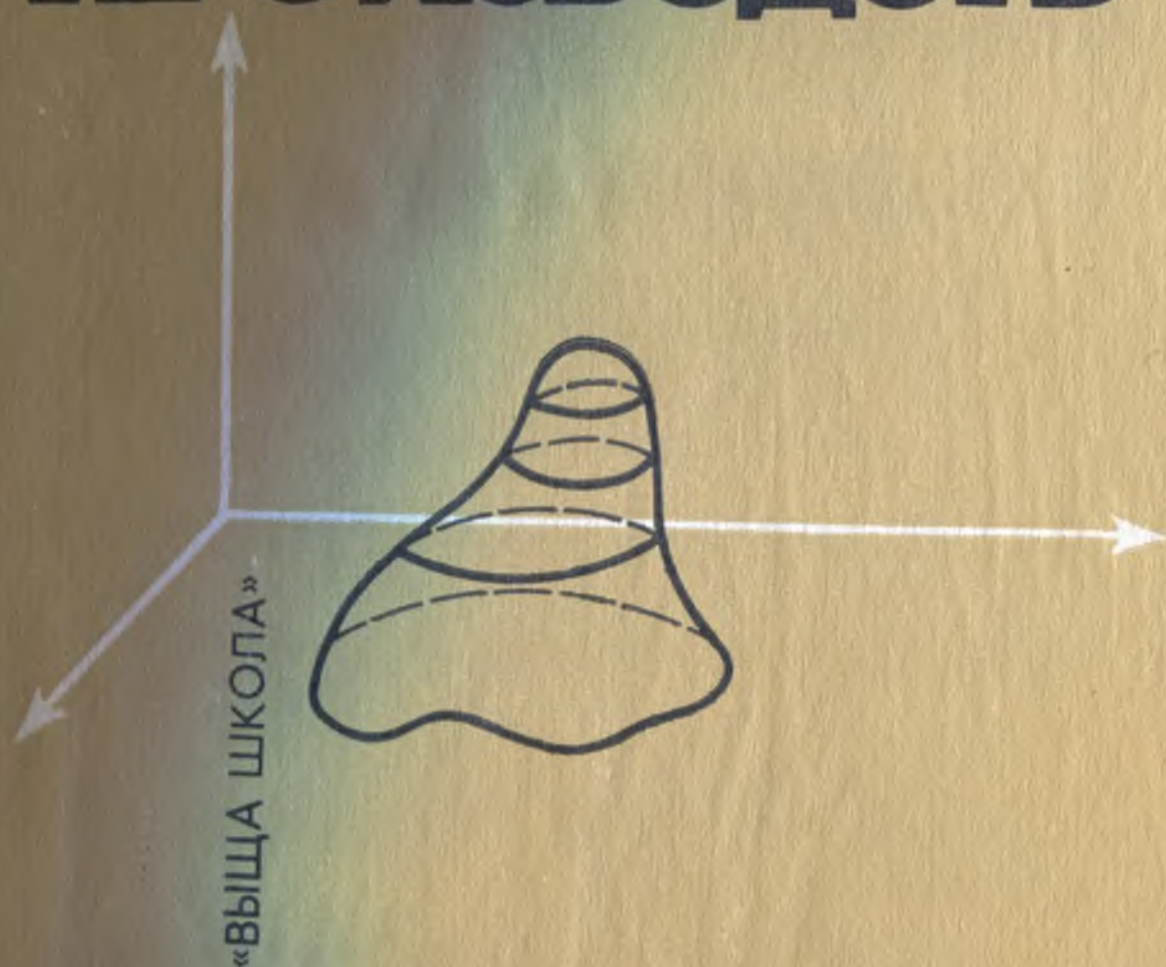


0-71
Н.В.Остапчук

Н.В.Остапчук

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПИЩЕВЫХ ПРОИЗВОДСТВ



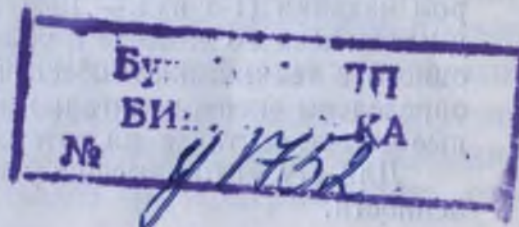
004
0-76

Н.В.Остапчук

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ПИЩЕВЫХ ПРОИЗВОДСТВ

2-е издание,
переработанное и дополненное

*Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования УССР
в качестве учебного пособия
для студентов
высших учебных заведений
пищевой промышленности*



КИЕВ
«ВЫЩА ШКОЛА»
1991

ББК 36.81я73
О-76

УДК 519.711.3:663 (07)

Рецензент кандидат технических наук А. П. Ладанюк (Киевский технологический институт пищевой промышленности)

Редакция литературы по экономике и управлению
Редактор Л. П. Никитина

Остапчук Н. В.

О-76 Основы математического моделирования процессов пищевых производств: Учеб. пособие. — 2-е изд., перераб. и доп. — К.: Выща шк., — 1991. — 367 с.: ил.
ISBN 5-11-002494-4

Изложены принципы составления математических моделей технологических процессов пищевых производств. Приведены примеры использования математических моделей для исследования и совершенствования технологических процессов, машин, аппаратов и их систем управления, а также применения вычислительных машин в качестве моделирующих устройств. Во втором издании (1-е изд. — 1981 г.) отражены вопросы системного и классического подхода к моделированию объектов, информационного и технического обеспечения моделирования, более четко определены экспериментальные, аналитические и комбинированные методы составления математического описания.

Для студентов высших учебных заведений пищевой промышленности.

О 4001010100—017 170—91
М211(04)—91

ББК 36.81я73

ISBN 5-11-002494-4

© Издательское объединение
«Выща школа», 1981
© Н. В. Остапчук, 1991,
с изменениями

ПРЕДИСЛОВИЕ

В Указах Президента СССР «О государственной программе развития высшего образования в СССР» (май 1990 г.) и «О статусе высших учебных заведений» (октябрь 1990 г.) отмечено, что цель осуществляемых преобразований состоит в том, чтобы обеспечить новое качество обучения и воспитания молодежи, подготовки и повышения квалификации кадров, создать тем самым необходимые условия для социального, экономического и духовного прогресса нашего общества. Для этого необходимо обеспечить обучение компьютерами, создать опережающий задел учебных программ, отработать методику преподавания предметов с применением персональных ЭВМ. Успешное решение этих задач может быть осуществлено путем формализации учебных дисциплин, т. е. составления математических описаний, отражающих реальные явления, изучаемые в данной дисциплине. Особое значение имеет применение ЭВМ при подготовке инженеров различных профилей, поскольку проектирование и управление современными машинами, аппаратами, технологическими линиями основано на использовании ЭВМ. С этой целью создаются системы автоматизированного проектирования (САПР), автоматического и автоматизированного управления технологическими процессами (АСУТП, АСУ и др.). Широкое применение находят ЭВМ и в научных исследованиях в самом процессе обучения (обучающие, контролирующие и другие программы). Это, в свою очередь, требует информационного, математического, технического и программного обеспечения системы моделирования.

Информационное обеспечение выполняется в виде общих и объектных банков данных (БД), математическое — в виде соответствующих математических описаний и алгоритмов решения задач, техническое — в виде ЭВМ, пригодных для решения поставленных задач, и программное — в виде программ для решения поставленных задач на языке данной

электронно-вычислительной машины. Программное обеспечение должно увязывать информационные, ресурсные, надежностные и другие характеристики системы моделирования.

Применение ЭВМ состоит из ряда этапов: создание модели объекта, анализ возникших при создании математических моделей задач, выбор алгоритма решения, написание программы, использование системного обеспечения, проведение расчетов на ЭВМ и анализ результатов.

В пищевой технологии применение математических методов значительно расширилось в связи с усложнением процессов и увеличением единичной мощности технологических установок, когда любое технически и экономически обоснованное решение приводит к значительным материальным потерям. Избежать просчетов в современных условиях производства можно, только применяя строгую количественную оценку технологических процессов, основанных на математически описанных закономерностях происходящих явлений.

Поэтому исследование и проектирование технологических процессов, машин и аппаратов пищевых производств в настоящее время невозможны без использования математических методов. Перевод технических задач в математическую форму позволяет не только уточнить существенные стороны технической задачи, но и значительно сократить время и затраты на ее решение.

Глава 1.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МОДЕЛИРОВАНИИ

§ 1. Цели и задачи дисциплины о моделировании

Основной целью дисциплины «Математические модели в расчетах на ЭВМ», «Моделирование на ЭВМ объектов и систем управления отрасли» и др. является обучение студентов самостоятельному составлению математических моделей технологических процессов, аппаратов, комплексов, линий и систем управления пищевыми производствами, необходимых для их проектирования и совершенствования. Дисциплины изучают общие принципы и возможности моделирования явлений природы, использование математических моделей для идентификации объектов при синтезе систем автоматического управления; особенности моделирования объектов пищевой технологии и систем управления технологическими объектами; решения систем уравнений математического описания на АВМ и ЦВМ; методы составления математических описаний технологических процессов и комплексов пищевой технологии, определения параметров математических моделей процессов пищевой технологии; принципы установления соответствия моделей целям и задачам исследования, а также необходимой точности воспроизведения характеристики оригинала.

Студент должен знать общие принципы составления математических моделей; особенности проявления теории отражения при моделировании; принципы и порядок составления плана эксперимента при составлении математических описаний объектов; методы составления математического описания объектов и систем управления; основные понятия и особенности статистического моделирования, принципы составления математических моделей объектов пищевой технологии и систем управления объектами пищевой технологии; принципы реализации математических моделей на аналоговых и цифровых вычислительных машинах (АВМ) и (ЦВМ). Он должен уметь сформулировать задачу на составление математической модели объекта и (или) его системы управления (при известной формулировке цели совершенст-

ования объекта или системы управления); составить план эксперимента для решения поставленной задачи совершенствования технологического процесса (комплекса) или его системы управления; выбирать управляемые параметры и управляющие воздействия изучаемого технологического процесса; установить математические связи между параметрами технологического процесса в статике и динамике; преобразовать полученные исходные уравнения математического описания к виду, пригодному для решения на ЭВМ, либо ЦВМ и поиска оптимального решения (составить целевые функции); составить или использовать готовые алгоритмы и программы для решения задач на аналоговых и цифровых вычислительных машинах; получить необходимые данные и характеристики технологического процесса или системы управления с помощью математических моделей и вычислительных машин.

При выполнении практических и лабораторных работ по моделированию на ЭВМ объектов и систем управления рекомендуется использовать данные лабораторных работ по дисциплинам «Процессы и аппараты пищевых производств», «Технологические процессы и аппараты отрасли», алгоритмы и программы, составленные студентами в курсовых работах по дисциплинам, «Численные методы и программирование на ЭВМ», «Теория автоматического управления» и др.

Программой предусмотрено изучение методов идентификации технологических процессов математическими моделями объектов и систем управления.

Умения и знания, приобретенные студентами при составлении математических моделей, необходимы при изучении дисциплины «Автоматизация технологических процессов отрасли» в НИРС и дипломном проектировании. Некоторые ее научные положения тесно увязаны с «Теорией автоматического управления» (см. типовую программу УМУ—Т—6/1088). Методологической основой дисциплины являются теория отражения, законы химии, физики, биологии и экономики, а также элементы теории оптимизации и автоматического управления. Кроме того, используются основные положения дисциплин «Философия», «Высшая математика», «Численные методы и программирование на ЭВМ», «Гидравлика и гидравлические машины», «Термодинамика и теплопередача», «Технологические процессы и аппараты отрасли», «Экономика отрасли» и некоторые разделы теории оптимизации и автоматического управления.

Моделирование рассматривается как современный метод

исследования технологических процессов и как форма отражения действительности. В связи с техническим прогрессом и появлением современных вычислительных машин раскрываются роль и значение теории отражения в познании действительности, а также в развитии методов моделирования.

Изучаются общие принципы формализации и основы математического моделирования производственных процессов, использование диалектических категорий формы и содержания при анализе и синтезе технологических процессов и их систем управления, различные формы представления технологических процессов: технологическая, структурная, функциональная и операторная схемы. Типовые технологические операторы рассматриваются как преобразователи информации о технологических потоках. На основе обобщения полученных ранее знаний формулируются основные принципы использования новейших достижений науки и техники с целью синтеза совершенных технологических процессов пищевых производств и их систем управления. Изучаются перспективы использования методов математического анализа при исследовании, ведении и управлении технологическими процессами, а также роль методов математического моделирования при внедрении передового опыта, достижений науки и техники в производство, разработке ресурсо- и энергосберегающих технологий.

§ 2. Математическое моделирование — современный метод исследования

Модель является формой и одним из средств отражения действительности. Понятие «модель» чаще всего употребляют в двояком смысле — как образец чего-то (модель машины, одежды и т. д.) и как изображение изучаемого явления или процесса (представление электрического тока в виде движения жидкости, мнемоническая световая схема технологического процесса, модель солнечной системы и пр.).

Под моделью подразумевают такую мысленно представленную или материально реализованную систему, которая, отображая или воспроизводя объект исследования (оригинал), способна замещать его на определенном этапе исследования. Форма и средства представления при этом могут быть различными: математическое или словесное описание, физическая установка, алгоритм или программа на вычислительной машине. Модель в отличие от описания играет активную роль в исследовании, поскольку на модели можно

с минимальными затратами времени определить режимы и другие характеристики технологического процесса, конструктивные параметры машины или аппарата, затраты на производство готового продукта.

Понятия моделей и аналогий, использованные в научных исследованиях, потребовали введения понятия подобия, которое применялось сначала для геометрических категорий, а потом распространилось и на другие физические понятия и приобрело более широкий смысл.

Начало создания теории подобия относится к XV в. В настоящее время она широко используется во всех областях науки и техники. С помощью ее исследуются свойства подобных или аналогичных систем. Моделирование решает задачу установления требований, которым должна соответствовать модель. При этом процессы, происходящие в ней, должны быть подобны или аналогичны процессам, происходящим в оригинале. В связи с этим иногда основную задачу конкретной науки рассматривают как построение моделей тех объектов, которые она изучает, а моделирование — как первостепенный научный метод. Наиболее выдающиеся открытия были сделаны не в природных, а в искусственно созданных условиях, в которых моделируемые явления были упрощены и упорядочены для того, чтобы легче было в них разобраться, т. е. естественные явления каким-то образом смоделированы.

Большой вклад в теорию подобия внесли советские ученые М. В. Кирпичев, Г. А. Гухман, М. А. Михеев, А. В. Лыков и др.

Подобие означает, что данные о протекании одних процессов, полученные при изучении одного явления, можно распространить на другие явления, подобные данному. Подобие чаще всего выражает требование постоянства отношений различных величин (параметров) или их различных сочетаний, характеризующих процесс.

Если подобие распространяется на явления одной и той же природы, то такое моделирование называется *физическим*, а если же на явления различной природы, описываемые одинаковыми математическими зависимостями, — *аналоговым*. Аналоговое моделирование можно рассматривать как обобщение физического, своеобразное кодирование физических величин. Обобщение и расширение методов моделирования связаны с отказом от связи математической формы модели с первичными структурами различных по природе процессов.

Универсальное моделирование может развиваться на основе различных видов кодирования. В связи с этим наряду с аналоговыми математическими моделями применяются и математические машинные модели непрерывной или дискретной формы, основанные на эквивалентности получаемых результатов. При этом уравнения моделируемого процесса и модели могут быть различного вида.

Высшей формой является универсальное функциональное моделирование, при котором подобие структуры и физических явлений не соблюдается, а функциональные зависимости оригинала отражают внешние воздействия с учетом механизма обратных связей (различные имитационные модели и пр.).

Моделирование — основной метод исследования таких технологических процессов, для которых невозможно определить экспериментально их основные характеристики в производственных условиях. Кроме того, в настоящее время значительно возросло значение абстрактно-теоретических методов исследования. Без составления модели в современных условиях производства практически невозможно получить оптимальное решение.

Возрастание сложности технологических процессов и систем управления в пищевой промышленности привело к большим трудностям в получении не только оптимальных, но даже приемлемых решений. В связи с этим необходимо совершенствовать и метод принятия решений для обеспечения их правильности и сведения к минимуму ошибочных вариантов. Сложность технологических процессов, огромный объем данных, которые необходимо учитывать при любом их изменении, не позволяют без моделирования предположить характер их влияния на конечные результаты производственного процесса.

Методы моделирования вообще и математического в частности играют большую роль в интенсификации научных исследований и технического прогресса, так как позволяют получить количественную оценку предполагаемых технических решений наиболее экономичными способами. Прогнозировать развитие какой-либо отрасли промышленности можно только путем использования математических моделей. На их основе в нашей стране построены планы развития всего народного хозяйства, в том числе и производства пищевых продуктов.

В дальнейшем под моделированием будем понимать метод изучения технологических процессов, при котором вместо

оригинала (машины, аппарата, процесса, технологической линии) исследование (эксперимент) проводят на модели, а результаты количественно переносят на оригинал.

К моделированию предъявляются два основных требования:

исследования на модели должны быть экономичнее, проще, безопаснее, т. е. в определенном смысле лучше, чем на оригинале;

должно быть известно правило расчета характеристик оригинала на основе данных, полученных на модели, так как в противном случае исследование на модели не имеет смысла.

§ 3. Классификация методов моделирования

Физическое моделирование позволяет углубить знания о комплексе происходящих явлений в моделируемом объекте, уточнить количественную оценку и облегчить математическое описание отдельных сторон процесса. Методы физического моделирования лучше и нагляднее воспроизводят процессы, протекающие в оригинале по сравнению с другими методами. Измерительные и регулирующие приборы могут быть присоединены к модели без специальных преобразующих устройств, которые вносят искажения и дополнительные погрешности.

Исследования методами физического моделирования проводят в следующем порядке:

устанавливают основные, подлежащие численному определению, параметры технологического процесса, характеризующие качество процесса, аппарата или продукта;

исходя из количества подлежащих определению параметров и выбранных масштабов, рассчитывают и изготавливают одну либо несколько физических моделей (лабораторных или полупромышленных (опытных, пилотных) установок);

с помощью этих установок (моделей) получают численные значения подобных параметров и пересчитывают их для определения параметров оригинала (исследуемого объекта).

В настоящее время применяют лабораторные установки, моделирующие различные типовые технологические процессы нагрева, охлаждения, изменения химического состава, физических свойств, концентрации обрабатываемого продукта и пр. Очень часто в лабораторных условиях моделируют целые производственные комплексы. Широко используются также методы физического моделирования технологических процессов пищевых производств.

Лабораторное оборудование современных предприятий пищевой промышленности и научно-исследовательских учреждений можно рассматривать как физические модели производственных установок, на которых моделируют различные этапы технологического процесса: подогреватели, охладители, смесители, дозаторы, разделители, измельчители, шелушители, сушильные, увлажнительные и другие установки. Создаются также различные физические модели транспортных установок, накопителей, емкостей, других устройств пищевых предприятий. Причем для одного и того же этапа технологического процесса можно создавать различные физические модели, каждая из которых будет отражать те или иные стороны оригинала и соответствовать поставленной задаче исследования.

Лабораторные установки (физические модели) сохраняют физическую природу изучаемых этапов технологических процессов. Поскольку природа процесса при этом сохраняется, установки или модели воспроизводят весь комплекс явлений, характеризующий моделируемый процесс, в который могут входить и стороны процесса, не подлежащие на данном этапе изучению путем математического описания, т. е. не могут быть представлены математическими соотношениями.

Исходной предпосылкой теории подобия является то, что подобные явления описываются одинаковыми уравнениями. Процессы, связанные с движением ньютоновских жидкостей, описываются уравнениями Навье — Стокса и неразрывности. Следовательно, эти уравнения должны входить в математическое описание любого гидродинамического процесса. Тепловые процессы описываются уравнениями Фурье — Кирхгофа, Навье — Стокса и неразрывности, процессы массопереноса — уравнениями переноса массы, движения и неразрывности. Еще более сложными системами уравнений описываются процессы связанного тепломассопереноса, химических и биохимических превращений.

При моделировании конкретных объектов необходимо сформулировать условия однозначности. К ним относятся форма и геометрические размеры аппарата, физические свойства жидкости, а также свойства жидкости или газа на границах системы (граничные условия). Группа подобных явлений должна иметь и подобные условия однозначности, т. е. геометрическая форма аппаратов или других систем должна быть одинаковой, а размеры, физические свойства

жидкостей, скорости и другие существенные характеристики в сходных точках — находиться в постоянных соотношениях.

В соответствии с принципами теории подобия, между подобными явлениями (между оригиналом и моделью) должно быть геометрическое подобие, подобие физических величин, начальных и граничных условий. Уравнения переноса, геометрические и физические характеристики системы, граничные и начальные условия составляют математическое описание процесса.

При физическом моделировании алгебраические или дифференциальные уравнения, описывающие процессы, представляют в виде зависимостей между критериями подобия.

Например, $Nu = f(Re, Pr)$, где $Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$, $Re = \frac{v l}{\mu}$; $Pr =$

$= \frac{\nu}{\alpha}$ — критерии Нуссельта, Рейнольдса, Прандтля соответственно; α — коэффициент теплоотдачи; l — характерный геометрический размер; λ — коэффициент теплопроводности; v — скорость течения жидкости или газа; μ — динамическая вязкость; ν — кинетическая вязкость; α — коэффициент температуропроводности.

Критерии или числа подобия используются в качестве обобщенных переменных. Это имеет большое практическое значение, так как позволяет варьировать не все физические величины, а только критерии подобия.

Вместе с тем физическому моделированию присущи недостатки, которые ограничивают либо делают в некоторых случаях невозможным исследование технологических процессов этими методами. При исследовании нового процесса или другой стороны одного и того же процесса необходимо создавать новую модель, а изменение параметров моделируемого объекта требует трудоемких переделок модели или полную ее замену. Особенно недостатки физических моделей проявляются при совместном моделировании целого ряда этапов технологического процесса. Нагромождение физических моделей требует их взаимной увязки и построения не менее сложной системы управления моделями, чем система управления технологическим процессом (оригиналом). В случае применения одной физической модели (лабораторной установки), моделирующей производственный комплекс, исследование всего технологического процесса на физической модели происходит медленнее, чем течение технологического процесса в производственных условиях, что ведет к значительным погрешностям.

При физическом моделировании подобия по всем критериям или симплексам невозможно. Например, при выборе модели по критерию Фруда $Fr = v^2/gl$ условия подобия можно записать следующим образом:

$$v_{\text{мод}}^2/g_{\text{мод}}l_{\text{мод}} = v_{\text{ор}}^2/g_{\text{ор}}l_{\text{ор}},$$

где $v_{\text{мод}}$, $v_{\text{ор}}$, $g_{\text{мод}}$, $g_{\text{ор}}$, $l_{\text{мод}}$, $l_{\text{ор}}$ — соответственно скорости, ускорения свободного падения и геометрические размеры модели и оригинала.

Если учесть, что ускорение свободного падения одинаково для модели и оригинала ($g_{\text{мод}} = g_{\text{ор}}$), то

$$(v_{\text{мод}}/v_{\text{ор}})^2 = l_{\text{мод}}/l_{\text{ор}}.$$

Из последнего равенства можно определить соотношение между масштабными коэффициентами скорости ($k_v = v_{\text{мод}}/v_{\text{ор}}$) и геометрическими размерами ($k_l = l_{\text{мод}}/l_{\text{ор}}$):

$$k_v = \sqrt{k_l},$$

т. е. для изменения скорости потока в модели в k_v раз модель должна быть уменьшена в $\sqrt{k_l}$ раз. При выборе модели по критерию Рейнольдса $Re = vl/\mu$ и условия подобия для одной и той же жидкости ($\mu_{\text{мод}} = \mu_{\text{ор}}$) запишем

$$v_{\text{мод}}l_{\text{мод}} = v_{\text{ор}}l_{\text{ор}}, \text{ или } l_{\text{мод}}/l_{\text{ор}} = v_{\text{ор}}/v_{\text{мод}}.$$

Масштабный коэффициент для скорости потока в этом случае $k_v = 1/k_l$, т. е. если геометрические размеры модели изменены в k_l раз по сравнению с оригиналом, то скорость изменится в $1/k_v$ раз.

Следовательно, принципиально невозможно создать физическую модель, которая соответствовала бы одновременно критериям Re и Fr . Этих недостатков в значительной степени лишены методы математического моделирования, которые основаны на одинаковой математической записи явлений различной природы, происходящих в модели и моделируемом объекте, и позволяют осуществить с помощью одного моделируемого устройства решение целого класса задач.

Аналоговое моделирование (*analogus* — сходный). В теории подобия, которая положена в основу физического моделирования, принято считать, что в оригинале и модели протекают одинаковые по природе явления. Отличие модели от оригинала заключается в различных численных значе-

ниях сходственных параметров модели и оригинала. Масштабы для пересчета сходственных параметров выбирают исходя из равенства симплексов и комплексов (критериев) подобия.

Основными требованиями при моделировании любого явления являются возможность получения необходимых данных на модели более простым или более дешевым способом и возможность количественного переноса данных моделей на оригинал. Этим двум требованиям могут отвечать не только единство физических свойств модели и оригинала, но и другие признаки общности. Известно, что самые различные по физическому механизму явления могут быть описаны одинаковыми по форме уравнениями, т. е. для различных физических явлений существуют одинаковые или аналогичные качественные закономерности. Следовательно, в качестве общего признака можно взять общую форму записи явлений, происходящих в оригинале и модели.

Аналогичными считают объекты и процессы, описываемые аналогичными или одинаковыми по форме уравнениями. Уравнения называют аналогичными, если они содержат различные физические величины, но все операторы (знаки алгебраических действий, символы функций, дифференцирования и интегрирования и т. д.) совпадают и следуют в одном и том же порядке. Величины, которые в аналогичных уравнениях стоят на одинаковых местах, называют аналогами. Методы изучения явлений на основе аналогов называют аналоговым моделированием и широко используют в науке и технике.

Одним из применяемых в технологии пищевых производств методов является метод электрогидродинамических аналогий (ЭГДА), основанный на аналогичности уравнений, описывающих фильтрацию воздуха в пористых средах (движение сушильного агрегата в сушилках для сыпучих продуктов, воздуха в буртах зерна, картофеля, свеклы при активном вентилировании и пр.), и прохождении тока в объеме электролита. Чаще всего пространственную задачу приводят к плоской и вместо электролита используют электропроводную бумагу. Для применения методов ЭГДА необходимо прежде всего установить аналогию между характеристиками электрического тока и соответствующими им характеристиками изучаемого процесса.

Для двумерного потенциального потока запишем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0; \quad v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Для электрического поля эти же уравнения имеют вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad I_x = -\lambda \frac{\partial u}{\partial x}; \quad I_y = -\lambda \frac{\partial u}{\partial y},$$

где u — электрический потенциал; I — сила тока; λ — коэффициент удельной электропроводности среды.

Для приведенных одинаковых по форме уравнений потенциалу скорости движения жидкости φ соответствует электрический потенциал u , взятый с обратным знаком, а скорости движения жидкости v — удельная плотность электрического потока i/λ .

При соблюдении геометрического подобия и тождественных граничных условий эти уравнения тождественны, что позволяет получить необходимые гидродинамические характеристики при изменении электрических потенциалов на электрической модели потока, не прибегая к интегрированию уравнений Лапласа. На этом принципе математического изоморфизма основаны АВМ. Изоморфной принято называть такую модель, каждый элемент которой соответствует (или отражает) отдельным элементам оригинала.

Любую физическую систему можно использовать в качестве аналоговой модели, если в ней существуют определенные математические соотношения между непрерывно изменяющимися физическими величинами, подобные или аналогичные исследуемой физической системе (оригиналу) или решаемой математической задаче.

Существуют два типа АВМ. Первые моделируют физическую систему по ее отдельным частям (физическое моделирование), а вторые — по операциям математического уравнения (математическое моделирование). АВМ второй группы представляют собой счетно-решающие устройства, состоящие из отдельных операционных блоков, каждый из которых может выполнять какую-либо математическую операцию: сложение, умножение, интегрирование и т. д., т. е. блоки операций, представленные структурой АВМ, изоморфны математическим операциям.

АВМ первой группы получили название модели-аналоги, так как воспроизводят решение задачи в ее физической постановке, на основе метода аналогий. К моделям-аналогам относится и установка ЭГДА. В модели-аналоге часть или физические элементы математически изоморфны физическим элементам оригинала, которые образуют объект исследования. Выбор модели определяется задачами исследования, уровнем развития, наличием вычислительной техники, алгоритмов, программ и т. д.

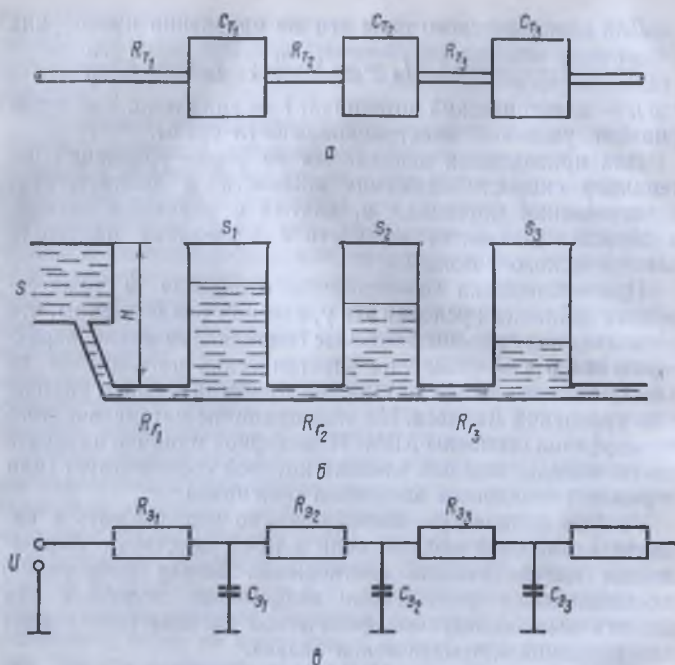


Рис. 1. Модели-аналоги:
а — тепловая система; б — гидравлическая; в — электрическая.

Сопоставление гидравлической и электрической моделей-аналогов (рис. 1) показывает, что аналогом температуры T в гидравлической модели является гидравлический напор H , в электрической — электрическое напряжение U ; аналогом теплового сопротивления R_T — гидравлическое сопротивление соединенных трубок R_F и электрическое сопротивление резистора $R_{Э}$; аналогом теплоемкости C_T — S_i площадь горизонтального сечения сосудов, а в электрической модели — электрическая емкость конденсатора $C_{Э}$.

Приведенные электрические и гидравлические модели-аналоги тепловой системы позволяют исследовать распределение в ней температуры. Для исследования тепловой системы с большим числом тепловых сопротивлений и теплоемкостей достаточно увеличить количество сообщающихся сосудов или электрических цепочек $RC_{Э}$. Этот переход от

моделирования одного варианта тепловой системы к моделированию ее другого варианта внешне создает впечатление решения задач распределения температуры «без математики». Но на самом деле математический изоморфизм систем заранее доказан на уровне физических элементов, а правила такой компоновки модели-аналога из элементов сформулированы в неявном виде так, что математический изоморфизм распространяется и на всю модель в целом. Таким образом, сохраняется непосредственное соответствие между физическими элементами системы-оригинала и ее модели. Все подлежащие исследованию элементы физической системы представлены в модели соответствующими физическими элементами-аналогами.

Примером аналогового математического моделирования могут быть электрические устройства, моделирующие механические колебания маятника (например, генератор в электрической сети с индуктивным, емкостным и омическим сопротивлениями). Колебание маятника и работу генератора можно описать аналогичными уравнениями

$$J_m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} + h \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + mgl\varphi = F(\tau);$$

$$L \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + R \frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{1}{C} q = E(\varphi),$$

где J_m — момент инерции; φ — угол отклонения; h — момент трения; m — масса; l — длина; $F(\tau)$ — возмущающая сила маятника; L — индуктивность; q — электрический заряд; R — омическое сопротивление; C — электрическая емкость; $E(\varphi)$ — электродвижущая сила.

Таким же образом можно моделировать закономерности движения приводных устройств вибрационных машин.

Аналоговое моделирование используют при изучении реологических свойств пищевых продуктов (табл. 1). Тело Гука обладает только упругостью, ньютоновская жидкость — только вязкостью, а все промежуточные тела — вязкостью и упругими свойствами.

В табл. 1 приняты обозначения: σ — напряжение сдвига; E — модуль упругости; δ — деформация сдвига (относительное удлинение); μ — вязкость ньютоновской жидкости; f — сила; x — смещение; u — электрический потенциал; q — электрический заряд; k_1, k_2, k_3, k_4 — коэффициенты пропорциональности.

Рассмотрим подробнее применение метода ЭГДА в пищевой технологии. Процесс фильтрации газа или воздуха

Таблица 1. Механические и электрические модели-аналоги реологических свойств пищевых продуктов

Аналог	Тело Гука $\sigma = \delta E$	Ньютоновская жидкость $\sigma = \mu \dot{\delta}$	Максвелловская жидкость $\sigma = \mu \dot{\delta} + \frac{\eta}{E} \ddot{\delta}$	Твердое тело $\sigma = \mu \dot{\delta} - \delta E$
--------	----------------------------------	--	---	--

Механический $f = k_1 \dot{\chi}$ $f = k_2 \dot{\chi}$ $f = k_3 \dot{\chi} - \frac{k_4}{k_1} \sigma$ $f = k_3 \dot{\chi} - k_1 \chi$

Электрический $u = k_2 q$ $u = k_1 \dot{q}$ $u = k_4 q + \frac{k_1}{E} \dot{u}$ $u = k_1 \dot{q} - k_2 q$

в пористой среде подчиняется закону Дарси — Вейсбаха, а прохождение электрического тока — закону Ома, описания которых могут быть одинаковыми по форме. Если принять аналогом скорости воздуха плотность тока, аналогом коэффициента фильтрации — проводимость, а аналогом давления — электрический потенциал, то эти законы будут иметь такие формы записи:

закон Дарси — Вейсбаха

$$Q = \int \vec{v} ds, \text{ или } \vec{v} = -k dP;$$

закон Ома

$$I = \int i ds, \text{ или } \vec{i} = \lambda_1 du,$$

где Q — расход воздуха; I — сила тока; $\vec{v}$ — вектор скорости газа или воздуха; k — коэффициент фильтрации; P — давление; $\vec{i}$ — вектор плотности тока; λ_1 — удельная электрическая проводимость среды; u — электрический потенциал; s — поперечное сечение.

Градиент скалярной величины (например, давление, потенциал и т. д.) является вектором, направление которого соответствует возрастанию данного скаляра с наибольшей скоростью. Численное значение градиента равно производной от скалярной величины по данному направлению (оси координат). Такую же аналогию можно записать и для гидродинамического поля газа или жидкости.

Установки ЭГДА являются специализированными математическими приборами, пригодными для исследования стационарных и нестационарных явлений (рис. 2). Моделирование осуществляют следующим образом. Из электропроводной бумаги вырезают фигуру 1, геометрически подобную изучаемому аппарату или каналу. К ее концам присоеди-

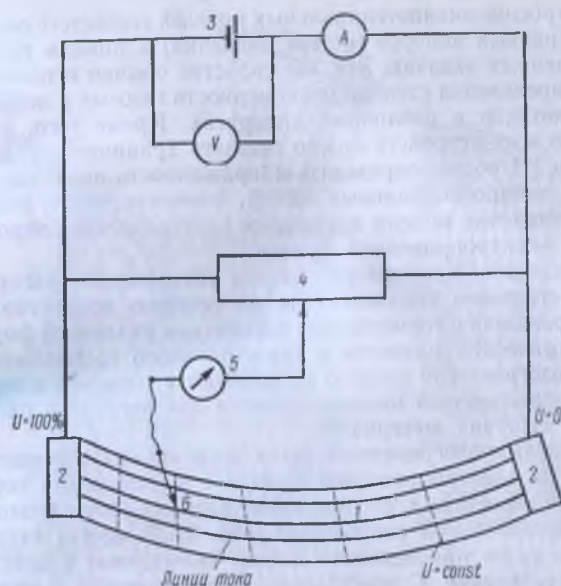


Рис. 2. Принципиальная схема моделирования на установке ЭГДА.

ют питающие шины 2, связанные с источником электрического питания 3. Измерение производят с помощью реостата 4, присоединенного параллельно источнику тока, нуль-гальванометра 5 и иглы 6. Для определения линий постоянного значения электрического потенциала устанавливают в соответствующее положение реостат и с помощью измерительной иглы фиксируют линию, по которой стрелка нуль-гальванометра не отклоняется. Изменяя установку реостата, можно построить серию линий (пунктирных) равного электрического потенциала. Линии тока (сплошные) будут перпендикулярны изопотенциальным линиям. При исследовании нестационарных явлений погрешность увеличивается. Для их уменьшения применяются специальные методы. При исследовании воздухораспределения в сушильных камерах и подогревателях погрешность данных, полученных методами ЭГДА, является допустимой и применение специальных методов неоправданно.

В общем случае значения электрического потенциала в установке ЭГДА, измеренные в любой исследуемой модели

и построение эквипотенциальных моделей соответствуют линиям равных напоров (потерь давления) и линиям токов в обращенных задачах. Эти два свойства обычно используют для определения степени равномерности газовых и жидкостных потоков в различных аппаратах. Кроме того, с помощью этих устройств можно задавать граничные условия I, II и III родов, определять напряженность поля, направление эквипотенциальных линий, измерять электрическое сопротивление модели и удельное электрическое сопротивление электропроводной бумаги.

В качестве примера рассмотрим установление распределения газового теплоносителя по сечению конвективного подогревателя с тормозящими элементами различной формы, геометрических размеров и относительного расположения. Эти подогреватели широко используют в пищевой и зерноперерабатывающей промышленности для нагрева и охлаждения сыпучих материалов.

Модели подогревателей были изготовлены в масштабе 1 : 10 из электропроводной бумаги с вырезанными тормозящими элементами, расположение которых соответствовало их действительной расстановке (рис. 3). В местах входа и выхода газов присоединены шины, включенные в электрическую схему установки. С помощью иглы, соединенной с измерительным устройством, на модели находили точки с заданным значением приведенного потенциала. Соединение точек равного потенциала позволяет получить так называемые эквипотенциальные линии (пунктиром) и перпендикулярные им линии тока (сплошные). Последние показывают направления газовых потоков, по плотности которых можно судить о рациональной конструкции подогревателя.

В результате исследований определено распределение воздушного потока между тормозящими элементами при его движении от входящего патрубка к отводящему, что дало возможность установить характер распределения потока воздуха при установившемся технологическом режиме по вертикальному сечению подогревателя, застойные и обдувные зоны, скорости фильтрации, время контактирования дисперсной фазы с тормозящими элементами, которое является одним из основных показателей, определяющих конструкцию подогревателя.

Из анализа эквипотенциальных полей и линий токов можно установить, что общим недостатком подогревателей конструкций *a* и *b* является более интенсивный поток теплоносителя вблизи стенок подогревателя и недостаточная в

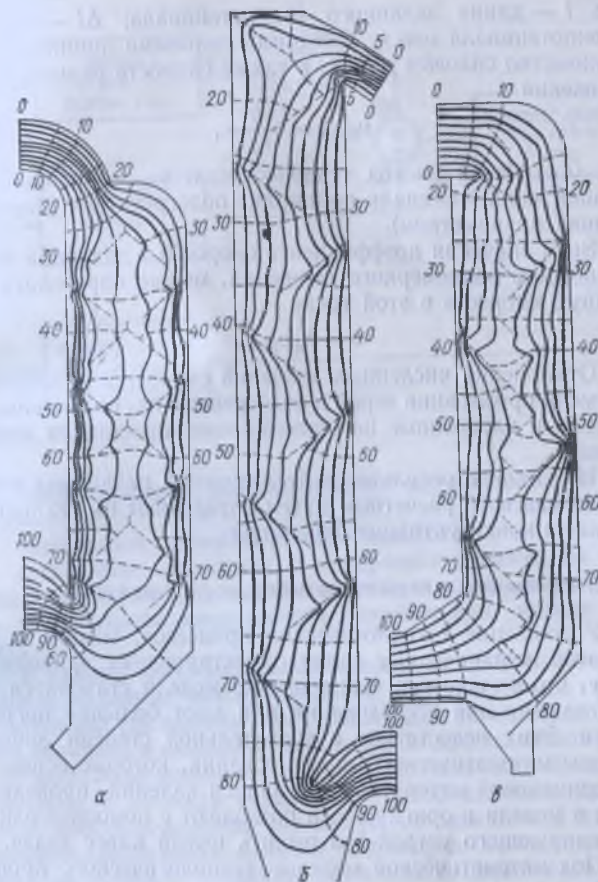


Рис. 3. Распределение потока газового теплоносителя по сечению в различных типах конвективных подогревателей.

среднем по сечению, т. е. имеет место неравномерность потока. В подогревателе конструкции *b* распределение воздушного потока более равномерное по сечению.

По полученному распределению потоков в исследуемых подогревателях можно определить коэффициент скорости теплоносителя в заданной точке по выражению

$$k_{\phi} = l/\Delta \ln,$$

где l — длина заданного эквипотенциала; Δl — отрезок эквипотенциала между соседними силовыми линиями; n — количество силовых линий, а также скорость равномерного движения

$$v_{\text{равн}} = \frac{G}{s_{\text{экв}}},$$

где G — общий расход теплоносителя; $s_{\text{экв}}$ — площадь заданной эквипотенциала по ширине подогревателя (пересчитанная планиметром).

Зная значения коэффициента скорости в заданной точке и скорость равномерного движения, можно определить истинную скорость в этой точке

$$v = k_{\phi} v_{\text{равн}}.$$

Отклонения численных значений скоростей движения и времени пребывания зерна в подогревателях, полученные на модели и измеренные на объектах, не превышали допустимых.

Из анализа результатов исследований различных типов подогревателей расчетным путем определяют их технологические и конструктивные параметры.

§ 4. Принципы математического моделирования

Усложнение технологических процессов, машин и аппаратов, ограниченные сроки проектирования приводят к тому, что физические и аналоговые модели становятся непригодными для исследования или дают большие погрешности. Этим недостаткам в значительной степени лишены методы математического моделирования, которые основаны на одинаковой математической записи явлений, происходящих в модели и оригинале, и позволяют с помощью одного моделирующего устройства решить целый класс задач.

Под математической моделью технологического процесса будем подразумевать совокупность математических отношений (уравнений, неравенств, логических условий и пр.), определяющих выходные характеристики (параметры состояния, показатели качества) процесса в зависимости от начального состояния, изменения внешних условий и времени.

Математическим моделированием технологического процесса или другого объекта называют исследование, осуществляемое путем решения системы математических соотношений, описывающих технологический процесс на вычислительных машинах.

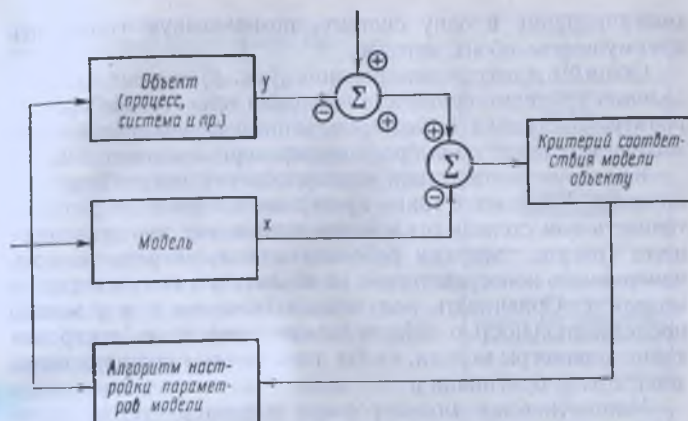


Рис. 4. Схема процесса моделирования.

Математическое моделирование осуществляют в три этапа:

- составление математического описания;
- составление алгоритма и программы решения на ЭВМ для получения численных значений искомых параметров;
- установление адекватности (соответствия) модели объекту.

В каждой вычислительной машине математические операции, заданные математическими соотношениями, выполняются над так называемыми машинными величинами. Каждой величине в исходном выражении можно поставить одну или несколько машинных величин. Это позволит обеспечить быстроту и легкость перехода от одной задачи к другой, легко ввести переменные параметры, начальные и граничные условия, установить влияние параметров аппаратуры модели на точность решения, упростить введение систематических и случайных возмущений, моделировать различные объекты хорошо разработанными типовыми математическими моделями.

При математическом моделировании удается сравнительно просто изменить параметры отдельных элементов исследуемого процесса и выяснить влияние этих изменений на течение технологического процесса или на качество автоматического регулирования. Во многих случаях целесообразно комбинировать установки физического и математического

моделирования в одну систему, позволяющую совместить преимущества обоих методов.

Общий процесс моделирования (рис. 4) состоит из определения критерия соответствия модели объекту, выбора алгоритма настройки параметров, минимизирующих реакции модели и объекта по выбранному критерию соответствия.

Критерии соответствия модели объекту могут быть различными. Чаще всего таким критерием является допустимая точность или степень отклонения показателя качества процесса (расход энергии рабочего агента, затраты и пр.), измеренного непосредственно на объекте y и полученного на модели x . Сравнивать полученные значения x и y можно последовательностью действий (алгоритм), т. е. построить такие параметры модели, чтобы показатель x соответствовал показателю оригинала y .

Математическое моделирование характеризуется сложностью математических моделей, большими объемами исходных данных, подлежащих обработке, громоздкостью вычислительных процедур и многократным их повторением в каждом случае использования математической модели. Поэтому реализация математических моделей невозможна без применения вычислительных машин.

§ 5. Общий порядок составления математической модели

Вид и форма математической модели определяются задачами исследования и природой исследуемого объекта. Тем не менее в любом случае порядок составления математической модели можно представить алгоритмом, структурная схема которого показана на рис. 5. Составление математической модели предполагает ряд этапов: постановка задачи исследования; выбор показателей качества решения задачи; определение и выбор параметров процесса (системы), влияющих на выбранные показатели качества; выявление существующих связей между параметрами; установление и запись математических зависимостей между параметрами; составление математического описания объекта; определение области решений (ограничений); составление алгоритмов и программ для решения на вычислительных машинах; оценка и обобщение результатов моделирования.

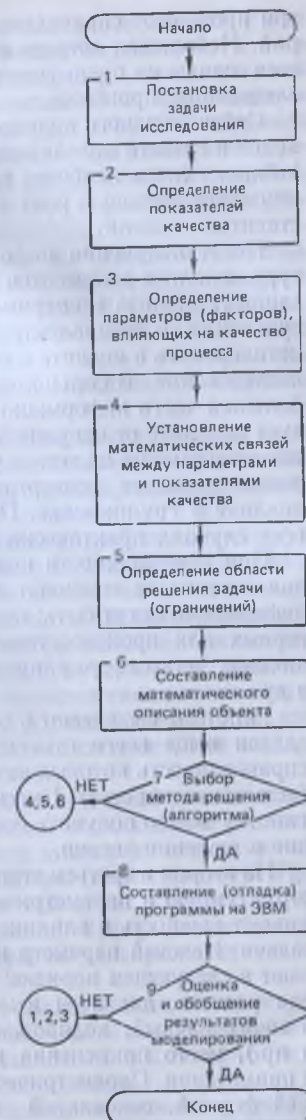
Наиболее важным и наименее формализованным является первый этап. Постановка задачи исследования и выбор показателей качества решения играют очень важную роль,

Рис. 5. Структурная схема алгоритма составления математической модели.

так как неудачи чаще обусловлены нечетко поставленной задачей или неудачным выбором показателя, не соответствующего цели исследования. Следующих три этапа составления математической модели являются по существу сбором необходимой информации об объектах. Здесь необходимо определить все параметры объекта и существующие между ними связи на основе законов фундаментальных наук, различных гипотез и допущений, а также использования экспериментальных данных.

Под информационным обеспечением математической модели понимают совокупность необходимых для использования модели и удовлетворяющих требованиям полноты, необходимости, точности, надежности и своевременности данных.

Теоретические основы технологических процессов изучаются обычно по различным опубликованным и рукописным источникам. Если для установления связей между параметрами объекта не удастся подобрать удовлетворительную теорию, тогда выдвигают гипотезы, справедливость которых проверяют сравнением результатов решений, полученных на основе принятых гипотез и по экспериментальным данным. Таким же обра-



зом проверяют справедливость применения различных теорий. Небольшая затрата времени на такую проверку является одним из преимуществ аналитического подхода к исследованию процессов.

Среди большого количества аналитических методов, подходов и средств моделирования для решения каждой задачи отбирают лишь наиболее пригодные. В связи с этим на данном этапе большую роль играют опыт и квалификация составителя модели.

После получения информации путем просмотра литературы, анализа документов и отчетов, подготовки априорных данных, анализа экспериментальных данных, опроса и консультаций со специалистами и экспертами ее следует систематизировать и оценить с точки зрения поставленной задачи исследования. В большинстве случаев только некоторая небольшая часть информации является необходимой и ее следует выделить от ненужной и случайной. Поскольку собранная информация не всегда удобна для непосредственного использования, ее подвергают предварительной обработке, анализу и группировке. Получить полную информацию во всех случаях практически невозможно.

При невозможности получения информации либо ее использования ее заменяют другими данными. Источниками информации могут быть: постановка эксперимента в лабораторных или производственных условиях, выдвижение различных, четко сформулированных гипотез, предположений и др.

Гипотезы выдвигают в случае недостаточного понимания задачи чаще всего относительно возможных результатов, справедливость которых затем проверяют экспериментально (испытание гипотез). Путем доказательства справедливости гипотез можно получить более или менее полное представление о решении задачи.

На втором и третьем этапах составления модели получают структурную и параметрическую схемы. При этом устанавливают важность и влияние каждого параметра на решение задачи. Каждый параметр в параметрической схеме описывают в следующем порядке: определение и символ, единицы для расчета, диапазон измерений, характеристики (одно- и многозначный, кодированный, управляемый, случайный и пр.), место применения в моделях, источник параметра и примечания. Параметрическое описание является простейшей формой, основанной на эмпирических наблюдениях свойств, признаков и отношений изучаемого объекта.

В результате четвертого этапа моделирования получают исходные математические связи между параметрами в виде таблиц, графиков, математических формул, статистических данных и т. д. На этом же этапе записывают системы исходных математических уравнений, полученных на основе выбранной физической модели, т. е. сложившихся представлений о реальном технологическом процессе (концептуальная модель).

В зависимости от объема сведений в моделируемом объекте выделяют три уровня информации.

1. Входные и выходные параметры процесса известны, но система уравнений математического описания для установления связей между ними отсутствует.

2. Все существенные параметры объекта и математические связи между параметрами известны, но численные значения постоянных в уравнениях математического описания неизвестны.

3. Система уравнений, описывающая связи между параметрами, и постоянные в уравнениях математического описания известны, но нет подходящего или приемлемого метода решения.

В первом случае задача состоит в разработке плана эксперимента с минимальным количеством опытов, во втором — в определении минимально необходимого числа постоянных в уравнениях описания, подлежащих экспериментальному определению, в третьем — в выборе наиболее экономного и применимого в конкретных условиях метода решения.

Выбор метода решения определяется типом вычислительного устройства с наличием стандартных или типовых программ и алгоритмов. Задача обычно сводится к методу решения с отложенной программой.

В системном анализе математические модели используют в трех направлениях: для поиска оптимальных решений, изучения аналитических свойств модели и определения в явном виде взаимосвязей, характеризующих систему. Применение одной и той же модели или одной и той же логико-математической схемы к широкому кругу разнообразных по природе задач свидетельствует об универсальности методов моделирования.

На пятом этапе определяют область решения задачи, которую в наиболее простых случаях часто сводят к определению начальных и граничных условий. В общем случае ограничения представляют в виде неравенств.

На шестом этапе исходные данные и уравнения преобразовывают таким образом, чтобы форма записи была пригодна

для решения поставленных задач. Табличные, графические и статистические данные обрабатывают и представляют в виде математических формул. При этом по возможности упрощают полученные исходные уравнения путем исключения незначимых членов, а иногда и исключением целых уравнений в случае незначительного их влияния на решение поставленной задачи.

На седьмом этапе производят выбор метода решения полученных математических уравнений в зависимости от задачи и уровня исследования и сложности уравнений. В соответствии с выбранным методом решения производят необходимые преобразования и замены в системах уравнений. Вычислительной стадии должен предшествовать анализ информации, которую необходимо получить с помощью модели, с целью обнаружения избыточных ситуаций, что позволит упростить вычислительную процедуру.

Приступая к решению системы уравнений, определяют число независимых уравнений и неизвестных. Независимыми называются уравнения, которые не являются линейной комбинацией других уравнений системы. Для систем, у которых число неизвестных больше числа независимых уравнений, если есть одно, то и существует бесконечное количество решений. Однако если сформулированы дополнительные условия, которым должно удовлетворять решение системы, то может быть найдено интересующее нас решение. Если же уравнений в системе больше, чем неизвестных, то при решении желательно использовать все имеющиеся уравнения для уменьшения ошибки.

При построении математической модели необходимо соблюдать следующие правила:

уравнений должно быть столько, сколько имеется неизвестных величин, определяющих поведение физической системы;

любое уравнение может быть решено относительно какой-то неизвестной величины в том случае, когда остальные входящие в него величины получены из других уравнений;

каждое уравнение решают относительно наиболее значимой из входящих в него переменных, при выборе которой нужно исходить из физического смысла задачи.

Соблюдение этих правил позволяет получить устойчивую сходимость математической модели. На этом же этапе составляют четкую последовательность решения задачи — алгоритм.

Восьмой этап — составление программы решений — определяется как предыдущими этапами моделирования, так

и типом вычислительного устройства. Программу рекомендуется строить по модульному принципу, т. е. в виде совокупности стандартных блоков — модулей. Этот путь достаточно эффективен, логически оправдан и может быть сравнительно легко осуществлен и проведен. Модуль охватывает типовую процедуру или стандартный оператор обработки информации на ЭВМ. В алгоритмах решения экономических задач типовые процедуры и вычислительные операторы составляют большую часть. При таком подходе можно строить и совершенствовать модель итерационным методом, добавляя к основной схеме различные блоки. При построении модели из стандартных блоков появляется возможность экспериментировать при ее реализации и в процессе эксплуатации. Отдельные блоки могут быть изменены без усложнения других и изменения их общего количества. При построении блочной модели ее функции разделяются на логические подфункции с более высоким уровнем детализации, т. е. модель функционально разделяется на подмодели. Каждая подмодель, в свою очередь, может быть разделена на блоки, а блоки — на подблоки.

После проверки программы на логичность и правильность используемых уравнений можно приступить к переводу всех математических формулировок на язык машины, а после отладки программы — к вычислениям.

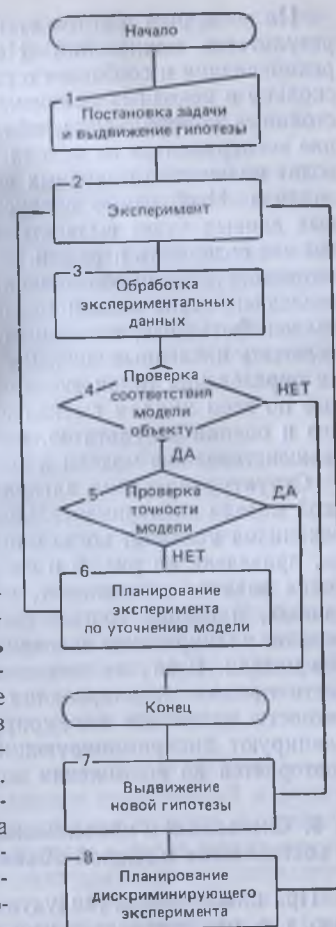


Рис. 6. Структурная схема алгоритма составления математической модели по экспериментальным данным.

На последнем девятом этапе производят оценку и анализ результатов вычислений. На основании анализа выдают рекомендации и сообщают о ранее неизвестных фактах. Поскольку в исходных уравнениях могут быть различные постоянные коэффициенты, обязательно планируют проведение экспериментов на модели. Из плана экспериментов выводят количество выходных данных и определяют метод их анализа. Необходимо предусмотреть, какая часть расчетных данных будет выдаваться на печать. Выходная печать должна содержать перечень исходных и выходных данных с соответствующими обозначениями и размерностью. В конце последнего этапа моделирования составляют отчет, который должен быть содержательным, ясным, точным и полным и включать численные значения исходных данных или способ их определения (план эксперимента и пр.), выходные данные по всем циклам вычислений, краткое изложение, анализ и оценки результатов, выводы и рекомендации по совершенствованию модели и возможности ее применения.

Структурная схема алгоритма составления математической модели экспериментальными методами для выявления механизма явлений, когда описывающая функция неизвестна, приведена на рис. 6 и состоит из шести этапов: постановка задачи, эксперимент, обработка экспериментальных данных, проверка соответствия модели объекту, точности модели, планирование эксперимента по уточнению параметров модели. В случае соответствия модели объекту по точности процесс моделирования завершается, а при неадекватности выдвигают конкурирующую модель (гипотезу) и планируют дискриминирующий эксперимент, т. е. задача повторяется до достижения заданной точности модели.

§ 6. Системный и классический подходы к составлению моделей объектов

При классическом (индуктивном) подходе к моделированию, т. е. при переходе от частного к общему, модель синтезируется путем слияния разрабатываемых отдельно ее составляющих. В отличие от этого системный подход предполагает последовательный переход от общего к частному, когда в основе рассмотрения лежит общая цель исследования.

Новым в системном анализе является попытка рассматривать проблему в целом, с постоянным ударением на ясность анализа, на количественные методы и на выявление

неопределенности. Эти процедуры не гарантируют доброкачественности рекомендаций, разработанных на основе анализа. Неудачи чаще происходят из-за того, что были выбраны неправильно цель или критерий. Тем не менее существуют некоторые принципы доброкачественного анализа. Это прежде всего:

1. Правильный выбор проблемы. Получение точного ответа на неправильный вопрос хуже, чем не до конца точный ответ на правильный вопрос.

2. Анализ должен иметь системную направленность, не изолировать процесс, а сосредоточить усилия на расширении границ исследования.

3. Необходимо сознавать наличие неопределенности и оценить их влияние, т. е. указать, что значения параметра будут больше одной величины и меньше другой. Указать, как уменьшить неопределенность.

4. Стремиться отыскать новые альтернативы.

5. Результаты (рекомендации) должны быть проверяемы, ясны и объективны (не зависеть ни от личности, ни от репутации или частных интересов).

Классический подход целесообразно применять при моделировании сравнительно простых объектов.

При системном подходе к моделированию четко определяют цель исследования и затем создают модель. Применительно к вопросам моделирования цель возникает из поставленных задач исследования, что позволяет выбрать критерий отбора и оценить состав элементов, входящих в создаваемую модель M . Критерии отбора отдельных элементов в создаваемую модель могут быть различными.

При исследовании структуры системы и ее свойств, в том числе и системы моделей, различают структурный и функциональный подходы. При структурном подходе выявляют состав выделенных элементов системы и связи между ними. Наиболее общим описанием структуры является топологическое, позволяющее определить составные части системы и связи между ними на основе теории графов. Функциональный подход, оценивающий функции, которые выполняет система, приводящие к достижению цели, реализуется при функциональном описании поведения системы. Функциональные и структурные (морфологические) описания могут быть объединены и получены эмпирически либо аналитически путем анализа физико-химических явлений.

Синтез модели на основе классического подхода представлен на рис. 7, а. Процесс, подлежащий моделированию, раз-

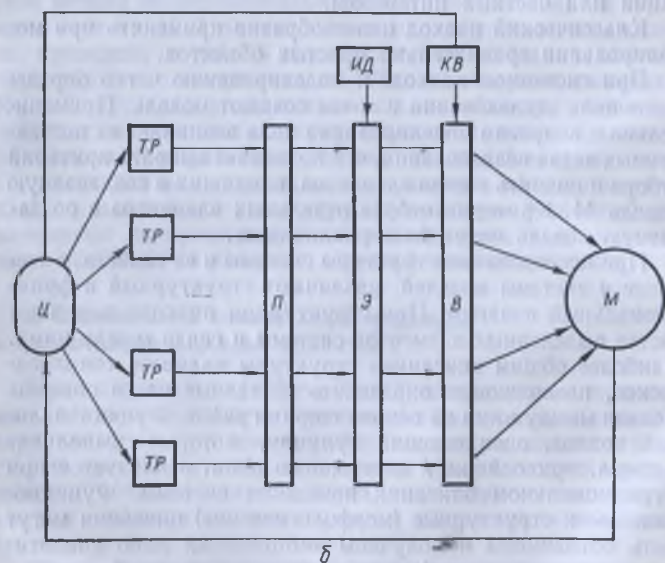
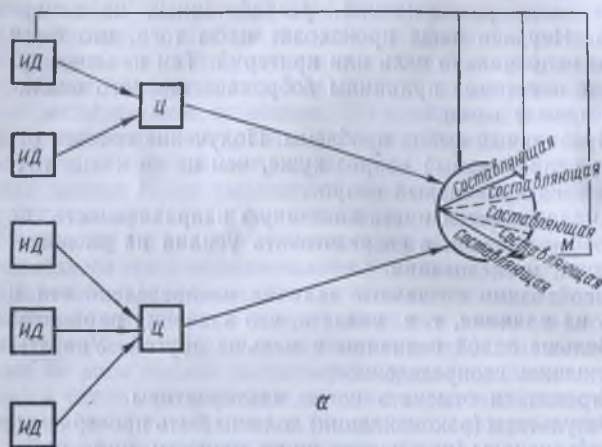


Рис. 7. Синтез математической модели на основе классического (а) и системного (б) подходов.

бывают на отдельные подсистемы, т. е. выбирают исходные данные (ИД) для моделирования и формулируют отдельные цели (Ц), отображающие различные задачи моделирования. По отдельной совокупности ИД формулируют цель моделирования отдельной стороны объекта, на базе этой цели формируется некоторая составляющая будущей модели. Совокупность составляющих объединяется в модель M . Разработка модели на базе классического подхода означает суммирование отдельных составляющих в единую модель, причем каждая из составляющих решает свои собственные задачи и изолирована от других частей модели. Классический подход используют при составлении сравнительно простых моделей, в которых возможно разделение и взаимно независимое рассмотрение отдельных сторон функционирования моделируемого объекта. Поскольку создаваемая модель образуется путем суммирования отдельных ее составляющих, то она не учитывает возникновения системного эффекта, который может выявиться при взаимном влиянии составляющих.

В основу системного подхода положен принцип рассмотрения системы как интегрированного целого, которое начинается с формулировки цели функционирования объекта. Синтез модели M на базе системного подхода условно представлен на рис. 7, б. Исходя из цели функционирования формулируются исходные требования (ТР) к модели объекта. На базе этих требований формируются ориентировочно некоторые отдельные подсистемы (П), элементы (Э) и осуществляется выбор (В) составляющих системы на базе специальных критериев выбора (КВ).

Эффективность модели объекта определяется как разность между выбранными показателями ценности результатов, полученных при использовании модели, и затратами, которые были вложены в ее разработку и создание.

При моделировании необходимо обеспечить создание информационного, математического, технического и программного обеспечения системы моделирования.

Независимо от типа используемой модели M при ее построении руководствуются принципами системного подхода: последовательное продвижение по этапам и направлениям создания модели; согласование информационных, ресурсных, надежных и других характеристик; правильное соотношение отдельных уровней иерархии в системе моделирования; целостность отдельных обособленных стадий построения модели.

Поскольку модель M должна отвечать заданной цели исследования, то отдельные части необходимо компоновать взаимно, исходя из единой системной задачи. Цель может быть сформулирована качественно в содержательной форме и количественно в виде целевой функции, отображающей влияние наиболее существенных факторов на достижение цели в количественной форме.

§ 7. Информационное обеспечение моделирования

Под информационным обеспечением понимают совокупность информационных процессов, методов и средств их организации и преобразования, которые осуществляются в процессе моделирования и автоматизированного проектирования. Исходя из структуры и задач информационного обеспечения моделирования можно определить требования к программному обеспечению и выбрать технические средства, т. е. вычислительную машину или их комплекс. Информационное обеспечение или исходные данные для моделирования обычно представляют в виде банка данных (БД).

Под исходными данными понимают совокупность сведений об объекте моделирования и окружающей его среде, представленных условиями, требованиями, значениями показателей или графическими изображениями. Например, для систем автоматизированного проектирования предприятий исходные данные содержат задание на проектирование, технические условия на площадку строительства, сведения о материальных, трудовых и топливно-энергетических ресурсах, характеристики технологических процессов и оборудования и пр.

Исходные данные различаются содержанием, объемом и формами их представления и должны обеспечить разработчика модели необходимым объемом сведений, для решения технической задачи с помощью математической модели.

Банк данных определяется как система языковых, алгоритмических программных организационных и технических средств, обеспечивающих централизованное создание и поддержку совокупности коллективно используемых данных, а также сами данные в форме БД. Под базой данных подразумевают конкретное физическое представление всей информации или ее части. Использование БД требует и их соответствующего описания на специальных языках, обеспечивающего их автоматизированный ввод в память машины.

Неотъемлемой частью банка данных наряду с данными

является система программного обеспечения банка данных (СПО БД), под которой понимают организованную совокупность языковых, алгоритмических и программных средств, служащих для удовлетворения информационных потребностей, приложений и выполнения вспомогательных процедур.

Сведения об источниках информации определяются их наименованиями, местом нахождения и числом обращений к ним. Для обеспечения информационной целостности и совместимости с системой управления процессом проектирования ИД должны быть организованы на базе принципов унификации с обеспечением единообразия форм и содержания входных, промежуточных и выходных данных на основе единых требований и принципов их классификации, с учетом сокращения типов и числа этих документов

В информационное обеспечение входят сбор, хранение, обработка, поиск и выдача потребителю сведений. В частности, в информационное обеспечение входят все модели машин и аппаратов, используемых при проектировании технологических линий. Для составления математических моделей отдельных видов технологических процессов и оборудования в БД должны входить сведения о физических свойствах, химическом составе, расходах входных потоков, а также тип, геометрические характеристики машин и аппаратов.

Важным компонентом информационного обеспечения является организация поиска необходимых данных. Поисковый запрос представляет собой сформулированное на естественном языке осознанное требование, адресованное в информационную поисковую систему (ИПС) в определенный период времени. Смысловое содержание запроса, выраженное в терминах информационно-поискового языка, составляет поисковое предписание. Запрос и поисковое предписание включают в себя набор поисковых признаков, которым должны соответствовать искомые объекты, т. е. оборудование, унифицированные решения.

Классификационное деление поискового массива по выбору оборудования осуществляется по иерархическому признаку в соответствии с технологическими функциями, выполняемыми отдельными моделями оборудования в процессе изготовления того или иного вида продукта. Совокупность записей, образующих поисковый массив, разбивают на семь классификационных уравнений (рис. 8, а). Задача выбора оборудования является одной из основных при проектировании предприятий, поскольку каждой технологической операции может соответствовать несколько моделей оборуду-

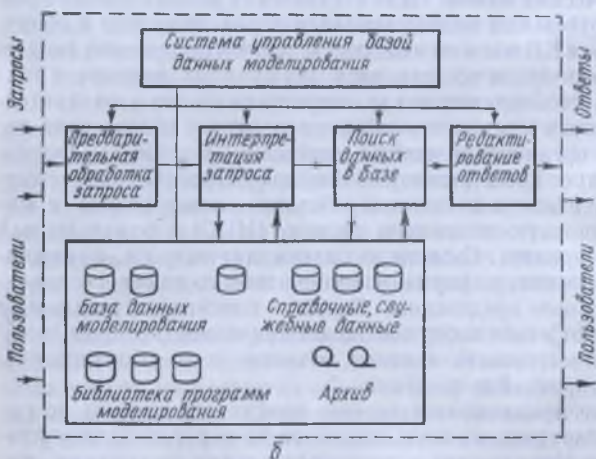
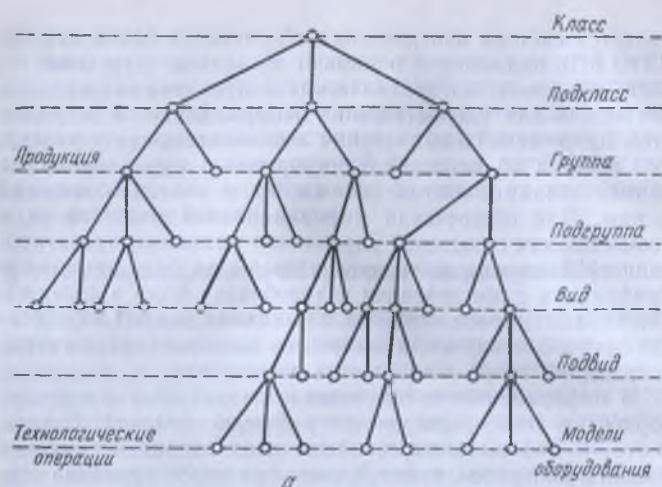


Рис. 8. Структуры организации: а — информационных массивов; б — банка данных автоматизированной системы управления.

дования (машин, аппаратов и пр.), различающихся техническими и экономическими характеристиками. Выбор оборудования осуществляется по этапам: 1) поиск оборудования, соответствующего технологической операции; 2) выбор моделей оборудования, наилучшим образом удовлетворяющих

требованиям производства, и 3) поиск наиболее эффективных комплектов оборудования.

Банк данных моделирования состоит из следующих элементов (рис. 8, б): информационный фонд (базы данных объекта и эксперимента); специализированное математическое обеспечение для управления банком данных; администратор банка данных; справочные и служебные данные; технические средства банка. Математическое обеспечение банка представляет собой систему управления базой данных (СУБД). Внешнюю координацию работы банка и операции, не поддающиеся формализации, выполняет администратор. Банк данных моделирования функционирует следующим образом. Поступивший в банк запрос проходит предварительную обработку, интерпретацию, т. е. распознавание вида запроса (выдача информации об объекте моделирования, формирование рабочих массивов, изменение или дополнение банка данных об объекте и данных эксперимента). На этом этапе запрос с языка заданий переводится на язык манипулирования данными. Полученные данные контролируются и анализируются, затем редактируются и передаются как ответы пользователю, выдаваемые на печать или дисплей. База данных моделирования позволяет создать единое интегрированное информационное обеспечение автоматизированной системы моделирования.

§ 8. Техническое обеспечение моделирования

Основными техническими средствами математического моделирования являются современные вычислительные машины, которые по форме представления разделены на цифровые, аналоговые и аналого-цифровые.

Единая система электронных цифровых вычислительных машин (ЕС ЭВМ) представляет собой семейство программно-совместимых машин, построенных на единой элементной и конструктивно-технологической основе, с единой структурой, системой программного обеспечения и унифицированным набором внешних устройств. Аналогично организована и единая система СМ ЭВМ.

В основу построения ЕС и СМ ЭВМ положены также принципы: мультипрограммирование, совместимость систем программирования на уровне машинных кодов отдельно для ЕС и СМ, высокий уровень стандартизации и унификации внутри каждого ряда, широкое применение интегральной микроэлектроники, возможность организации многоэтапной

Таблица 2. Технические характеристики ЕС ЭВМ

Ряд	1	2	3	4	5	6
Тип	ЕС-1010	ЕС-1012	ЕС-1015	ЕС-1022	ЕС-1030	ЕС-1032
Быстродействие, тыс. оп/с		36	19—31	80	100	200
Объем оперативной памяти К байт	64	8—64	256	512	128—512	128—1024
Операционная система	ОС 10	ОС 12	ДОС 3	ДОС ЕС ОС ЕС	ДОС ЕС ОС ЕС	ДОС ЕС ОС ЕС

работы по созданию и совершенствованию технических и программных средств ЕС и СМ ЭВМ.

Одной из особенностей машин Единой системы является возможность работы в режиме разделения времени, при котором несколько абонентов, удаленных от ЭВМ на достаточно большие расстояния, могут общаться с ней непосредственно, оперативно и независимо друг от друга. Взаимодействие удаленных абонентов с ЭВМ осуществляется с помощью периферийной аппаратуры, подсоединенной к каналам через стандартную систему сопряжения. Благодаря стандартному сопряжению центральный процессор может работать с большим набором разнообразных периферийных устройств.

Ряд моделей ЕС ЭВМ объединяет машины, имеющие общую логическую структуру и принцип работы. Под логической структурой ЭВМ понимается совокупность функциональных средств и принципов их взаимодействия. Однородность логической структуры всех моделей ЕС ЭВМ достигается тем, что предусмотренные в ней средства выполняют одинаковые функции и одинаково взаимодействуют между собой. Но несмотря на общность логической структуры, различные модели ряда отличаются производительностью, емкостью памяти, конфигурацией и т. д. Различия по техническим характеристикам машин общего назначения ЕС ЭВМ приведены в табл. 2. Структура приведенных в табл. 2 ЭВМ рассматривается как логическое понятие и определяет лишь общую концепцию построения и взаимодействия аппаратных средств и не накладывает жестких ограничений на конкретную техническую реализацию модели.

К центральным устройствам, составляющим ядро ЭВМ, относятся процессоры, оперативные запоминающие устройства, мультиплексные и селекторные каналы: к периферийным — внешние устройства (внешние запоминающие устройства, устройства ввода — вывода данных, устройства

7	8	9	10	11	12	13	14
ЕС-1033	ЕС-1035	ЕС-1036	ЕС-1040	ЕС-1045	ЕС-1052	ЕС-1055	ЕС-1060
200	140—160	400	380	540—880	700	450	1000
512	512	2048 4096	1000	1024 4096	1024	1024 4096	2048 8000
ДОС ЕС ОС ЕС	ДОС ЕС ОС ЕС	ОС ЕС	ОС ЕС	ОС ЕС	ОС ЕС	ОС ЕС	ОС ЕС

систем телеобработки данных, устройства подготовки данных и сервисные).

Эффективное использование технических средств ЕС ЭВМ обеспечивается развитой системой программного обеспечения (СПО), в состав которой входят операционные системы (ОС), пакеты прикладных программ (ППП) и комплексы программ технического обслуживания (КПТО).

Операционная система является неотъемлемой частью комплекса технических средств. Это ядро системы программного обеспечения любой ЭВМ. В СПО ЕС ЭВМ имеются следующие операционные системы: операционная система ОС 10, ОС 11 и ОС 12 для моделей ЭВМ ЕС-1010, ЕС-1011 и ЕС-1012 соответственно; малая операционная система МОС ЕС для ЕС-1021; дисковая операционная система ДОС ЕС для ЭВМ, начиная с модели ЕС-1020 и старше (за исключением ЕС-1021), с памятью малой емкости (64—128 К байт); операционная система ОС ЕС для ЭВМ, начиная с модели ЕС-1020 и старше (за исключением ЕС-1021 и ЕС-1025), с памятью большей емкости (128 К байт и выше).

Основными компонентами каждого варианта операционной системы являются управляющая и обрабатывающая программы. Управляющая программа обеспечивает автоматическое управление вычислительной системой, организует процесс обработки данных и загружает ресурсы системы таким образом, чтобы была обеспечена максимальная ее производительность в каждом конкретном случае. В состав обрабатывающих программ входят трансляторы с используемых языков программирования и сервисные программы.

Обрабатывающие программы включают трансляторы с языков программирования Ассемблер, ФОРТРАН, ПЛ-1, КОБОЛ и набор обслуживающих программ.

ППП представляют собой функционально полные комплексы программ, ориентированные на решение выбранного

круга задач, составляются на базе операционных систем и являются их дальнейшим развитием в конкретном направлении. Все ППП могут быть разбиты на три группы: пакеты, расширяющие возможность операционных систем; пакеты общего назначения; пакеты, ориентированные на применение в АСУ.

ППП, расширяющие возможности ОС, обеспечивают функционирование различных конфигураций ЕС ЭВМ. К ним относятся пакеты, обеспечивающие работу типовых многомашиных комплексов, диалоговые системы, работы в реальном масштабе времени, средства удаленной пакетной обработки.

ППП общего назначения включают набор программ широкого применения. К ним относятся программы, использующие различные алфавитно-цифровые и графические дисплеи: программное обеспечение графопостроителей; программы для научно-технических расчетов, математического программирования обработки матриц, системы программирования для языков высокого уровня и т. д.

ППП, ориентированные на применение в АСУ, включают обобщенные системы обработки банков данных, информационно-поисковые системы общего назначения и системы обработки документов.

ППП не входят в состав ОС, имеют самостоятельную документацию, поставляются отдельно и представляют собой постоянно расширяющуюся систему. Номенклатура, условия поставки, запуск ППП определяются техническими условиями.

Младшей моделью ЕС ЭВМ, относящейся к классу мини-ЭВМ, является электронная вычислительная машина ЕС-1010, предназначенная для выполнения научно-технических расчетов не слишком большого объема и сложности, обработки результатов измерений, управления технологическими процессами. Информационная совместимость ЕС-1010 с остальными моделями ЕС ЭВМ и наличие адаптеров стандартного интерфейса ввода — вывода позволяет использовать ее в качестве сателлита на абонентских пунктах в развитых системах телеобработки. ЕС-1012 является модернизацией машины ЕС-1010 с теми же функциональными возможностями. Младшим членом семейства машин второй очереди ЕС ЭВМ является электронная вычислительная машина ЕС-1015, которая может быть использована как в качестве самостоятельной системы, так и в сетях ЭВМ. Архитектура ЕС-1015 обеспечивает эффективное применение машины в областях обработки хозяйственно-экономических

данных и научно-технических расчетов. Конфигурация машины пригодна для создания местных и удаленных систем а также для работы в режиме пакетной обработки и диалога.

Для решения широкого круга научно-технических, экономических, информационно-логических задач, а также для работы в автоматизированных системах управления предназначена ЭВМ ЕС-1022. Она имеет средства прямого управления для создания многомашиных комплексов. Допускается построение вычислительных систем из нескольких ЭВМ с использованием двух типов связей: через общее поле внешних запоминающих устройств и непосредственное сопряжение. ЭВМ ЕС-1022 может работать в системах телеобработки данных ЕС ЭВМ и осуществлять связь с абонентами по телефонным, а также телеграфным каналам.

В ЭВМ ЕС-1022 полностью реализованы все архитектурные, структурные и конструктивно-технологические концепции ЕС ЭВМ. Структурные возможности модели позволяют создать различные конфигурации вычислительного комплекса. Система связи модели с устройствами ввода — вывода обеспечивается стандартным интерфейсом, что позволяет использовать широкий круг периферийных устройств как последних разработок, так и входящих в состав первых моделей ЭВМ единой системы.

Машины ЕС-1030, ЕС-1032, ЕС-1033 представляют собой дальнейшее развитие ЕС ЭВМ в направлении увеличения производительности. ЭВМ ЕС-1035 и ЕС-1045 являются моделями ЕС ЭВМ «Ряд 2». Они полностью сохраняют принятые в ЕС ЭВМ основные концепции, программную совместимость с ранее выпущенными моделями. В этих машинах предусмотрены дополнительные программно-аппаратные средства, увеличивающие их возможности: перезагружаемая память микропрограмм, диагностическая система, средства повышения надежности, для вычислений с плавающей запятой, виртуальная память.

ЭВМ ЕС-1036 является представителем «Ряда 3» первого этапа и предназначена для работы в автоматизированных центрах АСУ и сети ЭВМ. По сравнению с «Ряд 2» дополнительно включает средства, повышающие эффективность системного использования ЭВМ: виртуальную память, систему динамического микропрограммирования, высокопроизводительную систему восстановления, расширенные средства контроля и диагностики.

Модели ЕС-1052, ЕС-1055 и ЕС-1060 — высокопроизводительные ЭВМ, предназначенные для использования в круп-

ных вычислительных центрах в высших звеньях АСУ для решения научно-технических, планово-экономических и информационных задач большого объема и высокой степени сложности. ЭВМ ЕС-1060 является одной из самых быстродействующих вычислительных машин отечественного производства. Под микроЭВМ обычно понимают вычислительную машину, встроенную в прибор, инструмент, научную и измерительную аппаратуру.

К мини-ЭВМ относят стационарные установки, используемые как самостоятельные вычислительные машины и как машины для управления приборами и автоматическими линиями. На основе мини-ЭВМ строят различного рода автоматизированные рабочие места (АРМ).

Системы малых и микроэлектронных вычислительных машин (СМ ЭВМ) представляют собой агрегируемые системы технических и программных средств вычислительной техники, связанных рациональной совместимостью архитектурных и конструктивных решений и предназначенных для построения управляющих вычислительных комплексов, которые используются в системах управления технологическими процессами и агрегатами, автоматизации научных исследований и автоматизации проектирования.

Основными областями применения средств СМ и микроЭВМ серии «Электроника» являются информационно-поисковые системы, автоматизированные системы управления для непрерывных и непрерывно-дискретных технологических процессов и производств, автоматизированные системы управления технологическими процессами и системы оперативного управления в дискретных производствах; системы автоматизации научных экспериментов. Кроме того, предусматривается применение средств СМ и микроЭВМ в больших вычислительных системах в составе терминальных комплексов как проблемно-ориентированных, так и общего назначения, а также в качестве устройств, встраиваемых в специализированную аппаратуру.

Системы малых и микроЭВМ построены как агрегатные системы технических средств, позволяющих компоновать управляющие вычислительные комплексы с различным составом оборудования и обеспечивать замену одного устройства комплекса другим аналогичного назначения, без изменения общего функционирования системы.

Программное обеспечение построено также по модульному принципу, что обеспечивает возможность компоновки программных средств в соответствии с требуемыми режима-

ми работы и выполняемыми функциями при заданной конфигурации технических средств.

В состав программного обеспечения входят операционные системы различного назначения, библиотеки, проблемно-ориентированные пакеты прикладных программ, сервисные и контрольно-диагностические программы.

Базовый вычислительный комплекс СМ-1 используется на нижнем уровне в сложных иерархических системах: для компоновки простых одноуровневых автоматизированных систем управления технологическими процессами (АСУ ТП); в качестве устройств управления в серийно выпускаемых приборах, установках, механизмах, в качестве контрольно-измерительных приборов для обработки в реальном масштабе времени результатов лабораторных экспериментов; для выполнения инженерных и других расчетов.

Агрегатные модули СМ-1, процессор, согласователь ввода — вывода (СВВ), устройство оперативной памяти и контролеры внешней памяти выполнены в виде автономных комплексных блоков (АКБ). Составы базовых вычислительных комплексов приведены в литературе [2].

Назначение управляющих вычислительных комплексов (УВК) СМ-2 — использование в автоматизированных системах управления технологическими процессами; на верхнем уровне иерархической системы управления сложными агрегатами, цехами, производствами, при построении центров обработки данных в системах массового обслуживания; в автоматизированных системах обработки результатов испытаний сложного оборудования; для выполнения инженерных и других расчетов.

В тех областях, где возможности комплексов СМ-2, СМ-2М по быстродействию, объему оперативной памяти и другим параметрам недостаточны, в частности на верхнем уровне иерархических АСУ и сложных АСУТП, применяются вычислительные комплексы СМ-1210.

Вычислительные комплексы СМ-1210 содержат два центральных процессора, два процессора ввода — вывода, главную память с емкостью от 2 до 4 М байт и системные периферийные устройства (устройства внешней памяти на магнитных дисках ЕС-5061 и магнитных лентах ЕС-5012-3 или ЕС-5017, устройства параллельной СМ-6315 и последовательной А 521-4/6 печати, устройства, ввода — вывода на кассетных магнитных лентах СМ-5211 или на гибких магнитных дисках на базе НГМД ЕС-5074, символьный дисплей ВТА-2000-30).

Для сбора, подготовки и обработки данных в целях оперативного управления технологическими процессами предназначен управляющий вычислительный комплекс СМ-3. Он применяется также в автоматизированных научных приборах, в испытательном и контрольном оборудовании, для научно-технических и экономических расчетов. При совместной работе с ЕС ЭВМ УВК СМ-3 используется в качестве интеллектуального терминала, периферийного процессора, процессора ввода — вывода, концентратора сообщений в сетевых структурах.

В системах автоматизации проектирования и научных экспериментов используются управляющие вычислительные комплексы СМ-4. Они применяются также в автоматизированных системах управления непрерывными и непрерывно-дискретными технологическими процессами и дискретными производствами, для решения задач расчетного характера в качестве терминальных станций в сетях ЭВМ.

Комплексы СМ-1404 представляют собой двухпроцессорные системы с двухканальным полупроводниковым оперативным запоминающим устройством. Имеют в своем составе переключатель типа СМ-1405 и двухканальное устройство внешней памяти на сменных магнитных дисках емкостью 29 М байт.

Управляющий вычислительный комплекс СМ-1410 предназначен для решения задач управления станков с ЧПУ. С его помощью можно производить также научно-технические расчеты и математическое моделирование объектов и процессов с использованием аппарата аналитических преобразований.

В системах управления технологическими процессами широко используются управляющие вычислительные комплексы СМ-1420. Они предназначены для работы в системах сбора, подготовки и обработки данных: в системах автоматизации научных экспериментов; в информационно-справочных, измерительных и информационно-измерительных системах; в сетях ЭВМ.

В УВК СМ-1420 можно использовать все операционные системы, разработанные для СМ-3 и СМ-4. Основными операционными системами для СМ-1420 служат РАФОС, ОС РВ и РОС РВ. Применяются ДИАМС-М, ТМОС.

Операционные системы удобны в эксплуатации, так как имеют широкий набор команд, обладающих большой гибкостью, а также разнообразные системы программирования на языке макроассемблер и языках высокого уровня ФОРТРАН, БЕЙСИК, ДИАСП, ПАСКАЛЬ, КОБОЛ.

Областями применения микроЭВМ СМ-1300, СМ-1624, СМ-1626, СМ-1629, СМ-1630, СМ-1633, СМ-1800, СМ-50/60 являются:

автоматизированное управление производством, например контроль и управление процессами внутри иерархических вычислительных систем, централизованный сбор измеряемых значений и контроль отдельных частичных процессов, программное управление станками и т. п.;

автоматизация лабораторных и испытательных работ, например управление отдельными устройствами и обработка измеряемых значений, управление комплексом устройств;

решение научно-технических и экономических задач, например децентрализованное выполнение указанных задач, сбор информации в системах сбора данных, фактурно-бухгалтерские и учетные работы и т. п.;

работа в системах обработки информации, управления массивами данных и вывода данных; управление периферийными устройствами, решение задач передачи данных и т. п.

Для этих же целей служат и микроэлектронные вычислительные машины семейства «Электроника», «Электроника-60», «Электроника-60М», автоматизированное рабочее место проектировщика 15 Т-4-017 «Электроника К200», «Электроника-100И», «Электроника 100/16И», «Электроника НЦ-1», «Электроника НЦ 80-01 Д», диалоговые вычислительные комплексы «Электроника НЦ 80-20», микроЭВМ «Электроника ДЗ-28», «Электроника С5-02», «Электроника С5-12», «Электроника С5-21», «Электроника С5-41».

Математическое обеспечение семейства микроЭВМ «Электроника» включает в себя ассемблер: БЕЙСИК, ФОКАЛ, ТМОС, ФОДОС и ОСДВК и различные стандартные и вспомогательные программы.

Глава 2

СОСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ОБЪЕКТОВ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

§ 1. Основные принципы метода

Математическое описание технического процесса — это совокупность различных таблиц, графиков, математических формул, отражающих соотношения между параметрами

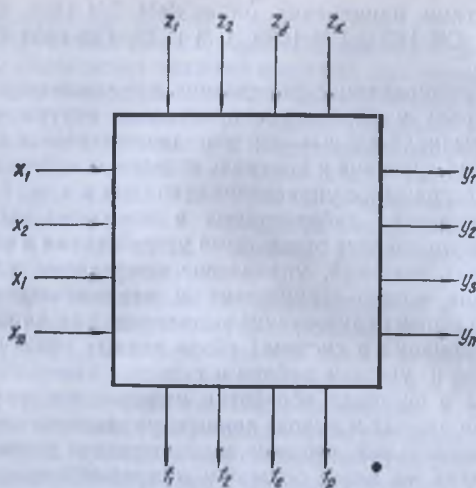


Рис. 9. Изображение технологического оператора.

процесса и выбранным критерием качества продукта, процесса, машины, аппарата и системы управления.

Допустим, что в технологическом объекте (аппарате, машине, агрегате), условно изображенном в виде прямоугольника, происходят изменения характеристик потока продукта (рис. 9). Для простоты будем считать, что поток обладает только одной ($i = 1$) характеристикой на входе и одной ($s = 1$) на выходе y . Такими характеристиками могут быть расход, концентрация, температура и пр. Изменения осуществляются с помощью одного из управляющих воздействий, которым может быть один из входных параметров. При неизменных условиях проведения процесса в аппарате величина выходной характеристики будет зависеть только от изменения входной

$$y = f(x). \quad (1)$$

В простейшем случае эта функция описывается линейным уравнением

$$y = b_0 + b_1 x. \quad (2)$$

Более сложные зависимости описываются полиномами n -й степени, трансцендентными, дифференциальными или другими видами уравнений.

Практическую задачу установления численного значения y в зависимости от величины x решают различными способами. При отсутствии каких-либо теоретических, гипотетических и других сведений количественную оценку связи между входом и выходом обычно получают экспериментально в виде таблицы с двумя столбцами. В одном из столбцов записывают выбранные или заданные значения x , а в другом — значения y . Для большей наглядности строят график. Обработав математически (например, по методу средних) полученные экспериментальные данные, получают зависимость $y = f(x)$ с численными значениями коэффициентов b_0 и b_1 в уравнении (2). По известным значениям этих коэффициентов можно вычислить значения y при разных x . В последнем случае уравнение (1) играет роль математической модели, пригодной для установления связи между выходным параметром y_1 и входным x_1 в тех пределах изменения x , которые были установлены экспериментально. Для составления такой простой модели экспериментальными методами необходимы приборы для измерения величин x и y , практическую возможность их изменения и измерения в заданном интервале, а также навыки по проведению опытов и обработке экспериментальных данных.

