синусоидального переменного тока при действующих значениях силы тока I , напряжения U и угле сдвига фаз между током и напряжением φ :

$$P = UI \cos \varphi. \quad (\text{III.77})$$

При измерении силы тока I в амперах, напряжения тока U в вольтах активная мощность электрического тока P выразится в ваттах.

Реактивная мощность электрической цепи. Определяющее уравнение (для синусоидального переменного тока):

$$Q = IU \sin \varphi. \quad (\text{III.78})$$

При выражении действующих значений силы тока I в амперах и напряжения U в вольтах и при сдвиге фаз между током и напряжением φ реактивная мощность переменного тока Q выражается в варах (обозначение вар).

Единица реактивной мощности электрической цепи СИ — вар — реактивная мощность электрической цепи с синусоидальным переменным током при $\sin \varphi = 1$ и действующих значениях силы тока 1 А и напряжения 1 В.

Полная мощность электрической цепи. Определяющее уравнение (для переменного тока):

$$S = IU. \quad (\text{III.79})$$

При выражении действующих значений силы тока I в амперах и напряжения U в вольтах полная мощность электрической цепи переменного тока S выражается в вольт-амперах (сокращенное обозначение В·А).

Единица полной мощности электрической цепи — вольт-ампер — полная мощность электрической цепи при действующих значениях силы тока 1 А и напряжения 1 В.

§ 22. ПРОИЗВОДНЫЕ ЕДИНИЦЫ СИ ДЛЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Звуковое давление. Определяющее уравнение:

$$p = \frac{F}{S}, \quad (\text{III.80})$$

где F — нормальная сила, с которой звуковая волна действует на поверхность; S — площадь поверхности, на которую падает звуковая волна; p — звуковое давление.

Единица звукового давления СИ — паскаль (сокращенное обозначение Па).

Объемная скорость звука. Определяющее уравнение:

$$V = vS. \quad (\text{III.81})$$

При измерении колебательной скорости v в метрах в секунду и площади поверхности S , расположенной в звуковом поле перпендикулярно к движению частиц упругой среды, в квадратных метрах, объемная скорость звука V выразится в кубических метрах в секунду (сокращенное обозначение м³/с).

Единица объемной скорости звука СИ — кубический метр в секунду — объемная скорость звука при колебательной скорости 1 м/с и площади поперечного сечения звукопровода 1 м².

Акустическое сопротивление. Определяющее уравнение:

$$Z_a = \frac{p}{V}. \quad (\text{III.82})$$

При измерении звукового давления p в паскалях, объемной скорости звука V в кубических метрах в секунду акустическое сопротивление Z_a выразится в паскаль-секундах на кубический метр (сокращенное обозначение Па · с/м³).

Единица акустического сопротивления СИ — паскаль-секунда на кубический метр — акустическое сопротивление звуковой системы, в которой создается объемная скорость 1 м³/с при звуковом давлении 1 Па.

Механическое сопротивление акустической системы. Определяющее уравнение:

$$Z_m = \frac{F}{v}. \quad (\text{III.83})$$

При выражении силы F , действующей в данной точке акустической системы в направлении скорости звука, в ньютонах, колебательной скорости v в метрах в секунду получим для механического сопротивления Z_m единицу — ньютон-секунда на метр (сокращенное обозначение Н · с/м).

Единица механического сопротивления акустической системы — ньютон-секунда на метр — механическое сопротивление

акустической системы, в которой при силе 1 Н возникает колебательная скорость 1 м/с.

Поток звуковой энергии. Определяющее уравнение:

$$P = \frac{W}{t}. \quad (\text{III.84})$$

При измерении звуковой энергии W в джоулях, времени t в секундах поток звуковой энергии P выразится в ваттах (Вт).

Интенсивность звука. Определяющее уравнение:

$$I = \frac{P}{S}. \quad (\text{III.85})$$

При измерении потока звуковой энергии P в ваттах, площади S в квадратных метрах интенсивность звука I выразится в ваттах на квадратный метр (сокращенное обозначение Вт/м²).

Единица интенсивности звука СИ — ватт на квадратный метр — интенсивность звука, при которой через поверхность площадью 1 м², перпендикулярную к направлению распространения звука, передается поток звуковой энергии, равный 1 Вт.

Плотность звуковой энергии. Определяющее уравнение:

$$E = \frac{W}{V}. \quad (\text{III.86})$$

При измерении звуковой энергии W в джоулях, V — объема упругой среды в кубических метрах плотность звуковой энергии E выразится в джоулях на кубический метр (сокращенное обозначение Дж/м³).

Единица плотности звуковой энергии СИ — джоуль на кубический метр — плотность звуковой энергии, при которой на объем 1 м³ приходится звуковая энергия 1 Дж.

§ 23. ПРОИЗВОДНЫЕ ЕДИНИЦЫ СИ ДЛЯ СВЕТОВЫХ И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ОПТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Световой поток. Определяющее уравнение:

$$\Phi = J\omega. \quad (\text{III.87})$$

В этом уравнении сила света J выражается в канделах, телесный угол ω в стерadianах, световой поток Φ в люменах (сокращенное обозначение лм).

Единица светового потока СИ — люмен — световой поток, испускаемый точечным источником силой света 1 кд в телесном угле, равном 1 ср.

Световая энергия (количество света). Определяющее уравнение:

$$Q = \Phi t. \quad (\text{III.88})$$

Так как световой поток Φ измеряется в люменах, то при выражении времени t в секундах получим световую энергию Q в люмен-секундах (сокращенное обозначение лм·с).

Единица световой энергии СИ — люмен-секунда — световая энергия, соответствующая световому потоку 1 лм, излучаемому или воспринимаемому в течение 1 с.

Светимость. Определяющее уравнение:

$$M = \frac{\Phi}{S}. \quad (\text{III.89})$$

Так как световой поток Φ измеряется в люменах, то при измерении площади S излучающей поверхности в квадратных метрах светимость M источника света выразится в люменах на квадратный метр (сокращенное обозначение лм/м²).

Единица светимости СИ — люмен на квадратный метр — светимость поверхности площадью 1 м², испускающей световой поток 1 лм.

Освещенность. Определяющее уравнение:

$$E = \frac{\Phi}{S}. \quad (\text{III.90})$$

При измерении площади S освещаемой поверхности в квадратных метрах, Φ — светового потока в люменах освещенность E выразится в люксах (сокращенное обозначение лк).

Единица освещенности СИ — люкс — освещенность поверхности площадью 1 м² при световом потоке падающего на нее излучения, равном 1 лм.

Освечивание. Определяющее уравнение:

$$C = Jt. \quad (\text{III.91})$$

Так как сила света J измеряется в канделах, то при измерении времени действия света t в секундах получим освечивание C в кандела-секундах (сокращенное обозначение кд·с).

Единица освечивания СИ — кандела-секунда — освечивание, создаваемое излучением с силой света 1 кд, действующим в течение 1 с.

Яркость. Определяющее уравнение:

$$L = \frac{J}{S}. \quad (\text{III.92})$$

При измерении площади S светящейся поверхности в квадратных метрах и силы света J в канделах яркость L выразится в канделах на квадратный метр (сокращенное обозначение кд/м²).

Единица яркости СИ — кандела на квадратный метр — яр-

кость равномерно светящейся плоской поверхности площадью 1 м^2 в перпендикулярном к ней направлении при силе света 1 кд.

Световая экспозиция. Определяющее уравнение:

$$H = Et. \quad (\text{III.93})$$

При измерении освещенности поверхности E в люксах, времени t в секундах световая экспозиция H выразится в люкс-секундах (сокращенное обозначение лк·с).

Единица световой экспозиции СИ — люкс-секунда — световая экспозиция, создаваемая в течение 1 с при освещенности 1 лк.

Поток излучения (лучистый поток). Определяющее уравнение

$$\Phi_s = \frac{W}{t}. \quad (\text{III.94})$$

При измерении энергии излучения W в джоулях, времени излучения t в секундах поток излучения Φ_s выразится в ваттах.

Световая эффективность излучения (видность). Определяющее уравнение:

$$V = \frac{\Phi}{\Phi_s}. \quad (\text{III.95})$$

При измерении светового потока Φ в люменах и потока излучения Φ_s в ваттах световая эффективность излучения V выразится в люменах на ватт (сокращенное обозначение лм/Вт).

Энергетическая светимость (излучательность). Определяющее уравнение:

$$M_s = \frac{\Phi_s}{S}. \quad (\text{III.96})$$

При измерении потока излучения Φ_s в ваттах, площади S в квадратных метрах энергетическая светимость M_s выразится в ваттах на квадратный метр (сокращенное обозначение Вт/м²).

Единица энергетической светимости СИ — ватт на квадратный метр — энергетическая светимость поверхности площадью 1 м^2 , испускающей поток излучения, равный 1 Вт.

Энергетическая освещенность (облученность), определяющее уравнение которой

$$E_s = \frac{\Phi_s}{S}, \quad (\text{III.97})$$

также измеряется в ваттах на квадратный метр.

Энергетическая экспозиция (лучистая экспозиция). Определяющее уравнение:

$$H_s = E_s t. \quad (\text{III.98})$$

При измерении энергетической освещенности E_s в ваттах на квадратный метр, времени t в секундах энергетическая экспозиция H_s выражается в джоулях на квадратный метр (сокращенное обозначение Дж/м²).

Единица энергетической экспозиции — джоуль на квадратный метр — энергетическая экспозиция, получаемая поверхностью в течение 1 с при энергетической освещенности 1 Вт/м².

Энергетическая сила света (сила излучения). Определяющее уравнение:

$$J_s = \frac{\Phi_s}{\omega}. \quad (\text{III.99})$$

При измерении потока излучения Φ_s в ваттах, телесного угла ω встерадианах энергетическая сила света J_s выразится в ваттах настерадиан (сокращенное обозначение Вт/ср). Единица энергетической силы света СИ — ватт настерадиан — энергетическая сила света равномерного источника, создающая в телесном угле, равном 1 ср, поток излучения 1 Вт.

Энергетическая яркость (лучистость). Определяющее уравнение:

$$L_s = \frac{J_s}{S}. \quad (\text{III.100})$$

При измерении энергетической силы света J_s в ваттах настерадиан, площади излучающей поверхности S в квадратных метрах энергетическая яркость L_s выразится в ваттах настерадиан-квадратный метр [сокращенное обозначение Вт/(ср·м²)].

Единица энергетической яркости СИ — ватт настерадиан-квадратный метр — энергетическая яркость равномерно излучающей плоской поверхности площадью 1 м² в перпендикулярном к ней направлении при энергетической силе света 1 Вт/ср.

§ 24. ПРОИЗВОДНЫЕ ЕДИНИЦЫ СИ ДЛЯ ВЕЛИЧИН ИОНИЗИРУЮЩИХ ИЗЛУЧЕНИЙ И МОЛЯРНЫХ ВЕЛИЧИН

а) Величины ионизирующих излучений

Доза излучения (поглощенная доза излучения). Определяющее уравнение:

$$D_n = \frac{W}{m}. \quad (\text{III.101})$$

При измерении энергии ионизирующего излучения W , поглощенной облученным веществом, в джоулях, массы m облученного вещества в килограммах доза излучения D_n выразится в джоулях на килограмм (сокращенное обозначение Дж/кг).

Единица дозы излучения СИ — джоуль на килограмм — доза излучения, при которой массе облученного вещества 1 кг передается энергия ионизирующего излучения 1 Дж.

Мощность дозы излучения. Определяющее уравнение:

$$P_n = \frac{D_n}{t}. \quad (\text{III.102})$$

При измерении дозы излучения D_n в джоулях на килограмм, времени t в секундах мощность поглощенной дозы P_n выразится в ваттах на килограмм (сокращенное обозначение Вт/кг).

Единица мощности дозы излучения СИ — ватт на килограмм — мощность дозы излучения, при которой за время 1 с доза излучения возрастает на 1 Дж/кг.

Экспозиционная доза (фотонного излучения). Определяющее уравнение:

$$D_s = \frac{Q}{m}. \quad (\text{III.103})$$

При измерении Q — суммарного электрического заряда одного знака, создаваемого фотонным излучением в сухом атмосферном воздухе, в кулонах, массы m воздуха в килограммах экспозиционная доза D_s выразится в кулонах на килограмм (сокращенное обозначение Кл/кг).

Единица экспозиционной дозы СИ — кулон на килограмм — экспозиционная доза фотонного излучения, при которой сопряженная корпускулярная эмиссия в сухом атмосферном воздухе массой 1 кг производит ионы, несущие электрический заряд каждого знака, равный 1 Кл.

Мощность экспозиционной дозы. Определяющее уравнение:

$$P_s = \frac{D_s}{t}. \quad (\text{III.104})$$

При измерении экспозиционной дозы фотонного излучения D_s в кулонах на килограмм, времени t в секундах мощность экспозиционной дозы P_s выразится в амперах на килограмм (сокращенное обозначение А/кг).

Единица мощности экспозиционной дозы — ампер на килограмм — мощность экспозиционной дозы фотонного излучения, при которой за время 1 с экспозиционная доза возрастает на 1 Кл/кг.

Интенсивность излучения. Определяющее уравнение:

$$I = \frac{W}{tS}. \quad (\text{III.105})$$

При измерении энергии W в джоулях, времени t в секундах, площади S поперечного сечения в квадратных метрах интенсивность излучения I выразится в ваттах на квадратный метр (сокращенное обозначение Вт/м²).

Единица интенсивности излучения — ватт на квадратный метр — интенсивность излучения, при которой через поверхность площадью 1 м², расположенную перпендикулярно к направлению распространения излучения, за время 1 с переносится энергия 1 Дж.

Активность радиоактивного изотопа. Определяющее уравнение:

$$A = \frac{n}{t}. \quad (\text{III.106})$$

При n числе актов распада в течение t секунд активность радиоактивного изотопа A выразится в секундах в минус первой степени (сокращенное обозначение с^{-1}).

Единица активности радиоактивного изотопа — секунда в минус первой степени — активность изотопа в радиоактивном источнике, в котором за время 1 с происходит один акт распада.

Плотность потока ионизирующих частиц. Определяющее уравнение:

$$J = \frac{n}{tS}. \quad (\text{III.107})$$

При числе ионизирующих частиц n , времени t в секундах и площади поверхности S в квадратных метрах, перпендикулярной к потоку, плотность потока ионизирующих частиц или квантов J выразится в секундах в минус первой степени-метр в минус второй степени (сокращенное обозначение $\text{с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$).

Единица плотности потока ионизирующих частиц — секунда в минус первой степени-метр в минус второй степени — плотность направленного потока ионизирующих частиц, при которой через поверхность площадью 1 м^2 , перпендикулярную к потоку, проходит одна ионизирующая частица за время 1 с.

б) Молярные величины

Молярная масса. Определяющее уравнение:

$$M = \frac{m}{\nu}. \quad (\text{III.108})$$

При выражении массы m в килограммах, количества вещества ν в молях, молярная масса M выразится в килограммах на моль.

Единица молярной массы — килограмм на моль — молярная масса вещества имеющего при количестве вещества 1 моль массу 1 кг.

Молярный объем. Определяющее уравнение:

$$V_m = \frac{V}{\nu}. \quad (\text{III.109})$$

При выражении объема V в кубических метрах, количества вещества ν в молях, молярный объем V_m выразится в кубических метрах на моль.

Единица молярного объема — кубический метр на моль — молярный объем вещества, занимающий при количестве вещества 1 моль объем 1 м^3 .

Молярная внутренняя энергия. Определяющее уравнение:

$$U_m = \frac{U}{\nu}. \quad (\text{III.110})$$

При выражении внутренней энергии U в джоулях, количества вещества ν в молях, молярная внутренняя энергия U_m выразится в джоулях на моль.

Единица молярной внутренней энергии — джоуль на моль — молярная внутренняя энергия вещества в количестве 1 моль, внутренняя энергия которого равна 1 Дж.

Молярная теплоемкость. Определяющее уравнение:

$$C_m = \frac{C}{\nu}. \quad (\text{III.111})$$

При выражении теплоемкости C в джоулях на кельвин, количества вещества ν в молях, молярная теплоемкость C_m выразится в джоулях на моль—кельвин.

Единица молярной теплоемкости — джоуль на моль—кельвин — молярная теплоемкость вещества, имеющего при количестве вещества 1 моль теплоемкость 1 Дж/К.

Молярная концентрация. Определяющее уравнение:

$$C_B = \frac{\nu_B}{V}. \quad (\text{III.112})$$

При выражении объема V раствора в кубических метрах, количества вещества состава B , обозначаемого символом ν_B , в молях, молярная концентрация C_B данного состава выразится в молях на кубический метр.

Единица молярной концентрации — моль на кубический метр — молярная концентрация вещества в растворе, при которой в объеме раствора 1 м³ содержится количество растворенного вещества 1 моль.

§ 25. КРАТНЫЕ И ДОЛЬНЫЕ ЕДИНИЦЫ

Наиболее прогрессивным способом образования кратных и дольных единиц является принятая в метрической системе мер десятичная кратность между большими и меньшими единицами.

В соответствии с резолюцией XI Генеральной конференции по мерам и весам 1960 г. десятичные кратные и дольные единицы от единиц СИ образуются путем присоединения приставок.

В табл. 2 приводятся множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования.

Приставки для кратности от 10^{12} до дольности 10^{-12} взяты из латинского и греческого языков. Приставки фемто (10^{-15}) и атто (10^{-18}) взяты из датского языка.

Следует учитывать, что при образовании кратных и дольных единиц площади и объема с помощью приставок может возникнуть двойственность прочтения в зависимости от того, куда добав-

Таблица 2

Множители и приставки для образования кратных и дольных единиц и их наименования

Множитель	Приставка		
	наименование	обозначение	
		русское	международное
$1000000000000 = 10^{12}$	тера	Т	T
$1000000000 = 10^9$	гига	Г	G
$1000000 = 10^6$	мега	М	M
$1000 = 10^3$	кило	к	k
$100 = 10^2$	гекто	г	h
$10 = 10$	дека	да	da
$0,1 = 10^{-1}$	деци	д	d
$0,01 = 10^{-2}$	санти	с	c
$0,001 = 10^{-3}$	милли	м	m
$0,000001 = 10^{-6}$	микро	мк	μ
$0,000000001 = 10^{-9}$	нано	н	n
$0,000000000001 = 10^{-12}$	пико	п	p
$0,000000000000001 = 10^{-15}$	фемто	ф	f
$0,00000000000000001 = 10^{-18}$	атто	а	a

ляется приставка: к исходной единице или единице, взятой во второй или третьей степени. Так, сокращенное обозначение 1 км^2 можно трактовать и как 1 квадратный километр и как 1000 квадратных метров, что, очевидно, не одно и то же (1 квадратный километр = 1 000 000 квадратных метров). В соответствии с международными правилами (в частности, с рекомендациями ИСО) кратные и дольные единицы площади и объема (как и других величин), получаемые возведением в степень единицы длины, следует образовывать, присоединяя приставки к исходным единицам. Таким образом, степени относятся к тем единицам, которые получены в результате присоединения приставок, и не относятся к тем, из которых образованы кратные и дольные единицы. Поэтому $1 \text{ км}^2 = 1 (\text{км})^2 = (10^3 \text{ м})^2 = 10^6 \text{ м}^2$, аналогично $1 \text{ см}^3 = 1 (\text{см})^3 = (10^{-2} \text{ м})^3 = 10^{-6} \text{ м}^3$.

§ 26. ПРИМЕНЕНИЕ ЕДИНИЦ СИ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Международная система единиц представляет собой универсальную систему, применимую во всех областях науки и техники.

Наименьшие трудности встречает применение единиц СИ в электротехнике, где они совпадают с практическими электрическими единицами (ампер, вольт, ом, фарада, джоуль, ватт и др.), принятыми во всем мире.

В механике и прикладных науках, например в машиностроении, переход на новые единицы вызывает некоторые трудности,

связанные с заменой ряда применявшихся единиц, переградуировкой некоторых измерительных приборов и изменением числовых значений физико-технических констант. Это связано с тем, что в механике и механических прикладных науках в течение многих лет применялась система МКГСС, одной из основных единиц которой является единица силы — килограмм-сила.

Вместе с тем следует отметить, что в машиностроении в систему МКГСС ввели в производные единицы кратные и дольные единицы длины, площади, силы. Так, для измерения давления применяют килограмм-силу на квадратный сантиметр, для измерения напряжения — килограмм-силу на квадратный миллиметр, для измерения жесткости — тонна-силу на миллиметр, которые являются внесистемными единицами. Но поскольку при этом нарушается когерентность системы, во многие формулы в машиностроении входят дополнительные числовые коэффициенты.

Переход в механике и машиностроении к единицам СИ дает возможность выражать механические величины в когерентных единицах и производить в них расчеты и вычисления.

При переводе единиц МКГСС в единицы СИ основным переводным множителем служит 9,80665 ($\approx 9,81$). Этот переводной множитель появляется при переводе единицы массы МКГСС в единицы массы СИ (единица массы МКГСС равна 9,80665 кг). В соответствии с этим единица силы МКГСС — килограмм-сила равна 9,80665 Н, единица — работы — килограмм-сила-метр — 9,80665 Дж, единица давления — килограмм-сила на квадратный метр — 9,80665 Па и т. д.

Перевод некоторых наиболее широко применяемых в машиностроении механических величин в единицы СИ осуществляется следующим образом. Прежняя единица *угловой скорости* — оборот в минуту заменяется единицей СИ — радиан в секунду ($1 \text{ об/мин} = 0,1047 \text{ рад/с}$).

Пример. Допускаемая угловая скорость в зубчатых передачах, равная в прежних единицах 1650 об/мин, равна 173 рад/с.

Единица *силы* СИ — ньютон связан с прежней, наиболее распространенной в технических измерениях, единицей силы — килограмм-силой соотношением $1 \text{ Н} = 1/9,80665 \approx 0,1018696 \text{ кгс}$ или $1 \text{ кгс} = 9,80665 \text{ Н}$ (округленно, до погрешности 1,96%, $1 \text{ кгс} \approx 10 \text{ Н}$).

Примеры: 1. Измерительное усилие индикатора часового типа с ценой деления 0,01 мм и пределом измерений 10 мм, составляющее в прежних единицах 60—180 гс, равно в единицах СИ 0,6—1,8 Н.

2. Сила давления на ролик при накатывании резьбы в прежних единицах составляет 305 кгс или в единицах СИ 3000 Н (3 кН).

Применяемые прежде для характеристики *момента силы* килограмм-сила-метр и килограмм-сила-сантиметр заменяются единицей СИ — ньютон-метром.

Пример. Момент силы на валу станка, составляющий в прежних единицах 650 кгс·см, в единицах СИ равен 63,74 Н·м.

Для измерения *давления* чаще всего применяли внесистемные единицы, введенные для удобства измерения давления на практике (техническая атмосфера, миллиметр ртутного столба, миллиметр водяного столба и др.).

В СИ единицей давления является паскаль, равный давлению, создаваемому силой 1 Н на площадь 1 м². Однако размер этой единицы весьма мал. Она приблизительно в 100 000 раз меньше технической атмосферы (равной давлению, создаваемому 1 кгс на 1 см²). Поэтому выражение давления непосредственно в паскалях удобно лишь при измерениях небольших давлений, например, избыточных давлений в различных топках, а также в газовых сетях низкого давления.

При измерении средних и высоких давлений целесообразно применять кратные единицы: килопаскаль, мегапаскаль и гигапаскаль. Так, давление 10 ат, равное $9,80665 \cdot 10^5$ Па, можно записать с помощью кратной единицы как 0,980665 МПа (или округленно 1 МПа с погрешностью 1,96%).

Примеры: 1. Давление воздуха в заводской пневматической сети, составляющее в прежних единицах 3—6 ат, равно 0,3—0,6 МПа.

2. Удельное давление при объемной штамповке латуни, составляющее 120—200 кгс/мм², равно 1,2—2 ГПа.

Единица *работы и энергии* СИ — джоуль — в 9,80665 раз меньше единицы работы и энергии МКГСС — килограмм-силы-метра и в $3,6 \cdot 10^6$ раз меньше распространенной внесистемной единицы работы — киловатт-часа.

Примеры: 1. Кинетическая энергия маховика, составляющая в прежних единицах 12,5 кгс·м, в единицах СИ равна 123 Дж.

2. Работа, выполненная мотором мощностью 5 кВт за 7 ч, составляет 35 кВт·ч, или 126 МДж.

Момент инерции в системе МКГСС выражается в килограмм-сила-метр-секунда в квадрате. В единицах СИ момент инерции выражается в килограмм-метрах в квадрате. Соотношение прежней единицы и единицы СИ следующее: $1 \text{ кгс} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^2 = 9,80665 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$.

Пример. Момент инерции маховика двигателя внутреннего сгорания, составляющий в прежних единицах 0,2 кгс·м·с², в единицах СИ равен 1,96 кг·м².

Объемный расход во внесистемных единицах выражается в литрах в минуту, а в единицах СИ — в кубических метрах в секунду.

Пример. Расход воздуха в пневматических измерительных приборах составляет во внесистемных единицах 10—150 л/мин, что при переводе в единицы СИ равно $(0,17—2,5) \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$ (0,17—2,5 дм³/с).

В сопротивлении материалов до введения единиц СИ нормальное и касательное напряжения выражались во внесистемных еди-

ницах килограмм-сила на квадратный сантиметр и килограмм-сила на квадратный миллиметр.

В СИ *единицей напряжения* является паскаль, от которого с помощью кратных и дольных единиц можно получить удобный комплекс единиц для измерения напряжений во всех практических случаях (ГПа, МПа, кПа, мПа, мкПа). В частности, значения модуля упругости удобно выражать в гигапаскалях.

Пример. Модуль упругости для стали, составляющий в прежних единицах $21 \cdot 10^3$ кгс/мм², в единицах СИ равен 210 ГПа.

В машиностроении *жесткость* станков и прессов выражают через коэффициент жесткости при растяжении и сжатии, т. е. через силу, приходящуюся на единицу длины удлинения или сжатия. Жесткость при изгибе и кручении выражают также через коэффициент жесткости, т. е. через момент силы, приходящийся на единицу угла. Соответственно единицами жесткости СИ служат ньютон на метр (Н/м) и ньютон-метр на радиан (Н·м/рад).

Ранее жесткость измеряли в килограмм-сила на миллиметр, тонна-сила на миллиметр и килограмм-сила-сантиметр на радиан.

Примеры: 1. Жесткость шпиндельной бабки круглошлифовального станка, составляющая в прежних единицах 1540 кгс/мм, в единицах СИ равна $1,5 \cdot 10^6$ Н/м (1,5 МН/м).

2. Жесткость горячештамповочного пресса с номинальным усилием 10 МН составляет в прежних единицах 510 тс/мм, в единицах СИ — $5,1 \cdot 10^9$ Н/м (5,1 ГН/м).

3. Жесткость вала при кручении, равная в прежних единицах $6,8 \cdot 10^5$ кгс·см/рад, в единицах СИ равна $6,8 \cdot 10^4$ Н·м/рад (68 кН·м/рад).

* * *

В табл. 1 Приложения приведены важнейшие единицы Международной системы (СИ), в табл. 2 — единицы, допускаемые к применению наравне с единицами СИ, а в табл. 3 — единицы, временно допускаемые к применению. В табл. 4 приведены единицы системы СГС, имеющие собственные наименования, и другие важнейшие единицы, применяемые в специальных разделах физики и астрономии.

Все таблицы даны в соответствии с окончательной редакцией проекта государственного стандарта «Единицы физических величин», издание 1973 года.

§ 27. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ОБ ЭТАЛОНАХ.
КЛАССИФИКАЦИЯ ЭТАЛОНОВ

Для обеспечения единства измерений необходима тождественность единиц, в которых проградуированы все средства измерений одной и той же физической величины. Это достигается путем точного воспроизведения и хранения установленных единиц физических величин и передачи их размеров применяемым средствам измерений.

Воспроизведение, хранение и передача размеров единиц осуществляются с помощью эталонов и образцовых средств измерений. Высшим звеном в метрологической цепи передачи размеров единиц измерений являются эталоны.

Эталон представляет собой средство измерений (или комплекс средств измерений), обеспечивающее воспроизведение и хранение единицы физической величины (или одну из этих функций) с целью передачи размера единицы образцовым, а от них рабочим средствам измерений и утвержденное в качестве эталона в установленном порядке.

Если эталон воспроизводит единицу с наивысшей в стране точностью, он называется *первичным*. Первичные эталоны основных единиц воспроизводят единицу в соответствии с ее определением. Примером первичного эталона является комплекс средств измерений для воспроизведения метра в длинах световых волн излучения криптона-86.

Для воспроизведения единиц в особых условиях, в которых прямая передача размера единицы от существующих эталонов технически неосуществима с требуемой точностью (высокие и сверхвысокие частоты, энергии, давления, температуры, особые состояния вещества, крайние участки диапазона измерений и т. п.), создаются и утверждаются специальные эталоны.

Специальный эталон воспроизводит единицу в особых условиях и заменяет в этих условиях первичный эталон.

Примером специального эталона является эталон мощности электромагнитных волн при частотах 2,6 ... 37,5 ГГц в волноводных трактах.

Первичный, или специальный, эталон, официально утвержденный в качестве исходного для страны, называется *государствен-*

ным. Государственные эталоны утверждаются Государственным комитетом стандартов Совета Министров СССР, и на каждый из них утверждается государственный стандарт.

Основное назначение эталонов — служить материально-технической базой воспроизведения и хранения единиц физических величин. Принят принцип систематизации эталонов по воспроизводимым единицам.

Основные единицы Международной системы единиц (СИ) должны воспроизводиться с помощью государственных эталонов, т. е. централизованно. Дополнительные, производные, а при необходимости и внесистемные единицы, исходя из соображений технико-экономической целесообразности, воспроизводятся одним из двух способов:

1) централизованно — с помощью единого для всей страны государственного эталона;

2) децентрализованно — посредством косвенных измерений, выполняемых в органах метрологической службы с помощью образцовых средств измерений.

Централизованно воспроизводится большинство важнейших производных единиц СИ (ньютон, джоуль, паскаль, ом, вольт, генри, вебер и др.), а децентрализованно — производные единицы, размер которых не может передаваться прямым сравнением с эталоном (например, единицы площади) или, если поверка мер посредством косвенных измерений проще, чем их сравнение с эталоном, и обеспечивает необходимую точность (например, меры вместимости и объема). При этом, когда для воспроизведения единицы необходимо специально предназначенное оборудование, создаются поверочные установки высшей точности. Примером такой поверочной установки является тахометрическая установка, сравнивающая частоту вращения с частотой образцового генератора.

В метрологической практике широко распространены *вторичные эталоны*, значения которых устанавливаются по первичным эталонам. Вторичные эталоны являются частью подчиненных средств хранения единиц и передачи их размера. Они создаются и утверждаются в тех случаях, когда это необходимо для организации поверочных работ и для обеспечения сохранности и наименьшего износа государственного эталона.

В качестве примеров вторичного эталона можно привести эталон-копию единицы массы килограмма в виде платино-иридиевой гири № 26 и рабочий эталон килограмма, изготовленный из нержавеющей стали.

По своему метрологическому назначению вторичные эталоны делятся на эталоны-копии, эталоны сравнения, эталоны-свидетели и рабочие эталоны.

Эталон-копия представляет собой вторичный эталон, предназначенный для хранения единицы и передачи ее размера рабочим эталонам. Он не всегда может быть физической копией государственного эталона.

Эталон сравнения — вторичный эталон, применяемый для сличения эталонов, которые по тем или иным причинам не могут быть непосредственно сличаемы друг с другом. Примером эталона сравнения может служить группа нормальных элементов, применяемая для сличения государственного эталона вольты СССР с эталоном вольты Международного бюро мер и весов.

Эталон-свидетель — вторичный эталон, применяемый для проверки сохранности государственного эталона и для замены его в случае порчи или утраты. Эталон-свидетель применяется лишь тогда, когда государственный эталон является невоспроизводимым.

Рабочий эталон — вторичный эталон, применяемый для хранения единицы и передачи ее размера образцовым средствам измерений высшей точности и при необходимости — наиболее точным рабочим мерам и измерительным приборам.

Допускается применение государственного эталона в качестве рабочего, если это предусмотрено правилами хранения и применения эталона.

Государственные эталоны всегда осуществляются в виде комплекса средств измерений и вспомогательных устройств, обеспечивающих воспроизведение единицы и в необходимых случаях ее хранение, а также передачу размера единицы вторичным эталонам.

Вторичные же эталоны могут осуществляться в виде: а) комплекса средств измерений, б) одиночных эталонов, в) групповых эталонов, г) эталонных наборов.

Одиночный эталон состоит из одной меры, одного измерительного прибора или одной измерительной установки, обеспечивающих воспроизведение или хранение единицы самостоятельно без участия других средств измерений того же типа. Примерами одиночного эталона являются вторичные эталоны единицы массы — килограмма в виде платино-иридиевой и стальных гирь.

Групповой эталон состоит из совокупности однотипных мер, измерительных приборов или других средств измерений, применяемых как одно целое для повышения надежности хранения единицы. Примером группового эталона служит эталон-копия вольты, представляющий собой группу из 20 нормальных элементов.

Размер единицы, хранимой групповым эталоном, определяется как среднее арифметическое из значений, воспроизводимых отдельными мерами и измерительными приборами, входящими в состав группового эталона.

Отдельные меры и измерительные приборы, входящие в групповой эталон, применяют в качестве одиночных рабочих эталонов, если это допустимо по условиям хранения единицы.

Групповые эталоны могут быть постоянного и переменного составов. В групповые эталоны переменного состава входят меры и измерительные приборы, периодически заменяемые новыми.

Эталонный набор представляет собой набор мер или измери-

тельных приборов, позволяющий хранить единицу или измерять величину в определенных пределах. Эти меры или измерительные приборы предназначены для различных значений или различных областей значений измеряемой величины. Примером эталонного набора является рабочий эталон единицы плотности жидкостей в виде набора денсиметров, служащих для определения плотности жидкостей в различных участках диапазона.

Подобно групповым эталонам эталонные наборы могут быть постоянного и переменного состава.

Государственные эталоны хранятся в метрологических институтах СССР. Для проведения работ с государственными эталонами назначаются особые ответственные лица — ученые хранители эталонов.

Вторичные эталоны используются в метрологических институтах и в других крупных органах Государственной метрологической службы СССР. По разрешению Госстандарта СССР допускается их хранение и применение в органах ведомственной метрологической службы.

Кроме национальных эталонов единиц физических величин существуют *международные* эталоны, хранимые в Международном бюро мер и весов. Программой деятельности Международного бюро предусмотрены систематические международные сличения национальных эталонов крупнейших метрологических лабораторий разных стран с международными эталонами и между собой.

Эталоны метра и килограмма сличают раз в 25 лет, электрические и световые эталоны (вольты и ома, канделы и люмена) — раз в 3 года. Проводятся также эпизодические международные сличения эталонов радия, других источников ионизирующих излучений, платиновых термометров сопротивления, температурных ламп и др.

Комплексной программой дальнейшего углубления и совершенствования сотрудничества и развития социалистической экономической интеграции стран—членов Совета Экономической Взаимопомощи (СЭВ) предусмотрено начать с 1971 г. работу по созданию единой системы эталонов на основе Международной системы единиц и организовать взаимное сличение национальных эталонов стран СЭВ.

§ 28. ЭТАЛОН ЕДИНИЦЫ ДЛИНЫ — МЕТРА

В конце XVIII века, в период введения метрической системы мер, был принят первый эталон единицы длины — метр. За метр приняли одну десятиmillionную часть четверти Парижского меридиана.

В 1799 г. на основе измерений части дуги меридиана был изготовлен эталон метра в виде платиновой концевой меры, переданный на хранение в Национальный Архив Франции и получивший название «метра Архива». Метр Архива представляет собой плати-

новую линейку шириной около 25 мм, толщиной около 4 мм с расстоянием между концами, равным 1 м.

Повторные измерения дуги меридиана, выполненные в XIX веке, показали, что длина принятого метра несколько короче подлинного «естественного» метра. Так как в дальнейшем при более точных измерениях, вероятно, можно было получить различные значения основной единицы длины, Международная комиссия по прототипам метрической системы, созданная по инициативе Петербургской Академии наук, в 1872 г. решила отказаться от «естественного» эталона метра и принять в качестве исходной меры длину метра Архива.

В соответствии с решением этой комиссии был изготовлен 31 эталон метра в виде штриховой меры из сплава платины с иридием. Из них метр № 6 оказался при 0°C равным метру Архива и был принят в 1889 г. I Генеральной конференцией по мерам и весам в качестве международного прототипа метра. Остальные 30 эталонов были распределены между различными государствами.

Эталон метра представляет собой платино-иридиевый брусок длиной 102 см, имеющий в поперечном сечении форму X, как бы вписанную в воображаемый квадрат, сторона которого равна 20 мм. Платино-иридиевый эталон метра № 28, полученный Россией в 1889 г., был в последующем утвержден в качестве Государственного эталона СССР.

В 1927 г. VII Генеральная конференция по мерам и весам утвердила следующее определение метра, действовавшее до 1960 г. «Единица длины — метр — определяется расстоянием при 0°C между осями двух средних штрихов, нанесенных на платино-иридиевом бруске, хранящемся в Международном бюро мер и весов и принятом в качестве прототипа метра I Генеральной конференцией по мерам и весам, при условии, что эта линейка находится при нормальном атмосферном давлении и поддерживается двумя роликами диаметром не менее 1 см, расположенными симметрично в одной горизонтальной плоскости на расстоянии 571 мм один от другого».

Требования к повышению точности эталона единицы длины (платино-иридиевый прототип метра не может дать точности воспроизведения выше 0,1—0,2 мкм), а также целесообразность установления естественного и неразрушимого эталона привели к тому, что XI Генеральная конференция по мерам и весам в 1960 г. приняла в качестве эталона единицы длины метр, выраженный в длинах световых волн оранжевой линии спектра криптона-86, соответствующей переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ этого атома.

В резолюции XI Генеральной конференции по мерам и весам о новом определении метра указывается, что, с одной стороны, международный прототип не определяет метр с точностью, достаточной для современных потребностей, и что, с другой — желательно

принять естественный и неразрушимый эталон, поэтому конференция решает:

1. Метр—есть длина, равная 1650763,73 длины волны в вакууме излучения, соответствующего переходу между уровнями $2p_{10}$ и $5d_5$ атома криптона-86.

2. Определение метра, действующее с 1889 г., основанное на международном платино-иридиевом эталоне, отменяется.

3. Международный прототип метра, утвержденный I Генеральной конференцией по мерам и весам в 1889 г., будет храниться в Международном бюро мер и весов в таких же условиях, какие были установлены в 1889 г.

Новый эталон метра может воспроизводиться в отдельных метрологических лабораториях, и точность его по сравнению с платино-иридиевым прототипом выше на порядок (в 10 раз).

Физические принципы, лежащие в основе применения эталонного источника излучения для выражения метра в длинах световых волн, заключаются в следующем.

Как известно, возбужденные пары и газы излучают свет, в спектре которого имеется ряд линий (линейчатый спектр). Каждая линия в спектре, соответствующая излучению с определенной длиной волны, является источником монохроматического света. Расположение линий в спектрах и их длины волн находятся в строгом соответствии с атомным строением вещества излучающего элемента. Атомы излучают свет вследствие изменения внутренней энергии, зависящей от взаимного расположения ядра атома и внешних слоев окружающих его электронов. При этом атомы могут находиться только в определенных энергетических состояниях. Энергии этих состояний расположены на различных уровнях. Ступени между уровнями и значения самих энергий различны для атомов разных элементов. В нормальном состоянии атомы не излучают свет и обладают минимальной энергией E_0 . После возбуждения атома он переходит в одно из возможных состояний с более высоким уровнем энергии E_1 , E_2 и т. д. Затем атом самопроизвольно возвращается в какое-либо допустимое энергетическое состояние с низшим уровнем энергии. Этот процесс связан с излучением световой энергии. Согласно квантовой теории атома, частота излучения ν определяется условием

$$\nu = \frac{E_2 - E_1}{h} \quad (\text{IV.1})$$

где E_2 — энергия уровня, с которого совершается переход; E_1 — энергия уровня, на который совершается переход; h — постоянная Планка.

Длина волны, соответствующая частоте ν при распространении света в пустоте со скоростью c ,

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad (\text{IV.2})$$

Каждый переход атома с одного энергетического уровня на другой соответствует излучению одной линии. Величину, обратную длине волны $\frac{1}{\lambda}$, называют волновым числом и выражают в метрах в минус первой степени (м^{-1}). Подставив в формулу (IV.1) значение ν из выражения (IV.2), переходят к волновым числам и получают следующую зависимость:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_2 - E_1}{ch}. \quad (\text{IV.3})$$

Отношения $\frac{E}{ch}$ называют спектральными термами.

При изучении спектров излучения элементов исходят из вычисленных волновых чисел и составляют схему спектральных термов. Для получения монохроматического света применяют источники, в которых свечение вызывает электрический ток, проходящий через газ или пар. Отдельные спектральные линии излучения источника выделяют при помощи светофильтров или монохроматоров. При измерениях длины с помощью световых волн применяют лампы, заполненные инертными газами (криптоном, гелием, неоном), и лампы с ртутью и кадмием.

Теоретически длина волны любого излучения атома, являясь константой, может быть использована для точного определения единицы длины. Однако даже в идеальном случае вследствие размытости (конечной ширины) уровней энергии в атоме излучаемая спектральная линия представляет собой некоторое симметричное распределение световой энергии — интенсивности линии по шкале частот. Идеальная монохроматическая линия расширена на некоторый интервал частот. Распределение интенсивности спектральной линии по частоте представляется в виде ее контура, ширина которого при спадении интенсивности наполовину называется шириной спектральной линии. Тогда длина волн светового излучения относится к середине максимума естественного контура линии.

Спектр излучения монохроматического источника искажается добавочными возбуждениями атомов. Наличие электрических и магнитных полей в газовом разряде, нагревание, соударение излучающих атомов с другими являются причинами возмущения уровней и, следовательно, расширения линии и смещения максимума контура по шкале частот. Таким образом, действительный контур линии значительно шире естественного и может быть несимметричным.

Исследованиями с помощью интерференции света установлено, что почти все спектральные линии обладают сложным строением — сверхтонкой структурой. Наличие сверхтонкой структуры линии связано с присутствием изотопов в естественных элементах. Четно-четные элементы (с четной атомной массой и четным номером в периодической системе элементов) излучают линии с прос-

тым контуром. Такие элементы начали получать в последнее время в результате развития техники разделения изотопов. Чем проще контур, тем точнее можно воспроизвести его максимум, а следовательно, и длину световой волны.

Излучение криптона-86, определяющее метр, охарактеризовано в международном постановлении спектральными термами с обозначениями по Пашену.

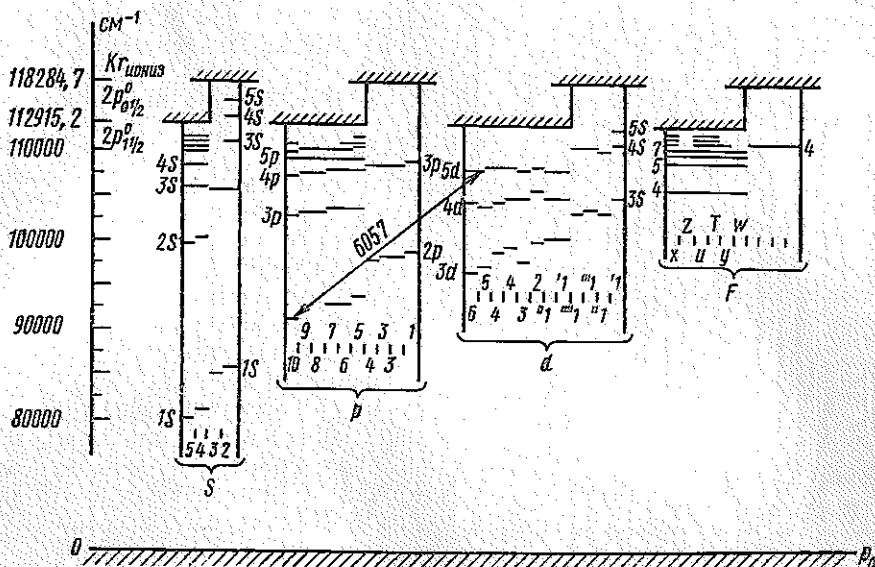


Рис. 1

На рис. 1 приведена схема термов атома криптона. Каждый терм обозначен горизонтальной черточкой. По вертикали снизу вверх отложены волновые числа в сантиметрах в минус первой степени. Нормальное состояние атома криптона соответствует уровню p_0 (линия p_0 показана условно, так как расстояние 0—80000 см^{-1} не соответствует масштабу фигуры). При отрыве электрона от атома последний переходит в ионизованное состояние и может занять один из уровней, обозначенных $2p^0_{\frac{1}{2}}$ и $2p^0_{\frac{1}{2}}$.

Нейтральный возбужденный атом может находиться на любом из термов, объединенных на фигуре в четыре группы S , p , d и F . В каждой группе состояние атома характеризуется одним значением внутреннего квантового числа, определяющего полный момент количества движения атома. Во всех группах значения термов увеличиваются в соответствии с главными квантовыми числами.

Каждый терм обозначают цифрой, соответствующей величине, пропорциональной главному квантовому числу, буквой, показывающей, в какой группе расположен терм, и индексом, указывающим номер подгруппы. Например, термы S имеют обозначения $1 S_5$, $3, S_4$ и т. д. Для группы S номера термов начинаются с 1, для группы p — с 2 и для группы d — с 3.

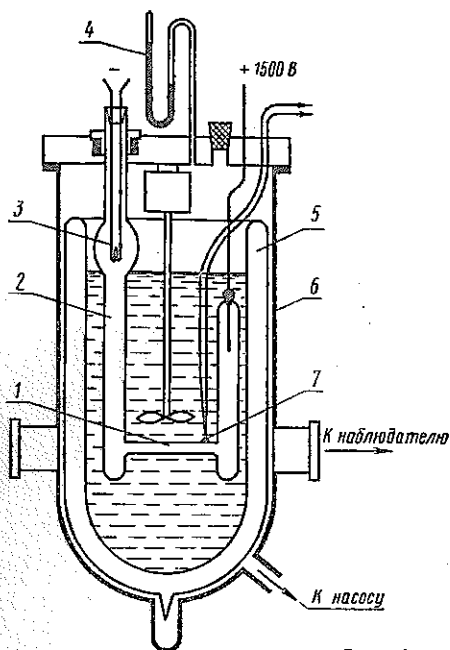


Рис. 2

закрывающуюся камеру 6. При эксплуатации лампы в сосуд наливают чистый жидкий азот. Откачивая пары азота насосом, температуру внутри сосуда понижают до 63 К. С помощью термопары 7, введенной внутрь сосуда, можно определить температуру стенок капилляра лампы, а по манометру 4 — упругость паров азота при его тройной точке.

Для сличения штриховых мер, в том числе и платино-иридиевых прототипов метра, с концевыми мерами и с длиной эталонной световой волны в метрологических лабораториях применяют интерференционные фотоэлектрические компараторы.

Государственный первичный эталон СССР для воспроизведения единицы длины — метра — и передачи ее размера состоит из следующего комплекса аппаратуры:

1. Источника излучения, представляющего собой газоразрядную лампу с изотопом криптона-86 конструкции ВНИИМ, выполненную и применяемую согласно требованиям спецификации Международного комитета мер и весов.

Излучение криптона, принятое в качестве эталонного, соответствует переходу между уровнями, обозначенными $2 p_{10}$ и $5 d_5$.

В Международном бюро мер и весов и крупных национальных метрологических лабораториях созданы установки для воспроизведения метра в длинах световых волн с помощью излучения лампы, наполненной изотопом криптона-86. На рис. 2 изображена схема такой лампы, помещенной в дьюаровский сосуд для охлаждения ее до температуры тройной точки азота. Лампа 2 представляет собой газоразрядную трубку с накалимым катодом 3. Капилляр 1, в котором происходит свечение, имеет внутренний диаметр 2—3 мм и длину 10—12 см. Сосуд Дьюара 5 помещен в герметически

2. Эталонного интерферометра № 02 с фотоэлектрическим микроскопом и рефрактометром, представляющего собой двухлучевой интерферометр для измерений длины мер в пределах 0—1000 мм, снабженный платиновым термометром сопротивления и дифференциальными термopарами для точных измерений температуры.

3. Эталонного спектроинтерферометра № 01, состоящего из спектрометра со сменными дифракционными решетками, обеспечивающими измерение длин световых волн в пределах 3000—200 нм, интерферометра Фабри и Перо и фотоэлектрического регистрирующего устройства.

Место хранения эталона — ВНИИМ им. Д. И. Менделеева.

Условия эксплуатации комплекса аппаратуры, входящего в состав Государственного эталона метра, установлены особой спецификацией. При соблюдении этих условий единица длины воспроизводится и передается со средним квадратическим отклонением результата, не превышающим $3 \cdot 10^{-8}$.

В настоящее время рассматриваются вопросы о возможности дальнейшего повышения точности воспроизведения метра в длинах волн излучения с учетом последних достижений физики (атомные пучки, лазеры, эффект Месбауэра). Атомный пучок в вакууме может явиться источником монохроматического излучения отдельных атомов, находящихся друг от друга на больших расстояниях, в результате чего возможно уменьшение доплеровского расширения спектральной линии, вызванного соударениями атомов, по крайней мере в 10 раз. Лазер (оптический квантовый генератор) может обеспечить интенсивное монохроматическое излучение с узкой спектральной линией.

Узость спектральных линий ядерного излучения, возникающего вследствие эффекта Месбауэра, полное отсутствие в нем доплеровского расширения, его характер естественной константы атомного ядра являются чрезвычайно ценными свойствами при использовании ядерного излучения в качестве эталона единицы длины, однако еще неясен путь практического осуществления этого.

Наиболее перспективным для повышения точности эталона единицы длины на сегодняшний день является применение стабилизированного лазера.

§ 29. ЭТАЛОН ЕДИНИЦЫ МАССЫ — КИЛОГРАММА

При установлении метрической системы мер в качестве единицы массы приняли массу одного кубического дециметра чистой воды при температуре ее наибольшей плотности (4°C). В этот период были проведены точные определения массы известного объема воды путем последовательного взвешивания в воздухе и в воде пустого бронзового цилиндра, размеры которого были тщательно определены.

Изготовленный на основе этих взвешиваний первый прототип килограмма представлял собой платиновую цилиндрическую гирю

высотой 39 мм, равной его диаметру. Как и прототип метра, он был передан на хранение в Национальный Архив Франции.

В XIX веке повторно осуществили несколько тщательных измерений массы одного кубического дециметра чистой воды при температуре 4°C . При этом было установлено, что эта масса немного (приблизительно на 0,028 г) меньше массы прототипа килограмма Архива. Для того, чтобы при дальнейших более точных взвешиваниях не менять значения исходной единицы массы, на Международной комиссии по эталонам метрической системы в 1872 г. было решено за единицу массы принять массу прототипа килограмма Архива.

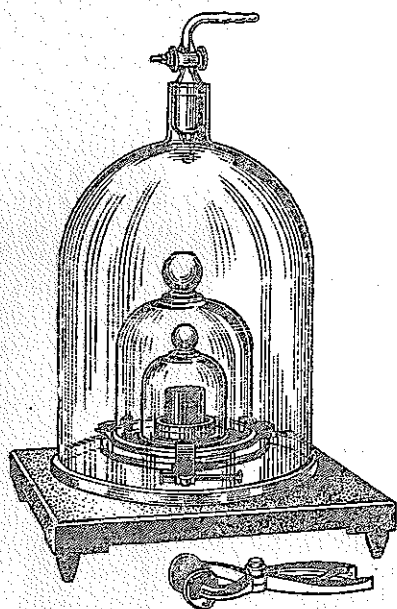


Рис. 3

При изготовлении платино-иридиевых эталонов килограмма за международный прототип был принят тот, масса которого менее всего отличалась от массы прототипа килограмма Архива. На рис. 3 показан международный прототип килограмма. Он представляет собой гирию в виде прямого цилиндра с закругленными ребрами диаметром и высотой 39 мм.

В связи с принятием условного прототипа единицы массы литр оказался не равным кубическому дециметру. Это отклонение ($1\text{ л} = 1,000028\text{ дм}^3$) соответствует разности между массой международного прототипа килограмма и массой кубического дециметра воды. В 1964 г. XII Генеральная конференция по мерам и весам приняла решение о приравнивании объема 1 л к 1 дм^3 (точно).

Следует отметить, что в момент установления метрической системы мер не было четкого разграничения понятий массы и веса, поэтому международный прототип килограмма считался эталоном единицы веса. Однако уже при утверждении международного прототипа килограмма на I Генеральной конференции по мерам и весам 1889 г. килограмм был утвержден в качестве прототипа массы. Четкое разграничение килограмма как единицы массы и килограмма как единицы силы было дано в решениях III Генеральной конференции по мерам и весам.

В связи с развитием работ по созданию новых эталонов единиц физических величин, основанных на атомных постоянных (метра — на длине световой волны, секунды — на частоте колеба-

ний атомов и молекул, электрических и магнитных единиц — на гиромангнитном отношении протона), возник вопрос и о связи единицы массы с атомными константами. Этим объясняются предложения о применении для метрологических целей такой константы, как масса нейтрона.

Разработка и создание образцов одноизотопного состава с массой порядка 1 мг для исследования их масс спектрометрическим и массовым методами является весьма перспективной. Можно предполагать, что это даст возможность связать современный условный эталон массы, имеющий разрушимый и невоспроизводимый характер, с естественными константами масс атомных частиц, неизменных с точностью, далеко превосходящей любые практические требования.

Государственный первичный эталон килограмма СССР предназначен для воспроизведения, хранения и передачи единицы измерения массы — килограмма.

В состав эталона входит:

1. Копия международного прототипа килограмма — платино-иридиевый прототип № 12, представляющая собой гирю в виде прямого цилиндра с закругленными ребрами диаметром и высотой 39 мм. Плотность платино-иридиевого сплава — 21548, 1 кг/м³, содержание иридия в сплаве 10,08—10,09 %, объем килограмма при 0°C составляет 46,408 см³.

2. Эталонные весы № 1 (Рупрехта) и № 2 (ВНИИМ) на 1 кг с дистанционным управлением, служащие для передачи размера единицы массы от прототипа № 12 эталонам-копиям и от эталонов-копий рабочим эталонам по методике, установленной спецификацией.

Масса килограмма № 12 в 1899 г. равнялась 1 кг+0,068 мг. По результатам сличений с эталонами Международного бюро мер и весов, произведенных в 1948—1954 гг., масса прототипа № 12 равна 1,000000085 кг.

Цена деления эталонных весов не превышает $4 \cdot 10^{-8}$ кг, среднее квадратическое отклонение ряда наблюдений не более $3 \cdot 10^{-8}$ кг.

§ 30. ЭТАЛОН ЕДИНИЦЫ ВРЕМЕНИ — СЕКУНДЫ

Еще в древности счет времени основывался на периоде обращения Земли вокруг своей оси.

До недавнего времени секунду определяли как $1/86400$ часть средних солнечных суток. За средние солнечные сутки принимали интервал времени между двумя последовательными одноименными кульминациями среднего Солнца. Под средним Солнцем понимали воображаемое Солнце, движущееся равномерно по небесному экватору и совершающее один оборот по небесному своду за тот же промежуток времени, что и истинное Солнце, движущееся неравномерно по эклиптике. Однако наблюдения за продолжительный период времени показали, что вращение Земли подвержено

нерегулярным колебаниям, которые не позволяют рассматривать его в качестве достаточно стабильной естественной основы для определения единицы времени.

Средние солнечные сутки определены с погрешностью 10^{-7} . Эта точность совершенно недостаточна при нынешнем состоянии техники частот.

Возникла необходимость в новом естественном эталоне времени, обеспечивающем большую точность воспроизведения единицы времени — секунды. После рассмотрения этого вопроса на генеральных ассамблеях Международного астрономического союза и генеральных конференциях по мерам и весам было принято в 1960 г. новое астрономическое определение единицы времени. Оно основано не на вращении Земли вокруг своей оси, а на движении Земли вокруг Солнца. В качестве основы определения принята длительность тропического года, т. е. интервал времени между двумя весенними равноденствиями, следующими одно за другим. Это позволяет почти на три порядка (в 1000 раз) повысить точность определения единицы времени.

За секунду была принята $1/31556925,9747$ часть тропического года на 0 января 1900 г. в 12 часов эфемеридного времени. Тропический год сам по себе не является постоянным, поэтому было необходимо исходить из одного определенного года. Дата «0 января 1900 г. 12 часов» выражена в принятом астрономами порядковом счете времени и соответствует полудню 31 декабря 1899 г. Под эфемеридным временем понимают время в системе счисления, в которой длительность единицы равна эфемеридной секунде, согласно приведенному выше определению секунды через тропический год на 0 января 1900 г.

Практически точная единица времени стала доступной благодаря сигналам времени, передаваемым по радио. Эти сигналы передаются от кварцевых часов (генераторов электромагнитных колебаний с пьезокварцевыми резонаторами), которые являются мерами частоты.

В последние годы созданы новые молекулярные и атомные эталоны частоты и времени, основанные на способности молекул и атомов излучать и поглощать энергию во время перехода между двумя энергетическими уровнями в области радиочастот. В настоящее время имеется несколько типов молекулярных и атомных эталонов частоты и времени, из которых наиболее широко применяются следующие:

молекулярный генератор с молекулярным пучком аммиака (NH_3), разработанный советскими физиками Н. Г. Басовым и А. М. Прохоровым, основанный на разделении молекул аммиака по двум энергетическим уровням посредством сортирующего и фокусирующего электрического поля;

эталон с атомным пучком цезия, основанный на сортировке атомов цезия по уровням сверхтонкой структуры с помощью неоднородного магнитного поля;

атомный водородный генератор, использующий для генерации электромагнитных колебаний простейший квантовый переход основного состояния атома водорода.

В 1967 г. XIII Генеральная конференция по мерам и весам приняла новое определение секунды как интервала времени, в течение которого совершается 9192631770 колебаний, соответствующих резонансной частоте энергетического перехода между уровнями сверхтонкой структуры основного состояния атома цезия-133 при отсутствии возмущений внешними полями.

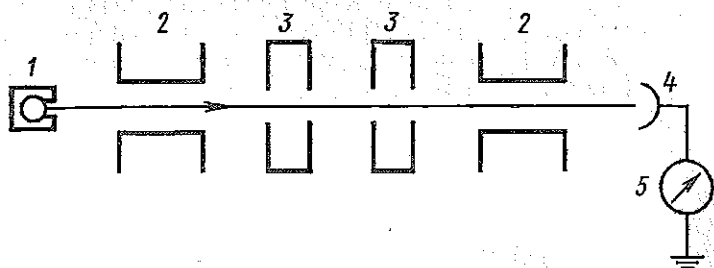


Рис. 4

В эталоне с атомным пучком цезия используется поток практически не взаимодействующих друг с другом атомов цезия-133 и выбран переход между сверхтонкими уровнями $F=4, M=0$ и $F=3, M=0$ основного состояния $^2S_{1/2}$ атома цезия-133, не возмущенного внешними полями; этому переходу приписывается частота 9192631770 Гц.

Ядро атома цезия, обладающее магнитным моментом (спин $I=7/2$), взаимодействует с магнитным моментом валентного электрона (спин $I=1/2$). Это и приводит к расщеплению основного электронного уровня атома на ряд подуровней, т. е. к образованию так называемой сверхтонкой структуры. Частоты, соответствующие переходам между уровнями сверхтонкой структуры, попадают в диапазон радиочастот. Очень важно, что энергия перехода между уровнями сверхтонкой структуры, а стало быть и соответствующая частота, очень мало зависят от внешних магнитных полей.

В эталонах удастся настолько снизить напряженность внешних магнитных полей, что смещение частоты, соответствующей используемому переходу, составляет всего 10^{-12} от частоты при полном отсутствии внешних магнитных полей. От других параметров (электрического поля, давления, плотности пучка и т. п.) частота перехода зависит еще меньше.

На рис. 4 приведена схема цезиевого атомно-лучевого эталона времени и частоты.

Источник 1 атомного пучка представляет собой контейнер из металла, стойкого по отношению к щелочам. В стенке контейнера имеются каналы, формирующие пучок. Температура источника — $100\text{--}150^\circ\text{C}$. Магниты 2 служат для сортировки атомов пучка по состояниям сверхтонкой структуры: выделяются атомы, находящиеся в состояниях $F=3, M=0$ и $F=4, M=0$.

К резонаторам 3 подводится сверхвысокочастотный сигнал, частоту которого можно в некоторых пределах изменять около значения 9192631770 Гц. В результате действия этого сигнала выделенные атомы переходят из состояния $F=3, M=0$ в состояние $F=4, M=0$ или обратно. Второй сортирующий магнит выделяет из пучка только те атомы, которые перешли из одного состояния в другое в результате взаимодействия с полем сигнала. Атомы, совершившие переход, попадают в приемник 4 и регистрируются индикатором 5.

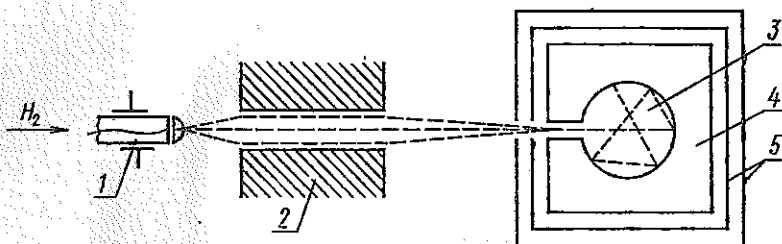


Рис. 5

Если частота подводимого сигнала точно соответствует частоте перехода, то показания индикатора максимальны. Если же частота сигнала отличается от частоты перехода, то показания индикатора резко уменьшаются. Это и служит основой стабилизации частоты. Частота сигнала, соответствующая максимальным показаниям индикатора, принимается за 9192631770 Гц.

Все узлы установки помещены в камеру, в которой поддерживается высокий вакуум.

Стабильность эталонов с атомным пучком цезия равна 10^{-11} , в настоящее время их используют службы времени и частоты.

Принцип работы водородных генераторов (на атомарном водороде) основан на использовании квантового перехода между состояниями $F=1, m_F=0$ и $F=0, m_F=0$ в сверхтонкой структуре основного состояния атомов водорода, частота которого при отсутствии внешних воздействий постоянна и равна $1420405751,8$ Гц.

Схема и принцип действия водородного генератора изображены на рис. 5.

Атомы водорода получают в источнике 1, представляющем собой стеклянную трубку, где происходит диссоциация молекул

водорода под действием высокочастотного электрического разряда. Пучок атомов водорода выходит из источника через коллиматор, обеспечивающий его направленность, и попадает в поле шестиполюсного аксиального магнита 2. В сильном неоднородном поле, создаваемом этим магнитом, происходит пространственная сортировка атомов в пучке, так что атомы, находящиеся на уровне $F=1$, $m_F=0$, фокусируются на вход накопительной ячейки 3, которая расположена внутри высокочастотного объемного резонатора 4, настроенного на частоту используемого перехода.

Конструкция ячейки такова, что атомы находятся в резонаторе около секунды. Ее стенки покрыты фторопластом, в результате чего даже при более чем 10^5 соударениях атома водорода со стенкой его энергетическое состояние не меняется.

Взаимодействие возбужденных атомов с высокочастотным полем резонатора в течение секунды повышает вероятность их перехода в нижнее энергетическое состояние и вызывает самовозбуждение генератора, а также увеличивает добротность линии излучения и соответственно стабильность частоты генератора.

Для уменьшения влияния внешних магнитных полей на частоту водородного генератора резонатор помещают в многослойный экран 5.

Государственный первичный эталон времени и частоты СССР состоит из следующей аппаратуры:

1. Группы водородных генераторов.
2. Группы кварцевых генераторов.
3. Комплектов делителей частоты от 100 кГц до 1 Гц.
4. Аппаратуры интегрального сличения частот кварцевых генераторов; аппаратуры кратковременного сличения частот кварцевых генераторов; аппаратуры дистанционного контроля температуры термостатов и напряжения питания кварцевых генераторов; аппаратуры автоматического программирования и коммутации; аппаратуры сличения секундных сигналов кварцевых часов; аппаратуры приема и регистрации радиосигналов; аппаратуры международных сличений эталонов и аппаратуры энергопитания.

Государственный эталон времени и частоты СССР позволяет воспроизводить единицы времени и частоты с погрешностью $\pm 3 \cdot 10^{-12}$.

§ 31. ЭТАЛОН ЕДИНИЦЫ СИЛЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА — АМПЕРА

Из определения силы тока как физической величины видно, что единица силы тока равна единице количества электричества, проходящего через поперечное сечение проводника в единицу времени. Поэтому естественно было бы принять за основную электрическую единицу некоторый заряд, например, равный заряду электрона или определенного числа электронов. Однако в настоящее время нет возможности осуществить с достаточной точ-

ностью эталон, опирающийся на такое определение. Вследствие этого пришлось отказаться от единицы количества электричества как основной электрической единицы и принять в качестве таковой единицу силы тока — ампер.

Размер ампера ввиду отсутствия возможности на практике определить его через количество электричества приходится определять по тем действиям или явлениям, которые ток вызывает в окружающей среде, например, выделение теплоты при прохождении тока по проводнику, осаждение вещества на электродах при прохождении тока через электролит, пондеромоторные (механические) действия тока на магнит или на проводник с током. Любой из законов, относящихся к этим явлениям, может быть положен в основу установления единицы силы тока. Для целей метрологии следует выбрать тот, который позволяет воспроизвести единицу силы тока с наибольшей точностью.

В 1893 г. Международный конгресс электриков в Чикаго принял первый эталон силы электрического тока — ампер, установив так называемый международный ампер, определяемый через эталон, служащий для его воспроизведения. Ампер воспроизводился с помощью серебряного вольтметра и имел следующее определение: международный ампер — неизменяющийся ток, который, проходя через водный раствор азотнокислого серебра, при соблюдении приложенной спецификации выделяет 0,0011180 г серебра в 1 с.

В 1948 г. при переходе на абсолютную практическую систему электрических единиц международный ампер был отменен. В основу современного эталона ампера положен закон взаимодействия электрических токов. Измерение силы, с которой один проводник действует на другой, можно осуществлять более точно, чем измерение количества выделенного током тепла или количества выделенного вещества на электродах. Поэтому определение ампера основано на законе Ампера взаимодействия токов.

В настоящее время ампер определяется по силе взаимодействия двух прямолинейных проводников бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенных на расстоянии 1 м один от другого в пустоте. При силе электрического тока в проводниках 1 А сила взаимодействия составляет $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Приведенная формулировка содержит понятие бесконечно длинных и бесконечно тонких проводников, которые на практике осуществить невозможно. Однако на основе закона Ампера можно рассчитать с достаточно высокой точностью силу взаимодействия токов, протекающих по проводникам конечных размеров.

При взаимодействии подвижной и неподвижной катушек, так называемых токовых весов, теоретический расчет дает надежные результаты. Поэтому токовые весы и приняты в качестве эталона единицы силы электрического тока — ампера. Схема токовых весов приведена на рис. 6.

Токовые весы представляют собой рычажные равноплечие весы, в которых подвешенная слева подвижная катушка уравнивается грузом, положенным на правую чашку весов. Подвижная катушка входит во вторую неподвижную коаксиально расположенную катушку. При прохождении по этим катушкам, последовательно соединенным, постоянного электрического тока подвижная катушка опускается, поэтому на правую чашку весов следует по-

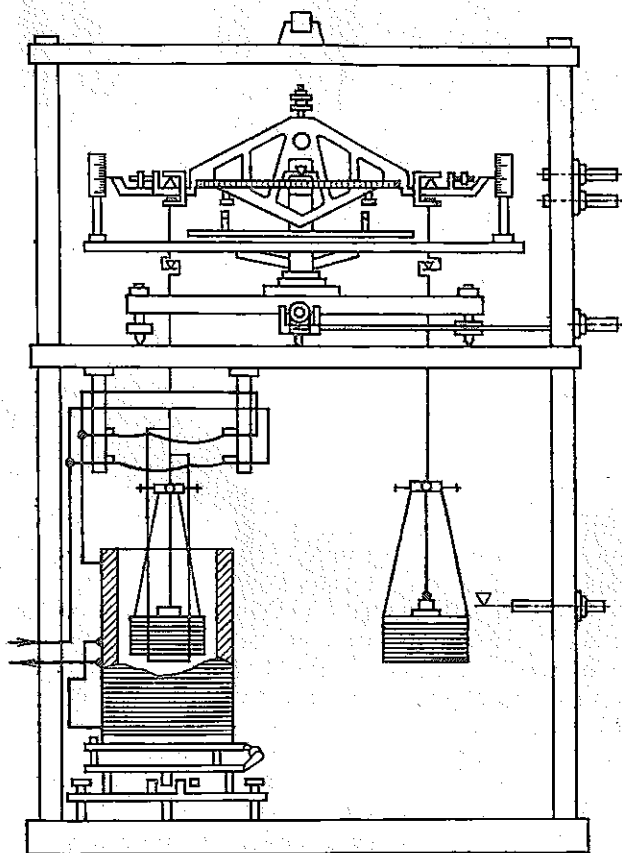


Рис. 6

ложить добавочный груз. По массе добавочного груза и судят о силе электрического тока, проходящего по катушкам. В самом деле, как уже указывалось, в соответствии с законом Ампера

$$F = k I_1 I_2 = k I^2, \quad (\text{IV.4})$$

где F — сила взаимодействия токов в катушках: I_1 и I_2 — силы токов в катушках ($I_1 = I_2 = I$ при последовательном соединении ка-

тушек); k — коэффициент пропорциональности (постоянная электродинамической системы), зависящий от формы и размеров катушек, диаметра сечения проводов катушек, принятого значения относительной магнитной проницаемости среды и т. д.

С другой стороны, в соответствии со вторым законом Ньютона

$$F = mg, \quad (IV.5)$$

где F — уравнивающая силы тяжести; m — масса добавочного груза; g — ускорение свободного падения в месте расположения весов.

Приравнявая выражения (IV.4) и (IV.5), получаем расчетную формулу для определения силы тока в зависимости от массы добавочного груза:

$$I = \sqrt{\frac{mg}{k}}. \quad (IV.6)$$

Государственный первичный эталон ампера СССР представляет собой комплекс измерительных средств, применяемых для воспроизведения, хранения и передачи единицы силы электрического тока — ампера.

В состав эталона входят:

1. Токовые весы, состоящие из:

а) электродинамической системы в виде неподвижной катушки ТВН № 2, имеющей две однослойные обмотки, и двух коаксиальных жестко связанных между собой подвижных катушек ТВП № 8 и № 9 с однослойными обмотками, подвешенных к одному плечу коромысла весов. Постоянная электродинамической системы, рассчитанная по размерам катушек, равна $3860555 \cdot 10^{-8}$ Н/А²;

б) весов с дистанционным управлением, служащих для уравнивания силы взаимодействия токов, пропускаемых по обмоткам неподвижной и подвижных катушек, силой тяжести гири, имеющей массу 8,16044 г и выполненной в виде латунного цилиндра диаметром 5 мм и длиной 50 мм. Значение ускорения свободного падения принято в соответствии с данными измерений для пункта ВНИИМ. Цена деления весов не превышает $1 \cdot 10^{-7}$ кг.

