

Е.Л.Алексеев
В.Ф.Пахомов

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ



МОСКВА
ВО «АГРОПРОМИЗДАТ»
1987

Алексеев Е. Л., Пахомов В. Ф. Моделирование и оптимизация технологических процессов в пищевой промышленности. — М.: Агропромиздат, 1987. — 272 с.

В книге рассмотрены методы моделирования и оптимизации технологических процессов пищевой промышленности по таким критериям, как производительность, энергозатраты, качество, себестоимость и т. п., а также вопросы прогнозирования заготовок и производства продукции. Даются необходимый математический аппарат и программное обеспечение предлагаемых методов. Каждая задача сопровождается расчетами на ЭВМ с использованием конкретного материала.

Для научных работников пищевой промышленности.

Табл. 19. Ил. 58. Библиография — 8 названий.

Рецензент канд. техн. наук П. Д. Фиргер (Лаборатория оборудования ВНИИПП и СПТ).

Евгений Леонидович Алексеев

Валерий Федорович Пахомов

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПИЩЕВОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Зав. редакцией В. К. Фукс

Редактор А. П. Серик

Художественный редактор В. А. Чуракова

Художник В. В. Кузьмин

Технический редактор Л. И. Кувыркина

Корректор В. Н. Маркина

ИБ № 4661

Сдано в набор 04.08.86. Подписано к печати 24.07.87. Т-16827. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага офсетная № 1. Гарнитура Литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 14,28. Усл. кр.-отт. 14,28. Уч.-изд. л. 13,52. Изд. № 68. Тираж 2100 экз. Заказ 1552. Цена 3 руб.

Ордена Трудового Красного Знамени ВО «Агропромиздат», 107807, ГСП, Москва, Б-53, ул. Садовая-Спасская, 18.

Московская типография № 6 Союзполиграфпрома при Государственном комитете по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 109088, Москва, Ж-88, Южнопортовая ул., 24.

А 2901010000—425
035(01)—87 50—87

© ВО «Агропромиздат», 1987

ВВЕДЕНИЕ

Ускорение научно-технического прогресса и интенсификация на его основе промышленного производства — актуальная задача экономического развития в двенадцатой пятилетке. Особенностью современного этапа развития экономики является ограниченность ресурсов — людских и природных. Поэтому развитие промышленного производства в дальнейшем должно носить ресурсосберегающий характер, что может быть обеспечено только переходом к оптимальному планированию производства и технологических процессов, т. е. предстоит существенная перестройка производства.

Процессам пищевой промышленности присущ ряд особенностей. Несмотря на то что физико-химические процессы пищевой промышленности давно и серьезно изучаются специалистами, аппарат современной физики трудно применить к описанию большинства этих процессов, так как в них участвует огромное число компонентов с самыми различными свойствами. Попытка учесть их приводит к сложнейшему описанию самого процесса и, как следствие этого, малоэффективному его исследованию. Фактически каждый раз приходится прибегать к приближенному описанию макропроцесса, поскольку только в этом случае возможны качественный анализ и численные расчеты.

В предлагаемой книге сделана попытка разработки подхода к исследованию системы продукт — технологический процесс, характеристики которой выявляются в абстрактной форме, в виде многомерной модели. Модель описывается аналитически с помощью функций, аппроксимирующих процесс. Эти функции могут не выводиться из общих физических законов, но тем не менее достаточно точно описывают поведение системы в широком диа-

пазоне изменения параметров. Такое моделирование позволяет не только изучать ход технологических процессов, но и, используя оптимизацию, интенсифицировать их, снижать энергозатраты, повышать производительность и качество.

Этот подход применяется авторами при исследовании ключевых технологических процессов переработки пищевых продуктов, таких, как транспортировка, хранение, замораживание, сушка и стерилизация. Такая общность подхода позволяет без особых усилий распространить методику исследования на многие сходные процессы переработки и оперативно решать эти задачи на инженерном уровне.

Не менее важную роль в пищевой промышленности играют процессы подготовки и планирования производства. В книге рассматриваются такие вопросы, как прогнозирование заготовок сырья, прогнозирование производства консервов. При этом основным аппаратом исследования также является математическое моделирование.

В книге даются необходимые сведения математического характера. Разбираемые задачи сопровождаются пакетом прикладных программ с инструкциями по их использованию. Это позволяет решать аналогичные задачи с другими исходными данными путем изменения данных в рабочих информативах программ.

При написании книги авторы ориентировались на широкий круг читателей: научные работники, инженеры-исследователи, технологи и специалисты, занимающиеся подготовкой производства. Авторы надеются, что книга принесет им пользу.

Глава I. МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

I.1. ВЫБОР АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Аппроксимирующие функции, применяемые для описания физических, химических и прочих пищевых процессов, в которых причинно-следственные связи носят функциональный многопараметрический характер, являются естественным аппаратом научного исследования. На заре науки, когда понятие функциональной зависимости не выходило за рамки индивидуальной интуиции, роль аппроксимирующих функций играли таблицы и диаграммы, например астрономические таблицы древних. Таблицы, которые можно назвать конечномерными аппроксимациями функциональных зависимостей, позволили установить закономерности, присущие различным процессам, а на их основе давать предсказания (прогнозы) явлениям природы.

Выбор аппроксимирующей функции для описания макропроцесса является одной из широко используемых эвристических процедур и в общем случае не поддается строгой формализации. В некотором смысле определенная строгость достигается в тех случаях, когда эта функция выводится в качестве приближенного решения точного описания самого процесса. В этом случае можно довольно точно оценивать погрешности аппроксимации. К сожалению, такие случаи составляют в некотором роде исключения. Наиболее типичны случаи, когда имеется несколько точек наблюдения, по которым требуется восстановить функциональную зависимость или указать значения в других точках. Однако и такая задача без дополнительных предположений неразрешима. Спасает положение тот факт, что в большинстве случаев исследуемые макропроцессы ведут себя регулярно, без резких колебаний. В таких случаях практически все разумные аппроксимации дают хорошие результаты.

В основе одного из методов аппроксимации функции одной переменной на отрезке лежит использование известной теоремы Вейерштрасса о том, что всякую непрерывную функцию на отрезке можно с любой точностью равномерно приближать многочленами. В принципе, если известны n значений функции $f(x)$, скажем $f_n = f(x_n)$, легко построить многочлен $P_{n-1}(x)$ степени $n-1$, значения которого в этих точках совпадают со значениями функции $f(x)$. Например, такой многочлен дает интерполяционная формула Лагранжа. Интерполяционный многочлен Лагранжа обладает массой замечательных свойств, из которых отметим одно. Пусть $f(x)$ является многочленом степени m , а число точек, в которых он вычисляется, равно n , причем $n \geq m-1$. В этом случае интерполяционный многочлен $P_{n-1}(x)$ в точности совпадает с $f(x)$.

К недостаткам метода относятся следующие. Во-первых, если $f(x)$ не является многочленом и существенно отличается от многочленов (например, имеет горизонтальную асимптоту, является периодической функцией, растет экспоненциально или имеет особенность), то интерполяционный многочлен дает сильные отклонения от $f(x)$. Во-вторых, всякие измерения обладают определенной точностью и, значит, вносят ошибки в расчеты. К сожалению, интерполяционный многочлен Лагранжа ведет себя очень неустойчиво относительно этих ошибок: у него меняется степень и сильно меняется поведение с изменением точек измерения. Проиллюстрируем это на простом примере.

Пусть $f(x) = 0$, т. е. является константой. Однако измерения проводятся с ошибками, в результате чего последовательно получаем: $f(-1) \approx -0,15$; $f(0) \approx 0,1$; $f(1) \approx -0,05$; $f(2) \approx 0,05$. В этом случае интерполяционные многочлены, построенные по разным группам точек, будут следующими:

по первым двум $P_1 = 0,25x + 0,1$;

по первым трем $P_2 = -0,2x^2 + 0,05x + 0,1$;

по четверем $P_3 = \frac{0,65}{6}x^3 - 0,2x^2 - \frac{0,35}{6}x + 0,1$;

по последним трем $P_4 = 0,125x^2 - 0,275x + 0,1$.

Можно построить интерполяционные многочлены и по другим группам точек, однако существенное их различие заметно и так. Например, «прогноз» значения

$f(3)$ по этим формулам получается таким: 0,85; —1,25; 1,05 и 1,1, т. е. вне отрезка интерполяции значения этих многочленов существенно расходятся, что не позволяет экспериментатору сделать надежный прогноз.

Приведенный пример иллюстрирует одну из трудностей использования аппроксимирующих функций. При описании процесса с помощью аппроксимирующей функции приходится, с одной стороны, бороться за точность описания процесса, а с другой — вести учет ошибок экспериментальных данных. Одна из широко применяемых процедур моделирования макропроцессов состоит в следующем. На основе наблюдений формируется одна или несколько гипотез относительно вида функции, описывающей макропроцесс. Точнее говоря, берется один или несколько классов функций, описываемых несколькими параметрами. Далее на основе экспериментальных данных производятся расчеты параметров, выделяющие из классов функций те функции, которые наиболее точно описывают макропроцесс. С помощью последующих экспериментов и соответственно пересчетов выделяются функции, ведущие себя наиболее устойчиво и дающие достаточно точное согласование с экспериментом. Эти функции и используются для описания макропроцесса.

Определение параметров аппроксимирующих функций по экспериментальным данным не происходит однозначно. На самом деле это широкий класс задач, которые конкретизируются при специальных предположениях относительно природы ошибок. Отметим основные типы ошибок. В первую очередь это **ошибки аппроксимации**, т. е. ошибки, связанные с неправильным выбором вида аппроксимирующей функции (класса функций). В этом случае ни при каких значениях параметров нельзя получить совпадения между значениями аппроксимирующей функции и экспериментальными значениями. Естественно требовать при этом, чтобы на «ответственных» участках различие между ними было как можно меньшим.

Не менее важную роль играют **ошибки эксперимента**. Их можно подразделить на регулярные и нерегулярные. К нерегулярным относят ошибки, способные внести дезинформацию. Они порождаются неправильно поставленным экспериментом, неправильно переданной информацией (ошибкой при переписывании, опечаткой), сбоем или поломкой приборов и т. д. Регуляр-

ные ошибки также можно условно разделить на детерминированные и случайные.

Детерминированные ошибки могут порождаться неадекватным отражением исследуемого процесса, проявляться как действие неучтенных факторов и т. п. В таком случае возникает ситуация, которая практически не отличается от описанной выше — можно считать, что эти ошибки являются следствием неправильно выбранной аппроксимации. Хуже обстоит дело с ошибками *систематическими*. Так, неправильно настроенный прибор может регулярно давать заниженные показания. Ошибки такого рода выявляются только при массовом эксперименте, когда можно сравнить данные разных приборов либо когда экспериментальные данные сильно противоречат нашим знаниям.

Самый распространенный вид регулярных ошибок — случайные (в смысле теории вероятностей). Причины их возникновения разнообразны: это — случайность, присущая микромиру; действие неучтенных факторов; ограничения на точность при передаче информации (например, ошибки округления результатов) и т. д. Учет этих ошибок при оценивании параметров является одной из задач математической статистики. Многообразие ошибок аппроксимации породило большое число методов оценки параметров.

1.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИЙ

Выпуклость и неравенство Иенсена

Пусть $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$, λ_1, λ_2 — действительные числа. Отрезком $[x^{(1)}, x^{(2)}]$, соединяющим $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$, называется множество точек вида $\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)}$, где $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, т. е. $[x^{(1)}, x^{(2)}] = \{\lambda_1 x^{(1)} + \lambda_2 x^{(2)}\}$.

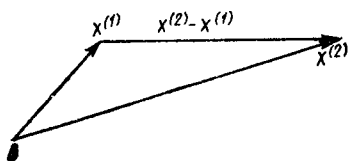


Рис. 1. Отрезок $[x^{(1)}, x^{(2)}]$

Смысл сказанного хорошо виден из рис. 1. Очевидно, отрезок $[x^{(1)}, x^{(2)}]$ получается, если к вектору $x^{(1)}$ прибавлять векторы вида $\lambda(x^{(2)} - x^{(1)})$, где $0 \leq \lambda \leq 1$. В частности, при $\lambda = 0$ получим $x^{(1)}$ — один конец отрез-

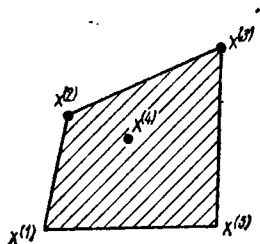


Рис. 2. Выпуклая оболочка

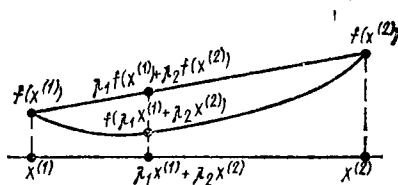


Рис. 3. Выпуклая функция

ка, а при $\lambda=1$ имеем $\mathbf{x}^{(1)} + (\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}) = \mathbf{x}^{(2)}$ другой конец отрезка. При изменении λ от 0 до 1 вектор $\mathbf{x}^{(1)} + \lambda(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)})$ пробегает весь отрезок $[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}]$. Теперь заметим, что $\mathbf{x}^{(1)} + \lambda(\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}) = (1 - \lambda)\mathbf{x}^{(1)} + \lambda\mathbf{x}^{(2)}$. Обозначив $\lambda_1 = 1 - \lambda$ и $\lambda_2 = \lambda$, получим определение отрезка.

Множество $V \subset \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, когда вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и отрезок, их соединяющий, т. е. для любых $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in V$ имеем $[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}] \subset V$.