При наличии теоретических сведений такую же зависимость можно получить аналитически. Например, температуру холодного теплоносителя на выходе $t_{x, \text{вых}}$ из теплообменника определяют по уравнению вида (2) энергетического баланса

$$t_{x, \text{вых}} = Q/V\rho c + t_{x, \text{вх}}, \quad (3)$$

где Q — количество переданной теплоты в единицу времени, кДж/с ($Q/V\rho c = b_0$; $b_1 = 1$); V — объемный расход, м³/с; ρ — плотность, кг/м³; c — теплоемкость холодного теплоносителя, кДж/(кг · °С).

Для использования приведенного соотношения необходимы численные значения V , ρ , c и Q . Физические характеристики теплоносителя обычно приведены в справочной литературе. Расход измеряют или он может быть задан заранее. Количество полученной от горячей стенки теплоты определяют экспериментально или с помощью формул для вычисления теплоотдачи.

Следовательно, аналитические методы не исключают экспериментальное определение входящих в формулу величин. Только при этом определяют не переменные величины (x и y), а постоянные (в данном случае $b_0 = Q/V\rho c$). Ана-

литические методы применяют только для теплоносителей с известными физическими свойствами. Если же данные об этих свойствах отсутствуют, то для их определения проводятся специальные опыты.

Таким образом, описания получены при целом ряде не упоминавшихся, но как бы само собой разумеющихся допущений (постоянство физических свойств теплоносителей при изменении их температуры и пр.). Допущения или упрощения обычно принимают только в том случае, если они вносят допустимые отклонения вычисляемых параметров. Поэтому для установления связи между входом и выходом технологического объекта используют формулу (3) в рамках принятых допущений.

Можно выдвинуть гипотезу, что изменение температуры холодного теплоносителя на выходе пропорционально изменению температуры на входе

$$t_{x \text{ вых}} = b_0 + b_1 t_{x \text{ вх}}. \quad (4)$$

В этом случае определяют численные значения постоянных коэффициентов b_0 и b_1 при меньшем числе опытов. Для этого достаточно поставить эксперимент в крайних точках значений принятого диапазона изменения температур теплоносителя на входе. После их определения используют приведенную формулу для значений температуры теплоносителя на выходе. При этом прежде всего устанавливают, насколько та или иная зависимость отражает действительный процесс, определяют погрешность или разницу вычисленных и измеренных на объекте величин, т. е. устанавливают адекватность (соответствие) модели объекту. Следовательно, независимо от метода составления математического описания обязательным является постановка эксперимента. Количество поставленных опытов зависит от первичной информации об объекте. Если отсутствуют теоретические сведения, то количество опытов наибольшее, если же выдвинута удачная гипотеза, объем экспериментов иногда удается значительно сократить. При наличии хорошо разработанной теории процесса количество опытов наименьшее. Для установления адекватности иногда используются ретроспективные (полученные ранее) данные. Основная задача математического моделирования — получение количественной оценки при минимальном количестве опытов или затрат, что составляет основу оптимальной стратегии исследования.

Для приведенных простых случаев составления математических моделей достаточно использовать простые вычис-

лительные приборы непрерывного или дискретного способа действия. Простые случаи на практике встречаются редко, так как обычно через машину или аппарат проходит не менее одного потока продукта и одного рабочего агента (энергоносителя и пр.). Если каждый из потоков обладает только одной характеристикой, то процесс в аппарате или машине описывается системой двух уравнений

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2); \\ y_2 = f_2(x_1, x_2). \end{cases} \quad (5)$$

В случае линейных зависимостей уравнения будут иметь вид

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2; \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2. \end{cases} \quad (6)$$

где b_{is} — постоянные коэффициенты.

В качестве примера рассмотрим прямоточный рекуперативный теплообменник, имеющий два потока (горячий и холодный) теплоносителей. Каждый из потоков имеет не менее двух характеристик — температуру t , или x_1 , и расход g , или x_2 . Таким образом, условно изображенный на рис. 9 теплообменник в виде оператора будет иметь четыре входных x_1, x_2, x_3, x_4 и четыре выходных y_1, y_2, y_3, y_4 параметра. Если допустить, что между этими характеристиками существует линейная зависимость, процесс нагрева — охлаждения описывается системой уравнений

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}x_4; \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 + b_{24}x_4; \\ y_3 = b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 + b_{34}x_4; \\ y_4 = b_{41}x_1 + b_{42}x_2 + b_{43}x_3 + b_{44}x_4. \end{cases} \quad (7)$$

Для составления математической модели с целью количественного установления зависимостей выходных параметров y_i от входных x_i следует определить 16 значений постоянных b_{is} . Однако чтобы их определить, необходима система, состоящая не менее чем из 16 уравнений. Следовательно, нужно еще 12 уравнений. Экспериментальное исследование традиционными методами очень трудоемко. Если исходить из того, что в каждом диапазоне изменения каждого из четырех входных параметров x_i должно быть не менее 10 точек, а в каждой точке — не менее двух измерений, то при поочередном варьировании входных параметров следует поставить $10^4 \cdot 2 = 20\,000$ опытов. Такое большое число

опытов нет смысла проводить для решения этой сравнительно простой задачи. Во-первых, существующая теория процесса теплообмена позволяет установить с достаточной для практических целей точностью количественные связи аналитически (путем вычислений). Во-вторых, благодаря накапливающемуся опыту в области исследования теплообмена экспериментальные исследования при практически нереализуемых или заведомо невыгодных режимах не проводят. В-третьих, интуиция (неформальный метод) исследователя почти всегда позволит получить навык в процессе исследования и избежать излишней трудоемкой работы. Например, нетрудно установить, что расходы обоих теплоносителей, если они являются жидкостями, будут на входе и выходе одинаковыми. Кроме того, существуют чисто математические приемы, позволяющие значительно упростить определение постоянных коэффициентов b_{is} .

В практике исследовательской работы по технологии найти эти коэффициенты значительно сложнее. Рассмотренные четыре входных x_1, x_2, x_3, x_4 и четыре выходных y_1, y_2, y_3, y_4 параметра (температуры и расходы обоих теплоносителей на входе и выходе) хотя и являются определяющими для данного типа аппарата и выбранных теплоносителей, но процесс нагрева — охлаждения характеризуют не полностью.

Процесс передачи теплоты определяется еще физическими характеристиками обоих теплоносителей и теплопередающей поверхности (теплоемкостью, теплопроводностью, вязкостью, плотностью и пр.), скоростью теплоносителей, видом и формой поверхности теплообмена, потерями теплоты в окружающую среду и пр. Следовательно, процесс нагрева — охлаждения в теплообменнике самой простой конструкции характеризуется большим числом входных и выходных данных. Если допустить, что связи между ними носят линейный характер, то система уравнений (7) в обобщенном виде будет иметь вид

$$y_s = \sum_{i=1}^n b_{is} x_i \quad (s = 1, 2, \dots, n); \quad (8)$$

Систему (7) можно записать и в матричной форме

$$\vec{Y} = B \vec{X}, \quad (9)$$

где $\vec{Y}$ — вектор-столбец; B — матрица коэффициентов; $\vec{X}$ — вектор-строка.

Для количественной характеристики всех связей между параметрами необходимо иметь is значений коэффициентов b_{is} . Некоторые из этих связей устанавливаются аналитически (путем использования законов теплопередачи), а другие — только экспериментально. Кроме перечисленных выходных характеристик, которые можно измерить имеющимися измерительными средствами, процесс нагрева — охлаждения характеризуется такими параметрами, которые принципиально не могут быть измерены, а только вычислены: удельный расход теплоты на нагрев, площадь теплопередающей поверхности и пр. В отличие от первичных измерительных параметров вычисляемые параметры являются вторичными.

Всякий выбор параметров называется решением. Оптимальным же решением является такое сочетание, которое обеспечивает наилучшее (чаще всего наибольшее или наименьшее) значение выбранного критерия качества решения или критерия оптимальности. Обычно выбор оптимального значения возможен только в определенных условиях, которые задаются (определяются) в процессе расчета. Оптимальные характеристики обычно являются вычисляемыми, и их можно выбирать путем перебора всего количества вариантов, но практически они могут быть случайно угаданы либо получены путем автоматизации вычислений на ЭВМ. Поэтому оптимизация технологического процесса по какому-то показателю может быть проведена только путем вычисления.

Экспериментальные исследования в производственных условиях неизбежно связаны с нарушениями установленных технологических режимов и могут привести к порче большого количества продукта либо вызвать аварийную ситуацию. В некоторых случаях в производственных условиях эксперимент поставить невозможно. Поэтому применение математических моделей, позволяющих вычислить искомые параметры, не нарушая нормального хода процесса, имеет большое значение в совершенствовании технологических процессов.

§ 2. Планирование экспериментов для составления математического описания

Определение числа повторностей опытов

Для исследования технологических процессов пищевых производств и установления количественных связей между показателями качества процессов и определяющими факто-

рами широко используют математические описания, полученные на основе экспериментальных данных по различным планам. В связи с этим кратко опишем методику составления математических описаний по экспериментальным данным.

Рассматривая объект исследования как процесс управления, можно параметры объекта классифицировать в соответствии с принципами, принятыми в теории управления. Исследуемые или управляемые системы и объекты представляют структурными и параметрическими схемами и характеризуют параметрами состояния, наблюдения, управления и возмущения.

Параметры состояния, или управляемые параметры $y_1, y_2, \dots, y_s, \dots, y_m$, зависят от протекания процесса, характеризуют его режим и готовый продукт и используются как критерии качества или ограничения.

Параметры наблюдения $f_1, f_2, \dots, f_l, \dots, f_p$ также зависят от протекания процесса, могут быть контролируемыми и неконтролируемыми. Однако они не используются для исследования или управления.

Управляющие (или переменные) параметры $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ представляют собой воздействия на процесс, которые можно целенаправленно изменять.

Возмущающие параметры $z_1, z_2, \dots, z_l, \dots, z_k$ — это такие воздействия на процесс, которые не зависят от состояния объекта; ими управлять, т. е. изменять их, невозможно либо нецелесообразно.

Параметры состояния и наблюдения называют выходными, так как они характеризуют процесс или получаемый продукт. В зависимости от цели управления параметры состояния и наблюдения могут меняться местами. Управляющие и возмущающие параметры являются входными и изменяются в зависимости от задачи исследования. Возмущающие и наблюдаемые параметры могут быть контролируемыми.

При проведении экспериментальных исследований обычно устанавливают связи между входными факторами, влияющими на протекание процесса, и выходными параметрами процесса, которые характеризуют его свойства. Первые из них являются независимыми и могут принимать произвольные значения x_i на технологически возможных интервалах; вторые — зависимыми y_s , так как их значения определяются свойствами процесса и изменением независимых переменных.

Если одна из величин y_s зависит от другой x_i таким образом, что каждому значению x_i соответствует определенное

значение y_s , то такую зависимость называют функциональной, а если каждому значению x_i соответствует некоторая совокупность значений y_s и изменение величины x_i приводит к изменению распределения y_s , то статистической. Частным случаем статистической связи является корреляционная зависимость, когда изменение величины x_i обуславливает изменение распределения y_s и его среднего значения $\bar{y}_s$. Самым простым видом является линейная корреляционная связь

$$\bar{y} = b_0 + b_1 x. \quad (10)$$

Эксперимент проводят пассивными и активными методами. Под пассивными экспериментами понимают получение любых данных без планирования условий проведения опытов при случайном изменении входных факторов. При этом проводят измерения (регистрируют показания измерительных приборов) либо собирают необходимые данные по различным документам: журналам регистрации поступления или отправления грузов, вагонов, судов; накладным на прием или выдачу продукции; документам качества и другим в режимах нормальной эксплуатации, т. е. собирают данные в результате нормального протекания технологического процесса.

Пассивные методы наиболее целесообразно применять к работающим производственным установкам (натурные модели). Поскольку режим производственного процесса подвержен постоянным случайным изменениям, то каждое изменение можно рассматривать как эксперимент, поставленный случайным образом. Пассивные методы применяют не только для установления статических, динамических и других свойств технологических объектов, но и степени взаимосвязи между отдельными показателями хозяйственной деятельности предприятий.

Под случайным процессом понимают функцию $F(\tau)$ от независимого параметра τ , которая при некотором числе исходных опытов может принимать в зависимости от условий каждого i -го опыта конкретный, но заранее неизвестный случайный вид $f_i(\tau)$. Случайный процесс является функцией двух переменных — независимого аргумента τ и параметра i , зависящего от условий эксперимента (случая). Математическим отображением случайного процесса будет случайная функция. Если в качестве независимой переменной случайной функции выступает время, то случайную функцию называют стохастической. Каждая отдельно

рами широко используют математические описания, полученные на основе экспериментальных данных по различным планам. В связи с этим кратко опишем методику составления математических описаний по экспериментальным данным.

Рассматривая объект исследования как процесс управления, можно параметры объекта классифицировать в соответствии с принципами, принятыми в теории управления. Исследуемые или управляемые системы и объекты представляют структурными и параметрическими схемами и характеризуют параметрами состояния, наблюдения, управления и возмущения.

Параметры состояния, или управляемые параметры $y_1, y_2, \dots, y_s, \dots, y_m$, зависят от протекания процесса, характеризуют его режим и готовый продукт и используются как критерии качества или ограничения.

Параметры наблюдения $f_1, f_2, \dots, f_l, \dots, f_p$ также зависят от протекания процесса, могут быть контролируемыми и неконтролируемыми. Однако они не используются для исследования или управления.

Управляющие (или переменные) параметры $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$ представляют собой воздействия на процесс, которые можно целенаправленно изменять.

Возмущающие параметры $z_1, z_2, \dots, z_j, \dots, z_k$ — это такие воздействия на процесс, которые не зависят от состояния объекта; ими управлять, т. е. изменять их, невозможно либо нецелесообразно.

Параметры состояния и наблюдения называют выходными, так как они характеризуют процесс или получаемый продукт. В зависимости от цели управления параметры состояния и наблюдения могут меняться местами. Управляющие и возмущающие параметры являются входными и изменяются в зависимости от задачи исследования. Возмущающие и наблюдаемые параметры могут быть контролируемыми.

При проведении экспериментальных исследований обычно устанавливают связи между входными факторами, влияющими на протекание процесса, и выходными параметрами процесса, которые характеризуют его свойства. Первые из них являются независимыми и могут принимать произвольные значения x_i на технологически возможных интервалах; вторые — зависимыми y_s , так как их значения определяются свойствами процесса и изменением независимых переменных.

Если одна из величин y_s зависит от другой x_i таким образом, что каждому значению x_i соответствует определенное

значение y_s , то такую зависимость называют функциональной, а если каждому значению x_i соответствует некоторая совокупность значений y_s и изменение величины x_i приводит к изменению распределения y_s , то статистической. Частным случаем статистической связи является корреляционная зависимость, когда изменение величины x_i обуславливает изменение распределения y_s и его среднего значения y_s . Самым простым видом является линейная корреляционная связь

$$\bar{y} = b_0 + b_1 x. \quad (10)$$

Эксперимент проводят пассивными и активными методами. Под пассивными экспериментами понимают получение любых данных без планирования условий проведения опытов при случайном изменении входных факторов. При этом проводят измерения (регистрируют показания измерительных приборов) либо собирают необходимые данные по различным документам: журналам регистрации поступления или отправления грузов, вагонов, судов; накладным на прием или выдачу продукции; документам качества и другим в режимах нормальной эксплуатации, т. е. собирают данные в результате нормального протекания технологического процесса.

Пассивные методы наиболее целесообразно применять к работающим производственным установкам (натурные модели). Поскольку режим производственного процесса подвержен постоянным случайным изменениям, то каждое изменение можно рассматривать как эксперимент, поставленный случайным образом. Пассивные методы применяют не только для установления статических, динамических и других свойств технологических объектов, но и степени взаимосвязи между отдельными показателями хозяйственной деятельности предприятий.

Под случайным процессом понимают функцию $F(\tau)$ от независимого параметра τ , которая при некотором числе исходных опытов может принимать в зависимости от условий каждого i -го опыта конкретный, но заранее неизвестный случайный вид $f_i(\tau)$. Случайный процесс является функцией двух переменных — независимого аргумента τ и параметра i , зависящего от условий эксперимента (случая). Математическим отображением случайного процесса будет случайная функция. Если в качестве независимой переменной случайной функции выступает время, то случайную функцию называют стохастической. Каждая отдельно

взятая функция $f_u(\tau)$ — это реализация случайного процесса, а их совокупность при проведении u -х опытов — ансамбль или множество реализаций.

Среднее по множеству реализаций значение случайной функции называют моментом первого порядка, дисперсию случайной функции — моментом второго порядка и т. д. В теории случайных функций большое значение имеет центральный момент второго порядка, который называют автокорреляционной или просто корреляционной функцией. Центральный смешанный момент второго порядка для двух случайных процессов с u реализациями называют взаимной корреляционной функцией двух случайных процессов, т. е. мерой связи ординат двух различных случайных процессов.

Положительными в пассивном эксперименте являются относительная простота получения исходных данных и сравнительно небольшие затраты на их получение. Однако пассивным экспериментам присущ целый ряд недостатков:

диапазоны изменения входных параметров могут не соответствовать поставленной задаче исследования, т. е. опытные точки неудачно расположены;

совокупность полученных данных содержит недостаточное количество полезной информации;

изменения выходных параметров обусловлены изменениями неконтролируемых входных параметров.

Пассивный эксперимент проводят без плана, тем не менее к его организации предъявляют определенные требования, выполнение которых обеспечивает необходимое качество полученных данных. Например, оснащение объекта в необходимых точках соответствующими измерительными приборами, установление периодичности регистрации данных приборов, интегрирование (суммирование) времени проводимых исследований, порядок регистрации данных по документам и т. д.

Пассивный эксперимент широко используют для получения динамических характеристик. Его применяют в тех случаях, когда исследуемый объект не допускает возможности изменения входных параметров в необходимых пределах при постановке активного эксперимента (нанесение ступенчатых или других стандартных возмущений). Динамические характеристики линейного объекта, описываемого дифференциальными уравнениями с постоянным коэффициентом, определяются пассивными методами в следующем порядке: записываются случайные процессы на входе и выходе; вычисляются корреляционные функции входного и выходного

сигналов, записываются уравнения Винера — Хинчина относительно импульсной или фазочастотной функции. Эти уравнения устанавливают связи между авто- и взаимно корреляционными функциями. Например, если на вход линейной динамической системы с импульсной характеристикой подать сигнал $x(\tau)$, совпадающий с автокорреляционной функцией, то на выходе этой системы должен появиться сигнал $y(\tau)$, совпадающий со взаимно корреляционной функцией.

Пассивные методы, хотя и просты в применении, но недостаточно чувствительны к коррелированным возмущениям, т. е. менее точны, а обработка данных, полученных этими методами, сложна. Получение динамических характеристик пассивными методами изложено в специальных курсах теории автоматического управления.

Активный, заранее спланированный, эксперимент ставят в том случае, если исследуемый объект допускает возможность постановки опытов в необходимых пределах. При этом достигают снижения затрат труда, средств и времени, повышения надежности полученных результатов исследования, одновременного изучения большого числа факторов, влияющих на процесс, учета влияния каждого из факторов и межфакторных взаимодействий. Планы изменения входных факторов должны предусматривать применение простых и наименее трудоемких методов обработки полученных результатов, дающих возможность получить описание процесса наиболее простыми средствами. Активные эксперименты проводят как в производственных условиях, так и на различных физических моделях. На основе результатов этих экспериментов можно получить математическое описание в виде полиномов, пользуясь методами регрессионного и корреляционного анализа. Соблюдение исходных предпосылок, принятых при разработке этих методов, обеспечивает корректность полученных результатов.

В основе корреляционного анализа лежит предпосылка о том, что зависимая переменная величина y_s (выходной параметр) и независимые переменные x_i (факторы) — это случайные величины с распределением, подчиняющимся нормальному закону, и между ними существует корреляционная взаимосвязь. Предметом корреляционного анализа является определение характера распределения и количественной оценки разброса значений зависимой величины, получаемых при фиксированных значениях независимой переменной. Корреляционный анализ сводится к изменению

тесноты или степени сопряженности между варьирующими признаками и определению формы и направления существующей между ними связи. Если направление связи между признаками x и y выражается прямой линией, то корреляция называется линейной, если же корреляционная зависимость имеет другую форму, то нелинейной.

Однако во многих экспериментальных исследованиях необходимо не только количественно оценивать степень взаимосвязи между входными факторами (переменными) и выходными параметрами, но и определять характер этой взаимосвязи. В связи с этим целесообразно применять *регрессионный анализ*, предполагающий связь случайной выходной величины y , и неслучайных переменных x_i в виде уравнения регрессии. Регрессионный анализ предназначен для определения функциональной зависимости между средними значениями одного из признаков от независимой переменной x .

Если в системе координат xOy нанести средние значения $\bar{y}_s$, соответствующие каждому значению x_i , и провести линию, соединяющую средние значения $\bar{y}_s$, то получим функциональную зависимость $y = f(x)$ — линию регрессии. Для того чтобы линия наилучшим образом соединяла средние значения $\bar{y}_s$, ее проводят так, чтобы сумма квадратов расстояний всех точек, измеренных параллельно оси y , была наименьшей. Регрессионный анализ допустим при выполнении следующих условий:

значения переменной y_s в каждом опыте являются независимыми нормально распределенными случайными величинами;

ошибка независимых переменных x_i очень мала по сравнению с ошибкой зависимого переменного y_s , а x_i не коррелированы друг с другом;

дисперсии переменной y — $S_1^2, S_2^2, \dots, S_n^2, \dots, S_N^2$ при переходе от опыта к опыту однородны (где N — число опытов).

При выполнении этих условий оценки коэффициентов регрессии будут состоятельными, несмещенными, эффективными и достаточными. Состоятельная оценка с увеличением объема выборки стремится к оцениваемому параметру. Оценку называют несмещенной, если ее математическое ожидание при любом объеме выборки равно оцениваемому параметру. Если несмещенная оценка по сравнению с другими обладает наименьшей дисперсией, то ее называют эффектив-

ной. Оценки, обладающие всеми этими свойствами, считаются достаточными.

Математическое ожидание M случайной величины — это сумма произведений каждого значения такой величины на соответствующую вероятность его появления или среднее арифметическое всех значений, которые принимает случайная величина в n -х опытах, при условии, что число этих опытов возрастает неограниченно ($n \rightarrow \infty$).

Дисперсией случайной величины $D = \sigma^2$ называют характеристику ее рассеивания около математического ожидания или математическое ожидание квадрата разности между случайной величиной и ее математическим ожиданием.

Однако при проведении эксперимента значение n конечно и определяется объемом выборки. Поэтому математическое ожидание (среднее выборочное) $\bar{y}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение S в известной мере отличаются от действительных значений и генеральной совокупности.

Большое значение имеют самостоятельные и несмещенные оценки математического ожидания (выборочного среднего) и выборочной дисперсии, которые для измеряемого параметра технологического процесса определяются по выражениям

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}; \quad S_{y_i}^2 = D = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \quad (11)$$

где $\bar{y}$, y_i — среднее и текущее значения измеряемого параметра; n — количество повторных измерений (опытов); D — дисперсия отдельных измерений.

Разность между числом повторностей опытов n и числом уравнений, в которых использовались результаты опытов, называют числом степеней свободы f . Поскольку для расчета $\bar{y}$ использовали одно уравнение, то $f = n - 1$.

При проведении экспериментальных исследований необходимо установить количество повторностей опыта для выбранной измеряемой величины. Для этого задают доверительную вероятность p и допустимую ошибку e , выраженную в долях выборочного среднеекватрического отклонения $S = \sqrt{D}$.

Доверительная вероятность является вероятностью того, что значения измеряемой величины находятся в пределах доверительного интервала $y - \Delta y < y < y + \Delta y$, т. е. в пределах допустимого или заданного отклонения изме-

ряемой величины. В более общем смысле вероятностью называют меру объективной возможности и необходимости появления данного события. С увеличением доверительной вероятности увеличивается доверительный интервал, т. е. вероятность того, что результаты измерений не выйдут за его пределы. При обычных исследованиях технологических процессов принимают доверительную вероятность в пределах $p = 0,80-0,95$. Для повышения надежности опытов требуется увеличить повторность измерений.

Если пределы изменения измеряемой величины неизвестны, то можно для определения числа повторностей задаться ошибкой опыта $\varepsilon = \pm 3\sigma$ (правило трех сигм). Конкретные условия проведения эксперимента позволяют уточнить допустимую ошибку опыта (предельное отклонение измеряемой величины). Вероятность появления такого отклонения не превышает трех средних квадратических (3σ) и равна 0,9974. Вероятность появления отклонения в этом случае очень мала: $\alpha = 1 - p = 1 - 0,9974 = 0,0026$.

Дисперсия выборочной средней как случайной переменной составляет

$$D_{\bar{y}} = D/n,$$

где D — дисперсия отдельных измерений; n — число измерений (повторностей опыта).

Средняя квадратическая ошибка выборочной средней $S_{\bar{y}}$ составляет

$$S_{\bar{y}} = \frac{S}{\sqrt{n}}, \quad (12)$$

т. е. ошибка выборки пропорциональна корню квадратному из числа измерений.

Точность измерений определяется величиной

$$\varepsilon = t_{\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad (13)$$

где t_{α} — показатель достоверности (критерий Стьюдента).

Величину t_{α} находят по специальным таблицам в зависимости от принятого уровня значимости $\alpha = 1 - p$ и числа степеней свободы. Из равенства (13) можно определить число измерений n , которые необходимо произвести, чтобы обеспечить заданную точность измерения при принятой доверительной вероятности p

$$n = \frac{t_{\alpha}^2 \sigma^2}{\varepsilon^2}. \quad (14)$$

Таблица 3. Необходимое количество повторностей опытов

Предельная ошибка ε в долях σ	Доверительная вероятность p			
	0,80	0,90	0,95	0,99
3,0	1	2	3	4
2,0	2	3	4	5
1,0	4	5	7	11
0,5	9	13	18	31
0,4	12	19	27	46
0,3	20	42	46	78
0,2	43	70	99	171
0,1	266	273	387	668

Если среднеквадратическое отклонение генеральной совокупности σ неизвестно, что наиболее часто встречается при проведении эксперимента, то используют результаты предварительно проведенной серии измерений

$$n = \frac{t_{\alpha}^2 S^2}{\varepsilon^2}. \quad (15)$$

Необходимое число измерений можно определить по табл. 3, которая значительно упрощает нахождение числа необходимых измерений (опытов) для обеспечения заданной точности при принятой доверительной вероятности p .

Если проводят несколько серий многократных измерений одного и того же параметра при различных условиях ведения процесса, то вычисляют средневзвешенную оценку дисперсии единичного результата.

В каждой из N серий (номер серии $u = 1, \dots$) дисперсия единичного результата

$$S_{y_{ui}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_u} (y_i - \bar{y})^2}{n_u - 1}. \quad (16)$$

Средневзвешенную для всех серий дисперсию единичного результата при условии, что в каждой серии число повторностей одинаково ($n_u = n = \text{const}$), рассчитывают по формуле

$$S_{\bar{y}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N S_{y_{ui}}^2 = \frac{1}{N(n-1)} \sum_{u=1}^N \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2, \quad (17)$$

где $f = N(n-1)$.

Вычисление коэффициентов регрессии

В процессе составления математической модели корреляционный и регрессионный анализы позволяют решить следующие основные задачи:

вычислить коэффициенты регрессии для выбранного уравнения (полинома);
определить наличие связи между выходным параметром y и факторами x_i , количественно оценить тесноту этой связи; проверить точность вычисления коэффициентов регрессии b_i (оценить их значимость);

выявить, насколько выбранная форма уравнения регрессии отражает реальный процесс (проверка адекватности).

Для получения простейшей математической модели в виде линейной зависимости с двумя коэффициентами регрессии $y = b_0 + b_1x$ необходимо найти численные значения коэффициентов b_0 и b_1 . Если при изменении в системе нет никаких помех, то достаточно двух опытов, чтобы установить численные значения этих коэффициентов

$$\begin{cases} y_1 = b_0 + b_1x_1; \\ y_2 = b_0 + b_1x_2. \end{cases} \quad (18)$$

Вследствие разброса значений результатов измерения для определения коэффициентов ставят определенное количество серий опытов N и получают систему уравнений

$$\begin{cases} y_1 = b_0 + b_1x_1; \\ y_2 = b_0 + b_1x_2; \\ \dots \dots \dots \\ y_N = b_0 + b_1x_N. \end{cases} \quad (19)$$

Для усреднения экспериментальных данных обычно пользуются методом наименьших квадратов, при котором сумма квадратов отклонений выходного параметра объекта y и модели $\hat{y}$ минимальна.

Поскольку течение технологического процесса определяется многими независимыми и зависимыми переменными, то составление математической модели по экспериментальным данным требует постановки опытов, учитывающих влияние всех основных факторов, существенно влияющих на исследуемый процесс. Для обработки и обоснования таких опытов применяется множественный регрессионный анализ, при котором устанавливается зависимость выбранного показателя технологического процесса y от определяющих факторов x_i , т.е. определяются коэффициенты $b_0, b_1, \dots, b_n$

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n. \quad (20)$$

Эта задача принципиально не отличается от задачи определения коэффициентов в уравнениях связи для двух параметров. Однако с увеличением числа уравнений число коэффициентов возрастает, а вычисления значительно усложняются, поэтому используют специальные приемы, которые облегчают нахождение значений коэффициентов уравнения регрессии. Это требование можно записать следующим образом:

$$F = \sum_{u=1}^N (y_u - \hat{y})^2 = \min, \quad (21)$$

или

$$F = \sum_{u=1}^N (y_u - b_0 - b_1x_u)^2 = \min. \quad (22)$$

Исходя из того, что условием минимума дифференцируемой функции нескольких переменных является равенство нулю частных производных по искомым величинам, то

$$\frac{dF}{db_0} = 2 \sum_{u=1}^N (y_u - b_0 - b_1x_u) = 0; \quad (23)$$

$$\frac{dF}{db_1} = 2 \sum_{u=1}^N (y_u - b_0 - b_1x_u) x_u = 0.$$

Перейдя к системе нормальных уравнений

$$\begin{aligned} Nb_0 + b_1 \sum_{u=1}^N x_u &= \sum_{u=1}^N y_u; \\ b_0 \sum_{u=1}^N x_u + b_1 \sum_{u=1}^N x_u^2 &= \sum_{u=1}^N x_u y_u, \end{aligned} \quad (24)$$

можно получить расчетные формулы для вычисления коэффициентов

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^N y_u \sum_{u=1}^N x_u^2 - \sum_{u=1}^N x_u y_u \sum_{u=1}^N x_u}{N \sum_{u=1}^N x_u^2 - \left(\sum_{u=1}^N x_u \right)^2}, \quad (25)$$

$$b_1 = \frac{N \sum_{u=1}^N x_u y_u - \sum_{u=1}^N x_u \sum_{u=1}^N y_u}{N \sum_{u=1}^N x_u^2 - \left(\sum_{u=1}^N x_u \right)^2}. \quad (26)$$

Коэффициент b_0 можно найти и по известному значению b_1 из уравнения

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}.$$

Для оценки тесноты связи линейной зависимости используется выборочный коэффициент парной корреляции $r_{y,x}$, который рассчитывают по формуле

$$r_{y,x} = \frac{\sum_{u=1}^N (x_u - \bar{x})(y_u - \bar{y})}{(N-1) S_x S_y}, \quad (27)$$

где N — число опытов; $\bar{x}$, $\bar{y}$ — средние значения входного фактора и выходного параметра; S_x , S_y — средние квадратичные отклонения x и y .

При этом

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N x_u; \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N y_u; \\ S &= \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{u=1}^N (x_u - \bar{x})^2}; \quad S_y = \\ &= \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{u=1}^N (y_u - \bar{y})^2}. \end{aligned}$$

Коэффициент $r_{y,x}$ изменяется от -1 до $+1$, т. е. $|r| \leq 1$. Чем ближе $|r_{y,x}|$ к единице, тем теснее связь между исследуемыми параметрами. Если $|r_{y,x}| = 1$, то имеется линейная функциональная зависимость между x и y . Равенство коэффициента корреляции нулю свидетельствует об отсутствии линейной зависимости между x и y , но не исключает нелинейной корреляции между ними. После преобразования

$$r_{y,x} = b_1 S_x / S_y \quad (28)$$

можно получить еще одну формулу для записи уравнения регрессии

$$\hat{y} - \bar{y} = r_{y,x} \frac{S_y}{S_x} (x - \bar{x}). \quad (29)$$

Однофакторный эксперимент не дает возможности выявить оптимальные значения выходного параметра с учетом взаимодействия двух и более факторов и поэтому имеет ограниченное применение.

Выбор плана эксперимента

Более эффективными для сокращения числа опытов являются многофакторные планы, при которых одновременно варьируют несколькими факторами. Для проведения опытов составляют специальные матрицы планирования, в них определяются число опытов и пределы изменения факторов. Матрица представляет собой перечень вариантов, взятых в данной серии опытов. Фактором принято называть входные параметры процесса x_i (см. рис. 9). Зависимость какого-либо выходного параметра от двух и более факторов называют многофакторной и представляют ее для двух факторов в виде поверхности, а трех и более — в виде гиперповерхности. Матрицы планирования для двух факторов x_1 , x_2 и трех x_1 , x_2 , x_3 на двух уровнях представлены в табл. 4 и 5. Такие матрицы планирования называют полным факторным экспериментом (ПФЭ) типа 2^2 и 2^3 соответственно. Величина является постоянной для каждой матрицы, она определяет среднее значение (центр плана). Знаки $(+)$ и $(-)$ — это верхний и нижний уровни каждого фактора, которые удобно представить в кодированном виде. Буквы abc обозначают,

Таблица 4. Матрица ПФЭ типа 2^2

Входные переменные (факторы)				Выход
x_0	x_1		$x_1 x_2$	y
$+1$	-1	-1	$+1$	y_1
$+1$	$+1$	-1	-1	y_2
$+1$	-1	$+1$	-1	y_3
$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	y_4

Таблица 5. Матрица ПФЭ типа 2^3

Входные переменные (факторы)								Выход	
x_0	x_1	x_2	x_3	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$x_1 x_2 x_3$	Код	y
$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	(1)	y_1
$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	a	y_2
$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$	b	y_3
$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	$-$	ab	y_4
$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	c	y_5
$+$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$	ac	y_6
$+$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$	bc	y_7
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	abc	y_8

Таблица 6. Первая полуреблика ДФЭ³⁻¹

Входные переменные (факторы)				Выход	
x_0	x_1	x_2	x_3	Код	y
+	-	-	+	c	y_5
+	+	-	-	a	y_3
+	-	+	-	b	y_2
+	+	+	+	abc	y_4

Таблица 7. Вторая полуреблика ДФЭ 2³⁻¹

Входные переменные (факторы)				Выход	
x_0	x_1	x_2	x_3	Код	y
+	-	-	+	(1)	y_1
+	+	-	-	ac	y_6
+	-	+	-	bc	y_7
+	+	+	+	ab	y_4

что факторы x_1, x_2, x_3 находятся на верхнем уровне, ab — факторы x_1 и x_2 и т. д. Символ (1) обозначает, что все факторы находятся на нижнем уровне. Для снижения числа опытов пользуются дробными репликами или постановкой дробного факторного эксперимента (ДФЭ). Если в матрице типа 2³ произведение x_1x_2 приравнять третьему фактору x_3 , то можно ограничиться четырьмя опытами, матрица которых 2³⁻¹ представлена в табл. 6, а матрица второй полуреблики — в табл. 7. Этот третий расчетный фактор называют дополнительным. Если число дополнительных факторов принять 2, то план называется четвертьрепликой, 3 — одной восьмой реплики и т. п.

Количество вариантов опытов, которое необходимо поставить по матрице планирования, зависит от числа изучаемых факторов n . Всего на двух уровнях для n факторов возможно 2ⁿ вариантов планирования. Для приближенного описания процесса линейным уравнением и возможности оценки его адекватности достаточно поставить от $n + 2$ до $n + 6$ вариантов опытов. При этом важно, чтобы в них примерно одинаковое число раз встречались верхние и нижние уровни каждого фактора.

Для упрощения расчетов и более точного определения направления движения к оптимуму опыты ставят по так

называемым ортогональным матрицам. В них из всех возможных вариантов выбрано небольшое их количество. При этом соблюдаются следующие условия:

в серии опытов количество вариантов с верхним уровнем каждого фактора равно количеству вариантов с нижним уровнем того же фактора;

верхний и нижний уровни любого фактора сочетаются одинаковое количество раз с верхним и нижним уровнями всех остальных факторов.

После составления матрицы планирования и выбора интервалов варьирования факторов в соответствии с вариантами матрицы ставят опыты, по результатам которых рассчитывают линейное уравнение регрессии:

$$\bar{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n,$$

где $\bar{y}$ — вектор выхода (критерий оптимальности); b_0 — остаточный член уравнения регрессии; x_i — значения нормализованных уравнений факторов, влияющих на процесс; b_i — коэффициенты регрессии, показывающие степень влияния i -го фактора на вектор выхода; i — номер фактора.

Нормализованные уровни определяются соотношением

$$x_i = \frac{x_{i\text{н}} - x_{i\text{он}}}{\lambda_i}, \quad (30)$$

где $x_{i\text{н}}$, $x_{i\text{он}}$ — натуральные значения i -го фактора и основного уровня фактора; λ — интервал варьирования i -го фактора.

С помощью ортогональных матриц легко вычислить коэффициенты регрессии. Среднее значение выхода для всех вариантов матрицы планирования равно

$$y_n = \frac{\sum_{i=1}^n y_{ni}}{n}, \quad (31)$$

где n — число повторностей i -го опыта.

Линейные коэффициенты регрессии для каждого фактора вычисляются по формуле

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^N y_u x_{iu}}{N}, \quad (32)$$

где y_u — среднее для всех повторений u -го варианта матрицы планирования; x_{iu} — номер i -го фактора в u -м

варианте матрицы планирования; N — общее число вариантов матрицы планирования, которое равно

$$N = \sum_{u=1}^N x_{iu}^2.$$

При вычислении коэффициента регрессии складывают значения вектора выхода всех вариантов, у которых данный фактор был на верхнем уровне, а из этой суммы вычитают сумму выхода тех вариантов, где данный фактор был на нижнем уровне, и полученное число делят на общее число вариантов в матрице планирования.

Положительное значение коэффициента регрессии указывает на увеличение вектора выхода (критерия оптимизации), а отрицательное — на его уменьшение. Чем больше коэффициент регрессии, тем больше данный фактор влияет на процесс. Затем оценивают достоверность полученных результатов. Поскольку коэффициенты регрессии рассчитаны по значениям вектора выхода, которые определенным образом изменяются, то и для них есть какой-то уровень случайных изменений, который необходимо определить с помощью статистической обработки. Для этого определяют дисперсию процесса, характеризующую уровень его воспроизводимости, по данным повторных экспериментов матрицы планирования. Среднюю дисперсию воспроизводимости процесса вычисляют по формуле

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{i=1}^n (y_{ui} - \bar{y}_u)^2}{(y-1) Nn}, \quad (33)$$

где y_{ui} — повторение u -го варианта матрицы планирования; i — число повторений u -го варианта матрицы планирования.

В этом случае для N вариантов опытов, каждый из которых повторен n раз, нужно найти среднее значение $\bar{y}$ в каждом варианте, отклонение от средних значений $(y - \bar{y})$ и их квадраты $(y - \bar{y})^2$, а затем сложить для всех n повторностей N вариантов, т. е. $\sum_{u=1}^N \sum_{i=1}^n (y_{ui} - \bar{y}_u)^2$, и разделить на N и $(n - 1)$. Из формулы (33) видно, что n должно быть не меньше двух. Величина $N(n - 1)$ определяет надежность вычисления дисперсии и является числом степеней свободы f — важным статистическим показателем. Для надежного определения ошибки воспроизводимости процесса число степеней свободы должно быть не менее 5—8.

Дисперсия, характеризующая ошибки в определении коэффициентов регрессии, определяется выражением

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_y^2}{N} = \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{i=1}^n (y_{ui} - \bar{y}_u)^2}{(n-1) nN}. \quad (34)$$

Среднее квадратическое отклонение для коэффициентов регрессии определяют по формуле

$$\sigma_{bi} = \sqrt{\frac{\sigma_y^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{u=1}^N \sum_{i=1}^n (y_{ui} - \bar{y}_u)^2}{(n-1) nN^2}}. \quad (35)$$

Чем больше дисперсия, тем хуже воспроизводимость процесса. Оценка воспроизводимости может быть определена по критерию Кохрена

$$G = \frac{\sigma_{i\max}}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}. \quad (36)$$

Дисперсию каждой серии вычисляют по формуле

$$\sigma_i^2 = \frac{\sum_{l=1}^N (y_{il} - \bar{y}_i)^2}{n-1}, \quad (37)$$

где n — число параллельных опытов; y_{il} — отклик i -го параллельного опыта; $\bar{y}_i$ — средний отклик в данном опыте.

Диапазон возможных случайных изменений коэффициентов регрессии (доверительный интервал) ϵ вычисляют по формуле

$$\epsilon = t_a \sigma_{bi}, \quad (38)$$

где t_a — критерий Стьюдента, определяемый из таблиц и зависящий от числа степеней свободы $f = N(n - 1)$, которые получают при расчете дисперсии воспроизводимости процесса.

Коэффициент регрессии значим только тогда, когда его величина превышает по абсолютной величине доверительный интервал. Незначимость коэффициента регрессии может быть обусловлена слишком малыми интервалами варьирования факторов, плохой воспроизводимостью процесса, когда все различия в выходе нивелируются ошибкой опыта, близостью значения фактора к оптимальному уровню или незначительным его влиянием на процесс вообще.

Кроме изложенных формальных сторон получения экспериментальной информации о технологических процессах следует учитывать и неформальные чисто технологические аспекты планирования эксперимента, т. е. определять возможности измерения величин в данных условиях, в заданных пределах, а также стабилизации несущественных факторов, условия пересчета данных применительно к производственным условиям и пр.

При выборе плана эксперимента следует учитывать некоторые наиболее распространенные ошибки: нечеткую оценку изучаемого объекта, неудачный выбор показателя качества решения задачи, неполный анализ имеющихся теоретических представлений об изучаемом объекте, недостаточный анализ технологических потоков, их характеристик, неполный учет возможностей их измерения, не соответствующий поставленной задаче исследования выбор факторов, включаемых в план экспериментов и т. д.

Иногда составляют математические модели для описания единичных или случайных явлений, которые происходят только при данных конкретных условиях. Механизм процесса при этом не выявляется, а модель дублирует экспериментальные данные и не является источником новой информации. Однократное же использование модели приводит к тому, что квалифицированный труд исследователя в дальнейшем не используется.

Глава 3

СОСТАВЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ОБЪЕКТОВ АНАЛИТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

§ 1. Методика составления математического описания аналитическими методами

В связи с применением методов математического моделирования в пищевой технологии и других отраслях промышленности выработаны определенные методические приемы, которые значительно упрощают и упорядочивают составление математических моделей и получение количественной оценки. В достаточной степени разработана и общая формальная процедура составления математических описаний.

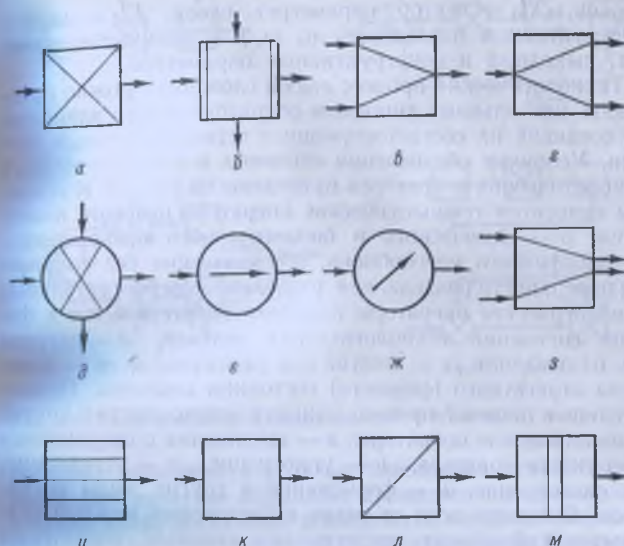


Рис. 10. Обозначения операторов, применяемых для изображения технологических схем.

Установлены основные понятия, определения и терминология. Это позволило унифицировать математические модели и процедуры их составления. Например, в технологии для обобщенного обозначения технологической операции, приводящей к изменению каких-то свойств потока продукта или рабочего агента, появился термин «технологический оператор», схема которого была приведена на рис. 9. Он преобразует физические характеристики или параметры входных потоков основного продукта и рабочего агента в физические параметры выходных потоков. Качественное преобразование обычно связано с изменением состава потоков, т. е. с исчезновением поступивших либо появлением новых веществ или свойств потоков (параметров), а количественное — с изменением величины параметров. Символическую модель j -го многомерного технологического оператора можно выразить в виде функциональной зависимости

$$[Y_{mj}^I] = [F_{mj}^I \{ [X_{nj}^I] [K_{pj}^I] \}], \quad (39)$$

где Y_{mj}^I — вектор параметров выхода; F_{mj}^I — линейная вектор-функция, связывающая входные и выходные параметры

потоков; X_{n1}^I — вектор параметров входа; K_{n1}^I — вектор конструктивных параметров; n, m, p — количество входных, выходных и конструктивных параметров.

Технологический процесс любой сложности можно представить несколькими типовыми операторами или элементами, соединив их соответствующими технологическими связями. Условные обозначения основных и вспомогательных технологических операторов приведены на рис. 10. К основным относятся технологические операторы целевого назначения: *а* — химического и биологического превращения, *б* — межфазного массообмена, *в* — смешения без сохранения поверхности раздела, *г* — разделения. Вспомогательные технологические операторы изменяют энергетическое и фазовое состояния технологических потоков: *д* — нагрева или охлаждения, *е* — сжатия или расширения, *ж* — изменения агрегатного (фазового) состояния вещества. Применительно к пищевой промышленности можно ввести и другие технологические операторы: *з* — соединения с сохранением поверхности раздела, *и* — уплотнение, *к* — усреднение, *л* — растворение, *м* — формование и другие виды операторов. В зависимости от задач исследования каждый технологический объект представляют типовым оператором либо их совокупностью.

Взаимодействия отдельных технологических операторов и внешней среды изображают технологическими связями или соединениями. Каждой технологической связи соответствует физический технологический (материальный или энергетический) поток. Типы технологических связей приведены на рис. 11. Основными технологическими связями являются: *а* — последовательная, *б* — последовательно-обводная (байпас), *в* — параллельная, *г* — обратная (рецикл) и *д* — перекрестная.

При последовательной технологической связи потоки проходят через каждый элемент не более одного раза. Последовательная технологическая связь повышает эффективность данной группы технологических операторов. Например, измельчение исходного продукта (промежуточных и других продуктов) с последующим неоднократным сепарированием продуктов измельчения применяют для увеличения степени измельчения и разделения (обогащения) продуктов.

Последовательно-обводная технологическая связь является усложненным вариантом последовательной связи элементов. Ее используют во всех процессах технологии

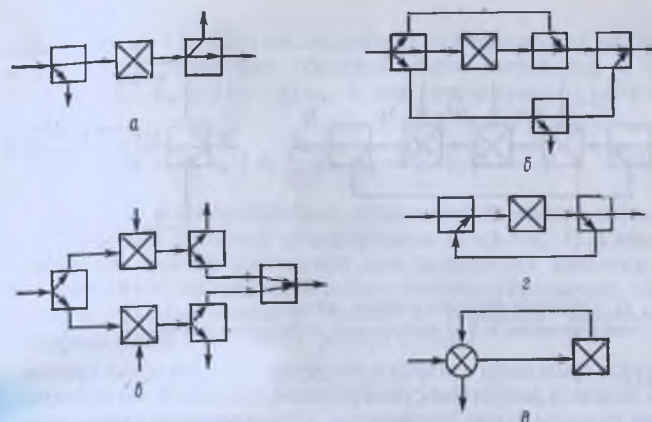


Рис. 11. Типы основных технологических связей между операторами.

пищевых производств с целью повышения производительности или качества отдельных технологических операций, а также когда достаточно подвергнуть какой-либо технологической операции только часть общего потока. Примерами могут быть разделение продуктов измельчения зерна на фракции различного технологического качества (схода, крупки, муки) и последующая их обработка на различных машинах.

Параллельные технологические связи применяют для повышения производительности при получении из одного вида сырья нескольких видов продукта или из многих видов сырья одного целевого продукта (параллельно работающие теплообменники, дробилки, экстракторы и пр.). Общий вход x_0 равен сумме входов отдельных звеньев x_i , а общий выход y_0 — сумме выходов

$$x_0 = \sum_{i=1}^n x_i, \quad (40)$$

$$y_0 = \sum_{i=1}^n y_i. \quad (41)$$

Связи x_0, x_i, y_0, y_i могут быть скалярными или векторными величинами. Для использования формул (40) и (41) составляющие x_i и y_i представляют в аддитивной форме, которая допускает суммирование. Например, при решении задачи оптимального распределения температуры или

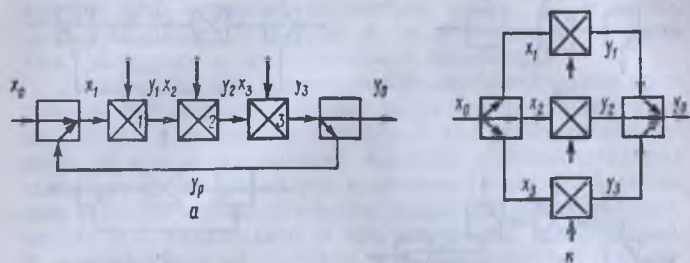


Рис. 12. Обратные технологические связи:
а — последовательно и б — параллельно работающих аппаратов

расхода сушильного агента в ленточных или шахтных сушилках по зонам допустимо суммирование энтальпий, но недопустимо суммирование температур. Параллельные схемы применяют не только для повышения производительности, но и надежности, и гибкости, а также создания непрерывности технологических потоков при периодически работающих аппаратах.

Системы параллельно работающих машин или аппаратов называют иногда коллекторными. Общая производительность системы параллельных агрегатов лимитируется пропускной способностью участка и наименьшим запасом производственной мощности (вход — один из агрегатов — выход).

Перекрестные технологические связи применяют в пищевой промышленности для более эффективного использования энергии, например, сушка пищевых продуктов с перекрестной подачей сушильного агента, пастеризация или стерилизация с использованием для подогрева выходящего потока и пр. В частности, ее можно представить оператором межфазного массообмена.

Обратная технологическая связь характеризуется наличием обратного технологического потока. Она применяется для решения задач наиболее полного использования сырья или энергии, интенсификации процесса и создания благоприятных технологических режимов (сушка продуктов с рециклом, многократное повторное экстрагирование, измельчение, гранулирование с возвратом крошки и др.). При рассмотрении систем с обратной технологической связью различают прямые (входные и выходные), главный (соединяющий все потоки) и обратный (рецикл) потоки.

Системы с обратной связью могут охватывать группы последовательно и параллельно работающих машин и ап-

паратов (рис. 12). Для последовательно работающих машин и аппаратов уравнения обратной связи имеют вид $x_1 = x_0 + \alpha y_n$, $y_0 = (1 - \alpha) y_n$, а для параллельно работающих

$$\sum x_i = x_0 + \alpha \sum_{i=1}^n y_i, y_0 = \sum_{i=1}^n y_i (1 - \alpha). \quad (42)$$

Величина α характеризует долю возвращающего потока и ее называют степенью рециркуляции ($0 \leq \alpha \leq 1$). Схемы с обратной связью применяют для повышения качества и экономических показателей работы систем. Отношение обратного технологического потока к главному называют коэффициентом отношения рециркуляции

$$R = \frac{y_p}{x_i} = \frac{y_p}{y_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (43)$$

а коэффициентом рециркуляции — отношение главного потока к входному или выходному

$$k_R = \frac{x_i}{x_0} = \frac{y_i}{y_0} = \frac{1}{1 - R}, \quad (44)$$

где $x_0, y_0, x_1 = x_2 = x_3, y_p$ — массовый расход прямого входного, выходного, главного и обратного потоков.

Нами рассмотрены различные подходы к составлению математического описания объектов технологии пищевых производств, которые условно делят на экспериментальные и аналитические. Это разделение весьма условно, так как постановке эксперимента всегда предшествуют определенные теоретические предпосылки качественного или количественного характера. Чисто аналитические методы также требуют экспериментального определения постоянных в уравнениях математического описания. Кроме того, в системе уравнений математического описания часть уравнений может быть получена теоретически.

В общем случае при математическом описании технологических процессов составляют уравнения переноса, сохранения количества движения, массы и энергии, определяют геометрические и физические характеристики системы, граничные и начальные условия. Обычно число величин, подлежащих определению, больше числа уравнений связи между переменными. Поэтому часть величин следует задавать. Для физических систем при математическом описании в граничные условия часто включают и условия равновесия.

Все физико-химические процессы в машинах и аппаратах, где имеются потоки жидкостей или газов, в обобщенном виде

можно описать системами уравнений переноса количества движения, энергии и массы

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_x}{\partial \tau} &= -\left(\omega_x \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial \omega_x}{\partial z}\right) + \nu \Delta^2 \omega_x + \\ &\quad + \left(X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}\right); \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} &= -\left(\omega_x \frac{\partial t}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial t}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial t}{\partial z}\right) + a \Delta^2 t + \frac{q}{\rho c_p}; \\ \frac{\partial c_i}{\partial \tau} &= -\left(\omega_x \frac{\partial c_i}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial c_i}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial c_i}{\partial z}\right) + D_i \Delta^2 c_i + r_{iv},\end{aligned}$$

где ω — проекции скоростей на координаты x, y, z ; P — давление; Δ^2 — оператор Лапласа; t — температура; c_i — концентрация i -го компонента; ρ — плотность вещества; r_{iv} — теплота фазового превращения i -го компонента при постоянном объеме; c_p — теплоемкость вещества при постоянном давлении; q — поток теплоты; a, ν, D_i — соответственно коэффициенты температуропроводности, вязкости и диффузии i -го компонента смеси; X — проекция массовой силы на ось x .

Приведенные уравнения описывают баланс количества движения, поля температур и концентраций в движущейся среде. Для практических расчетов конкретных машин и аппаратов приведенную систему необходимо дополнить уравнением неразрывности и определить условия однозначности (форму и геометрические размеры системы, физические свойства жидкости, начальные и граничные условия). Поэтому полное математическое описание конкретного объекта должно включать системы приведенных уравнений и условия однозначности, что связано с изменением численных значений транспортных коэффициентов и физических свойств жидкости, скоростей, температур и концентраций.

Под системой в технологии химических и пищевых производств понимают совокупность материальных тел, изменение свойств которых существенно влияет на технологический процесс. Характеристиками системы являются экспериментально определяемые величины (объем, давление, температура). Характеристическими функциями (вычисляемыми характеристиками) системы, определяющими ее состояние, считают внутреннюю энергию U , энтальпию H и энергию Гиббса G . Каждая из этих функций выражается через независимые переменные (параметры) системы. Для внутренней энергии независимыми параметрами являются энтро-

пия S и объем V , для энтальпии — энтропия S и давление P , для энергии Гиббса — температура T и давление.

Частные производные характеристических функций по числам молей компонентов N_i при других постоянных параметрах состояния называют химическими потенциалами этих компонентов

$$\partial U / \partial N_i = \partial H / \partial N_i = \partial G / \partial N_i = \mu_i, \quad (45)$$

где N_i — число молей i -го компонента.

Условия устойчивого равновесия определяются минимальными значениями U, H и G в изолированной системе. Число независимых параметров (число степеней свободы) в соответствии с правилом фаз Гиббса равно

$$G = n - \Phi,$$

где n, Φ — число компонентов и фаз системы.

В наиболее общей форме условие равновесия системы математически формулируют как равенство нулю полного дифференциала параметров состояния, определяющих свойства вещества

$$dT = 0, dP = 0, dc_i = 0,$$

где $dT = 0, dP = 0, dc_i = 0$ — термическое, механическое и химическое (концентрационное) равновесия.

Закон сохранения массы очень часто представляют в виде уравнения неразрывности, для двух произвольно выбранных сечений потока жидкости или газа

$$m_1 = m_2 = m = \text{const};$$

$$\rho_1 v_1 F_1 = \rho_2 v_2 F_2 = \rho v F = m = \text{const}. \quad (46)$$

Закон сохранения энергии выражает и уравнение Бернулли

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + h_w \text{ (м)}$$

или в единицах давления (так как $h = \frac{p}{\rho g}$)

$$\rho g z_1 + p_1 + \alpha_1 \frac{\rho v_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \alpha_2 \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h \text{ (Па)}, \quad (47)$$

где z_1 — геометрическая высота, м; $p_1 / \rho g$ — пьезометрическая высота, м; $z_1 + p_1 / \rho g$ — пьезометрический напор, м; $\alpha v^2 / 2g$ — скоростная высота, динамический напор, м; h_w — потери энергии, Па; α — коэффициент перераспределения воздуха ($\alpha > 1$).

Без учета геометрической высоты (для газов) уравнение имеет вид

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + Hn, \quad (48)$$

где p_1 — абсолютное статическое давление, Па; $\rho v_1^2/2$ — динамическое давление, Па; $\rho = \frac{\rho v^2}{2} = p_0$ — полное или общее абсолютное давление.

Все самопроизвольные процессы в соответствии со вторым законом термодинамики сопровождаются увеличением энтропии системы. В изолированной системе энтропия в состоянии равновесия достигает максимального значения, а $dS = 0$. Используя характеристические функции, условия равновесия любой физической системы математически определяются системой трех уравнений

$$\left. \begin{aligned} dV &= TdS - PdV + \sum_{i=1}^n \mu_i dN = 0; \\ dH &= TdS - VdP + \sum_{i=1}^n \mu_i dN = 0; \\ dG &= -SdT + VdP + \sum_{i=1}^n \mu_i dN = 0. \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Законы Фика и Фурье рассматривают как частные случаи применения общего принципа физических процессов, заключающихся в раздельном рассмотрении движущей силы процессов и его кинетических характеристик. Наличие движущей силы определяет возможность протекания процесса. Скорость процесса (кинетики характеристики) зависит от свойства системы.

Математическое описание включает теоретические и эмпирические зависимости, содержащие такие параметры, которые могут быть неизвестны на отдельных этапах исследования либо известны лишь приближенно. Определение граничных условий является физической задачей. Описание само по себе не дает возможности судить о свойствах объекта моделирования. Как уже отмечалось, для изучения объекта следует четко сформулировать задачу, выбрать метод решения, составить алгоритм и программу решения на вычислительной машине.

Эффективность функционирования ХТС можно повысить увеличением качества функционирования основных

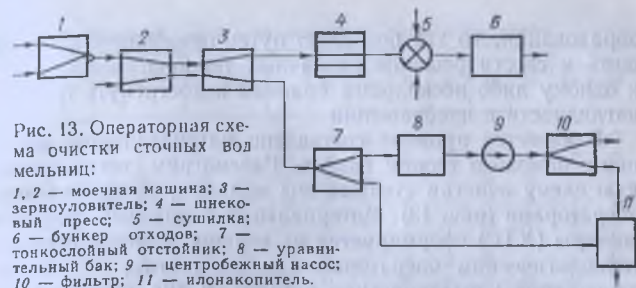


Рис. 13. Операторная схема очистки сточных вод мельниц:
1, 2 — моечная машина; 3 — зерноуловитель; 4 — шнековый пресс; 5 — сушилка; 6 — бункер отходов; 7 — тонкослойный отстойник; 8 — уравнивательный бак; 9 — центробежный насос; 10 — фильтр; 11 — илонакопитель.

технологических операторов, изменением технологических связей между существующими технологическими операторами, введением дополнительных основных и вспомогательных технологических операторов и новых технологических связей.

Характер и особенности технологических связей ХТС изображают с помощью обобщенных графических или иконографических моделей: технологических, структурных, операторных и функциональных схем, которые в обобщенном виде представляют различными видами графов [7].

Поскольку граф является топологической фигурой, определенные свойства которой инварианты при взаимно-непрерывном и взаимнооднозначном пространственном пре-

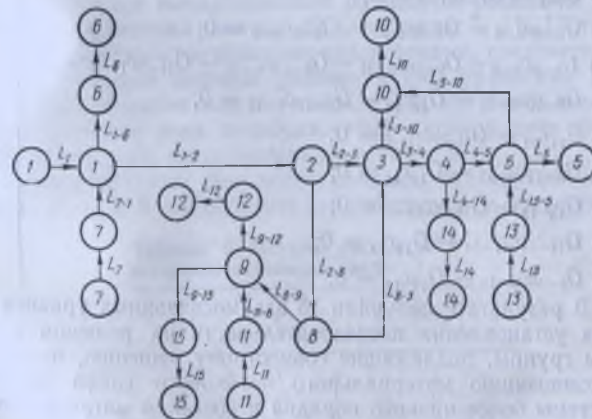


Рис. 14. Материальный потоковый граф системы очистки сточных вод.

образовании, то это позволяет путем преобразований обобщить и свести решение различных технологических задач к одному либо нескольким приемам и достигнуть большой наглядности в изображении.

В качестве примера составлено математическое описание с помощью теории графов. Рассмотрим технологическую схему очистки сточных вод мельниц, представленную операторами (рис. 13). Материальный потоковый граф этой системы (ХТС) сформируется из вершин, соответствующих технологическим операторам или аппаратам, в которых изменяются характеристики потоков и дуг, соответствующих материальным потокам. Материальный потоковый граф системы очистки сточных вод представлен на рис. 14, для которого составим уравнения балансов $L_i = G_i c_i$ по потокам, объединенным в единую систему

$$\begin{aligned} 1) & G_{1c_1} + G_{7-1c_{7-1}} - G_{1-6c_{1-6}} - G_{1-2c_{1-2}} = 0; \\ 2) & G_{1-2c_{1-2}} - G_{2-3c_{2-3}} - G_{2-8c_{2-8}} = 0; \\ 3) & G_{2-3c_{2-3}} + G_{8-3c_{8-3}} - G_{3-10c_{3-10}} - G_{3-4c_{3-4}} = 0; \\ 4) & G_{3-4c_{3-4}} - G_{4-5c_{4-5}} - G_{4-14c_{4-14}} = 0; \\ 5) & G_{4-5c_{4-5}} + G_{13-5c_{13-5}} - G_{5c_5} - G_{5-10c_{5-10}} = 0; \\ 6) & G_{1-6c_{1-6}} - G_{6c_6} = 0; \\ 7) & G_{7c_7} - G_{7-1c_{7-1}} = 0; \\ 8) & G_{2-8c_{2-8}} - G_{8-3c_{8-3}} - G_{8-9c_{8-9}} = 0; \\ 9) & G_{8-9c_{8-9}} - G_{9-15c_{9-15}} - G_{9-12c_{9-12}} - G_{11-9c_{11-9}} = 0; \\ 10) & G_{3-10c_{3-10}} - G_{10c_{10}} - G_{5-10c_{5-10}} = 0; \\ 11) & G_{11c_{11}} - G_{11-9c_{11-9}} = 0; \\ 12) & G_{9-12c_{9-12}} - G_{12c_{12}} = 0; \\ 13) & G_{13c_{13}} - G_{13-5c_{13-5}} = 0; \\ 14) & G_{14-14c_{14-14}} - G_{14c_{14}} = 0; \\ 15) & G_{9-15c_{9-15}} - G_{15c_{15}} = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

В результате получили 15 взаимосвязанных уравнений. Для установления последовательности их решения выделим группы, подлежащие совместному решению, проведем декомпозицию материального потокового графа на подсистемы более низкого порядка и составим матрицу смежности исходного потокового графа (табл. 8).

Анализ матрицы H показывает, что единичные ретиклы отсутствуют (нет ни одного элемента на главной диагонали

Таблица 8. Матрица смежности исходного потокового графа

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

матрицы). Строки 6, 10, 12, 14 и 15 нулевые, т. е. вершины 6, 10, 12, 14 и 15 не имеют внешних вершин — «потоков», а нулевые столбцы 7, 9, 11 и 13 означают отсутствие внутренних вершин — «предшественников». На этом основании можно считать, что вершины 6, 10, 12, 14 и 15 представляют собой самостоятельные подсистемы, для которых уравнения (6), (10), (12), (14) и (15) рассматриваются как начальные шаги вычислительной процедуры решением балансовых уравнений системы (50), вершины 7, 11, 13 также являются самостоятельными подсистемами, следовательно, при решении системы уравнений (50) уравнения (7), (11) и (13) являются вторым шагом вычислительной процедуры. С учетом этих преобразований матрица смежности приобретает вид, представленный в табл. 9.

Анализ матрицы смежности показал, что группа вершин 2, 3, 4, 5, 8 и 9 образует самостоятельную подсистему

Таблица 9. Матрица смежности исходного потокового графа

	2	3	4	5	8	9
2	0	1	0	0	1	0
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	0	0
8	0	1	0	0	0	1
9	0	0	0	0	0	0

и следующий шаг вычислений заключается в совместном решении уравнений (2), (3), (4), (5), (8) и (9). Следовательно, последовательность вычислений будет следующей:

$$7-11-13;$$

$$2-3-4-5-8-9;$$

$$6-10-12-14-15.$$

Решением системы уравнений (50) можно определить необходимый показатель характеристик потоков в процессе очистки.

Концентрацию какого-то компонента c_{ij} в заданном сечении определим конкретным уравнением

$$16) c_{1-2} = \frac{G_1 c_1 + G_{7-1} c_{7-1} - G_{1-6} c_{1-6}}{G_{1-2}};$$

$$17) c_{2-3} = \frac{G_{1-2} c_{1-2} - G_{2-8} c_{2-8}}{G_{2-3}};$$

$$18) c_{3-4} = \frac{G_{2-3} c_{2-3} + G_{8-3} c_{8-3} - G_{3-10} c_{3-10}}{G_{3-4}};$$

$$19) c_{4-5} = \frac{G_{3-4} c_{3-4} - G_{4-14} c_{4-14}}{G_{4-5}};$$

$$20) c_5 = \frac{G_{4-5} c_{4-5} + G_{13-5} c_{13-5} - G_{5-10} c_{5-10}}{G_5}.$$

Подставляя поочередно c_i из уравнения (16), (17) и т. д. и произведя соответствующие преобразования, определим концентрацию взвеси в любом месте технологической схемы.

Математические описания моделей для поиска оптимальных решений основаны на принципах теории оптимизации и будут рассмотрены ниже.

Для составления математического описания широко используют кинетические уравнения, описывающие изменения конкретных характеристик процесса во времени, т. е. кинетику химических и биохимических превращений, тепло- и массообмена, измельчения, сепарирования. Кинетическое уравнение имеет общий вид

$$I = LX,$$

где I — скорость процесса, L — кинетический коэффициент; X — потенциал (для отдельных классов явлений может быть представлен в виде известных законов).

Для теплопроводности — законом Фурье

$$Q = \lambda \frac{dt}{dx} \tau.$$

Для молекулярной диффузии — законом Фика

$$G = D \frac{dc}{dx} \tau.$$

Для фильтрационного переноса — законом Дарси

$$G = k_1 \frac{dp}{dx} \tau, \text{ или } G = k_2 \frac{dz}{dx} \tau.$$

Для количества движения (внутреннее трение) — законом Ньютона

$$F = \mu \frac{dv}{dx} \tau.$$

Для электропроводности — законом Ома

$$q_s = k_3 \frac{du}{dx} \tau.$$

Перенос количества движения (внутреннее трение) — законом Ньютона

$$f = \mu \frac{dv}{dx} \tau.$$

В этих уравнениях соответственно Q, G, q_s, f количество теплоты, массы, силы трения, количество электричества; $\lambda, D, k_1, k_2, k_3, \mu$ — коэффициенты теплопроводности, диффузии, фильтрации, трения и пр. — являются кинетическими коэффициентами; $\frac{du}{dx}, \frac{dt}{dx}, \frac{dc}{dx}, \frac{dp}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{dv}{dx}$ — градиенты концентрации, температуры, скорости, напряжения, которые являются потенциалами переноса.

Приведенные кинетические закономерности описывают явления переноса только в какой-то определенный момент времени в определенной точке пространства, так как в связи с нестационарностью технологических процессов, происходящих в производственных машинах и установках, градиенты и потенциалы не остаются постоянными.

При стационарных явлениях потенциалы являются постоянными, а величина скорости протекания явления зависит только от координаты. Например, при потенциале диффузии $\frac{dc}{dx}$ в одномерном пространстве вторая производная равна

нулю $\frac{d^2c}{dx^2} = 0$. Тогда в соответствии с законом Фика

$$\frac{dc}{d\tau} = p \frac{d^2c}{dx^2},$$

т. е. также равна нулю, что иногда рассматривается как более общий признак нестационарности явления.

При нестационарных явлениях параметры изменяются в пространстве и во времени. Стационарные и нестационарные явления следует отличать от установившихся и неустановившихся. Установившееся явление характеризуется постоянством параметров в каждой заданной точке производственной установки, неустановившееся характерно для периодов настройки и при переходе режимов.

Отметим, что знание полей скоростей, температур, концентраций и т. д., т. е. наличие модели представляет принципиальную возможность решения практических задач. Чаше всего решение настолько сложное, что полученной информацией воспользоваться не удастся, поскольку поля эти являются сложными трехмерными структурами, описания которых содержат функции трех переменных, а при описании нестационарных процессов добавляется четвертая переменная — время.

В нестационарных условиях явление молекулярной диффузии, которое, например, имеет место при сушке, описывается уравнением, известным под названием второго закона Фика

$$\frac{dc}{d\tau} = D \frac{d^2c}{dx^2}. \quad (51)$$

Для того чтобы получить зависимость концентрации в данной точке системы от времени, координаты, физических свойств $c = f(\tau, x, D)$, т. е. решить это уравнение, надо задаться условиями однозначности. Например, пусть диффузия протекает внутри бесконечной пластины толщиной l , а концентрация вещества в пластине в начальный момент распределена равномерно, т. е.

$$\tau = 0, c = c_0, 0 \leq x \leq l. \quad (52)$$

В любой момент времени τ концентрация диффундирующего вещества на границе раздела фаз равна нулю

$$\tau = \tau_i; x = 0; x = l; c = 0. \quad (53)$$

Диффузия во времени протекает при постоянной температуре и коэффициенте диффузии D , не зависит от концентрации и пространственной координаты (пластина изотроп-

на). Диффузия внутри пластинки не тормозится отводом вещества от ее поверхности. Коэффициент диффузии внутри пластинки — существенная физическая константа явления

$$\tau = \tau_i; c = c_0; 0 \leq x \leq l; D = \text{const}. \quad (54)$$

При этих условиях однозначности в результате интегрирования приведенного уравнения получим

$$c = \frac{4c_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \sin \frac{(2m+1)\pi x}{l} \exp \times \\ \times \left[\frac{-(2m+1)^2 \pi^2 D \tau}{l^2} \right], \quad (55)$$

где $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Общая форма записи этого уравнения будет иметь вид

$$c = (x, l, \tau, c_0, D). \quad (56)$$

Поскольку аргументы x, l, τ, c_0, D могут принимать бесчисленное количество значений, то значения концентрации будут различными. Однозначное решение возможно только при известных значениях аргументов. Совокупность численных значений условий однозначности имеет признак единичного явления. Символические обозначения условий однозначности выделяют группу явлений, т. е. общность условий однозначности группы явлений.

Единство механизма протекания — признак классов явлений, единство физической природы — признак типа явлений.

При последовательном протекании нескольких явлений кинетические коэффициенты преобразуются. Например, теплоотдача от жидкости к стенке через единицу поверхности в единицу времени описывается уравнением

$$Q_1 = \alpha_1 (t_{\text{эк}_1} - t_{\text{ст}_1}). \quad (57)$$

Теплопроводность через стенку

$$Q_2 = \frac{\lambda}{\delta} (t_{\text{ст}_1} - t_{\text{ст}_2}). \quad (58)$$

Теплоотдача от стенки к жидкости

$$Q_3 = \alpha_2 (t_{\text{ст}_2} - t_{\text{эк}_2}). \quad (59)$$

Приравнявая $Q_1 = Q_2 = Q_3$, получим

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = k (t_{\text{эк}_1} - t_{\text{эк}_2}), \quad (60)$$

где α_1 , α_2 , λ и $k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$ — соответственно

коэффициенты теплоотдачи, теплопроводности и теплопередачи.

В этом случае коэффициент теплопередачи является комбинацией коэффициентов теплоотдачи и теплопроводности.

Одновременное протекание нескольких типов и классов взаимно влияющих друг на друга явлений приводит к возникновению сложных явлений, изучаемых термодинамикой необратимых процессов. Наложение явлений различной природы приводит к тому, что течение процесса характеризуется новыми кинетическими коэффициентами.

В соответствии с основными положениями в термодинамике необратимых процессов любой поток возникает под действием всех сил

$$I_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} X_k \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (61)$$

где L_{ik} — так называемые собственные феноменологические коэффициенты или взаимные коэффициенты.

Например, для двух одновременно протекающих необратимых явлений диффузии и теплопроводности феноменологические уравнения имеют вид

$$I_1 = L_{11} X_1 + L_{12} X_2, \quad (62)$$

$$I_2 = L_{21} X_1 + L_{22} X_2, \quad (63)$$

где I_1 и I_2 — потоки массы и теплоты; X_1 и X_2 — градиенты концентрации и температуры; L_{11} , L_{12} , L_{21} и L_{22} — коэффициенты диффузии, термодиффузии (эффект Соре), диффузионной теплопроводности (эффект Дюфе) и теплопроводности.

На основании теоремы Онзагера запишем

$$L_{ik} = L_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (64)$$

Последнее уравнение называют соотношением взаимности Онзагера, из которого следует, что если поток явления испытывает влияние силы X_k явления k , то и поток явления k также испытывает влияние силы X_i явления i через посредство того же коэффициента L_{ik} .

Химическая кинетика. Скоростью химической реакции называют число молекул, реагирующих в единицу времени. Для возможности сравнения скорости различных реакций число молекул относят к единице объема. В связи с этим

скорости и реакции определяют как число молекул или молей данного вещества, реагирующих в единицу времени в единице объема.

Если в объеме V находится n молей вещества A , то концентрация c равна n/V , а скорость реакции v описывается соотношением

$$v = \frac{d}{dt} \left(\frac{n}{V} \right). \quad (65)$$

Формально скорость реакции определяют как концентрацию реагирующего вещества по времени, взятую со знаком «минус», который означает, что в ходе реакции концентрация реагентов убывает. Скорость реакции измеряют и по накоплению продукта реакции, а так как в ходе реакции концентрация продукта увеличивается, то производная $\frac{d}{dt} \left(\frac{n}{V} \right)$ положительна.

Из формулы (65) следует, что

$$v = -\frac{1}{V} \frac{dn}{dt} + \frac{n}{V^2} \frac{dV}{dt}. \quad (66)$$

Если реакция протекает в изохорических условиях ($V = \text{const}$), то скорость реакции определяем из выражения

$$v = \frac{1}{V} \left(\frac{dn}{dt} \right)_V = - \left(\frac{\partial n}{\partial t} \right)_V.$$

Если же в ходе реакции изменяется объем системы, то для расчета скорости реакции необходимо знать явный вид функции $V(t)$ для вычисления производной $\frac{dV}{dt}$ в формуле (66). При рассмотрении кинетики химических процессов, в результате которых объем реагирующей системы практически не изменяется, скорость реакции типа $1 \xrightarrow{k} D$ можно записать

$$v = \frac{dc_D}{dt}, \quad (67)$$

где c_D — концентрация продукта D .

Формула (67) определяет мгновенную скорость (т. е. скорость в данный момент времени) химической реакции.

Мгновенную скорость реакции при $t = 0$ называют начальной. Скорости реакции в начальный и произвольный моменты времени определяют по тангенсу угла наклона в данной точке $v = \frac{dc}{dt} = \text{tg } \alpha$. В химической кинетике иногда пользуются понятием средней скорости реакции v за интер-

вал времени $\Delta\tau$. Если в момент времени τ_1 концентрация продукта реакции была равна c_1 , а в момент времени τ_2 равнялась c_2 , то средняя скорость реакции v за интервал времени $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ определяется выражением

$$v = \frac{c_2 - c_1}{\tau_2 - \tau_1} = \frac{\Delta c}{\Delta \tau}. \quad (68)$$

Мгновенная скорость реакции представляет собой предел значения средней скорости при $\tau = 0$, т. е.

$$v = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} v = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta c}{\Delta \tau} = \frac{dc}{d\tau}. \quad (69)$$

Для расчета средней скорости за полное время протекания реакции τ_n пользуются формулой

$$v = \frac{1}{\tau_n} \int_0^{\tau_n} v(\tau) d\tau. \quad (70)$$

В этом случае необходимо установить количественную зависимость скорости реакции от времени, т. е. подобрать такую формулу, которая правильно отражала бы зависимость $v(\tau)$ на всем протяжении реакции.

Закон действующих масс является основным законом химической кинетики, в соответствии с которым в самом общем случае можно принять, что скорость химической реакции v прямо пропорциональна концентрациям реагирующих (действующих) веществ в некоторых степенях

$$v = k \prod_{i=1}^m c_i^{r_i}, \quad (71)$$

где k — постоянная (при данных условиях), называемая константой скорости реакции; m — число веществ, вступающих в реакцию; c_i — концентрация i -го реагента; r_i — порядок реакции по данному i -му веществу; Π — знак произведения.

При изучении кинетических закономерностей биохимического катализа устанавливают зависимость скорости (ферментативной реакции) от концентраций фермента, субстрата, активаторов, ингибиторов, а также физико-химических факторов: температуры, давления, ионной силы, диэлектрической проницаемости и пр.

Если исходить из предположения, что фермент вначале образует фермент-субстратный комплекс со своим субстратом, а затем этот комплекс распадается с освобождением фермента и продукта реакции, то уравнение, учитывающее измене-

ние концентрации субстрата, имеет вид

$$\frac{S_0 - S}{\tau} = v_0 \max + \frac{k_m}{\tau} \ln \frac{S}{S_0}, \quad (72)$$

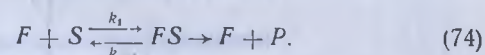
где $v_0 \max$ — теоретическая предельная начальная скорость реакции при бесконечно большой концентрации субстрата; k_m — константа, характеризующая фермент и реакцию систему; S_0 , S — соответственно начальная и мгновенная концентрации субстрата.

Экспериментально подтверждено, что между скоростью реакции v_0 и концентрацией субстрата S_0 существует зависимость

$$(v_0 \max - v_0)(x + S_0) = \text{const}, \quad (73)$$

где x — постоянная.

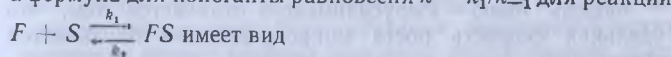
Математическое обоснование гипотезы об образовании фермент-субстратного комплекса, исходя из предположения о существовании термодинамического равновесия между исходными веществами (фермент, субстрат) и фермент-субстратным комплексом, было дано Л. Михаэлисом и М. Ментен. Они рассматривали следующую односубстратную ферментативную реакцию



Согласно принципу сохранения концентрации вещества в реакции общая концентрация фермента f_0 равна сумме концентраций свободного фермента f и согласованного в виде фермент-субстратного комплекса f_s

$$f_0 = f + f_s, \quad (75)$$

а формула для константы равновесия $k = k_1/k_{-1}$ для реакции



$$k = f_s/fS, \quad (76)$$

откуда

$$k = f_s/(f_0 - f_s)S. \quad (77)$$

Тогда для концентрации f_s фермент-субстратного комплекса получим

$$f_s = \frac{f_0 S}{1/k + S}. \quad (78)$$

В соответствии с кинетической схемой и законом действующих масс скорость реакции v пропорциональна концентрации фермент-субстратного комплекса, откуда с учетом

уравнения для скорости реакции получим

$$v = k_2 f_0 S / (1/k + S). \quad (79)$$

Константа $k_s = 1/k = k_{-1}/k_1$ называется константой Михаэлиса, она имеет размерность концентрации (обычно моль/л). В начале реакции $S = S_0$ и, следовательно, $v = v_0$. Тогда уравнение для начальной скорости реакции запишем

$$v_0 = \frac{k_2 f_0 + S_0}{k_s + S_0}. \quad (80)$$

Это уравнение называется уравнением Михаэлиса — Ментен и является одним из самых фундаментальных уравнений кинетики ферментативных реакций.

Для описания биохимических превращений кроме уравнения Михаэлиса — Ментен используют и другие кинетические соотношения. Наибольшее распространение получили уравнения Моно и Моно — Иерусалимского и др.

В модели Моно

$$\left. \begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= \mu c \\ c &= c_0 + y(S_0 + S) \\ \mu &= \mu_m \frac{S}{k_s + S} \end{aligned} \right\}, \quad (81)$$

где c_0, c — начальная и текущая концентрации биомассы; S_0, S — начальная и текущая концентрации питательных веществ; μ_m, μ — максимальные и текущие удельные скорости роста; y — эмпирический коэффициент; k_s — константа насыщения Моно, т. е. концентрация субстрата, при которой $\mu = 0,5\mu_m$.

Модель Моно — Иерусалимского отличается тем, что удельная скорость роста микроорганизмов описывается уравнением

$$\mu = \mu_m \frac{S}{k_s + S} \frac{k_p}{k_p + P}, \quad (82)$$

где k_p — константа, зависящая от структуры популяции; P — концентрация ингибирующего метаболита.

Уравнение Моно — Иерусалимского несколько модифицировал П. И. Николаев

$$\mu = \frac{\mu_m S}{k_s + S} \frac{k_p}{P + k_p} = \frac{\mu_m S}{k_s + S} \frac{k_{ps}}{k_{ps} + (S_0 - S)}, \quad (83)$$

где k_p — константа роста субстрата, численно равная такому его количеству, в результате усвоения которого в единице объема питательной среды образуется концентрация продуктов обмена, вызывающая уменьшение скорости роста микроорганизмов до величины, равной половине максимальной ($\mu = 0,5\mu_m$).

Следует отметить, что математические описания не всегда с достаточной для практических расчетов точностью отражают процессы микробиологического синтеза. Эти описания не учитывают типа и последовательности аппаратов, а также одновременно протекающих процессов ферментативного гидролиза остатков крахмала и развития популяций микроорганизмов, имеющих место в пищевой промышленности.

Кинетические закономерности представлены в форме обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Однако могут быть и другие формы уравнений: алгебраические, трансцендентные и др.

Формальные математические записи известных физико-химических явлений могут служить математическими описаниями моделируемых процессов в данной области решения задачи, ограниченной в простейших случаях начальными и граничными условиями.

§ 2. Типовые математические модели технологических процессов

В машинах и аппаратах пищевых производств происходят различные явления, отражающие механическое перемещение потоков, процессы переноса массы и энергии, а также химические и биохимические превращения. Для описания этих явлений применяются типовые унифицированные стандартные формы. В настоящее время установлено несколько стандартных форм описания гидродинамических потоков, в основу которых положены приближенные представления о внутренней структуре различных потоков. Типовые математические модели имеют одинаковые стандартные характеристики и поэтому все многообразие потоков, возникающих в различных аппаратах, может быть представлено несколькими типовыми моделями.

Типовые модели, их условные обозначения, математические описания и характер отклика на испытательные ступенчатое и импульсное возмущения приведены на рис. 15. Типовую модель подбирают на основании предварительных сведений с технологических объектах. Для того чтобы вос-

Типовые модели	Условная обозначения	Математические описания	Характеристики	
			Ступенчатые воздействия	Угловые воздействия
Идеального вытеснения		$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -v \frac{\partial c}{\partial x}$		
Идеального смешения		$\frac{dc}{d\tau} = \frac{V_0}{V} (c_{вх} - c)$		
Диффузионное		$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -v \frac{\partial c}{\partial x} + D_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$		
Адаптивная		$\frac{dc}{d\tau} = -v \frac{\partial c}{\partial x} + D_1 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{D_2}{R} \frac{\partial c}{\partial R} + \frac{D_3}{R} \frac{\partial^2 c}{\partial R^2}$		
Явственная		$\frac{1}{n} \frac{dc}{d\tau} = \tau_n (c_{вх} - c)$		

Рис. 15. Типовые модели гидродинамических потоков.

пользоваться типовыми математическими моделями, необходимо проверять адекватность модели объекту. При этом находят параметры модели, постоянные коэффициенты, а затем решают уравнения модели при выбранных начальных и граничных условиях. Подтверждением возможности использования модели является совпадение с необходимой точностью данных, полученных на модели и объекте. Комбинируя различные типовые модели, можно удовлетворить условиям адекватности. Рассмотрим типовые модели.

Модель идеального вытеснения представляется как поршневое течение потоков без перемешивания вдоль потока при равномерном распределении субстанции (концентрации, температуры) в направлении, перпендикулярном движению.

Уравнение модели можно получить из следующих соображений. Изменение концентрации вещества c в объеме ΔV во времени на участке $[x, x + \Delta x]$ при постоянной скорости движения потока ($v = \text{const}$) и $\Delta x \rightarrow 0$ убывающей концентрации вещества (знак «—») равно

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -v \frac{c_x - c_{x+\Delta x}}{(x+\Delta x) - x} = -v \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta c}{\Delta x}. \quad (84)$$

Перейдя к производной в правой части, получим

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = v \frac{\partial c}{\partial x},$$

где c — концентрация вещества, кг/м³; τ — время, с; v — скорость потока; x — координата, м.

Модель идеального вытеснения является моделью с определенными параметрами, так как концентрация $c(\tau, x)$ изменяется во времени и пространстве и широко используется в пищевой технологии при описании аппаратов, работающих по принципу вытеснения (трубчатые теплообменники и пр.). Применение этой модели оправдано при отношении длины трубы к диаметру $l/d > 20$ и при числе Рейнольдса $Re > 2300$. В этих условиях продольное перемешивание незначительно, турбулентное движение обеспечивает равномерное распределение концентрации по сечению аппарата. Достоинством модели является простота решения и определения параметров модели в реальных условиях.

В основу модели идеального смешения (перемешивания) положено, что поступающий в аппарат поток мгновенно распределяется по всему объему аппарата вследствие полного (идеального) перемешивания частиц среды, т. е. $c_{вх} = c_{вых} = c$. Математическое описание модели можно полу-

чить исходя из следующих предположений. В установившемся режиме, когда $c_{\text{вх}} = \text{const}$ и объемные расходы вещества равны $v_{\text{вх}} = v = v_c$, масса вещества в аппарате не накапливается. При изменении концентрации вещества на входе изменение массы в объеме V определяется из соотношения

$$\frac{dM}{dt} = G_{\text{вх}} - G_{\text{вых}},$$

где $M = cV$ — масса вещества в аппарате, кг; V — объем аппарата, м³; $G_{\text{вх}}$, $G_{\text{вых}}$ — потоки вещества на входе и выходе, кг/с; v_c — объемный расход потока, м³/с.

С учетом приведенных соотношений последнее уравнение запишем

$$V \frac{dc}{dt} = v_{c_{\text{вх}}} c - v_{c_{\text{вых}}} c,$$

а при равных потоках на входе и выходе

$$\frac{dc}{dt} = \frac{v_c}{V} (c_{\text{вх}} - c_{\text{вых}}).$$

Отношение v_c/V характеризует среднее время нахождения частиц в аппарате.

Модель идеального смешения является моделью с сосредоточенными параметрами, так как основная переменная изменяется только во времени. Примером моделей идеального перемешивания могут быть процессы, происходящие в различных машинах и аппаратах в условиях интенсивного перемешивания (смесители, загрузочные устройства, аппараты с псевдоожиженным слоем, процессы приготовления смесей, растворов и пр.).

Основой однопараметрической диффузионной модели является модель идеального вытеснения, осложненная обратным перемешиванием, параметром которого служит коэффициент турбулентной диффузии или коэффициент продольного перемешивания D_L , м²/с, определяемый из опыта. Модель составляется при допущениях, что изменение концентрации субстанции является непрерывной функцией координаты. Концентрация субстанции в данном сечении постоянна, объемная скорость потока и коэффициент продольного перемешивания не изменяются по длине и сечению потока. При этих допущениях модель описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -v \frac{\partial c}{\partial x} + D_L \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}.$$

Двухпараметрическая диффузионная модель учитывает перемешивание в продольном и радиальном направлениях

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -v \frac{\partial c}{\partial x} + D_L \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{D_R}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial c}{\partial R} \right), \quad (85)$$

где D_R — коэффициент поперечного перемешивания, м²/с; R — линейный размер, характеризующий поперечное сечение, м.

При этом коэффициенты D_L и D_R не изменяются по длине и сечению, а скорость потока v постоянна.

Ячеечная модель состоит из ряда ячеек, расположенных последовательно и без перемешивания между ячейками. Каждая ячейка является моделью идеального перемешивания. Параметром, характеризующим модель, служит число ячеек.