Токовые весы дают достаточно высокую точность для поддержания единства измерений почти во всех случаях с учетом нынешнего состояния измерительной техники.

2. Аппаратура для передачи размера единицы, в которую входит катушка сопротивления Р 342 № 000005, получившая свое значение от первичного эталона ома.

Погрешность воспроизведения размера единицы силы тока Государственным первичным эталоном ампера не превышает $1 \cdot 10^{-3}\%$.

Достижения современной физики в области исследования свойств атомного ядра раскрывают новые возможности для осуществления электрических и магнитных эталонов, основанных на внутриатомных процессах. Одним из вероятных новых эталонов является эталон, основанный на ядерном магнитном резонансе.

Гиромангнитное отношение протона может быть принято в качестве основной константы, необходимой для образования всей совокупности электрических и магнитных единиц.

Другим возможным путем является переход к единицам электрического заряда и тока, основанным непосредственно на заряде электрона и счете элементарных электрических частиц.

Многообещающей является также область криогенных исследований. Так, при изучении явления сверхпроводимости было показано, что токи могут сохраняться в сверхпроводящих веществах неопределенно долгое время. С развитием этой области появится возможность получать устройства — эталоны электрического тока, которые смогут осуществлять те же функции, что и эталонные катушки сопротивления и эталонные элементы в настоящее время.

§ 32. ЭТАЛОН ЕДИНИЦЫ ТЕМПЕРАТУРЫ — КЕЛЬВИНА

Для единицы температуры — кельвина в метрологических научных учреждениях разработан комплекс эталонной аппаратуры, служащий для воспроизведения и измерения термодинамической температуры и международной практической температуры. Этот комплекс состоит из эталонных газовых термометров, аппаратуры для воспроизведения основных реперных точек и эталонных приборов в виде платиновых термометров сопротивления и платинородий-платиновых термопар.

Измерение температуры с момента изобретения термометра Галилеем в 1598 г. основывалось на применении того или иного термометрического вещества, изменяющего свой объем или давление при изменении температуры.

В 1715 г. Фаренгейт создал ртутный термометр и предложил для построения термометрической шкалы две точки: температуру смеси льда с солью и нашатырем, которую он обозначил 0, и температуру тела человека, которую он обозначил числом 96.

В 1736 г. Реомюр предложил для термометрической шкалы другие две постоянные точки, более удобные для воспроизведения: точку таяния льда 0° и точку кипения воды 80° .

В 1742 г. Цельсий предложил термометрическую шкалу, в которой расстояние по шкале между точкой таяния льда и точкой кипения воды делилось на 100 частей. Показания термометров такого типа зависели от рода примененного термометрического вещества и от особенностей и условий теплового расширения его.

В середине прошлого века Томсон (Кельвин) показал, что можно установить термодинамическую температурную шкалу, не зависящую от рода термометрического вещества.

Термодинамическая температурная шкала

Шкала построена на основании следующих положений.

Если в обратимом цикле Карно тело, совершающее цикл, поглощает теплоту Q_1 при температуре T_1 и отдает тепло Q_2 при

температуре T_2 , то отношение абсолютных температур T_1/T_2 равно отношению количеств тепла Q_1/Q_2 . Согласно положениям термодинамики, это отношение не зависит от свойств рабочего тела.

Так как изменения количества тепла всегда могут быть измерены, то при помощи цикла Карно, проведенного, например, между температурой плавления льда T_0 и температурой кипения воды T_s , можно определить отношение T_s/T_0 . Для этого надо измерить количество тепла Q_0 , отдаваемое рабочим веществом, и количество тепла Q_s , поглощаемое рабочим веществом. Затем можно измерить любую температуру T , если один из двух тепловых резервуаров будет иметь температуру T_0 .

Установленная таким образом термодинамическая температурная шкала, не зависящая от свойств термометрического вещества, называется также *шкалой Кельвина*.

Так как свойства газов при большом разрежении близки к свойствам идеального газа, термодинамическая температурная шкала в пределах значительного температурного интервала совпадает со шкалой, установленной с помощью газового термометра при весьма большом разрежении газа, заполняющего газовый термометр.

При установлении термодинамической температурной шкалы для сохранения преемственности числового выражения ее со сто-

градусной температурной шкалой Цельсия температурный промежуток между точкой таяния льда и точкой кипения воды был приравнен 100° .

Томсон (Кельвин) и независимо от него Д. И. Менделеев высказали соображения о целесообразности построения термодинамической шкалы температур по одной реперной точке. Такая шкала имеет значительные преимущества и позволяет определять абсолютную температуру точнее, чем шкала с двумя реперными точками. В шкале с одной реперной точкой необходимо приписывать определенное числовое значение единственной экспериментально реализуемой точке шкалы. Нижней границей температурного интервала будет служить тогда точка абсолютного нуля.

Погрешность воспроизведения точки кипения воды составляет $0,002—0,01^\circ\text{C}$, точки таяния льда $0,0002—0,001^\circ\text{C}$. Тройная же точка воды, являющаяся точкой равновесия воды в твердой, жид-

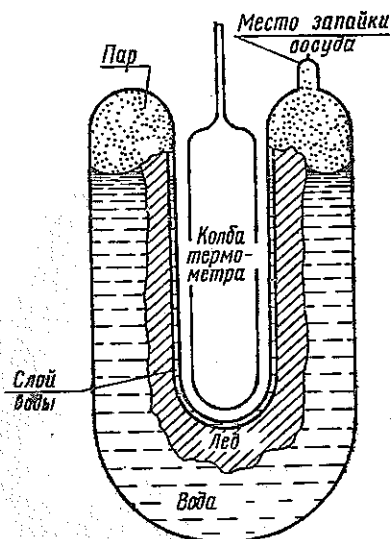


Рис. 7

кой и газообразной фазах, может быть воспроизведена в специальных сосудах с погрешностью не более $0,0001^{\circ}\text{C}$. Схема сосуда для осуществления тройной точки воды показана на рис. 7.

Консультативный комитет по термометрии Международного комитета мер и весов в 1954 г. принял рекомендацию о переходе к определению термодинамической шкалы посредством одной реперной точки — тройной точки воды.

Рассмотрев тщательно все числовые результаты, полученные в различных лабораториях, Консультативный комитет по термометрии признал, что значением температуры тройной точки воды, лежащей выше точки таяния льда на $0,01\text{ K}$, является $273,16\text{ K}$.

X Генеральная конференция по мерам и весам в 1954 г. на основании этого установила термодинамическую шкалу температур с одной реперной точкой — тройной точкой воды.

Таким образом, термодинамическая температура является основной и обозначается символом T . Ее единицей служит кельвин (символ K), определенный как $1/273,16$ часть термодинамической температуры тройной точки воды.

Температура в градусах Цельсия, которая обозначается символом t , определяется как

$$t = T - T_0, \quad (\text{IV.7})$$

где $T_0 = 273,15\text{ K}$. Единицей в этом случае является градус Цельсия (символ $^{\circ}\text{C}$). Градус Цельсия равен кельвину. Температурные разности (интервалы) выражаются в кельвинах, но могут быть выражены также и в градусах Цельсия.

Международная практическая температурная шкала 1968 г.

Измерения температуры по термодинамической шкале путем прямой ее реализации с помощью газовой термометрии связаны с серьезными трудностями, поэтому в 1927 г. VII Генеральная конференция по мерам и весам приняла Международную практическую температурную шкалу (МПТШ). Эта шкала в момент ее установления была согласована с термодинамической шкалой настолько позволял уровень знаний того времени.

В 1948 г. Международная практическая температурная шкала была пересмотрена, в 1960 г. уточнена ее редакция, и, наконец, в 1968 г. она была пересмотрена и расширена.

Международная практическая температурная шкала 1968 г. (МПТШ-68) установлена таким образом, чтобы температура, измеряемая по ней, была насколько возможно близка к термодинамической температуре. Расхождения между температурами лежат в пределах существующей в настоящее время точности измерений.

Международная практическая температурная шкала 1968 г. устанавливает различие между международной практической температурой Кельвина (символ T_{68}) и международной практической

температурой Цельсия (символ t_{68}). Соотношение между T_{68} и t_{68} выражается следующим образом:

$$t_{68} = T_{68} - 273,15 \text{ K.} \quad (\text{IV.8})$$

Единицами международной практической температуры T_{68} и t_{68} являются кельвин (символ К) и градус Цельсия (символ $^{\circ}\text{C}$) так же, как и для термодинамической температуры T , выражающейся в кельвинах, и температуры Цельсия t , выражающейся в градусах Цельсия.

МПТШ-68 основана на ряде воспроизводимых равновесных состояний, которым приписаны определенные значения температур (основные реперные точки), и на эталонных приборах, градуиро-

Таблица 3

Основные реперные точки МПТШ-68*

Состояние фазового равновесия	Принятое значение международной практической температуры	
	$T_{68}, \text{ K}$	$t_{68}, ^{\circ}\text{C}$
Равновесие между твердой, жидкой и парообразной фазами равновесного водорода (тройная точка равновесного водорода)	13,81	-259,34
Равновесие между жидкой и парообразной фазами равновесного водорода при давлении 33330,6 Па (25/76 нормальной атмосферы)	17,042	-256,108
Равновесие между жидкой и парообразной фазами равновесного водорода (точка кипения равновесного водорода)	20,28	-252,87
Равновесие между жидкой и парообразной фазами неона (точка кипения неона)	27,102	-246,048
Равновесие между твердой, жидкой и парообразной фазами кислорода (тройная точка кислорода)	54,361	-218,789
Равновесие между жидкой и парообразной фазами кислорода (точка кипения кислорода)	90,188	-182,962
Равновесие между твердой, жидкой и парообразной фазами воды (тройная точка воды)**	273,16	0,01
Равновесие между жидкой и парообразной фазами воды (точка кипения воды)***	373,15	100
Равновесие между твердой и жидкой фазами цинка (точка затвердевания цинка)	692,73	419,58
Равновесие между твердой и жидкой фазами серебра (точка затвердевания серебра)	1235,08	961,93
Равновесие между твердой и жидкой фазами золота (точка затвердевания золота)	1337,58	1064,43

* За исключением тройных точек и одной точки равновесного водорода (17,042 К) принятые значения температур даны для состояния равновесия при давлении одна нормальная атмосфера ($p_0 = 101325 \text{ Па}$)

** Используемая вода должна иметь изотопический состав, соответствующий океанской воде.

*** За состояние равновесия между твердой и жидкой фазами олова (точка затвердевания олова) принято состояние при $t_{68} = 231,9681^{\circ}\text{C}$; оно может быть использовано вместо точки кипения воды.

ванных при этих температурах. В интервалах между температурами реперных точек интерполяция осуществляется по формулам, устанавливающим связь между показаниями эталонных приборов и значениями Международной практической температурной шкалы.

Основные реперные точки реализуются как определенные состояния фазовых равновесий некоторых чистых веществ. Эти равновесные состояния и значения (точные) международной практической температуры, приписанные им, приведены в табл. 3.

Эталонным прибором, используемым в области от 13,81 К до 630,74°С*, является платиновый термометр сопротивления. Для области 630,74—1064,43°С эталонным прибором является термопара с электродами из платинородия-платины (10% родия). Для области температур выше 1064,43°С (1337,58 К) международная практическая температура определяется в соответствии с законом излучения Планка на основании опорной температуры 1337,58 К и принятого значения константы C_2 .

§ 33. ЭТАЛОН ЕДИНИЦЫ СИЛЫ СВЕТА — КАНДЕЛЫ

В прошлом столетии в разных странах применялись различные эталонные источники единицы силы света — свечи. На Международном конгрессе электриков в 1881 г. была принята единица силы света — единица Виоля. За единицу Виоля принималась сила света, излучаемая квадратным сантиметром поверхности затвердевающей платины по направлению нормали к этой поверхности. В 1889 г. на Международном конгрессе электриков способ воспроизведения единицы Виоля получил название «абсолютного эталона силы света». Одна двадцатая единицы Виоля была принята конгрессом как практическая единица силы света.

Учитывая, что реальное осуществление эталона единицы Виоля связано с серьезными трудностями, Международный конгресс электриков в 1893 г. принял в качестве эталона силы света предложенную в 1884 г. нормальную лампу Гефнера-Альтенека, в которой сжигался чистый амилацетат. Сила света этой лампы принималась за единицу при высоте пламени 40 мм и ширине 8 мм.

В конце первого десятилетия XX века был поставлен вопрос о замене пламенных эталонов силы света эталонами, осуществленными при помощи электрических ламп накаливания. В 1909 г. за единицу силы света была принята «международная свеча», являющаяся производной от единицы Виоля и осуществляемая и поддерживаемая при помощи электрических ламп. Эталонные электрические лампы могли сохранять в течение многих лет неизменно световые единицы с погрешностью не больше 0,1%.

* В положении о Международной практической температурной шкале, как правило, используются температуры Кельвина ниже 0°С и температуры Цельсия выше 0°С.

К концу тридцатых годов в метрологических учреждениях были созданы новые световые эталоны, основанные на полном излучателе (абсолютно черном теле).

В современном первичном эталоне единицы силы света (рис. 8, слева внизу) в качестве полного излучателя используется керамическая трубочка, помещенная в расплавленную платину с точкой плавления 2042 К. Платина находится в керамическом тигле 2, нагреваемом от генератора высокой частоты 1. Верхнее отверстие трубки дает излучение, как абсолютно черное тело определенной температуры. Затем размер кандеры от первичного светового эталона передается с помощью оптической системы 3 и фотометра 4 рабочему эталону — лампе накаливания 5.

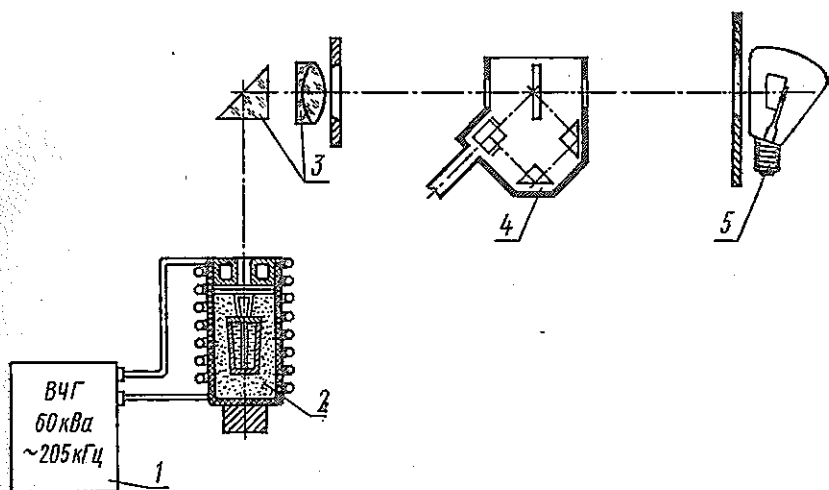


Рис. 8

В соответствии с принятым в 1948 г. и уточненным в 1967 г. на генеральных конференциях по мерам и весам определением за канделу принимается сила света, испускаемого с площади $1/600000 \text{ м}^2$ сечения полного излучателя в перпендикулярном к этому сечению направлении при температуре затвердевания платины (при атмосферном давлении, равном 101325 Па).

Государственный первичный эталон СССР единицы силы света — канделы — состоит из:

двух взаимозаменяемых полных излучателей с обозначением 1-ба и 2-бв, осуществляемых по спецификации Международного комитета мер и весов на первичный световой эталон; (полный излучатель представляет собой тонкостенную трубку из плавленной окиси тория, погруженную в чистую платину в сосуде из окиси

тория. Сосуд с платиной установлен в два кварцевых стакана, заполненных один окисью тория, другой окисью циркония);

аппаратуры к полным излучателям:

а) высокочастотной индукционной печи для нагрева и возбуждения свечения излучателя;

б) оптических устройств для фокусировки изображения светящегося отверстия излучателя;

в) установки со зрительным и фотоэлектрическим фотометром для передачи размера единицы вторичным эталонам.

Среднее квадратическое отклонение результата воспроизведения и передачи единицы силы света Государственным первичным эталоном не превышает $2 \cdot 10^{-3}$.

Для дальнейшего совершенствования и повышения точности первичного светового эталона был внесен ряд предложений. Замена точки затвердевания платины точкой затвердевания иридия дала бы выигрыш в яркости эталонного источника (более чем в 10 раз). С другой стороны, чтобы облегчить создание полного излучателя, предложено уменьшить опорную температуру, например, до точки затвердевания золота или палладия. Предлагается также в качестве основы для построения эталона силы света применять не излучатель, а приемник света.

§ 34. ОБРАЗЦОВЫЕ СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЙ

Передача размеров единиц от эталонов рабочим мерам и измерительным приборам осуществляется посредством образцовых средств измерений.

Образцовые средства измерений представляют собой меры, измерительные приборы или измерительные преобразователи, предназначенные для поверки и градуировки по ним других средств измерений и в установленном порядке утвержденные в качестве образцовых. Образцовые средства измерений хранят и применяют органы Государственной метрологической службы и органы отраслевых (ведомственных) метрологических служб.

В качестве образцовых средств измерений применяются меры, измерительные приборы и измерительные устройства, прошедшие метрологическую аттестацию и признанные пригодными для использования в качестве образцовых. На образцовые средства измерений выдаются свидетельства с указанием метрологических параметров и разряда по общесоюзной поверочной схеме.

На схеме рис. 9 показана метрологическая цепь передачи размеров единиц от первичных эталонов (верхнее звено метрологической цепи) рабочим эталонам, от них — разрядным образцовым средствам измерений и далее — рабочим мерам и измерительным приборам.

Между разрядами образцовых средств измерений существует соподчиненность: образцовые средства измерений 1-го разряда поверяются, как правило, непосредственно по рабочим эталонам, образцовые средства измерений, аттестуемые в качестве образцовых 2-го и последующего разрядов, подлежат поверке по образцовым средствам измерений непосредственно предшествующих разрядов. Для разных видов измерений устанавливается, исходя из требований практики, различное число разрядов образцовых средств измерений, устанавливаемых стандартами на поверочные схемы для данного вида средств измерений.

Как видно из данной схемы (см. рис. 9), отдельные рабочие меры и измерительные приборы наивысшей точности могут поверяться по рабочим эталонам; средства измерений высшей точности — по образцовым мерам и измерительным приборам 1-го раз-

ряда; высокой точности — по образцовым мерам и измерительным приборам 2-го разряда и т. д.

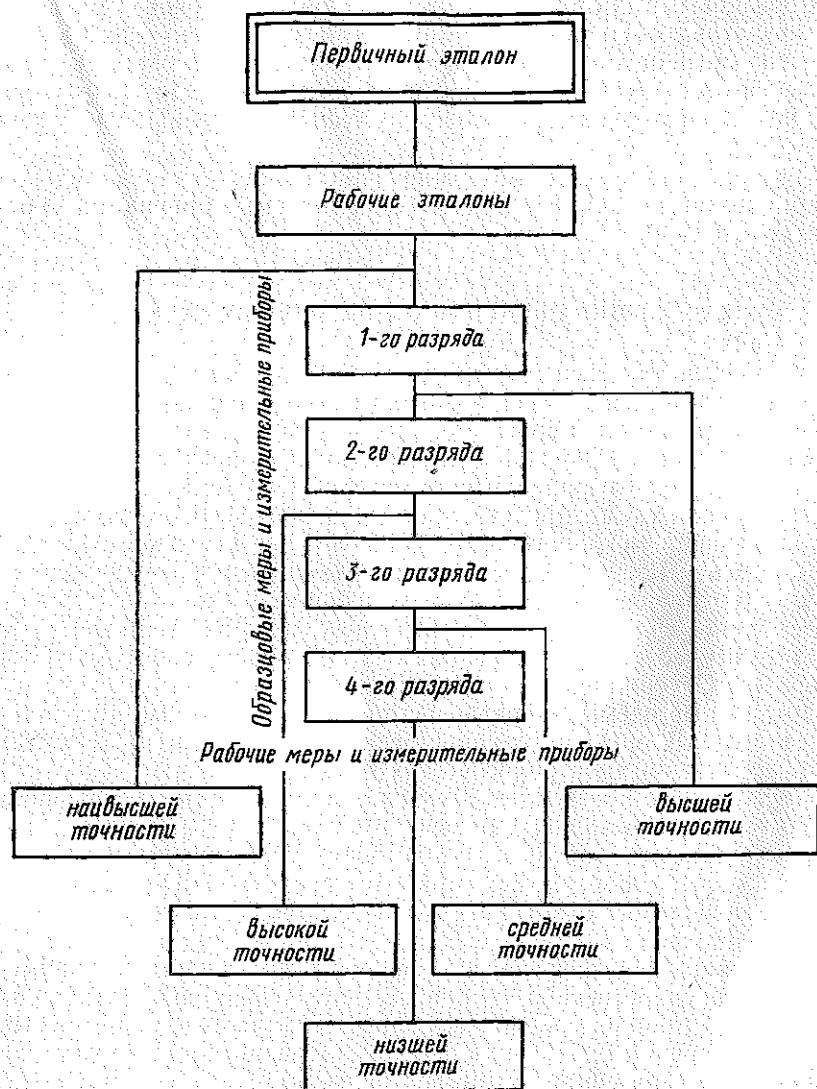


Рис. 9

Образцовые средства измерений находятся в метрологических институтах или лабораториях Государственной метрологической службы, а также поверочных лабораториях отраслевых (ведомственных) метрологических служб, которым в установленном порядке предоставлено право поверки средств измерений.

Средства измерений в качестве образцовых утверждаются органами Государственной метрологической службы, располагающими образцовыми средствами измерений более высокого разряда, чем представляемые для аттестации. В отдельных случаях по разрешению органов Государственной метрологической службы предоставляется право утверждения образцовых средств измерений органам отраслевых метрологических служб при наличии у них требуемых условий.

Все образцовые средства измерений подлежат обязательной периодической поверке в сроки, устанавливаемые правилами Госстандарта СССР.

§ 35. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПОВЕРОЧНЫХ СХЕМАХ

Для обеспечения правильной передачи размера единиц физических величин во всех звеньях метрологической цепи (от эталонов образцовым мерам, а от них — рабочим мерам и измерительным приборам) должен быть установлен определенный порядок. Этот порядок и приводится в поверочных схемах.

Поверочная схема представляет собой исходный документ, устанавливающий метрологическое соподчинение эталонов, образцовых средств измерений и порядок передачи размера единицы образцовым и рабочим средствам измерений.

Исходное положение о поверочных схемах приводится в ГОСТ 8.061—73 «Государственная система обеспечения единства измерений. Содержание и построение поверочных схем».

Поверочные схемы подразделяются на общесоюзные и локальные (отдельных органов государственной метрологической службы или ведомственных метрологических служб).

Общесоюзные поверочные схемы должны служить основанием для составления локальных поверочных схем и для разработки государственных стандартов и методических указаний на методы и средства поверки образцовых и рабочих средств измерений. Общесоюзные поверочные схемы утверждаются в качестве государственных стандартов.

Элементами общесоюзной поверочной схемы являются наименования государственных эталонов, эталонов-копий, эталонов-свидетелей, эталонов сравнения, рабочих эталонов, образцовых средств измерений и рабочих средств измерений, а также методов передачи размера единиц (методов поверки).

Общее количество разрядов образцовых средств измерений должно обеспечивать рациональную систему передачи размера единицы всем применяемым в стране рабочим средствам измерений.

Поверочные схемы состоят из текстовой части и чертежа. В локальные поверочные схемы допускается не включать текстовую часть.

На чертеже поверочной схемы указываются: наименования

средств измерений, диапазоны значений физических величин, обозначения и оценки погрешностей, наименования методов поверки.

Методы поверки, указываемые на поверочной схеме, должны отражать специфику поверки данного вида средств измерений. Они соответствуют одному из следующих общих методов:

непосредственному (т. е. без компаратора) сравнению поверяемого средства измерений с образцовым средством измерений того же вида (т. е. меры с мерой или измерительного прибора с измерительным прибором);

сличению поверяемого средства измерений с образцовым средством измерений того же вида при помощи компаратора;

прямому измерению поверяемым измерительным прибором величины, воспроизведенной образцовой мерой;

прямому измерению образцовым измерительным прибором величины, воспроизведенной подвергаемой поверке мерой;

косвенным измерениям величины, воспроизводимой мерой или измеряемой прибором, подвергаемым поверке;

независимой поверке, т. е. поверке средств измерений относительных (безразмерных) величин, не требующая передачи размеров единиц от эталонов или образцовых средств измерений, градуированных в единицах размерных величин.

Текстовая часть состоит из вводной части и пояснений к элементам поверочной схемы.

Структура поверочной схемы состоит из нескольких полей, соответствующих ступеням передачи размеров единицы от первичного эталона рабочим средствам измерений. Поля отделены друг от друга горизонтальными пунктирными линиями. В левой части поверочной схемы по вертикали указывают наименования элементов поверочной схемы. В самих полях располагают структурные элементы поверочной схемы, заключаемые в прямоугольники и круги (прямоугольники для эталонов, образцовых и рабочих средств измерений, круги для методов поверки). Соподчиненность структурных элементов указывают соединительными линиями.

В верхнем поле поверочной схемы указывают наименования эталонов. Наименование первичного эталона заключают в прямоугольник, обведенный двойной линией.

Ниже первичного эталона в том же поле помещают наименования вторичных эталонов и диапазон, в котором они хранят единицу измерений. Наименования вторичных эталонов заключают в прямоугольники, обведенные одной линией.

Если для данного вида измерений отсутствуют эталоны и их единицы воспроизводят косвенным путем, в верхнем поле поверочной схемы помещают наименование образцовых средств измерений, применяемых для воспроизведения данной единицы, заимствованные из поверочных схем для соответствующих средств измерений; при этом на поверочной схеме должна быть сделана ссылка на другие поверочные схемы, из которых заимствованы наименования образцовых средств измерений.

Под полем эталонов располагают поля образцовых средств измерений 1-го и других разрядов, помещая в каждое из них наименование образцовых средств измерений соответствующего разряда. Наименования образцовых средств измерений с указанием диапазонов измерений и погрешностей поверки заключают в прямоугольники аналогично вторичным эталонам.

Погрешность поверки указывают в виде погрешности передачи размера единицы от предыдущего высшего звена поверочной схемы данному образцовому средству измерений. При наличии общепринятых классов точности вместо погрешности указывают класс точности.

Под полем образцовых средств измерений низшего разряда помещают поле рабочих средств измерений. Рабочие средства измерений подразделяют по точности и диапазонам измерений на группы, располагая группы в порядке убывающей точности так, чтобы наименования наиболее точных средств измерений находились в левой части поля.

Кроме наименований рабочих средств измерений, указывают диапазоны измерений и характеристики точности в виде класса точности, предела допускаемой погрешности или цены деления. Рабочие средства измерений группируются на поверочной схеме по диапазонам значений измеряемых величин, по точности и методам поверки.

На поверочной схеме указывают в кругах (или при наименовании метода, состоящем из нескольких слов, — в овале) конкретные методы поверки, применяемые в данной области измерений, руководствуясь при этом данной выше классификацией.

Круги располагают между наименованиями объектов поверки и образцовых средств измерений, применяемых для их поверки, причем, если эти круги находятся не в поле эталонов, их располагают в разрывах пунктирной линии, разделяющей соответствующие поля схемы.

Передачу размеров единиц от эталонов образцовым и рабочим средствам измерений изображают соединительными линиями, проходящими через круг, в котором указан метод поверки. Соединительные линии, как правило, не должны пересекаться.

На рис. 10 приведен пример компоновки элементов поверочной схемы, рекомендуемый приложением ГОСТ 8.061—73.

Общесоюзные поверочные схемы разрабатываются метрологическими институтами СССР.

Локальные поверочные схемы утверждаются руководителями предприятий или организаций, в которых используется данная поверочная схема, по согласованию с органами государственной метрологической службы, осуществляющими для них поверку исходных образцовых средств измерений, включенных в поверочную схему.

Локальные поверочные схемы должны составляться при наличии более двух ступеней передачи размера единицы физических величин и не должны противоречить общесоюзным поверочным схемам для средств измерений данного вида. В верхней части ло-

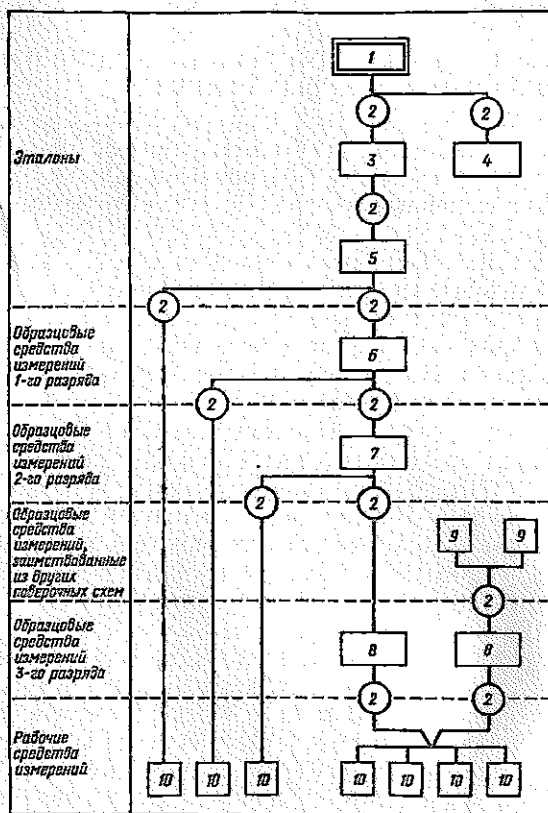


Рис. 10. Пример компоновки элементов поверочной схемы:

1 — государственный эталон; 2 — метод передачи размера единицы; 3 — эталон-копия; 4 — эталон-свидетель; 5 — рабочий эталон; 6, 7, 8 — образцовые средства измерений соответствующих разрядов; 9 — образцовые средства измерений, заимствованные из других поверочных схем; 10 — рабочие средства измерений

кальной поверочной схемы должны быть указаны местонахождение и наименование эталона или образцового средства измерений (в соответствии с общесоюзной поверочной схемой), по которому проводится поверка исходных образцовых средств измерений данной схемы.

В локальную поверочную схему должны быть включены все находящиеся в эксплуатации или выпускаемые в обращение рабочие средства измерений данной физической величины.

Элементами локальной поверочной схемы являются наименования образцовых средств измерений, рабочих средств измерений, а также методов поверки; допускается включение в поверочную схему наименований эталонов-копий и рабочих эталонов.

§ 36. ПОВЕРОЧНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ И УГЛОВЫХ ВЕЛИЧИН

Для этих видов средств измерений во ВНИИМ им. Д. И. Менделеева разработаны две поверочные схемы: для мер длины и приборов для линейных измерений; для угловых мер и угломерных приборов.

Первая из этих поверочных схем в свою очередь делится на две части: штриховые меры длины и поверяемые по ним приборы и концевые меры длины и поверяемые по ним приборы.

Во главе обеих частей поверочных схем поставлен эталонный комплекс приборов для воспроизведения метра в длинах световых волн оранжевой линии криптона-86.

В первой части поверочной схемы показана передача размера метра вторичным эталонам — платино-иридиевым метрам № 11 и М 20° и № 2, по своему метрологическому назначению играющим роль эталонов-копий, а также эталонным штриховым мерам, применяемым при периодическом контроле правильности абсолютных измерений длины на интерференционных установках метрологических институтов с использованием вторичных эталонных длин волн (ртути-198 и кадмия-114).

Платино-иридиевый метр № 2 является одновременно штриховой и концевой мерой. Действительную длину его как концевой меры можно определять с помощью интерферометра. Действительную длину подразделений шкалы метров № 11 и М 20° определяют либо измерением на интерференционном компараторе в длинах волн первичного эталонного излучения, либо применяя метод калибровки.

Рабочими эталонами служат наборы, состоящие из мер длиной 1 дм — 1 м. Действительное значение рабочих эталонов определяют как интерференционным методом с использованием вторичных эталонов длин волн, так и сличением со вторичными платино-иридиевыми эталонами посредством компараторов.

Поверочная схема предусматривает в качестве следующих звеньев метрологической цепи для штриховых мер: образцовые штриховые меры 1-го разряда (поверяемые сличением с рабочими эталонами либо измерением интерференционным методом с использованием вторичных эталонных длин волн) и образцовые штриховые меры 2-го разряда (поверяемые по образцовым мерам 1-го разряда).

Поверку миллиметровых и сантиметровых подразделений штриховых мер повышенной точности можно выполнить также сличени-

ем их с образцовыми штриховыми мерами 1-го разряда или методом калибровки.

Вторая часть поверочной схемы посвящена концевым мерам длины и поверяемым по ним приборам. По этой схеме размер метра от первичного эталона передается эталонным плоскопараллельным концевым мерам длиной 5—100 мм, изготовленным из кристаллического или плавленого кварца, а также эталонным концевым мерам длиной до 1 м, предназначенным для периодического контроля правильности абсолютных измерений длины, проводимых в метрологических институтах на интерферометрах с использованием вторичных эталонных длин световых волн.

Далее в поверочной схеме приведены образцовые концевые меры 1, 2, 3, 4 и 5-го разрядов. Одновременно поверочная схема предусматривает для рабочих концевых мер длины четыре класса точности (0, 1, 2, 3).

Образцовые концевые меры 1-го разряда поверяют абсолютным интерференционным методом, используя вторичные эталоны длины волн. Эти меры применяют для проверки образцовых концевых мер 2-го разряда. Рабочие концевые меры класса 0 поверяют по образцовым концевым мерам 1-го разряда.

Образцовые плоскопараллельные концевые меры длины 2-го разряда поверяют относительным интерференционным методом по образцовым концевым мерам длины 1-го разряда и применяют для проверки образцовых концевых мер длины 3-го разряда, концевых мер длины класса 1 и измерительных приборов высокой точности (оптических, пружинных и других индикаторов с ценой деления 0,1 мкм, контактных интерферометров и др.).

Образцовые плоскопараллельные концевые меры длины 3-го разряда длиной до 100 мм поверяют по образцовым концевым мерам длины 2-го разряда техническим интерференционным методом или на контактных интерферометрах. Концевые меры 3-го разряда служат для проверки образцовых концевых мер длины 4-го разряда и концевых мер длины класса 2, а также для проверки некоторых мер и измерительных приборов, показанных на поверочной схеме.

Образцовые концевые меры длины 4-го разряда служат для проверки мер 5-го разряда и класса 3. С помощью образцовых концевых мер длины 5-го разряда поверяют различные рабочие измерительные приборы как методом сличения с образцовыми мерами, так и при помощи концевых измерительных машин и других оптико-механических измерительных приборов.

Во главе поверочной схемы для угловых мер и угломерных приборов находится эталонный комплекс средств измерения, воспроизводящий единицу плоского угла калибровкой многогранных призм и лимбов абсолютным методом. Многогранные призмы и лимбы, калиброванные абсолютным методом, являются рабочими эталонами. Рабочие эталоны применяются для проверки образцовых мер и образцовых угломерных приборов 1-го разряда, а также для контроля правильности абсолютных измерений углов.

Образцовые многогранные призмы 1-го разряда можно поверять как сличением с рабочими эталонами-многогранными призмами, так и калибровкой с помощью автоколлиматоров или интерферометров абсолютным методом.

Дальше в поверочной схеме идут образцовые угловые меры и угломерные приборы 2, 3 и 4-го разрядов, из которых каждый разряд поверяется по предыдущему.

Рабочие угловые меры (плитки и многогранные призмы) классов 0,1 и 2 служат для непосредственных измерений углов деталей и для наладки приборов и станков; поверяют эти меры по образцовым мерам 2, 3 и 4-го разрядов соответственно.

Поверочные схемы для мер длины и средств линейно-угловых измерений не только показывают соподчиненность эталонов, образцовых и рабочих средств измерений, но на них обозначены и методы поверки, применяемые для различных случаев сличений.

§ 37. ГОСУДАРСТВЕННАЯ СИСТЕМА ЭТАЛОНОВ И ОБРАЗЦОВЫХ МЕР ВРЕМЕНИ И ЧАСТОТЫ

В СССР существует единая Государственная служба времени и частоты, находящаяся в ведении Госстандарта СССР.

Подготовлен проект стандарта на эталоны и образцовые меры времени и частоты и шкалы времени, воспроизводимые Государственным эталоном времени и частоты СССР, в котором определен порядок передачи от него размера единицы времени и частоты и шкал времени рабочим эталонам и образцовым мерам времени и частоты.

Государственный эталон времени и частоты — эталонный комплекс приборов (включающий группу из атомных водородных генераторов и водородного атомикрона и группу кварцевых генераторов), служащий для хранения и воспроизведения размера единиц времени и частоты и хранения национальной шкалы времени СССР.

Единица времени — секунда, воспроизводимая Государственным эталоном времени и частоты СССР, установлена по определению секунды, принятому XIII Генеральной конференцией по мерам и весам как время, равное 9192613770 периодов излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

С 1 января 1972 г. Советский Союз перешел на систему Всемирного координированного времени, в соответствии с которой и передаются сигналы точного времени и эталонные частоты. В системе Всемирного координированного времени несущая частота и интервалы времени поддерживаются постоянными и соответствуют принятому определению секунды в СИ, установленному XIII Генеральной конференцией по мерам и весам. Корректировка шкалы времени осуществляется в 00 часов 1 января или 1 июля на 1 с

с наибольшим приближением к всемирному времени так, чтобы расхождение между моментом сигналов времени и всемирным временем по абсолютной величине не превышало 0,7 с.

Рабочие эталоны времени и частоты применяют для передачи размеров единиц времени и частоты, а также шкал времени от Государственного эталона подчиненным средствам измерений.

Образцовые меры и образцовые приборы для измерения времени и частоты аттестуются в метрологических учреждениях Государственного стандарта СССР. В связи с возможностью поверки образцовых мер времени и частоты непосредственно по эталонам для них не вводится деление на разряды и они характеризуются только по точности, указываемой в свидетельствах.

Передача размера единиц времени и частоты от Государственного эталона через каналы радио- и проводной связи осуществляется Государственной службой времени и частоты СССР.

При передаче размера единиц времени и частоты и шкалы Всемирного координированного времени через каналы радио- и проводной связи в зависимости от точности и назначения поверяемой аппаратуры учитываются поправки к передаваемым частотам и сигналам времени, которые публикуются в официальных изданиях ВНИИФТРИ — хранителя Государственного эталона времени и частоты.

§ 38. ПОВЕРОЧНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ МЕХАНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

В составе утвержденных ВНИИМ им. Д. И. Менделеева поверочных схем имеется около десяти схем для средств измерений механических величин.

Поверочная схема для гирь и весов устанавливает порядок передачи значения единицы массы от эталона массы в СССР — платино-иридиевого килограмма № 12 — через рабочие эталоны и образцовые гири рабочим гилям. Передача осуществляется методом сличения с помощью весов.

Эталоном-копией, предназначенным для замены первичного эталона во время международных сличений, служит платино-иридиевый килограмм № 26. Кроме того, имеются еще эталоны-копии, изготовленные из платино-иридия и нержавеющей стали.

Рабочие эталоны единицы массы изготовлены главным образом из нержавеющей стали и представляют собой как отдельные гири, так и наборы гирь, имеющие номинальные значения 1 мг — 1 кг.

Весь комплекс образцовых гирь делится, в зависимости от точности, на четыре разряда и последовательно передает размер единицы массы от рабочих эталонов рабочим приборам.

Рабочие гири, в зависимости от приписываемой допускаемой погрешности, делятся на пять классов.

Эталонная часть поверочной схемы для ареометров состоит из комплекса эталонной аппаратуры для воспроизведения единицы плотности жидкостей с наивысшей точностью методом гидростатического взвешивания. С помощью этого комплекса аппаратуры градуируют эталонный набор денсиметров, являющихся рабочими эталонами для плотностей 650—2000 кг/м³.

Образцовые приборы представляют собой ареометры, которые в зависимости от точности делятся на два разряда. Основным методом передачи размера единицы плотности жидкостей является метод непосредственного сличения.

Поверочная схема для мер вместимости и средств измерения объема жидкостей и газов в своем верхнем звене содержит образцовые рулетки 2-го разряда и образцовые гири 3-го разряда, с помощью которых единицы вместимости и объема воспроизводятся косвенным путем по образцовым мерам длины 2-го разряда (по геометрическим размерам) или образцовым мерам массы 3-го разряда (способом взвешивания).

Образцовые меры вместимости, служащие для поверки и калибровки рабочих мер вместимости, делятся на два разряда.

Рабочие средства измерений высшей точности проверяются по исходным образцовым мерам данной поверочной схемы, остальные рабочие меры и приборы сличаются с образцовыми мерами вместимости объемным методом.

В эталонной части поверочной схемы для манометров и вакуумметров в качестве первичного эталона служит групповой эталон переменного состава, состоящий из пяти грузопоршневых манометров с пределами измерений $1 \cdot 10^5$ — $60 \cdot 10^5$ Па.

Вторичными (рабочими) эталонами служат наборы эталонных грузопоршневых манометров, пределы измерения которых $0,25 \cdot 10^5$ — $600 \cdot 10^5$ Па.

Образцовые измерительные приборы для измерений давления делятся на четыре разряда. Они включают в себя образцовые грузопоршневые манометры 1-го разряда, образцовые микроманометры 1-го разряда, образцовые ртутные мановакуумметры 2-го разряда, радиоизотопные, термоэлектрические и электронные ионизационные манометры 2-го и 3-го разрядов, образцовые пружинные вакуумметры и манометры 4-го разряда. Основным методом поверки служит метод непосредственного сличения.

Во главе поверочной схемы для силоизмерительных машин и приборов находится эталонный набор мер силы, значения которых вычислены по массе входящих в него гирь и ускорению свободного падения. Номинальные значения силы эталонного набора находятся в пределах $2 \cdot 10^3$ — 10^6 Н.

В качестве образцовых приборов 1-го разряда применяются образцовые переносные динамометры номинальных значений до 10^6 Н.

В качестве образцовых приборов 2-го разряда применяются силоизмерительные машины рычажного или гидравлического типа.

Образцовыми приборами 3-го разряда являются переносные динамометры.

Во главе поверочной схемы для средств измерений твердости находятся эталонные приборы для измерения твердости методами статического вдавливания шарика (по Бринеллю), алмазного конуса (по Роквеллу и супер-Роквеллу) и алмазной пирамиды (по Виккерсу).

Для передачи размера единиц твердости от эталонов образцовым мерам 1-го разряда используется метод градуировки мер.

Образцовыми мерами 1-го и 2-го разрядов являются наборы образцовых мер твердости, имеющие переменный состав, которые градуируются в метрологических организациях Госстандарта СССР.

Методами поверки служат градуировка на приборе, настроенном по образцовым мерам, и поверка по образцовым мерам.

Поверочная схема для вискозиметров включает в себя в качестве эталона комплекс эталонной аппаратуры для воспроизведения единицы кинематической вязкости по времени истечения воды и вспомогательных жидкостей. В качестве образцовых измерительных приборов применяются образцовые капиллярные вискозиметры.

Как показано на приведенной схеме, поверку осуществляют сравнением посредством калибровочных жидкостей.

Во главе поверочной схемы для средств измерений шероховатости поверхности стоит воспроизведение шкалы шероховатости поверхности на основе абсолютных интерференционных измерений элементов неровностей.

Образцовые меры 1-го разряда представляют собой образцы шероховатости с микронеровностями определенного профиля.

Образцовые профилометры и профилографы 2-го разряда служат для поверки образцов шероховатости поверхности технологического профиля.

Образцовые меры 3-го разряда представляют собой образцы шероховатости поверхности технологического профиля.

Рабочие приборы высокой точности (профилографы, микроинтерферометры и др.) поверяют по образцовым мерам 1-го разряда.

В поверочной схеме для тахометров и спидометров в качестве исходных образцовых мер применяют образцовые генераторы электрических колебаний частотой 1000 Гц и погрешностью $\pm 0,001\%$. Они служат образцовыми мерами 2-го разряда.

В качестве образцовых мер 3-го разряда применяют образцовые генераторы тахометрических установок.

§ 39. ПОВЕРОЧНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИИ ТЕПЛОВЫХ ВЕЛИЧИН

В поверочной схеме для калориметров за исходный образцовый прибор принят образцовый калориметр 1-го разряда, аттестация которого заключается в определении его теплового экви-

валента (в джоулях на градус). При аттестации измеряют силу электрического тока, сопротивление, время и приращение температуры воды в калориметрическом сосуде, определяемые соответствующим образцовым прибором.

Образцовый калориметр 1-го разряда служит для определения теплоты сгорания образцового вещества — бензойной кислоты соответствующей чистоты, применяемой при определении теплового эквивалента образцовых калориметров 2-го разряда и рабочих калориметров повышенной точности.

Поверочная схема для термометров и пирометров, применяемых в области температур от -263 до 6000°C , отражает передачу Международной практической температурной шкалы, в единицах которой проградуированы все применяемые в практике приборы для температурных измерений. Поверочная схема разделена на две части: проверка термометров и термоэлектрических пирометров и проверка пирометров излучения.

Во главе поверочной схемы стоит воспроизведение Международной практической температурной шкалы по основным реперным точкам. Одну из этих точек — точку затвердевания золота, равную по Международной практической температурной шкале 1968 г. $1064,43^{\circ}\text{C}$, используют для воспроизведения единиц в области высоких температур с помощью первичного эталона в виде полного излучателя, поставленного во главе второй части поверочной схемы (для пирометров излучения).

Рабочими эталонами служат: эталонные термометры сопротивления, эталонные термодпары, эталонные температурные лампы и эталонные оптические пирометры.

Образцовые измерительные приборы для температурных измерений делятся на три разряда.

В качестве образцовых измерительных приборов 1-го разряда применяют платиновые термометры сопротивления, образцовые ртутные термометры и образцовые оптические пирометры 1-го разряда.

Аналогичные приборы применяются в качестве образцовых 2-го и 3-го разрядов с соответствующими показателями точности.

Сличение рабочих эталонов с образцовыми приборами 1-го разряда и приборов 1-го разряда с приборами 2-го разряда и т. д. осуществляют методами непосредственного сличения в криостатах и термостатах, с помощью компенсационных установок, с помощью полного излучателя и др.

§ 40. ПОВЕРОЧНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ВЕЛИЧИН

Поверочная схема для средств измерений электрического сопротивления возглавляется первичным групповым эталоном ома, состоящим из шести одноомных катушек. Контроль постоян-

ства среднего значения первичного эталона и участие в международных сличениях осуществляются с помощью группового эталона — копии ома, состоящего из двух или нескольких катушек.

Рабочими эталонами служат группы катушек с номинальным значением 10^3 — 10^5 Ом. Сопротивление катушек, входящих в рабочие эталоны, определяют по первичному эталону ома с помощью моста-компаратора.

Образцовые меры 1-го разряда представляют собой катушки, сопротивление которых определяют сравнением с эталонными катушками (рабочими эталонами) также при помощи моста-компаратора. Погрешности катушек 1-го разряда находятся в пределах $\pm 0,0001$ — $\pm 0,0003\%$ в зависимости от их номинальных значений и $\pm 0,0005\%$ для катушек с номинальным значением 0,001 Ом.

В поверочной схеме размер единицы сопротивления далее передается с помощью образцовых катушек 2 и 3-го разрядов.

Рабочие меры — измерительные катушки сопротивления высоких классов точности (0,002—0,05) поверяют по образцовым катушкам сопротивления 1 и 2-го разрядов соответственно.

Размер единицы электрического сопротивления передается в основном сличением посредством моста-компаратора, моста, потенциометра, двойного моста, а для измерений на переменном токе — сличением мостовыми и резонансными методами на соответствующих частотах.

Поверочная схема для средств измерений индуктивности и добротности разделена на две части, из которых первая отражает передачу размера единицы индуктивности от первичного эталона до рабочих мер и приборов и вторая часть — поверку мер добротности и приборов для измерения добротности.

Первичным эталоном индуктивности служит группа катушек индуктивности, значения индуктивности которых вычислены по геометрическим размерам (диаметру и длине обмотки и диаметру проволоки). Номинальные значения индуктивности катушек находятся в пределах 0,01—0,03 Г.

Рабочие эталоны — катушки индуктивности с номинальными значениями индуктивности 10^{-3} , 10^{-2} , 0,1 и 1 Г аттестуются при частоте 10^3 Гц в схеме индуктивно-емкостного моста по первичному эталону индуктивности или по конденсаторам — рабочим эталонам емкости.

Образцовыми мерами 1-го разряда служат образцовые катушки индуктивности, имеющие номинальные значения 10^{-7} —1 Г.

Образцовые меры индуктивности 2-го разряда имеют номинальные значения 10^{-7} — 10^{-3} Г.

Поверку образцовых катушек индуктивности 2-го разряда по добротности и аттестацию индуктивности мер добротности осуществляют при частотах 50— 10^6 Гц по образцовым конденсаторам и мерам сопротивления 2-го разряда с помощью мостовых схем.

Поверочная схема для средств измерений электрической емкости и угла потерь состоит из двух частей: первая отражает пере-

дачу размера единицы емкости от первичного эталона до рабочих средств измерений электрической емкости, вторая — поверку мер и приборов по углу потерь.

Во главе поверочной схемы для средств измерений емкости поставлен первичный групповой эталон из четырех конденсаторов с номинальным значением емкости 10^5 пФ. Конденсаторы первичного эталона емкости аттестованы по первичным эталонам единиц индуктивности и сопротивления при частоте 10^3 Гц с помощью индуктивно-емкостного моста.

Рабочие эталоны емкости представляют собой эталонные наборы конденсаторов с номинальным значением 10^{-4} , 10^{-3} и т. д. до 10^6 пФ. Они градуируются по первичному эталону емкости при частоте 10^3 Гц.

Во главе второй части поверочной схемы — угла потерь находится емкостная мера угла потерь — рабочий эталон, представляющий собой один из конденсаторов рабочего эталона единицы емкости номинальным значением 10^6 пФ.

Образцовые конденсаторы 1-го разряда имеют различные номинальные значения емкости в пределах 10^{-4} — 10^7 пФ. Наборы составлены из конденсаторов емкостью $(1, 2, 3, 4) \cdot 10^n$ пФ, где $n = -4, -3, \dots, 0, \dots, 6$.

Образцовые конденсаторы 1-го разряда емкостью 10 — 10^7 пФ аттестуют способом градуировки одновременно как по емкости, так и по углу потерь.

Образцовые конденсаторы 2-го разряда имеют различные номинальные емкости в пределах 10^{-4} — 10^{10} пФ.

По измерительным конденсаторам 1-го разряда, аттестованным по углу потерь, поверяют образцовые меры угла потерь. Поверка осуществляется путем сличений и градуировки при помощи мостовых схем.

Во главе поверочной схемы для нормальных элементов расположен первичный групповой эталон вольты переменного состава, состоящий из 20 эталонных насыщенных нормальных элементов. Значение электродвижущей силы группового эталона определяется абсолютным методом с помощью токовых весов и эталонной катушки сопротивления.

В раздел эталонов поверочной схемы входят: эталон-копия (из 20 нормальных элементов), эталон-копия для международных сличений (из 10 нормальных элементов) и рабочие эталоны.

Образцовыми мерами электродвижущей силы 1-го разряда служат нормальные элементы с погрешностью $\pm 2 \cdot 10^{-4}\%$, а образцовыми мерами 2-го разряда — нормальные элементы с погрешностью $\pm 5 \cdot 10^{-4}\%$.

Рабочими мерами электродвижущей силы являются нормальные элементы классов 0,001 (поверяемые по образцовым нормальным элементам 1-го разряда) и классов 0,002, 0,005 и 0,02 (поверяемые по образцовым нормальным элементам 2-го разряда).

Основным методом поверки, предусмотренным поверочной схемой, является сличение с помощью компенсатора постоянного тока.

Во главе поверочной схемы для вольтметров поставлены образцовые меры электродвижущей силы — нормальные элементы 2-го разряда.

Образцовые вольтметры, которым передается размер единицы электродвижущей силы от нормальных элементов, разделяются на классы от 0,01 до 0,5. В зависимости от класса точности допускаемая погрешность при поверке не должна превышать $\pm 0,005\%$ — $\pm 0,1\%$ конечного значения шкалы прибора.

Рабочие измерительные приборы имеют классы точности 0,01—4. Приборы высоких классов точности 0,01—0,5 поверяют по образцовому нормальному элементу, а классов 1—4 — по образцовым вольтметрам.

Поверочная схема для амперметров и счетчиков количества электричества возглавляется образцовыми мерами электродвижущей силы (2-го разряда) и электрического сопротивления (2 и 3-го разрядов), по которым путем косвенных измерений поверяют образцовые амперметры.

Классы образцовых амперметров 0,1—0,5.

Рабочие амперметры классов 0,1—0,5 поверяются косвенными измерениями силы тока при помощи потенциометров с использованием образцовых нормальных элементов 2-го разряда. Рабочие амперметры классов 1—4 сличаются непосредственно с образцовыми амперметрами.

Во главе поверочной схемы для ваттметров, вариметров и счетчиков электрической энергии поставлены образцовые меры электродвижущей силы (2-го разряда) и электрического сопротивления (2-го разряда), по которым путем косвенных измерений поверяют образцовые ваттметры.

К образцовым приборам 1-го разряда относятся: образцовые ваттметры 1-го разряда, а также образцовые амперметры и вольтметры класса 0,2 или 0,1. Образцовыми приборами 2-го разряда являются образцовые счетчики электрической энергии 2-го разряда.

Рабочие измерительные приборы разделяются на классы 0,1—5 и поверяются соответственно или исходными (для данной поверочной схемы) образцовыми катушками сопротивления и нормальными элементами или образцовыми приборами 1 и 2-го разрядов.

Поверочную схему для средств измерения напряженности магнитного поля и магнитного потока возглавляет первичный эталон единицы напряженности магнитного поля, который представляет собой расчетную однослойную катушку в виде колец Гельмгольца.

Рабочим эталоном единицы напряженности магнитного поля является многослойная катушка в виде колец Гельмгольца с обмоткой на фланцах катушки первичного эталона.

Рабочим эталоном единицы магнитного потока служит совокупность рабочего эталона единицы напряженности магнитного поля и расчетных измерительных катушек.

Размер единиц напряженности магнитного поля и магнитного потока передается от рабочих эталонов рабочим мерам и приборам для измерения магнитных полей (веберметрам) с помощью образцовых мер (без делений на разряды).

§ 41. ПОВЕРОЧНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СВЕТОИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЛАМП, СВЕТОИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ И СЕНСИТОМЕТРОВ

Во главе поверочной схемы для фотоизмерительных ламп и фотоизмерительных приборов находится первичный световой эталон в виде полного излучателя при температуре затвердевания платины.

Размер световых единиц передается от первичного эталона двумя способами: а) передачей размера единиц силы света и освещенности (а также светового потока на ограниченной площади или в малом телесном угле) при измерениях направлений силы света и б) передачей размера единицы светового потока по всем направлениям путем измерений пространственного распределения силы света и последующих расчетов.

Эталон-копия состоит из двух групп электрических ламп накаливания: одной — для воспроизведения световых единиц при цветовой температуре около 2042 К, другой — при цветовой температуре около 2360 К.

Рабочие эталоны представляют собой группы электрических ламп накаливания, применяемых при цветовой температуре 2360 К.

Образцовые фотоизмерительные лампы могут быть 1 и 2-го разрядов. Образцовыми измерительными приборами 3-го разряда служат образцовые люксметры.

Основным методом проверки является сравнение на фотоизмерительной скамье.

Поверочная схема для сенситометров в своей верхней части имеет образцовые фотоизмерительные лампы 2-го разряда, с помощью которых проверяется лампа образцового сенситометра 1-го разряда.

Образцовые сенситометры могут быть 1-го (предельная погрешность $\pm 2\%$) и 2-го (предельная погрешность 3%) разрядов.

§ 42. ПОВЕРОЧНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ПРИБОРОВ ИЗМЕРЕНИЯ ИОНИЗИРУЮЩИХ ИЗЛУЧЕНИЙ

Во главе поверочной схемы для рентгенометров (дозиметров) и гамма-источников находится эталонный набор ионизационных камер для воспроизведения единицы экспозиционной дозы по ионизационному действию рентгеновского и гамма-излучений.

Размер единицы определяется путем измерений ионизации воздуха в камере и последующих расчетов.

Значение единицы экспозиционной дозы от первичного эталона передают: в области гамма-излучения — эталонному набору гамма-источников, от которых размер единицы передается образцовым гамма-источникам и гамма-дозиметрам, в области рентгеновского излучения — эталонным ионизационным камерам путемличения этих камер с соответствующими камерами первичного эталона методом замещения или методом одновременных измерений.

Образцовыми средствами измерений служат образцовые гамма-источники и образцовые рентгенометры 1 и 2-го разрядов.

Поверочную схему для альфа-, бета- и гамма-источников и альфа-, бета-радиометров, градуируемых в единицах активности, возглавляет комплекс эталонной аппаратуры для воспроизведения единицы активности по ионизационному или тепловому действию излучения. В состав этого комплекса входят счетчики с телесным углом 4π для счета альфа- и бета-частиц, бета-гамма и гамма-гамма совпадений, ионизационная камера и калориметр.

Образцовые источники и образцовые растворы различных нуклидов по точности делятся на три разряда.

Во главе поверочной схемы для радиевых гамма-источников расположен первичный эталон радия СССР.

Рабочие эталоны радия, содержащие 1—200 мг радия, сравнивают непосредственно с первичным эталоном радия по гамма-излучению на установке со сферической ионизационной камерой, соединенной с компенсационной электрометрической схемой, и по альфа-излучению на установке с альфа-калориметром. В качестве рабочих эталонов применяют также растворы солей радия.

Образцовые радиевые источники сравнивают с рабочими эталонами радия при помощи установок с ионизационной камерой. Образцовые растворы солей радия градуируют сравнением с эталонными растворами.

Сличением с помощью счетчика и ионизационных камер размер единиц передается рабочим мерам — радиевым гамма-источникам и растворам радия.

В поверочной схеме для нейтронных источников и приборов для измерения плотности нейтронных потоков первичным эталоном служит комплекс эталонной аппаратуры для воспроизведения единицы плотности нейтронного потока по взаимодействию нейтронов с веществом. По первичному эталону аттестуются рабочие эталоны — наборы нейтронных источников моноэнергетических нейтронов, а также рабочие эталоны моноэнергетических нейтронов.

В качестве рабочего эталона моноэнергетических нейтронов применяют наборы радий-бериллиевых, плутоний-бериллиевых и актиний-бериллиевых препаратов.

Образцовые наборы нейтронных источников и образцовые приборы для измерений плотности нейтронного потока по точно делятся на два разряда.

§ 43. ПОВЕРОЧНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ПРИБОРОВ ДРУГИХ ВИДОВ ИЗМЕРЕНИЙ

В настоящее время разрабатываются поверочные схемы для приборов некоторых других видов измерений.

В дополнение к действующей поверочной схеме для акустических измерительных приборов, во главе которой расположен комплекс эталонной аппаратуры для воспроизведения единицы звукового давления в диапазоне 5 Гц — 20 МГц, разрабатываются проекты поверочных схем для приборов других видов акустических измерений.

Большой практический интерес представляют поверочные схемы для радиоизмерительных приборов. Несмотря на то, что большинство радиотехнических величин представляют собой электрические и магнитные величины, непосредственная привязка их единиц к электрическим эталонам бывает затруднительна. Возникает необходимость в создании специальных эталонных и образцовых комплексов аппаратуры для воспроизведения единиц радиотехнических величин.

Так, проект поверочной схемы для приборов измерения мощности сверхвысоких частот возглавляет Государственный специальный эталон — комплекс средств измерений, в основу которого положены калориметрические измерители мощности волноводные и коаксиальные. Они привязываются к образцовым нормальным элементам 2-го разряда и образцовым катушкам сопротивления 2-го разряда путем косвенных измерений мощности постоянного тока с компенсатором постоянного тока и к.п.д. головок калориметрическим компаратором.

Дальнейшая передача размера единицы мощности на сверхвысоких частотах осуществляется с помощью образцовых измерителей мощности непосредственным сличением и сличением через делитель мощности. Этими методамиверяют по образцовым приборам рабочие измерители мощности для различных значений измеряемых величин.

Проект поверочной схемы для приборов, измеряющих напряженность электромагнитного поля, состоит из двух частей: первая часть — приборы для измерения электрической составляющей вектора напряженности поля, вторая часть — приборы для измерения магнитной составляющей.

Рабочими эталонами в первой части поверочной схемы служат плоский конденсатор и комплекты дипольных и рупорных антенн.

Образцовые средства измерений делятся на два разряда и последовательно передают размер единицы электрической составляющей напряженности поля рабочим измерительным приборам.

Рабочим эталоном второй части схемы является рамочная антенна, от которой методом вспомогательной антенны размер единицы последовательно передается образцовым средствам измерения и 2-го разрядов.

Методами замещения и образцового поля размер единицы магнитной составляющей поля передается рабочим измерительным приборам.

Разрабатываются поверочные схемы и для средств измерений такой важной области, как физико-химические измерения.

§ 44. СПОСОБЫ ПОВЕРКИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

В поверочных схемах приведены различные способы поверки средств измерений по образцовым средствам измерений, а последних — по эталонам. Поверка средств измерений — это определение метрологическим органом погрешностей средств измерений и установление их пригодности к применению. Меры могут быть поверены:

способом сличения с более точной образцовой мерой посредством компарирующего прибора (например, поверка концевых мер длины);

измерением воспроизводимой мерой величины измерительными приборами соответствующего разряда и класса (в этом случае поверка часто называется градуировкой мер, например, градуировка мер твердости);

способом калибровки, когда с более точной мерой сличается лишь одна мера набора или одна из отметок шкалы многозначной меры, а действительные размеры других мер или значения воспроизводимых ими величин на других отметках шкалы определяются путем их взаимного сравнения в различных сочетаниях на приборах сравнения и при дальнейшей обработке результатов измерений (калибровка гирь или линейных шкал).

Поверка измерительных приборов осуществляется одним из двух методов:

методом измерения величин, воспроизводимых образцовыми мерами соответствующего разряда или класса точности, значения которых выбирают равными соответствующим (чаще всего всем оцифрованным) отметкам шкалы прибора. Наибольшая разность между результатами измерения и соответствующими им размерами мер является в этом случае основной погрешностью прибора;

методом сличения поверяемого и некоторого образцового прибора при измерении одной и той же величины. Разность их показаний при измерении различных значений измеряемой величины определяет погрешность поверяемого прибора. Осуществление этого метода возможно двумя способами:

а) измеряемая величина изменяется до определенных, оговорен-

ных в стандартах или технических условиях значений, устанавливаемых по образцовому прибору, а погрешность находится по показаниям поверяемого прибора. Этот метод особенно удобен при автоматизации поверочных работ, так как позволяет одновременно несколько приборов поверять с помощью одного образцового;

б) измеряемая величина изменяется до определенных, оговоренных в стандартах или технических условиях значений, устанавливаемых по поверяемому прибору, а погрешность отсчитывается по образцовому прибору как отклонение от соответствующего штрих шкалы. Преимущество этого метода заключается в том, что он дает возможность точно определить погрешность по образцовому прибору, шкала которого обычно имеет большее число делений. Применяя дополнительные устройства, можно отсчитывать погрешность непосредственно в процентах.

Кроме определения погрешностей измерительных средств, в поверку на практике включаются и другие операции, имеющие целью установить соответствие поверяемых средств требованиям стандартов и технических условий.

Важным при поверке является вопрос о выборе оптимального соотношения между допускаемыми погрешностями образцового и поверяемого приборов. Обычно это соотношение принимается равным 1 : 3, когда при поверке вводят поправки на показания образцовых средств измерений. Если же поправки не вводятся, то образцовые средства выбираются исходя из соотношения 1 : 5. Необходимая точность образцовых средств, а иногда и их типы, регламентируются государственными стандартами на методы поверки средств измерений. Соотношение допускаемых погрешностей поверяемых и образцовых средств измерений устанавливается с учетом принятого метода поверки, характера погрешностей, допустимых значений долей обнаруженного брака и ошибочно забракованных годных изделий и иногда может значительно отличаться от указанных выше цифр.

§ 45. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

При анализе измерений следует четко разграничивать два понятия: истинные значения физических величин и их эмпирические проявления — результаты измерений.

Истинные значения физических величин — это значения, идеальным образом отражающие свойства данного объекта как в количественном, так и в качественном отношении. Они не зависят от средств нашего познания и являются той абсолютной истиной, к которой мы стремимся, пытаясь выразить их в виде числовых значений.

Результаты измерений, напротив, являются продуктами нашего познания. Представляя собой приближенные оценки значений величин, найденные путем измерения, они зависят не только от них, но еще и от метода измерения, от технических средств, с помощью которых проводятся измерения, и от свойств органов чувств наблюдателя, осуществляющего измерения.

Разница Δ между результатами измерения X' и истинным значением Q измеряемой величины называется погрешностью измерения:

$$\Delta = X' - Q. \quad (VI.1)$$

Но поскольку истинное значение Q измеряемой величины неизвестно, то неизвестны и погрешности измерения, поэтому для получения хотя бы приближенных сведений о них приходится в формулу (VI.1) вместо истинного значения подставлять так называемое действительное значение.

Под действительным значением физической величины мы будем понимать ее значение, найденное экспериментально и настолько приближающееся к истинному, что для данной цели оно может быть использовано вместо него.

Причинами возникновения погрешностей являются: несовершенство методов измерений, технических средств, применяемых при измерениях, и органов чувств наблюдателя. В отдельную группу следует объединить причины, связанные с влиянием условий проведения измерений. Последние проявляются двояко. С одной стороны, все физические величины, играющие какую-либо роль

при проведении измерений, в той или иной степени зависят друг от друга. Поэтому с изменением внешних условий изменяются истинные значения измеряемых величин. С другой стороны, условия проведения измерений влияют и на характеристики средств измерений и физиологические свойства органов чувств наблюдателя и через их посредство становятся источником погрешности измерения.

Описанные причины возникновения погрешностей являются совокупностью большого числа факторов, под влиянием которых складывается суммарная погрешность измерения [см. формулу (VI.1)]. Их можно объединить в две основные группы.

1. Факторы, проявляющиеся весьма нерегулярно и столь же неожиданно исчезающие или проявляющиеся с интенсивностью которую трудно предвидеть. К ним относятся, например, перекосы элементов приборов в их направляющих, нерегулярные изменения моментов трения в опорах, малые флуктуации влияющих величин, изменения внимания операторов и др.

Доля, или составляющая, суммарной погрешности измерения (VI.1), определяемая действием факторов этой группы, называется *случайной погрешностью* измерения. Ее основная особенность заключается в том, что она случайно изменяется при повторных измерениях одной и той же величины.

При создании измерительной аппаратуры и организации процесса измерения в целом интенсивность проявления большинства факторов данной группы удастся свести к общему уровню, так что все они влияют более или менее одинаково на формирование случайной погрешности. Однако некоторые из них, например, внезапное падение напряжения в сети электропитания, могут проявиться неожиданно сильно, в результате чего погрешность примет размеры, явно выходящие за границы, обусловленные ходом эксперимента в целом. Такие погрешности в составе случайной погрешности называются *грубыми*. К ним тесно примыкают *промахи* — погрешности, зависящие от наблюдателя и связанные с неправильным обращением со средствами измерений, неверным отсчетом показаний или ошибками при записи результатов.

2. Факторы, постоянные или закономерно изменяющиеся в процессе измерительного эксперимента, например, плавные изменения влияющих величин или погрешности применяемых при измерениях образцовых мер. Составляющие суммарной погрешности [см. формулу (VI.1)], определяемые действием факторов этой группы, называются *систематическими погрешностями измерения*. Их отличительная особенность заключается в том, что они остаются постоянными или закономерно изменяются при повторных измерениях одной и той же величины. До тех пор, пока систематические погрешности больше случайных, их зачастую можно вычислить или исключить из результатов измерений надлежащей постановкой опыта.

Таким образом, мы имеем два типа погрешностей измерения:

а) случайные (в том числе грубые погрешности и промахи), изменяющиеся случайным образом при повторных измерениях одной и той же величины;

б) систематические погрешности, остающиеся постоянными или закономерно изменяющиеся при повторных измерениях.

В процессе измерения оба вида погрешностей проявляются одновременно, и погрешность измерения можно представить в виде суммы:

$$\Delta = \delta + \Theta, \quad (\text{VI.2})$$

где δ — случайная, а Θ — систематическая погрешности.

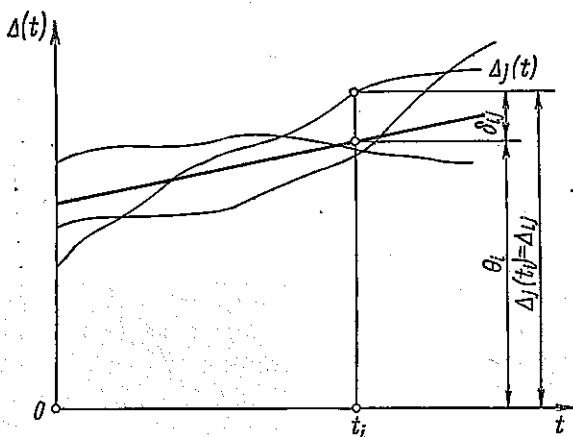


Рис. 11

Для получения результатов, минимально отличающихся от истинных значений величин, проводят многократные наблюдения за измеряемой величиной с последующей математической обработкой опытных данных. Поэтому наибольшее значение имеет изучение погрешности, как функции номера наблюдения, т. е. времени $\Delta(t)$. Тогда отдельные значения погрешностей можно будет трактовать как набор значений этой функции: $\Delta_1 = \Delta(t_1)$; $\Delta_2 = \Delta(t_2)$, ..., $\Delta_n = \Delta(t_n)$.

В общем случае погрешность является *случайной функцией времени*, которая отличается от классических функций математического анализа тем, что нельзя сказать, какое значение она примет в момент времени t_i . Можно указать лишь вероятности появления ее значений в том или ином интервале. В серии экспериментов, состоящих из ряда многократных наблюдений, мы получаем одну *реализацию* этой функции. При повторении серии при тех же значениях величин, характеризующих факторы второй группы, неизбежно получаем новую реализацию, отличающуюся от первой.

Реализации отличаются друг от друга из-за влияния факторов первой группы, а факторы второй группы, одинаково проявляющиеся при получении каждой реализации, придают им некоторые общие черты (рис. 11).