Пусть $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — действительные числа. Вектор $\lambda_1\mathbf{x}^{(1)} + \dots + \lambda_m\mathbf{x}^{(m)}$, где $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, называется выпуклой (линейной) комбинацией векторов $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$. Множество всех выпуклых комбинаций векторов $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ называется выпуклой оболочкой $\text{Co}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)})$ векторов $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ т. е.

$$\text{Co}(\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{x}^{(i)} \mid \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1; \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0 \right\}.$$

Предположим, что в точках $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ расположены точечные массы $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ соответственно, причем $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$; тогда выпуклая комбинация является центром масс этой системы. На рис. 2 выпуклая оболочка (заштрихована) показана для случая пяти точек на плоскости.

Функция f , определенная на выпуклом подмножестве $V \subset \mathbb{R}^n$, называется выпуклой, когда для любых векторов $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)} \in V$ и любых неотрицательных чисел λ_1 и λ_2 , таких, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, выполняется неравенство

$$f(\lambda_1 \mathbf{x}^{(1)} + \lambda_2 \mathbf{x}^{(2)}) \leq \lambda_1 f(\mathbf{x}^{(1)}) + \lambda_2 f(\mathbf{x}^{(2)}). \quad (I.1)$$

Неравенство (I.1) означает, что график функции f на отрезке $[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}]$ лежит под хордой, соединяющей его концы (рис. 3). Приведем два признака выпуклости функций.

1. Дифференцируемая функция f выпукла, когда для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ выполняется неравенство

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + (\nabla f(\mathbf{x}), \mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad (I.2)$$

где $\nabla f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right)$ — градиент функции f в точке $\mathbf{x}$, а скобки в неравенстве (I.2) означают скалярное произведение.

Неравенство (I.2) означает, что график функции f лежит выше касательной плоскости к графику, проведенной в произвольной точке $\mathbf{x}$.

2. Если функция f дважды дифференцируема, причем второй дифференциал ее

$$(d^2 f)(\mathbf{h}) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) h_i h_j$$

является положительно определенной квадратичной формой от вектора $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ в любой точке $\mathbf{x} \in \text{int } V$, то f — выпуклая функция (здесь $\text{int } V$ — внутренность V).

Для получения различных оценок, связанных с аппроксимациями, нам понадобится неравенство Иенсена. Пусть $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — неотрицательные числа, такие, что $\sum \lambda_i = 1$, тогда из выпуклости f следует, что

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{x}^{(i)}\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(\mathbf{x}^{(i)}). \quad (I.3)$$

С помощью принципа математической индукции по m докажем это неравенство.

При $m=1$ имеем $f(\lambda_1 \mathbf{x}^{(1)}) \leq \lambda_1 f(\mathbf{x}^{(1)})$, т. е. неравенство выполнено. Более того, при $m=2$ оно является определением выпуклости [сравните с неравенством (I.1)].

Пусть неравенство выполнено при m . Возьмем произвольные $m+1$ векторы $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m+1)}$ из $\mathbb{R}^n$ и произвольные неотрица-

тельные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{m+1}$, в сумме дающие единицу. Возможны два случая.

1. $\lambda_{m+1}=1$, тогда $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_m=0$ и неравенство Иенсена выполнено (как равенство):

$$f\left(\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x^{(i)}\right) = f(x^{m+1}) = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i f(x^{(i)}).$$

2. $\lambda_{m+1} < 1$. В этом случае заметим, что $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 - \lambda_{m+1} > 0$.

Введем обозначения: $\mu_1 = \lambda_1/(1 - \lambda_{m+1})$, $\dots$, $\mu_m = \lambda_m/(1 - \lambda_{m+1})$. Заметим, что $\mu_1, \dots, \mu_m$ — неотрицательные числа и, кроме того, $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_m = (\lambda_1 + \dots + \lambda_m)/(1 - \lambda_{m+1}) = 1$. Далее

$\lambda_1 x^{(1)} + \dots + \lambda_m x^{(m)} + \lambda_{m+1} x^{(m+1)} = (1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{i=1}^m \mu_i x^{(i)} \right) + \lambda_{m+1} x^{(m+1)}$, поэтому по определению (I.1) выпуклости получаем:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x^{(i)}\right) &= f\left((1 - \lambda_{m+1}) \left(\sum_{i=1}^m \mu_i x^{(i)}\right) + \right. \\ &\left. + \lambda_{m+1} x^{(m+1)}\right) \leq (1 - \lambda_{m+1}) f\left(\sum_{i=1}^m \mu_i x^{(i)}\right) + \\ &\quad + \lambda_{m+1} f(x^{(m+1)}). \end{aligned} \quad (I.4)$$

Но по предположению индукции

$$f\left(\sum_{i=1}^m \mu_i x^{(i)}\right) \leq \sum_{i=1}^m \mu_i f(x^{(i)}),$$

поэтому отсюда и из неравенства (I.4) получаем [учитывая, что $(1 - \lambda_{m+1})\mu_i = \lambda_i$]

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i x^{(i)}\right) &\leq \sum_{i=1}^m (1 - \lambda_{m+1}) \mu_i f(x^{(i)}) + \\ &\quad + \lambda_{m+1} f(x^{(m+1)}) = \sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i f(x^{(i)}), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Применение неравенства Иенсена к анализу степенных средних

Рассмотрим функцию действительной переменной $f(x) = x^p$, определенную на правой полуоси $\{x \geq 0\}$. При $p > 1$ эта функция выпукла. Действительно, воспользо-

вавшись вторым признаком выпуклости, получаем $d^2(x^p)/dx^2 = p(p-1)x^{p-2} > 0$ при всех $x > 0$. Кроме того, очевидно, выпукла и линейная функция, для которой неравенство Иенсена превращается в равенство. Итак, $f(x)$ выпукла при всех $p \geq 1$. Выпишем для нее неравенство Иенсена:

$$(\sum \lambda_i x_i)^p \leq \sum \lambda_i x_i^p, \quad (1.5)$$

где x_i — произвольные неотрицательные действительные числа (поэтому индексы поставлены внизу, как и у координат векторов).

Полагая в неравенстве (1.5) все λ_i равными между собой: $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 1/m$, $p = \alpha/\beta$, где $\alpha, \beta > 0$ и, конечно, $\alpha \geq \beta$ (чтобы выполнялось условие $p \geq 1$), получим

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_m}{m} \right)^{\alpha/\beta} \leq \frac{x_1^{\alpha/\beta} + \dots + x_m^{\alpha/\beta}}{m}.$$

Наконец, в этом неравенстве положим $a_1 = x_1^{1/\beta}, \dots, a_m = x_m^{1/\beta}$, возведем обе части в степень $1/\alpha$ и получим

$$\left(\frac{a_1^\beta + \dots + a_m^\beta}{m} \right)^{1/\beta} \leq \left(\frac{a_1^\alpha + \dots + a_m^\alpha}{m} \right)^{1/\alpha}. \quad (1.6)$$

Это и есть знаменитое неравенство между степенными средними: степенным средним порядка α неотрицательных чисел $a_1, \dots, a_m$ называют выражение

$$s_\alpha(a_1, \dots, a_m) = \left(\frac{a_1^\alpha + \dots + a_m^\alpha}{m} \right)^{1/\alpha}.$$

В частности, при $\alpha = 1$ среднее s_α называют средним арифметическим, при $\alpha = 2$ — средним квадратичным, при $\alpha = -1$ — средним гармоническим (разумеется, при $\alpha < 0$ среднее определено только для положительных чисел a_i). Таким образом, неравенство (1.6) означает монотонность степенных средних по показателю α : при $\alpha \geq \beta$ имеем

$$s_\alpha(a_1, \dots, a_m) \geq s_\beta(a_1, \dots, a_m).$$

Отметим, что $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} s_\alpha(a_1, \dots, a_m) = \max\{a_1, \dots, a_m\}$.

Важную роль играют степенные средние с весами.

Применяя те же рассуждения без предположения равенства коэффициентов λ_i , получим

$$(\lambda_1 a_1^\beta + \dots + \lambda_m a_m^\beta)^{1/\beta} \leq (\lambda_1 a_1^\alpha + \dots + \lambda_m a_m^\alpha)^{1/\alpha}, \quad (I.7)$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — неотрицательные числа, причем $\lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$.

Величина $(\sum \lambda_i a_i^\alpha)^{1/\alpha}$ называется степенным средним порядка α неотрицательных чисел $a_1, \dots, a_m$ с весами $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Как показывает неравенство (I.7), средние с весами обладают указанным выше свойством степенных средних с равными весами.

Метрические и нормированные пространства

Метрикой ρ на множестве X называется функция пары элементов $x, y \in X$ (т. е. заданная на прямом произведении $X \times X$), обладающая следующими свойствами:

1. $\rho(x, y) \geq 0$, причем если $\rho(x, y) = 0$, то $x = y$.
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Эти свойства называются соответственно положительностью, симметричностью и неравенством треугольника.

Множество X , снабженное метрикой ρ , т. е. пара (X, ρ) , называется метрическим пространством.

Обычно метрическое пространство, если это не может привести к недоразумениям, обозначают не парой (X, ρ) , а тем же символом, что и множество в этой паре, т. е. в нашем случае X . Отметим, что метрические пространства могут быть весьма экзотическими. На любом множестве (содержащем не менее двух элементов) можно ввести такую метрику:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = y; \\ 1 & \text{при } x \neq y. \end{cases}$$

Другими словами, расстояние между любыми несовпадающими точками равно 1.

Благодаря свойствам метрики любое метрическое пространство из трех точек можно изобразить в плоскости с сохранением расстояний (в виде вершин треугольника). Однако легко привести пример метрического пространства из четырех точек, которые нельзя «по-

местить» в евклидовом пространстве. Например, $X = \{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}\}$ и $\rho(x^{(i)}, x^{(j)}) = 1$ для всех точек, кроме $x^{(3)}$ и $x^{(4)}$, а $\rho(x^{(3)}, x^{(4)}) = 1,9$.

Поскольку в векторных пространствах имеются алгебраические операции — сложение векторов и умножение их на числа, то естественно в них рассмотреть аналог понятия длины (метрики, расстояния), согласованный с алгебраическими операциями. Таким аналогом является норма.

Функция ρ , определенная на векторном пространстве L , называется нормой, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $\rho(x) \geq 0$, причем, если $\rho(x) = 0$, то $x = 0$.

2. $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

3. $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$ (где λ — любое действительное число).

Линейное векторное пространство L , снабженное нормой ρ [т. е. пару (L, ρ)], называют нормированным пространством. Как и метрическое пространство, если это не приводит к недоразумениям, нормированное пространство (L, ρ) обозначают одной буквой L . Норму вектора x обозначают обычно не $\rho(x)$, а символом $\|x\|$.

Метрику в нормированном пространстве можно получить, приняв $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Важным примером нормы является степенная норма:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad (1.8)$$

где $p \geq 1$ и $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Действительно, выполнение свойств 1 и 3 очевидно. Можно показать, что выполняется свойство 2:

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{1/p}, \quad (1.9)$$

которое называется неравенством Минковского.

Отметим, что степенная норма $\|x\|_p$ вектора $x \in \mathbb{R}^n$

связана со степенным средним следующим соотношением:

$$s_p(|x_1|, \dots, |x_n|) = \sqrt[p]{n} \|x\|_p.$$

Отсюда вытекает важное свойство монотонности норм, используемое для оценок: при $p \geq q$ имеем $n^{1/p} \|x\|_p \geq n^{1/q} \|x\|_q$. Кроме того, существует предел

$$\lim_{p \rightarrow \infty} n^{1/p} \|x\|_p = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\} = \|x\|_\infty,$$

который называется равномерной нормой и играет значительную роль в теории аппроксимаций.

Наконец, отметим, что функция

$$\|x\|_{p, \lambda} = (\sum \lambda_k |x_k|^p)^{1/p}$$

при $\lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ также определяет норму, называемую степенной нормой с весами.

1.3. МЕТОДЫ МЕТРИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Математически задача построения наилучшей аппроксимации может быть сформулирована следующим образом. При известных значениях аргумента (вообще говоря, векторного) $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ экспериментальные измерения некоторой нам не известной функции дают значения $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)}$ соответственно. Предполагаемая аппроксимационная функция имеет вид $y = f(x, \alpha)$, где α — вектор определяемых параметров $\alpha \in A$. Иначе говоря, задан класс функций $F = \{f(x, \alpha) | \alpha \in A\}$, из которых выбирается аппроксимирующая. Пусть также определена некоторая мера ρ качества аппроксимации функций $f \in F$ имеющихся экспериментальных данных, т. е.

$$\rho = \rho(y^{(1)} - f(x^{(1)}, \alpha), \dots, y^{(n)} - f(x^{(n)}, \alpha)). \quad (I.10)$$

Необходимо найти значение вектора $\alpha \in A$, минимизирующее ρ , т. е. формально задача ставится так: найти

$$\alpha = \arg \min_{\alpha \in A} \rho. \quad (I.11)$$

Отметим, что поставленная так задача может не иметь решения. Достаточным условием ее разрешимости являются, например, непрерывная зависимость ρ от параметров α и компактность (в нашем случае замкнутость и ограниченность) множества A — области изме-

нения параметров. Однако такое условие вовсе не является необходимым. Очень часто, например, множество A не является ограниченным, но задача имеет решение.

Решение задачи к тому же сильно зависит от выбора функции ρ — критерия (меры) качества приближения. Обычно в расчетах используется квадрат евклидовой метрики $\rho = \sum_i (y^{(i)} - f(x^{(i)}, \alpha))^2$. Однако такой выбор не

всегда обоснован. Некоторые случаи, когда он обоснован, будут рассмотрены ниже, в данном же случае изучим свойства специальных видов функции ρ , на основе которых можно выбирать критерий качества приближения.