Математическое описание ячейечной модели включает линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{1}{n} \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{\tau_i} (c_i - c_{i1}) \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n,$$

где τ_i — время пребывания в i -й ячейке, с; c_i — концентрация в $(i-1)$ -й и i -й ячейках, кг/м³.

Число ячеек n и коэффициент турбулентной диффузии при $n > 10$ связаны соотношением $n = vl/2D_L$, где l является определяющим линейным размером.

При $n = 1$ ячейечная модель переходит в модель идеального перемешивания, а при $n = \infty$ — в модель идеального вытеснения.

Иногда более удобным является описание в виде передаточных функций. Для этого запишем операторное уравнение, соответствующее модели идеального перемешивания

$$pc_{\text{вых}}(p) = \frac{1}{\tau} [c_{\text{вх}}(p) - c_{\text{вых}}(p)]$$

или

$$W(p) = \frac{c_{\text{вых}}(p)}{c_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{\tau p + 1}.$$

В технологических объектах отношение объема аппарата к объемному расходу V/v_c определяется как постоянная времени, т. е. $T = V/v_c$ условное время изменения выходной величины от начального до нового установившегося значения, если бы это изменение происходило с постоянной и максимальной скоростью для данного процесса.

Здесь постоянная времени соответствует среднему времени пребывания частиц в аппарате. Тогда последнее урав-

Таблица 10. Применение комбинированных моделей

№ п/п	Вид модели	Процесс и аппарат
1	Идеальное перемешивание с застойной зоной	Перемешивание при разделении сыпучих на ситах, в циклонах и пр.
2	Идеальное вытеснение с застойной зоной	Самотеки длинные, воздухопроводы и пневмотрубы
3	Идеальное перемешивание с проскальзыванием	Перемешивание с большими скоростями поступления веществ, обводные потоки продуктов
4	Идеальное вытеснение с проскальзыванием	Насадочные аппараты, обводные потоки
5	Последовательное соединение зон идеального вытеснения и перемешивания	Потоки в пневмотрубах и воздухопроводах; псевдооживленные слои; потоки сыпучих и жидких продуктов
6	Параллельно соединенные зоны идеального вытеснения и перемешивания	Сушка сыпучих в кипящем слое, машины и аппараты с перемешиванием, системы пневмотранспорта, вентиляционные сети
7	Различные сочетания идеальных моделей с обводом и рециркуляцией	Потоки в самотечных трубах и других видах транспорта при измельчении, разделении сыпучих продуктов

нение запишется

$$W(p) = \frac{1}{Tp + 1}.$$

При этом нетрудно установить, что модель идеального перемешивания является инерционным звеном. Передаточная функция ячеечной модели будет иметь вид

$$W_n(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p) = \frac{1}{(Tp + 1)^n}. \quad (86)$$

Диффузионные и ячеечные модели являются нелинейными или реальными в отличие от идеальных линейных моделей идеального вытеснения и идеального смешивания. Если нельзя описать процессы типовыми моделями, то применяют комбинированные модели. При этом принимают, что аппарат состоит из отдельных зон, соединенных последовательно или параллельно, в которых наблюдается различная структура потоков: идеальное вытеснение, идеальное перемешивание, зона с продольным перемешиванием и пр. Кроме того, могут наблюдаться различные байпасные и циркуляционные потоки, застойные зоны. Наличие указанных видов потоков устанавливается по опытным кривым зависимости выходной величины от входной при нанесении ступенчатого, импульсного или синусоидального возмущений. Увеличе-

нием количества таких зон можно описать процесс любой сложности, однако при этом усложняется математическая модель. Примеры применения комбинированных моделей приведены в табл. 10.

Использование типовых математических моделей значительно сокращает затраты времени и упрощает процесс составления математического описания.

§ 3. Установление структуры типовых математических моделей

Задача оценки структуры модели сводится к определению на выходе из аппарата кривой изменения концентрации вещества во времени после нанесения возмущения по потоку на входе.

Возмущающим воздействием может быть введение в аппарат вместе с поступающим потоком не реагирующего со средой индикатора (трассера). В качестве трассеров используют инертные газы, соли, радиоактивные изотопы и т. д. В результате прохождения сигнала (трассера) через аппарат по реакции на его выходе дают оценку структуры потока и его модели. Входной сигнал подают тремя способами.

1. При ступенчатом возмущении изменяют ступенчато входную величину до нового значения и получают так называемую выходную F -кривую.

2. При импульсном возмущении, мгновенно изменяя входную величину, получают так называемую выходную S -кривую.

3. При синусоидальном возмущении (снятие частотных характеристик) входную величину изменяют по законам гармонического колебания и получают на выходе измененную по амплитуде и фазе синусоиду.

При стандартном испытательном сигнале на входе графическое изображение F -кривой и S -кривой обычно представляют в безразмерных координатах. Для этого концентрацию c трассера в потоке на выходе относят к его начальной концентрации и по оси ординат откладывают значения $F_{кр} = c/c_0$. Ось абсцисс представляет безразмерное время $\Theta = \tau/\tau_c$, где τ — реальное время, а $\tau_c = V/v_c$ — среднее время пребывания частиц в потоке аппарата. Типичные формы F -кривых и S -кривых изображены на рис. 15, откуда следует, что показатель $F_{кр}$ в потоке на выходе изменяется от 0 до 1. F -кривая является временной характеристикой объекта и ее вид определяется структурой потока в аппарате.

При импульсной подаче индикатора на вход на выходе снимается C -кривая (импульсная характеристика). Связь между импульсными характеристиками, представленными в безразмерном и натуральном времени, определяется соотношением $C(\Theta) = \tau_c C(\tau)$. Вид C -кривой определяется структурой потока в аппарате.

Функцию распределения времени пребывания $C(\tau)$, характеризующую долю индикатора (трассера) в выходящем потоке, находившуюся в системе меньше τ , определяют по формуле

$$C(\tau) = \frac{1}{\tau} \frac{c}{c_0} = \frac{c}{\sum c \Delta \tau},$$

где $\Delta \tau$ — интервал отбора проб; c_0 — начальная концентрация трассера на входе в аппарат.

В безразмерном времени пребывания $\Theta = \tau/\tau_c$ C -кривую строят аналогично F -кривой.

Связь между F -кривой и C -кривой выражается соотношением

$$\frac{dF_{кр}}{d\tau} = C_{кр}(\tau). \quad (87)$$

На рис. 15 представлены характеристики откликов стандартных возмущений, соответствующих типовым моделям потоков.

Из анализа графиков F -кривой и C -кривой модели идеального вытеснения следует:

а) если на вход объекта со структурой идеального вытеснения поступит возмущение в виде стандартного сигнала $c_{вх}(\tau) = 1(\tau)$ или $c_{вх}(\tau) = \delta(\tau)$, то функция $c_{вх}(\tau)$ соответственно выразится уравнениями:

$$F_{кр}(\tau) = 1(\tau - \tau_c);$$

$$C_{кр}(\tau) = \delta(\tau - \tau_c);$$

б) если при стандартном ступенчатом $c_{вх}(\tau) = 1(\tau)$ или импульсном $c_{вх}(\tau) = \delta(\tau)$ входном сигнале на выходе потока они повторяются со сдвигом во времени, то это свидетельствует о том, что поток соответствует модели идеального вытеснения.

Для объекта, представленного моделью идеального перемешивания, F -кривая и C -кривая имеют вид:

$$F_{кр}(\tau) = (1 - e^{-\tau/\tau_c});$$

$$C_{кр}(\tau) = \frac{1}{\tau} e^{-\tau/\tau_c}.$$

Для ячеечной модели каскада реакторов на основании последнего уравнения получим

$$n = 1 \quad C_{кр}(\tau) = \frac{1}{\tau_{1c}} e^{-\tau/\tau_{1c}};$$

$$n = 2 \quad C_{кр}(\tau) = \frac{1}{1!} \left(\frac{\tau}{\tau_{1c}} \right) \frac{1}{\tau_{1c}} e^{-\tau/\tau_{1c}};$$

$$n = 3 \quad C_{кр}(\tau) = \frac{1}{2!} \left(\frac{\tau}{\tau_{1c}} \right)^2 \frac{1}{\tau_{1c}} e^{-\tau/\tau_{1c}}.$$

В общем виде для ячеечной модели

$$C_{кр}(\tau) = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{\tau}{\tau_{1c}} \right)^{n-1} \frac{1}{\tau_{1c}} e^{-\tau/\tau_{1c}}.$$

Связь между F -кривой и C -кривой определится

$$F_{кр}(\tau) = \int_0^{\tau} C_{кр}(\tau) d\tau.$$

Частотные характеристики определяются циклическим вводом в аппарат трассера с определенной частотой. При этом на входе и выходе синусоиды сдвинуты по амплитуде и фазе.

Частотный анализ позволяет заменить временные функции частотными с помощью операторного метода Лапласа. Если выходную переменную, преобразованную по Лапласу $c_{вых}(p)$, отнести к преобразованной по Лапласу входной переменной $c_{вх}(p)$, то получим передаточную функцию объекта

$$W(p) = \frac{c_{вых}(p)}{c_{вх}(p)} = \frac{a}{A} e^{-j\varphi},$$

где a/A — отношение амплитуды колебаний выходного и входного сигналов; φ — сдвиг по фазе выходного сигнала по сравнению с входным; $j = \sqrt{-1}$ — мнимое число.

Построив передаточную функцию в широком диапазоне частот, можно получить диаграмму частотных характеристик, которая сравнивается с диаграммой известных частотных характеристик типовых моделей аппаратов.

Для модели идеального перемешивания, принимая во внимание, что $c_{вх}(\tau) = c_{вых}(\tau)$, получим:

$$p c_{вых}(p) = \frac{1}{\tau_c} [c_{вх}(p) - c_{вых}(p)];$$

$$W(p) = \frac{c_{вых}(p)}{c_{вх}(p)} = \frac{1}{\tau_c p + 1} = \frac{1}{Tp + 1},$$

где

$$T = V/v_c.$$

Из этого выражения нетрудно установить, что модель идеального перемешивания представляет собой периодическое звено первого порядка.

Применив преобразование Лапласа к решению уравнения модели идеального вытеснения, получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$p\Phi(x, p) = -v \frac{d[\Phi(x, p)]}{dx}. \quad (88)$$

Общий вид решения этого уравнения

$$\Phi(x, p) = \lambda e^{-\frac{p}{v_c} x},$$

где $\Phi(x, p)$ — изображение решения исходного дифференциального уравнения по Лапласу; λ — постоянная интегрирования.

Записав начальные и граничные условия $\tau = 0$, $x = 0$ и $x = l$ (длина аппарата) и подставив их в последнее выражение, получим

$$\Phi(x, p) = \Phi(0, p) e^{-p \frac{l}{v}}.$$

Это уравнение позволяет найти изображение функции в любом сечении аппарата. В частности, для $x = l$ из него можно получить передаточную функцию модели идеального вытеснения

$$W(p) = \frac{\Phi(l, p)}{\Phi(0, p)} = e^{-p\tau},$$

которая соответствует звену чистого запаздывания со временем запаздывания, равным $\tau = l/v$ [1].

Типовые модели применяют к детерминированным процессам и их моделям, т. е. к процессам, значения параметров которых определяются однозначно в любые моменты времени. Для тех процессов, характеристики которых в любые моменты времени и в любой точке аппарата являются случайными величинами, т. е. для индетерминированных процессов, наряду с рассмотренными методами и типовыми моделями должны быть применены статистические модели, основанные на теории случайных процессов. При этом для части случайных величин можно применить вероятностный подход, позволяющий заменить некоторую достаточно

большую часть случайных значений величин их вероятностями. Оставшаяся чисто случайная часть индетерминированных значений не определяется и предсказать ее значение невозможно.

При рассмотрении реальных технологических процессов необходимо учитывать все три подхода к моделированию: детерминированный, вероятностный и чисто случайный. Во многих случаях ограничиваются только рассмотрением детерминированной части процесса, когда вероятностная и чисто случайная часть незначительны.

Для некоторых технологических процессов пищевых производств (например, прием сырья, отпуск готовой продукции и др.) элемент чистой случайности мал и главное значение имеет вероятностная часть, на основе которой можно построить статистические математические модели технологических процессов. Технологические процессы, для которых имеют большое значение чисто случайные воздействия, практически являются управляемыми или неуправляемыми системами.

Реальные технологические процессы, как правило, всегда комбинированные. Поэтому для их изучения объединяют все три подхода. Детерминированную часть, поддающуюся точному расчету, исследуют теоретическими методами, вероятностную — определяют по длительному наблюдению за процессом или специальной постановкой эксперимента. При этом необходимо выделить чисто случайную часть, принципиально не поддающуюся никакому учету. Волнение чисто случайных воздействий определяют специальными методами, рассмотрение которых в нашу задачу не входит. Эти методы применяют в основном для повышения надежности систем.

В стационарных технологических процессах вероятностные характеристики постоянны и с увеличением промежутка времени имеют более точные значения в отличие от нестационарных, у которых вероятностные характеристики изменяются во времени.

В отличие от детерминированных вероятностные характеристики невозможно получить на основании прямых измерений, а только путем обработки совокупности случайных событий.

При математическом моделировании технологических процессов пищевых производств используют все перечисленные методы и подходы к составлению моделей. При этом детерминированный подход с вероятностным сочетается, как правило, редко.

Наиболее эффективные математические модели построены на модульных принципах. Показатель качества модуля может иметь следующее выражение

$$R_i = m_1 k_i + m_2 p_i - m_3 l_i,$$

где m_1, m_2, m_3 — коэффициенты весомости, определяемые квалиметрическими методами; k_i — кратность повторения i -го модуля в алгоритмах; p_i — размерность модуля; l_i — избыточность, с которой покрываются i -м модулем заданные алгоритмы.

Очевидно, что лучшим модулем будет такой, который имеет максимальную размерность, высокую кратность повторения и малую избыточность.

§ 4. Классификация математических моделей технологических процессов

Математические модели технологических процессов можно разделить или классифицировать, т. е. определить их принадлежность к какому-то множеству по различным признакам, характеризующим особенности процессов, характеристики технологического оборудования, а также общие и специфические свойства математических моделей. В соответствии с требованиями теории классификации каждой ее ступени должен соответствовать какой-то классифицированный признак, а классификация должна быть исчерпывающей и исключительной. Этим требованиям может соответствовать несколько классификационных схем. Поскольку математическое моделирование в технологии в основном имеет практическую направленность, то в основу классификации должны быть положены типы решаемых задач. В связи с этим изложим принципы классификации математических моделей применительно к особенностям решения задач технологии пищевых продуктов. В соответствии с принятыми принципами системного подхода математические модели по назначению были разделены на четыре класса: 1) раскрытие механизма явлений; 2) совершенствование технологических режимов; 3) разработка конструкций агрегатов и 4) систем управления [12].

Математическое моделирование применяют для решения прямых, обратных (инверсных) и индуктивных задач. Прямая задача в терминах системного анализа заключается в определении реакции системы (выходных параметров) по известным силам (входным параметрам, возбуждающим воз-

действиям и пр.). Условное изображение системы или ее элемента (технологического оператора) приведено на рис. 9. Применительно к технологическим процессам к такого рода задачам относятся установление кинетических закономерностей, статических и динамических характеристик. Под кинетикой понимают изменение какого-либо параметра во времени. Статической характеристикой называют изменение выходных параметров от входных, динамической — изменение выходной характеристики во времени при нанесении стандартного испытательного возмущения (ступенчатое, импульсное и пр.) на входе.

Статической характеристикой объекта называют математическую зависимость

$$y(\tau) = f[x(\tau)]$$

между входной и выходной координатами на отрезке времени, когда все производные функции $x(\tau)$ и $y(\tau)$ тождественны, равны нулю (множество статических или равновесных состояний). Чаще всего статические характеристики имеют такую форму:

$$y_i = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

или

$$y_i = f(x_1) \quad x_2 = \text{const} \dots x_n = \text{const};$$

$$y_2 = f(x_2) \quad x_1 = \text{const} \dots x_n = \text{const} \text{ и т. д.}$$

Математическая запись динамической характеристики определяется видом возмущения. Например, импульсная, или весовая, функция $K(\tau)$ определяется как изменение во времени выходной координаты $y(\tau)$ при входном возмущении типа дельта-функции $\delta(\tau)$

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \neq 0 \\ \infty, & \tau = 0 \end{cases}.$$

После преобразования по Лапласу $L\{\delta(\tau)\} = 1$ получим передаточную функцию объекта, равную единице.

Переходная функция $h(\tau)$ связана интегральным соотношением с импульсной функцией $K(\tau)$

$$h(\tau) = \int_0^{\tau} K(\tau) d\tau.$$

Импульсную функцию $K(\tau)$ вычисляют путем дифференцирования переходной функции $h(\tau)$

$$K(\tau) = \frac{dh(\tau)}{d\tau}.$$

При решении обратных (инверсных) задач определяют необходимые воздействия (входные параметры) по известной или заданной реакции системы. Применительно к технологии такими задачами являются определение величин воздействий, обеспечивающих заданные или наилучшие показатели качества продукта. При решении этих задач определяют также внутренние физические параметры системы по известным воздействиям, реакциям и уравнениям связи между ними (уравнениям процесса или модели). Обратные (инверсные) задачи обычно решают при синтезе систем, т. е. при проектировании процессов, аппаратов, машин, агрегатов и их систем управления. Некоторые из этих задач являются оптимизационными. Решение обратных задач позволяет установить константы модели, по которым определяют основные параметры аппаратов и машин, характеристики потоков обрабатываемых продуктов и рабочих агентов, обеспечивающих заданные или оптимальные характеристики процесса.

При решении индуктивных задач составляют (или уточняют) уравнения процесса по известным свойствам элементов системы, силам и реакциям системы. Составление математического описания, как правило, является индуктивной задачей.

Кроме типов решаемых задач математические модели различают по виду или форме математических описаний, по способам реализации на вычислительных машинах (алгоритмам), т. е. классификационные признаки могут быть различными, что позволяет построить другие системы моделей, основанные на иных классификационных признаках и имеющие другие цели. Такими целями могут быть: унификация вычислительных процедур, способ определения констант в уравнениях моделей, метод оптимизации и пр. Создавая различные системы моделей, необходимо учитывать самое важное обстоятельство: цели одних систем не должны противоречить целям других. Более того, составление каждой новой системы должно способствовать достижению целей других.

В соответствии с этими классификационными признаками рассмотрим классификацию математических моделей процессов пищевой технологии (рис. 16).

Прямыми задачами технологии являются задачи кинетики, статистики и динамики. При решении задач кинетики устанавливают изменение концентраций, температур, химического состава и физических свойств пищевых продуктов

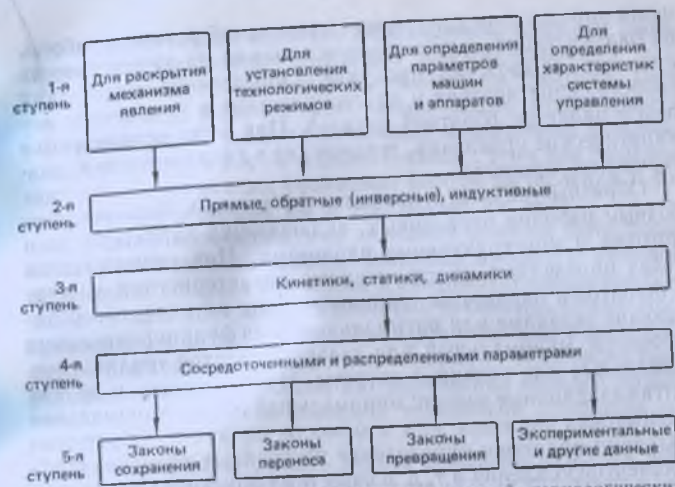


Рис. 16. Классификация математических моделей технологических процессов.

во времени по заданным (известным) параметрам потоков основного продукта и рабочего агента.

При решении задач статистики определяют конечные и критические значения параметров обрабатываемого материала (равновесия, конечная, критическая концентрация и другие характеристики) по известным характеристикам состояния обрабатываемого материала, рабочего агента и кинетическим закономерностям. Решения задач статистики используют для определения величин потенциалов и граничных условий ведения процесса. Уравнение статистики в основном получают путем обработки экспериментальных данных.

При решении задач динамики устанавливают изменения параметров пищевого продукта и рабочего агента на выходе при стандартных испытательных возмущениях (ступенчатое, импульсное, синусоидальное и др.) на входе в машину или агрегат. Динамические свойства необходимы при разработке систем автоматического управления.

Решение обратных (инверсных) задач кинетики позволяет определить значения входных параметров, обеспечивающих необходимое время процесса до заданного конечного значения параметра и других заданных или оптимальных свойств выходного продукта (консистенция, химический состав, внешний вид и пр.). Обратные задачи применяют

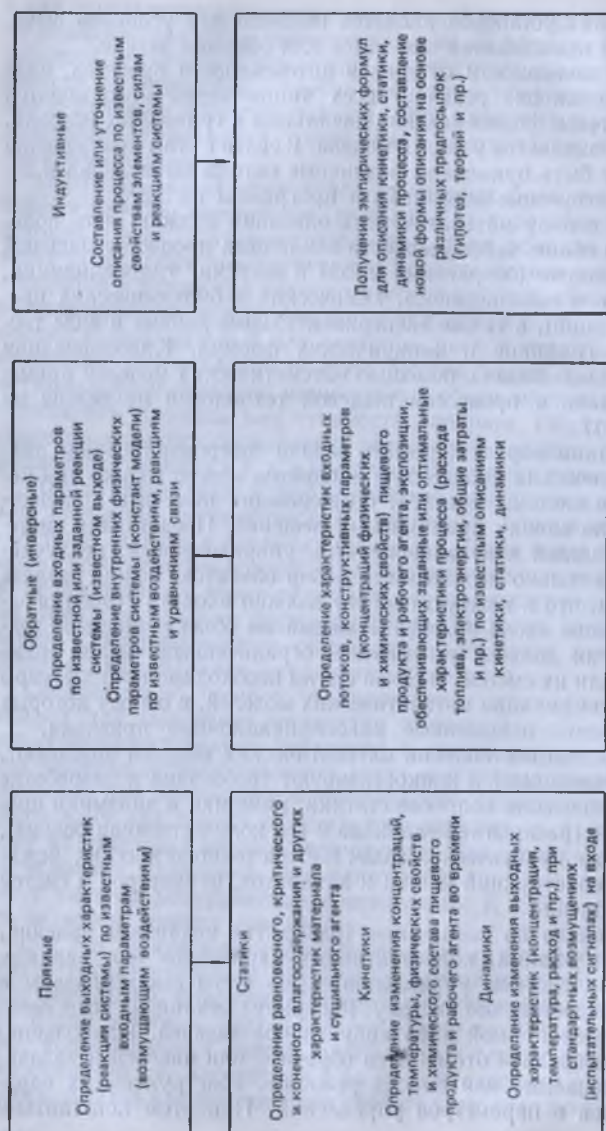


Рис. 17. Классификация задач, решаемых методами математического моделирования.

моделей могут быть химический состав, физические свойства пищевого продукта, рабочего агента, коэффициенты переноса, усиления, конструктивные параметры машины или аппарата, постоянные времени и пр. Наиболее важными из инверсных задач являются оптимизационные, так как практически только они позволяют получить обоснованные оптимальные решения. В основу системы моделей может быть положена иерархия структуры агрегата, участка или производственного процесса, а также структура управления.

В соответствии с принятым системным подходом математические модели можно разделить на 5 ступеней: класс — подкласс — группа — подгруппа — вид (см. рис. 16). По назначению (1-я ступень классификации) модели делятся на 4 класса: I — раскрытие механизма явления; II — установление технологического режима; III — совершенствование конструкции агрегата; IV — совершенствование системы управления. Эти четыре класса можно разделить еще на 4 классификационные ступени. В соответствии со 2-й ступенью модели делятся на три подкласса по общности (типу) решаемых задач: прямые, обратные (инверсные) и индуктивные; 3-й — на три группы по закономерностям изменения основного параметра: кинетики, статистики и динамики; 4-й — на две подгруппы по признаку стационарности: с сосредоточенными и распределенными параметрами; 5-й — по виду используемых закономерностей, положенных в основу математических описаний (законы сохранения, переноса, превращения и др.).

Исходя из приведенной классификации моделей задачи совершенствования процессов пищевой технологии или агрегатов решаются ограниченным числом приемов.

Следует отметить, что модели разрабатываются главным образом для решения многократно повторяющихся задач, т. е. при разработке моделей в начальной стадии учитывается возможность их универсального назначения, что повысит научную ценность моделей. При этом всегда предпочтение отдается более простым моделям.

Выбор и составление математических моделей конкретных объектов, как и выбор моделей вообще, наименее формализован и дать на него исчерпывающий ответ не представляется возможным.

При совершенствовании технологических процессов пищевых и зерноперерабатывающих предприятий целесообразность классификации или ее выбора определяется системным признаком — упрощением самого процесса моделиро-

вания, которое может проявляться в уменьшении затрат на решение поставленной задачи путем использования унифицированных приемов.

Структуру математических описаний технологических процессов пищевых и зерноперерабатывающих предприятий можно представить обычно конечными (алгебраическими и трансцендентными), обыкновенными дифференциальными уравнениями и дифференциальными уравнениями в частных производных. Все уравнения могут быть линейными и нелинейными. Дифференциальные уравнения могут быть первого и более высоких порядков.

Детерминированные модели в общем являются частным случаем вероятностных или статистических моделей и их используют чаще всего для исследования наиболее вероятного состояния объекта. Математическая форма уравнения может быть различная. В моделях с сосредоточенными параметрами используются алгебраические и обыкновенные дифференциальные уравнения, а в моделях с распределенными параметрами — уравнения множественной регрессии или уравнения в частных производных. Модели переходных процессов описывают чаще всего обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Методы решения дифференциальных уравнений весьма разнообразны и для практического применения следует выбирать наиболее рациональный вариант, используя специальную или справочную литературу. В общем случае предпочтение необходимо отдавать точным аналитическим методам решения дифференциальных уравнений. Запись решения в аналитической форме позволяет установить конкретную степень влияния на процесс каждой переменной. При невозможности аналитического решения или других трудностях математического характера дифференциальные уравнения решают на аналоговых вычислительных машинах.

Широко применяют также методы операционного исчисления, которые позволяют экономными способами получить решение линейных дифференциальных уравнений, а также некоторых типов разностных и интегральных уравнений.

Сущность операционного исчисления заключается в следующем. Пусть задана некоторая функция $f(\tau)$ действительной переменной τ , для которой существует преобразование Лапласа (L -преобразование)

$$L[f(\tau)] = \Phi(p) = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau,$$

Таблица 11. Преобразования по Лапласу

Оригинал	Изображение	Оригинал	Изображение
$A = \text{const}$	A/p	$e^{-a\tau} \tau^n$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
τ	$1/p^2$	$\frac{1}{T} e^{-\tau/T}$	$1/TP + 1$
τ^2	$2/p^3$	$1 - e^{-\tau/T}$	$1/p(Tp + 1)$
τ^n	$n! / p^{n+1}$	$\sin \omega\tau$	$\omega/p^2 + \omega^2$
$e^{a\tau}$	$1/p - a$	$\cos \omega\tau$	$p/p^2 + \omega^2$
$e^{-a\tau}$	$1/p + a$	$\delta(\tau)$	1

где L — символ прямого преобразования по Лапласу; p — комплексная переменная, $p = \alpha + \beta i$, $i = \sqrt{-1}$; α , β — действительная и мнимая части комплексной переменной.

Ограничения, накладываемые на временную функцию, $f(\tau)$ равны нулю при $\tau < 0$.

При этом функцию $f(\tau)$ называют оригиналом, а соответствующую ей функцию $\Phi(p)$ — изображением. Практически прямое преобразование по Лапласу каждый раз не выполняют, а пользуются готовыми таблицами преобразования. В качестве примера некоторые функции $f(\tau)$ и соответствующие им изображения $\Phi(p)$ приведены в табл. 11.

Таблицами можно пользоваться и для обратного преобразования (L^{-1}), т. е. находить соответствующий оригинал по известному изображению. Если в таблицах нет такого изображения, которое может быть получено в результате решения уравнения в области p , то переход в область τ осуществляют с помощью формулы обратного преобразования Лапласа

$$L^{-1}[\Phi(p)] = f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \Phi(p) e^{-p\tau} dp.$$

Однако вычисление этого интеграла сопряжено с большими трудностями, поэтому всегда следует предварительно использовать любые доступные преобразования полученного изображения, чтобы привести его к виду, удобному для нахождения оригинала по таблицам преобразований. При преобразовании дифференциальных уравнений в операционную форму, и наоборот, используют основные свойства операционного соответствия: однородность и сложение.

Дифференциальные уравнения преобразуют путем перехода от независимой переменной τ (время) к комплексной p .

Это позволяет заменить операции дифференцирования и интегрирования более простыми (умножение и деление). Полученная таким образом операторная форма записи дифференциальных уравнений широко используется в научных и инженерных исследованиях.

При использовании передаточных функций в некоторых случаях упрощается вид математического описания объекта и облегчается его моделирование. Если объект исследования представить совокупностью элементарных звеньев автоматического регулирования, описанных наиболее простыми передаточными функциями, то его характеристику составляют, используя сочетания этих функций. Как известно из теории автоматического регулирования, такими типовыми элементарными звеньями являются: усилительное (пропорциональное, безземкостное), инерционное (периодическое, одноземкостное, статическое, релаксационное), дифференцирующее, интегрирующее, чистого запаздывания и колебательное, которые можно представить передаточными функциями

$$W_n(p) = k; \quad W_{\text{пер}}(p) = \frac{k}{Tp + 1}; \quad W_d(p) = p; \quad W_u(p) = \frac{k}{p};$$

$$W_{\text{зап}}(p) = e^{-p\tau_s}; \quad W_{\text{коп}}(p) = \frac{1}{T_2 p + T_1 p + 1}.$$

§ 5. Комбинированный метод составления математического описания

В качестве примера составления математического описания, т. е. когда одна часть уравнений или неравенств может быть получена аналитически, а другая — экспериментально, рассмотрим математическую модель дискового измельчителя для определения конструктивных параметров, обеспечивающих минимальные приведенные затраты. Основными составляющими приведенных затрат будут технические характеристики процесса — выход крахмала и удельные затраты энергии (управляемые параметры). Основными входными характеристиками (управляющими параметрами), влияющими на эти показатели, являются характеристики продукта: расход G , влажность W и температура t_0 ; конструктивные параметры: числа оборотов роторов n_1 и n_2 , их радиусы R_1 и R_2 , шаги между пальцами роторов b_1 и b_2 и пр. (рис. 18).

На основе анализа влияния параметров дробилки на выходные показатели можно предположить следующее:

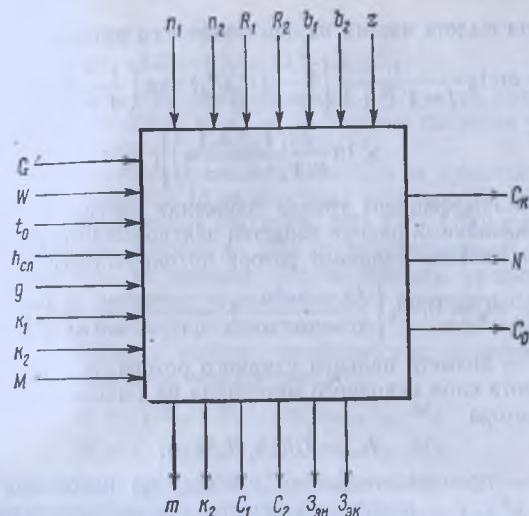


Рис. 18. Параметрическая схема дисковой дробилки.

1. Для данного типа роторов оптимальный шаг между пальцами ударного ротора пропорционален диаметру пальцев $2r_n$.

2. Значение шага между пальцами ударного ротора не изменится, если соотношение $n_1/n_2 = \text{const}$.

3. При увеличении числа оборотов n_1 центробежного ротора шаг между пальцами ударного ротора уменьшается, и наоборот.

4. Если переносная скорость частицы (окружная скорость центробежного ротора) постоянная, то с увеличением радиуса расположение ударных пальцев ротора и оптимальное значение шага между ними уменьшаются.

В МТИППе получены зависимости, необходимые для составления математического описания:

максимальная скорость удара частиц по нормали о пальцы ударного ротора:

$$v_{\text{max}} = v_i^2 (1/\cos^2 \alpha - 2/i_D + 1) + 2i_v (1/i_D - 1) + 1, \quad (89)$$

где v — относительная скорость роторов, м/с; $i_D = D_2/D_1$ — отношение диаметров; $i_v = v_1/v_2$ — отношение скоростей роторов;

угол вылета частиц из центробежного ротора

$$\alpha = \arctg \frac{1}{f - \sqrt{f^2 + 1}} \left[1 - (R_0/R_1) \exp \left(\frac{\sqrt{f^2 + 1} - f}{\sqrt{f^2 + 1} + f} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \ln \frac{2R_1 \sqrt{f^2 + 1}}{R_0 \sqrt{f^2 + 1} + f} \right) \right], \quad (90)$$

где f — коэффициент трения движения частиц о лопасти;
 R_0 — начальный радиус лопастей центробежного ротора, м;
шаг пальцев ударного ротора по окружности

$$b_2 = 0,9d_n \left[\frac{i_D + \cos^2 \alpha}{i_D - \cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{i_v (i_D^2 - \cos^2 \alpha)} \right], \quad (91)$$

где d_n — диаметр пальцев ударного ротора, м;
высота слоя исходного материала на выходе центробежного ротора

$$h_{cl} = G/(zh_1 v_i \operatorname{tg} \alpha), \quad (92)$$

где G — производительность (расход) по исходному продукту, м³/с; z — количество лопастей центробежного ротора;
 h_1 — высота лопастей, м;

удельная нагрузка на пальцы ударного ротора, м³/м²

$$g = h_{cl} \operatorname{tg} \alpha / (i_D - 1 + 1/i_D); \quad (93)$$

отношение количества выделенного крахмала к содержащемуся в исходном сырье

$$c_k = \frac{Mk_1 - mk_2}{Mk_1}, \quad (94)$$

где M, m — масса абсолютно сухих веществ в исходном сырье и в измельченном продукте, кг/м³; k_1, k_2 — содержание связанного крахмала в исходном сырье и в измельченной кашке, % к массе веществ кашки (% СВ);

переменные и конструктивные параметры определяют по формулам

$$v_1 = \pi D_1 n_1; \quad (95)$$

$$v_2 = \pi D_2 n_2; \quad (96)$$

$$i_D = D_2/D_1; \quad (97)$$

$$R_1 = D_1/2; \quad (98)$$

$$v = v_1 + v_2; \quad (99)$$

$$i_v = v_1/v_2; \quad (100)$$

$$i_{R_0} = R_0/R_1; \quad (101)$$

$$R_0 = R_1 - l; \quad (102)$$

$$\Delta R = (D_2 - D_1 - d_n)/2, \quad (103)$$

где D_1, D_2 — диаметры центробежного и ударного роторов, м; l — длина лопастей, м; n_1, n_2 — угловые скорости ударного и центробежного роторов, об/с.

Все рассмотренные уравнения (89—103) не замыкают модель, так как имеются 18 неизвестных и только 15 уравнений. Между уравнениями (89), (93), (97), (98), (100) существует взаимосвязь, а формула (94) от перечисленных уравнений формально не зависит. Чтобы связать уравнения, полученные из основных закономерностей механики, с уравнением (94), характеризующим качество технологического режима, необходимо ввести эмпирические зависимости, которые в общем виде можно записать

$$m = f_1(k_1, \Delta R, i_v, g, v_{\max}, b_2, M); \quad (104)$$

$$N = f_2(k_1, \Delta R, i_v, G, v_{\max}, b_2, M); \quad (105)$$

$$k_2 = f_3(k_1, \Delta R, i_v, g, v_{\max}, b_2, M). \quad (106)$$

В этом случае количество неизвестных (18) равно количеству уравнений.

Для экспериментального определения вида зависимостей (104—106) необходимо представить информацию о входных переменных по формулам (89), (91), (93), (98), (103) в таком виде, чтобы они однозначно соответствовали значениям измеряемых факторов.

В работе (7) приведены результаты экспериментов в диапазоне изменения входных переменных: $138 \leq M \leq 181$ кг/м³; $63 \leq k_1 \leq 74$ % СВ; $0,54 \leq D_2 \leq 0,56$ м; $0,001 \leq G \leq 0,003$ м³/с; $0 \leq l \leq 0,1$; $8,33 \leq n \leq 63,3$ об/с.

После математической обработки функциональные зависимости (104—106) имеют вид

$$m = 54,42k_1^{-1,16} \Delta R^{0,26} i_v^{0,019} g^{0,026} v_{\max}^{-0,67} b_2^{0,18} M^{0,74};$$

$$N = 2,53 \cdot 10^{-7} k_1^{0,806} \Delta R^{-0,136} i_v^{-0,72} G^{0,99} v_{\max}^{2,13} b_2^{0,37} M^{0,495};$$

$$k_2 = \exp [2,06 + 10^{-4} (92k_1 - 37v_{\max} + 51M) + 7,4g + 0,57i_v + 10^{-6} (10,4\Delta R + 3,7b_2)].$$

Процесс исследуется на математической модели методом однофакторного эксперимента, в результате которого получаются частные линии регрессии, представленные на рис. 19 осями координат (зависимыми переменными): c_k — отношение выделенного крахмала к первоначальному содержанию;

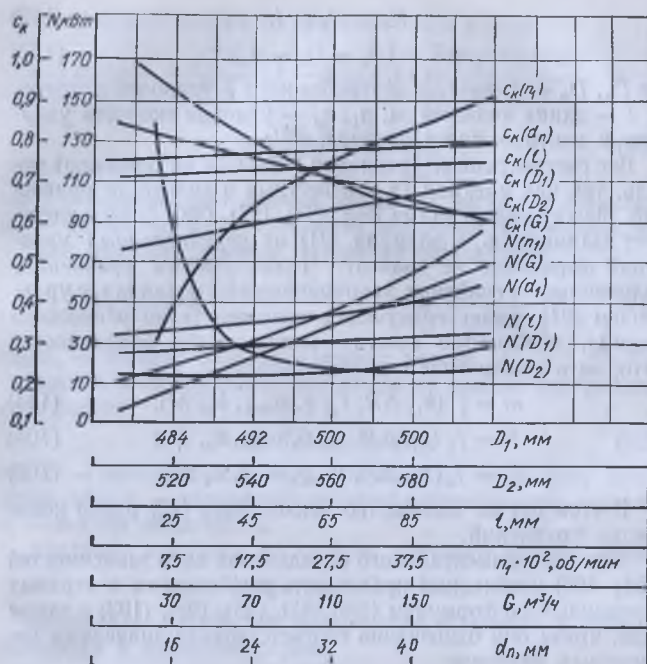


Рис. 19. Экспериментально полученные линии регрессии.

N — потребляемая электродвигателем энергия (расход энергии). На оси абсцисс приведены неизвестные переменные D_1 , D_2 , l , n_1 , G , d_n , где l — длина лопастей; n_1 — число оборотов центробежного ротора; G — расход по исходному продукту; d_n — шаг пальцев ударного ротора по окружности. С увеличением n_1 выход крахмала повышается, но растет и потребляемая энергия $N(n_1)$. С увеличением нагрузки выход крахмала снижается, а расход энергии увеличивается. Приведенные зависимости свидетельствуют о неоднозначном влиянии различных факторов на технологические показатели.

В связи с этим оптимизация процесса может быть проведена только по экономическим показателям. Предложено оценивать работу дробилки по суммарной величине стоимости продукта C_T за вычетом затрат на сырье и эксплуата-

ционные расходы, т. е.

$$C_{T0} = C_{T1} + C_{T2} - C_{T3} - Z_{\text{эн}} - Z_{\text{эк}},$$

где $C_{T1} = 6,11 \cdot 10^{-7} (Mk_1 + mk_2)$ — стоимость крахмала, полученного за 1 с, р./с; $C_{T2} = 1,6 \cdot 10^{-5} Gm$ — стоимость отходов, р.; $C_{T3} = 6 \cdot 10^{-3} G$ — стоимость исходного продукта, р.; $Z_{\text{эн}} = 3,3 \cdot 10^{-6}$ — удельные затраты на электроэнергию, р.; $Z_{\text{эк}} = 6,6 \cdot 10^{-7}$ — удельные эксплуатационные затраты, р.

Составляющие критерия оптимизация C_{T0} неоднозначно влияют на его величину. Так, с увеличением m повышается стоимость отходов C_{T2} , но уменьшается стоимость крахмала C_{T1} , т. е. с увеличением m за счет C_{T2} критерий C_{T0} возрастает, а за счет C_{T1} уменьшается. Величины k_2 , m , N также зависят от конструктивных параметров и управляющих воздействий. Поэтому при оптимизации по принятому критерию нужно определить значения технологических и конструктивных параметров, которые давали бы максимальные значения критерия C_{T0} . Эту задачу можно решить постановкой специально спланированных опытов на математической модели по плану полного факторного эксперимента. При этом исследуется влияние факторов h_1 , d_n , n_1 , D_2 при различных значениях производительности G . Неварьируемые параметры имеют следующие значения: $D_1 = 0,5$ м; $n_2 = 33,3$ об/с; $M = 160$ кг/м³; $k_1 = 70$ %; количество лопастей ротора $z = 12$.

Интервалы варьирования факторов в процессе эксперимента корректируют соответствующим образом с тем, чтобы получить уравнение регрессии, симметричное относительно линейных членов.

Программу оптимизации по уравнению, включающему и оценки эффектов межфакторных взаимодействий, рассчитывают по известной методике. Условия опыта, давшие наи-

Таблица 12. Зависимость выхода крахмала и величины расхода от нагрузки и скорости вращения ротора

$G, 10^{-3}$ м ³ /с	N , кВт	c_k , %	n_1 , об/с	D_2 , м	C_{T0} , р/
1,39	325,2	96,9	134	0,550	3,61
2,08	395,1	96,9	136	0,555	5,38
2,78	538,8	96,8	139	0,557	7,12
3,47	673,0	97,7	140	0,553	8,78
4,17	833,9	96,6	143	0,560	9,52

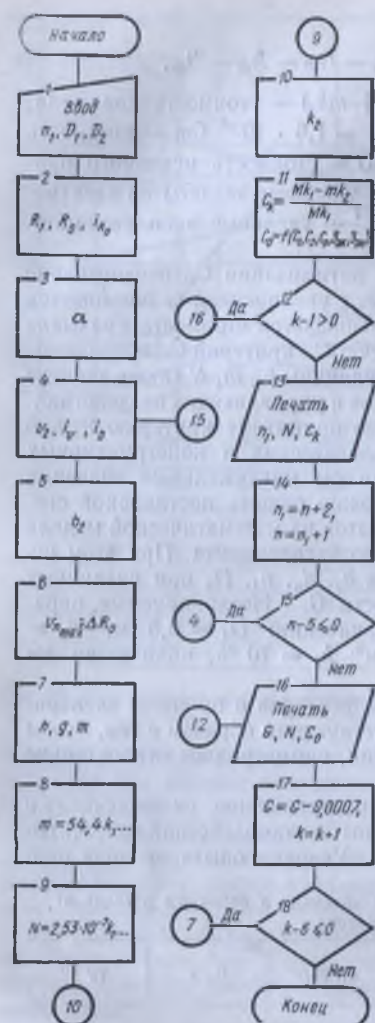


Рис. 20. Структурная схема алгоритма вычисления максимального дохода.

лучшие значения критерия C_{10} принимаются за центр нового эксперимента, реализация которого на ЭВМ дает новое уравнение регрессии. По нему уточняются оптимальные значения исследуемых факторов. После 5—6 опытов эффект оптимизации достигает максимальной величины, что позволяет полученные значения факторов принять за оптимальные (табл. 12). Наиболее эффективен технологический режим при производительности установки $G = 4,17 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$ ($150 \text{ м}^3/\text{ч}$). Структурная схема алгоритма приведена на рис. 20.

Оптимальные значения для h_1 и b_2 в табл. 10 не приведены, так как от производительности они не зависят и составляют соответственно $h_1 = 100 \text{ мм}$ и $b_2 = 16 \text{ мм}$.

В практике управления распространены два класса самонастраивающихся систем: поисковые экстремального регулирования и аналитические (вычислительные). Первые применяются, если показатель цели является наблюдаемой или измеряемой величиной, а вторые — когда показате-

лом — процедуры вычисления. Приведенный пример составления математической модели охватывает оба случая. Так, величину концентрации отмытого крахмала C_k и расход энергии N можно измерить, а стоимость продукта C_0 — только вычислить.

Глава 4

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ЭВМ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

§ 1. Основные понятия и определения

Статистическое моделирование — один из методов получения характеристик моделируемой технологической системы (оригинала), сущность которого состоит в построении моделирующего алгоритма, имитирующего поведение, взаимодействие элементов технологической системы и влияние случайных воздействий внешней среды, а также в реализации этого алгоритма на ЭВМ. Теоретической основой статистического моделирования являются теория вероятностей и математическая статистика.

Теория вероятностей изучает закономерности случайных явлений и позволяет аналитически определять вероятность одних событий через вероятности других, законы распределения и числовые характеристики одних величин через законы распределения и числовые характеристики других.

К предмету математической статистики относятся регистрация, описание и анализ экспериментальных данных, получаемых в результате наблюдений массовых случайных явлений. Задачи математической статистики сводятся к определению законов распределения случайных величин, проверке правдоподобия гипотез, нахождению неизвестных параметров законов распределения.

Имитация (от лат. *imitare* — подражать) — воспроизводить с возможной точностью. Применительно к технологическим процессам это означает воспроизводство их с помощью какого-то устройства, модели. В пищевой промышленности имитационное моделирование используют для воспроизводства реальных технологических процессов с целью определения их основных характеристик (объема и запасов сырья, количества транспортных средств и технологических линий, надежности функционирования оборудования

создания систем технического обслуживания, статических, динамических свойств и пр.).

В основу имитации технологических процессов положены методы образования случайных событий (дискретных величин), т. е. имитационное моделирование часто сводят к статистическому, хотя статистическое моделирование является только частным случаем имитационного. Имитационное моделирование по существу представляет собой статистический эксперимент. После многократного повторения эксперимента результаты моделирования имеют стационарное значение.

Метод моделирования случайных величин применяют с целью вычисления характеристик их распределений. Обобщение метода заключается в том, что его распространяют и на случайные функции, что при цифровом моделировании несущественно, где моделирование случайных функций сводится к моделированию последовательности случайных величин.

Одним из основных способов имитационного моделирования является формирование последовательности случайных чисел с различными законами распределения и проверка их точности.

В результате статистического моделирования технологического процесса получают серию частных значений искомых величин или функций, статистическая обработка которых позволяет получить сведения о поведении реального объекта или процесса в произвольные моменты времени. Если количество реализаций N достаточно велико, то полученные результаты моделирования системы приобретают статистическую устойчивость и с достаточной точностью могут быть приняты в качестве оценок искомых характеристик процесса функционирования технологической системы.

Напомним некоторые понятия и определения из теории вероятностей.

Случайное явление — это такое, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же события протекает по-разному. Под событием понимают всякое явление (эффект), которое может произойти или не произойти (выполнение технологической операции, прибытие транспортного средства, выход единицы продукции, авария и т. д.).

Для сравнения возможности появления события вводится число, называемое вероятностью события и отождествляемое с частотой события. Вероятность достоверного события — 1, недостоверного (невозможного) — 0.

Таким образом, частоту события можно определить отношением числа появившихся событий к общему числу опытов

$$P(A) = m/n,$$

где m — число появлений событий A ; n — общее число опытов.

Случайной величиной называют величину X , которая может принять то или иное неизвестное заранее значение x . Они бывают дискретными (0, 1, 3, 4, ...) и непрерывными, когда заполняют какой-то промежуток (выполнение какого-либо неравенства).

Формула полной вероятности, т. е. вероятность появления события A , которое может произойти с одним из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$

$$P(A) = \sum_{i=1}^n p(H_i) p(A/H_i),$$

т. е. вероятность события A , вычисляется как сумма произведения вероятности каждой гипотезы на вероятность события при этой гипотезе.

Следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является теорема или формула Байеса

$$P(H_i|A) = \frac{p(H_i) p(A|H_i)}{\sum_{i=1}^n p(H_i) p(A|H_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Случайной называют функцию, которая в результате опыта может принять тот или иной заранее неизвестный конкретный вид, который называют реализацией случайной функции (семейством функций).

Случайные величины можно охарактеризовать вероятностью их появления:

$$P(X = x_1) = P(x_1) = p_1,$$

где P — вероятность появления случайной величины X ; $x_1, \dots, x_n$ — возможные значения случайной величины.

Это равенство означает следующее: вероятность того, что случайная величина X будет иметь значение x_1 , равна p_1 . Поскольку появление в данном опыте возможного значения, например x_1 , исключает появление других возможных значений $x_1, x_2, \dots, x_n$, то, очевидно, что возможные значения случайной величины являются несовместимыми событиями. Из теории вероятностей известно, что сумма вероятностей

двух несовместимых событий равна единице. Следовательно, переходя к случайным величинам, нетрудно установить, что сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины также равна единице:

$$\sum_{i=1}^n p(x_i) = 1,$$

где x_i — i -е значение случайной величины; n — общее число ее возможных значений.

Законом распределения случайной величины называют всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями. При этом значения случайной величины являются аргументом, а соответствующие им вероятности — функцией.

§ 2. Методика установления законов распределения случайных величин

Законы распределения могут быть заданы таблицами (рядами), графически в виде многоугольников распределения (гистограмм) и аналитически — в виде функций распределения (интегральный закон распределения) и функций плотности вероятностей (дифференциальный закон распределения). Функцией распределения случайной величины X называют функцию

$$P(X < x) = F(x),$$

где x — произвольное число.

При построении таблиц распределений все экспериментально полученные значения сначала располагают в порядке возрастания: $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, затем строят таблицу зависимости между случайной величиной и ее вероятностью в такой последовательности:

- 1) устанавливают m_i — число одинаковых значений (рядов) x_i ;
- 2) определяют вероятность $p_i = m_i/n$, где n — общее число всех опытных данных;
- 3) k — число различных разрядов;

x_i	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n	$\sum_{i=1}^k m_i = n$
m_i	m_1	m_2	m_3	$\dots$	m_k	$\sum_{i=1}^k p_i = 1$
$p_i = \frac{m_i}{n}$	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_k	

Если число разных значений опытных данных более 15—20, то при группировке все эти данные целесообразно сводить в определенное число разрядов, принимая ширину разряда одинаковой. Тогда построение таблицы ведут в следующей последовательности:

- 1) находят наибольшее ($x_{\max}$) и наименьшее ($x_{\min}$) значения случайной величины. Вычисляют размах изменения R по зависимости

$$R = x_{\max} - x_{\min};$$

- 2) задаются некоторым числом разрядов k , принимая его нечетным; при общем числе замеров $n > 100$ берут $k = 9 \dots 15$, а при $n < 100$ можно принять $k = 7$;
- 3) определяют ширину разряда $h = R/k$, и для упрощения расчетов полученное значение h округляют;
- 4) устанавливают границы разрядов и подсчитывают число измерений в каждом разряде. При подсчете значения x , находящиеся на границе разрядов, следует всегда относить к одному и тому же разряду;
- 5) определяют вероятность для каждого разряда и записывают ряд распределения:

$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$x \dots x_{k+1}$	
h_1	h_2	h_k	
m_i	m_1	m_2	m_k
$p_i = \frac{m_i}{n}$	$p_1 = \frac{m_1}{n}$	$p_2 = \frac{m_2}{n}$	$p_k = \frac{m_k}{n}$

Графической формой представления случайных величин, сведенных в разряды, являются гистограммы, которые при одинаковых разрядах строят в следующей последовательности:

- 1) определяют величины ординаты $y_i = p_i/h$, где p_i — вероятность появления случайной величины в i -м разряде; h — ширина каждого разряда.

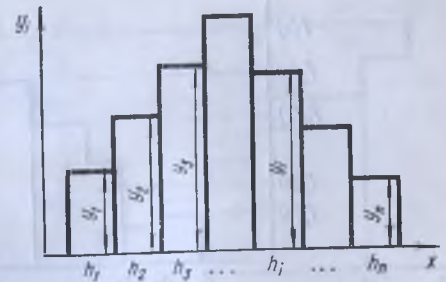


Рис. 21. Гистограмма распределения случайных величин.

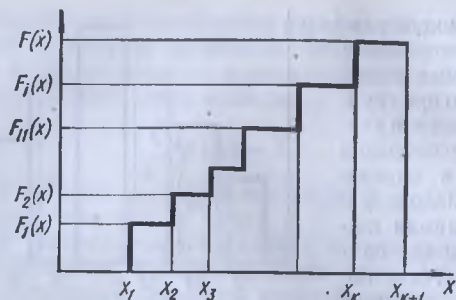


Рис. 22. Построение функции распределения случайной величины.

2) в системе координат $y_i = f(x)$ на ширине разряда h откладываются величины y_i как высоты и строятся прямоугольники (рис. 21).

Очевидно, что площадь элементарного прямоугольника

$$s_i = hy_i = h \frac{p_i}{h} = p_i,$$

а площадь всей гистограммы

$$s = \sum_{i=1}^k s_i = \sum_{i=1}^k p_i = 1.$$

Следовательно, площадь, ограниченная гистограммой, равна единице.

Для составления функции распределения обозначим вероятность того, что случайная величина X окажется меньшей или равной какому-то значению x_i , через $P(X \leq x_i)$.

Поскольку функция распределения $F(x)$ равна вероятности $P(X \leq x_i)$, а вероятность может изменяться в пределах от нуля до единицы, очевидно, что и функция распределения также может изменяться от нуля до единицы $0 \leq F(x) \leq 1$. Поэтому можно записать

$$P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

или

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i,$$

или

$$F(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_m,$$

где m — число точек x_i , лежащих не правее x .

Последовательность построения функции распределения осуществляется в следующем порядке:

1) в системе координат $F(x)$ и x наносится точка с координатами x_1 и $F(x_1) = p_1$ (рис. 22);

2) из нанесенной точки опускается перпендикуляр до пересечения с осью

x и из нее же проводится горизонтальная линия вправо до пересечения с перпендикуляром, восстановленным из x_2 ;

3) на перпендикуляре, восстановленном из x_2 , откладывается $F(x_2) = p_1 + p_2$;

4) из точек с координатами x_2 и $F(x_2)$ проводится линия вправо и т. д.

Полученный график и является функцией распределения. Из графика следует, что: 1) функция распределения изменяется скачкообразно, причем величина скачка в точке x_i равна вероятности появления этого значения p_i ; 2) функция распределения является неубывающей, т. е. такой, которая может или возрасти, или не изменить своего значения.

Пусть дана функция распределения $F(x)$ (рис. 23) и требуется найти вероятность того, что величина x будет находиться в интервале $a < x < b$, т. е. надо найти $P(a < x < b)$. По определению $P(x < a) = F(a)$.

Из рис. 23 наглядно видно

$$P(a < x < b) = P(x < b) - P(x < a),$$

что можно записать в виде

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a).$$

Отсюда следует, что вероятность появления случайной величины в заданном интервале равна разности значений функции распределения на границах заданного интервала.

Связь функции распределения и гистограммы проявляется в следующем. Из определения функции распределения следует, что

$$F_1(x) - F_0(x) = p_1; \quad F_2(x) - F_1(x) = p_2; \quad F_i(x) - F_{i-1}(x) = p_i.$$

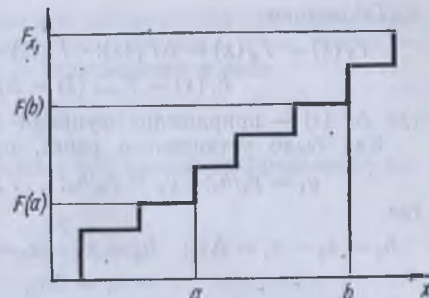


Рис. 23. Вероятность появления случайной величины в интервале $a-b$.

Обозначим

$$F_1(x) - F_0(x) = \Delta F_1(x); \quad F_2(x) - F_1(x) = \Delta F_2(x);$$

$$F_i(x) - F_{i-1}(x) = \Delta F_i(x),$$

где $\Delta F(x)$ — приращение функции распределения.

Как было установлено ранее, ординаты гистограммы

$$y_1 = p_1/h_1; \quad y_2 = p_2/h_2; \quad \dots; \quad y_i = p_i/h_i,$$

где

$$h_1 = x_2 - x_1 = \Delta x_1; \quad h_2 = x_3 - x_2 = \Delta x_2; \quad h_i = x_{i+1} - x_i = \Delta x_i,$$

а Δx_i — приращение случайной величины.

Подставив в выражение для ординаты гистограммы полученные значения p и h , получим

$$y_1 = \frac{\Delta F_1(x)}{\Delta x_1}; \quad y_2 = \frac{\Delta F_2(x)}{\Delta x_2}; \quad \dots; \quad y_i = \frac{\Delta F_i(x)}{\Delta x_i}.$$

В общем виде запишем

$$y = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x},$$

т. е. ордината гистограммы равна отношению приращения выборочной функции распределения к приращению случайной величины. Как следует из предыдущего, число разрядов равно отношению размаха R к ширине интервала h , т. е.

$$k = \frac{R}{h} = \frac{R}{\Delta x},$$

а уменьшение Δx равнозначно увеличению числа разрядов k .

Из последних формул следует, что увеличение числа разрядов, или, что то же самое, уменьшение величины Δx , ведет к сглаживанию гистограммы и функции распределения $F(x)$ при сохранении площади гистограммы, равной единице.

Для непрерывной случайной величины при $\Delta x \rightarrow 0$ гистограмма и функция распределения переходят в плавные кривые. При этом площадь гистограммы будет равна единице, а ордината гистограммы $y = \Delta F(x)/\Delta x$ при $\Delta x \rightarrow 0$

$$y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx},$$

т. е. превратится в производную от функции распределения $F(x)$ по величине x .

Производная от функции распределения по переменной x называется плотностью распределения, а ее график — кривой распределения и записывается в виде

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Известно, что площадь s под кривой распределения выражается интегралом

$$s = \int_A^B f(x) dx,$$

где A и B — наименьшее и наибольшее значения X .

Кроме того, как было установлено, эта площадь равна единице. Следовательно,

$$\int_A^B f(x) dx = 1.$$

Это равенство является основным условием, которому должна удовлетворять кривая распределения.

§ 3. Главные характеристики распределения случайных величин

В принципе известным бывает только ограниченное число значений случайной величины, представляющих выборку из генеральной совокупности σ , под которой понимают все допустимые значения случайной величины.

Выборку называют репрезентативной (представительной), если она дает достаточное представление о генеральной совокупности.

Функции распределения, получаемые по выборке, называют эмпирическими, или выборочными, разность между объемом выборки и числом связей, наложенных на эту выборку, — числом степеней свободы $f = n - l$.

Основные свойства распределения случайной величины значительно проще можно описать несколькими числовыми характеристиками, которые с помощью чисел определяют существенные особенности распределения. Такой системой характеристик являются моменты случайной величины, которые систематизируются по трем признакам: порядку момента β , началу отсчета и виду случайной величины.

Порядок момента β может быть любой целой величиной, практически же рассматривают моменты нулевого, первого,

второго, третьего и четвертого порядков, т. е. $\beta = 0, 1, 2, 3, 4$.

По началу отсчета случайной величины моменты могут быть начальными и центральными, а по виду — характерными для дискретных и непрерывных величин.

Начальным моментом β -го порядка для дискретных величин называется выражение

$$\alpha_\beta = \sum_{i=1}^n x_i^\beta p(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^\beta p_i, \quad \beta = 1, 2.$$

При уменьшении расстояния между соседними величинами дискретная величина стремится перейти в непрерывную. При этом

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n x_i^\beta p(x_i) = \int_A^B x^\beta f(x) dx,$$

где A и B — нижний и верхний пределы возможных значений случайной величины x ; $f(x)$ — плотность распределения.

Таким образом, начальный момент β -го порядка для непрерывной величины равен

$$\alpha_\beta = \int_A^B x^\beta f(x) dx.$$

Начальный момент нулевого порядка равен

$$\alpha_0 = \int_A^B x^0 f(x) dx = \int_A^B f(x) dx = 1.$$

Следовательно, нулевой начальный момент $\alpha_0 = 1$ и характеризует площадь, находящуюся под кривой распределения.

Начальный момент первого порядка, или первый начальный момент

$$\alpha_1 = \int_A^B x f(x) dx,$$

характеризует значение случайной величины, вокруг которого группируются все возможные ее значения, т. е. определяет положение центра группирования; его называют средним значением, или математическим ожиданием величины.

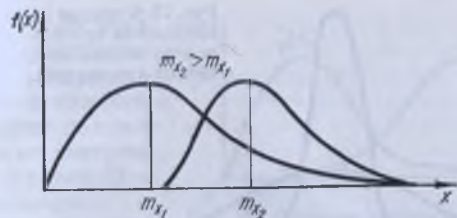


Рис. 24. Функция плотности распределения и математическое ожидание.

Для случайной величины X принято обозначение $\alpha_1 = m_x = M[X]$. Величина m_x имеет ту же размерность, что и X . Графики распределений, имеющих значения математического ожидания $m_{x_2} > m_{x_1}$, приведены на рис. 24.

Из рис. 24 видно, что математическое ожидание, или среднее значение, является той числовой характеристикой, которая определяет центр группирования случайной величины. Центр группирования часто принимают за начало отсчета, что равносильно переносу начала координат в точку m_x .

Случайные величины, отсчитываемые от центра группировки, т. е. от математического ожидания, называются центрированными.

Переход от начальных моментов к центральным осуществляется заменой для дискретных величин значения x_i на $(x_i - m_x)$. Тогда для непрерывных величин нулевой центральный момент

$$\mu = \int_A^B (x - m_x)^0 f(x) dx = \int_A^B f(x) dx = 1.$$

Следовательно, $\mu_0 = 1$ выражает площадь кривой распределения.

Первый центральный момент

$$M[X - m_x] = \mu_1 = \int_A^B (x - m_x) f(x) dx = \int_A^B x f(x) dx -$$

или

$$- m_x \int_A^B f(x) dx = m_x - m_x = 0,$$

т. е. математическое ожидание центрированной величины равно нулю.

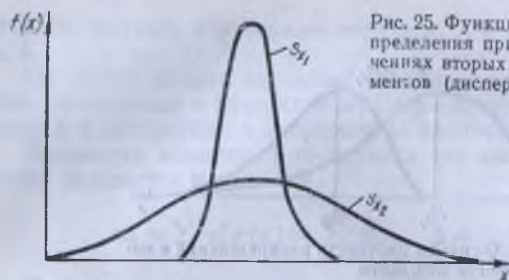


Рис. 25. Функция плотности распределения при различных значениях вторых центральных моментов (дисперсий).

Второй центральный момент

$$\mu_2 = \int_a^b (x - m_x)^2 f(x) dx$$

характеризует рассеяние случайной величины относительно среднего значения и называется дисперсией, обозначаемой через σ_x^2

$$D[X] = \mu_2 = \sigma_x^2,$$

так как имеет размерность квадрата случайной величины.

Квадратный корень из дисперсии называют средним квадратичным отклонением (стандартом) случайной величины X

$$S_x = \sqrt{\sigma_x^2}.$$

Для выборки обычно вместо S_x используют обозначение σ_x .

Для наглядности на рис. 25 показана плотность распределения для различных S_x , причем $S_{x1} > S_{x2}$.

Таким образом, положение кривой распределения характеризуется величиной математического ожидания m_x , а степень разбросанности параметров — величиной дисперсии S_x^2 .

Для более полной характеристики распределения параметров применяются также моменты высших порядков.

Третий центральный момент

$$\mu_3 = \int_a^b (x - m_x)^3 f(x) dx$$

характеризует скошенность или асимметрию распределения. Безразмерный коэффициент асимметрии вычисляется как

$$A_x = \mu_3 / S_x^3.$$

На рис. 26 представлены два асимметричных распределения: одно из них (кривая 1) имеет положительную асимметрию, другое (кривая 2) — отрицательную.

Четвертый центральный момент

$$\mu_4 = \int_a^b (x - m_x)^4 f(x) dx$$

характеризует «крутость» распределения, т. е. островершинности или плосковершинности распределения. Эти свойства распределения описываются с помощью безразмерной величины эксцесса

$$E_x = \frac{\mu_4}{S_x^4} - 3.$$

Число 3 вычитается из отношения μ_4/S_x^4 , потому, что для весьма важного и широкого распределения в природе нормального распределения $\mu_4/S_x^4 = 3$. Следовательно, для нормального распределения эксцесс $E_x = 0$. Более островершинные кривые по сравнению с нормальной обладают положительным, а плосковершинные — отрицательным эксцессом (рис. 27).

Соотношения между начальными и центральными моментами установлены на основе известных ранее соотношений

$$\mu_1 = 0; \quad \mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 \quad \text{или} \quad \mu_2 = \alpha_2 - m_x^2;$$

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 \quad \text{или} \quad \mu_3 = \alpha_3 - 3m_x\alpha_2 + 2m_x^3;$$

$$\mu_4 = \alpha_4 + 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1\alpha_2^2 + 3\alpha_1^4 \quad \text{или} \quad \mu_4 = \alpha_4 + 4m_x\alpha_3 + 6m_x\alpha_2^2 + 3m_x^4.$$

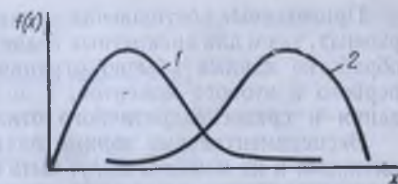


Рис. 26. Функция плотности распределения при различных значениях третьих центральных моментов:

1 — при положительной и 2 — при отрицательной асимметрии.

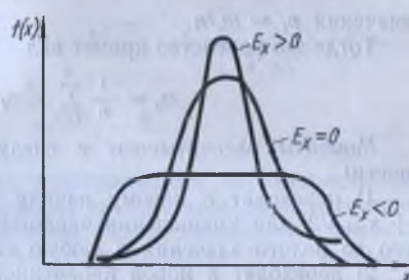


Рис. 27. Функция плотности распределения при различных значениях четвертых центральных моментов.

Приведенные соотношения справедливы как для непрерывных, так и для дискретных величин. При статистической обработке данных обычно ограничиваются определением первого и второго моментов, т. е. математического ожидания и среднеквадратичного отклонения.

Экспериментальные данные являются дискретными величинами и их моменты могут быть определены как моменты дискретных величин по уравнению для начальных моментов при подстановке в него

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^n x_i^p p(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i^p p_i$$

значения $p_i = m_i/n$.

Тогда это равенство примет вид

$$\alpha_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^s m_i.$$

Моменты рассчитывают в следующей последовательности:

1) переходят к новому началу отсчета $x_0 \approx (x_{\max} + x_{\min})/2$ для уменьшения числовых значений, округляя его до целого значения в любую сторону;

2) переходят к новой переменной $x' = (x - x_0)/h$, где h выбирают так, чтобы x' измерялось по возможности целыми числами;

3) определяют суммы

$$\sum_{i=1}^k x'_i m_i \sum_{i=1}^k (x'_i)^2 m_i \sum_{i=1}^k (x'_i)^3 m_i \sum_{i=1}^k (x'_i)^4 m_i;$$

4) определяют начальные моменты для величины

$$\alpha'_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x'_i m_i; \quad \alpha'_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i'^2 m_i;$$

$$\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i'^3 m_i;$$

5) для проверки правильности приведенного расчета находят контрольную величину

$$\alpha_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x'_i + 1)^k m_i,$$

которая равна

$$\alpha_k = \alpha_0' + 4\alpha_1' + 6\alpha_2' + 4\alpha_3' + \alpha_4', \quad \alpha_0' = 1.$$

Значения α_k , определенные по двум приведенным формулам, должны совпасть;

6) находят центральные моменты μ_3

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1'^2; \quad \mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2'\alpha_1' + 2\alpha_1'^3; \quad \mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1'\alpha_3' + 6\alpha_1'^2\alpha_2' + 3\alpha_1'^4;$$

7) переходят обратно от числовых характеристик величины к характеристикам экспериментальной величины x' . Из равенства $x' = (x - x_0)/h$ очевидно, что $x = x_0 + hx'$. После приведенных выше преобразований получим зависимости

$$m_x = x_0 + \alpha_1'; \quad S_x = h\sqrt{\mu_2}; \quad A_x = \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2}^3}; \quad E = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3.$$

Моменты являются интегральными характеристиками распределений, а отдельные частные характеристики определяются квантилями. Квантили распределяют случайные величины X с функцией распределения $F(x)$, называют решение уравнения

$$F(x_p) = p,$$

т. е. x_p такое значение случайной величины, что

$$P(X < x_p) = p.$$

Если известно два квантиля x_0 и x_g , то

$$P(x_p \leq X \leq x_g) = g - p.$$

Наиболее важное значение имеет квантиль $x_{1/2}$ (медиана), разделяющий площадь под кривой плотности поровну.

§ 4. Теоретические основы статистического моделирования

Теоретическую основу метода статистического моделирования объекта составляют предельные теоремы теории вероятностей, которые являются выражением закономерностей и устойчивости характерных показателей множеств и распределений случайных величин. Как было показано выше, множества случайных явлений (событий, величин) подчиняются определенным закономерностям, позволяю-

щим прогнозировать их поведение и количественно оценивать некоторые, проявляющие определенную устойчивость, их характеристики. Предельные теоремы гарантируют требуемое качество статистических оценок при весьма большом числе испытаний (реализаций). Применяемые при статистическом моделировании количественные оценки характеристик объектов могут быть получены и при сравнительно небольшом числе испытаний n .

Неравенство Чебышева используется в качестве леммы для доказательства теорем, относящихся к группе «Закона больших чисел» и утверждают, что каково бы ни было положительное число ε , вероятность того, что величина x отклоняется от своего математического ожидания не меньше чем на ε , ограничена сверху величиной D_x/ε^2 .

$$P(|x - m_x| \geq \varepsilon) \leq D_x/\varepsilon^2,$$

где D_x , m_x — дисперсия и математическое ожидание случайной величины X .

Теорема Чебышева доказывает, что при достаточно большом числе независимых испытаний среднее арифметическое наблюдаемых значений случайной величины сходится по вероятности к ее математическому ожиданию

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - m_x\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta,$$

где ε и δ — произвольно целые положительные числа.

Обобщенная теорема Чебышева распространяется на те случаи, когда закон распределения случайной величины X от опыта изменяется

$$P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n m_{x_i}}{n}\right| < \varepsilon\right) > 1 - \delta.$$

Теорема Бернулли устанавливает связь между частотой события и его вероятностью: при ограниченном увеличении числа опытов n частота события A сходится по вероятности к его вероятности P

$$P(|P^* - P| < \varepsilon) > 1 - \delta,$$

где P^* — частота события A в n опытах, т. е. среднее арифметическое $P^* = \sum_{i=1}^n x_i/n$.

В соответствии с теоремой Пуассона, если производится n независимых опытов и вероятность появления события A в i -м опыте равна P_i , то при увеличении n частота события A сходится по вероятности к среднему арифметическому вероятностей P_i , т. е. при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P_i\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Эту совокупность теорем, устанавливающих устойчивость средних показателей, называют законом больших чисел.

Предельные законы распределения составляют предмет другой группы теорем — центральной предельной теоремы, которую иногда называют «количественной формой закона больших чисел». Все формы центральной предельной теоремы посвящены установлению условий, при которых возникает нормальный закон распределения. Если $x_1, x_2, \dots, x_n$ — независимые случайные величины, имеющие один и тот же закон распределения с математическим ожиданием m_x и дисперсией $s^2 = D_x$, то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы $Y_n = \sum_{k=1}^n x_k$ неограниченно приближается к нормальному

$$\lim P\left\{a < \left(\sum_{i=1}^n x_i - Na\right)/\sqrt{N\sigma} < \beta\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^\beta e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(\beta) - \Phi_0;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_{zn}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n b_k}{\left(\sum_{k=1}^n D_k\right)^{1/2}} = 0.$$

Одна из наиболее общих форм центральной предельной теоремы была доказана А. М. Ляпуновым, который для этого создал специальный метод характеристических функций.

Характеристической функцией случайной величины X называется функция

$$g(t) = M[e^{itx}],$$

где i — мнимое число.

Функция $g(t)$ представляет собой математическое ожидание некоторой комплексной случайной величины

$$U = e^{itx},$$

функционально связанной с величиной X .

Зная закон распределения случайной величины X , легко найти ее характеристическую функцию

$$g(t) = \sum_{k=1}^n e^{itx_k}.$$

Если X — непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f(x)$, то ее характеристическая функция

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

Это преобразование, которому необходимо подвергнуть $f(x)$, чтобы получить $g(x)$, называют преобразованием Фурье.

Функция $f(x)$ выражается через $g(x)$ с помощью обратного преобразования Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} g(t) dt.$$

Равномерное (прямоугольное) распределение. Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение на интервале $[a, b]$, если на этом интервале плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его равна нулю. Закон равномерного распределения аналитически можно задать в виде плотности и функции распределения следующим образом

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a \text{ или } x > b; \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b; \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a; \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{при } x \geq b. \end{cases}$$

Математическое ожидание равномерного распределения находится на середине интервала $[a, b]$. В силу сим-

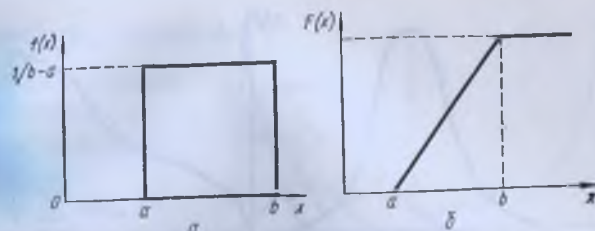


Рис. 28. Равномерное распределение случайной величины: a — функция плотности распределения (дифференциальная кривая); b — функция распределения (интегральная кривая).

метричности распределения коэффициент асимметрии равен нулю. Дисперсия и среднее квадратическое отклонение соответственно равны

$$D[x] = \frac{(b-a)^2}{12}; \quad [x] = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Случайную величину с равномерным распределением на интервале $[0, 1]$ обозначим через R . Тогда плотность и функция распределения ее примут вид

$$f_R(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in [0, 1]; \\ 0 & \text{при } x \notin [0, 1]; \end{cases}$$

$$F_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ x & \text{при } 0 \leq x \leq 1; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Математическое ожидание $M[R] = 1/2$, дисперсия $D[R] = 1/12$. Графики плотности $f_R(x)$ и функции распределения $F_R(x)$ изображены на рис. 28.

Если имеется возможность получения случайной величины X или R , то записанная последовательность этих значений и составит множество случайных чисел с равномерным распределением. Процесс получения значений случайной величины называют ее моделированием.

§ 5. Некоторые законы распределения случайных величин

Нормальный закон распределения (закон Гаусса) является предельным, к которому приближаются другие законы распределения, плотность вероятности которого

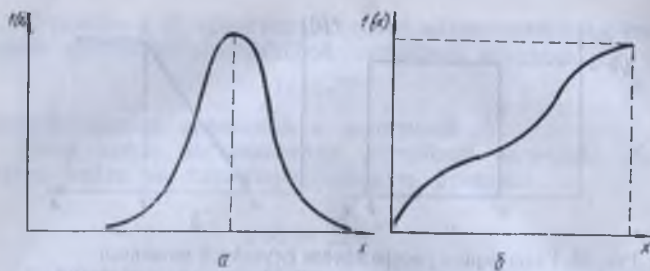


Рис. 29. Нормальное распределение случайной величины: а — функция плотности распределения; б — функция распределения.

описывается уравнением

$$f(x) = \frac{1}{S_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2S_x^2}} \quad \text{при } -\infty < x < +\infty,$$

где m_x — математическое ожидание случайной величины X ; S_x — среднее квадратичное отклонение величины X .

Этой плотности вероятности соответствует функция распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_x} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2S_x^2}} dx \quad \text{при } -\infty < x < +\infty.$$

Графики функции плотности вероятности и функции распределения нормального закона приведены на рис. 29, а и б.

Биномиальный закон показывает вероятность положительных исходов p в n испытаниях.

Вероятность противоположного события

$$q = 1 - p.$$

Математическое ожидание

$$M(x) = m_x = np.$$

Дисперсия

$$D(x) = npq = sk.$$

Закон Пуассона с плотностью вероятности

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad m = (0, 1, \dots),$$

где a — некоторая положительная величина, называемая параметром закона Пуассона (математическое ожидание

случайной величины p_m ны x).

Математическое ожидание

$$m_x = M[x] =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} m p_m =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

Дисперсия случайной величины, по закону Пуассона, равна ее математическому ожиданию a .

Если из опыта математическое ожидание и дисперсия близки, то это может служить доводом в пользу гипотезы о пуассоновском распределении. Распределение Пуассона вытекает из биномиального распределения, если $n \rightarrow \infty$ и при $np = m$ остается постоянным, то

$$\lim \left(\frac{n}{m} \right) p^m (1-p)^{n-m} = \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

Графики распределения случайной величины X по закону Пуассона приведены на рис. 30.

Экспоненциальное распределение

$$f(x) = \mu e^{-\mu x}, \quad x > 0;$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{для } x < 0; \\ 1 - e^{-\mu x} & \text{для } x \geq 0; \end{cases}$$

$$\mu = EX = \int_0^{\infty} x \mu e^{-\mu x} dx = \int_0^{\infty} e^{-\mu x} dx = 1/\mu;$$

математическое ожидание

$$M = \frac{1}{\mu};$$

среднее квадратическое отклонение

$$S^2 = DX = \int_0^{\infty} x^2 \mu e^{-\mu x} dx = \frac{1}{\mu^2}.$$

Графики функций плотности экспоненциального распределения приведены на рис. 31.

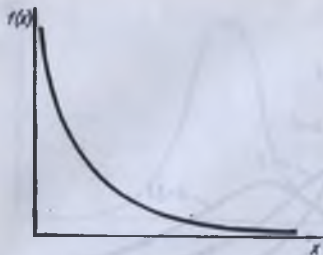


Рис. 31. График функции плотности экспоненциального распределения.

Вероятность попадания точки в круг радиусом R определяется распределением Релея. Функция распределения величины R (расположение точки (x, y) от начала координат) по определению

$$F(r) = P(R < r) = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}}, \quad (107)$$

где $k = \frac{r}{S}$, т. е. $F(r) = 1 - e^{-\frac{r^2}{2S^2}}$.

Плотность распределения

$$f(r) = \begin{cases} \frac{r}{S^2} e^{-\frac{r^2}{2S^2}} & \text{при } r > 0; \\ 0 & \text{при } r < 0. \end{cases}$$

График функции плотности закона Релея приведен на рис. 32. Для нахождения M продифференцируем функцию $f(r)$ и приравняем производную к нулю

$$1 - \frac{r^2}{S^2} = 0; \quad S^2 = r^2, \quad \text{т. е. } M = S.$$

Математическое ожидание можно найти как функцию $f(r)$, $m_t = 1,25s$ распределения Стюдента t . Для построения доверительного интервала математического ожидания используем случайную величину

$$t = \frac{x - m_x}{S_x} \sqrt{n},$$

плотность вероятности которой имеет вид

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{n}f} \frac{\Gamma\left(\frac{t+1}{2}\right)}{\Gamma(t/2)} \quad \text{при } -\infty < t < +\infty,$$

где $F(f)$ — известная гамма-функция; f — число степеней свободы выборки n . Если дисперсия S_x^2 и среднее x опре-

деляются по одной и той же выборке, то $\hat{f} = n - 1$, где n — число опытов.

Гамма-распределение (или распределение Эрланга) представляет собой сумму независимых случайных величин, распределенных по одному и тому же экспериментальному закону, плотность которого определяется формулой

$$f(x) = [\mu (\mu x)^{n-1} e^{-\mu x}] / (n-1)! \quad \text{при } x > 0.$$

В основе всех рассмотренных и возможных распределений лежит схема независимых величин Бернулли: p (удача), $1 - p = q$ (неудача).

Законы распределения одной случайной величины распространяются и на системы двух и более случайных величин.

Вероятность совместного выполнения двух неравенств

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y)$$

называется функцией распределения двух случайных величин.

Аналогично вероятность совместного выполнения n неравенств

$$F(x, y, \dots, n) = P(X < x, Y < y, \dots, N < n)$$

называется функцией распределения n случайных величин.

Если все аргументы n -мерной функции равны $+\infty$, то функция распределения системы равна

$$F(+\infty; +\infty; \dots; +\infty) = 1.$$

Функцию распределения системы двух случайных величин можно определить как вероятность попадания случайной точки (x, y) в прямоугольник Π , ограниченный абсциссами a и b и ординатами c и d (рис. 33)

$$P[(X, Y) \in \Pi] = F(b, d) - F(a, d) + F(b, c) - F(a, c).$$

Если функция $F(x, y)$ непрерывна и дифференцируема, то можно определить плотность распределения системы $f(x, y)$ как вторую смешанную производную функции

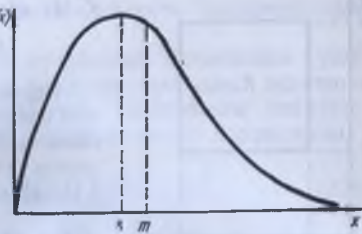


Рис. 32. График функции плотности распределения по закону Релея.

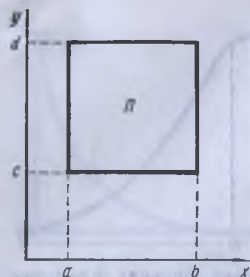


Рис. 33. График функции распределения двух случайных величин.

$F(x, y)$

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Вероятность попадания случайной величины (x, y) в произвольную область D можно выразить интегралом от элементов вероятности $f(x, y)$ по области D

$$P[(x, y) \in D] = \int_D f(x, y) dx dy.$$

Тогда вероятность попадания точки (x, y) в прямоугольник P определится

$$P[(x, y) \in P] = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy.$$

Двойной интеграл от плотности распределения системы в бесконечных пределах равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

и представляет собой вероятность попадания на всю координатную плоскость, т. е. вероятность достоверного события.

Функция распределения $F(x, y)$ выражается через плотность распределения

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy.$$

Отсюда можно получить и плотности распределения каждой из величин. Например,

$$F(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy.$$

Для исчерпывающей характеристики системы и получения ее законов распределения нужно знать зависимости между величинами, входящими в систему. Это можно выразить с помощью законов распределения, вычисленных при условии, что одна из величин X приняла определенное значение x . Тогда условная функция распределения обо-

значается $F(y/x)$, а условная плотность распределения $f(y/x)$.

Таким образом, между случайными величинами существуют связи, при которых с изменением одной величины изменится распределение другой. Важнейшим показателем тесноты связи является коэффициент корреляции

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{M[(x - m_x)(y - m_y)]}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (108)$$

где $M[(x - m_x)(y - m_y)]$ называется корреляционным моментом связи или корреляцией $\text{cov}\{XY\}$, cov_{xy} случайных величин X и Y ; σ_x, σ_y — средние квадратичные отклонения X и Y .

При произвольной стохастической связи между X и Y коэффициент корреляции изменяется в пределах $-1 < r_{xy} < 1$. Крайние значения $r_{xy} = \pm 1$ соответствуют линейной функциональной зависимости

$$y = b_0 + b_1 x.$$

§ 6. Моделирование случайных воздействий

При имитационном моделировании методами статистического моделирования на ЭВМ существенное внимание уделяется учету случайных факторов и воздействий на систему. Для их формализации используются случайные события, дискретные и непрерывные величины, векторы, процессы. Формирование на ЭВМ реализации случайных явлений любой природы из перечисленных сводится к генерации и преобразованию последовательностей случайных чисел. Генерация базовых последовательностей псевдослучайных чисел $\{x_i\}$, имеющих равномерное распределение в интервале $[0, 1]$, рассматривается в специальной литературе. Для нас важны вопросы преобразования последовательностей случайных чисел $\{x_i\}$ в последовательность $\{y_i\}$ для имитации воздействий на моделируемый объект.

Простейшими случайными объектами при статистическом моделировании систем являются случайные события. Пусть имеются случайные числа x_i , т. е. возможные значения случайной величины X , равномерно распределенной в интервале $[0, 1]$. Необходимо реализовать случайное событие A , наступающее с заданной вероятностью p . Определим A как событие, состоящее в том, что выбранное значение

x_i случайной величины X удовлетворяет неравенству

$$x_i \leq p.$$

Тогда вероятность события A будет $P(A) = \int_0^p dx = p$.

Противоположное событие A состоит в том, что $x_i > p$.

Тогда $P(\bar{A}) = 1 - p$.

Процедура моделирования в этом случае состоит в выборе значений x_i и сравнении их с p . При этом, если условие $x_i \leq p$ выполняется, то исходом испытания является событие A .

Таким же образом можно рассмотреть группу событий. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_s$ — полная группа событий, наступающих с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_s$ соответственно. Определим A как событие, состоящее в том, что выбранное значение x_i случайной величины X удовлетворяет неравенству

$$l_{m-1} \leq x_i \leq l_m,$$

$$\text{где } l_m = \sum_{i=1}^m p_i,$$

тогда

$$P(A_m) = \int_{l_{m-1}}^{l_m} dx = p_m.$$

Процедура моделирования испытаний в этом случае состоит в последовательном сравнении случайных чисел x_i со значениями l_m . Исходом испытаний оказывается событие A_m , если выполняется условие $l_{m-1} < x_i < l_m$. Эту процедуру называют определением исхода испытания в соответствии с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_s$.

Эти процедуры моделирования были рассмотрены в предположении, что для испытаний применяются случайные числа x_i , имеющие равномерное распределение в интервале $[0, 1]$. При моделировании на ЭВМ используются псевдослучайные числа с квазиравномерным распределением, что приводит к некоторой ошибке.

Вероятность наступления события A^* может быть определена как $p(A) = m/2^n$, где m — количество случайных чисел, меньших или равных p . Отсюда следует, что использование числа x_i вместо x_i приводит к ошибке в определении вероятности события $\Delta p = (m/2^n) - p$.

Очевидно, что максимальное значение ошибки не превосходит величины $1/(2^n - 1)$. Таким образом, для уменьшения влияния ошибок увеличивают разрядность случайных чисел.

При моделировании систем часто необходимо осуществить такие испытания, при которых искомый результат является сложным событием, зависящим от двух и более простых событий. Пусть, например, независимые события A и B имеют вероятности наступления p_A и p_B . Возможными исходами совместных испытаний в этом случае будут события $AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}$ с вероятностями $p_A p_B, (1 - p_A)p_B, p_A(1 - p_B), (1 - p_A)(1 - p_B)$.

Для моделирования совместных испытаний используют два варианта процедуры: 1) последовательную проверку условия $x \leq p$; 2) определение одного из исходов $AB, A\bar{B}, \bar{A}B, \bar{A}\bar{B}$ по жребию с соответствующими вероятностями. Первый вариант требует двух чисел x_i и сравнений для проверки условия $l_{m-1} < x_i < l_m$. При втором варианте можно обойтись одним числом x_i , но сравнений может быть больше. С точки зрения удобства построения моделирующего алгоритма и экономии количества операций и ячеек памяти ЭВМ более предпочтителен первый вариант.

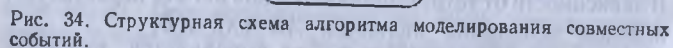
Рассмотрим вариант, когда события A и B являются зависимыми и наступают с вероятностями p_A и p_B . Обозначим через $P(B/A)$ условную вероятность наступления события B при условии, что событие A произошло. При этом считаем, что условная вероятность $P(B/A)$ задана.

Рассмотрим один из вариантов построения модели. Из последовательности случайных чисел $\{x_i\}$ извлекается число x_m и проверяется справедливость неравенства $x_m < p$. Если это неравенство справедливо, то наступило событие A . Для испытания, связанного с событием B , используется вероятность $P(B/A)$. Из совокупности чисел $\{x_i\}$ берется число x_{m+1} и проверяется условие $x_{m+1} \leq P(B/A)$. В зависимости от того, выполняется или нет это неравенство, исходом испытания являются AB или $A\bar{B}$.

Если неравенство $x_m < p_A$ не выполняется, то наступило событие $\bar{A}$. Поэтому для испытания, связанного с событием B , определяем вероятность

$$P(B/\bar{A}) = [P(B) - P(A)P(B/A)]/(1 - P(A)).$$

Выберем из совокупности $\{x_i\}$ число x_{m+1} и проверим справедливость неравенства $x_{m+1} < P(B/A)$. В зависимо-



Логическая схема алгоритма для реализации этого варианта модели показана на рис. 34. Здесь ВИД [...] — процедура ввода исходных данных; ГЕН[...] — генератор равномерно распределенных случайных величин; ХМ =

Алгоритм вычисления по двум последним выражениям сводится к выполнению следующих действий:

если $x_1 < p_1$, то $Y = y_1$ иначе
 если $x_2 < p_1 + p_2$, то $Y = y_2$ иначе
 если $x_i < \sum_{j=1}^m p_j$, то $Y = y_m$ иначе

При счете по этому алгоритму среднее число циклов сравнения

$$\mu = \sum_{i=1}^m i p_i.$$

Рассмотрим способы преобразования последовательности равномерно распределенных случайных чисел α_i в последовательность с заданным законом распределения x_i на основе предельных теорем вероятностей.