Погрешность измерений, соответствующая каждому моменту времени t_i , называется *сечением случайной функции* $\Delta(t)$. В каждом сечении в большинстве случаев можно найти *среднее значение* погрешности Θ_i , относительно которого группируются погрешности в различных реализациях. Если через полученные таким образом точки Θ_i провести плавную кривую, то она будет характеризовать общую тенденцию изменения погрешности во времени. Нетрудно заметить, что средние значения Θ_i определяются действием факторов второй группы и представляют собой систематическую погрешность измерения в момент времени t_i , а отклонения δ_{ij} от среднего в сечении t_i , соответствующие j -й реализации дают нам значения случайной погрешности. Последние являются уже представителями случайных величин — объектов изучения классической теории вероятностей. Таким образом, имеет место равенство

$$\Delta_{ij} = \Theta(t_i) + \delta_{ij}.$$

Предположим, что $\Theta(t_i) = 0$, т. е. что систематические погрешности тем или иным способом исключены из результатов наблюдений, и будем рассматривать только случайные погрешности, средние значения которых равны нулю в каждом сечении. Предположим далее, что случайные погрешности в различных сечениях не зависят друг от друга, т. е. знание случайной погрешности в одном сечении как ординаты одной реализации не дает нам никакой дополнительной информации о значении, принимаемом этой реализацией в любом другом сечении, и что все теоретико-вероятностные особенности случайных погрешностей, являющихся значениями реализации в каждом сечении и значениями одной реализации во всех сечениях, совпадают между собой. Тогда случайную погрешность можно рассматривать как случайную величину, а ее значения при каждом из многократных наблюдений одной и той же физической величины — как ее эмпирические проявления, т. е. как результаты независимых наблюдений над ней.

В этих условиях случайная погрешность δ измерений определяется как разность между исправленным результатом X измерения и истинным значением Q измеряемой величины:

$$\delta = X - Q, \quad (VI.3)$$

причем исправленным будем называть результат измерений, из которого исключены систематические погрешности.

Пусть, например, при измерении размера гладкой предельной скобы микрометрическим нутромером исправленный результат составляет

$$X = 125,065 \text{ мм.}$$

Измеряя тот же размер блоком концевых мер 3-го разряда, погрешность аттестации которых (меньше 1 мкм) пренебрежимо мала по сравнению с погрешностями измерения микрометрическим нутромером (порядка 30 мкм), находим действительный размер скобы:

$$Q = 125,0458 \text{ мм.}$$

Случайную погрешность измерения размера скобы находят по формуле (VI.3) в соответствии с правилами приближенных вычислений:

$$\delta = X - Q = 125,065 - 125,0458 = 0,019 \text{ мм.}$$

При повторении измерения получится другой результат и, следовательно, новое значение случайной погрешности.

Подобные данные получают обычно при проверке измерительных средств путем измерения заранее известных величин. При проведении же измерений целью является оценка истинного значения измеряемой величины, которое до опыта неизвестно. Результат измерения включает в себя помимо истинного значения еще и случайную погрешность, следовательно, сам является случайной величиной. В этих условиях фактическое значение случайной погрешности, полученное при проверке, еще не характеризует точности измерений, поэтому не ясно, какое же значение принять за окончательный результат измерения и как охарактеризовать его точность.

Ответ на эти вопросы можно получить, используя при метрологической обработке результатов измерения методы математической статистики, имеющей дело именно со случайными величинами.

§ 46. ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим результат наблюдений X за постоянной физической величиной Q как случайную величину, принимающую различные значения X_i в различных наблюдениях за ней. Значения X_i будем называть результатами отдельных наблюдений.

Наиболее универсальный способ описания случайных величин заключается в отыскании их интегральных или дифференциальных функций распределения.

Под интегральной функцией распределения результатов наблюдений понимается зависимость вероятности того, что результат наблюдения X_i в i -м опыте окажется меньшим некоторого текущего значения x , от самой величины x :

$$F_X(x) = P\{X_i \leq x\} = P\{-\infty < X_i \leq x\}. \quad (\text{VI.4})$$

Латинская буква P является здесь символом вероятности события, описание которого заключено в фигурных скобках.

Если рассматривать результат отдельного наблюдения X_i как случайную точку на оси Ox (рис. 12), то значение интегральной функции распределения в точке x' численно равно вероятности того, что случайная точка X_i в результате i -го измерения займет некоторое положение левее точки x' . Эти вероятности, очевидно, различны для различных точек x' . При перемещении точки x' вправо вдоль числовой оси, вероятность того, что в результате измерения точка X_i расположится левее x' , не может уменьшаться. Следовательно, интегральная функция распределения результатов наблюдений является *неубывающей* функцией аргумента. При дальнейшем увеличении координаты x' событие $X_i \leq x'$ становится

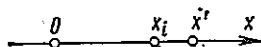


Рис. 12

все более и более достоверным, а его вероятность асимптотически приближается к единице. При перемещении точки x' влево вдоль числовой оси Ox вероятность события $X_i \leq x'$ может только уменьшаться или оставаться постоянной в некоторых интервалах значений x' . В пределе при $x' \rightarrow -\infty$ это событие становится невозможным, и его вероятность стремится к нулю.

Обычно график интегральной функции распределения результатов наблюдений представляет собой непрерывную неубывающую кривую, начинающуюся от нуля на отрицательной бесконечности и асимптотически приближающуюся к единице при увеличении аргумента до плюс бесконечности (рис. 13).

Часто при $x=Q$ интегральная функция распределения имеет точку перегиба. Тогда, если в точке перегиба интегральная функция распределения принимает значение, равное половине, говорят о *симметричности* (равносторонности) распределения результатов наблюдений относительно истинного значения измеряемой величины. В этом случае график интегральной функции распределения имеет вид, представленный на рис. 14.

Непрерывность интегральной функции распределения результатов наблюдений выражает собой тот, казалось бы, очевидный факт, что результат наблюдения может принять любое до опыта выбранное значение только с нулевой вероятностью.

На самом деле это не совсем так. Разрешающая способность измерительных средств, применяемых для проведения измерений, делит всю область значений измеряемой величины, близких к ее истинному значению, на ряд полос. Значения измеряемой величины, лежащие в пределах одной полосы, неразличимы для наблюдателя, вооруженного данными измерительными средствами. Поэтому интегральная функция распределения результатов измерения сохра-

няет постоянное значение в пределах одной полосы и скачкообразно изменяется на некоторое конечное значение при переходе через границу этой полосы (при отсчете по шкале границами полос являются десятые доли деления шкалы, которые еще учитываются при отсчете, в других случаях за ширину полосы можно принять порог реагирования средства измерения).

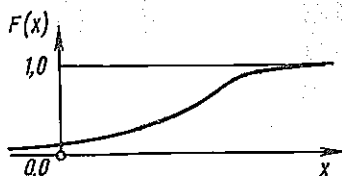


Рис. 13



Рис. 14

В большинстве случаев приведенные обстоятельства не мешают считать интегральную функцию распределения результатов наблюдений непрерывной функцией, а непрерывность значительно упрощает анализ случайных погрешностей.

Случайную погрешность δ будем рассматривать тоже как случайную величину, принимающую в различных опытах различные значения δ_i . Ее интегральную функцию распределения получаем переносом начала координат в точку $x=Q$:

$$F_{\delta}(\delta) = P\{\delta_i \leq \delta\} = P\{X_i - Q \leq x - Q\} = P\{X_i \leq x\}. \quad (VI.5)$$

Более наглядным является описание свойств результатов наблюдений и случайных погрешностей с помощью *дифференциальной функции распределения*, иначе называемой плотностью распределения вероятностей и обозначаемой через $p_x(x)$ или соответственно через $p_{\delta}(\delta)$. Дифференциальная функция распределения является функцией, производной от интегральной по своему аргументу:

$$p_x(x) = \frac{dF_x(x)}{dx}; \quad p_{\delta}(\delta) = \frac{dF_{\delta}(\delta)}{d\delta}. \quad (VI.6)$$

График дифференциальной функции распределения, который называют *кривой распределения*, чаще всего имеет колоколообразную форму и обладает максимумом при $x=Q$ или соответственно $\delta=0$ (рис. 15).

От дифференциальной функции распределения легко перейти к интегральной путем интегрирования первой

$$F_x(x) = \int_{-\infty}^x p_x(x) dx; \quad F_{\delta}(\delta) = \int_{-\infty}^{\delta} p_{\delta}(\delta) d\delta. \quad (VI.7)$$

Поскольку $F_X(+\infty)=1$, то справедливо следующее равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_\delta(\delta) d\delta = 1. \quad (VI.8)$$

Иными словами, площадь, заключенная между кривой дифференциальной функции распределения и осью абсцисс, равна единице.

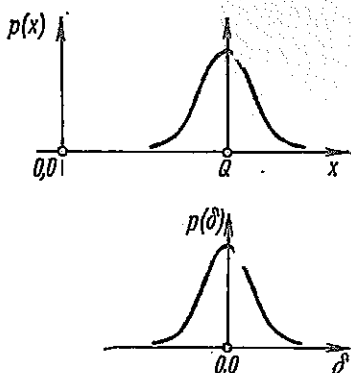


Рис. 15

Размерность плотности распределения вероятностей, как это следует из формулы (VI.6), обратна размерности измеряемой величины, поскольку сама вероятность — величина безразмерная.

Используя понятия функций распределения, легко получить выражения для вероятностей того, что результат наблюдения X или случайная погрешность δ примет при проведении измерения некоторое значение в интервале $(x_1; x_2]$ или $(\delta_1; \delta_2]$ *.

В терминах интегральной функции распределения имеем

$$\begin{aligned} P(x_1 < X \leq x_2) &= P\{-\infty < X \leq x_2\} - P\{-\infty < X \leq x_1\} = \\ &= F_X(x_2) - F_X(x_1), \end{aligned} \quad (VI.9)$$

$$\begin{aligned} P(\delta_1 < \delta \leq \delta_2) &= P\{-\infty < \delta \leq \delta_2\} - P\{-\infty < \delta \leq \delta_1\} = \\ &= F_\delta(\delta_2) - F_\delta(\delta_1), \end{aligned} \quad (VI.10)$$

т. е. вероятность попадания результата наблюдений или случайной погрешности в заданный интервал равна разности значений функции распределения на границах этого интервала.

Заменяя в полученных формулах интегральные функции распределения на соответствующие плотности распределения вероятностей согласно выражению (VI.7), получим формулы для иско-

* Как принято, будем обозначать интервал $a < X < b$ через $(a; b)$; $a < X \leq b$ через $(a; b]$; $a \leq X \leq b$ через $[a; b]$; $a \leq X < b$ через $[a; b)$.

мой вероятности в терминах дифференциальной функции распределения:

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{-\infty}^{x_2} p_X(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} p_X(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} p_X(x) dx, \quad (\text{VI.11})$$

$$P\{\delta_1 < \delta \leq \delta_2\} = \int_{-\infty}^{\delta_2} p_\delta(\delta) d\delta - \int_{-\infty}^{\delta_1} p_\delta(\delta) d\delta = \int_{\delta_1}^{\delta_2} p_\delta(\delta) d\delta. \quad (\text{VI.12})$$

Таким образом, *вероятность попадания результата наблюдения или случайной погрешности в заданный полуоткрытый интервал равна площади, ограниченной кривой распределения, осью абсцисс и перпендикулярами к ней на границах этого интервала.*

Произведения $p(\delta)d\delta$ и $p_X(x)dx$ называются *элементами вероятности*. Они равны вероятностям того, что случайные величины δ или X примут некоторые значения в интервалах $d\delta$ и dx , поэтому по форме кривой распределения можно судить о том, какие интервалы значений случайных погрешностей более, а какие менее вероятны. Для кривой распределения случайных погрешностей, изображенной на рис. 15, более вероятны малые значения погрешностей, лежащие вокруг $\delta=0$. Вероятность появления больших погрешностей значительно меньше.

Таким образом, результаты наблюдений в значительной степени сконцентрированы вокруг истинного значения измеряемой величины, и по мере приближения к нему элементы вероятности их появления возрастают. Это дает основание принять за оценку истинного значения измеряемой величины координату центра тяжести фигуры, образованной осью абсцисс и кривой распределения, и называемую *математическим ожиданием* результатов наблюдений:

$$M[X] = m_X = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx. \quad (\text{VI.13})$$

В заключение можно дать более строгое определение постоянной систематической и случайной погрешностей.

Систематической постоянной погрешностью называется отклонение математического ожидания результатов наблюдений от истинного значения измеряемой величины:

$$\Theta = M[X] - Q, \quad (\text{VI.14})$$

а случайной погрешностью — разность между результатом единичного наблюдения и математическим ожиданием результатов:

$$\delta = X - M[X]. \quad (\text{VI.15})$$

В этих обозначениях истинное значение измеряемой величины составляет

$$Q = X - \Theta - \delta. \quad (\text{VI.16})$$

§ 47. МОМЕНТЫ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Функция распределения является самым универсальным способом описания поведения случайных погрешностей. Однако для определения функций распределения необходимо проведение весьма кропотливых научных исследований и обширных вычислительных работ. Поэтому к такому способу описания случайных погрешностей прибегают иногда при исследовании принципиально новых мер и измерительных приборов.

Значительно чаще бывает достаточно охарактеризовать случайные погрешности с помощью ограниченного числа специальных величин, называемых моментами.

Начальным моментом r -го порядка результатов наблюдений называется интеграл вида

$$\alpha_r[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r p_X(x) dx = M[X^r], \quad (\text{VI.17})$$

представляющий собой математическое ожидание степени X^r . Из выражения (VI.17) непосредственно следует, что первый начальный момент совпадает с математическим ожиданием результатов наблюдений:

$$\alpha_1[X] = m_X = M[X].$$

Центральным моментом r -го порядка результатов наблюдений называется интеграл вида

$$\mu_r[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X)^r p_X(x) dx = M[(X - m_X)^r], \quad (\text{VI.18})$$

представляющий собой математическое ожидание величины $(X - m_X)^r$, т. е. r -й степени случайной погрешности.

Вычислим первый центральный момент:

$$\begin{aligned} \mu_1[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X) p_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x) dx - m_X \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x) dx = \\ &= m_X - m_X = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, первый центральный момент результатов наблюдений тождественно равен нулю.

Аналогично строится система моментов для распределения случайных погрешностей. Важно отметить, что начальные и центральные моменты случайных погрешностей совпадают между собой и с центральными моментами результатов наблюдений:

$$\alpha_r[\delta] = \mu_r[\delta] = \mu_r[X],$$

поскольку математическое ожидание случайных погрешностей равно нулю.

Особое значение наряду с математическим ожиданием результатов наблюдений имеет второй центральный момент, называемый *дисперсией результатов наблюдений* и обозначаемый через $D[X]$:

$$\begin{aligned} D[X] &= D[\delta] = M[(X - m_x)^2] = M[\delta^2] = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p_x(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2 p_{\delta}(\delta) d\delta. \end{aligned} \quad (VI.19)$$

Дисперсия случайной погрешности равна дисперсии результатов наблюдений и является *характеристикой их рассеивания* относительно математического ожидания. Действительно, как видно из формулы (VI.19), дисперсия все более увеличивается с ростом элементов вероятности $p_{\delta}(\delta)d\delta$ появления больших значений случайной погрешности, т. е. увеличением рассеивания результатов наблюдений.

Если математическое ожидание результатов наблюдений можно рассматривать в механической интерпретации как абсциссу центра тяжести фигуры, заключенной между кривой распределения и осью Ox , то дисперсия является аналогом момента инерции этой фигуры относительно вертикальной оси, проходящей через центр тяжести.

Дисперсия [см. формулу (VI.19)] имеет размерность квадрата измеряемой величины, поэтому она не совсем удобна в качестве характеристики рассеивания. Значительно чаще в качестве последней используется положительное значение корня квадратного из дисперсии, называемое *средним квадратическим отклонением* результатов наблюдений:

$$\sigma_x = +\sqrt{D[X]}. \quad (VI.20)$$

Если нет сомнения относительно того, какая величина изменяется, то индекс у среднего квадратического отклонения будем опускать.

С помощью среднего квадратического отклонения можно оценить вероятность того, что при однократном наблюдении случайная погрешность по абсолютной величине не превзойдет некоторой наперед заданной величины ε , т. е. вероятность $P\{|\delta| < \varepsilon\}$.

Для этого запишем выражение для дисперсии случайной погрешности:

$$\sigma_x^2 = D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2 p_{\delta}(\delta) d\delta.$$

Если сузить пределы интегрирования, то правая часть равенства возрасти не может. Поэтому имеет место следующее неравенство:

$$\sigma_x^2 \geq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta^2 p_{\delta}(\delta) d\delta + \int_{+\varepsilon}^{\infty} \delta^2 p_{\delta}(\delta) d\delta.$$

При замене под знаком интеграла δ^2 на меньшую величину ε неравенство может только усиливаться:

$$\sigma_X^2 \geq \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varepsilon^2 p_\delta(\delta) d\delta + \int_{\varepsilon}^{\infty} \varepsilon^2 p_\delta(\delta) d\delta = \varepsilon^2 \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} p_\delta(\delta) d\delta + \int_{\varepsilon}^{\infty} p_\delta(\delta) d\delta \right].$$

Интегралы в квадратных скобках представляют собой, согласно формуле (VI.12), вероятности того, что случайная погрешность примет значения, лежащие в интервалах, определяемых пределами интегрирования:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &\geq \varepsilon^2 (P\{-\infty < \delta \leq -\varepsilon\} + P\{\varepsilon < \delta \leq +\infty\}) = \\ &= \varepsilon^2 (1 - P\{-\varepsilon < \delta \leq +\varepsilon\}) = \varepsilon^2 (1 - P\{|\delta| < \varepsilon\}). \end{aligned}$$

Отсюда получаем окончательно

$$P\{|\delta| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}; \quad P\{|\delta| > \varepsilon\} < \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2}. \quad (\text{VI.21})$$

Этот результат известен как *неравенство Чебышева*.

Полагая $\varepsilon = 3\sigma_X$, найдем вероятность того, что результат однократного наблюдения отличается от истинного значения на величину, большую утроенного среднего квадратического отклонения, т. е. вероятность того, что случайная погрешность окажется большей $3\sigma_X$

$$P\{|\delta| > 3\sigma_X\} < \frac{\sigma_X^2}{(3\sigma_X)^2} = \frac{1}{9} \approx 11\%.$$

Вероятность того, что погрешность измерения не превысит $3\sigma_X$, составит соответственно

$$P\{|\delta| < 3\sigma_X\} \geq 1 - \frac{\sigma_X^2}{(3\sigma_X)^2} \approx 89\%.$$

Неравенство Чебышева дает только нижнюю границу для вероятности $P\{|\delta| < \varepsilon\}$, меньше которой она не может быть ни при каком распределении. Обычно $P\{|\delta| < 3\sigma\}$ значительно больше 89%. Так, например, в случае нормального распределения погрешностей эта вероятность составляет 99,73%.

Математическое ожидание и дисперсия являются наиболее часто применяемыми моментами, поскольку они определяют наиболее важные черты распределения: положение центра распределения и степень его разбросанности. Для более подробного описания распределения используются моменты более высоких порядков.

Третий момент случайных погрешностей служит характеристикой асимметрии, или скошенности, распределения. В общем случае любой нечетный момент случайной погрешности характеризует асимметрию распределения. Действительно, если распределение обладает свойством симметрии, то все функции вида $\delta^s p_\delta(\delta)$, где $s=1, 3, 5, \dots$, являются нечетными функциями δ (рис. 16). Поэтому все нечетные моменты, являющиеся интегралами этих функций в бесконечных пределах, должны равняться нулю. Отличие этих моментов от нуля как раз и указывает на асимметрию распределения.

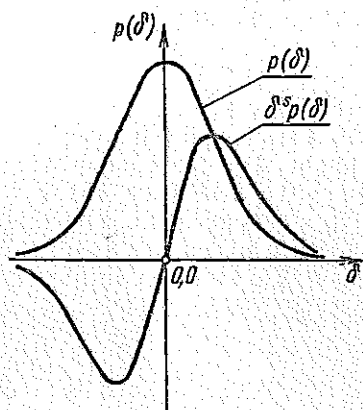


Рис. 16

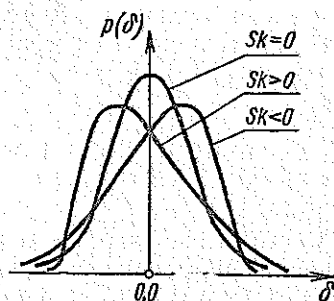


Рис. 17

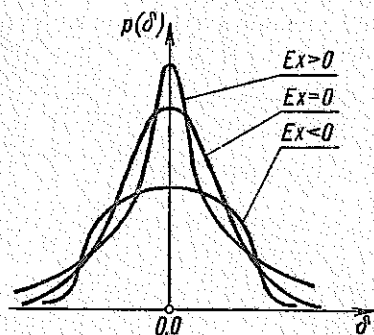


Рис. 18

Простейшим из нечетных моментов является третий момент $\mu_3[\delta]$. Чтобы получить безразмерную характеристику, третий момент делят на третью степень среднего квадратического отклонения и получают коэффициент асимметрии или просто асимметрию Sk распределения:

$$Sk = \frac{\mu_3[\delta]}{\sigma_x^3}. \quad (VI.22)$$

Для иллюстрации сказанного на рис. 17 приведены три кривые распределения случайных погрешностей с положительной, отрицательной и нулевой асимметрией.

Четвертый момент служит для характеристики плосковершинности или островершинности распределения случайных погрешностей. Эти свойства описываются с помощью *эксцесса* — безразмерной характеристики, определяемой выражением

$$Ex = \frac{\mu_4[\delta]}{\sigma_x^4} - 3. \quad (\text{VI.23})$$

Число 3 вычитают из отношения $\mu_4[\sigma]/\sigma_x^4$, потому что для широко распространенного нормального распределения погрешностей $\mu_4[\delta] = 3\sigma_x^4$. Таким образом, для нормального распределения эксцесс равен нулю, более плосковершинные распределения обладают отрицательным эксцессом, более островершинные — положительным (рис. 18).

§ 48. РАВНОМЕРНОЕ И НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Часто бывает заранее известно, что все возможные значения случайной погрешности средства измерений равновероятны и лежат в пределах некоторого интервала. Распределение таких случайных погрешностей называется *равномерным* (рис. 19).

Значения дифференциальной функции распределения равномерно распределенной случайной погрешности в интервале $[-\alpha; +\alpha]$ постоянны, а вне этого интервала равны нулю. Поэтому выражение

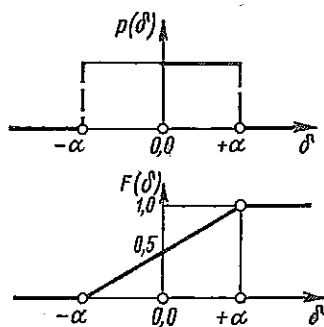


Рис. 19

для дифференциальной функции распределения случайной погрешности можно записать в виде

$$p_{\delta}(\delta) = \begin{cases} 0; & -\infty < \delta < -\alpha; \\ c; & -\alpha \leq \delta \leq +\alpha; \\ 0; & \alpha < \delta < +\infty. \end{cases} \quad (\text{VI.24})$$

Величину c находят из условия, что площадь, заключенная между кривой распределения и осью абсцисс, равна единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\delta}(\delta) d\delta = \int_{-\alpha}^{\alpha} c d\delta = 2\alpha c = 1; \quad c = \frac{1}{2\alpha}. \quad (\text{VI.25})$$

Уравнение для интегральной функции распределения получаем интегрированием дифференциальной функции распределения. До тех пор, пока $\delta < -\alpha$, интеграл равен нулю и $F_{\delta}(\delta) = 0$. В пределах интервала $[-\alpha; +\alpha]$

$$F_{\delta}(\delta) = \int_{-\infty}^{\delta} p_{\delta}(\delta) d\delta = \int_{-\alpha}^{\delta} c d\delta = \frac{1}{2\alpha}(\delta + \alpha).$$

Таким образом, интегральная функция распределения растет линейно со случайной погрешностью от $F_{\delta}(\delta) = 0$ при $\delta = -\alpha$ до $F_{\delta}(\delta) = 1$ при $\delta = +\alpha$. При прохождении абсциссы через нуль интегральная функция распределения уменьшается в два раза. Этого и следовало ожидать, поскольку равномерное распределение симметрично. При увеличении случайной погрешности сверх $\delta = +\alpha$ площадь под кривой распределения не меняется и интегральная функция распределения сохраняет постоянное значение, равное единице. Окончательное выражение для интегральной функции равномерного распределения следующее:

$$F_{\delta}(\delta) = \begin{cases} 0; & -\infty < \delta < -\alpha; \\ \frac{1}{2\alpha}(\delta + \alpha); & -\alpha \leq \delta \leq +\alpha; \\ 1; & +\alpha < \delta < \infty. \end{cases} \quad (\text{VI.26})$$

В качестве примера рассмотрим схему формирования случайных погрешностей при равномерном квантовании измеряемой величины по уровню. Измерению подлежит функция времени $x(t)$ (рис. 20, а).

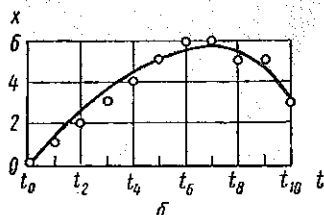
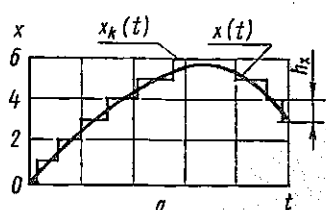


Рис. 20

При равномерном квантовании функции по уровню весь диапазон ее изменения подразделяется на некоторое число равноотстоящих уровней (на рисунке семь уровней, включая нулевой). В те моменты времени, когда измеряемая функция $x(t)$ принимает значение, соответствующее половине шага квантования, кванто-

ванная функция $x_h(t)$ изменяется скачком на величину, равную шагу квантования h_x (разность соседних уровней). В остальные моменты времени значения квантованной функции $x_h(t)$ постоянны.

Функцию измеряют в равноотстоящие интервалы времени $t_0; t_1; \dots; t_i; \dots$, когда фиксируется один из уровней квантования. В результате получается совокупность точек, изображенных на рис. 20, б и несущих в себе всю информацию об измеряемой функции. Погрешности квантования, равные разностям ординат этих точек и действительных значений измеряемой функции, очевидно, нигде не будут превышать $\frac{1}{2} h_x$. При достаточно малом шаге квантования распределение этих погрешностей можно считать равномерным в интервале $\left[-\frac{1}{2} h_x; +\frac{1}{2} h_x\right]$.

Определим числовые характеристики равномерного распределения.

Математическое ожидание случайной погрешности находим по формуле (VI.13):

$$M[\delta] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta p_{\delta}(\delta) d\delta = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2\alpha} \delta d\delta = \frac{1}{2\alpha} \cdot \frac{\delta^2}{2} \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2\alpha} [\alpha^2 - (-\alpha)^2] = 0.$$

Дисперсию случайной равномерно распределенной погрешности можно найти по формуле (VI.19):

$$D[\delta] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^2 p_{\delta}(\delta) d\delta = \int_{-\alpha}^{\alpha} \delta^2 \frac{1}{2\alpha} d\delta = \frac{1}{6\alpha} \delta^3 \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{\alpha^2}{3}; \quad (\text{VI.27})$$

$$\sigma_{\delta} = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}. \quad (\text{VI.28})$$

В силу симметрии распределения относительно математического ожидания коэффициент асимметрии должен равняться нулю:

$$Sk = \frac{\mu_3}{\sigma_{\delta}^3} = \frac{1}{\sigma_{\delta}^3} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2\alpha} \delta^3 d\delta = \frac{1}{8\alpha\sigma_{\delta}^3} \delta^4 \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (\text{VI.29})$$

Для определения эксцесса найдем вначале четвертый момент случайной погрешности:

$$\mu_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^4 p_{\delta}(\delta) d\delta = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \delta^4 d\delta = \frac{1}{10\alpha} \delta^5 \Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{\alpha^4}{5},$$

поэтому

$$Ex = \frac{\mu_4}{\sigma_{\delta}^4} - 3 = \frac{\alpha^4 \cdot 9}{5 \cdot \alpha^4} - 3 = -1,2. \quad (\text{VI.30})$$

В заключение найдем вероятность попадания случайной погрешности в заданный интервал $\{\delta_1, \delta_2\}$, равный заштрихованной площади на рис. 21;

$$P\{\delta_1 < \delta \leq \delta_2\} = \int_{\delta_1}^{\delta_2} p_\delta(\delta) d\delta = \begin{cases} 0; & \delta_1 < -\alpha; \delta_2 < -\alpha; \\ \frac{1}{2\alpha}(\delta_2 + \alpha); & \delta_1 < -\alpha; \delta_2 < +\alpha; \\ \frac{1}{2\alpha}(\delta_2 - \delta_1); & \delta_1 > -\alpha; \delta_2 < +\alpha; \\ \frac{1}{2\alpha}(\alpha - \delta_1); & \delta_1 > -\alpha; \delta_2 > +\alpha; \\ 0; & \delta_1 > +\alpha; \delta_2 > +\alpha. \end{cases} \quad (\text{VI.31})$$

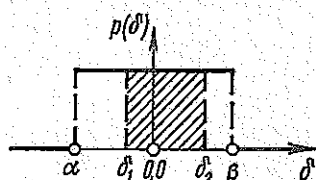


Рис. 21

В том случае, если интервал $\{\delta_1; \delta_2\}$ полностью укладывается в интервале $[-\alpha; \alpha]$, в котором распределены возможные значения случайных погрешностей, искомая вероятность равна отношению длин этих интервалов. Если же интервал $\{\delta_1; \delta_2\}$ находится за границами интервала распределения $[-\alpha; +\alpha]$, то эта вероятность равна нулю.

Наиболее часто при изучении случайных погрешностей встречается распределение, близкое нормальному, дифференциальная функция которого выражается уравнением

$$p_\delta(\delta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\delta^2}{2\sigma^2}}. \quad (\text{VI.32})$$

Для дифференциальной функции распределения результатов наблюдений это уравнение приобретает более общий вид

$$p_X(x) = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x - m_X)^2}{2\sigma_X^2}}, \quad (\text{VI.33})$$

где m_X — математическое ожидание; σ_X — среднее квадратическое отклонение результатов наблюдений.

На рис. 22 изображены кривые нормального распределения случайных погрешностей для различных значений среднего квадратического отклонения ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$). Из рисунка видно, что по мере увеличения среднего квадратического отклонения распреде-

ление все более и более расплывается, вероятность появления больших значений погрешностей возрастает, а вероятность меньших погрешностей сокращается, т. е. увеличивается рассеивание результатов наблюдений.

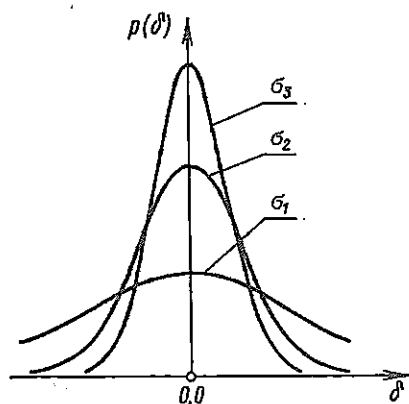


Рис. 22

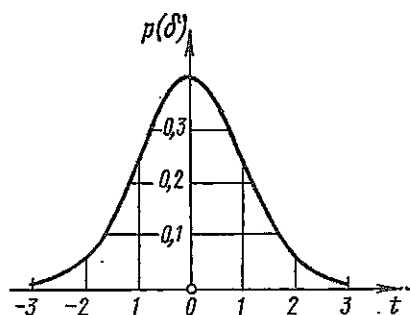


Рис. 23

Вычислим вероятность попадания результата наблюдения в некоторый заданный интервал $(x_1; x_2]$:

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p_X(x) dx = \frac{1}{\sigma_X \sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-m_X)^2}{2\sigma_X^2}} dx.$$

Заменим переменные:

$$\frac{x - m_X}{\sigma_X} = t; \quad \frac{x_1 - m_X}{\sigma_X} = t_1; \quad \frac{x_2 - m_X}{\sigma_X} = t_2, \quad (\text{VI.34})$$

после чего получим следующее выражение для искомой вероятности:

$$\begin{aligned} P\{x_1 < X \leq x_2\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{t_2} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt - \int_{-\infty}^{t_1} e^{-\frac{1}{2} t^2} dt \right]. \end{aligned} \quad (\text{VI.35})$$

Интегралы, стоящие в квадратных скобках, не выражаются в элементарных функциях, поэтому их вычисляют с помощью так называемого нормированного нормального распределения с дифференциальной функцией

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad (\text{VI.36})$$

график которого изображен на рис. 23. В Приложении (табл. 5 и 6) приведены значения дифференциальной функции нормированного нормального распределения, а также интегральной функции этого распределения, определяемой как

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt. \quad (\text{VI.37})$$

С помощью функции $\Phi(z)$ вероятность, определенную по формуле (VI.35), находят как

$$P\{x_1 < X \leq x_2\} = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = \Phi\left(\frac{x_2 - Q}{\sigma_X}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - Q}{\sigma_X}\right). \quad (\text{VI.38})$$

При использовании формулы (VI.38) следует иметь в виду тождество

$$\Phi(z) \equiv 1 - \Phi(-z), \quad (\text{VI.39})$$

вытекающее непосредственно из определения функции $\Phi(z)$.

Широкое распространение нормального распределения погрешностей в практике измерений объясняется *центральной предельной теоремой* теории вероятностей, являющейся одной из самых замечательных математических теорем, в разработке которой принимали участие многие крупнейшие математики — А. де Муавр, Р. де Лаплас, К. Ф. Гаусс, П. Л. Чебышев и А. М. Ляпунов.

Центральная предельная теорема утверждает, что распределение случайных погрешностей будет близко к нормальному всякий раз, когда результаты наблюдения формируются под влиянием большого числа независимо действующих факторов, каждый из которых оказывает лишь незначительное действие по сравнению с суммарным действием всех остальных.

§ 49. ТОЧЕЧНЫЕ ОЦЕНКИ ИСТИННОГО ЗНАЧЕНИЯ ИЗМЕРЯЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ И СРЕДНЕГО КВАДРАТИЧЕСКОГО ОТКЛОНЕНИЯ НА ОСНОВАНИИ ОГРАНИЧЕННОГО РЯДА НАБЛЮДЕНИЙ

Мы подошли к решению вопроса о том, как на основании полученной в эксперименте группы результатов наблюдений оценить истинное значение, т. е. найти результат измерений, и как оценить его точность, т. е. меру его приближения к истинному значению.

Эта задача является частным случаем статистической задачи нахождения *оценок параметров* функции распределения случайной величины на основании *выборки* — ряда значений, принимаемых этой величиной в n независимых опытах.

Оценку $\hat{a}$ параметра a назовем точечной, если она выражается одним числом. Любая точечная оценка, вычисленная на основании опытных данных, является их функцией и поэтому сама должна представлять собой случайную величину с распределением, зависящим от распределения исходной случайной величины, в том числе и от самого оцениваемого параметра, и от числа опытов n .

К точечным оценкам предъявляется ряд требований, определяющих их пригодность для описания самих параметров.

1. Оценка называется *состоятельной*, если при увеличении числа наблюдений она приближается (сходится по вероятности) к значению оцениваемого параметра.

2. Оценка называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру.

3. Оценка называется *эффективной*, если ее дисперсия меньше дисперсии любой другой оценки данного параметра.

На практике не всегда удается удовлетворить одновременно все эти требования, однако выбору оценки должен предшествовать ее критический анализ со всех перечисленных выше точек зрения.

Получаемая в результате многократных наблюдений информация об истинном значении измеряемой величины и рассеивании результатов наблюдений состоит из ряда результатов *отдельных наблюдений* (ряда наблюдений) $X_1; X_2; \dots; X_n$, где n — число наблюдений. Их можно рассматривать как n независимых случайных величин с одним и тем же распределением, совпадающим с распределением $F_X(x)$. Поэтому

$$M[X_i] = M[X]; \quad D[X_i] = D[X]; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В этих условиях в качестве *оценки истинного значения измеряемой величины естественно принять среднее арифметическое полученных результатов наблюдений*:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i. \quad (VI.40)$$

Строго говоря, среднее арифметическое представляет собой лишь оценку математического ожидания результата измерения и может стать оценкой истинного значения измеряемой величины лишь после исключения систематических погрешностей.

Будучи вычисленным на основе ограниченного числа опытов, среднее арифметическое само является случайной величиной. Вычислим его математическое ожидание:

$$M[\bar{X}] = M\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X_i] = \\ = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X] = M[X]. \quad (\text{VI.41})$$

Это значит, что среднее арифметическое является *несмещенной* оценкой истинного значения. Однако несмещенными будут и все другие оценки, являющиеся линейными функциями результатов наблюдений:

$$\bar{X}' = \sum_{i=1}^n a_i X_i,$$

если $\sum a_i = 1$. Покажем, что среди всех определенных таким образом оценок среднее арифметическое имеет наименьшую дисперсию. Для этого вычислим дисперсию $\bar{X}'$:

$$D[\bar{X}'] = D\left[\sum_{i=1}^n a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^n a_i^2 D[X_i] = D[X] \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Но квадратичная форма $\sum a_i^2$ достигает минимума, если все a_i одинаковы и равны $\frac{1}{n}$. Тогда из оценки $\bar{X}'$ мы получаем среднее арифметическое $\bar{X}$, имеющее таким образом дисперсию

$$D[\bar{X}] = D[X] \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n} D[X]. \quad (\text{VI.42})$$

которая меньше дисперсии любой другой линейной оценки. При некоторых определенных видах распределения результатов наблюдений, например при нормальном распределении, среднее арифметическое является кроме того и эффективной оценкой истинного значения.

Таким образом, дисперсия среднего арифметического оказывается в n раз меньше дисперсии результатов наблюдений, или в терминах среднего квадратического отклонения:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}, \quad (\text{VI.43})$$

т. е. среднее квадратическое отклонение среднего арифметического в $\sqrt{n}$ раз меньше среднего квадратического отклонения результата наблюдений.

По мере увеличения числа наблюдений $\sigma_{\bar{X}}$ стремится к нулю. Это означает, что среднее арифметическое ряда наблюдений сходится по вероятности к математическому ожиданию и является его *состоятельной* оценкой.

Из этого, конечно, отнюдь не следует, что среднее арифметиче-

ское ближе к истинному значению, чем результат каждого отдельного наблюдения. Напротив, некоторые из результатов наблюдений могут быть ближе к Q , но, к сожалению, мы не можем выбрать эти результаты из числа других результатов ряда. Именно поэтому приходится прибегать к определению среднего арифметического.

На рис. 24 представлен график, на котором точками, соединенными пунктирными линиями, обозначены результаты ряда измерений ускорения свободного падения, полученные во ВНИИМ.

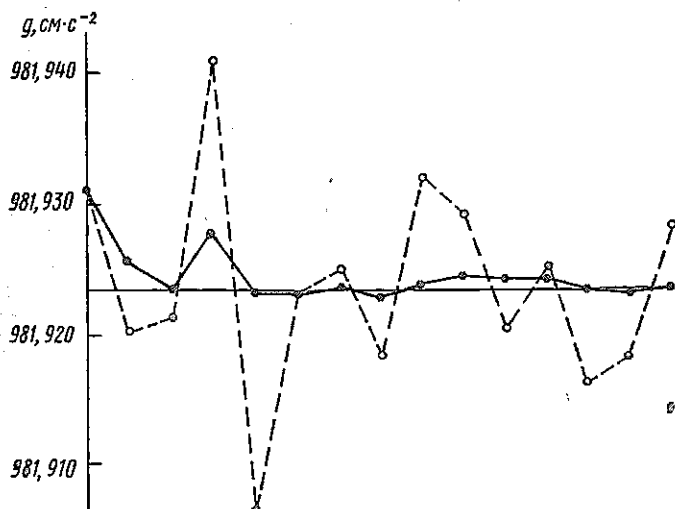


Рис. 24

На том же рисунке точками, соединенными сплошной линией, изображены средние арифметические для двух, трех и так далее до пятнадцати результатов последовательных наблюдений. Среднее из пятнадцати наблюдений $\bar{X}=9,81923 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$, т. е. ордината последней точки служит оценкой истинного значения ускорения свободного падения.

Из графика видно, что если результаты отдельных наблюдений значительно разбросаны относительно среднего арифметического, то разброс отдельных средних арифметических значительно меньше и быстро уменьшается по мере увеличения числа наблюдений. Интересно отметить, что результат шестого по счету наблюдения совпадает с окончательным средним арифметическим, но узнать об этом мы смогли только после обработки всего ряда наблюдений. Поэтому шестой результат имеет такую же познавательную ценность, как четвертый или пятый, наиболее удаленные от среднего арифметического ряда.

Логическим следствием оценки истинного значения измеряемой величины средним арифметическим ряда наблюдений является

оценка фактических значений случайных погрешностей случайными отклонениями результатов наблюдений от среднего арифметического:

$$v_i = X_i - \bar{X}. \quad (\text{VI.44})$$

По мере увеличения числа наблюдений распределение случайных отклонений результатов наблюдений асимптотически сходится к распределению случайных погрешностей.

В качестве точечной оценки дисперсии случайной погрешности естественно выбрать величину

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Эта оценка *состоятельна*, однако она немного смещена, поскольку ее математическое ожидание составляет

$$M [\hat{\sigma}_x^2] = \frac{n-1}{n} \sigma_x^2.$$

Поэтому точечную оценку дисперсии принято определять как

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad (\text{VI.45})$$

а оценку среднего квадратического отклонения результатов наблюдений как

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}. \quad (\text{VI.46})$$

Эта оценка характеризует сходимость результатов отдельных наблюдений, т. е. степень их концентрации относительно среднего арифметического. Последнее, являясь случайной величиной, имеет дисперсию, в n раз меньшую дисперсии случайной погрешности [см. формулу (VI.42)]. Поэтому в качестве точечной оценки дисперсии среднего арифметического принимается выражение

$$s_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{n} s_x^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n v_i^2, \quad (\text{VI.47})$$

где s_x — среднее квадратическое отклонение результата наблюдений.

Полученные оценки [см. формулы (VI.40) и (VI.47)] позволяют записать итог измерений в виде

$$Q = \bar{X}; \quad S_{\bar{X}} = \dots; \quad n = \dots, \quad (\text{VI.48})$$

что позволяет уже сделать некоторые выводы о точности проведенных измерений.

§ 50. ОЦЕНКА С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРВАЛОВ

Смысл оценки параметров с помощью интервалов заключается в нахождении интервалов, называемых доверительными, между границами которых с определенными вероятностями (доверительными) находятся истинные значения оцениваемых параметров.

Вначале остановимся на определении доверительного интервала для среднего арифметического значения измеряемой величины. Предположим, что распределение результатов наблюдений нормально и известна дисперсия σ_X^2 . Тогда, полагая в уравнении (VI.34) $t_1 = -t_2 = t_p$, найдем вероятность попадания результата наблюдений в интервал $(m_X - t_p \sigma_X; m_X + t_p \sigma_X)$. Согласно формулам (VI.38) и (VI.39)

$$P \{m_X - t_p \sigma_X < X \leq m_X + t_p \sigma_X\} = \Phi(t_p) - \Phi(-t_p) = 2\Phi(t_p) - 1$$

Но

$$P \{m_X - t_p \sigma_X < X \leq m_X + t_p \sigma_X\} = P \{X - t_p \sigma_X \leq m_X < X + t_p \sigma_X\}$$

и, если систематические погрешности исключены ($m_X = Q$),

$$P \{X - t_p \sigma_X \leq Q < X + t_p \sigma_X\} = 2\Phi(t_p) - 1. \quad (\text{VI.49})$$

Это означает, что истинное значение Q измеряемой величины с доверительной вероятностью $P = 2\Phi(t_p) - 1$ находится между границами доверительного интервала $[X - t_p \sigma_X; X + t_p \sigma_X]$.

Половина длины доверительного интервала $t_p \sigma_X$ называется доверительной границей случайного отклонения результатов наблюдений, соответствующей доверительной вероятности P . Для определения доверительной границы (при выполнении перечисленных условий) задаются доверительной вероятностью, например $P = 0,95$ или $P = 0,995$, и по формуле

$$2\Phi(t_p) - 1 = P;$$

$$\Phi(t_p) = \frac{1+P}{2} \quad (\text{VI.50})$$

определяют соответствующее значение $\Phi(t_p)$ интегральной функции нормированного нормального распределения. Затем по данным табл. 7 Приложения находят значение коэффициента t_p и вычисляют доверительное отклонение $t_p \sigma_X$.

Проведение многократных наблюдений позволяет значительно сократить доверительный интервал. Действительно, если результаты наблюдений X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) распределены нормально, то нормально распределены и величины $\frac{1}{n} X_i$, а значит и среднее арифметическое $\bar{X}$, являющееся их суммой. Поэтому имеет место равенство

$$P \{\bar{X} - t_p \sigma_{\bar{X}} \leq Q < \bar{X} + t_p \sigma_{\bar{X}}\} =$$

$$= P \left\{ \bar{X} - t_p \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \leq Q < \bar{X} + t_p \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \right\} = 2\Phi(t_p) - 1. \quad (\text{VI.51})$$

где t_p определяется по-прежнему формулой (VI.50) по заданной доверительной вероятности P .

Полученный доверительный интервал, построенный с помощью среднего арифметического результатов n независимых повторных наблюдений, в $\sqrt{n}$ раз короче интервала, вычисленного по результату одного наблюдения, хотя доверительная вероятность для них одинакова. Это говорит о том, что сходимость измерений растет пропорционально корню квадратному из числа наблюдений.

Половина длины нового доверительного интервала

$$\delta_p = t_p \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \quad (\text{VI.52})$$

называется *доверительной границей погрешности результата измерений*, а итог измерений записывается в виде

$$Q = \bar{X} \pm \delta_p; \quad P = \dots \% \quad (\text{VI.53})$$

Теперь рассмотрим случай, когда распределение результатов наблюдений нормально, но их дисперсия неизвестна. В этих условиях пользуются отношением

$$t = \frac{\bar{X} - M[X]}{s_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - Q}{s_{\bar{X}}} = \sqrt{n} \frac{\bar{X} - Q}{s_x}, \quad (\text{VI.54})$$

называемым дробью Стьюдента. Входящие в нее величины $\bar{X}$ и s_x вычисляют на основании опытных данных; они представляют собой точечные оценки математического ожидания [см. формулу (VI.40)] и среднего квадратического отклонения результатов наблюдений [(см. формулу (VI.46))].

Плотность распределения этой дроби, впервые предсказанного В. С. Госсетом, писавшим под псевдонимом Стьюдент, и впоследствии доказанного Р. А. Фишером, который связал его с именем Стьюдента, выражается следующим уравнением:

$$S(t; k) = \frac{\left(\frac{k+1}{2}\right)!}{\sqrt{\pi k} \left(\frac{k}{2}\right)!} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad (\text{VI.55})$$

где $S(t; k)$ — плотность распределения Стьюдента. Величина k называется числом степеней свободы и равна $n-1$.

Вероятность того, что дробь Стьюдента в результате выполненных наблюдений примет некоторое значение в интервале $(-t_p, +t_p)$, согласно выражению (VI.17), вычисляется по формуле

$$P \{-t_p < t \leq +t_p\} = \int_{-t_p}^{+t_p} S(t; k) dt,$$

или, поскольку $S(t; k)$ является четной функцией аргумента, t ,

$$P\{-t_p < t \leq +t_p\} = 2 \int_0^{t_p} S(t; k) dt,$$

Подставив вместо дроби Стьюдента t ее выражение через $\bar{X}$, Q и $s_{\bar{X}}$, получим окончательно

$$\begin{aligned} P\left\{-t_p < \frac{\bar{X}-Q}{s_{\bar{X}}} \leq t_p\right\} &= P\{|\bar{X}-Q| < t_p s_{\bar{X}}\} = \\ &= 2 \int_0^{t_p} S(t; k) dt. \end{aligned} \quad (\text{VI.56})$$

Величины t_p , вычисленные по формулам (VI.55) и (VI.56), были табулированы Р. А. Фишером для различных значений доверительной вероятности P в пределах 0,10—0,99 при $k=n-1=1, 2, \dots, 30$. В Приложении приведены значения t_p для некоторых, наиболее часто употребляемых доверительных вероятностей P (табл. 8), а также вероятностей появления погрешностей, по абсолютной величине не превышающих $t_p s_{\bar{X}}$ для $t_p=2; 2,5; 3$ и $3,5$ (табл. 9).

Таким образом, с помощью распределения Стьюдента по формуле (VI.56) может быть найдена вероятность того, что отклонение среднего арифметического от истинного значения измеряемой величины не превышает $\delta_p = t_p s_{\bar{X}}$, например $2s_{\bar{X}}$, $3s_{\bar{X}}$ и т. д.

Итог измерений записывается в виде

$$Q = \bar{X} \pm \delta_p; \quad P = \dots\% \quad (\text{VI.57})$$

Пример. По результатам пяти наблюдений была найдена длина стержня. Итог измерений составляет $L=15,785$ мм, $s_{\bar{X}}=0,005$ мм, причем существуют достаточно обоснованные предположения о том, что распределение результатов наблюдений было нормальным. Требуется оценить вероятность того, что истинное значение длины стержня отличается от среднего арифметического из пяти наблюдений не больше чем на 0,01 мм.

Из условия задачи следует, что имеются все основания для применения распределения Стьюдента.

Вычисляем значение дроби Стьюдента:

$$t_p = \frac{0,010}{s_{\bar{X}}} = \frac{0,010}{0,005} = 2,$$

и число степеней свободы:

$$k = n-1 = 5-1 = 4.$$

По данным табл. 9 Приложения находим значение доверительной вероятности для $t_p=2$ и $k=4$:

$$P\{|\bar{X}-Q| < 0,010\} = P\{|\bar{X}-Q| < 2s_{\bar{X}}\} = 88,38\%.$$

Для $t_p=3$ эта вероятность составляет

$$P\{|\bar{X} - Q| < 3s_{\bar{X}}\} = P\{|\bar{X} - Q| < 0,015\} = 96\%,$$

т. е. несколько меньше 99,73%, как и при нормальном распределении.

Итог измерений удобно записать в виде

$$L = 15,785 \pm 0,010 \text{ мм}; P = 88,38\%.$$

Для $t_p=1$ доверительная вероятность составляет приблизительно 62%, поэтому итог измерений можно представить также в виде

$$L = 15,785 \pm 0,005 \text{ мм}; P = 62\%$$

или

$$L = 15,785 \pm 0,015 \text{ мм}; P = 96\%.$$

Пример. В условиях предыдущей задачи найти доверительную границу погрешности результата измерений для доверительной вероятности $P = 99,0\%$. По данным табл. 8 Приложения при $k=4$ находим $t_p=4,604$, и, следовательно, доверительная граница составляет

$$\delta_{99,0\%} = t_{99,0\%} s_{\bar{X}} = 4,604 \cdot 0,005 = 0,023 \text{ мм}.$$

Итог измерений

$$L = 15,785 \pm 0,023 \text{ мм}; P = 99,0\%.$$

При $n \rightarrow \infty$, практически уже при $n=20-30$, распределение Стьюдента переходит в нормальное распределение и формула (VI.56) принимает вид

$$P\{|\bar{X} - Q| < t_p s_{\bar{X}}\} = 2\Phi(t_p) - 1,$$

где $\Phi(t_p)$ — интегральная функция нормированного нормального распределения.

В тех случаях, когда распределение случайных погрешностей не является нормальным, все же часто пользуются распределением Стьюдента с приближением, степень которого остается неизвестной.

Кроме того, на основании центральной предельной теоремы теории вероятностей можно утверждать, что при достаточно большом числе наблюдений распределение среднего арифметического как суммы случайных величин $\frac{1}{n} X_i$ будет сколь угодно близким к нормальному. Тогда, заменяя дисперсию $\sigma_{\bar{X}}^2$ ее точечной оценкой [см. формулу (VI.45)], можно для оценки доверительной границы погрешности результата воспользоваться равенством (VI.51). Число наблюдений n , при котором это становится возможным, зависит, конечно, от распределения случайных погрешностей.

Формула (VI.53) показывает, что итог измерения не есть одно определенное число. В результате измерений мы получаем лишь

«полосу значений измеряемой величины с несколько расплывчатыми границами». «Смысл итога измерений, например $L=20,00 \pm \pm 0,05$, заключается не в том, что $L=20,00$, как для простоты считают и как это чаще всего приходится с неизбежностью принимать для последующего применения и расчетов; смысл в том, что истинное значение лежит где-то в границах от 19,95 до 20,05 и вовсе необязательно, чтобы оно лежало в середине, а не где-нибудь с краю. К тому же нахождение внутри границ имеет некоторую вероятность, меньшую, чем единица; и, следовательно, нахождение вне границ не исключено, хотя и может быть очень маловероятным»*.

Теперь найдем доверительные интервалы для дисперсии и среднего квадратического отклонения результатов наблюдений.

Если распределение результатов наблюдений нормально, то отношение

$$\chi_k^2 = \chi_{n-1}^2 = \frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_x^2} \quad (\text{VI.58})$$

имеет так называемое χ^2 (хи-квадрат) распределение Пирсона с $k=n-1$ степенями свободы. Его дифференциальная функция распределения описывается формулой

$$p_{\chi_k^2}(\xi) = \frac{1}{\left(\frac{k}{2}-1\right)! 2^{\frac{1}{2}k}} (\xi)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}\xi}, \quad (\text{VI.59})$$

где $k=n-1$ — число степеней свободы распределения, на единицу меньше числа измерений, на основании которого определяется оценка s_x^2 дисперсии результатов. Кривые плотности χ^2 -распределения при различных значениях k , вычисленные по формуле (VI.59), представлены на рис. 25.

Поскольку отношение χ_k^2 существенно положительно, то кривая его интегральной функции распределения начинается из нуля при $\chi_k^2=0$ и имеет вид:

$$F(\chi_{kp}^2) = P\left\{\frac{(n-1)s_x^2}{\sigma_x^2} \leq \chi_{kp}^2\right\} = \frac{1}{\left(\frac{k}{2}-1\right)! 2^{\frac{1}{2}k}} \int_0^{\chi_{kp}^2} \xi^{\frac{1}{2}k-1} e^{-\frac{1}{2}\xi} d\xi. \quad (\text{VI.60})$$

Значения χ_{kp}^2 , соответствующие различным вероятностям P того, что отношение (VI.58) в данном опыте будет меньше χ_{kp}^2 ,

* П. М. Тиходеев. «Очерки об исходных измерениях». М., Машгиз, 1954.

представлены в табл. 10 приложения для различных вероятностей P и чисел k степеней свободы.

Пользуясь этой таблицей, можно найти доверительный интервал для оценки дисперсии результатов наблюдений при заданной доверительной вероятности. Этот интервал строится таким образом, чтобы вероятность выхода дисперсии за его границы не превышала некоторой малой величины q , причем вероятности выхода за обе границы интервала были бы равны между собой и составляли соответственно $\frac{1}{2} q$ (рис. 26). Границы $\chi^2_{k; \frac{1}{2} q}$ и $\chi^2_{k; 1 - \frac{1}{2} q}$ такого доверительного интервала находят из равенства

$$F\left(\chi^2_{k; \frac{1}{2} q}\right) = \frac{1}{2} q, \quad F\left(\chi^2_{k; 1 - \frac{1}{2} q}\right) = 1 - \frac{1}{2} q. \quad (\text{VI.61})$$

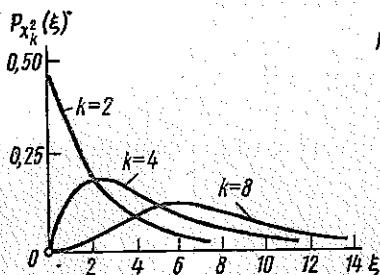


Рис. 25

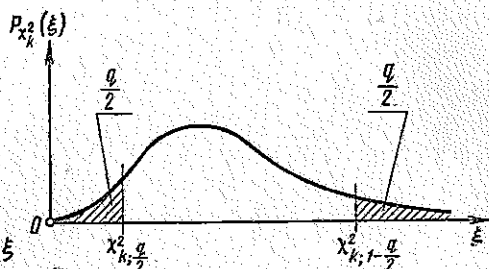


Рис. 26

Теперь, зная границы доверительного интервала для отношения χ^2_k , построим доверительный интервал для дисперсии:

$$\begin{aligned} P\left\{\chi^2_{k; \frac{1}{2} q} < \frac{(n-1)s_X^2}{\sigma_X^2} \leq \chi^2_{k; 1 - \frac{1}{2} q}\right\} &= \\ &= P\left\{\frac{1}{\chi^2_{k; \frac{1}{2} q}} > \frac{\sigma_X^2}{(n-1)s_X^2} \geq \frac{1}{\chi^2_{k; 1 - \frac{1}{2} q}}\right\} = \\ &= P\left\{\frac{(n-1)s_X^2}{\chi^2_{k; \frac{1}{2} q}} > \sigma_X^2 \geq \frac{(n-1)s_X^2}{\chi^2_{k; 1 - \frac{1}{2} q}}\right\} = 1 - q. \end{aligned} \quad (\text{VI.62})$$

И соответственно

$$P\left\{\frac{\sqrt{n-1} s_X}{\chi_{k; \frac{1}{2} q}} > \sigma_X \geq \frac{\sqrt{n-1} s_X}{\chi_{k; 1 - \frac{1}{2} q}}\right\} = 1 - q. \quad (\text{VI.62}')$$

Полученное равенство означает, что с вероятностью $\alpha=1-q$ истинное значение σ_x среднего квадратического отклонения результатов наблюдений лежит в интервале $(s_{x_1}; s_{x_2}]$, границы которого равны

$$s_{x_1} = \frac{\sqrt{n-1} s_x}{\chi_{k; \frac{1}{2} q}}; \quad s_{x_2} = \frac{\sqrt{n-1} s_x}{\chi_{k; 1 - \frac{1}{2} q}}. \quad (\text{VI.63})$$

Пример. Даны результаты двадцати измерений длины l_i мм, детали:

18,305	18,306	18,306	18,309
18,308	18,309	18,313	18,308
18,312	18,310	18,305	18,307
18,309	18,303	18,307	18,309
18,304	18,308	18,308	18,310

В качестве оценки математического ожидания длины детали принимаем ее среднее арифметическое

$$\bar{l} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} l_i = 10,3078 \text{ мм.}$$

Точечная оценка среднего квадратического отклонения результатов наблюдений составляет:

$$s_l = \sqrt{\frac{1}{20-1} \sum_{i=1}^{20} (l_i - \bar{l})^2} = 0,0025 \text{ мм.}$$

Приняв уровень доверительной вероятности $\alpha=1-q=90\% = 0,90$, находим для числа степеней свободы $k=n-1=20-1=19$ в табл. 10 Приложения:

$$\chi_{k; \frac{1}{2} q}^2 = \chi_{19; 0,05}^2 = 10,117; \quad \chi_{19; 0,05} = 3,18;$$

$$\chi_{k; 1 - \frac{1}{2} q}^2 = \chi_{19; 0,95}^2 = 30,144; \quad \chi_{19; 0,95} = 5,49.$$

Границы доверительного интервала для среднего квадратического отклонения результатов наблюдений находим по формуле (VI.63):

$$s_{l_1} = \frac{\sqrt{20-1} \cdot 0,0025}{3,18} = 0,0034 \text{ мм;}$$

$$s_{l_2} = \frac{\sqrt{20-1} \cdot 0,0025}{5,49} = 0,0020 \text{ мм.}$$

Полученные результаты говорят о том, что истинное значение среднего квадратического отклонения результатов наблюдений с вероятностью 90% лежит в интервале 0,0020—0,0034 мм.

В табл. 10 Приложения приведены значения χ_k^2 только при числах степеней свободы от 1 до 30. При $k > 30$ можно пользоваться приближенной формулой

$$\chi_{kp} = \sqrt{k - \frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} t_p,$$

где t_p определяется из условия $\Phi(t_p) = P$ по табл. 7 Приложения, в которой помещены значения интегральной функции нормированного нормального распределения.

Тогда границы доверительного интервала для среднего квадратического отклонения результатов наблюдений при доверительной вероятности $\alpha = 1 - q$ вычисляются по формулам (VI.63) при значениях χ_k , равных

$$\begin{cases} \chi_{k; \frac{1}{2}q} = \sqrt{k - \frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} t_{\frac{1}{2}q}, \\ \chi_{k; 1 - \frac{1}{2}q} = \sqrt{k - \frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} t_{1 - \frac{1}{2}q}. \end{cases} \quad (\text{VI.64})$$

Так, если в условиях предыдущей задачи среднее квадратическое отклонение определено на основании $n = 42$ измерений, то для $\alpha = 1 - q = 0,90 = 90\%$ из табл. 7 Приложения находим:

$$t_{\frac{1}{2}q} = t_{0,05} = -1,6449; \quad t_{1 - \frac{1}{2}q} = t_{0,95} = +1,6449.$$

Величины χ_k при $k = n - 1 = 41$ составляют:

$$\begin{aligned} \chi_{41; 0,05} &= \sqrt{41 - \frac{1}{2}} + \frac{1,6449}{\sqrt{2}} = 5,2; \\ \chi_{41; 0,95} &= \sqrt{41 - \frac{1}{2}} + \frac{1,6449}{\sqrt{2}} = 7,52; \end{aligned}$$

границы доверительного интервала равны:

$$\begin{aligned} s_{l_1} &= \frac{\sqrt{42 - 1} \cdot 0,0025}{5,2} = 0,0031 \text{ мм}; \\ s_{l_2} &= \frac{\sqrt{42 - 1} \cdot 0,0025}{7,52} = 0,0021 \text{ мм}. \end{aligned}$$

§ 51. ПРОВЕРКА НОРМАЛЬНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ НАБЛЮДЕНИЙ

В предыдущих разделах было показано, что сходимость результатов наблюдений можно оценить наиболее полно, если их

распределение является нормальным. Поэтому исключительно важную роль при обработке результатов наблюдений играет *проверка нормальности распределения*.

Эта задача представляет собой частный случай более общей проблемы, заключающейся в подборе теоретической функции распределения, в некотором смысле наилучшим образом согласующейся с опытными данными.

При большом числе результатов наблюдений ($n > 40$) данная задача решается в следующем порядке.

Весь диапазон полученных результатов наблюдений $X_{\max} - X_{\min}$ разделяют на r интервалов шириной ΔX_i ($i=1, 2, \dots, r$) и подсчитывают частоты m_i , равные числу результатов, лежащих в каждом i -м интервале, т. е. меньших или равных его правой и больших левой границы.

Отношения

$$P_i^* = \frac{m_i}{n}, \quad (\text{VI.65})$$

где n — общее число наблюдений, называются *частотами* и представляют собой статистические оценки вероятностей попадания результата наблюдений в i -й интервал. Распределение частот по интервалам образует *статистическое распределение* результатов наблюдений.

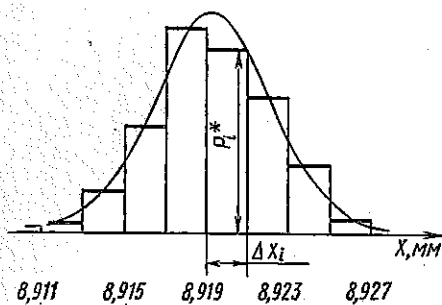


Рис. 27

Если теперь разделить частоту на длину интервала, то получим величины

$$p_i^* = \frac{1}{\Delta X_i} P_i^* = \frac{m_i}{n \Delta X_i}, \quad (\text{VI.66})$$

являющиеся оценками средней плотности распределения в интервале ΔX_i .

Отложим вдоль оси результатов наблюдений (рис. 27) интервалы ΔX_i в порядке возрастания индекса i и на каждом интервале построим прямоугольник с высотой, равной p_i^* . Полученный график называется *гистограммой статистического распределения*. Площадь всех прямоугольников равна единице:

$$\sum_{i=1}^r p_i^* \Delta X_i = \sum_{i=1}^r \frac{m_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r m_i = 1.$$

При увеличении числа наблюдений число интервалов можно увеличить. Сами интервалы уменьшаются, и гистограмма все больше приближается к плавной кривой, ограничивающей единичную площадь, — к графику плотности распределения результатов наблюдений.

При построении гистограмм рекомендуется пользоваться следующими правилами:

1. Число r интервалов выбирается в зависимости от числа наблюдений согласно следующим рекомендациям ВНИИМ:

n	r
40—100	7—9
100—500	8—12
500—1000	10—16
1000—10 000	12—22

2. Длины интервалов удобнее выбирать одинаковыми. Однако если распределение крайне неравномерно, то в области максимальной концентрации результатов наблюдений следует выбирать более узкие интервалы.

3. Масштабы по осям гистограммы должны быть такими, чтобы отношение ее высоты к основанию составляло примерно 5:8.

Пример. Было выполнено 100 измерений среднего диаметра резьбового калибра. Результаты наблюдений лежат в диапазоне 8,911—8,927 мм, т. е. зона распределения резервов составляет 0,016 мм. Весь диапазон удобно разделить на восемь равных интервалов через 0,002 мм. В табл. 4 приведены частоты m_i , частоты P_i^* и плотности p^* статистического распределения.

Построенная по данным этой таблицы гистограмма изображена на рис. 27.

Таблица 4

i	X_i , мм	X_{i+1} , мм	m_i	P_i^*	p_i^* , мм ⁻¹
1	8,911	8,913	1	0,01	5
2	8,913	8,915	5	0,05	25
3	8,915	8,917	14	0,14	70
4	8,917	8,919	27	0,27	135
5	8,919	8,921	24	0,24	120
6	8,921	8,923	18	0,18	90
7	8,923	8,925	9	0,09	45
8	8,925	8,927	2	0,02	10

После построения гистограммы надо подобрать теоретическую плавную кривую распределения, которая, выражая все существенные черты статистического распределения, сглаживала бы все случайности, связанные с недостаточным объемом экспериментальных данных. Принципиальный вид теоретической кривой выбирают заранее, проанализировав метод измерения или хотя бы по внешнему виду гистограммы. Тогда определение аналитического вида кривой распределения сводится к выбору таких значений его параметров, при которых достигается наибольшее соответствие между теоретическим и статистическим распределением.

Одним из методов решения этой задачи является метод моментов. При его использовании параметрам теоретического распределения придают такие значения, при которых несколько важнейших моментов совпадают с их статистическими оценками. Так, если статистическое распределение, определяемое гистограммой, приведенной на рис. 27, мы хотим описать кривой нормального распределения, то естественно потребовать, чтобы математическое ожидание и дисперсия последнего совпадали со средним арифметическим и оценкой дисперсий, вычисленным по опытным данным. В предыдущем примере $\bar{X}=8,91936$ мм, $s_x=0,0028$ мм и уравнение кривой нормального распределения, лучше всего согласующегося со статистическим распределением, должно иметь вид

$$p_x(x) = \frac{1}{0,0028 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-8,91936}{0,0028} \right)^2}.$$

Далее законно возникает вопрос, объясняются ли расхождения между гистограммой и подобранным теоретическим распределением только случайными обстоятельствами, связанными с ограниченным числом наблюдений, или они вызваны тем, что результаты наблюдений в действительности распределены иначе.

Для ответа на этот вопрос используют методы проверки статистических гипотез. Идея их применения заключается в следующем. На основании гистограммы, полученной при обработке опытных данных, строится гипотеза, состоящая в том, что результаты наблюдений подчиняются распределению $F_x(x)$ с плотностью $p_x(x)$.

Для того, чтобы принять или опровергнуть эту гипотезу, выбирается некоторая величина U , представляющая собой меру расхождения теоретического и статистического распределений. В качестве меры расхождения можно принять сумму квадратов разностей частот и теоретических вероятностей попадания результатов наблюдений в каждый интервал, взятых с некоторыми коэффициентами:

$$U = \sum_{i=1}^r c_i (P_i^* - P_i)^2,$$

где c_i — коэффициенты, называемые весами разрядов; P_i — теоретические вероятности, определяемые как

$$P_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p_x(x) dx,$$

здесь $p_x(x)$ — предполагаемая плотность распределения.

Мера расхождения U является случайной величиной и, как показал К. Пирсон, независимо от исходного распределения подчиняется χ^2 -распределению [см. формулу (VI.59)] с k степенями

свободы, если все частоты $m_i \geq 5$, число измерений стремится к бесконечности, а веса c_i выбираются равными $\frac{n}{P_i}$. Число степеней свободы распределения $k=r-s$, где r — число разрядов гистограммы статистического распределения, а s — число независимых связей, наложенных на частоты P_i^* .

Если проверяется гипотеза о нормальности распределения, то к числу этих связей относится равенство среднего арифметического и точечной оценки дисперсии соответственно математическому ожиданию и дисперсии предполагаемого нормального распределения. Кроме того, всегда требуется, чтобы сумма частот по всем интервалам была равна единице. Поэтому в данном случае $s=3$.

Мера расхождения U , выбранная по К. Пирсону, обозначается через χ^2_k . Для удобства вычислений ее можно записать в виде

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^r \frac{n}{P_i} (P_i^* - P_i)^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i} = \sum_{i=1}^r \chi_{i1}^2, \quad (\text{VI.67})$$

где

$$\chi_{i1}^2 = \frac{(m_i - nP_i)^2}{nP_i}.$$

По табл. 10 Приложения можно при заданной доверительной вероятности $\alpha=1-q$ найти тот доверительный интервал $\left(\chi_{k; \frac{1}{2}q}^2; \right.$

$\left. \chi_{k; 1 - \frac{1}{2}q}^2 \right)$ значений χ_k^2 , в который мера расхождения может попасть по чисто случайным причинам.

Если вычисленная по опытным данным мера расхождения χ_k^2 окажется в указанном интервале, то гипотеза принимается. Это, конечно, не значит, что гипотеза верна. Можно лишь утверждать, что она правдоподобна, т. е. не противоречит опытным данным. Если же χ_k^2 выходит за границы доверительного интервала, то гипотеза отвергается как противоречащая опытным данным.

Поскольку проверка гипотезы основывается на опытных данных, то при принятии решения всегда возможны ошибки. Отвергая в действительности верную гипотезу, мы совершаем *ошибку первого рода*. Вероятность ошибки первого рода называется *уровнем значимости* и составляет $q=1-\alpha$. Принимая в действительности неверную гипотезу, мы совершаем *ошибку второго рода*. Вычислить ее вероятность, вообще говоря, невозможно, поскольку для этого нужно рассмотреть все прочие возможные гипотезы, являющиеся альтернативой обсуждаемой гипотезы. Можно лишь утверждать, что при уменьшении ошибки первого рода ошибка второго рода увеличивается, поэтому не имеет смысла брать слишком высокие значения доверительных вероятностей.

Описанная процедура проверки гипотезы о том, что данное статистическое распределение является распределением с плотностью $p_X(x)$, называется *критерием согласия* χ^2 .

Проверка нормальности распределения согласно критерию χ сводится к следующему.

1. Данные наблюдений группируют по интервалам, как при построении гистограммы, и подсчитывают частоты m_i . Если в некоторые интервалы попадает меньше пяти наблюдений, то такие интервалы объединяют с соседними. При этом число степеней свободы k , конечно, уменьшается.

2. Вычисляют среднее арифметическое $\bar{X}$ и точечную оценку среднего квадратического отклонения результата наблюдений s_X которые принимают в качестве параметров теоретического нормального распределения с плотностью $p_X(x)$.

3. Для каждого интервала находят вероятности попадания в них результатов наблюдений либо по общей формуле (VI.38), либо приближенно как произведение плотности теоретического распределения в середине интервала на его длину:

$$P_i \approx p_X \left(\frac{X_i + X_{i+1}}{2} \right) \Delta X_i.$$

4. Для каждого интервала вычисляют величины χ_i^2 ($i=1, 2, \dots, r$) и суммируют их по всем i , в результате чего получают меру расхождения χ_k^2 .