Выпишем основные требования, налагаемые на функцию ρ . Поскольку мера качества аппроксимации ρ является обобщением понятия точности (часто ее и называют точностью аппроксимации), то ей должны быть присущи все свойства точности:

1) точность неотрицательна, т. е. $\rho \geq 0$;
2) если точность приближения вектора f вектором g равна нулю, то f и g совпадают, т. е. из $\rho(f, g) = 0$ следует $f = g$;

3) если f приближает g с точностью ε , то и g приближает f с той же точностью ε , т. е. $\rho(f, g) = \rho(g, f)$;

4) если f приближает g с точностью ε_1 и g приближает h с точностью ε_2 , то точность, с которой f приближает h , не меньше $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, т. е. $\rho(f, h) \leq \rho(f, g) + \rho(g, h)$.

Указанные свойства функции ρ естественны, хотя и не бесспорны. Обычно свойства функции ρ определяются целью исследования. Приняв перечисленные выше требования к функции ρ , получим, что ρ является метрикой. Сама же задача определения параметров аппроксимации становится задачей отыскания в заданном классе объектов (векторов) наиболее близкого (в смысле метрики) к заданному объекту. Разные метрики определяют качественно различные аппроксимации. Рассмотрим, каковы же эти различия для степенных метрик и их обобщений.

Степенные метрики

Для удобства изложения введем следующие обозначения: отклонения функции f от наблюдаемого значения y в точке $x^{(i)}$ обозначим δ_i , т. е. $\delta_i = y^{(i)} - f(x^{(i)}, \alpha)$; бук-

ва δ (без индексов) будет обозначать вектор n -мерного пространства $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, координаты которого — упомянутые выше отклонения в точках $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$. Вектор δ будем называть отклонением f от y . Отметим теперь некоторые важные требования, которые обычно налагаются на метрику $\rho(f, g)$.

Независимость от выбора точек отсчета. Это требование заключается в том, что при измерении температуры, например, точность аппроксимации будет зависеть только от разностей температур δ_i , но не от абсолютных температур. Это требование отнюдь не бесспорно. В некоторых задачах точность аппроксимации определяется относительными величинами, и на первый взгляд наше требование в таких случаях нарушается. Однако практически всегда задачу можно сформулировать так, что данное требование будет выполнено (обычно это удается путем простого перехода к другим переменным). Требование независимости от выбора точек отсчета математически формулируется так: $\rho(y, f) = \rho(\delta)$, т. е. метрика зависит только от вектора отклонений.

Обратная пропорциональность точности относительно масштабов измерения. Это требование означает, что если масштаб измерения величин уменьшился, скажем, в 10 раз (значит, абсолютные значения y и f увеличились в 10 раз), то численное значение точности увеличивается в 10 раз. Например, если при измерении в метрах точность была равна 0,1, то при измерениях в сантиметрах она должна быть равна 10. Формально это требование записывается так: $\rho(\lambda\delta) = \lambda\rho(\delta)$ при любом $\lambda > 0$.

Заметим теперь, что поскольку метрика симметрична, то

$$\rho(\delta) = \rho(y, f) = \rho(f, y) = \rho(-\delta).$$

Все эти требования вместе означают, что $\rho(f, g)$ должно быть нормой вектора отклонений $\delta = f - g$, т. е. $\rho(f, g) = \rho(\delta) = \|\delta\|$. Рассмотрим в связи с этим степенную норму (степени $p \geq 1$):

$$\|\delta\|_p = (|\delta_1|^p + |\delta_2|^p + \dots + |\delta_n|^p)^{1/p}. \quad (I.12)$$

Какое значение степени выбрать в формуле (I.12) для конкретной задачи? Отметим следующее. Чем выше степень p , тем сильнее норма зависит от координат, которые велики по абсолютной величине. Рассмотрим слу-

Таблица 1

p	q										
	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0
1	2	1,9	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1
2	1,41	1,35	1,28	1,22	1,17	1,12	1,08	1,04	1,02	1	1
3	1,26	1,20	1,16	1,10	1,07	1,04	1,02	1,01	1	1	1
4	1,19	1,13	1,10	1,06	1,03	1,02	1,01	1	1	1	1
8	1,09	1,05	1,01	1,01	1	1	1	1	1	1	1
16	1,04	1,01	1	1	1	1	1	1	1	1	1
∞	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

чай $n=2$:

$$\|\delta\|_p = (|\delta_1|^p + |\delta_2|^p)^{1/p} \quad (I.13)$$

Пусть $|\delta_1| > |\delta_2|$, тогда из формулы (I.13) легко получить, что

$$\|\delta\|_p = |\delta_1| (1 + |\delta_2/\delta_1|^p)^{1/p},$$

т. е. отношение $\|\delta\|_p/|\delta_1| = (1 + |\delta_2/\delta_1|^p)^{1/p}$.

При больших по абсолютной величине значениях δ_1 имеем $(1 + |\delta_2/\delta_1|^p)^{1/p} \approx 1 + \frac{1}{p} |\delta_2/\delta_1|^p$ и, значит, норма $\|\delta\|_p$ мало отличается от $|\delta_1|$. В табл. 1 показана зависимость отношения $k = \|\delta\|_p/|\delta_1|$ от степени p и отношения $q = |\delta_2/\delta_1|$ при $q \leq 1$ (значения k даны с точностью до 0,005).

В табл. 1 $p = \infty$ означает равномерную норму. Данные табл. 1 показывают, что чем выше степень p , тем меньше различие между нормой вектора и модулем наибольшей координаты. Так, если вторая координата по модулю вдвое меньше первой, то изменение ее на $\pm 10\%$ (см. табл. 1) вызывает изменения нормы соответственно:

Степень p	1	2	3	4	8	16	∞
Изменение $\ x\ _p$	+6,7	+4,6	+3	+1	0	0	0
В процентах с точностью до 1%	-6,7	-3,6	-2	-1	0	0	0

Таким образом, если определять параметры α функции $f(x, \alpha)$, при которых $\|\delta\|_p$ будет минимально [напомним, что $\delta_i = y^{(i)} - f(x^{(i)}, \alpha)$], то в результате получим

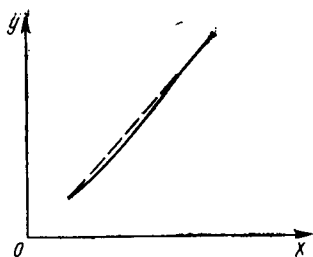


Рис. 4. Эмпирическая кривая и аппроксимация при $p=1$

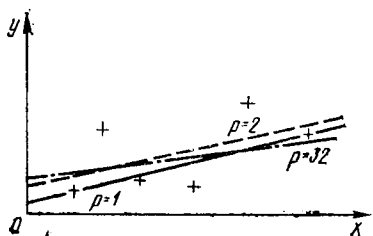


Рис. 5. Аппроксимации при различных p

кривые, устроенные различно: чем больше p , тем меньше максимальные из отклонений. Приведем численный пример. Пусть $y(1)=1$; $y(2)=1,9$; $y(3)=2,9$; $y(4)=4,15$ и $y(5)=5,1$, т. е. функция эта практически линейна. Обычно при отсутствии других соображений выбор аппроксимирующей функции производят по графику рис. 4, где эмпирическая кривая изображена сплошной линией. Расчеты наилучшей линейной аппроксимации $y=a+bx$ при различных p дают следующие результаты, приведенные с точностью до 0,01:

p	1	2	≥ 4
a	-0,025	-0,06	-0,09
b	1,025	1,03	1,03

Как видно из приведенных данных, все результаты достаточно близки. Чтобы обнаружить различие в аппроксимациях при разных p , рассмотрим искусственный пример «неудачного выбора» аппроксимаций. Пусть имеем следующие эмпирические значения функции:

i	1	2	3	4	5	6
$x^{(i)}$	1,55	2,55	3,75	5,5	7,25	9,15
$y^{(i)}$	0,8	2,8	1,1	0,9	3,65	2,6

Соответствующие точки отмечены на рис. 5 крестиками. На рис. 5 показаны три прямые, соответствующие линейным аппроксимациям $y=a+bx$ при $p=1$; 2 и 32. Значения a , b и отклонений $\delta_i=y^{(i)}-a-bx^{(i)}$ приведены в табл. 2.

Так, при $p=1$ прямая проходит через две точки графика экспериментальных значений. При $p=2$ сумма от-

p	a	b	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6
1	0,47	0,23	0	1,7	-0,2	-0,9	1,5	0
1,5	0,62	0,23	-0,2	1,6	-0,4	-1,0	1,4	-0,1
2	0,96	0,21	-0,5	1,3	-0,6	-1,2	1,2	-0,2
3	1,07	0,20	-0,6	1,2	-0,7	-1,3	1,1	-0,3
4	1,15	0,19	-0,6	1,2	-0,8	-1,3	1,2	-0,3
8	1,23	0,17	-0,7	1,1	-0,8	-1,3	1,2	-0,2
16	1,20	0,17	-0,7	1,2	-0,7	-1,2	1,2	-0,2
32	1,19	0,17	-0,7	1,2	-0,7	-1,2	1,2	-0,2

клонений равна нулю ($\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_6 = 0$). При $p = 32$ (т. е. практически при $p = \infty$) три из отклонений равны по абсолютной величине ($|\delta_2| = |\delta_4| = |\delta_5| = 1,2$), они и являются самыми большими отклонениями.

Приведенные выше примеры относятся к классу задач линейного оценивания. Именно к этому классу относятся задачи, в которых аппроксимирующая функция $f(\alpha, x)$ линейно зависит от параметров $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, т. е.

$$f(\alpha, x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \dots + \alpha_k f_k(x),$$

где $f_i(x)$ — заданные функции.

В этом случае задача оценивания параметров по критерию минимума нормы отклонения является выпуклой. Для ее решения применяются методы выпуклого программирования, описанные в главе II. Действительно, пусть

$$\varphi(\alpha) = \|y - \alpha_1 f_1(x) - \dots - \alpha_k f_k(x)\|.$$

Покажем, что тогда φ — выпуклая функция α , т. е. что при $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ выполняется неравенство

$$\varphi(\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta) \leq \lambda_1 \varphi(\alpha) + \lambda_2 \varphi(\beta).$$

В самом деле, поскольку $y = (\lambda_1 + \lambda_2)y = \lambda_1 y + \lambda_2 y$, то

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta) &= \|\lambda_1 y + \lambda_2 y - (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \beta_1) f_1(x) - \dots - \\ &- (\lambda_1 \alpha_k + \lambda_2 \beta_k) f_k(x)\| = \|\lambda_1 (y - \alpha_1 f_1(x) - \dots - \\ &- \alpha_k f_k(x)) + \lambda_2 (y - \beta_1 f_1(x) - \dots - \beta_k f_k(x))\| \leq \\ &< \left\| \lambda_1 \left(y - \sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(x) \right) \right\| + \left\| \lambda_2 \left(y - \sum_{i=1}^k \beta_i f_i(x) \right) \right\| = \\ &= \lambda_1 \|y - \sum \alpha_i f_i(x)\| + \lambda_2 \|y - \sum \beta_i f_i(x)\| = \lambda_1 \varphi(\alpha) + \lambda_2 \varphi(\beta). \end{aligned}$$

Отметим, что при $p=1$ и $p=\infty$ полученная задача выпуклая, но не дифференцируемая. При $p>1$, чтобы получить задачу дифференцируемой оптимизации, минимизируют не саму норму, а ее p -ю степень, т. е. решают задачу

$$\varphi(\alpha) = \sum_{i=1}^n |y^{(i)} - f(\alpha, x^{(i)})|^p \rightarrow \min.$$

Очевидно, что минимизирующие значения параметров совпадают с теми, которые получаются минимизацией нормы, поскольку $\varphi(\alpha) = [\|y - f(\alpha, x)\|_p]^p$, а при $p \geq 1$ функция x^p возрастает на неотрицательной полуоси.

Особый случай представляет собой линейное оценивание в случае $p=2$. Поскольку в этом случае $\varphi(\alpha)$ является квадратичным функционалом от α , то поиск минимизирующего значения сводится к решению системы линейных уравнений. Продемонстрируем это на примере двух параметров:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=1}^n (y^{(i)} - \alpha_1 f_1^i - \alpha_2 f_2^i)^2,$$

где $f_1^i = f_1(x^{(i)})$ и $f_2^i = f_2(x^{(i)})$.

Вычисляя частные производные φ по α_1 и α_2 и приравняв их нулю, получаем ($k=1; 2$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \varphi &= -2 \sum_{i=1}^n f_k^i (y^{(i)} - \alpha_1 f_1^i - \alpha_2 f_2^i) = \\ &= -2 \left(\sum_{i=1}^n f_k^i y^{(i)} - \alpha_1 \sum_{i=1}^n f_k^i f_1^i - \alpha_2 \sum_{i=1}^n f_k^i f_2^i \right) = 0, \end{aligned}$$

отсюда α_1^* , α_2^* , минимизирующие φ , являются решением системы:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 \sum (f_1^i)^2 + \alpha_2 \sum f_1^i f_2^i &= \sum f_1^i y^{(i)}; \\ \alpha_1 \sum f_1^i f_2^i + \alpha_2 \sum (f_2^i)^2 &= \sum f_2^i y^{(i)}. \end{aligned} \right\} \quad (I.14)$$

Применяя векторные обозначения $\mathbf{f}_k = (f_k^1, \dots, f_k^n)$, можно записать систему (I.14) в виде

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) + \alpha_2 (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) &= (\mathbf{f}_1, \mathbf{y}); \\ \alpha_1 (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) + \alpha_2 (\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2) &= (\mathbf{f}_2, \mathbf{y}). \end{aligned} \right\} \quad (I.15)$$

Здесь скобки обозначают скалярное произведение. Из системы (1.15) видно, что если векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ не коллинеарны, то система имеет единственное решение. Поскольку минимизируется сумма квадратов отклонений, метод называется методом наименьших квадратов.