Пусть требуется последовательность случайных чисел x_i , имеющих нормальное распределение с математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ

$$f_{\sigma}(x) = e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}/2\pi\sigma.$$

Случайные числа x_i формируем в виде сумм последовательностей случайных чисел α_i , имеющих равномерное распределение в интервале $[0, 1]$. Так как исходной (базовой) последовательностью случайных чисел α_i при суммировании является последовательность чисел, имеющих равномерное распределение в интервале $[0, 1]$, то можно воспользоваться центральной предельной теоремой для одинаково распределенных случайных величин: если независимые, одинаково распределенные величины $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ имеют каждое математическое ожидание a_1 и среднее квадратическое отклонение σ_1 , то сумма $\sum_{i=1}^N \alpha_i = x$ асимптотически нормальная с математическим ожиданием $a = Na_1$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = \sigma_1 \sqrt{N}$.

Как показывают расчеты, сумма $\sum_{i=1}^N \alpha_i$ имеет распределение, близкое к нормальному, уже при сравнительно небольших N . Практически для получения последовательности нормально распределенных случайных чисел можно пользоваться значениями $N = 8-12$, а в простейших случаях и меньшими значениями N , например 4-5. Структурная схема алгоритма расчета представлена на рис. 35.

Функциональное назначение блоков следующее: 1, 3, 4 — подготовка программ к счету; 2 и 3 — предназначены для расчета величины интервала ϵ и генерации случайной величины α_k к равномерно распределенной на отрезке $[0, 1]$; 6 — рассчитывается случайная величина к равномерно распределенной на интервале $[a_1 - \epsilon, a_1 + \epsilon]$; 7, 8, 9 — искомая случайная величина x_i , распределенная по нормальному закону.

Пример 1. Методом обратной функции на основании базовой последовательности чисел x_i , равномерно распределенных в интервале $[0, 1]$, определить последовательность чисел y_i , имеющих биномиальное распределение, задающее вероятность y удачных исходов в N реализациях некоторого эксперимента

$$P(Y = y) = P_N(y) = C_N^y p^y (1-p)^{N-y},$$

где $p = 0,5$ и $N = 6$ $C_N^y = N! / y! (N-y)!$

Математическое ожидание и дисперсия биномиального распределения соответственно будут $M[y] = np$, $D[y] = np(1-p)$.

Используя обозначения, принятые в последнем алгоритме, вычислим

i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,01562	0,09375	0,23438	0,31250	0,31250	0,09375	0,01562
$\sum_{j=1}^m p_j$	0,01562	0,10937	0,34375	0,65625	0,89063	0,98438	1,00000

Например, получив из равномерного распределения число $x_i = 0,85393$ и проведя сравнения по приведенному алгоритму, найдем, что $x_i = 0,85393 < 0,89063$, т.е. $y_i = 4$. При этом среднее число циклов сравнения $\mu = 1 \cdot 0,01562 + 2 \cdot 0,09375 + 3 \cdot 0,23438 + 4 \cdot 0,31250 + 5 \cdot 0,23438 + 6 \cdot 0,09375 + 7 \cdot 0,01562 \approx 3,98$.

Пример 2. Проверить последовательность из N случайных чисел y_i , полученных на соответствие биномиальному распределению при заданных параметрах n и p . Простейшим способом проверки

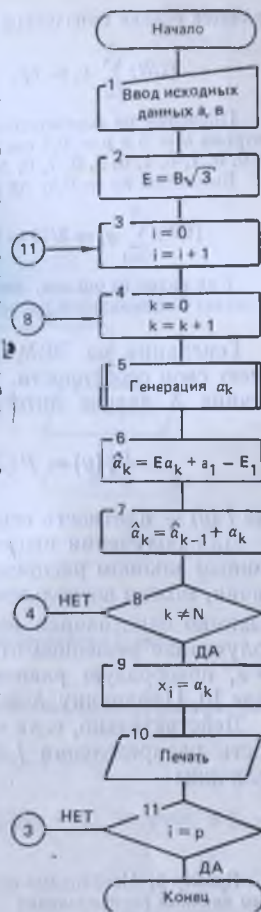


Рис. 35. Структурная схема алгоритма определения нормального закона распределения случайных величин.

является оценка выполнения условий

$$(1/N) \sum_{i=1}^N y_i \approx np, \quad (1/N) \sum_{i=1}^N y_i^2 \approx np(1 + np + p).$$

Проверим на соответствие биномиальному распределению с параметрами $n = 5$ и $p = 0,1$ последовательности случайных чисел: $\{y_i\} = 0, 0, 1, 0, 1, 0, 2, 0, 1, 0$; $N = 10$.

Вычислим $np = 0,5$; $np(1 + np + p) = 0,7$;

$$(1/N) \sum_{i=1}^N y_i = 5/10 = 0,5, \quad (1/N) \sum_{i=1}^N y_i^2 = 7/10 = 0,7.$$

Как видно из оценок, последовательность чисел y_i хорошо представляет биномиальное распределение с заданными параметрами.

Генерация на ЭВМ непрерывных случайных величин имеет свои особенности. Пусть непрерывная случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F_x(y) = P(X \leq y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_x(y) dy,$$

где $f(y)$ — плотность вероятностей.

Для получения непрерывных случайных величин с заданным законом распределения, как и для дискретных величин, можно воспользоваться методом обратной функции. Взаимно однозначная монотонная функция $X = F_x^{-1}(x\xi)$, полученная решением относительно X уравнения $F_x(y) = \xi$, преобразует равномерно распределенную на интервале $[0, 1]$ величину X в ξ с требуемой плотностью $f_x(y)$.

Действительно, если случайная величина X имеет плотность распределения $f_x(y)$, то распределение случайной величины

$$X = \int_0^x f_x(x) dy.$$

Пример 3. Необходимо получить случайные числа y_i с показательным законом распределения

$$f_x(y) = \lambda e^{-\lambda y}, \quad y > 0.$$

В силу этого соотношения получим $\lambda \int_0^{y_i} e^{-\lambda y} dy = x_i$, где x_i — случайное число, имеющее равномерное распределение в интервале $[0, 1]$. Тогда $1 - e^{-\lambda y_i} = x_i$; $y_i = \ln(1 - x_i)/\lambda$.

Учитывая, что случайная величина $X = 1 - \xi X$ имеет также равномерное распределение в интервале $[0, 1]$, можно записать $y_i = \ln x_i/\lambda$.

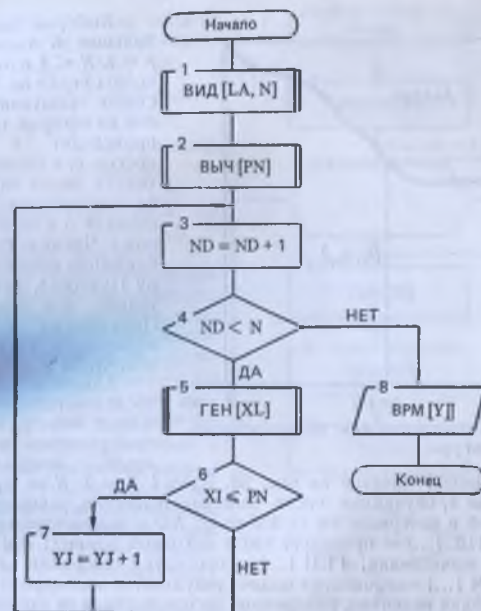


Рис. 36. Структурная схема моделирования Пуассоновского распределения.

Пример 4. Необходимо получить случайные числа y_i законом распределения

$$f(y) = \lambda(1 - \lambda y/2), \quad 0 \leq y \leq 2/\lambda.$$

Воспользовавшись тем, что $\int_0^{y_i} f_x(y) dy = x_i$, получим $\lambda(y_i - \lambda y_i^2/4) = x_i$. Отсюда

$$y_i = 2(1 - \sqrt{1 - x_i})/\lambda \quad \text{или} \quad y_i = 2(1 - \sqrt{x_i})/\lambda.$$

Пример 5. Моделирование Пуассоновского распределения. Для этого получим случайные числа по закону распределения Пуассона

$$P(m) = \lambda^m e^{-\lambda}/m!,$$

и затем воспользуемся предельной теоремой Пуассона: если P — вероятность наступления события A при одном испытании, то вероятность наступления m событий в N независимых испытаниях при $N \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$, $Np = \lambda$ асимптотически равна $P(m)$.

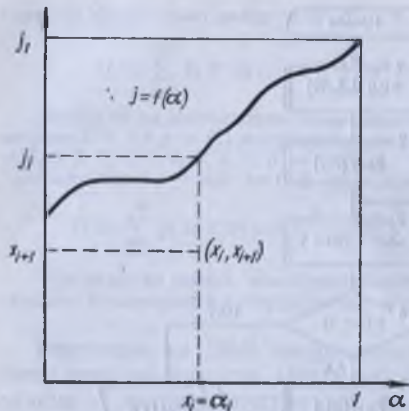


Рис. 37. Геометрическая интерпретация площади фигуры.

данного способа показан на рис. 36. Здесь $LA = \lambda$; $N \equiv N_i$; $PN \equiv P_i$; $XI = x_i$ случайные числа последовательности, равномерно распределенной в интервале $(0, 1)$; $YJ \equiv y_j$; NO — вспомогательная переменная; **ВИД [...]** — процедура ввода исходных данных; **ВЫЧ [...]** — процедура вычисления; **ГЕН [...]** — процедура генерации случайных чисел; **ВРМ [...]** — процедура выдачи результатов моделирования, где α_i — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 1]$.

Пример 6. Моделирование Эрланговского распределения порядка k . Получить случайные числа y_i с плотностью Эрланговского распределения

$$f_k(\alpha) = \frac{\alpha^{k-1} e^{-\alpha}}{k-1}, \quad \alpha > 0, \quad k \in \mathbb{N}.$$

При моделировании указанной случайной величины моделируется k -значений случайной величины, распределенной по показательному закону. При этом берем только k -е (последнее) значение.

Пример 7. Методы статистического моделирования применяют и для решения детерминированных задач.

Определим площадь фигуры методом статистического моделирования, ограниченной осями координат, ординатой $\alpha = 1$ и кривой $j = f(\alpha)$ (рис. 37). При этом предполагается, что $0 \leq f(\alpha) \leq 1$ для всех α $0 \leq \alpha \leq 1$. Аналитическое решение этой задачи сводится к вычислению определенного интеграла, т. е. искомая площадь фигуры

$$S_{\phi} = \int_0^1 f(\alpha) d\alpha.$$

Для применения метода статистического моделирования необходимо предварительно построить адекватную по выходным характеристикам стохастическую систему, оценки характеристик которой будут совпадать с искомыми в детерминированной задаче.

Выберем достаточно большое N такое, чтобы $p = \lambda/N < 1$ и будем проводить серии по N независимых испытаний, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p , и будем подсчитывать число случаев y_j фактического наступления события A в серии с номером j . Числа y_j будут приближенно следовать закону Пуассона, причем тем точнее, чем больше N . Практически N должно выбираться таким образом, чтобы $p \leq 0,1 - 0,2$.

Алгоритм генерации последовательности случайных чисел y_j , имеющих пуассоновское распределение, с использованием

Элементы системы должны выполнять следующие функции: вычисление $B_1: h_i = f(x_i)$;

анализ $A: h = \begin{cases} 1, & \text{если } x_{i+1} \leq f(x_i); \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$

суммирование $C: h' = \sum_{i=1}^N h_i$;

вычисление $B_2: s = h'/N$.

Система функционирует следующим образом: получают пару независимых случайных чисел интервала $[0, 1]$, определяют координату точки (x_i, x_{i+1}) , показанной на рис. 37, вычисляют ординату $f_i = f(x_i)$ и сравнивают величины f_i и x_{i+1} . Причем если точка (x_i, x_{i+1}) попала в площадь фигуры (в том числе и на кривую $f(\alpha)$), то исход испытания считается положительным $h_i = 1$ и в итоге можно получить статистическую оценку площади фигуры s_{ϕ} по заданному числу реализаций N .

Логическая схема моделирующего алгоритма вероятностной системы представлена на рис. 38. Здесь $Y = f(\alpha)$ — заданная функция (табличная кривая); N — заданное число реализаций; $I = i$ — номер текущей реализации; $XI = x_i$; $XI1 = x_{i+1}$; $HI = h_i$; $S = s$; $SH = h' = \sum_{i=1}^N h_i$ — суммирующая ячейка.

Таким образом, построение некоторой стохастической системы позволяет методом статистического моделирования решить детерминированную задачу.

Пример 8. Установить закон случайного распределения потока транспортных средств (ТС), поступающих на пищевые предприятия.

Для этого воспользуемся методикой построения гистограмм с интервалом 1 ч. В течение суток за период заготовок транспортные средства поступают с различной плотностью. Как видно из табл. 13, наибольшее поступление наблюдается к 12 и 18 ч, а к 15 ч — снижение.

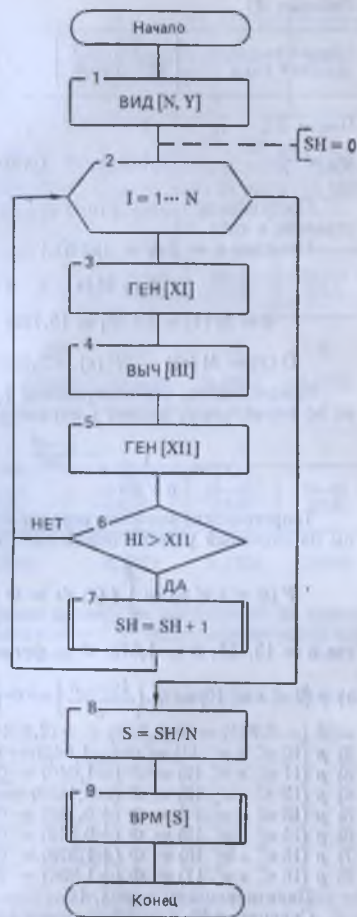


Рис. 38. Структурная схема алгоритма моделирующей системы для вычисления площади фигуры.

Таблица 13

Время поступления $\tau (x_i)$	9—10 (9,5)	10—11 (10,5)	11—12 (11,5)	12—13 (12,5)	13—14 (13,5)	14—15 (14,5)	15—16 (15,5)	16—17 (16,5)
Число ТС — n_i	2	6	12	36	30	24	28	15
$W_i = \frac{n_i}{n}$	0,013	0,039	0,079	0,235	0,196	0,157	0,183	0,098

Поступление транспортных средств в первой половине дня представлено в табл. 13.

Находим $n = \sum n_i = 153$ ТС;

$$a = M[x] \text{ и } \sigma = \sqrt{D(x)};$$

$$a = M(x) = \sum x_i W_i = 13,755; \quad M(x^2) = \sum x_i^2 W_i = 192,016;$$

$$D(x) = M(x^2) - M^2(x) = 2,81598; \quad \sigma(x) = \sqrt{D(x)} = 1,678.$$

Предположим, что поступление транспортных средств распределено по нормальному закону с параметрами: $a = 13,755$; $\sigma = 1,678$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{1,678 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-13,755)^2}{2(1,678)^2}}.$$

Теоретические значения вероятностей попадания случайной величины на заданный участок определяем по формуле

$$P(\alpha < x < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $a = 13,755$; $\sigma = 1,678$; Φ — функция Лапласа.

- 1) $p(9 < x < 10) = \Phi\left(\frac{10-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{9-a}{\sigma}\right) = \Phi(2,238) - \Phi(-2,834) = \Phi(2,238) + \Phi(2,834) = 0,0135$;
- 2) $p(10 < x < 11) = \Phi(-1,642) - \Phi(-2,238) = 0,0413$;
- 3) $p(11 < x < 12) = \Phi(-1,046) - \Phi(-1,642) = 0,0997$;
- 4) $p(12 < x < 13) = \Phi(-0,4499) - \Phi(-1,046) = 0,1828$;
- 5) $p(13 < x < 14) = \Phi(+0,146) - \Phi(-0,4499) = 0,2346$;
- 6) $p(14 < x < 15) = \Phi(+0,742) - \Phi(+0,146) = 0,2163$;
- 7) $p(15 < x < 16) = \Phi(+1,378) - \Phi(+0,742) = 0,1425$;
- 8) $p(16 < x < 17) = \Phi(+1,934) - \Phi(+1,378) = 0,0692$.

Данные заносим в табл. 14.

Сравнивая W_i и p_i , убеждаемся в том, что заданное статистическое распределение подчинено нормальному закону.

Таблица 14

Время поступления $\tau (x_i)$	9—10 (9,5)	10—11 (10,5)	11—12 (11,5)	12—13 (12,5)	13—14 (13,5)	14—15 (14,5)	15—16 (15,5)	16—17 (16,5)
p_i	0,0135	0,0413	0,0997	0,1828	0,2346	0,2163	0,1425	0,0692

Таблица 15

Время поступления $\tau (x_i)$	9—10 (9,5)	10—11 (10,5)	11—12 (11,5)	12—13 (12,5)	13—14 (13,5)	14—15 (14,5)	15—16 (15,5)	16—17 (16,5)
h_i	2	6	12	36	30	24	28	15
$p_{i\text{теор}}$	0,0135	0,0413	0,0997	0,1828	0,2346	0,2163	0,1425	0,0692
np_i	2,0655	6,3189	15,2541	27,9684	35,8938	33,0939	21,8025	10,5876

Таблица 16

Время поступления $y (x_i)$	16—17 (16,5)	17—18 (17,5)	18—19 (18,5)	19—20 (19,5)	20—21 (20,5)
Число ТС n_i	15	21	24	12	6
$W = \frac{n_i}{n}$	0,1923	0,2692	0,3077	0,1538	0,0770

Таблица 17

Время поступления $Y (x_i)$	16—17 (16,5)	17—18 (17,5)	18—19 (18,5)	19—20 (19,5)	20—21 (20,5)
p_i	0,1374	0,2931	0,3243	0,1858	0,0585

По критерию согласия Пирсона проверяем, согласуется ли гипотеза в том, что распределение нормально $r = 2$ — число параметров (a и σ); $k = l - r - 1$ (l — число интервалов); $k = 8 - 2 - 1 = 5$.

При уровне значимости $\alpha = 0,05$ по табл. 14 находим χ критическое = 11,1. Вычисляем

$$\chi^2_{\text{эмп}} = \sum_{i=1}^l \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}.$$

используя данные табл. 15

$$\chi^2_{\text{набл}} = 10,086.$$

Так как $\chi^2_{\text{набл}} < \chi^2_{\text{крит}}$, гипотеза о нормальности распределения для периода поступления транспортных средств с 9 до 17 ч принимается.

Поступление транспортных средств во второй половине дня (с 16 до 21 ч) представлено в табл. 16.

Теоретическое распределение вероятностей за рассмотренные промежутки времени представлено в табл. 17, 18.

Находим $n = \sum n_i$; $n = \sum n_i = 78$ ТС;

$$a = M(x) = \sum x_i W_i = 18,154;$$

$$M(x^2) = \sum x_i^2 W_i = 330,948;$$

Таблица 18

Время поступ- ления τ (x_i)	16—17 (16,5)	17—18 (17,5)	18—19 (18,5)	19—20 (19,5)	20—21 (20,5)
n_i	15	12	24	12	6
$p_{i\text{теор}}$	0,1374	0,2931	0,3243	0,1858	0,0585
$p_i p_i$	10,7172	22,8618	25,2954	14,4924	4,563

$$D(x) = M(x^2) - M^2(x) = 1,3804;$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)} = 1,175.$$

Предположим, что поступление транспортных средств во второй половине дня распределено по нормальному закону:

$$f(x) = \frac{1}{1,175 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-18,154)^2}{2(1,175)^2}}.$$

Сравнивая W_i и p_i , убеждаемся, что заданное теоретическое распределение подчиняется нормальному закону.

Критерий согласия Пирсона в данном случае будет иметь следующие значения:

$$r = 2; \quad k = l - r - 1 = 5 - 2 - 1 = 2;$$

$$\alpha = 0,05; \quad \chi^2_{\text{крип}} = 6,0.$$

Таким образом, с 16 до 21 ч поступление транспортных средств также подчиняется нормальному закону.

Структурная схема алгоритма определения распределения потока транспортных средств приведена на рис. 39, где приняты обозначения: $P \equiv p$; $DX \equiv D(x)$; $I \equiv i$; $X \equiv x$; $XI2 \equiv X^2$; $MX \equiv M(x)$; $PX \equiv P(x)$; $\sqrt{DX} \equiv \sigma(x)$; $H \equiv h$; $HI \equiv h_i$; $LA \equiv \lambda$; $L \equiv l$; $R \equiv r$; $K \equiv k$.

При определении характеристик технологических процессов методом статистического моделирования на ЭВМ возникает необходимость в формировании реализаций случайных векторов, обладающих заданными вероятностными характеристиками. Случайный вектор можно задать проекциями на оси координат, причем эти проекции являются случайными величинами, описываемыми совместным законом распределения. В простейшем случае, когда случайный вектор расположен на плоскости xOy , он может быть задан совместным законом распределения его проекции ξ и η на оси Ox и Oy .

Рассмотрим дискретный случайный процесс, когда двухмерная случайная величина (ξ, η) является дискретной и ее составляющая ξ принимает возможные значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, а составляющая η — значения $y_1, y_2, \dots, y_n$. При-

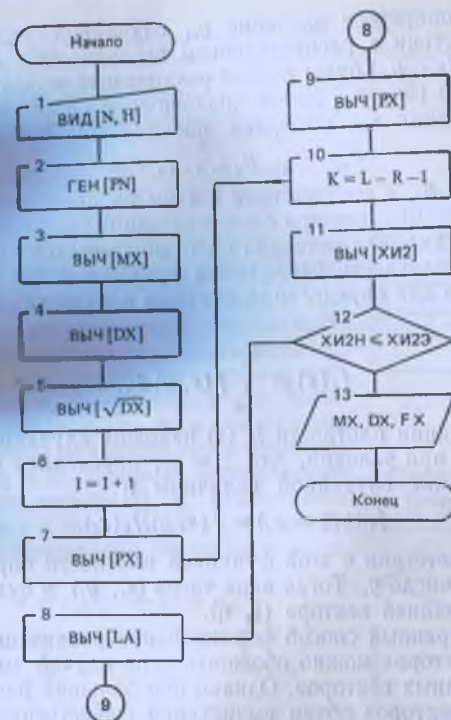


Рис. 39. Структурная схема алгоритма моделирования закона распределения потока транспортных средств.

чем каждой паре (x_i, y_i) соответствует вероятность p_{ij} . Тогда каждому возможному значению x_i случайной величины ξ будет соответствовать $p_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}$.

В соответствии с этим распределением вероятностей определяем конкретное значение x_{i1} случайной величины ξ (по правилам, рассмотренным ранее) и из всех значений p_{ij} выбираем последовательность

$$p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{in},$$

которая описывает условное распределение величины η при условии, что $\xi = x_i$. Затем по тем же правилам опре-

деляем конкретное значение y_i , случайной величины η в соответствии с распределением вероятностей. Полученная пара (x_{i1}, y_{i1}) будет первой реализацией моделируемого случайного вектора. Далее аналогичным способом определяем значения x_{i2} , выбираем последовательность

$$P_{i,1}, P_{i,2}, P_{i,3}, \dots, P_{i,\eta} \quad (109)$$

и находим y_i , в соответствии с этим распределением. Это дает реализацию вектора с составляющими x_{i1} и y_{i1} . В этом случае двумерная величина (ξ, η) описывается совместной функцией плотности $f(x, y)$. Эта функция может быть использована для определения функции плотности случайной величины

$$f_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy. \quad (110)$$

По функции плотности $f_{\xi}(x)$ находим случайное число x_i , а затем при условии, что $\xi = x_i$, определяем условное распределение случайной величины η

$$f_{\eta}(y/\xi = x_i) = f(x, y)/f_{\xi}(x_i).$$

В соответствии с этой функцией плотности определяем случайное число y_i . Тогда пара чисел (x_i, y_i) и будет искомым реализацией вектора (ξ, η) .

Рассмотренный способ формирования реализаций двумерных векторов можно обобщить и на случай многомерных случайных векторов. Однако при больших размерностях этих векторов объем вычислений существенно увеличивается, что создает препятствия к использованию этого способа в практике моделирования систем.

В пространстве с числом измерений более двух практически доступным оказывается формирование случайных векторов, заданных в рамках корреляционной теории. Рассмотрим случайный вектор с математическими ожиданиями $a_1, a_2, \dots, a_n$ и корреляционной матрицей

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix},$$

где $k_{ij} = k_{ji}$.

Остановимся на трехмерном случае $n = 3$. Пусть требуется сформировать реализации трехмерного случайного

Рис. 40. Структурная схема алгоритма моделирования распределения вектора.

вектора (ξ, η, ψ) , имеющего нормальное распределение с математическим ожиданием $M[\xi] = a_1$, $M[\eta] = a_2$, $M[\psi] = a_3$ и корреляционной матрицей K , элементы которой k_{11}, k_{22}, k_{33} являются дисперсиями случайных величин ξ, η и ψ , а элементы $k_{12} = k_{21}$, $k_{13} = k_{31}$, $k_{23} = k_{32}$ представляют собой корреляционные моменты ξ и η , ξ и ψ , η и ψ .

Пусть имеется последовательность некоррелированных случайных чисел $\{v_i\}$, имеющих одномерное нормальное распределение с параметрами a и σ . Выберем три числа v_1, v_2, v_3 и преобразуем их так, чтобы они имели характеристики a_1, a_2, a_3 и k . Искомые составляющие случайного вектора (ξ, η, ψ) обозначим как x, y, z и представим в виде линейного преобразования случайных величин v_i

$$x = c_{11}(v_1 - a) + a_1;$$

$$y = c_{12}(v_1 - a) + c_{22}(v_2 - a) + a_2;$$

$$z = c_{13}(v_1 - a) + c_{23}(v_2 - a) + c_{33}(v_3 - a) + a_3,$$

где c_{ij} — некоторые коэффициенты (пока неизвестные). Для вычисления этих коэффициентов воспользуемся элементами корреляционной матрицы k . Так как случайные величины v_1, v_2, v_3 независимы между собой, то $M[(v_i - a)(v_j - a)] = 0$ при $i \neq j$.

В итоге имеем

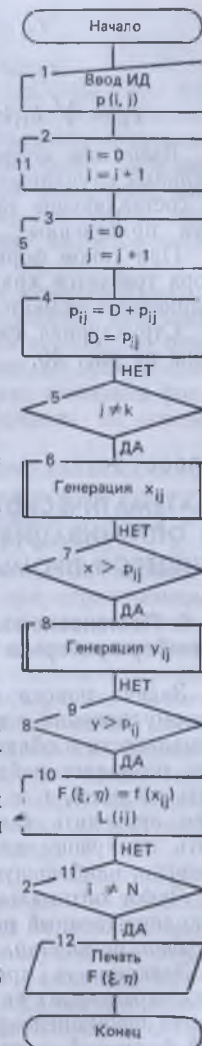
$$k_{11} = c_{11}^2 \sigma^2; \quad k_{22} = c_{12}^2 \sigma^2 + c_{22}^2 \sigma^2;$$

$$k_{33} = c_{13}^2 \sigma^2 + c_{23}^2 \sigma^2 + c_{33}^2 \sigma^2; \quad k_{12} = c_{11} c_{12} \sigma^2;$$

$$k_{13} = c_{11}(v_1 - a) + c_{23}(v_2 - a) + c_{33}(v_3 - a) + a_3.$$

Решая эту систему уравнений относительно c_{ij} , получим

$$c_{11} = \sqrt{k_{11}/\sigma^2}; \quad c_{12} = k_{12}/(\sigma \sqrt{k_{11}}); \quad c_{13} = k_{13}/(\sigma \sqrt{k_{11}});$$



$$c_{22} = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}^2}/(\sigma \sqrt{k_{11}});$$

$$c_{23} = \sqrt{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{13}}/(\sigma \sqrt{k_{11}});$$

$$c_{33} = \sqrt{k_{11}k_{33} - k_{13}^2 - k_{11}k_{23} + k_{12}k_{13}}/(\sigma \sqrt{k_{11}}).$$

Вычислив коэффициенты c_{ij} , легко три последовательных случайных числа v_i , $i = 1, 2, 3, \dots$ преобразовать в составляющие случайного вектора (x_i, y_i, z_i) , используя приведенные выше соотношения.

При таком формировании реализаций случайного вектора требуется хранить в памяти ЭВМ $n(n+1)/2$ корреляционных моментов k_{ij} и n математических ожиданий a_i .

Структурная схема алгоритма моделирования приведена на рис. 40.

Глава 5

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

§ 1. Постановка задач и выбор критериев оптимальности

Задача поиска оптимального решения математически сформулирована в том случае, если записана функция оптимальности и область допустимых решений (ограничения). Это позволяет найти оптимальное решение (оптимизировать процесс), т. е. определить, при каких условиях должен проходить технологический процесс, чтобы обеспечить наилучшее качество продукта, наименьший расход энергии, наибольшую прибыль и т. д.

Любое оптимальное решение оценивают количественно, а количественный показатель решения называют *критерием оптимальности*.

Зависимость критерия оптимальности от определяющих параметров в явном виде называют *функцией оптимальности* (функцией эффективности, функцией выгоды, целевой функцией и пр.). Параметры, обеспечивающие оптимальное решение (наибольшее или наименьшее значение критерия оптимальности), называют *оптимальными*. Про-

цесс, аппарат или машина, для которых определяется оптимальное решение, называют *объектом оптимизации*.

Системы управления, которые обеспечивают оптимальное значение критерия качества объекта управления, называют оптимальными (например, минимальный расход энергии). Системы управления, обеспечивающие оптимальное значение критерия качества управляющей системы, который имеет математический экстремум (например, минимальное время переходного процесса), называют *экстремальными*, т. е. экстремальная система является частным случаем оптимальной.

Математические методы оптимизации позволяют находить оптимальные решения только для одного критерия оптимальности. Если объект оптимизации необходимо оценить несколькими критериями, то выбирают обычно компромиссный вариант. В некоторых случаях возможна формализация выбора компромиссного варианта на основе методов квалиметрии.

Самым простым методом решения задачи является перебор всех вариантов. Для того чтобы установить наилучший вариант, пересматривают все возможные условия ведения технологического процесса при всех возможных или логических целесообразных значениях входных параметров процесса. Этот метод используют при ограниченном числе вариантов или при сравнительно несложных вычислительных процедурах. Практически этот метод является нереальным, так как бесконечное число допустимых вариантов невозможно перебрать в течение обозримого промежутка времени. Для выбора наилучших решений часто пользуются интуитивными методами, основанными на опыте и квалификации специалистов. Полученные таким способом решения возможны для сравнительно простых задач, они не гарантируют оптимального решения и доступны весьма ограниченному кругу специалистов.

В основу всех математических методов поиска оптимальных решений положен принцип перебора какой-то малой доли вариантов, выделенной на основании логической процедуры анализа исходной модели. Эту малую долю, т. е. небольшое число вариантов, выделяют по различным признакам, положенным в основу данного метода оптимизации. Например, в основу градиентных методов поиска оптимальных решений положен принцип: вместо экспериментальной проверки всех возможных вариантов ведения технологического процесса ограничиваются постановкой

небольшой их части по направлению градиента, которая приводит к оптимальному решению при небольшом числе опытов.

Несмотря на общий принцип сокращения числа вычислений или измерений при поиске оптимального варианта, методы оптимизации очень различаются и определяются в основном формой математической модели. Исходное математическое описание не всегда позволяет применить известные методы поиска оптимального решения. В этом случае первоначальное математическое описание необходимо преобразовать таким образом, чтобы можно было применить один из методов оптимизации, т. е. свести задачу к одной из канонических форм поиска оптимальных решений.

Задачу оптимального управления разветвленным технологическим участком в обобщенном виде можно сформулировать следующим образом. Найти управляющие воздействия $u_1, u_2, \dots, u_r$, обеспечивающие максимальное или минимальное значение функции цели

$$\Sigma \varphi_j(x_j, y_j, u_j) \rightarrow \max (\min) \quad (111)$$

при условиях, определяющих связи между входами и выходами технологических звеньев

$$y_j = f_j(x_j, u_j); \quad (112)$$

топологическую структуру производства

$$y_{sj} = x_{lj} \quad (113)$$

и технологические ограничения

$$x_{i \min} \leq x_i \leq x_{i \max}; \quad y_{s \min} \leq y_s \leq y_{s \max}; \quad (114)$$

$$u_{e \min} \leq u_e \leq u_{e \max},$$

где l -й вход j -го звена; x_i — совокупность всех входов j -го звена; x_{lj} — совокупность входов всех звеньев.

Уравнение (111) в этом случае называют функцией оптимальности, а (112—114) — ограничения.

Трудности оптимизации технологических процессов пищевых производств обусловлены в основном различными показателями качества (целями) отдельных этапов производства и отсутствием координированных действий на каждом этапе к достижению общих целей. Эта координация достигается системным подходом, основные принципы которого изложены ранее. Можно в обобщенном виде сформулировать и задачи повышения технологической эффективности. Для повышения эффективности функционирования сложной системы необходимо улучшить функциони-

рование основных технологических операторов, изменить технологические связи между существующими технологическими операторами, ввести дополнительные основные и вспомогательные технологические операторы и новые технологические связи.

Методы оптимизации должны учитывать принцип оптимального варианта, который заключается в наилучшем сочетании последовательности технологических операций, их физико-химических и биохимических закономерностей, технологических режимов, конструктивных параметров машин и аппаратов, основных законов управления и экономики в данных конкретных условиях предприятия для повышения качества пищевого продукта и снижения затрат на его производство.

При проектировании пищевых предприятий этот принцип является основополагающим, что позволяет наращивать выпуск продуктов питания и снижать затраты на производство продукции. Конкретно этот принцип выражается в выборе последовательности технологических операций, режимов, типов машин и аппаратов, порядка их размещения, выборе соединительных трубопроводов и других коммуникаций, средств механизации и автоматизации, обеспечивает заданные технологические цели при минимальных затратах. В настоящее время эти задачи решаются как эмпирически (путем перебора вариантов), так и с использованием методов математического программирования и вычислительных машин. Иногда этот принцип называют принципом технологической соразмерности, что не точно определяет его назначение.

Задачи оптимального распределения нагрузок в параллельно работающих элементах (аппаратах) формулируют в зависимости от места расположения ограничивающих условий. Если ограничения имеют место на входе, то цель управления заключается в обеспечении максимальной производительности по заданной входной нагрузке, если же на выходе, то — в обеспечении минимальных затрат, зависящих от входных величин при заданном выходе системы. Примером таких задач может быть распределение потоков между параллельно работающими насосами, вентиляторами и др. К такого типа задачам можно привести задачи оптимального распределения температуры или расхода сушильного агента по ступеням сушки, а также некоторые задачи оптимального распределения потоков в сложных производствах.

§ 2. Классические методы оптимизации

В том случае, если известна функциональная зависимость критерия оптимальности R от переменной состояния x , то можно непосредственно вычислить его значение для некоторого фиксированного значения этой переменной. В дальнейшем, изменяя значение переменной, можно вычислять критерии до тех пор, пока его значение будет возрастать при поиске максимума и уменьшаться при поиске минимума. Задачи на максимум и минимум могут быть решены также классическими методами дифференциального исчисления, которые используются в случае одной переменной состояния или нескольких переменных с небольшим диапазоном изменения. При большой области изменения переменных и наличии более чем одного экстремума исследуемой функции использование этих методов не эффективно.

Если функция одной переменной непрерывна и дифференцируема и имеет экстремум в любой не крайней точке диапазона изменения этой переменной, то в этой точке должно выполняться условие

$$\frac{dR}{dx} = 0.$$

Из графика такой функции, приведенного на рис. 41, а, видно, что это условие является лишь необходимым. Функция имеет максимумы в точках x_1, x_3, x_8 и минимумы в точках x_2, x_4, x_7 . Однако в этих точках значения функций не являются ни наибольшими, ни наименьшими. Наибольший из максимумов $x_{(8)}$ и наименьший из минимумов $x_{(2)}$ иногда называют абсолютным, или глобальным, а все остальные — относительными. Отыскивая абсолютный минимум или максимум решением последнего уравнения, можно найти относительный минимум или максимум. Если наименьшее значение функции $R(x_0)$ достигается в точке, лежащей на границе диапазона изменения переменной x_0 , то аналитически это значение определить невозможно.

Для непрерывной и дифференцируемой функции n переменных $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ необходимое условие существования относительного экстремума в точках $x_1 = \alpha_1; x_2 = \alpha_2; \dots; x_n = \alpha_n$ состоит в том, что все частные производные равны нулю в этой точке

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial R}{\partial x_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial R}{\partial x_n} = 0.$$

Положив частные производные $R(x_i)$ равными нулю и решив n уравнений, можно найти значения R , дающие стационарное значение критерия оптимальности. Для установления максимума или минимума необходимо исследовать старшие производные. Это справедливо только в случае, если функция имеет единственный локальный экстремум.

График функции для двух переменных с одним экстремумом, приведенный на рис. 41, б, представляет

собой поверхность, изображенную в трехмерной системе координат x_1, x_2 и $R(x_1, x_2)$. Эту поверхность называют поверхностью отклика. Геометрическая интерпретация функции трех и более переменных невозможна, но все математические зависимости, выведенные для функции двух переменных, распространяются на функции трех и более переменных. Функцию трех и более переменных называют гиперповерхностью, а в частном случае при линейной форме — гиперплоскостью. Иногда функцию двух переменных изображают в виде линий постоянного значения $R(x_1, x_2)$ на плоскости $x_1 - x_2$.

При наложении ограничений на переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ в виде равенства $x_i = a_i$ или $b_i \leq x_i \leq a_i$ поиск точки экстремума способом максимума или минимума функции $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ неудобен, а иногда практически неприемлем. Это объясняется тем, что наименьшее значение функции может находиться не только внутри, но и за пределами диапазона изменения функции. Причем точка экстремума может лежать как на границе, так и за пределами допустимых значений функции. В этом случае применяются специальные методы поиска оптимального значения функции.

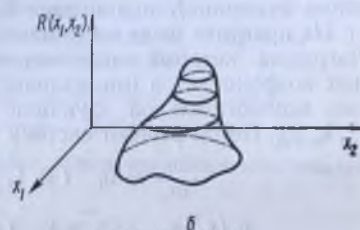
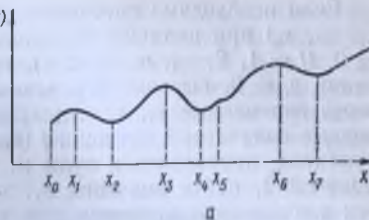


Рис. 41. Произвольная функция а — одной и б — двух переменных.

Если необходимо определить экстремум функции $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при наличии ограничений $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$; ($j = 1, 2, \dots, m, m < n$), то можно решить m уравнений $g_j = 0$, выразив переменные $x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \dots, x_n$ через переменные $x_1, x_2, \dots, x_{n-m}$, найти частные производные полученной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-m})$ по ее аргументам, приравнять к нулю и, решив систему из $n - m$ уравнений, найти значения $x_1, x_2, \dots, x_{n-m}$. Подставляя эти значения в выражения для $x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \dots, x_n$, определим значения $x_1, x_2, \dots, x_n$, дающие стационарное значение функции f_i при ограничениях $g_j = 0$.

На практике чаще всего используют метод множителей Лагранжа, который заключается в введении неопределенных коэффициентов (множителей) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ и построении вспомогательной функции $f = R - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2, \dots, \lambda_m g_m$. Потом решают систему $n + m$ уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

относительно n неизвестных x и m неизвестных λ . Найденная совокупность значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ и определяет стационарное значение функции f .

Например, при поиске экстремума функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и двух ограничениях $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$; $h(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ можно исключить два параметра, а затем найти для каждого значения экстремума, приравняв к нулю все частные производные. Если параметры исключить не удастся, то составляют новую функцию, подлежащую оптимизации

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2) = R(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_1 g(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_2 h(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где коэффициенты λ_1, λ_2 являются множителями Лагранжа. Далее решают систему уравнений

$$\frac{\partial A}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial A}{\partial x_2} = 0; \dots; \quad \frac{\partial A}{\partial x_n} = 0$$

вместе с уравнениями ограничений. Число всех уравнений равно сумме числа параметров и множителей Лагранжа. Число ограничений должно быть меньше числа параметров.

Метод множителей Лагранжа особенно удобен, когда ограничения трудно использовать для исключения свободных параметров. Из классических методов поиска оптималь-

ных решений широко также используют вариационное исчисление, градиентные методы, метод наискорейшего спуска и т. д. Вариационные методы используют в задачах, где независимыми переменными являются неизвестные функции. Задача сводится к нахождению экстремума функционала, зависящего от одной или нескольких неизвестных функций.

В качестве примера применения множителей Лагранжа рассмотрим задачу распределения сырья в трех параллельно работающих аппаратах, обеспечивающего максимальный выход продукта. В три аппарата поступает сырье с расходами x_1, x_2, x_3 . Общий расход $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Выход продукта определяется уравнениями

$$y_1 = 1 - \exp(-x_1); \quad y_2 = 1 - \exp(-2x_2);$$

$$y_3 = 1 - \exp(-1,5x_3).$$

Определить расходы сырья, обеспечивающие максимальный выход продукта, т. е.

$$y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max.$$

Функция Лагранжа

$$\Phi = 1 - \exp(-x_1) + 1 - \exp(-2x_2) + 1 - \exp(-1,5x_3) + \lambda(1 - x_1 - x_2 - x_3).$$

Частные производные

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \exp(-x_1) - \lambda = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 2 \exp(-2x_2) - \lambda = 0;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = -1,5 \exp(-1,5x_3) - \lambda = 0.$$

Отсюда

$$x_1 = \ln \lambda; \quad x_2 = 0,5 \ln \lambda - 0,5 \ln 2;$$

$$x_3 = -0,66 \ln \lambda + 0,66 \ln 1,5;$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ln \lambda + (0,5 \ln \lambda + 0,5 \ln 2) + (-0,66 \ln \lambda + 0,66 \ln 1,5) = 1.$$

Отсюда $\ln \lambda = -0,177$.

Тогда оптимальные значения расходов сырья будут

$$x_{1\text{опт}} = 0,177; \quad x_{2\text{опт}} = 0,5 \cdot 0,177 + 0,5 \ln 2 = 0,435;$$

$$x_{3\text{опт}} = 0,66 \cdot 0,177 + 0,66 \ln 1,5 = 0,388.$$

Для наглядного представления об экономическом смысле множителей Лагранжа рассмотрим следующий пример.

Общий расход сырья в трех параллельно работающих аппаратах

$$G = x_1 + x_2 + x_3.$$

Прибыль зависит от распределения сырья

$$R = R(x_1, x_2, x_3).$$

Тогда

$$\frac{\partial R}{\partial G} = \frac{\partial R}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial G} + \frac{\partial R}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial G} + \frac{\partial R}{\partial x_3} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial G}.$$

Функция Лагранжа для этой задачи

$$\Phi = R(x_1, x_2, x_3) - \lambda(G - x_1 - x_2 - x_3).$$

Откуда

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} = \frac{\partial R}{\partial x_2} = \frac{\partial R}{\partial x_3} = \lambda \text{ и } \frac{dx_1}{dG} = \frac{dx_2}{dG} = \frac{dx_3}{dG} = 1.$$

Тогда $\partial R / \partial G = \lambda$.

В этом случае неопределенный множитель λ равен приращению прибыли на единицу расхода сырья. Если цена сырья меньше λ , увеличивают общий расход сырья, т. е. интенсифицируют производство. Если цена сырья больше λ , то расход снижают. Если цена сырья равна λ , то производство находится в экономическом равновесии.

Вторым примером расчета оптимального решения может быть определение минимального расхода материала для прямоугольной открытой емкости.

Объем емкости

$$V = abh = 1000 \text{ м}^3,$$

где V — объем, м^3 ; a — длина, м ; b — ширина, м ; h — высота, м .

Минимальная площадь емкости

$$F(a, b, h) = 2hb + ab + 2ha \rightarrow \min.$$

Ограничения $f(a, b, h) = 0$, т. е. $f(a, b, h) = abh - V$ вспомогательная функция с применением множителей Лагранжа будет иметь вид

$$\Phi = (a, b, h, \lambda) = F(a, b, h) + \lambda(a, b, h - V);$$

$$\Phi = (a, b, h, \lambda) = 2hb + ab + 2ha + \lambda(a, b, h - V).$$

Частные производные на a, b, h и λ :

$$\text{а) } \frac{\partial \Phi}{\partial a} = b + 2h + \lambda bh = 0;$$

$$\text{б) } \frac{\partial \Phi}{\partial b} = 2h + a + \lambda ah = 0;$$

$$\text{в) } \frac{\partial \Phi}{\partial h} = 2b + 2a + \lambda ab = 0;$$

$$\text{г) } \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = abh - V = 0.$$

Из уравнения а) находим

$$\lambda = \frac{-(b+2h)}{bh}.$$

Подставляя значение λ в уравнение б) и решая его относительно в), получим

$$2h + a - ah \frac{(b+2h)}{bh} = 0;$$

$$2bh^2 + abh - abh + 2ah^2 = 0;$$

$$2h^2(b+a) = 0; \quad b=1, \quad b=a.$$

Из уравнения в) $\lambda = -4/b$. Из уравнения а) $b = 2h$, следовательно, $V = abh = (b)(b)(b/2) = \frac{b^3}{2} = 1000 \text{ м}^3$, откуда $b = 12,6 \text{ м}$, $a = 12,6 \text{ м}$, $h = 6,3 \text{ м}$.

§ 3. Линейное программирование

Вычисление экстремума линейного критерия оптимизации при условии, что переменные, подлежащие определению, удовлетворяют линейным ограничениям, составляет предмет линейного программирования.

Общая задача программирования формулируется следующим образом: требуется найти максимум или минимум линейной функции n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$R = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (115)$$

где c_j ($j = 1, 2, \dots, n$) — заданные постоянные коэффициенты.

Ограничения на переменные при выборе их оптимальных значений включают равенства и неравенства

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1, \dots, m_1; \quad (116)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i \quad i = m_1+1, m_2; \quad (117)$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad i = m_2+1, \dots, m; \quad (118)$$

$$x_j \geq 0. \quad (119)$$

В задачах линейного программирования постоянные в ограничениях a_{ij} могут быть положительными или отрицательными, среди них могут быть и равные нулю. Переменные x_j являются неотрицательными и отличны от нуля. Если какое-либо значение b_i отрицательно, то достаточно умножить соответствующие соотношения на -1 , чтобы представить его в виде, где правая часть является положительной величиной. Если же b_i равна нулю в одном из исходных соотношений, то для этого в уравнение ограничений вводят дополнительную переменную $x_{n+1} \geq b_i$ или $x_{n+1} \leq b_i$. Значение положительной величины b_i в этом случае выбирают произвольно. Тогда переменную x_{n+1} вводят в выражение для функции оптимальности с нулевым коэффициентом ($c_{n+1} = 0$).

Линейную функцию (115) называют линейной формой задачи, а множество наборов чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющих условиям (116—119), — областью определения задачи линейного программирования, или областью определения ее линейной формы. Систему равенств и неравенств (116—119), порождающую область определения задачи, называют системой условий задачи. Таблицу (матрицу)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

составленную из системы условий (116—119), называют матрицей системы условий задачи.

Условия задачи линейного программирования иногда удобно записывать в векторном виде. Вектор

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}),$$

компоненты которого коэффициенты a_{ij} , стоящие при j -й переменной системы (116—119), называют вектором усло-

вий задачи. Вектор

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \dots, b_m),$$

составленный из свободных членов условий (116—119), записывают в виде

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n \leq B,$$

где знак $\leq$ означает, что система условий может быть представлена равенствами и неравенствами.

Набор чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий системе условий (116—119), называют планом рассматриваемой задачи, числа $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, составляющие план X , — компонентами, или составляющими плана. Каждый план задачи X связан с определенным значением ее линейной формы. Чем больше значение R , тем «лучше» план (для задач с максимизацией). План, связанный с максимально (минимально) возможным значением линейной формы задачи, называется оптимальным планом, или решением задачи. План $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ задачи (115—119) называют опорным, если среди условий (116—119), которым он удовлетворяет как точным равенствам, имеется n линейно независимых.

При анализе системы условий (116—119) могут быть три случая:

а) условия противоречивы, т. е. нет ни одного плана набора чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, удовлетворяющего всем условиям задачи (задача не имеет одного плана);

б) условия непротиворечивы, а область, определяемая ими, — неограниченная;

в) условия совместны и область, определяемая ими, ограниченная.

Неразрешимость задачи может быть обусловлена или противоречивыми условиями задачи, или неограниченностью области определения линейной функции. Последний случай не обязательно приводит к неразрешимой задаче. Линейная форма может быть ограничена и в неограниченной области.

Для геометрической интерпретации задач линейного программирования разберем двумерную задачу, которая является удобным методическим приемом для раскрытия

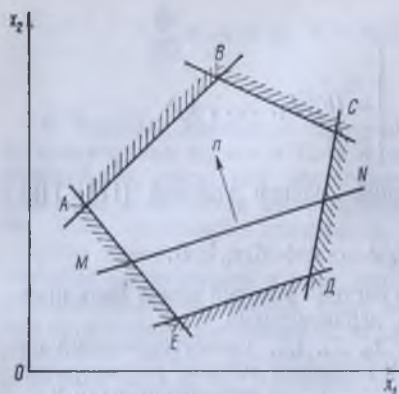


Рис. 42. Геометрическая интерпретация метода линейного программирования.

$= (a_1, a_2)$, указывающего направление возрастания формы. Прямые AB, BC, CD, DE, AE , определяющие многоугольник $ABCDE$, определяются условиями, у которых неравенства заменены равенствами. Задача линейного программирования, которая заключается в вычислении координат точки, соответствующей экстремуму линейной формы при заданных условиях геометрически, может быть представлена следующим образом.

В многоугольнике условий $ABCDE$ — области определения линейной формы — будем перемещать прямую MN параллельно самой себе в направлении увеличения вектора n , если требуется вычислить максимум R , и в направлении уменьшения n , если требуется вычислить минимум R . В случае, изображенном на рис. 42, при параллельном сдвиге прямой MN в сторону увеличения n прямая придет в такое предельное положение, что у нее окажется одна общая точка с многоугольником — вершина B . Эта точка определяет единственное решение задачи на максимум. При параллельном сдвиге в сторону уменьшения n прямая MN придет в такое предельное положение, что она будет параллельна прямой ED . В этом случае достигается минимум во всех точках стороны ED . Из этого следует, что задача линейного программирования может иметь одно или бесконечное число решений.

Понятие опорного, или базисного, плана эквивалентно понятию вершины многогранного множества. В случае,

сущности линейного программирования

$$\begin{aligned} R &= c_1 x_1 + c_2 x_2; \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 &\leq b_1; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 &\leq b_2; \\ &\dots \dots \dots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 &\leq b_m; \\ x_1 &\geq 0; \quad x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Линейная форма может интерпретироваться в виде прямой MN (рис. 42), вдоль которой она сохраняет постоянное значение, и вектора $n =$

когда область определения линейной формы задачи ограничена, т. е. представляет выпуклый многогранник, любой план задачи является выпуклой линейной комбинацией ее опорных планов. Число возможных наборов значений переменных x_j , при которых критерий может принимать оптимальное значение, очень большое и решить задачу прямым перебором можно только для двух-трех переменных при небольшом числе ограничений. Процедура, которая позволяет по известному одному решению найти другое, «лучшее» значение критерия оптимальности, позволит сократить объем вычислений. Такой процедурой является симплексный метод, или метод последовательного улучшения плана, который содержит три существенных момента:

- 1) указывают способ вычисления опорного (базисного) плана;
- 2) устанавливают признак, позволяющий проверить, является ли выбранный опорный план оптимальным;
- 3) приводят способ, позволяющий по выбранному неоптимальному плану построить другой опорный план, более близкий к оптимальному.

Доказывают, что таким путем можно через конечное число шагов (итераций) получить оптимальный план — решение задачи линейного программирования.

Линейное программирование в пищевой промышленности применяется для решения практических задач оптимального раскроя упаковочных материалов, размещения ограниченных ресурсов, оптимальной рецептуры и ассортимента продукции и т. д.

Практические задачи по линейному программированию решают чаще всего при смешанных условиях: часть ограничений — линейные уравнения, другие — линейные неравенства. Чтобы привести задачу в наиболее простую и удобную для решения каноническую форму, во все неравенства вводят неотрицательные переменные

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$$

$$(x_j \geq 0, j = n+1, n+2, \dots, n+m).$$

Тогда все ограничения будут иметь вид

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + x_{n+1} = b_1;$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n + x_{n+2} = b_2;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n + x_{n+m} = b_m.$$

В общем виде ограничения запишем

$$\sum_{i=1}^{n+m} a_{ij}x_j = b_i; \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$j = 1, 2, \dots, n, n+1, n+2, \dots, n+m;$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m).$$

Если необходимо найти максимум (минимум) линейной функции, то дополнительные переменные в этой функции получают коэффициенты, равные нулю. Линейная функция (115) имеет вид

$$R = \sum_{j=1}^{n+m} c_j x_j \rightarrow \max \quad (j = 1, 2, \dots, n, n+1, \dots, n+m).$$

В задачах по расчету рецептуры учитывают в большинстве случаев только технологические условия, а не экономические ограничения. Поэтому от выбранного рецепта, т. е. от количества и вида сырья, расходуемого на единицу продукции, зависит ее себестоимость. Расчет рецептуры сводится к решению задачи линейного программирования.

Составим рецептуру продукта, имеющего минимальную себестоимость,

$$\sum_{j=1}^n x_j c_j \rightarrow \min$$

при выполнении следующих технологических условий

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i; \quad \sum_{j=1}^n x_j \leq N_j; \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

где x_j — количество единиц j -го продукта, входящего в состав рецепта; a_{ij} — коэффициенты матрицы, обозначающей содержание компонента i , в единице j -го продукта (сырья); c_j — цена единицы j -го продукта (сырья); n — количество возможных для применения при составлении рецепта исходных видов сырья; N_j — допустимая норма введения в смесь j -го вида продукта.

Задачи линейного программирования при наличии двух переменных решают графическим способом, большем их числе — аналитическим. При десяти и более переменных применение симплексного метода для решения задач линейного программирования без пользования ЭВМ связано с большими трудностями.

Ассортиментные задачи состоят в определении вида и количества выпускаемой продукции, позволяющей получить максимум или минимум критерия эффективности при

заданных запасах всех видов ресурсов, нормы расхода каждого вида ресурса на производство единицы продукции. В качестве критерия эффективности используется максимум прибыли, минимум себестоимости, максимум товарной продукции и т. д.

Исходными условиями для постановки задачи планирования ассортимента выпускаемой продукции служат данные по запасам сырья, производственным мощностям основного оборудования, рецептуре на все виды выпускаемой продукции на данном предприятии, прибыли, получаемой от производства единицы каждого вида продукции по различным рецептам.

Модель ассортиментной задачи при стремлении предприятия получить максимальную прибыль выразится уравнением целевой функции

$$\sum_{j=1}^n x_j \Pi_j \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq B_i; \quad t_{k \min} \leq x_k \leq t_{k \max}; \quad x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

где x_j — количество производимого продукта по j -му рецепту; n — общее количество рецептов по всем видам продукта; a_{ij} — расход на 1 т продукта i -го вида ресурса по j -му рецепту; $t_{k \max}$ — максимальное и минимальное количество производства k -го вида продукта для удовлетворения спроса населения; B_i — ресурсы i -го вида сырья; Π_j — прибыль, получаемая от производства 1 т продукта по j -му рецепту.

Двусторонние ограничения на объем производства, вводимые в модель $t_{k \min} \leq x_k \leq t_{k \max}$, обычно выражают спрос населения на данные виды продукта или ограничения производственных возможностей (узкое место в технологическом процессе).

Симплексный метод является шаговым циклическим методом, в котором одна и та же совокупность вычислительных операций выполняется для различных массивов цифровой информации. Такими массивами служат матрицы базисных и небазисных векторов, между которыми осуществляется обмен информацией после каждого шага вычислений. Алгоритм обмена информацией между массивами базисных и небазисных векторов задан в самом методе и сводится к замене одного из базисных векторов небазисным. Конкрет-

ные примеры составления оптимальной рецептуры пищевых продуктов приводятся ниже.

Линейное программирование широко применяется для составления оптимального рациона питания, определения минимальной стоимости перевозок сырья и готовой продукции, выбора оптимальной системы управления технологическим процессом и др. При исследовании таких задач их сначала формализуют, т. е. составляют математическое описание с учетом всех переменных и ограничений, точно устанавливают критерий оптимальности (целевую функцию), так как именно поиск критерия оптимизации является целью решения задачи, а затем приводят в каноническую форму задачи линейного программирования.

§ 4. Динамическое программирование и принцип максимума

В основе метода динамического программирования лежит принцип оптимальности, сформулированный Р. Беллманом для широкого круга задач совершенствования систем, будущее состояние которых полностью или статистически определяется состоянием в настоящем. Динамическое программирование применяется для оптимизации многостадийных (многоступенчатых) процессов. Любой технологический процесс можно разделить на отдельные стадии или ступени. В качестве стадии принимают произвольную единицу времени, участок технологического процесса транспортной или вентиляционной сети, тарелку ректификационной колонны, реактор в каскаде реакторов и пр.

В многостадийных процессах состояние системы, характеризующееся совокупностью переменных, изменяется от стадии к стадии. Переход от одной стадии к другой описывается функциональными уравнениями, представляющими собой рекуррентные соотношения, с помощью которых устанавливают связь между состояниями в этих смежных стадиях. Решение таких уравнений дает максимальное значение критерия оптимальности.

Принцип оптимальности формулируют следующим образом: какими бы ни были состояние на 1-й стадии и принятое первое решение (управление), последующее решение должно быть оптимальным относительно состояния, полученного в результате первого решения. Иными словами, если на последней стадии многостадийного процесса состояние системы оптимальное, то оно будет оптимальным и

для всего процесса в целом. Его можно коротко сформулировать следующим образом: второй участок оптимальной траектории является, в свою очередь, оптимальной траекторией.

Динамическое программирование рассматривается как программа вычислений, проводимая в простейших случаях вручную, а в более сложных случаях — вычислительными устройствами. Иногда удается провести всю процедуру аналитически.

Многие процессы с последовательным решением трактуются как комбинаторные задачи. Например, N -стадийный процесс, в котором на каждой стадии принимается k решений ($k = 1, 2, 3, \dots$), т. е. для каждого возможного решения, принимаемого на i -й стадии, имеется k возможных решений, принимаемых на $N - 1$ стадии. Динамическое программирование допускает для решения задачи вместо пересмотра комбинаций k^N их анализ, что значительно уменьшает объем вычислений. Оно применяется для решения задач замены оборудования, распределения потоков сырья между машинами, управления процессами и запасами. Если предположить, что имеется $N = 10$ стадий, на каждой из которых принимается $k = 3$ решения, то перебор всех вариантов составит $k = 3^{10} = 5,9 \cdot 10^4$ комбинаций. Метод динамического программирования требует $kN = 3 \cdot 10 = 30$ комбинаций. В отличие от симплексного метода, являющегося универсальным в линейном программировании, в динамическом программировании нет общего алгоритма, пригодного для решения всех задач.

Алгоритм оптимизации многостадийных процессов основан на методах динамического программирования, который определяется как метод оптимизации многошаговых процессов принятия решений. В основе метода лежат два важных принципа. Первый (принцип оптимальности) формулируется следующим образом: обеспечить оптимальное по отношению к принятому критерию продолжение многошагового дискретного процесса относительно уже достигнутого состояния.

В соответствии со вторым (принципом вложения) задача, допускающая использование метода динамического программирования, не изменяется при изменении количества шагов, т. е. форма задачи инвариантна относительно числа шагов.

Реализация этих принципов дает гарантию, что решение, принимаемое на очередном шаге, окажется наилучшим

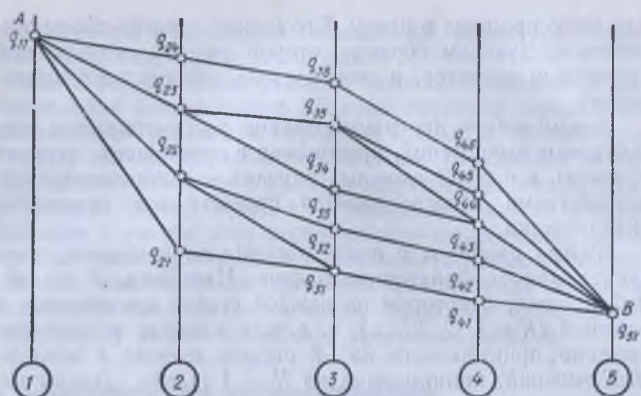


Рис. 43. Геометрическая интерпретация метода динамического программирования.

с точки зрения всего процесса в целом, а последовательность решений одно-, двух- и многошаговых задач приведет к решению исходной задачи. Эти принципы имеют сравнительно простую математическую интерпретацию, заключающуюся в составлении системы последовательных рекуррентных соотношений.

Метод имеет следующие положительные стороны: позволяет решить ранее нерешаемые задачи из-за отсутствия математического метода;

упрощает поиск оптимального решения за счет резкого сокращения объема вычислений;

допускает изменение средств механизации счета, в том числе ЭВМ, так как в основе своей является вычислительным.

К недостаткам следует отнести отсутствие универсального алгоритма, пригодного для решения всех задач, и большие трудности при режиме многомерных задач.

Проиллюстрируем идею метода динамического программирования на примере. Пусть требуется найти кратчайший путь из A в B . Возможные пути указаны на рис. 43. Если в результате действий на третьем этапе имеется выход в точку q_4 , то кратчайшим выходом из этой точки в точку B будет $q_{41}q_{51} = u_{4\text{опт}}/u_{41}$, так же как и $q_{42}q_{51} = u_{4\text{опт}}/q_{42}$, $q_{43}q_{51} = u_{4\text{опт}}/q_{43}$ и т. д. Это и есть первый набор оптимальных решений. Для состояния q_3 существует единственное решение $q_{31}q_{41}q_{51} = (u_3u_4)_{\text{опт}}/q_{31}$ (здесь требуется

достигнуть более короткого действия на двух шагах). Продолжая анализ, нетрудно установить наиболее короткий путь $(q_{11}q_{22} + q_{22}q_{33}q_{42}q_{51})$.

Основным функциональным уравнением метода динамического программирования является уравнение Белмана, которое определяется как аддитивная функция результатов, полученных на каждой стадии

$$R_N = \max \{r_i(x_{i-1}) + r_i(u_i)\}. \quad (120)$$

Задачу оптимизации многостадийного процесса можно сформулировать как задачу отыскания оптимальной стратегии

$$u_{\text{опт}}^{(N)} = (u_{1\text{опт}}, u_{2\text{опт}}, \dots, u_{(N-1)\text{опт}}),$$

для которой критерий оптимальности R_N принимает в зависимости от постановки задачи максимальное или минимальное значение.

В частном случае, когда $r_i = 0$, кроме r_N может возникнуть задача, в которой критерий оптимальности зависит только от состояния выхода последней ступени

$$R = R(x_N).$$

К такому критерию оптимальности сводят некоторые задачи оптимизации введением дополнительных переменных состояния. В этом случае задачу с критерием оптимальности R представляют в виде линейной функции

$$R = \sum_{i=1}^n c_i x_i,$$

где c_i — стоимостный коэффициент.

Если исходный поток продукта поступает в систему с расходом G_n , а обратный (рециркулирующий) с расходом G_p , то смешение таких потоков описывается уравнением в векторной форме

$$x_i = M(x_{i,0}, x_{i,N}).$$

Общий поток продукта в начале первой стадии составляет

$$G_1 = G_n + G_p.$$

Проблема оптимизации для такого процесса заключается в определении последовательности значений управляющих воздействий u_j ($j = 1, 2, \dots, N$), которые оптимизируют функцию

$$R_N = \sum_{i=1}^N r_i(x_{i-1}, u_i) \quad (121)$$

при условии, что x_i задано.

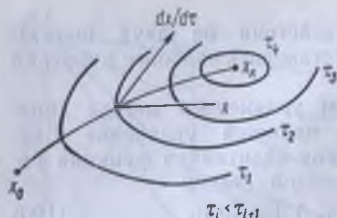


Рис. 44. Геометрическая интерпретация принципа максимума.

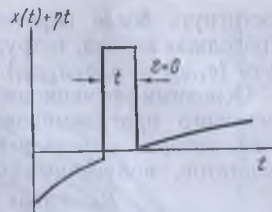


Рис. 45. Непрерывный сигнал с импульсной вариацией.

В отличие от метода динамического программирования в соответствии с принципом максимума следует так подбирать управляющее воздействие u , чтобы проекция скорости изображающей точки в фазовом пространстве dx/dt на направление нормали ψ к поверхности $\tau = \text{const}$ в данной точке была максимальной (рис. 44). Применение метода динамического программирования связано с решением уравнений в частных производных или конечно-разностных уравнений.

Принцип максимума является весьма универсальным методом оптимизации. Очень часто результаты, получаемые при применении других методов оптимизации, можно представить в форме условий принципа максимума. Кроме того, вычислительные принципы максимума имеют более общий характер и позволяют решить задачи, которые не могут быть сформулированы в терминах других методов или требуют специального обоснования возможности их использования.

Принцип максимума применяется в практике решения оптимальных задач пищевой технологии.

Принцип максимума основан на кусочно-непрерывных уравнениях, т. е. к непрерывным функциям добавляется импульс бесконечно малой длительности и конечной произвольной высоты.

Основную идею принципа максимума можно проиллюстрировать для процесса, представленного на рис. 45 и описываемого дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u, t), \quad (122)$$

где x — вектор-столбец состояния; u — вектор-столбец управляемых параметров.

На вектор управляемых параметров накладываются дополнительные условия

$$g(u) = 0. \quad (123)$$

Задачи оптимизации зависят от принятых критериев. Л. С. Понтрягин предложил основной критерий вида

$$\rho = \sum_{i=1}^n b x_i(t_k) \quad (\rho > 0). \quad (124)$$

Определяющими связь оптимального управления с максимумом энергии здесь являются b — вектор-столбец желаемого движения и $x(t_k)$ — вектор движения в конечный момент времени.

Тогда минимум ρ означает приближенную ортогональность векторов $\bar{x}$ и $\bar{b}$, т. е. истинное значение максимума приближается к желаемому. Конечная точка оптимальной траектории t_k может быть свободной или закрепленной, а вектор b — жестко ориентирован в пространстве или изменяемым.

Принцип максимума заключается в том, что если вектор обеспечивает минимум функции ρ , то энергетическая функция Гамильтона $H(x, p, u, t)$ имеет максимум по отношению к u в заданных пределах решения задачи.

Для уравнения (122) функция Гамильтона может быть записана в виде

$$H(x, p, u, t) = \langle \bar{p} | \bar{f} \rangle = \sum_{i=1}^n p_i f_i, \quad (125)$$

где $\bar{p}$ — количество движения; $\bar{f}$ — вектор правой части исходного уравнения.

Тогда принцип максимума будет означать, что если вектор u оптимален, т. е. если он обеспечивает минимум функции, то энергетическая функция Гамильтона $H(x, p, u, t)$ имеет максимум по отношению к u в заданных пределах управления.

Вектор $\bar{p}$ определяется как решение дифференциального уравнения

$$-\frac{dp_i}{dt} = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i = 1, n). \quad (126)$$

Дифференцируя уравнение (125) по p_i , найдем

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = f_i. \quad (127)$$

Кроме того, дифференцирование этого же уравнения дает

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \rho_j \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad (i = \overline{1, n}). \quad (128)$$

Учитывая (122), (126), (127) и (128), получим канонические уравнения Гамильтона

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = \overline{1, r}).$$

Начальные и граничные условия

$$\begin{cases} x_i(t_0) = x_{i0} & (i = \overline{1, n}) \\ p_i(t_k) = -b_i. \end{cases} \quad (129)$$

Поскольку $\bar{p}$ — вектор количества движения, а $\bar{f}$, согласно уравнению (122), также пропорциональный $\frac{dx}{dt}$, то их скалярное произведение, равное H (125), пропорционально количеству энергии. Алгоритм решения задачи оптимального управления состоит в следующем:

1) записывают уравнение объекта в виде системы уравнений первого порядка (122)

$$\frac{dx}{dt} = f_i(x, u, t) \quad (i = \overline{1, n});$$

2) составляют функцию H

$$H = \sum_{i=1}^n \rho_i(t) f_i(x, u, t);$$

3) определяют значение u , максимизирующее функцию H , из системы уравнений

$$\frac{\partial H}{\partial u_j} = 0 \quad (j = \overline{1, v}). \quad (130)$$

Возможно, что максимум H достигается на границе допустимой области управлений, тогда для некоторых j равенство (130) может не выполняться при ненулевой функции p (1).

В уравнениях (130) при определении $u(t)$ содержится $(2n + v)$ неизвестных; n функции $x_i(t)$, n функции $p_i(t)$ и v функций u . Для их определения имеются v уравнений (130) и уравнений исходной системы (122). Осталось еще n уравнений

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (i = \overline{1, n}); \quad (131)$$

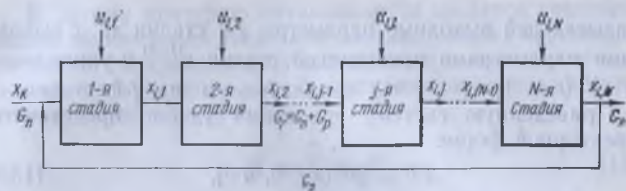


Рис. 46. Схема многостадийного технологического процесса с обратной связью.

4) составляют уравнения (131) для определения $p_i(t)$. Из совместного решения названных $(2n + v)$ уравнений находят оптимальное управление $u(t)$;

5) подставляя условия максимума функции Гамильтона в канонические уравнения, находят дифференциальные уравнения, определяющие оптимальный процесс при заданных граничных условиях.

Принцип максимума применяется и для оптимизации дискретных многостадийных технологических процессов. При этом вычислительная процедура принципа максимума требует значительно меньших затрат времени, чем динамическое программирование.

Схемой многостадийного технологического процесса с обратной связью (рис. 46) можно представить большое количество разнообразных технологических процессов и в пищевой промышленности, осуществляемых последовательно: нагревание, охлаждение, выпаривание, сушка, ректификация и т. д. В качестве стадии или ступени может быть реальный или абстрактный объект: период времени протекания процесса, технологический участок, аппарат, машина, ступень экстракции и пр., а в качестве обратной связи — часть возвращенного потока обрабатываемого продукта для повторной обработки или повторного использования рабочего агента. Каждая стадия может иметь несколько входов и выходов. Дискретный принцип максимума так же, как и динамическое программирование, применяется для математически описанных процессов, представленных этой схемой. В этом случае требуется математическое описание каждой стадии, которое в общем виде может быть представлено системой уравнений

$$\begin{aligned} x_i^{(j)} &= \Phi_{ik}^{(j)}(x_1^{(j-1)}, \dots, x_m^{(j-1)}, u_1^{(j)}, \dots, u_r^{(j)}) \\ (i &= 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (132)$$

связывающей выходные параметры j -й стадии $x_k^{(j)}$ с выходными параметрами предыдущей стадии $x_k^{(j-1)}$ и управлением $u_e^{(j)}$ ($e = 1, 2, \dots, r$), используемым на j -й стадии.

Приведенную систему уравнений удобно представить в векторной форме

$$x^{(j)} = \varphi^{(j)}(x^{(j-1)}, u^{(j)}), \quad (133)$$

где $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \dots, x_m^{(j)})$ — вектор совокупности и переменных состояний j -й стадии; $u^{(j)} = (u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \dots, u_r^{(j)})$ — вектор совокупности управляющих воздействий j -й стадии.

Размерности векторов состояния и управления могут быть различными для разных стадий, но в общем принимают, что размерности m и r для всех стадий процесса одинаковы, т. е. количество управляющих равно количеству переменных. В реальных условиях на значения переменных накладываются ограничения. Математически эти ограничения обычно записывают в виде

$$x^{(j)} \in X \text{ и } u^{(j)} \in U. \quad (134)$$

Эффективность каждой стадии процесса оценивается некоторой скалярной величиной как функция входа $x^{(j-1)}$ на j -й стадии и используемого на ней управления

$$r_j = r_j(x^{(j-1)}, u^{(j)}). \quad (135)$$

Результирующая оценка эффективности многостадийного процесса определяется как аддитивная функция результатов, получаемых на каждой ступени

$$R_N = \sum_{i=1}^N r_i(x^{(i-1)}, u^{(i)}). \quad (136)$$

Задачу оптимизации многостадийного процесса можно сформулировать как задачу отыскания оптимальной стратегии

$$u_{\text{опт}}^{(N)} = (u_{\text{опт}}^{(1)}, u_{\text{опт}}^{(2)}, \dots, u_{\text{опт}}^{(N-1)}), \quad (137)$$

для которой критерий оптимальности $R_{(N)}$ принимает в зависимости от постановки задачи максимальное или минимальное значение.

В частном случае, когда r_j за исключением r_N равны нулю, может возникнуть задача, в которой критерий оптимальности зависит только от состояния выхода последней ступени

$$R = R(x^{(N)}).$$

К такому критерию оптимальности сводятся некоторые задачи оптимизации введением дополнительных переменных состояния. Введением других дополнительных переменных можно также свести задачу оптимальности с критерием в виде линейной функции

$$R = \sum_{i=1}^m c_i x_i^{(N)}, \quad (138)$$

где c_i — стоимостный или другой коэффициент ценности.

Если исходный поток продукта поступает в систему с расходом G_n , кг/с, а обратный (рециркулирующий) с расходом G_p , кг/с, то смещение таких потоков описывается уравнением (см. рис. 46)

$$x_1^{(0)} = M_{(0)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_s^{(1)}, x_1^{(N)}, x_1^{(N)}, \dots, x_s^{(N)}, G_n, G_p),$$

или в векторной форме

$$x^{(0)} = M(x^{(1)}, x^{(N)}).$$

Общий поток продукта в начале первой стадии составляет

$$G_0 = G_n + G_p.$$

Проблема оптимизации для такого процесса заключается в определении последовательности значений управляющих воздействий $u^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, N$), которые оптимизируют функцию

$$R_N = \sum_{i=1}^N r_i(x^{(i-1)}, u^{(i)}) \quad (139)$$

при условии, что $x^{(0)}$ задано.

Векторы x и z при оптимизации функции Гамильтона считаются фиксированными. Обоснование алгоритма вычисления для конкретных объектов приведено ниже.

§ 5. Методы нелинейного программирования

К методам нелинейного программирования относят группу различных способов решения оптимальных задач: градиентные, безградиентные и др. Общим для этих способов является то, что используют нелинейные формы описания функции оптимальности и ограничений.

Градиентные методы. Градиентом какой-либо функции φ называют вектор, имеющий направление наибольшего увеличения функции и по величине равный производной

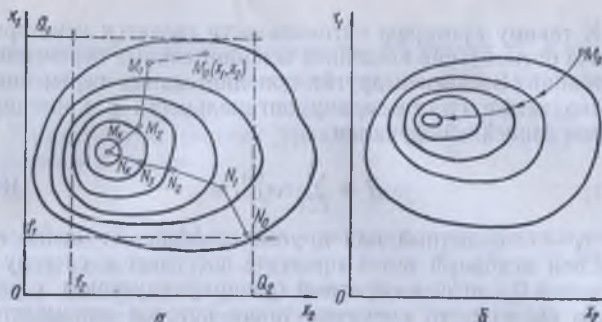


Рис. 47. Поиск оптимума при двух переменных:
а — шаговый; б — непрерывный.

по этому направлению, т. е.

$$\text{grad } \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \bar{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \bar{j} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} \bar{k}, \quad (140)$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \dots, \bar{k}$ — орты соответствующих направлений $x_1, x_2, \dots, x_n$.

При использовании метода градиента производят непрерывное или шаговое (дискретное) движение точки, моделирующей процесс поиска оптимальных решений в n -мерном пространстве в направлении наибольшего (наименьшего) значения функционала. Градиентные методы предусматривают вычисление градиента в виде уравнения линейной регрессии

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_n x_n$$

и последующее движение по градиенту с шагом, который уменьшается при приближении к оптимуму. Шаговый поток при двух переменных изображен на рис. 47, а. Проводят начальный выбор точки $M_0(x_1, x_2)$, удовлетворяющей ограничениям $f_i \leq x_i \leq a_i$.

Для вычисления градиента делают пробный шаг по каждому из параметров, т. е. рассчитывают приращение координат начальной точки

$$\Delta x_1 \text{ и } \Delta x_2, \text{ причем } \Delta x_1 = a \frac{\partial R}{\partial x_1}; \quad \Delta x_2 = a \frac{\partial R}{\partial x_2}.$$

Эти два уравнения определяют дискретную траекторию, а величина a — длину прямого участка. Координаты точки M_1

$$x_{1(1)} = x_1 + \Delta x_1; \quad x_{2(1)} = x_2 + \Delta x_2.$$

После вычисления координат точки M_1 находят таким же образом координаты точки M_2 и т. д., пока не придут в область оптимальных значений. По мере приближения к оптимуму величина коэффициента уменьшается. Поиск может закончиться раньше, если на каком-либо этапе нарушаются условия $f_i \leq x_i \leq a_i$.

В случае непрерывного движения изменение координат пропорционально соответствующим компонентам мгновенного вектора градиента (рис. 47, б)

$$x_1 = a \frac{\partial R_1}{\partial x_1}; \quad x_2 = a \frac{\partial R}{\partial x_2}; \quad \dots; \quad x_n = a \frac{\partial R}{\partial x_n}.$$

Продвижение, как и при шаговом поиске, происходит до тех пор, пока точка не попадает в область оптимума или перейдет ограничения. Недостатком метода является то, что при наличии помех он неоптимален. Кроме того, поверхности отклика могут иметь относительные экстремумы, а также своеобразные формы, которые делают невозможной оптимизацию методами градиента. Четыре типа поверхностей, описываемые уравнениями второго порядка в канонической форме, представлены на рис. 48: «симметричная горка» (а), «седло» (б), «хребет» (в) и «стационарное возвышение» (г), контурные этих функций — на рис. 49. Метод градиента используется только в случае поверхности типа «симметричная горка».

Каноническая форма уравнений математической модели очень удобна для поиска оптимальных решений и дает на-

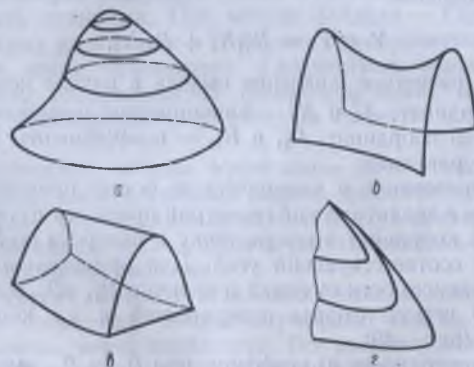


Рис. 48. Типы поверхностей, описываемых уравнениями второго порядка в канонической форме.

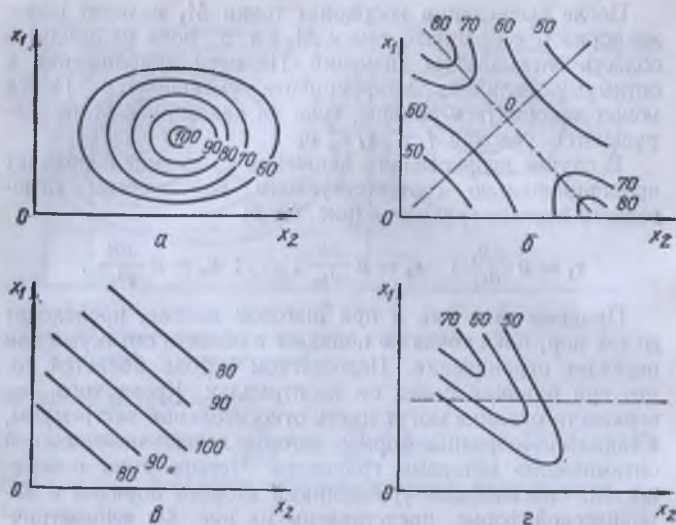


Рис. 49. Контурные кривые области оптимума, описываемые каноническими уравнениями второго порядка.

глядную геометрическую интерпретацию каждого метода. При преобразовании уравнения регрессии второго порядка для двух факторов ($n = 2$) в каноническую формулу получают уравнение

$$\hat{Y} = \hat{Y}_s = B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2, \quad (141)$$

где $\hat{Y}_s$ — расчетное значение выхода в начале новой системы координат; X_1^2 и X_2^2 — канонические переменные для новых осей координат; B_{11} и B_{22} — коэффициенты канонического уравнения.

Преобразование в каноническую форму производят по известным в аналитической геометрии правилам путем переноса осей координат в новую точку и поворота осей координат на соответствующий угол. Для приведенного уравнения в зависимости от знака и величин B_{11} и B_{22} возможны (рис. 48) четыре формы поверхностей и их контурных кривых (рис. 49).

Для поверхности а) коэффициенты B_{11} и B_{22} имеют одинаковые знаки, а контурные кривые являются эллипсами. При $B_{ii} < 0$ центр эллипсов будет максимумом функ-

ции отклика, а при $B_{ii} > 0$ — минимумом. При $|B_{22}| < |B_{11}|$ эллипс вытянут по оси X_2 и наоборот.

Если коэффициенты B_{11} и B_{22} имеют разные знаки, то контурные кривые являются гиперболами. Центр фигуры называют «седлом», или «минимаксом». В зависимости от соотношения коэффициентов поверхность отклика будет «стационарным возвышением», при B_{22} — близким к нулю. При $B_{11} = 0$ поверхность представляет собой «гребень».

Метод Зайделя — Гаусса является частным случаем метода градиента и предусматривает поочередное нахождение частного экстремума по каждому из параметров. Например, для функции двух переменных $R(x_1, x_2)$ оптимизация происходит следующим образом (рис. 50): изменяют параметр x_1 при фиксированном значении x_2 и находят частный второй экстремум (точка N) и т. д., пока не придут в область оптимума. При методе Зайделя — Гаусса путь к оптимуму удлиняется и стабилизация параметров на длительное время невозможна. Градиентные методы имеют несколько разновидностей (релаксационный, случайного поиска, наискорейшего спуска), но сущность их не изменяется.

Градиентные методы эффективны при использовании аналоговых вычислительных машин, решении статистических задач и оптимизации систем. В двух последних случаях реализация этих методов осуществляется на цифровых вычислительных машинах.

Из других методов отыскания оптимальных условий широко применяют методы случайного поиска, крутого восхождения, метод симплексов. Все рассмотренные методы оптимизации отличаются от прямых методов полного перебора меньшим объемом вычислений и поэтому получили широкое распространение. Благодаря уменьшению объе-

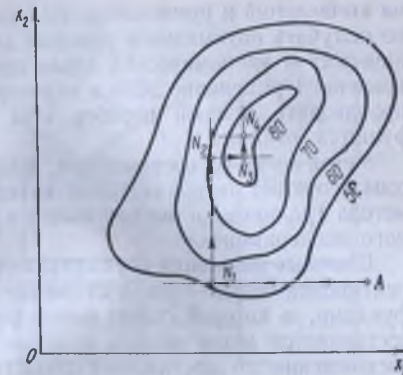


Рис. 50. Поиск оптимума по методу Зайделя — Гаусса.

ма вычислений и применению вычислительных машин можно получить оптимальное решение для очень сложных технических и экономических задач при небольших затратах времени. Применение ЭВМ в некоторых случаях позволяет производить полный перебор всех возможных значений функции отклика.

Метод крутого восхождения, или метод Бокса — Уилсона, сочетает положительные методы Зайделя — Гаусса, метода градиента и метода полного или дробного факторного эксперимента.

Шаговые движения осуществляются по градиенту, корректировка шага — по достижении частного экстремума функции, в которой ставят новый факторный эксперимент, составляется новая модель и вновь осуществляют крутое восхождение до достижения области оптимума.

При планировании факторного эксперимента исследуемый объект представляют в виде «черного ящика», входными параметрами которого являются факторы x_i , а выходным — один из y_i , принимаемый в качестве параметра оптимизации. Математическую модель записывают в виде функции отклика

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

в пространство с координатами $x_1, x_2, \dots, x_k$, в котором путем крутого восхождения (спуска) по поверхности отклика необходимо найти оптимальную точку. Метод применим для случая, когда поверхность имеет одну экстремальную точку и один параметр оптимизации. Этот эмпирический подход весьма эффективен и позволяет значительно сократить число опытов, так как описать сравнительно большие участки поверхности отклика традиционными методами при большом количестве факторов практически невозможно.

Важно не только найти область оптимальных режимов процесса, но и определить допустимые (предельные) значения входных параметров, обеспечивающих установленный или заданный оптимальный режим.

Пусть технологический режим работы гранулятора в околооптимальной области описывается уравнением регрессии в натуральных значениях входных переменных

$$I = 27\,050 + 7,5488Q + 16,56G - 1240R - (0,55Q^2 + 18G^2) \cdot 10^{-3} + 155P^2,$$

где Q, G — расходы гранулируемого продукта и пара; P — давление пара; I — величина тока приводного двигателя статора.

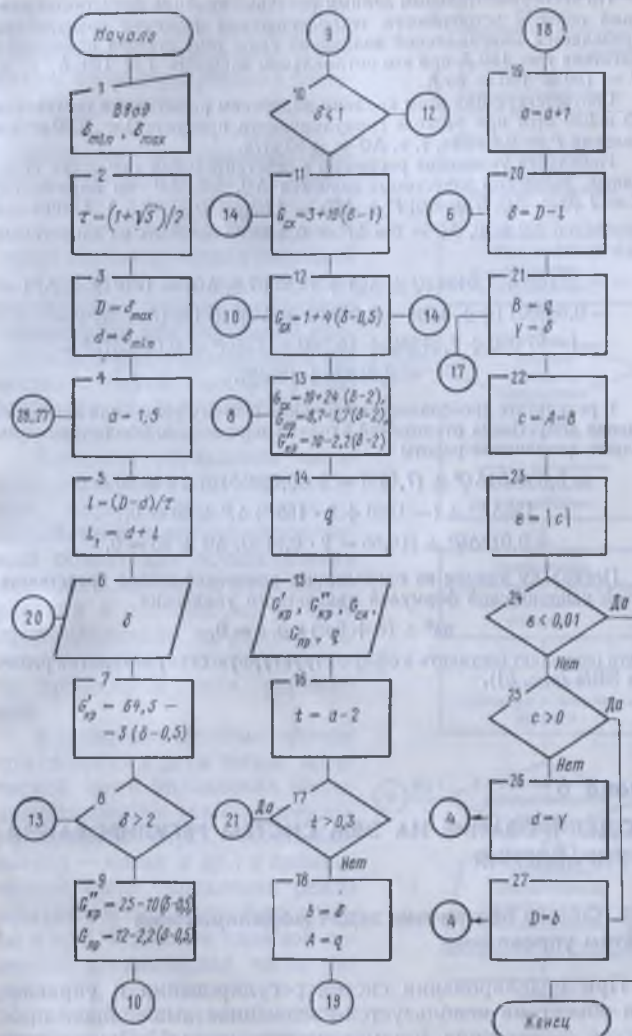


Рис. 51. Структурная схема алгоритма определения минимального расхода энергии.

По экспериментальным данным величина крайних допустимых значений области устойчивости технологических режимов гранулятора определяется максимальной величиной силы тока статора приводного двигателя $I = 150$ А при его оптимальном значении $I = 120$ А, т. е. $\Delta I = 150 - 120 = 30$ А.

Соответствующий этим крайним значениям расход пара составляет 430 и 530 кг/ч при расходе гранулируемого продукта $Q = 7000$ кг/ч и давления $P = 0,4$ МПа, т. е. $\Delta G = \pm 50$ кг/ч.

Используя уравнения регрессии в действительных значениях переменных, вычислим допустимые значения ΔQ , ΔG , ΔP по выражению $\Delta I = I(Q \pm \Delta Q; G \pm \Delta G; P \pm \Delta P) - I(Q_{\text{опт}}, G_{\text{опт}}, P_{\text{опт}})$. Принимая поочередно $\Delta Q = 0$, $\Delta G = 0$ и $\Delta P = 0$, можно получить их допустимые отклонения

$$\begin{aligned} \Delta I = & -27\,050 + 7,5488(Q \pm \Delta Q) + 16,56(G \pm \Delta G) - 1240(P \pm \Delta P) - \\ & - 0,000551(Q \pm \Delta Q)^2 - 0,018(G \pm \Delta G)^2 + 155(P \pm \Delta P)^2 - \\ & - [-27\,050 + 7,5488Q + 16,56G - 1240P - 0,000551Q^2 - \\ & - 0,018G^2 + 155P^2]. \end{aligned}$$

В результате преобразований получим систему уравнений для определения допустимых отклонений входных параметров, обеспечивающих работу устойчивой работы

$$\begin{aligned} & -0,000551\Delta Q^2 \pm (7,5487 - 2 \cdot 0,000551Q)\Delta Q \pm 30 = 0; \\ & 155\Delta P^2 \pm (-1240 + 2 \cdot 155P)\Delta P \pm 30 = 0; \\ & -0,018\Delta G^2 \pm (16,56 - 2 \cdot 0,018G)\Delta G \pm 30 = 0. \end{aligned}$$

Поскольку каждое из приведенных уравнений можно представить общей канонической формулой квадратного уравнения

$$ax^2 \pm (b + 2ac)x \pm c = 0,$$

то это позволяет составить и общую структурную схему алгоритма решения ЭВМ (рис. 51).