5. Определяют число степеней свободы $k=r-3$ и, задаваясь уровнем значимости $q=1-\alpha$, находят по табл. 10 Приложения значения $\chi_{k; \frac{1}{2}q}^2$ и $\chi_{k; 1-\frac{1}{2}q}^2$. Если $\chi_{k; \frac{1}{2}q}^2 < \chi_k^2 \leq \chi_{k; 1-\frac{1}{2}q}^2$,

то распределение результатов наблюдений считают нормальным.

Критерий согласия χ^2 , построенный на предельном переходе при $n \rightarrow \infty$, рекомендуется применять, если общее число наблюдений больше сорока.

Пример. Проверить нормальность распределения табл. 4, для данных которого $\bar{X}=9,91936$ мм и $s_X=0,0028$ мм. Вычисления удобно свести в таблицу (табл. 5).

Интервал составляет $\Delta X_i=0,002$ мм, плотности нормированного нормального распределения $p(t_i)$ взяты из табл. 5 Приложения. Число степеней свободы

$$k=8-2-3=3,$$

поскольку четыре интервала были объединены в два. Задаваясь уровнем значимости $q=0,10$, находим в табл. 10 Приложения $\chi_{3; 0,05}^2=0,352$; $\chi_{3; 0,95}^2=7,815$. Следовательно, распределение опытных данных можно считать нормальным.

Таблица 5

Номер интервала i	Средняя интервала X_i	Частота m_i	Отклонение от среднего $X_i - \bar{X}$	Нормированное отклонение от среднего арифметического $t_i = \frac{X_i - \bar{X}}{s_X}$	Плотность нормированного распределения $p(t_i)$	Плотность в средних интервалах $p(X_i) = \frac{p(t_i)}{s_X}$	Теоретическая частота $n p_i = n \Delta X_i p(X_i)$	Отклонение χ_i^2
1	8,912	1}	-0,00736	-2,53	0,0163	5,8	1,16}	5,68
2	8,914	5}	-0,00536	-1,92	0,0632	22,6	4,52}	
3	8,916	14	-0,00336	-1,20	0,1942	69,5	13,9	0,0007
4	8,918	27	-0,00136	-0,485	0,3546	126,7	25,34	0,1086
5	8,920	24	+0,00064	+0,229	0,3885	138,8	27,76	0,5092
6	8,922	18	+0,00264	+0,943	0,2558	91,3	18,26	0,0037
7	8,924	9}	+0,00464	+1,66	0,1006	36	7,2}	8,92
8	8,926	2}	-0,00664	+2,37	0,0241	8,6	1,72}	

$$\chi_3^2 = 1,1252$$



Если число наблюдений меньше сорока, то для проверки нормальности можно воспользоваться понятием *статистической функции распределения результатов наблюдений*. Для ее построения полученные в процессе эксперимента результаты группируют в так называемый *вариационный ряд* $X_{(1)}; X_{(2)}; \dots; X_{(n)}$, члены которого располагаются в порядке их возрастания, так что всегда $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$. Статистическую функцию распределения $F_n(x_k)$ определяют по формуле

$$F_n(x_k) = \frac{k}{n+1}; \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (\text{VI.68})$$

$F_n(x)$ представляет собой ступенчатую линию, скачки которой соответствуют значениям членов вариационного ряда. Каждый скачок равен $\frac{1}{n+1}$, если все n членов ряда различны. Если же для некоторого k $X_{(k)} = X_{(k+1)} = \dots = X_{(k+i)}$, то $F_n(x)$ в точке $x = X_{(k)}$ возрастает на $\frac{i}{n+1}$, где i — число равных между собой членов ряда.

Если число наблюдений безгранично увеличивать, то статистическая функция распределения сходится по вероятности к истинной функции $F_X(x)$.

Для проверки нормальности распределения результатов наблюдений по табл. 7 Приложения находят значения z_k , соответствующие полученным значениям $F_n(x_k)$ статистической функции распределения:

$$\Phi(z_k) = F_n(x_k).$$

Но переменная z [см. выражение (VI.34) и далее] определяется через результаты наблюдений как

$$z_k = \frac{X_k - m_X}{\sigma_X},$$

и если в координатах z ; x нанести точки z_k ; x_k , то при нормальном распределении они должны расположиться вдоль одной прямой линии. Если же в результате такого построения получится некоторая кривая линия, то гипотезу о нормальности распределения придется отвергнуть как противоречащую опытным данным.

Вопрос о том, насколько зависимость $z(x)$ может отклоняться от линейной только из-за случайных причин, решается методами непараметрического статистического оценивания*.

Пример. Даны результаты девятнадцати измерений длины l_i детали в мм. Проверить нормальность распределения результатов наблюдений:

18,305	18,306	18,312	18,308
18,308	18,310	18,305	18,307
18,311	18,303	18,307	18,309
18,309	18,308	18,308	18,310
18,304	18,306	18,309	

Вычисления по изложенной методике сведены в табл. 6.

На рис. 28 представлена зависимость $z_k(X_k)$. Отдельные точки располагаются очень близко к прямой, поэтому распределение результатов наблюдений можно считать нормальным.

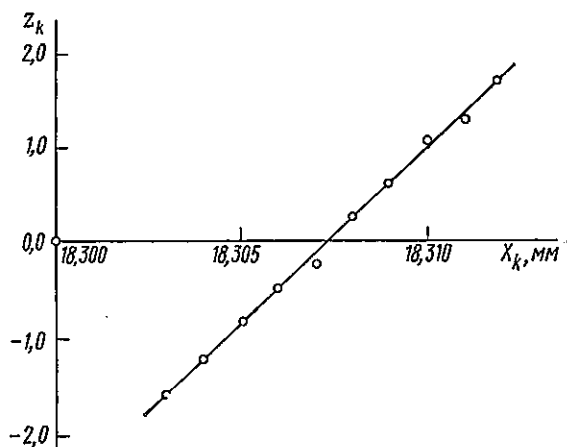


Рис. 28

* Интересующиеся могут обратиться к монографии С. Уилкса «Математическая статистика». М., «Наука», 1967.

Таблица 6

X_k , мм	$F_n(x_k) = \Phi(z_k)$	z_k
18,303	0,05	-1,6449
18,304	0,10	-1,2816
18,305	0,20	-0,8416
18,306	0,30	-0,5244
18,307	0,40	-0,2533
18,308	0,60	0,2533
18,309	0,75	0,6745
18,310	0,85	1,0364
18,311	0,90	1,2816
18,312	0,95	1,6449

§ 52. ОБНАРУЖЕНИЕ ГРУБЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

В начале главы уже было отмечено, что *грубыми называют погрешности, явно превышающие по своему значению погрешности, оправданные условиями проведения эксперимента.* Для их устранения желательно еще перед измерениями определить значение искомой величины приближенно, с тем чтобы в дальнейшем можно было сконцентрировать внимание лишь на уточнении предварительных данных. Если оператор в процессе измерений обнаруживает, что результат одного из наблюдений резко отличается от других, и находит причины этого, то он, конечно, вправе отбросить этот результат и провести повторные измерения. Но необдуманное отбрасывание резко отличающихся от других результатов может привести к существенному искажению характеристик рассеивания ряда измерений, поэтому повторные измерения лучше проводить не взамен сомнительных, а в дополнение к ним.

Особенно остро ставится вопрос об устранении грубых погрешностей при обработке уже имеющегося материала, когда невозможно учесть все обстоятельства, при которых проводили измерения. В этом случае приходится прибегать к чисто статистическим методам.

Вопрос о том, содержит ли данный результат наблюдений грубую погрешность, решается общими методами проверки статистических гипотез.

Проверяемая гипотеза состоит в утверждении, что результат наблюдения X_i не содержит грубой погрешности, т. е. является одним из значений случайной величины X с законом распределения $F_X(x)$, статистические оценки параметров которого предварительно определены. Сомнительным может быть в первую очередь лишь наибольший $X_{\max}$ или наименьший $X_{\min}$ из результатов

наблюдений. Поэтому для проверки гипотезы следует воспользоваться распределениями величин

$$v = \frac{X_{\max} - \bar{X}}{s_X} \quad \text{или} \quad v = \frac{\bar{X} - X_{\min}}{s_X}.$$

Функции их распределения определяют методами теории вероятностей. Они совпадают между собой и для нормального распределения результатов наблюдений протабулированы и представлены в табл. 11 Приложения. По данным этой таблицы, при заданной доверительной вероятности α или уровне значимости $q=1-\alpha$ можно для чисел измерения $n=3-25$ найти те наибольшие значения v_α , которые случайная величина v может еще принять по чисто случайным причинам.

Таблица 7

i	$t_i, ^\circ\text{C}$	v_i	$v_i^2 \cdot 10^4$	v'_i	$(v'_i)^2 \cdot 10^4$
1	20,42	+0,016	2,56	+0,009	0,81
2	20,43	+0,026	2,75	+0,019	3,61
3	20,40	-0,004	0,16	-0,011	1,21
4	20,43	+0,026	6,76	+0,019	3,61
5	20,42	+0,016	2,56	+0,009	0,81
6	20,43	+0,026	6,76	+0,019	3,61
7	20,39	-0,014	1,96	-0,021	4,41
8	20,30	-0,104	108,16	—	—
9	20,40	-0,004	0,16	-0,011	1,21
10	20,43	+0,026	6,76	+0,019	3,61
11	20,42	+0,016	2,56	+0,009	0,81
12	20,41	+0,006	0,36	-0,001	0,01
13	20,39	-0,014	1,96	-0,021	4,41
14	20,39	-0,014	1,96	-0,021	4,41
15	20,40	-0,004	0,16	-0,011	1,21
$\bar{t} = 20,404^\circ\text{C}$ $t' = 20,411^\circ\text{C}$			$s_t = 0,033^\circ$		$s'_t = 0,016^\circ$

Если вычисленное по опытным данным значение v окажется меньше v_α то гипотеза принимается; в противном случае ее следует отвергнуть как противоречащую данным наблюдений. Тогда результат $X_{\max}$ или соответственно $X_{\min}$ приходится рассматривать как содержащий грубую погрешность и не принимать его во внимание при дальнейшей обработке результатов наблюдений. При этом мы можем, конечно, совершить ошибку первого или второго рода.

Пример. При измерении температуры были получены результаты, представленные во второй графе табл. 7. Требуется определить, не содержит ли результат восьмого наблюдения $t_8=20,30^\circ\text{C}$ грубой погрешности.

Вначале обычными способами находим среднее арифметическое и среднее квадратическое отклонение результатов наблюдений:

$$\bar{t} = 20,404^{\circ}\text{C}; \quad s_t = 0,033^{\circ}\text{C}.$$

Если принять доверительную вероятность $\alpha=0,95$, то из табл. 11 Приложения при $n=15$, $v_{0,95}=2,493$ и, поскольку

$$v = \frac{\bar{t} - t_{\min}}{s_t} = \frac{\bar{t} - t_8}{s_t} = \frac{20,404 - 20,30}{0,033} = 3,16; \quad v > v_{0,95},$$

результат $t_8=20,30^{\circ}\text{C}$ содержит грубую погрешность.

Если отбросить этот результат и повторить вычисления, то среднее арифметическое окажется равным $\bar{t}'=20,411^{\circ}\text{C}$, а среднее квадратическое отклонение уменьшится до $s'_t=0,016^{\circ}\text{C}$. Расчет приведен в последних двух графах таблицы.

§ 53. КЛАССИФИКАЦИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Систематической погрешностью называется составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины. При этом предполагается, что систематические погрешности представляют собой определенную функцию неслучайных факторов, состав которых зависит от физических, конструктивных и технологических особенностей средств измерений, условий их применения, а также индивидуальных качеств наблюдателя. Сложные детерминированные закономерности, которым подчиняются систематические погрешности, определяются либо при создании средств измерений и комплектации измерительной аппаратуры, либо непосредственно при подготовке измерительного эксперимента и в процессе его проведения. Совершенствование методов измерения, использование высококачественных материалов, прогрессивная технология, — все это позволяет на практике устранить систематические погрешности настолько, что при обработке результатов наблюдений с их наличием зачастую не приходится считаться.

В предыдущих параграфах, посвященных случайным погрешностям, было показано, что единственно правильным методом их анализа является математическая статистика. Случайные погрешности измерения изучались только в совокупности, без рассмотрения их фактических значений в каждом опыте. Систематические погрешности приходится изучать в каждом случае отдельно.

Однако в последнее время появились попытки использовать для анализа систематических погрешностей статистические методы, основанные на способах разделения сигналов, применяющихся в теории и технике связи.

Систематические погрешности принято классифицировать в зависимости от причин их возникновения и по характеру их проявления при измерениях.

В зависимости от причин возникновения рассматриваются четыре вида систематических погрешностей:

1. *Погрешности метода или теоретические погрешности*, про-

истекающие от ошибочности или недостаточной разработки принятой теории метода измерений в целом или от допущенных упрощений при проведении измерений.

Погрешности метода возникают также при экстраполяции свойства, измеренного на ограниченной части некоторого объекта, на весь объект, если последний не обладает однородностью измеряемого свойства. Так, считая диаметр цилиндрического вала равным результату, полученному при измерении в одном сечении и в одном направлении, мы допускаем систематическую погрешность, полностью определяемую отклонениями формы исследуемого вала. При определении плотности вещества по измерениям массы и объема некоторой пробы возникает систематическая погрешность, если проба содержала некоторое количество примесей, а результат измерения принимается за характеристику данного вещества вообще.

К погрешностям метода следует отнести также те погрешности, которые возникают вследствие влияния измерительной аппаратуры на измеряемые свойства объекта. Получаемые при этом результаты становятся грубо приближенными или даже недействительными, как только аппаратура прекращает взаимодействовать с объектом. Подобные явления возникают, например, при измерении длин, когда измерительное усилие используемых приборов достаточно велико, при регистрации быстропротекающих процессов при недостаточном быстродействии аппаратуры, при измерениях температур жидкостными или газовыми термометрами и так далее.

В некоторых измерениях, связанных с исследованием малых или, наоборот, очень больших объектов, например в физике элементарных частиц и в астрономии, погрешности метода могут иногда настолько исказить сущность исследуемых явлений, что сколько-нибудь объективная интерпретация результатов измерения становится настоящим искусством, доступным лишь ограниченному числу экспериментаторов. В этом отношении интересно определение измерения, встречающееся в квантовой механике, согласно которому под измерением понимается процесс нахождения коррелятивной связи между измеряемым свойством объекта и состоянием взаимодействующей с ним измерительной аппаратуры.

2. *Инструментальные погрешности*, зависящие от погрешностей применяемых средств измерений. Среди инструментальных погрешностей в отдельную группу выделяются *погрешности схемы*, не связанные с неточностью изготовления средств измерения и обязанные своим происхождением самой структурной схеме средств измерений (и, в частности, его кинематической схеме) и свойствам образующих его элементов, и *технологические погрешности*, появляющиеся вследствие несовершенства изготовления элементов. Исследование инструментальных погрешностей является предметом специального курса — теории точности измерительных устройств.

3. Погрешности, обусловленные неправильной установкой и взаимным расположением средств измерения, являющихся частью единого комплекса, несогласованностью их характеристик, влиянием внешних температурных, гравитационных, радиационных и других полей, нестабильностью источников питания, а также неправильными манипуляциями операторов. Сюда относятся погрешности, вызываемые установкой некоторых измерительных приборов без помощи отвеса или уровня, несогласованностью входных и выходных параметров электрических цепей приборов, параллаксом при отсчете по шкале и так далее.

4. Личные погрешности, обусловленные индивидуальными особенностями наблюдателя. Такого рода погрешности вызываются, например, запаздыванием или опережением при регистрации сигнала, неправильным отсчетом десятых долей деления шкалы, асимметрией, возникающей при установке штриха посередине между двумя рисками.

По характеру своего поведения в процессе измерения систематические погрешности подразделяются на постоянные и переменные.

Постоянные систематические погрешности возникают, например, при неправильной установке начала отсчета, неправильной градуировке и юстировке средств измерения и остаются постоянными при всех повторных наблюдениях. Поэтому, если уж они возникли, их очень трудно обнаружить в результатах наблюдений.

Среди переменных систематических погрешностей принято выделять *прогрессивные*, монотонно возрастающие или убывающие в процессе своего изменения (в функции времени, значения измеряемой величины или параметров внешних условий), и *периодические*.

Прогрессивная погрешность возникает, например, при взвешивании, когда одно из коромысел весов находится ближе к источнику тепла, чем другое, поэтому быстрее нагревается и удлиняется. Это приводит к систематическому сдвигу начала отсчета и к монотонному изменению показаний весов.

Периодическая погрешность присуща измерительным приборам с круговой шкалой, если ось вращения указателя не совпадает с осью шкалы.

Все остальные виды систематических погрешностей принято называть погрешностями, изменяющимися по сложному закону.

В тех случаях, когда при создании средств измерений, необходимых для данной измерительной установки, не удается устранить влияние систематических погрешностей, приходится специально организовывать измерительный процесс и осуществлять математическую обработку результатов. Методы борьбы с систематическими погрешностями заключаются в их обнаружении и последующем исключении путем полной или частичной компенсации. Основные трудности, часто непреодолимые, состоят именно

в обнаружении систематических погрешностей, поэтому иногда приходится довольствоваться приближенным их анализом, позволяющим только в общем судить о правильности результатов измерений.

§ 54. СПОСОБЫ ОБНАРУЖЕНИЯ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Результаты наблюдений, полученные при наличии систематических погрешностей, будем называть неисправленными и в отличие от исправленных снабжать штрихами их обозначения (например, X'_1 ; X'_2 и т. д.). Вычисленные в этих условиях средние арифметические значения и отклонения от них результатов наблюдений будем также называть неисправленными и ставить штрихи у символов этих величин. Таким образом,

$$\bar{X}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X'_i; \quad v'_i = X'_i - \bar{X}'. \quad (\text{VII.1})$$

Поскольку неисправленные результаты наблюдений включают в себя систематические погрешности, сумму которых для каждого i -го наблюдения будем обозначать через Θ_i , то их математическое ожидание не совпадает с истинным значением измеряемой величины и отличается от него на некоторую величину Θ , называемую *систематической погрешностью неисправленного среднего арифметического*. Действительно,

$$\begin{aligned} M[\bar{X}'] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X'_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X_i + \Theta_i] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[X_i] + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[\Theta_i] = Q + \Theta; \end{aligned} \quad (\text{VII.2})$$

$$\Theta = M[\bar{X}'] - Q = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Theta_i. \quad (\text{VII.3})$$

Случайные отклонения результатов наблюдений от средних арифметических отличаются от неисправленных отклонений:

$$\begin{aligned} v'_i - v_i &= (X'_i - \bar{X}') - (X_i - \bar{X}) = (X'_i - X_i) - (\bar{X}' - \bar{X}) = \\ &= \Theta_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Theta_i = \Theta_i - \Theta. \end{aligned} \quad (\text{VII.4})$$

Если систематические погрешности постоянны, т. е. $\Theta_i = \Theta$, $i = 1, 2, \dots, n$, то $v_i = v'_i$, и неисправленные отклонения могут быть непосредственно использованы для оценки рассеивания ряда наблюдений. В противном случае необходимо предварительно исправить отдельные результаты измерений, введя в них так назы-

ваемые *поправки*, равные систематическим погрешностям по величине и обратные им по знаку:

$$q_i = -\Theta_i. \quad (\text{VII.5})$$

Таким образом, для нахождения исправленного среднего арифметического и оценки его рассеивания относительно истинного значения измеряемой величины необходимо обнаружить систематические погрешности и исключить их путем введения поправок или соответствующей каждому конкретному случаю организации самого измерения. Остановимся подробнее на некоторых способах обнаружения систематических погрешностей.

Постоянные систематические погрешности не влияют на значения случайных отклонений результатов наблюдений от средних арифметических, поэтому никакая математическая обработка результатов наблюдений не может привести к их обнаружению. Анализ таких погрешностей возможен только на основании некоторых априорных знаний об этих погрешностях, получаемых, например, при проверке средств измерений. Измеряемая величина при проверке обычно воспроизводится образцовой мерой, действительное значение которой известно. Поэтому разность между средним арифметическим результатов наблюдения и значением меры с точностью, определяемой погрешностью аттестации меры и случайными погрешностями измерения, равна искомой систематической погрешности.

Ценность полученных при проверке результатов определяется их постоянством в течение некоторого промежутка времени и независимостью от тех изменений внешних условий, которые допустимы при эксплуатации средств измерений с заданной точностью. Тогда полученные при проверке данные могут быть использованы для вычисления поправок, необходимых для исправления результатов наблюдений.

Одним из наиболее действенных способов обнаружения систематических погрешностей в ряде результатов наблюдений является построение графика последовательности неисправленных значений случайных отклонений результатов наблюдений от средних арифметических.

Вначале рассмотрим случай, когда в ряде результатов наблюдений предполагается наличие постоянной систематической погрешности. Для того чтобы удостовериться в этом, исследователь, сделав несколько измерений, заменяет некоторые меры или измерительные приборы, включенные в установку и являющиеся предполагаемыми источниками постоянных систематических погрешностей, другими мерами и измерительными приборами, и проводит еще несколько измерений.

В качестве примера приведем результаты наблюдений и неисправленные отклонения результатов наблюдений, полученные при сравнении индуктивности катушки с индуктивностью одной образцовой катушки при первых четырех наблюдениях и с индук-

тивностью другой образцовой катушкой при шести последних наблюдениях:

X_i , мГ	v'_i , мГ	X_i , мГ	v'_i , мГ
50,82	0,00	50,78	-0,04
50,83	+0,01	50,75	-0,05
50,87	+0,05	50,85	+0,01
50,89	+0,07	50,82	0,00
50,78	-0,04	50,81	-0,01

На рис. 29 построен график последовательности неисправленных отклонений результатов наблюдений.

При замене образцовой катушки отклонения результатов резко меняются. Скачок составляет 0,11 мГ, что намного больше максимального из остальных скачков (0,06 мГ при переходе от 7 к 8-му измерению). Следовательно, какая-то из образцовых катушек индуктивности вносила погрешность в результаты наблюдений, но не ясно, какая.

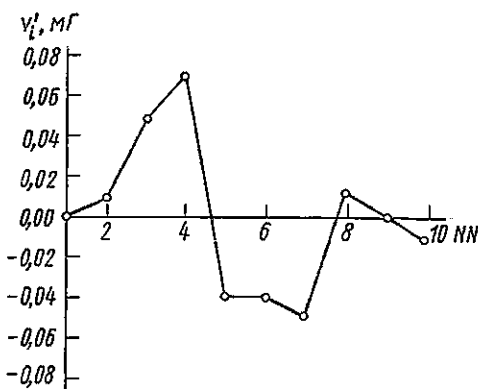


Рис. 29

График лишь обращает внимание наблюдателя на необходимость правильной аттестации образцовых катушек, но не дает никаких сведений о значениях систематических погрешностей.

Окончательно рассматриваемый способ обнаружения постоянных систематических погрешностей можно сформулировать следующим образом:

если неисправленные отклонения результатов наблюдений резко изменяются при изменении условий наблюдений, то данные результаты содержат постоянную систематическую погрешность, зависящую от условий наблюдений.

При прогрессивной систематической погрешности последовательность неисправленных отклонений результатов наблюдений обнаруживает тенденцию к возрастанию или убыванию.

На рис. 30 изображена зависимость погрешности измерения от длины измеряемой детали. Несмотря на большие случай-

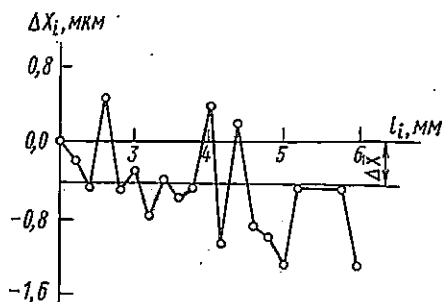


Рис. 30

ные изменения погрешности тенденция к увеличению ее с уменьшением отклонений результатов наблюдений от среднего значения явно обнаруживается. Если бы случайные погрешности были невелики, то значения неисправленных отклонений меняли бы свой знак при некотором среднем значении измеряемой величины. Случайные погрешности несколько искажают эту картину, однако, если они даже одного порядка малости с систематическими погрешностями, в последовательности знаков можно заметить некоторую неравномерность: неисправленные отклонения результатов одного знака чаще встречаются в одной половине ряда, чем в другой. В рассматриваемом случае последовательность знаков имеет вид

+ + - + - + - + - | - + - + - - - - - -

В первой половине последовательности знак плюс встречается пять раз, а во второй только два раза, в то время как знак минус встречается чаще во второй половине ряда.

Если же в ряде результатов наблюдений присутствует периодическая систематическая погрешность, то группы знаков плюс и минус в последовательности неисправленных отклонений результатов наблюдений могут периодически сменять друг друга, если, конечно, случайные погрешности не особенно велики.

Обобщая два рассмотренных случая, можно сказать: *если знаки неисправленных отклонений результатов наблюдений чередуются правильно, то данный ряд результатов наблюдений обнаруживает прогрессивную погрешность, если последовательность знаков плюс сменяется последовательностью знаков минус или наоборот, и периодическую погрешность, если группы знаков плюс и минус чередуются.*

По этому признаку можно обнаружить систематические погрешности, если случайные погрешности малы. Однако даже при достаточно больших случайных погрешностях анализ графиков неисправленных отклонений результатов наблюдений позволяет обнаружить весьма слабые тенденции к той или иной форме систематического изменения погрешности. Так, например, рассматривая рис. 30, легко заметить прогрессивную погрешность, составляющую приблизительно 0,8 мкм на длине 4 мм, хотя разброс случайных погрешностей значительно больше (1,5—1,6 мкм).

§ 55. ВВЕДЕНИЕ ПОПРАВОК

Систематические погрешности являются детерминированными величинами, поэтому в принципе всегда могут быть вычислены и исключены из результатов измерения. После исключения систематических погрешностей получаем исправленные средние арифметические и исправленные отклонения результатов наблюдений, которые позволяют оценить степень рассеивания результатов.

Для исправления результатов наблюдений их складывают с поправками, равными систематическим погрешностям по величине и обратными им по знаку. Поправки определяют экспериментально при поверке приборов или в результате специальных исследований, обыкновенно с некоторой ограниченной точностью. Для исправления результата наблюдения его складывают только со средним арифметическим значением поправки:

$$X_i = X'_i + q, \quad (\text{VII.6})$$

где X_i ; X'_i — соответственно исправленный и неисправленный результаты наблюдений; q — среднее арифметическое значение поправки.

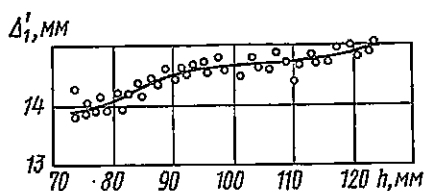


Рис. 31

Поправки, определяемые экспериментально, задаются в виде таблицы или графика. Так, например, на рис. 31 представлена зависимость поправки на депрессию ртути в однокапиллярном образцовом компрессионном манометре ВНИИМ от высоты подъема ртути. График был получен путем многократных наблюдений при давлении $p \leq 10^5$ Па путем сравнения положений мениска в капилляре и в широкой трубке, депрессия ртути в которой принималась равной нулю.

Поправка на депрессию меняется с высотой подъема ртути в пределах 13,94—14,90 мм. Среднее квадратическое отклонение результата определения поправки, вычисленное по отклонениям отдельных экспериментальных значений от плавной кривой, составляет при этом 0,16 мм.

Поправки могут задаваться также в виде формул, по которым они вычисляются для каждого конкретного случая. Так, согласно ГОСТ 8291—69, при измерениях и поверках с помощью образцовых грузопоршневых манометров следует вводить поправки к их показаниям на местное значение ускорения свободного падения

$$q_1 = \Delta P_1 = P \left(\frac{g}{9,8066} - 1 \right)$$

и на отклонение температуры окружающего воздуха от 20°C, если оно превышает $\pm 5^\circ\text{C}$:

$$q_2 = \Delta P_2 = P (\alpha_1 + \alpha_2) (20 - t),$$

где P — измеряемое давление, $\text{кгс} \cdot \text{см}^{-2}$; g — ускорение свободного падения в месте измерения, $\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$; α_1 ; α_2 — коэффициенты линейного температурного расширения материалов поршня и цилиндра, соответственно; t — температура окружающего воздуха, $^{\circ}\text{C}$.

Введением поправки устраняется влияние только одной вполне определенной систематической погрешности, поэтому в результаты измерения зачастую приходится вводить очень большое число поправок. При этом вследствие ограниченной точности определения поправок накапливаются случайные погрешности и дисперсия результата измерения увеличивается.

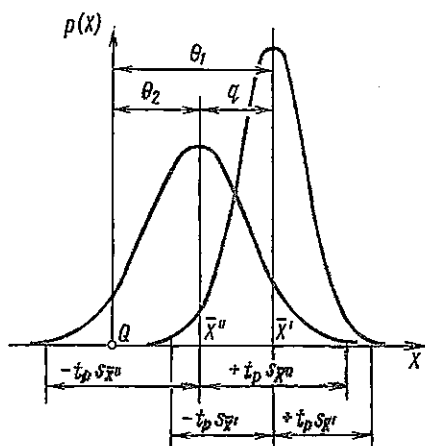


Рис. 32

Действительно, при исправлении неисправленного результата X'_i путем введения поправок $q_j \pm s_j, j=1, 2, \dots, m$ по формуле

$$X_i = X'_i + \sum_{j=1}^m q_j,$$

дисперсия s^2_X становится равной

$$s^2_X = s^2_{X'} + \sum_{j=1}^m s_j^2, \quad (\text{VII.7})$$

где $s^2_{X'}$ — оценка дисперсии неисправленных результатов; s_j^2 — оценка дисперсии j -й поправки.

Следовательно, где-то должна быть разумная граница тех значений поправок, которые следует вводить в результаты наблюдений для получения более достоверных сведений об истинном значении измеряемой величины. Будем рассуждать следующим образом. Предположим, что, измерив постоянную величину Q (рис. 32), мы получим следующий результат:

$$Q = \bar{X}' \pm t_P s_{\bar{X}'},$$

где t_P определяется по заданной доверительной вероятности из таблиц нормального распределения или распределения Стьюдента.

После введения поправки $q \pm t_P s_q$, где s_q — среднее квадратическое отклонение определения поправки, результат измерения

$$Q = \bar{X}'' \pm t_P s_{\bar{X}''},$$

где $\bar{X}'' = \bar{X}' + q$, $s_{\bar{X}''}^2 = s_{\bar{X}'}^2 + s_q^2$

Систематическая погрешность Θ_1 уменьшилась до Θ_2 из-за введения поправки, причем $\Theta_2 = \Theta_1 - q$. Доверительная граница погрешности результата измерения для доверительной вероятности, соответствующей t_P , составляла до введения поправки

$$\Delta_1 = \Theta_1 + t_P s_{\bar{X}'},$$

а после ее введения

$$\Delta_2 = \Theta_2 + t_P s_{\bar{X}''} = \Theta_1 - q + t_P \sqrt{s_{\bar{X}'}^2 + s_q^2}.$$

Поправку имеет смысл вводить до тех пор, пока она уменьшает доверительные границы погрешности, т. е. пока имеет место неравенство $\Delta_2 < \Delta_1$. Подставив сюда значения погрешностей Δ_1 и Δ_2 , получим

$$\Theta_1 - q + t_P \sqrt{s_{\bar{X}'}^2 + s_q^2} < \Theta_1 + t_P s_{\bar{X}'},$$

и, следовательно,

$$q > t_P s_{\bar{X}'} \left[\sqrt{1 + \frac{s_q^2}{s_{\bar{X}'}^2}} - 1 \right]. \quad (\text{VII.8})$$

Если отношение дисперсий поправки к дисперсии неисправленных результатов наблюдений значительно меньше единицы, то полученное выражение можно упростить, воспользовавшись разложением в степенной ряд

$$q > 0,5 \frac{s_q^2}{s_{\bar{X}'}}. \quad (\text{VII.9})$$

При исчезающе малой дисперсии поправки на основании формулы (VII.9) может показаться, что введение любой поправки повышает достоверность результата. Однако следует помнить, что погрешность результата выражается не более чем двумя значащими цифрами, поэтому поправка, если она меньше пяти единиц разряда, следующего за последним десятичным знаком погрешности результата, будет все равно потеряна при округлении, и вводить ее не имеет смысла.

§ 56. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ
РАВНОРАСРЕЯННЫХ НАБЛЮДЕНИЙ

Прямыми называются измерения, в результате которых находят непосредственно искомые значения величин.

Результаты наблюдений $X_1; X_2; \dots; X_n$, получаемые при прямых измерениях постоянной физической величины Q , называются равнорассеянными (равноточными), если они являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами. Равнорассеянные результаты получают при измерениях, проводимых одним наблюдателем или группой наблюдателей с помощью одних и тех же средств измерений в неизменных условиях внешней среды. Их математическую обработку проводят для определения итога измерений в виде выражения (VI.48) или (VI.57).

Результаты обрабатывают по-разному в зависимости от того, мало ($n < 40$) или много ($n \geq 40$) проведено наблюдений. При количестве наблюдений $n < 40$ результаты обрабатывают в следующем порядке.

1. Определяют точечную оценку истинного значения измеряемой величины — среднее арифметическое результатов наблюдений, [см. формулу (VI.43)].

2. Вычисляют случайные отклонения [см. выражение (VI.44)] результатов наблюдений и их квадраты.

3. Вычисляют точечную оценку среднего квадратического отклонения результатов наблюдений [см. выражение (VI.46)].

4. Определяют точечную оценку [см. выражение (VI.47)] среднего квадратического отклонения результата измерений.

5. Проверяют нормальность распределения результатов наблюдений.

6. Задаваясь определенными значениями доверительной вероятности, находят доверительную погрешность результата измерений и доверительный интервал для среднего квадратического отклонения.

7. Определяют наличие грубых погрешностей и промахов и, если последние обнаружены, соответствующие результаты отбрашивают и повторяют вычисления.

8. Итог измерений записывают в виде

$$Q = \bar{X} \pm t_p s_{\bar{X}} (n = \dots; P = \dots \%), \quad (\text{VIII.1})$$

если распределение случайных погрешностей нормально, и в виде

$$Q \approx \bar{X}; (S_{\bar{X}} = \dots; n = \dots) \quad (\text{VIII.1'})$$

в остальных случаях.

Пример. Обработать наблюдения, полученные при измерении ускорения свободного падения и приведенные во второй графе табл. 8.

1. Вычисляем точечную оценку истинного значения измеряемой величины, т. е. среднее арифметическое данных наблюдений:

$$\bar{g} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} g_i = 9,81923267 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Таблица 8

t	$g_i, \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$	$v_i \cdot 10^5$	$v_i^2 \cdot 10^{10}$
1	2	3	4
1	9,81931	+7,7	59,29
2	9,81920	-3,3	10,89
3	9,81919	-4,3	18,49
4	9,81941	+17,7	313,29
5	9,81904	-19,3	372,49
6	9,81923	-0,3	0,09
7	9,81925	+1,7	2,89
8	9,81918	-5,3	28,09
9	9,81932	+8,7	75,69
10	9,81929	+5,7	32,49
11	9,81920	-3,3	10,89
12	9,81925	+1,7	2,89
13	9,81916	-7,3	53,29
14	9,81918	-5,3	28,09
15	9,81928	+4,7	22,09
Суммы	146,28849	-0,5	1030,95
$\bar{g} = 9,819233 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$		$s_g = 8,6 \cdot 10^{-5} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$	

Полученное числовое значение округляют так, чтобы случайные отклонения результатов наблюдений имели не больше трех значащих цифр при ответственных или особо точных измерениях, а также в тех случаях, когда полученные результаты предполагается использовать при дальнейших вычислениях. В противном случае округляют до двух значащих цифр. Поэтому округленно

$$\bar{g} = 9,819233 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

2. Отклонения результатов наблюдений, вычисленные как $v_i = g_i - \bar{g}$, представлены в третьей графе. Их сумма составляет

0,0000005 м · с⁻², хотя должна равняться нулю. Расхождение объясняется тем, что значение среднего арифметического было округлено.

Результаты четвертого и пятого наблюдений кажутся на первый взгляд сомнительными, поэтому в дальнейшем нужно будет проверить, не содержат ли они грубых погрешностей.

В четвертой графе представлены квадраты случайных отклонений и вычислена их сумма.

3. Оценка среднего квадратического отклонения результатов наблюдений составляет

$$s_g = \sqrt{\frac{1}{15-1} \sum_{i=1}^{15} v_i^2} = 8,6 \cdot 10^{-5} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

4. Оценка среднего квадратического отклонения результата измерений

$$s_{\bar{g}} = \frac{s_g}{\sqrt{n}} = \frac{8,6 \cdot 10^{-5}}{\sqrt{15}} = 2,2 \cdot 10^{-5} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

5. Для проверки нормальности распределения находим по формуле (VI.68) значения статистической функции распределения и соответствующие им значения z . Результаты вычислений представлены в табл. 9.

Таблица 9

g_k	$F_n(g_k) = \Phi(z_k)$	z_k
9,81904	0,0625	-1,534
9,81916	0,1250	-1,150
9,81918	0,2500	-0,674
9,81919	0,3225	-0,461
9,81920	0,4475	-0,132
9,81923	0,5000	0,000
9,81925	0,6250	0,319
9,81928	0,6771	0,461
9,81929	0,7500	0,674
9,81931	0,8225	0,925
9,81932	0,8750	1,150
9,81941	0,9275	1,534

На рис. 33 изображена зависимость $z_k(g_k)$, соответствующая опытным данным. Разброс отдельных точек относительно прямой

$$z = \frac{x - m_X}{\sigma_X}$$

довольно велик, однако распределение с некоторым приближением можно все-таки считать нормальным.

6. Задаваясь доверительной вероятностью $\alpha=1-q=96\%$ для среднего квадратического отклонения результатов наблюдений и $P=95\%$ для среднего арифметического, из табл. 8 и 10 Приложения находим при $k=n-1=14$:

$$t_{0,95}=2,145; \quad \chi_{14; 0,02}^2=5,368; \quad \chi_{14; 0,02}=2,32;$$

$$\chi_{14; 0,98}^2=26,873; \quad \chi_{14; 0,98}=5,19.$$

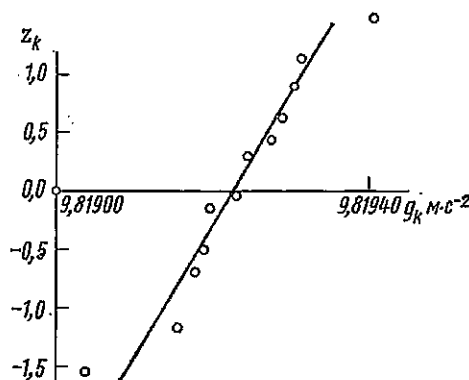


Рис. 33

Доверительная погрешность результата измерений

$$\delta_p = \delta_{0,95} = t_{0,95} \cdot s_{\bar{g}} = 2,145 \cdot 2,2 \cdot 10^{-5} = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2},$$

а границы доверительного интервала для среднего квадратического отклонения результатов наблюдений следующие:

$$s_{g1} = \frac{\sqrt{15-1} \cdot s_g}{\chi_{14; 0,02}} = \frac{\sqrt{14} \cdot 8,6 \cdot 10^{-5}}{2,32} = 13,9 \cdot 10^{-5} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2},$$

$$s_{g2} = \frac{\sqrt{15-1} \cdot s_g}{\chi_{14; 0,98}} = \frac{\sqrt{14} \cdot 8,6 \cdot 10^{-5}}{5,19} = 6,2 \cdot 10^{-5} \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}.$$

7. Проверим, не содержит ли грубую погрешность результат $g_5 = g_{\min} = 9,81904 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ с наибольшей по абсолютной величине погрешностью.

Для этого, задавшись уровнем значимости, например $q=1-\alpha=0,05$, из табл. 11 Приложения при $n=15$ находим $v_{0,95}=2,493$. Но

$$v = \frac{\bar{g} - g_{\min}}{s_g} = \frac{9,819233 - 9,81904}{8,6 \cdot 10^{-5}} = 2,245.$$

Поскольку $v < v_{0,95}$, то нет достаточных оснований считать результат $g_5 = 9,81904 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}$ содержащим грубую погрешность.

Окончательно итог измерений можно записать в виде

$$g \approx 9,819233 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} \left(S_{\bar{g}} = 0,000022 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}; n = 15 \right),$$

или

$$g = 9,819233 \pm 0,000047 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2} \quad (n = 15; P = 95\%).$$

В некоторых случаях нас может интересовать не сама измеряемая величина, а другая, связанная с ней функциональной зависимостью. Требуется найти интервальную или точечную оценку ее истинного значения. Решается такая задача следующим образом.

Пусть $S = f(Q)$; $Q = \bar{X} \pm t_{PS} \bar{s}_X$ и f — непрерывная дифференцируемая функция в окрестности точки $Q = \bar{X}$.

При проведении точных измерений естественно предположить, что $t_{PS} \bar{s}_X \ll X$. Тогда, разлагая $f(Q) = f(\bar{X} \pm t_{PS} \bar{s}_X)$ в ряд по степеням $t_{PS} \bar{s}_X / \bar{X}$ и пренебрегая всеми степенями, кроме первой, получаем следующее выражение:

$$S = f(\bar{X}) \pm t_{PS} \bar{s}_X \left(\frac{df}{dQ} \right)_{Q=\bar{X}}. \quad (\text{VIII.2})$$

Пример. Измеренный диаметр круга $d = 84,75 \pm 0,05$ мм. Требуется найти площадь круга $s = \frac{\pi d^2}{4}$.

По формуле (VIII.2)

$$S = \frac{\pi \cdot 84,75^2}{4} \pm \frac{\pi \cdot 84,75}{2} \cdot 0,05 = 56,39 \pm 0,07 \text{ см}^2.$$

При числе наблюдений $n \geq 40$ обработка результатов по вышеприведенной методике связана с большой вычислительной работой. В этом случае применяют способ обработки, основанный на группировании данных, как при построении гистограмм.

Результаты обрабатывают в следующем порядке.

1. Находят максимальный и минимальный члены ряда и полученный диапазон результатов наблюдений разделяют на r одинаковых интервалов, равных

$$h = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{r}.$$

Число интервалов выбирают в зависимости от числа наблюдений (см. § 51).

2. Подсчитывают частоту m_i для каждого интервала и находят середины интервалов $X_i (i = 1, 2, \dots, r)$. Середину интервала с наибольшей частотой принимают за начало отсчета X_0 («ложный нуль») и вычисляют для каждого интервала

$$\eta_i = \frac{X_i - X_0}{h}. \quad (\text{VIII.3})$$

3. Вычисляют точечные оценки первых двух начальных моментов [см. выражение (VI.17)] сгруппированного распределения величины η . Формулу для оценок получаем, заменив в выражении (VI.17) интеграл суммой и элементы вероятностей $p_X(x)dx$ частностями $\frac{m_i}{n}$:

$$\hat{\alpha}_j'[\eta] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r m_i \eta_i^j; \quad j=1,2. \quad (\text{VIII.4})$$

4. Находят оценки центральных моментов [см. выражение (VI.18)] сгруппированного распределения величины η :

$$\hat{\mu}_j'[\eta] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r m_i (\eta_i - \hat{\alpha}_1'[\eta])^j; \quad j=1,2. \quad (\text{VIII.5})$$

Сравнивая формулы (VIII.4) и (VIII.5), получаем следующие выражения для оценок первых двух центральных моментов через оценки начальных моментов:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_1'[\eta] &= 0; \\ \hat{\mu}_2'[\eta] &= \hat{\alpha}_2'[\eta] - (\hat{\alpha}_1'[\eta])^2. \end{aligned} \quad (\text{VIII.6})$$

5. Учитывая формулу (VIII.3), из выражений (VIII.6) получим формулы, по которым вычисляют оценки первого начального и второго центрального моментов результатов измерений:

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_1'[X] &= h \hat{\alpha}_1'[\eta] + X_0; \\ \hat{\mu}_2'[X] &= h^2 \hat{\mu}_2'[\eta]. \end{aligned} \quad (\text{VIII.7})$$

6. Полученные оценки моментов неизбежно отличаются от моментов негруппированного распределения, поскольку при группировании предполагается, что все частоты сконцентрированы в серединах интервалов. Оценки [см. выражение (VIII.7)] оказы-

ваются немного смещенными и, если интервалы $h > 0,5 \sqrt{\hat{\mu}_2'[X]}$ и основная часть частот приходится на средние интервалы, для их уточнения вводят так называемые поправки Шеппарда. Исправленные оценки моментов вычисляют следующим образом:

$$\hat{\alpha}_1'[X] = \hat{\alpha}_1'[X]; \quad \hat{\mu}_2'[X] = \hat{\mu}_2'[X] - \frac{1}{12} h^2. \quad (\text{VIII.8})$$

7. Вычисляют точечные оценки истинного значения измеряемой величины и средних квадратических отклонений результатов наблюдений и результата измерений:

$$\bar{X} = \hat{\alpha}_1'[X]; \quad s_X = \sqrt{\hat{\mu}_2'[X]}; \quad s_{\bar{X}} = \frac{1}{\sqrt{n}} s_X. \quad (\text{VIII.9})$$

8. Проверяют нормальность распределения результатов наблюдения.

9. Выявляют наличие грубых погрешностей и промахов.

10. Вычисляют доверительный интервал для истинного значения измеряемой величины и записывают итог измерений в виде формулы (VIII.1) или (VIII.1').

Пример. Обработать результаты наблюдений, приведенные в первом примере § 51 (табл. 10).

1. Интервал группирования выбираем равным 0,002 мм, число интервалов — восьми.

Таблица 10

i	X_i , мм	m_i	η_i	η_i^2	$m_i \eta_i$	$m_i \eta_i^2$
1	2	3	4	5	6	7
1	8,912	1	-3	9	-3	9
2	8,914	5	-2	4	-10	20
3	8,916	14	-1	1	-14	14
4	8,918	27	0	0	0	0
5	8,920	24	1	1	24	24
6	8,922	18	2	4	36	72
7	8,924	9	3	9	27	81
8	8,926	2	4	16	8	32
Суммы					+68	+252

2. Частоты m_i приведены в третьей графе таблицы. Наибольшая частота приходится на четвертый интервал, поэтому в качестве «ложного нуля» принимаем $X_0 = X_4 = 8,918$ и вычисляем значения η_i :

$$\eta_i = \frac{X_i - 8,918}{0,002},$$

которые приведены в четвертой графе.

3. Начальные моменты находим по данным, приведенным в последующих графах таблицы, учитывая, что общее число наблюдений $n = 100$:

$$\hat{\alpha}_1[\eta] = 0,68;$$

$$\hat{\alpha}_2[\eta] = 2,52.$$

4. По формулам (VIII.6) вычисляем центральные моменты:

$$\hat{\mu}_1[\eta] = 0;$$

$$\hat{\mu}_2[\eta] = 2,52 - 0,68^2 = 2,0576.$$

5. По формулам (VIII.7) найдем моменты результатов наблюдений:

$$\hat{\alpha}_1 [X] = 0,002 \cdot 0,68 + 8,918 = 8,91936 \text{ мм};$$

$$\hat{\mu}_2 [X] = (0,002)^2 \cdot 2,0576 = 8,2304 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2.$$

6. По формуле (VIII.8) вычисляем исправленные значения моментов:

$$\hat{\alpha}_1 [X] = 8,91936 \text{ мм};$$

$$\hat{\mu}_2 [X] = 8,2304 \cdot 10^{-6} - \frac{1}{12} (0,002)^2 = 7,8971 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2.$$

7. Таким образом, точечная оценка истинного значения измеряемой величины

$$\bar{X} = \hat{\alpha}_1 [X] = 8,91936 \text{ мм};$$

среднее квадратическое отклонение результатов наблюдений

$$s_X = \sqrt{\hat{\mu}_2 [X]} = 0,0028 \text{ мм};$$

среднее квадратическое отклонение результатов измерений

$$s_{\bar{X}} = \frac{1}{\sqrt{n}} s_X = 0,00028 \text{ мм}.$$

8. Нормальность распределения результатов наблюдений проверена в § 51.

9. Среди результатов наблюдений нет таких, в которых можно было бы подозревать наличие грубых погрешностей.

10. Поскольку распределение результатов нормально и число наблюдений велико, то и точечная оценка $\bar{X}$ истинного значения измеряемой величины распределена нормально с дисперсией, равной $(0,00028)^2 = 0,0823 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2$. Поэтому границы доверительного интервала для истинного значения можно найти из уравнения (VI.57). Задавшись значением доверительной вероятности, например $P = 0,99$, и воспользовавшись формулой (VI.57), получим:

$$2\Phi(t_P) - 1 = 0,99;$$

$$\Phi(t_P) = 0,995; t_P = 2,575.$$

Итог измерений составляет, таким образом:

$$Q = \bar{X} \pm t_P s_{\bar{X}} = 8,91936 \pm 0,00072 \text{ мм}$$

$$(n=100; P=99\%).$$

§ 57. СОВМЕСТНАЯ ОБРАБОТКА НЕСКОЛЬКИХ РЯДОВ НАБЛЮДЕНИЙ

Если многократные наблюдения проводятся в течение длительного периода времени, необходимо учитывать, что изменение параметров средств измерений и внешней среды может вызвать систематические или случайные изменения математических ожида-

ний и дисперсий результатов наблюдений. Для того чтобы эти изменения не ускользнули от внимания оператора, измерения проводятся часто в несколько серий, причем перед каждой серией измерений иногда заново настраивают измерительную аппаратуру и принимают меры к стабилизации параметров внешней среды.

В этом случае мы получаем k групп по n_j ($j = 1, 2, \dots, k$) результатов наблюдений в каждой. Группы наблюдений называются равнорассеянными, если средние арифметические $\bar{X}_j$ и оценки дисперсий s_j^2 во всех группах являются оценками одного и того же истинного значения измеряемой величины и одной и той же дисперсии, равной дисперсии результатов наблюдений.

Равнорассеянность групп наблюдений проверяется методами математической статистики, известными под общим названием дисперсионного анализа.

Предположим, что все N результатов наблюдений равнорассеяны. Тогда

$$M[X_{ij}] = M[X] \text{ и } D[X_{ij}] = D[X],$$

где X_{ij} — i -й результат в j -й группе. Вычислим групповые средние арифметические $\bar{X}_j$ и общее среднее $\bar{X}$:

$$\bar{X}_j = \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, k;$$

$$\bar{X} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \bar{X}_j = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \frac{1}{n_j} \sum_{i=1}^{n_j} X_{ij}.$$

Очевидно, что для каждого X_{ij} имеет место тождество

$$X_{ij} - \bar{X} = (\bar{X}_j - \bar{X}) + (X_{ij} - \bar{X}_j).$$

Возведем в квадрат обе его части и просуммируем их по всем i и j :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X})^2 &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{X}_j - \bar{X})^2 + \\ &+ \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 + 2 \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (\bar{X}_j - \bar{X}) (X_{ij} - \bar{X}_j) = \\ &= \sum_{j=1}^k n_j (\bar{X}_j - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 + 2 \sum_{j=1}^k \left[(\bar{X}_j - \bar{X}) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_j) \right]. \end{aligned}$$

Но сумма $\sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_j) = 0$ по определению $\bar{X}_j$ для всех j . Поэтому

$$\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X})^2 = \sum_{j=1}^k n_j (\bar{X}_j - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_j)^2, \quad (\text{VIII.10})$$

т. е. сумма квадратов отклонений результатов наблюдений от общего среднего равна сумме квадратов отклонений групповых средних от общего среднего и сумме квадратов отклонений результатов от групповых средних.

Из равенства (VIII.10) можно получить следующие оценки дисперсии результатов наблюдений:

$$s_I^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X})^2; \quad (\text{VIII.11})$$

$$s_{II}^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{j=1}^k n_j (\bar{X}_j - \bar{X})^2; \quad (\text{VIII.12})$$

$$s_j^2 = \frac{1}{n_j-1} \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_j)^2; \quad j=1, 2, \dots, k; \quad (\text{VIII.13})$$

$$s_{III}^2 = \frac{1}{N-k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{n_j} (X_{ij} - \bar{X}_j)^2 = \frac{1}{N-k} \sum_{j=1}^k (n_j-1) s_j^2, \quad (\text{VIII.14})$$

где s_I^2 — общее рассеивание в ряде наблюдений; s_{II}^2 — рассеивание между групповыми средними; s_j^2 — рассеивание внутри каждой j -й группы; s_{III}^2 — среднее рассеивание внутри групп.

Для проверки гипотезы о равномерности наблюдений используется распределение, которое получается следующим образом: если u и v две независимые случайные величины, подчиняющиеся χ^2 -распределениям с k_1 и k_2 степенями свободы соответственно, то их отношение

$$F_{k_1, k_2} = \frac{k_2 u}{k_1 v}$$

имеет F -распределение Фишера с k_1 и k_2 степенями свободы. Плотность этого распределения определяется уравнением

$$p_F(\xi) = \frac{\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)!}{\left(\frac{k_1}{2}\right)! \left(\frac{k_2}{2}\right)!} (k_1)^{\frac{1}{2} k_1} (k_2)^{\frac{1}{2} k_2} \frac{\xi^{\frac{1}{2} k_2 - 1}}{(k_2 \xi + k_1)^{\frac{1}{2} (k_1 + k_2)}},$$

а значения его интегральной функции

$$\alpha = \int_0^{(F_{k_1, k_2})_{\alpha}} p_F(\xi) d(\xi);$$

соответствующие различным значениям F , k_1 и k_2 , представлены в табл. 12 Приложения.

Значение F -распределения для дисперсионного анализа объясняется тем, что ему подчиняется распределение отношения двух независимых оценок дисперсии $\hat{\sigma}_1^2$ и $\hat{\sigma}_2^2$, вычисленных на основании n_1 и n_2 нормально распределенных результатов наблюдений. В соответствии с формулой (VI.56) отношение

$$\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} = \frac{(n_2 - 1) \chi_{n_2-1}^2}{(n_1 - 1) \chi_{n_1-1}^2},$$

поэтому имеет F -распределение с $(n_1 - 1)$, $(n_2 - 1)$ степенями свободы.

Если при выбранном уровне значимости $q = 1 - \alpha$ окажется, что

$$\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} < (F_{n_1-1; n_2-1})_q, \quad (\text{VIII.15})$$

где $\hat{\sigma}_1^2 > \hat{\sigma}_2^2$, то говорят, что различие оценок незначимо, и они являются двумя независимыми оценками одной и той же дисперсии. В противном случае приходится признать это различие существенным, имеющим более глубокие причины, нежели просто расхождение, вызванные ограниченностью опытных данных.

Гипотезу о равномерности групп результатов наблюдений проверяют в два этапа.

1. Вначале проверяется гипотеза о равенстве дисперсий s_j^2 во всех группах наблюдений. Для этого их располагают в вариационный ряд в порядке возрастания: $s_{(1)}^2; s_{(2)}^2; \dots; s_{(k)}^2$ и проверяют значимость отношения $s_{(k)}^2/s_{(1)}^2$. Если это отношение незначимо, то незначимы и все остальные. Тогда следует принять исследуемую гипотезу как правдоподобную и считать, что рассеивание результатов наблюдений относительно средних во всех группах одинаково. В противном случае приходится признать распределения в группах с дисперсиями $s_{(1)}^2$ и $s_{(k)}^2$ отличными друг от друга и проверить значимость отношений всех других дисперсий.

2. При равенстве дисперсий в группах проверяется гипотеза о равенстве математических ожиданий во всех группах наблюдений. Если эта гипотеза верна, то s_{II}^2 и s_{III}^2 являются независимыми точечными оценками одной и той же дисперсии и их отношение должно подчиняться F -распределению с $k-1$ и $N-k$ степенями свободы. Если расхождение этих оценок значимо при выбранном уровне значимости, то приходится признать, что при проведении измерений имели место случайные или систематические сдвиги математического ожидания результатов наблюдений, вследствие чего расхождения между средними оказались больше тех, которые могут быть оправданы ограниченностью опытных данных.

При двух сериях наблюдений F -распределением воспользоваться не удастся. В этом случае для проверки гипотезы о равенстве математических ожиданий вычисляется величина

$$t_{1-2} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}. \quad (\text{VIII.16})$$

Можно показать, что если результаты наблюдений распределены нормально, то t_{1-2} имеет распределение Стьюдента с $n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы, асимптотически переходящее в нормальное с $M[t_{1-2}] = 0$ и $D[t_{1-2}] = 1$ при большом числе наблюдений.

Задаваясь определенной доверительной вероятностью P или уровнем значимости $q = 1 - P$, по табл. 8 Приложения найдем соответствующее значение t_P , и если $|t_{1-2}| < t_P$, то гипотеза о равенстве математических ожиданий принимается.

Распределением Стьюдента пользуются и в том случае, когда проверка равенства дисперсий в группах дала отрицательные результаты. Тогда приходится проверять значимость всех разностей вида $\bar{X}_l - \bar{X}_m$, где $l, m = 1, 2, \dots, k$, поскольку незначимость различия между самым большим и самым малым средним еще ничего не говорит о значимости различий между другими средними. Причиной этого является как раз различие дисперсий в отдельных группах наблюдений.

Если проведенные вычисления показали, что оценки дисперсий s_j^2 и средних $\bar{X}_j$ групп наблюдений незначимо отличаются друг от друга, то группы результатов наблюдений считаются равнорассеянными. Их можно объединить в один ряд и обрабатывать по правилам, описанным в предыдущем параграфе. Значимое различие групповых средних говорит о том, что на формирование результата измерений большое влияние оказывает какой-то определенный фактор или группа факторов, и следует попытаться их обнаружить и принять меры к их стабилизации.

В том случае, когда значимо различие дисперсий s_j^2 , а средние $\bar{X}_j$ групп являются оценками одного и того же истинного значения измеряемой величины, группы результатов называются неравно-рассеянными (неравноточными). Методы их математической обработки изложены в § 58.

Пример. Даны результаты трех групп наблюдений дециметрового интервала штрихового эталона метра с визированием на штрихи по фотоэлектрическому микроскопу. Каждая группа из пяти наблюдений объединяет результаты наблюдений, полученные в течение 10—15 мин в утренние часы после стабилизации температурного режима. Результаты наблюдений (в мкм) вместе со средними арифметическими для каждой группы представлены в табл. 11.

Таблица 11

Номер наблюдения	Группы наблюдений		
	1	2	3
1	-1,450	-1,460	-1,440
2	-1,490	-1,460	-1,550
3	-1,470	-1,440	-1,430
4	-1,450	-1,430	-1,480
5	-1,450	-1,500	-1,330
$\bar{X}_j$	-1,462	-1,458	-1,460

1. Вычислим оценки дисперсий для каждой группы результатов: $s_1^2 = 320 \cdot 10^{-6}$ мкм²; $s_2^2 = 720 \cdot 10^{-6}$ мкм²; $s_3^2 = 3800 \cdot 10^{-6}$ мкм² и найдем отношения:

$$\frac{s_3^2}{s_1^2} = 11,875; \quad \frac{s_2^2}{s_1^2} = 2,25; \quad \frac{s_3^2}{s_2^2} = 5,278.$$

Эти отношения имеют F -распределение с $k_1=4$ и $k_2=4$ степенями свободы. При уровне значимости $q=5\%$, $\alpha=95\%$ из табл. 12 Приложения находим:

$$(F_4; 4)_{0,05} = 6,39.$$

Таким образом, при 5%-ном уровне значимости можно сделать заключение о равенстве дисперсий в 1-й и 2-й и во 2-й и 3-й группах наблюдений, различие же дисперсий в 1-й и 3-й группах следует признать значимым.

2. Теперь проверим по Стьюденту значимость различий между средними групп результатов наблюдений, для чего по формуле (VIII.16) вычислим разности:

$$t_{1-2} = \frac{1,462 - 1,458}{\sqrt{4 \cdot 320 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 720 \cdot 10^{-6}}} \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 5(5+5-2)}{5+5}} = 0,278.$$

$$t_{1-3} = \frac{1,462 - 1,460}{\sqrt{4 \cdot 320 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 3800 \cdot 10^{-6}}} \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 5(5+5-2)}{5+5}} = 0,07;$$

$$t_{2-3} = \frac{1,460 - 1,458}{\sqrt{4 \cdot 720 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 3800 \cdot 10^{-6}}} \cdot \sqrt{\frac{5 \cdot 5(5+5-2)}{5+5}} = 0,067.$$

При $q=5\%$ из табл. 8 Приложения для $P=1-q=95\%$ находим для $k=n_1+n_2-2=8$

$$t_{0,95} = 2,30,$$

поэтому расхождения средних можно считать незначимыми.

Таким образом, 1-я и 2-я, а также 2-я и 3-я группы измерений являются равнорассеянными, в то время как 1-ю и 3-ю таковыми назвать нельзя.

§ 58. ОБРАБОТКА НЕРАВНОРАССЕЯННЫХ РЯДОВ НАБЛЮДЕНИЙ

В практике исследовательских работ часто встречаются ситуации, когда необходимо найти наиболее достоверное значение величины и оценить его возможные отклонения от истинного значения на основании измерений, проводимых разными наблюдателями с применением разнообразных измерительных средств и методов измерений в различных лабораториях или условиях внешней среды.

Ряды получающихся при этом результатов наблюдений называются неравнорассеянными (неравноточными), если оценки их дисперсий значительно отличаются друг от друга, а средние арифметические являются оценками одного и того же значения измеряемой величины.

Если средние неравнорассеянных рядов наблюдений мало отличаются друг от друга, то говорят о высокой воспроизводимости измерений, которая количественно характеризуется параметрами рассеивания результатов.

Рассмотрим некоторые случаи, приводящие к необходимости обработки результатов неравнорассеянных измерений:

1. Если при точных измерениях необходимо убедиться в отсутствии неисклученных систематических погрешностей, то измерения проводятся несколькими исследователями или группами исследователей. Если средние арифметические полученных рядов наблюдений незначимо отличаются друг от друга и ничто не указывает на наличие систематических погрешностей, то заманчиво объединить все полученные результаты и на основе их математической обработки получить более достоверные сведения об измеряемой величине.

2. Аналогичные измерения были выполнены в разных лабораториях различными методами, и получены отличающиеся друг от друга результаты. Естественно и в этом случае, используя все имеющиеся данные, попытаться получить более достоверные значения измеряемых величин.

3. Измерения, относящиеся к образцовым мерам и измерительным приборам, часто повторяются через некоторое время. В конце концов накапливаются ряды наблюдений и возникает необходимость объединить их. Точность рядов наблюдений различна, с одной стороны, из-за того, что для впервые проводимых измерений характерно большее рассеивание результатов, а с другой стороны, из-за того, что с течением времени средства измерения стареют или заменяются новыми.

Во всех описанных ситуациях приходится прибегать к методам обработки результатов неравнорассеянных рядов наблюдений, задача которых в общем случае заключается в нахождении наиболее достоверного значения измеряемой величины и оценки воспроизводимости измерений.

Основой для расчета служат следующие данные:

- 1) $\bar{X}_1; \bar{X}_2; \dots; \bar{X}_m$ — средние арифметические m рядов равно-
рассеянных результатов наблюдений постоянной физической вели-
чины Q ;
- 2) $\sigma_1; \sigma_2; \dots; \sigma_m$ — средние квадратические отклонения (или
их оценки) результатов наблюдений в отдельных рядах;
- 3) $n_1, n_2; \dots; n_m$ — числа наблюдений в каждом ряду;
- 4) m — число рядов.

Наиболее достоверное значение $\bar{X}_0$, которое мы можем припи-
сать измеряемой величине на основании имеющихся данных, долж-
но представлять собой некоторую функцию исходных средних
арифметических:

$$\bar{X}_0 = F(\bar{X}_1; \bar{X}_2; \dots; \bar{X}_m), \quad (\text{VIII.17})$$

причем $\bar{X}_0 = Q + \lambda_0$; $\bar{X}_j = Q + \lambda_j$; $j = 1, 2, \dots, m$, где λ_0 и λ_j — случай-
ные погрешности значений $\bar{X}_0$ и $\bar{X}_j$. Для отыскания вида этой функ-
ции возьмем производную от нее по истинному значению Q изме-
ряемой величины:

$$\frac{\partial \bar{X}_0}{\partial Q} = \frac{\partial F}{\partial \bar{X}_1} \cdot \frac{\partial \bar{X}_1}{\partial Q} + \frac{\partial F}{\partial \bar{X}_2} \cdot \frac{\partial \bar{X}_2}{\partial Q} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \bar{X}_m} \cdot \frac{\partial \bar{X}_m}{\partial Q}.$$

Поскольку $\frac{\partial \bar{X}_j}{\partial Q} = \frac{\partial (Q + \lambda_j)}{\partial Q} = 1$; $j = 0; 1; 2; \dots; m$, то предыду-
щее равенство можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{X}_1} + \frac{\partial F}{\partial \bar{X}_2} + \dots + \frac{\partial F}{\partial \bar{X}_m} = 1. \quad (\text{VIII.18})$$

Ни одна из стоящих в этом равенстве производных не может
зависеть от значений средних арифметических исходных рядов на-
блюдений. В противном случае выражение (VIII.18) устанавлива-
ло бы некоторую функциональную связь между отдельными сред-
ними арифметическими. Однако эти средние арифметические,
будучи получены в различных условиях и, может быть, не одним на-
блюдателем с помощью разных средств измерений, являются неза-
висимыми величинами, которые объединяет лишь общность их ма-
тематического ожидания. Поэтому производные в выражении
(VIII.18) могут быть только постоянными величинами и искомая
функция должна иметь вид

$$\bar{X}_0 = \sum_{j=1}^m a_j \bar{X}_j + C.$$

Возьмем математическое ожидание обеих частей этого равенства:

$$M[\bar{X}_0] = M\left[\sum_{j=1}^m a_j \bar{X}_j + C\right] = \sum_{j=1}^m a_j M[\bar{X}_j] + C.$$

Для того, чтобы оценка $\bar{X}_0$ истинного значения была несмещенной, необходимо выполнение условия $M[\bar{X}_0] = M[\bar{X}_j] = Q$. Поэтому

$$Q = Q \sum_{j=1}^m a_j + C.$$

Полученное соотношение выполняется только в том случае, когда

$$C = 0; \quad \sum_{j=1}^m a_j = 1.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\bar{X}_0 = \sum_{j=1}^m a_j \bar{X}_j; \quad \sum_{j=1}^m a_j = 1. \quad (\text{VIII.19})$$

Величина $\bar{X}_0$, определенная в соответствии с выражением (VIII.19), называется средним взвешенным, а коэффициенты a_j будем называть весовыми коэффициентами исходных средних арифметических. Именно они и характеризуют степень нашего доверия к соответствующему ряду наблюдений.

Желательно так выбрать весовые коэффициенты, чтобы они обращали в минимум дисперсию среднего взвешенного. Последняя в соответствии с уравнением (VIII.19) составляет

$$\begin{aligned} D[\bar{X}_0] &= \sigma_{\bar{X}_0}^2 = D\left[\sum_{j=1}^m a_j \bar{X}_j\right] = \sum_{j=1}^m a_j^2 D[\bar{X}_j] = \\ &= \sum_{j=1}^m a_j^2 \sigma_{\bar{X}_j}^2 = \sum_{j=1}^m a_j^2 \frac{\sigma_j^2}{n_j}, \end{aligned} \quad (\text{VIII.20})$$

где $\sigma_{\bar{X}_j}^2$ — дисперсия j -го среднего арифметического, которая в n_j раз меньше дисперсии σ_j^2 j -го ряда наблюдений.

Для ясности обособим в равенстве (VIII.20) для дисперсии среднего взвешенного последний член суммы:

$$D[\bar{X}_0] = \sum_{j=1}^{m-1} a_j^2 \sigma_{\bar{X}_j}^2 + a_m^2 \sigma_{\bar{X}_m}^2$$

и выразим из условия (VIII.19) m -й весовой коэффициент через все остальные:

$$D[\bar{X}_0] = \sum_{j=1}^{m-1} a_j^2 \sigma_{\bar{X}_j}^2 + \left(1 - \sum_{j=1}^{m-1} a_j\right)^2 \sigma_{\bar{X}_m}^2.$$

Найдем производную от дисперсии по k -му весовому коэффициенту, где $k=1, 2, \dots, m-1$, и приравняем ее к нулю:

$$\frac{d}{da_k} D[\bar{X}_0] = 2a_k \sigma_{\bar{X}_k}^2 - 2 \left(1 - \sum_{j=1}^{m-1} a_j \right) \sigma_{\bar{X}_m}^2 = 2a_k \sigma_{\bar{X}_k}^2 - 2a_m \sigma_{\bar{X}_m}^2 = 0.$$

Теперь можно записать систему из m уравнений с m неизвестными коэффициентами

$$\begin{cases} a_k \sigma_{\bar{X}_k}^2 - a_m \sigma_{\bar{X}_m}^2 = 0; & k=1, 2, \dots, m-1; \\ \sum_{j=1}^m a_j = 1. \end{cases}$$

Подставляя значения $m-1$ первых весовых коэффициентов из первых уравнений в последнее уравнение, получим выражение для последнего коэффициента

$$a_m = \frac{\frac{1}{\sigma_{\bar{X}_m}^2}}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_{\bar{X}_j}^2}}.$$

Аналогично из $m-1$ первых уравнений системы находят и остальные весовые коэффициенты.

Окончательно имеем

$$a_j = \frac{\frac{1}{\sigma_{\bar{X}_j}^2}}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_{\bar{X}_j}^2}} = \frac{\frac{n_j}{\sigma_j^2}}{\sum_{j=1}^m \frac{n_j}{\sigma_j^2}}. \quad (\text{VIII.21})$$

Величина

$$p_j = K \frac{n_j}{\sigma_j^2} = K \frac{1}{\sigma_{\bar{X}_j}^2} \quad (\text{VIII.22})$$

называется весом j -го среднего арифметического, причем коэффициент K может быть любым числом как размерным, так и безразмерным. В выражениях для весовых коэффициентов (VIII.21) этот коэффициент пропадает, поэтому он не сказывается на вычислениях среднего взвешенного и его дисперсии. Действительно, подставив выражение (VIII.22) в формулу (VIII.21), имеем

$$a_j = \frac{p_j}{\sum_{j=1}^m p_j}. \quad (\text{VIII.23})$$

Веса средних арифметических вычислить по формуле (VIII.22) значительно проще, чем весовые коэффициенты по формуле (VIII.21), поэтому имеет смысл записать выражение для среднего взвешенного через отдельные веса:

$$\bar{X}_0 = \frac{\sum_{j=1}^m p_j \bar{X}_j}{\sum_{j=1}^m p_j}. \quad (\text{VIII.24})$$

Подставив далее значения весовых коэффициентов (VIII.21) в формулу (VIII.20), получим значение дисперсии и соответственно среднее квадратическое отклонение среднего взвешенного:

$$D[\bar{X}_0] = \sigma_{\bar{X}_0}^2 = \frac{1}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sigma_{\bar{X}_j}^2}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^m \frac{n_j}{\sigma_j^2}}, \quad (\text{VIII.25})$$

из которого, в частности, следует, что дисперсия среднего взвешенного меньше дисперсии всех средних арифметических, если веса выбраны прямо пропорциональными числам измерений в отдельных рядах и обратно пропорциональными их дисперсиям, или, что то же самое, обратно пропорциональными квадратам средних квадратических отклонений средних арифметических исходных рядов наблюдений.

Если теоретические дисперсии $\sigma_{\bar{X}_j}^2$ неизвестны, то пользуются их оценками $s_{\bar{X}_j}^2$, с помощью которых определяют веса или весовые коэффициенты.