Метрики с весами

В некоторых случаях к аппроксимации предъявляются требования повышенной точности на отдельных участках. В этом случае естественно брать такую метрику (норму), в которой отклонения на этих участках берутся с большими весами, чем на других участках.

Другие случаи, в которых обычно используются метрики с весами, связаны с различной надежностью информации. Так, часть экспериментальных значений может быть получена при помощи аппаратуры, обладающей высокой точностью, в то время как остальные значения получены с меньшей точностью. В этом случае естественно взять метрику, которая учитывала бы соответствующие отклонения с разными весами. Обычно в таких случаях веса берут обратно пропорциональными точности результатов.

Применимость методов метрической аппроксимации

Чаще всего метрическая аппроксимация применяется в тех случаях, когда более или менее ясно, что аппроксимируемая функция принадлежит к выбранному классу функций или близка к нему. Например, всякую аналитическую на отрезке функцию можно попытаться приблизить полиномами. Если при этом с ростом степени полинома первые коэффициенты ведут себя стабильно, то это является признаком правильного выбора класса функций. В общем случае погрешности измерений могут сильно повлиять на результат. Поэтому более широко применяются статистические методы (см. II.4).

1.4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Основные понятия теории вероятностей

В современной теории вероятностей принята аксиоматика, введенная А. Н. Колмогоровым. Изложим ее основные положения. Пусть дано некоторое множество Ω ,

которое назовем пространством элементарных событий. Элементы ω этого множества называют элементарными событиями, т. е. если $\omega \in \Omega$, то ω — элементарное событие. Первая из задач теории вероятностей — уметь определять вероятности различных комбинаций элементарных событий, т. е. задать вероятность на подмножествах в Ω , которые естественно назвать просто событиями. Чтобы понять общую конструкцию, нужно сначала разобрать случай конечного Ω , т. е. когда Ω состоит из конечного числа элементарных событий.

Случай конечного Ω . В этом случае можно определить вероятность любого события $A \subset \Omega$. Зададим функцию p на Ω так, чтобы выполнялись следующие два свойства: $p(\omega) \geq 0$; $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$. Другими словами,

зададим вероятность каждого элементарного события, тогда вероятность $P(A)$ события $A \subset \Omega$ определяется формулой

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega). \quad (I.16)$$

Частным случаем формулы (I.16) является классическая формула вероятностей: пусть все вероятности элементарных событий равны между собой, т. е. $p(\omega_1) = p(\omega_2) = p$ (где ω_1 и ω_2 — два любых элементарных события). В таком случае говорят, что Ω — симметричное пространство. Ввиду второго свойства получаем

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = p(\omega_1) + \dots + p(\omega_n) = np = 1,$$

т. е. $p = 1/n$,

где n — число элементов в Ω .

Пусть A состоит из m элементов, тогда

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = mp = \frac{m}{n}. \quad (I.17)$$

Формула (I.17) и дает классическое определение вероятностей: вероятность события A равна числу элементов в A , деленному на число элементов в Ω .

Пример 1. Монета бросается 10 раз. Какова вероятность того, что «Орел» выпадет ровно 3 раза?

Каждой серии из 10 бросков можно сопоставить слово длиной в 10 букв, составленное с использованием только двух букв «О» и «Р», которое описывает эту серию бросков. Так слово «ОРООРРРООО» означает, что на первом броске выпал орел, на втором решка, на третьем и четвертом орел, затем три подряд решки и, наконец, три орла. Итак, каждое элементарное событие ω есть такое десятибуквенное слово в алфавите из двух букв, а все Ω — множество всех таких слов. Число таких слов легко подсчитать индукцией по длине. Если длина слова равна единице, то таких слов два «О» и «Р». Если количество слов длины $(n-1)$ обозначить k_{n-1} , тогда поскольку все слова длины n получаются, если ко всем словам длины $(n-1)$ приписать вначале букву О (таких слов k_{n-1}) или букву Р (таких слов также k_{n-1}), то $k_n = k_{n-1} + k_{n-1} = 2k_{n-1}$. Итак, по индукции получаем: $k_1 = 2$; $k_2 = 2k_1 = 2^2$; $k_3 = 2k_2 = 2^3$, ..., $k_n = 2^n$. Значит, в нашем случае количество элементов в Ω равно $2^{10} = 1024$. Если монета симметрична, то все такие слова равновероятны, т. е. $p = 1/1024$. Если монета несимметрична, то без каких-либо дополнительных сведений относительно ее асимметрии задача не может быть решена. В симметричном случае можно воспользоваться формулой классической вероятности. Для этого остается подсчитать количество элементов в A — множестве десятибуквенных слов из Ω с тремя буквами «О». Чтобы получить любое такое слово, надо из 10 мест (для букв в слове) выбрать 3 места для буквы «О», а остальные — заполнить буквами «Р». Таким образом каждое слово соответствует сочетанию из 10 по 3* и наоборот, т. е. их количество равно $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120$.

Случай бесконечного Ω . В общем случае определить вероятность так же, как в конечном случае, не удастся. Трудностей много, начиная с того, что нужно дать какой-то аналог сумм для бесконечного (в общем случае несчетного) числа слагаемых, кончая тем, что вероятность любого события $A \subset \Omega$ нельзя определить даже в принципе. В связи с этим приходится выделять класс L подмножеств из Ω , на которых и определяется вероятность. В связи с тем что при решении различных задач приходится рассматривать пересечения, объединения и разности событий, этот класс должен быть замкнут относительно указанных операций **. Кроме того, часто приходится рассматривать события, составленные из других событий с помощью этих операций в счетном числе. Все

* Напомним, что сочетанием из n по k называется k -элементное подмножество во множестве из n элементов. Число всех сочетаний из n по k обозначают $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

** Т. е. результат применения операций к элементам класса L должен принадлежать также классу L .

это приводит к тому, что алгебру L событий определяют с помощью следующих аксиом:

1. $\Omega \in L$ и $\emptyset \in L$.

2. Если $A \in L$, то $\bar{A} = \Omega \setminus A \in L$.

3. Если $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in L$, то $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in L$.

4. Если $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in L$, то $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \cap \dots = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in L$.

Ввиду того что эта алгебра событий замкнута относительно двух операций — пересечения и объединения в счетном числе, ее называют счетной, или, гораздо чаще, σ -алгеброй L событий. Теперь для элементов этой σ -алгебры определяется вероятность $P(A)$ каждого события A с помощью следующих аксиом [$P(A) \geq 0$]:

а) $P(\Omega) = 1$ и $P(\emptyset) = 0$;

б) если $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in L$, причем $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Второе свойство называется счетной или σ -аддитивностью вероятности P .

Конструктивно это обычно строится по следующей схеме. Сначала определяется некоторый простой набор образующих элементов алгебры, для которых определяется вероятность каждого из них. Затем с помощью аксиом 1—4 этот набор замыкается до наименьшей σ -алгебры L , а вероятность P продолжается на L с помощью аксиомы б.

Пример 2. Пусть Ω — отрезок $[a; b]$ на действительной прямой $\mathbf{R}$. Выделим в качестве образующих элементов промежутки I этого отрезка: замкнутые — $[c; d]$, открытые — $]c; d[$, полуоткрытые $]c; d]$ и $[c; d[$. Здесь $a \leq c \leq d \leq b$. В частности (при $c=d$), это будут и точки $\{c\}$. Определим теперь вероятность $P(I)$ каждого такого промежутка равенством $P(I) = (d-c)/(b-a)$. Замкнув теперь нашу систему образующих до σ -алгебры, получим борелевскую σ -алгебру подмножеств отрезка, а продолжив P на эту σ -алгебру — борелевскую вероятность (меру) на отрезке $[a; b]$. В частности, множество всех рациональных точек на этом отрезке будет принадлежать L и вероятность его будет равна нулю. Действительно, так

как отдельная точка $r \in [a; b]$ принадлежит $L(\{r\} = [r; r] \in L)$, то по аксиоме 3 объединение Q_Ω всех рациональных точек (a их счетное число) принадлежит L :

$$Q_\Omega = \{r_1\} \cup \{r_2\} \cup \dots \cup \{r_n\} \cup \dots = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_i\},$$

где r_n — n -е рациональное число, полученное в результате перенумерации рациональных точек. Но $P\{r_n\} = (r_n - r_n)/(b - a) = 0$, следовательно, по аксиоме 6, поскольку $\{r_i\} \cap \{r_j\} = \emptyset$ при $i \neq j$,

$$P(Q_\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} P\{r_n\} = 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 0.$$

Пример 3. Пусть $F(x)$ непрерывная монотонно неубывающая функция на прямой, причем $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. Назовем образующим элементом любой ограниченный промежуток I (I имеет вид $[a; b]$, $]a; b]$, $[a; b[$, $]a; b[$) этой прямой и определим $P(I) = F(b) - F(a)$. Продолжив систему образующих до σ -алгебры L , а P до вероятности на L , получим вероятность на прямой. При этом вероятность одной точки будет, как и в предыдущем примере, равна нулю: $P\{a\} = F(a) - F(a) = 0$.

Пример 4. Пусть $F(x)$ монотонно неубывающая функция непрерывная слева, причем $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$. Назовем образующими элементами промежутки вида $I = [a; b[$, а вероятность на них определим формулой $P([a; b[) = F(b) - F(a)$. Продолжив, как и в примере 2, систему образующих до σ -алгебры L , а P до вероятности на L , получим пример гораздо более общий, чем предыдущий. В частности, теперь вероятность одноточечного множества может оказаться ненулевой.

Случайные величины и их числовые характеристики

В прикладных задачах чаще всего приходится сталкиваться с величинами, значения которых нельзя точно определить по разным причинам. Часть этих величин можно достаточно хорошо изучать — это случайные величины. Во-первых, случайная величина должна быть числовой, во-вторых, ее значения должны зависеть от случая. Это означает, что естественно считать случайной величиной ξ отображение пространства Ω во множество действительных чисел. В-третьих, для проведения каких-либо расчетов необходимо как-то определять вероятности различных значений $\xi(\omega)$. Минимальное разумное требование, на наш взгляд, состоит в том, чтобы можно было измерять вероятность того, что ξ принимает значения в любом промежутке вида $[a; b[$. Другими словами, прообраз $\xi^{-1}[a; b[= \{\omega | a \leq \xi(\omega) < b\}$ промежутка $[a; b[$ должен быть событием, т. е. $\xi^{-1}[a; b[\in L$. Ообра-

жения, обладающие этим свойством, называются измеримыми или (в теории вероятностей) случайными величинами.

Практически полную информацию о случайной величине ξ несет ее функция распределения F_ξ (правильнее сказать функция распределения вероятностей значений случайной величины ξ , но для краткости часто говорят распределение). Она определяется так:

$$F_\xi(x) = P(\xi < x). \quad (I.18)$$

Из определения видно, что

$$P(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Действительно, так как $\{\omega | \xi(\omega) < b\} = \{\omega | \xi(\omega) < a\} \cup \{\omega | a \leq \xi(\omega) < b\}$ и последние два множества не пересекаются, то

$$P(\xi < b) = P(\xi < a) + P(a \leq \xi < b),$$

т. е. $P(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$. Отметим, что функция F_ξ при этом удовлетворяет всем условиям примера 4.

В некоторых случаях существует такая неотрицательная функция $f_\xi(x)$, что $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(x) dx$, т. е. случайная величина имеет плотность распределения f_ξ или плотность. Далее будут рассматриваться только величины, имеющие плотность.

Из числовых характеристик случайной величины очень важную роль играют математическое ожидание и дисперсия случайной величины.

Математическим ожиданием $M\xi$ случайной величины ξ называется $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf_\xi(x) dx$, если интеграл в правой части сходится абсолютно. В общем случае

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_\xi(x), \quad (I.19)$$

где справа стоит интеграл Лебега—Стилтьеса.

Дисперсией $D\xi$ случайной величины ξ называется $M(\xi - M\xi)^2$.

Случайная величина может не обладать математическим ожиданием или дисперсией. Непосредственно из

определений следуют такие свойства этих числовых характеристик:

- 1) $Mc = c$, где c — произвольное число;
- 2) $M(a\xi_1 + b\xi_2) = aM\xi_1 + bM\xi_2$, где a и b — произвольные числа (если существуют $M\xi_1, M\xi_2$);
- 3) $D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2$;
- 4) $Dc = 0$ для любого числа c .

В многомерном случае распределением случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ называют функцию

$$F_{\xi}(\mathbf{x}) = F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n). \quad (I.20)$$

Как и раньше, если существует функция $f_{\xi}(\mathbf{x})$ такая, что

$$F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\xi}(t_1, \dots, t_n) \times \\ \times dt_1 \dots dt_n, \quad (I.21)$$

то $f_{\xi}(\mathbf{x})$ называют плотностью (многомерного распределения) случайного вектора ξ .

Определения (I.20)—(I.21) связаны с вполне определенной системой координат. В то же время во многих задачах теории вероятностей и математической статистики приходится переходить к другим системам координат. В связи с этим необходимо дать такое определение, которое бы было инвариантно относительно замен переменных. Это можно сделать многими способами. Наиболее простой из них легко осуществляется для тех случайных величин, которые обладают плотностью распределения. Именно из формул (I.20)—(I.21) следует, что если K — измеримая по Жордану (или квадрируемая) область¹ в R^n , то

$$P(\xi \in K) = \int_K f_{\xi}(\mathbf{x}) dx_1 \dots dx_n = \int_K f_{\xi}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (I.22)$$

где интеграл берется по области K .