Глава 6

МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ЭВМ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

§ 1. Общая постановка задач моделирования систем управления

При моделировании систем регулирования и управления объектами используется изложенная выше общая процедура составления математических моделей. Однако при формулировании целей управления учитываются особенности функционирования объекта и требования к их управ-

лению, которые требуют формулировки алгоритмов функционирования и управления. Алгоритмы функционирования системы определяются как совокупность предписаний, ведущих к правильному выполнению процесса, и представляют по существу краткое содержательное описание последовательности выполнения технологических операций и их режимов (технологического регламента), которые необходимо осуществить для получения продукта заданного количества и качества с учетом (или без учета) различных удельных затрат (энергии, труда, общих затрат).

Алгоритм управления является совокупностью предписаний, определяющих характер воздействий извне на управляемый объект для осуществления заданного алгоритма функционирования и которые могут быть сформулированы по-разному на основе анализа технологического процесса и цели управления.

Управление простым процессом сводится к двум типам: логической части управления последовательностью технологического процесса (пуск, остановка, вперед — назад и др.) и динамической части управления режимом (нагрев по заданной программе и пр.). Наиболее сложной является динамическая часть управления, определяющая переходные процессы, и особенно при условиях требования оптимизации показателя цели функционирования или управления.

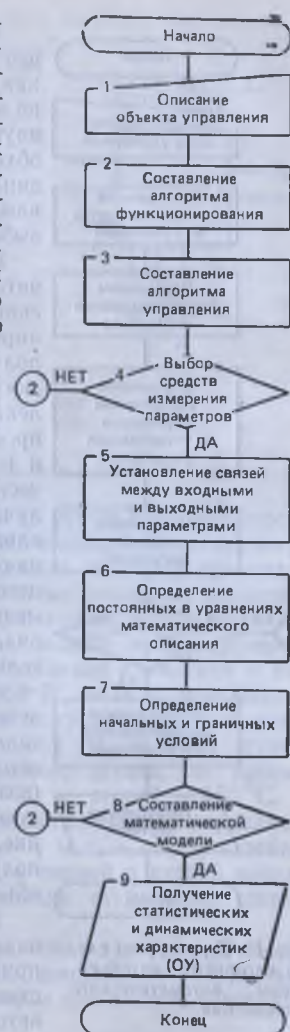


Рис. 52. Структурная схема алгоритма анализа процесса как объекта управления.

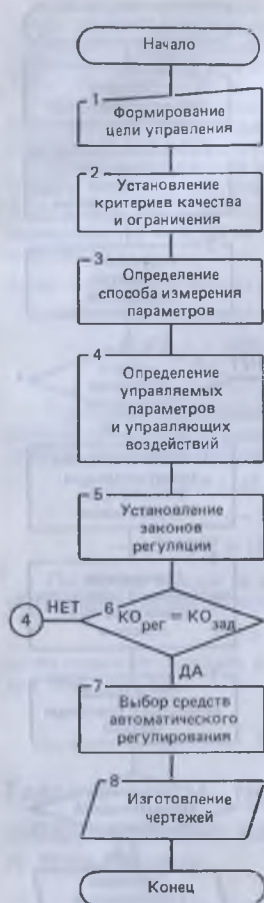


Рис. 53. Структурная схема алгоритма синтеза системы автоматического управления.

В качестве примера составления алгоритмов функционирования и управления рассмотрим операторную схему шахтной сушилки, имеющей зону охлаждения (рис. 54).

Алгоритм управления по существу определяет цели управления, т. е. совокупность элементов, по которым передаются внешние и внутренние воздействия. Затем необходимо определить статические и динамические характеристики по каждому каналу управления для выбора средств управления.

Изложенное позволяет заключить, одной из задач математического моделирования систем регулирования и управления является получение статических и динамических характеристик объекта управления, а также анализ переходных процессов в управляемых объектах и их систем управления. Динамические характеристики можно получить составлением дифференциальных или разностных уравнений на основе анализа физических процессов и использованием экспериментальных данных. Применение аналоговых и цифровых вычислительных машин позволяет на основе этих данных моделировать поведение объекта. Если экспериментально получить эти данные изменением управляющих воздействий (возмущений) не удастся, то используют статистическое моделирование. При этом необходимые данные получают в процессе эксплуатации объектов.

Анализ объекта управления в виде структурной схемы алгоритма приведен на рис. 52, структурная схема алгоритма синтеза системы автоматического управления — на рис. 53.

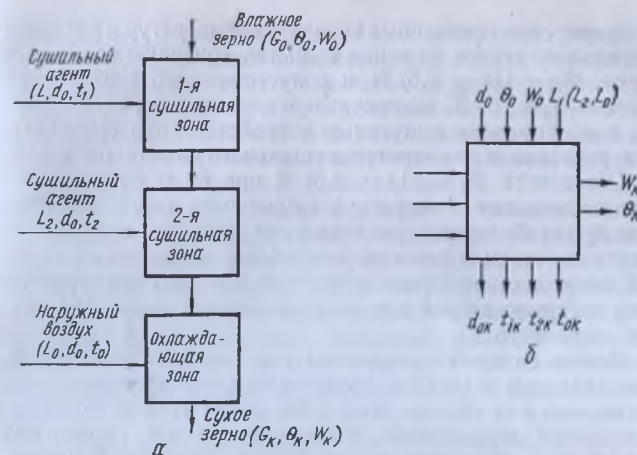


Рис. 54. Операторная схема зерносушилки с зоной охлаждения.

В соответствии с Инструкцией по сушке продовольственного, кормового зерна, маслосемян и эксплуатации зерносушилок алгоритмы функционирования шахтных прямоточных зерносушилок с двухступенчатым режимом, характерным для сушилок ДСП-32 при сушке зерна пшеницы продовольственного назначения, можно сформулировать следующим образом: обеспечить снижение влажности с начальной $W_0 = 20\%$ до конечной $W_k = 14\%$ при максимально допустимой температуре нагрева зерна для пшеницы с нормальной клейковиной $\theta_{нк} = 50^\circ\text{C}$ путем изменения температуры сушильного агента, не превышающей в первой ступени 130°C , во второй — 150°C .

При таком алгоритме функционирования управляющими параметрами могут быть: t_1 и t_2 — соответственно температура сушильного агента в первой и второй зонах; G — расход зерна; L_1 и L_2 — расходы сушильного агента по зонам (ступеням).

Расходы сушильного агента по зонам обычно стабильны, т. е. определяются максимально допустимой скоростью фильтрации в подвижном слое зерна для данной конструкции сушилки.

Алгоритмы управления отличаются большим разнообразием, поскольку одна и та же цель функционирования достигается различными управляющими воздействиями.

Например, при постоянных значениях температур и расходов сушильного агента по зонам сушилки конечную влажность зерна $W_k = (14 \pm 0,5) \%$ и допустимую его температуру нагрева $\Theta_d \leq 50^\circ\text{C}$ обеспечивают изменением расхода зерна, т. е. управляя выпускным устройством при стабилизации расходов и температур сушильного агента по зонам.

Обеспечить $W_k = (14 \pm 0,5) \%$ при $\Theta_d = 50^\circ\text{C}$ можно путем изменения температуры сушильного агента в первой зоне при стабилизации расхода зерна, расходов сушильного агента по зонам и температуры сушильного агента во второй зоне, а также путем изменения температуры сушильного агента во второй зоне при постоянных значениях других параметров.

Можно составить алгоритмы управления, обеспечивающие заданные выходные показатели качества зерна одновременным или поочередным изменением трех и более управляющих воздействий. Выбор алгоритмов управления должен быть обоснован прежде всего возможностью и удобством реализации того или иного изменения управляющего воздействия, временем переходного процесса.

При таком упрощенном формулировании алгоритма функционирования не были учтены еще два требования Инструкции по сушке зерна. Во-первых, при начальной влажности $W_0 > 20 \%$ допустимые температуры сушильного агента при первом пропуске уменьшаются (соответственно $t_{г2} = 100$ и 120°C , а при втором — 120 и 140°C). Допустимые температуры нагрева зерна при первом пропуске уменьшаются на 5°C , т. е. составляют 45°C , а при втором — не изменяются. Во-вторых, просушенное зерно должно быть охлаждено до температуры, не превышающей температуру наружного воздуха более чем на 10°C , т. е. $\Theta_k \leq (t_0 + 10^\circ\text{C})$.

Первое требование по существу не изменяет приведенные алгоритмы управления, поскольку требования к допустимой температуре нагрева зерна в качественном отношении не изменяются $\Theta \leq \Theta_d$. Второе требование ограничивает возможность управления расходом зерна, так как изменение расхода зерна не всегда может удовлетворить требованиям обеспечения заданных влажности и температуры зерна на выходе. Из этого следует, что для одного и того же процесса сушки зерна в одноступенчатом аппарате могут быть построены различные алгоритмы и соответствующие им системы управления, обеспечивающие эти алгоритмы.

Для достижения сформулированной выше цели функ-

ционирования одним из приведенных алгоритмов управления должна быть дана количественная оценка управляющим воздействиям, обеспечивающим заданные параметры зерна на выходе W_k , Θ_k и Θ_d с допустимыми отклонениями. Эта количественная оценка может быть получена с помощью системы физических или математических моделей, которые разрабатывают в процессе проектирования АСУ зерносушилками. Параметры моделей должны учитывать также собственные или внутренние параметры зерносушилки (свойства зерна, конструктивные параметры и т. д.). В сформулированных выше алгоритмах функционирования и управления не учтена эффективность процесса, которая определяется техническими (удельные расходы сушильного агента, топлива, электроэнергии) и экономическими (например, приведенные затраты на сушку) показателями. С учетом этих показателей общий алгоритм функционирования процесса сушки зерна можно определить как обеспечение заданной величины съема влаги при сохранении или улучшении качества зерна с заданными (нормируемыми) или минимальными энергетическими либо приведенными затратами на сушку зерна при заданной производительности.

Одновременно удовлетворить всем перечисленным требованиям всех целей функционирования затруднительно по организационным, техническим или экономическим причинам. С целью упрощения задачи для каждого типа зерносушилки при разработке системы управления этот общий алгоритм функционирования должен быть конкретизирован с учетом особенностей технологической схемы и режимов нагрева, сушки и охлаждения и других условий.

§ 2. Определение динамических характеристик методами статистического моделирования

В связи с тем что точно определить динамические характеристики объекта по типовым входным сигналам трудно из-за влияния случайных неконтролируемых возмущений и невозможности подачи на вход объекта возмущающих стандартных воздействий в результате нарушения нормального хода технологического процесса, возникает необходимость определения динамических характеристик объекта в режиме его нормальной эксплуатации [11].

При отсутствии помех связь между входным $u(t)$ и выходным $y(t)$ сигналами для объекта с весовой функцией

$K(t)$ определяется уравнением свертки (рис. 55)

$$y(t) = \int_0^{\infty} u(t - \tau) K(\tau) d\tau. \quad (142)$$

При наличии помехи $\omega(t)$ (рис. 55) вместо уравнения (142) справедливо следующее соотношение:

$$y(t) = \int_0^{\infty} u(t - \tau) K(\tau) d\tau + \int_0^{\infty} \omega(t - \tau) h(\tau) d\tau, \quad (143)$$

где $h(\tau)$ — весовая функция объекта по отношению к помехе. Второй интеграл с неизвестными функциями $\omega(t)$ и $h(t)$ в правой части равенства (143) показывает, почему обычные нестатистические методы не дают возможности решать задачи идентификации при наличии помех. Единственными пригодными в этом случае методами определения динамических характеристик являются статистические методы.

Пусть $R_{uu}(\tau)$ — корреляционная функция эргодического стационарного случайного процесса $u(t)$ на входе линейной системы с постоянными параметрами, а $R_{yu}(\tau)$ — взаимная корреляционная функция между входом и выходом, которая приближенно определяется соотношением

$$R_{yu}(\tau) \approx \frac{1}{T} \int_0^T y(t) u(t - \tau) dt. \quad (144)$$

С учетом выражения (143) равенство (144) примет вид

$$R_{yu}(\tau) \approx \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau - \theta) K(\theta) d\theta + \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau - \theta) h(\theta) d\theta. \quad (145)$$

Если внутренние шумы $\omega(t)$ независимы от внешних воздействий $u(t)$, то $R_{\omega u}(\tau) = 0$ и равенство (145) при больших временах наблюдения T сводится к соотношению

$$R_{yu}(\tau) = \int_0^{\infty} R_{uu}(\tau - \theta) K(\theta) d\theta, \quad (146)$$

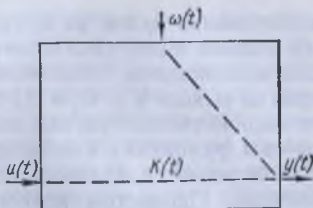


Рис. 55. Схема управления объекта с одним входом и выходом при наличии помехи.

которое по форме аналогично уравнению свертки (142). Это значит, что если на вход линейной динамической системы с весовой функцией $K(t)$ подать сигнал $u(t)$, совпадающий с корреляционной функцией $u(t) = R_{uu}(t)$, то на выходе этой системы должен появиться сигнал $y(t)$, совпадающий по форме с взаимной корреляционной функцией $y(t) = R_{yu}$.

Предположим, что сигнал на входе представляет собой «белый шум», корреляционной функцией которого является функция $R_{uu}(\tau) = \delta$. При этом соотношение (146) примет вид

$$R_{yu}(\tau) = \int_0^{\infty} \delta(\tau - \theta) K(\theta) d\theta = K(\tau),$$

откуда следует, что если на вход системы подавать искусственное воздействие в виде «белого шума», то взаимная корреляционная функция между входом и выходом представляет искомую весовую функцию системы.

Таким образом, если объект допускает нанесение тестового возмущения в виде «белого шума», то проблема его идентификации сводится к вычислению его взаимной корреляционной функции.

Задача определения динамических характеристик объекта в режиме его нормальной эксплуатации, когда входное возмущение рассматривается как стационарный случайный процесс, сводится к решению более общего интегрального уравнения (146) относительно весовой функции $K(t)$ и разбивается на три этапа: вычисление корреляционной функции входного и взаимнокорреляционной функции входного и выходного сигналов; решение уравнения (146) относительно $K(t)$.

Запись реализации случайных процессов на входе и выходе объекта и их статистическая обработка для вычисления корреляционной и взаимнокорреляционной функций не представляют труда и могут выполняться автоматизированно с применением специальных корреляторов. Таким образом, задача идентификации объекта сводится к третьему этапу — решению интегрального уравнения (146) относительно неизвестной функции $K(t)$ при известных функциях $R_{uu}(\tau)$ и $R_{yu}(\tau)$.

Существует несколько методов решения интегрального уравнения (146). Из них наиболее распространенными являются: метод, основанный на преобразовании Фурье; алгебраические методы; метод подбора на управляемом фильтре; метод моментов [11; 12].

Метод, основанный на преобразовании Фурье. При рассмотрении этого метода для большей общности будем полагать, что объект обладает постоянным запаздыванием t_s , которое заранее известно. Весовую функцию $K_s(t)$ такого объекта представим в виде

$$K_s(t) = K(t - t_s) (t \geq t_s); \quad K_s(t) = 0 \quad (t < t_s), \quad (147)$$

где $K(t)$ — весовая функция того же объекта, но без запаздывания.

С учетом (147) перепишем уравнение свертки (146)

$$R_{yu}(\tau) = \int_{t_s}^{\infty} R_{uu}(\tau - \theta) K(\theta - t_s) d\theta. \quad (148)$$

Применим к обеим частям равенства (147) прямое преобразование Фурье. В результате получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} R_{yu}(\tau) d\tau = e^{-j\omega t_s} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\varphi} K(\varphi) d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} R_{uu}(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda.$$

Используя понятие спектральной плотности, последнее соотношение перепишем в виде

$$S_{yu}(\omega) = e^{-j\omega t_s} W(j\omega) S_{uu}(\omega), \quad (149)$$

$$\text{где } S_{yu}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} R_{yu}(\tau) d\tau; \quad S_{uu}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau} R_{uu}(\tau) d\tau;$$

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-j\omega\varphi} K(\varphi) d\varphi.$$

Здесь $S_{yu}(\omega)$ — взаимная спектральная плотность входного и выходного сигналов; $S_{uu}(\omega)$ — спектральная плотность входного сигнала; $W(j\omega)$ — передаточная функция объекта без запаздывания.

Из равенства (149) следует, что передаточная функция объекта с запаздыванием

$$W_s(j\omega) = W(j\omega) e^{-j\omega t_s}$$

определяется путем деления взаимной спектральной плотности $S_{yu}(\omega)$ на спектральную плотность $S_{uu}(\omega)$

$$W(j\omega) = S_{yu}(\omega) / S_{uu}(\omega). \quad (150)$$

В частном случае для объекта без запаздывания ($t_s = 0$) получим

$$W(j\omega) = S_{yu}(\omega) / S_{uu}(\omega). \quad (151)$$

Обратное преобразование Фурье соотношения (151) определяет весовую функцию объекта без запаздывания

$$K(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{yu}(\omega)}{S_{uu}(\omega)} e^{j\omega t} d\omega. \quad (152)$$

Интеграл (152) вычисляются либо с помощью теории вычетов, либо графоаналитическим способом. Математическая простота соотношений (150) и (151) определяет преимущество этого метода.

Рассмотренный метод допускает обобщение на случай, когда входной и выходной сигналы коррелированы с третьим эргодическим стационарным случайным процессом $e(t)$, которым может быть помеха наблюдения $v(t)$ или случайный сигнал с соседнего канала многомерного объекта. В этом случае решается более общее, чем уравнение (146), интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$R_{ue}(\tau) = \int_0^{\infty} R_{ye}(\tau - \theta) K(\theta) d\theta,$$

где $R_{ue}(\tau)$, $R_{ye}(\tau)$ — соответствующие взаимные корреляционные функции.

Алгебраический метод решения интегрального уравнения (146) аналогичен способу решения интегрального уравнения

$$y(t) = \int_0^t K(t - \tau) u(\tau) d\tau,$$

который заключается в приближенном вычислении функции $K(t)$ по известным сигналам $u(t)$ и $y(t)$ на конечном промежутке наблюдения $0 \leq t \leq T$. Разделим отрезок $[0, T]$ на N частей с шагом Δ , так что $T = N\Delta$. Число N выбирают из условий требуемой точности и устойчивости вычислительной процедуры. Один из возможных способов конечно-разностной аппроксимации функций $u(t)$, $y(t)$ и $K(t)$ состоит в следующем:

$$u(t) \approx u(n\Delta); \quad y(t) \approx y(n\Delta); \quad K(t) \approx K\left(\frac{2n+1}{2}\Delta\right);$$

$$n\Delta < t < (n+1)\Delta; \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Тогда приведенное уравнение примет вид

$$y(n\Delta) = \Delta \sum_{i=0}^{n-1} u(i\Delta) K\left(\frac{2n-1}{2}\Delta - i\Delta\right)$$

или в матричной записи $y(t) = \Delta U K(T)$, где

$$y(T) = \begin{bmatrix} y(\Delta) \\ y(2\Delta) \\ \dots \\ y(N\Delta) \end{bmatrix}, \quad K(T) = \begin{bmatrix} K\left(\frac{\Delta}{2}\right) \\ K\left(\frac{3\Delta}{2}\right) \\ \dots \\ K\left(\frac{2N-1}{2}\Delta\right) \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} u(0) & 0 & \dots & 0 \\ u(\Delta) & u(0) & \dots & 0 \\ u(2\Delta) & u(\Delta) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u[(N-1)\Delta] & u[(N-2)\Delta] & \dots & u(0) \end{bmatrix}.$$

Умножая исходное уравнение слева на обратную матрицу U^{-1} (матрица U невырождена по условию $U(0) \neq 0$), получим решение преобразованного уравнения $K = U^{-1}Y$. Левый треугольный вид матрицы U (а следовательно, и U^{-1}) позволяет записать это решение в рекуррентном виде:

$$K_n = \frac{1}{u(0)} \left[\frac{y(n\Delta)}{\Delta} - \sum_{i=1}^{n-1} K_{n-i} u(i\Delta) \right],$$

где

$$K_n = K\left(\frac{2n-1}{2}\Delta\right); \quad K_1 = \frac{y(\Delta)}{\Delta u(0)}.$$

Пусть входным сигналом $u(t)$ является единичное ступенчатое возмущение. В этом случае $u(i\Delta) = 1$ для всех i приведенный алгоритм существенно упрощается

$$K_n = \frac{y(n\Delta)}{\Delta} - \sum_{i=1}^{n-1} K_{n-i}$$

или

$$K_n = \frac{y(n\Delta)}{\Delta} - H_n; \quad H_n = H_{n-1} + K_{n-1},$$

причем

$$H_n = \sum_{i=1}^{n-1} K_{n-i}.$$

Рассмотренный подход к решению задачи идентификации отличается простотой, позволяет использовать любые входные сигналы, в том числе и реализации, полученные в

режиме нормальной эксплуатации системы. Однако при использовании этого метода для последовательной идентификации возникают трудности, так как по мере увеличения времени наблюдения приходится оперировать с постоянно растущим объемом данных. Кроме того, накапливающиеся ошибки округления значительно снижают точность метода при возрастании n .

Метод подбора на управляющем фильтре. Весовую функцию находим в виде последовательности ординат

$$K(0), K(\Delta), K(2\Delta), \dots, K(N\Delta),$$

разделенных интервалом времени Δ . Интеграл свертки (146) при этом записывается в виде суммы

$$R_{yu}(\tau) = \Delta \sum_{n=0}^N K(n\Delta) R_{uu}(\tau - n\Delta).$$

Отсюда видно, что свертка предполагает выполнение операций над прошедшими величинами входа $R_{uu}(\tau)$, поэтому существенной составляющей комплекса устройств, предназначенных для автоматизированного определения динамических характеристик объектов, является линия задержки управляемого фильтра. Текущие и прошедшие значения входной величины накапливаются в разделенной на участки линии задержки. С каждого участка снимаются сигналы, задержанные на определенную величину, и умножаются на соответствующие ординаты весовой функции $K_n = K(n\Delta)$, которые подбираются оператором на пульте управления и затем суммируются для получения выхода $R_{yu}^{\Phi}(\tau)$

$$R_{yu}^{\Phi}(\tau) = \Delta \sum_{n=0}^N K(n\Delta) R_{uu}(\tau - n\Delta).$$

Подстройка коэффициентов K_n производится так, чтобы результирующий сигнал $e(\tau) = R_{yu}(\tau) - R_{yu}^{\Phi}(\tau)$ стремился к минимуму.

Корреляционная функция стационарного случайного воздействия на входе обычно имеет большой центральный пик и стремится к нулю (или постоянному значению) по обе стороны от $\tau = 0$ (т. е. является четной функцией). Поэтому каждый коэффициент K управляемого фильтра оказывает наибольшее влияние на взаимную корреляционную функцию в соответствующий ему момент времени. Это существенно облегчает задачу вывода ошибки на минимум.

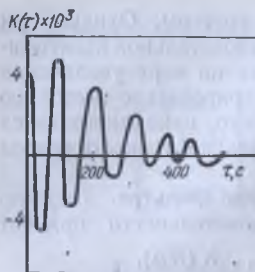


Рис. 56. Весовая импульсная функция.

Метод момента весьма эффективен при решении интегрального уравнения (146) и широко применяется на практике. Сфера применения метода моментов не ограничивается решением уравнений типа (146), поэтому целесообразно рассмотреть его отдельно, выделив как самостоятельный метод идентификации динамических систем.

Пример. В результате статистической обработки реализации входного и выходного сигналов стационарного объекта построены графически нормированная автокорреляционная функция входного сигнала $R_{uu}^n(\tau)$ и нормированная взаимокорреляционная функция выходного сигнала относительно входного $R_{yu}^n(\tau)$, а также определены среднеквадратические отклонения сигналов на входе и выходе системы $\sigma_x = 0,33$ и $\sigma_y = 0,005$. Графики функций $R_{uu}^n(\tau)$, $R_{yy}^n(\tau)$ и $R_{yu}^n(\tau)$ приведены на рис. 57—59.

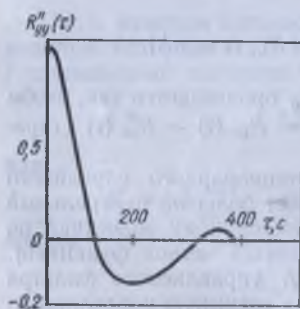


Рис. 57. Нормированная автокорреляционная функция входного сигнала.

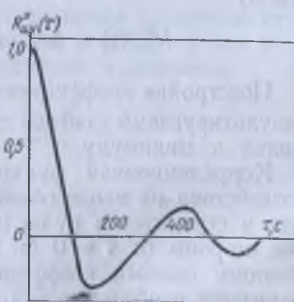


Рис. 58. Нормированная автокорреляционная функция выходного сигнала.

Настройка фильтра особенно эффективна, если на вход объекта поступает тестовый сигнал, близкий к «белому шуму», для которого корреляционная функция $R_{uu}(\tau)$ представляет собой δ -функцию, а искомая весовая функция почти совпадает с взаимокорреляционной. Поэтому каждый коэффициент управляемого фильтра в этом случае воздействует только на одну ординату величина, что немедленно отражается в сравнивающем устройстве.

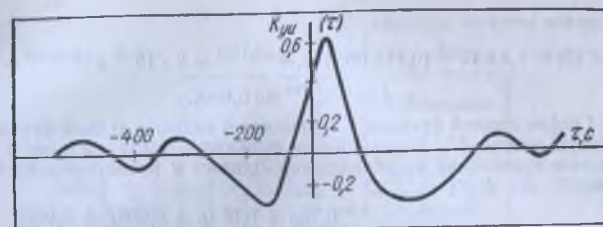


Рис. 59. График взаимокорреляционной функции входного и выходного сигналов.

По виду функции $R_{uu}^n(\tau)$ и $R_{yu}^n(\tau)$ подбираем соответствующие аппроксимирующие выражения

$$R_{uu}^n(\tau) = e^{-0,008\tau} \cos \frac{\pi\tau}{200};$$

$$R_{yu}^n(\tau) = \begin{cases} 0,45e^{-0,056\tau} \left(\cos \frac{\pi\tau}{200} + 1,376 \sin \frac{\pi\tau}{200} \right) & (\tau \geq 0); \\ 0,45e^{-0,008\tau} \left(\cos \frac{\pi\tau}{200} + 1,376 \sin \frac{\pi\tau}{200} \right) & (\tau \leq 0). \end{cases}$$

На основании формул связи между нормированными и размерными корреляционными функциями

$$R_{uu}^n(\tau) = \frac{R_{uu}(\tau)}{\sigma_u^2}; \quad R_{yu}^n(\tau) = \frac{R_{yu}(\tau)}{\sigma_u \sigma_y}$$

запишем соответствующие приближенные аналитические выражения для размерных корреляционных функций

$$R_{uu}(\tau) = 0,109e^{-0,008\tau} \cos \frac{\pi\tau}{200};$$

$$R_{yu}(\tau) = \begin{cases} 0,74 \cdot 10^{-3}e^{-0,056\tau} \left(\cos \frac{\pi\tau}{200} + 1,376 \sin \frac{\pi\tau}{200} \right) & (\tau \geq 0); \\ 0,74 \cdot 10^{-3}e^{-0,008\tau} \left(\cos \frac{\pi\tau}{200} + 1,376 \sin \frac{\pi\tau}{200} \right) & (\tau \leq 0). \end{cases}$$

Основное интегральное уравнение (147) для определения импульсной функции объекта $K(\tau)$ принимает вид

$$0,74 \cdot 10^{-3}e^{-0,0056\tau} \left(\cos \frac{\pi\tau}{200} + 1,376 \sin \frac{\pi\tau}{200} \right) = \\ = 0,109 \int_0^\infty K'(\theta) e^{-0,08(\tau-\theta)} \cos \frac{\pi(\tau-\theta)}{200} d\theta,$$

решением которого является

$$K(\theta) = 8,5 \cdot 10^{-3} [0,748(\theta) + 0,7e^{-0,176\theta} - 2 \cdot 10^{-6} e^{-0,0056\theta} - 1,3e^{-0,0056\theta} \sin 0,050].$$

График весовой функции $K(\tau)$ (вместо Θ вводится τ) без δ -функции приведен на рис. 57. Передаточную функцию объекта получаем в результате применения преобразования Лапласа к аналитическому выражению для $K(\tau)$

$$W(p) = [K(\tau)] = 8,5 \cdot 10^{-3} \frac{0,74p + 0,04(p + 0,008)^2 + 0,0026}{p + 0,0176(p + 0,0056)^2 + 0,0026}.$$

Располагая информацией о весовой функции $K(\tau)$, можно вычислить оценку сигнала на выходе системы $\hat{y}(t)$ по известному входному сигналу $u(t)$ на основании интеграла свертки

$$\hat{y}(t) = \int_0^t K(\tau) u(t - \tau) d\tau.$$

Если норма разности между истинными значениями $y(t)$ и его оценкой $\hat{y}(t)$ велика (т. е. точность приближения неудовлетворительна), то задачу идентификации следует решать с учетом нелинейности объекта, осуществляя поиски оператора объекта в классе нелинейных операторов.

Для определения динамических характеристик статистическими методами необходимо решить в заданной последовательности следующие задачи:

уяснить, сформулировать и записать исходные данные для определения динамической характеристики пассивными методами;

изучить метод определения динамической характеристики, основанный на преобразовании Фурье;

составить алгоритм программы вычисления передаточной функции объекта на ЭВМ;

вычислить весовую функцию объекта и построить ее график;

определить численные значения передаточной функции объекта.

Методом статистического моделирования получим оценку выходных характеристик некоторого стохастического объекта управления, функционирование которого описывается соотношениями: $x = 1 - e^{-\lambda u}$ — входное воздействие, $v = 1 - e^{-\varphi}$ — воздействие внешней среды, где λ и φ — случайные величины, для которых известны их функции распределения. Целью моделирования является

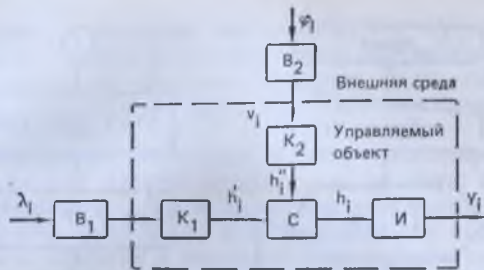


Рис. 60. Структурная схема управляемого объекта.

оценка математического ожидания $M(y)$ величины y , зависимость которой от входного воздействия x и воздействия внешней среды v имеет вид $y = \sqrt{x^2 - v^2}$.

В качестве оценки математического ожидания $M(y)$, как следует из основных теорем теории вероятностей, принимают среднее арифметическое

$$\bar{y} = (1/N) \sum_{i=1}^N y_i,$$

где y_i — случайное значение величины y ; N — число реализаций, необходимое для статистической устойчивости результатов.

Структурная схема объекта управления показана на рис. 60. Элементы схемы выполняют следующие операции: вычисление $B_1: x_i = 1 - e^{-\lambda_i}$ и $B_2: v_i = 1 - e^{-\varphi_i}$; возведение в квадрат $K_1: h_i^1 = (1 - e^{-\lambda_i})^2$ и $K_2: h_i = (1 - e^{-\varphi_i})^2$; суммирование $c: h_i = (1 - e^{-\lambda_i})^2 + (1 - e^{-\varphi_i})^2$;

извлечение корня квадратного $H: y_t = \sqrt{(1 - e^{-\lambda_t})^2 +$
 $+ (1 - e^{-\varphi_t})^2}$.

Схема алгоритма, реализующего метод статистического моделирования для оценки $M(y)$ объекта управления, приведена на рис. 61. Здесь LA и FI — функции распределения случайных величин λ и φ ; N — заданное число реализаций; $I = i$ — номер текущей реализации $LA|I \equiv$

$$\equiv \lambda_i; FII = \varphi_i; EXP = e; MY = M[y]; SY = \sum_{i=1}^N y_i - \text{суммирующая ячейка}; \text{ВИД} [...], \text{ГЕН} [...], \text{ВРМ} [...] - \text{процедуры ввода исходных данных, генерации псевдослучайных последовательностей и выдачи результатов моделирования}$$

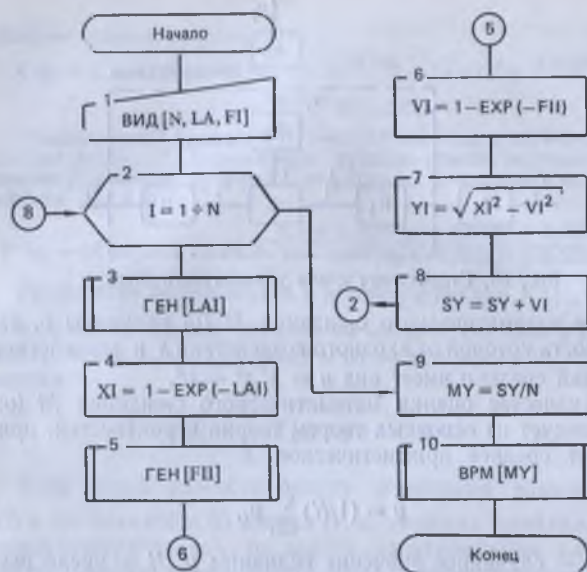


Рис. 61. Структурная схема алгоритма моделирования управляемого объекта.

соответственно. Эта модель позволяет получить на ЭВМ статистическую оценку математического ожидания выходной характеристики $M(y)$ объекта управления.

Глава 7

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

§ 1. Механические процессы как объекты моделирования

Механические процессы измельчения, резания, сепарирования (разделения), дозирования, смешения, перемешивания, гранулирования (брикетирования) широко применяются в пищевой промышленности, особенно в спиртовой, пивоваренной, крахмало-паточной, мукомольной, крупяной, свеклосахарной, кондитерской и других отраслях.

Процессы измельчения используют в тех случаях, когда необходимо уменьшить размеры частиц сыпучего материала без придания им определенной формы. Если необходимо придать определенную форму измельченным частицам, применяют резание.

Сепарирование (разделение, классификацию) применяют для разделения сыпучих материалов на фракции, отличающихся размерами, формой, скоростью осаждения в жидкой или газовой среде и пр. Для сепарирования используют машины и аппараты в зависимости от признака или свойства, по которому разделяют сыпучий материал.

При дозировании и смешении различных жидких пастообразных и сыпучих компонентов образуются смеси с определенными качественными показателями для переработки их в готовый продукт. Примерами могут быть смешение муки, воды, соли, дрожжей и прочих компонентов для приготовления хлебобулочных изделий на хлебозаводах, смешение компонентов для производства кондитерских изделий, мороженого и т. д.

Цель смешения — это также получение партии продукта по какому-то заданному качественному показателю сырья или готового продукта. Примерами могут быть составление партии сырья одинаковой влажности, формирование сорта продукта с одинаковыми показателями качества. Составление партии сырья или формирование сорта продукта производят на основании математических моделей смешения. Точность состава обеспечивается с помощью технологической операции дозирования.

Однородности характеристик партии либо сорта продукта достигают тщательным перемешиванием в специальных смесителях. Иногда достаточная однородность продукта обеспечивается транспортной или технологической операцией (перемещение сыпучей смеси шнеками, замес теста).

Процессы перемешивания широко используются в пищевой промышленности для образования однородных продуктов с определенными свойствами, а также для интенсификации технологических процессов. Свойства продуктов определяются условиями проведения последующих операций либо качеством сырья промежуточного или готового продукта.

Перемешивание осуществляют разными способами в различных аппаратах с мешалками, а также в газовых и жидкостных потоках. Эффективность перемешивания оценивают степенью полученной однородности в объеме аппарата

через определенное время перемешивания или временем перемешивания, необходимым для получения заданной однородности.

Если перемешивание применяют для интенсификации технологических процессов, его эффективность определяют степенью интенсификации процесса, например увеличением коэффициентов тепло- и массопередачи, растворения и т. п. Процесс перемешивания и его качество оценивают моделями, основанными на различных представлениях о природе рассматриваемого процесса.

Процессы формообразования (гранулирование, прессование, таблетирование и пр.) сложны по структуре, так как им предшествуют другие подготовительные технологические операции, определяющие формообразование. В связи с этим к составлению моделей этих процессов следует применять принципы системного подхода.

Механические процессы различны по природе и назначению, поэтому их представляют различными математическими моделями. Особенность моделирования механических процессов состоит в том, что природа протекаемых явлений не описана, т. е. существующие теории этих процессов не позволяют дать им количественную оценку. Например, существующие теории измельчения не могут быть использованы для их количественного описания. В связи с этим в основу математических моделей механических процессов положены экспериментальные данные, уравнение баланса и вероятностные характеристики.

Рассмотрим возможности каждого метода применительно к различным механическим процессам.

§ 2. Математическое моделирование процессов дозирования и смешивания

Смешивание производят при приеме и размещении сырья на складах с целью формирования партий сырья, соответствующих какому-либо признаку, определяемому требованиями условий хранения либо переработки.

Если при смешивании требуется получить конечный продукт с определенными свойствами, то сначала проводят операцию дозирования исходных составных компонентов. После смешивания компонентов операцию перемешивания можно совместить с операциями транспортирования или перемешивать компоненты в специальных аппаратах-смесителях. Смесители широко применяют при производстве

Таблица 19. Продукты для составления рецепта мороженого

Продукт	Массовая доля, %			Оптовая цена 1 кг продукта, р
	жира	СОМО	сахара	
Молоко				
натуральное	3,2	9	—	0,242
сухое обезжиренное	—	93	—	0,88
Сливки сухие	42	51	—	2,354
Сахар	—	—	100	0,70
Ванилин	—	—	—	82,00
Агар	—	—	—	3,00
Вода	—	—	—	0,001

хлебобулочных и кондитерских изделий, комбикормов и других продуктов. Если компоненты перемешивают в процессе транспортирования и при последующих технологических операциях, то специальные устройства для перемешивания не применяют.

Дозирование осуществляют различными типами дозаторов (весовыми, объемными и пр.) в зависимости от необходимой точности. Кроме специальных дозаторов дозирование производят при различных степенях открытия (перекрытия) выпускных устройств под технологическими емкостями. При составлении оптимальной рецептуры задачу оптимизации процессов дозирования и смешивания обычно приводят в каноническую форму задачи линейного программирования, которая сформулирована ранее.

Для последовательного изложения методики составления рецептуры рассмотрим определение оптимальной рецептуры мороженого в наиболее простом случае графическим методом, а в усложненном — аналитически вручную и в наиболее сложном — с помощью ЭВМ.

Для иллюстрации графического способа решим следующую задачу: составить рецептуру 100 кг молочного мороженого, содержащего 3,5 жира, 10 СОМО, 17,5 % сахара. Набор исходных продуктов и их состав приведены в табл. 19.

Смесь должна содержать 3 % сухого обезжиренного молока, не более 4,5 сухих сливок, не более 75,28 % натурального молока. Обозначив количество сухих сливок в смеси через x_1 , натурального молока — x_2 , сухого обезжиренного молока — x_3 , сахара — x_4 , запишем целевую функцию и ограничения

$$R_{\min} = 2,354x_1 + 0,242x_2 + 0,88x_3 + 0,7x_4;$$

жир $0,42x_1 + 0,032x_2 + 0 + 0 = 3,5$;
 СОМО $0,51x_1 + 0,09x_2 + 0,93x_3 + 0 = 10$;
 сахар $x_4 = 17,5$;
 молоко сухое обезжиренное $x_3 = 3$;
 сливки сухие $x_1 \leq 4,5$;
 молоко натуральное $x_2 = 75,185$;
 $x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$.

Учитывая, что переменные x_3 и x_4 определены, задачу можно упростить. СОМО, набранный в смеси с сухим обезжиренным молоком, равен $0,93 \cdot 3 = 2,79$ кг. Для набора с сухими сливками и натуральным молоком необходимо $10 - 2,79 = 7,21$ кг СОМО. Тогда приведенные уравнения будут иметь вид

$$\begin{aligned} 0,42x_1 + 0,032x_2 &= 3,5; \\ 0,51x_1 + 0,09x_2 &= 7,21; \\ x_1 &\leq 4,5; \quad x_2 \leq 75,285; \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2); \\ R &= 2,354x_1 + 0,242x_2 \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Поскольку система уравнений содержит две независимые переменные, то задачу можно рассчитать графически, обозначив абсциссу x_2 , ординату — x_1 (рис. 62). Найдем точки пересечения уравнения для жира и СОМО с осями координат.

В уравнении жира при $x_2 = 0$, $x_1 = 3,5/0,42 = 8,33$; при $x_1 = 0$, $x_2 = 3,5/0,032 = 109,375$.

В уравнении для СОМО при $x_2 = 0$, $x_1 = 7,21/0,51 = 14,14$; при $x_1 = 0$, $x_2 = 7,21/0,09 = 80,11$.

Значения неизвестных в уравнениях жира, СОМО и дополнительных ограничений откладываем на графике. Границы допустимых решений системы заштрихованы. Для установления оптимального решения необходимо найти пересечение линии целевой функции с линией допустимых решений.

Если в уравнении целевой функции $R = 2,354x_1 + 0,242x_2 \rightarrow \min$, $x_1 = x_2 = 0$, то $R = 2,354x_1 + 0,242x_2 = 0$.

Произвольно приняв $R = 2,42$ р., получим при $x_1 = 0$, $x_2 = 2,42/0,242 = 10$; при $x_2 = 0$, $x_1 = 2,42/2,354 = 1,028$.

Откладываем на графике значения неизвестной линейной функции и получим линию, которая не доходит до линии допустимых решений. Следовательно, для составления

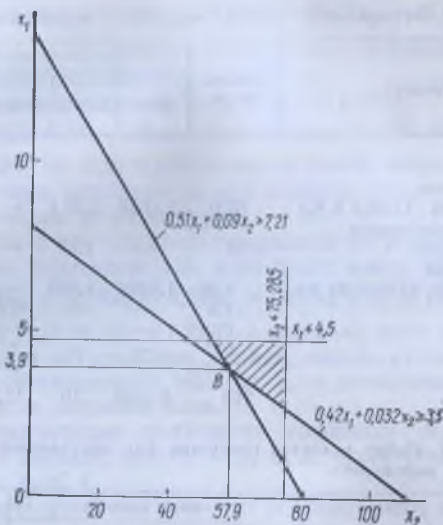


Рис. 62. Графическая интерпретация решения задачи оптимального состава мороженого.

смеси 2,42 р. недостаточно. Увеличивая $R(x)$, получим линии, параллельные первоначальной. В точке пересечения перемещаемой линии с вершиной B области допустимых решений находится оптимальное значение R . Опустив перпендикуляр из точки B на ось x_2 , получим $x_{2\text{опт}} = 57,9$, а на ось x_1 — $x_{1\text{опт}} = 3,9$. Рецепт оптимального состава молочного мороженого (необходимое количество продуктов для производства 100 кг мороженого) приведена в табл. 20.

Аналитический способ решения задачи составления оптимальной рецептуры рассмотрим также на конкретном примере. Составить 100 кг смеси сливочного мороженого, в составе которого должно быть жира и СОМО по 10 %, сахара — 16 %. Ограничениями являются максимально допустимые нормы введения продуктов, %: сухого цельного молока — не более 3; молока сухого обезжиренного — не более 4. Набор и состав используемых продуктов приведены в табл. 21.

Необходимо рассчитать рецептуру смеси мороженого, удовлетворяющую требованиям стандартов и дополни-

Таблица 20. Оптимальный состав молочного мороженого

Продукт	Количество, кг	Массовая доля, кг			Стоимость продукта, р
		жира	СОМО	сахара	
Молоко натуральное (жир 3,2 %, СОМО 5 %)	57,9	1,8528	5,211	—	14,011
сухое обезжиренное (СОМО 0,93)	3	—	2,79	—	2,64
Сливки сухие (жир 42 %, СОМО 51 %)	3,92	1,6464	1,999	—	9,227
Сахар	17,5	—	—	17,5	12,25
Ванилин	0,015	—	—	—	1,23
Агар	0,2	—	—	—	0,6
Вода	17,365	—	—	—	—
Итого	100	3,4992	10	17,5	39,958

Таблица 21. Набор и состав продуктов для составления рецепта сливочного мороженого

Продукт	Массовая доля, %			Оптовая цена продукта, р
	жира	СОМО	сахара	
Молоко натуральное	3,2	9	—	0,242
сухое цельное	26	68	—	1,45
сухое обезжиренное	—	93	—	0,88
Масло сливочное	83	1	—	3,3
Сахар	—	—	100	0,7
Вода	—	—	—	—
Агар	—	—	—	3
Ванилин	—	—	—	82

тельным ограничениям при минимальной себестоимости. Обозначим количество вводимого в смесь молока натурального x_1 , масла сливочного — x_2 , молока сухого цельного x_3 , молока сухого обезжиренного — x_4 .

Как видно из табл. 20, обеспечить в составе мороженого 10 % жира можно использованием сливочного масла, натурального и сухого цельного молока, т. е. получить уравнение для определения жира:

$$0,032x_1 + 0,83x_2 + 0,26x_3 = 10.$$

10 % СОМО можно обеспечить вводом сливочного масла, натурального, сухого цельного или обезжирен-

ного молока, т. е. получить уравнение для СОМО

$$0,09x_1 + 0,01x_2 + 0,68x_3 + 0,93x_4 = 10.$$

Поскольку сахар содержится только в водном продукте, то уравнение можно не составлять.

Масса воды, содержащейся в смеси, равна

$$100 - 20 - 16 - 0,2 - 0,015 = 63,785 \text{ кг},$$

где 100, 20, 10, 0,2, 0,015 — масса смеси, жира и СОМО, сахара, агара, ванилина (агар и ванилин входят в мороженое независимо от рецептуры).

В связи с тем что вода содержится во всех молочных продуктах, уравнение для воды будет иметь вид

$$0,878x_1 + 0,16x_2 + 0,06x_3 + 0,07x_4 + x_5 = 63,785,$$

где 0,878; 0,16; 0,06; 0,07; 1 — массовая доля воды соответственно в натуральном молоке, масле, сухом цельном и сухом обезжиренном молоке; x_5 — дополнительно вводится чистая питьевая вода.

Дополнительные требования выразятся неравенствами: сухое цельное молоко — $x_3 \leq 3$; сухое обезжиренное молоко — $x_4 \leq 4$.

Целевую функцию для составления смеси минимальной себестоимости запишем следующим образом:

$$R = 0,242x_1 + 3,3x_2 + 1,45x_3 + 0,88x_4 + 0,0001x_5 \rightarrow \min.$$

Себестоимость воды принята 0,0001 р. и записана в целевую функцию для того, чтобы предусмотреть случай, когда для производства мороженого применяются порошкообразные молочные продукты. Если же в качестве исходного сырья используют сгущенное или натуральное молоко, то воду в смесь не добавляют.

Объединив все эти уравнения в систему, сформулируем задачу поиска минимума функции

$$R = 0,242x_1 + 3,3x_2 + 1,45x_3 + 0,88x_4 + 0,0001x_5 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$0,878x_1 + 0,16x_2 + 0,06x_3 + 0,07x_4 + x_5 = 63,785;$$

$$0,032x_1 + 0,83x_2 + 0,28x_3 + 0 + 0 = 10;$$

$$0,09x_1 + 0,01x_2 + 0,66x_3 + 0,93x_4 + 0 = 10;$$

$$x_3 + 0 \leq 3;$$

$$x_4 + 0 \leq 4;$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5).$$

После введения в уравнения дополнительных и искусственных переменных задача линейного программирования будет иметь вид

$$R = 0,242x_1 + 3,3x_2 + 1,45x_3 + 0,88x_4 +$$

$$+ 0,0001x_5 + 0x_6 + 0x_7 + Mx_8 + Mx_9;$$

$$0,878x_1 + 0,16x_2 + 0,06x_3 + 0,07x_4 + x_5 = 63,785;$$

$$x_3 + x_4 = 3;$$

$$x_4 + x_7 = 4;$$

$$0,032x_1 + 0,83x_2 + 0,26x_3 + x_4 = 10;$$

$$0,09x_1 + 0,01x_2 + 0,68x_3 + 0,93x_4 + x_9 = 10;$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, 9).$$

Решение системы уравнений приведено в симплексных табл. 22—26. В верхней строке симплексной таблицы записывают коэффициенты при неизвестных переменных в целевой функции R . В следующей строке обозначают переменные, под которыми записывают коэффициенты при неизвестных в уравнениях, образующих основные матрицы. Столбец x_0 заполняют свободными членами уравнений. В базисный столбец, обозначенный буквой B , вносят обозначения векторов, образующих единичную матрицу, со-

Таблица 22. Исходная таблица (матрица) решений

[illegible]

Таблица 23. Преобразованная таблица (матрица) решений

Номер строки i	c_i	b	x_0	0,24	3,3	1,45	0,88	0,0001	0	0	M	M	θ
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
6	0,0001	x_5	63,605	0,878	0,16	0	0,07	1	-0,06	0	0	0	908,6429
7	1,45	x_5	3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	—
8	0	x_7	4	0	0	0	1	0	0	1	0	0	4
9	M	x_8	9,22	0,032	0,83	0	0	0	-0,26	0	1	0	—
10	M	x_9	7,96	0,09	0,01	0	0,93	0	-0,68	0	0	1	8,5591
R				17,18M	0,122M	0,84M	0	0,93M	0	-0,94M	0	0	0
				+4,366	-0,242	-3,3		-0,86		+1,45			

Таблица 24. Таблица второго преобразования

c_i	b	x_0	0,24	3,3	1,45	0,88	0,0001	0	0	M	M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
0,0001	x_5	63,325	0,878	0,16	0	0	1	-0,06	-0,07	0	0	395,7812
1,45	x_3	3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	—
0,88	x_4	4	0	0	0	1	0	0	1	0	0	—
M	x_8	9,22	0,032	0,83	0	0	0	-0,26	0	1	0	11,1084
M	x_9	4,24	0,09	0,01	0	0	0	-0,68	-0,93	0	0	424
R			13,46M	0,122M	0,84M	0	0	0	-0,94M	-0,93M	0	0
			+7,876	-0,242	-3,3			+1,45	+0,88			

Таблица 25. Таблица третьего преобразования

c_i	b	x_0	0,242	3,3	1,45	0,88	0,0001	0	0	M	M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
0,0001	x_5	61,5477	0,8718	0	0	0	1	-0,0099	-0,07	-0,1928	0	70,5984
1,45	x_3	3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	—
0,88	x_4	4	0	0	0	1	0	0	1	0	0	—
3,3	x_2	11,10843	0,0386	1	0	0	0	-0,3133	0	-0,2048	0	287,8
M	x_9	4,1289	0,0896	0	0	0	0	-0,677	-0,93	-0,0120	1	46,0815
R			4,1289M	0,0896M	0	0	0	-0,6769M	-0,93M	-1,012M	0	
			+44,5339	0,1274				+0,4161	+0,88	+3,9758		

Таблица 26. Таблица оптимальных решений

c_i	B	x_0	0,242	3,3	1,45	0,88	0,0001	0	0	M	M	θ
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
0,0001	x_5	21,3638	0	0	0	0	1	6,5762	8,9788	-0,0761	-9,7299	
1,45	x_3	3	0	0	1	0	0	1	0	0	0	
0,88	x_4	4	0	0	0	1	0	0	1	0	0	
3,3	x_2	9,3297	0	1	0	0	0	-0,0217	0,2102	1,2102	-0,4308	
0,242	x_1	46,0815	1	0	0	0	0	-7,5547	-10,3794	0,1399	11,1607	
R			49,8118	0	0	0	0	-0,4497	-0,3089	-M	-M	
										+3,9612	+1,2782	

храня их последовательность, но с вертикальным расположением обозначений.

Совокупность столбцов, образующих единичную матрицу, называют единичным, или координатным, базисом. За начальный опорный план решения системы уравнений принят вектор

$$\bar{x} = (x_5, x_6, x_7, x_8, x_9) = 63, 785, 3, 4, 10, 10.$$

В столбце c_i в одной строке с базисной переменной записывают соответствующие этой неизвестной коэффициенты целевой функции. Свободными должны остаться столбец θ и строка R .

Вычислительные операции по симплексному методу начинаются с расчета величин целевой строки R по следующему правилу: величина R для x_i столбца равна разности между скалярным произведением этого столбца матрицы на вектор-столбец c_i и коэффициентом линейного функционала x_i -го столбца $R = (x_i, c_i)$.

Маргинальные граничные значения для столбца x_i вычисляются по формуле

$$v_i = (x_i c) - c.$$

Тогда

$$R = 0,0001 \cdot 63,785 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 4 + 10M + 10M = 20M + 0,06.$$

Маргинальные значения для столбца x_1

$$v_1 = 0,0001 \cdot 0,878 + 0,032M + 0,09M - 0,242 = 0,122M - 0,242,$$

а для столбца x_2

$$v_2 = 0,0001 \cdot 0,16 + 0,83M + 0,01M - 3,3 = 0,84M - 3,3$$

и т. д.

Столбец, имеющий наименьшее (наибольшее абсолютное) число, называют ключевым, он выделен в табл. 21 жирными линиями.

Значение столбца θ находят делением элемента строки i ($i = 1, 2, \dots, 5$) и столбца x_0 на элементы строки ключевого столбца. В ключевом столбце берут элементы только больше нуля. Для соответствующих строк

$$\theta_1 = 63,785/0,06 = 1063; \quad \theta_2 = 3/1 = 3;$$

$$\theta_4 = 10/0,26 = 38,46; \quad \theta_5 = 10/0,68 = 14,7.$$

Строку, имеющую наименьшее θ_i , называют ключевой ($i = 2$); $\min(\theta_1; \theta_2; \theta_4; \theta_5) = \min(1063; 3; 38; 46; 14,7) = 3$.

Элемент, находящийся на пересечении ключевого столбца и ключевой строки, называют главным. Для табл. 21 таким элементом является вторая строка, имеющая $\theta = 3$. Ключевая строка и столбцы в табл. 21—25 выделены жирными линиями.

Преобразование элементов табл. 21 начинают с ключевой (второй) строки, для чего все элементы (за исключением элемента столбца c_i и θ_i) делят на главный элемент и полученные частные записывают в строку табл. 22 с номером $i = 7$

$$x_{20} = 3/1 = 3; \quad x_{23} = 1/1 = 1; \quad x_{26} = 1/1 = 1;$$

$$x_{21} = 0/1 = 0; \quad x_{24} = 0/1 = 0; \quad x_{27} = 0/1 = 0;$$

$$x_{22} = 0/1 = 0; \quad x_{25} = 0/1 = 0; \quad x_{28} = 0/1 = 0;$$

$$x_{29} = 0/1 = 0.$$

Строки 6, 8, 9, 10 преобразуют по следующему правилу:

$$\begin{array}{l} \text{Вычисленное} \\ \text{значение} \\ \text{элемента} \end{array} = \begin{array}{l} \text{Исходное} \\ \text{значение} \\ \text{элемента} \end{array} -$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Ключевой} \\ \text{элемент} \\ \text{преобразуемой} \\ \text{строки} \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \text{Элемент} \\ \text{преобразован-} \\ \text{ной ключевой} \\ \text{строки} \end{array} \right).$$

Ключевой элемент преобразуемой строки лежит на пересечении преобразуемой строки и ключевого столбца табл. 21. В данном случае в преобразуемой строке 1 табл. 21 этот элемент равен 0,06. Элемент преобразованной ключевой строки находится в новой табл. 22 в том же столбце x_i , для которого определяют элемент. Например, для столбца x_0 таким элементом будет число 3.

По приведенному выше правилу вычисляют значения элементов первой строки табл. 22

$$x_{10} = 33,785 - 0,06 \cdot 3 = 63,605;$$

$$x_{11} = 0,878 - 0,06 \cdot 0 = 0,878;$$

$$x_{12} = 0,16 - 0,06 \cdot 0 = 0,16;$$

$$x_{13} = 0,06 - 0,06 \cdot 1 = 0;$$

$$x_{14} = 0,07 - 0,06 \cdot 0 = 0,7;$$

$$\begin{aligned}x_{15} &= 1 - 0,06 \cdot 0 = 1; \\x_{16} &= 0 - 0,06 \cdot 1 = -0,06; \\x_{17} &= 0 - 0,06 \cdot 0 = 0; \\x_{18} &= 0 - 0,06 \cdot 0 = 0; \\x_{19} &= 0 - 0,06 \cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Аналогично заполняют остальные строки табл. 22 и вычисляют значение строки 6 в табл. 23, т. е. значение R и значение v_i , а затем выбирают ключевой столбец и ключевую строку. На этом вторая итерация заканчивается. После этого начинают заполнять табл. 24 (третья итерация) и т. д., при переходе к которой могут встретиться следующие случаи:

1. v_i — положительные числа, хотя бы над одним из которых имеются положительные элементы. В этом случае программа (положительный план) требует улучшения.

2. v_i — положительные числа, над которыми все элементы отрицательны либо нули. Минимальные значения функции находятся в бесконечности (задача не решается).

3. Среди чисел v_i нет положительных, а искусственные переменные не выведены из базиса. Система неравенства противоречива.

4. Строка v_i не имеет положительных чисел и все искусственные переменные выведены из базиса, минимум функции достигнут.

Поскольку строка v_i в симплексной табл. 25 не имеет значений больше нуля, все искусственные переменные выведены из базиса, следовательно, получен оптимальный вариант. Ответ читают в столбце Б (базис), показывающем переменные, вошедшие в оптимальный план. В столбце x_0 находятся оптимальные значения базисных переменных. Переменные, не вошедшие в оптимальный план, равны нулю.

Из базисного столбца табл. 25 получим оптимальный план решения задачи

$$\bar{x}' = (x_1; x_2; x_3; x_4; x_5; 0; 0; 0; 0).$$

Значения оптимального плана можно взять из столбца x_0 $x' = (46,0815; 9,3297; 3; 4; 21,3638; 0; 0; 0; 0)$, т. е. для составления 100 кг сливочного мороженого при себестоимости 49,813 р. требуется 46,0815 кг натурального молока, 9,3297 кг масла, 3 кг сухого цельного и 4 кг сухого обезжиренного молока, 21,3638 кг воды.

Подставляя в систему симплексных уравнений найденные неизвестные, проверяют задачу

$$\begin{aligned}0,878 \cdot 46,0815 + 0,16 \cdot 9,3297 + 0,6 \cdot 3 + 0,07 \cdot 4 + \\+ 1 \cdot 21,3638 &= 63,785; \\0,032 \cdot 46,0815 + 0,83 \cdot 9,3297 + 0,26 \cdot 3 + 0 &= 9,9982; \\0,09 \cdot 46,0815 + 0,01 \cdot 9,3297 + 0,68 \cdot 3 + 0,93 \cdot 4 + 0 &= \\&= 10,00062; \\3 + 0 &= 3; \\4 + 0 &= 4.\end{aligned}$$

Нули в уравнениях указывают на введенные в систему дополнительные и искусственные переменные. При проверке уравнений строгие равенства левых и правых частей не получены. Небольшие погрешности являются результатом округлений в процессе вычислений симплексных таблиц. Полученный рецепт и результаты проверки помещены в табл. 27.

В смеси 16 кг сахара, а его себестоимость составляет $16 \cdot 0,7 = 11,2$ р. Для получения 100 кг сливочного мороженого в смесь обязательно добавляют 0,2 кг агара и 0,015 кг ванилина, себестоимость которых в смеси составит соответственно $0,2 \cdot 3 = 0,6$ р. и $0,01582 = 1,23$ р. Общая себестоимость 100 кг смеси сливочного мороженого равна 628,42 р.

По калькуляции себестоимости 1 т сливочного мороженого равна 643,88 р., поэтому резерв снижения себестоимости за счет оптимального использования сырья в смеси составляет $643,88 - 628,42 = 15,46$ р.

Таблица 27. Оптимальный состав сливочного мороженого, кг

Продукт	Количество	Массовая доля, %	
		жира	СОМО
Молоко			
натуральное	46,0815	1,4746	4,14733
сухое цельное	3	0,78	2,04
сухое обезжиренное	4	—	3,72
Масло сливочное	9,3297	7,7436	0,09329
Сахар	16	—	—
Вода	21,3638	—	—
Агар	0,2	—	—
Ванилин	0,015	—	—
Итого	100	9,9982	10,00062

Себестоимость сливочного мороженого можно снизить путем рационального использования сырья при неизменных оптовых ценах на исходные продукты для составления смеси только сухого цельного и сухого обезжиренного молока.

Двойственные оценки для основных неизвестных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 равны нулю, так как эти переменные вошли в базис. Отрицательная переменная двойственной оценки 0,4491 для дополнительной переменной x_6 (см. табл. 25, нижнюю строку) показывает, что ввод в смесь сливочного мороженого 1 кг сухого молока снижает себестоимость смеси на 0,4491 р. Отрицательная двойственная оценка для дополнительной неизвестной x_7 означает, что от ввода в смесь 1 кг сухого обезжиренного молока себестоимость смеси снизилась на 0,3089 р.

Положительная числовая часть двойственной оценки для столбца x_8 показывает, что стоимость одной жироединицы в смеси равна 3,9612 р., причем жир вводится со сливочным маслом и натуральным молоком. С помощью тех же компонентов молочных продуктов вводят и СОМО. При этом стоимость одной единицы СОМО равна 1,2782 р., что и показывает числовая часть двойственной оценки для столбца x_9 .

Учитывая, что рецепт смеси сливочного мороженого состоит из четырех молочных продуктов (натурального молока, сливочного масла, сухого цельного и обезжиренного молока), определяют себестоимость смеси с помощью двойственных оценок. Для этого умножают двойственные оценки на соответствующие значения правых частей симплексных уравнений и складывают полученные произведения, учитывая знаки $3,9612 \cdot 10 + 1,2782 \cdot 10 - 0,4491 \cdot 3 - 0,3089 \cdot 4 = 9,8111$ р.

Небольшая погрешность в определении значения R с помощью двойственных оценок равна 0,0007 (49,8118 — 49,8111) и является следствием округлений при вычислении элементов симплексных таблиц. Если уменьшить содержание в смеси сухого обезжиренного молока на 1 кг, то снизившееся содержание 0,93 кг СОМО восполняют вводом натурального молока, так как СОМО ввести в смесь сухого молока невозможно по условию задачи. Для СОМО следует взять 10,333 кг ($0,93 : 0,9$) натурального молока стоимостью 2,5006 р. ($10,33 \cdot 0,242$). Во вводимом молоке содержится 0,330 кг жира. Жир, введенный в смесь с натуральным молоком, требует уменьшения на 0,3975 кг ($0,330 : 0,83$) сливочного масла, стоимость которого 1,3117 р. ($3,3 \cdot 0,3975$). При этом себестоимость смеси уменьшается за счет сниже-

Таблица 28. Состав сырья для мороженого

Продукт	Массовая доля, %			Оптовая цена 1 кг, р.
	жира	СОМО	сахара	
Молоко натуральное	3,2	8	—	0,242
сухое обезжиренное	26	68	—	1,45
сгущенное с сахаром	8,5	20	42	1,148
сгущенное обезжиренное с сахаром	—	26	42	0,887
Масло сливочное	83	1	—	3,360
Сливки	—	—	—	—
сухие	42	51	—	2,354
натуральные	20	7,2	—	1,28
Сахар	35	7	—	1,87
	—	—	100	0,7

ния в рецепте удельного веса сухого обезжиренного молока ($2,5006 - 0,88 - 1,3117 - 0,3089$ р.).

Проверку вычислений двойственной оценки столбца x_8 проводят аналогично.

Если в симплексной таблице имеются отрицательные двойственные оценки для основных неизвестных, то они показывают увеличение себестоимости смеси при введении в нее одной массовой единицы данного вида сырья.

Таким образом, при расчете рецептов мороженого двойственные оценки оптимального плана дают ценную дополнительную экономическую информацию.

Для решения задач линейного программирования в более сложных случаях используют ЭВМ, а при многократном повторении — специальные машины. Например, для решения многократно повторяемых задач составления оптимальной рецептуры комбикормов используют специализированные вычислительные машины, которые выполняют только эту операцию. Применение этих машин не требует специальной подготовки по программированию.

В качестве примера использования ЭВМ решим задачу, условия которой приведены в табл. 28,

$$\begin{aligned}
 R = & 0,242x_1 + 1,28x_2 + 1,87x_3 + 3,36x_4 + 1,45x_5 + \\
 & + 1,148x_6 + 2,354x_7 + 0,887x_8 + 0,7x_9 + 0,0001x_{10} \rightarrow \min; \\
 & 0,888x_1 + 0,728x_2 + 0,58x_3 + 0,16x_4 + 0,06x_5 + \\
 & + 0,295x_6 + 0,07x_7 + 0,32x_8 + x_{10} = 6,3,785; \\
 & x_8 + x_7 \leq 7;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_6 &\leq 4; \\
 x_7 &\leq 4; \\
 0,032x_1 + 0,2x_2 + 0,35x_3 + 0,83x_4 + 0,26x_5 + 0,085x_6 + \\
 &+ 0,42x_7 = 10; \\
 0,08x_1 + 0,072x_2 + 0,07x_3 + 0,01x_4 + 0,68x_5 + \\
 &+ 0,2x_6 + 0,51x_7 + 0,26x_8 = 10; \\
 0,42x_8 + 0,042x_9 + x_{10} &= 16; \quad x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 10).
 \end{aligned}$$

Матрица этой задачи приведена в табл. 29. Нумерация столбцов показывает порядок записи переменных, строк — порядок расположения уравнений. Условие задачи переносится на перфокарты или другие носители, которые вместе со стандартной программой вводятся в ЭВМ. В данном случае для решения примера использовали ЭВМ ЕС—1022.

Зная код переменной и порядок полученного значения этой переменной, можно получить следующее решение: молоко натуральное $x_1 = 70,024$; сливки сухие $x_7 = 3$; сухое обезжиренное молоко $x_6 = 4$; масло сливочное $x_4 = 6,577387$; молоко сгущенное обезжиренное с сахаром $x_8 = 0,3165595$; $x_9 = 15,86704$. Себестоимость перечисленных видов продуктов $x_{1...8} = 62,9$ р.

Результаты проверки полученного решения записаны в табл. 30. Система уравнений для расчета рецептуры мороженого из возможных видов сырья с учетом ограничений на ввод в смесь некоторых компонентов имеет максимальную размерность 10×10 (10 строк и 10 столбцов). С вводом в уравнения искусственных и дополнительных переменных размерность системы будет 10×20 . Такую систему уравнений решают на ЭВМ за несколько минут с учетом ввода и вывода информации. Использование ЭВМ при вычислении рецептур продуктов позволяет получить двойственные оцен-

Таблица 29. Матрица решения задачи

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,088	0,728	0,58	0,16	0,06	0,295	0,07	0,32				
2					1							
3					1							
4							1					
5	0,032	0,2	0,35	0,83	0,26	0,085	0,42					
6	0,08	0,072	0,07	0,01	0,68	0,2	0,51	0,26				
7						0,42	0,26		1			
R_{min}	0,242	1,28	1,87	3,3	1,45	1,148	2,354	0,887	0,7	0,0001		
	1,242	2,28	2,87	4,3	2,45	2,148	3,354	1,887	1,7	1,0001		

Таблица 30. Результаты проверки

Сырье	Количество, кг	Водержание, кг		Себестоимость, р.
		жира	СОМО	
Молоко натуральное	700,24	22,40768	56,0192	—
сухое обезжиренное	40	10,6	27,2	—
сгущенное обезжиренное с сахаром	3,165595	—	0,8235	—
Сливки сухие	30	12,6	15,3	—
Масло сливочное	65,77387	54,59231	0,6577	—
Сахар	158,6704			
Итого	997,25	99,99999	99,9999	629
Агар	2	—	—	6
Ванилин	0,15	—	—	12
Всего	999,4	99,9999	99,9999	647

ки, которые являются необходимой экономической информацией при анализе составленных рецептов.

С помощью коэффициентов замещения, представленных в последней симплексной таблице, и двойственных оценок можно получить множество новых рецептов и определить их стоимость без выполнения симплексных итераций. Поэтому эффективность использования ЭВМ повышается. Решать систему уравнений размером 10×20 симплексным методом без ЭВМ нецелесообразно. При многократном использовании программы применяют специализированную машину.

Симплексный метод является шаговым циклическим, повторяющим одну и ту же совокупность вычислительных операций для различных массивов цифровой информации, которыми служат матрицы базисных и небазисных векторов; между ними осуществляется обмен информацией после каждого шага. Вследствие этого обмена содержание массивов изменяется.

Общую процедуру симплексного метода применительно к правильно сформулированным техническим задачам представим алгоритмом, структурная схема которого приведена на рис. 63 со следующими вычислительными блоками. После ввода исходных данных задачу приводят в каноническую форму с координатным базисом и неотрицательными правыми частями путем введения дополнительных и искусственных векторов. На втором этапе вычисляют матрицу, обратную той матрице, столбцы которой образуют базисы,

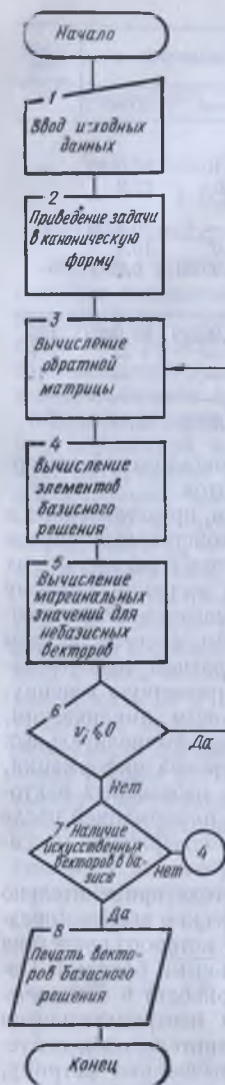


Рис. 63. Структурная схема алгоритма расчета оптимального состава мороженого.

а также элементы базисного решения (блоки 3, 4). На пятом этапе вычисляют маргинальные значения по формуле

$$v_i = (x_i) - c_i.$$

Следующим блоком проверяют выполнение неравенства $v_i \leq 0$ для всех небазисных векторов. При положительном ответе проверяют наличие искусственных векторов в базисе.

Если для всех рассчитанных маргинальных значений выполняется условие $v_i \leq 0$ и искусственных векторов в базисе нет, минимальное значение критериев оптимальности достигнуто и результаты выводятся на печать. Если же $v_i > 0$, то возможно другое (лучшее) решение, т. е. расчет начинают с блока 3.

При наличии искусственных векторов в базисе система ограничений не совместна. В этом случае изменяют начальное условие задачи. Если же искусственные векторы отсутствуют, то на печать выдают элементы базисного решения и маргинальные значения для анализа двойственных оценок.

§ 3. Моделирование процессов перемешивания

В соответствии с различными гипотезами о механизме перемешивания математическое описание представляется в виде зависимостей между параметрами, характеризующими механическое движение частиц, и факторами, вызывающими их перемещение. При таком представлении процесса получают характеристики по энергетическим затратам, времени и качеству перемешивания, определяемых различными показателями, которые принимают в качестве критериев оптимальности. Перемешивание так же, как измельчение и разделение, рассматривают как случайный марковский процесс. Математические описания получают на основе детерминированных факторов, вызывающих изменение положения частиц в пространстве, и с использованием вероятностных характеристик физических свойств частиц и их положения в пространстве. Критериями оптимальности могут быть те же характеристики.

Показатель или индекс перемешивания — это среднее квадратическое отклонение (СКО) концентраций компонентов для всех элементарных слоев или объемов аппарата от средней (равномерной) концентрации по всему объему. Индекс перемешивания может служить также мерой интенсивности процесса. Равномерное перемешивание компонентов в строго заданном соотношении влияет на качественные и количественные показатели процессов пищевых производств. Поэтому глубокое изучение механизма процесса перемешивания, исследование параметров, определяющих степень однородности готовой смеси, получение количественных соотношений, однозначно связывающих показатель смешанности системы с характеристиками смешиваемых материалов и условиями протекания процесса, имеют важное значение.

Равномерность распределения компонентов оценивают среднеквадратическими отклонениями σ , дисперсией $D = \sigma^2$, математическим ожиданием M_c концентрации частиц c_i или коэффициентом вариации $\gamma = \sigma/M_c$ для каждого компонента смеси.

Величина стандартного отклонения дисперсии S^2 служит приближенной оценкой истинной величины σ^2 , определяемой генеральной совокупностью всех возможных значений c_i , и зависит от величины выборки

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (c_i - \bar{c})^2,$$

где $\bar{c}$ — среднее значение концентрации.

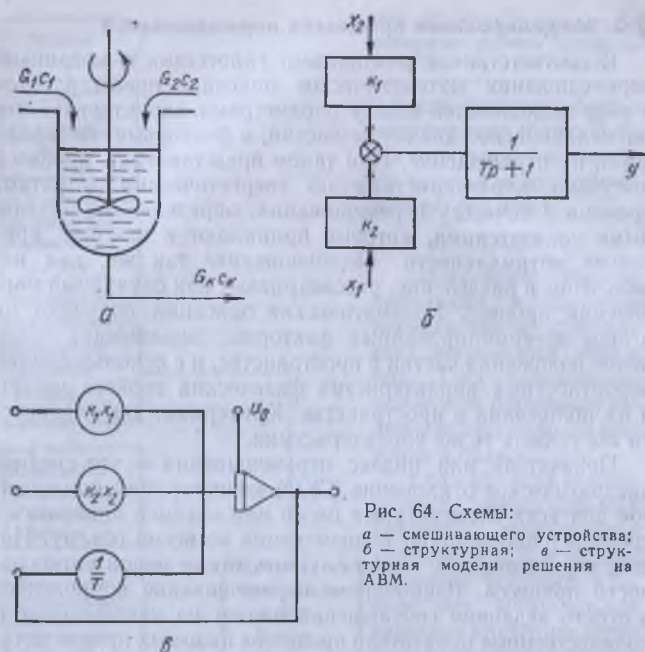


Рис. 64. Схемы:
а — смешивающего устройства;
б — структурная; в — структурная модель решения на АВМ.

Наиболее однородную смесь получают только при перемешивании материалов, обладающих одинаковыми физико-технологическими свойствами. Чем больше различий в свойствах компонентов, тем труднее установить однородность, так как эти различия порождают расслоение и разделение компонентов. В реальной смеси устанавливают равновесное состояние, определяемое относительным равновесием между процессами перемешивания и разделения для каждой совокупности компонентов. Причем для достижения относительного равновесия необходимо какое-то минимальное время перемешивания τ_{min} , после которого состояние системы не улучшается. Существуют различные упрощенные модели механизмов образования смесей. В их основу положены те или иные представления о процессе перемешивания: модели «тасования», включающие повторяющиеся процессы опрокидывания и разрезания, диффузионные модели, аналогами которых является диффузия газов, модели поочередного сдвига и расслоения с последующим пере-

мешением поверхностных слоев, а также модели, основанные на вероятностных характеристиках.

Схема смешивающего устройства приведена на рис. 64, а. В устройство поступают два потока продуктов G_1 и G_2 с концентрациями c_1 и c_2 , а выходит конечный продукт с расходом G_k и концентрацией c_k .

Модель динамики перемешивания получают, используя уравнение материального баланса смесителя. Поскольку материальный баланс в неустановившемся состоянии может быть выражен как изменение количества вещества, находящегося в смесителе объемом V , равное разности протекающего и вытекающего потоков за одно и то же время τ , то запишем

$$G_1 c_1 + G_2 c_2 - G_k c_k = V \frac{dc_k}{d\tau}.$$

Для установившегося режима правая часть уравнения равна нулю, так как $\frac{dc_k}{d\tau} = 0$. Это же уравнение запишем в следующей форме:

$$T \frac{dy}{d\tau} + y = k_1 x_1 + k_2 x_2,$$

где $T = \frac{V}{G_k}$ — постоянная времени;

$$y = c_k; \quad x_1 = c_1; \quad x_2 = c_2; \quad k_1 = \frac{G_1}{G_k}; \quad k_2 = \frac{G_2}{G_k}.$$

Обозначив $p = \frac{d}{d\tau}$, получим запись этого уравнения в операторной форме

$$(Tp + 1)y = k_1 x_1 + k_2 x_2.$$

В установившемся режиме статическая характеристика равна

$$y = k_1 x_1 + k_2 x_2.$$

Структурная схема уравнения представлена на рис. 64, б, а реализация этой структурной схемы на АВМ — на рис. 64, в. Более сложные модели перемешивания могут быть получены из вероятностных характеристик.

Рассмотрим возможности комбинированного подхода к изучению процесса перемешивания путем сочетания экспериментального исследования и математического моделирования. Основную цель процесса перемешивания можно сформулировать как достижение минимально возможных

или заданных значений СКО, дисперсии или коэффициента вариации. Косвенным показателем процесса может быть минимальное время перемешивания $\tau_{\min}$, обеспечивающее заданные или минимальные возможные значения СКО, дисперсии или коэффициента вариации.

Концентрация малых доз компонентов смеси часто определяется экспериментально по числу частиц индикатора μ в навеске определенной массы. Тогда для малых доз тонко измельченных компонентов характерны следующие зависимости показателей процесса от математического ожидания M_μ числа частиц μ данного индикатора

$$\sigma \approx \varepsilon \sqrt{V_\mu}; \quad \sigma_s = \varepsilon g \sqrt{V_\mu} \approx (\varepsilon/10) \sqrt{gq\eta};$$

$$\gamma \approx 10^3 \varepsilon / \sqrt{V_\mu} \approx 10^3 \varepsilon \sqrt{g/\eta q},$$

где σ, σ_s — СКО числа частиц индикатора и количества вещества; ε — коэффициент, учитывающий степень измельчения компонентов; g — средняя масса одной частицы; q — масса пробы (навеска); η — доза вводимого микрокомпонента (индикатора).

При оценке качества перемешивания СКО изменение его значения в процессе перемешивания описывается уравнением

$$\sigma = (\sigma_0 - \sigma_k) \exp(-\tau_i/T) + \sigma_k, \quad (153)$$

где σ_0, σ_k — начальное и конечное значения СКО частиц или вещества компонента в порциях смеси равной массы; T — постоянная времени перемешивания, характеризующая интенсивность работы смесителя и способность компонентов к смешиванию.

Минимальное время перемешивания, обеспечивающее заданную однородность, определяют по уравнению

$$\tau_{\min} = T \ln(\sigma_0 - \sigma_k)/(\beta - 1) \sigma_k,$$

где $\beta = \sigma/\sigma_k = 1,05; 1; 10$ — коэффициент, показывающий величину отклонения σ от конечного значения σ_k , чтобы смешивание можно было считать законченным.

Для определения $\tau_{\min}$ следует поставить три серии опытов с числом повторностей n

$$\sigma_1, \sigma_2 \text{ и } \sigma_3 \text{ при } \tau_1 < \tau_2 < \tau_{\min}; \quad \tau_3 > \tau_{\min}.$$

Поскольку $\tau_{\min}$ неизвестно, то выбрать τ_i , отвечающие этому условию, трудно. Поэтому число значений τ_i для определения σ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) задают с запасом, заведомо принимая число экспериментальных точек $k > 3$. В этом

случае устанавливают точки, которые необходимо принять для вычисления $\tau_{\min}$, используя все экспериментальные данные без потерь информации (допустим $k = 9$). По результатам опытов определяют среднее значение выборочного среднего арифметического для каждой из N серии опытов

$$S_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i.$$

Наиболее вероятные значения постоянной перемешивания T начального и конечного значений СКО выборки $\hat{S}_0, \hat{S}_k$ определяем по методу наименьших квадратов

$$\sum_{i=1}^k [S_i - (S_0 - S_k) \exp(\tau_i/T) - S_k] = \min \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (154)$$

Обозначив $\alpha = -1/T$ и подставив вместо τ_i, τ и τ_k в уравнение (153) значения S_i, S_0 и S_k , получим

$$\hat{S}_i = (\hat{S}_0 - \hat{S}_k) \exp \alpha \tau_i + \hat{S}_k.$$

Продифференцируем (154) поочередно по S_0 и S_k , приравняем их к нулю, обозначив

$$a = \sum_{i=1}^k S_i; \quad m = \sum_{i=1}^k e^{2\alpha \tau_i}; \quad p = \sum_{i=1}^k S_i \tau_i e^{\alpha \tau_i}; \quad \delta = \sum_{i=1}^k e^{\alpha \tau_i},$$

получим

$$\hat{S}_0 = \frac{p(\delta - k) + a(\delta - m)}{\delta^2 - mk}; \quad (155)$$

$$\hat{S}_k = \frac{p\delta - am}{\delta^2 - mk}. \quad (156)$$

Подставив эти значения в формулу (154), получим

$$a^2 - \frac{a(2p\delta - am) - p^2k}{\delta^2 - mk} = \min.$$

Обозначим вычитаемое $\frac{a(2p\delta - am) - p^2k}{\delta^2 - mk} = \omega$, тогда

$$a^2 - \omega = \min.$$

Поскольку для конкретных условий $a^2 = \text{const}$, то минимальное значение разности будет при $\omega = \text{max}$. Из этих условий определяем значение α , обеспечивающее условие (154).

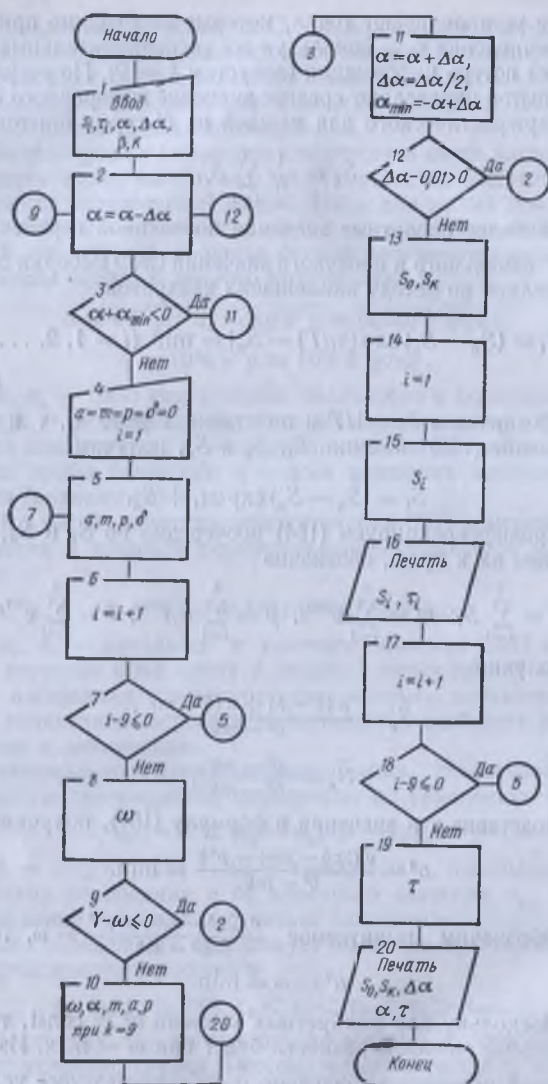


Рис. 65. Структурная схема алгоритма для определения минимального времени перемешивания.

Таблица 31. Данные обработки эксперимента

$\tau, \text{ мин}$	0,5	1	2	4	8	16	32	64	128
S_i	23,5	17,3	6,48	5,15	5,16	5,24	5,00	4,62	5,32
S	24,2	15,5	8,13	5,24	4,95	4,95	4,95	4,95	4,95

Последовательность определения $\tau_{\min}$ представим следующим образом. Зададим начальное приближенное значение $\alpha = \alpha_{\max} > \hat{a}$. Поскольку максимально возможное значение $\alpha_{\max} = 0$, то $\hat{a} < 0$. Начиная с $\alpha_{\max}$, через интервал $\Delta\alpha$ в убывающем порядке последовательно вычисляем ω . Значение α , при котором величина ω достигнет максимума, будет соответствовать искомому значению $\hat{\alpha}$. Для уточнения интервала $\Delta\alpha$ уменьшим в два раза и вычислим заново α, τ и δ . При известных значениях этих величин по формулам (155) и (156) вычислим $\hat{S}_0$ и $\hat{S}_{\text{кол}}$ (рис. 65). Задав β , вычислим искомое значение

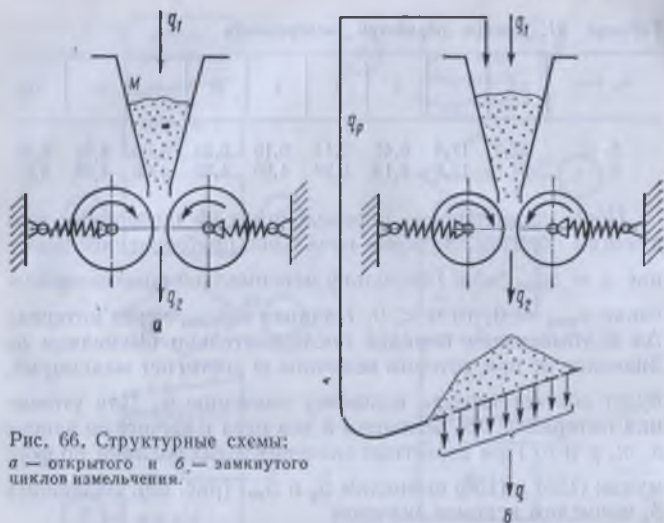
$$\tau_{\min} = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{(\beta - 1) \hat{S}_K}{\hat{S}_0 - \hat{S}_K} \right].$$

Например, необходимо определить минимальное время перемешивания для данных, приведенных в табл. 31, полученных в результате обработки условий одного из экспериментов.

При $\Delta\alpha = -0,05, \beta = 1,1$ в результате расчетов по приведенному алгоритму получено: $\hat{\alpha} = -1,2; \hat{S}_0 = 40,03; S_K = 4,95; \tau_{\min} = 3,55$ мин.

§ 4. Моделирование процессов измельчения и сепарирования

По характеру применяемых усилий при измельчении различают раздавливание (сжатие), разрыв, срез (сдвиг), истирание, удар, раскалывание. Способ воздействия определяется физическими характеристиками измельчаемого материала и необходимой степенью измельчения, под которой чаще всего понимают отношение средних размеров частиц до и после измельчения. Применяют и другие показатели степени измельчения: количество прохода материала через сито с определенным размером отверстий и пр. По

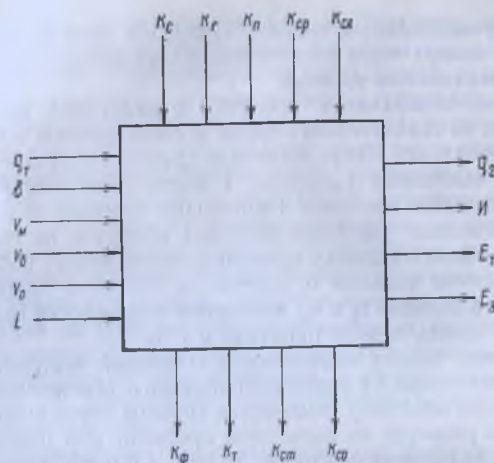


степени измельчения различают крупный, средний, мелкий, тонкий и коллоидный помолы. Измельчение проводят по открытому или закрытому циклу. При замкнутом цикле после разделения на сите более крупная фракция снова поступает на мельницу, а мелкая идет в дальнейшую переработку. Замкнутый цикл осуществляют в одной установке (машине) либо при многократном последовательном измельчении и разделении продуктов. Для измельчения применяют щелевые конусные, вальцовые и ударные дробилки, шаровые, стержневые, вибрационные и другие мельницы.

При моделировании замкнутых схем измельчения необходимо рассматривать процессы измельчения и сепарирования одновременно. В качестве примера рассмотрим процесс измельчения на вальцовых дробилках.

Структурные схемы открытого и замкнутого циклов измельчения приведены на рис. 66, а и б, а параметрическая схема процесса измельчения — на рис. 67.

Основными параметрами, характеризующими процессы измельчения, являются количество подаваемого продукта q_1 , физические либо иные свойства исходного продукта k_c , зазор между рабочими органами δ , скорости рабочих органов v_6 и v_m , их отношение i либо относительная скорость v_0 . Кроме перечисленных параметров, которыми можно уп-



равлять, входными также могут быть геометрическая форма рабочих органов k_r , состояние поверхности k_n , свойства окружающей среды $k_{ср}$ и особенности технологической схемы $k_{сх}$.

Выходными параметрами являются количество измельченного продукта q_2 , степень измельчения I , технологическая E_t либо экономическая E_e эффективность процесса измельчения. Характеризовать процесс измельчения можно также формой k_Φ , размерами k_T , структурой $k_{ст}$, состоянием поверхности $k_{со}$ измельченных частиц и пр. Выходными параметрами процесса измельчения могут быть также показатели работы и эксплуатации измельчающих установок, усилия на отдельные узлы машины, износ поверхностей и т. п. В замкнутых схемах эти характеристики следует дополнять величиной рециркулирующего потока q_p и параметрами рабочих органов разделяющих устройств (сит).

Теоретические представления о процессах измельчения позволяют установить качественные зависимости расхода энергии и выхода отдельных фракций измельченного продукта от степени измельчения. Некоторые количественные характеристики устанавливают на основании анализа материальных и энергетических потоков. Поэтому математические описания процессов измельчения основаны в основном

на экспериментальных данных. В связи с этим на примере процесса измельчения рассмотрим и составление модели по экспериментальным данным.

Степень измельчения продукта в вальцовой дробилке I зависит от значительного числа количественных и качественных факторов, определяющих режим измельчения и свойства выходного продукта, и является основным показателем качества процесса. Наибольшее влияние на измельчение оказывают удельная нагрузка продукта на единицу длины валцов в единицу времени q , зазор между рабочими поверхностями валцов δ , окружные скорости быстрого и медленного валцов v_b и v_m , состояние поверхности валцов, свойства измельчаемого продукта и т. п.