Доверительная граница погрешности результата измерений $t_p s_{\bar{X}_0}$ при условии, что числа n_j больше $20 \div 30$, может быть определена по интегральной функции нормированного нормального распределения:

$$P\{|\bar{X}_0 - Q| < t_p s_{\bar{X}_0}\} = 2\Phi(t_p) - 1.$$

При малом числе нормально распределенных результатов наблюдений пользуются распределением Стьюдента с числом степеней свободы

$$k = \frac{m^2}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j - 1}}. \quad (\text{VIII.26})$$

* Формулу (VIII.26) получаем из более общей формулы (VIII.56) подстановкой $\frac{\partial F}{\partial Q_j} = a_j$.

Если же об исходных распределениях нет никаких заслуживающих внимания данных, то на основании центральной предельной теоремы можно все-таки предполагать, что распределение среднего взвешенного нормально, поскольку оно является суммой большого числа случайных величин с конечными дисперсиями и математическими ожиданиями.

В заключение отметим, что полученные результаты справедливы не только тогда, когда данными для расчета являются ряды прямых равнорассеянных наблюдений, но и в том случае, если исходные величины являются в свою очередь результатами неравнорассеянных, косвенных или совокупных измерений. Операции определения средних взвешенных во всех этих случаях не меняются, а точность результата повышается.

Пример. Три коллективами экспериментаторов с помощью различных методов измерения были получены следующие значения ускорения свободного падения (со средними квадратическими отклонениями результатов измерений): $g = 981,9190 \pm \pm 0,0004 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$; $g = 981,9215 \pm 0,0016 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$; $g = 981,923 \pm 0,002 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}$.

Весовые коэффициенты отдельных результатов вычислим по формуле (VIII.21):

$$\alpha_1 = \frac{1}{(0,0004)^2} : \left[\frac{1}{(0,0004)^2} + \frac{1}{(0,0016)^2} + \frac{1}{(0,002)^2} \right] = 0,91;$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{(0,0016)^2} : \left[\frac{1}{(0,0004)^2} + \frac{1}{(0,0016)^2} + \frac{1}{(0,002)^2} \right] = 0,06;$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{(0,002)^2} : \left[\frac{1}{(0,0004)^2} + \frac{1}{(0,0016)^2} + \frac{1}{(0,002)^2} \right] = 0,03.$$

Среднее взвешенное в соответствии с уравнением (VIII.19) составляет:

$$\begin{aligned} \bar{X}_0 &= 0,91 \cdot 981,9190 + 0,06 \cdot 981,9215 + 0,03 \cdot 981,923 = \\ &= 981,9193 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2} \end{aligned}$$

и его среднее квадратическое отклонение

$$\begin{aligned} s_{\bar{X}_0}^2 &= \frac{1}{\frac{1}{(0,0004)^2} + \frac{1}{(0,0016)^2} + \frac{1}{(0,002)^2}} = 14,51 \cdot 10^{-8} \text{ см}^2 \cdot \text{с}^{-4}; \\ s_{\bar{X}_0} &= 0,00038 \approx 0,0004 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}. \end{aligned}$$

Итог измерения ускорения свободного падения следует, таким образом, записать в виде

$$g = 981,9193 \pm 0,0004 \text{ см} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Несмотря на то, что вес первого результата в десятки раз превышает веса результатов второго и третьего измерений, использова-

ние их позволило исправить цифру в четвертом разряде после запятой в значении ускорения свободного падения, хотя точность этого результата (в пределах округления) не изменилась.

§ 59. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

При косвенных измерениях значение искомой величины получают на основании известной зависимости, связывающей ее с другими величинами, подвергаемыми прямым измерениям.

Вначале рассмотрим тот простейший случай, когда искомая величина Q_Z определяется как сумма двух величин Q_X и Q_Y :

$$Q_Z = Q_X + Q_Y. \quad (\text{VIII.27})$$

Поскольку результаты прямых измерений величин Q_X и Q_Y (после исключения систематических погрешностей) включают в себя некоторые случайные погрешности, то формулу косвенного измерения суммы можно переписать в виде

$$\bar{Z} - \lambda_Z = \bar{X} - \lambda_X + \bar{Y} - \lambda_Y, \quad (\text{VIII.28})$$

где $\bar{X}$, $\bar{Y}$ — средние арифметические (или средние взвешенные), полученные при обработке результатов прямых измерений величин Q_X и Q_Y ; λ_X , λ_Y — случайные погрешности средних; $\bar{Z}$, λ_Z — оценка истинного значения косвенно измеряемой величины и его случайная погрешность.

Из уравнения (VIII.28) непосредственно вытекает справедливость двух следующих равенств:

$$\bar{Z} = \bar{X} + \bar{Y}; \quad \lambda_Z = \lambda_X + \lambda_Y, \quad (\text{VIII.29})$$

т. е. оценкой истинного значения косвенно измеряемой величины должна служить сумма оценок истинных значений исходных величин, случайные погрешности которых складываются.

Математическое ожидание оценки $\bar{Z}$ равно, очевидно, истинному значению искомой величины:

$$M[\bar{Z}] = M[\bar{X} + \bar{Y}] = M[\bar{X}] + M[\bar{Y}] = Q_X + Q_Y = Q_Z$$

и ее дисперсия составляет:

$$\begin{aligned} \sigma_{\bar{Z}}^2 &= D[\bar{Z}] = D[\lambda_Z] = D[\lambda_X + \lambda_Y] = M[(\lambda_X + \lambda_Y)^2] = \\ &= M[\lambda_X^2 + \lambda_Y^2 + 2\lambda_X\lambda_Y] = M[\lambda_X^2] + M[\lambda_Y^2] + 2M[\lambda_X\lambda_Y] = \\ &= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2M[\lambda_X\lambda_Y]. \end{aligned}$$

Математическое ожидание произведения случайных погрешностей называется корреляционным моментом и определяет степень «тес-

ноты» линейной зависимости между погрешностями. Вместо корреляционного момента часто пользуются безразмерной величиной, называемой коэффициентом корреляции:

$$r_{\bar{X}\bar{Y}} = \frac{M[\lambda_X \lambda_Y]}{\sigma_{\bar{X}} \sigma_{\bar{Y}}}. \quad (\text{VIII.30})$$

Отсюда, в частности, следует, что коэффициент корреляции между погрешностями λ_X и λ_Y средних арифметических равен коэффициенту корреляции между погрешностями δ_X и δ_Y результатов отдельных измерений величин Q_X и Q_Y

$$r_{\bar{X}\bar{Y}} = r_{XY}.$$

С учетом коэффициента корреляции дисперсия результата косвенных измерений, т. е. оценки истинного значения косвенно измеряемой величины,

$$\sigma_Z^2 = \sigma_{\bar{X}}^2 + \sigma_{\bar{Y}}^2 + 2r_{XY} \sigma_{\bar{X}} \sigma_{\bar{Y}}. \quad (\text{VIII.31})$$

Если погрешности измерения величин Q_X и Q_Y не коррелированы, то выражение (VIII.31) упрощается:

$$\sigma_Z^2 = \sigma_{\bar{X}}^2 + \sigma_{\bar{Y}}^2; \quad \sigma_Z = \sqrt{\sigma_{\bar{X}}^2 + \sigma_{\bar{Y}}^2}. \quad (\text{VIII.32})$$

В тех случаях, когда теоретические дисперсии распределения результатов прямых измерений неизвестны, определяется оценка $s_{\bar{Z}}^2$ дисперсии результата косвенных измерений через оценки дисперсий $s_{\bar{X}}^2$ и $s_{\bar{Y}}^2$:

$$s_Z^2 = s_{\bar{X}}^2 + s_{\bar{Y}}^2 + 2\hat{r}_{XY} s_{\bar{X}} s_{\bar{Y}}. \quad (\text{VIII.33})$$

Оценки коэффициента корреляции $\hat{r}_{XY}$ вычисляют на основании результатов прямых измерений исходных величин:

$$\hat{r}_{XY} = \frac{1}{s_{\bar{X}} s_{\bar{Y}}} \sum_{i=1}^m (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}), \quad (\text{VIII.34})$$

где $m = \min(n_X, n_Y)$ — наименьшее из чисел наблюдений n_X и n_Y .

При положительной корреляции, т. е. когда $r_{XY} > 0$, одна из погрешностей имеет тенденцию возрастать при увеличении другой, если же корреляция отрицательна, то $r_{XY} < 0$ и погрешность измерения одной величины обнаруживает тенденцию к уменьшению при увеличении погрешности измерения другой величины. Возможные значения коэффициента корреляции лежат в интервале $-1 \leq r_{XY} \leq +1$. Если $r_{XY} = 0$, то погрешности измерения некоррелированы.

О наличии корреляции удобно судить по графику, на котором в координатах X, Y изображены пары последовательно получаемых результатов измерения величин Q_X и Q_Y .

На рис. 34 изображены случаи совместного распределения результатов измерения при положительной (рис. 34, а) и отрицательной (рис. 34, б) корреляции. Результаты измерений на рис. 34, в некоррелированы.

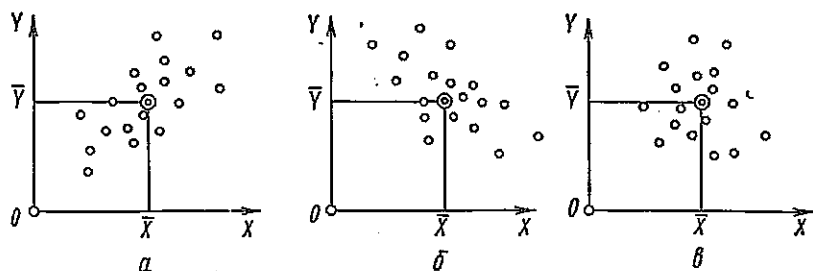


Рис. 34

Чаще всего наличия корреляции следует ожидать в тех случаях, когда обе величины измеряются одновременно однотипными измерительными средствами, причем неуловимые (на данном уровне качества эксперимента) изменения внешних воздействий (электрических, магнитных, температурных и других полей, условий питания и прочее) одновременно заметно влияют на формирование случайных погрешностей их измерения. В некоторых случаях причиной корреляции между результатами измерений может стать сам оператор, поскольку при некоторых исследованиях, связанных с ручным уравниванием приборов сравнения (сличением мер на точных весах, в фотометрии), искусство и опыт наблюдателя оказывают значительное влияние на результаты измерений.

В тех же случаях, когда исходные величины измеряют с помощью различных средств измерения в разное время, можно с полным правом ожидать, что результаты, если и будут коррелированы, то очень мало, и коэффициентом корреляции в выражениях (VIII.31) и (VIII.33) можно пренебречь.

Распределение результата косвенных измерений будет нормальным, если нормальны распределения результатов прямых измерений. В этих условиях для построения доверительного интервала, накрывающего истинное значение измеряемой величины, следует применить нормированную функцию нормального распределения, если число измерений достаточно велико. Если же объемы рядов прямых измерений недостаточно велики, то можно воспользоваться распределением Стьюдента с некоторым «эффективным»* чис-

* См. формулу (VIII.57).

лом степеней свободы, которое для рассматриваемого случая при независимости погрешностей измерения ($r_{xy}=0$), подсчитывается по формуле

$$k_{эфф} = \frac{(s_X^2 + s_Y^2)^2}{\frac{s_X^4}{n_X - 1} + \frac{s_Y^4}{n_Y - 1}} = \frac{s_Z^4}{\frac{s_X^4}{n_X - 1} + \frac{s_Y^4}{n_Y - 1}}, \quad (\text{VIII.35})$$

где n_X, n_Y — числа прямых наблюдений величин Q_X и Q_Y .

Если числа наблюдений одинаковы ($n_X = n_Y = n$), то выражение для эффективного числа степеней свободы распределения Стьюдента упрощается:

$$k_{эфф} = (n - 1) \frac{s_Z^4}{s_X^4 + s_Y^4}. \quad (\text{VIII.36})$$

Итоговый результат измерений записываем в виде

$$Q_Z = \bar{Z} \pm t_p s_{\bar{Z}},$$

где t_p определяется из выражения:

$$P \{ |\bar{Z} - Q_Z| < t_p s_{\bar{Z}} \} = 2\Phi(t_p) - 1$$

или

$$P \{ |\bar{Z} - Q_Z| < t_p s_{\bar{Z}} \} = 2 \int_0^{t_p} S(tk_{эфф}) dt.$$

Рассмотренные выражения можно использовать и в том случае, когда искомая величина является суммой m измеряемых прямыми способами величин:

$$Q_0 = \sum_{j=1}^m Q_j. \quad (\text{VIII.37})$$

К такой формуле приходим при измерении больших величин по частям, например, при измерении длин с помощью концевых мер длины, взвешивании с применением набора гирь, измерении на электрических приборах сравнения с помощью магазинов сопротивлений, емкостей или индуктивностей, измерении объемов жидкостей мерниками меньшей вместимости и так далее. В этих случаях в качестве наиболее достоверной оценки $\hat{Q}_0$ истинного значения измеряемой величины Q_0 принимается сумма оценок $\hat{Q}_j$ истинных значений слагаемых:

$$\hat{Q}_0 = \sum_{j=1}^m \hat{Q}_j, \quad (\text{VIII.38})$$

а дисперсию оценки итогового результата находят по формуле (VIII.38):

$$\sigma_{\hat{Q}_0}^2 = \sum_{j=1}^m \sigma_{\hat{Q}_j}^2 + \sum_{\substack{k,l=1 \\ k \neq l}}^m \sigma_{\hat{Q}_k} \sigma_{\hat{Q}_l} r_{kl}, \quad (\text{VIII.39})$$

где $\sigma_{\hat{Q}_j}^2$ — дисперсия j -го слагаемого; r_{kl} — коэффициент корреляции между случайными погрешностями k -го и l -го слагаемых.

При $m=2$ формула (VIII.39) вырождается в выражение (VIII.31):

$$\sigma_{\hat{Q}_0}^2 = \sigma_{\hat{Q}_1}^2 + \sigma_{\hat{Q}_2}^2 + \sigma_{\hat{Q}_1} \sigma_{\hat{Q}_2} r_{1;2} + \sigma_{\hat{Q}_1} \sigma_{\hat{Q}_2} r_{2;1}.$$

Из определения (VIII.30) коэффициента корреляции следует, что $r_{2;1} = r_{1;2}$, поэтому

$$\sigma_{\hat{Q}_0}^2 = \sigma_{\hat{Q}_1}^2 + \sigma_{\hat{Q}_2}^2 + 2\sigma_{\hat{Q}_1} \sigma_{\hat{Q}_2} r_{1;2}.$$

При неизвестных дисперсиях слагаемых в выражение (VIII.39) следует подставлять их оценки $s_{\hat{Q}_j}^2$, а оценки коэффициентов корреляции вычисляют по формуле

$$r_{kl} = \frac{1}{s_k s_l} \sum_{i=1}^n v_{k_i} v_{l_i},$$

где n — наименьшее из чисел наблюдения величин Q_k и Q_l .

Если исходные измерения независимы, то все коэффициенты корреляции равны нулю и среднее квадратическое отклонение оценки Q_0 определяют с помощью более простого выражения

$$s_{\hat{Q}_0} = \sqrt{\sum_{j=1}^m s_{\hat{Q}_j}^2}. \quad (\text{VIII.40})$$

Пример. Без учета поправки на теплообмен подъем температуры $\Delta\vartheta$ в калориметре определяют как разность между конечной ϑ_f^* и начальной ϑ_i^* температурами главного периода калориметрического опыта:

$$\Delta\vartheta = \vartheta_f^* - \vartheta_i^*.$$

После обработки опытных данных были получены следующие (округленные) результаты с соответствующими средними квадратическими отклонениями:

$$\begin{aligned} \vartheta_i^* &= 25,10718^\circ \text{C}; & s_i &= 0,6 \cdot 10^{-4}^\circ \text{C}; \\ \vartheta_f^* &= 27,10739^\circ \text{C}; & s_f &= 0,3 \cdot 10^{-4}^\circ \text{C}. \end{aligned}$$

Результат косвенного измерения находим по формуле (VIII.29) как разность соответствующих средних арифметических:

$$\overline{\Delta\vartheta} = \overline{\vartheta}_i^* - \overline{\vartheta}_f^* = 27,10739 - 25,10718 = 2,00021^\circ \text{C},$$

а среднее квадратическое отклонение результата по формуле (VIII.33):

$$s_{\overline{\Delta\vartheta}} = \sqrt{s_i^2 + s_f^2},$$

где $s_i = 0,6 \cdot 10^{-4}^\circ\text{C}$ — среднее квадратическое отклонение результата измерения начальной температуры и $s_f = 0,3 \cdot 10^{-4}^\circ\text{C}$ — среднее квадратическое отклонение результата измерения конечной температуры главного периода калориметрического опыта.

Среднее квадратическое отклонение результата измерения подъема температуры в калориметре составляет, таким образом,

$$s_{\overline{\Delta\vartheta}} = \sqrt{0,6^2 \cdot 10^{-8} + 0,3^2 \cdot 10^{-8}} = 0,7 \cdot 10^{-4}^\circ \text{C}.$$

Итог измерения записывается в виде

$$\Delta\vartheta = 2,00021 \pm 0,00007^\circ\text{C}.$$

Здесь мы приняли $t_p = 1$, что при нормальном распределении погрешностей измерений исходных величин и достаточно большом числе их наблюдений соответствует доверительной вероятности 68,26% нахождения подъема температуры в указанных пределах.

Рассмотрим теперь общий случай, когда требуется оценить истинное значение величины Q , которая связана с величинами Q_j ($j = 1, 2, \dots, m$), измеряемыми прямыми способами, некоторым нелинейным уравнением

$$Q = F(Q_1; Q_2; \dots; Q_m). \quad (\text{VIII.41})$$

Найдем такие оценки истинных значений $\hat{Q}_j$ измеряемых прямыми способами величин Q_j , которые, будучи подставлены в уравнение (VIII.41), давали бы оценку $\hat{Q}$ истинного значения косвенно измеряемой величины Q , обладающую наименьшей дисперсией и, следовательно, наибольшей точностью по сравнению со всеми другими мыслимыми оценками. Поскольку эти оценки связаны с соответствующими случайными погрешностями, то можно записать точное равенство:

$$\hat{Q} - Q = F[(\hat{Q}_1 - Q_1); (\hat{Q}_2 - Q_2); \dots; (\hat{Q}_m - Q_m)], \quad (\text{VIII.42})$$

где $\lambda = \hat{Q} - Q$ — случайная погрешность оценки $\hat{Q}$; $\lambda_j = \hat{Q}_j - Q_j$ — случайная погрешность оценок $\hat{Q}_j$.

Вполне естественно (но не всегда оправдано) предположить, что

относительные случайные погрешности оценок малы по сравнению с единицей:

$$\frac{\lambda_j}{\hat{Q}_j} \ll 1.$$

Тогда уравнение (VIII.42) можно разложить в m -мерный ряд Тейлора по степеням случайных погрешностей. Ограничимся только первой и второй степенями:

$$\begin{aligned} \hat{Q} - \lambda &= F(\hat{Q}_1; \hat{Q}_2; \dots; \hat{Q}_m) - \\ &- \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \right) \lambda_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q_i \partial Q_j} \right) \lambda_i \lambda_j. \end{aligned} \quad (\text{VIII.43})$$

Полученное таким образом равенство сводится к следующим двум:

$$\hat{Q} = F(\hat{Q}_1; \hat{Q}_2; \dots; \hat{Q}_m); \quad (\text{VIII.44})$$

$$\lambda = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \right) \lambda_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q_i \partial Q_j} \right) \lambda_i \lambda_j, \quad (\text{VIII.45})$$

т. е. оценку истинного значения косвенно измеряемой величины получают подстановкой оценок истинных значений исходных величин в уравнение (VIII.41).

Вычислим теперь дисперсию $\sigma^2_{\hat{Q}}$ случайной погрешности λ оценки $\hat{Q}$, пренебрегая произведениями случайных погрешностей по сравнению с самими погрешностями, т. е. отбрасывая в формуле (VIII.45) вторую сумму:

$$\begin{aligned} \sigma^2_{\hat{Q}} &= D \left[\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \right) \lambda_j \right] = M \left[\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \right) \lambda_j \right]^2 = \\ &= M \left[\sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial Q_i} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \right) \lambda_i \lambda_j \right] = \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial Q_i} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \right) M[\lambda_i \lambda_j]. \end{aligned}$$

Для математических ожиданий произведений $M[\lambda_i \lambda_j]$ случайных погрешностей имеем:

$$M[\lambda_i \lambda_j] = \begin{cases} \sigma^2_{\hat{Q}_i} = \sigma^2_{\hat{Q}_j}; & i = j; \\ r_{ij} \sigma_{\hat{Q}_i} \sigma_{\hat{Q}_j}; & i \neq j. \end{cases}$$

Поэтому можно записать:

$$\sigma^2_{\hat{Q}} = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \right)^2 \sigma^2_{\hat{Q}_j} + \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial Q_i} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \right) r_{ij} \sigma_{\hat{Q}_i} \sigma_{\hat{Q}_j}, \quad (\text{VIII.46})$$

где r_{ij} — коэффициент корреляции между погрешностями λ_i и λ_j ; оценок $\hat{Q}_i$ и $\hat{Q}_j$.

Поскольку коэффициенты корреляции r_{ij} не зависят от значений оценок $\hat{Q}_i$ и $\hat{Q}_j$, величин Q_i и Q_j , то из выражения (VIII.46) следует, что дисперсия оценки $\hat{Q}$ косвенно измеряемой величины Q достигает минимума в том случае, когда из возможных оценок исходных величин выбраны те, дисперсии которых минимальны. Такими оценками для измеряемых прямыми способами величин являются, как мы уже знаем, средние арифметические соответствующих рядов наблюдений.

Таким образом, в качестве наиболее достоверного значения $\bar{X}_Q$ косвенно измеряемой величины Q следует понимать значение, получаемое подстановкой в формулу (VIII.41) косвенного измерения средних арифметических $\bar{X}_j$ рядов измерений исходных величин:

$$\bar{X}_Q = F(\bar{X}_1; \bar{X}_2; \dots; \bar{X}_m). \quad (\text{VIII.47})$$

Дисперсия этой оценки определяется из формулы (VIII.46):

$$\sigma_{\bar{X}_Q}^2 = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \right)^2 \sigma_{\bar{X}_j}^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \left(\frac{\partial F}{\partial Q_i} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \right) r_{ij} \sigma_{\bar{X}_i} \sigma_{\bar{X}_j}. \quad (\text{VIII.48})$$

причем значения частных производных вычисляются при средних арифметических значениях аргументов $Q_j = \bar{X}_j$.

Если ввести в рассмотрение относительные средние квадратические отклонения результатов измерений и их оценки:

$$\delta \bar{X}_j = \frac{\sigma_{\bar{X}_j}}{\bar{X}_j} \approx \frac{\sigma_{X_j}}{Q_j}; \quad \delta \bar{X}_j = \frac{s_{\bar{X}_j}}{\bar{X}_j} \approx \frac{s_{X_j}}{Q_j}, \quad (\text{VIII.49})$$

то приведенное выше выражение для дисперсии результата примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta \bar{X}_Q^2 &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{Q_j}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial Q_j} \right)^2 \delta \bar{X}_j^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \left(\frac{Q_i}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial Q_i} \right) \times \\ &\times \left(\frac{Q_j}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial Q_j} \right) r_{ij} \delta \bar{X}_i \delta \bar{X}_j = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial \ln F}{\partial \ln Q_j} \right)^2 \delta \bar{X}_j^2 + \\ &+ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \left(\frac{\partial \ln F}{\partial \ln Q_i} \right) \left(\frac{\partial \ln F}{\partial \ln Q_j} \right) r_{ij} \delta \bar{X}_i \delta \bar{X}_j. \end{aligned}$$

В том случае, когда формула косвенного измерения представляет собой произведение степеней исходных величин

$$Q = k \prod_{j=1}^m Q_j^{g_j},$$

производные в полученной развернутой формуле равны значениям показателей степеней. Действительно,

$$\frac{\partial \ln F}{\partial \ln Q_k} = \frac{Q_k}{F} \cdot \frac{\partial F}{\partial Q_k} = \frac{Q_k}{Q} \cdot \frac{\partial Q}{\partial Q_k} = \frac{Q_k}{k \prod_{j=1}^m Q_j^{g_j}} k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m Q_j^{g_j} g_k Q_k^{g_k-1} = g_k,$$

и выражение для относительного среднего квадратического отклонения результата косвенного измерения принимает следующий вид:

$$\delta \bar{X}_Q^2 = \sum_{j=1}^m g_j^2 \delta \bar{X}_j^2 + \sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^m g_i g_j r_{ij} \delta \bar{X}_i \delta \bar{X}_j. \quad (\text{VIII.50})$$

Произведения частных производных уравнения косвенного измерения на среднее квадратическое отклонение результатов измерения соответствующих аргументов называются *частными погрешностями косвенного измерения*:

$$E_j = \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \right) \sigma_{\bar{X}_j}. \quad (\text{VIII.51})$$

Если случайные погрешности измерения отдельных аргументов попарно некоррелированы ($r_{ij}=0$; $i, j=1, 2, \dots, m$), то дисперсия результатов равна, на основании формулы (VIII.48), сумме квадратов частных погрешностей:

$$\sigma_{\bar{X}_Q}^2 = \sum_{j=1}^m E_j^2, \quad (\text{VIII.52})$$

или по формуле (VIII.50)

$$\delta \bar{X}_Q^2 = \sum_{j=1}^m g_j^2 \delta \bar{X}_j^2. \quad (\text{VIII.53})$$

В предыдущих параграфах было показано, что если результаты однократных наблюдений свободны от систематических погрешностей, определенных по формуле (VI.20), то математическое ожидание среднего арифметического ряда равнорассеянных наблюдений, а также среднее взвешенное равнорассеянных рядов наблюдений равно истинному значению измеряемой величины, т. е. результаты как равнорассеянных, так и неравнорассеянных исправленных наблюдений свободны от систематических погрешностей. Теперь покажем, что математическое ожидание результата косвенных измерений не равно истинному значению измеряемой величины, т. е. что оценка (VIII.47) является смещенной, если хотя бы одна вторая частная производная уравнения (VIII.41) отличается от нуля. Это утверждение равносильно тому, что математическое ожидание погрешности результата косвенного измерения, определяемое формулой (VIII.45), отлично от нуля, т. е. что погрешность

результата косвенного измерения наряду со случайной содержит еще и систематическую составляющую.

Если погрешности измерения аргументов некоррелированы, так что $M[\lambda_i \lambda_j] = 0$ для $i \neq j$ и $M[\lambda_i \lambda_i] = \sigma_{\bar{x}_i}^2 = \sigma_{\bar{x}_j}^2$ для $i=j$, то эта систематическая погрешность определяется как

$$\Theta = M[\lambda] = \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \right) M[\lambda_j] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2 F}{\partial Q_i \partial Q_j} M[\lambda_i \lambda_j] = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q_j^2} \right) \sigma_{\bar{x}_j}^2. \quad (\text{VIII.54})$$

Для того, чтобы исключить эту систематическую погрешность, нужно к рассчитанному по формуле (VIII.47) результату прибавить суммарную поправку q , равную систематической погрешности по величине и обратную ей по знаку.

Окончательный итог косвенного измерения:

$$Q = \bar{X}_Q + q \pm t_p \sigma_{\bar{X}_Q}, \quad (\text{VIII.55})$$

если дисперсии исходных величин известны, и

$$Q = \bar{X}_Q + q \pm t_p s_{\bar{X}_Q}, \quad (\text{VIII.56})$$

если теоретические дисперсии неизвестны. Оценка среднего квадратического отклонения результата $s_{\bar{X}_Q}$ определяется при этом по вышеприведенным формулам подстановкой вместо теоретических дисперсий их оценок $s_{\bar{x}_j}^2$.

Величина t_p в формулах (VIII.55) и (VIII.56) вычисляется, как и ранее для заданной доверительной вероятности $P\{|\bar{X}_Q + q - Q| < t_p s_{\bar{X}_Q}\}$, исходя из закона распределения итогового результата косвенного измерения.

Если функция $F(Q_1; Q_2; \dots; Q_m)$ непрерывна вместе со своими производными первого и второго порядков в некоторой окрестности средних арифметических рядов измерений аргументов, и результаты прямых измерений аргументов распределены нормально, то по мере уменьшения их относительных средних квадратических отклонений закон распределения результата $\bar{X}_Q$ косвенного измерения асимптотически приближается к нормальному. Поэтому для определения доверительной погрешности можно воспользоваться интегральной функцией нормированного нормального распределения, если число измерений велико.

При малом числе нормально распределенных результатов наблюдений следует использовать распределение Стьюдента с эффективным числом степеней свободы

$$k_{\text{эфф}} = \frac{\left(\sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \right) s_{\bar{x}_j}^2 \right)^2}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j - 1} \left(\frac{\partial F}{\partial Q_j} \right)^2 s_{\bar{x}_j}^4} = \frac{\left(\sum_{j=1}^m E_j s_{\bar{x}_j}^2 \right)^{2*}}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{n_j - 1} E_j^2 s_{\bar{x}_j}^2}, \quad (\text{VIII.57})$$

где n_j — число прямых измерений величины Q_j .

Эффективное число степеней свободы обычно получается дробным, поэтому для отыскания величины t_p данные табл. 8 и 9 Приложения приходится интерполировать.

Пример. Определить момент инерции круглой платформы на трифилярном подвесе, связанный формулой

$$I = \frac{gRr}{4\pi^2 l} m T^2$$

со следующими величинами, измеряемыми прямыми способами:

$R = (11,50 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$ м — радиус платформы;

$r = (10,00 \pm 0,05) \cdot 10^{-2}$ м — радиус верхнего диска подвеса;

$l = (233,0 \pm 0,2) \cdot 10^{-2}$ м — длина нитей подвеса;

$m = (125,7 \pm 0,1) \cdot 10^{-3}$ кг — масса платформы;

$T = (2,81 \pm 0,01)$ с — период малых колебаний платформы;

$g = 9,81$ м·с⁻² — ускорение свободного падения;

$\pi = 3,14$ — отношение длины окружности к диаметру.

(Все результаты даны с отклонениями, соответствующими $t_p = 1$).

Подставляя в исходную формулу средние арифметические значения измеряемых прямыми способами величин и округленные значения постоянных, получим оценку истинного значения момента инерции платформы:

$$\bar{I} = \frac{9,82 \cdot 11,50 \cdot 10,00}{4 \cdot 3,14^2 \cdot 233} \cdot 125,7 \cdot 2,81^2 \cdot 10^{-5} = 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

поскольку результат должен быть округлен — до трех значащих цифр.

Для оценки точности полученного значения вычислим частные производные и частные погрешности косвенных измерений:

$$E_R = \left(\frac{\partial I}{\partial R} \right) s_{\bar{R}} = \frac{I}{R} s_{\bar{R}} = \frac{1,22 \cdot 10^{-3}}{11,50} \cdot 0,05 = 0,0053 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$E_r = \left(\frac{\partial I}{\partial r} \right) s_{\bar{r}} = \frac{I}{r} s_{\bar{r}} = \frac{1,22 \cdot 10^{-3}}{10,00} \cdot 0,05 = 0,0061 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$E_l = \left(\frac{\partial I}{\partial l} \right) s_{\bar{l}} = - \frac{I}{l} s_{\bar{l}} = - \frac{1,22 \cdot 10^{-3}}{233,0} \cdot 0,2 = -0,0010 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

* Welch B. L. The generalization of «Student's» problem when several different population variances are involved. «Biometrika», 34, 1947.

$$E_m = \left(\frac{\partial I}{\partial m} \right) s_{\bar{T}} = \frac{I}{m} s_{\bar{m}} = \frac{1,22 \cdot 10^{-3}}{125,7} \cdot 0,1 = 0,0010 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$E_T = \left(\frac{\partial I}{\partial T} \right) s_{\bar{T}} = 2 \frac{I}{T} s_{\bar{T}} = 2 \frac{1,22 \cdot 10^{-3}}{2,81} \cdot 0,01 = 0,0087 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Таким образом, среднее квадратическое отклонение косвенного измерения момента инерции платформы, рассчитанное по формуле (VIII.52), составляет

$$s_I = \sqrt{E_R^2 + E_r^2 + E_l^2 + E_m^2 + E_T^2} = 0,01 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Окончательно итог косвенного измерения записывается в виде

$$I = (1,22 \pm 0,01) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

где $t_p = 1$.

Теперь по формуле (VIII.54) следует оценить систематическую погрешность, возникающую при косвенных измерениях:

$$\Theta = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial^2 F}{\partial Q_j^2} \right) s_{\hat{Q}_j}^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 I}{\partial l^2} \right) s_l^2 + \left(\frac{\partial^2 I}{\partial T^2} \right) s_T^2 \right],$$

поскольку вторые производные по остальным аргументам равны нулю. Тогда

$$\begin{aligned} \Theta &= \frac{1}{2} \left(\frac{I}{l^2} s_l^2 + 2 \frac{I}{T^2} s_T^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1,22 \cdot 10^{-3}}{233,0^2} \cdot 0,04 + \frac{2 \cdot 1,22 \cdot 10^{-3}}{2,81^2} \cdot 0,0001 \right) = \\ &= 0,0016 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Полученная величина значительно меньше пяти единиц разряда, следующего за последней значащей цифрой погрешности результата. Если эту погрешность учесть путем введения в итог измерения соответствующей поправки, то она все равно пропадет при округлении. Поэтому принимается $\Theta = 0$.

Предположим, что все величины были определены на основании трех измерений, а период колебаний — на основании десяти измерений. Тогда даже при нормальном распределении результатов прямых измерений для оценки вероятности того, что истинное значение момента инерции лежит в интервале $(1,21 \div 1,23) \times 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, приходится использовать распределение Стьюдента с числом степеней свободы, определяемым равенством (VIII.57):

$$\begin{aligned} k_{\text{эфф}} &= \frac{(0,0053 \cdot 0,05 + 0,0061 \cdot 0,05 + 0,0010 \cdot 0,02 + 0,0010 \cdot 0,1 + 0,0087 \times \\ &\quad \times 0,01)^2 \cdot 10^{-6}}{\left[\frac{(0,0053 \cdot 0,05)^2}{2} + \frac{(0,0061 \cdot 0,05)^2}{2} + \frac{(0,0010 \cdot 0,02)^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(0,0010 \cdot 0,1)^2}{2} + \frac{(0,0087 \cdot 0,01)^2}{9} \right] \cdot 10^{-6}} = \\ &= 14,8. \end{aligned}$$

При таком числе степеней свободы интерполяцией данных табл. 9 Приложения находим для $t_p=1$:

$$P\{|I - 1,22 \cdot 10^{-3}| < 0,01 \cdot 10^{-3}\} = 0,6644 = 66,44\%,$$

т. е. значительно меньше, чем при нормальном распределении результатов (при $k \rightarrow \infty$ $P\{|I - 1,22 \cdot 10^{-3}| < 0,01 \cdot 10^{-3}\} = 68,26\%$).

Для доверительной вероятности $P=95\%$ интерполяцией данных таблицы находим $t_{0,95}=2,132$. Тогда доверительная погрешность составляет

$$\hat{\delta}_{0,95} = t_{0,95} \cdot s_I = 2,132 \cdot 0,01 \cdot 10^{-3} = 0,02 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

и итог измерений можно записать в виде

$$I = (1,22 \pm 0,02) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 (P = 95\%),$$

т. е. при расширении полосы значений момента инерции в два раза вероятность нахождения истинного значения внутри этой полосы возрастает до 95%.

Эту задачу можно решить значительно проще, если учесть, что формула косвенного измерения представляет собой произведение степеней искомых величин. Поэтому относительное среднее квадратическое отклонение итогового результата в соответствии с выражением (VIII.53) составляет:

$$\hat{\delta} \bar{X}_I^2 = \hat{\delta} \bar{X}_R^2 + \hat{\delta} \bar{X}_r^2 + \hat{\delta} \bar{X}_m^2 + \hat{\delta} \bar{X}_l^2 + \hat{\delta} \bar{X}_T^2$$

или

$$\frac{s_I}{\bar{I}} = \sqrt{\left(\frac{0,05}{11,50}\right)^2 + \left(\frac{0,05}{10,00}\right)^2 + \left(\frac{0,1}{125,7}\right)^2 + \left(\frac{0,2}{233,0}\right)^2 + 4\left(\frac{0,01}{2,81}\right)^2} =$$

$$= 0,98 \cdot 10^{-2};$$

$$s_I = 0,98 \cdot 10^{-2} \cdot \bar{I} = 0,98 \cdot 10^{-2} \cdot 1,22 \cdot 10^{-3} = 0,01 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

§ 60. КРИТЕРИЙ НИЧТОЖНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Как видно из последнего рассмотренного примера, не все частные погрешности косвенного измерения играют одинаковую роль в формировании итоговой погрешности результата. Частные погрешности измерения длины нитей подвеса и массы платформы значительно меньше остальных частных погрешностей, и, поскольку погрешность результата все равно округляется по крайней мере до двух значащих цифр, они могут не оказать на нее почти никакого влияния.

Если в равенстве

$$s_{\bar{X}_Q} = \sqrt{\sum_{j=1}^m E_j^2}$$

k -я частная погрешность такова, что

$$s_{\bar{x}_Q} < 1,05 \sqrt{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m E_j^2}, \quad (\text{VIII.58})$$

то этой погрешностью можно пренебречь, поскольку при округлении уже 1,04999... принимается за 1,0.

Возведя обе части неравенства (VIII.58) в квадрат и приняв во внимание, что

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^m E_j^2 = s_{\bar{x}_Q}^2 - E_k^2$$

получим

$$s_{\bar{x}_Q}^2 < 1,1025 (s_{\bar{x}_Q}^2 - E_k^2),$$

откуда следует, что частными погрешностями, меньшими

$$E_k^2 < \frac{0,1025}{1,1025} s_{\bar{x}_Q}^2; E_k < 0,306 s_{\bar{x}_Q}$$

можно пренебречь. Округлив последнее неравенство, получим:

$$E_k < 0,3 s_{\bar{x}_Q}; E_k < \frac{1}{3} s_{\bar{x}_Q}. \quad (\text{VIII.59})$$

Эта формула в метрологии называется *критерием ничтожных погрешностей*, а сами погрешности, отвечающие условию (VIII.59) называются *ничтожными или ничтожно малыми*.

Формула (VIII.59) легко распространяется на случай нескольких погрешностей и приводит к следующему критерию ничтожности суммы квадратов частных погрешностей $E_k; E_{k+1}; \dots$:

$$\sqrt{E_k^2 + E_{k+1}^2 + \dots} < 0,3 s_{\bar{x}_Q}. \quad (\text{VIII.60})$$

Использование критерия ничтожных погрешностей при решении задачи косвенных измерений позволяет найти те величины, повышение точности измерения которых позволит уменьшить суммарную погрешность результата. Очевидно, не имеет смысла повышать точность измерения тех величин, частные погрешности которых и без того ничтожно малы.

Так, в примере с определением момента инерции платформы частные погрешности измерения длины подвеса и массы платформы составляют в сумме

$$\sqrt{E_l^2 + E_m^2} = \sqrt{(0,0010)^2 + (0,0010)^2} \cdot 10^{-3} = 0,0014 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

что значительно меньше трети среднего квадратического отклонения итогового результата ($s_{\bar{x}_Q} = 0,010 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^2$). Следовательно, эти погрешности можно не принимать во внимание и сосредоточить все усилия (при необходимости в этом) на повышении точности измерения остальных величин.

§ 61. СОВОКУПНЫЕ И СОВМЕСТНЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

Эти виды измерений характеризуются тем, что значения искомых величин рассчитывают по системе уравнений, связывающих их с некоторыми другими величинами, измеряемыми прямыми или косвенными методами, причем измеряют несколько комбинаций значений этих величин. Каждая комбинация позволяет получить одно уравнение, так что система уравнений, содержащая всю информацию о значениях искомых величин, имеет вид

$$F_i(Q_1; Q_2; \dots; Q_j; \dots; Q_m; X_1^{(i)}; X_2^{(i)}; \dots; X_r^{(i)}; \dots; X_k^{(i)}) = 0; \quad (VIII.61)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

где Q_j — значение искомых величин, общим числом m ; $X_r^{(i)}$ — полученные в i -м опыте значения k величин, измеряемых прямыми или косвенными методами; F_i — символ функциональной зависимости между величинами в i -м опыте; число опытов равно n .

Если Q_j являются значениями одной и той же величины (например, массами гирь набора), то измерения совокупны; если же Q_j — это значения различных физических величин, то мы имеем дело с совместными измерениями. Такое подразделение носит, конечно, очень условный характер, однако оно имеет место в ГОСТ 16263—70 «Термины и определения».

После подстановки в исходную систему уравнений результатов прямых (или косвенных) измерений и проведения необходимых преобразований получаем ряд уравнений, содержащих лишь искомые величины и числовые коэффициенты:

$$F_i(Q_1; Q_2; \dots; Q_j; \dots; Q_m) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (VIII.62)$$

Эти уравнения называются *условными*.

Для того чтобы рассчитать значения искомых величин, достаточно иметь m уравнений, т. е. ровно столько, сколько имеется неизвестных. Тогда результаты измерений и доверительные границы их погрешностей можно найти методами обработки результатов косвенных измерений. Однако обыкновенно для уменьшения погрешностей результатов делается значительно больше измерений, чем необходимо для определения неизвестных ($n > m$).

Вследствие ограниченной точности определения величин X_r условные уравнения одновременно не обращаются в тождества ни при каких значениях искомых величин. И поскольку определить истинные значения искомых величин мы не можем, задача сводится к нахождению их оценок, представляющих собой наилучшие приближения к истинным значениям.

Предположим, что $\hat{Q}_j$; $j = 1, 2, \dots, m$ — наилучшие приближения к неизвестным Q_j . Если значения этих оценок подставить в условные уравнения, то их правые части будут отличаться от левых. Чтобы получить тождества, придется записать

$$F_i(\hat{Q}_1; \hat{Q}_2; \dots; \hat{Q}_j; \dots; \hat{Q}_m) + v_i = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (VIII.63)$$

где v_i — величины, называемые остаточными погрешностями условных уравнений. Если в систему условных уравнений подставить истинные значения искомых величин, то остаточные погрешности превратятся в случайные погрешности условных уравнений.

Одним из наиболее общих способов отыскания оценок истинных значений измеряемых величин является *метод наименьших квадратов*. Согласно этому методу оценки $\hat{Q}_j$ выбираются так, чтобы *минимизировать сумму квадратов остаточных погрешностей условных уравнений*.

Сумма квадратов остаточных погрешностей, определенных в соответствии с системой условных уравнений (VIII.63), составляет

$$S^2 = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \sum_{i=1}^n F_i^2(\hat{Q}_1; \hat{Q}_2; \dots; \hat{Q}_j; \dots; \hat{Q}_m),$$

и достигает минимума при системе значений Q_j , обращающей в нуль все частные производные от S^2 по искомым величинам:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{Q}_j} \sum_{i=1}^n v_i^2 = 0; j = 1, 2, \dots, m.$$

Выражая остаточные погрешности через функции, стоящие в левой части условных уравнений, получим систему из m уравнений с m неизвестными:

$$\sum_{i=1}^n F_i \frac{\partial F_i}{\partial \hat{Q}_j} = 0; j = 1, 2, \dots, m, \quad (\text{VIII.64})$$

которая может быть решена относительно оценок $\hat{Q}_j$ искомых величин.

При решении задачи в общем случае, когда условные уравнения нелинейны, а результаты отдельных измерений коррелированы, мы сталкиваемся с рядом подчас непреодолимых трудностей. Поэтому здесь будет рассмотрен лишь частный случай, когда условные уравнения линейны или приведены к линейному виду известными способами, а результаты измерений величин X_r равнодисперсны и некоррелированы.

Тогда оценки, даваемые методом наименьших квадратов, будут состоятельными и несмещенными, а в случае нормального распределения результатов измерений еще и эффективными.

Пример. Методом совместных измерений сопротивления и температуры требуется определить коэффициенты в температурной формуле для сопротивления резистора

$$R_t = R_{20} + \alpha(t - 20) + \beta(t - 20)^2,$$

где R_t — сопротивление при температуре $t^\circ\text{C}$; R_{20} — сопротивление при температуре 20°C ; α ; β — искомые коэффициенты.

Температуру t и сопротивление R_t при этой температуре измеряют прямыми способами, а величины R_{20} , α и β являются искомыми.

Меня тепловой режим сопротивления, можно получить любое число линейных относительно неизвестных величин условных уравнений вида

$$\begin{cases} R_{20} - R_t^I + \alpha(t^I - 20) + \beta(t^I - 20)^2 = 0; \\ R_{20} - R_t^{II} + \alpha(t^{II} - 20) + \beta(t^{II} - 20)^2 = 0; \\ \dots \dots \dots \\ R_{20} - R_t^{(n)} + \alpha(t^{(n)} - 20) + \beta(t^{(n)} - 20)^2 = 0. \end{cases}$$

Система линейных условных уравнений всегда может быть приведена к виду

[illegible]

где a_{ij} ($i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2, \dots, m$) и l_i — коэффициенты, определяемые из системы уравнений (VIII.61) после ее линеаризации (если она нелинейна) и подстановки значений величин, измеренных прямыми способами.

Знак равенства в условных уравнениях (VIII.65) будет иметь место, конечно, только в том случае, если к левым частям прибавить значения остаточных погрешностей. Вообще же он имеет чисто формальный характер.

Согласно способу наименьших квадратов оценки $\hat{Q}_i$ искомых величин Q_i нужно вычислить так, чтобы минимизировать сумму квадратов остаточных погрешностей:

$$v_i = l_i - a_{i1}\hat{Q}_1 - a_{i2}\hat{Q}_2 - \dots - a_{im}\hat{Q}_m. \quad (\text{VIII.66})$$

Сумма квадратов остаточных погрешностей составляет

$$S^2 = \sum_{i=1}^n (l_i - a_{i1} \hat{Q}_1 - a_{i2} \hat{Q}_2 - \dots - a_{im} \hat{Q}_m)^2. \quad (\text{VIII.67})$$

Искомые оценки неизвестных, обращающие в минимум сумму (VIII.67) квадратов остаточных погрешностей, получаются в результате решения системы m линейных уравнений с m неизвестными:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial S^2}{\partial \hat{Q}_1} &= -2 \sum_{i=1}^n a_{i1} (l_i - a_{i1}\hat{Q}_1 - a_{i2}\hat{Q}_2 - \dots - a_{im}\hat{Q}_m) = 0; \\ \frac{\partial S^2}{\partial \hat{Q}_2} &= -2 \sum_{i=1}^n a_{i2} (l_i - a_{i1}\hat{Q}_1 - a_{i2}\hat{Q}_2 - \dots - a_{im}\hat{Q}_m) = 0; \\ &\vdots \\ \frac{\partial S^2}{\partial \hat{Q}_m} &= -2 \sum_{i=1}^n a_{im} (l_i - a_{i1}\hat{Q}_1 - a_{i2}\hat{Q}_2 - \dots - a_{im}\hat{Q}_m) = 0. \end{aligned} \right. \quad (\text{VIII.68})$$

Полученная система называется *системой нормальных уравнений*. Введя обозначения Гаусса для сумм

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 &= [a_{ij}^2]; \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} a_{ik} &= [a_{ij} a_{ik}]; \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} l_i &= [a_{ij} l_i],\end{aligned}\tag{VIII.69}$$

систему нормальных уравнений можно записать в более удобном для решения виде:

[illegible]

Решения системы нормальных уравнений являются очевидно линейными комбинациями величин l_i :

[illegible]

где α_{ij} ; $i=1, 2, \dots, n$; $j=1, 2, \dots, m$ находят, решив систему (VIII.70).

Сопоставив уравнения (VIII.66) и (VIII.68), можно получить следующие равенства, выражающие свойства остаточных погрешностей условных уравнений:

$$\sum_{i=1}^n a_{i1}v_i = \sum_{i=1}^n a_{i2}v_i = \dots = \sum_{i=1}^n a_{im}v_i = 0. \quad (\text{VIII.72})$$

Эти выражения применяются обычно для проверки правильности определения оценок $\bar{Q}_j$ искомым величин после решения системы нормальных уравнений (VIII.70).

В последнее время для нахождения оценок способом наименьших квадратов успешно применяются цифровые вычислительные машины. Поэтому точность оценок истинных значений измеряемых величин может быть существенно повышена путем увеличения числа условных уравнений до нескольких десятков или даже сотен, а в некоторых случаях и больше.

Для оценки точности полученной системы предположим, что точность определения коэффициентов a_{ij} системы условных уравнений значительно выше точности определения коэффициентов l_i , поэтому погрешности оценок искомым величин определяются только дисперсиями результатов измерения последних. Поскольку оценки $\bar{Q}_j$ являются линейными комбинациями величин l_i [см. формулу (VIII.71)], то их дисперсии составляют

$$s_{\bar{Q}_j}^2 = \sum_{i=1}^n a_{ji}^2 s_{l_i}^2. \quad (\text{VIII.73})$$

Применительно к рассмотренному выше примеру принятое допущение означает, что погрешности измерения температуры ничтожно малы по сравнению с погрешностями измерения сопротивления. Во многих практических случаях сделанное нами предположение, как правило, оправдано. Если же точность определения всех коэффициентов условных уравнений приблизительно одинакова, то для оценки точности решений по формуле (VIII.71) приходится прибегать к общим, более сложным приемам.

Поскольку при развитии способа наименьших квадратов мы исходили из условия равномерности наблюдений, то все дисперсии под знаком суммы [см. выражение (VIII.73)] должны быть одинаковы:

$$s_{l_i}^2 = s_{l_i}^2 = \text{const}; \quad i = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Поэтому среднее квадратическое отклонение оценки $\bar{Q}_j$ составит:

$$s_{\bar{Q}_j} = s_{l_i} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_{ji}^2}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (\text{VIII.74})$$

В курсах математической статистики приведено очень простое выражение для дисперсии s_i^2 :

$$s_i^2 = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^n v_i^2, \quad (\text{VIII.75})$$

где остаточные погрешности v_i легко определить по (VIII.66) после определения оценок $\hat{Q}_j$ по формулам (VIII.71).

Пример. Определить способом наименьших квадратов параметры A и B зависимости

$$\Delta = A + BR_z$$

погрешности Δ измерения углов, воспроизводимых угловыми мерами, с помощью односекундного гониометра от средней высоты R_z неровностей их поверхностей.

Погрешности Δ измерений и значения средних высот неровностей представлены в табл. 12.

Таблица 12

i	R_z , мкм	Δ''	i	R_z , мкм	Δ''
1	0,072	2,8	7	0,140	3,0
2	0,080	2,6	8	0,140	3,4
3	0,112	3,2	9	0,183	3,7
4	0,120	2,9	10	0,208	4,1
5	0,130	3,1	11	0,241	4,5
6	0,136	3,4	12	0,268	4,8

Систему условных уравнений (VIII.65) получают подстановкой табличных данных в уравнение исходной зависимости

$$A + B(R_z)_i = \Delta_i, \quad i = 1, 2, \dots, 12.$$

Число n уравнений равно, таким образом, двенадцати, число m неизвестных — двум (A и B), а коэффициенты условных уравнений (VIII.65) составляют:

$$a_{i1} = 1; \quad a_{i2} = (R_z)_i; \quad l_i = \Delta_i.$$

В обозначениях Гаусса система нормальных уравнений (VIII.70) имеет вид

$$\begin{cases} [a_{i1}^2] \hat{A} + [a_{i1}a_{i2}] \hat{B} = [a_{i1}l_i]; \\ [a_{i1}a_{i2}] \hat{A} + [a_{i2}^2] \hat{B} = [a_{i2}l_i], \end{cases}$$

где $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — оценки искомых параметров.

Примеры вычисления коэффициентов системы нормальных уравнений приведены в табл. 13.

Таблица 13

i	a_{i1}	a_{i1}^2	a_{i2}	a_{i2}^2	$a_{i1} a_{i2}$	l_i	$a_{i1} l_i$	$a_{i2} l_i$
1	1	1	0,072	0,005184	0,072	2,8	2,8	0,2016
2	1	1	0,080	0,006400	0,080	2,6	2,6	0,2080
3	1	1	0,112	0,012544	0,112	3,2	3,2	0,3584
4	1	1	0,120	0,014400	0,120	2,9	2,9	0,3480
5	1	1	0,130	0,016900	0,130	3,1	3,1	0,4030
6	1	1	0,136	0,018496	0,136	3,4	3,4	0,2624
7	1	1	0,140	0,019600	0,140	3,0	3,0	0,4200
8	1	1	0,140	0,019600	0,140	3,4	3,4	0,4760
9	1	1	0,183	0,033489	0,183	3,7	3,7	0,6771
10	1	1	0,208	0,043264	0,208	4,1	4,1	0,8528
11	1	1	0,241	0,058081	0,241	4,5	4,5	1,0845
12	1	1	0,268	0,071824	0,268	4,8	4,8	1,2864
Суммы		12		0,319782	1,830		41,5	6,7782

Таким образом,

$$[a_{i1}^2] = 12; [a_{i2}^2] = 0,319782; [a_{i1}a_{i2}] = 1,830;$$

$$[a_{i1}l_i] = 41,5; [a_{i2}l_i] = 6,7782.$$

Окончательно для системы нормальных уравнений получаем:

$$\begin{cases} 12 \hat{A} + 1,830 \hat{B} = 41,5; \\ 1,830 \hat{A} + 0,319782 \hat{B} = 6,7782, \end{cases}$$

откуда находим искомые оценки:

$$\hat{A} = 1,7746; \hat{B} = 11,0411.$$

В более общем виде решение системы нормальных уравнений должно быть записано в виде:

$$\hat{A} = \frac{[a_{i1} l_i] [a_{i2}^2] - [a_{i2} l_i] [a_{i1} a_{i2}]}{[a_{i1}^2] [a_{i2}^2] - [a_{i1} a_{i2}]^2} = \left[\frac{a_{i1} [a_{i2}^2] - a_{i2} [a_{i1} a_{i2}]}{[a_{i1}^2] [a_{i2}^2] - [a_{i1} a_{i2}]^2} l_i \right];$$

$$\hat{B} = \frac{[a_{i2} l_i] [a_{i1}^2] - [a_{i1} l_i] [a_{i1} a_{i2}]}{[a_{i1}^2] [a_{i2}^2] - [a_{i1} a_{i2}]^2} = \left[\frac{a_{i2} [a_{i1}^2] - a_{i1} [a_{i1} a_{i2}]}{[a_{i1}^2] [a_{i2}^2] - [a_{i1} a_{i2}]^2} l_i \right].$$

Сравнивая полученные выражения с формулой (VIII.71), находим коэффициенты a_{ji} ; $j=1, 2$, которые для этого обозначим через α_{A_i} ; α_{B_i} ;

$$\alpha_{A_i}^{\wedge} = \frac{a_{i1} [a_{i2}^2] - a_{i2} [a_{i1} a_{i2}]}{[a_{i1}^2] [a_{i2}^2] - [a_{i1} a_{i2}]^2};$$

$$\alpha_{B_i}^{\wedge} = \frac{a_{i2} [a_{i1}^2] - a_{i1} [a_{i1} a_{i2}]}{[a_{i1}^2] [a_{i2}^2] - [a_{i1} a_{i2}]^2}.$$

Тогда

$$\hat{A} = [\alpha_{A_i} l_i]; \quad \hat{B} = [\alpha_{B_i} l_i].$$

Значения этих коэффициентов удобно вычислять так, как показано в табл. 14 и 15.

Таблица 14

i	$a_{i1} [a_{i2}^2]$	$a_{i2} [a_{i1} a_{i2}]$	2-3	α_{A_i}	$\alpha_{B_i}^2$
1	2	3	4	5	6
1	0,319782	0,13176	0,188022	0,385	0,148225
2	0,319782	0,14640	0,173382	0,355	0,126025
3	0,319782	0,20496	0,114822	0,236	0,055696
4	0,319782	0,21960	0,100182	0,205	0,042025
5	0,319782	0,23790	0,081882	0,168	0,028224
6	0,319782	0,24888	0,070902	0,145	0,021025
7	0,319782	0,25620	0,063582	0,130	0,016900
8	0,319782	0,25620	0,063582	0,130	0,016900
9	0,319782	0,33489	-0,015108	-0,031	0,000961
10	0,319782	0,38064	-0,060858	-0,125	0,015625
11	0,319782	0,44103	-0,121248	-0,248	0,061504
12	0,319782	0,49044	-0,170658	-0,350	0,122500
Сумма					0,655610

Примечание. Данные графы 4 представляют собой разности данных граф 2 и 3.

Теперь по формуле (VIII.66)

$$v_i = l_i - a_{i1} \hat{A} - a_{i2} \hat{B}$$

можно вычислить остаточные погрешности, их квадраты и сумму квадратов (табл. 16).

Оценка для дисперсии остаточных погрешностей согласно формуле (VIII.75) составляет

$$s_i^2 = \frac{1}{12-2} \sum_{i=1}^{12} v_i^2 = \frac{0,286607}{10} = 0,028661;$$

$$s_i = 0,169.$$

Таблица 15

i	$a_{i2} [a_{i1}^2]$	$a_{i1} [a_{i1} a_{i2}]$	2-3	$a_{B_i}^{\wedge}$	$a_{B_i}^2$
1	2	3	4	5	6
1	0,864	1,830	-0,966	-1,980	3,920400
2	0,960	1,830	-0,870	-1,780	3,168400
3	1,344	1,830	-0,486	-0,994	0,988036
4	1,440	1,830	-0,390	-0,799	0,638401
5	1,560	1,830	-0,270	-0,553	0,305809
6	1,632	1,830	-0,198	-0,406	0,164836
7	1,680	1,830	-0,150	-0,307	0,094249
8	1,680	1,830	-0,150	-0,307	0,094249
9	2,196	1,830	+0,366	+0,750	0,562500
10	2,496	1,830	+0,666	+1,365	1,863225
11	2,892	1,830	+1,062	+2,17	4,708900
12	3,216	1,830	+1,386	+2,84	8,065600
Сумма					24,574605

Примечание. Данные графы 4 представляют собой разности данных граф 2 и 3.

Таблица 16

i	l_i	$a_{i2}^{\wedge B}$	$a_{i1}^{\wedge A}$	v_i	v_i^2
1	2,8	0,7949	1,7746	-0,2305	0,052900
2	2,6	0,8832	1,7746	+0,0578	0,003340
3	3,2	1,2365	1,7746	-0,1889	0,035721
4	2,9	1,3248	1,7746	+0,1994	0,039601
5	3,1	1,4352	1,7746	+0,1098	0,012100
6	3,4	1,5014	1,7746	-0,1240	0,015376
7	3,0	1,5456	1,7746	+0,3202	0,102400
8	3,4	1,5456	1,7746	-0,0798	0,006400
9	3,7	2,0203	1,7746	+0,0949	0,009025
10	4,1	2,2923	1,7746	-0,0331	0,001096
11	4,5	2,6606	1,7746	-0,0648	0,004199
12	4,8	2,9587	1,7746	-0,0667	0,004449
Сумма					0,286607

По формуле (VIII.74) находим оценки среднего квадратического отклонения результатов совместных измерений параметров A и B исходной зависимости:

$$s_A^{\wedge} = s_l \sqrt{\sum_{i=1}^{12} \alpha_{A_i}^2} = 0,137;$$

$$s_B^{\wedge} = s_l \sqrt{\sum_{i=1}^{12} \alpha_{B_i}^2} = 0,84.$$

Значения сумм квадратов коэффициентов $\alpha_{A_i}^{\wedge}$ и $\alpha_{B_i}^{\wedge}$ взяты из табл. 14 и 15.

Окончательно результаты измерений записывают в следующем виде:

$$\hat{A} = 1,775; \quad s_{\hat{A}} = 0,137$$

$$\hat{B} = 11,04; \quad s_{\hat{B}} = 0,84.$$

Методом наименьших квадратов (способом совместных измерений) можно воспользоваться и при исследовании некоторой зависимости $R=f(T)$ между величинами R и T , если ряд значений независимой переменной T воспроизводится искусственно и измеряются соответствующие им значения зависимой переменной R . Результаты измерений состоят при этом из пар значений $(T_i; R_i, i=1, 2, \dots, n)$, причем погрешности измерения величины T настолько меньше погрешностей измерения величины R , что ими можно пренебречь. Метод наименьших квадратов позволяет в этом случае аппроксимировать зависимость, заданную парами значений (T_i, R_i) , аналитическим выражением вида

$$R = a_0 f_0(T) + a_1 f_1(T) + \dots + a_m f_m(T),$$

где $f_0(T); f_1(T); \dots; f_m(T)$ — заданные функции. Коэффициенты $a_0; a_1 \dots; a_m$ являются теми неизвестными величинами, оценки значений которых определяют методом совместных измерений. Действительно, полагая

$$a_{ij} = f_j(T_i); \quad Q_j = a_j; \quad l_i = R_i; \quad i=1, 2, \dots, n; \quad j=1, 2, \dots, m,$$

приходим к системе условных уравнений (VIII.65).

Особого внимания заслуживает случай, когда надо представить зависимость $R(T)$ в виде полинома степени m , и функции $f_j(T)$ имеют вид

$$f_0(T) = 1; \quad f_1(T) = T; \quad \dots; \quad f_m(T) = T^m.$$

Тогда

$$R = a_0 + a_1 T + \dots + a_m T^m.$$

Иллюстрацией к определению полинома, аппроксимирующего зависимость между двумя величинами, заданную парами их значений, может служить приведенный выше пример, где пары значений величин $(R_{x_i}; \Delta_i)$ представлены в табл. 12. Аппроксимация осуществлялась полиномом $A + BR_x$ первой степени относительно независимой переменной.

§ 62. СРЕДСТВА ИЗМЕРЕНИЙ

Измерения выполняются с помощью технических средств, которые имеют нормированные погрешности и называются *средствами измерений*.

Разработка комплексов средств измерений является задачей приборостроения. Метрология же должна дать единую классификационную схему средств измерений и выявить совокупность их параметров, стандартизация которых позволила бы выбрать средства, обеспечивающие получение результата с заданной точностью, прогнозировать точность проводимых с помощью этих средств измерений и установить методы их поверки.

Средства измерений включают в себя меры, измерительные преобразователи, измерительные приборы и вспомогательные средства. Их часто объединяют в более или менее сложные комплексы: измерительные установки и измерительные системы.

Меры

К мерам относятся средства измерений, предназначенные для воспроизведения физических величин заданного размера.

Меры, воспроизводящие физические величины лишь одного размера, называются *однозначными*. Некоторые из них, например, меры рефракции или коэффициента преломления, применяются исключительно в виде отдельных мер, поскольку реализация операции сложения воспроизводимых ими величин связана с большими трудностями или вовсе неосуществима. Величины, для которых операция сложения выполняется сравнительно легко, воспроизводятся с помощью многозначных или однозначных мер, объединяемых в наборы или магазины.

Многозначные меры могут воспроизводить ряд размеров физической величины, часто даже непрерывно заполняющих некоторый промежуток между определенными границами. Наиболее распространенными многозначными мерами являются миллиметровая линейка, вариометр и конденсатор переменной емкости.

В наборах и магазинах отдельные меры могут объединяться в различных сочетаниях для воспроизведения некоторых промежуточных или суммарных, но обязательно дискретных размеров ве-

личин. В магазинах меры объединены в одно механическое целое снабженное специальными переключателями, которые связаны с отсчетными устройствами. В противоположность этому набор состоит обычно из нескольких мер, которые могут выполнять свои функции как в отдельности, так и в различных сочетаниях друг с другом (набор концевых мер длины, набор гирь, набор мер добротности и индуктивности и т. д.).

Для воспроизведения производных величин иногда прибегают к физическому осуществлению соответствующих операций над основными или связанными с ними величинами. В качестве примера можно указать на воспроизведение размеров давления с помощью грузопоршневых приборов. Здесь осуществляется операция $p = mg/F$, где мера массы m , помещенная в поле тяжести g Земли, создает силу mg , которая воздействует на поршень площадью F и вызывает под ним давление, равное p .

К однозначным мерам относятся также образцы и образцовые вещества.

Стандартные образцы и образцовые вещества представляют собой специально оформленные тела или пробы вещества определенного и строго регламентированного содержания, одно из свойств которых при определенных условиях является величиной с известным значением. К ним относятся образцы твердости, шероховатости, белой поверхности, а также стандартные образцы, используемые при поверке приборов для определения механических свойств материалов. Образцовые вещества играют большую роль в создании реперных точек при осуществлении шкал. Например, чистый цинк служит для воспроизведения температуры $419,58^\circ\text{C}$, золото — $1064,43^\circ\text{C}$. Применение образцовых веществ при количественных химических анализах является в настоящее время наиболее эффективным средством повышения их точности.

Действительное значение величины, воспроизводимой мерой, называется *действительным значением меры*. Действительное значение меры получают при ее измерении путем исключения систематических погрешностей и сведения к минимуму параметров случайных погрешностей. Погрешность определения действительного значения называется *погрешностью аттестации меры*.

Указанное на мере значение величины, которому с допустимыми отклонениями должно быть равно действительное значение меры, является *номинальным значением меры*. Номинальное и действительное значения меры, а также погрешность ее аттестации заносятся в специальные свидетельства, которыми сопровождаются меры. Разность между номинальным и действительным значениями определяет *погрешность меры*, которая зависит от конструкции меры, технологии ее изготовления и условий применения. Погрешность меры постоянна и величина, обратная ей по знаку, является поправкой к номинальному значению меры.

В зависимости от погрешности аттестации меры подразделяются на *разряды* (меры 1, 2-го и т. д. разрядов), а погрешность мер является основой их деления на классы. Меры, которым присвоен тот или иной разряд, применяются для поверки измерительных средств и называются образцовыми. Меры, поделенные на классы, называются рабочими и используются при технических измерениях.

Измерительные преобразователи

Согласно ГОСТ 16263—70 *измерительным преобразователем* называется средство измерений, служащее «для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для передачи, дальнейшего преобразования, обработки и (или) хранения, но не поддающейся непосредственному восприятию наблюдателем».

Преобразуемая величина называется *входной*, а результат преобразования — *выходной* величиной. Соотношение между ними задается *функцией преобразования* (статической характеристикой). Если в результате преобразования физическая природа величины не изменяется, а функция преобразования является линейной, то преобразователь называется *масштабным или усилителем* (усилители напряжения, измерительные микроскопы, электронные усилители). Слово «усилитель» обычно употребляется с определением, которое приписывается ему в зависимости от рода преобразуемой величины (усилитель напряжения, гидравлический усилитель) или от вида единичных преобразований, происходящих в нем (ламповый усилитель, струйный усилитель). В тех случаях, когда в преобразователе входная величина превращается в другую по физической природе величину, он получает название по видам этих величин (электромеханический, пневмемкостный и так далее).

Хотя измерительные преобразователи являются конструктивно обособленными элементами, самостоятельного значения для проведения измерений в противовес мерам и измерительным приборам они подчас не имеют. Чаще они являются лишь составными частями более или менее сложных измерительных комплексов и систем автоматического контроля, управления и регулирования.

По месту, занимаемому в приборе, преобразователи подразделяются на:

- первичные*, к которым подводится непосредственно измеряемая физическая величина;
- передающие*, на выходе которых образуются величины, удобные для их регистрации и передачи на расстояние;
- промежуточные*, занимающие в измерительной цепи место после первичных.

Измерительные приборы

К *измерительным приборам* относятся средства измерений, предназначенные для получения измерительной информации о ве-

личине, подлежащей измерению, в форме, удобной для восприятия наблюдателем.

Наибольшее распространение получили *приборы прямого действия*, при использовании которых измеряемая величина подвергается ряду последовательных преобразований в одном направлении, т. е. без возвращения к исходной величине. Они состоят из ряда блоков, трансформирующих измеряемую величину в мощный сигнал, под влиянием которого перемещаются подвижные органы отсчетных устройств, предварительно прямо или косвенно проградуированных с помощью мер. К приборам прямого действия относится большинство манометров, термометров, амперметров, вольтметров и т. д.

Значительно большими точностными возможностями обладают *приборы сравнения*, предназначенные для сравнения измеряемых величин с величинами, значения которых известны.

Сравнение осуществляется с помощью компенсационных или мостовых цепей. *Компенсационные цепи* применяются для сравнения активных величин, т. е. несущих в себе некоторый запас энергии (сил, давлений и моментов сил, электрических напряжений и токов, яркости источников излучения и т. д.). Сравнение проводится путем встречного включения этих величин в единый контур и наблюдения их разностного эффекта. По этому принципу работают такие приборы, как равноплечие и неравноплечие весы (сравнение на рычаге силовых эффектов действия масс), грузопоршневые и грузопружинные манометрические и вакуумметрические приборы (сравнение на поршне силовых эффектов измеряемого давления и мер массы), электрические компенсаторы (сравнение на сопротивлении падений напряжения от измеряемой э.д.с. и э.д.с. нормального элемента или другого образцового источника), радиационные пирометры (сравнение наблюдателем яркостей свечения объекта и нити накаливания лампы током образцового элемента).

Для сравнения пассивных величин (электрические, гидравлические, пневматические и другие сопротивления) применяются мостовые цепи типа электрических уравновешенных или неуравновешенных мостов. Конечно, пассивные величины могут быть вначале преобразованы в активные или наоборот и сравниваться соответственно в компенсационных или мостовых цепях.

В дифференциальных приборах сравнения эффект сравнения измеряют с помощью прибора прямого действия или другого прибора сравнения. В нулевых приборах этот эффект используется для ручного или автоматического изменения размера величины, служащей для сравнения, или части ее, включенной в цепь сравнения, до тех пор, пока разностный эффект не станет равным нулю. В зависимости от этого говорят о приборах сравнения с ручным уравновешиванием и об автоматических приборах сравнения (автоматических компараторах).

На рис. 35 изображена кинематическая схема пружинного динамометра, являющегося прибором прямого действия. При растяжении кольцевого чувствительного элемента измеряемой силой

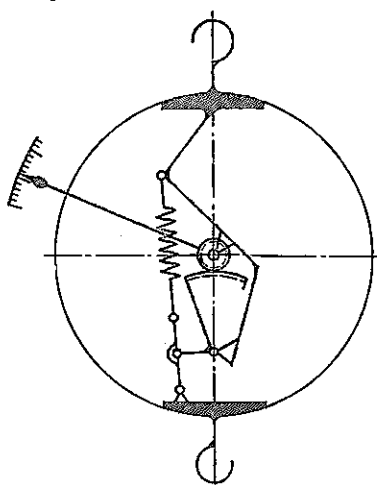


Рис. 35

он деформируется. Линейное перемещение закрепленного на нем шарнира увеличивается рычажно-зубчатым механизмом и преобразуется в угол поворота стрелки, которая отмечает на шкале значение измеряемой силы.