Пусть $y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n)$, ..., $y_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_n)$ — другая (вообще говоря, криволинейная) система координат, причем $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — диф-

¹ Т. е. такая, которую с любой точностью можно приближать изнутри и снаружи многогранниками, составленными из таких кубиков в R^n , ребра которых параллельны координатным осям.

дифференцируемые функции и якобиан $D\varphi$, равный определителю

$$(D\varphi)(x) = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}, \quad (I.23)$$

отличен от нуля $(D\varphi)(x) \neq 0$. В этом случае для отображения $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ставящего в соответствие точке $x \in \mathbb{R}^n$ точку $y \in \mathbb{R}^n$ (будем писать короче, чем выше, $y = \varphi(x)$), существует обратное отображение $\varphi^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, ставящее в соответствие точке $y \in \mathbb{R}^n$ точку $x \in \mathbb{R}^n$ такую, что $\varphi^{-1}(y) = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$. В курсах математического анализа доказывается формула замены переменных: при наших предположениях для любой интегрируемой функции $g(y)$ верна формула

$$\int_K g(y) dy = \int_{\varphi^{-1}(K)} g(\varphi(x)) | (D\varphi)(x) | dx, \quad (I.24)$$

где $\varphi^{-1}(K)$ — образ области K при отображении φ^{-1} .

Отсюда легко получить формулу преобразования плотности при переходе к другой системе координат. Пусть $\eta = \varphi(\xi)$, причем $(D\varphi)(x) \neq 0$, случайный вектор ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x)$. Обозначим $f_\eta(x)$ плотность распределения случайного вектора η , тогда

$$f_\eta(x) = f_\xi(\varphi^{-1}(x)) | (D\varphi)(x) |^{-1}. \quad (I.25)$$

В соответствии с формулой (I.22) имеем

$$P(\eta \in K) = \int_K f_\eta(x) dx. \quad (I.26)$$

В то же время

$$P(\eta \in K) = P(\varphi(\xi) \in K) = P(\xi \in \varphi^{-1}(K)) = \int_{\varphi^{-1}(K)} f_\xi(y) dy,$$

положив $x = \varphi(y)$, т. е. $y = \varphi^{-1}(x)$, по формуле (I.24) получим

$$\int_{\varphi^{-1}(K)} f_\xi(y) dy = \int_K f_\xi(\varphi^{-1}(x)) | (D\varphi^{-1})(x) | dx. \quad (I.27)$$

Наконец, учитывая, что определитель $D\varphi^{-1}$ обратной матрицы $\left\| \frac{\partial \varphi_i^{-1}}{\partial x_j} \right\|$ равен единице, деленной на определитель $D\varphi$ матрицы $\left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\|$, из формул (I.26) и (I.27) получаем

$$\int_K f_\eta(x) dx = \int_K f_\xi(\varphi^{-1}(x)) | (D\varphi)(x) |^{-1} dx. \quad (I.28)$$

* Это и есть определение обратного отображения.

Поскольку K — произвольное измеримое множество, то, взяв последовательность $\{K_i\}$ кубиков, стягивающихся к точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, получим из формулы (1.28) равенство (1.25).

Пример 1. Пусть $\xi_1 = \eta_1^3 + \eta_2$ и $\xi_2 = \eta_1 - \eta_2$, т. е. $\varphi_1^{-1}(\mathbf{x}) = x_1^3 + x_2$ и $\varphi_2^{-1}(\mathbf{x}) = x_1 - x_2$, тогда

$$[(D\varphi)(\mathbf{x})]^{-1} = (D\varphi^{-1})(\mathbf{x}) = \det \begin{vmatrix} 3x_1^2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3x_1^2 - 1 \neq 0.$$

Следовательно, плотность f_η распределения случайного вектора η выражается через плотность f_ξ распределения ξ по формуле

$$f_\eta(x_1, x_2) = (3x_1^2 + 1) f_\xi(x_1^3 + x_2, x_1 - x_2).$$

Пример 2. Рассмотрим случай линейного преобразования. Пусть $\eta_1 = \xi_1 - 2\xi_2$ и $\eta_2 = \xi_1 + \xi_2$, т. е. $\varphi_1(\mathbf{x}) = x_1 - 2x_2$ и $\varphi_2(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$. В этом случае $\varphi_1^{-1}(\mathbf{x}) = (x_1 + 2x_2)/3$ и $\varphi_2^{-1}(\mathbf{x}) = (-x_1 + x_2)/3$, $(D\varphi)(\mathbf{x}) = \det \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$, а значит, $|(D\varphi^{-1})(\mathbf{x})| = 1/3$ и

$$f_\eta(\mathbf{x}) = \frac{1}{3} f_\xi\left(\frac{x_1 + 2x_2}{3}, \frac{-x_1 + x_2}{3}\right).$$

Зная многомерную плотность распределения случайного вектора ξ , легко найти плотность распределения любой его координаты, а также ее функцию распределения. Например, для первой координаты ξ_1 вектора ξ

$$F_{\xi_1}(x) = P(\xi_1 < x, \xi_2 \in]-\infty; +\infty[, \dots$$

$$\begin{aligned} & \dots, \xi_n \in]-\infty; +\infty[) = \\ & = \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t_1, t_2, \dots \right. \\ & \quad \left. \dots, t_n) dt_2 dt_3 \dots dt_n \right] dt_1, \end{aligned}$$

отсюда плотность распределения $f_{\xi_1}(x)$ случайной величины ξ_1 задается равенством

$$f_{\xi_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x, t_2, t_3, \dots, t_n) dt_2 dt_3 \dots dt_n. \quad (1.29)$$

Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ называются независимыми в совокупности в том случае, когда для любых промежутков $I_1, \dots, I_n$ выполнено ра-

$$P(\xi_1 \in I_1, \dots, \xi_n \in I_n) = P(\xi_1 \in I_1) \dots P(\xi_n \in I_n).$$

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ имеют плотности распределений $f_{\xi_1}(x), \dots, f_{\xi_n}(x)$ соответственно, тогда, как легко убедиться, если плотность f_{ξ} распределения случайного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ представлена в виде

$$f_{\xi}(x) = f_{\xi_1}(x_1) \dots f_{\xi_n}(x_n),$$

то $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимы в совокупности¹.

Пример 3. Вычислим плотность распределения суммы двух независимых случайных величин. Пусть ξ_1 и ξ_2 — две независимые случайные величины с плотностями $f_{\xi_1}(x)$ и $f_{\xi_2}(x)$ соответственно, тогда двумерная плотность вектора $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ задается формулой $f_{\xi}(x) = f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x_2)$. Пусть $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $\eta_2 = \xi_2$, т. е. $\varphi_1(x) = x_1 + x_2$ и $\varphi_2(x) = x_2$, тогда $\varphi_1^{-1}(x) = x_1 - x_2$ и $\varphi_2^{-1}(x) = x_2$, при этом $(D\varphi)(x) = \det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Отсюда двумерная плотность распределения $f_{\eta}(x)$ вектора η имеет вид

$$f_{\eta}(x_1, x_2) = f_{\xi}(x_1 - x_2, x_2) = f_{\xi_1}(x_1 - x_2) f_{\xi_2}(x_2).$$

По формуле (1.29) находим плотность распределения первой координаты η_1 вектора η , т. е. суммы $\xi_1 + \xi_2$:

$$f_{\xi_1 + \xi_2}(x) = f_{\eta_1}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x_1 - x_2) f_{\xi_2}(x_2) dx_2.$$

Наконец, отметим еще одно важное свойство независимых случайных величин. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, тогда

$$M(\xi_1 \xi_2) = (M\xi_1)(M\xi_2) \text{ и } D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2.$$

В теории вероятностей и математической статистике важную роль играют нормальные или гауссовские случайные величины. Случайная величина ξ распределена по нормальному (гауссовскому) закону с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 , если плотность f_{ξ} ее распределения вероятностей задается формулой

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}.$$

¹ Обратное еще более очевидно.

Для краткости пишут $\xi \in N(m, \sigma)$, а m и σ называют параметрами распределения. Осуществив замену переменных $\eta = (\xi - m)/\sigma$, получаем нормально распределенную случайную величину с параметрами 0 и 1, т. е. $\eta \in N(0; 1)$:

$$f_{\eta}(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}.$$

Пусть $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ — вектор, координаты которого — независимые (в совокупности) случайные величины, распределенные по закону $N(0; 1)$ каждая, тогда многомерная плотность распределения $f_{\eta}(\mathbf{x})$ задается формулой

$$\begin{aligned} f_{\eta}(x_1, \dots, x_n) &= f_{\eta_1}(x_1) \dots f_{\eta_n}(x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \\ &\times e^{-\frac{x_1^2}{2}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_n^2}{2}} = (2\pi)^{-n/2} e^{-(\sum x_i^2)/2} = \\ &= (2\pi)^{-n/2} e^{-(\mathbf{x}, \mathbf{x})/2}, \end{aligned}$$

где скобки в показателе означают скалярное произведение $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$.

Пусть U — ортогональное преобразование, тогда $\det U = 1$ и $(U^{-1}\mathbf{x}, U^{-1}\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$, откуда легко получить, что если $\eta = U\xi$, то многомерная плотность распределения случайного вектора η имеет тот же закон распределения, что и ξ :

$$\begin{aligned} f_{\eta}(\mathbf{x}) &= f_{\xi}(U^{-1}\mathbf{x}) |\det U|^{-1} = f_{\xi}(U^{-1}\mathbf{x}) = (2\pi)^{-n/2} \times \\ &\times e^{-(U^{-1}\mathbf{x}, U^{-1}\mathbf{x})/2} = (2\pi)^{-n/2} e^{-(\mathbf{x}, \mathbf{x})/2} = f_{\xi}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что координаты вектора η независимы в совокупности и каждая из них распределена по нормальному закону $N(0; 1)$.

Некоторые сведения из математической статистики

Рассмотрим четыре определения, которые непосредственно связаны с нормальным законом и наиболее часто встречаются в математической статистике.

Распределением Пирсона с n степенями свободы называется распределение, по которому распределена слу-

чайная величина

$$\chi_n^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2,$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, причем $\xi_i \in N(0; 1)$ при $i=1, 2, \dots, n$.

Это же распределение часто называют хи квадрат (с n степенями свободы). Явный вид плотности распределения χ_n^2 нетрудно установить¹:

$$f_{\chi_n^2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 2^{-n/2} [\Gamma(n/2)]^{-1} x^{n/2-1} e^{-x/2} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Распределением Стьюдента с n степенями свободы называется распределение, по которому распределена случайная величина

$$t_n = \frac{\xi}{\sqrt{(\chi_n^2)/n}} = \frac{\xi}{\sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2)/n}},$$

где $\xi, \xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, распределенные по закону $N(0; 1)$ каждая.

Это же распределение часто называют t -распределением (с n степенями свободы). Явный вид плотности распределения t_n :

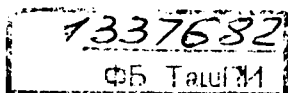
$$f_{t_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Распределением Фишера F_{mn} с (m, n) степенями свободы называется распределение, по которому распределена случайная величина

$$F_{mn} = \frac{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_m^2}{\eta_1^2 + \eta_2^2 + \dots + \eta_n^2},$$

где $\xi_1, \dots, \xi_m, \eta_1, \dots, \eta_n$ — независимые случайные величины, распределенные по закону $N(0; 1)$ каждая. Это же распределение часто называют F -распределением с (m, n) степенями свободы. Явный вид

¹ Здесь и далее $\Gamma(x)$ — гамма-функция. Отметим, что при натуральном n имеем $\Gamma(n) = (n-1)!$; кроме того, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ и $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \left(\frac{n}{2} - 2\right) \dots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$.



плотности распределения F_{mn} :

$$f_{F_{mn}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(x+1)^{\frac{m+n}{2}}} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Бета-распределением с параметрами (m, n) называется распределение, по которому распределена случайная величина

$$\beta_{mn} = \frac{\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2}{\xi_1^2 + \dots + \xi_m^2 + \xi_{m+1}^2 + \dots + \xi_n^2},$$

где $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, распределенные по закону $N(0; 1)$ каждая.

Явный вид плотности распределения β_{mn} :

$$f_{\beta_{mn}}(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} (1-x)^{\frac{n-m}{2}-1} & \text{при } 0 < x < 1; \\ 0 & \text{при } x \notin]0; 1[. \end{cases}$$

Эти четыре распределения хорошо изучены и протабулированы практически для всех случаев, которые встречаются в прикладных задачах.

Одной из важнейших задач математической статистики является задача определения неизвестных параметров по значениям случайных величин. Пусть $x_1, \dots, x_n$ — ряд наблюдений (значений) некоторой случайной величины ξ . Таким образом, сами значения $x_1, \dots, x_n$ являются случайными величинами, имеющими тот же закон распределения $F(x)$, что и ξ . Пусть, наконец, они будут независимы в совокупности, тогда они образуют выборку $x = (x_1, \dots, x_n)$ из распределения $F(x)$. Любая функция от выборки x называется статистикой. Оценка $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ некоторой величины (параметра) α является одной из статистик. Практический интерес представляют оценки, которые являются состоятельными и несмещенными. Состоятельность означает, что $\alpha(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \alpha$ при $n \rightarrow \infty$, где подразумевается сходимость по вероятности. Несме-

щенность оценки означает, что математическое ожидание $Ma(x_1, \dots, x_n) = a$ при любом n .