Поставим задачу определения сочетаний величин межвальцового зазора δ и удельной нагрузки q , обеспечивающих наибольшую величину извлечения (проход через сито определенного размера) на вальцовой дробилке при прочих постоянных значениях факторов. Если δ и q представить двумя взаимно перпендикулярными осями, то значения I можно откладывать на перпендикулярной третьей оси. Тогда в факторном пространстве получим геометрическое место точек значений извлечений при различных комбинациях δ и q , т. е. поверхность отклика. При этом решение поставленной задачи сводится к отысканию на поверхности отклика такой точки, для которой значение I будет иметь наибольшее значение.

План экстремального эксперимента предполагает выбор на поверхности отклика начальной точки, положение которой находится возможно ближе к точке экстремума. Поскольку исследуется только определенная область факторного пространства, ограниченная предельными практически возможными значениями выбранных факторов, то искомым экстремум может быть безусловным и условным. Затем проводится серия опытов при значениях факторов δ и q , соответствующих начальной точке, и измеряется значение I . После этого исследуют поверхность отклика вокруг начальной точки путем проведения опытов при уменьшении и увеличении значений влияющих факторов на величину заранее обоснованного шага. Выбор центра плана и шага являются наименее формализованными этапами составления модели.

В результате обработки методами наименьших квадратов или средних получают уравнения регрессии, по коэффициентам которых определяют на поверхности отклика

в выбранной точке направление наибольшего ее ската. В дальнейшем по методу «крутого восхождения» на поверхности отклика в направлении ее наибольшего подъема выбирают новую точку и в ее окрестности повторяют исследование поверхности. Поочередное проведение экспериментов повторяют до тех пор, пока не будет достигнуто наибольшее значение извлечения. Такую схему планирования можно применять для каждого из выбранных факторов в отдельности, т. е. если один из факторов подвергается изменению, то остальные поддерживаются постоянными на заранее обоснованных уровнях. Например, если величина межвальцового зазора для данного продукта изменяется в интервале от 0,45 до 0,65 мм, то, поддерживая ее постоянной на среднем уровне $\delta_{ср} = 0,48$ мм, можно определить наибольшую величину I при изменении q в пределах от 5 до 80 кг/(см · ч). Координату начальной точки можно принять $q_{ср} = 40$ кг/(см · ч).

Для определения числа повторностей изменений, обеспечивающих достоверность результатов, необходимо поставить предварительную серию опытов. Приняв ориентировочно число изменений в предварительной серии $n_0 = 10$ и произведя десять помолов (опытов) при $\delta = 0,48$ мм и $q_{ср} = 40$ кг/(см · ч), получим вариационный ряд

64, 60, 63, 59, 61, 64, 63, 56, 63, 62,

каждый член которого представляет значение I , измеренное с точностью, не превышающей предельного отклонения $\varepsilon = 1$. Из полученного ряда построим ранжированный ряд

56, 59, 60, 61, 62, 63, 63, 63, 64, 64

и проверим наличие в нем аномальных значений. Для этого вычислим среднее значение $\bar{x} = 61,5$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2,506$. Далее, вычислив для первого x_1 и последнего x_{10} членов ряда значения коэффициентов

$$\beta_1 = \frac{x - x_1}{\sigma} = \frac{61,5 - 56}{2,506} = 2,18 \text{ и } \beta_{10} = \frac{x_{10} - \bar{x}}{\sigma} = \frac{64 - 61,5}{2,506} = 0,99$$

и сравнив их с табличным значением $\beta_{\alpha, n} = 2,03$, полученным при уровне значимости $\alpha = 0,1$ (доверительной вероятности $p = 0,9$) и числе опытов $n = 10$, установим $\beta_1 > \beta_{\alpha, n}$ и $\beta_{10} < \beta_{\alpha, n}$. Следовательно, первый член ряда

является аномальным и его нужно исключить. После этого проверим на аномальность второй член ряда, для которого коэффициент β_2 составит

$$\beta_2 = \frac{\bar{x} - x_2}{\tau} = \frac{61,5 - 59}{2,506} = 0,99.$$

Таким образом, второй член ряда с выбранной доверительной вероятностью $p = 0,9$ принадлежит рассматриваемому ряду, который перепишем в виде

59, 60, 61, 62, 63, 63, 63, 64, 64.

Для нового ряда из $n_1 = 9$ членов вычислим среднее значение $\bar{x} = 62,1$, среднее квадратическое отклонение $\sigma = 1,76$ и определим с учетом критерия Стьюдента $t_{\alpha, n} = 1,86$ (для $n_1 = 9$ и $\alpha = 0,1$) минимально необходимое число опытов

$$n_{\min} = \frac{t_{\alpha, n}^2 \tau^2}{\varepsilon^2} = \frac{(1,86)^2 \cdot (1,76)^2}{1^2} = 3,46 \cdot 3,1 = 10,78.$$

Так как расчетное число опытов $n_{\min} \approx 11$ и превышает действительное $n_1 = 9$, то необходимо провести дополнительно несколько опытов. Выполнив еще один помол, полученное значение $I = 61$ включим в ранжированный вариационный ряд

59, 60, 61, 61, 62, 63, 63, 63, 64, 64.

Среднее значение этого ряда из $n = 10$, рассчитанное с учетом дополнительного опыта, будет $\bar{x} = 62$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 1,67$. Тогда расчетное число опытов составит при $t_{\alpha, n} = 1,83$

$$n_p = \frac{(1,83)^2 \cdot (-1,67)^2}{1^2} = 9,31 \approx 10.$$

Поскольку расчетное число повторения опытов меньше действительного, то полученные результаты можно считать достоверными с доверительной вероятностью $p = 0,9$ при $\delta = 0,48$ мм и $q = 40$ кг/(см · ч) среднее значение извлечения $I = 62$.

При однофакторном эксперименте выбираем шаг варьирования величины удельной подачи $\lambda_q = 10$ кг/(см · ч). Проведя эксперимент при $q = 30$ кг/см · ч и $q = 50$ кг/(см · ч) и выполнив соответствующую обработку результатов, получим ряд зависимости

I от q

q	30	40	50;
I	59	62	63.

Предполагая, что на данном участке зависимость может быть аппроксимирована прямой

$$I = b_0 + b_1 q,$$

составим систему уравнений

$$\begin{cases} b_0 + 30b_1 = 59; \\ b_0 + 50b_1 = 63, \end{cases}$$

решив которую, получим значения коэффициентов $b_0 = 53$ и $b_1 = 0,2$. Тогда зависимость в общем виде будет представлена выражением

$$I = 53 + 0,2q.$$

Наибольшее отклонение расчетов значения $I = 61$ от действительного $I = 62$ не превышает 1,7 %.

Так как в полученной зависимости значение углового коэффициента b_1 при q имеет положительный знак, то увеличение извлечения возможно только при увеличении нагрузки.

Изменяя значение нагрузки на величину выбранного шага, проведем еще две серии опытов при $q = 60$ кг/(см · ч) и $q = 70$ кг/(см · ч), тогда зависимость извлечения от нагрузки следующая:

q	30	40	50	60	70;
I	59	62	63	65	61.

Анализ показывает, что увеличение извлечения наблюдается только при увеличении удельной нагрузки до значения $q = 60$ кг/(см · ч), которое ориентировочно можно принять за наиболее рациональную нагрузку. Чтобы определить точно значение нагрузки, исследуем зависимость $I = f(q)$ в области точки с $q = 60$ кг/(см · ч), уменьшив шаг варьирования.

Однако полученное оптимальное значение q действительно только при $\delta = 0,48$ мм. Определение зависимости $I = f(\delta)$ требует при однофакторном эксперименте постановки также значительного количества опытов. Полученный результат при оптимальном значении зазора будет действительным только при среднем значении нагрузки.

При наличии двух существенно влияющих факторов в условиях проведения экстремального эксперимента радио-

Таблица 32. План факторного эксперимента типа 2³

Номер опыта	q'	δ'	q'δ'	Среднее значение
1	—	—	+	77,4
2	—	+	—	45
3	+	—	—	76
4	+	+	+	48

нально использовать полный факторный эксперимент ПФЭ — 2³. Приняв в качестве шага варьирования зазора $\lambda_\delta = 0,07$ мм и удельной нагрузки $\lambda_q = 5$ кг/(см · ч), проведем серию опытов при значениях на нижнем $\delta = 0,41$ мм и $q = 35$ кг/(см · ч) и на верхнем уровнях $q = 45$ кг/(см · ч) и $\delta = 0,55$ мм.

Шаг варьирования должен быть достаточно велик по сравнению с ошибками эксперимента и достаточно мал, чтобы по возможности точно уловить направление движения к оптимальной области.

Последовательность выполнения опытов выбирают из двухфакторного плана, пользуясь таблицей случайных чисел. Результаты экспериментов заносятся в план эксперимента (табл. 32).

Предположив, что полученная зависимость может быть описана выражением

$$H = b_0 + b_1 q' + b_2 \delta^2 + b_3 q' \delta',$$

вычислим значения коэффициентов по формулам:

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N n_i}{N} = \frac{77,4 + 45 + 76 + 48}{4} = 61,6;$$

$$b_1 = \frac{\sum_{i=1}^N q_i n_i}{N} = \frac{-77,4 - 45 + 76 + 48}{4} = 0,4;$$

$$b_2 = \frac{\sum_{i=1}^N \delta_i n_i}{N} = \frac{-77,4 + 45 - 76 + 48}{4} = -15,1;$$

$$b_3 = \frac{\sum_{i=1}^N q_i \delta_i n_i}{N} = \frac{77,4 - 45 - 76 + 48}{4} = 1,1.$$

Тогда общее выражение запишем

$$H = 61,6 + 0,4q' - 15,1\delta' + 1,1q'\delta'.$$

Для сравнения сопоставим действительные и расчетные значения выхода (извлечения):

$$H_{\text{действ}} \quad 77,4 \quad 45 \quad 76 \quad 48;$$

$$H_{\text{расч}} \quad 77,4 \quad 45 \quad 76 \quad 48;$$

$$H_{\text{уточн}} \quad 77,8 \quad 45 \quad 75,6 \quad 47,6.$$

Учитывая, что средняя для всего эксперимента дисперсия воспроизводимости единичного измерения определяется по среднему квадратическому отклонению

$$D_n = \sigma^2 = (1,67)^2 = 2,79,$$

вычислим среднюю для всего эксперимента дисперсию воспроизводимости среднего значения

$$D_{\bar{x}} = \frac{D_n}{N-1} = \frac{2,79}{4-1} = 0,93.$$

В связи с тем что в расчете каждого коэффициента участвуют средние значения всех N вариантов опыта, дисперсия коэффициентов уравнения регрессии будет в N раз меньше средней дисперсии воспроизводимости среднего значения

$$D_{b_i} = \frac{D(\bar{x})}{N} = \frac{D_n}{N(N-1)} = \frac{2,79}{4(4-1)} = 0,23.$$

Используя критерий Стьюдента для $\alpha = 0,1$ и числа степеней свободы $f = N(N-1) = 12$, $t_{\alpha,n} = 1,81$, определим величину доверительного интервала для коэффициентов уравнения регрессии:

$$-0,23 \cdot 1,01 \leq b_i \leq +0,23 \cdot 1,81;$$

$$-0,416 \leq b_i \leq +0,416.$$

Для всех коэффициентов, кроме b_1 , выполняется неравенство $|b_i| \geq 0,416$, и эти коэффициенты следует признать значимыми. Коэффициент b_1 по величине попадает в доверительный интервал и учитываемое им влияние фактора q соизмеримо со случайными отклонениями. Учитывая сравнительно большой интервал варьирования фактора q ($\lambda_q = 5$ кг/(см · ч)) с доверительной вероятностью $p = 0,9$, можно признать коэффициент b_1 незначимым и исключить его из уравнения регрессии. Тогда уравнение регрессии примет вид

$$H = 61,6 + 1,1q'\delta' - 15,1\delta'.$$

По последнему выражению вычислим уточненные значения выхода I и рассчитаем дисперсию адекватности

$$D_a = \frac{\sum_{i=1}^N (U_{расч_i} - I_i^2)}{N - N'} = \frac{(77,4 - 77,8)^2 + (45,0 - 45,4)^2 + (76,0 - 75,6)^2 + (48,0 - 47,6)^2}{4 - 3} = 0,64,$$

где $N = 3$ — число коэффициентов в уточненном уравнении регрессии.

Для проверки адекватности уравнения регрессии вычислим расчетное значение критерия Фишера

$$F_p = \frac{D_{(x)}}{D_{(a)}} = \frac{0,93}{0,64} = 1,45$$

и сравним его с табличным $F_{\alpha, n_1, n_2} = 2,25$, полученным при числе степеней свободы $f = (N - N') \cdot (n - 1) = (4 - 3) \cdot (10 - 1) = 9$; $n_2 = (N - 1)(n - 1) = (4 - 1) \times (10 - 1) = 27$, а также уровне значимости $\alpha = 0,05$ (доверительной вероятности $p = 0,95$). Выполнение неравенства $F_p < F_{\alpha, n_1, n_2}$ свидетельствует, что рассчитанные значения извлечения незначимо отличаются от действительных, а уравнение регрессии адекватно описывают экспериментальные данные.

Учитывая, что уравнение регрессии содержит эффект парного взаимодействия фактора q и δ , для осуществления «крутого восхождения» по методу Бокса — Уилсона необходимо линейаризовать уравнение регрессии в начальной точке поверхности отклика, для которой отыскивается угловой коэффициент.

Из уравнения регрессии вычисляют частные производные

$$\frac{\partial I}{\partial q'} = 1,1\delta'; \quad \frac{\partial I}{\partial \delta'} = 1,1q' - 15,1.$$

Подставляя в уравнение приращения величины выхода

$$\Delta I = \frac{\partial I}{\partial q'} \Delta q' + \frac{\partial I}{\partial \delta'} \Delta \delta'$$

значение частных производных, получим линейаризованное уравнение регрессии

$$\Delta I = 1,1\delta' \Delta q' + (1,1q' - 15,1) \Delta \delta'.$$

Исходной для «крутого восхождения» целесообразно выбрать точку $q' = 0$ и $\delta' = 0$. Подставив эти значения в линейаризованное уравнение регрессии, получим исходное значение

$$\Delta I = -15,1\delta'.$$

Отсутствие в уравнении регрессии члена, учитывающего влияние фактора q' , свидетельствует о том, что при «крутом восхождении» его значение следует оставить постоянным, равным по величине значению нагрузки в начальной точке $q = 40$ кг/(см · ч). При отрицательном значении коэффициента при факторе δ' в линейаризованном уравнении регрессии для повышения выхода следует уменьшать значение зазора. Практически для движения к оптимуму поверхности отклика необходимо провести 5—6 опытов при значениях фактора δ : $\delta_1 = \delta - \lambda_\delta$; $\delta_2 = \delta - 2\lambda_\delta$ и т. д. После этого на пятом или шестом шаге находим уравнение регрессии и определяем новое направление «крутого восхождения».

Для выбранного примера первый шаг «крутого восхождения» соответствует условиям опытов $q = 40$ (кг/см · ч) и $\delta_1 = 0,48 - 0,07 = 0,41$ мм, для которых получено значение $U = 77$. Условия опытов второго шага $q = 40$ кг/(см · ч) и $\delta_2 = 0,48 - 0,14 = 0,34$ выходят за границу $\delta = 0,4$ мм, выбранной для изучения области факторного пространства. Поэтому уже первый шаг «крутого восхождения» привел в околооптимальную область $q = 40$ кг/(см · ч) и $\delta = 0,4$ мм, для которой найдено наибольшее значение $I = 77$. Нахождение точного значения координат точки оптимума требует постановки дополнительных опытов с использованием специальных методов планирования. Учитывая небольшие значения интервалов λ_δ и λ_q , исследовать околооптимальную область нет необходимости.

Сравнив результаты одно- и двухфакторного экспериментов, можно сделать вывод: в первом случае необходимы большие затраты труда и времени на отыскание околооптимальной области, так как число опытов значительно увеличивается.

Обобщая результаты двухфакторного экстремального эксперимента, заметим, что план экстремальных экспериментов позволяет обнаружить околооптимальные области на поверхности отклика. Однако вся поверхность отклика на выбранном участке остается неисследованной, в связи с чем экспериментатор не может воспользоваться планом экст-

Таблица 33. Зависимость величины извлечения от двух факторов

q_i	$\delta_1 = 0,4$	$\delta_2 = 0,45$	$\delta_3 = 0,48$	$\delta_4 = 0,55$	$\delta_5 = 0,65$
$q_1 = 20$	74,7	62,1	56	42,5	31
$q_2 = 30$	76,4	64	58	44	32
$q_3 = 40$	77	66	61	46	35
$q_4 = 50$	74,5	67,9	62,6	49	36,4
$q_5 = 60$	73,7	67	65	50	39

ремального эксперимента. Для этих целей можно использовать планирование экспериментов по схеме гиперлатинского квадрата.

План экспериментов по схеме гиперлатинского квадрата представляет собой табл. 33, на пересечении строк q_i и столбцов δ_i которой записываются средние значения определения извлечения в десятикратной повторности при постоянных условиях q_i и δ_i . Последовательность выполнения опытов с различными комбинациями пяти уровней двух факторов выбирается в соответствии с таблицей случайных чисел. Преднамеренная сбалансированность плана по схеме латинского квадрата позволяет путем вычисления средних значений по строкам и столбцам выявить влияние каждого из выходных факторов на извлечение.

Анализируя первый столбец зависимости $I = f(q)$ при $\delta_0 = 0,4$ мм, предположим, что она может аппроксимироваться параболой, описываемой выражением

$$I = C + Bq - Aq^2,$$

где C , B , A — коэффициенты, которые необходимо найти по экспериментальным данным.

Используя производную, определим экстремальное значение

$$I = B - 2Aq = 0,$$

откуда величина экспериментально полученного значения

$$q_0 = \frac{B}{2A}.$$

Судя по первому и второму столбцу для $\delta_1 = 0,4$ и $\delta_2 = 0,45$ мм, положение экстремальных точек пропорционально величине межвальцового зазора с коэффициентом 100, т. е. $q_0 = 100\delta$, тогда $B = q_0 2A = 200$.

Подставив значение коэффициента B в общее выражение, получим

$$U = C + A(200\delta q - q^2).$$

Для нахождения коэффициентов A и C используют первую и третью строки матрицы планирования экспериментов (см. табл. 31) и по значениям I для $\delta_1 = 0,4$ мм составляют систему уравнений

$$\begin{cases} 74,7 = C + A(200\delta \cdot 20 - 400); \\ 77 = C + A(200\delta \cdot 40 - 1600). \end{cases}$$

Решив эту систему, получим

$$A = 3,28 \cdot 10^{-3};$$

$$B = 0,72\delta;$$

$$C = 70,64.$$

Тогда зависимость $I = f(q)$ будет иметь конкретный вид

$$I = 70,64 + 0,72\delta q - 3,28 \cdot 10^{-3} q^2.$$

Обобщение построчной зависимости $I = f(\delta)$ позволяет сделать вывод, что она определяется величиной свободного члена зависимости $I = f(q)$, значение которого должно быть обратно пропорциональным квадрату межвальцового зазора

$$I = D + 0,72\delta q - 3,28 \cdot 10^{-3} q^2.$$

Если учесть, что для первого столбца $C = 70,64$ и $\delta_1 = 0,4$ мм, то получим

$$C = \frac{D}{\delta^2} = 70,64,$$

откуда $D = 70,64\delta^2 = 70,64 \cdot 0,16 = 11,3$.

Тогда зависимость $I = f(q, \delta)$ в общем виде

$$I = \frac{11,3}{\delta^2} + 0,72\delta q - 3,28 \cdot 10^{-3} q^2.$$

Это выражение упростим с учетом точности выполняемых в экспериментах измерений

$$I = \frac{11}{\delta^2} + 0,7\delta q - 3,3 \cdot 10^{-3} q^2.$$

Для оценки адекватности полученного выражения вычислим расчетные значения I извлечения, соответствующие

Таблица 34. Матрица планирования эксперимента

q_i	$\delta_1 = 0,4$	$\delta_2 = 0,45$	$\delta_3 = 0,45$	$\delta_4 = 0,55$	$\delta_5 = 0,65$
$q_1 = 20$	73,1	59	55,4	43	33,8
$q_2 = 30$	74,2	60,4	57,5	45,1	36,6
$q_3 = 40$	74,7	61,3	58,1	46,7	38,9
$q_4 = 50$	74,5	61,4	59	47,5	40,4
$q_5 = 60$	73,7	61	59,8	47,8	41,4

Таблица 35. Квадраты разностей действительных и расчетных значений извлечения

$q_1 = 20$	2,5	9,6	0,36	0,2	7,8
$q_2 = 30$	4,8	12,9	0,5	1,4	19,3
$q_3 = 40$	5,3	20,9	3,4	0,5	15,2
$q_4 = 50$	0	41,2	12,9	2,2	16
$q_5 = 60$	2,5	36,7	27	4,8	13,5

Сумма 12,6 121,7 48,8 8,9 64

комбинациям условий опытов по матрице планирования экспериментов (табл. 34).

Адекватность определяется по критерию Фишера, для вычисления которого составляют табл. 35.

Тогда расчетная дисперсия составит

$$D_p = \frac{12,6 + 121,7 + 48,8 + 8,9 + 64}{25} = 10,24.$$

Расчетное значение критерия Фишера определяется по формуле

$$F_p = \frac{D_p}{\sigma^2} = \frac{10,24}{(1,67)^2} = \frac{10,24}{2,78} = 3,7.$$

Табличное значение критерия Фишера, найденное при доверительной вероятности $p = 0,99$, числах степеней свободы $n_1 = 10 - 1 = 9$ и $n_2 = 25 - 1 = 24$, составит $F_{\alpha, n_1, n_2} = 4,73$.

Выполнение условия $F_{\alpha, n_1, n_2} > F_p$ свидетельствует, что полученная математическая модель зависимости извлечения от величины удельной нагрузки на вальцовом станке и величины межвальцового зазора адекватно описывает экспериментальные данные. Величина предельного отклонения расчетных значений извлечения от действительных не

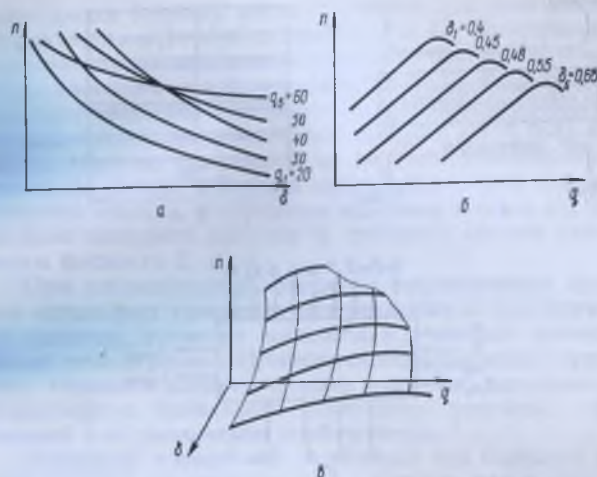


Рис. 68. Зависимость извлечения: а — от зазора; б — от нагрузки; в — от зазора и нагрузки одновременно.

превышает 10 %. Используя данные расчетных значений извлечения по плану гиперлатинского квадрата, можно получить графические зависимости, приведенные на рис. 68.

Глава 8

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ НАГРЕВА И ОХЛАЖДЕНИЯ ПИЩЕВЫХ ПРОДУКТОВ

§ 1. Общие принципы решения задач расчета теплообменников с использованием моделей

Для нагревания и охлаждения жидкостей, газов и сыпучих продуктов в пищевой промышленности широко используют различные теплообменные аппараты, которые можно классифицировать по назначению, контакту теплоносителей, принципу действия, конструктивным особенностям, производительности, месту в технологической схеме и т. п. По виду контакта теплоносителей теплообменники разделяют на рекуперативные и регенеративные. В рекуперативных

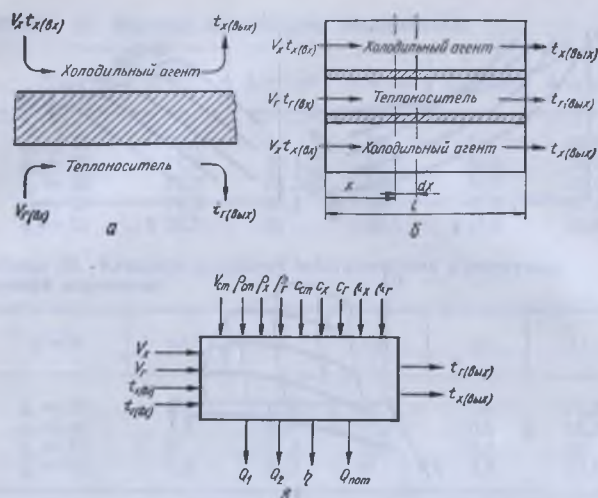


Рис. 69. Схемы:
а — процесса теплообмена; б — элемента теплообмена; в — параметрическая.

теплообменниках холодный и горячий теплоносители разделены перегородкой, а в регенеративных — одна и та же поверхность омывается попеременно холодным и горячим теплоносителями. Стенка при этом попеременно нагревается и охлаждается. Для нагрева — охлаждения сыпучих продуктов и газов используют теплообменники типа газозвесь, которые часто являются регенеративными.

При составлении математических моделей теплообменники классифицируют по форме или виду математического описания.

Схема процесса теплообмена в рекуперативном теплообменнике с прямотоком приведена на рис. 69, а, схема элемента рекуперативного теплообменника с прямотоком «труба в трубе» — на рис. 69, б, а параметрическая схема — на рис. 69, в.

Процесс теплообмена в рекуперативном теплообменнике определяется входными параметрами: расходами холодного V_x и горячего V_g теплоносителя, их температурами $t_{x(вх)}$ и $t_{g(вх)}$, а также физическими свойствами: теплоемкостью c_x и c_g , плотностью ρ_x и ρ_g , вязкостью μ_x и μ_g и пр. На процесс теплообмена влияют геометрические характеристики

перегородки (стенки): масса $G_{ст}$, объем $V_{ст}$, плотность $\rho_{ст}$, теплоемкость $c_{ст}$ и теплопроводность λ_t . Выходными характеристиками процесса теплообмена являются температуры холодного и горячего агентов $t_{x(вых)}$, $t_{g(вых)}$ и их физические свойства, изменившиеся в результате нагрева — охлаждения. Характеристиками процесса могут быть количество теплоты, переданной от горячего теплоносителя к стенке Q_1 , потери теплоты в окружающую среду $Q_{пот}$ и количество теплоты, воспринятое холодным агентом Q_2 , коэффициент полезного действия η , стоимость нагрева единицы массы жидкости E_1 и пр.

При математическом описании теплообменных процессов используют уравнения материального и энергетического балансов, движения жидкостных и газовых потоков, а также теплопередачи. Процесс теплообмена можно представить типовыми математическими моделями: идеального перемешивания, идеального вытеснения, ячеечной, диффузионной и их различными комбинациями.

Уравнение теплообмена используют для описания передачи теплоты от жидкости (газа) к стенке или от стенки к жидкости (газу)

$$Q = \alpha F \tau \Delta t,$$

где τ — время передачи теплоты, с; Δt — разность температур между стенкой $t_{ст}$ и жидкостью (газом) t_g .

Уравнение теплопроводности используют для описания потока теплоты через перегородку (стенку)

$$Q = \lambda_t F \tau \Delta t,$$

где λ_t — коэффициент теплопроводности, Вт/(м · К).

Уравнение для определения потерь напора

$$\Delta p = \Delta p_{тр} + \Delta p_{м.с} = (\lambda' l / d + \Sigma \xi) \rho v^2 / 2,$$

где Δp — общие потери напора, Па; $\Delta p_{тр}$ — потери напора по длине трубы, Па; $\Delta p_{м.с}$ — потери напора местных сопротивлений, Па; l — длина труб, м; ρ — плотность теплоносителя, кг/м³; d — внутренний диаметр труб, м; ξ — коэффициенты местных гидравлических сопротивлений; λ' — коэффициент сопротивления, который для шероховатых труб определяется по формуле

$$\lambda' = 0,1 \sqrt[4]{\epsilon (Pr_{ст} / Pr)^{1/4}},$$

где $Pr_{ст} = \frac{\mu c}{\lambda}$ — критерий Прандтля при температуре стенки; Pr — критерий Прандтля при средней температуре

Одним из основных показателей сравнительной экономической эффективности технологических процессов являются приведенные затраты

$$Z = C_t + KE_n = C_t + K/T_n, \quad (160)$$

где C_t — себестоимость производства готовой продукции; K — капитальные вложения в производственные фонды; $E_n = 1/T_n$ — нормативный коэффициент эффективности капитальных вложений; T_n — нормативный срок окупаемости капитальных вложений.

Применительно к процессу нагрева — охлаждения приведенные затраты следует отнести к единице массы подогреваемого либо охлаждаемого продукта. Тогда они будут представлять затраты в рублях на единицу массы или объема подогреваемого или охлаждаемого на 1°C продукта.

В упрощенном виде эти удельные приведенные затраты можно определить по формуле

$$Z = \frac{(1 + \alpha) \tau T_c}{G(t_k - t_n)} + \frac{(k_o + k_a) C_T}{G(t_k - t_n)} + \frac{G_n C_n + G_3 C_3 + G_b C_b + G_x C_x}{G(t_k - t_n)}, \quad (161)$$

где α — общий норматив отчислений на премии, заработную плату и социальное страхование; τ — период (время) работы; T_c — средняя часовая тарифная ставка рабочих; k_o — норматив отчислений на текущий ремонт, содержание и эксплуатацию теплообменника; k_a — норматив амортизационных отчислений; C_T — цена теплообменника; C_n, C_3, C_b, C_x — себестоимость единицы пара, электроэнергии, воды и холода; G_n, G_3, G_b, G_x — расходы пара, электроэнергии, воды и холода; G — часовой расход подогреваемого или охлажденного продукта; t_n, t_k — начальные и конечные температуры подогреваемого или охлаждаемого продукта.

При расчете удельных затрат на охлаждение следует поменять местами t_k и t_n , т. е. знаменатель должен быть положительным. В этой формуле не учтены капитальные, эксплуатационные затраты на здания, сооружения и инвентарь. При расчете затрат на электроэнергию следует еще учитывать плату не только за потребляемую электроэнергию, но и за установленную мощность электродвигателей или других электроустановок.

Из приведенной формулы можно установить, что она обладает свойством аддитивности, т. е. снижение затрат по каждой составляющей приводит к снижению приведенных

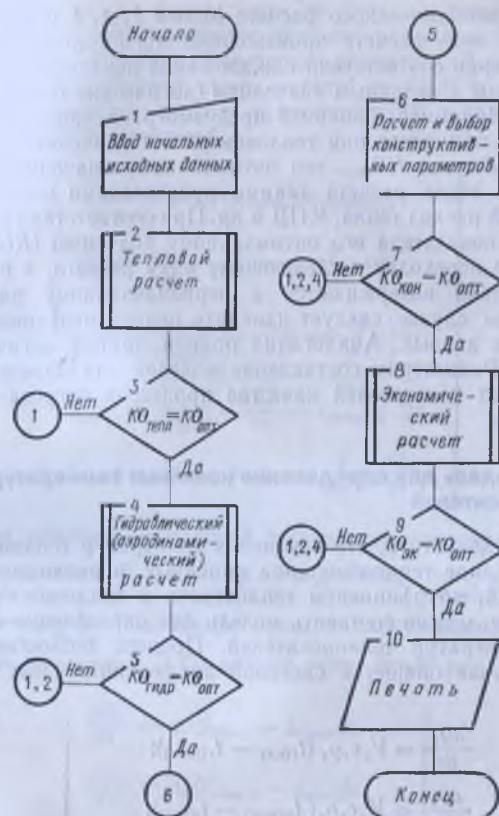


Рис. 70. Структурная схема обобщенного алгоритма расчета теплообменника.

затрат. Следовательно, оптимальных (в данном случае наименьших) затрат можно достигнуть на основе оптимизации частных или обобщенных показателей. Тогда оптимизация теплообменника может быть представлена последовательно и однозначно выполняемой процедурой в виде алгоритма.

Структурная схема обобщенного алгоритма оптимизации приведена на рис. 70 и включает последовательно выполняемые операции теплового, гидравлического, конструктив-

ного и экономического расчета (блоки 2, 4, 6 и 8). После каждого вида расчета производятся логические процедуры проверки соответствия каждого вида показателей их оптимальным и заданным значениям (логические блоки, 3, 5, 7 и 9). Например, блоком 3 предусмотрена проверка соответствия принятого при тепловом расчете показателя (критерия) качества $KO_{\text{тепл}}$ его оптимальному значению $KO_{\text{опт}}$. На этом этапе расчета такими показателями могут быть удельный расход тепла, КПД и др. При соответствии рассчитанного показателя его оптимальному значению ($KO_{\text{тепл}} = KO_{\text{опт}}$) переходят к следующему виду расчета, а при несоответствии возвращаются к первоначальному расчету. В данном случае следует изменить нерегламентированные исходные данные. Аналогична роль и других логических блоков. Рассмотрим составление моделей для определения различных показателей качества процессов нагрева — охлаждения.

§ 2. Модель для определения конечных температур теплоносителей

Если допустить, что изменения температур теплоносителей по длине теплообменника линейные, а расходы теплоносителей, коэффициенты теплоотдачи и теплоемкости постоянные, можно составить модель для определения конечных температур теплоносителей. Процесс теплообмена в этом случае описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1}{d\tau} &= V_{\Gamma} c_{\Gamma} \rho_{\Gamma} (t_{\Gamma(\text{вх})} - t_{\Gamma(\text{вых})}); \\ \frac{dQ_2}{d\tau} &= V_{\text{х}} c_{\text{х}} \rho_{\text{х}} (t_{\text{х}(\text{вых})} - t_{\text{х}(\text{вх})}); \\ \frac{\partial Q_1}{\partial \tau} - \frac{dQ_2}{d\tau} &= V_{\text{ст}} c_{\text{ст}} \rho_{\text{ст}} \frac{dt_{\text{ст}}}{d\tau}; \\ \frac{dQ_1}{d\tau} &= \alpha_1 F_1 \frac{t_{\Gamma(\text{вх})} + t_{\Gamma(\text{вых})}}{2} - t_{\text{ст}}; \\ \frac{dQ_2}{d\tau} &= \alpha_2 F_2 \left(t_{\text{ст}} - \frac{t_{\text{х}(\text{вх})} + t_{\text{х}(\text{вых})}}{2} \right). \end{aligned} \quad (162)$$

Реализовав эту систему дифференциальных уравнений на АВМ, можно получить значение конечных температур теплоносителей при различных значениях входных парамет-

ров, не обращаясь к оригиналу. В модель можно вводить переменные путем изменения величин напряжений, представляющих различные физические величины. Для удобства набора структурной схемы моделей на АВМ необходимо привести исходную систему уравнений (162) к виду, удобному для моделирования,

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1}{d\tau} &= V_{\Gamma} c_{\Gamma} \rho_{\Gamma} (t_{\Gamma(\text{вх})} - t_{\Gamma(\text{вых})}); \\ \frac{dQ_2}{d\tau} &= V_{\text{х}} c_{\text{х}} \rho_{\text{х}} (t_{\text{х}(\text{вых})} - t_{\text{х}(\text{вх})}); \\ t_{\text{ст}} &= \frac{1}{V_{\text{ст}} c_{\text{ст}} \rho_{\text{ст}}} \int_0^{\tau} \left(\frac{dQ_1}{d\tau} - \frac{dQ_2}{d\tau} \right) d\tau; \\ t_{\Gamma(\text{вых})} &= \frac{1}{\alpha_1 F_1} \cdot \frac{dQ_1}{d\tau} - t_{\Gamma(\text{вх})} + 2t_{\text{ст}}; \\ t_{\text{х}(\text{вых})} &= 2t_{\text{ст}} - t_{\text{х}(\text{вх})} - \frac{2}{\alpha_2 F_2} \frac{dQ_2}{d\tau}. \end{aligned} \quad (163)$$

Для конкретных условий работы данного теплообменника значения $V_{\Gamma} c_{\Gamma} \rho_{\Gamma} = a_1$; $V_{\text{х}} c_{\text{х}} \rho_{\text{х}} = a_2$; $\frac{1}{V_{\text{ст}} c_{\text{ст}} \rho_{\text{ст}}} = a_3$; $\frac{2}{\alpha_1 F_1} = a_4$; $\frac{2}{\alpha_2 F_2} = a_5$ можно принять постоянными. Тогда система уравнений (163) примет конкретный вид

$$\begin{aligned} \frac{dQ_1}{d\tau} &= a_1 (t_{\Gamma(\text{вх})} - t_{\Gamma(\text{вых})}); \\ \frac{dQ_2}{d\tau} &= a_2 (t_{\text{х}(\text{вых})} - t_{\text{х}(\text{вх})}); \\ t_{\text{ст}} &= a_3 \int_0^{\tau} \left(\frac{dQ_1}{d\tau} - \frac{dQ_2}{d\tau} \right) d\tau; \\ t_{\Gamma(\text{вых})} &= a_4 \frac{dQ_1}{d\tau} - t_{\Gamma(\text{вх})} + 2t_{\text{ст}}; \\ t_{\text{х}(\text{вых})} &= 2t_{\text{ст}} - t_{\text{х}(\text{вх})} - a_5 \frac{dQ_2}{d\tau}. \end{aligned}$$

Составив масштабные уравнения в соответствии с ранее изложенным порядком, получим систему машинных урав-

нений для реализации на АВМ

$$\begin{aligned}\frac{dQ_1}{d\tau} &= k_{11}t_{r(вх)} - k_{12}t_{r(вых)}; \\ \frac{dQ_2}{d\tau} &= k_{21}t_{x(вых)} - k_{22}t_{x(вх)}; \\ t_{cr} &= \int_0^{\tau} \left(k_{31} \frac{dQ_1}{d\tau} - k_{32} \frac{dQ_2}{d\tau} \right) d\tau; \\ t_{r(вых)} &= k_{41} \frac{dQ_1}{d\tau} - k_{42}t_{r(вх)} + k_{43}t_{cr}; \\ t_{x(вых)} &= k_{51}t_{cr} - k_{52}t_{x(вх)} - k_{53} \frac{dQ_2}{d\tau}.\end{aligned}$$

Начальные и граничные условия

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 = 0 \text{ и } x = 0 \quad t_{r0} = t_{r(вх)}; \quad t_{x0} = t_{x(вх)}; \\ \tau_0 = 0 \text{ и } x = l \quad t_{rl} = t_{r(вых)} = t_{r(вх)}; \\ t_{xl} = t_{x(вых)} = t_{x(вх)}. \end{aligned} \right\} \quad (164)$$

Структурная схема приведенной модели изображена на рис. 71. Решающие элементы обозначены цифрами 1, 2, 3,

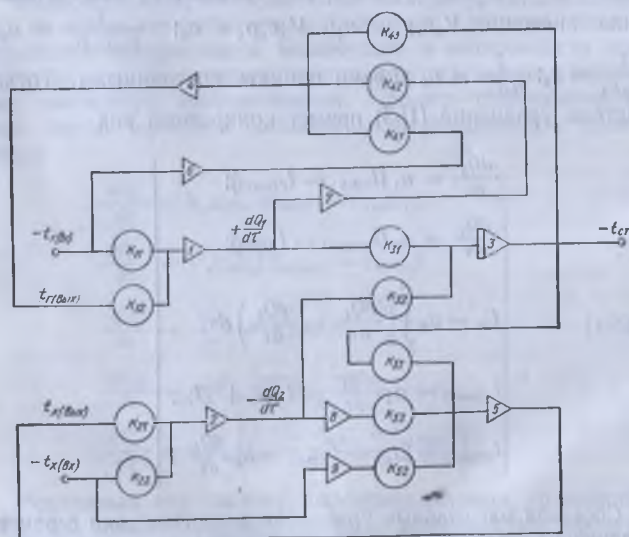


Рис. 71. Структурная схема модели теплообменника на АВМ.

4, 5, а инверторы — цифрами 6, 7, 8 и 9. Имея численные значения постоянных a_1, a_2, a_3 и a_5 и выбрав масштабы переменных, по изложенным выше правилам вычисляют значения коэффициентов k_{ij} .

Задавая различные значения температур теплоносителей на входе, получают соответствующие им значения температур на выходе, а подавая на входы ступенчатые или другие возмущения, — и динамические характеристики по этим каналам. Влияние других параметров на конечные значения температур теплоносителей можно установить, только изменяя значения постоянных k_{ij} , что на этой модели делать неудобно и связано с увеличением затрат времени.

§ 3. Модель установления распределения температур теплоносителей по длине теплообменника

Для составления модели установления распределения температур теплоносителей по длине теплообменника следует рассматривать теплообменник как объект с распределенными параметрами, т. е. в основу модели нужно положить описание изменения температур обоих теплоносителей во времени и в пространстве, т. е. по длине теплообменника. Как известно, объекты с распределенными параметрами описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

Если составить дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие процесс теплообмена между двумя жидкостями, разделенными стенкой, то эти уравнения будут очень сложными. Упрощенное математическое описание такого теплообменника составлено при следующих допущениях:

в поперечном сечении труб температуры обоих теплоносителей постоянные (усредненные) и изменяются только по длине теплообменника;

влияние расслаивания не учитывается, рассматривается только вынужденная конвекция;

количество теплоты, проходящее в направлении потока, в жидкости и в стенке трубы, не учитывается;

эффекты излучения и теплопроводности в радиальном направлении учитываются в общих коэффициентах теплоотдачи;

теплоемкость и плотность обоих теплоносителей постоянны;

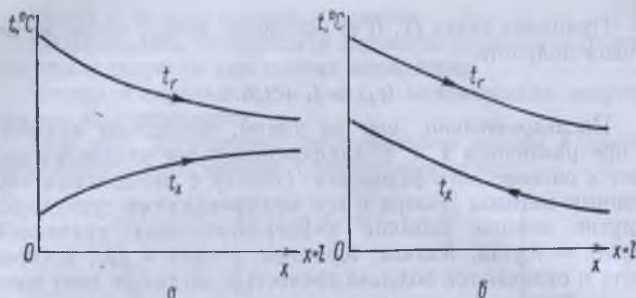


Рис. 72. Распределение температур теплоносителей по длине теплообменника в установившемся режиме: а — при прямотоке; б — при противотоке.

ренциальных уравнений типа (165), описывающих изменение температур теплоносителей в теплообменнике с разделяющей перегородкой, применяют именно этот предельный случай.

Для теплообменника с разделяющей стенкой распределение температур горячего и холодного теплоносителей по длине при установившемся режиме будет иметь вид, показанный на рис. 72.

При неустановившихся режимах линии распределения температур теплоносителей по длине будут смещаться одна к другой. Например, если в теплообменнике произошло повышение температуры горячего теплоносителя на входе в момент времени $\tau = 0$, то изменение температур теплоносителей по длине теплообменника в различные моменты времени будет иметь вид, показанный на рис. 73.

Если разделить теплообменник длиной l на n участков каждый длиной h и производные по координате $\frac{dt_r}{dx}$ и $\frac{dt_x}{dx}$ заменить конечными раз-

ностями

$$\frac{t_{r,i} - t_{r,i-1}}{h} = t'_{r,i}; \quad \frac{t_{x,i+1} - t_{x,i}}{h} = t'_{x,i},$$

то уравнения в частных производных можно заменить системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} t'_{r,i,j} &= -V_1 \frac{t_{r,i,j} - t_{r,i,j-1}}{h} - a(t_{r,i,j} - t_{ct,i,j}); \\ t'_{x,i,j} &= \pm V \frac{t_{x,i,j} - t_{x,i,j-1}}{h} + b(t_{ct,i,j} - t_{x,i,j}); \\ t'_{ct,i,j} &= +c(t_{r,i,j} - t_{ct,i,j}) - d(t_{ct,i,j} - t_{x,i,j}), \end{aligned} \right\} \quad (166)$$

где i — номер участка по длине ($i = 1, 2, \dots, n$); j — номер интервала времени ($j = 1, 2, \dots, m$).

Заменяв в системе уравнений (166) производные их конечными разностями, получим системы алгебраических уравнений для определения значения температур стенки, горячего и холодного теплоносителей в заданный момент времени и в заданном сечении теплообменника

$$\left. \begin{aligned} t'_{r,i,j} &= (t_{r,i,j} - t_{r,i,j+1})/g; \\ t'_{x,i,j} &= (t_{x,i,j+1} - t_{x,i,j})/g; \\ t'_{ct,i,j} &= (t_{ct,i,j+1} - t_{ct,i,j})/g, \end{aligned} \right\} \quad (167)$$

где $g = \Delta\tau$ — выбранный шаг изменения времени.

Для решения системы уравнений (166) и (167) необходимо составить алгоритм и программу решения на ЭВМ. Начальные и граничные условия определены системой (164).

При использовании конечно-разностных схем для решения краевых задач возникает важный вопрос об устойчивости схемы решения. Схему называют устойчивой, если малые погрешности, допущенные в начале процессов решения, уменьшаются или остаются такими же в конце решения. В противном случае схему считают неустойчивой. Выбранная нами схема решения является неустойчивой, но достаточно простой. При разбивке длины теплообменника и времени переходного процесса на небольшое число участков и интервалов можно получить решение с достаточной для технических целей точностью. Структурная схема алгоритма решения задачи на ЭВМ приведена на рис. 74. В результате решения получают закономерности изменения темпе-

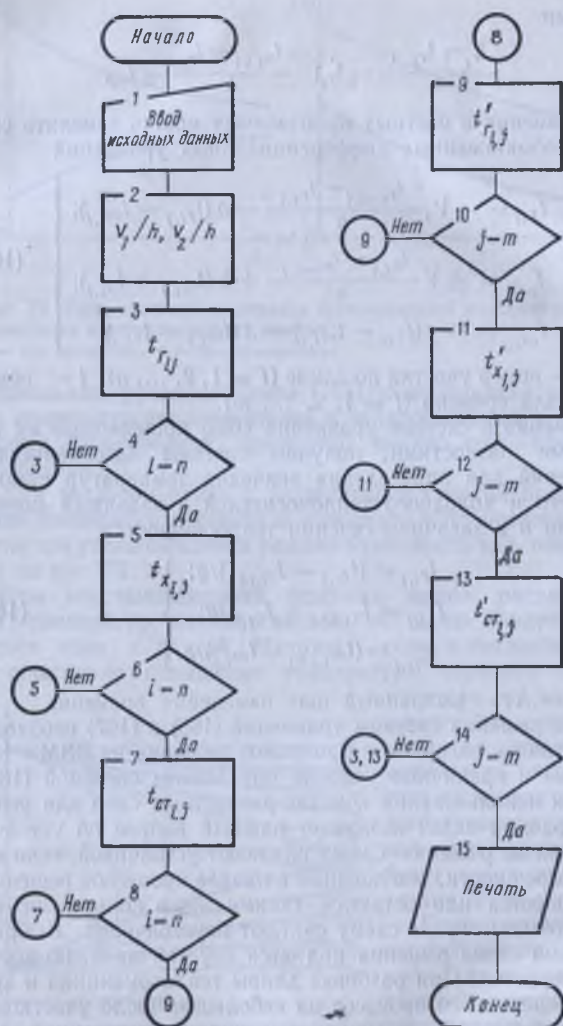


Рис. 74. Структурная схема алгоритма решения задачи распределения температур теплоносителей по длине теплообменника.

ратур холодного и горячего теплоносителей во времени по длине теплообменника. Геометрически решение можно интерпретировать как выбор значений температур на пересечении границ интервалов по времени и координате.

§ 4. Модели выбора оптимальной площади теплообменника

В пищевой промышленности применяют технологические процессы (пастеризацию молока и пр.), требующие последовательного проведения нагрева либо охлаждения обрабатываемого продукта. Такие процессы проводят в многоступенчатых теплообменных аппаратах. Схема многоступенчатого теплообменника приведена на рис. 75. Холодный теплоноситель с начальной температурой t_x^0 поступает в первую ступень, а выходит из последней N -й ступени с температурой $t_x^{(N)}$. На каждой i -й ступени холодный теплоноситель подогревается объемными потоками горячих теплоносителей V_r с температурами входа $t_{r1}^{(i)}$ и выхода $t_{r2}^{(i)}$. Тогда параметрами состояния будут $t_x^{(i)}$, а параметрами управления — $t_{r1}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$).

Поставим задачу выбора такой площади каждой ступени теплообменника, чтобы общая площадь всех ступеней теплообменников была минимальной при условии, что $t_x^{(0)}$, $t_x^{(N)}$ и $t_{r1}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, N$) заданы.

Уравнение теплового баланса для i -й ступени имеет вид

$$V_x c_x \rho_x (t_x^{(i)} - t_x^{(i-1)}) = V_r c_r \rho_r (t_{r1}^{(i)} - t_{r2}^{(i)}).$$

Для упрощения задачи будем считать, что произведения количества потоков на их теплоемкость для обоих теплоносителей в каждой ступени одинаковы, а потери отсутствуют. Тогда

$$t_{r1}^{(i)} - t_{r2}^{(i)} = t_x^{(i)} - t_x^{(i-1)}.$$

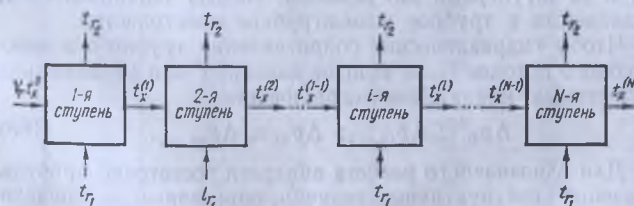


Рис. 75. Структурная схема многоступенчатого теплообменника.

Из этого уравнения видно, что разности температур потоков на входе и выходе каждой ступени равны. Приравняв количество энергии, приобретенной на i -й ступени холодным потоком и отданной из этой же ступени горячим потоком, получаем

$$V_x c_x \rho_x (t_x^{(i)} - t_x^{(i-1)}) = \alpha^{(i)} \tau F^{(i)} (t_{r_i}^{(i)} - t_{r_i}^{(i)}),$$

где $\alpha^{(i)}$ — суммарный коэффициент теплоотдачи для i -й ступени; $t_{r_i}^{(i)} = u^{(i)}$ — управляющий параметр на i -й ступени; $F^{(i)}$ — площадь i -й ступени теплообменника.

Решив последнее уравнение относительно $t_x^{(i)}$, получим

$$t_x^{(i)} = \frac{\alpha F^{(i)} \tau (t_{r_i}^{(i)} - t_{r_i}^{(i)}) + V_x c_x \rho_x t_x^{(i-1)}}{V_x c_x \rho_x}.$$

Если же решить это уравнение относительно F , задачу можно свести к стандартной вычислительной процедуре динамического программирования.

Считают, что использование современных вычислительных машин позволяет решать задачи оптимизации теплообмена путем полного перебора. Полный перебор вариантов прост в реализации, не требует применения сложных математических методов и гарантирует нахождение интегрального (глобального) критерия оптимальности. Метод применим только в случае перебора ограниченного числа вариантов.

В качестве примера рассмотрим процесс поиска оптимальной площади теплообменного аппарата с витыми трубами и жестким сердечником. Теплообменник состоит из двух трубных решеток, жестко соединенный сердечником диаметром D_c , на который рядами навиты трубы. Расстояния между рядами труб равны толщине δ . Эти ряды фиксируют шаг трубного пучка в радиальном направлении. Вся трубная система заключена в цилиндрический кожух с днищами и со штуцерами для входа и выхода теплоносителей, подаваемых в трубное и межтрубное пространство.

Чтобы гидравлические сопротивления трубного и межтрубного потоков были меньше заданных или максимально допустимых, накладывают ограничения

$$\Delta p_{tr} \leq \Delta p_{tr_{max}}; \quad \Delta p_{mt} \leq \Delta p_{mt_{max}}. \quad (168)$$

Для однозначного расчета аппарата достаточно принять значения конструктивных величин, определяющих площади сечений для прохода теплоносителей по трубному и меж-

трубному пространству, т. е. внутренний диаметр труб d_v и число труб в пучке n . Площадь сечения межтрубного пространства определяется наружным диаметром труб d_n , числом рядов навивки z , толщиной прокладки между рядами δ и диаметром сердечника D_c .

Поскольку применяют только стандартные трубы, то величины d_v и t_n связаны между собой. В результате расчет данного аппарата определяется пятью независимыми переменными: n, z, δ, D_c, n_n .

При варьировании независимых переменных в некотором диапазоне сочетания их значений будут нереальные варианты. Во избежание этого производят предварительную конструктивную проработку путем просмотра нормативных документов на теплообменную аппаратуру. При оптимизации теплообменников с витыми трубами и жестким сердечником используют действующие отраслевые стандарты на эти аппараты.

Выборка независимых переменных для 15 различных вариантов, включенных в отраслевой стандарт, содержащий полный перечень из 132 вариантов, приведена в табл. 36.

Поскольку для каждого набора значений независимых переменных имеются ограничения по величине площади теп-

Таблица 36. Выборка независимых переменных

Номер варианта	Независимые переменные					Допускаемые пределы площади поверхности теплообмена, м ²	
	размер труб $d_n \times S$, мм	число труб в пучке n	число рядов труб z	толщина паянки δ , мм	диаметр сердечника D_c , мм	F_{min}	F_{max}
1	10×1	445	13	4	194	20	160
2	10×1	548	15	2	194	25	200
3	10×1	548	15	3	194	25	200
4	10×1	1416	23	4	325	100	500
5	10×1	1602	25	3	325	125	630
6	16×2	213	9	5	194	20	125
7	16×2	238	10	3	194	20	125
8	25×2	342	13	3	245	63	315
9	25×2	193	9	5	245	25	160
10	10×1	357	14	4	194	40	160
11	16×2	162	9	5	194	20	125
12	16×2	168	10	3	194	20	125
13	25×2	218	12	5	245	50	250
14	25×2	247	13	3	245	63	315
15	10×1	365	24	3	194	63	400

Таблица 37. Исходные данные для расчета аппарата с витыми трубами

Показатель	Обозначение	Единица для расчета
Массовый расход среды		
в трубах	$G_{тр}$	кг/с
в межтрубном пространстве	$G_{мт}$	кг/с
Температура среды		
на входе в трубное пространство	$t_{тр1}$	К
на выходе из трубного пространства	$t_{тр2}$	К
на входе в межтрубное пространство	$t_{мт1}$	К
на выходе из межтрубного пространства	$t_{мт2}$	К
Свойства среды в трубном пространстве		
коэффициент объемного расширения	$\beta_{тр}$	K^{-1}
плотность	$\rho_{тр}$	кг/м ³
коэффициент теплопроводности	$\lambda_{тр}$	Вт/(м · К)
динамическая вязкость	$\mu_{тр}$	Па · с
удельная теплоемкость	$c_{тр}$	Дж/(кг · К)
Свойства среды в межтрубном пространстве		
коэффициент объемного расширения	$\beta_{мт}$	K^{-1}
плотность	$\rho_{мт}$	кг/м ³
коэффициент теплопроводности	$\lambda_{мт}$	Вт/(м · К)
динамическая вязкость	$\mu_{мт}$	Па · с
удельная теплоемкость	$c_{мт}$	Дж/(кг · К)
Тепловая нагрузка	Q	Вт
Коэффициент запаса по площади поверхности теплообмена	η	—
Максимально допустимое гидравлическое сопротивление в пространстве, Вт		
трубном	$\Delta p_{трmax}$	Па
межтрубном	$\Delta p_{мтmax}$	Па

лопередающей поверхности, в сочетании с которой может быть использована данная компоновка аппарата, то для определения области допустимых значений независимых переменных требуется ввести в расчет дополнительные ограничения

$$F_{i_{min}} \leq F_i \leq F_{i_{max}}. \quad (169)$$

Исходные данные для выбора варианта должны быть доступными, а их количество — минимальным. С точки зрения использования программы для данной задачи рациональней выбрать следующие исходные данные: 1) вид теплоносителей; 2) их расходы $G_{тр}$, $G_{мт}$; 3) значения конечных температур, например $t_{тр1}$, $t_{тр2}$, $t_{мт1}$, определяемые проектным заданием; 4) ограничения по допустимым перепадам давления $\Delta p_{трmax}$, $\Delta p_{мтmin}$; 5) схема тока теплоносителей.

Методы расчета теплофизических свойств теплоносителей представляют собой самостоятельную задачу, в ряде случаев значительно превосходящую по сложности программу расчета теплообменника. В связи с этим будем считать, что необходимые теплофизические свойства известны. По тем же соображениям включают в состав исходных данных и четвертую конечную температуру теплоносителей $t_{мт2}$ (для ее расчета требуется вычислить теплосодержание потоков).

Поскольку конвективные аппараты рассматриваемого типа выполняются в основном по схеме противотока, то алгоритм должен быть предусмотрен только расчет противотока. Полный перечень исходных данных для решения рассматриваемой задачи приведен в табл. 37. Алгоритм расчета соответствует принятому порядку расчета теплообменников.

Структурная схема алгоритма приведена на рис. 76 и включает следующие операции.

После ввода исходных данных (блок 1) рассчитывают средние значения и перепады величин (блок 2)

$$t_{тр} = 0,5(t_{тр1} + t_{тр2});$$

$$t_{мт} = 0,5(t_{мт1} + t_{мт2});$$

$$Pr_{тр} = \frac{\mu_{тр} c_{тр}}{\lambda_{тр}};$$

$$Pr_{мт} = \frac{\mu_{мт} c_{мт}}{\lambda_{мт}};$$

$$\Delta t_1 = |t_{тр1} - t_{мт2}|;$$

$$\Delta t_2 = |t_{тр2} - t_{мт1}|.$$

Логическим блоком 3 проверяют условия величины разности температур на концах аппарата

$$\left| 1 - \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \right| < 0,1.$$

Если отношение средней разности конечных температур незначительно, т. е. $\Delta t_1 \approx \Delta t_2$, то средняя разность температур определяется по формуле (блок 4)

$$\Delta t_{cp} = 0,5(\Delta t_1 - \Delta t_2).$$

Если разности конечных температур существенно отличаются, то средняя разность температур определяется формулой (блок 5)

$$\Delta t_{cp} = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_2}{\ln(\Delta t_1/\Delta t_2)}.$$

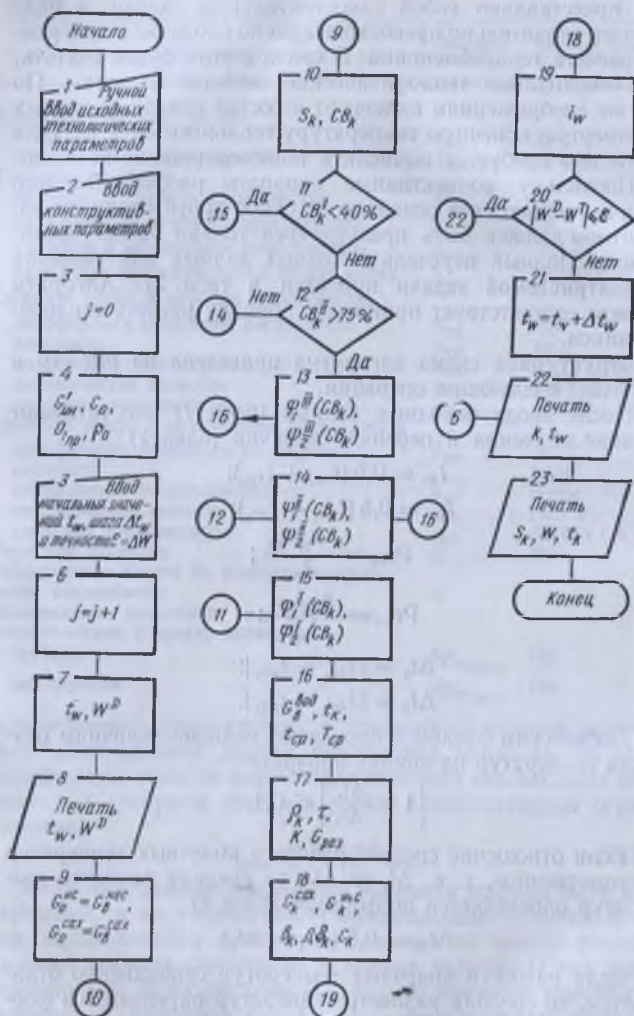


Рис. 76. Структурная схема алгоритма оптимизации теплообменника.

Принято первый номер текущего варианта теплообменника $i = 1$, а также и номер варианта, удовлетворяющего всем ограничениям данного расчета $j = 0$ (блок 6), вводить значения независимых переменных текущего варианта (блок 7) $d_n = d_{ni}$; $d_b = d_{bi}$; $D_c = D_{ci}$; $z = z_i$, и затем вычислять внутренний диаметр кожуха D_b , площади живых сечений трубного и межтрубного пространств f_t и f_{mt} и угол наивки труб γ (блок 8)

$$D_b = D_c + 2(d_n + \delta)z;$$

$$f_{tr} = 0,785d_n^2n;$$

$$f_{mt} = 3,14 \{ (D_c + 0,002) 0,002 + \delta [D_c + 2(d_n + 0,002) + \delta + (z - 2)(d_n + \delta)(z - 1)] \};$$

$$\gamma = \arctg \left[\frac{3,14(D_b + D_c)z}{2n(d_n + 0,003)} \right].$$

Эти формулы получены из геометрических характеристик теплообменника с витыми трубами. Зазор между кожухом и последним рядом наивки принят равным δ , а шаг между трубами вдоль оси аппарата — $d_n + 0,003$ м.

Эти данные позволяют вычислить скорости и критерии Рейнольдса (блок 9)

$$v_{tr} = \frac{G_{tr}}{f_{tr}\rho_{tr}}; \quad v_{mt} = \frac{G_{mt}}{f_{mt}\rho_{mt}};$$

$$Re_{tr} = \frac{v_{tr}\rho_{tr}d_b}{\mu_{tr}}; \quad Re_{mt} = \frac{v_{mt}\rho_{mt}d_n}{\mu_{mt}}.$$

Расчет коэффициента теплопередачи k производят по отдельному алгоритму (типовый блок 10).

Площадь теплопередающей поверхности рассчитывают по формуле (блок 11)

$$F = \eta \frac{Q}{k\Delta t_{cp}},$$

а затем повторяют условия соответствия полученного результата максимальным и минимальным размерам поверхности нагрева, т. е. проверяют граничные условия (логические блоки 12 и 13)

$$F_{i\min} \geq F \geq F_{i\max}.$$

Если рассчитанная площадь соответствует ограничениям, вычисляют длины труб l вдоль оси аппарата (блок 14)

$$l = \frac{F}{3,14 d_n n};$$

$$m = \frac{l}{(d_n + 0,003) \sqrt{\left[\frac{(D_o + D_c) z \cdot 3,14}{2 (d_n + 0,003) n} \right]^2 + 1}}.$$

При несоответствии результата расчета ограничениям переходят к блоку 21 для выбора следующего варианта и процедура повторяется, начиная с блока 7.

Расчет гидравлических сопротивлений производят по отдельному алгоритму (типовый блок 15). Логическими блоками проверяют условия (блоки 16 и 17)

$$\Delta p_{тр} > \Delta p_{тр\max} \text{ и } \Delta p_{мт} > \Delta p_{мт\max}.$$

При несоответствии этих условий переходят к следующему варианту (блок 21) и всю процедуру повторяют, начиная с блока 7. При соответствии заданным ограничениям вычисляют значения критерия оптимальности текущего варианта и увеличивают номера варианта, выбранного в пределах принятых ограничений для критерия оптимальности КО (блок 18)

$$j = j + 1.$$

Затем проверяют условия нахождения текущего варианта в допустимой области выбора (логический блок 19)

$$j = 1.$$

Если условия выполняются, то параметры текущего варианта на данном этапе расчета считают оптимальными (блок 20) и выдают их на печать (блок 22)

$$d_{n_0} = d_n; D_{c_0} = D_c; d_{b_0} = d_n; n_0 = n \delta_0 = \delta;$$

$$z_0 = z; KO = KE_{\text{опт}}.$$

Если условия не выполняются, то сравнивают критерий оптимальности текущего варианта j с оптимальным из всех предыдущих ($j - 1, j - 2$ и т. д.) (логический блок 21). При максимизации условие записывают в виде

$$KO_j > KO_{j-1},$$

а затем проверяют условия просмотра всех 132 вариантов нормали (блок 20) ($i = N$), результаты выдают на печать (блок 22).

Если условие не выполняется $i < N = 132$, то увеличивают номер текущего варианта на единицу $i = i + 1$ и возвращаются к блокам 7, 16 и 17 (повторение расчета).

Если все варианты пересмотрены, то результаты расчета выдают на печать (блок 22).

Алгоритм расчета коэффициента теплопередачи является составной частью алгоритма оптимизации (типовым блоком 10). Структурная схема алгоритма типового блока приведена на рис. 77 и включает следующие операции.

Вычисляют коэффициенты теплоотдачи и теплопередачи в первом приближении α^{np} и k^{np} (блок 1) и принимают их равными

$$\alpha_{тр}^{np} = 500; \alpha_{мт}^{np} = 500,$$

тогда

$$k^{np} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{мт}^{np}} + \frac{d_n}{d_s} \frac{1}{\alpha_{тр}^{np}}}.$$

Затем вычисляют среднюю температуру стенки (блок 2)

$$\bar{t}_{ст} = \bar{t}_{мт} + \frac{k^{np}}{\alpha_{мт}^{np}} (\bar{t}_{тр} - \bar{t}_{мт}).$$

Логическим блоком 3 проверяют условия ламинарности движения в трубах

$$Re_{тр} < 2,1 \cdot 10^3.$$

Если условия не выполняются, то проверяют условия турбулентности режима течения в трубах (блок 4)

$$Re > 10^4.$$

Если условие выполняется, то вычисляют критерий Нуссельта для ламинарного режима, вычислив предварительно критерий Грасгофа (блок 7)

$$Gr_{тр} = \frac{d_s^3 |\bar{t}_{ст} - \bar{t}_{тр}| \beta_{тр} \rho_{тр}^2}{\mu_{тр}},$$

$$Nu_{тр} = 0,15 Re_{тр}^{0,33} Gr_{тр}^{0,1} Pr_{тр}^{0,43}.$$

При невыполнении условий режим является турбулентным и поэтому критерий Нуссельта вычисляют для турбулентного режима (блок 5)

$$Nu_{тр} = 0,023 Re_{тр}^{0,8} Pr_{тр}^{0,4}.$$

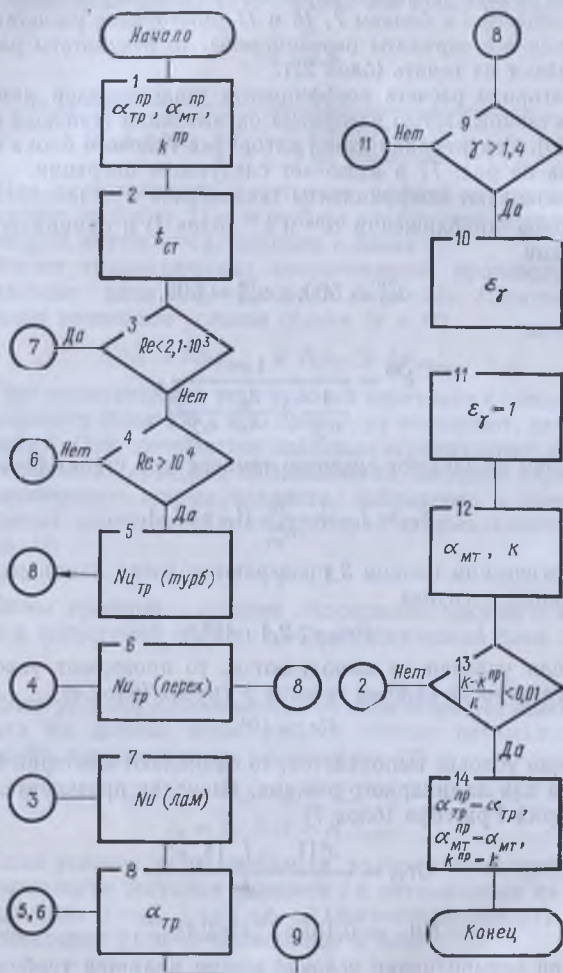


Рис. 77. Структурная схема алгоритма расчета коэффициента теплопередачи.

При невыполнении условий режим является переходным, критерий Нуссельта вычисляют по формуле (блок 6)

$$Nu_{tr} = \epsilon Pr_{tr}^{0,43}$$

Коэффициент ϵ рассчитывается как функция Re_{tr} путем интерполяции данных

$Re_{tr} \cdot 10^3$	2,2	2,3	2,5	3	3,5	4	5	6	7,8	8	9	10
	2,2	3,6	4,9	7,5	10	12,2	16,5	20	24	27	30	33.

После этого можно вычислить уточненное значение коэффициента теплоотдачи в трубном пространстве (блок 8)

$$\alpha_{tr} = \frac{Nu_{tr} \lambda_{tr}}{d_n}$$

а затем проверяют условия превышения угла атаки на величину, при которой необходим учет поправки на перпендикулярность потока (блок 9). Если $\gamma > 1,4$, то вычисляют поправку (блок 10) по формуле

$$\epsilon_\gamma = 0,875 \gamma^{0,405}$$

Если условие не выполняется, то поправка не вводится: $\epsilon_\gamma = 1$ (блок 10).

В литературе рекомендации по выбору поправки приводятся в табличной форме. Последняя приведенная формула для вычисления поправки представляет собой аппроксимацию табличных данных.

Затем блоком 12 вычисляют коэффициент теплоотдачи в межтрубном пространстве

$$Nu_{mt} = 0,22 \epsilon_\gamma Re_{mt}^{0,65} Pr_{mt}^{0,36}$$

$$\alpha_{mt} = \frac{Nu_{mt} \lambda_{mt}}{d_n}$$

и уточненное значение коэффициента теплопередачи

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{tr}} + \frac{1}{d_n} + \frac{1}{\alpha_{mt}}}$$

Логическим блоком 13 проверяют условия сходимости итераций

$$\left| \frac{k - k^{pr}}{k} \right| < 0,01$$

Если условия выполняются, то переходят к блоку 14, где вычисляют новые приближенные значения

$$\alpha_{tr}^{pr} = \alpha_{tr}; \quad \alpha_{mt}^{pr} = \alpha_{mt}; \quad k^{pr} = k.$$

Если условия не выполняются, то расчет повторяют, начиная с блока 1, пока приближенные значения не будут соответствовать действительным, т. е. $\alpha_{тр}^{пр} \approx \alpha_{тр}$, и т. д.

Структурная схема алгоритма расчета гидравлических сопротивлений приведена на рис. 78 и включает следующие операции.

Вводят исходные данные по величине коэффициента гидравлических потерь входа и выхода. Вычисляют граничные значения Re , при которых коэффициент сопротивления не зависит от скорости потока при шероховатости труб 6×10^{-5} м (блок 2)

$$Re_{гр} = \frac{100d_n}{12 \cdot 10^{-5}}.$$

На следующем этапе проверяют условие (блок 3)

$$Re_{гр} > 10^4.$$

Если условие выполняется, то вычисляют коэффициент сопротивления для турбулентного режима (блок 6) по формуле

$$\xi_{тр} = 0,1 \left(\frac{12 \cdot 10^{-5}}{d_n} \right)^{0,25}.$$

Если условие не выполняется, то дополнительно проверяют условия (блок 4)

$$Re_{тр} < 2,1 \cdot 10^3.$$

При выполнении условия вычисляют коэффициент сопротивления для ламинарного режима по формуле (блок 7)

$$\xi_{тр} = \frac{64}{Re_{тр}},$$

а при невыполнении условия коэффициент сопротивления для переходного режима рассчитывают по формуле (блок 6)

$$\xi_{тр} = \frac{0,316}{Re^{0,25}}.$$

Используя численные значения коэффициентов местных сопротивлений на входе и выходе $\xi_{вх} = 1$ и $\xi_{вых} = 0,5$, рассчитывают полное гидравлическое сопротивление трубного пространства по формуле (блок 8)

$$\Delta p_{тр} = \left(\xi_{тр} \frac{l}{d_n} + \xi_{вх} + \xi_{вых} \right) \frac{\omega_{тр}^2 \rho_{тр}}{2}.$$

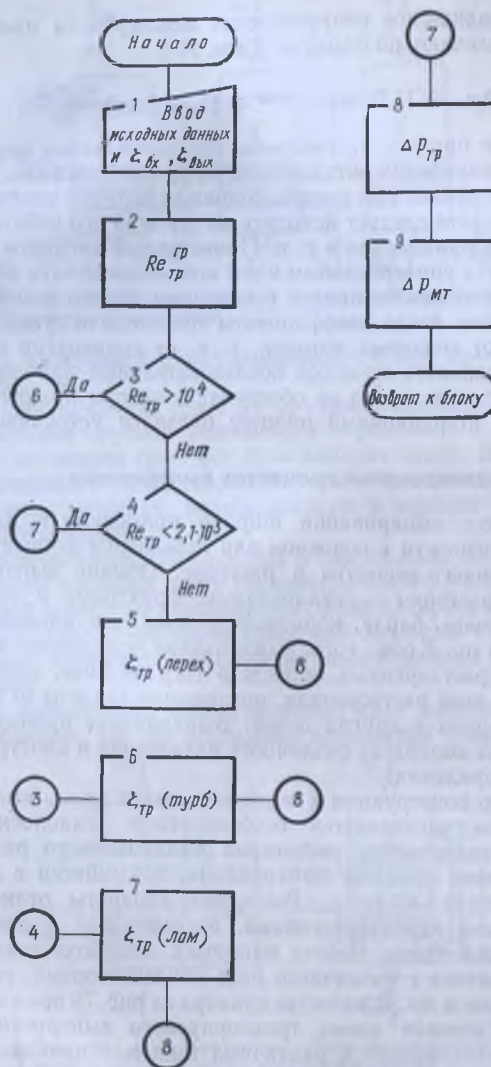


Рис. 78. Структурная схема алгоритма гидравлического расчета теплообменника.

Гидравлическое сопротивление межтрубного пространства определяют по формуле (блок 9)

$$\Delta p_{\text{мт}} = (1,06 m \text{Re}^{-0,122} + \xi_{\text{вх}} + \xi_{\text{вых}}) \frac{\omega_{\text{мт}}^2 \rho_{\text{мт}}}{2}.$$

В этом примере рассмотрены принципиальная постановка и решение задач оптимизации в упрощенном виде. В конкретных случаях при расчете основных величин теплообменного аппарата следует исходить из условий его работы, особенностей применения и т. п. Приведенный алгоритм расчета является универсальным и его можно применять для других типов теплообменников с кипением, конденсацией рабочих агентов, когда коэффициенты теплоотдачи существенно зависят от тепловых потоков, т. е. от температур стенок. Хотя сходимость процесса последовательных приближений математически строго не обоснована, но при практических расчетах итерационный процесс оказался устойчивым.

§ 5. Моделирование процессов выпаривания

Процесс выпаривания широко применяют в пищевой промышленности в основном для повышения концентрации растворенного вещества в растворе. Обычно выпаривают водные растворы — свекловичные, фруктовые и овощные соки, сиропы, барду, кормовые дрожжи, пектиновый клей, молоко и пр. Кроме того, выпаривание используют для выделения растворенных веществ в твердом виде, выделения в чистом виде растворителя, поглощения теплоты от охлаждаемой среды и других целей. Выпаривание производят в выпарных аппаратах различного назначения и конструктивных оформлений.

Выбор конструкции и технологической схемы выпарных аппаратов определяется особенностями технологической схемы предприятия, свойствами выпариваемого раствора, назначением процесса выпаривания, традициями в данном производстве и т. п. Выпарные аппараты отличаются режимными характеристиками, статическими и динамическими свойствами. Работа выпарных аппаратов технологически связана с различного рода конденсаторами, теплообменниками и пр. В качестве примера на рис. 79 представлена технологическая схема трехкорпусного выпарного аппарата, применяемого в различных пищевых производствах. Конструктивные схемы наиболее распространенных типов выпарного аппарата с вертикальными кипяtilьными труб-

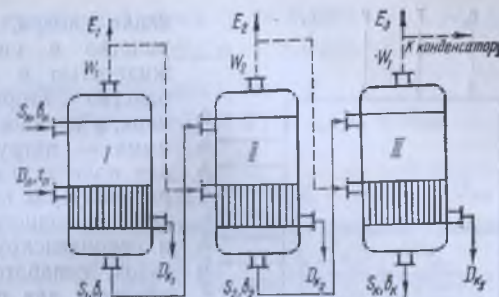


Рис. 79. Технологическая схема многокорпусной выпарной установки.

ками и внутренней циркуляционной трубкой приведены на рис. 80.

В первом случае (рис. 80, а) свежий раствор поступает над верхней трубной решеткой, а сгущенный — отводится снизу, во втором (рис. 80, б) — аппарат снизу. Вторичный пар заполняет надрастворный объем и выводится из аппарата через ловушку, расположенную в верхней части выпарного аппарата.

Уровень кипящего раствора h над нижним сечением поверхности раствора выше пьезометрического уровня h_p некипящей жидкости в сокомерном стекле аппарата вследствие разницы плотностей парожидкостной эмульсии и раствора, так как плотность кипящей эмульсии меньше плотности раствора.

Из приведенных конструктивных схем выпарного аппарата следует, что его основными элементами являются гре-

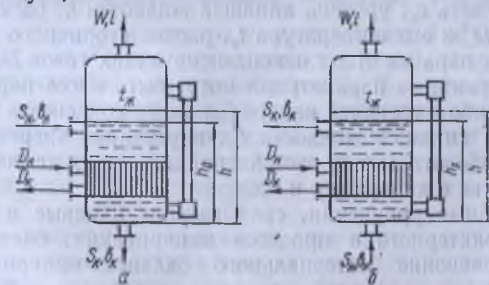


Рис. 80. Конструктивные схемы однокорпусного выпарного аппарата а) с верхней и б) с нижней подачей выпариваемого раствора.

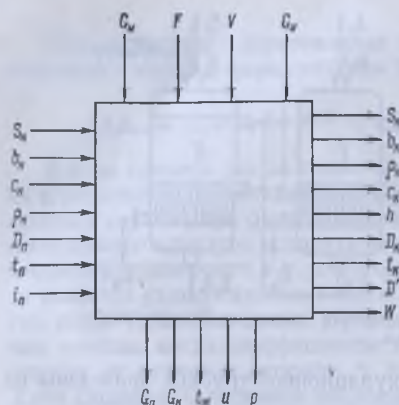


Рис. 81. Параметрическая схема выпарного аппарата.

ются следующими входными параметрами: расходом выпариваемой жидкости S_v и ее первоначальной концентрацией b_v , теплоемкостью c_v и плотностью ρ_v , расходом греющего пара D_n и его температурой t_n либо энтальпией i_n , теплоемкостью c_n , плотностью ρ_n . Эти параметры, характеризующие входные потоки, могут быть управляющими параметрами. Процесс выпаривания определяется и конструктивными параметрами: массой металла корпуса G_m , площадью поверхности нагрева F , объемом аппарата V , массой изоляции G (рис. 81).

Выходными параметрами являются расход концентрированного раствора S_k и его концентрации b_k , плотность ρ_k и теплоемкость c_k , уровень кипящей жидкости h , расход конденсата D_k и его температура t_k , расход вторичного пара W и расход пара на отвод неконденсирующих газов D' .

Внутренними параметрами могут быть масса пара в аппарате либо в греющей камере G_n , масса конденсата G_k , температура кипящей жидкости $t_{ж}$, внутренняя энергия жидкости либо отдельных частей аппарата u , их температуры t , давление в аппарате p и пр.

Основные уравнения, связывающие входные и выходные характеристики процесса выпаривания, следующие:

а) уравнение материального баланса выпариваемого раствора

$$S_v = S_k + W; \quad (170)$$

юющая камера, пространство с кипящей жидкостью и пространство вторичного пара, а вспомогательными — патрубками для подвода и отвода рабочих сред конденсата, первичного пара и неконденсирующих газов, сепараторы и ловушки для отделения пены и капель жидкости от вторичного пара и пр.

Независимо от конструкции и назначения каждый выпарной аппарат характеризу-

б) уравнение баланса сухих веществ

$$S_v C B_v = S_k C B_k; \quad (171)$$

в) уравнение теплового баланса

$$S_v c_v t_v + Q_n = W i + S_k c_k t_k + Q_{пот} \quad (172)$$

или

$$Q_n = W(i - c_v t_k) + S_k c_k t_k - S_v c_v t_v + Q_{пот}; \quad (173)$$

г) уравнение для определения расхода греющего пара

$$D = W \frac{i - c_v' t_k}{i'' - i'} + S_v c_v \frac{t_k - t_v}{i'' - i'} + \frac{Q_{пот}}{i'' - i'}, \quad (174)$$

где c_v — теплоемкость воды; Q_n — теплоемкость пара; $Q_{пот}$ — потери теплоты; i , i' , i'' — соответственно энтальпия вторичного пара, конденсата и греющего пара.

Основной технологической целью процесса выпаривания в пищевых производствах является обеспечение заданной концентрации выпариваемого раствора. Например, концентрация выпариваемого диффузионного сока сахарных заводов после многокорпусной установки должна быть 65 % CB_k . Основная обобщенная оценка процесса выпаривания — это удельные затраты на выпаривание 1 м³ воды. Частными оценками являются удельные затраты или расходы пара, тепловой или электрической энергии, капитальные, эксплуатационные или другие затраты, которые характеризуют отдельные стороны этого сложного процесса.

Обобщенный критерий технико-экономической эффективности процесса выпаривания представляет собой выражение

$$Z_p = C_Q Q_T + C_{эл} Q_{эл} + (1,56 p_a + p_n)(C_F F + K_{уд}) Z_{пр},$$

где Z_p — расчетные затраты на выпаривание 1 м³ воды; C_Q , C_F , $C_{эл}$ — соответственно стоимость (цена) теплоты, поверхности нагрева и электроэнергии; Q_T , $Q_{эл}$ — расходы теплоты и электроэнергии; $p_a + p_n$ — избыточное давление в парожидкостном пространстве; F — величина площади поверхности нагрева; $K_{уд}$ — удельные приведенные капитальные затраты; $Z_{пр}$ — приведенные эксплуатационные расходы.

При процессе выпаривания значительно изменяются расход и характеристики выпариваемого раствора, расход и давление вторичного пара. Эти изменения характеризуются периодическими возмущениями непрерывного действия (от потребителей), а также воздействиями при аварий-

ных ситуациях. Внутренние возмущения определяются изменением термического сопротивления из-за образования накипи, свойств раствора в процессе выпаривания, а также накоплением неконденсирующихся газов и других неконтролируемых воздействий.

Важнейшими задачами управления выпариванием являются обеспечение на выходе раствора заданной концентрации и обеспечение тепловых потребителей паром с заданными характеристиками. Частными задачами управления могут быть стабилизация уровня в аппаратах, вакуума в концентраторе, получение требуемой цветности раствора и т. п. Конечная цель управления — обеспечение минимальных затрат на процесс выпаривания, т. е. минимальных значений технико-экономических критериев.

Математические модели выпарных установок используются для установления связей между входными и выходными параметрами, определения режимов работы существующих установок и конструктивных параметров проектируемых. Кроме того, математическое моделирование широко используется для определения динамических характеристик МВУ. Это позволяет значительно сократить затраты на выбор и обоснование режимных и конструктивных параметров и системы управления выпариванием. Рассмотрим составление математических моделей для выбора режимов работы и определения динамических свойств выпарного аппарата.

§ 6. Модель технологического расчета режимов выпаривания

Моделирование процесса выпаривания в пищевых производствах имеет особенности, связанные со свойствами выпариваемых растворов. Например, при выпаривании диффузионного сока сахарного производства во вторичном паре имеются инертные газы, состоящие в основном из углекислого газа, аммиака и всех компонентов воздуха, заметно влияющие на технологические режимы процесса выпаривания.

Образование аммиака и углекислого газа связано с тем, что диффузионный сок до выпаривания подвергается дефекации (обработка CaO), сатурации (обработка CO_2) и сульфитации (обработка SO_2). В результате этой обработки образуются аммиак и углекислый газ.

Количество аммиака определяется содержанием в свежеле аммиачного и амидного азота, а количество углекисло-

го газа — окислов калия и натрия K_2O , Na_2O , которые при сатурации окисляются до бикарбонатов. Количество попадающего во вторичный пар воздуха определяется режимом работы выпарной установки. По известным концентрациям этих компонентов в соке можно рассчитать долю инертных газов $G_{\text{ин}}$ во вторичном паре.

На первых ступенях некоторых выпарных установок применяются прямоточные аппараты, работающие практически без циркуляции и обеспечивающие наименьшие потери сахара.

Сульфитированный сок поступает под нижнюю трубную решетку аппарата, проходит через трубки, где вскипает за счет подводимого тепла греющим паром. По выходе из труб часть воды из сока испаряется и вместе с газами разложения уходит через надсоковое пространство аппарата. При этом частично разлагается сахар. С учетом этих особенностей связи между входными и выходными параметрами выпарного аппарата в статике можно приближенно описать системой уравнений

$$S_n = S_k + W;$$

$$S_n c_n t_n + Q = S_k c_k t_k + W_i;$$

$$W^D = \frac{18P_w}{P - P_w} G_{\text{ин}}; \quad (175)$$

$$t_k = \frac{\Psi_2(CB_k)}{(gP_w - \Psi_1(CB_k))} + \frac{G_k^{\text{нес}}}{G_k^{\text{вод}}} (6,81 - 0,056CB_k) - c, \quad (176)$$

где P_w — парциальное давление вторичного пара, которое определяется соотношением

$$\lg P_w = \Psi_1(CB_k) + \frac{\Psi_2(CB_k)}{Ct_k};$$

$\Psi_1(CB_k)$, $\Psi_2(CB_k)$ — величины, зависящие от массовой концентрации сухих веществ на выходе из аппарата (CB_k); C — постоянная; t_k — температура кипения сока, $^{\circ}\text{C}$; $G_{\text{ин}}$ — молярный расход инертных газов, кмоль/ч; $G_k^{\text{нес}}$, $G_k^{\text{вод}}$ — расходы несахаров и воды на выходе из аппарата; P — давление в аппарате; Q — теплота, подводимая в аппарат с греющим паром.

Приведенная система состоит из уравнений материального и теплового балансов аппарата, закона Дальтона (176) и уравнения для определения температуры сока на выходе

из аппарата t_k , полученного с учетом поправки на его доброкачественность.

Система из четырех уравнений содержит четыре неизвестные величины (S_k , W , t_k , t_w), т. е. при известных исходных данных позволяет однозначно определять все неизвестные параметры. Тем не менее ряд величин, которые входят в эту систему, определяются дополнительными соотношениями.

Расходы выпариваемого раствора на входе и выходе зависят от содержания сахаров и несахаров

$$S_n = G_n^{\text{вод}} + G_n^{\text{сах}} + G_n^{\text{нес}}; \quad (177)$$

$$S_k = G_k^{\text{вод}} + G_k^{\text{сах}} + G_k^{\text{нес}}. \quad (178)$$

Теплоемкость выпариваемого раствора на входе и выходе связана с содержанием сухих веществ и доброкачественностью

$$c = 1 - b [0,6 - 0,0018t + 0,0011(100 - D\delta)]. \quad (179)$$

Доброкачественность, в свою очередь, определяется соотношением

$$D\delta = \frac{100G}{G^{\text{сах}} + G^{\text{нес}}}, \quad (180)$$

а доля сухих веществ —

$$b_1 = G^{\text{сах}} + G^{\text{нес}}, \quad (181)$$

или массовая концентрация

$$CB = \frac{100(G^{\text{сах}} + G^{\text{нес}})}{S}. \quad (182)$$

Плотность раствора

$$\rho = 1011,8 + 3,4CB + 0,02CB^2 - (0,4 + 0,0025CB) \times (t - 20). \quad (183)$$

Энтальпия вторичного пара i_n состоит из энергии, затраченной на нагревание жидкости до температуры t_w и испарение $i_w = i_n - i_n$,

$$\left. \begin{aligned} i_n &= 0,99615t_w + 1,8239 \cdot 10^{-6}t_w^2 - 0,13468 \times \\ &\times 10^{-0,036t_w} + 0,1346 \\ i_n &= 597,34 - 0,5550t_w - 0,2389 \cdot 10x = \\ &= 5,1463 - \frac{1540}{T_w} \end{aligned} \right\}, \quad (184)$$

где x — влагосодержание воздуха.