Схема грузопоршневого манометра, показанного на рис. 36, дает представление о компенсационной цепи сравнения активных величин. Сравнивают измеряемое давление сжатого воздуха, по-

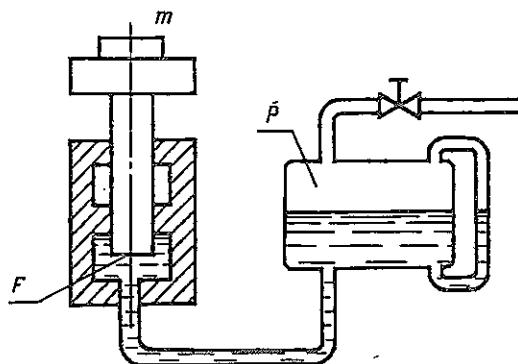


Рис. 36

даваемого через ventиль к разделительной камере, и давление, развиваемое с помощью поршня грузами, которые накладывают на специальную чашу. При равенстве давлений поршень нахо-

дится в положении равновесия и измеряемое давление определяется как $p = mg/F$, где m — масса грузов на чашке манометра, g — ускорение свободного падения, F — площадь поршня. Таким образом, здесь мы имеем дело с нулевым прибором сравнения ручного уравнивания.

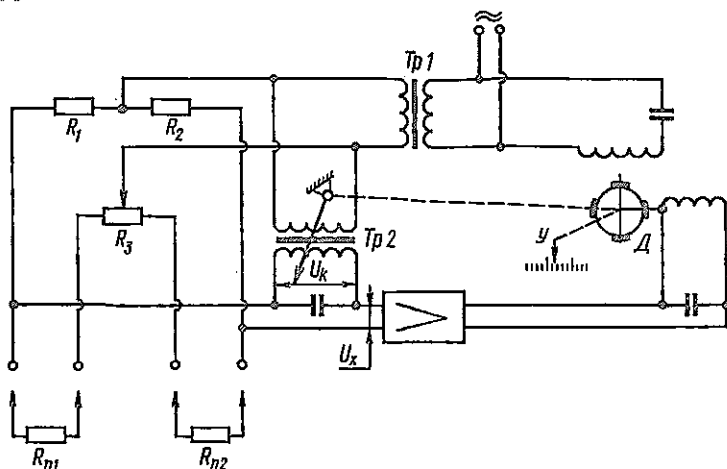


Рис. 37

На рис. 37 приведена схема неуравновешенного электрического моста для измерения температуры с помощью термометра сопротивления R_{n1} . Термометр R_{n2} находится в условиях постоянной температуры и является мерой для сравнения. Мостовая цепь образуется сопротивлениями R_1 и R_2 и термометрами R_{n1} и R_{n2} . Сопротивление R_3 служит для компенсации начальной разности сопротивления термометров. Питание моста осуществляется переменным напряжением вторичной обмотки трансформатора $Tr1$. Напряжение U_x разбаланса мостовой схемы, пропорциональное отклонению температуры в месте установки термометра R_{n1} от температуры термометра R_{n2} , измеряется автоматическим компенсатором напряжения. Напряжение U_x компенсируется напряжением U_h , снимаемым со вторичной обмотки трансформатора $Tr2$ первичная обмотка которого включена в цепь питания моста. Разность напряжений $U_x - U_h$ увеличивается и управляет работой реверсивного двигателя D , направление вращения которого зависит от знака разности $U_x - U_h$. Вращаясь в ту или иную сторону, ротор двигателя изменяет коэффициент трансформации $Tr2$ так, чтобы $U_x - U_h = 0$. Кроме того, ротор двигателя перемещает указатель Y отсчетного устройства, по положению которого судя об измеряемой температуре.

По способу отсчета значений измеряемых величин приборы подразделяются на *показывающие*, в том числе на *аналоговые* и *цифровые*, и на *регистрирующие*.

Наибольшее распространение получили аналоговые приборы, отсчетные устройства которых состоят из двух элементов — шкалы и указателя, причем один из них связан с подвижной системой прибора, а другой с корпусом. В цифровых приборах отсчет осуществляется с помощью механических, электронных или других цифровых отсчетных устройств. Цифровые приборы прямого действия применяются наиболее часто в тех случаях, когда измеряемая величина предварительно легко преобразуется в угол поворота некоторого вала (лопастные счетчики) или в последовательность импульсов (регистрация радиоактивных излучений).

По способу записи измеряемой величины регистрирующие приборы делятся на *самопишущие* и *печатающие*. В самопишущих приборах, таких, как барограф или шлейфовый осциллограф, запись показаний представляет собой график или диаграмму. В печатающих приборах информация о значении измеряемой величины выдается в числовой форме на бумажной ленте.

Автоматические приборы сравнения выпускаются чаще всего в виде комбинированных приборов, в которых шкальный или цифровой отсчет сочетается с записью на диаграмме или с печатанием результатов измерений. Нужно отметить, что сам принцип действия автоматических приборов сравнения, основанный на уравнивании и перемещении указателя с помощью специального двигателя, побуждает делать их регистрирующими. Поэтому указатель таких приборов может одновременно с показанием и регистрацией выполнять ряд вспомогательных операций, например, включать и выключать контакты управляющих цепей, непосредственно переставлять регулирующие органы и т. п. Кроме того, выходное звено его привода легко связывается с преобразователями «перемещение — код» или «угол поворота — код», в результате чего получают приборы сравнения с цифровым отсчетом. Выходные данные подобных приборов, будучи представлены в цифровой форме, могут быть использованы непосредственно для ввода их в цифровые вычислительные машины для последующей математической обработки результатов измерения.

Благодаря описанным выше свойствам автоматические приборы сравнения стали основным современным средством измерения, особенно в тех отраслях, где измерения связаны с проведением сложных вычислений с помощью цифровых вычислительных машин.

Вспомогательные средства измерений

К этой группе относятся средства измерений величин, влияющих на метрологические свойства другого средства измерений при его применении или проверке. Показания вспомогательных средств измерений используются для вычисления поправок к результатам измерений (например, термометров для измерения температуры окружающей среды при работе с грузопоршневыми манометрами)

или для контроля за поддержанием значений влияющих величин в заданных пределах (например, психрометров для измерения влажности при точных интерференционных измерениях длин).

Для измерения какой-либо величины или одновременно нескольких величин иногда бывает недостаточно одного измерительного прибора. В этих случаях создают целые комплексы расположенных в одном месте и функционально объединенных друг с другом средств измерений (мер, преобразователей, измерительных приборов и вспомогательных средств), предназначенных для выработки сигнала измерительной информации в форме, удобной для непосредственного восприятия наблюдателем. Подобные комплексы называются *измерительными установками*. Измерительная установка, оснащенная образцовыми средствами измерений и предназначенная для поверки других средств измерений, называется *поверочной установкой*.

Измерительные системы отличаются от измерительных установок тем, что они предназначены для выработки сигналов измерительной информации в форме, удобной не только для восприятия наблюдателем, но и для автоматической обработки результатов измерений, передачи на расстояние или использования в автоматических системах управления. Отдельные средства измерений, входящие в измерительную систему, могут быть значительно удалены друг от друга (иногда на многие десятки, сотни и даже миллионы километров) и соединены между собой каналами проводной или беспроводной связи.

§ 63. ОТСЧЕТНЫЕ УСТРОЙСТВА СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Результаты измерений, осуществленных измерительным прибором, регистрируются *отсчетными устройствами*. Отсчетные устройства подразделяются на *шкальные, цифровые и регистрирующие*.

Наиболее распространены шкальные устройства, состоящие из циферблата с нанесенной на нем шкалой и указателя (стрелка, лезвие, нить, световой луч). Один из этих элементов, чаще указатель, связывается с подвижной системой прибора, а их взаимное расположение при измерении определяет значение измеряемой величины.

Шкала представляет собой совокупность отметок и чисел, наносимых на циферблате отсчетного устройства вдоль прямой линии или окружности (а иногда и какой-либо другой кривой, например, спирали Архимеда) и изображающих ряд последовательных значений измеряемой величины. Расстояние между осями или центрами двух соседних отметок (штрихов, точек) шкалы, измеренное вдоль ее базовой линии, т. е. линии, проходящей через середины ее самых коротких отметок, называется *длиной деления шкалы*. *Ценой деления шкалы* называется то значение измеряемой величины, которое соответствует перемещению подвижного элемен-

та отсчетного устройства на одно деление. Отношение длины деления шкалы к цене деления определяет *чувствительность прибора*. При измерении перемещений или длин чувствительность является величиной безразмерной и часто называется *передаточным отношением прибора*.

Если чувствительность не зависит от значения измеряемой величины и постоянна на любой отметке шкалы, то шкала называется равномерной. В противном случае шкала считается неравномерной. При постоянной цене деления длина делений такой шкалы меняется от отметки к отметке. Для такой шкалы понятие чувствительности в значительной степени теряет смысл (говорят только о наименьшей и наибольшей, а иногда о средней чувствительности прибора), а отметки наносятся в соответствии с уравнением шкалы, определяющим расстояние отметок от начала шкалы в зависимости от значений измеряемой величины.

Разность между значениями измеряемой величины, соответствующими началу и концу шкалы, определяет диапазон *показаний* прибора, а та часть диапазона показаний, в которой установлены нормы на погрешности прибора, называется *диапазоном измерений*.

Границами диапазона измерений являются соответственно нижний и верхний *пределы измерений*. Во многих приборах диапазоны показаний и измерений совпадают. В этом случае начало и конец шкалы определяют пределы измерений прибора.

В качестве цифровых отсчетных устройств чаще всего применяются механические, для природа которых измеряемые величины предварительно преобразуются в углы поворота валов. В современных электрических и электронных приборах в качестве цифровых отсчетных устройств широко используются световые табло, мозаичные и проекционные системы, многоэлементные цифровые люминесцентные и газоразрядные лампы.

Регистрирующее отсчетное устройство состоит из пишущего или печатающего механизма и ленты, диаграммы или экрана. Печатающим устройством может служить управляемая электрическая пишущая машинка, механический счетчик с выпуклыми буквами или цифрами и электромагнитом, периодически прижимающим ленту к барабанам счетчика, или специальные электроды. Пишущее устройство может представлять собой перо, заполненное чернилами или краской, электрод, световой луч или поток электронов, перемещение которых определяется значениями измеряемых величин.

Диаграмму можно рассматривать как шкалу, роль указателя которой выполняет кривая показаний, вычерченная пишущим механизмом.

Значения измеряемых величин, получаемые при использовании средств измерений, устанавливаются на основании номинальных или действительных значений мер и показаний измерительных приборов.

Под *показанием измерительного прибора* понимается непосредственный результат осуществленного им измерения, выраженный в виде значения измеряемой величины в данных или некоторых условных единицах измерения. Показание прибора образуется из отсчета, т. е. отвлеченного числа, снятого при измерении с отсчетного устройства прибора или меры либо полученного путем счета последовательных сигналов или отметок (например, подсчет числа полос при интерференционных измерениях). Переход к показанию от отсчета осуществляется путем умножения последнего на цену деления шкалы или с помощью градуировочной кривой. Например, если отсчет по амперметру составил 7,5 делений, а цена деления равна $2A$, то показание прибора составляет $2A \times 7,5 = 15A$.

В большинстве случаев шкалы мер и измерительных приборов градуируются непосредственно в единицах измерения исследуемых величин, и тогда у некоторых делений шкалы наносятся цифры, указывающие значения величин в их единицах измерения.

Если же перемещения шкал, указателей или пишущих механизмов связаны с измеряемыми величинами нелинейными зависимостями или зависимостями, слабо отличающимися от линейных, но такими, что их характеристики в пределах одной партии приборов значительно меняются от экземпляра к экземпляру, и поэтому производство данного типа приборов с одинаковыми хотя бы и неравномерными шкалами затруднено, шкалы градуируют в условных единицах, например в миллиметрах или угловых градусах. В этих случаях к прибору прикладывается градуировочная кривая или градуировочная таблица, воспроизводящая значения измеряемой величины, соответствующие различным точкам шкалы или положениям пишущего механизма.

Градуировочными кривыми и таблицами пользуются чаще всего при точных лабораторных измерениях и поверках мер и измерительных приборов. При проведении технических измерений работа с градуировочными таблицами или кривыми резко снижает производительность измерений.

§ 64. ПОГРЕШНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

В результате воздействия большого числа различных случайных и детерминированных факторов, возникающих в процессе изготовления, хранения и эксплуатации измерительных средств, номинальные значения мер и показания измерительных приборов неизбежно отличаются от истинных значений воспроизводимых или измеряемых ими величин. Эти отклонения характеризуют погрешности измерительных средств.

Под *абсолютной погрешностью ΔX меры* понимается алгебраическая разность между ее номинальным X_n и действительным X_d значениями, а под *абсолютной погрешностью ΔX измеритель-*

ного прибора — алгебраическая разность между показанием X_n прибора и действительным значением X_d измеряемой величины:
погрешность меры

$$\Delta X = X_n - X_d, \quad (\text{IX.1})$$

погрешность измерительного прибора

$$\Delta X = X_n - X_d. \quad (\text{IX.1}')$$

Однако в большей степени точность средства измерений характеризует *относительная погрешность*, т. е. выраженное в процентах отношение абсолютной погрешности к действительному значению измеряемой или воспроизводимой данным средством измерений величины:

$$\delta = \frac{100 \Delta X}{X_d}. \quad (\text{IX.2})$$

Обычно $\delta \ll 1$, поэтому в формулу (IX.2) вместо действительного значения часто может быть подставлено номинальное значение меры или показание измерительного прибора.

Если диапазон измерения прибора охватывает и нулевое значение измеряемой величины, то относительная погрешность обращается в бесконечность в соответствующей ему точке шкалы. В этом случае пользуются понятием приведенной *погрешности*, равной отношению абсолютной погрешности измерительного прибора к некоторому нормирующему значению X_N :

$$\gamma = \frac{100 \Delta X}{X_N}. \quad (\text{IX.3})$$

В качестве *нормирующего значения* принимается значение, характерное для данного вида измерительного прибора. Это может быть, например, диапазон измерений, верхний предел измерений, длина шкалы и т. д. Правила выбора нормирующего значения приводятся в ГОСТ 13600—68.

Погрешности измерительных средств принято подразделять на *статические*, имеющие место при измерении постоянных величин после завершения переходных процессов в элементах приборов и преобразователей, и *динамические*, появляющиеся при измерении переменных величин и обусловленные инерционными свойствами средств измерений.

Согласно общей классификации, статические погрешности измерительных средств делятся на *систематические* и *случайные*. Систематические погрешности являются в общем случае функцией измеряемой величины, влияющих величин (температуры, влажности, напряжения питания и пр.) и времени.

В функции измеряемой величины систематические погрешности находят при поверке и аттестации образцовых приборов, например, измерением наперед заданных значений измеряемой величины в нескольких точках шкалы. В результате строится кри-

вая или создается таблица погрешностей, которая используется для определения поправок. Поправка в каждой точке шкалы численно равна систематической погрешности и обратна ей по знаку, поэтому при определении действительного значения измеряемой величины поправку следует прибавить к показанию прибора. Так, если поправка к показанию динамометра 120 Н равна $+0,6$ Н, то действительное значение измеряемой силы составляет $120 + 0,6 = 120,6$ Н. Удобнее пользоваться поправкой, чем систематической погрешностью, поэтому приборы чаще снабжают кривыми или таблицами поправок.

Систематическую погрешность в функции измеряемой величины можно представить в виде суммы погрешности схемы, определяемой самой структурной схемой средства измерений, и технологических погрешностей, обусловленных погрешностями изготовления его элементов.

Как те, так и другие виды погрешностей можно рассматривать в качестве систематических лишь при измерении постоянной величины с помощью одного экземпляра измерительного прибора. В массе же измерений различных значений физической величины, осуществляемых одним или многими приборами того же типоразмера, эти систематические погрешности приходится относить к классу случайных.

Выделение систематических погрешностей в отдельную группу обусловливается, таким образом, лишь тем, что при поверке измерительных средств они могут быть определены для каждой точки шкалы и исключены из результатов последующих измерений. Именно так и поступают при точных метрологических измерениях.

Между погрешностями схемы и технологическими погрешностями средств измерений существует принципиальная разница. Если первые накладывают свой отпечаток на характер изменения по шкале суммарной погрешности всех средств измерений данного типоразмера, то технологические погрешности индивидуальны для каждого экземпляра, т. е. их значения в одних и тех же точках шкалы различны для различных экземпляров приборов. Этим, конечно, не отрицается возможность существования вероятностных связей между ними как в одной, так и в нескольких точках шкалы, поскольку общность технологического процесса изготовления приборов данного типа, несомненно, создает некоторую общность изменения их технологических погрешностей.

Назовем *статической характеристикой* $m_x = f(Q)$ измерительного прибора (преобразователя) зависимость между математическим ожиданием m_x его показаний (выходной величины) и истинным значением Q измеряемой величины. Тогда систематическую погрешность в функции измеряемой величины можно представить в виде разности математических ожиданий показаний $m_x = f(Q)$ реального и $m_{x_0} = f_0(Q)$ идеального, т. е. лишенного систематических погрешностей, измерительных приборов:

$$\Delta_c(Q) = m_x - m_{x_0} = f(Q) - f_0(Q). \quad (\text{IX.4})$$

На рис. 38, а показано взаимное положение статических характеристик реального $f(Q)$ и идеального $f_0(Q)$ приборов при наличии только погрешностей схемы. Технологические погрешности в большой степени искажают эту картину. Результатом их проявления является:

а) поступательное смещение статической характеристики относительно характеристики идеального прибора и возникновение погрешности, постоянной в каждой точке шкалы; эта погрешность называется *аддитивной* (рис. 38, б);

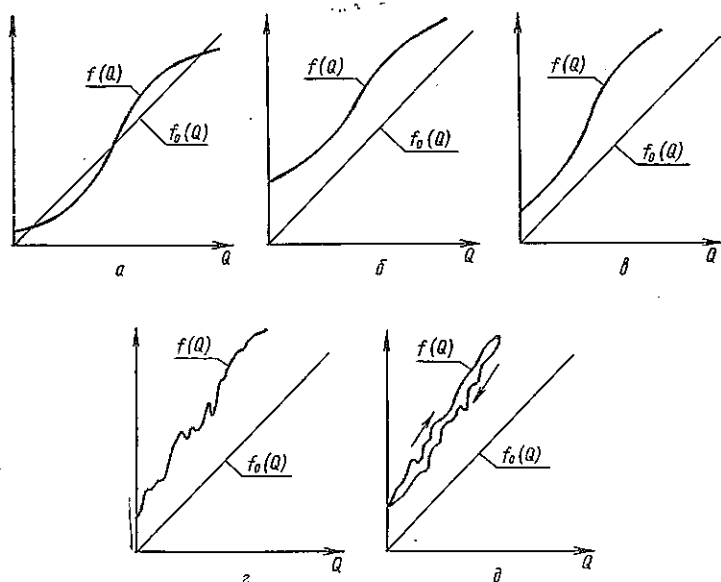


Рис. 38

б) поворот статической характеристики и появление погрешности, линейно возрастающей или убывающей с ростом измеряемой величины и называемой *мультипликативной* погрешностью (рис. 38, в);

в) *нелинейные искажения* статической характеристики (рис. 38, г);

г) появление *погрешности обратного хода*, выражающейся в несовпадении статических характеристик прибора при увеличении и уменьшении измеряемой величины (рис. 38, д).

В функции значений влияющих величин систематическую погрешность можно в большинстве случаев рассматривать как прогрессивную, линейно меняющуюся с их изменениями. При техни-

ческих измерениях, однако, влияющие величины приходится рассматривать как величины, случайно изменяющиеся в некотором интервале. Поэтому и вызываемые ими погрешности становятся случайными.

Случайные погрешности измерительных средств обязаны своим возникновением случайным изменениям параметров составляющих их элементов и случайным погрешностям отсчета (параллакс, погрешность интерполяции положения указателя между штрихами шкалы).

В общем случае их следует рассматривать как случайную функцию времени, измеряемой величины и влияющих величин. В частном случае измерений постоянных величин в нормальной области значений влияющих величин случайную погрешность можно считать одномерной случайной величиной, если ее временные изменения невелики. При этом оценка s^2_n дисперсии σ^2_n показаний прибора определяется при отсутствии корреляции между отдельными значениями погрешности как

$$s^2_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_{ni} - \bar{X}_n)^2, \quad (\text{IX.5})$$

где X_{ni} — i -е показание прибора в ряду наблюдений протяженностью n и $\bar{X}_n$ — среднее арифметическое показаний прибора, являющееся функцией измеряемой величины.

Для того чтобы проще охарактеризовать случайную погрешность прибора, на практике часто прибегают к определению *непостоянства (размаха)* R показаний прибора, т. е. разности между наибольшим и наименьшим из показаний измерительного прибора, соответствующих одному и тому же значению измеряемой величины.

Если эта разность определяется при достижении измеряемой величиной некоторого значения при ее увеличении и уменьшении, а не при одностороннем изменении, то она называется *вариацией показаний* w и включает в себя помимо размаха R показаний еще и погрешность обратного хода, возникающую из-за зазоров и трения в сочленениях подвижных деталей механизмов прибора и других гистерезисных явлений, свойственных его элементам.

Еще одной важной характеристикой измерительного прибора является порог реагирования (чувствительности). Под *порогом реагирования* понимается изменение измеряемой величины, вызывающее наименьшее изменение показаний измерительного прибора, которое еще может быть обнаружено наблюдателем при нормальном для данного прибора способе отсчета показаний.

При измерении переменных во времени величин большое значение приобретает анализ динамических погрешностей, которые искажают частотный спектр измеряемой функции. Если динамика средства измерений описывается дифференциальным линейным уравнением с постоянными коэффициентами, то значения динами-

ческой погрешности полностью определяются измеряемой функцией и амплитудно-фазовой частотной характеристикой средства измерений.

§ 65. НОРМИРОВАНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Государственными стандартами на отдельные виды средств измерений устанавливаются нормы на значения их суммарных погрешностей и отдельных составляющих, таких, как вариация показаний, непостоянство показаний, погрешность обратного хода и др.

Значения суммарных погрешностей устанавливаются отдельно для нормальных условий применения средств измерений и для случая отклонения влияющих величин от значений, имеющих место в нормальных условиях.

Под нормальными понимаются такие условия применения средств измерения, при которых влияющие на процесс измерения величины (температура, влажность, частота и напряжение питания, внешние магнитные поля, положение средств измерения в пространстве и т. д.) имеют нормальные значения или находятся в нормальной области значений. Нормальные значения влияющих величин указываются в стандартах или технических условиях на средства измерений данного вида в форме номиналов с нормированными отклонениями, например, температура должна составлять $20 \pm 2^\circ\text{C}$, напряжение питания — $220\text{В} \pm 10\%$. Иногда вместо нормальных значений влияющих величин указывается нормальная область их значений (влажность 30—80%).

Погрешность, свойственная средству измерений, находящемуся в нормальных условиях применения, называется *основной погрешностью*. Основная погрешность средств измерений нормируется согласно ГОСТ 13600—68 путем задания *пределов допускаемой основной погрешности*.

Только в том случае, когда основная погрешность находится в этих пределах, средства измерения допускаются к применению.

Пределы допускаемой основной погрешности мер задаются в виде абсолютных, приведенных или относительных погрешностей.

Основная погрешность отдельных однозначных мер задается однозначной формулой, определяющей пределы допускаемой абсолютной

$$\Delta = \pm a, \quad (\text{IX.6})$$

или относительной основной погрешности

$$\delta = \pm \frac{100 \Delta}{X_n}, \quad (\text{IX.7})$$

где Δ — предел допускаемой основной абсолютной погрешности;
 δ — предел допускаемой относительной основной погрешности;
 X_n — номинальное значение меры.

Для тех мер, которые не имеют номинального значения, нормируется не основная погрешность, а допустимый диапазон действительных значений мер.

Основная погрешность отдельных многозначных мер выражается также одночленной формулой, определяющей приведенную погрешность:

$$\gamma = \pm \frac{100 \Delta}{D}, \quad (\text{IX.8})$$

где D — диапазон значений воспроизводимой многозначной мерой величины.

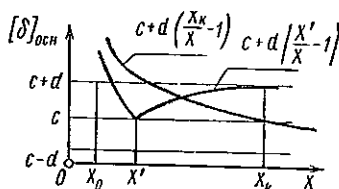


Рис. 39

Для нормирования пределов допускаемой основной погрешности наборов и магазинов мер одночленные формулы не применяются, поскольку они не отражают всегда имеющей место зависимости абсолютной или относительной погрешности меры от номинального значения воспроизводимой величины. Поэтому для них используются двучленные формулы:

для абсолютной погрешности

$$\Delta = \pm (a + bX), \quad (\text{IX.9})$$

и для относительной основной погрешности

$$\delta = \pm \left[c + d \left(\frac{X_k}{X} - 1 \right) \right], \quad (\text{IX.10})$$

где a, b, c, d — постоянные числа; X_k — наибольшее значение воспроизводимой данным набором или магазином величины.

При $X = X_k$ предел допускаемой относительной основной погрешности достигает значения $\delta = \pm c$, а при $X < X_k$ остается всюду больше этой величины (рис. 39). Кроме формул (IX.9) и (IX.10) допускается также использование формулы

$$\delta = \pm \left[c + d \left| \frac{X'}{X} - 1 \right| \right], \quad (\text{IX.11})$$

где X' — значение воспроизводимой набором или магазином величины, при котором предел допускаемой основной погрешности достигает наименьшего значения. Для сравнения на рис. 39 приведены кривые, соответствующие формулам (IX.10) и (IX.11).

Нормирование формулами (IX.6)—(IX.11) узаконено ГОСТ 13600—68. Кроме того, в существующих стандартах на отдельные виды мер еще широко используются двучленные формулы несколько иной структуры, например,

$$\delta = \pm \left[e + \frac{f}{X} \right], \quad (\text{IX.12})$$

где e и f — постоянные числа.

Если зависимость основной погрешности от номинальных значений мер оказывается более сложной, чем выраженная формулами (IX.6)—(IX.12), то основная погрешность задается в виде таблицы пределов допускаемой абсолютной основной погрешности для различных номинальных значений мер (например, для мер массы — гирь).

Примеры: 1. Предел допускаемой основной относительной погрешности образцовых конденсаторов малой емкости согласно ГОСТ 12737—67 задается одночленной формулой (IX.7) и составляет $\delta = \pm 0,05\%$ от номинального значения емкости.

2. По ГОСТ 7003—74 пределы допускаемой основной относительной погрешности многодекадных магазинов сопротивления устанавливаются двучленной формулой (IX.12) в виде

$$\delta = \pm \left[K + F \frac{m}{R} \right],$$

где K — числовое значение класса точности магазина; F — постоянное число; R — включенное сопротивление; m — число декад.

3. Действительные значения э.д.с. нормальных элементов по ГОСТ 1954—64 при температуре 20°C должны лежать в диапазонах: класс точности 0,001—(1,01859—1,01863) В; класс точности 0,02—(1,0186—1,0194) В.

Способ задания пределов допускаемой основной погрешности измерительных преобразователей и приборов определяется главным образом зависимостью погрешности от измеряемой или соответственно входной величины.

На рис. 40 приведены виды изменений погрешности в диапазоне измерения (или преобразования) измерительных средств, причем различные кривые в одних и тех же системах координат соответствуют различным экземплярам измерительных средств одного типоразмера.

В образовании погрешности средства измерений (рис. 40, а) наибольшую роль играет погрешность схемы. После регулировки зона возможных значений погрешности располагается симметрично относительно нуля. Для средства измерения с кривой погрешностей, изображенной на рис. 40, б, важнейшее значение имеет аддитивная погрешность, возможной причиной которой является низкая точность регулировки нуля. Размах случайных блужданий

кривой погрешностей невелик, однако наличие аддитивной погрешности резко увеличивает разброс значений погрешностей всей массы приборов по сравнению с разбросом погрешностей одного прибора (преобразователя).

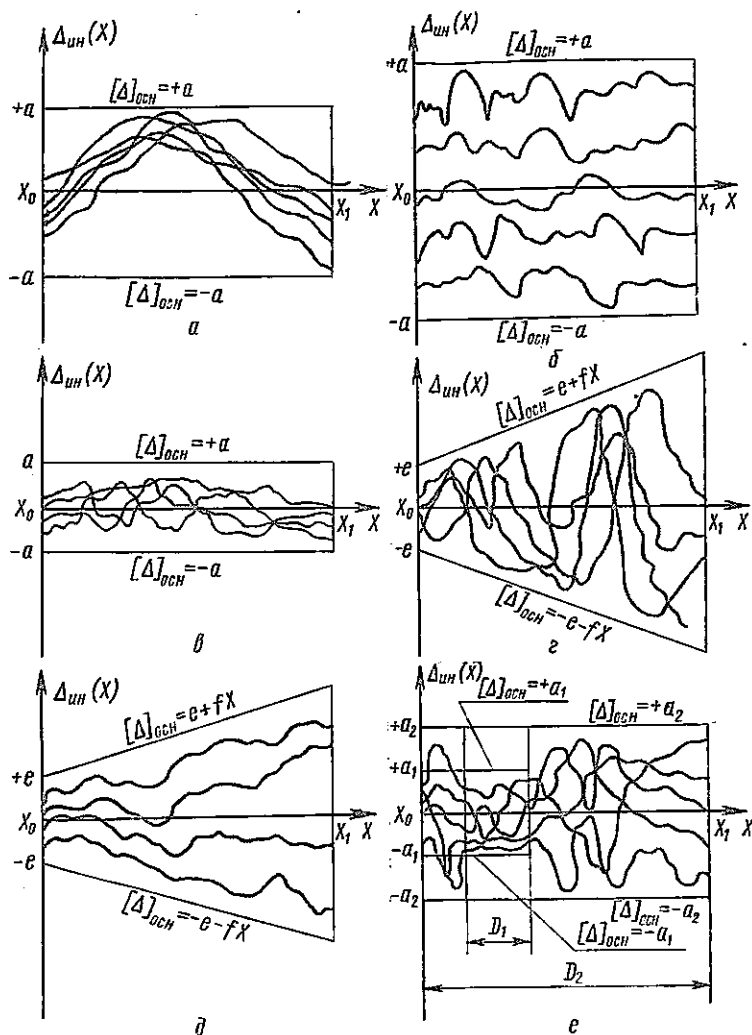


Рис. 40

После исключения аддитивной погрешности получаем случай, изображенный на рис. 40, в, когда разбросы погрешностей одного прибора и всех приборов данного вида приблизительно одинаковы. Для измерительных приборов и преобразователей, погреш-

ность которых изменяется так, как показано на рис. 40, б, в, вопрос нормирования решается заданием пределов основной абсолютной или приведенной погрешности по одночленным формулам (IX.6) или (IX.8).

В случае больших погрешностей схемы (см. рис. 40, а) основная погрешность также часто нормируется заданием постоянных пределов ее допускаемых значений по формулам (IX.6) и (IX.8). Этим, однако, сильно затрудняется проверка измерительных приборов, так как при проверке точности в нескольких точках шкалы легко пропустить то значение измеряемой величины, при котором основная погрешность максимальна.

Описанный способ нормирования основной погрешности средств измерения, характер изменения погрешностей которых показан на рис. 40, а, б, резко занижает фактическую точность, которая может быть существенно повышена путем использования кривых или таблиц поправок.

На рис. 40, г изображены кривые погрешностей нескольких приборов (или преобразователей) одного типоразмера, разброс погрешностей которых является функцией измеряемой величины и растет с ее увеличением. Пределы допускаемой основной погрешности такого типа приборов естественно нормировать двухчленной формулой (IX.9) для абсолютной и формулой (IX.10) или (IX.11) для относительной основных погрешностей.

К такому же способу нормирования приводит анализ кривых погрешностей измерительного прибора (преобразователя) с ярко выраженной мультипликативной погрешностью (см. рис. 40, д). Отличие от рассмотренного выше случая состоит лишь в том, что действительную точность прибора с мультипликативной погрешностью можно путем введения поправок значительно повысить по сравнению с нормированной точностью.

На рис. 40, е показано такое изменение погрешностей вдоль шкалы прибора, при котором можно выделить некоторый участок диапазона измерения (нормированный участок) с разбросом погрешностей всей массы приборов данного типоразмера, значительно меньшим разброса в остальных точках шкалы. В этом случае устанавливаются постоянные пределы допускаемой основной погрешности $\pm \Delta_1$ и $\pm \Delta_2$, различные для всего диапазона измерения и его нормированного участка.

Таким образом, в настоящее время существуют три способа нормирования основной погрешности измерительных приборов и преобразователей:

а) нормирование заданием пределов допускаемой основной абсолютной или приведенной погрешности $\pm \Delta$ или $\pm \gamma$, постоянных во всем диапазоне измерения или преобразования;

б) нормирование заданием пределов допускаемой основной абсолютной или относительной погрешности $\pm \Delta$ или $\pm \delta$ в функции измеряемой величины по формулам (IX.9) — (IX.12);

в) нормирование заданием постоянных пределов допускаемой основной погрешности, различных для всего диапазона измерения и одного или нескольких нормированных участков, или различных для разных диапазонов измерения (для многопредельных/приборов).

Первый способ широко применяется для нормирования основной погрешности большинства сравнительно узкопредельных стрелочных измерительных приборов, а также для измерительных преобразователей. Остальные два способа отвечают в большей степени условиям измерения, имеющим место при использовании широкопредельных приборов.

Примеры. 1. Пределы допускаемой основной относительной погрешности образцового компенсационного вольтметра ОКВ-5А задаются формулой (IX. 12):

$$\delta = \pm \left(0,2 + \frac{0,25}{U} \right) \%,$$

где U — амплитуда измеряемого переменного напряжения.

2. Диапазон измерения автомобильных стационарных рычажных весов общего назначения разбивается на два поддиапазона (третий способ нормирования): 1—5 т и свыше 5 до 20 т, в границах которых устанавливаются различные пределы допускаемой основной абсолютной погрешности, равные соответственно $\pm 0,5$ и $\pm 1,0$ деления шкалы.

При проведении измерения по методу сравнения с мерой результат измерения X определяется как сумма действительного значения X_a воспроизводимой мерой величины и разности $X_1 - X_2$ показаний прибора при измерении меры и исследуемой величины:

$$X = X_a + (X_1 - X_2).$$

Поэтому (см. § 59) погрешность может оказаться в некоторых случаях равной двойной основной погрешности, т. е. *ширине зоны погрешностей*.

Это заставляет нормировать полную ширину зоны погрешностей приборов, предназначенных для проведения измерений по методу сравнения с мерой, и задавать ее не в виде двух симметричных пределов, а одним числом. В остальном способы нормирования остаются теми же.

Так, согласно ГОСТ 577—68 допускаемая ширина зоны погрешностей индикатора часового типа составляет 22 мкм во всем диапазоне измерения, 12 мкм на любом участке длиной 1 мм и 6 мкм на участке 0,1 мм в начале второго оборота стрелки.

Кроме основной погрешности, свойственной средствам измерения при использовании их в нормальных условиях, в стандартах нормируются пределы допускаемых дополнительных погрешностей мер, пределы допускаемых изменений показаний измерительных приборов и допускаемых изменений выходного сигнала измерительных преобразователей, возникающих вследствие отклоне-

ния значений влияющих величин от их нормальных значений или в результате их выхода из нормальной области значений. Та область значений влияющих величин, в которой дополнительные погрешности не превышают пределов допускаемых значений, установленных государственными стандартами, называется расширенной областью, а соответствующие ей условия применения средств измерений — рабочими условиями. Пределы допускаемых дополнительных погрешностей (изменений показаний или изменений выходного сигнала), вызываемых действием отдельных влияющих величин, нормируются согласно ГОСТ 13600—68 следующими двумя способами:

1) указанием конкретных значений пределов допускаемых дополнительных погрешностей для расширенной области, выраженных в абсолютных величинах, процентах от номинального значения или в долях основной погрешности;

2) указанием функциональной зависимости пределов допускаемой дополнительной погрешности от изменения влияющих величин; при линейной зависимости указывается отношение допускаемого приращения погрешности к изменению влияющей величины.

Примеры: 1. Пределы допускаемой дополнительной погрешности конденсаторов емкости типа Р533 составляют:

а) при изменении температуры от $+20$ до $+10$ и $+35^{\circ}\text{C}$ — $0,01\%$ на каждый градус изменения температуры;

б) при изменении влажности от 60 до 80% — $\left(0,05 + \frac{K}{C}\right)\%$, где C — номинальное значение емкости; K — числовой коэффициент, различный для различных групп номиналов.

2. Дополнительная погрешность магазинов емкости по ГОСТ 6476—67 вследствие изменения частоты от границы нормальной области до любого значения в расширенной области не должна превышать основной погрешности.

Для образцовых мер, применяемых по своему действительному значению, основной точностной характеристикой является погрешность аттестации. Ее задают в виде интервала возможных значений, протяженность которого при заданной (или принятой) доверительной вероятности определяется погрешностью аттестации той меры, сравнением с которой она аттестуется, и точностью измерительного прибора, осуществляющего это сравнение.

Погрешность аттестации нормируется государственными стандартами в долях основной погрешности и составляет обычно

$$[\Delta]_{\text{атт}} = (0,25 \div 0,50) [\Delta]_{\text{осн}} \quad (\text{IX.13})$$

Кроме пределов допускаемой основной и дополнительной погрешностей и погрешностей аттестации мер, государственными стандартами устанавливаются нормы и на некоторые составляющие суммарной погрешности средств измерений.

Рассмотрим некоторые из них, чаще всего подлежащие нормированию.

1. Случайная погрешность входит составной частью в нормируемую основную погрешность. Однако в некоторых случаях пределы систематических и случайных погрешностей назначаются раздельно. Тогда наибольшая допускаемая систематическая погрешность или ширина зоны ее допустимых значений определяет величину, которая называется погрешностью измерительного прибора и нормируется отдельно от случайных погрешностей. Так обстоит дело, например, с нормированием погрешностей динамометров и силоизмерительных машин, где погрешность определяется как наибольшая разница между средним из трех или пяти показаний и действительным значением измеряемой силы, или приборов для линейных и угловых измерений, в частности индикаторов часового типа, где влияние случайных погрешностей снижают трехкратным измерением и определением среднего арифметического.

2. Если измерительный прибор или преобразователь соответствует требованиям стандартов в отношении нормы основной погрешности, то вариация его показаний обязательно меньше удвоенной основной погрешности, поэтому назначение норм на вариацию показаний кажется лишним. В некоторых случаях нормы на вариацию действительно не назначаются (барометры, часы, частотоизмерительные приборы, грузопоршневые манометры), но чаще всего потребитель средств измерений бывает заинтересован в повторяемости их показаний или значений выходных сигналов при измерении или преобразовании одних и тех же значений величин. Это и заставляет задавать нормы на вариацию показаний измерительных приборов и вариацию выходных сигналов.

Обычно значение допускаемой вариации регламентируется в пределах

$$\omega = (1 \div 1,5) \Delta, \quad (\text{IX.14})$$

где Δ — предел допускаемой основной погрешности.

В весоизмерительных и некоторых других приборах, в которых цена деления принимается равной допускаемой основной погрешности, допускаемая вариация показаний равна цене деления, а для приборов с условными шкалами (образцовые пружинные манометры) она часто нормируется в делениях шкалы.

3. Доля случайных погрешностей в основной погрешности средств измерений характеризуется непостоянством показаний прибора или выходного сигнала. Непостоянство показаний нормируется путем задания допускаемого размаха определенного числа показаний прибора, который обычно не должен превышать 50% основной погрешности:

$$R \leq 0,5 \Delta. \quad (\text{IX.15})$$

Таким образом, определяемая размахом показаний доля случайных погрешностей составляет не более 25% полной зоны погрешности. Так же обстоит дело и с нормированием непостоянства выходного сигнала преобразователей.

В технической литературе по силоизмерительным приборам и приборам для измерения длин, включая стандарты на эти типы приборов, непостоянство показаний называется вариацией, а погрешность обратного хода, являющаяся, по определению, составной частью вариации остальных типов средств измерений, нормируется отдельно.

4. Допускаемое значение порога реагирования нормируется в тех случаях, когда он влияет на результаты измерений, например в приборах сравнения, работающих по нулевому методу (грузопоршневые манометры по ГОСТ 8291—69, весы равноплечие по ГОСТ 359—54), в преобразователях и приборах, применяемых в системах автоматического контроля и регулирования (дифманометры, ГОСТ 18140—72), где наличие порога реагирования ведет к увеличению суммарной зоны нечувствительности системы, а также в приборах, предназначенных для проведения измерений методом сравнения с мерой (некоторые типы гальванометров). Порог реагирования определяет способность средства измерения реагировать на малые изменения измеряемых величин, поэтому является очень важной характеристикой. Однако из-за трудности экспериментального определения действительного значения порога реагирования во многих случаях приходится отказываться от его нормирования.

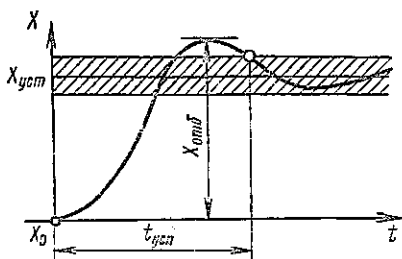


Рис. 41

Допускаемое значение порога реагирования задают в долях основной погрешности (10—50% основной погрешности) или в долях деления шкалы.

Динамические погрешности средств измерений ограничивают путем нормирования следующих величин:

времени успокоения (времени переходного процесса), т. е. промежутка времени с момента скачкообразного изменения измеряемой величины до момента, когда подвижный орган отсчетного устройства или значение выходного сигнала войдет в зону установившегося состояния (заштрихованная зона на рис. 41). При этом указывается величина скачка $X_{уст} - X_0$ в процентах от диапазона измерения или преобразования и ширина зоны установившегося состояния в процентах от величины скачка или установившегося значения $X_{уст}$ измеряемой величины. В некоторых случаях (например, для весов) указывается, кроме того, *допустимое число прохождений подвижного органа отсчетного устройства или значения выходного сигнала через положение равновесия до достижения установившегося значения;*

допускаемого значения первого отброса $X_{отб}$ или отношения

$X_{отб}/X_{уст}$ (см. рис. 41), которое для показывающих приборов не должно превышать 1,4, а для самопишущих 1,1;

допускаемой ширины полосы пропускания, т. е. того диапазона частот, в котором отклонение модуля амплитудной частотной характеристики от некоторого номинального значения, а также фазовые сдвиги, не превышают некоторых заданных величин $[\Delta A]$ и $[\Theta]$. При этом указывается амплитуда синусоидальных колебаний входной или измеряемой величины, для которой нормируются величины ΔA и Θ . Если нормируемый диапазон частот включает и

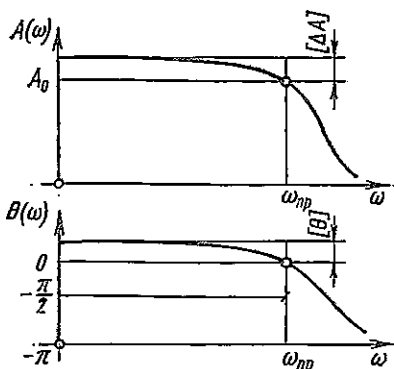


Рис. 42

нулевую частоту (рис. 42), то указывается лишь *предельная рабочая частота* $\omega_{нр}$, при достижении которой значение амплитудной частотной характеристики $A(\omega)$ отличается от нулевого значения A не больше чем на $[\Delta A]$, а сдвиг фазы не превышает $[\Theta]$.

Все вышеприведенные характеристики могли бы быть легко определены, если бы нормированию подвергалась сама амплитудно-фазовая частотная характеристика прибора или соответственно преобразователя. Одна-

ко определение амплитудно-фазовых частотных характеристик занимает обычно много времени и требует наличия специальной аппаратуры, поэтому в настоящее время их еще не нормируют, хотя в технической литературе можно найти замечания, касающиеся необходимости подобного нормирования.

Следует отметить, что для таких мер, как катушки сопротивления (ГОСТ 6864—69), в стандартах указывается допускаемое значение T постоянной времени, что равносильно заданию амплитудно-фазовой частотной характеристики, поскольку известно, что катушка сопротивления представляет собой апериодическое звено 1-го порядка с передаточной функцией

$$F(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T}.$$

Для цифровых приборов (преобразователей) указывают *полное время измерения (преобразования)*, т. е. время, прошедшее с момента изменения измеряемой (преобразуемой) величины или начала принудительного цикла измерения (преобразования) до момента получения нового результата измерения на отсчетном устройстве или нового кодированного результата преобразования. Кроме того, указывается *скорость измерения (преобразования)* или, иначе, *быстродействие цифрового прибора*, которое представ-

ляет собой максимальное число измерений (преобразований) в единицу времени с нормированной погрешностью.

Кроме рассмотренных выше характеристик средств измерения должны нормироваться и все другие характеристики, прямо или косвенно влияющие на точность измерений, проводимых с помощью этих средств, например, отклонение от плоскопараллельности, притираемость, стабильность концевых мер длины и др.

Нетрудно заметить, что рассмотренный перечень составляющих погрешности средств измерений и способы их выражения, нормируемые современными стандартами, обладают целым рядом недостатков.

Изложенная система нормирования не обеспечивает, во-первых, возможности определения с приемлемой достоверностью погрешности технических измерений, осуществляемых с помощью выбранных средств. Далее, существующая система нормирования не позволяет обоснованно подойти к выбору средств измерений, обеспечивающих проведение измерений с заданной точностью. И, наконец, затруднено сравнение различных средств измерений, особенно в тех случаях, когда критерий сравнения должен учитывать влияние многих факторов внешней среды, меняющихся случайным образом в широких диапазонах.

Раньше еще можно было мириться с этими недостатками. Однако характерное для современной измерительной техники усложнение измерительных систем, все более последовательное проведение агрегатного принципа их построения, разнообразие условий применения средств измерений и постоянная потребность учета погрешностей измерения делает необходимым пересмотр существующей системы нормирования.

Принципиально новый подход к нормированию погрешностей средств измерений заложен в ГОСТ 8.009—72 «Государственная система обеспечения единства измерений. Нормируемые метрологические характеристики средств измерений». Срок введения этого стандарта установлен с 1.1.1974 года, однако его практическое внедрение, связанное с проведением огромной работы по пересмотру действующих стандартов, неизбежно затянется на несколько лет.

Согласно новому стандарту все средства измерений подразделяются на три группы, отличающиеся друг от друга необходимым комплексом нормируемых метрологических характеристик.

В первую группу входят средства измерений (меры и измерительные преобразователи), которые используются совместно с другими в рамках единой измерительной системы, системы контроля, регулирования или управления.

Ко второй группе относятся средства измерений (измерительные приборы), используемые только по отдельности и не имеющие другого выхода, кроме отсчетного устройства.

В третью группу входят средства измерений, предназначенные для использования по отдельности, но отличающиеся от средств из-

мерений второй группы тем, что их точность намного превышает требуемую точность измерений.

Комплекс метрологических характеристик и способы их нормирования для средств измерений 3-й группы практически не отличаются от регламентируемых в действующей нормативно-технической документации. При оценке погрешностей измерений, осуществляемых с помощью средств измерений этой группы, за их погрешность в рабочих условиях может быть принята основная погрешность или арифметическая сумма наибольших возможных значений ее отдельных составляющих. Это вполне допустимо, если погрешность средства измерений заведомо меньше наибольшей допускаемой погрешности измерений.

Для средств измерений первых двух групп наряду с пределами допускаемых значений основной погрешности должны указываться статистические моменты систематической и случайной составляющих суммарной погрешности. При этом погрешность, являющаяся систематической для данного экземпляра прибора, рассматривается в качестве случайной, если анализируется вся совокупность приборов данного типа. Определенная таким образом систематическая составляющая погрешности нормируется заданием значений математического ожидания и среднего квадратического отклонения. Для случайной составляющей, если она существенно влияет на погрешность измерений, указывается допускаемое среднее квадратическое отклонение, а при необходимости ее рассмотрения как случайной функции времени, — и автокорреляционная функция или спектральная плотность.

Кроме того, нормируется вариация показаний измерительного прибора или выходного сигнала преобразователя, под которой понимается погрешность обратного хода без учета случайной составляющей.

Перечисленные характеристики или некоторые из них можно указывать для рабочих условий применения средств измерений или только для нормальных условий, если изменения внешних воздействий существенно изменяют значения этих характеристик. Внешние воздействия учитываются тогда путем задания функций влияния для каждой влияющей величины. Под функциями влияния понимается зависимость данной метрологической характеристики от значения влияющей величины. Могут быть заданы, например, функции влияния температуры окружающей среды на математическое ожидание систематической составляющей основной погрешности или на среднее квадратическое отклонение случайной составляющей.

Можно предположить, что в большинстве случаев функции влияния имеет смысл нормировать только для основной погрешности и ее систематической составляющей, а остальные характеристики — только для рабочих условий применения средств измерений.

Преимущество задания функций влияния вместо дополнительных погрешностей заключается в том, что они делают возможным

учет случайных изменений влияющих величин, а не только их наибольших отклонений от нормальных значений. Это имеет весьма существенное значение для современных средств измерений, которые используются в сложных условиях внешней среды, когда влияющие величины случайно изменяются в широких диапазонах. Учет только наибольших отклонений влияющих величин в этом случае дает намного завышенные значения погрешности измерения.

Важной особенностью новой системы нормирования является упорядочение в области нормирования динамических характеристик средств измерений, обсуждение которых выходит однако за пределы настоящего курса метрологии.

В заключение данного раздела следует отметить, что никакое нормирование погрешностей средств измерений само по себе не может обеспечить единства измерений. Для достижения единства измерений необходима регламентация самих методик проведения измерений, чему посвящен ГОСТ 8.010—72 «Государственная система обеспечения единства измерений. Общие требования к стандартизации и аттестации методик проведения измерений». Последовательное внедрение этого стандарта, срок введения которого установлен с 1.I.1974 г., является важным шагом на пути достижения действительного единства измерений в стране.

§ 66. КЛАССЫ ТОЧНОСТИ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Класс точности — это обобщенная характеристика средств измерений, определяемая пределами допускаемых основной и дополнительных погрешностей, а также другими свойствами средств измерений, влияющих на их точность, значения которых устанавливаются стандартами на отдельные виды средств измерений. Классы точности присваивают средствам измерений в соответствии с правилами, изложенными в ГОСТ 13600—68.

Исторически сложилось так, что на классы точности разделены все средства измерения, кроме угломерных приборов и приборов для измерения длин, характеризующихся обилием названий для различных типов приборов (ортотесты, оптиметры, оптикаторы, микрокаторы и т. д.).

Основой для присвоения измерительным приборам того или иного класса точности является их основная погрешность и способ ее выражения. Если основная погрешность выражается в единицах измеряемой величины по формуле (IX.6) или (IX.9) или в делениях шкалы, то классы точности обозначаются порядковыми номерами, причем средствам измерения с большим пределом основной допускаемой погрешности присваивается класс точности с большим порядковым номером (например, концевые меры длины классов точности 0; 1 и т. д.). Исключением являются средства измерения, применяемые в акустике, светотехнике и электронике, отсчетные устройства которых градуируются в логарифми-

ческих единицах (в неперах, беллах или децибеллах). Пределы допускаемой основной погрешности этих приборов задаются в тех же единицах, в которых градуируется шкала, и совпадают с числовым значением класса точности. Так, если пределы допускаемой основной погрешности составляют $\pm 0,5$ дБ, то класс точности обозначают: кл. 0,5 дБ.

Более строго подходят к присвоению классов точности средства измерения, пределы допускаемой основной погрешности которых задаются в виде относительных или приведенных погрешностей.

Средствам измерения, пределы допускаемой основной погрешности которых задаются относительной погрешностью по формуле (IX.7), присваивают классы точности, выбираемые из ряда

$$K = [1; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 4,0; 5,0; 6,0] \cdot 10^n; \\ n = 1; 0; -1; -2; \dots \quad (\text{IX.16})$$

Для средств измерения с $\delta = 0,2\%$ класс точности обозначается

ся $\textcircled{02}$.

Конкретные ряды классов точности устанавливаются в стандартах на отдельные виды средств измерений, причем для одного и того же значения n разрешается принимать не больше 5 классов точности с тем, чтобы перепад точностей между отдельными средствами измерения был не очень мал.

Если пределы допускаемой основной относительной погрешности задаются двучленными формулами типа (IX.10) и (IX.11), то класс точности определяется совокупностью обоих коэффициентов c и d , значения которых выбирают из ряда (IX.16), а соответствие между ними устанавливается стандартами на отдельные виды средств измерений.

Так, если пределы допускаемой основной относительной погрешности составляют $\delta = \pm \left[0,02 + 0,01 \left(\frac{X_k}{X} - 1 \right) \right] \%$, то класс точности обозначается 0,02/0,01, а если двучленная формула имеет вид $\delta = \pm \left[0,5 + 0,2 \left| \frac{X'}{X} - 1 \right| \right] \%$, то класс точности обозначается дробью 0,5/0,2.

Если пределы допускаемой основной относительной погрешности выражаются формулой (IX.12), то класс точности определяется лишь коэффициентом e и выбирается из того же ряда (IX.16).

Классы точности приборов, для которых пределы допускаемой основной приведенной погрешности нормируются по формуле (IX.8), обозначаются одной цифрой и выбираются из ряда (IX.16). Если, например, $\gamma = 0,4\%$, то класс точности обозначается как 0,4 (без кружка).

Используя методы теории точности, всегда можно найти такие допуски на параметры элементов измерительного прибора (или преобразователя), соблюдение которых гарантировало бы и без регулировки их получение с погрешностями, меньшими их допускаемых пределов. Однако во многих случаях эти допуски оказываются настолько малы, что изготовление прибора с заданными пределами допускаемых погрешностей становится технологически неосуществимым. Выйти из положения можно двумя путями: во-первых, расширить допуски на параметры некоторых элементов приборов и ввести в его конструкцию дополнительные *регулирующие узлы*, способные компенсировать влияние отклонений этих параметров от их номинальных значений на величину, равную погрешности измерительного прибора, и, во-вторых, осуществить специальную градуировку измерительного прибора.

Регулировка средств измерений

В большинстве случаев в измерительном приборе (преобразователе) можно найти или предусмотреть такие элементы, вариация параметров которых наиболее заметно сказывается на его систематической погрешности, главным образом погрешности схемы, аддитивной и мультипликативной погрешностях.

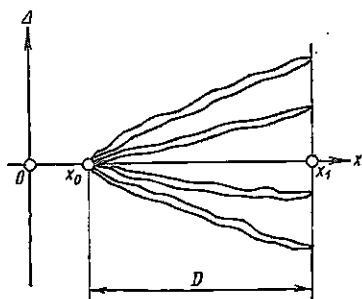


Рис. 43

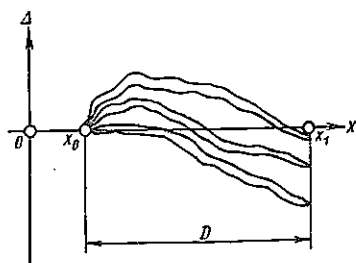


Рис. 44

В общем случае в конструкции измерительного прибора должны быть предусмотрены два регулировочных узла: *регулировка нуля* и *регулировка чувствительности*. Регулировкой нуля уменьшают влияние аддитивной погрешности, постоянной для каждой точки шкалы, а регулировкой чувствительности уменьшают мультипликативные погрешности, меняющиеся линейно с изменением измеряемой величины. При правильной регулировке нуля и чувствительности уменьшается и влияние погрешности схемы прибора. Кроме того, некоторые приборы снабжаются устройствами для *регулировки погрешности схемы* (пружинные манометры).

После регулировки нуля, т. е. устранения аддитивной погрешности, систематическая погрешность обращается в нуль на нижнем пределе измерения, а в диапазоне измерения принимает значения, являющиеся случайной (для всей массы приборов данного типоразмера) функцией $\Delta_c(X)$ измеряемой величины.

Характер случайной функции $\Delta_c(X)$ определяется соотношением ее составляющих. Так, на рис. 43 приведены несколько реализаций систематической погрешности с ярко выраженной мультипликативной составляющей, а на рис. 44 — с сильно развитой погрешностью схемы.

Более высокими метрологическими характеристиками обладают измерительные приборы, имеющие узел регулировки чувствительности. Наличие такой регулировки позволяет поворачивать статическую характеристику, что открывает большие возможности для снижения погрешности схемы и, главным образом, мультипликативной погрешности. Так, после регулировки приборов, кривые погрешностей которых представлены на рис. 43, 44, систематическая погрешность уменьшается в несколько раз, особенно при преобладающем влиянии мультипликативной погрешности, что видно из рис. 45, 46, где для наглядности представлено только по одной

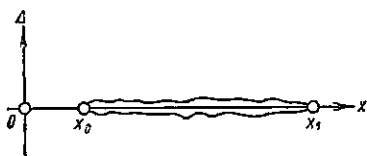


Рис. 45

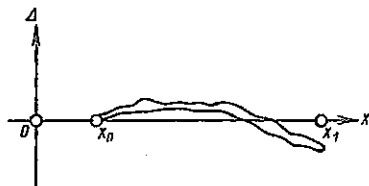


Рис. 46

реализации. Из рисунков видно, что одновременной регулировкой нуля и чувствительности можно свести систематическую погрешность к нулю сразу в нескольких точках (точках регулировки) шкалы. От правильности выбора таких точек зависят значения оставшихся после регулировки систематических погрешностей в других точках шкалы.

Теория регулировки и должна дать ответ на вопрос, какие точки шкалы следует выбрать в качестве точек регулировки. Однако общего решения этой задачи еще не найдено. Трудность решения усугубляется тем, что положение этих точек на шкале определяется не только схемой и конструкцией прибора, но и технологией изготовления его элементов и узлов.

На практике в качестве точек регулировки принимают начальное и конечное, среднее и конечное или начальное, среднее и конечное значения измеряемой величины в диапазоне измерения. При этом значения систематической погрешности близки к минимально возможным, поскольку в действительности точки регулировки часто располагаются близко к началу, середине или концу шкалы.

Таким образом, под регулировкой средств измерения понимается совокупность операций, имеющих целью уменьшить основную погрешность до значений, соответствующих пределам ее допускаемых значений, путем компенсации систематической составляющей погрешности средств измерений, т. е. погрешности схемы, мультипликативной и аддитивной погрешностей.

Градуировка средств измерений

Градуировкой называется процесс нанесения отметок на шкалы средств измерений, а также определение значений измеряемой величины, соответствующих уже нанесенным отметкам, для составления градуировочных кривых или таблиц.

Различают следующие способы градуировки.

1. *Использование типовых (печатных) шкал.* Для подавляющего большинства рабочих и многих образцовых приборов используют типовые (печатные) шкалы, которые изготавливаются заранее в соответствии с уравнением статической характеристики идеального прибора. Если статическая характеристика линейна, то шкала оказывается равномерной. При регулировке параметрам элементов прибора экспериментально придают такие значения, при которых погрешность в точках регулировки становится равной нулю.

2. *Индивидуальная градуировка шкал.* Индивидуальную градуировку шкал осуществляют в тех случаях, когда статическая характеристика прибора нелинейна или близка к линейной, но характер изменения систематической погрешности в диапазоне измерения случайным образом меняется от прибора к прибору данного типа (например, вследствие разброса нелинейности характеристик чувствительного элемента) так, что регулировка не позволяет уменьшить основную погрешность до пределов ее допускаемых значений.

Индивидуальную градуировку проводят в следующем порядке. На предварительно отрегулированном приборе устанавливают циферблат с еще не нанесенными отметками. К измерительному прибору подводят последовательно измеряемые величины нескольких наперед заданных или выбранных значений. На циферблате наносят отметки, соответствующие положениям указателя при этих значениях измеряемой величины, а расстояния между отметками делят на равные части.

При индивидуальной градуировке систематическая погрешность уменьшается во всем диапазоне измерения, а в точках, полученных при градуировке, она достигает значения, равного погрешности обратного хода.

3. *Градуировка условной шкалы.* Условной называется шкала, снабженная некоторыми условными равномерно нанесенными делениями, например, через миллиметр или угловой градус. Градуировка шкалы состоит в определении при помощи образцовых мер или измерительных приборов значений измеряемой величины, со-

ответствующих некоторым отметкам, нанесенным на ней. В результате определяют зависимость числа делений шкалы, пройденных указателем, от значений измеряемой величины. Эту зависимость представляют в виде таблицы или графика. Если необходимо избавиться и от погрешности обратного хода, градуировку осуществляют раздельно при прямом и обратном ходе.

§ 68. КАЛИБРОВКА СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

По мере продвижения вверх по поверочной схеме от рабочих мер и измерительных приборов к эталонам неизбежно сокращается число мер, различных по номинальному значению. На верхних ступенях поверочной схемы часто имеется мера (эталон) только одного значения. Повышение точности измерительных приборов неизбежно связано с сокращением диапазона измерений по их шкале. Поэтому на некоторой ступени поверочной схемы иногда разность номинальных значений поверяемой и ближайшей к ней по разряду исходной мере превышает диапазон измерения измерительного прибора соответствующей данному разряду точности. В этих случаях поверка осуществляется способом калибровки.

Калибровка — способ поверки измерительных средств, заключающийся в сравнении различных мер, их сочетаний или отметок шкал многозначных мер в различных комбинациях и вычислении по результатам этих сравнений значений отдельных мер или отметок шкалы (или поправок к ним) исходя из известного значения одной из них.

В результате сравнения получают систему уравнений, решив которую находят действительные значения мер. Если число уравнений равно числу поверяемых мер, то действительные значения мер и погрешности их аттестации находят с помощью методов обработки результатов косвенных измерений. Однако для повышения точности аттестации мер стремятся увеличить число уравнений, и тогда действительные значения мер определяют по схеме обработки результатов совокупных измерений.

Для иллюстрации способа калибровки рассмотрим два примера.

Граммовые наборы Г-1-1110 и Г-1а-1110, состоящие из гирь массой 500; 200; 200; 100; 50; 20; 20; 10; 5; 2; 2; 1 г*, сличают с рабочим эталоном массой в 1 кг по следующей схеме:

а) рабочий эталон 1 кг = 1000 г сличают одним из методов точного взвешивания на весах 1-го разряда повышенной точности с гирями массой 500; 200; 200; 100 г:

$$1000 - (500 + 200 + 200 + 100) = a_1,$$

где a_1 — разность между массой рабочего эталона и массой суммы гирь;

* Точкой над номинальным значением гири отмечена вторая гиря набора с тем же номиналом.

б) гири 500 г набора сличают с суммой гирь массой 200; 200 и 100 г, в результате чего получают уравнение

$$500 - (200 + 200 + 100) = a_2,$$

где a_2 — результат второго сличения;

в) аналогично проводят остальные сличения и получают уравнения:

$$200 - (100 + 50 + 20 + 20 + 10) = a_3;$$

$$200 - (100 + 50 + 20 + 20 + 10) = a_4;$$

$$100 - (50 + 20 + 20 + 10) = a_5;$$

$$50 - (20 + 20 + 10) = a_6;$$

$$20 - (10 + 5 + 2 + 2 + 1) = a_7;$$

$$20 - (10 + 5 + 2 + 2 + 1) = a_8;$$

$$10 - (5 + 2 + 2 + 1) = a_9;$$

$$5 - (2 + 2 + 1) = a_{10};$$

$$2 - (1 + \bar{1})^* = a_{11};$$

$$2 - (1 + \bar{1}) = a_{12};$$

$$1 - \bar{1} = a_{13}.$$

В результате тринадцати проведенных сличений получили систему из тринадцати уравнений с тринадцатью неизвестными. Решив эту систему, найдем действительные значения масс гирь набора.

Погрешности определения действительных значений могут быть вычислены способами обработки результатов косвенных измерений.

2. Образцовые шкалы 1-го и 2-го разрядов могут поверяться сравнением их подразделений методом продольного компарирования с соответствующими подразделениями шкал рабочих эталонов или способом калибровки.

Калибровку осуществляют на продольном компараторе путем сравнения подразделений поверяемой шкалы со всеми подразделениями вспомогательной шкалы, для которой из предварительной поверки по рабочему эталону известна поправка на всю ее длину.

Измерения при сравнении дециметровых подразделений проводят в десять серий по схеме, приведенной в табл. 17, причем между отдельными сериями наблюдений поверяемую шкалу перемещают на один интервал.

* Гирю массой $\bar{1}$ г, не входящую в набор, берут из другого набора и вводят в серию уравнений для их завершения.

Таблица 17

Серия	Сравнимые интервалы		Серия	Сравнимые интервалы	
	Поверная шкала	Вспомогательная шкала		Поверная шкала	Вспомогательная шкала
I	0-1	0-1	IV	3-8	0-5
	0-2	0-2		3-9	0-6
	0-3	0-3		3-10	0-7
	0-4	0-4	V	4-5	0-1
	0-5	0-5		4-6	0-2
	0-6	0-6		4-7	0-3
	0-7	0-7		4-8	0-4
	0-8	0-8		4-9	0-5
	0-9	0-9		4-10	0-6
	0-10	0-10	VI	5-6	0-1
II	1-2	0-1		5-7	0-2
	1-3	0-2		5-8	0-3
	1-4	0-3		5-9	0-4
	1-5	0-4		5-10	0-5
	1-6	0-5	VII	6-7	0-1
	1-7	0-6		6-8	0-2
	1-8	0-7		6-9	0-3
	1-9	0-8		6-10	0-4
	1-10	0-9	VIII	7-8	0-1
III	2-3	0-1		7-9	0-2
	2-4	0-2		7-10	0-3
	2-5	0-3	IX	8-9	0-1
	2-6	0-4		8-10	0-2
	2-7	0-5	X	9-10	0-1
	2-8	0-6			
	2-9	0-7			
	2-10	0-8			
IV	3-4	0-1			
	3-5	0-2			
	3-6	0-3			
	3-7	0-4			

Всего проводят, таким образом, 55 сравнений, результатом которых является система из 55 условных уравнений:

- I серия: $\lambda_i - (X_i - X_0) = a_i; \quad i = 1, 2, \dots, 10;$
 II серия: $\lambda_i - (X_{i+1} - X_1) = b_i; \quad i = 1, 2, \dots, 9;$
 III серия: $\lambda_i - (X_{i+2} - X_2) = c_i; \quad i = 1, 2, \dots, 8;$
 IV серия: $\lambda_i - (X_{i+3} - X_3) = d_i; \quad i = 1, 2, \dots, 7;$
 V серия: $\lambda_i - (X_{i+4} - X_4) = e_i; \quad i = 1, 2, \dots, 6;$
 VI серия: $\lambda_i - (X_{i+5} - X_5) = f_i; \quad i = 1, 2, \dots, 5;$

VII серия: $\lambda_i - (X_{i+6} - X_6) = g_i; \quad i = 1, 2, 3, 4;$

VIII серия: $\lambda_i - (X_{i+7} - X_7) = h_i; \quad i = 1, 2, 3;$

IX серия: $\lambda_i - (X_{i+8} - X_8) = k_i; \quad i = 1, 2;$

X серия: $\lambda_i - (X_{i+9} - X_9) = l_i; \quad i = 1.$

В эту систему уравнений входит двадцать одно неизвестное: λ_i ($i=1, 2, \dots, 10$) — поправки на длины интервалов вспомогательной шкалы; X_i ($i=0, 1, 2, \dots, 10$) — поправки на положения штрихов поверяемой меры (искомые неизвестные), и пятьдесят пять результатов измерений: a_i ($i=1, 2, \dots, 10$); b_i ($i=1, 2, \dots, 9$) и так далее до k_i ; k_2 ; l_1 . Кроме того, можно положить $X_0=0$, и тогда число неизвестных сократится до двадцати.

Систему уравнений решают методом наименьших квадратов (см. гл. VIII), который позволяет получить 20 нормальных уравнений.

Поправку λ_{10} на всю длину вспомогательной шкалы определяют во время предварительной поверки путем сравнения ее с длиной рабочего эталона. Поэтому для определения всех поправок достаточно лишь девятнадцати нормальных уравнений, одно уравнение можно использовать для проверки правильности решений.

§ 69. ОБЩИЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЙ

Для точных измерений величин в метрологии разработаны приемы использования принципов и средств измерений, применение которых позволяет исключить из результатов измерений ряд систематических погрешностей и тем самым освобождает экспериментатора от необходимости определять многочисленные поправки для их компенсации, а в некоторых случаях вообще является предпосылкой получения сколько-нибудь достоверных результатов. Многие из этих приемов используют при измерении только определенных величин, однако существуют и некоторые общие приемы, названные *методами измерения*.

Наиболее просто реализуется *метод непосредственной оценки*, заключающийся в определении величины непосредственно по отсчетному устройству измерительного прибора прямого действия, например, взвешивание на циферблатных весах, определение размера детали с помощью микрометра или измерение давления ружинным манометром.

Измерения с помощью этого метода проводятся очень быстро и просто и не требуют высокой квалификации оператора, поскольку не нужно создавать специальные измерительные установки и выполнять какие-либо сложные вычисления. Однако точность измерений чаще всего оказывается невысокой из-за погрешностей, связанных с необходимостью градуировки шкал приборов и воздействием влияющих величин (непостоянство температуры, нестабильность источников питания и пр.).

При проведении наиболее точных измерений предпочтение отдается различным модификациям *метода сравнения с мерой*, при котором измеряемую величину находят сравнением с величиной, воспроизводимой мерой. Результат измерения либо вычисляют как сумму значения используемой для сравнения меры и показания измерительного прибора, либо принимают равным значению меры.

Метод сравнения с мерой, заключающийся в том, что измеряемая величина и величина, воспроизводимая мерой, *одновременно воздействуют на измерительный прибор сравнения*, с помощью которого устанавливается соотношение между ними, называется *ме-*

тодом противопоставления. Примером этого метода является взвешивание груза на равноплечих весах, когда измеряемая масса определяется как сумма массы гирь, ее уравнивающих, и показания по шкале весов.

Применение метода противопоставления позволяет значительно уменьшить воздействие на результаты измерений влияющих величин, поскольку они более или менее одинаково искажают сигналы измерительной информации как в цепи преобразования измеряемой величины, так и в цепи преобразования величины, воспроизводимой мерой. Отсчетное устройство прибора сравнения реагирует на разность сигналов, вследствие чего эти искажения в некоторой степени компенсируют друг друга.

Разновидностью метода сравнения с мерой является также *нулевой метод измерения*, который состоит в том, что подбором размера воспроизводимой мерой величины или путем ее принудительного изменения эффект воздействия сравниваемых величин на прибор сравнения доводят до нуля. В этом случае компенсация воздействий влияющих величин оказывается более полной, а значение измеряемой величины принимается равным значению меры.

При *дифференциальном методе измерения* на измерительный прибор (не обязательно прибор сравнения) подается непосредственно разность измеряемой величины и величины, воспроизводимой мерой. Этот метод может быть использован, конечно, только в тех случаях, когда просто и точно реализуется операция вычитания величин (длины, перемещения, электрические напряжения и э.д.с.). Дифференциальный метод не применим при измерении таких величин, как температура или твердость тел.

К разновидностям метода сравнения с мерой относится и *метод замещения*, широко применяемый в практике точных метрологических исследований. Сущность метода заключается в том, что измеряемая величина замещается в измерительной установке некоторой известной величиной, воспроизводимой мерой. Замещение может быть полным или неполным, в зависимости от чего говорят о *методе полного или неполного замещения*. При полном замещении показания не изменяются и результат измерения принимается равным значению меры. При неполном замещении для получения значения измеряемой величины к значению меры следует прибавить величину, на которую изменилось показание прибора.