Поскольку оценка $a(x_1, \dots, x_n)$, являясь функцией от случайного вектора x , сама является случайной величиной, то найти точное значение a по выборке не представляется возможным. Более того, всегда возникает необходимость в выборе между точностью и надежностью. Это означает, что чем выше точность результата требуется получить по заданной выборке, тем меньше будет его надежность. Другими словами, пусть $a_1 = a_1(x_1, \dots, x_n)$ — нижняя оценка параметра a , а $a_2 = a_2(x_1, \dots, x_n)$ — верхняя оценка, тогда вероятность того, что $a \in [a_1, a_2]$, будет тем меньше, чем этот интервал будет уже. Как правило, точная оценка получается с нулевой вероятностью. Одним из способов получения компромиссного решения является следующий. Зададимся некоторой надежностью результата (вероятностью его истинности), равной, скажем, $1 - \beta$, где β — небольшое положительное число. Для этой надежности построим такой интервал $[a_1, a_2]$, где $a_1 = a_1(x_1, \dots, x_n)$ и $a_2 = a_2(x_1, \dots, x_n)$, что какова бы ни была выборка $(x_1, \dots, x_n)$, из распределения $F(x)$ имеем $P(a \in [a_1, a_2]) \geq 1 - \beta$, т. е. истинное значение параметра лежит в нашем интервале с вероятностью, не меньшей, чем $1 - \beta$. Сам интервал $[a_1, a_2]$ называют доверительным (для a с надежностью $1 - \beta$).

Обычное применение статистических методов для нормального оценивания связано с ортогональным разложением. Пусть оцениваемый вектор лежит в пространстве $L_1 \subset \mathbb{R}^n$ и L_2 — его ортогональное дополнение в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, случайный вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ таков, что его координаты — независимые в совокупности случайные величины, каждая из которых распределена по закону $N(0; 1)$. Обозначим $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ — проекции ξ на L_1 и L_2 соответственно, тогда:

- а) $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ — независимые случайные векторы;
- б) $\|\xi^{(1)}\|_2^2$ и $\|\xi^{(2)}\|_2^2$ — квадраты (евклидовых) длин векторов $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ независимы и распределены по закону Пирсона с n_1 и n_2 степенями свободы соответственно (здесь n_1 — размерность L_1 и n_2 — размерность L_2);
- в) $\|\xi^{(1)}\|_2^2 / \|\xi^{(2)}\|_2^2$ — имеет распределение Фишера с (n_1, n_2) степенями свободы;
- г) $\|\xi^{(1)}\|_2^2 / \|\xi\|_2^2$ — имеет бета-распределение с пара-

метрами (n_1, n) , а $\|\xi^{(2)}\|_2^2/\|\xi\|_2^2$ — бета-распределение с параметрами (n_2, n) .

Опишем общую схему нормального оценивания. Пусть требуется оценить по выборке $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ вектор $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, если известно, что схема ошибок имеет вид $x_i = a_i + \delta_i$, где ошибки δ_i независимы в совокупности и распределены по нормальному закону $N(0, \sigma)$, причем σ — не известно. Пусть известно, что вектор $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ лежит в подпространстве $L \subset \mathbb{R}^n$, причем размерность $L = n_1$ и $n_1 < n$ (иначе оценка практически бессмысленна, поскольку каждую из величин измеряем один раз). Применив метод наименьших квадратов, т. е. решив задачу

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}(\mathbf{x})\|_2^2 \rightarrow \min, \quad \mathbf{a} \in L$$

получим в качестве оценочного для $\mathbf{a}$ вектор $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \text{пр}_L \mathbf{x}$, являющийся проекцией $\mathbf{x}$ на L . Эта оценка является несмещенной (!), поскольку

$$M\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = M \text{пр}_L \mathbf{x} = \text{пр}_L M\mathbf{x} = \text{пр}_L \mathbf{a} = \mathbf{a} \quad (\text{здесь } Mx_i = M(a_i + \delta_i) = Ma_i + M\delta_i = a_i + 0 = a_i).$$

Для оценки дисперсии σ^2 (ошибок наблюдения) заметим, что вектор $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ перпендикулярен L , поэтому лежит в $L^\perp$ — ортогональном дополнении к L , т. е. является проекцией $\mathbf{x}$ на $L^\perp$. Поскольку вектор $\mathbf{a} \in L$ перпендикулярен $L^\perp$, то квадрат длины вектора $\mathbf{x} - \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ имеет распределение $\sigma^2 \chi_{n-n_1}^2$ [$(n-n_1)$ — размерность $L^\perp$]. Далее $M\chi_m^2 = m$, поэтому величина $s^2 = \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x})\|_2^2 / (n-n_1)$ имеет математическое ожидание

$$M[\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x})\|_2^2 / (n-n_1)] = \frac{\sigma^2}{n-n_1} M\chi_{n-n_1}^2 = \sigma^2, \quad (I.30)$$

т. е. s^2 является несмещенной оценкой для дисперсии σ^2 .

Наконец заметим, так как $\mathbf{a} \in L$ и $\hat{\mathbf{a}} \in L$, то $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \text{пр}_L(\mathbf{a} + \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{a} + \text{пр}_L \boldsymbol{\delta}$, откуда $\|\mathbf{a} - \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x})\|_2^2 = \|\text{пр}_L \boldsymbol{\delta}\|_2^2$ имеет распределение $\sigma^2 \chi_{n_1}^2$, причем случайные величины $\|\text{пр}_L \boldsymbol{\delta}\|_2^2$ и $\|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x})\|_2^2$ — независимые (как проекции на ортогональные подпространства). Отсюда следует, что их отношение имеет распределение Фишера с $(n_1, n-n_1)$ степенями свободы. Аналогично получаются

бета-распределения (например, для $\|\text{pr}_L \delta\|_2^2 / \|\delta\|_2^2$). Теперь, используя таблицы распределений, легко построить доверительные интервалы.

Пример. Пусть n раз измеряется одна и та же величина одним и тем же прибором, причем результаты измерений получились равными $x_1, \dots, x_n$, т. е. схема ошибок $x_i = a + \delta_i$, где δ_i независимы в совокупности и распределены по нормальному закону $N(0; \sigma)$ с неизвестной дисперсией σ^2 . Требуется оценить a и дисперсию.

Применим общую схему нормального оценивания. Очевидно, $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$, т. е. L — одномерное подпространство, образованное векторами вида $(a, a, \dots, a) = a\sqrt{n}\mathbf{e}$, где $\mathbf{e}$ — вектор единичной длины с равными координатами $\mathbf{e} = (1/\sqrt{n}; 1/\sqrt{n}; \dots; 1/\sqrt{n})$. Оценкой для вектора $(a, a, \dots, a) = a\sqrt{n}\mathbf{e}$ будет проекция $\mathbf{x}$ на L , т. е.

$$\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \text{pr}_L \mathbf{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{e}) \mathbf{e} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt{n}} \mathbf{e} = (\bar{x}, \bar{x}, \dots, \bar{x}),$$

где $\bar{x} = (x_1 + \dots + x_n)/n$ — среднее арифметическое значений x_i (в статистике называется эмпирическим средним). Таким образом, оценкой для a , полученной по методу наименьших квадратов, будет $\bar{x}$.

Оценкой для σ^2 будет (так как $n_1 = 1$) согласно (I.30)

$$s^2 = \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{a}}(\mathbf{x})\|_2^2 / (n - 1) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right] / (n - 1).$$

Далее $a - \hat{a}(\mathbf{x}) = a - \bar{x}$ распределена по нормальному закону, причем при нормировке $(a - \bar{x})\sqrt{n}/\sigma$ получим случайную величину, распределенную по закону $N(0; 1)$. Однако воспользоваться этим не можем, так как не знаем точного значения σ . Поскольку случайная величина s^2/σ^2 имеет распределение $\chi_{n-1}^2/(n-1)$, следовательно, случайная величина

$$t_{n-1} = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}/\sigma}{\sqrt{s^2/\sigma^2}} = \frac{(\bar{x} - a)\sqrt{n}}{s}$$

имеет распределение Стьюдента с $(n-1)$ -й степенью свободы. Теперь легко построить симметричный доверительный интервал: по заданному β найдем, используя таблицу, такое число t_β , что $P(-t_\beta < t_{n-1} < t_\beta) = 1 - \beta$. Отсюда $-t_\beta < t_{n-1} \leq t_\beta$ означает, что $-t_\beta s < (\bar{x} - a)\sqrt{n} \leq t_\beta s$, т. е. $\bar{x} - (st_\beta/\sqrt{n}) < a < \bar{x} + (st_\beta/\sqrt{n})$.

Аналогично, так как $(n-1)s^2/\sigma^2$ имеет распределение χ_{n-1}^2 , то по таблице распределения Пирсона можно найти такие два числа b_1 и b_2 , что

$$P(b_1 < \chi_{n-1}^2 < b_2) = 1 - \beta.$$

Следует отметить, что они, однако, не находятся однозначно, поэтому обычно выбирают их также из соображений симметрии, а

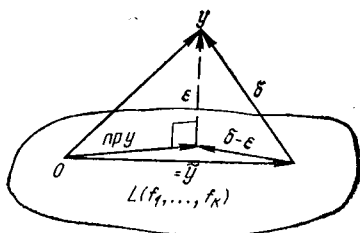
Рис. 6. Иллюстрация к методу наименьших квадратов

муле (I.31) к векторным обозначениям, получим

$$y = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k + \delta. \quad (I.32)$$

Дополнительно предположим, что векторы

$$f_1 = \begin{pmatrix} f_{11} \\ \vdots \\ f_{1n} \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} f_{21} \\ \vdots \\ f_{2n} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad f_k = \begin{pmatrix} f_{k1} \\ \vdots \\ f_{kn} \end{pmatrix}$$



образуют линейно независимую систему¹. Примем также, что число измерений n больше числа определяемых параметров k . Равенство (I.32) означает, что вектор y получается прибавлением вектора ошибок δ к некоторому вектору $\tilde{y}$ истинных значений наблюдаемой, лежащему в пространстве $L(f_1, \dots, f_k)$, натянутом на векторы $f_1, \dots, f_k$, т. е. в линейной оболочке $f_1, \dots, f_k$ (рис. 6). В этом случае оценкой вектора $\tilde{y} = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k$ является проекция пру вектора y на $L(f_1, \dots, f_k)$. Проекция пру лежит в подпространстве $L(f_1, \dots, f_k)$ и, значит, разлагается по базису $f_1, \dots, f_k$ в этом подпространстве:

$$\text{пру} = \beta_1 f_1 + \dots + \beta_k f_k.$$

Таким образом, значения $\beta_1, \dots, \beta_k$ служат оценками истинных значений $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ параметров. Для их нахождения применяется метод наименьших квадратов. Вектор $\epsilon = y - \text{пру}$ является перпендикуляром к $L(f_1, \dots, f_k)$ и, следовательно, имеет наименьшую длину среди всех векторов вида $y - f$, где $f \in L(f_1, \dots, f_k)$. Значит, и квадрат этой длины $\|\epsilon\|_2^2$ также будет минимален, т. е.

¹ В противном случае вектор, являющийся линейной комбинацией других, следует исключить, т. е. уменьшить число слагаемых аппроксимирующей функции, поскольку одна из них выражается через остальные.

$\beta_1, \dots, \beta_k$ — решения задачи

$$\begin{aligned} \|\epsilon\|_2^2 &= \|\mathbf{y} - \gamma_1 \mathbf{f}_1 - \dots - \gamma_k \mathbf{f}_k\|_2^2 = \\ &= \sum_{l=1}^n (y_l - \gamma_1 f_{1l} - \dots - \gamma_k f_{kl})^2 \rightarrow \min_{\gamma_1, \dots, \gamma_k}. \end{aligned}$$

Эта задача — квадратичной минимизации, причем в силу предположения о линейной независимости системы $\{f_1, \dots, f_k\}$ она имеет единственное решение. Для нахождения его нужно продифференцировать $\|e\|_2^2$ и приравнять частные производные ($j = 1, \dots, k$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \| \varepsilon \|_2^2}{\partial \gamma_j} &= -2 \sum_{i=1}^n f_{ji} (y_i - \gamma_1 f_{1i} - \dots - \gamma_h f_{hi}) = \\ &= -2 (\mathbf{f}_j, \mathbf{y} - \gamma_1 \mathbf{f}_1 - \dots - \gamma_h \mathbf{f}_h) \end{aligned}$$

к нулю. Получим систему нормальных уравнений

$$(\mathbf{f}_j, \mathbf{y} - \gamma_1 \mathbf{f}_1 - \dots - \gamma_k \mathbf{f}_k) = 0, \text{ где } j = 1, \dots, k. \quad (\text{I.33})$$

Название объясняется тем, что уравнения (I.33) означают перпендикулярность вектора ε всем векторам $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$, а значит, и всему подпространству $L(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$, т. е. означают, что ε является одной из нормалей к L . Систему (I.33) можно записать в виде

[illegible]

где скобки означают, как и выше, скалярное произведение:

$$(f_i, f_j) = \sum_{s=1}^n f_{is} f_{js}.$$

Часто удобнее перейти к матричной записи. Обозначим символом $\mathbf{F}$ матрицу $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k)$ столбцами которой будут векторы $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{21} & f_{31} & \dots & f_{k1} \\ f_{12} & f_{22} & f_{32} & \dots & f_{k2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{1n} & f_{2n} & f_{3n} & \dots & f_{kn} \end{pmatrix}$$

F имеет размерность $n \times k$ и по предположению, сформулированному выше, $\text{rang } F = k$. Обозначим

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{pmatrix} \text{ и } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

векторы параметров и экспериментальных значений (размерностей k и n соответственно). В таком случае имеем

$$\varepsilon = y - F\gamma, \quad (I.34)$$

а система уравнений (I.33), задающая условия ортогональности ε и столбцов матрицы F , может быть записана в виде $F^T \varepsilon = 0$, где F^T — матрица, полученная из F транспонированием:

$$F^T = \begin{pmatrix} f_1^T \\ \vdots \\ f_k^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{k1} & f_{k2} & \dots & f_{kn} \end{pmatrix}$$

Действительно, поскольку $(f_i, \varepsilon) = 0$,

$$\begin{aligned} F^T \varepsilon &= \begin{pmatrix} f_{11}\varepsilon_1 + f_{12}\varepsilon_2 + \dots + f_{1n}\varepsilon_n \\ \vdots \\ f_{k1}\varepsilon_1 + f_{k2}\varepsilon_2 + \dots + f_{kn}\varepsilon_n \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (f_1, \varepsilon) \\ \vdots \\ (f_k, \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Теперь, используя равенство (I.34), получаем

$$F^T y - F^T F \gamma = 0, \quad (I.35)$$

т. е. $\gamma = (F^T F)^{-1} F^T y$.