Давление в парожидкостном пространстве определяем из уравнения

$$\lg P_w = 0,0141966 - 3,142305 \left(\frac{10^3}{T_w} - \frac{10^3}{373,15} \right) + 8,21 \lg \left(\frac{373,15}{T_w} \right) - 0,0024804 (373,15 - T_w), \quad (185)$$

где $T_w = t_w + 273,15$ K.

$$G_{\text{ин}} = \frac{G_{\text{NH}_3}}{17} + \frac{G_{\text{CO}_2}}{44} + \frac{G_{\text{вод}}}{29,8}; \quad (186)$$

$$G_k^{\text{сах}} = G_n^{\text{сах}} - G_{\text{раз}}; \quad (187)$$

$$G_k^{\text{нес}} = G_n^{\text{нес}} + G_{\text{раз}}; \quad (188)$$

$$G_{\text{раз}} = G_n^{\text{нес}} (1 - e^{k\tau}), \quad (189)$$

где константу разложения сахаров k и время выпаривания τ рассчитывают по формулам

$$k = 10^{\frac{16,68 - 4593,7/T_{\text{ср}} - 0,017059T_{\text{ср}} + 0,57\rho H_{\text{ср}}}{1}} + 10^{\frac{(20,2 - 9064)/(T_{\text{ср}} - \rho H_{\text{ср}})}{1}}; \quad (190)$$

$$\tau = 60 \left(\frac{0,785\rho_n d_{\text{тр}}^2 t_{\text{тр}} n + V}{S_n} + \frac{0,785\rho_k D^2 h}{S_k} \right). \quad (191)$$

Среднее значение температуры выпариваемого раствора и кислотность определяют соотношениями

$$T_{\text{ср}} = t_{\text{ср}} + 273,15^\circ \text{K}, \text{ где } t_{\text{ср}} = \frac{t_n + t_k}{2}; \quad (192)$$

$$\rho H_{\text{ср}} = \rho H_n - 0,0175 (t_{\text{ср}} - 25). \quad (193)$$

Постоянная S при данных условиях равна 230, функции $\Psi_1 \cdot (CB_k)$ в зависимости от пределов массовой доли сухих веществ в растворе на выходе из аппарата имеют конкретный вид при $CB_k < 40\%$

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1^I(CB_k) &= 7,48 + 0,025CB_k; \\ \Psi_2^I(CB_k) &= -1411 - 10,67CB_k \text{ при } 40\% \leq CB_k \leq 75\%; \\ \Psi_1^{II}(CB_k) &= 9,51 - 0,0254CB_k; \\ \Psi_2^{II}(CB_k) &= -2104 + 6,66CB_k \text{ при } CB_k > 75\%; \\ \Psi_1^{III}(CB_k) &= 0,73 + 0,01916CB_k; \\ \Psi_2^{III}(CB_k) &= 540 - 28,6CB_k. \end{aligned} \right\} \quad (194)$$

Для конкретных условий пищевого предприятия системы четырех уравнений (170), (172), (175), (176) недостаточно, чтобы описать связи между характеристиками процесса. В связи с этим система должна быть дополнена уравнениями (177, 194). Учитывая, что неизвестные величины входят в эти дополнительные уравнения нелинейно, возникают значительные трудности при решении расширенной системы уравнений.

Для решения этой системы уравнений применили метод последовательных приближений. Температура вторичного пара позволяет определить количество вторичного пара, используя ее зависимость от давления. Правильность подбора температуры вторичного пара контролируется равенством количества водяного пара, определенным из закона Дальтона (175) при помощи уравнения, полученного совместным решением уравнений материального и теплового балансов аппарата

$$W^T = \frac{Q_{пр} - S_k c_k t_k}{t_w - c_k t_k}, \quad (195)$$

$$Q_{пр} = S_n c_n t_n + Q_n, \quad (196)$$

где Q_n — количество подводимого тепла греющим паром. Расчет выполняется в следующем порядке (рис. 82).

1. Сначала вводят исходные данные, характеризующие свойства поступающего в аппарат раствора; расход S_n , состав $G_n^{вод}$ (массовая доля воды в соке); $G_n^{сах}$ (массовая доля сахара) и $G_n^{нес}$ (массовая доля несахаров); температура t_n , массовая концентрация CB_n и доля b_n сухих веществ; доброкачественность DB_n и кислотность pH_n при 25 °C поступающего на выпаривание диффузионного сока; затем геометрические размеры аппарата и поверхности нагрева: диаметр аппарата $D_{ап}$; диаметр труб $d_{тр}$, длина $l_{тр}$, число труб n (блок 1).

Затем вводят или рассчитывают характеристики: высоту слоя жидкости над трубной решеткой h , количество подводимого с паром тепла Q_n и давление в аппарате P (блок 2).

2. Рассчитывают все величины, которые в процессе последующих расчетов не изменяются (блок 4): $G_{ин}$ (186), теплоемкость c (179), плотность ρ раствора, подводимое количество энергии $Q_{пр}$ (196).

3. Приняв в первом приближении $j = 1$ некоторое численное значение величины t^w , определяют количество водяного пара согласно закону Дальтона W^D (175), для чего находят P^w по (185).

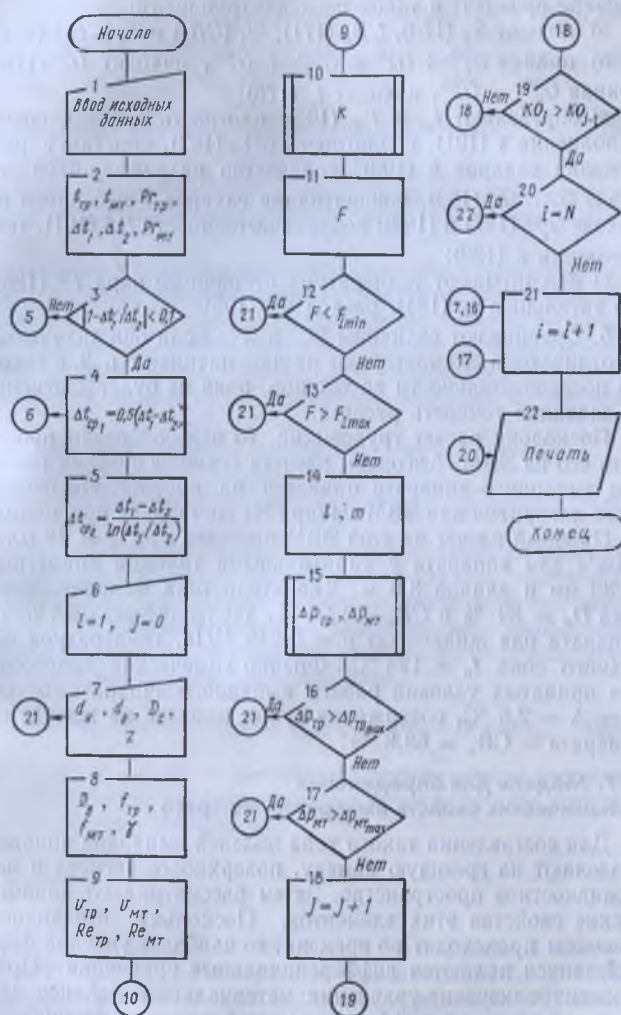


Рис. 82. Структурная схема алгоритма технологического расчета выпарного аппарата.

4. Рассчитывают расход вторичного пара W^T по (195). Расчеты проводят в такой последовательности:

а) находят S_k (170), CB_k (171), $\Psi_1(CB_k)$ и $\Psi_2(CB_k)$ (194);

б) приняв $G_n^{сах} + G_n^{нес} = G_k^{сах} + G_k^{нес}$, находят $G_k^{вед}$ (178); приняв $G_n^{нес} = G_k^{нес}$, находят t_k (176);

в) определяют $t_{ср}$ и $T_{ср}$ (192), плотность ρ_k (183), время выполнения τ (191), кислотность $pH_{ср}$ (193), константу разложения сахаров k (190), количество разложившихся сахаров $G_{раз}$, $G_k^{ис}$ (189), концентрации сахаров и несахаров на выходе $G_k^{сах}$ (187) и (188); доброкачественность D_6 (191), теплоемкость c (189);

г) рассчитывают температуру вторичного пара T^W (186); его энтальпию i^W (184); расход W^T (195).

5. Сравнивают величины W^D и W^T . Если они значительно отличаются, то повторяют расчет, начиная с п. 3, в такой же последовательности до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность расчета.

Поскольку расчет трудоемкий, то целесообразно проводить его на ЭВМ. Алгоритм расчета технологических режимов выпарного аппарата приведен на рис. 82. На основе этого алгоритма для ЭВМ «Наири-К» составлена программа.

Пробный расчет на этой ЭВМ проведен при $Q = 18$ млн. кДж/ч для аппарата с киллятельными трубами диаметром 33/30 мм и длиной 3,5 м. Характеристика выпариваемого сока $D_6 = 89\%$ и $CB_n = 12,6\%$, давление в верхней части аппарата над жидкостью $p = 0,245$ МПа, температура исходного сока $t_n = 126^\circ\text{C}$. Физико-химическая депрессия для принятых условий работы выпарного аппарата составляет $\Delta = 2,6^\circ\text{C}$, содержание сухих веществ на выходе из аппарата — $CB_k = 68,8\%$.

§ 7. Модель для определения динамических свойств выпарного аппарата

Для составления такого типа моделей выпарной аппарат разделяют на греющую камеру, поверхность нагрева и парожидкостное пространство. Затем рассматривают динамические свойства этих элементов. Поскольку переходные процессы происходят во времени, то наиболее удобной формой записи являются дифференциальные уравнения. Приближенное значение уравнения материального баланса для греющей камеры в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{d(G_n + G_k)}{d\tau} = D_n - D_k - D_u, \quad (197)$$

где G_n, G_k — масса пара и конденсата в греющей камере; D_n, D_k, D_u — расходы греющего пара, конденсата и пара, расходуемого на отвод неконденсирующихся газов.

Внутренняя энергия u выпарной установки приближенно определяется уравнением

$$u = M_n u_n + M_k c_k t_k + M_c c_c t_c + M_n c_n t_n, \quad (198)$$

где M_n, M_c, M_u — масса пара, стенок и изоляции; u_n — внутренняя энергия пара; $c_k, c_c, c_n, t_k, t_c, t_n$ — соответственно, теплоемкость и температуры конденсата, стенок и изоляции.

Считают, что энтальпия греющего пара и пара, расходуемого на отвод неконденсирующихся газов, примерно одинаковы $i_n = i_u$, а изменение внутренней энергии определяется только подводом и отводом теплоты. Продифференцировав это уравнение, получим приближенную зависимость изменения основных характеристик аппарата во времени

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \frac{DM_n u_n}{d\tau} + \frac{dM_k c_k t_k}{d\tau} + M_c c_c \frac{dt_c}{d\tau} + \\ &+ M_n c_n \frac{dt_n}{d\tau} = (D - D_n) i_n - D_k i_k - Q_n - Q_{пот}. \end{aligned} \quad (199)$$

Выражая массы пара и конденсата через их объемы и плотности и учитывая, что внутренняя энергия, плотность и теплоемкость пара и воды являются функциями температуры, Е. Н. Таубман получил приближенное дифференциальное уравнение для греющей камеры, разрешенное относительно температуры греющего пара

$$a_1 \frac{dt_n}{d\tau} = -a_2 t_n + a_3 t_c + a_4 (D - D_n) + a_5, \quad (200)$$

где a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 — постоянные, определяемые соотношениями величин, характеризующих режимы работы конкретного аппарата. Например,

$$a_2 = a_3 = \frac{F_1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_c}{2\lambda_c}}; \quad a_4 = i_n - i_k; \quad a_5 = D_n,$$

где α_1 — коэффициент теплоотдачи от греющего пара к стенкам труб; F_1 — поверхность конденсации; t_n, t_c — температура греющего пара и поверхности нагрева (стенки); δ_c, λ_c — толщина и коэффициент теплопроводности стенки.

Уравнение (200) описывает закономерность изменения температуры греющего пара во времени. Простым пересче-

гом получим уравнение для установления закономерностей изменения давления греющего пара.

Поскольку уравнение (200) в правой части содержит еще одну переменную — температуру поверхности нагрева t_c , то необходимо получить закономерность ее изменения во времени. Для этого используем уравнение энергетического баланса

$$M_c c_c \frac{dt_c}{d\tau} = Q_1 - Q_2. \quad (201)$$

Количество теплоты, подводимой к трубам греющей камеры, определяется уравнением

$$Q_1 = \frac{F_1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_c}{2\lambda_c}} (t_n - t_c), \quad (202)$$

а количество теплоты, передаваемой от труб греющей камеры к нагреваемой жидкости, — уравнением

$$Q_2 = \frac{F_2}{\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta_c}{2\lambda_c} + \frac{\delta_n}{\lambda_n}} (t_c - t_{ж}), \quad (203)$$

где F_1, F_2 — внешняя и внутренняя поверхности труб; $t_{ж}$ — температура кипящей жидкости; α_1, α_2 — коэффициенты внутренней и внешней теплоотдачи; δ_c, δ_n — толщина стенок металла и накипи; λ_c, λ_n — коэффициенты теплопроводности для стенок металла и накипи.

Преобразовав уравнение (201) и разрешив его относительно основной переменной с учетом (202) и (203), получим дифференциальное уравнение, описывающее закономерность изменения температуры поверхности нагрева во времени

$$c_1 \frac{dt_c}{d\tau} = -c_2 t_c + c_3 t_n + c_4 t_{ж}, \quad (204)$$

где

$$c_1 = c_c M_c; \quad c_2 = c_3 + c_4; \quad c_3 = \frac{F_1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_c}{2\lambda_c}};$$

$$c_4 = \frac{F_2}{\frac{1}{\alpha_2} + \frac{\delta_c}{2\lambda_c} + \frac{\delta_n}{\lambda_n}}.$$

Парожидкостное пространство выпарного аппарата можно рассматривать как три последовательно сосредоточенные емкости: кипящая жидкость, пар под зеркалом испаре-

ния и пространство вторичного пара. Уравнение материального баланса для трех емкостей в дифференциальной форме запишем в следующем виде:

$$\frac{d(M_{ж} + M_n + M_p)}{d\tau} = S_n - S_k - W, \quad (205)$$

где $M_{ж}, M_n, M_p$ — массы жидкости в аппарате, пара под и над зеркалом испарения.

Учитывая, что температура вторичного пара равна температуре кипения жидкости ($t_w \approx t_{ж}$), а изменение внутренней энергии и плотности пара является функцией температуры (давления), пренебрегая массой пара по сравнению с массой жидкости и произведя ряд алгебраических преобразований, получим дифференциальное уравнение, описывающее изменение температуры кипящей жидкости

$$d_1 \frac{dt_{ж}}{d\tau} = -d_2 t_{ж} + d_3 t_n - d_4 W + d_5, \quad (206)$$

$$\text{где } d_1 = \rho_{ж} c_{ж} V_{ж} + c_p \Sigma M_c; \quad d_2 = c_p + S_n c_{ж}; \\ d_3 = d_4 = i_n; \quad d_5 = S_n c_n t_n - Q_{пот}.$$

Объем жидкости в аппарате определяется пьезометрическим уровнем

$$V_{ж} = V_{ж.0} + \eta h, \quad (207)$$

где $V_{ж.0}$ — объем жидкости, ограниченный плоскостью, от которой отсчитывается уровень; η — площадь поперечного сечения аппарата.

Изменение уровня жидкости в аппарате определится уравнением

$$\frac{d(V_{ж} \rho_{ж})}{d\tau} = e \frac{dh}{d\tau} = S_n - S_k - W, \quad (208)$$

где $e = \rho_{ж} \eta$.

Для обеспечения постоянства количества жидкой фазы и температурного режима в аппарате необходимо соблюдать два условия

$$\Delta Q = 0 \text{ и } S_n - S_k - W = 0.$$

Уравнение для концентрации раствора в аппарате получаем из материального баланса сухих веществ в дифференциальной форме

$$\frac{d}{d\tau} (M_{ж} b + M_n e) = b_n S_n + b_k S_k - W e, \quad (209)$$

где b_n, b_k, b — концентрации на входе, выходе и в паровом пространстве (в долях единицы); ε — доля сухих веществ во вторичном паре.

Выразив массу жидкости $M_{ж} = V_{ж}\rho_{ж}$ и считая, что унос жидкости паром незначителен $\varepsilon = 0$, а концентрация — сосредоточенный параметр, продифференцировав уравнение, получим

$$V_{ж}\rho_{ж} \frac{db}{d\tau} + \rho_{ж}b \frac{dV_{ж}}{d\tau} = b_n S_n - b_k S_k,$$

$$V_{ж} = V_{ж.0} + \eta h (M_{ж} + \eta \rho_{ж} h) \frac{db}{d\tau} + \eta \rho_{ж} b \frac{dh}{d\tau} = b_n S_n + b_k S_k.$$

Подставив последнее равенство в уравнение (208), получим

$$f \frac{db}{d\tau} = b_n S_n - b (S_k - W), \quad (210)$$

где

$$f = M_{ж.0} + \eta \rho_{ж} h.$$

В результате получена система дифференциальных уравнений, описывающих установившиеся и переходные процессы в одноступенчатом выпарном аппарате

$$\left. \begin{aligned} a_1 \frac{dt_n}{d\tau} &= -a_1 t_n + a_3 t_c + a_4 (D - D_n) + a_5; \\ c_1 \frac{dt_c}{d\tau} &= -c_1 t_c + c_3 t_n + c_4 t_{ж}; \\ d_1 \frac{dt_{ж}}{d\tau} &= -d_2 t_{ж} + d_3 t_c + d_4 W + d_5; \\ f \frac{db}{d\tau} &= -(S_n - W) b_n + S_n b_k; \\ e \frac{dh}{d\tau} &= S_n - S_k - W. \end{aligned} \right\} \quad (211)$$

Эта система уравнений устанавливает связи между температурами пара t_n , стенок t_c , кипящей жидкости $t_{ж}$, ее концентрацией b и уровнем h при различных возмущающих и упрощающих воздействиях (подача пара в греющую камеру, расход пара на отвод неконденсирующихся газов, подвод и отвод выпариваемой жидкости, начальная концентрация, образование накипи и пр.).

§ 8. Моделирование многокорпусных выпарных установок

Для определения расхода вторичного пара W необходимо систему уравнений (211) данного корпуса рассматривать совместно с уравнениями корпуса, в который направляется вторичный пар. При этом возможны следующие случаи.

1. Если в выпарном аппарате температура кипящей жидкости поддерживается постоянной ($t_{ж} = \text{const}$), например при кипении при атмосферном давлении, то уравнение (206) превращается в алгебраическое и служит для определения количества вторичного пара

$$W \frac{d_3}{d_4} t_c - \frac{d_2}{d_4} t_{ж} + \frac{d_5}{d_4}.$$

2. При работе выпарного аппарата совместно с конденсатором, температура (давление) в котором зависит от расхода вторичного пара, при расчете и моделировании переходных процессов необходимо рассматривать совместно уравнения выпарного аппарата и конденсатора. Пусть переходный процесс в конденсаторе описывается линейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$z_1 \frac{dt_{\text{конд}}}{d\tau} = z_2 t_{\text{конд}} + z_3 W - z_4 G_b + z_5,$$

где $t_{\text{конд}}$ — температура пара в конденсаторе; G_b — расход охлаждающей воды; z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 — постоянные величины, определяемые режимом работы и конструктивными параметрами конденсатора.

Не учитывая гидравлические сопротивления паропровода, соединяющего выпарной аппарат и конденсатор и считая, что $t_{ж} = t_{\text{конд}} + \Delta$, запишем

$$\frac{dt_{\text{конд}}}{d\tau} = \frac{dt_{ж}}{d\tau}, \quad (212)$$

где Δ — полная депрессия.

Рассматривая совместно последних три уравнения, получаем дифференциальное уравнение динамики выпарного аппарата, работающего совместно с конденсатором

$$d_1^0 \frac{dt_{ж}}{d\tau} = -d_2^0 t_{ж} + d_3^0 t_c - d_4^0 G_b + d_5^0, \quad (213)$$

где

$$\begin{aligned} d_1^0 &= d_1 + d_4 \frac{z_1}{z_3}; & d_2^0 &= d_2 + d_4 \frac{z_2}{z_3}; \\ d_3^0 &= d_3 \frac{z_4}{z_3}; & d_5^0 &= d_5 + d_4 \left(\frac{z_5}{z_3} + \frac{z_3}{z_3} \Delta \right). \end{aligned}$$

3. При работе выпарного аппарата с другими корпусами многокорпусной выпарной установки (МВУ) расход вторичного пара W определяют на основе совместного рассмотрения уравнений для парожидкостного пространства i -го аппарата и греющей камеры $(i + 1)$ -го аппарата.

Для замыкания системы уравнений, описывающих переходные процессы в отдельных корпусах МВУ, необходимо добавить уравнения, связывающие параметры смежных аппаратов (уравнения связи). В качестве таких уравнений для установок с пароотбором можно использовать уравнения материального баланса

$$D_2 = W_1 - E_1; \quad D_3 = W_2 - E_2; \quad \dots; \quad D_i = W_{i-1} - E_{i-1}, \quad (214)$$

а для установок без пароотбора

$$D_2 = E_1; \quad D_3 = W_2; \quad \dots; \quad D_i = W_{i-1},$$

где D_i , W_i , E_i — количество греющего, вторичного и экстрапара i -го корпуса.

При этом количество недостающих уравнений составит

$$2n - 1 - (n - 1) = n.$$

Недостающие уравнения получим на основе совместного рассмотрения уравнений смежных корпусов МВУ.

Систему дифференциальных уравнений (211), описывающих статические и динамические характеристики однокорпусного выпарного аппарата, преобразовывают к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} T_1 \frac{dt_n}{d\tau} + t_n &= t_o + a_4(D - D_n) + a_5; \\ T_2 \frac{dt_c}{d\tau} + t_o &= c_3 t_n + c_4 t_{ж}; \\ T_3 \frac{dt_{ж}}{d\tau} + t_{ж} &= d_3 t_o - d_4 W + d_5; \\ T_4 \frac{db}{d\tau} + b &= f_2 b_n; \\ T_5 \frac{dh}{d\tau} &= S_n - S_k - W, \end{aligned} \right\} \quad (215)$$

где

$$T_1 = \frac{a_1}{a_2}; \quad T_2 = \frac{c_1}{c_2}; \quad T_3 = \frac{d_1}{d_2}; \quad T_4 = \frac{f_1}{S_n - W};$$

$$T_5 = e; \quad a_4 = \frac{a_1}{a_2}; \quad a_5 = \frac{a_3}{a_2}; \quad c_3 = \frac{c_3}{c_2}; \quad c_4 = \frac{c_4}{c_2}; \\ d_3 = \frac{d_3}{d_2}; \quad d_4 = \frac{d_4}{d_2}; \quad d_5 = \frac{d_5}{d_2}; \quad f_2 = \frac{S_n}{S_n - W};$$

T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 — постоянные времени выпарного аппарата соответственно по температурам греющего пара, поверхности нагрева, кипящей жидкости, а также по изменению концентрации и гидростатическому изменению уровня кипящей жидкости.

Особенностью математического описания однокорпусного выпарного аппарата, работающего совместно с конденсатором, является замена третьего уравнения в системе (211) уравнением (213). Структурная схема модели однокорпусного аппарата, отражающая эти особенности, приведена на рис. 83. Интеграторы 1, 2, 4 и 5 предназначены для решения первого, второго, четвертого и пятого уравнений системы, а интегратор 3 — для решения уравнения (213). Остальные линейные элементы 6...12 — инверторы, а 13 и 14 — блоки перемножения. В схеме предусмотрен переключатель

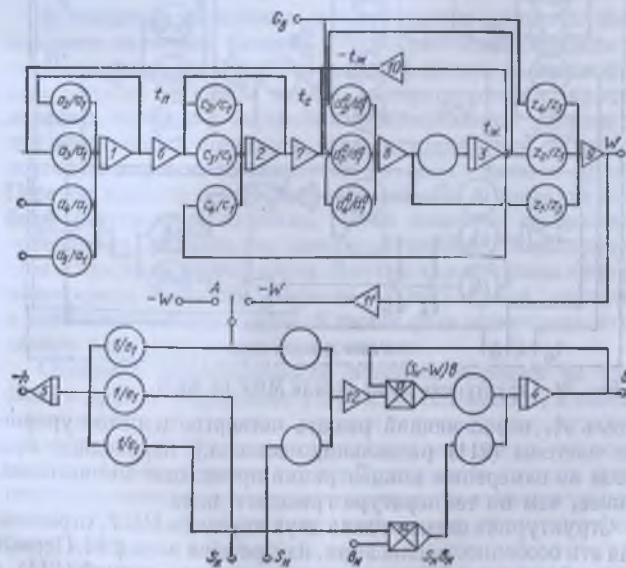


Рис. 83. Структурная схема модели однокорпусного выпарного аппарата, работающего совместно с конденсатором.

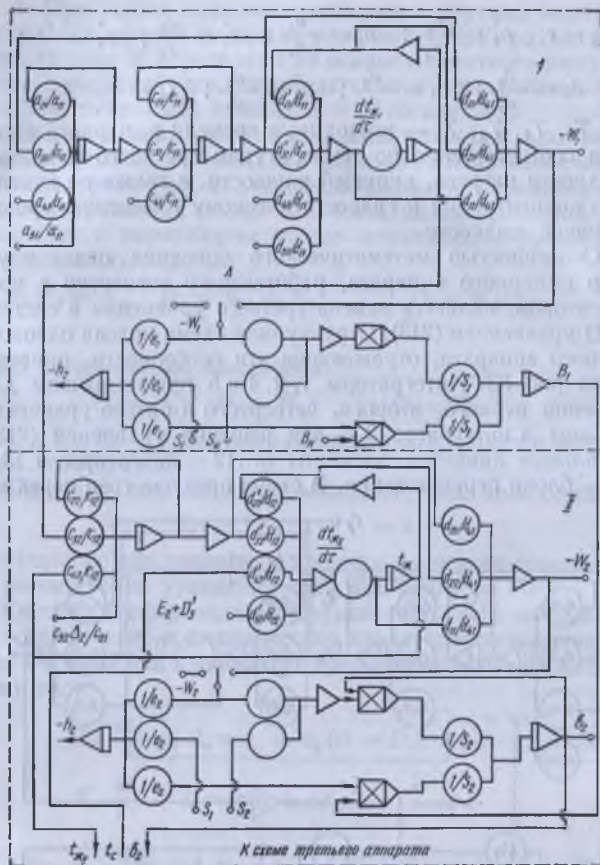


Рис. 84. Структурная схема модели МВУ на АВМ.

чателъ А, позволяющий решать четвертое и пятое уравнение системы (211) раздельно, поскольку переходные процессы по измерению концентрации происходят намного медленнее, чем по температуре греющего пара.

Структурная схема модели двух корпусов МВУ, отражающая эти особенности описания, изображена на рис. 84. Первый и второй корпуса описываются системой уравнений (211) и связи между ними устанавливаются уравнениями типа (214).

Вследствие небольших отклонений от равновесного состояния, при которых влияние величины концентрации b и уровня h на теплообмен незначительно, уравнения для концентраций и уровня можно рассматривать отдельно от уравнений для температурного режима. При этом моделирование осуществляют раздельно, что позволяет сделать переключатель А на обеих схемах. Динамические характеристики для концентрации и уровня получают ступенчатым возмущением по концентрации либо расходу раствора на входе.

Глава 9

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАССООБМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ПИЩЕВЫХ ПРОИЗВОДСТВ

§ 1. Особенности составления моделей массообменных процессов

В пищевой технологии массообменные процессы имеют огромное значение. Степень их совершенства определяется совершенством всей технологической линии. К массообменным относят процессы сушки, экстрагирования, кристаллизации, сорбции и перегонки (ректификации). Общим для них всех является наличие двух состояний или фаз компонентов и перенос компонентов из одной фазы в другую. Перенос веществ осуществляется сначала в пределах одной фазы (внутренний перенос), затем вещество преодолевает поверхность раздела фаз (внешний перенос) и распределяется в пределах второй фазы. Внутри каждой фазы вещества переносятся, главным образом, молекулярной диффузией и конвективным переносом. Каждая фаза может состоять из одного или нескольких компонентов.

Основные закономерности переноса веществ из одной фазы в другую определяет теория массопереноса, в соответствии с которой скорость массопереноса пропорциональна движущей силе. Ее величину можно определить на основе законов фазового равновесия. Движущими силами массопереноса считают разности концентраций, температур и давлений. Общие принципы описания этих закономерностей были изложены в § 4 гл. I.

Количество вещества, переходящее в пределах одной фазы к границе раздела фаз через поверхность F , перпен-

ных сушках, в установках с падающим и кипящим слоями и пр. Эти аппараты отличаются конструктивными параметрами, направлением сушильного агента и высушиваемого продукта, давлением в сушильной камере. Независимо от способа сушки и конструкции аппарата сушильную установку представим структурной схемой, приведенной на рис. 85.

Обязательные элементы сушильной установки: подогреватель (топка, калорифер и пр.) воздуха 1, смеситель 2, сушильная камера 3, устройство для подачи в сушильную камеру или бункер-накопитель высушиваемого материала 4, бункер-накопитель сухого продукта 5. В некоторых случаях применяют процессы сушки с рециркуляцией высушиваемого материала либо с рециркуляцией сушильного агента. В этом случае сушильная установка оснащается для смешивания исходного и рециркулирующего материала и сушильного агента. Наиболее сложный элемент с точки зрения составления математических моделей — сушильная камера, где происходит процесс сушки, состоящий из трех этапов: подогрева, сушки и охлаждения. В некоторых типах сушильных установок каждый этап реализуется отдельными устройствами. В подогреватель поступают топливо G_T и воздух $L_{1в}$, в результате сгорания топлива образуются горячие газы, которые смешиваются с атмосферным воздухом $L_{2в}$ и образуют су-



Рис. 85. Структурная схема сушильной установки.

шильный агент с расходом L , температурой $t_{св}$ и влагосодержанием d .

Основными параметрами процесса сушки являются характеристики высушиваемого материала и сушильного агента (рис. 86): расход G_n , начальное влагосодержание материала u_n (или влажность W_n), его температура t_n , скорость движения v_n , толщина слоя h_n в сушильной камере и его качественные показатели k_n . Сушильный агент характеризуется расходом L , температурой $t_{св}$, влагосодержанием d и пр. На процесс влияют также характеристики окружающей среды: относительная влажность ϕ_0 , температура t_0 , давление P_0 .

Рис. 86. Параметрическая схема процесса сушки.

Выходными параметрами являются характеристики высушенного материала после сушки и отработавшего сушильного агента: конечное влагосодержание u_k (влажность W_k), температура t_k , качество сухого продукта k_k , температура $t_{св}^{отп}$, влагосодержание $d^{отп}$ отработавшего сушильного агента. Выходными параметрами могут быть также различные характеристики (коэффициенты) процессов обмена тепла и влаги α , β , a_r , экспозиция τ , давление P_c , скорости сушильного агента в слое $v_{с.л}$ и пр. Выходными характеристиками являются и затраты на сушку, которые определяются различными критериями эффективности E_i : удельными расходами топлива, электроэнергии, труда и т. д.

Основной технологической целью процесса сушки является обеспечение заданного значения влажности высушиваемого продукта при сохранении качества. Качество процесса оценивают удельными затратами на единицу массы удаленной влаги. Выбор управляемых параметров и управляющих воздействий определяют задачами исследования. Чаще всего управляемыми параметрами принимают влажность и затраты на сушку. Качество высушенного материала является,

как правило, ограничением. Поскольку качество продукта при сушке определяется температурой нагрева материала и экспозицией, то эти параметры — основные ограничения. Управляющими воздействиями принимают параметры сушильного агента: расход (скорость) и температуру, а иногда — расход высушиваемого материала. Остальные входные параметры стабилизируют на входе либо относят к возмущающим воздействиям.

Для установления связей между входными и выходными параметрами применяются различные подходы и методы. Эти связи могут быть установлены аналитически на основе использования уравнений материального и энергетического баланса, законов гидромеханики, тепло- и массообмена и пр. Например, для установления связи между начальной и конечной влажностью высушиваемого материала используют уравнение кинетики сушки, для установления зависимости между температурой сушильного агента и высушиваемым материалом — уравнения теплообмена. Для более сложных моделей, устанавливающих связи между большим числом параметров, необходимо совместно рассматривать все перечисленные аналитические и экспериментальные зависимости. Экспериментальные методы установления связей между параметрами требуют создания физической либо натурной модели по различным планам активными и пассивными методами.

Экономические показатели процесса сушки могут быть рассчитаны на основе технических характеристик, полученных прямым измерением либо вычислением на основе различных моделей с учетом стоимости оборудования, существующих норм и расценок на выполнение работ.

Поскольку сушка состоит из трех этапов, то при составлении математических моделей нагрева, собственно сушки и охлаждения высушиваемого материала используют основные законы передачи массы и энергии. Так как при сушке имеет место в основном конвективный массообмен, то необходимо учитывать и основные закономерности гидродинамики.

При составлении математических моделей нагрева, сушки и охлаждения высушиваемого материала уравнения, описывающие эти закономерности, используют в различной форме.

Для анализа процесса сушки за основу обычно принимают систему дифференциальных уравнений, описывающих

тепло- и влагоперенос во влажных телах

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= k_{11} \nabla^2 u + k_{12} \nabla^2 t + k_{13} \nabla^2 P; \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} &= k_{21} \nabla^2 u + k_{22} \nabla^2 t + k_{23} \nabla^2 P; \\ \frac{\partial P}{\partial \tau} &= k_{31} \nabla^2 u + k_{32} \nabla^2 t + k_{33} \nabla^2 P. \end{aligned} \right\} \quad (216)$$

Коэффициенты k_{ij} определяются сочетанием термодинамических и теплофизических характеристик влажного тела

$$\begin{aligned} k_{11} &= a_m; \quad k_{12} = a_m \delta; \quad k_{13} = \frac{k_p}{\rho_0}; \quad k_{21} = \frac{2\varepsilon}{c} a_m; \\ k_{22} &= a + \frac{\varepsilon r}{c} a_m \delta; \quad k_{23} = \varepsilon r = \frac{a_m}{c} \delta_p; \quad k_{31} = -\frac{\varepsilon a_m}{c_p}; \\ k_{32} &= -\frac{\varepsilon a_m}{c_p} \delta; \quad k_{33} = \left(a_p - \frac{\varepsilon a_m}{c_p} \delta_p \right). \end{aligned}$$

Здесь дополнительно введены следующие обозначения: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа; $a = \lambda/c_p$ — коэффициент температуропроводности; a_m — коэффициент диффузии влаги; δ — относительный коэффициент термодиффузии влаги; δ_p — термоградиентный коэффициент; ε — критерий фазового превращения; r — удельная теплота фазового превращения; k_p — коэффициент фильтрационного переноса влаги; c — приведенная удельная теплоемкость материала; c_p — коэффициент емкости влажного воздуха в пористом теле; x, y, z — координаты; ρ_0 — плотность сухого скелета влажного тела.

Для одномерных задач при отсутствии градиента общего давления система уравнения упрощается

$$\begin{aligned} c\rho_0 \frac{\partial t}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \varepsilon r \rho_0 \frac{\partial u}{\partial \tau}; \\ \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(a_m \frac{\partial u}{\partial x} + a_m \delta \frac{\partial t}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (217)$$

Все теплофизические и термодинамические характеристики $a_m, \delta, \lambda, c, r, \varepsilon$ являются функциями температуры t и влагосодержания.

В приведенных уравнениях иногда влагосодержание u заменяют потенциалом влагопереноса $du = ct$, тогда соответствующие термодинамические и теплофизические характеристики делят на величину массоемкости.

Для решения системы приведенных уравнений необходимо знать распределение температур и влагосодержаний внутри тела в начальный момент времени (начальные условия), геометрическую форму тела и закон взаимодействия между окружающей средой и поверхностью тела (граничные условия). Совокупность начальных и граничных условий составляет в простейшем случае краевые условия.

Граничные условия могут быть заданы четырьмя способами. Граничное условие первого рода состоит в задании распределения температуры на поверхности тела t_n во времени, т. е. $t_n(\tau) = f(\tau)$ (задача Дирихле), второго рода — в задании плотности теплового потока (производная от температуры) для каждой точки поверхности тела как функции времени $q_n(\tau) = f(\tau)$ (задача Неймана), третьего рода — в задании температуры окружающей среды и закона теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой (смешанные условия)

$$q_n = \alpha [t_n(\tau) - t_c(\tau)], \quad (218)$$

где t_c — температура окружающей среды.

Граничное условие четвертого рода соответствует теплообмену тела с окружающей средой по закону теплопроводности или случаю теплообмена соприкасающихся твердых тел, когда их температуры поверхностей одинаковы (идеальный тепловой контакт).

Распределение температуры внутри тела в начальный момент времени задается начальным условием

$$t = (x, y, z, 0) = f(x, y, z).$$

При равномерном распределении температуры начальное условие принимает вид

$$t = (x, y, z, 0) = t_0 = \text{const.}$$

В соответствии с теоремой о единственности решения, если некоторая функция $f(x, y, z, \tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению, начальным и граничным условиям, то она является единственным решением задачи.

Наличие заданных краевых условий позволяет в простейших случаях получить аналитические решения прямой задачи теплопроводности, т. е. найти функцию

$$t_n = f(x, y, z, \tau).$$

Аналогично граничным условиям теплообмена взаимодействие поверхности тела с окружающей средой при массообмене также может быть описано граничными условиями четырех родов.

Граничные условия первого рода соответствуют случаю, когда потенциал диффузионного массопереноса на поверхности тела равен потенциалу массопереноса в окружающей среде; второго рода — случаю массообмена при сушке влажных тел, когда в первом периоде интенсивность сушки постоянна, а во втором уменьшается. Следовательно, в граничных условиях задается плотность потока массы вещества как функция времени $g_m = f(\tau)$. В частном случае $g_m = \text{const.}$

Граничные условия третьего рода аналогичны граничным условиям теплообмена, а четвертого рода характеризуют молекулярный теплообмен между двумя средами. В общем случае граничные условия для одномерного потока запишем

$$\left. \begin{aligned} -\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)_n + q_n(\tau) - r(1 - \varepsilon) q_n(\tau) &= 0; \\ a_m \rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_n + a_m \rho_0 \delta \left(\frac{\partial t}{\partial x} \right) + q_m(\tau) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (219)$$

где q_n, q_m — удельный поток соответственно тепла и влаги на поверхности.

Начальные условия для одномерного потока при $\tau = 0$ имеют вид

$$m = f(x) \text{ и } t_n = f_1(x).$$

Система уравнений (216) и граничные условия составляют математическое описание тепло- и массообмена во влажных телах и в бинарной парогазовой среде (сушильный агент) при конвективной диффузии в жидкостях и пр. Для подвижных сред в уравнения необходимо ввести член, содержащий скорость движения среды. Форма записи граничных условий зависит от вида тепло- и массообмена, геометрической формы среды и выбранной системы координат.

При построении математических моделей нагрева, сушки и охлаждения материала приведенные математические зависимости упрощают введением различных допущений, которые хотя и снижают точность математических моделей, но позволяют представить сложные процессы сравнительно простыми и доступными для решения методами и средствами.

Таковыми допущениями могут быть замена сложных многомерных тел и пространств одномерными: разделение пространств и тел сложной формы на простые элементы; неизменность теплофизических и термодинамических характеристик в рассматриваемых диапазонах изменения темпера-

тур и влагосодержаний; исключение из уравнений членов, незначительно влияющих на конечные результаты; преобразование системы координат для упрощения формы записи.

В связи со сложностью и недостаточной точностью такого рода описаний, а также отсутствием либо сложностью метода решения систем уравнений чаще всего используют более простые формы описания процессов сушки.

Кинетику сушки представляют различными формами кривой сушки. Наиболее распространенной формой является уравнение А. В. Лыкова

$$W = W_p + (W_n - W_p) \exp(-k\tau), \quad (220)$$

где W , W_p , W_n — текущая, равновесная и начальная влажности материала; k — коэффициент сушки, являющийся функцией температуры и влажности среды, $k = f(t, \varphi)$.

В некоторых случаях рационально применять такую форму записи:

$$W = W_p - (W_n - W_p) \exp\left(-a + \frac{b}{2} \tau\right) \tau,$$

где a , b — коэффициенты, характеризующие связь влаги с материалом.

Равновесная влажность для данного материала является функцией температуры и относительной влажности сушильного агента $W_p = f(t, \varphi)$. Поэтому, используя обозначения $W_{y,n} = W_n - W_p$ и $W_y = W - W_p$ (удаленная влага), кинетику сушки представляют уравнением вида

$$W_y = W_{y,n} \exp\left\{k(t, \varphi)\left(a + \frac{b}{2} \tau\right) \tau\right\}. \quad (221)$$

В этом уравнении $k(t, \varphi)$ характеризует режим, а $\left(a + \frac{b}{2} \tau\right) \tau$ — связь влаги с материалом. Обе эти характеристики устанавливают экспериментально, считая, что описания кривых сушки известны. При известных описаниях кинетических закономерностей и численных значениях, постоянных для исследования, можно использовать аналоговые и цифровые вычислительные машины.

Представив уравнение (220) или (221) в дифференциальной форме и составив структурную схему набора этого дифференциального уравнения на АВМ, можно получить модель для исследования кинетики. Для решения этой сравнительно простой задачи в системах автоматического управления применяют специализированное вычислительное устройство,

что позволяет многократно решать задачи расчета кинетики сушки при изменении исходной влажности продукта.

Более сложными являются модели, основанные на математических описаниях полей влагосодержания и температуры продукта и сушильного агента типа системы уравнений (216). В качестве примера составления такого рода математических моделей рассмотрим задачу определения влажности зерна в процессе сушки по математическому описанию поля влагосодержания и температур, составленному В. И. Жидко и А. С. Бомко. Это описание совместно с начальными и граничными условиями имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + v_3 \frac{\partial u}{\partial x} - a_m \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \right) &= 0; \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} + v_3 \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{A(v_{c,a})}{c_3 \rho} (t - t_{c,a}) - \frac{\beta_3}{c_3} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} + v_3 \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= 0, \\ u(\tau, x) &= \frac{2}{R^2} \int_0^R \tau u(\tau, x, r) dr, \end{aligned} \right\} \quad (222)$$

с начальными

$$\left. \begin{aligned} t(\tau, 0) &= f(\tau); \\ u(0, x, r) &= u_0(x, r); \\ t(0, x) &= f_2(x) \end{aligned} \right\} \quad (223)$$

и граничными условиями $u(\tau, 0, r) = u^\circ(\tau, r)$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(\tau, x, R) = \begin{cases} -\frac{B(t, v_{c,a})}{a_m(t)} (u_R - u_p), & u_R \leq u_p; \\ -\frac{B(t, v_{c,a})}{a_m(t)} (u_r - u_p), & u_R > u_p, \end{cases} \quad (224)$$

где $\frac{\partial u}{\partial r}(\tau, x, R) = 0$ — условие симметрии; R — радиус частицы; A , B — эмпирические коэффициенты, x , r — координаты по длине сушильной камеры и радиусу зерновки.

Приведенная система двух уравнений описывает процесс сушки зерна в плотном и кипящем слоях при условии перекрестного движения материала и агента сушки. Если режим не нарушается, т. е. процесс сушки происходит в стационарном состоянии и $\frac{\partial u}{\partial \tau} = 0$; $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$, то уравнение будет иметь

вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{a_m(t)}{v_3} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial r} \right); \\ \frac{\partial t}{\partial x} &= \frac{Av_{c.a}}{c_3 \rho_3 v_3} (t_{c.a} - t) - \frac{2\rho B(t, v_{c.a})}{c_3 v_3 R} (u_R - u_P); \\ \frac{\partial u}{\partial r}(x, 0) &= 0 \text{ (условие симметрии)} \end{aligned} \right\} \quad (225)$$

с начальными

$$u(0, r) = u_0(r); \quad t(0) = t_0 \quad (226)$$

и граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial r}(x, R) = \begin{cases} -\frac{B(t, v_{c.a})}{a_m(t_0)} (u_R - u_P), & u_R \leq u_i; \\ -\frac{B(t, v_{c.a})}{a_m(t)} (u_r - u_P), & u_R > u_i \end{cases} \quad (227)$$

При переходе к системе уравнений (225—227) учтена связь средней скорости сушки с поверхностным влагосо-
держанием

$$\Delta u = \frac{2}{R^2} \int_0^R r \Delta u dr = \frac{2}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} \equiv \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial R} \cdot \frac{\partial u}{\partial \tau} + \\ + v_3 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2B}{R} (u_R - u_P).$$

Используя метод прямых, применяемый ранее для реше-
ния задачи распределения температур теплоносителей, сис-
тему уравнений в частных производных приведем к системе
обыкновенных дифференциальных уравнений, записав ко-
нечно-разностные соотношения

$$\frac{\partial u_k}{\partial \tau} = \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h}; \\ \frac{\partial^2 u_k}{\partial r^2} = \frac{u_{k+1} + 2u_k + u_{k-1}}{R^2},$$

где $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$; n — номер прямой, относящийся
к $r = R$; h — интервал по радиусу высушиваемого мате-
риала.

Учитывая, что $r = kh$, получим

$$(\Delta u)_k = \frac{1}{2h^2 k} [(2k+1)u_k - 4ku_k + (2k-1)u_{k-1}],$$

а для прямой с последним номером $k = n$

$$(\Delta u)_n = \frac{2}{n} \left(\frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u_n - u_{n-1}}{n} \right) + \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial u}{\partial r},$$

где n — номер прямой, относящийся к $r = R$.

Если положить $n = R/4$, то система уравнений будет
иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} &= \frac{a_m(t)}{v_3 R^2} (24u_2 - 24u_1); \\ \frac{\partial u_2}{\partial \tau} &= \frac{a_m(t)}{v_3 R^2} (20u_3 - 32u_2 - 12u_1); \\ \frac{\partial u_3}{\partial \tau} &= \frac{a_m(t)}{v_3 R^2} \left(\frac{5}{3} u_4 - 32u_3 - \frac{40}{3} u_2 \right); \\ \frac{\partial u_4}{\partial \tau} &= -\frac{9B(t_1, v_{c.a})}{v_3 R} (u_4 - u_P) + \frac{32a_m(t)}{v R^2} (u_3 - u_4); \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} &= \frac{A(v_{c.a})}{c_2 \rho_3 v_3} (t_{c.a} - t) - \frac{2\rho B(t_1, v_{c.a})}{c_3 v_3 R} (u_4 - u_5) \end{aligned} \quad (228)$$

с начальными условиями

$$u(0) = u;$$

$$t(0) = t;$$

$$i = 1, 2, 3, 4.$$

Применив конечно-разностный метод для координаты
времени, получим

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{u_{k+1} - u_k}{g} + 0(g); \\ \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{t_{k+1} - t_k}{g} + 0(g),$$

где g — интервал времени.

После подстановок система уравнений примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{k,1}}{\partial \tau} &= -\frac{v}{g} (u_{k,1} - u_{k-1,1}) + \frac{a_m t_2}{R^2} (24u_{k,2} - 24u_{k,1}); \\ \frac{\partial u_{k,2}}{\partial \tau} &= -\frac{v}{g} (u_{k,2} - u_{k-1,2}) + \\ &+ \frac{a_m t_3}{R^2} (20u_{k,3} - 32u_{k,2} + 12u_{k,1}); \\ \frac{\partial u_{k,3}}{\partial \tau} &= -\frac{v}{g} (u_{k,3} - u_{k-1,3}) + \end{aligned}$$

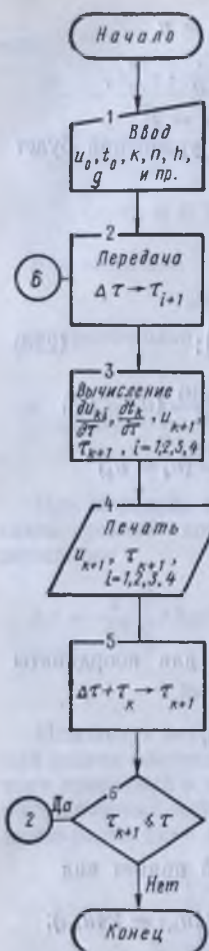


Рис. 87. Структурная схема алгоритма определения кинетических закономерностей сушки.

Исходными данными для решения задачи приняты: $a_m = 0,622 \cdot 10^{-12}$ м²/с; плотность $\rho_3 = 750$ кг/м³; $\sigma_3 =$

$$+ \frac{a_m t_3}{R^3} \left(\frac{56}{3} u_{k,4} - 32 u_{k,3} + \frac{40}{3} u_{k,2} \right); \quad (229)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{k,4}}{\partial \tau} = & -\frac{v}{g} (u_{k,4} - u_{k-1,4}) + \\ & + \frac{9b(t_3 v_{c,a})}{R} (u_{k,4} - u_k) + \\ & + \frac{32a_m}{R^2} (u_{k,3} - u_{k,4}); \\ \frac{\partial t_k}{\partial \tau} = & -\frac{v}{g} (t_k - t_{k-1}) + \\ & + \frac{A(v_c)}{c_3 \rho_3} (t_{c,a}^k - t_3) - \\ & - \frac{2\rho B(t_3, v_{c,a})}{c_3 R} (u_{k,4} - u_k). \end{aligned}$$

Решив эту систему уравнений при начальных условиях

$$u_{k,1}(0) = u_{0,k};$$

$$t_{k,1}(0) = t_{0,k};$$

$$i = 1, 2, 3, 4,$$

получим распределение температуры и влагосодержания по длине сушильной камеры и во времени.

Систему уравнений (229) можно реализовать на ЭВМ с помощью алгоритма, приведенного на рис. 87. Для шага интегрирования по переменной x , равного 0,1 l , получено следующее распределение влагосодержания по длине сушильной камеры:

$$\begin{aligned} u = \frac{2}{R^2} \int_0^R u_r dr \approx \frac{2}{R^2} \cdot \frac{h}{2} (r_0 u_0 + \\ + 2r_1 u_1 + 2r_2 u_2 + 2r_3 u_3 + \\ + 2r_4 u_4) = \frac{1}{8} (u_1 + 2u_2 + 3u_3 + 2u_4). \end{aligned}$$

$= 1,85$ кДж/(кг · К); $R = 0,0015$ м; $u_p = 0,1$ кг/кг; $u_r = 0,33$ кг/кг; $r = 2400$ кДж/кг; $A = 0,26 v_{c,a}$; $B = 0,86 \cdot 10^{-8} t_3$; $v_{c,a} = 0,4$ м/с; $N = 2n$; поперечное сечение воздушного потока $s = 0,1$ м².

§ 3. Математическая модель оптимизации сушки

Применение математических методов оптимизации процессов сушки осложняется отсутствием закономерностей изменения коэффициентов в системах уравнений, описывающих процесс сушки, характеристиками материала и сушильного агента, усложнением уравнений при подстановке имеющихся закономерностей и т. п. Это приводит иногда к тому, что применять точные методы оптимизации невозможно. Замена переменных коэффициентов системы константами снижает точность математического описания процесса, а в ряде случаев приводит к потере связи между управляемыми и управляющими параметрами, что исключает возможность оптимизации с помощью модели, основанной на принятой форме математического описания.

В некоторых случаях можно решать конкретные прямые задачи, распределение полей температур и влажностей, используя системы уравнений (216), дополненные соответствующими краевыми условиями, относительно переменных u , t и P при условии постоянства коэффициентов k_{ti} и коэффициентов краевых условий. Одна из таких задач рассмотрена была в предыдущем параграфе. При оптимизации системы уравнений вида (216) совместно с краевыми условиями необходимо разрешить ее относительно выбранного критерия оптимальности, а затем выбрать один из существующих методов оптимизации. Можно также использовать существующие описания процесса сушки зернистых материалов в слое, используя понятия «тонкого слоя». В этом случае описание представляют в виде многомерной системы алгебраических уравнений. При этом трудности оптимизации не снижаются.

Таким образом, проблемы оптимизации процесса конвективной сушки связаны с необходимостью решения систем дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих процесс сушки, наличием технологических и других ограничений, т. е. сложностью математической модели процесса сушки и трудностями экспериментального определения постоянных в уравнениях математического описания. Оптимизация процессов сушки с использованием известных

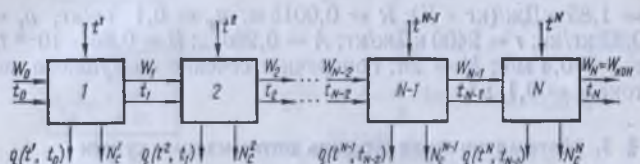


Рис. 88. Дискретный многостадийный процесс сушки.

кинетических закономерностей упрощает поиск оптимальных решений независимо от свойств и характеристик высушиваемого материала, т. е. является универсальным методом.

Кинетика сушки определяется рядом параметров — температурой $t_{с.а}$, относительной влажностью φ_1 , скоростью сушильного агента $v_{с.а}$, начальной влажностью W_0 и толщиной слоя h . Для данного способа сушки или конкретного типа сушильной установки при заданных конструктивных параметрах количество факторов, определяющих кинетику сушки, можно уменьшить. Например, при сушке зернистых материалов в плотном слое параметры h и $v_{с.а}$ определены конструкцией сушильной установки, а t — способом сушки и родом материала. Процесс влагоотвода зависит только от W_0 и $t_{с.а}$, т. е. в этом случае влажность является возмущающим параметром, а $t_{с.а}$ — управляющим.

Обычно экспериментально определяемые кривые сушки можно представить как предельный случай дискретного многостадийного процесса, если в качестве отдельной стадии принять достаточно малый промежуток времени. Тогда для решения задачи оптимизации такого процесса применяют метод динамического программирования либо дискретный принцип максимума.

В общем виде многостадийный процесс сушки может быть представлен схемой, приведенной на рис. 88. Каждая стадия, представляющая собой течение процесса за относительно малый промежуток времени, характеризуется определенным значением влажности материала на входе и выходе из нее. Управляющий параметр $t_{с.а}$ на каждой стадии может принимать ряд значений в некотором интервале температур. При помощи этого параметра оптимизируются переменные W_i и $q(t_N)$. Переменная $q(t_N)$ — критерий оптимизации, может характеризовать затраты на N -й стадии при надлежащем выборе управляющего параметра t_N при изменении влажности в пределах от $W_N(W_0)$ до $W_{кон}$. В качестве кри-

терия оптимальности можно принять, например, затраты энергии на удаление влаги.

Попытки разработки алгоритмов оптимизации режимов сушки с использованием кривых сушки известны. Тем не менее этими алгоритмами пользоваться затруднительно или невозможно из-за отсутствия необходимых связей между параметрами процессов в приемлемой для расчета форме.

Для разработки алгоритмов оптимизации по определению энергозатрат необходимо представить изменение влажности в виде функции от параметров сушильного агента.

Кроме того, предприняты попытки применить экономные методы многофакторного планирования экспериментов для получения этих зависимостей. В частности, этими методами получены закономерности изменения коэффициента сушки для первого и второго периодов от некоторых режимных параметров в виде линейных регрессионных зависимостей. Эти формулы позволяют установить значение влажности материала во времени. Для расчетов кинетики многозонной (ступенчатой) сушки и других условий эти методы неприемлемы и широкого распространения для описания кинетики не получили. В связи с этим составим такую форму описания, которая упростила бы процедуру оптимизации и повысила точность расчета.

В общем случае кинетические кривые сушки либо нагрева продукта представим как функцию параметров, определяющих начальное состояние зерна (влажность W_0 и температуру Θ_0), значения управляющего параметра (температура сушильного агента t) и текущей координаты (времени τ). Поскольку расход обычно постоянный, то функции имеют вид

$$\begin{aligned} W &= f(W_0, \Theta_0, t, \tau); \\ \Theta &= f(W_0, \Theta_0, t, \tau). \end{aligned} \quad (230)$$

Такие зависимости позволяют для заданных W_0 , t и Θ_0 рассчитать значение влажности или температуры материала в любой момент времени.

Применение многофакторных планов экспериментов для получения кинетических закономерностей нагрева и сушки связано с некоторыми особенностями. Например, не всегда учитывается появление в планах экспериментов несовместимых сочетаний на отдельных уровнях (начальная влажность не может быть ниже текущей и др.). Кроме того, длительность сушки до заданной конечной влажности в опытах с различными начальными значениями влажности

и температуры продукта изменяется в таких пределах, при которых факторные планы становятся неэффективными, а полученные уравнения регрессии неадекватными. Экспозиция сушки при определении ее режимов и других расчетов чаще всего неизвестна. Эти трудности можно преодолеть, если при известной конечной влажности в качестве основного кинетического параметра принять текущую влажность продукта W , выраженную в относительных единицах

$$W^* = (W_0 - W)/(W_0 - W_k). \quad (231)$$

С учетом этих особенностей кинетические закономерности представим в виде зависимости средней скорости сушки N и температуры продукта t от следующих параметров:

$$\left. \begin{aligned} N &= f(W_0, \Theta_0, t, W^*); \\ \Theta &= f(W_0, \Theta_0, t, W^*) \end{aligned} \right\} \quad (232)$$

и составим соответствующий план экспериментов.

Экспозиция сушки при этом определяется по выражению

$$\tau = (W_0 - W)/N. \quad (233)$$

Использование зависимостей для расчета экспозиции сушки и температуры продукта возможно только при постоянной температуре сушильного агента при сушке от W_0 до W (т. е. от 0 до τ). Если же сушилка имеет несколько сушильных зон, т. е. температура сушильного агента в каждой зоне изменяется, то описание с ростом числа зон значительно усложняется и связано с большим количеством опытов, а также затрудняет выбор и составление процедуры оптимизации режимов сушки.

Решить задачу многоступенчатой сушки позволяет включение в уравнение (232) еще одного параметра W_i — начальной точки отсчета, т. е. точки на кривой сушки, являющейся началом каждой стадии (зоны) процесса, где i — номер сушильной зоны. Вместо начальной температуры зерна Θ_0 следует включить Θ_i . Кроме того, в план эксперимента следует включить не абсолютные W , а относительные, т. е. интервал $W_0 - W_1$, выраженный в относительных единицах (долях)

$$W_i^* = (W_0 - W_i)/(W_0 - W_k). \quad (234)$$

Аналогично фактор W^* будет иметь вид

$$W^* = (W_0 - W)/(W_i - W_k). \quad (235)$$

Таким образом, кинетику сушки и нагрева продуктов представим в виде уравнения типа

$$y = f(W_0, W_i^*, \Theta_i, t, W^*). \quad (236)$$

При этом средняя скорость сушки рассчитывается от влажности W_0 до текущей влажности W :

$$N = (W_i - W)/(\tau - \tau_i), \quad (237)$$

где τ_i — время сушки, соответствующее влажности W_i .

Для повышения точности, а также для удобства расчетов в левой части уравнения (237) целесообразнее использовать не средние скорости сушки и нагрева продукта от W_i до W , а величины

$$A = 1/N = (\tau - \tau_i)/(W_i - W), \text{ мин/\%}; \quad (238)$$

$$B = (\Theta - \Theta_i)/(W_i - W), \text{ }^\circ\text{C/\%}. \quad (239)$$

Величина B представляет собой отношение средней скорости нагрева продукта от Θ_i до Θ к средней скорости сушки от W_i до W . Экспозиция сушки и температура продукта при этом определяются по уравнениям

$$\tau = \tau_i + A(W_i - W); \quad (240)$$

$$\Theta = \Theta_i + B(W_i - W). \quad (241)$$

С учетом изложенного, для получения количественных закономерностей при сушке зерна кукурузы в плотном слое была проведена серия опытов по D — оптимальному плану типа B_5 . Толщина слоя зерна $\delta = 200$ мм, скорость сушильного агента $v = 0,4$ м/с. Область изменения факторов W_0, W_i^*, Θ, t и W^* ограничена неравенствами (здесь и далее влажность выражена на а. с. массу)

$$23 \% \leq W_0 \leq 57 \%, \quad 0 \leq W_i^* \leq 0,8; \quad 45^\circ\text{C} \leq \Theta_i \leq 65^\circ\text{C}, \quad (242)$$

$$80 \% \leq t \leq 200 \%, \quad 0,1 \leq W^* \leq 1,0.$$

После обработки полученных экспериментальных данных были получены уравнения регрессии и проведен их статистический анализ (вычисление дисперсий, проверка значимости коэффициентов, оценка адекватности моделей и пр.). Уравнения в натуральных значениях факторов имеют вид

$$\begin{aligned} A &= 14,0099 + 0,06155W_0 + 7,92264W_i^* - 0,28261\Theta_i \\ &- 0,05372t + 4,15838W^* - 0,00130W_0^2 - 0,71225(W_i^*)^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 0,00176\theta_i^2 + 0,0000972t^2 + 0,38312(W^*)^2 + \\
& + 0,03975W_0W_i + 0,000132W_0\theta_i + 0,000106W_0t + \\
& + 0,01230W_0W^* + 0,04803W_i^*\theta_i - 0,03953W_i^*t + \\
& + 1,84424W_i^*W^* + 0,000196\theta_i t + 0,2414\theta_i W^* - \\
& - 0,02160tW^*; \text{ мин/\%}; \quad (243)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = & - 10,33849 + 0,05881W_0 + 15,03633W_i^* - 0,05705\theta_i + \\
& + 0,09091t + 7,60176W^* + 0,000441W_0^2 - 6,98867(W_i^*)^2 - \\
& - 0,00015\theta_i^2 - 0,0000368t^2 - 1,27952(W^*)^2 - \\
& - 0,09451W_0W_i^* + 0,000131W_0\theta_i - 0,00096W_0t - \\
& - 0,04535W_0W^* + 0,03172W_i^*\theta_i - 0,00159W_i^*t + \\
& + 5,41831W_i^*W^* - 0,000278\theta_i t + 0,00854\theta_i W^* - \\
& - 0,00368tW^*; \text{ }^\circ\text{C/\%}. \quad (244)
\end{aligned}$$

Полученные интерполяционные формулы являются удобной формой для разработки процедуры оптимизации, поскольку такая форма записи инвариантна относительно начальных условий и кинетических параметров.

Расчеты, приведенные с использованием уравнений (243) и (244), показали удовлетворительную сходимость с экспериментальными данными. Из этого можно заключить, что представление кинетики сушки в безразмерных координатах, инвариантных относительно начальных параметров продукта и кинетических параметров, позволяет применить для описания кинетики многофакторные планы экспериментов, обеспечивающие минимальное число опытов.

Интерполяционные формулы, описывающие кинетику нагрева и сушки в безразмерных координатах, являются не только экономной и удобной формой представления граничных условий, но позволяют составить алгоритмы оптимизации многоступенчатых режимов сушки.

Изложим порядок составления одного из возможных алгоритмов оптимизации процесса сушки зерна с использованием приведенных описаний кинетики.

Для разработки алгоритма многостадийный процесс сушки представим схемой (см. рис. 88). Каждая стадия характеризуется определенными значениями влажности продукта на входе и выходе. Управляющий параметр — температура сушильного агента — на каждой стадии может принимать ряд значений в некотором интервале температур.

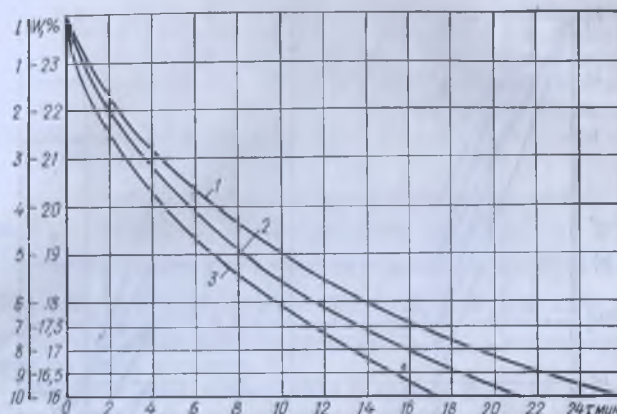


Рис. 89. Кривые сушки при различных температурах сушильного агента.

Задачу оптимизации сушки сформулируем следующим образом: при заданной экспозиции сушки определить такие значения параметра состояний (влажность продукта) и управляющего параметра (температура сушильного агента) на каждой стадии процесса, чтобы затраты теплоты были минимальными. Для решения задачи используем кривые сушки $W = f(\tau)$ (рис. 89).

Для определения функции $W = f(\tau)$, соответствующей оптимальному режиму, плоскость $W - \tau$ разбиваем по оси времени на N частей (стадий) линиями

$$0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_i < \dots < \tau_{N-1} < \tau_N = \tau_k.$$

Тогда графики функций $W = f(\tau)$ можно представить графически в виде (рис. 90) ломаных линий с вершинами на линиях $\tau_i = \text{const}$. Для прямых, соединяющих точки $(W_{i,j-1}; \tau_{i,j-1})$ и $(W_{s,i}; \tau_{s,i})$ (i — номер входа, s — номер выхода из j -й стадии), можно определить скалярные величины $q_{i,s}(j)$, выражающие затраты теплоты на снижение влажности от W_i до W_s ($W_i > W_s$) на j -й стадии процесса сушки. В случае равномерной разбивки по оси τ значения $\tau_{i,s}(j)$ зависят от скорости сушки $N = \frac{dW}{d\tau}$ и температуры сушильного агента t и не зависят от номера стадии.

Затраты теплоты на каждой j -й стадии определяем по выражению

$$q = LJ\Delta t, \text{ кДж},$$

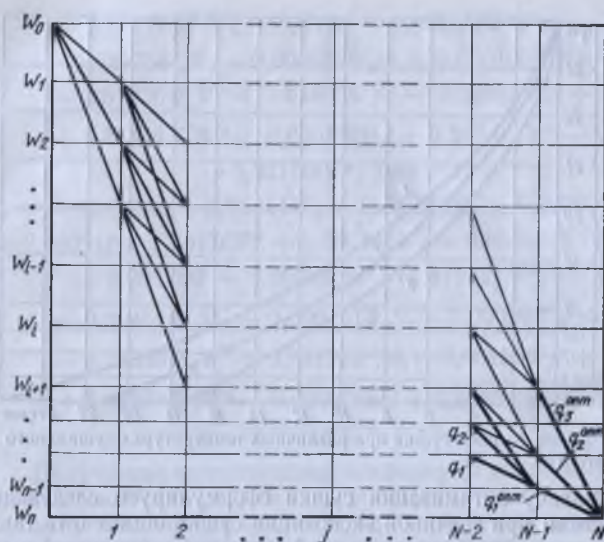


Рис. 90. Построение сетки на плоскости $W(t)$ для представления кинетики сушки в табличной форме.

где L , J — расход и энтальпия агента сушки, кг/мин и кДж/кг с. в; Δt — длительность сушки, мин.

Значение L определяется по формуле

$$L = 60Fv\rho, \text{ кг/мин,}$$

где F — площадь сечения сушильной камеры (кассета), м²; v и ρ — скорость и плотность агента сушки, м/с и кг/м³.

Плотность агента сушки с достаточной для практических расчетов точностью определяем по формуле

$$\rho = (1,293 \cdot 273)/(273 + t), \text{ кг/м}^3.$$

Значение энтальпии можно вычислить по известной формуле

$$J = 1,004t + 0,001d(2500 + 1,84t), \text{ кДж/кг, с. в.},$$

где d — влагосодержание агента сушки, г/кг с. в. ($d = 10$ г/кг с. в.).

После подстановки параметров сушильной установки и значений L , ρ и J из известных соотношений формула для определения затрат теплоты имеет вид

$$Q = \frac{(1662,578 + 67,993)}{273 + t}, \text{ кДж.}$$

Для конкретной j -й стадии $\Delta t = t_j - t_{j-1}$ задано, поэтому $q_{i,s} = (j) = f(t)$. Для определения температуры агента сушки t при переходе от влажности $W(i)$ к влажности $W(s)$ необходимо уравнение, связывающее интенсивность влагообмена на стадии с основными параметрами процесса, т. е. уравнение $A = f(W_0, W_i, \Theta_i, t, W_s)$, конкретным видом которого является (143).

В уравнении (243) A имеет вид

$$A = (\tau_j - \tau_{j-1})/(W_i - W_s), \text{ мин/\%,}$$

где W_0 — начальное влагосодержание продукта, %; W_i^* , W_s^* — относительные влагосъемы, зависящие от W_i и W_s ;

$W_i^* = (W_0 - W_i)/(W_0 - W_k)$; $W_s^* = (W_i - W_s)/(W_i - W_k)$, где W_k — конечное влагосодержание, %; Θ_i — температура зерна на входе в стадию, °C.

Уравнение (243) справедливо в диапазоне $W_0 = 23...57\%$, $W_i^* = 0...0,8$, $\Theta_i = 45...65^\circ\text{C}$, $t = 80...200^\circ\text{C}$, $W_s^* = 0,1...1,0$.

После вычислений и подстановки значения A в уравнение (243) определяем температуру агента сушки, а затем — затраты теплоты $q_{i,s}$. Аналогично определяем затраты теплоты при переходах между другими точками. При вычислении Q учитывают температуру зерна на входе — j -ю стадию, определяемую на предыдущей стадии по уравнению типа

$$\Theta_s = \Theta_i + B(W_i - W_s), \text{ }^\circ\text{C},$$

где $B = f(W_0, W_i, \Theta_i, t, W_s)$, °C/%.

Значение B определяется по уравнению (244), в котором

$$B = (\Theta_i - \Theta_s)/(W_i - W_s), \text{ }^\circ\text{C/\%}.$$

Область изменения факторов аналогична уравнению (243).

Описание кинетики в безразмерных координатах упрощает процедуру оптимизации и повышает точность расчетов на заключительной стадии.

Результирующие затраты теплоты Q всего многостадийного процесса определяются как аддитивная функция затрат, получаемых суммированием $q_{i,s}$ всех стадий

$$Q = \sum_{i=1}^N q_{i,s(i)}.$$

В соответствии с принципом оптимальности, положенным в основу динамического программирования, оптимизацию начинают со стадии, за пределами которой процесс

в котором размещаются минимальные значения критерия оптимальности оптимизируемой стадии.

В блоках 4—13 вычисляются максимальное $W_s^{\max}$ и минимальное $W_s^{\min}$ значения влажности, необходимые для определения границ изменения W_s и интервала разбиения по оси влажности. Для определения верхней границы ($W_s^{\max}$) в блоках 4—6 по оси влажности на входе в j -ю стадию определяется точка i , в которую имеется оптимальный переход из точки (W_0, t_0) , а затем в блоке 8 вычисляется значение $W_s^{\max} = f(t_{\min}^a)$. Аналогично вычисляется $W_s^{\min}$ (блоки 9—13).

В блоках 14 и 15 подготавливаются к расчету первые из всех возможных состояний входа (точка i) и выхода (точка s) на стадии j . При этом, если в точке $i = 1$ (выход предыдущей стадии) отсутствовал оптимальный переход, то управление из блока 15 передается в блок 28, где к расчету подготавливаются следующие значения параметров материала на входе в стадию (следующая точка i). В противном случае в блоке 19 вычисляется значение влажности на выходе W_s^i , влажосъем ΔW_s^i , и если $\Delta W_s^i > 0$ (блок 20), то подпрограммой блока 21 по уравнению $x = f(W_0, W_i, t_i, t_s^a, W_s)$ вычисляется температура сушильного агента t_{is}^a при переходе от точки i в точку s (сушка с влажности W_i до влажности W_s).

После вычисления t_{is}^a блоком 22 проверяется, не вышло ли рассчитанное значение температуры t_{is}^a за границы области определения ($t_{\min}^a \leq t_{is}^a \leq t_{\max}^a$). Если t_{is}^a находится в пределах допускаемой области, то блоком 23 по уравнениям

$$S = f(W_0, W_i, t_i, t_{is}, W_s) \text{ и } t_{is} = t + S_{is} \Delta W_s$$

вычисляется температура материала в конце стадии (в точке s)

$$t_s = f(W_0, W_i, t_i, t_{is}^a, W_s).$$

Полученное значение t_s в блоке 24 сравнивается с предельно допустимым нагревом $t_{\text{доп}}$. Если $t_s \leq t_{\text{доп}}$, то блоком 25 вычисляются затраты тепла $q_{is} = f(t_{is}^a, \Delta t)$. Если влажосъем между i и s отсутствует ($\Delta W_s^i = 0$), температура агента сушки t_{is}^a выходит за пределы области определения, а нагрев зерна t_s превышает допустимую температуру $t_{\text{доп}}$, то управление из блоков 20, 22 и 24 передается в блок 28, где к

расчету подготавливаются следующие значения входа стадии (W_i). Исключение составляют первая стадия ($j = 1$, блок 28), на которой циклы вычислений организованы в соответствии с принципом оптимальности только по значениям выхода стадии W_s при $W_i = W_0 = \text{const}$, и последняя стадия ($j = N$, блок 33), на которой вычисления проводятся только для одного значения $W_s = W_k = 16\%$ при переборе всех W_i . По значению i в блоке 25 производится кроме вычисления q_{is} выборка из массива q_{i-1} минимального значения критерия оптимальности предыдущей стадии, определяющего в сумме с оценкой q_{is} величину критерия оптимальности и данной стадии, т. е. включающего наряду с предыдущими стадиями процесса и оптимизируемую в данный момент. Полученный результат $q_{is}^b + q_{bi}^{b-1}$ в блоке 26 сравнивается со значением q_{bs}^b , которое хранилось до этого момента в соответствующей ячейке массива q_j .

Если вновь найденная величина $q_{bs}^b = q_{is}^b + q_{bi}^{b-1}$ меньше прежней, то это означает, что управление t_{is}^b лучше того, при котором получено прежнее значение q_{bs}^b , и новое значение q_{bs}^b записывается в массив q_j на место предыдущего в блоке 27. Одновременно в этом же блоке производится запоминание управления t_{is}^a , которое выводится затем на печать в блоке 32. В этом же блоке печатаются значения W_i, W_s, t_{is}^a числа j, i, s и соответствующее им значение затрат теплоты q_{os} .

В том случае, когда вновь найденная величина критерия оптимальности $q_{is}^b + q_{bi}^{b-1}$ окажется больше прежней, то управление программой вычислений из блока 26 передается в блок 28, где к расчету подготавливается следующее значение входа j -й стадии — W_i . Если для всех $i-s$ переходов (при $W_s = \text{const}$) не выполняются условия блоков 16, 20, 22 и 24, т. е. не вычисляется q_i , то результаты не печатаются и управление из блока 31 передается в блок 33 для подготовки к расчету следующего значения W_s .

После завершения перебора по всем значениям выхода W_s и вывода на печать значений $j, i, s, W_i, W_s, t_s, t_{is}^a, q_s$ в блоке 35 происходит пересылка значений выхода стадии s в значения входа i следующей стадии ($W_i^{b-1} = W_s^b, t_i^{b-1} = t_s^b, q_{bi}^{b-1} = q_{bs}^b$), и затем в блоке 37 изменяется счетчик количества стадий и цикл расчетов повторяется для новой j -й стадии. Если все стадии уже оптимизированы ($j = N$), то решение задачи заканчивается.

В результате расчета оптимального режима сушки для заданной экспозиции $\tau_{\text{кон}} = 20$ мин получены следующие распределения температуры сушильного агента:

Время τ , мин	Температура $t_{\text{с.в.}}$, °C
0—8	140
8—15	120
15—20	100

Аналогичный расчет может быть проведен при других значениях экспозиции сушки, т. е. изложенный метод позволяет проводить оптимизацию процессов сушки по кинетическим зависимостям, представленным в аналитическом, графическом и табличном видах.

§ 4. Моделирование процессов ректификации

При ректификации взаимодействие жидких и паровых фаз многократно повторяется. Это позволяет рассматривать ректификацию как многостадийный процесс, каждую стадию которого можно описать моделями с сосредоточенными параметрами. В качестве стадии принимают тарелку ректификационной колонны. Иногда разделение производят по конструктивным элементам аппарата (тарелка, куб, дефлегматор, холодильник). В этом случае ректификационные колонны представляют совокупностью технологических операторов межфазного обмена и разделения. Она может быть рассмотрена и укрупненно — одним оператором разделения. На питающую тарелку ректификационной колонны с номером $i-f$ поступает поток разделяемой бинарной смеси F с концентрацией легколетучего компонента x_F . В результате подвода тепла Q потоком острого пара V в нижнюю часть колонны (куб) 2 образуются потоки поднимающихся вверх по колонне паров V с концентрацией легколетучего компонента y_i , значения которой изменяются на каждой тарелке ($i = 0, 1, 2, \dots, f, f+1, \dots, n$) в результате взаимодействия с опускающимся потоком жидкости L_i с концентрацией легколетучего компонента x_i . Образовавшийся поток пара $V_i - L_i = V$ с концентрацией легколетучего компонента y поступает в дефлегматор 3, где за счет подвода потока охлаждающей воды L_n с температурой t_n образуется конденсат, который в последующем разделяется на поток дистиллята D и поток флегмы G с концентрациями легколетучего компонента x_D и x_G . Из куба колонны выводится поток кубового остатка W с концентрацией легколетучего компонен-

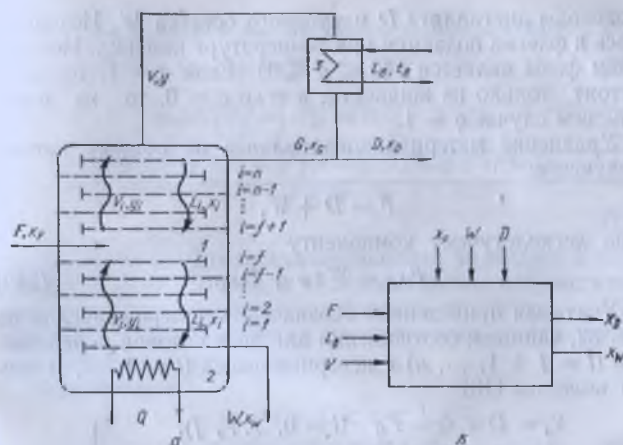


Рис. 92. Схемы однотарельчатой ректификационной колонны: а — структурная и б — параметрическая.

та x_W . Основную цель ректификации можно сформулировать следующим образом: получить дистиллят с заданной концентрацией легколетучего компонента x_D при минимально допустимом его содержании в кубовом остатке x_W . Основными управляющими воздействиями считают расходы питающей смеси, воды и потока паров, т. е. F , L_n и V .

В соответствии с этой целью модель процесса ректификации бинарной смеси на многотарельчатой колонне (рис. 92, а) составлена при следующих допущениях: бинарная смесь имеет постоянную относительную летучесть (состав паров, покидающих тарелку, равен составу жидкости, уходящей с этой тарелки); запаздывание потока жидкости на тарелке на порядок больше запаздывания потока паров; жидкость в тарелке идеально перемешивается, и тарелка представляет собой объект с сосредоточенными параметрами; в паровой фазе имеет место полное вытеснение потока. Колонна работает адиабатически: состав пара, уходящего с последней тарелки, равен составу жидкости, возвращающейся из дефлегматора; массопередача на тарелках эквимолярная; давление одинаково по всей высоте колонны; унос жидкости с тарелок не превышает 10 %; составы паровой и жидкой фаз в кубе колонны равны, т. е. $x_W = y_0$. Возмущающими воздействиями являются состав питающей смеси x_F

и расходы дистиллята D и кубового остатка W . Исходные смесь и флегма подаются при температуре кипения. Показателем фазы является q ($0 \leq q \leq 1$). Если $q = 1$, то смесь состоит только из жидкости, а если $q = 0$, то из пара. В нашем случае $q = 1$.

Уравнение материального баланса по общему потоку следующее:

$$F = D + W,$$

а по легколетучему компоненту

$$F x_F = W x_W + D x_D. \quad (245)$$

Учитывая приведенные обозначения номеров тарелок на рис. 82, запишем соотношения для всех потоков укрепляющей ($i = f + 1, \dots, n$) и исчерпывающей ($i = 1, \dots, f$) частей колонны [13]

$$\left. \begin{aligned} V_i &= D + G - Fq \quad (i = 0, \dots, f); \\ V_i &= D + G \quad (i = f + 1, \dots, n); \\ L_i &= V_i + W \quad (i = 1, \dots, f); \\ L_i &= V - D \quad (i = f + 1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (246)$$

Концентрации легколетучего компонента в жидкой и паровой фазах определяем из следующих соотношений:

$$x_i = \frac{1}{W + V_{i-1}} (V y_{i-1} + W x_W + V_{i-1} x_{i-1}) \quad (i = 1, \dots, f);$$

$$x_i = \frac{1}{W - F + V_{i-1}} (V z_{i-1} - D x_0 + V_{i-1} x_{i-1}) \quad (i = f + 1, \dots, n);$$

$$y_i = y_{i-1} (1 - \eta_i) + y_i^* \eta_i \quad (i = 0, \dots, (f-1)(f+1), \dots, n);$$

$$y_f = \frac{1}{V} \{[(1 - \eta_F) y_F + y_F^* \eta_F] V_1 + F q y_F\} \quad (i = f).$$

Коэффициент полезного действия i -й тарелки вычисляются по уравнению

$$\eta_i = 1 - \exp \left[-\frac{k_{yi} S_{\text{эф}}}{V_i} \right] \quad (i = 0, \dots, n), \quad (247)$$

где

$$k_{yi} = \frac{S_{\text{эф}}}{2/k_{yi} + m_i/k_{xi}} \quad (i = 1, \dots, n);$$

$$k_{yi} = k_{yi}(V_i, L_i, x_i, y_i) \quad (i = 0, \dots, n);$$

$$k_{xi} = k_{xi}(V_i, L_i, x_i, y_i) \quad (i = 0, \dots, n);$$

$$y_i^* = y_i(x_i) \quad (i = 0, \dots, n); \quad (248)$$

$$m_i = \left(\frac{\partial y^*}{\partial x} \right) \quad (i = 0, \dots, n); \quad (249)$$

$$y_F = \frac{(\alpha - 1)(x_F + q + 1) - \sqrt{[(\alpha - 1)(x_F + q) + 1]^2 - 4\alpha(\alpha - 1)x_F q}}{2q(\alpha - 1)}, \quad (250)$$

где k_{xi} , k_{yi} — коэффициенты массоотдачи по жидкой и паровой фазам на i -й тарелке; α — относительная летучесть компонентов; $S_{\text{эф}}$ — эффективная площадь тарелки; η — КПД тарелки; y^* — равновесная концентрация легколетучего компонента в паровой фазе.

Ограничения

$$\left. \begin{aligned} y &= 0; \quad 0 < x < 1; \\ 0 < y < 1; \quad 0 \leq f \leq n; \\ 0 < D < F; \quad 0 < W < F, \end{aligned} \right\} \quad (251)$$

при $q = 0$ $y_F = 0$, при $q = 1$ $y_F = x_F$.

Приведенная система нелинейных алгебраических уравнений является математическим описанием статистики ректификационной колонны, устанавливающим связи между концентрациями легколетучего компонента на выходе x_W и x_D и режимными параметрами F , x_F , q , G , D . Уравнения получены из условий материального баланса. Уравнение (247) выражает КПД тарелки, а уравнения (248) и (249) представляют кривую равновесия и тангенс угла наклона касательной к кривой равновесия. Уравнение (250) получено совместным решением уравнения $y_F = \frac{q-1}{q} x_F + \frac{x_F}{q}$ и уравнения кривой равновесия $y^* = \frac{\alpha x}{(\alpha - 1)x + 1}$. Коэффициенты массоотдачи k_{yi} и k_{xi} определяются экспериментально.

Для колонны, разделяющей водно-спиртовую смесь, с числом тарелок $n = 66$, номер питающей тарелки $f = 16$, $S_{\text{эф}} = 15$ м и коэффициентом уноса жидкости $k = 0,1$, имеющей постоянный расход пара V и эквимольный массоперенос ($U_i = 0$), общая форма описания конкретизируется

$$W = F + V - D; \quad (252)$$

$$W x_W = F x_F - D x_D. \quad (253)$$

Умножив уравнение (253) на x_D , получим

$$W x_D = F x_D + V x_D - D x_D.$$

Вычтя из этого выражения уравнение (253), получим

$$W (x_D - x_W) = F (x_D - x_F) + V x_D.$$

Составы жидкой и паровой фаз определяются при этих условиях соотношениями

$$x_{i+1} = \frac{1}{W} (V y_i + W x_W), \quad i = 1, \dots, f;$$

$$x_{i+1} = \frac{1}{W - F} (V y_i - D x_D), \quad i = f + 1, \dots, n;$$

$$y_i = y_{i-1} = \exp(-k_{Vi}/V) + y^* [1 - \exp(k_{Vi}/V)];$$

$$k_{Vi} = \frac{S_{\text{эф}}}{\frac{1}{k_{xi}} + \frac{m_i}{k_{yi}}};$$

$$W = \frac{F (x_D - x_F) - V x_D}{x_D - x_W};$$

$$D = F + V - W.$$

Обычно задаются величины F , x_F , x_D , x_W , а необходимо определить расходы пара V , дистиллята D и кубового остатка W . Для упрощения расчетов кривую равновесия аппроксимируют отрезками прямых.

В научно-производственном объединении «Пищепром-автоматика» при кривой равновесия $y^* = f(x)$ в области $0 \leq x \leq 0,9$ получены следующие значения коэффициентов m_i и зависимости $y_i^* = f(x)$, представленной пятью отрезками прямой:

$$0 \leq x_1 \leq 0,0025; \quad m_1 = 12,86; \quad y_1^* = 12,86x;$$

$$0,0025 \leq x_2 \leq 0,02; \quad m_2 = \frac{0,793}{(1,32x + 0,0793)};$$

$$y_2^* = \frac{x}{1,32x + 0,0793};$$

$$0,02 \leq x_3 \leq 0,35; \quad m_3 = \frac{0,0792}{(1,48x + 0,0792)};$$

$$y_3^* = \frac{x}{1,48x + 0,0792};$$

$$0,35 \leq x_4 \leq 0,61; \quad m_4 = \frac{0,2439}{(1,04x + 0,2439)};$$

$$y_4^* = \frac{x}{1,04x + 0,2439};$$

$$0,61 \leq x_5 \leq 0,90; \quad m_5 = \frac{0,6174}{(0,4348x + 0,6174)};$$

$$y_5^* = \frac{x}{0,4348x + 0,6174}.$$

Область соответствия модели объекту ограничена следующими неравенствами (граничные условия):

$$0,75 \leq F \leq 155 \text{ кмоль/ч};$$

$$70 \leq V \leq 700 \text{ кмоль/ч};$$

$$0,15 \leq x_F \leq 0,30 \text{ мол. доли};$$

$$0 \leq x_i \leq 0,05;$$

$$0 \leq y_i \leq 0,25;$$

$$0,429 \leq x_D \leq 0,90;$$

$$5 \cdot 10^{-6} \leq x_n \leq 5 \cdot 10^{-4};$$

$$y_n = x_D.$$

Постоянные в уравнении $k_{yi} = a_i V + b_i$; $k_{xi} = c_i$ имеют значения

$$a_i = 4,5 \quad (i = 1, 2, \dots, 16);$$

$$a_i = 0,61 \quad (i = 17, 18, \dots, 66);$$

$$b_i = 33 \quad (i = 1, 2, \dots, 66);$$

$$c_i = 4500 \quad (i = 1, 2, \dots, 16);$$

$$c_i = 925 \quad (i = 17, 18, \dots, 66).$$

Реализация на ЭВМ приведенной системы алгебраических уравнений сложности не представляет и не требует специальных преобразований. Используя метод последовательных приближений, т. е. задаваясь последовательно значениями (например, $F = 100$; $x_D = 0,826$ и $x_W = 47 \cdot 10^{-6}$ и т. д.), можно определить величины расходов пара V , дистиллята D и кубового остатка W , соответствующие принятым значениям расхода питающей смеси и заданным концентрациям легколетучего компонента на входе и выходе из колонны, т. е. ее статические характеристики. Схема алгоритма вычисления приведена на рис. 93. Здесь же приведены и численные обозначения величин. Расчет ведется последова-

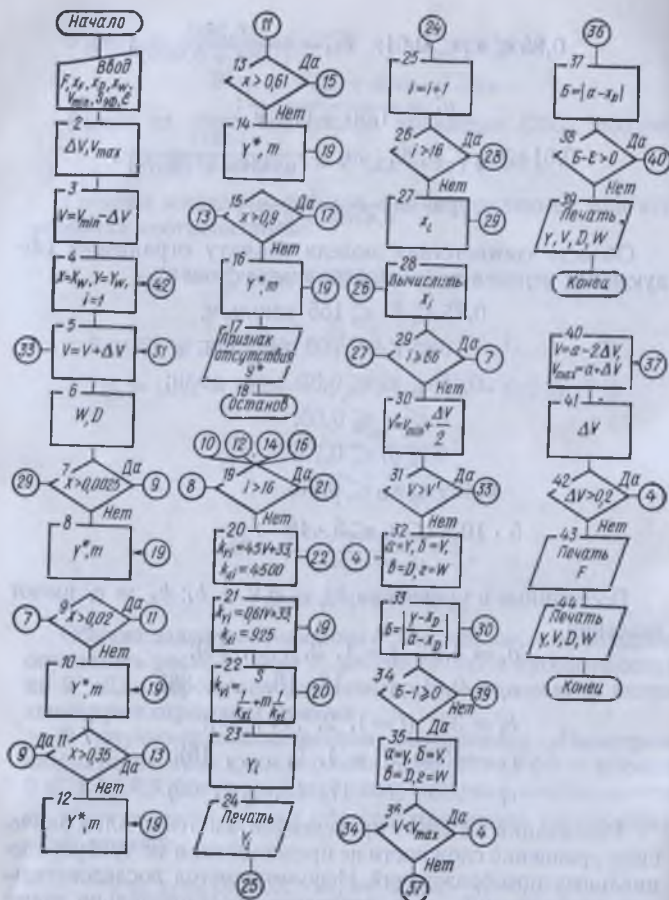


Рис. 93. Структурная схема алгоритма оптимизации процесса ректификации.

тельно по номерам тарелок. Процедура расчета заключается в следующем. Вводим значения F , x_F , x_D , x_W , ϵ , $V_{\min}$, $S_{\text{эф}}$. Принимаем значения $y_0 = x_W$. Вычисляем расход пара по шагам, начиная от $V_{\min}$ до $V_{\max}$, по тарелкам. Затем вычисляем расходы кубового остатка и дистиллята по формулам (251) и (253).