Преимущество метода замещения заключается в последовательном во времени сравнении измеряемой величины и величины, воспроизводимой мерой. Благодаря тому, что обе эти величины включаются одна за другой в одну и ту же часть измерительной цепи прибора, точностные возможности измерений значительно повышаются по сравнению с измерениями, проводящимися с помощью других разновидностей метода сравнения, где несимметрия цепей, в которые включаются сравниваемые величины, приводят к возникновению систематических погрешностей.

Пример. В качестве примера использования метода замещения можно указать на измерение размера детали с помощью рычажного микрометра. Возможны измерения двумя способами.

1. Микровинт перемещают до контакта с измеряемой деталью. Создается такой натяг, при котором стрелка рычажной системы встает против нулевой отметки шкалы. При этом измерительное усилие принимает строго определенное значение, а результат измерения отсчитывается по шкале микрометра.

Это метод непосредственной оценки, поскольку в размерную цепь микрометра включается сразу вся длина измеряемой детали. В результат измерения входят погрешности, определяемые температурным режимом, погрешностью шага микрометрического винта, накопленной на измеряемой длине, неперпендикулярностью торцовых поверхностей винта и пятки к линии измерения, допущенной оператором неточностью при считывании результата со шкалы микрометра и т. д.

2. Подбирается блок концевых мер, размер которого близок к размеру измеряемой детали. По блоку с помощью микрометрического винта настраивают микрометр, в результате чего стрелка рычажной системы устанавливается против нулевой отметки шкалы. Затем при неизменной настройке снимают блок концевых мер и в размерную цепь микрометра включают измеряемую длину исследуемой детали. Результат измерения представляет собой сумму размера блока концевых мер длины и разности размеров блока и детали, которая определяется по отклонению стрелки рычажной системы от нулевого положения.

Описанный метод является методом сравнения с мерой, а именно — методом неполного замещения. При его применении в значительной мере исключаются одновременно все упомянутые выше погрешности.

Способ замещения применяется также при электрических измерениях с помощью мостов переменного тока, условие равновесия которых определяется не только значениями величин, воспроизводимых элементами плеч моста, но также и влиянием паразитных токов, емкостей, индуктивностей и рядом других факторов. Эти причины вызывают появление погрешностей, которые могут быть исключены, если проводить измерения методом замещения. Для этого вначале мост уравнивается с включенной в его цепь измеряемой величиной, которая затем замещается известной величиной, и мост уравнивается вновь. Если при этом никаких изменений ни в мосте, ни во внешних условиях не происходит, то указанные выше погрешности исключаются почти полностью.

Одним из общих методов измерений является *метод совпадений*, представляющий собой разновидность метода сравнения с мерой. При проведении измерений методом совпадений разность между измеряемой величиной и величиной, воспроизводимой мерой, измеряют, используя совпадение отметок шкал или периодических сигналов.

По принципу метода совпадений построен нониус, входящий в состав ряда измерительных приборов. Так, например, шкала нониуса штангенциркуля имеет десять делений через 0,9 мм. Когда нулевая отметка шкалы нониуса оказывается между отметками основной шкалы штангенциркуля, это означает, что к целому числу миллиметров необходимо добавить число десятых долей миллиметра, равное порядковому номеру совпадающей отметки нониуса.

Метод совпадений применяется при приеме точных сигналов времени, при измерении частоты вращения и в других случаях.

В рамках перечисленных выше методов измерений в метрологической практике и в общем приборостроении часто применяются специальные приемы для исключения самих источников систематических погрешностей или их компенсации. Рассмотрим наиболее употребительные из этих приемов.

Параметрическая стабилизация

Параметрическая стабилизация очень широко применяется при ответственных измерениях. Этот прием используют для поддержания в заданных пределах температуры и влажности окружающей среды, напряжения или давления питания и других. Наиболее распространены такие способы параметрической стабилизации, как термостатирование приборов, защита от воздействия вибраций, использование эффективных стабилизаторов в цепях электропитания приборов, экранирование приборов для защиты их от воздействия посторонних электрических, магнитных, радиационных и других полей. Применение этих способов иногда позволяет избежать введения в результаты измерения поправок, а в некоторых особенно ответственных случаях является даже предпосылкой получения сколько-нибудь достоверных результатов.

Способ компенсации постоянных и периодических погрешностей по знаку

При реализации этого способа процесс измерения строится таким образом, что постоянная систематическая погрешность входит в результат измерения один раз с одним знаком, а другой раз — с другим. Тогда среднее из двух полученных результатов оказывается свободным от постоянной погрешности.

Применяя этот способ, можно исключить, например, постоянную систематическую погрешность, обусловленную несовпадением оси резьбы и линии измерения при определении шага резьбы на инструментальном микроскопе (измерение по правым и левым сторонам профиля), или постоянную при данной нагрузке и твердости образца погрешность вследствие неперпендикулярности оси шпинделя к поверхности образца при измерении твердости по Виккерсу (нахождение среднего из двух диагоналей отпечатка). Этим же способом пользуются для исключения периодической по-

грешности, вызываемой несовпадением оси вращения шкалы с ее геометрическим центром в угломерных измерительных приборах. Эта погрешность зависит от угла поворота шкалы, и результат измерения получают как среднее арифметическое из значений, полученных, при отсчетах по диаметрально расположенным нониусам или микроскопам.

Способ вспомогательных измерений

Этот способ применяется в тех случаях, когда воздействие влияющих величин на результаты измерений вызывает большие погрешности измерений. Тогда идут на заведомое усложнение схемы измерительной установки, включая в нее элементы, воспринимающие значение влияющих величин, автоматически вычисляющие соответствующие поправки и вносящие их в полезные сигналы, которые поступают на отсчетные или регулирующие устройства.

Способ вспомогательных измерений в большой степени относится к инструментальным методам борьбы с систематическими погрешностями, поэтому в рамках настоящего курса не рассматривается.

Вообще следует заметить, что многие из приведенных методов и приемов исключения систематических погрешностей в настоящее время все в большей степени реализуются схемами самих измерительных средств. В результате разработка методологии измерений приобретает все большее значение непосредственно для проектирования измерительной аппаратуры.

В последующих параграфах настоящей главы даются примеры использования методов и приемов при измерении некоторых физических величин.

§ 70. ИНТЕРФЕРЕНЦИОННЫЙ МЕТОД ТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ВЕЛИЧИН

К линейным измерениям относятся измерения не только длины какого-либо тела, но и других элементов различных деталей и параметров, связанных с измерением расстояний между двумя точками, например, диаметра, шага резьбы, шероховатости поверхности, некруглости, элементов зубчатых зацеплений и т. п.

Для линейных измерений применяются разнообразные средства — механические, оптико-механические, индуктивные, емкостные, радиоизотопные, ультразвуковые и др.

Одним из наиболее точных методов измерения линейных величин, широко применяемым как в метрологии, так и в технических измерениях в машиностроении, является интерференционный. Этот метод основан на явлении интерференции света, т. е. сложении двух когерентных световых колебаний, приходящих в одну точку с разными фазами колебания.

Если в одну точку приходят два когерентных колебания с равными амплитудами и с разными фазами, выражаемые уравнениями

$$y_1 = a \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_1\right) \text{ и } y_2 = a \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_2\right),$$

то результирующее колебание выражается уравнением

$$y = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right), \quad (\text{X.1})$$

где φ_1 — фаза первого колебания, φ_2 — фаза второго колебания, φ — фаза результирующего колебания.

Амплитуда результирующего колебания равна

$$A = 2a \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}. \quad (\text{X.2})$$

При $\varphi_1 = \varphi_2 = 2k\pi$, т. е. когда в одну точку приходят два колебания с одинаковой фазой, амплитуды их складываются и колебания усиливаются. Если в одну точку приходят два колебания с противоположными фазами, амплитуды их вычитаются, а при равенстве амплитуд колебания уничтожаются.

Разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ двух световых колебаний можно выразить через оптическую длину пути.

Обозначим через x_1 и x_2 геометрические пути световых пучков, соответствующие расстояниям от источников до рассматриваемой точки волнового поля, а через n_1 и n_2 — показатели преломления сред, в которых распространяются колебания. Тогда оптическая разность хода

$$L_1 - L_2 = (x_1 n_1 - x_2 n_2).$$

Максимум энергии в данной точке ($\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$) будет получен, если $L_1 - L_2 = k\lambda = 2k \frac{\lambda}{2}$.

Во всех точках волнового поля, для которых оптическая разность хода равна целому числу длин волн, колебания усиливаются, т. е. наблюдается свет. В точках же, для которых оптическая разность хода равна нечетному числу полуволин

$$L_1 - L_2 = (2k + 1) \frac{\lambda}{2},$$

происходит ослабление колебаний и при равенстве амплитуд слагаемых колебаний в этих точках поля энергия равна нулю, т. е. наблюдается полная темнота. Таким образом, картина интерференции света представляет собой ряд светлых и темных полос.

Как указывалось выше, явление интерференции света имеет место, когда складываются два когерентных колебания, получаемые от одного источника света. Тогда разность фаз этих колебаний определяется только оптической разностью хода.

В метрологии интерференционный метод особенно широко используется для определения длины метра в длинах световых волн. Схема интерферометра, примененного для этой цели, приведена на рис. 47.

Интерференционные полосы будут наиболее яркими и результаты измерения более точными, если пользоваться многохроматическим источником света, который получается путем выделения с помощью призмы определенной спектральной линии.

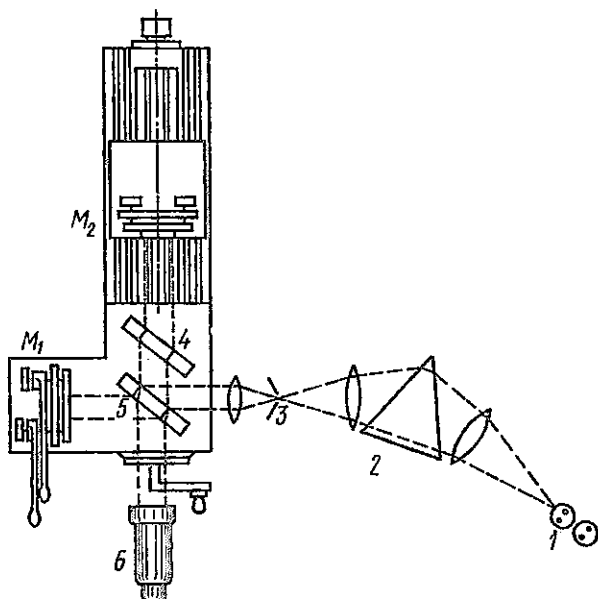


Рис. 47

На рис. 47 цифрой 1 обозначен источник света. При метрологических измерениях им обычно служит газоразрядная трубка с парами кадмия; в эталонном комплексе средств измерений для воспроизведения метра в длинах световых волн газоразрядная трубка наполнена криптоном-86.

Пучок лучей, излучаемый источником света, разлагается призмой 2, и лучи определенного цвета направляются через щель 3 на посеребренную полупрозрачную стеклянную пластинку 5, наклоненную к лучам под углом 45° . Часть лучей отражается от ее передней плоскости по направлению к зеркалу M_2 , другая часть проходит сквозь пластинку и достигает зеркала M_1 .

Плоские зеркала M_1 и M_2 поставлены так, что лучи, отразившись от них, идут тем же путем обратно. Пучок лучей, отразив-

шись от зеркала M_1 , при обратном ходе отражается от посеребренной пластины 5 и попадает в зрительную трубу 6. В эту же трубу попадает пучок лучей, отразившийся от зеркала M_2 и прошедший через ту же пластину.

Так как луч, идущий по щели 3 к зеркалу M_1 и от него к трубе 6, проходит сквозь стеклянную пластину 5 три раза, а луч, идущий от щели 2 к зеркалу M_2 только один раз, то, чтобы обеспечить полное равенство оптических путей, в прибор помещают еще стеклянную плоскопараллельную пластину 4, совершенно такую же, как пластина 5.

Оба луча, встречаясь в трубе 6, интерферируют в условиях, аналогичных условиям, при которых один пучок будто бы отразился от зеркала M_2 , а другой от параллельного ему зеркала M_0 (не показанного на рисунке). Последнее можно рассматривать как изображение зеркала M_1 в зеркальной пластине 5, находящейся от нее на расстоянии, равном расстоянию до зеркала M_1 .

При строго параллельных зеркалах M_0 и M_2 наблюдаются интерференционные кольца, при наличии даже небольшой непараллельности — интерференционные полосы.

Если при помощи микрометрического винта отодвигать зеркало M_2 строго параллельно самому себе, то в трубе 6 будут наблюдаться новые интерференционные круги или полосы. Каждая новая полоса соответствует увеличению расстояния между зеркалами M_2 и M_0 на длину, равную половине световой волны. Таким образом, измерив расстояние, на которое отодвинуто зеркало M_2 от начального положения, и сосчитав количество вновь появившихся полос, можно определить длину световой волны, т. е. определить количество волн, содержащихся в данной длине.

Для сравнения длины метра с длиной волны излучения кадмия было изготовлено несколько вспомогательных концевых мер, имеющих каждая две плоские посеребренные стеклянные пластинки, расположенные параллельно друг другу. Расстояние между поверхностями этих пластинок и составляет длину меры. Таких мер было изготовлено девять: длиной 10; 5; 2,5 см; 12,5; 6,25 мм и т. д., последняя, девятая, мера была равна приблизительно 0,39 мм.

Измерение выполняли следующим образом. Наименьшую меру 0,39 мм устанавливали рядом с зеркалом M_2 так, чтобы плоскость первой стеклянной пластинки совпадала с плоскостью зеркала M_2 (см. рис. 47). Затем при помощи микрометрического винта подвижное зеркало M_2 постепенно передвигали в такое положение, при котором оно совпадало с плоскостью второй стеклянной пластинки, и считали число полос (целое число и доли полосы), проходивших через нить в трубе 6. При каждом последующем измерении в приборе устанавливали две меры: одну только что измеренную и другую, вдвое большую. Измеряя меры попарно, доходили до девятой, равной приблизительно 10 см. Для сравнения метра с этой мерой приходилось последнюю пе-

решать девять раз. Отсчитывая целые полосы и доли полос, можно определить, точно ли одна мера вдвое больше другой или на сколько волн или долей волны она отличается от меры удвоенной длины.

В результате этих измерений длина метра была выражена в длинах световых волн. На основе метрологического анализа работ, выполненных в разных лабораториях мира и Международном бюро мер и весов, в 1927 г. VII Генеральная конференция по мерам и весам установила, что метр равен 1553164, 13 длины волны красной линии кадмия.

В дальнейшем интерференционный метод выражения метра в длинах световых волн был усовершенствован, и современные универсальные интерференционные компараторы позволяют сравнивать длину концевых и штриховых мер (в том числе и платино-иридиевых эталонов метра) с длиной волны эталонного излучения оранжевой линии криптона-86.

Интерференционный метод, как один из самых точных методов измерения линейных величин, применяется в метрологии для измерения линейных размеров в расчетном эталоне единицы электрической емкости — фарады, для эталонного барометра и др.

Интерференционный метод в настоящее время широко применяется в некоторых отраслях машиностроения и приборостроения (для проверки плоскости доведенных поверхностей измерительных средств, измерений длин концевых мер, определения шероховатости поверхности и др.).

§ 71. ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЙ

Явление фотоэлектрического эффекта широко применяется в метрологии и технических измерениях в машиностроении. Основанный на этом эффекте фотоэлектрический метод измерений, в частности, применяется для точного наведения на деления штриховых линейных мер в интерференционных фотоэлектрических компараторах.

На рис. 48 показана схема фотоэлектрического микроскопа со сканирующей щелью, примененного в интерференционном компараторе, который входит в состав комплекса средств измерений Государственного эталона единицы длины — метра.

Свет от источника 3 через конденсор, призму 2 и объектив 1 освещает штрих, увеличенное изображение которого через объектив и окуляр 4 проецируется в плоскость щели вибратора 5. Электромагнит вибратора, питаемый напряжением частотой сети 50 Гц через два полупроводниковых диода, возбуждает колебания щели той же частоты, обеспечивая модуляцию светового потока. Электронная часть фотоэлектрического микроскопа состоит из фотопреобразователя 6, усилителя 7, фазочувствительного выпрямителя (демодулятора) 8 и стрелочного прибора 9.

Периодические колебания щели вибратора относительно изображения штриха вызывают модуляцию светового потока. Модулированный световой поток падает на фотопреобразователь, вызывая пропорциональные изменения фототока, усиливаемые затем в усилителе. Используя кольцевой фазочувствительный выпрямитель, коммутируемый с частотой сети, получают постоянную составляющую тока, зависящую только от наличия в сигнале состав-

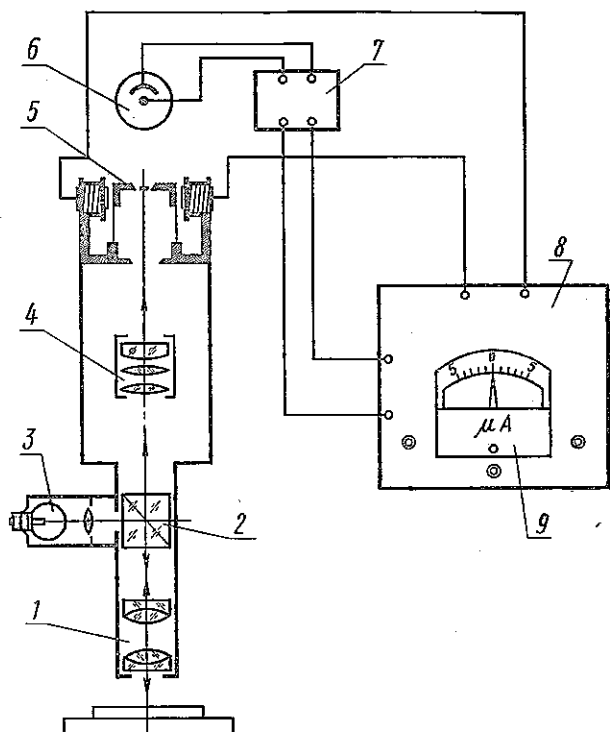


Рис. 48

ляющей 50 Гц. Поэтому магнитоэлектрический прибор 9, включенный на выходе демодулятора, при точном наведении на штрих будет показывать нуль. При отклонении от положения точного наведения на штрих в сигнале возникает составляющая основной частоты, которая вызовет появление выпрямленного тока, отклоняющего стрелку прибора.

Применение фотоэлектрического метода повышает точность наведения на штрих по сравнению с визуальным методом в 5—6 раз.

В технических измерениях в машиностроении фотоэлектрический метод контроля применяется, в частности, в устройствах, где освещение и затемнение фотоэлемента или фоторезистора сигнализирует о достижении контролируемой величиной требуемого

значения. Обычно в таких устройствах используют несколько фоторезисторов, что позволяет осуществить многопредельный контроль. Примером такого устройства является позиционный фотоэлектрический датчик модели ДФМ, схема которого приведена на рис. 49.

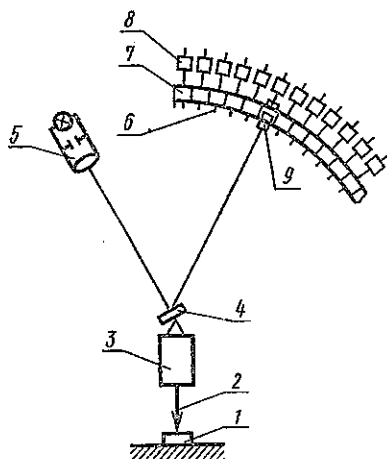


Рис. 49

Цепь преобразования состоит из измерительного штока 2 с корундовым наконечником, который при контроле опускается на контролируемое изделие 1, и пружинного передаточного механизма 3 с поворотным зеркалом 4. Осветитель 5 является источником светового потока. Направление света от источника до зеркала постоянно, а направление света от зеркала до фоторезисторов 7 и шкалы 6 зависит от угла поворота зеркала. При изменении размера контролируемого изделия изменяется угол поворота зеркала и световое пятно 9 перемещается по шкале и фоторезисторам. В цепь каждого фотоэлемента включено реле 8, которое

срабатывает при освещении световым лучом соответствующего фоторезистора. В исполнительном устройстве предусматривается блокировка для выделения нужной команды при одновременном освещении двух фоторезисторов и срабатывания соответствующих им реле.

При некоторых схемах включения преобразователя несколько фоторезисторов соединяются параллельно в одну группу. Это позволяет при том же числе групп, на которые сортируется контролируемая продукция, уменьшить число используемых в преобразователе реле. Для преобразователя на 50 групп сортировки обычная сортировочная схема потребует 50 реле, а оптимальная комбинационная — только 15 реле.

§ 72. МЕТОДЫ ТОЧНОГО ВЗВЕШИВАНИЯ

Взвешивание — это измерение массы тел с помощью весов. В настоящее время используются следующие принципы взвешивания:

взвешивание путем сравнения измеряемой массы и известной на равноплечих (или неравноплечих) весах;

взвешивание путем измерения линейных или угловых деформаций упругого элемента, например, на тензометрических или крутильных весах;

взвешивание путем измерения пневматического давления, уравновешивающего определяемую массу (грузопоршневые весы);

взвешивание путем измерения постоянного тока, компенсирующего вес с помощью катушки, помещаемой в поле постоянного магнита;

взвешивание путем измерения перемещения уровня жидкости, вызванного погруженным в нее телом (гидростатические весы).

Наивысшая точность достигается при взвешивании на равноплечих весах путем уравновешивания измеряемой массы массой гирь разновеса, т. е. методом сравнения с мерой. Равноплечие весы состоят из коромысла с опорной призмой 1 (рис. 50) и грузоприемными призмами 2 и 2', на которых подвешены чаши 3 и 3' для измеряемого груза и уравновешивающих гирь. Коромысло снабжено стрелкой 4, служащей для наблюдения за колебаниями (элонгациями) весов по шкале 5. Ось A качания коромысла и оси B и C качания грузоприемных чаш лежат в одной плоскости. Несколько ниже этой плоскости располагается центр тяжести D узла коромысла весов. Если бы центр тяжести лежал выше оси A качания опорной призмы, то при малейшем отклонении от положения равновесия весы теряли бы устойчивость, т. е. не возвращались бы в исходное положение.

Условие равновесия весов можно записать следующим образом:

$$Ql \cos \alpha = Pl \cos \alpha + Gf \sin \alpha,$$

где Q — масса взвешиваемого груза; P — масса уравновешивающих гирь; G — масса коромысла весов вместе с грузоприемными чашами и лежащими на них грузами; l — длина плеч коромысла; f — расстояние AD между центром качаний коромысла и центром тяжести весов.

Из условия равновесия получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(Q - P)l}{Gf},$$

и при малых α

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{(Q - P)l}{Gf}, \quad (\text{X.3})$$

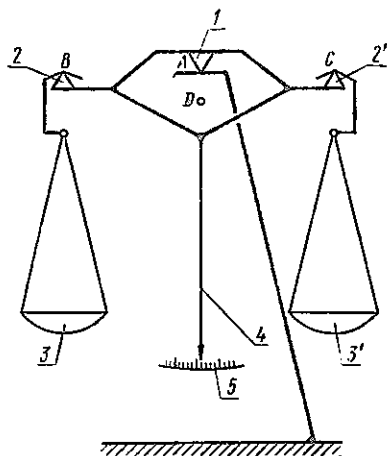


Рис. 50

откуда следует, что чувствительность весов обратно пропорциональна весу всей подвижной системы, т. е. весу коромысла и грузоприемных чаш с помещенными на них грузами, и расстоянию от центра тяжести подвижной системы до оси качания коромысла. Это означает, что цена деления шкалы весов переменна и при точных измерениях ее следует определять заново перед каждым взвешиванием. В этом заключается первая особенность методов точного взвешивания.

Вторая особенность заключается в следующем. Подвижная система равноплечих весов представляет собой колебательную систему с очень малыми потерями на трение в опорах. После вывода коромысла из положения равновесия оно начинает колебаться, причем колебания затухают очень медленно. Для ускорения процесса успокоения в конструкцию весов вводят специальные устройства — успокоители, или демпферы. Однако при точных измерениях зачастую избегают и этого, вычисляя результат по нескольким последовательным отсчетам по шкале в моменты реверса указателя. Положение указателя при равновесии определяется тогда по формуле

$$L = \frac{l_1 + 2l_2 + l_3}{4}, \quad (X.4)$$

или более точно

$$L = \frac{l_1 + 3l_2 + 3l_3 + l_4}{8}, \quad (X.5)$$

где l_1, l_2, l_3 и l_4 — последовательные отсчеты по шкале с учетом десятых долей интервалов деления.

Следующей отличительной особенностью методов точного взвешивания является то, что как при проверке равновесия ненагруженных весов (при тарировке), так и при самом взвешивании не стремятся добиться полного уравнивания весов, когда указатель установится на нулевой отметке. Отклонения указателя от нулевой отметки учитывают непосредственно при вычислении результата взвешивания, поэтому очень часто нуль шкалы весов располагают не в середине шкалы, а слева от середины.

Простейшим методом взвешивания является метод противопоставления.

Перед взвешиванием определяют положение равновесия ненагруженных весов по трем или четырем (в зависимости от требуемой точности) последовательным отклонениям указателя. Результат L_0 вычисляют по формуле (X.4) или (X.5). Если весы снабжены успокоителем, то L_0 находят непосредственно по шкале после полного успокоения указателя. Затем на одну чашу весов помещают взвешиваемый груз, а на другую — уравнивающие их гири. Уравнивание проводят так, чтобы указатель колебался в средней части шкалы. Находят новое положение равновесия L_1 по шкале весов. Далее определяют цену деления шкалы

весов, для чего на одну из чаш неарретированных весов помещают гирю r такую, чтобы она изменила положение равновесия на $1/10$ — $1/3$ часть шкалы. При этом вновь определяют положение равновесия L_r . Цена деления составляет

$$s = \frac{r}{L_r - L_1}. \quad (\text{X.6})$$

Результат взвешивания находим теперь по формуле

$$Q = P + s(L_1 - L_0) = P + \frac{r}{L_r - L_1}(L_1 - L_0), \quad (\text{X.7})$$

где P — сумма масс гирь, уравновешивающих взвешиваемый груз.

Гарантией получения точных результатов при взвешивании по методу противопоставления является постоянство положения равновесия ненагруженных весов и равенство их плеч. Если нет уверенности в том, что эти условия будут выполнены, используют иные методы, обеспечивающие получение результатов с большей точностью, главным образом из-за исключения погрешностей, обусловленных неравенством плеч весов.

Метод двойного взвешивания, или метод Гаусса, наиболее точен. Идея его заключается в следующем. Если взвешиваемый груз Q положить на одну чашу весов и уравновесить его гирями массой P_1 , то между ними будет иметь место соотношение

$$Ql_1 = P_1l_2, \quad (\text{X.8})$$

где l_1 и l_2 — плечи весов, в общем случае не равные друг другу.

Если теперь взвешиваемый груз и гири поменять местами, то равновесие нарушится и для его достижения придется изменить массу гирь до значения P_2 . Условие равновесия примет вид

$$P_2l_1 = Ql_2. \quad (\text{X.9})$$

Разделив равенство (X.8) почленно на равенство (X.9), получим

$$\frac{Q}{P_2} = \frac{P_1}{Q},$$

откуда следует, что

$$Q = \sqrt{P_1P_2} \quad (\text{X.10})$$

является результатом, свободным от погрешности, связанной с неравноплечием весов. Если различие между l_1 и l_2 невелико, то можно воспользоваться приближенным равенством

$$Q = \frac{1}{2}(P_1 + P_2). \quad (\text{X.11})$$

Практически метод двойного взвешивания осуществляют в такой последовательности.

Взвешиваемый груз Q уравновешивают гирями массой P и по шкале определяют положение равновесия L_1 . Затем взвешиваемый груз и гири меняют местами. Из-за разности длин плеч равновесие

весов нарушается, и для его восстановления на одну из чаш приходится добавить гирьку массой a . При этом определяют новое положение равновесия L_2 . Затем, не снимая груз и гири, определяют цену s деления шкалы так, как это было описано выше. Условия равновесия имеют вид

$$\begin{aligned} Q &= P + s(L_1 - L_0), \\ P \pm a &= Q + s(L_2 - L_0), \end{aligned}$$

где L_0 — положение равновесия ненагруженных весов. Исключив из этих двух равенств значение L_0 , получим формулу, по которой определим искомую массу груза

$$Q = P \pm \frac{a}{2} - s(L_1 - L_2). \quad (X.12)$$

Измерения по методу двойного взвешивания очень трудоемки, главным образом из-за необходимости перемещать взвешиваемый груз и гири с одной чаши весов на другую. Несколько более просто реализуется метод замещения, называемый также методом взвешивания на одном плече, или методом Борда. Его используют, например, при поверке рабочих гирь путем их сличения с образцовыми.

Образцовую гирю массой P , с которой осуществляют сличение, помещают на правую чашу весов и уравнивают ее тарой T , после чего находят положение равновесия весов L_1 . Затем образцовую гирю снимают с чаши весов и замещают ее поверяемой. Если равновесие весов нарушается, то его восстанавливают, добавляя образцовую гирьку a на ту или иную чашу весов, после чего вновь определяют положение равновесия L_2 . Затем определяют цену деления весов s при данной нагрузке и вычисляют искомую массу по формуле

$$Q = P \pm a + s(L_1 - L_2). \quad (X.13)$$

По той же схеме, что и взвешивание по методу замещения, проводится взвешивание по способу Д. И. Менделеева. Различие заключается в том, что тару уравнивают ценным набором гирь. Затем на чашу с гирями кладут взвешиваемый груз и снимают столько гирь набора, сколько необходимо для того, чтобы вновь уравновесить чаши весов. Искомую массу определяют как сумму массы снятых гирь и произведения цены деления на изменение показаний по шкале весов.

Преимущество метода Д. И. Менделеева заключается в простоте измерений и в том, что взвешивание проводят при постоянной нагрузке на весы, а значит и при постоянной их чувствительности.

§ 73. ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ

К важнейшим характеристикам машин относится скорость вращения ее основных частей. В технике скорость вращения

n измеряют числом оборотов в минуту, которое однозначно связано с частотой f вращения:

$$f = \frac{n}{60}; \quad n = 60f.$$

Приборы для измерения скорости вращения называются тахометрами. Они могут измерять угловые скорости до 200000 об/мин и более и обеспечивают точность измерений до 0,01 %. Высокая точность измерений достигается благодаря тому, что поверочная схема тахометров сводит измерения угловых скоростей к измерению частот электрических колебаний, осуществляемому с очень большой точностью.

Наиболее распространены тахометрические приборы, основанные на следующих принципах:

- измерении центробежных сил, развиваемых грузами, связанными с вращающимся валом (центробежные тахометры);

- измерении параметров взаимодействия поля вращающегося магнита с вихревыми токами, наводимыми им в диске (магнитно-индукционные тахометры);

- измерении э.д.с. генератора (тахогенератора) постоянного или переменного тока;

- измерении частоты сигнала тахогенератора переменного тока методом непосредственной оценки или путем сравнения с частотой опорных кварцевых генераторов;

- измерении угла поворота вала (часовой тахометр) или счете числа оборотов (электронный счетчик) за определенный промежуток времени;

- использовании стробоскопического эффекта (строботахометр).

Наивысшей точности измерений достигают при использовании трех последних принципов, причем применение стробоскопического эффекта позволяет измерять, не отбирая мощность у исследуемого объекта, что особенно удобно при измерении скоростей вращения маломощных двигателей, гироскопов, воздушных турбин.

Стробоскопический эффект основан на том, что человеческий глаз способен сохранять на десятые доли секунды видимое изображение объекта даже после его исчезновения. Поэтому если на вращающемся валу сделать отметку (рис. 51) и периодически освещать ее на короткий отрезок времени, то при совпадении частоты N вспышек с частотой f вращения вала эта отметка будет казаться наблюдателю неподвижной. Эффект кратковременного освещения вала может создаваться различными способами, однако лучшие результаты получают при использовании специальных газоразрядных ламп с регулируемой частотой вспышек.

Если частота вспышек N немного отличается от частоты вращения вала, то изображение отметки (стробоскопическая картина) будет вращаться со скоростью, равной $f - N$, причем знак этой разности показывает направление видимого вращения. Поскольку на глаз можно заметить даже очень медленное движение отмет-

ки, то, подбирая частоту вспышек, останавливающих стробоскопическую картину и принимая ее равной частоте вращения вала, последнюю можно очень точно измерить.

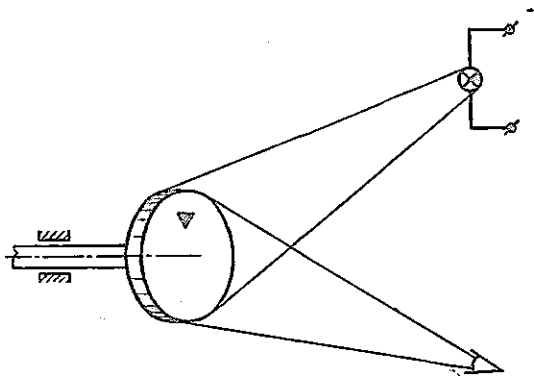


Рис. 51

Таким образом, используя стробоскопический эффект, мы реализуем метод сравнения с мерой — метод совпадений. Мерой в данном случае является генератор, питающий лампу для освещения вала, а наблюдатель сравнивает частоту, воспроизводимую этим генератором, и измеряемую частоту вращения вала. Точность измерений определяется точностью воспроизведения и измерения частоты вспышек, а также точностью регистрации момента остановки стробоскопической картины. Кроме того, при проведении измерений необходимо принимать во внимание погрешности, зависящие от непостоянства во времени самой измеряемой скорости, от скважности световых импульсов и от их мощности, вернее от разности между освещенностью вала и его освещенностью в момент вспышки.

При стробоскопическом методе измерения скорости возможны грубые ошибки, связанные с наблюдением так называемых кратных стробоскопических картин, появляющихся в том случае, когда связь между частотой вспышек и частотой вращения вала может быть представлена в виде отношения двух взаимно простых целых чисел. Если N — частота световых импульсов, а f — частота вращения вала, то вспышки лампы строботахометра происходят каждый раз, когда вал повернется на угол $\varphi = 2\pi f \frac{k}{N}$, где $k = 1, 2, \dots$ — последовательные номера вспышек. Пусть a и b — взаимно простые целые числа, причем $\frac{f}{N} = \frac{a}{b}$. Тогда $\varphi = 2\pi \frac{ak}{b}$. Отсюда видно, что число b показывает, сколько отметок видит наблюдатель, т. е. кратность стробоскопической картины. Поло-

жение, при котором частоты равны и $a=b=1$, называется *основным синхронизмом*. При этом наблюдатель видит только одну неподвижную отметку. Если же $a=1$, а $b=2$, т. е. частота вспышек в два раза превосходит частоту вращения вала, вспышки происходят два раза в течение одного оборота вала и наблюдатель видит два неподвижных изображения отметки, сдвинутых друг относительно друга на угол в 180° по отношению к оси вращения вала.

Рассмотрим теперь случай, когда частота световых импульсов в два раза меньше частоты вращения вала ($a=2$, $b=1$). Между двумя последовательными вспышками вал успевает повернуться на угол 4π , т. е. на два оборота, поэтому наблюдатель вновь видит только одно изображение отметки, но освещенность вала будет в два раза меньше, чем при основном синхронизме.

В общем случае положение таково, как будто работает b стробоскопов, смещенных друг относительно друга на угол $\frac{2\pi}{b}$, причем мощность вспышек каждого стробоскопа в a раз меньше действительной мощности. Отсюда вытекает основное правило, которое необходимо соблюдать при измерениях со стробоскопом. Необходимо вначале убедиться в том, что измеряемая скорость вращения меньше верхнего предела измерения стробоскопометра, а измерения проводить путем уменьшения частоты вспышек от ее наибольшего значения до достижения основного синхронизма. Неблагополучие здесь может быть обнаружено следующим образом. Если измеряемая частота вращения равна f , то однократные стробоскопические картины будут иметь место при частоте вспышек, равной $N_1=f$, $N_2=\frac{1}{2}f$, $N_3=\frac{1}{3}f$ и т. д.

Положим, что при измерении получили отсчет N_k . Уменьшая частоту вспышек, вновь добиваются однократной стробоскопической картины при частоте вспышек N_{k+1} . Отношение $\frac{N_k}{N_{k+1}} = \frac{k+1}{k}$ равно двум только в том случае, если $k=1$, т. е. если отсчет N_k соответствует основному синхронизму и измеряемая угловая скорость равна N_k . В противном случае отношение двух последовательных отсчетов обязательно меньше двух.

§ 74. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ И МЕХАНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

При метрологических работах и технических измерениях в машиностроении широко используют электрические методы измерения линейных и механических величин.

Это связано с тем, что во многих случаях прямое преобразование измеряемой величины в перемещение указателя целесообразнее заменить преобразованием ее в электрическую величину, измеряемую с помощью электроизмерительного прибора. При этом можно

повысить точность измерений или даже измерять величины, ранее не поддававшиеся измерению. Устройства, применяемые для преобразования неэлектрических величин в электрические, относятся к измерительным преобразователям.

Преобразованные в электрические линейные или механические величины могут быть переданы на расстояние, т. е. использованы для целей телеизмерений. Телеизмерения в настоящее время осуществляются самыми разнообразными способами. Каналами передачи преобразованных показаний приборов являются электрические провода и каналы радиосвязи. Примером телеизмерений и управления на расстоянии могут служить управление гидроэлектростанциями и наблюдение за режимом их работы, осуществляемое иногда на больших расстояниях.

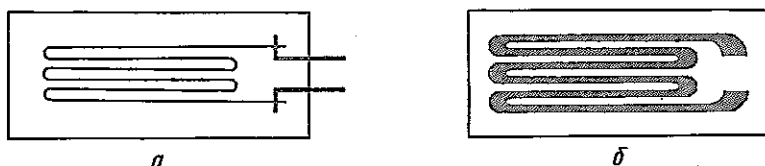


Рис. 52

Еще более ярким примером применения телеизмерений является получение измерительной информации с космических аппаратов и искусственных спутников Земли, Луны и Марса. Показания измерительных приборов, установленных на космических аппаратах, передаются по радио. Во всех этих случаях показания измерительных приборов преобразуются в те или иные электрические величины, удобные для передачи.

В настоящее время разработаны и применяются такие методы электрических измерений линейных и механических величин, как тензометрический, индуктивный, емкостный, пьезоэлектрический (фотоэлектрический метод описан в § 71).

Ниже излагаются основные принципы этих методов измерения.

Тензометрический метод основан на использовании в качестве первичных преобразователей тензорезисторов. Современный тензорезистор (рис. 52, а) состоит из тонкой проволоки диаметром 0,015—0,05 мм, уложенной для получения более высокого сопротивления в форме решетки между двумя эластичными изоляционными пластинками из тонкой бумаги толщиной 0,03—0,05 мм или между пленками лака. Тензорезистор наклеивается на поверхность детали, деформации которой необходимо измерить. Слой клея передает поверхностную деформацию детали проволоке, тем самым вызывая изменение ее сопротивления, пропорциональное деформации. В сочетании с различными упругими чувствительными элементами тензорезисторы с успехом применяются для измерения сил, масс, давлений, угловых и линейных ускорений.

Чувствительность проволочного тензорезистора характеризуется отношением относительного изменения его сопротивления к относительной деформации и составляет величину порядка $1+2 \mu$ (μ — коэффициент Пуассона) или несколько больше. Поскольку изменение сопротивления тензорезистора невелико, то обычно используются дифференциальные преобразователи, состоящие из двух или четырех тензорезисторов, включенных в мостовую схему.

Для усиления сигнала, снимаемого с диагонали моста, пользуются схемами переменного тока, работающими по принципу амплитудной модуляции.

Одна из главных трудностей при использовании тензорезистора заключается в зависимости его сопротивления от температуры, близкой по порядку к зависимости от деформации. Для уменьшения температурного смещения нулевой точки применяют компенсационные тензорезисторы, которые включают в соседние плечи моста и располагают рядом с рабочими в местах, где деформации отсутствуют или противоположны измеряемым деформациям по знаку. Тогда температурные изменения сопротивления рабочих и компенсационных тензорезисторов взаимно уравнивают друг друга.

Сравнительно новой разработкой является тензорезистор из травленной фольги (рис. 52, б) толщиной 0,005—0,025 мм. Фольговые тензорезисторы можно изготовлять практически любой формы. Большая площадь поверхности резистора при неизменном сечении отдельных проводников улучшает теплоотдачу по сравнению с тензомерами из круглой проволоки, что повышает допустимую плотность тока.

Индуктивный метод основан на преобразовании механических перемещений в изменение индуктивности катушки. Используемые для этих целей преобразователи называются индуктивными. Они широко применяются для измерения перемещений от долей микрометра до метра и более, но по точности уступают интерференционным методам. В сочетании с различными чувствительными элементами индуктивные преобразователи позволяют успешно измерять самые разнообразные величины: скорости, ускорения, давления, уровни, расход жидкости и газов.

В простейшем случае индуктивный преобразователь представляет собой дроссель, состоящий из магнитопровода и обмоток (рис. 53, а). При перемещении якоря меняется индуктивность системы

$$L = \frac{4\pi \omega}{R_0 + R_M}, \quad (X.14)$$

где ω — число витков обмотки; R_0 — магнитное сопротивление воздушного зазора между якорем и неподвижной частью магнитопровода; R_M — магнитное сопротивление остальной части магнитопровода.

Если якорь перемещается в направлении, указанном на рис. 53, а стрелками, то изменяется длина воздушного зазора и пропорционально ему магнитное сопротивление R_0 :

$$R_0 = \frac{2(\delta_0 + X)}{\mu_0 F_0}, \quad (X.15)$$

где δ_0 ; F_0 — начальное значение зазора и его площадь; μ_0 — магнитная проницаемость воздуха.

Из формул (X.14) и (X.15) следует, что, измеряя индуктивность дросселя, мы измеряем перемещение якоря.

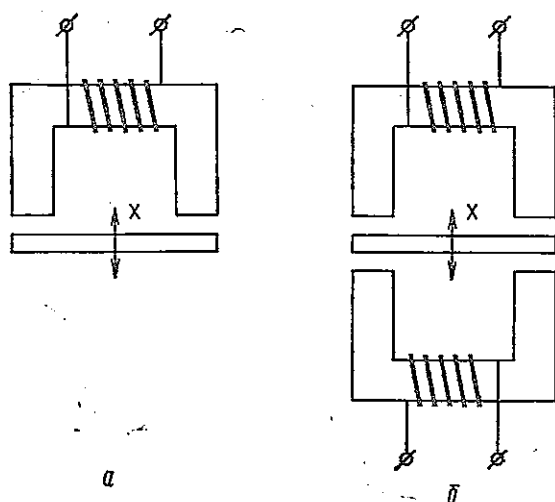


Рис. 53

Недостатком этого простейшего преобразователя является большая нелинейность характеристики и наличие обратного воздействия на якорь вследствие его притяжения сердечником. Поэтому применяют почти исключительно дифференциальные индуктивные преобразователи (рис. 53, б), в которых при перемещении якоря индуктивность одной катушки уменьшается, а индуктивность другой — увеличивается. Катушки включены в мостовую электрическую схему, сигнал на выходе которой измеряется электроизмерительным прибором, чаще всего магнитоэлектрической системы, через полупроводниковый выпрямитель, подключаемый к измерительной диагонали моста.

Для уменьшения влияния динамических погрешностей мостовая схема питается напряжением, частота которого на порядок выше предельной частоты перемещений якоря. Большинство приборов работает на частоте 50 Гц, однако в существующих высокоточных приборах применяют частоты 3—10 кГц.

Емкостный метод. Изменение электрической емкости используют для измерения малых размеров, малых перемещений, толщины слоя материала, трудно доступных для измерения объемов.

Из известной формулы для плоского конденсатора можно получить следующее выражение для расстояния d между его обкладками:

$$d = \frac{\varepsilon S}{C}, \quad (\text{X.16})$$

где C — емкость конденсатора; S — площадь его пластин; ε — диэлектрическая проницаемость.

При емкостном методе измерений измерительное устройство конструируют так, чтобы одна из пластин конденсатора перемещалась в зависимости от значения измеряемой величины. Определяя изменение емкости, можно судить о перемещении этой пластины.

Внесение диэлектрика между пластинами также изменяет емкость, что используется, в частности, для измерения толщины слоя диэлектрика.

Иногда емкостный метод применяют для измерения объемов жидкости в закрытых цилиндрических резервуарах, в том числе для определения количества жидкого топлива, оставшегося в баке с горючим.

Пьезоэлектрический метод. В кристаллах определенной конфигурации, когда они подвергаются растяжению или сжатию, генерируются электрические заряды. Это явление называется пьезоэффектом и широко используется для измерения величин, преобразуемых в усилия: давления, механические напряжения, ускорения, параметры вибраций.

В качестве пьезопреобразователей используются пластины, соответствующим образом вырезанные из кристаллов кварца, сернокислого лития, сегнетовой соли, а также керамика титаната бария, поляризованная по толщине.

Вследствие ограниченного сопротивления изоляции цепи пьезопреобразователя и сопротивления нагрузки генерируемый под действием измеряемой величины заряд постепенно стекает с поверхности преобразователя. Поэтому пьезопреобразователи могут быть использованы только для измерения быстро меняющихся величин.

Основное преимущество пьезоэлектрических преобразователей при измерении давлений или ускорений (вибраций) заключается в их большой жесткости, благодаря которой они обладают высокой частотой собственных колебаний и очень мало деформируются. Другое их преимущество — исключительно малые размеры. Известны пьезоэлектрические преобразователи ускорений, масса которых меньше 1 г, и преобразователи для измерения перепадов давлений массой значительно меньше 10 г.

Недостатки пьезопреобразователей — это их высокое электрическое сопротивление и невозможность статических измерений.

Описанные особенности пьезоэлектрических преобразователей позволяют широко использовать их при построении вибронизмерительной аппаратуры, акселерометров, при измерениях быстро меняющихся давлений в двигателях внутреннего сгорания, давлений взрывной волны или переходных давлений при подводных исследованиях.

§ 75. АКТИВНЫЙ КОНТРОЛЬ В МАШИНОСТРОЕНИИ

Важнейшими технологическими операциями в машиностроении являются процессы обработки материалов резанием, шлифованием, штамповкой и другими способами для придания изделиям и деталям соответствующих размеров. Контроль размеров в машиностроении осуществляется большим комплексом средств измерений, начиная от простейших измерительных скоб и калибров, кончая сложными оптико-механическими электронными приборами.

Как известно, контроль за соответствующими размерными параметрами изделий машиностроительной продукции, определяющий ее качество, включая взаимозаменяемость деталей, может осуществляться двумя способами. Эти два способа характеризуют две различные технические политики. Первый способ заключается в послеоперационном контроле и разбраковке уже изготовленных изделий. Второй способ связан с повышением технологической точности и представляет собой применение активного контроля в машиностроении.

На первых этапах развития отечественной машиностроительной промышленности, когда точность технологических процессов была невысокой, разбраковка являлась основным методом достижения необходимого качества продукции. В этот период широко применялся послеоперационный контроль, в частности, автоматический. Такая техническая политика в то время была неизбежной и, вероятно, единственно возможной, хотя приводила к значительным потерям от брака и требовала большого числа контролеров.

По мере развития техники и решения проблемы качества функций технического контроля должны изменяться и расширяться в сторону его «активизации», внедрения в сам процесс производства. От низших форм контроля неизбежен переход к его высшей форме — регулированию и управлению, т. е. к активному технологическому контролю. Преимущество активного контроля по сравнению с послеоперационным очевидно, так как в данном случае необходимые размерные параметры обеспечиваются самим технологическим процессом, что резко снижает потери от брака. Именно этот способ контроля соответствует научно-техническому прогрессу в машиностроении.

Рассмотрим типичную схему применения активного контроля в металлообрабатывающих станках.

Отличительной особенностью большинства методов активного контроля является наличие обратной связи. Под обратной связью понимается воздействие выходного параметра системы на входной. Именно наличие при активном контроле обратной связи и приводит к повышению точности обработки путем устранения влияния технологических погрешностей. На рис. 54 показана система обратной связи при обработке методом врезного шлифования. Обрабатываемое изделие контролируется в процессе обработки с помощью двухконтактного преобразователя D . Выходным парамет-

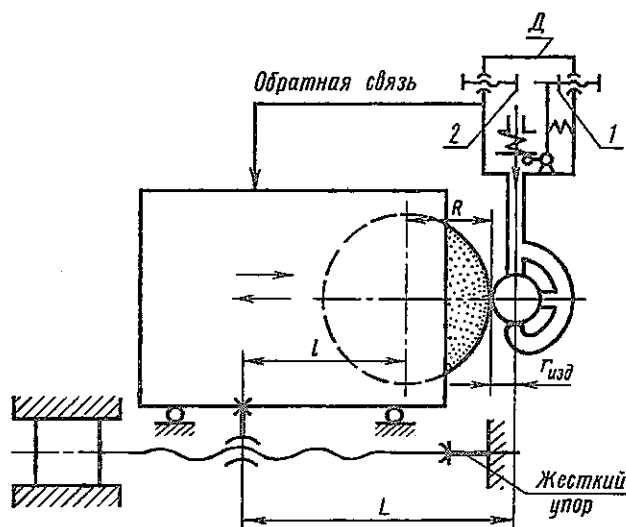


Рис. 54

ром такой системы является размер обрабатываемой детали, входным — перемещение шлифовальной бабки, осуществляемое с помощью гидравлической системы. При размыкании контакта 1 преобразователя станок переключается с черновой подачи на чистовую; при замыкании контакта 2 подается команда о прекращении процесса обработки, и шлифовальная бабка отходит в исходное положение.

На рис. 54 изображены также схема работы до жесткого упора и размерная цепь, характеризующая собой точность такого метода обработки. Как следует из рисунка, радиус обрабатываемой детали

$$r_{\text{изд}} = L - l - R.$$

На размер L влияют тепловые и силовые деформации станка и обрабатываемой детали: на размер l влияют тепловые и силовые деформации станка; на размер R влияет износ шлифовального круга. Тепловые деформации технологической системы являются следствием воздействия тепла, выделяющегося в процессе резания в подшипниках шпинделя шлифовального круга и в системе гидропровода станка. Силовые деформации системы возникают под действием сил резания.

Как показывают исследования, тепловые и силовые деформации в случае длительной работы на металлорежущем станке могут достигать нескольких сотых долей миллиметра. Износ режущего инструмента достигает значительно больших величин. При работе по прибору процесс обработки прекращается только тогда, когда контролируемое сечение достигает заданного размера, на который по образцу настроен второй контакт преобразователя. В этом случае на точность обработки перестают влиять такие факторы, как износ режущего инструмента, тепловые и силовые деформации станка и обрабатываемой детали (при трехточечном измерении). На точность обработки влияют только погрешность самого измерительного устройства (включая погрешность преобразователя), тепловые деформации обрабатываемой детали и износ измерительных наконечников прибора (при контактном методе измерения). При работе с прибором погрешность обработки не превышает 0,005 мм.

Основное преимущество применения активного контроля заключается в автоматическом обеспечении заданных размеров путем устранения влияния на точность обработки износа инструмента и тепловых и силовых деформаций технологической системы.

**§ 76. ГОСУДАРСТВЕННАЯ СИСТЕМА ОБЕСПЕЧЕНИЯ
ЕДИНСТВА ИЗМЕРЕНИЙ**

Решение важнейших научно-технических и народнохозяйственных задач, в том числе проблемы обеспечения качества продукции, в значительной степени зависит от достижения единства и достоверности измерений в стране.

Как указывалось выше, *под единством измерений понимается такое состояние измерительного дела, при котором результаты всех измерений, проводимых в стране, выражаются в одних и тех же узаконенных единицах измерения и оценка их точности обеспечивается с гарантированной доверительной вероятностью.* Если учесть, что в СССР в настоящее время находятся в эксплуатации сотни миллионов мер и измерительных приборов и что ежедневно проводится не менее 20 миллиардов измерений, то станет понятной вся сложность и настоятельная необходимость работ, направленных на достижение единства измерений.

В применявшихся до недавнего времени сравнительно простых методах измерений погрешность результатов измерений почти полностью определялась погрешностями средств измерений. Поэтому для достижения единства измерений было достаточно обеспечить *единообразие средств измерений, т. е. такое состояние средств измерений, когда они проградуированы в узаконенных единицах измерений, а их метрологические свойства соответствуют нормам.*

При использовании современных сложных методов измерений погрешности средств измерений далеко не определяют суммарную погрешность результатов измерений, поскольку большое значение приобретают погрешности метода измерений, ошибки операторов, неизменность условий проведения измерений и др. Поэтому важно обеспечить не только единообразие средств измерений, но и единство измерений и его достоверность, характеризующую доверие к результатам измерений.

Для решения этой задачи созданы комплекс правил, регламентирующих порядок подготовки, выполнения и обработки результатов измерений (правила законодательной метрологии), а также эталонная база и комплекс образцовых средств измерений, обеспечивающих передачу размера единиц физических величин от эта-

лонов образцовым и рабочим средствам измерений, проводится контроль за выполнением правил законодательной метрологии (метрологический надзор).

Сеть государственных метрологических органов и их деятельность, направленная на обеспечение единства и достоверности измерений в стране, называется Государственной метрологической службой СССР. В Советском Союзе руководство Государственной метрологической службой осуществляется Государственным комитетом стандартов Совета Министров СССР.

В состав Государственной метрологической службы СССР входят научно-исследовательские метрологические институты со своими филиалами, 15 управлений уполномоченных Госстандарта СССР при советах министров союзных республик с республиканскими центрами метрологии и стандартизации, лаборатории государственного надзора за внедрением и соблюдением стандартов и состоянием измерительной техники, имеющиеся во всех областных центрах страны, и межрайонные отделения этих лабораторий.

Деятельность Государственной метрологической службы направлена на решение научно-технических проблем метрологии и осуществление необходимых законодательных и контрольных функций: установление допущенных к применению единиц физических величин, системы государственных эталонов единиц; создание образцовых средств измерений, методов и средств измерений высшей точности; разработка общесоюзных поверочных схем; определение физических констант и физико-химических свойств веществ и материалов, а также получение стандартных образцов этих свойств; разработка стандартных методов и средств испытания и контроля, требующих высокой точности, разработка теории измерений, методов оценки погрешностей; надзор за приборостроением и эксплуатацией средств измерений, осуществляемый путем государственных испытаний новых средств измерений, систематической поверки, мер и измерительных приборов, ревизии состояния измерений на предприятиях и в организациях.

Органам Государственной метрологической службы предоставлено право контролировать соблюдение министерствами и ведомствами правил законодательной метрологии, запрещать серийное производство средств измерений не утвержденных Госстандартом СССР типов, изымать из обращения средства измерений, не отвечающие установленным требованиям, контролировать качество изготовления и ремонта средств измерений.

Задачи, стоящие перед Государственной метрологической службой, решаются с помощью *Государственной системы обеспечения единства измерений (ГСИ)*, основные положения которой изложены в ГОСТ 8.000—72. Государственная система обеспечения единства измерений является нормативно-правовой основой метрологического обеспечения научной и практической деятельности в части оценки и обеспечения точности измерений, ре-

зультаты которых используются государственными органами, предприятиями, организациями и учреждениями СССР. Она представляет собой комплекс нормативно-технических документов, устанавливающих единую номенклатуру, способы представления и оценки метрологических характеристик средств измерений, правила стандартизации и аттестации выполнения измерений, оформления их результатов, требования к проведению государственных испытаний, поверки, ревизии и экспертизы средств измерений.

Государственная система обеспечения единства измерений состоит из комплексов нормативно-технических документов, регламентирующих: единицы физических величин; воспроизведение единиц физических величин с помощью эталонов; передачу размеров единиц физических величин рабочим средствам измерений с необходимой точностью при наименьших затратах; установление норм на метрологические характеристики средств измерений; проведение государственных испытаний средств измерений, их поверки, ревизии и экспертизы; проведение стандартизации и аттестации методик выполнения измерений; оформление и представление результатов измерений.

Основными нормативно-техническими документами государственной системы обеспечения единства измерений являются *государственные стандарты*. На основе этих базовых стандартов разрабатываются нормативно-технические документы, конкретизирующие общие требования базовых стандартов к отдельным отраслям народного хозяйства, областям измерений и методикам выполнения измерений.

Под руководством Государственной метрологической службы действуют органы *ведомственных метрологических служб*, создаваемые министерствами и ведомствами для обеспечения метрологического надзора в своей отрасли народного хозяйства. Их основной задачей является обеспечение единства и достоверности измерений в отраслях народного хозяйства путем обеспечения повсеместного соблюдения правил законодательной метрологии, планомерного внедрения методов и средств измерений, отвечающих современным требованиям производства и обеспечивающих выпуск продукции высокого качества, и постоянного контроля за состоянием и правильностью применения средств измерений.

§ 77. ГОСУДАРСТВЕННЫЕ ИСПЫТАНИЯ СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Все средства измерений, предназначенные для серийного производства, ввоза из-за границы партиями и выпуска в обращение в СССР, подвергаются со стороны органов Государственной метрологической службы обязательным *государственным испытаниям*, под которыми понимается экспертиза технической документации на средства измерений и их экспериментальные исследования для определения степени соответствия установленным

нормам, потребностям народного хозяйства и современному уровню развития приборостроения, а также целесообразности их производства. Организация и порядок проведения государственных испытаний средств измерений изложены в ГОСТ 8.001—71.

Государственные испытания вновь разрабатываемых и выпускаемых средств измерений являются эффективным средством обеспечения единства измерений в стране и повышения качества измерительной техники. Цель испытаний — обеспечить высокий технический уровень отечественного приборостроения, соответствие характеристик средств измерений современным требованиям народного хозяйства и мирового рынка, установление оптимальной номенклатуры средств измерений, обеспечивающих потребности народного хозяйства, развитие метрологической базы страны, высокую степень унификации и стандартизации средств измерений, а также развитие специализации и кооперирования в их производстве. Проведение государственных испытаний, кроме того, способствует своевременной подготовке метрологической службы страны к обслуживанию средств измерений при выпуске их из производства и в эксплуатации.

Установлены два вида государственных испытаний:

приемочные испытания опытных образцов средств измерений новых типов, намеченных к серийному производству или импорту в СССР (государственные приемочные испытания);

контрольные испытания образцов из установочной серии и серийно выпускаемых средств измерений (государственные контрольные испытания).

Государственные приемочные испытания проводятся государственными приемочными комиссиями, назначаемыми Госстандартом СССР или другими ведомствами по согласованию с Госстандартом СССР и его метрологическими органами.

В процессе государственных приемочных испытаний определяются: соответствие средств измерений требованиям распространяющихся на них стандартов; соответствие технических характеристик средств измерений требованиям технического задания (технического предложения); возможность метрологического обслуживания и обеспечения нормированных значений метрологических характеристик испытуемых средств измерений при их серийном производстве и в эксплуатации; метрологические характеристики, подлежащие контролю при выпуске средств измерений из производства и при эксплуатации, а также рекомендуемая периодичность контроля; перечень изменений, которые должны быть внесены разработчиком в конструкцию (схему) средств измерений и техническую документацию.

Государственная приемочная комиссия (или соответствующий метрологический орган) на основании изучения и анализа образца средств измерений, технической документации на него, результатов испытаний и экспертных заключений, представленных организацией — разработчиком (изготовителем) данного типа средств из-

мерений, принимает рекомендацию о целесообразности (или нецелесообразности) выпуска средства измерения данного типа.

Госстандарт СССР рассматривает материалы государственных испытаний и принимает решение об утверждении типа средств измерения к выпуску в обращение в стране. После утверждения тип средств измерения вносится в Государственный реестр мер и измерительных приборов СССР.

Государственные контрольные испытания проводятся метрологическими организациями Госстандарта СССР. Их цель — проверка соответствия выпускаемых из производства или ввозимых из-за границы средств измерений утвержденному Госстандартом СССР типу, требованиям стандартов и технических условий.

Контрольные испытания средств измерений серийного производства проводятся: при выпуске установочной серии, при наличии сведений об ухудшении качества средств измерений, выпускаемых предприятием-изготовителем; при внесении изменений в конструкцию и технологию изготовления средств измерений, влияющих на их нормируемые метрологические характеристики, а также в порядке государственного надзора за качеством выпускаемых средств измерений в сроки, устанавливаемые Госстандартом СССР.

Контрольные испытания проводятся периодически в течение всего времени производства (или импорта) средств измерений данного типа на испытательной базе предприятия-изготовителя. По окончании испытаний составляется акт о контрольных испытаниях, содержащий результаты испытаний, замечания, предложения и выводы. На основании акта контрольных испытаний организация, проводившая их, принимает решение или о разрешении продолжения выпуска в обращение данных средств измерений, или об устранении недостатков, обнаруженных при контрольных испытаниях, или о запрещении их выпуска в обращение.

§ 78. ПОВЕРКА, РЕВИЗИЯ И ЭКСПЕРТИЗА СРЕДСТВ ИЗМЕРЕНИЙ

Система метрологического надзора за средствами измерений представляет собой комплекс правил, положений и требований технического, экономического и правового характера, определяющих организацию и порядок проведения работ по поверке, ревизии и экспертизе средств измерений. Метрологический надзор осуществляется единой метрологической службой страны, руководимой Госстандартом СССР и состоящей из Государственной метрологической службы СССР и ведомственных метрологических служб министерств и ведомств.

Основные положения системы метрологического надзора за средствами измерений, выпускаемыми из производства и ремонта и находящимися в обращении в стране, устанавливаются ГОСТ 8.002—71 «Организация и порядок проведения поверки, ревизии

и экспертизы средств измерений», утвержденным взамен действовавших ранее Правил 12—58. Согласно этому стандарту метрологический надзор за средствами измерений должен осуществляться путем проведения поверки, метрологической ревизии и метрологической экспертизы средств измерений.

Важнейшей формой государственного надзора за измерительной техникой является *государственная (и ведомственная) поверка средств измерений*, служащая для установления их метрологической исправности.

Средства измерений подвергаются первичной, периодической, внеочередной и инспекционной поверкам.

Первичная поверка проводится при выпуске средств измерений в обращение из производства или ремонта.

Периодическая поверка проводится при эксплуатации и хранении средств измерений через определенные межповерочные интервалы, установленные с расчетом обеспечения метрологической исправности средств измерений на период между поверками.

Если необходимо удостовериться в исправности средств измерений при проведении работ по корректированию межповерочных интервалов, при повреждении поверительного клейма, пломбы или утраты документов, подтверждающих прохождение средством измерения периодической поверки, а также в ряде других случаев проводится *внеочередная поверка* средств измерений, причем сроки ее проведения назначаются независимо от сроков периодических поверок.

Инспекционная поверка проводится для выявления метрологической исправности средств измерений, находящихся в обращении; при проведении метрологической ревизии в организациях, учреждениях и торговых организациях, на предприятиях, складах и базах снабжения.

Обязательной государственной поверке подлежат:

средства измерений, применяемые органами государственной метрологической службы;

образцовые средства измерений, применяемые в качестве исходных в метрологических органах министерств и ведомств; применяемые в метрологических подразделениях приборостроительных и прибороремонтных предприятий при градуировке и поверке средств измерений, выпускаемых в обращение;

средства измерений, применяемые при учете материальных ценностей, взаимных расчетах и торговле;

средства измерений, связанные с охраной здоровья трудящихся и техникой безопасности;

средства измерений, применяемые при государственных испытаниях новых средств измерений и при государственной аттестации качества продукции;

средства измерений, результаты которых используются при регистрации официальных спортивных международных и национальных рекордов.

Так, например, к рабочим средствам измерений, подлежащим обязательной государственной поверке, относятся: весоизмерительные приборы, расходомеры, счетчики электроэнергии, газа, нефтепродуктов и воды, топливо- и маслораздаточные колонки и ряд других приборов, применяемых для учета, и в торговле; шумомеры, дозиметры, рентгенометры, сфигманометры и тонометры, наборы пробных очковых стекол, медицинские термометры и другие приборы, служащие для охраны здоровья трудящихся; радиометры, измерители напряженности поля СВЧ, газоанализаторы, скоростемеры и другие измерительные приборы, обеспечивающие безопасность работ, и т. п. Все остальные средства измерений подлежат обязательной ведомственной поверке.

Сроки периодических поверок (межповерочные интервалы) устанавливаются и корректируются метрологическими подразделениями предприятий, организаций и учреждений, эксплуатирующих средства измерений, дифференцированно для различных групп средств измерений на основе систематического анализа статистических данных об их фактической надежности, интенсивности применения и условий эксплуатации, с таким расчетом, чтобы обеспечить метрологическую исправность средств измерений на период между поверками. Начальный межповерочный интервал устанавливается при государственных испытаниях средств измерений.

Госстандартом СССР установлены предельные сроки поверки для исходных образцовых мер и приборов, а также для ограниченной номенклатуры рабочих средств измерений, служащих для учета материальных ценностей и взаимных расчетов, для отпуска товаров потребителям и для охраны здоровья, т. е. для мер и приборов, требующих постоянного государственного надзора и не находящихся под таким квалифицированным наблюдением, как приборы в промышленности.

Поверка средств измерений должна осуществляться в соответствии с действующими государственными стандартами на поверочные схемы, методы и средства поверки, а до введения их в действие — в соответствии с инструкциями и методическими указаниями Госстандарта СССР. Средства измерений должны поверяться лишь работниками метрологического надзора, прошедшими специальное обучение в учебных заведениях Госстандарта СССР и сдавшими экзамен.

Положительные результаты поверки удостоверяются: а) наложением на средства измерений поверительного клейма установленного образца; б) выдачей свидетельства о поверке. Средства измерений, признанные по результатам поверки непригодными к применению, к дальнейшей эксплуатации не допускаются; при этом поверительные клейма погашаются, а в паспорте или свидетельстве прибора делается соответствующая запись.

Следующей важной формой метрологического надзора за средствами измерений является метрологическая ревизия пред-

приятий, изготавливающих, ремонтирующих и эксплуатирующих средства измерений, а также складов, баз снабжения и торговых организаций, хранящих, комплектующих и продающих средства измерений.

Метрологическая ревизия заключается в проверке состояния средств измерений, выполнения правил их поверки и применения и осуществляется органами Государственной метрологической службы СССР с привлечением по согласованию с соответствующими организациями специалистов базовых отраслевых организаций и предприятий, научно-исследовательских организаций, ведомственных метрологических служб и ведомственных инспекций. Метрологическая ревизия как форма контроля за повсеместным соблюдением единства измерений должна охватывать не только средства измерений, но и контроль за правильностью отражения в действующей документации, регламентирующей производственные процессы и контроль качества продукции, требований к средствам измерений и измерительным процессам; обеспеченностью средствами измерений технологических операций, испытаний и контроля качества продукции; соответствием применяемых методов и средств измерений современным требованиям производства; правильностью выполнения измерительных операций, техническим уровнем вновь выпускаемых средств измерений и того, насколько они удовлетворяют современным требованиям народного хозяйства.

Результаты метрологической ревизии оформляются актом, содержащим конкретные результаты проверки, а также предложения по изъятию средств измерений, признанных непригодными к применению, и предложения, подлежащие выполнению для устранения обнаруженных недостатков, с указанием сроков их выполнения.

На основе обобщения результатов метрологической ревизии соответствующие органы Государственной метрологической службы направляют Госстандарту СССР предложения о совершенствовании парка средств измерений и повышения метрологического обеспечения измерений.

Если возникают спорные вопросы, то по письменному требованию органов суда или прокуратуры, государственного арбитража, милиции, органов народного контроля, а также по письменному заявлению предприятий проводится *метрологическая экспертиза*, осуществляемая лицами — уполномоченными органов Государственной метрологической службы. По результатам экспертизы составляется акт, который утверждается руководителем органа Государственной метрологической службы и вручается заинтересованным сторонам.

В тех случаях, когда метрологическая ревизия или экспертиза, проведенная по заявлению предприятия, организации или учреждения, дает основания предполагать наличие злоупотреблений, в результате которых нанесен материальный ущерб народному

хозяйству или отдельным лицам, руководитель органа Государственной метрологической службы обязан направлять материалы ревизии или экспертизы в следственные органы.

§ 79. ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЛУЖБА ВРЕМЕНИ И ЧАСТОТЫ СССР

Большое значение измерений времени и частоты для различных отраслей народного хозяйства страны, все более возрастающее с научно-техническим прогрессом в этих отраслях, обусловили необходимость создания Государственной службы времени и частоты СССР.

Руководство Государственной службой времени и частоты СССР осуществляется Межведомственной комиссией единой службы времени при Госстандарте СССР, созданной в 1947 г. В задачи комиссии входят:

- разрешение вопросов, связанных с передачей сигналов времени;
- установление сети учреждений, которые будут проводить работу по определению и приему сигналов времени и по хранению единицы времени;

- координация работ, выполняемых отдельными ведомствами в области службы времени;

- разрешение вопросов, связанных с исчислением времени по системе часовых поясов;

- разрешение вопросов, связанных с определением, хранением и передачей эталонных частот, а также координация работ отдельных ведомств в области частоты.

В состав Межведомственной комиссии единой службы времени, возглавляемой Председателем Государственного комитета стандартов Совета Министров СССР, входят представители Академии наук СССР и ряда заинтересованных министерств и ведомств (Министерство связи СССР, Министерство путей сообщения СССР, Министерство высшего и среднего специального образования СССР и др.). Решения Межведомственной комиссии по вопросам, относящимся к кругу ее деятельности, являются обязательными для всех ведомств и учреждений.

Важнейшими вопросами, практически решенными Межведомственной комиссией единой службы времени, являлись:

- разработка и введение в действие Государственного эталона времени и частоты СССР, стоящего на уровне современных требований к измерению времени и частоты и соответствующего по точности эталонам времени и частоты лучших метрологических служб мира;

- создание системы передачи по радио сигналов точного времени и эталонных частот, обеспечивающей прием их на всей территории СССР;

- введение в СССР с 1 января 1972 г. новой системы всемирного координированного времени;

создание метрологического центра СССР по времени и частоте.

Важное место в работе Межведомственной комиссии занимали вопросы упорядочения исчисления времени в СССР по системе часовых поясов. Как известно, до революции в России каждый город в зависимости от его долготы имел свое исчисление времени. Впервые счет времени по международной системе часовых поясов был введен на территории нашей страны в 1919 г. «в целях установления единообразного со всем цивилизованным миром счета времени в течение суток» (Декрет СНК РСФСР от 8.02.1919 г.).

Установленные первоначально границы часовых поясов были совмещены, как правило, с естественными рубежами (реками, берегами морей) и железными дорогами; в малообжитых районах границы часовых поясов были назначены по соответствующим меридианам. Всего по территории СССР установлено 11 часовых поясов: от 2-го (часовой пояс Москвы) до 12-го (часовой пояс Чукотского района Чукотского национального округа). В каждом поясе счет времени отличается от соседнего ровно на 1 ч.

В связи с развитием экономики страны в 1954—1956 гг. Межведомственная комиссия единой службы времени пересмотрела границы часовых поясов. Их новые границы, установленные решением комиссии от 28 мая 1956 г., были совмещены, как правило, с границами административных территорий, в малообжитых районах они были совмещены с теоретическими граничными меридианами часовых поясов или с водоразделами.