Матрица $(F^T F)^{-1}$ существует в силу нашего предположения о линейной независимости векторов $f_1, \dots, f_k$. Далее, так как вектор истинных значений $\tilde{y}$ функции $y = f(\alpha, x)$ задается равенством $\tilde{y} = F\alpha$, а вектор отклонений δ — равенством $\delta = y - \tilde{y}$, то согласно равен-

ству (I.35)

$$\gamma = (F^T F)^{-1} F^T (\tilde{y} + \delta) = (F^T F)^{-1} F^T (F\alpha + \delta) = (F^T F)^{-1} (F^T F) \alpha + \\ + (F^T F)^{-1} F^T \delta = \alpha + (F^T F)^{-1} F^T \delta.$$

Таким образом,

$$\gamma - \alpha = (F^T F)^{-1} F^T \delta \quad (\text{I.36})$$

и, поскольку математическое ожидание $M\delta = 0$,

$$M(\gamma - \alpha) = (F^T F)^{-1} F^T (M\delta) = 0, \text{ т. е. } M\gamma = \alpha.$$

Следовательно, оценка γ вектора α , полученная по методу наименьших квадратов, является несмещенной. Из формулы (I.36) видно, что отклонение вектора γ от вектора α является линейным преобразованием вектора δ , и, значит, если δ_i распределены независимо по закону $N(0; 1)$, то δ имеет многомерное нормальное распределение (точнее, k -мерное). В частности, если векторы $f_1, \dots, f_k$ образуют ортогональную систему, то отклонения отдельных координат $\gamma_i - \alpha_i$ являются независимыми нормально распределенными величинами с параметрами 0 и 1. В общем случае доверительными интервалами (областями) будут многомерные эллипсоиды вида $\|\gamma - \alpha\|_2 \leq r$.

Обычно используют другой принцип оценивания, который эффективнее и проще. Суть его заключается в том, что при наших предположениях о независимости и нормальности δ_i векторы ϵ и $\tilde{y}$ являются независимыми случайными в силу ортогональности ϵ и $L(f_1, \dots, f_k)$. Пусть $\|\epsilon\|_2^2 = \|\tilde{y} - \gamma_1 f_1 - \dots - \gamma_k f_k\|_2^2$. Эту величину можно называть квадратом длины вектора «кажущихся» отклонений, поскольку ϵ показывает отклонения не от истинного значения $\tilde{y}$, а от его оценки $\tilde{y}$. Как показано выше, $\|\epsilon\|_2^2$ является случайной величиной, распределенной по закону Пирсона χ_{n-k}^2 с $n-k$ степенями свободы. Аналогично вектор $\tilde{y} - \tilde{y} = \delta - \epsilon$, будучи перпендикулярен вектору ϵ (см. рис. 6), распределен независимо и $\|\tilde{y} - \tilde{y}\|_2^2 = \|\delta - \epsilon\|_2^2$ имеет распределение χ_k^2 , а отношение $\frac{\|\epsilon\|_2^2 (n-k)^{-1}}{\|\tilde{y} - \tilde{y}\|_2^2 k^{-1}}$ имеет распределение

Фишера $F_{n-k, k}$. Это позволяет производить оценивание, используя таблицы распределений Фишера и Пирсона даже при неизвестной дисперсии δ_i .

Нелинейная модель

Появление такой модели рассмотрим на простом примере. Пусть измеряется зависимость температуры от давления в некотором процессе. Снимая данные о температуре и давлении в отдельные моменты, получим таблицу:

$$\begin{array}{ccccccc} t & t_1 & t_2 & . & . & . & t_n \\ p & p_1 & p_2 & . & . & . & p_n \end{array}$$

Теперь из-за возможных погрешностей измерительных приборов имеем следующую схему ошибок:

$$t_i = \tilde{t}_i + \delta_i \text{ и } p_i = \tilde{p}_i + \varepsilon_i,$$

где $\tilde{t}_i$ и $\tilde{p}_i$ — истинные значения температур и давлений в моменты i ($i=1, \dots, n$).

Предположим, что они связаны некоторым законом

$$\tilde{p} = f(\alpha, \tilde{t}),$$

где α — вектор параметров, подлежащий определению.

В целях симметрии записи примем, что они связаны более общим соотношением $g(\alpha, \tilde{p}, \tilde{t}) = 0$ [в нашем случае $g(\alpha, \tilde{p}, \tilde{t}) = \tilde{p} - f(\alpha, \tilde{t})$]. В этом случае оценивание проводят в несколько этапов.

Сначала получают какую-нибудь оценку для $\alpha^{(0)}$. Например, считая, что $\delta_i = 0$ при $i=1, \dots, n$, применяют метод наименьших квадратов, т. е. решают задачу

$$\sum_{i=1}^n (p_i - f(\alpha, t_i))^2 = \|p - f(\alpha, t)\|_2^2 \rightarrow \min_{\alpha},$$

или более обще

$$\sum_{i=1}^n g^2(\alpha, p_i, t_i) = \|g\|_2^2 \rightarrow \min.$$

Полученное решение есть $\alpha^{(0)}$. Конечно, если все значения $g(\alpha^{(0)}, p_i, t_i)$ оказались равны нулю, то лучшей оценки не получить. Пусть $\min_{\alpha} \|g\|_2^2 > 0$. Разложив $g(\alpha, \tilde{p}_i, \tilde{t}_i)$ в ряд Тейлора с точностью до членов первого порядка (т. е. полагая, что отклонения ε_i , δ_i и оценки α

от $\alpha^{(0)}$ малы), в точке $(\alpha^{(0)}, p_i, t_i)$ получим

$$g(\alpha, \tilde{p}_i, \tilde{t}_i) \approx g(\alpha^{(0)}, p_i, t_i) + \sum_{i=1}^k \frac{\partial g(\alpha^{(0)}, p_i, t_i)}{\partial \alpha_i} (\alpha_i - \alpha_i^{(0)}) + \\ + \frac{\partial g(\alpha^{(0)}, p_i, t_i)}{\partial p_i} \varepsilon_i + \frac{\partial g(\alpha^{(0)}, p_i, t_i)}{\partial t_i} \delta_i.$$

Поскольку $g(\alpha, \tilde{p}, \tilde{t}) = 0$, то, пренебрегая членами вы-
соких порядков, получим равенство

$$g_{0i} + (\nabla_{\alpha} g_i, \alpha - \alpha^{(0)}) = - \frac{\partial g_i}{\partial p_i} \varepsilon_i - \frac{\partial g_i}{\partial t_i} \delta_i, \quad (I.37)$$

где $g_{0i} = g(\alpha^{(0)}, p_i, t_i)$; $\nabla_{\alpha} g_i$ — вектор, i -я координата которого
($i=1, \dots, k$) равна $\frac{\partial g}{\partial \alpha_i}(\alpha^{(0)}, p_i, t_i)$; $\frac{\partial g_i}{\partial p_i} = \frac{\partial g}{\partial p_i}(\alpha^{(0)}, p_i, t_i)$
и $\frac{\partial g_i}{\partial t_i} = \frac{\partial g}{\partial t_i}(\alpha^{(0)}, p_i, t_i)$ — частные производные g , взятые
в точке $(\alpha^{(0)}, p_i, t_i)$.

Из формулы (I.37) видно, что получается типичная
задача линейного оценивания для следующей схемы
ошибок:

$$g_{0i} - (\nabla_{\alpha} g_i, \alpha^{(0)}) + (\alpha, \nabla_{\alpha} g_i) = 0 + \xi_i, \quad (I.38)$$

где ξ_i — координаты вектора ошибок [правая часть равенства
(I.37)].

Произведя, как и в случае линейной модели преобра-
зования [для того, чтобы ξ_i были одинаково распределе-
ны по закону $N(0, 1)$], т. е. поделив обе части выраже-

ния (I.38) на $\sqrt{D\xi_i} = \sqrt{\left(\frac{\partial g_i}{\partial p_i}\right)^2 D\varepsilon_i + \left(\frac{\partial g_i}{\partial t_i}\right)^2 D\delta_i}$,
получим систему

$$y_i + \sum_{l=1}^k \alpha_l f_{li} = 0 + \eta_i,$$

где $y_i = (g_{0i} - (\nabla_{\alpha} g_i, \alpha^{(0)})) / \sqrt{D\xi_i}$; $f_{li} = \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_l} / \sqrt{D\xi_i}$; $\eta_i =$
 $= \xi_i / \sqrt{D\xi_i}$.

Применив к этой системе метод наименьших квадра-

тов, т. е. решив задачу

$$\left\| y + \sum_{l=1}^k \alpha_l f_l \right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(y_i + \sum_{l=1}^k \alpha_l f_{li} \right)^2 \rightarrow \min_{\alpha},$$

получим новую точку $\alpha^{(1)}$, оценивающую вектор параметров α . Теперь новое значение $\alpha^{(1)}$ рассматривается как начальное приближение и все повторяется. Это делается до тех пор, пока получаемые последовательно точки $\alpha^{(n)}$, $\alpha^{(n+1)}$ не станут достаточно близкими (т. е. меньше наперед заданной точности), т. е. последовательно решаются линеаризованные задачи. Оценка точности (доверительные области и т. п.) обычно строится по последней линейной задаче.

Метод Монте-Карло для статистического оценивания

Одной из причин, по которым в прикладной литературе главным образом разбирается метод наименьших квадратов, являются наибольшая разработанность его и простота: по сути дела надо решить систему уравнений обычно небольшой размерности. В то же время зачастую задача исследователя сводится к тому, что приходится подбирать аппроксимирующую функцию практически наугад, а не из точно известного класса функций. При этом появляются регулярные ошибки, не имеющие статистического характера. Сама задача иногда требует исключения очень больших отклонений и т. п. Кроме того, ошибки эксперимента могут не иметь нормального распределения. В этом случае даже метод наименьших квадратов не позволяет оценить величину погрешностей оценок. В то же время непосредственно качественный анализ весьма затруднителен из-за нелинейности задачи. Приближенные же методы требуют очень сложной техники оценивания.

Эти проблемы во многом снимаются благодаря возможностям использования современной вычислительной техники. Примером может служить использование метода статистических испытаний или, как его еще называют, метода Монте-Карло. Рассмотрим, как этот метод может служить для нахождения распределения оцениваемых параметров в случае использования неевклидовой метрики.

Предположим наличие схемы ошибок

$$y^{(i)} = f(\alpha, x^{(i)}) + \delta_i, \quad (I.39)$$

где δ_i имеет заданное распределение $F_i(x)$.

Допустим, что оценку нужно произвести по n значениям $y^{(i)}$. Зафиксируем какое-нибудь начальное значение $\alpha^{(0)}$, выдав с помощью датчика случайных величин n значений δ_i , имеющих распределения $F_i(x)$, вычислим $y^{(i)}$ по формуле (I.39). Для удобства используем векторные обозначения

$$y = \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} \text{ и } \delta = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix}.$$

Итак, «разыграв» вектор $\delta(\omega_1)$ и получив вектор $y(\omega_1)$, решаем экстремальную задачу метрической аппроксимации

$$\|y(\omega_1) - f(\alpha, x)\|_p^p \rightarrow \min_{\alpha}.$$

Решение $\alpha(\omega_1)$ будет отличаться от $\alpha^{(0)}$. Далее опять разыгрываем $\delta(\omega_2)$ и находим $\alpha(\omega_2)$ и т. д. Через N испытаний получим выборку $\alpha(\omega_1), \dots, \alpha(\omega_N)$, которая позволяет изучать различные статистики. Например, взяв $d(\omega_i) = \|\alpha(\omega_i) - \alpha^{(0)}\|$, сможем изучать отклонения

по заданной норме: $Md \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d(\omega_i)$, $M\alpha \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \alpha(\omega_i)$

и т. д. При большом числе испытаний можно изучать практически любые статистики.