В зависимости от величины x расчет ведется по одному из пяти отрезков, аппроксимирующих кривую равновесия. При этом вычисляем тангенс угла наклона m_i и равновесное значение y^* (блоки 8, 10, 12, 14 и 16). Логические блоки (7, 9, 11, 13 и 15) переключают процедуру расчета в зависимости от участка аппроксимации кривой равновесия. В случае $x_i > 0$ печатается признак отсутствия y^* для данного x_i и счет прекращается. Далее ведут потарелочный расчет для колонны. В зависимости от номера i вычисляют общий коэффициент массоотдачи k_{Vi} (блоки 19, 20, 21, 22) и концентрацию спирта в паровой фазе на каждой тарелке (блоки 25, 26). Потарелочный расчет концентрации спирта в жидкой фазе выполняют сначала для исчерпывающей ($i < 16$), а затем для укрепляющей ($i > 16$) части колонны (блоки 27 и 28).

Для каждого значения V определяют концентрацию спирта в парах на последней тарелке y_n и сравнивают с численным значением концентрации спирта в дистилляте x_D . Остальная часть процедуры вычислений обеспечивает необходимую точность вычислений в зависимости от принятого ϵ и не нуждается в особых пояснениях. При исходных данных $F = 130$ кмоль/ч; $x_F = 0,18$; $x_D = 0,826$, $x_W = 47 \times 10^{-6}$ получены следующие результаты: $y_n = 0,8817$, а $V = 511$, $D = 27$, $W = 113,88$ кмоль/ч.

Динамические свойства колонны опишем системой дифференциальных уравнений, составленных на основе материального баланса тарелки, дефлегматора и кипятильника без учета гидродинамического запаздывания

$$\begin{aligned} Vy_i - Vy_{i+1} &= Lx_i - Lx_{i-L} + qFx_F = G_T \frac{dx_i}{dt}; \\ Vy_i - Gx_G - Dx_D + (1-q)Fx_F &= G_D \frac{dx_D}{dt}; \\ L - Vy_i - Wx_W &= G_K \frac{dx_W}{dt}, \end{aligned} \quad (254)$$

где G_T , G_D и G_K — масса жидкости на тарелке, в дефлегматоре и кубе колонны.

Подобную систему уравнений можно решить при условии, что зависимость $y = f(x)$ и уравнение равновесия $y^* = f(x)$ известны. В общем случае они являются нелинейными и для решения обычно применяют АВМ. Если рассматривать колонны из n тарелок, то динамическая характеристика потока жидкости в колонне для i -й тарелки

описывается уравнением

$$T_i \frac{dL_i}{dt} G_r - L_i + qF,$$

где T_i — постоянная времени.

Динамическая характеристика потока паров в колонне для i -й тарелки описывается уравнением такого же типа

$$T_i \frac{dV}{dt} = -(1 - q)F,$$

которое в дальнейших расчетах можно не учитывать, так как запаздывание жидкости на тарелках на порядок больше запаздывания потоков пара.

Расход пара в колонне V определяется количеством подведенного нагревателем теплоты Q , которое должно быть учтено при составлении уравнения в виде функции $f(Q)$

$$T_Q \frac{dV}{dt} = V + f(Q).$$

Пар с верхней тарелки поступает в конденсатор (дефлегматор), где поток конденсата перед поступлением в флегмоотделитель задерживается. Задержку продукта в конденсаторе приближенно определяем из уравнения транспортного запаздывания

$$L(\tau) = G_D (\tau - \tau_{\text{зап}}),$$

где $\tau_{\text{зап}}$ — время запаздывания.

Подставляя во второе уравнение системы (254) флегмовое число, равное отношению количества флегмы к количеству дистиллята $R = G/D$, можно последовательно вычислить значения расходов флегмы и дистиллята. Исходя из приведенного описания, структурная схема модели должна быть разделена на участки, соответствующие элементам колонны: нагреватель, ввод питания, тарелка, куб, кипятильник, дефлегматор. Тогда модель колонны должна будет иметь четыре ввода. Напряжения, подаваемые на эти входы, моделируют флегмовое число R , количество поступающей смеси F и ее состав x_F и количество теплоты Q , подводимого к кипятильнику колонны.

Функцию $f(Q)$ следует воспроизводить на линейных блоках. Поднимающийся из куба пар проходит через тарелку с задержкой T_V . Задержку пара при прохождении через тарелку не учитывают, а задержка жидкости моделируется звеном запаздывания.

Для установившегося состояния можно принять $f(Q) = 2Q$, где $0 \leq Q \leq Q_{\text{max}}$. Если принять $Q = 5$ кВт, то на

АВМ это удобно представить 50 Вт. Тогда Q_{max} либо соответствующее ему количество пара представится напряжением в 100 В. Возврат флегмы G на тарелку можно представить усилителем. Поступление жидкости в кипятильник моделируется в соответствии с системой уравнений (254). Для решения третьего уравнения системы (254) следует использовать интегратор, множительное устройство и функциональный преобразователь, который должен представить линию равновесия в соответствии с уравнениями:

$$y_i = 3,85 \quad (\text{при } x \leq 0,13);$$

$$y_i = 0,5 + 0,423x_i \quad (\text{при } x > 0,13).$$

Используя модель, реализованную на АВМ, при постоянстве расхода разделяемой смеси F и ее состава x_F получим значения расхода дистиллята D заданного состава x_D при варьировании флегмового числа R и количества подаваемого в кипятильник тепла Q .

Обширные исследования по экономическому анализу процесса ректификации проведены в работе [19], где обобщены данные о зависимости себестоимости спирта от его содержания в исходном продукте, в кубовом остатке и дистилляте, а также от флегмового числа единиц переноса (тарелок). Данные, полученные перебором значений этих величин в рабочих диапазонах их изменения, представлены в виде номограмм, которые позволяют выбрать режимы работы ректификационных колонн, обеспечивающие наименьшие затраты на производство спирта.

Глава 10

МОДЕЛИРОВАНИЕ ХИМИЧЕСКИХ И БИОХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПИЩЕВЫХ ПРОИЗВОДСТВ

§ 1. Моделирование кинетики химических и биохимических превращений

Химические процессы в пищевой промышленности осуществляются при очистке диффузионного сока, осветлении сахарного сиропа, фруктовых соков и вина, гидрогенизации жиров, рафинации растительного масла, гидролизе крахмала, очистке сточных вод и пр.

В отраслях пищевой промышленности биохимические процессы имеют большое значение. Они основаны на применении дрожжей (этиловый спирт, глицерин, хлебопекарные дрожжи, квас, пиво), бактерий (ацетоно-бутиловое производство, производство уксуса, молочной и других кислот), плесневых грибов (лимонной, глюконовой, фумарной, итколовой кислот, пенициллина, стрептомицина). Эти продукты бродильных производств получают в результате каталитического действия ферментов микроорганизмов.

Химическая кинетика изучает закономерности протекания химических процессов во времени и влияние различных условий на химические превращения (концентрации реагирующих веществ, температуры, давления, наличия катализаторов и т. п.). Биологическая кинетика изучает закономерности явлений, протекающих в живой природе. Из всех видов биологической кинетики (биохимическая, биофизическая, микробиологическая и популяционная) для пищевых производств наибольшее значение имеет кинетика популяций.

Биохимическая кинетика имеет свои особенности, связанные с особенностями ферментативных реакций. Ферменты не нарушают равновесия реакции, и в этом они не отличаются от обычных катализаторов абиогенной природы. Ферментативные реакции приводят к полному выходу продуктов без образования побочных веществ. Скорость их протекания при мягких физиологических условиях ($pH = 7$; $t = 37^\circ C$) в 10^{12} — 10^{18} раз больше, чем без фермента.

Эти особенности биохимических реакций отражает форма уравнений биохимической кинетики, которая несколько отличается от формы уравнений химической кинетики. Изучение кинетических закономерностей биохимического каталитического процесса заключается в установлении влияния концентраций фермента, субстрата, активаторов, ингибиторов, а также физико-химических факторов (температуры, ионной силы, диэлектрической проницаемости, давления) на скорость ферментативной реакции без учета характера движущих сил.

Количественно скорость химической реакции определяют числом молекул, реагирующих в единицу времени. Для того чтобы можно было сравнивать скорости различных реакций, число молекул относят к единице объема. В связи с этим скорость реакции определяют как число молекул или молей данного вещества, реагирующих в единицу времени в единице объема.

Применение методов математического моделирования значительно облегчает и ускоряет изучение кинетики. Для известного механизма реакции можно легко составить математическое описание. Для каждого компонента, входящего в реакцию, можно записать линейное или нелинейное дифференциальное уравнение. Это так называемые кинетические уравнения, которые в совокупности дают полное представление о скорости химических превращений компонентов при изучении сложной реакции. Эти системы уравнений иногда имеют сложное аналитическое решение. Если точное решение невозможно, то применяют приближенные методы вычислений, которые обеспечивают для технических расчетов необходимую точность.

Для моделирования процесса на АВМ упрощать уравнения, описывающие кинетику химических реакций, не нужно. Напротив, моделирование можно производить в строгом соответствии с описанием, которое составляется на основе экспериментальных данных. опыты проводят в стационарных изотермических условиях и получают объективные сведения о состоянии системы в различных точках. При этом число экспериментов сокращается, так как после реализации математического описания на АВМ исследования можно продолжить на модели. Модель совершенствуется и считается удовлетворительной, если данные, полученные на модели, и данные эксперимента в сходных точках совпадают.

Скорость химической реакции не всегда удобно определять изменением концентрации реагирующих веществ в единицу времени и в единице объема. Поэтому для гетерогенных процессов изменение концентрации относят к поверхности. Отношение конечной разности концентраций к соответствующему промежутку времени — это средняя скорость реакции. Для системы, объем которой с течением времени остается постоянным, скорость реакции по заданному компоненту A определяется бесконечно малым изменением концентрации этого компонента dc_A за время dt

$$v_A = \frac{dc_A}{dt} \quad (255)$$

Согласно закону действующих масс, скорость данной реакции пропорциональна произведению концентраций, вступающих в реакцию вещества. Причем каждая из концентраций участвует в степени, равной стехиометрическому коэффициенту в уравнении реакции, а коэффициентом пропорциональности служит константа скорости реакции.

Это правило ограничено областью применения законов идеальных газов или разбавленных растворов.

В некоторых случаях вместо концентраций используют активность. Однако удовлетворительные результаты можно получить только при заданных внешних условиях (температуре, давлении, среде, в которой происходит процесс). При этом скорость реакции является функцией концентрации реагирующих веществ

$$v_A = k c_A^a c_B^b, \quad (256)$$

где k — константа скорости химической реакции, зависящая от температуры; c_A , c_B — концентрации реагирующих веществ A и B ; a , b — порядки реакции по данному компоненту; $n = a + b$ — суммарный порядок реакции.

Если протекание химической реакции не связано с переносом массы и энергии, то эти закономерности относят к микрокинетике, если при протекании химической реакции учитывается перенос массы и энергии, то — к макрокинетике. Это деление несколько условно, однако оно позволяет дать достаточно точную количественную оценку разным сторонам сложного химического процесса. В настоящее время макрокинетика оформилась в специальный раздел химической кинетики, который стал основой расчета химических реакторов.

Микрокинетика изучает взаимодействия в химическом процессе на уровне молекул в масштабах, не превышающих масштабов свободного пробега молекул, макрокинетика — на уровне агрегатов молекул в масштабах вихрей, капель или газовых пузырей (макрочастиц).

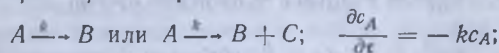
При рассмотрении химических процессов микро- и макрокинетики представляют собой единое целое. В лабораторных условиях исследуют микрокинетику процесса — устанавливают механизм реакции и кинетические уравнения, т. е. составляют математическое описание химической реакции. Затем на опытной установке определяют параметры модели, характеризующие макрокинетику процесса (коэффициенты продольного и радиального перемешивания, тепло- и массообмена, режимы течения и пр.). Затем описания микро- и макрокинетики объединяют в полную математическую модель, из которой можно получить численные зависимости между всеми параметрами процесса.

В зависимости от влияния диффузионных факторов химические процессы протекают в кинетической, диффузионной и смешанной областях. Для химических процессов, проте-

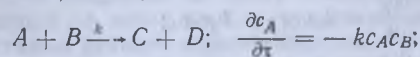
кающих в кинетической области, скорость химической реакции лимитирует весь процесс, а скорости движения потоков и их физические свойства заметно не влияют на процесс. Для химических процессов, протекающих в диффузионной области, лимитирующей является скорость диффузии реагентов в зоне реакции, которая зависит от скоростей движения потоков и их физических свойств. Для процессов, происходящих в смешанной области, скорости химического превращения и диффузии соизмеримы. При этом лимитирующей всегда будет наиболее медленная стадия последовательного процесса.

Вид кинетического уравнения определяется механизмом реакции. По типу механизма различают реакции простые и сложные. Простыми называются такие реакции, которые протекают в одну стадию и в одном направлении. Кинетические уравнения простых реакций могут иметь следующий вид:

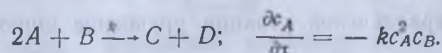
реакции первого порядка



реакции второго порядка

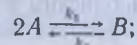


реакции третьего порядка

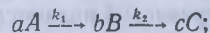


Большинство химических реакций является сложными. Их можно классифицировать таким образом:

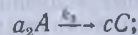
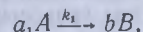
обратимые реакции



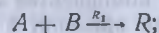
последовательные реакции

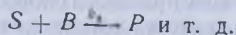
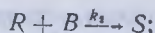


параллельные реакции



смешанные реакции





В сложной реакции одно и то же вещество может принимать участие в качестве исходного или конечного реагента в нескольких стадиях. При этом каждая стадия сложного процесса протекает по закону реакций простых типов и, используя закономерности простых реакций, можно написать выражение для скорости образования или исчезновения (разложения) любого компонента в этой стадии. Полная (резльтирующая) скорость его образования или разложения равна алгебраической сумме скоростей всех стадий.

Например, кинетические уравнения смешанной реакции имеют вид

$$\frac{dc_A}{d\tau} = -k_1 c_A c_B;$$

$$\frac{dc_B}{d\tau} = -k_1 c_A c_B - k_2 c_R c_B - k_3 c_S c_B;$$

$$\frac{dc_R}{d\tau} = k_1 c_A c_B - k_2 c_R c_B;$$

$$\frac{dc_S}{d\tau} = k_2 c_R c_B - k_3 c_S c_B;$$

$$\frac{dc_P}{d\tau} = k_3 c_S c_B - k_4 c_P c_B \text{ и т. д.}$$

Для параллельной реакции уравнение кинетики следующее:

$$\frac{dc_A}{d\tau} = -k_1 c_A^{a_1} - k_2 c_A^{a_2}.$$

Таким образом, кинетические закономерности химических реакций могут быть описаны с помощью одного или системы обыкновенных дифференциальных уравнений, решенных относительно производных $\frac{dc_A}{d\tau}$, $\frac{dc_B}{d\tau}$, $\frac{dc_C}{d\tau}$ и т. п.

Правые части таких уравнений являются степенными функциями искомых концентраций реагентов системы c_A , c_B , c_C , ... В условиях постоянной температуры и среды входящие в уравнения константы скорости k_1 , k_2 , k_3 можно рассматривать как постоянные величины.

При изучении кинетики химических реакций чаще всего решают одну из следующих трех задач:

1. Расчет концентрации компонентов системы в определенный момент времени или времени, в течение которого

будет достигнута заданная степень превращения реагентов, при известной схеме реакции и величинах констант скоростей отдельных стадий процесса (т. е. известно кинетическое уравнение реакции).

2. Определение константы скоростей отдельных элементарных стадий по известной схеме процесса и найденным опытным путем кинетическим кривым компонентов реакции.

3. На основании имеющихся экспериментальных данных проверка правильности предложенной схемы сложной реакции, если механизм процесса носит гипотетический характер.

Для решения этих задач необходимо проинтегрировать систему дифференциальных уравнений, описывающую кинетические закономерности изучаемой реакции. В связи с тем, что метод численного интегрирования требует большого объема вычислительной работы, для этих целей широко используют цифровые вычислительные машины.

Преимущества метода моделирования химических реакций на АВМ состоят в простоте программирования, наглядности полученных результатов, а также в возможности быстро изменять в широких пределах параметры и вид кинетических уравнений реакции.

Рассмотрим подробнее методику моделирования химических реакций на аналоговых вычислительных машинах.

Необратимые реакции первого порядка. Вещество A в изотермических условиях превращается в вещество B



Пусть c_{A_0} , c_{B_0} — начальные концентрации компонентов A и B , а c_A , c_B — текущие значения концентраций. Поскольку при математическом моделировании кинетики наиболее удобной формой описания являются обыкновенные дифференциальные уравнения, то, воспользовавшись приведенными выше формулами закона действующих масс, получим следующие уравнения:

$$v_A = -kc_A; \quad v_B = +kc_A.$$

Знаки скоростей (+) и (—) указывают на то, что концентрация компонента A в этой реакции убывает, а концентрация компонента B возрастает. Таким образом, рассматриваемая химическая реакция описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dc_A}{d\tau} = -kc_A; \quad \frac{dc_B}{d\tau} = +kc_A \quad (258)$$

при начальных условиях $c_{A_0} = A$ и $c_{B_0} = B$.

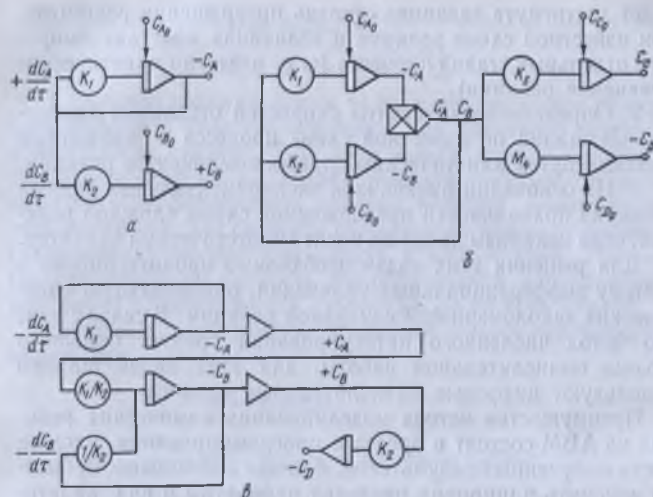


Рис. 94. Структурная схема модели на АВМ для решения уравнений кинетики химических реакций:

а) $A \xrightarrow{k_1} B$; б) $A + B \xrightarrow{k_2} C + D$; в) $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$.

Кинетические кривые, т. е. временные зависимости концентраций компонентов системы, находят с помощью АВМ при решении этой системы уравнений (рис. 94, а). Построение модели кинетики химических реакций на АВМ требует выбора масштабов для концентраций всех компонентов и времени, а также расчета коэффициентов передачи решающих элементов.

Необратимые реакции второго порядка. Реагируют два вещества A и B с образованием веществ C и D



Дифференциальные уравнения для концентраций всех компонентов составляются в соответствии с законом действующих масс

$$\begin{aligned} \frac{dc_A}{d\tau} &= -k_1 c_A c_B; & \frac{dc_B}{d\tau} &= -k_2 c_A c_B; & \frac{dc_C}{d\tau} &= \\ &= k_3 c_A c_B; & \frac{dc_D}{d\tau} &= k_4 c_A c_B. \end{aligned}$$

Полученные уравнения нелинейны, так как в каждое из них входит произведение двух переменных c_A и c_B . Началь-

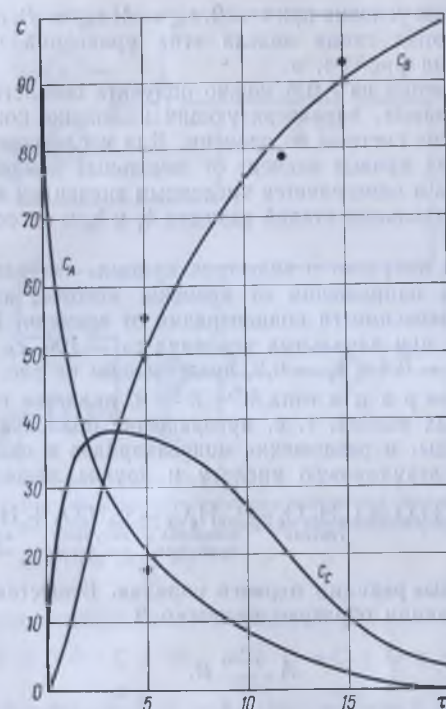


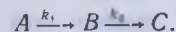
Рис. 95. Графическое представление кинетики химических реакций $A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$.

ные условия следующие:

$$c_{A_0} = A; \quad c_{B_0} = B; \quad c_{C_0} = C; \quad c_{D_0} = D.$$

Структура модели для решения задачи представлена на рис. 94, б.

Необратимая молекулярная последовательная реакция типа



Кинетические уравнения этой реакции имеют вид

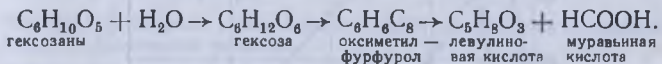
$$\frac{dc_A}{d\tau} = -k_1 c_A; \quad \frac{dc_B}{d\tau} = k_1 c_A - k_2 c_B; \quad \frac{dc_C}{d\tau} = k_2 c_B.$$

Начальные условия при $t = 0$, $c_{A_0} = A$; $c_{B_0} = B$; $c_{D_0} = D$.
Структурная схема модели этих уравнений на АВМ
приведена на рис. 94, в.

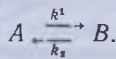
При решении на АВМ можно получить семейство кинетических кривых, характеризующих изменение концентрации реагентов системы во времени. Для исследуемой реакции вид этих кривых зависит от начальных концентраций компонентов и определяется численным значением констант скоростей отдельных стадий реакции k_1 и k_2 и их соотношением k_1/k_2 .

Решение получают в виде трех кривых, изображающих зависимость напряжения от времени, которые являются аналогией зависимости концентрации от времени. Кривые, полученные при начальных условиях $c_A = 100$, $c_B = c_C = 0$ при $k_1 = 0,4$ и $k_2 = 0,3$, представлены на рис. 95.

Примером реакции типа $A \xrightarrow{B} C$ является гидролиз растительных тканей, т. е. превращение полисахаридов в моносахариды, и разложение моносахаридов в оксиметилфурфурол, левулиновую кислоту и другие вещества



Обратимые реакции первого порядка. Вещества A в обратимой реакции образуют вещество B



Начальные условия: $c_{A_0} = A$ и $c_{B_0} = B$.

При составлении дифференциальных уравнений следует учитывать, что компоненты A и B участвуют в двух реакциях одновременно, поэтому скорость реакции определяется алгебраической суммой скоростей каждой отдельной реакции.

Дифференциальные уравнения кинетики реакций имеют вид

$$\frac{dc_A}{d\tau} = -k_1 c_A + k_2 c_B; \quad \frac{dc_B}{d\tau} = k_1 c_A - k_2 c_B.$$

Структурная схема решения этих уравнений на АВМ представлена на рис. 96.

Последовательные реакции второго порядка. Исходными веществами являются компоненты A и B . Один из образующихся компонентов M принимает дальнейшее участие

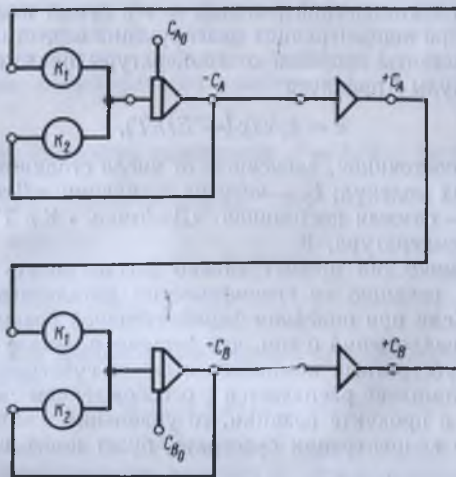
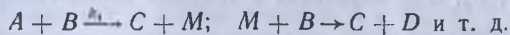


Рис. 96. Структурная схема модели для решения на АВМ уравнений кинетики химической реакции типа $(A \xrightleftharpoons[k_2]{k_1} B)$.

в реакции, соединяясь с исходным B



$$\frac{dc_A}{d\tau} = k_1 c_A c_B; \quad \frac{dc_B}{d\tau} = -k_2 c_A c_B; \quad \frac{dc_M}{d\tau} = k_1 c_A c_B \text{ и т. д.}$$

Начальные условия: $c_{A_0} = A$; $c_{B_0} = B$; $c_{C_0} = C$; $c_{M_0} = M$; $c_{D_0} = D$.

Закон действующих масс является основным в химической кинетике. В общем случае можно принять, что скорость химической реакции прямо пропорциональна концентрациям реагирующих (действующих) веществ в некоторых степенях

$$v = k \prod_{i=1}^m (c_i^{\alpha_i}),$$

где k — постоянная (при данных условиях), называемая константой скорости реакции; m — число веществ, вступающих в реакцию; c_i — концентрация i -го реагента; τ_i — порядок реакции по данному i -му веществу; Π — знак произведения.

Порядок химической реакции — это сумма показателей степеней при концентрациях реагирующих веществ. Зависимость константы скорости от температуры представляют в виде формулы Аррениуса

$$k = k_0 \exp(-E/RT), \quad (260)$$

где k_0 — постоянная, зависящая от числа столкновений реагирующих молекул; E — энергия активации, кДж/моль $\times K$; R — газовая постоянная, кДж/(моль $\cdot K$); T — абсолютная температура, K.

Биохимический процесс можно рассматривать как химическую реакцию со специфическим катализатором-ферментом. Если при описании ферментативной реакции исходить из предположений о том, что фермент в начале образует фермент-субстратный комплекс со своим субстратом, а затем этот комплекс распадается с освобождением свободного фермента и продукта реакции, то уравнение, учитывающее изменение концентрации субстрата, будет иметь вид

$$\frac{S_0 - S}{\tau} = v_{0\max} + \frac{k_m}{\tau} \ln \frac{S}{S_0},$$

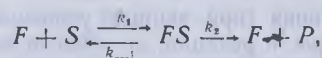
где $v_{0\max}$ — теоретически предельная начальная скорость реакции при бесконечно большой концентрации субстрата; k_m — константа, характеризующая фермент и реакционную систему; S_0 , S — начальная и текущая концентрации субстрата.

Экспериментально установлено, что между скоростью реакции v_0 и концентрацией субстрата S_0 существует гиперболическая зависимость

$$(v_{0\max} - v_0)(x + S_0) = \text{const},$$

где x — некоторая постоянная в уравнении.

Гипотезе об образовании фермент-субстратного комплекса, исходя из предположения о существовании истинного термодинамического равновесия между исходными веществами (фермент, субстрат) и фермент-субстратным комплексом, дано математическое обоснование. Рассмотрим следующую односубстратную ферментативную реакцию

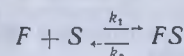


где F — фермент; S — субстрат; FS — фермент-субстратный комплекс; P — ингибитор.

Согласно принципу сохранения общего количества вещества в реакции общая концентрация фермента f_0 равна сумме концентрации свободного фермента f и связанного в виде фермент-субстратного комплекса f_s

$$f_0 = f + f_s,$$

а формула константы равновесия $k = k_1/k_{-1}$ для реакции



имеет вид

$$k = f_s/fS,$$

откуда

$$k = f_s/(f_0 - f_s)S.$$

Тогда для концентрации фермент-субстратного комплекса получим

$$f_s = f_0 S / (1/k + S).$$

В соответствии с кинетической схемой и законом действующих масс скорость реакции v пропорциональна концентрации фермент-субстратного комплекса. С учетом уравнения для скорости реакции получим

$$v = k_2 f_s S / (1/k + S).$$

Константа $k_s = 1/k = k_{-1}/k_1$ имеет размерность концентрации (обычно моль/л) и называется константой Михаэлиса. Поскольку в начале реакции $S = S_0$, то $v \approx v_0$ и уравнение для начальной скорости реакции запишем

$$v_0 = k_2 f_0 S_0 / (k_s + S_0).$$

Это уравнение называется уравнением Михаэлиса — Ментен и является одним из фундаментальных уравнений кинетики ферментативных реакций.

Кинетика роста популяций описывается уравнением Моно, имеющим внешнее сходство с уравнением Михаэлиса — Ментен. Согласно модели Моно, концентрация биомассы при непрерывном культивировании микроорганизмов изменяется по уравнению

$$\frac{dc}{d\tau} = \mu c; \quad c = c_0 + k(S_0 + S); \quad \mu = \mu_{\max} \frac{S}{k_s + S},$$

где c_0 , c — начальное и текущее значение концентрации биомассы в аппарате, кг/м³; τ — время, с; k — постоянная; S_0 , S — начальная и текущая концентрации питательных веществ, кг/м³; $\mu_{\max}$, μ — максимальная и текущая удель-

ные скорости роста микроорганизмов, $1/c$; k_S — константа Моно.

Согласно модели Моно — Иерусалимского, удельная скорость роста микроорганизмов определяется по уравнению

$$\mu = \mu_{\max} \frac{S}{k_S + S} \cdot \frac{k_P}{P + k_P},$$

где P — концентрация ингибирующего метаболита; k_P — постоянный коэффициент.

Дальнейшим развитием модели Моно — Иерусалимского являются модели Николаева, Хиншельвуда и других, учитывающие определяющие этапы в цепи метаболических процессов. Модель Моно — Иерусалимского, модифицированная Н. И. Николаевым, имеет вид

$$\mu = \mu_{\max} \frac{S}{k_S + S} \cdot \frac{k_{PS}}{k_{PS} + (S_0 - S)},$$

где k_{PS} — константа роста субстрата.

Обобщая изложенное, можно заключить, что для описания кинетики биохимических процессов, происходящих в пищевых производствах, применяют следующие виды моделей, формально описывающие зависимость скорости превращения субстрата от его концентрации:

реакция первого порядка

$$\frac{dS}{dt} = -kS;$$

реакция по уравнению Михаэлиса — Ментен

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{kS}{k_S + S};$$

реакция по уравнению Михаэлиса — Ментен с ингибированием

$$\frac{dS}{dt} = S - \frac{kS}{k_S + S + \frac{1}{k_{in}} S^2};$$

реакция по уравнению произвольного порядка

$$\frac{dS}{dt} = -kS^n.$$

Таким образом, можно применять методы формальной кинетики химических реакций для описания поведения биологических систем. Модели Михаэлиса — Ментен, Моно, Моно — Иерусалимского и другие удовлетворительно описы-

вают процессы микробиологического синтеза в пищевой промышленности при известных численных значениях постоянных в уравнениях моделей, характеризующих конкретные условия процессов.

Закономерности равновесия позволяют определить лишь максимально возможный (теоретический) выход продукта. Однако такой выход в производственных условиях обычно не достигается из-за уменьшения суммарной скорости различных превращений (химических, биохимических) $v = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ по мере снижения величины движущей силы.

В необратимых процессах, т. е. при $\vec{v}_2 = 0$, скорость реакции стремится к нулю ($v \rightarrow 0$) при полном израсходовании (исчезновении) одного из исходных реагентов, а в обратимых процессах ($v \rightarrow 0$) при $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$, т. е. при достижении равновесия. Например, скорость технологического процесса по целевому продукту при химических превращениях является результирующей скоростью прямой, обратной и побочных реакций, а также диффузии исходных веществ в зону реакции и продуктов из этой зоны.

§ 2. Математическая модель оптимального выхода биомассы

В пищевой промышленности значительное место занимает непрерывное культивирование микроорганизмов (производство пищевых и кормовых дрожжей и пр.). При этом применяют каскадные многоступенчатые аппараты с постоянным составом культуры. В соответствии с существующими представлениями непрерывное культивирование в одном аппарате может быть представлено параметрической схемой (рис. 97).

В аппарат с рабочим объемом V_p поступает поток культуральной жидкости V_t с начальной концентрацией питательных веществ S_0 . В результате микробиологических превращений концентрация питательных веществ в аппарате объема V_p уменьшается до S , и образуется биомасса с концентрацией c . Разбавлением среды со скоростью, характеризующейся коэффициентом $D = V_t/V_p$, среднее время нахождения субстрата в культиваторе составляет τ . Накопление биомассы пропорционально скорости ее роста μ или скорости разбавления культуры питательной средой D . Тогда расход биомассы, выходящей из аппарата, определяется выражением $G = Dc$.

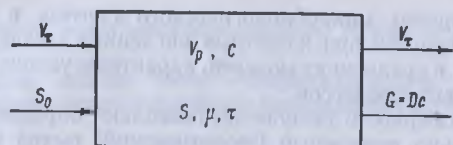


Рис. 97. Параметрическая схема процесса непрерывного биосинтеза в одном аппарате.

Обобщая изложенные теоретические представления, можно записать следующие математические соотношения: скорость роста (изменение концентрации) биомассы

$$\frac{dc}{d\tau} = \mu c;$$

удельная скорость роста биомассы в соответствии с уравнением Моно

$$\mu = \mu_{\max} \frac{S}{k_S + S};$$

изменение концентрации субстрата

$$\frac{dS}{d\tau} = \frac{1}{y} \cdot \frac{dc}{d\tau} = d\mu_{\max} \frac{S}{k_S + S} c,$$

где $y = 1/\alpha$ — коэффициент, учитывающий эффективность расхода субстрата; $\mu_{\max}$ — максимальное значение коэффициента скорости роста микроорганизмов, $1/\text{ч}$.

Образующиеся продукты реакции P приводят к замедлению процесса, которое учитывается уравнением Моно — Иерусалимского

$$\mu = \frac{\mu_{\max} S}{k_S + S} \cdot \frac{k_p}{P + k_p} = \frac{\mu_{\max} S}{k_S + S} \cdot \frac{k_{pS}}{k_{pS} + (S_0 - S)},$$

где k_{pS} — константа ингибирования, численно равная такому количеству субстрата, при котором в единице объема питательной среды образуется концентрация продуктов обмена, вызывающая уменьшение максимальной скорости роста микроорганизмов в два раза ($\mu = 0,5\mu_{\max}$, $\text{кг}/\text{м}^3$); k_S — константа насыщения Моно, равная концентрации субстрата, при которой коэффициент скорости роста микроорганизмов составляет половину его максимального значения ($\mu = 0,5\mu_{\max}$, $\text{кг}/\text{м}^3$).

При непрерывном культивировании микроорганизмов запишем

$$\frac{dc}{d\tau} = (\mu - D)c \text{ и } \frac{dS}{d\tau} = D(S_0 - S) - \alpha\mu c.$$

При установившемся режиме работы аппарата

$$\frac{dc}{d\tau} = 0 \text{ и } \frac{dS}{d\tau} = 0, \text{ т. е. } \mu = D.$$

Тогда $c = y(S_0 - S)$ или $c = \frac{1}{\alpha}(S_0 - S)$, где $y = 1/\alpha$ — выход дрожжей от использованного субстрата, $\text{кг}/\text{кг}$.

В этом случае производительность (продуктивность) аппарата по биомассе

$$G = Dc = \mu c$$

зависит от коэффициента скорости роста микроорганизмов μ , который определяется концентрациями растворенного кислорода, субстрата и продуктов обмена, а также температурой и рН среды. При оптимальных значениях рН, температуры среды и достаточной концентрации растворенного кислорода производительность аппарата определяется максимальной скоростью роста

$$G = \mu c = Dc = \mu_{\max} \frac{k_p S}{\alpha} \cdot \frac{S(S_0 - S)}{(k_S + S)(k_{pS} + S_0 - S)}. \quad (261)$$

Из этого выражения нетрудно установить, что производительность аппарата по биомассе определяется физиологическими константами $\mu_{\max}$, α , k_S и k_{pS} , имеет экстремальный характер и зависит от исходной и остаточной концентраций субстрата. Оптимальное ее значение можно получить классическим методом, приравняв производную по концентрации субстрата к нулю при заданном значении S_0

$$\left[\frac{dG}{dS} \right]_{S_0 = \text{const}} = 0.$$

Выполнив все преобразования, найдем концентрацию субстрата в аппарате, соответствующую максимальной производительности по биомассе

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dS} &= \frac{\mu_{\max} k_{pS}}{\alpha} \times \\ &\times \left[\frac{(S_0 - 2S)(k_S + S)(k_{pS} + S_0 - S) - (k_{pS} + S_0 - 2S)(S_0 - S)S}{(k_S + S)^2 (k_{pS} + S_0 - S)^2} \right] = 0; \\ S^2(2k_S - k_{pS}) + S(-2k_S k_{pS} - 3k_S S_0) + \\ &+ S_0 k_S (k_{pS} + S_0) = 0. \end{aligned}$$

Обозначив

$$A = 2k_S - k_{pS}; \quad B = 2k_S k_{pS} - 3k_S S_0; \quad C = S_0 k_S (k_{pS} + S_0),$$

получим уравнение канонической формы

$$AS^2 + BS + C = 0,$$

решением которого является выражение для определения остаточной концентрации субстрата, соответствующее максимальной производительности

$$S_m = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{2k_S k_{PS} + 3k_S S_0 - \sqrt{k_S [4k_{PS}(k_{PS} + S_0)(k_S + S_0) + k_S S_0^2]}}{2(2k_S - k_{PS})}. \quad (262)$$

Знак минус, стоящий перед корнем в числителе этого выражения, определен из условия

$$0 < S_m < S_0. \quad (263)$$

Подставив полученное выражение в исходное уравнение (261), можно определить максимальную производительность аппарата

$$G = \frac{\mu_m k_{PS} S_m (S_0 - S_m)}{\alpha (k_S + S_m)(k_{PS} + S_0 - S_m)}. \quad (264)$$

Характерное для культивирования микроорганизмов свойство саморегулирования процесса устанавливается на основе устойчивости решения системы в области, ограниченной неравенством

$$0 < D < D_{кр}. \quad (265)$$

Критическое значение коэффициента разбавления, соответствующее полному вымыванию микробных клеток из аппарата, равно

$$D_{кр} = \mu_m \frac{S_0}{k_S + S_0}; \quad (266)$$

$$D_m = \mu = \mu_m \frac{S_m}{k_S + S_m} \frac{k_{PS}}{k_{PS} + S_0 - S_m}. \quad (267)$$

Показателем совершенства процесса может быть коэффициент использования субстрата в аппарате, выраженный в относительных долях или в процентах

$$\eta_m = \frac{S_0 - S_m}{S_0}. \quad (268)$$

Накопление биомассы

$$c_m = G/D. \quad (269)$$

Перебором различных значений начальной концентрации рассчитывают оптимальные значения параметров S_m , D_m , G_m , η_m , c_m , решая уравнения при условиях (262—269)

Если процессом биосинтеза управляют величиной коэффициента разбавления, то оптимальное значение производительности аппарата по биомассе можно найти, приравняв к нулю производную по коэффициенту разбавления, т. е.

$$\left[\frac{\partial G}{\partial D} \right]_{S_0 = \text{const}} = 0. \quad (270)$$

Разрешив уравнение относительно концентрации субстрата S_m , найдем зависимость $S_m = f(D)$, т. е.

$$D(k_S + S)(k_{PS} + S_0 - S) = \mu_m S k_{PS}; \quad (271)$$

$$DS + S(Dk_S - Dk_{PS} - DS_0 = \mu_m k_{PS}) - Dk_S k_{PS} - Dk_S S_0 = 0;$$

$$S^2 + S \left(k_S - k_{PS} - S_0 + \frac{\mu_m k_{PS}}{D} \right) - k_S k_{PS} - k_S S_0 = 0,$$

обозначив

$$\left(k_S - k_{PS} - S_0 + \frac{\mu_m k_{PS}}{D} \right) = D \text{ и } k_S (k_{PS} - S) = C.$$

Последнее выражение приведем в каноническую форму $S^2 + BS + C = 0$, из которой определим оптимальное значение концентрации субстрата

$$S_{m(D)} = \frac{1}{2} \left[\left(k_{PS} - k_S + S_0 - \frac{\mu_m k_{PS}}{D} \right) \pm \sqrt{\left(k_{PS} - k_S - S_0 - \frac{\mu_m k_{PS}}{D} \right)^2 + 4k_S (k_{PS} + S_0)} \right].$$

Это уравнение справедливо в области, ограниченной интервалом $0 < D < D_{кр}$, а знак перед корнем определяется из условия $0 < S_m < S_0$.

Концентрация биомассы $c = f(D)$ может быть найдена из соотношения

$$c_D = \frac{S_0 - S_m(D)}{\alpha},$$

а производительность по биомассе

$$G_D = D \frac{S_0 - S_m(D)}{\alpha}.$$

Таблица 38. Параметры ведения технологического процесса при различных значениях S_0 и S_m

S_0	S_m	G_m	D_m	c_m	$D_{кр}$	η_m
10	1,05	2,25	0,24	9,31	0,43	0,89
20	1,81	3,33	0,17	18,94	0,43	0,90
30	2,55	3,93	0,14	28,59	0,43	0,91
40	3,28	4,31	0,11	38,24	0,43	0,91
50	4,01	4,58	0,09	47,91	0,43	0,91
60	4,73	4,77	0,08	57,60	0,43	0,92
70	5,45	4,92	0,07	67,23	0,43	0,92
80	6,17	5,04	0,06	76,89	0,43	0,92
90	6,90	5,13	0,06	86,56	0,43	0,92
100	7,72	5,21	0,05	96,22	0,43	0,92

Адекватность приведенной модели реальному процессу устанавливается экспериментально выращиванием микроорганизмов на питательной среде заданной концентрации.

В качестве примера приведем расчет оптимальных значений S_m , D_m , G_m , η_m , c_m , который выполнен в Институте микробиологии и вирусологии АН УССР имени К. Д. Заболотного при физиологических константах культуры $\mu_m = 0,435$ 1/ч; $k_S = 0,08$ кг/м³; $k_{pS} = 13,3$ кг/м³; $\alpha = 0,96$ кг/кг перебором значений S_0 от 10 до 100 кг/м³ с шагом $h_S = 10$ кг/м³.

Схема алгоритма вычисления приведена на рис. 98, а, результаты вычислений — в табл. 38 и 39.

Анализируя приведенные в этих таблицах данные, можно установить, что производительность и время пребывания

Таблица 39. Параметры ведения технологического процесса при различных значениях S_0 и D

S_0	D	S_m	$D_{кр}$	c_m	G_m	η_m
10	0,1	0,05	0,43	10,35	1,03	0,99
	0,4	9,95		0,05	0,02	0,09
20	0,1	0,11	0,43	20,71	2,07	0,99
	0,4	19,89		0,11	0,04	0,05
30	0,1	0,25	0,43	30,98	3,09	0,99
	0,4	29,87		0,13	0,05	0,03
40	0,1	0,94	0,43	40,67	4,06	0,97
50	0,1	7,09	0,43	44,69	4,46	0,86
60	0,1	16,72	0,43	45,08	4,50	0,72
70	0,1	26,61	0,43	45,18	4,51	0,62
80	0,1	36,57	0,43	45,23	4,52	0,54
90	0,1	46,45	0,43	43,76	4,52	0,48
100	0,1	56,52	0,43	45,28	4,52	0,44

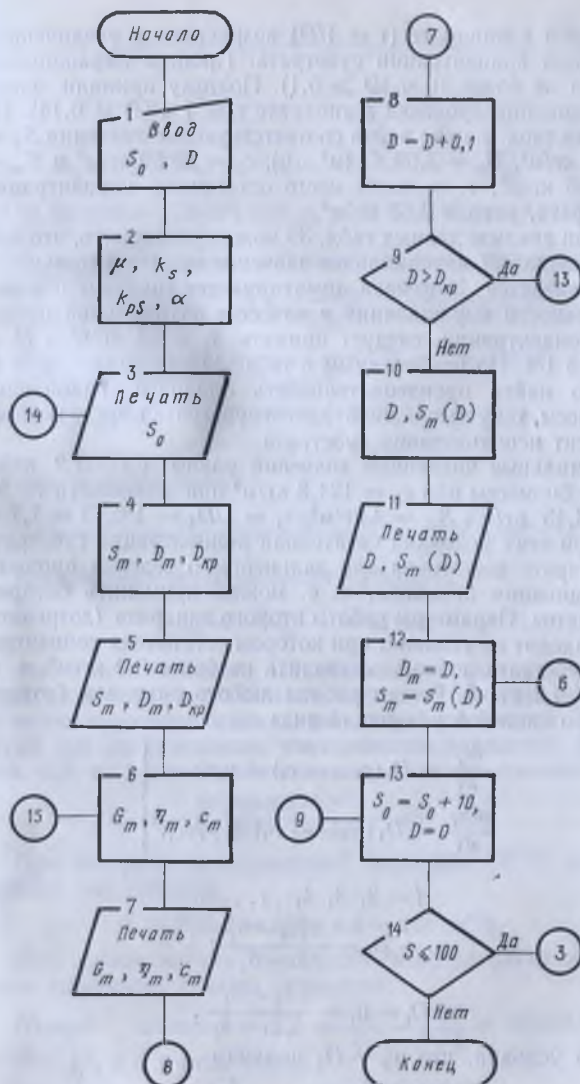


Рис. 98. Структурная схема алгоритма оптимизации выращивания микроорганизмов.

дрожжей в аппарате ($\tau = 1/D$) возрастают с увеличением исходной концентрации субстрата. Процесс выращивания длится не более 10 ч ($D \geq 0,1$). Поэтому приняли время выращивания дрожжей в аппарате $\tau = 7$ ч ($D = 0,14$). По данным табл. можно найти соответствующие значения $S_0 = 30$ кг/м³, $G_m = 3,93$ кг/(м³ · ч); $c_m = 28,59$ кг/м³ и $S_m = 2,55$ кг/м³, т. е. имеет место остаточная концентрация субстрата, равная 2,55 кг/м³.

При анализе данных табл. 39 можно установить, что при уменьшении D максимальное значение производительности увеличивается. Учитывая лимитирующее значение продолжительности выращивания в качестве оптимальной исходной концентрации, следует принять $S_0 = 30$ кг/м³ и $D = 0,13$ 1/ч. По приведенным в табл. 39 значениям S_0 и D можно найти производительность аппарата, накопление биомассы, текущую концентрацию субстрата в среде и коэффициент использования субстрата.

Остальные численные значения равны: $c = 31,2$ кг/м³ сухой биомассы или $c_n = 124,8$ кг/м³ при влажности 75 %; $G = 3,45$ кг/м³; $S_m = 4$ кг/м³, $\tau_1 = 1/D_1 = 1/0,13 = 7,7$ ч.

При этих условиях остаточная концентрация субстрата в аппарате достаточна для дальнейшего ведения процесса выращивания биомассы, т. е. можно применить батарею аппаратов. Параметры работы второго аппарата (дозревателя) находят из условия, при котором остаточная концентрация субстрата должна составлять не более 0,2 кг/м³, т. е. $S_{m2} = 0,2$ кг/м³. Режим работы любого аппарата батареи опишем системой уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} \frac{dc_i}{d\tau} &= D_i(c_{i-1} - c_i) + \mu_i c_i; \\ \frac{dS_i}{d\tau} &= D_i(S_{i-1} - S_i) + \mu_i \alpha c_i, \end{aligned} \right\}$$

где

$$i = 2, 3, 4, \dots, k;$$

$$\mu_i = D_i = \frac{S_{i-1} - S_i}{S_0 - S_i};$$

$$D_i = \mu_i = \frac{S_0 - S_i}{S_{i-1} - S_i}.$$

Из условия, что $\mu_2 \neq D_2$ получим

$$\mu_2 = \mu_m \frac{S_2}{k_S + S_2} \cdot \frac{k_{pS}}{k_{pS} + S_0 - S_2} =$$

$$= \frac{0,4 \cdot 0,2 - 13,3}{(0,2 + 0,08) \cdot (13,3 + 30 - 0,2)} = 0,0921/4;$$

$$D_2 = \mu_2 \frac{S_0 - S_2}{S_1 - S_2} = \frac{0,09 \cdot 29,8}{3,8} = 0,71/4;$$

$$\tau_2 = 1/D_2 = 1/0,7 = 1,4; \quad c_2 = \frac{S_0 - S_2}{\alpha} = \frac{30 - 0,2}{0,96} = 32 \text{ кг сухой биомассы (СБ/м}^3\text{) или } c_2 = 128 \text{ кг/м}^3 \text{ при влажности 75 \%}.$$

Производительность по биомассе второго аппарата

$$G_2 = D_2 \frac{S_1 - S_2}{\alpha} = 0,7 \frac{4 - 0,2}{0,96} = 2,78 \text{ СБ/(м}^3 \cdot \text{ч)}.$$

Для батареи аппаратов при $S_0 = 30$ кг/м³; $S_k = 0,2$ кг/м³; $c_1 = c_2 = 32$ кг/м³; общее время выращивания биомассы

$$\tau_0 = 7,7 + 1,4 = 9,1 \text{ ч};$$

производительность

$$G_0 = c \frac{1}{1/D_1 + 1/D_2} = \frac{32}{9,1} = 3,52 \text{ кг СБ/(м}^3 \cdot \text{ч)};$$

коэффициент использования субстрата

$$\eta_0 = \frac{30 - 0,2}{30} = 0,994;$$

если учесть, что в году 330 рабочих дней, заданная производственная мощность 100 тыс. т, с учетом 8 % потерь продукта на последующих стадиях, режим работы батареи 24 ч в сутки при коэффициенте, учитывающем влажность дрожжей, 0,9, то производительность по биомассе составит

$$V_\tau = \frac{100\,000\,000 \cdot 0,9}{330 \cdot 0,92 \cdot 32 \cdot 24} = 384 \text{ м}^3/\text{ч}.$$

При возврате культуральной жидкости 70 % расход сточных вод составит

$$G_w = V_\tau 0,3 = 384 \cdot 0,3 = 115 \text{ м}^3/\text{ч}.$$

Для осуществления технологического процесса необходимы следующие объемы аппаратов:

$$\text{Первый аппарат} - V_{p1} = \frac{V_\tau}{D_1} - \frac{384}{0,13} = 2953,8 \text{ м}^3 = 2954 \text{ м}^3, \text{ а с учетом потерь}$$

$$V_{\text{общ1}} = \frac{V_{p1}}{k_2} = \frac{2954}{0,8} = 3692 \text{ м}^3.$$

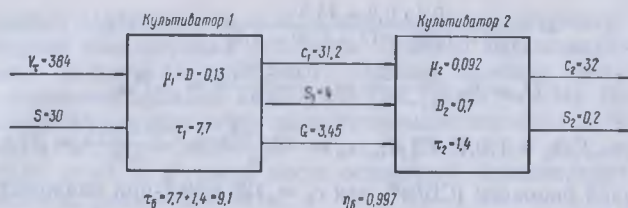


Рис. 99. Схема двустадийного выращивания микроорганизмов.

Если установить аппараты с объемом 850 м³, то необходимо иметь

$$n = \frac{3692}{850} \approx 5 \text{ аппаратов.}$$

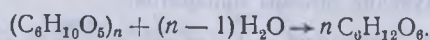
Второй аппарат — $V_{p_2} = \frac{V_{\tau}}{D_2} = \frac{384}{0,7} = 545 \text{ м}^3$, а с учетом коэффициента заполнения $k_3 = 0,8$ общий объем аппарата

$$V_{\text{общ.}} = \frac{V_{p_2}}{k_3} = \frac{545}{0,8} = 686 \text{ м}^3.$$

Последовательность потоков в батарее, состоящей из двух аппаратов, и их численные характеристики представлены на рис. 99.

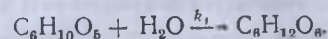
§ 3. Модели кинетики гидролиза

В качестве примера рассмотрим составление математической модели для исследования кинетики процесса гидролиза целлюлозы. Основная цель исследования — определение продолжительности процесса гидролиза целлюлозы для достижения максимально возможной концентрации глюкозы. Математическая модель должна соответствовать решению этой задачи. Для составления математического описания процесса гидролиза используют основные теоретические положения о реакции гидролиза целлюлозы, которая в простейшем случае может быть описана следующим уравнением:



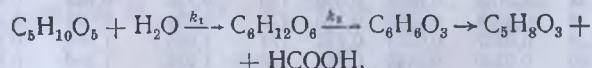
Поскольку степень полимеризации очень велика и для целлюлозы составляет 1500—10 000 ед., то запишем, не вводя при этом существенной погрешности, что $n-1 \approx n$. Тогда левую и правую части уравнения разделим на n и

получим уравнение вида



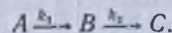
Процесс гидролиза является реакцией первого порядка, хотя и биомолекулярной (концентрация воды равна нулю).

Одновременно с гидролизом целлюлозы проходит реакция распада моносахаридов, что приводит к образованию оксиметилфурфура. В общем случае процесс образования глюкозы и ее распад представить следующим образом:



где k_1 , k_2 — константы скорости гидролиза целлюлозы и распада глюкозы.

В нашем случае имеет место последовательная реакция первого порядка типа



В дифференциальной форме кинетические уравнения этой реакции имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dc_A}{d\tau} &= -k_1 c_A; & \frac{dG_A}{d\tau} &= -k_1 G_A; \\ \frac{dc_B}{d\tau} &= k_1 c_A - k_2 c_B, & \text{или} & \frac{dG_B}{d\tau} = k_1 G_A - k_2 G_B; \\ \frac{dc_C}{d\tau} &= k_2 c_B; & \frac{dG_C}{d\tau} &= k_2 G_B, \end{aligned}$$

где c — концентрация компонентов A , B и C , молярные доли или %; G — масса компонентов A , B и C , кг.

Технологической задачей процесса гидролиза и подготовки гидролизата является получение биологически доброкачественного сахаросодержащего раствора (оптимальная питательная среда для получения из него биомассы). В процессе гидролиза образуются также ингибиторы — вещества, тормозящие размножение дрожжей. К таким веществам относится и оксиметилфурфурол. Поэтому очень важно установить время гидролиза, по истечении которого в растворе будет максимальное количество простых сахаров.

Для решения этой задачи удобно использовать АВМ. С этой целью рассмотрим конкретный пример расчета оптимального времени гидролиза полисахарида. При плотности загрузки 135 кг/м³ абсолютно сухих веществ при объеме аппарата 18 м³ процесс гидролиза ведут при температуре 168 °С и концентрации кислоты 1 %.

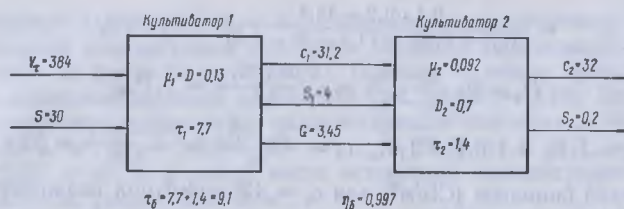


Рис. 99. Схема двустадийного выращивания микроорганизмов.

Если установить аппараты с объемом 850 м³, то необходимо иметь

$$n = \frac{3692}{850} \approx 5 \text{ аппаратов.}$$

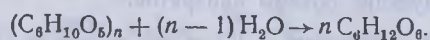
Второй аппарат — $V_{p_2} = \frac{V_{\tau}}{D_2} = \frac{384}{0,7} = 545 \text{ м}^3$, а с учетом коэффициента заполнения $k_3 = 0,8$ общий объем аппарата

$$V_{\text{общ.}} = \frac{V_{p_2}}{k_3} = \frac{545}{0,8} = 686 \text{ м}^3.$$

Последовательность потоков в батарее, состоящей из двух аппаратов, и их численные характеристики представлены на рис. 99.

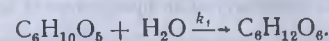
§ 3. Модели кинетики гидролиза

В качестве примера рассмотрим составление математической модели для исследования кинетики процесса гидролиза целлюлозы. Основная цель исследования — определение продолжительности процесса гидролиза целлюлозы для достижения максимально возможной концентрации глюкозы. Математическая модель должна соответствовать решению этой задачи. Для составления математического описания процесса гидролиза используют основные теоретические положения о реакции гидролиза целлюлозы, которая в простейшем случае может быть описана следующим уравнением:



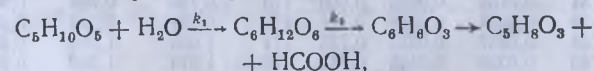
Поскольку степень полимеризаций очень велика и для целлюлозы составляет 1500—10 000 ед., то запишем, не вводя при этом существенной погрешности, что $n - 1 \approx n$. Тогда левую и правую части уравнения разделим на n и

получим уравнение вида



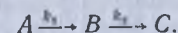
Процесс гидролиза является реакцией первого порядка, хотя и биомолекулярной (концентрация воды равна нулю).

Одновременно с гидролизом целлюлозы проходит реакция распада моносахаридов, что приводит к образованию оксиметилфурфура. В общем случае процесс образования глюкозы и ее распад представить следующим образом:



где k_1, k_2 — константы скорости гидролиза целлюлозы и распада глюкозы.

В нашем случае имеет место последовательная реакция первого порядка типа



В дифференциальной форме кинетические уравнения этой реакции имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dc_A}{d\tau} &= -k_1 c_A; & \frac{dG_A}{d\tau} &= -k_1 G_A; \\ \frac{dc_B}{d\tau} &= k_1 c_A - k_2 c_B, & \text{или} & \frac{dG_B}{d\tau} = k_1 G_A - k_2 G_B; \\ \frac{dc_C}{d\tau} &= k_2 c_B; & \frac{dG_C}{d\tau} &= k_2 G_B, \end{aligned}$$

где c — концентрация компонентов A, B и C , молярные доли или %; G — масса компонентов A, B и C , кг.

Технологической задачей процесса гидролиза и подготовки гидролизата является получение биологически доброкачественного сахаросодержащего раствора (оптимальная питательная среда для получения из него биомассы). В процессе гидролиза образуются также ингибиторы — вещества, тормозящие размножение дрожжей. К таким веществам относится и оксиметилфурфурол. Поэтому очень важно установить время гидролиза, по истечении которого в растворе будет максимальное количество простых сахаров.

Для решения этой задачи удобно использовать АВМ. С этой целью рассмотрим конкретный пример расчета оптимального времени гидролиза полисахарида. При плотности загрузки 135 кг/м³ абсолютно сухих веществ при объеме аппарата 18 м³ процесс гидролиза ведут при температуре 168 °С и концентрации кислоты 1 %.

Таблица 40. Зависимость констант скорости гидролиза целлюлозы и распада глюкозы от температуры (в присутствии 1 % серной кислоты)

Темпе- ратура, °C	Константы, 1/ч		$\frac{k_1}{k_2}$	Темпе- рату- ра, °C	Константы, 1/ч		$\frac{k_1}{k_2}$
	k_1	k_2			k_1	k_2	
130	0,0104	0,0157	0,660	166	0,484	0,538	0,900
132	0,0129	0,0190	0,680	168	0,596	0,648	0,920
134	0,0162	0,0235	0,690	170	0,735	0,780	0,945
136	0,0204	0,0288	0,710	172	0,871	0,910	0,955
138	0,0257	0,0355	0,725	174	1,059	1,090	0,970
140	0,0330	0,0445	0,740	176	1,274	1,290	0,990
142	0,0407	0,0542	0,752	178	1,549	1,534	1,010
144	0,0513	0,0671	0,765	180	1,880	1,830	1,025
146	0,0631	0,0817	0,777	182	2,239	2,138	1,050
148	0,0794	0,1000	0,794	184	2,630	2,460	1,070
150	0,0980	0,1210	0,810	186	3,162	2,911	1,090
152	0,1200	0,1460	0,823	188	3,802	3,420	1,110
154	0,1480	0,1780	0,832	190	5,500	3,980	1,130
156	0,1800	0,2140	0,842	192	5,250	4,530	1,160
158	0,2190	0,2580	0,850	194	6,310	5,250	1,200
160	0,2700	0,3140	0,860	196	7,410	5,970	1,240
162	0,3270	0,3750	0,870	198	8,810	6,820	1,290
164	0,3980	0,4530	0,880	200	10,550	7,890	1,330

Количество загружаемого в аппарат сырья составит $18 \times 135 = 2430$ кг, а количество целлюлозы (40 % массы) — $2430 \times 0,4 \approx 1000$ кг. В начальный момент времени, т. е. при $\tau = 0$, количество целлюлозы равно 1000 кг, т. е. $G_A = 1000$; глюкозы $G_B = 0$ и оксиметилфурфуrolа $G_C = 0$.

Значения констант приведены в табл. 40. При заданном режиме гидролиза целлюлозы константы скорости гидролиза и распада моносахаридов для приведенных условий равны

$$k_1 = 0,596 \text{ 1/ч и } k_2 = 0,648 \text{ 1/ч.}$$

Подставляя значение констант в уравнения кинетики процесса гидролиза, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG_A}{d\tau} &= 0,596G_A; \\ \frac{dG_B}{d\tau} &= 0,596G_A - 0,648G_B; \\ \frac{dG_C}{d\tau} &= 0,648G_B. \end{aligned} \right\} \quad (272)$$

На основании этой системы дифференциальных уравнений составляют структурную схему соединения решающих элементов (см. рис. 94).

В целях максимального использования шкалы измерительных приборов АВМ масштабные коэффициенты M_{G_A} , M_{G_B} , M_{G_C} выбираем из условий полного соответствия величин наибольшей концентрации $G_A = 1000$ максимальной величине напряжения $u_{\max} = 100$ В, т. е.

$$M_{G_A} = M_{G_B} = M_{G_C} = \frac{G_A}{u_{G_A}} = \frac{G_B}{u_{G_B}} = \frac{G_C}{u_{G_C}} = \frac{1000}{10} = 100 \text{ кг/В.}$$

Масштаб времени выбираем ускоренный $M_\tau = \frac{\tau}{\tau_{\max}} = 3600$ (одна секунда машинного времени $\tau_{\max}$ соответствует одному часу или 3600 с натурального времени τ), так как и машинное время должно обеспечить только снятие или фиксацию показаний приборов.

Используя структурную схему соединения решающих элементов и масштабные соотношения, составим машинные уравнения

$$\begin{aligned} -u_{G_A} &= -\frac{1}{p} k_{11} (-u_{G_A}); \\ \frac{G_A}{M_{G_A}} &= -\frac{1}{p} k_{11} \frac{G_A}{M_{G_C}}. \end{aligned}$$

Поскольку $p = \frac{d}{d\tau}$ и $\tau = M_\tau \tau_m$, последнее выражение приведем к виду

$$\frac{dG_A}{d\tau_m} = -k_{11} M_\tau G_A,$$

где τ_m — машинное время, с; M_τ — масштаб времени; τ — натуральное время, ч.

Заменяя часовую константу скорости реакции гидролиза секундной и сравнивая последнее уравнение с первым уравнением системы (272) и учетом масштаба времени, получим $k_{11} = 0,596$

$$\begin{aligned} -u_{G_B} &= \frac{1}{p} (k_{21} u_{G_A} - k_{22} u_{G_B}); \\ \frac{G_B}{M_{G_B}} &= \frac{1}{p} \left(k_{21} \frac{G_A}{M_{G_A}} - k_{22} \frac{G_B}{M_{G_B}} \right). \end{aligned}$$

Таблица 40. Зависимость констант скорости гидролиза целлюлозы и распада глюкозы от температуры (в присутствии 1 % серной кислоты)

Темпе- ратура, °C	Константы, 1/ч			Темпе- рату- ра, °C	Константы, 1/ч		
	k_1	k_2	k_3		k_1	k_2	k_3
130	0,0104	0,0157	0,660	166	0,484	0,538	0,900
132	0,0129	0,0190	0,680	168	0,596	0,648	0,920
134	0,0162	0,0235	0,690	170	0,735	0,780	0,945
136	0,0204	0,0288	0,710	172	0,871	0,910	0,955
138	0,0257	0,0355	0,725	174	1,059	1,090	0,970
140	0,0330	0,0445	0,740	176	1,274	1,290	0,990
142	0,0407	0,0542	0,752	178	1,549	1,534	1,010
144	0,513	0,0671	0,765	180	1,880	1,830	1,025
146	0,0511	0,0817	0,777	182	2,239	2,138	1,050
148	0,0794	0,1000	0,794	184	2,630	2,460	1,070
150	0,0980	0,1210	0,810	186	3,162	2,911	1,090
152	0,1200	0,1460	0,823	188	3,802	3,420	1,110
154	0,1480	0,1780	0,832	190	5,500	3,980	1,130
156	0,1800	0,2140	0,842	192	5,250	4,530	1,160
158	0,2190	0,2580	0,850	194	6,310	5,250	1,200
160	0,2700	0,3140	0,860	196	7,410	5,970	1,240
162	0,3270	0,3750	0,870	198	8,810	6,820	1,290
164	0,3980	0,4530	0,880	200	10,550	7,890	1,330

Количество загружаемого в аппарат сырья составит $18 \times 135 = 2430$ кг, а количество целлюлозы (40 % массы) — $2430 \times 0,4 \approx 1000$ кг. В начальный момент времени, т. е. при $\tau = 0$, количество целлюлозы равно 1000 кг, т. е. $G_A = 1000$; глюкозы $G_B = 0$ и оксиметилфурфурола $G_C = 0$.

Значения констант приведены в табл. 40. При заданном режиме гидролиза целлюлозы константы скорости гидролиза и распада моносахаридов для приведенных условий равны

$$k_1 = 0,596 \text{ 1/ч и } k_2 = 0,648 \text{ 1/ч.}$$

Подставляя значение констант в уравнения кинетики процесса гидролиза, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{dG_A}{d\tau} &= 0,596G_A; \\ \frac{dG_B}{d\tau} &= 0,596G_A - 0,648G_B; \\ \frac{dG_C}{d\tau} &= 0,648G_B. \end{aligned} \right\} \quad (272)$$

На основании этой системы дифференциальных уравнений составляют структурную схему соединения решающих элементов (см. рис. 94).

В целях максимального использования шкалы измерительных приборов АВМ масштабные коэффициенты M_{G_A} , M_{G_B} , M_{G_C} выбираем из условий полного соответствия величин наибольшей концентрации $G_A = 1000$ максимальной величине напряжения $u_{\max} = 100$ В, т. е.

$$M_{G_A} = M_{G_B} = M_{G_C} = \frac{G_A}{u_{G_A}} = \frac{G_B}{u_{G_B}} = \frac{G_C}{u_{G_C}} = \frac{1000}{10} = 100 \text{ кг/В.}$$

Масштаб времени выбираем ускоренный $M_\tau = \frac{\tau}{\tau_{\max}} = 3600$ (одна секунда машинного времени $\tau_{\max}$ соответствует одному часу или 3600 с натурального времени τ), так как и машинное время должно обеспечить только снятие или фиксацию показаний приборов.

Используя структурную схему соединения решающих элементов и масштабные соотношения, составим машинные уравнения

$$\begin{aligned} -u_{G_A} &= -\frac{1}{p} k_{11} (-u_{G_A}); \\ \frac{G_A}{M_{G_A}} &= -\frac{1}{p} k_{11} \frac{G_A}{M_C}. \end{aligned}$$

Поскольку $p = \frac{d}{d\tau}$ и $\tau = M_\tau \tau_m$, последнее выражение приведем к виду

$$\frac{dG_A}{d\tau_m} = -k_{11} M_\tau G_A,$$

где τ_m — машинное время, с; M_τ — масштаб времени; τ — натуральное время, ч.

Заменяя часовую константу скорости реакции гидролиза секундной и сравнивая последнее уравнение с первым уравнением системы (272) и учетом масштаба времени, получим $k_{11} = 0,596$

$$\begin{aligned} -u_{G_B} &= \frac{1}{p} (k_{21} u_{G_A} - k_{22} u_{G_B}); \\ \frac{G_B}{M_{G_B}} &= \frac{1}{p} \left(k_{21} \frac{G_A}{M_{G_A}} - k_{22} \frac{G_B}{M_{G_B}} \right). \end{aligned}$$

Учитывая масштаб времени

$$\frac{dG_B}{d\tau} = (k_{21}G_A - k_{22}G_B) M\tau$$

и сравнивая последнее уравнение со вторым уравнением системы (272), получим

$$k_{21} = 0,596; \quad k_{22} = 0,648;$$

$$-u_{G_C} = -\frac{1}{p} k_{31} u_{G_B}; \quad p \frac{G_C}{M_G} = k_{31} \frac{G_B}{M_G}.$$

Учитывая масштаб времени $\frac{dG_C}{d\tau} = k_{31}G_B M\tau$ и сравнивая последнее уравнение с третьим уравнением системы (272), получим $k_{31} = 0,648$.

Для получения численного решения системы уравнений устанавливают коэффициенты передачи и начальные условия операционных усилителей. С помощью осциллографа наблюдают характеристики изменения количества целлюлозы, глюкозы и оксиметилфурфурола во времени. По ряду фиксированных точек строят график (см. рис. 95) изменения концентрации компонентов во времени. По графику определяют оптимальное время гидролиза, т. е. время, при котором получают максимальный выход сахаров.

На основании графика делаем следующий вывод: максимальная концентрация глюкозы может быть получена после двух часов гидролиза целлюлозы. При этом количество образовавшейся глюкозы

$$G_B^{\max} = u_{G_B} M_G = 37 \cdot 10 = 370 \text{ кг.}$$

В качестве примера использования интегрального метода рассмотрим составление математической модели для определения кинетических констант процесса разложения глюкозы. Экспериментальные данные изменения концентрации глюкозы (c) во времени (τ) при температурах 423 и 473 К (соответственно 150 и 200 °С) приведены в табл. 41. Поскольку в процессе исследования определяется количество (концентрация) прореагировавшего компонента, то для расчета констант следует применять интегральный метод (величина концентрации реагентов является интегралом от скорости реакции по времени).

Исходя из того что механизм реакции неизвестен, предположим, что кинетика разложения глюкозы описывается уравнением n -го порядка. Как известно, скорость реакции

Таблица 41. Изменение концентрации глюкозы во времени

423 К		473 К	
τ , с	c , моль	τ , с	c , моль
0	1	0	1
3600	0,89	90	0,78
7200	0,79	180	0,65
10 800	0,69	270	0,55
14 400	0,62	360	0,45
18 000	0,55	450	0,38
21 600	0,49	540	0,32
25 200	0,45	630	0,26
28 000	0,39	720	0,21
32 400	0,34	810	0,18
36 000	0,30	900	0,15
54 000	0,16		

n -го порядка описывается уравнением вида

$$v = \frac{dc}{d\tau} = kc^n.$$

Прологарифмировав это выражение, получим

$$\lg v = \lg k + n \lg c.$$

Построив график зависимости скорости реакции от концентрации реагентов в логарифмических координатах, получим прямую линию. Тангенс угла наклона этой прямой будет представлять собой порядок реакции n . Отрезок, отсекаемый на оси ординат, равен значению константы скорости реакции k . Если же точки не будут лежать на прямой, то необходимо принять другой вид уравнения, т. е. предположить другой механизм химической реакции.

Интегральный метод заключается в интегрировании выbranного кинетического уравнения и получении выражения для концентрации c как функции времени τ , порядка реакции n и константы скорости k

$$c = f(\tau, n, k).$$

Сравнивая кривые $f(\tau, n, k)$, построенные для различных значений n и k , с экспериментально полученным изменением концентрации продуктов реакции исходных веществ, можно подобрать такие значения порядка и константы скорости, при которых экспериментальные и расчетные данные полностью соответствуют.

Следовательно, интегральный метод является методом проб и ошибок. Он распространен благодаря применению

Учитывая масштаб времени

$$\frac{dG_B}{d\tau} = (k_{21}G_A - k_{22}G_B) M\tau$$

и сравнивая последнее уравнение со вторым уравнением системы (272), получим

$$k_{21} = 0,596; \quad k_{22} = 0,648;$$

$$-u_{G_C} = -\frac{1}{p} k_{31} u_{G_B}; \quad p \frac{G_C}{M_G} = k_{31} \frac{G_B}{M_G}.$$

Учитывая масштаб времени $\frac{dG_C}{d\tau} = k_{31}G_B M\tau$ и сравнивая последнее уравнение с третьим уравнением системы (272), получим $k_{31} = 0,648$.

Для получения численного решения системы уравнений устанавливают коэффициенты передачи и начальные условия операционных усилителей. С помощью осциллографа наблюдают характеристики изменения количества целлюлозы, глюкозы и оксиметилфурфурола во времени. По ряду фиксированных точек строят график (см. рис. 95) изменения концентрации компонентов во времени. По графику определяют оптимальное время гидролиза, т. е. время, при котором получают максимальный выход сахаров.

На основании графика делаем следующий вывод: максимальная концентрация глюкозы может быть получена после двух часов гидролиза целлюлозы. При этом количество образовавшейся глюкозы

$$G_B^{\max} = u_{G_B} M_G = 37 \cdot 10 = 370 \text{ кг.}$$

В качестве примера использования интегрального метода рассмотрим составление математической модели для определения кинетических констант процесса разложения глюкозы. Экспериментальные данные изменения концентрации глюкозы (c) во времени (τ) при температурах 423 и 473 К (соответственно 150 и 200 °С) приведены в табл. 41. Поскольку в процессе исследования определяется количество (концентрация) прореагировавшего компонента, то для расчета констант следует применять интегральный метод (величина концентрации реагентов является интегралом от скорости реакции по времени).

Исходя из того что механизм реакции неизвестен, предположим, что кинетика разложения глюкозы описывается уравнением n -го порядка. Как известно, скорость реакции

Таблица 41. Изменение концентрации глюкозы во времени

423 К		473 К	
τ , с	c , моль	τ , с	c , моль
0	1	0	1
3600	0,89	90	0,78
7200	0,79	180	0,65
10 800	0,69	270	0,55
14 400	0,62	360	0,45
18 000	0,55	450	0,38
21 600	0,49	540	0,32
25 200	0,45	630	0,26
28 000	0,39	720	0,21
32 400	0,34	810	0,18
36 000	0,30	900	0,15
54 000	0,16		

n -го порядка описывается уравнением вида

$$v = \frac{dc}{d\tau} = kc^n.$$

Прологарифмировав это выражение, получим

$$\lg v = \lg k + n \lg c.$$

Построив график зависимости скорости реакции от концентрации реагентов в логарифмических координатах, получим прямую линию. Тангенс угла наклона этой прямой будет представлять собой порядок реакции n . Отрезок, отсекаемый на оси ординат, равен значению константы скорости реакции k . Если же точки не будут лежать на прямой, то необходимо принять другой вид уравнения, т. е. предположить другой механизм химической реакции.

Интегральный метод заключается в интегрировании выбранного кинетического уравнения и получении выражения для концентрации c как функции времени τ , порядка реакции n и константы скорости k

$$c = f(\tau, n, k).$$

Сравнивая кривые $f(\tau, n, k)$, построенные для различных значений n и k , с экспериментально полученным изменением концентрации продуктов реакции исходных веществ, можно подобрать такие значения порядка и константы скорости, при которых экспериментальные и расчетные данные полностью соответствуют.

Следовательно, интегральный метод является методом проб и ошибок. Он распространен благодаря применению

АВМ, так как дифференциальные уравнения на АВМ решаются мгновенно, а параметры n и k можно изменять на модели в широких пределах путем простого поворота рукоятки потенциометра.

Рассмотрим применяемые на АВМ методы обработки экспериментальных данных на примере простой реакции первого порядка процесса разложения глюкозы до оксиметилфурфурола: схема реакции $A \rightarrow B$, скорость реакции $v_n = \frac{dc_A}{d\tau} = -k_1 c_A$ при $\tau = 0$, $c_A = c_{A_0}$, c_A и c_{A_0} — начальное и текущее значения концентрации компонента (глюкозы).

Значение константы реакции разложения глюкозы зависит от температуры в соответствии с уравнением

$$k = k_0 \exp(-E/RT),$$

где k_0 — предэкспоненциальный множитель; E — энергия активации, Дж/моль; R — газовая постоянная, Дж/моль $\times$ К; T — абсолютная температура, К.

Задача состоит в том, чтобы определить кинетические константы (предэкспоненциальный множитель k_0 и энергию активации E) по экспериментальным данным, приведенным в табл. 34.

Преобразуя кинетическое уравнение путем замены физических переменных машинными, получим уравнение

$$\frac{dU_{CA} M_A}{\tau_m M_\tau} = -k U_{CA} M_A,$$

где $c_A = U_{CA} M_A$; $\tau = \tau_m M_\tau$.

Разделив левую и правую части уравнения на $\frac{M_A}{M_\tau}$, окончательно получим

$$\frac{dU_{CA}}{d\tau_m} = N_1 U_{CA} \text{ при } \tau_m = 0, U_{CA} = U_{CA_0},$$

где N_1 — коэффициент передачи, равный $k M_\tau$.

Далее подбираем такие значения, при которых полученные на АВМ значения c имеют наименьшие отклонения от экспериментальных.

Определив величину N_1 для $T_1 = 423$ К и $T_2 = 473$ К, рассчитаем соответствующие значения константы скорости

$$k_1 = \frac{N_{11}}{M_{\tau_1}} \text{ и } k_2 = \frac{N_{12}}{M_{\tau_2}},$$

а затем определить E и k_0 , решив систему уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} k_0 \exp(-E/RT_1); \\ k_0 \exp(-E/RT_2). \end{aligned}$$

При обработке экспериментальных данных применяют различные приемы подбора коэффициентов и оценки отклонений в зависимости от задачи, стоящей перед исследователем, и особенностей проведения эксперимента.

Чаще всего величину отклонения (погрешности) определяют тремя методами: по среднему интегральному, среднему квадратическому и максимальному отклонению (размерное приближение), применяя простой перебор значений N_1 .

Среднее интегральное отклонение. В качестве отклонения расчетной величины концентрации глюкозы от экспериментальных данных принимают среднее интегральное отклонение

$$\Delta c_{A_n} = f(k); \quad \Delta c_{A_m} = \frac{1}{\tau_{k_0}} \int_0^{\tau_k} \Delta c_A d\tau,$$

где

$$\Delta c_A = c_A - c_{A_{\text{эксп}}},$$

τ_{k_n} — продолжительность реакции.

Непосредственно на АВМ получают величину напряжения

$$U_n = \frac{\Delta c_{A_n} \tau_m}{M_A M_\tau}.$$

Наилучшее приближение $k(N_1)$ в данном случае такое, при котором

$$\Delta c_{A_U} = 0 \text{ или } U_n = 0.$$

На блоке нелинейности (БН) воспроизводится экспериментальная зависимость концентрации глюкозы от времени $c_{A_{\text{эксп}}} = f(\tau)$ в соответствующем масштабе, т. е. $U_{c_{\text{эксп}}} = f(\tau_m)$.

Среднее квадратическое отклонение (метод наименьших квадратов). Если допустить, что ошибки экспериментальных величин $c_{A_{\text{эксп}}}$ имеют нормальный закон распределения, то наиболее вероятной системой значений неизвестных (в данном случае кинетических констант) является сумма квадратов отклонений расчетных значений функции от экспериментальных, которая должна быть наименьшей.

Наилучшее в этом смысле значение кинетических констант целесообразно определять, минимизируя среднее квадратичное отклонение

$$\beta = \int_0^{\tau_k} (\Delta c_A)^2 d\tau.$$

Величину $(\Delta c_A)^2$ легко получить, используя блок перемножения АВМ

$$U_\beta = \frac{\beta}{M_{c_A} M_\tau} N_2.$$

Для повышения точности изменения величину $|\Delta c_A|^2$ умножают на постоянный коэффициент $N > 1$.

Равномерное приближение. Если эксперимент проведен с большой точностью и разброс экспериментальных точек пренебрежительно мал по сравнению с погрешностью аппроксимации, находят значения констант, обеспечивающие равномерное приближение расчетной функции к экспериментальной. Кинетические константы подбирают таким образом, чтобы максимальное отклонение расчетной величины от экспериментальной или по сравнению с другим способом выбора констант было бы наименьшим. Отклонения здесь измеряют только в точках, полученных экспериментально. Задача на АВМ решается в следующем порядке:

1. Собирают схему для вычисления среднего интегрального и среднего квадратического отклонений.

2. С делителя напряжения на вход усилителя подают

$$U_L = \frac{100}{\tau_{mk}} = 5B$$

и проверяют точность воспроизведения функции

$$U_\tau = U_L \tau_{mk} = 5\tau_{mk}.$$

Время интегрирования τ_{mk} принято равным 20 с.

3. Настраивают блок нелинейности для воспроизведения экспериментальной зависимости

$$c_{A_{\text{эксп}}} = f(\tau) \text{ при } 423 \text{ и } 473 \text{ K,}$$

для чего составляют карты настройки.

Масштаб времени

$$M_\tau = \frac{\tau_k}{\tau_{mk}} = \frac{54000}{20} = 2700.$$

Масштаб концентрации

$$M_c = \frac{c_A}{U_{c_A}} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ моль/В.}$$

4. Подбирают коэффициенты передачи N_1^* , N_1^* и N_1^* соответственно по среднему интегральному, среднему квадратичному и максимальному отклонению, результаты подбора коэффициентов обычно сводят в таблицу.

Рассчитывают значения K_1^* , K_1^* и K_1^* по формуле $k = \frac{N_1}{M_\tau}$. Для температуры $T = 473 \text{ K}$ повторяют настройку блока нелинейности и подбор коэффициентов передачи. При этом измеряют масштаб времени $M_\tau = \frac{900}{20} = 45$, время интегрирования то же ($\tau_{mk} = 20$, с).

Для вычисления энергии активации и предэкспоненциального множителя решают систему уравнений

$$\begin{cases} \ln k_1 = \ln k_0 - E/RT_1; \\ \ln k_2 = \ln k_0 - E/RT_2, \end{cases}$$

$$\text{где } k_1 = \frac{N_{11}}{M_{\tau_1}}; \quad k_2 = \frac{N_{12}}{M_{\tau_2}};$$

$$R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{K)}.$$

Так как k_1 и k_2 лишь приближенные значения констант скорости, поэтому и величины E и k_0 вычисляют с некоторой погрешностью. Для более точного определения кинетических констант необходимо иметь экспериментальные данные по крайней мере для трех значений температуры.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахназарова С. Л., Кафаров В. В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии.— М., 1985.
2. Балакирев В. С., Володин В. М., Цирлин А. М. Оптимальное управление процессами химической технологии.— М., 1978.
3. Бояринов А. И., Кафаров В. В. Методы оптимизации в химической технологии.— М., 1981.
4. Бусленко В. Н. Автоматизация имитационного моделирования сложных систем.— М., 1977.
5. Вентцель Е. С. Теория вероятностей.— М., 1976.
6. Вычислительная техника в инженерных и экономических расчетах / А. В. Крушевский, Н. И. Беликов, В. Д. Тищенко, Е. Е. Яковенко.— К., 1983.
7. Грачев Ю. П. Математические методы и планирование экспериментов.— М., 1979.
8. Грачев Ю. П., Тубольцев А. К., Тубольцев В. К. Моделирование и оптимизация тепла и массообменных процессов пищевых производств.— М., 1984.
9. Злобин Л. А. Оптимизация технологических процессов хлебопекарного производства.— М., 1987.
10. Имитационное моделирование в оперативном управлении производством / Н. А. Саломатин, Г. В. Беляев, В. Ф. Петроченко, Е. В. Прошлякова.— М., 1984.
11. Кафаров В. В., Дорохов И. Н. Системный анализ процессов химической технологии.— М., 1976.
12. Кафаров В. В. Методы кибернетики в химии и химической технологии.— М., 1985.
13. Коган В. Б. Теоретические основы типовых процессов химической технологии.— Л., 1977.
14. Козлов Г. Ф., Остапчук Н. В., Щербатенко В. В. Системный анализ технологических процессов пищевых производств.— К., 1977.
15. Кучакова В. Е., Богатырев А. Н. Интенсификация тепло- и массообмена при сушке пищевых продуктов.— М., 1987.
16. Либерман И. Г., Бурда Б. О., Псалторак А. О. Автоматизированное проектирование оптимальных технологических систем пищевой промышленности.— М., 1981.
17. Маркин Ю. П. Математические методы планирования и управления в мясной и молочной промышленности.— М., 1972.
18. Моделирование производственных процессов мясной и молочной промышленности / Под ред. Ю. А. Иващенко.— М., 1987.
19. Николаев А. П. Оптимальное проектирование и эксплуатация брагоректификационных установок.— М., 1975.
20. Остапчук Н. В. Основы математического моделирования процессов пищевых производств.— К., 1981.
21. Остапчук Н. В., Шашкин А. Б., Каминский В. Д. Повышение эффективности сушки зерна.— К., 1988.
22. Панфилов В. А. Оптимизация технологических систем кондитерского производства.— М., 1980.
23. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Регсдел К. Оптимизация в технике: Пер. с англ.— М., 1986.
24. Скурихин В. Н., Дубровский В. В., Шифрин В. Б. АСУТП. Предпроектная разработка алгоритмов управления.— К., 1980.
25. Советов Б. Я., Яковлев С. Н. Моделирование систем.— М., 1986.
26. Таубман Е. И. Анализ и синтез теплотехнических систем.— М., 1983.
27. Технические средства АСУ: В 2 т. / Под общ. ред. Г. Б. Кезлинга.— Л., 1986.
28. Трегуб В. Г. Автоматизация периодических процессов в пищевой промышленности.— К., 1982.
29. Федоткин И. М. Интенсификация технологических процессов.— К., 1979.
30. Цирлин А. М. Оптимальное управление технологическими процессами.— М., 1986.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Общие сведения о моделировании	5
§ 1. Цели и задачи дисциплины о моделировании	5
§ 2. Математическое моделирование — современный метод исследования	7
§ 3. Классификация методов моделирования	10
§ 4. Принципы математического моделирования	22
§ 5. Общий порядок составления математической модели	24
§ 6. Системный и классический подходы к составлению моделей объектов	30
§ 7. Информационное обеспечение моделирования	34
§ 8. Техническое обеспечение моделирования	37
Глава 2. Составление математического описания объектов по экспериментальным данным	45
§ 1. Основные принципы метода	45
§ 2. Планирование экспериментов для составления математического описания	51
Глава 3. Составление математического описания объектов аналитическими методами	68
§ 1. Методика составления математического описания аналитическими методами	68
§ 2. Типовые математические модели технологических процессов	89
§ 3. Установление структуры типовых математических моделей	95
§ 4. Классификация математических моделей технологических процессов	100
§ 5. Комбинированный метод составления математического описания	110
Глава 4. Статистическое моделирование на ЭВМ объектов и систем управления	117
§ 1. Основные понятия и определения	117
§ 2. Методика установления законов распределения случайных величин	120
§ 3. Главные характеристики распределения случайных величин	125
§ 4. Теоретические основы статистического моделирования	131
§ 5. Некоторые законы распределения случайных величин	135
§ 6. Моделирование случайных воздействий	141

Глава 5. Математическое моделирование и оптимизация объектов управления пищевой промышленности	158
§ 1. Постановка задач и выбор критериев оптимальности	158
§ 2. Классические методы оптимизации	162
§ 3. Линейное программирование	167
§ 4. Динамическое программирование и принцип максимума	174
§ 5. Методы нелинейного программирования	183
Глава 6. Моделирование на ЭВМ систем регулирования и управления	190
§ 1. Общая постановка задач моделирования систем управления	190
§ 2. Определение динамических характеристик методами статистического моделирования	195
Глава 7. Моделирование механических процессов	206
§ 1. Механические процессы как объекты моделирования	206
§ 2. Математическое моделирование процессов дозирования и смешивания	208
§ 3. Моделирование процессов перемешивания	227
§ 4. Моделирование процессов измельчения и сепарирования	233
Глава 8. Моделирование процессов нагрева и охлаждения пищевых продуктов	247
§ 1. Общие принципы решения задач расчета теплообменников с использованием моделей	247
§ 2. Модель для определения конечных температур теплоносителей	254
§ 3. Модель установления распределения температур теплоносителей по длине теплообменника	257
§ 4. Модели выбора оптимальной площади теплообменника	263
§ 5. Моделирование процессов выпаривания	276
§ 6. Модель технологического расчета режимов выпаривания	280
§ 7. Модель для определения динамических свойств выпарного аппарата	286
§ 8. Моделирование многокорпусных выпарных установок	291
Глава 9. Моделирование массообменных процессов пищевых производств	295
§ 1. Особенности составления моделей массообменных процессов	295
§ 2. Математические модели кинетики сушки	297
§ 3. Математическая модель оптимизации сушки	309
§ 4. Моделирование процессов ректификации	322
Глава 10. Моделирование химических и биохимических процессов пищевых производств	331
§ 1. Моделирование кинетики химических и биохимических превращений	331
§ 2. Математическая модель оптимального выхода биомассы	345
§ 3. Модель кинетики гидролиза	354
Список рекомендуемой литературы	364

Учебное издание

Осталчук Николай Васильевич

**ОСНОВЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ
ПРОЦЕССОВ
ПИЩЕВЫХ
ПРОИЗВОДСТВ**

Переплет художника *С. В. Пояркоза*
Художественный редактор *А. Д. Бондаренко*
Технический редактор *Л. Ф. Волкова*
Корректор *Л. М. Байбородина*

ИБ № 14268

Сдано в набор 28.02.90. Подписано в печать 11.11.90.
Формат 84×108¹/₃₂. Бум. тип. № 1. Гарнитура литератур-
ная. Высокая печать. Усл. печ. л. 19,32. Усл. кр.-
отт. 19,53. Уч.-изд. л. 19,06. Тираж 1750 экз. Изд. № 8430.
Зак. 0—2281. Цена 2 р. 10 к.

Издательство «Выща школа». 252054, Киев-54,
ул. Гоголевская, 7

Отпечатано с матриц Головного предприятия рес-публи-
канского производственного объединения «Пол-играф-
книга». 252057, Киев-57, ул. Довженко, 3 в Киевской
книжной типографии научной книги. 252004, Киев-4,
ул. Репина, 4. Зак. 1-77.