Чтобы полнее использовать светлое время суток для работы и в целях экономии электроэнергии, используемой для освещения в темное время суток, в нашей стране, как и в ряде зарубежных стран, практиковался перевод стрелок часов на 1 ч вперед на летний период. Постановлением Правительства обратный перевод стрелок осенью 1930 г. не был произведен, и с тех пор в нашей стране круглый год счет времени ведется по летнему времени, или так называемому декретному времени, т. е. на 1 ч вперед по сравнению с поясным. Такой порядок счета времени установлен во Франции и в некоторых других странах.

§ 80. ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЛУЖБА СТАНДАРТНЫХ СПРАВОЧНЫХ ДАННЫХ

Государственная служба стандартных справочных данных о свойствах веществ и материалов (ГСССД) является специализированной общегосударственной системой, обеспечивающей на основе единых научных методических и организационных положений определение, сбор, обработку, оценку, хранение и стандартизацию данных о физических константах и свойствах веществ и материалов и справочно-информационное обслуживание потребителей этими данными.

В современной науке и технике используется огромное количество разнообразных веществ и материалов, которые обладают

различными свойствами, меняющимися в зависимости от условий (давления, температуры, частоты и др.).

Несмотря на большое число экспериментальных и теоретических исследований свойств материалов (их ежегодно публикуется во всем мире до 200 000), трудно получить достоверную информацию о свойствах многих и особенно новых веществ и материалов. В справочниках часто помещают недостаточно проверенные, иногда противоречивые данные. Трудность получения достоверной информации определяется и большим ее объемом. В настоящее время известно около 3,5 миллиона веществ и материалов и 1000 свойств при различных внешних условиях и воздействиях.

Организовать оперативное получение достоверной информации о свойствах веществ и материалов призвана Государственная служба стандартных справочных данных, созданная Госстандартом СССР. Основные цели ГСССД изложены в проекте стандарта, посвященном организации этой службы: обеспечение наиболее эффективного использования веществ и материалов путем исчерпывающей оперативной информации об их свойствах; ускорение получения новых веществ и материалов и определение новых необходимых данных о них с помощью координации соответствующих работ; повышение производительности научного и инженерного труда путем уменьшения затрат на поиск информации; обеспечение соответствующего уровня точности значений физических констант и справочных данных и развитие международного сотрудничества в данной области.

Государственная служба стандартных справочных данных представляет собой разветвленную систему, имеющую межотраслевой характер, и включает в себя: систему сбора информации, систему получения достоверной информации, систему обеспечения информацией работников науки и производства и систему координации и планирования работ в области измерения новых свойств и получения новых материалов.

Важнейшая задача ГСССД — добиться оперативного и достаточно исчерпывающего обеспечения работников науки и производства достоверными данными о свойствах веществ и материалов — может быть решена только на базе использования средств механизации и автоматизации процессов обработки и хранения (с учетом пополнения и изменений), поиска, передачи и выдачи информации потребителю.

Для руководства работой по ГСССД создан Всесоюзный научно-исследовательский центр стандартных справочных данных (ВНИЦ ССД).

В ГСССД используются различные формы обслуживания потребителей: выпуск периодических и непериодических изданий в виде справочников, таблиц, обзоров, библиографических указателей и др.; система оперативного ответа на запросы потребителей; система избирательного распространения, в которой поступающая

в фонды ГСССД информация рассылается постоянным абонентам ГСССД в соответствии с тематикой их работы.

Государственная служба стандартных справочных данных базируется на ряде основных принципов, из которых важнейшими являются следующие: создание и применение единых критериев достоверности справочных данных; стандартизация и унификация методик измерения свойств материалов и оценки погрешностей измерений; осуществление централизованного методического и организационного руководства работами по получению и сбору достоверных данных; привлечение экспертов и создание сети базовых организаций; организация Государственной системы поступления первичной информации; стандартизация и унификация форм поступления и выдачи информации; централизованное хранение, систематизация и обработка достоверных данных о свойствах веществ и материалов.

Важнейшее значение в ГСССД имеет применение автоматизации и механизации процессов поступления, обработки, обновления, поиска, передачи и выдачи информации, а также статистической обработки результатов эксперимента и оценки достоверности измерений. Для успешной работы ГСССД создается централизованная система изданий (справочники, таблицы, обзоры, указатели и т. п.).

§ 81. ГОСУДАРСТВЕННАЯ СЛУЖБА СТАНДАРТНЫХ ОБРАЗЦОВ

Составной частью Государственной метрологической службы является Государственная служба стандартных образцов (ГССО).

Цель службы — обеспечение единства измерений химического состава, физических, физико-химических, эксплуатационных и других свойств веществ и материалов.

Стандартные образцы широко используются для градуировки и проверки средств и методов измерений, а также для контроля качества промышленной продукции методом непосредственного сличения. Они применяются в важнейших отраслях промышленности и служат для контроля качества сырья по химическому составу, механическим, теплофизическим, оптическим, электрическим, магнитным, радиоактивным и другим свойствам.

Стандартные образцы веществ и материалов представляют собой меры величин, характеризующих свойства или состав веществ и материалов. Они применяются как при проведении метрологических работ, так и при контроле качества сырья и продукции.

В зависимости от аттестуемой характеристики стандартные образцы веществ и материалов подразделяют на *стандартные образцы свойств* и *стандартные образцы состава*. Возможна одновременная аттестация стандартных образцов по свойствам и составу.

Стандартные образцы используются в виде вещества (или тела), одно из свойств которого служит для воспроизведения при оп-

ределенных условиях единицы измерения, коэффициентов или условной шкалы.

Стандартные образцы характеризуются следующими признаками: областью применения и аттестуемым свойством, веществом — носителем свойства, значением аттестуемой величины и метрологическим назначением образца (в качестве образцовой меры различных разрядов или рабочей меры различных классов точности).

При аттестации стандартного образца точность определения свойства стандартного образца устанавливается в зависимости от его назначения. Допускаемые погрешности аттестуемых стандартных образцов свойства, а также разряд стандартного образца (образцовой меры) или класс точности стандартного образца (рабочей меры) устанавливаются соответствующими нормативными документами.

Стандартные образцы классифицируют по следующим признакам:

- по разновидности аттестуемой характеристики, по которой аттестуется образец (содержание одного, нескольких или всех компонентов, чистота вещества, фазовый состав);

- по аттестуемым объектам;

- по методу анализа испытуемых объектов (химический, спектральный, рентгено-спектральный, масс-спектральный, активационный и др.);

- по метрологическому назначению (контроль правильности анализов, градуировка средств измерений, поверка средств измерений);

- по агрегатному состоянию и технологическим особенностям изготовления материала стандартных образцов.

Каждый образец, положительно аттестованный в качестве стандартного образца свойств веществ и материалов, регистрируется в Государственном реестре стандартных образцов СССР, являющемся составной частью Государственного реестра средств измерений СССР. Стандартные образцы аттестуют как в метрологических органах, так и в ведомственных организациях с последующей экспертизой метрологических органов Государственной метрологической службы.

Аттестованные стандартные образцы снабжают соответствующим свидетельством или наносят на образец клеймо, содержащее значение аттестуемой величины.

Головной организацией в области стандартных образцов, обеспечивающей проведение научных и методических работ в этой области, изучение общих вопросов измерений химического состава и свойств, контроля качества и метрологических аспектов свойств веществ и материалов, является Всесоюзный научно-исследовательский центр Государственной службы стандартных образцов (ВНИЦ ГССО). Он работает с 1968 г. в составе филиала Всесоюзного научно-исследовательского института метрологии им. Д. И. Менделеева в Свердловске.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Важнейшие единицы Международной системы СИ

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
I. Основные единицы				
1.1. Длина	L	метр	м	m
1.2. Масса	M	килограмм	кг	kg
1.3. Время	T	секунда	с	s
1.4. Сила электрического тока	I	ампер	А	A
1.5. Термодинамическая температура	θ	кельвин	К	K
1.6. Количество вещества	N	моль	моль	mol
3.7. Сила света	J	кандела	кд	cd
2. Дополнительные единицы				
1.1. Плоский угол	—	радиан	рад	rad
2.2. Телесный угол	—	стерадиан	ср	sr
3. Производные единицы пространства и времени				
3.1. Площадь	L^2	квадратный метр	м ²	m ²
3.2. Объем, вместимость	L^3	кубический метр	м ³	m ³
3.3. Скорость	LT^{-1}	метр в секунду	м/с	m/s
3.4. Ускорение	LT^{-2}	метр на секунду в квадрате	м/с ²	m/s ²

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
3.5. Частота периодического процесса	T^{-1}	герц	Гц	Hz
3.6. Частота дискретных событий (импульсов, ударов и т. п.)	T^{-1}	секунда в минус первой степени	c^{-1}	s^{-1}
3.7. Частота вращения	T^{-1}	секунда в минус первой степени	c^{-1}	s^{-1}
3.8. Угловая скорость	T^{-1}	радиан в секунду	рад/с	rad/s
3.9. Угловое ускорение	T^{-2}	радиан на секунду в квадрате	рад/с ²	rad/s ²
3.10 Волновое число	L^{-1}	метр в минус первой степени	m^{-1}	m^{-1}
3.11. Коэффициент затухания	T^{-1}	секунда в минус первой степени	c^{-1}	s^{-1}
2.12. Коэффициент ослабления	L^{-1}	метр в минус первой степени	m^{-1}	m^{-1}
4. Производные единицы механических величин				
4.1. Плотность	$L^{-3}M$	килограмм на кубический метр	кг/м ³	kg/m ³
4.2. Удельный объем	L^3M^{-1}	кубический метр на килограмм	м ³ /кг	m ³ /kg
4.3. Момент инерции (динамический момент инерции)	L^2M	килограмм-метр в квадрате	кг·м ²	kg·m ²

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
4.4. Момент инерции (второй момент) площади плоской фигуры (осевой, полярный, центробежный)	L^4	метр в четвертой степени	m^4	m^4
4.5. Момент сопротивления плоской фигуры	L^3	метр в третьей степени	m^3	m^3
4.6. Количество движения (импульс)	LMT^{-1}	килограмм—метр в секунду	кг·м/с	kg·m/s
4.7. Момент количества движения (момент импульса)	L^2MT^{-1}	килограмм—метр в квадрате в секунду	кг·м²/с	kg·m²/s
4.8.1. Сила	LMT^{-2}	ньютон	Н	N
4.8.2. Вес				
4.9. Удельный вес	$L^{-2}MT^{-2}$	ньютон на кубический метр	Н/м³	N/m³
4.10. Момент силы, момент пары сил	L^2MT^{-2}	ньютон—метр	Н·м	N·m
4.11. Импульс силы	LMT^{-1}	ньютон—секунда	Н·с	N·s
4.12.1. Давление	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па	Pa
4.12.2. Напряжение (механическое)				
4.13. Поверхностное натяжение	MT^{-2}	ньютон на метр	Н/м	N/m
4.14.1. Работа	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	J
4.14.2. Энергия				

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
4.15. Мощность	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	W
4.16. Динамическая вязкость	$L^{-1}MT^{-1}$	паскаль—секунда	Па·с	Pa·s
4.17. Кинематическая вязкость	L^2T^{-1}	квадратный метр на секунду	м²/с	m²/s
4.18. Массовый расход	MT^{-1}	килограмм в секунду	кг/с	kg/s
4.19. Объемный расход	L^3T^{-1}	кубический метр в секунду	м³/с	m³/s
5. Производные единицы электрических и магнитных величин				
5.1. Плотность электрического тока	$L^{-2}I$	ампер на квадратный метр	A/м²	A/m²
5.2. Линейная плотность электрического тока	$L^{-1}I$	ампер на метр	A/м	A/m
5.3. Количество электричества (электрический заряд)	TI	кулон	Кл	C
5.4. Пространственная плотность электрического заряда	$L^{-3}TI$	кулон на кубический метр	Кл/м³	C/m³
5.5.1. Поверхностная плотность электрического заряда	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	Кл/м²	C/m²
5.5.2. Поляризованность	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	Кл/м²	C/m²
5.6. Электрический момент диполя	LTI	кулон—метр	Кл·м	C·m
5.7. Поток электрического смещения	TI	кулон	Кл	C

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
5.8. Электрическое смещение	$L^{-2}TI$	кулон на квадратный метр	Кл/м ²	С/м ²
5.9.1. Электрическое напряжение	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В	V
5.9.2. Электрический потенциал				
5.9.3. Разность электрических потенциалов				
5.9.4. Электродвижущая сила	$L^2MT^{-3}I^{-1}$	вольт	В	V
5.10. Напряженность электрического поля	$LMT^{-3}I^{-1}$	вольт на метр	В/м	V/m
5.11. Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}T^4I^2$	фарада	Ф	F
5.12.1. Абсолютная диэлектрическая проницаемость	$L^{-3}M^{-1}T^4I^2$	фарада на метр	Ф/м	F/m
5.12.2. Электрическая постоянная				
5.13. Электрическое сопротивление	$L^2MT^{-3}I^{-2}$	ом	Ом	Ω
5.14. Удельное электрическое сопротивление	$L^3MT^{-3}I^{-2}$	ом-метр	Ом·м	Ω·m
5.15. Электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^3I^2$	сименс	См	S
5.16. Удельная электрическая проводимость	$L^{-3}M^{-1}T^3I^2$	сименс на метр	См/м	S/m
5.17. Магнитный поток	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб	Wb
5.18. Магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Т	T
5.19.1. Магнитодвижущая сила	I	ампер	А	A
5.19.2. Разность магнитных потенциалов				

Продолжение табл. 1

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
5.20. Напряженность магнитного поля	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м	А/м
5.21.1. Индуктивность	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	генри	Г	Н
5.21.2. Взаимная индуктивность				
5.22.1. Абсолютная магнитная проницаемость	$LMT^{-2}I^{-2}$	генри на метр	Г/м	Н/м
5.22.2. Магнитная постоянная				
5.23.1. Магнитный момент электрического тока	L^2I	ампер—квадратный метр	А·м ²	А·м ²
5.23.2. Магнитный момент диполя				
5.24. Намагниченность	$L^{-1}I$	ампер на метр	А/м	А/м
5.25. Магнитное сопротивление	$L^{-2}M^{-1}T^2I^2$	ампер на вебер	А/Вб	А/Вб
5.26. Магнитная проводимость	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	вебер на ампер	Вб/А	Вб/А
5.27. Электромагнитная энергия	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	Дж
5.28. Активная мощность	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	W
5.29. Реактивная мощность	L^2MT^{-3}	вар	вар	var
5.30. Полная мощность	L^2MT^{-3}	вольт—ампер	В·А	V·A

6. Производные единицы тепловых величин

6.1.1. Количество теплоты	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	Дж

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
6.1.2. Термодинамический потенциал (внутренняя энергия, энтальпия, изохорно-изотермический потенциал, изобарно-изотермический потенциал)	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	J
6.1.3. Теплота фазового превращения				
6.1.4. Теплота химической реакции				
6.2.1. Удельное количество теплоты	L^2T^{-2}	джоуль на килограмм	Дж/кг	J/kg
6.2.2. Удельный термодинамический потенциал				
6.2.3. Удельная теплота фазового превращения				
6.2.4. Удельная теплота химической реакции				
6.3. Теплоемкость системы	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на кельвин	Дж/К	J/K
6.4. Энтропия системы	$L^2MT^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на кельвин	Дж/К	J/K
6.5. Удельная теплоемкость	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на килограмм—кельвин	Дж/(кг·К)	J/(kg·K)
6.6. Удельная энтропия	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на килограмм—кельвин	Дж/(кг·К)	J/(kg·K)
6.7. Удельная газовая постоянная	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	джоуль на килограмм—кельвин	Дж/(кг·К)	J/(kg·K)
6.8. Тепловой поток	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	W

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
6.9. Поверхностная плотность теплового потока	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м ²	W/m ²
6.10.1. Коэффициент теплообмена	$MT^{-3}\theta^{-1}$	ватт на квадратный метр—кельвин	Вт/(м ² ·К)	W/(m ² ·K)
6.10.2. Коэффициент теплопередачи				
6.11. Температурный градиент	$L^{-1}\theta$	кельвин на метр	К/м	K/m
6.12. Теплопроводность	$LMT^{-3}\theta^{-1}$	ватт на метр—кельвин	Вт/(м·К)	W/(m·K)
6.13. Температуропроводность	L^2T^{-1}	квадратный метр на секунду	м ² /с	m ² /s
6.14. Температурный коэффициент	θ^{-1}	кельвин в минус первой степени	К ⁻¹	K ⁻¹
7. Производные единицы величин, выражаемых через количество вещества				
7.1. Молярная масса	MN^{-1}	килограмм на моль	кг/моль	kg/mol
7.2. Молярный объем	L^3N^{-1}	кубический метр на моль	м ³ /моль	m ³ /mol
7.3.1. Молярная внутренняя энергия	$L^2MT^{-2}N^{-1}$	джоуль на моль	Дж/моль	J/mol
7.3.2. Молярная энтальпия				
7.3.3. Химический потенциал				
7.3.4. Химическое сродство				
7.4.1. Молярная теплоемкость	$L^2MT^{-2}\theta^{-1}N^{-1}$	джоуль на моль—кельвин	Дж/(моль·К)	J/(mol·K)
7.4.2. Молярная энтропия				

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
7.5. Молярная концентрация	$L^{-3}N$	моль на кубический метр	моль/м ³	mol/m ³
7.6. Скорость химической реакции	$L^{-3}T^{-1}N$	моль на кубический метр в секунду	моль/(м ³ ·с)	mol/(m ³ /s)
7.7. Удельная адсорбция	$M^{-1}N$	моль на килограмм	моль/кг	mol/kg
8. Производные единицы величин физической оптики и световых величин				
8.1. Энергия излучения	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	J
8.2. Поток излучения	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	W
8.3.1. Энергетическая освещенность (облученность)	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м ²	W/m ²
8.3.2. Энергетическая светимость (излучательность)				
8.4. Энергетическая экспозиция (лучистая экспозиция)	MT^{-2}	джоуль на квадратный метр	Дж/м ²	J/m ²
8.5. Энергетическая сила света (сила излучения)	L^2MT^{-3}	ватт на стерадиан	Вт/ср	W/sr
8.6. Энергетическая яркость (лучистость)	MT^{-3}	ватт на стерадиан—квадратный метр	Вт/(ср·м ²)	W/(sr·m ²)
8.7. Световой поток	J	люмен	лм	lm
8.8. Световая энергия	TJ	люмен—секунда	лм·с	lm·s
8.9. Освещенность	$L^{-2}J$	люкс	лк	lx
8.10. Светимость	$L^{-2}J$	люмен на квадратный метр	лм/м ²	lm/m ²

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
8.11. Яркость	$L^{-2}J$	кандела на квадратный метр	кд/м ²	cd/m ²
8.12. Световая экспозиция	$L^{-2}TJ$	люкс-секунда	лк·с	lx·s
9. Производные единицы акустических величин				
9.1. Звуковое давление	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па	Pa
9.2. Объемная скорость	L^3T^{-1}	кубический метр в секунду	м ³ /с	m ³ /s
9.3. Акустическое сопротивление	$L^{-4}MT^{-1}$	паскаль-секунда на кубический метр	Па·с/м ³	Pa·s/m ³
9.4. Удельное акустическое сопротивление	$L^{-2}MT^{-1}$	паскаль-секунда на метр	Па·с/м	Pa·s/m
9.5. Механическое сопротивление	MT^{-1}	ньютон-секунда на метр	Н·с/м	N·s/m
9.6. Звуковая энергия	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	J
9.7.1. Поток звуковой энергии	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	W
9.7.2. Звуковая мощность				
9.8. Интенсивность звука	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м ²	W/m ²
9.9. Плотность звуковой энергии	$L^{-1}MT^{-2}$	джоуль на кубический метр	Дж/м ³	J/m ³

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
10. Производные единицы величин в области ионизирующих излучений				
10.1. Энергия ионизирующего излучения	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж	J
10.2. Поток энергии ионизирующего излучения	L^2MT^{-3}	ватт	Вт	W
10.3.1. Доза излучения (поглощенная доза излучения)	L^2T^{-2}	джоуль на килограмм	Дж/кг	J/kg
10.3.2. Эквивалентная доза излучения				
10.4. Керма	L^2T^{-2}	джоуль на килограмм	Дж/кг	J/kg
10.5.1. Мощность дозы излучения (мощность поглощенной дозы излучения)	L^2T^{-3}	ватт на килограмм	Вт/кг	W/kg
10.5.2. Мощность эквивалентной дозы излучения				
10.6. Мощность кермы	L^2T^{-3}	ватт на килограмм	Вт/кг	W/kg
10.7. Экспозиционная доза фотонного излучения (экспозиционная доза гамма- и рентгеновского излучений)	$M^{-1}TI$	кулон на килограмм	Кл/кг	C/kg
10.8. Мощность экспозиционной дозы фотонного излучения	$M^{-1}I$	ампер на килограмм	А/кг	A/kg
10.9. Интенсивность излучения	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м ²	W/m ²
10.10. Активность нуклида в радиоактивном источнике (активность изотопа)	T^{-1}	секунда в минус первой степени	c ⁻¹	s ⁻¹

Величина		Единица		
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение	
			русское	международное
10.11. Поток ионизирующих частиц или фотонов	T^{-1}	секунда в минус первой степени	s^{-1}	s^{-1}
10.12. Плотность потока ионизирующих частиц или фотонов	$L^{-2} T^{-1}$	секунда в минус первой степени — метр в минус второй степени	$s^{-1} \cdot m^{-2}$	$s^{-1} m^{-2}$

Единицы, допускаемые к применению наравне с единицами СИ

Величина			Единица				Примечание
Номер по табл. 1	Наименование	Наименование	Обозначение		Соотношение с единицей СИ или определение		
			русское	международное			
1.2	Масса	тонна	т	t	10 ³ кг	1 т = 1 Мг	
1.3	Время	минута час сутки	мин ч сут	min h d	60 с 3 600 с 86 400 с	Допускается применять также единицы недели, месяца, год	
2.1	Плоский угол	Градус минута секунда	...° ...' ..."	...° ...' ..."	$\pi/180$ рад = = 1,745 329·10 ⁻² рад $\pi/108 00$ рад = = 2,908 882·10 ⁻⁴ рад $\pi/648 000$ рад = = 4,848 137·10 ⁻⁶ рад		
3.1	Площадь	гектар	га	ha	10 ⁴ м ²	Для земельных участков	
3.2	Объем, вместимость	литр	л	l	10 ⁻³ м ³		

Величина		Единица			Примечание
Номер по табл. 1	Наименование	Обозначение		Соотношение с единицей СИ или определение	
		русское	международное		
—	Относительная величина (безразмерное отношение физической величины к одноименной физической величине, принимаемой за исходную): к.п.д., относительное удлинение, относительная плотность, относительные диэлектрическая и магнитная восприимчивости, магнитная восприимчивость, массовая доля, молярная доля и т. п.	— % ‰ млн ⁻¹	— % ‰ ppm	1 10 ⁻² 10 ⁻³ 10 ⁻⁶	
—	Температура Цельсия, разность температур	°C	°C		Температура Цельсия, символ t , определяется выражением $t = T - T_0$, где T — температура Кельвина, $T_0 = 273,15$ K По размеру градус Цельсия равен Кельвину

Номер по табл. 1	Величина	Наименование	Единица		Соотношение с единицей СИ или определение	Примечание
			Обозначение			
			русское	международное		
—	Логарифмическая величина (логарифм безразмерного отношения физической величины к определенной физической величине, принимаемой за исходную); уровень звукового давления, усиление, ослабление и т. п.*	бел	Б	В	$1 \text{ В} = \lg(P_2/P_1)$ при $P_2 = 10 P_1$ $1 \text{ В} = 2 \lg(F_2/F_1)$ при $F_2 = \sqrt{10} F_1$	P_1, P_2 — одноименные энергетические величины (мощности, энергии, плотности энергии и т. п.); F_1, F_2 — одноименные «силовые» величины (напряжения, силы тока, давления, напряженности поля и т. п.);
—	Частотный интервал	децибел октава декада	дБ окт дек	дВ — —	$0,1 \text{ В}$ I октава = $\lg_2(f_2/f_1)$ при $f_2/f_1 = 2$ I декада = $\lg(f_2/f_1)$ при $f_2/f_1 = 10$	$\lg$ — знак десятичного логарифма f_1, f_2 — частоты $\lg_2$ — знак логарифма при основании 2

Величина		Единица				Примечание
Номер по табл. 1	Наименование	Наименование	Обозначение		Соотношение с единицей СИ или определение	
			русское	международное		
1.1	Длина	ангстрем морская миля	Å м. миля	Å n. mile	10^{-10} м 1 852 м (точно)	Морскую милю допускается применять только в навигации
1.2	Масса	карат центнер	кар ц	ct q	$2 \cdot 10^{-4}$ кг 100 кг	Карат допускается применять только для выражения массы драгоценных камней и жемчуга
3.3	Скорость	узел	уз	kn	0,514 444 м/с	Узел допускается применять только в навигации
3.7	Частота вращения	оборот в секунду оборот в минуту	об/с об/мин	— —	1 с^{-1} $1/60 \text{ с}^{-1} =$ $= 0,016\,666\,67 \text{ с}^{-1}$	Оборот — в значении цикла вращения
4.8.1	Сила	килограмм-сила	кгс	kgf	9,806 65 Н (точно)	
4.8.2	Вес	тонна-сила	тс	tf	9 806,65 Н (точно)	

Величина		Единица				Примечание
Номер по табл. 1	Наименование	Наименование	Обозначение		Соотношение с единицей СИ или определение	
			русское	международное		
4.12.1	Давление	килограмм-сила на квадратный сантиметр миллиметр водяного столба миллиметр ртутного столба бар	кгс/см² мм вод. ст. мм рт. ст. бар	kgf/cm² mm H₂O mm Hg bar	98 066,5 Па (точно) 9,806 65 Па 133,322 Па 10⁵ Па	
4.12.2	Напряжение (механическое)	килограмм-сила на квадратный миллиметр	кгс/мм²	kgf/mm²	9,806 65·10⁶ Па (точно)	
4.15	Мощность	лошадиная сила	л. с.	—	735,499 Вт	
5.14	Удельное электрическое сопротивление	ом-квадратный миллиметр на метр	Ом·мм²/м	Ω·mm²/m	10⁻⁶ Ом·м	

Величина		Единица				Примечание
Номер по табл. 1	Наименование	Наименование	Обозначение		Соотношение с единицей СИ или определение	
			русское	международное		
6.1.1	Количество теплоты	калория (межд.) калория термохимическая	кал	cal	4,186 8 Дж (точно)	
6.1.2	Термодинамический потенциал (внутренняя энергия, энтальпия, изохорно-изотермический потенциал, изобарно-изотермический потенциал)		—	—	4,184 0 Дж	
6.1.3	Теплота фазового превращения					
6.1.4	Теплота химической реакции					
10.3.1	Доза излучения (поглощенная доза излучения)	рад	рад	rad	0,01 Дж/кг	
10.3.2	Эквивалентная доза излучения	бэр	бэр	rem	0,01 Дж/кг	
10.5.1	Мощность дозы излучения (мощность поглощенной дозы излучения)	рад в секунду	рад/с	rad/s	0,01 Вт/кг	
10.5.2	Мощность эквивалентной дозы излучения	бэр в секунду	бэр/с	rem/s	0,01 Вт/кг	

Номер по табл. 1	Величина	Единица				Примечание
		Наименование	Обозначение		Соотношение с единицей СИ или определение	
			русское	международное		
10.7	Экспозиционная доза фотонного излучения (экспозиционная доза гамма- и рентгеновского излучений)	рентген	Р	R	$2,58 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг}$	
10.10	Активность нуклида в радиоактивном источнике (активность изотопа)	кюри	Ки	Сi	$3,700 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$	
—	Логарифмическая величина (логарифм безразмерного отношения физической величины к одноименной физической величине, принимаемой за исходную); уровень звукового давления, усиление, ослабление и т. п.	непер	Нп	Np	$1 \text{ Нп} = 0,868 \lg \frac{F_2}{F_1} = \ln \frac{F_2}{F_1}$ при $P_2/P_1 = e$ $1 \text{ Нп} = 0,5 \lg \frac{P_2}{P_1}$ при $P_2/P_1 = e^2$	F_1, F_2 — одноименные «силовые» величины (напряжения, силы тока, давления, напряженности поля и т. п.); P_1, P_2 — одноименные энергетические величины (мощности, энергии, плотности энергии и т. п.); lg — знак натурального логарифма; e — основание натуральных логарифмов

Единицы системы СГС, имеющие собственные наименования, и другие важнейшие единицы, применяемые в физике и астрономии

Величина		Единица				Примечание
Номер по табл. 1	Наименование	Наименование	Обозначение		Соотношение с единицей СИ	
			русское	международное		
1.1	Длина	икс—единица астрономическая единица световой год парсек	икс—ед. а. е. св. год пк	X — l. у. рс	$1,002\,06 \cdot 10^{-13}$ м $1,496\,00 \cdot 10^{11}$ м $9,460\,5 \cdot 10^{16}$ м $3,085\,7 \cdot 10^{16}$ м	
1.2	Масса	атомная единица массы	а. е. м.	u	$1,660\,53 \cdot 10^{-27}$ кг	
3.1	Площадь	барн	б	b	10^{-28} м ²	
4.8.1 4.8.2	Сила Вес	дина	дин	dyn	10^{-5} Н	
4.14.1 4.14.2	Работа Энергия	эрг электронвольт	эрг эВ	erg eV	10^{-7} Дж $1,602\,19 \cdot 10^{-19}$ Дж	
4.16	Динамическая вязкость	пуаз	П	P	0,1 Па·с	
4.17	Кинематическая вяз- кость	стокс	Ст	St	10^{-4} м ² /с	
5.17	Магнитный поток	максвелл	Мкс	Mx	10^{-8} Вб	

Величина		Единица				Примечание
Номер по табл. 1	Наименование	Наименование	Обозначение		Соотношение с единицей СИ	
			русское	международное		
5.18	Магнитная индукция	гаусс	Гс	Gs	10^{-4} Т	
5.19.1 5.19.2	Магнитодвижущая сила Разность магнитных потенциалов	гильберт	Гб	Gb	$10/(4\pi)$ А = 0,795 775 А	
5.20	Напряженность магнитного поля	эрстед	Э	Oe	$10^3/(4\pi)$ А/м = 79,577 5 А/м	
10.10	Активность нуклида в радиоактивном источнике (активность изотопа)	распад в секунду	расп./с	—	1 с^{-1}	
10.11	Поток ионизирующих частиц или фотонов	частица в секунду	част./с	—	1 с^{-1}	
10.12	Плотность потока ионизирующих частиц или фотонов	частица в секунду на квадратный метр	част./ (с·м²)	—	$1 \text{ с}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$	

Дифференциальная функция нормированного нормального распределения

$$p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	t
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973	0,0
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918	0,1
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825	0,2
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697	0,3
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538	0,4
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352	0,5
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144	0,6
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920	0,7
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685	0,8
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444	0,9
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203	1,0
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965	1,1
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736	1,2
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518	1,3
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315	1,4
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127	1,5
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957	1,6
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804	1,7
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669	1,8
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551	1,9

t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	t
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449	2,0
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0388	0379	0371	0363	2,1
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290	2,2
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229	2,3
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180	2,4
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139	2,5
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107	2,6
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081	2,7
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061	2,8
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046	2,9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034	3,0
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025	3,1
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018	3,2
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013	3,3
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009	3,4
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006	3,5
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004	3,6
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	3,7
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002	3,8
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001	3,9

Интегральная функция нормированного нормального распределения

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

z	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
-3,5	0,00017	0,00017	0,00018	0,00019	0,00019	0,00020	0,00021	0,00022	0,00022	0,00023
-3,4	0,00024	0,00025	0,00026	0,00027	0,00028	0,00029	0,00030	0,00031	0,00031	0,00034
-3,3	0,00035	0,00036	0,00038	0,00039	0,00040	0,00042	0,00043	0,00045	0,00047	0,00048
-3,2	0,00050	0,00052	0,00054	0,00056	0,00058	0,00060	0,00062	0,00064	0,00066	0,00069
-3,1	0,00071	0,00074	0,00076	0,00079	0,00082	0,00085	0,00087	0,00090	0,00094	0,00097
-3,0	0,00100	0,00104	0,00107	0,00111	0,00114	0,00118	0,00122	0,00126	0,00131	0,00135
-2,9	0,00119	0,00124	0,00127	0,00131	0,00134	0,00138	0,00142	0,00146	0,00151	0,00155
-2,8	0,00143	0,00148	0,00152	0,00156	0,00160	0,00164	0,00168	0,00172	0,00176	0,00180
-2,7	0,00170	0,00175	0,00180	0,00184	0,00188	0,00192	0,00196	0,00200	0,00204	0,00208
-2,6	0,00200	0,00205	0,00210	0,00214	0,00218	0,00222	0,00226	0,00230	0,00234	0,00238
-2,5	0,00233	0,00238	0,00243	0,00247	0,00251	0,00255	0,00259	0,00263	0,00267	0,00271
-2,4	0,00270	0,00275	0,00280	0,00284	0,00288	0,00292	0,00296	0,00300	0,00304	0,00308
-2,3	0,00309	0,00314	0,00318	0,00322	0,00326	0,00330	0,00334	0,00338	0,00342	0,00346
-2,2	0,00350	0,00354	0,00358	0,00362	0,00366	0,00370	0,00374	0,00378	0,00382	0,00386
-2,1	0,00390	0,00394	0,00398	0,00402	0,00406	0,00410	0,00414	0,00418	0,00422	0,00426
-2,0	0,00418	0,00422	0,00426	0,00430	0,00434	0,00438	0,00442	0,00446	0,00450	0,00454
-1,9	0,00455	0,00459	0,00463	0,00467	0,00471	0,00475	0,00479	0,00483	0,00487	0,00491
-1,8	0,00494	0,00498	0,00502	0,00506	0,00510	0,00514	0,00518	0,00522	0,00526	0,00530
-1,7	0,00535	0,00539	0,00543	0,00547	0,00551	0,00555	0,00559	0,00563	0,00567	0,00571
-1,6	0,00575	0,00579	0,00583	0,00587	0,00591	0,00595	0,00599	0,00603	0,00607	0,00611
-1,5	0,00615	0,00619	0,00623	0,00627	0,00631	0,00635	0,00639	0,00643	0,00647	0,00651
-1,4	0,00655	0,00659	0,00663	0,00667	0,00671	0,00675	0,00679	0,00683	0,00687	0,00691
-1,3	0,00695	0,00699	0,00703	0,00707	0,00711	0,00715	0,00719	0,00723	0,00727	0,00731
-1,2	0,00735	0,00739	0,00743	0,00747	0,00751	0,00755	0,00759	0,00763	0,00767	0,00771
-1,1	0,00775	0,00779	0,00783	0,00787	0,00791	0,00795	0,00799	0,00803	0,00807	0,00811

z	0,00	0,08	0,07	0,06	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,00
-1,0	0,1379	0,1401	0,1423	0,1446	0,1469	0,1492	0,1515	0,1539	0,1562	0,1587
-0,9	0,1611	0,1635	0,1660	0,1685	0,1711	0,1736	0,1762	0,1788	0,1814	0,1841
-0,8	0,1867	0,1894	0,1922	0,1949	0,1977	0,2005	0,2033	0,2061	0,2090	0,2119
-0,7	0,2148	0,2177	0,2207	0,2236	0,2266	0,2297	0,2327	0,2358	0,2389	0,2420
-0,6	0,2451	0,2483	0,2514	0,2546	0,2578	0,2611	0,2643	0,2676	0,2709	0,2743
-0,5	0,2776	0,2810	0,2843	0,2877	0,2912	0,2946	0,2981	0,3015	0,3050	0,3085
-0,4	0,3121	0,3156	0,3192	0,3228	0,3264	0,3300	0,3336	0,3372	0,3409	0,3446
-0,3	0,3483	0,3520	0,3557	0,3594	0,3632	0,3669	0,3707	0,3745	0,3783	0,3821
-0,2	0,3859	0,3897	0,3936	0,3974	0,4013	0,4052	0,4090	0,4129	0,4168	0,4207
-0,1	0,4247	0,4286	0,4325	0,4364	0,4403	0,4443	0,4483	0,4522	0,4562	0,4602
-0,0	0,4641	0,4681	0,4721	0,4761	0,4801	0,4840	0,4880	0,4920	0,4960	0,5000

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
+0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
+0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
+0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
+0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
+0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
+0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
+0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
+0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
+0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
+0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
+1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
+1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
+1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
+1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
+1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
+1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
+1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
+1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
+1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
+1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
+2,0	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
+2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
+2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
+2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
+2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
+2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
+2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
+2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
+2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
+2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
+3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
+3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99915	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
+3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
+3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
+3,4	0,99966	0,99967	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
+3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983

Интегральная функция нормированного нормального распределения.

Значения z для различных $\Phi(z)$

$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z
0,0005	-3,2905	0,25	-0,6745	0,50	+0,0000	0,80	+0,8416
0,005	-2,575	0,30	-0,5244	0,55	+0,1257	0,85	+1,0364
0,01	-2,3267	0,35	-0,3853	0,60	+0,2533	0,90	+1,2816
0,05	-1,6449	0,40	-0,2533	0,65	+0,3853	0,95	+1,6449
0,10	-1,2816	0,45	-0,1257	0,70	+0,5244	0,99	+2,3267
0,15	-1,0364	0,50	-0,0000	0,75	+0,6745	0,995	+2,575
0,20	-0,8416					0,9995	+3,2905

Распределение Стьюдента $P\{|t| < t_p\} = 2 \int_0^P S(t; k) dt$

k	P										
	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,705	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,282	2,821
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764
11	0,128	0,259	0,395	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,865	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,863	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,861	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457
∞	0,12556	0,25335	0,38532	0,52440	0,67449	0,84162	1,03643	1,28155	1,64485	1,95996	2,32634
											63,657
											9,925
											5,841
											4,604
											3,707
											3,499
											3,355
											3,250
											3,106
											3,055
											3,012
											2,977
											2,947
											2,921
											2,898
											2,878
											2,861
											2,845
											2,831
											2,819
											2,807
											2,787
											2,779
											2,771
											2,763
											2,756
											2,750
											2,57582

Распределение Стьюдента.

Значения $P\{|t| < t_P\} = 2 \int_0^{t_P} S(t; k) dt$ для различных t_P

k	t_P					k	t_P				
	2,0	2,5	3,0	3,5			2,0	2,5	3,0	3,5	
1	0,7048	0,7578	0,7952	0,8228		12	0,9314	0,9720	0,9890	0,9956	
2	0,8164	0,8764	0,9046	0,9276		13	0,9392	0,9737	0,9898	0,9960	
3	0,8606	0,9122	0,9424	0,9606		14	0,9348	0,9740	0,9904	0,9964	
4	0,8838	0,9332	0,9600	0,9752		15	0,9360	0,9754	0,9910	0,9968	
5	0,8980	0,9454	0,9700	0,9828		16	0,9372	0,9764	0,9916	0,9970	
6	0,9076	0,9534	0,9760	0,9872		17	0,9382	0,9770	0,9920	0,9972	
7	0,9144	0,9590	0,9800	0,9900		18	0,9392	0,9776	0,9924	0,9974	
8	0,9194	0,9630	0,9830	0,9920		19	0,9400	0,9782	0,9926	0,9976	
9	0,9234	0,9662	0,9850	0,9932		20	0,9408	0,9788	0,9930	0,9978	
10	0,9266	0,9686	0,9866	0,9942		∞	0,9545	0,9876	0,9973	0,9995	
11	0,9292	0,9704	0,9880	0,9950							

Интегральная функция χ^2 — распределения Пирсона.
Значения $\chi^2_{k,P}$ для различных k и P

k	P												
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
1	0,000157	0,000328	0,00393	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141

k	P													
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99	
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	
20	8,260	9,237	10,851	12,444	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314	
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,710	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	

Значения χ^2 при различных числах измерения n

n	$q = 1 - \alpha$				n	$q = 1 - \alpha$			
	0,10	0,05	0,025	0,01		0,10	0,05	0,025	0,01
3	1,406	1,412	1,414	1,414	14	2,297	2,461	2,602	2,759
4	1,645	1,689	1,710	1,723	15	2,326	2,493	2,638	2,808
5	1,731	1,869	1,917	1,955	16	2,354	2,523	2,670	2,837
6	1,894	1,996	2,067	2,130	17	2,380	2,551	2,701	2,871
7	1,974	2,093	2,182	2,265	18	2,404	2,557	2,728	2,903
8	2,041	2,172	2,273	2,374	19	2,426	2,600	2,754	2,932
9	2,097	2,237	2,349	2,464	20	2,447	2,623	2,778	2,959
10	2,146	2,294	2,414	2,540	21	2,467	2,644	2,801	2,984
11	2,190	2,383	2,470	2,606	22	2,486	2,664	2,823	3,008
12	2,229	2,387	2,519	2,663	23	2,504	2,683	2,843	3,030
13	2,264	2,426	2,562	2,714	24	2,520	2,701	2,862	3,051
					25	2,537	2,717	2,880	3,071

F-распределение
Значения $F_{k_1 k_2}$ для различных

k_2	α	k_1											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,75	5,83	7,50	8,20	8,58	8,82	8,98	9,10	9,19	9,26	9,32	9,36	9,41
	0,90	39,9	49,5	53,6	55,8	57,2	58,2	58,9	59,4	59,9	60,2	60,5	60,7
	0,95	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	0,75	2,57	3,00	3,15	3,23	3,28	3,31	3,34	3,35	3,37	3,38	3,39	3,39
	0,90	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,40	9,41
	0,95	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
	0,99	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4
3	0,75	2,02	2,28	2,36	2,39	2,41	2,42	2,43	2,44	2,44	2,44	2,45	2,45
	0,90	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,22
	0,95	10,1	9,55	9,28	9,28	9,10	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74
	0,99	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	27,1	27,1
4	0,75	1,81	2,00	2,05	2,06	2,07	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08
	0,90	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,91	3,90
	0,95	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91
	0,99	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,4	14,4
5	0,75	1,69	1,85	1,88	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89
	0,90	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,28	3,27
	0,95	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,71	4,68
	0,99	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,96	9,89
6	0,75	1,62	1,76	1,78	1,79	1,79	1,78	1,78	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77
	0,90	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,92	2,90
	0,95	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
	0,99	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	0,75	1,57	1,70	1,72	1,72	1,71	1,71	1,70	1,70	1,69	1,69	1,69	1,68
	0,90	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,68	2,67
	0,95	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57
	0,99	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47
8	0,75	1,54	1,66	1,67	1,66	1,66	1,65	1,64	1,64	1,64	1,63	1,63	1,62
	0,90	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,52	2,50
	0,95	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28
	0,99	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67
9	0,75	1,51	1,62	1,63	1,63	1,62	1,61	1,60	1,60	1,59	1,59	1,58	1,58
	0,90	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,40	2,38
	0,95	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07
	0,99	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	0,75	1,49	1,60	1,60	1,59	1,59	1,58	1,57	1,56	1,56	1,55	1,55	1,54
	0,90	3,28	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,30	2,28
	0,95	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91
	0,99	10,0	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71

Таблица 12

Фишера.

доверительных вероятностей α

15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	α	β_2
9,49 61,2 246	9,58 61,7 248	9,63 62,0 249	9,67 62,3 250	9,71 62,5 251	9,74 62,7 252	9,76 62,8 252	9,78 63,0 253	9,80 63,1 253	9,82 63,2 254	9,84 63,3 254	9,85 63,3 254	0,75 0,90 0,95	1
3,41 9,42 19,4 99,4	3,43 9,44 19,4 99,4	3,43 9,45 19,5 99,5	3,44 9,46 19,5 99,5	3,45 9,47 19,5 99,5	3,45 9,47 19,5 99,5	3,46 9,47 19,5 99,5	3,47 9,48 19,5 99,5	4,47 9,48 19,5 99,5	3,48 9,49 19,5 99,5	3,48 9,49 19,5 99,5	3,48 9,49 19,5 99,5	0,75 0,90 0,95 0,99	2
2,46 5,20 8,70 26,9	2,46 5,18 8,66 26,7	2,46 5,18 8,64 26,6	2,47 5,17 8,62 26,5	2,47 5,16 8,59 26,4	2,47 5,15 8,58 26,4	2,47 5,15 8,57 26,3	2,47 5,14 8,55 26,2	2,47 5,14 8,55 26,2	2,47 5,14 8,54 26,2	2,47 5,14 8,53 26,1	2,47 5,13 8,53 26,1	0,75 0,90 0,95 0,99	3
2,08 3,87 5,86 14,2	2,08 3,84 5,80 14,0	2,08 3,83 5,77 13,9	2,08 3,82 5,75 13,8	2,08 3,80 5,72 13,7	2,08 3,80 5,70 13,7	2,08 3,79 5,69 13,7	2,08 3,78 5,66 13,6	2,08 3,78 5,66 13,6	2,08 3,77 5,65 13,5	2,08 3,76 5,64 13,5	2,08 3,76 5,63 13,5	0,75 0,90 0,95 0,99	4
1,89 3,24 4,62 9,72	1,88 3,21 4,56 9,55	1,88 3,19 4,53 9,47	1,88 3,17 4,50 9,38	1,88 3,16 4,46 9,29	1,88 3,15 4,44 9,24	1,87 3,13 4,43 9,20	1,87 3,13 4,41 9,13	1,87 3,12 4,40 9,11	1,87 3,12 4,39 9,08	1,87 3,11 4,37 9,04	1,87 3,10 4,36 9,02	0,75 0,90 0,95 0,99	5
1,76 2,87 3,94 7,56	1,76 2,84 3,87 7,40	1,75 2,82 3,84 7,31	1,75 2,80 3,81 7,23	1,75 2,78 3,77 7,14	1,75 2,77 3,75 7,09	1,74 2,76 3,74 7,06	1,74 2,75 3,71 6,99	1,74 2,74 3,70 6,97	1,74 2,73 3,69 6,93	1,74 2,73 3,68 6,90	1,74 2,72 3,67 6,88	0,75 0,90 0,95 0,99	6
1,68 2,63 3,51 6,31	1,67 2,59 3,44 6,16	1,67 2,58 3,41 6,07	1,66 2,56 3,38 5,99	1,66 2,54 3,34 5,91	1,65 2,52 3,32 5,86	1,65 2,51 3,30 5,82	1,65 2,50 3,27 5,75	1,65 2,49 3,27 5,74	1,65 2,48 3,25 5,70	1,65 2,48 3,24 5,67	1,65 2,47 3,23 5,65	0,75 0,90 0,95 0,99	7
1,62 2,46 3,22 5,52	1,61 2,42 3,15 5,36	1,60 2,40 3,12 5,28	1,60 2,38 3,08 5,20	1,59 2,36 3,04 5,12	1,59 2,35 3,02 5,07	1,59 2,34 3,01 5,03	1,58 2,32 2,97 4,96	1,58 2,32 2,97 4,95	1,58 2,31 2,95 4,91	1,58 2,30 2,94 4,88	1,58 2,29 2,93 4,86	0,75 0,90 0,95 0,99	8
1,57 2,34 3,01 4,96	1,56 2,30 2,94 4,81	1,56 2,28 2,90 4,73	1,55 2,25 2,86 4,65	1,55 2,23 2,83 4,57	1,54 2,22 2,80 4,52	1,54 2,21 2,79 4,48	1,53 2,19 2,76 4,42	1,53 2,18 2,75 4,40	1,53 2,17 2,73 4,36	1,53 2,17 2,72 4,33	1,53 2,16 2,71 4,31	0,75 0,90 0,95 0,99	9
1,53 2,24 2,85 4,56	1,52 2,20 2,77 4,41	1,52 2,18 2,74 4,33	1,51 2,16 2,70 4,25	1,51 2,13 2,66 4,17	1,50 2,12 2,64 4,12	1,50 2,11 2,62 4,08	1,49 2,09 2,59 4,01	1,49 2,08 2,58 4,00	1,49 2,07 2,56 3,96	1,48 2,06 2,55 3,93	1,48 2,06 2,54 3,91	0,75 0,90 0,95 0,99	10

k_2	α	k_1											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
11	0,75	1,47	1,58	1,58	1,57	1,56	1,55	1,54	1,53	1,53	1,52	1,52	1,51
	0,90	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,23	2,21
	0,95	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79
	0,99	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	0,75	1,46	1,56	1,56	1,55	1,54	1,53	1,52	1,51	1,51	1,50	1,50	1,49
	0,90	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,17	2,15
	0,95	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69
	0,99	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	0,75	1,45	1,54	1,54	1,53	1,52	1,51	1,50	1,49	1,49	1,48	1,47	1,47
	0,90	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,14	2,12	2,10
	0,95	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60
	0,99	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	0,75	1,44	1,53	1,53	1,52	1,51	1,50	1,48	1,48	1,47	1,46	1,46	1,45
	0,90	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,10	2,08	2,05
	0,95	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53
	0,99	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	0,75	1,43	1,52	1,52	1,51	1,49	1,48	1,47	1,46	1,46	1,45	1,44	1,44
	0,90	2,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02
	0,95	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48
	0,99	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	0,75	1,42	1,51	1,51	1,50	1,48	1,48	1,47	1,46	1,45	1,45	1,44	1,44
	0,90	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	2,01	1,99
	0,95	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42
	0,99	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55
17	0,75	1,42	1,51	1,50	1,49	1,47	1,46	1,45	1,44	1,43	1,43	1,42	1,41
	0,90	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,98	1,96
	0,95	3,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38
	0,99	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46
18	0,75	1,41	1,50	1,49	1,48	1,46	1,45	1,44	1,43	1,42	1,42	1,41	1,40
	0,90	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,96	1,93
	0,95	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34
	0,99	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37
19	0,75	1,41	1,49	1,49	1,47	1,46	1,44	1,43	1,42	1,41	1,41	1,40	1,40
	0,90	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,94	1,91
	0,95	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31
	0,99	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,53	3,43	3,36	3,30
20	0,75	1,40	1,49	1,48	1,46	1,45	1,44	1,42	1,42	1,41	1,40	1,39	1,39
	0,90	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,92	1,89
	0,95	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28
	0,99	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23
22	0,75	1,40	1,48	1,47	1,45	1,44	1,42	1,41	1,40	1,39	1,39	1,38	1,37
	0,90	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,88	1,86
	0,95	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23
	0,99	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26	3,18	3,12

15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	α	R_n
1,50	1,49	1,49	1,48	1,47	1,47	1,47	1,46	1,46	1,46	1,45	1,45	0,75	11
2,17	2,12	2,10	2,08	2,05	2,04	2,03	2,00	2,00	1,99	1,98	1,97	0,90	
2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,51	2,49	2,46	2,45	2,43	2,42	2,40	0,95	
4,25	4,10	4,02	3,94	2,86	3,81	3,78	3,71	3,69	3,66	3,62	3,60	0,99	
1,48	1,47	1,46	1,45	1,45	1,44	1,44	1,43	1,43	1,43	1,42	1,42	0,75	12
2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,97	1,96	1,94	1,93	1,92	1,91	1,90	0,90	
2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,40	2,38	2,35	2,34	2,32	2,31	2,30	0,95	
4,01	3,86	3,78	3,70	3,62	3,57	3,54	3,47	3,45	3,41	3,38	3,36	0,99	
1,46	1,45	1,44	1,43	1,42	1,42	1,42	1,41	1,41	1,40	1,40	1,40	0,75	13
2,05	2,01	1,98	1,96	1,93	1,92	1,90	1,88	1,88	1,86	1,85	1,85	0,90	
2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,31	2,30	2,26	2,25	2,23	2,22	2,21	0,95	
3,82	3,66	3,59	3,51	3,43	3,38	3,34	3,27	3,25	3,22	3,19	3,17	0,99	
1,44	1,43	1,42	1,41	1,41	1,40	1,40	1,39	1,39	1,39	1,38	1,38	0,75	14
2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,87	1,86	1,83	1,82	1,80	1,80	1,80	0,90	
2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,24	2,22	2,19	2,18	2,16	2,14	2,13	0,95	
3,66	3,51	3,43	2,35	3,27	3,22	3,18	3,11	3,09	3,06	3,03	3,00	0,99	
1,43	1,41	1,41	1,40	1,39	1,39	1,38	1,38	1,37	1,37	1,36	1,36	0,75	15
1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,83	1,82	1,79	1,79	1,77	1,76	1,76	0,90	
2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,18	2,16	2,12	2,11	2,10	2,08	2,07	0,95	
3,52	3,37	3,29	3,21	3,13	3,08	3,05	2,98	2,96	2,92	2,89	2,87	0,99	
1,41	1,40	1,39	1,38	1,37	1,37	1,36	1,36	1,35	1,35	1,34	1,34	0,75	16
1,94	1,89	1,87	1,84	1,81	1,79	1,78	1,76	1,75	1,74	1,73	1,72	0,90	
2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,12	2,11	2,07	2,06	2,02	2,02	2,01	0,95	
3,41	3,26	3,18	3,10	3,02	2,97	2,93	2,86	2,84	2,81	2,78	2,75	0,99	
1,40	1,39	1,38	1,37	1,36	1,35	1,35	1,34	1,34	1,34	1,33	1,33	0,75	17
1,91	1,86	1,84	1,81	1,78	1,76	1,75	1,73	1,72	1,71	1,69	1,69	0,90	
2,31	1,23	2,19	2,15	2,10	2,08	2,06	2,02	2,01	1,99	1,97	1,96	0,95	
3,31	3,16	3,08	3,00	2,92	2,87	2,83	2,76	2,75	2,71	2,68	2,65	0,99	
1,39	1,38	1,37	1,36	1,35	1,34	1,34	1,33	1,33	1,32	1,32	1,32	0,75	18
1,89	1,84	1,81	1,78	1,75	1,74	1,72	1,70	1,69	1,68	1,67	1,66	0,90	
2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,04	2,02	1,98	1,97	1,95	1,93	1,92	0,95	
3,23	3,08	3,00	2,92	2,84	2,78	2,75	2,68	2,66	2,62	3,59	2,57	0,99	
1,38	1,37	1,36	1,35	1,34	1,33	1,33	1,32	1,32	1,31	1,31	1,30	0,75	19
1,86	1,81	1,79	1,76	1,73	1,71	1,70	1,67	1,67	1,65	1,64	1,63	0,90	
2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	2,00	1,98	1,94	1,93	1,91	1,89	1,88	0,95	
3,15	3,00	2,92	2,84	2,76	2,71	2,67	2,60	2,58	2,55	2,51	2,49	0,99	
1,37	1,36	1,35	1,34	1,33	1,33	1,32	1,31	1,31	1,30	1,30	1,29	0,75	20
1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,69	1,68	1,65	1,64	1,63	1,62	1,61	0,90	
2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,97	1,95	1,91	1,90	1,88	1,86	1,84	0,95	
3,09	2,94	2,86	2,78	2,69	2,64	2,61	2,54	2,52	2,48	2,44	2,42	0,99	
1,36	1,34	1,33	1,32	1,31	1,31	1,30	1,30	1,30	1,29	1,29	1,28	0,75	22
1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,65	1,64	1,61	1,60	1,59	1,58	1,57	0,90	
2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,91	1,89	1,85	1,84	1,82	1,80	1,78	0,95	
2,98	2,83	2,75	2,67	2,58	2,53	2,50	2,42	2,40	2,36	2,33	2,31	0,99	

k_2	α	k_1											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
24	0,75	1,39	1,47	1,46	1,44	1,43	1,41	1,40	1,39	1,38	1,38	1,37	1,36
	0,90	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,85	1,83
	0,95	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,21	2,18
	0,99	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17	3,09	3,03
26	0,75	1,38	1,46	1,45	1,44	1,42	1,41	1,40	1,39	1,37	1,37	1,36	1,35
	0,90	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,84	1,81
	0,95	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15
	0,99	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09	3,02	2,96
28	0,75	1,38	1,46	1,45	1,43	1,41	1,40	1,39	1,38	1,37	1,36	1,35	1,34
	0,90	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,81	1,79
	0,95	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12
	0,99	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03	2,96	2,90
30	0,75	1,38	1,45	1,44	1,42	1,41	1,39	1,38	1,37	1,36	1,35	1,35	1,34
	0,90	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,79	1,77
	0,95	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09
	0,99	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84
40	0,75	1,36	1,44	1,42	1,40	1,39	1,37	1,36	1,35	1,34	1,33	1,32	1,31
	0,90	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,73	1,71
	0,95	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00
	0,99	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66
60	0,75	1,35	1,42	1,41	1,38	1,37	1,35	1,33	1,32	1,31	1,30	1,29	1,29
	0,90	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,68	1,66
	0,95	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92
	0,99	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50
120	0,75	1,34	1,40	1,39	1,37	1,35	1,33	1,31	1,30	1,29	1,28	1,27	1,26
	0,90	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,62	1,60
	0,95	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,87	1,83
	0,99	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,56	2,47	2,40	2,34
200	0,75	1,33	1,39	1,38	1,36	1,34	1,32	1,31	1,29	1,28	1,27	1,26	1,25
	0,90	2,73	2,33	2,11	1,97	1,88	1,80	1,75	1,70	1,66	1,63	1,60	1,57
	0,95	3,89	3,04	2,65	2,42	2,26	2,14	2,06	1,98	1,93	1,88	1,84	1,80
	0,99	6,76	4,71	3,88	3,41	3,11	2,89	2,73	2,60	2,50	2,41	2,34	2,27
∞	0,75	1,32	1,39	1,37	1,35	1,33	1,31	1,29	1,28	1,27	1,25	1,24	1,24
	0,90	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,57	1,55
	0,95	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75
	0,99	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,25	2,18

15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞	α	k_2
1,35	1,33	1,32	1,31	1,30	1,29	1,29	1,28	1,28	1,27	1,27	1,26	0,75	24
1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,62	1,61	1,58	1,57	1,56	1,54	1,53	0,90	
2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,86	1,84	1,80	1,79	1,77	1,75	1,73	0,95	
2,89	2,74	2,66	2,58	2,49	2,44	2,40	2,33	2,31	2,27	2,24	2,21	0,99	
1,34	1,32	1,31	1,30	1,29	1,28	1,28	1,26	1,26	1,26	1,25	1,25	0,75	26
1,76	1,71	1,68	1,65	1,61	1,59	1,58	1,55	1,54	1,53	1,51	1,50	0,90	
2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,82	1,80	1,76	1,75	1,73	1,71	1,69	0,95	
2,81	2,66	2,58	2,50	2,42	2,36	2,33	2,25	2,23	2,19	2,16	2,13	0,99	
1,33	1,31	1,30	1,29	1,28	1,27	1,27	1,26	1,25	1,25	1,24	1,24	0,75	28
1,74	1,69	1,66	1,63	1,59	1,57	1,56	1,53	1,52	1,50	1,49	1,48	0,90	
2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,79	1,77	1,73	1,71	1,69	1,67	1,65	0,95	
2,75	2,60	2,52	2,44	2,35	2,30	2,26	2,19	2,17	2,13	2,09	2,06	0,99	
1,32	1,30	1,29	1,28	1,27	1,26	1,26	1,25	1,24	1,24	1,23	1,23	0,75	30
1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,55	1,54	1,51	1,50	1,48	1,47	1,46	0,90	
2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,76	1,74	1,70	1,68	1,66	1,64	1,62	0,95	
2,70	2,55	2,47	2,39	2,30	2,25	2,21	2,13	2,11	2,07	2,03	2,01	0,99	
1,30	1,28	1,26	1,25	1,24	1,23	1,22	1,21	1,21	1,20	1,19	1,19	0,75	40
1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,48	1,47	1,43	1,42	1,41	1,39	1,38	0,90	
1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,64	1,59	1,58	1,55	1,53	1,51	0,95	
2,52	2,37	2,29	2,20	2,11	2,06	2,02	1,94	1,92	1,87	1,83	1,80	0,99	
1,27	1,25	1,24	1,22	1,21	1,20	1,19	1,17	1,17	1,16	1,15	1,15	0,75	60
1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,41	1,40	1,36	1,35	1,33	1,31	1,29	0,90	
1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,56	1,53	1,48	1,47	1,44	1,41	1,39	0,95	
2,35	2,20	2,12	2,03	1,94	1,88	1,84	1,75	1,73	1,68	1,63	1,60	0,99	
1,24	1,22	1,21	1,19	1,18	1,17	1,16	1,14	1,13	1,12	1,11	1,10	0,75	120
1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,34	1,32	1,27	1,26	1,24	1,21	1,19	0,90	
1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,46	1,43	1,37	1,35	1,32	1,28	1,25	0,95	
2,19	2,03	1,95	1,86	1,76	1,70	1,66	1,56	1,53	1,48	1,42	1,38	0,99	
1,23	1,21	1,20	1,18	1,16	1,14	1,12	1,11	1,10	1,09	1,08	1,06	0,75	200
1,52	1,46	1,42	1,38	1,34	1,31	1,28	1,24	1,22	1,20	1,17	1,14	0,90	
1,72	1,62	1,57	1,52	1,46	1,41	1,39	1,32	1,29	1,26	1,22	1,19	0,95	
2,13	1,97	1,89	1,79	1,69	1,63	1,58	1,48	1,44	1,39	1,33	1,28	0,99	
1,22	1,19	1,18	1,16	1,14	1,13	1,12	1,09	1,08	1,07	1,04	1,00	0,75	
1,49	1,42	1,38	1,34	1,30	1,26	1,24	1,18	1,17	1,13	1,08	1,00	0,90	
1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,35	1,32	1,24	1,22	1,17	1,11	1,00	0,95	
2,04	1,88	1,79	1,70	1,59	1,52	1,47	1,36	1,32	1,25	1,15	1,00	0,99	

1. Тюрин Н. И. Введение в метрологию. М., Изд-во стандартов, 1973.
2. Менделеев-метролог. Научн. ред. В. В. Бойцов. М., Изд-во стандартов, 1969.
3. Маликов М. Ф. Основы метрологии. М., Изд-во Коммерприбор, 1949.
4. Тиходеев П. М. Очерки об исходных измерениях. М.—Л., Машгиз, 1954.
5. Всесоюзный научно-исследовательский институт метрологии им. Д. И. Менделеева. Научн. ред. В. О. Арутюнов. Л., «Энергия», 1967.
6. Широков К. П. Общие вопросы метрологии. М., «Машиностроение», 1967.
7. Коротков В. П., Тайц Б. А. Основы метрологии и точности механизмов приборов. М., Машгиз, 1961.
8. Бурдун Г. Д. Единицы физических величин. М., Изд-во стандартов, 1967.
9. Бурдун Г. Д., Калашников Н. В., Стоцкий Л. Р. Международная система единиц. М., «Высшая школа», 1964.
10. Поверочные схемы. Л., Изд. ВНИИМ им. Д. И. Менделеева, 1964.
11. Яковлев К. П. Математическая обработка результатов измерений. М., Гостехтеориздат, 1953.
12. Долгинский Е. Ф. Обработка результатов измерений. Изд. второе. М., Изд-во стандартов, 1973.
13. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1962.
14. Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике. М., Гостехтеориздат, 1955.
15. Уилкс С. Математическая статистика. М., «Наука», 1967.
16. Худсон Д. Статистика для физиков. М., «Мир», 1967.
17. Новицкий П. В. Основы информационной теории измерительных устройств. Л., «Энергия», 1968.
18. Карташова А. Н. Достоверность измерений и критерии качества испытаний приборов. М., Изд-во стандартов, 1967.
19. Суппес П., Зинес Дж. Основы теории измерений. В сб.: «Психологические измерения». М., «Мир», 1967.
20. Метрологическая служба СССР. М., Изд-во стандартов, 1968.
21. Бурдун Г. Д. Справочник по Международной системе единиц. М., Изд-во стандартов, 1971.
22. Государственные стандарты СССР на Государственную систему обеспечения единства измерений.
23. Stille U. Rechnen und Messen in der Physik. Braunschweig, 1955.
24. Wallot J. Größengleichungen, Einheiten und Dimensionen, Leipzig, Barth, 1975.
25. Журналы: «Измерительная техника», «Метрология», «Метрология и измерительная техника», «Metrologia».

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава I. Предмет и задачи метрологии	5
§ 1. Метрология — наука об измерениях	5
§ 2. Значение метрологии для научно-технического прогресса и ее роль в народном хозяйстве страны	7
§ 3. Классификация и основные характеристики измерений	8
§ 4. Государственные научные метрологические учреждения СССР	12
§ 5. Международные метрологические организации	13
§ 6. Актуальные проблемы современной метрологии	16
Глава II. Физические величины и их единицы	19
§ 7. Виды физических величин	19
§ 8. Количественное представление величин	21
§ 9. Основные величины и основные единицы. Системы величин и системы единиц	26
§ 10. Механизм образования производных величин и производных единиц. Понятие о размерностях	27
§ 11. Анализ размерностей и когерентные системы единиц	31
§ 12. Системы единиц физических величин	34
§ 13. Внесистемные единицы	40
§ 14. Относительные и логарифмические величины и единицы	40
§ 15. Естественные системы единиц	41
Глава III. Международная система единиц (СИ)	44
§ 16. Установление единой Международной системы единиц	44
§ 17. Основные единицы СИ	46
§ 18. Дополнительные единицы СИ	47
§ 19. Производные единицы СИ для механических величин	48
§ 20. Производные единицы СИ для тепловых величин	55
§ 21. Производные единицы СИ для электрических и магнитных величин	58
§ 22. Производные единицы СИ для акустических величин	68
§ 23. Производные единицы СИ для световых и энергетических величин, характеризующих оптическое излучение	69
§ 24. Производные единицы СИ для величин ионизирующих излучений и молярных величин	72
§ 25. Кратные и дольные единицы	75
§ 26. Применение единиц СИ в машиностроении	76

Глава IV. Эталоны. Эталоны основных единиц Международной системы единиц	80
§ 27. Общие понятия об эталонах. Классификация эталонов	80
§ 28. Эталон единицы длины — метра	83
§ 29. Эталон единицы массы — килограмма	89
§ 30. Эталон единицы времени — секунды	91
§ 31. Эталон единицы силы электрического тока — ампера	95
§ 32. Эталон единицы температуры — кельвина	99
§ 33. Эталон единицы силы света — канделы	103
Глава V. Передача размера единиц от эталонов образцовым и рабочим средствам измерений. Поверочные схемы	106
§ 34. Образцовые средства измерений	106
§ 35. Общие сведения о поверочных схемах	108
§ 36. Поверочные схемы для средств измерений линейных и угловых величин	112
§ 37. Государственная система эталонов и образцовых мер времени и частоты	114
§ 38. Поверочные схемы для средств измерений механических величин	115
§ 39. Поверочные схемы для средств измерений тепловых величин	117
§ 40. Поверочные схемы для средств измерений электрических и магнитных величин	118
§ 41. Поверочные схемы для светоизмерительных ламп, светоизмерительных приборов и сенситометров	122
§ 42. Поверочные схемы для приборов измерения ионизирующих излучений	122
§ 43. Поверочные схемы для приборов других видов измерений	124
§ 44. Способы проверки средств измерений	125
Глава VI. Погрешности измерений. Случайные погрешности измерений	127
§ 45. Погрешности измерений	127
§ 46. Описание случайных погрешностей с помощью функций распределения	131
§ 47. Моменты случайных погрешностей	136
§ 48. Равномерное и нормальное распределение случайных погрешностей	140
§ 49. Точечные оценки истинного значения измеряемой величины и среднего квадратического отклонения на основании ограниченного ряда наблюдений	145
§ 50. Оценка с помощью интервалов	150
§ 51. Проверка нормальности распределения результатов наблюдений	157
§ 52. Обнаружение грубых погрешностей	165
Глава VII. Систематические погрешности	168
§ 53. Классификация систематических погрешностей	168
§ 54. Способы обнаружения систематических погрешностей	171
§ 55. Введение поправок	174
Глава VIII. Математическая обработка исправленных результатов измерений	178
§ 56. Обработка результатов прямых равнорассеянных наблюдений	178
§ 57. Совместная обработка нескольких рядов наблюдений	185
§ 58. Обработка неравнорассеянных рядов наблюдений	191
§ 59. Обработка результатов косвенных измерений	197
§ 60. Критерий ничтожных погрешностей	209
§ 61. Совокупные и совместные измерения	211
Глава IX. Средства измерений. Погрешности средств измерений	221
§ 62. Средства измерений	221
§ 63. Отсчетные устройства средств измерений	228

§ 64. Погрешности средств измерений	230
§ 65. Нормирование погрешностей средств измерений	235
§ 66. Классы точности средств измерений	247
§ 67. Регулировка и градуировка средств измерений	249
§ 68. Калибровка средств измерений	252

Глава X. Методы измерений	256

§ 69. Общие методы измерений	256
§ 70. Интерференционный метод точных измерений линейных величин	260
§ 71. Фотоэлектрический метод измерений	264
§ 72. Методы точного взвешивания	266
§ 73. Измерение скорости вращения	270
§ 74. Электрические методы измерения линейных и механических величин	273
§ 75. Активный контроль в машиностроении	278

Глава XI. Метрологическая служба СССР	281

§ 76. Государственная система обеспечения единства измерений	281
§ 77. Государственные испытания средств измерений	283
§ 78. Поверка, ревизия и экспертиза средств измерений	285
§ 79. Государственная служба времени и частоты СССР	289
§ 80. Государственная служба стандартных справочных данных	290
§ 81. Государственная служба стандартных образцов	292

ПРИЛОЖЕНИЕ:

Таблица 1 — Важнейшие единицы Международной системы СИ	294
Таблица 2 — Единицы, допускаемые к применению наравне с единицами СИ	306
Таблица 3 — Единицы, временно допускаемые к применению	309
Таблица 4 — Единицы системы СГС, имеющие собственные наименования, и другие важнейшие единицы, применяемые в физике и астрономии	313
Таблица 5 — Дифференциальная функция нормированного нормального распределения	315
Таблица 6 — Интегральная функция нормированного нормального распределения	317
Таблица 7 — Интегральная функция нормированного нормального распределения. Значения z для различных $\Phi(z)$	320
Таблица 8 — Распределение Стюдента. $P\{ t < t_p\} = 2 \int_0^{t_p} f(t; k) dt$	321
Таблица 9 — Распределение Стюдента. Значения $P\{ t < t_p\} = 2 \int_0^{t_p} f(t; k) dt$ для различных t_p	322
Таблица 10 — Интегральная функция χ^2 — распределения Пирсона. Значения $\chi^2_{k;P}$ для различных k и P	323
Таблица 11 — Значения v_α при различных числах измерения n	324
Таблица 12 — F -распределение Фишера. Значение $F_{k_1 k_2}$ для различных доверительных вероятностей α	327
Литература	332

Григорий Дмитриевич Бурдун,
Борис Николаевич Марков
ОСНОВЫ МЕТРОЛОГИИ

Редактор *Н. А. Еськова*
Переплет художника
Г. Ф. Семиреченко
Технический редактор
Г. А. Макарова
Корректор *Е. И. Морозова*

Т-03357 Сдано в наб. 30.06.74
Подписано в печать 28.01.75
Формат 60×90^{1/16} Бумага тип. № 2
21,0 н. л. 20,95 уч.-изд. л. Тираж 30 000.
Изд. № 3706/07 Зак. 2790
Цена в переплете 93 коп.

Ордена «Знак Почета» издательство стан-
дартов. Москва, Д-22, Новопресненский
пер., 3

Набрано в типографии изд-ва
«Московская правда»

Отпечатано в Великолукской городской
типографии управления издательств, поли-
графии и книжной торговли Псковского
облисполкома, г. Великие Луки, Полов-
ская, 13