Обычно оценивание вектора параметров α производится в несколько этапов. Сначала по вектору эмпирических значений определяется начальное значение $\alpha^{(0)}$. Разыграв N серий испытаний, получаем некоторое распределение случайного вектора $\alpha(\omega_1), \dots, \alpha(\omega_N)$. Срав-

нивая среднее значение $M\alpha = N^{-1} \sum_{i=1}^N \alpha(\omega_i)$ с век-

тором $\alpha^{(0)}$, оцениваем величину смещения оценки $s^{(0)} = \alpha^{(0)} - M\alpha$. Если норма вектора $s^{(0)}$ меньше требуемой точности оценки, в качестве оценки для вектора параметров α берут вектор $\alpha^{(0)}$. Если норма $s^{(0)}$

велика, отыскивается направление из $\alpha^{(0)}$, вдоль которого происходит уменьшение нормы s смещения, выбирается шаг сдвига и т. д. Таким образом, применяется одна из процедур выпуклого программирования, чаще всего градиентная процедура, описанная в главе II. В конце концов получаем при некотором значении $\alpha^{(k)}$, что $M\alpha \approx \alpha^{(k)}$, тогда $\alpha^{(k)}$ выбирается в качестве оценки для вектора α параметров. Иными словами, выбирается такой вектор значений параметров, при котором оценки с помощью данного метода в среднем близки к оценкам, полученным непосредственно по эмпирическим данным. Сама выборка $\alpha(\omega_1), \dots, \alpha(\omega_N)$, полученная в последней серии, дает возможность получить различные статистики для $\alpha^{(k)}$ и строить доверительные области.

Отметим, что непосредственные расчеты в автоматическом режиме по указанной схеме достаточно сложны. Однако широкие возможности, которые представляет современная вычислительная техника, позволяют существенно ускорять процесс благодаря использованию человеко-машинных (интерактивных) режимов. Обычно соответствующая программа строится в диалоговом режиме с визуализацией результатов. Взглянув на экран, исследователь легко оценивает разброс результатов, направление и величину сдвига. Задавая их непосредственно с дисплея, сравнивая результаты для различных серий, методов и функциональных зависимостей, оператор быстро обучается и находит такие приемлемые решения, которые в автоматическом режиме найти не представляется возможным.

Глава II. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ

II.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Проблему оптимизации процессов на основе экспериментальных данных условно можно разделить на две задачи: построение модели процесса и нахождение оптимального режима по заданному критерию. Обычно первая задача сводится к нахождению аппроксимирующей функции, достаточно хорошо описывающей данный процесс и его зависимость от управляющих параметров. Вторая задача состоит в том, чтобы найти те значения управляющих параметров, при которых достигается оптимум критериальной (целевой) функции. Первая задача рассматривалась в предыдущей главе. Она также является оптимизационной. В данной главе приведены численные методы решения оптимизационных задач.

Оптимизационные задачи делятся на ряд классов по разным признакам. Так, по размерности их можно разделить на одномерные, многомерные (конечномерные и бесконечномерные); по структуре решений — на линейные, выпуклые и многоэкстремальные; по гладкости — на дифференцируемые (до некоторого порядка), недифференцируемые непрерывные и дискретные. В каждой из этих классификаций задачи расположены в порядке возрастания сложности их решения. Охарактеризуем вкратце некоторые из классов.

Одномерные задачи — это задачи вида: минимизировать $f(x)$ на промежутке $I \subset \mathbf{R}$. Такие задачи составляют, как правило, одну из важных процедур в многомерной оптимизации.

Конечномерные задачи имеют вид:

$$f(x) \rightarrow \min \text{ при } x \in D \subset \mathbf{R}^n.$$

Сама область D может совпадать со всем пространством, тогда говорят о безусловной оптимизации.

В противном случае говорят об условной оптимизации. При этом очень часто область D задается системой уравнений или неравенств. Хотя формально каждый из этих случаев сводится к другому, т. е. уравнение можно задать системой неравенств [например, $f(x)=0$ можно записать в виде системы $f(x) \geq 0$ и $f(x) \leq 0$], а неравенство записать уравнением [например, $f(x) \leq 0$ записать как $f(x) + |f(x)| = 0$], тем не менее при этом меняются, как правило, гладкость, размерность или какая-нибудь другая из характеристик задачи. Чаще всего система уравнений $g_1(x)=0, \dots, g_k(x)=0$ определяет $(n-k)$ -мерную поверхность в пространстве $\mathbf{R}^n$, при этом задачу

$$f(x) \rightarrow \min \text{ при } g_1(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0$$

называют задачей Лагранжа.

Бесконечномерная оптимизация — это в основном задачи вариационного исчисления и оптимального управления, т. е. экстремальные задачи в функциональных пространствах.

Линейные задачи (или задачи линейного программирования) — это задачи вида

[illegible]

т. е. требуется минимизировать линейную функцию при линейных ограничениях. Решения задач этого класса играют исключительную роль, так как в большинстве случаев решение более сложной задачи удастся свести к последовательному решению задач линейного программирования. Один из наиболее распространенных методов решения этих задач — симплексный (см. II.4). В последнее время повышенный интерес к этим задачам привел к появлению ряда принципиально иных методов.

Выпуклые задачи также образуют довольно хорошо исследованный класс задач. Они формулируются

так:

$$f(x) \rightarrow \min \text{ при } g_1(x) \leq 0, \dots, g_m(x) \leq 0,$$

где все функции $f, g_1, \dots, g_m$ — выпуклые.

Некоторые из численных методов решения таких задач разбираются в п. II.5.

Невыпуклые задачи называются **многоэкстремальными**. Численные методы решения этих задач разработаны мало. Существует много алгоритмов нахождения локальных экстремумов в таких задачах. Нахождение же глобального экстремума является принципиально неразрешимой задачей (во всяком случае для всего класса многоэкстремальных задач).

II.2. МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Из математического анализа известно, что если дифференцируемая функция $f(x)$ в точке x_0 достигает экстремум, т. е. максимум или минимум, то ее производная f' в точке x_0 равна нулю. Таким образом, необходимое условие экстремума для дифференцируемой функции задается уравнением $f'(x) = 0$. Если же $f'(x_0) = 0$, то это не означает, что в точке x_0 достигается экстремум функции f . Сформулируем некоторые достаточные условия экстремумов.

В соответствии с принятой терминологией будем говорить об условиях n -го порядка, если в них требуется, чтобы функция была дифференцируема n раз. Поскольку в тех точках, где f достигает максимума, функция ($-f$) достигает минимума, ограничимся только условиями минимума.

Условия 1-го порядка состоят в следующем. Если производная функции f в точке x_0 меняет знак с отрицательного на положительный, то x_0 — точка минимума. Другими словами, если существует такая окрестность $U_\delta(x_0) =]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ (где $\delta > 0$), что $f'(x) < 0$ при $x \in]x_0 - \delta; x_0[$ и $f'(x) > 0$ при $x \in]x_0; x_0 + \delta[$, то x_0 — точка минимума.

Условия 2-го порядка формулируются так: если в точке x_0 первая производная функции f равна нулю, т. е. $f'(x_0) = 0$, а вторая производная положительна, т. е. $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума.

Условия $2n$ -го порядка: если в точке x_0 производные до $(2n-1)$ -го порядка равны нулю $f^{(1)}(x_0) = f^{(2)}(x_0) =$

$\equiv \dots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$, а производная порядка $2n$ положительна $f^{(2n)}(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума.

Сформулированные достаточные условия определяют локальный минимум функции на открытом промежутке. Если промежуток I содержит концы, то условия несколько меняются. Пусть $I = [a; b]$, тогда достаточным условием 1-го порядка того, что в левом конце достигается локальный минимум, будет условие $f'(a) > 0$. Аналогично для правого конца достаточное условие задается неравенством $f'(b) < 0$.

Нахождение локального минимума, как правило, не является сложной задачей, чего нельзя сказать о задаче нахождения глобального минимума, т. е. наименьшего значения функции на заданном промежутке. Во-первых, если промежуток неограничен, то глобальный минимум может и не существовать. Практически во всех прикладных задачах область изменения параметров ограничена физическими возможностями. В таком случае существование глобального минимума обеспечивается теоремой Вейерштрасса о том, что если функция f непрерывна на компакте K , то существует точка $x_0 \in K$, в которой f принимает наименьшее значение на K , т. е. для любого $x \in K$ выполнено неравенство $f(x) \geq f(x_0)$. Частным случаем компакта является отрезок $[a; b]$. Даже и в этом случае не существует алгоритма, позволяющего найти глобальный минимум произвольной функции (непрерывной или дифференцируемой). Точнее говоря, для всякого алгоритма нахождения минимума можно построить такую функцию (непрерывную или дифференцируемую), что алгоритм не укажет ее глобальный минимум. Однако такие функции имеют исключительный характер, а те процессы, которые исследуются в прикладных задачах, обладают, как правило, свойствами, позволяющими хотя бы приближенно находить минимальные значения исследуемых функций.

Имеется несколько классов функций, для которых численные методы нахождения минимума разработаны достаточно хорошо. Первый класс функций — это многочлены, которые часто используются в качестве аппроксимирующих функций. Поскольку производная многочлена также является многочленом, то для отыскания минимума многочлена $P_n(x)$ на отрезке $[a, b]$ достаточно найти корни его производной $P'_n(x)$ на $[a, b]$ (для этого существуют стандартные программы в математическом

обеспечении любой ЭВМ), затем вычислить значений P_n в полученных точках и в концах отрезка $[a, b]$ и, наконец, сравнив эти значения, найти из них минимальное.

Второй класс функций, для которых проблема численного нахождения минимума принципиально решена, — класс выпуклых функций. Опишем несколько алгоритмов, позволяющих находить этот минимум. Начнем с методов нулевого порядка, т. е. в которых требуется вычислять только значения функции (но не значения производных). Обозначим $\Delta_0 = [a, b]$ и предположим, что $f(x)$ имеет на Δ_0 единственный минимум (скажем, в точке x_0), тогда приводимые ниже методы позволят найти минимум с заданной точностью.

Метод перебора. Выберем шаг h такой, что $0 < h \leq (b-a)/3$, и положим $x^{(k)} = a + kh$, где k — целое число, причем $0 \leq k < 1 + (b-a)/h$. Вычисляем последовательно значения $f(x^{(0)})$, $f(x^{(1)})$, ... до тех пор, пока $f(x^{(h)})$ не станет меньше чем $f(x^{(h+1)})$. Если это случилось на первом шагу, полагаем $\Delta_1 = [a, x^{(1)}]$; если на последнем, то $\Delta_1 = [x^{(l)}, b]$, где l — предпоследний номер; в остальных случаях полагаем $\Delta_1 = [x^{(h-1)}, x^{(h+1)}]$. При этом $x_0 \in \Delta_1$ и длина Δ_1 не более $2h$, т. е. если в качестве приближенного значения $\tilde{x}$ точки минимума x_0 брать середину Δ_1 , то точность приближения $|\tilde{x} - x_0| \leq h$.

Пример 1. Пусть требуется найти точку минимума функции $f(x) = 0,3x - \ln x$ на отрезке $[1; 4]$ с точностью $\varepsilon = 0,2$.

Применим метод перебора. Так как точность в этом методе равна h — шагу вычислений, то $h = \varepsilon = 0,2$. Выпишем последовательные значения $f(x^{(k)})$, где $x^{(k)} = 1 + k \cdot 0,2$:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$x^{(k)}$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4
$f(x^{(k)})$	0,3	0,18	0,08	0,01	-0,05	-0,09	-0,13	-0,15

k	8	9	10	11	12	13	14	15
$x^{(k)}$	2,6	2,8	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4
$f(x^{(k)})$	-0,17	-0,19	-0,198	-0,203	-0,204	-0,201	-0,195	-0,186

Эти данные позволяют пояснить некоторые тонкости алгоритмов минимизации. Предположим, что значения $f_k = f(x^{(k)})$ вычисляются с точностью до 0,1, тогда получим:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	15
f_k	0,3	0,2	0,1	0	0	-0,1	-0,1	-0,1	-0,2	...	-0,2

Другими словами, найденное этим методом минимизирующее значение x^* лежит в промежутке от 2,4 до 4, это обеспечивает точность вычисления только 0,8 (т. е. получили бы $x^* \approx 3,2 + 0,8$).

Увеличив точность вычислений значений f_k в 10 раз, аналогично получили бы:

k	7	8	9	10	. . .	14	15
f_k	-0,15	-0,17	-0,19	-0,2	. . .	-0,2	-0,19

Таким образом, $x^* \approx 3,4 \pm 0,6$, т. е. гарантируемая точность вычислений была бы равна 0,6.

Аналогично, увеличив точность вычислений f_k еще в 10 раз, получим:

k	10	11	12	13	
f_k	-0,198	-0,203	-0,204	-0,201	

Таким образом, $x^* \approx 3,4 \pm 0,2$, т. е. гарантируемая точность равна 0,2, что и требовалось.

Из примера видно, поскольку любые приборы имеют ограниченную точность, любые ЭВМ проводят вычисления также с ограниченной точностью, вычислить значение x^* , минимизирующее $f(x)$, можно не с любой заданной точностью ε . Далее при вычислениях значений f необходимо увеличивать точность вычислений вблизи точки экстремума. Последнее больше относится к тем случаям, когда расчеты проводятся вручную или когда $f(x)$ вычисляется в активном эксперименте. При расчетах на ЭВМ, как правило, точность вычислений $f(x)$ достаточно высока, чтобы обеспечить разумную точность вычислений x^* .

Метод перебора в указанном виде очень прост для программирования, однако обладает рядом недостатков. Главный из них заключается в следующем. Предположим, что точность вычисления достаточно высока, а отрезок Δ_0 велик. При нашем методе для нахождения минимума может потребоваться порядка $|\Delta_0|/\varepsilon$ операций вычисления $f_k = f(x^{(k)})$. Если при этом сами значения вычисляются долго (например, из эксперимента), то «лишние» операции отнимают массу времени. Поэтому желательно модифицировать перебор так, чтобы вычислять f как можно в меньшем числе точек.

Модифицированный перебор. Положим, $h_1 = (b-a)/4$, т. е. разобьем отрезок $\Delta_0 = [a, b]$ на четыре равных отрезка. Вычислим $f_0 = f(a)$, $f_1 = f(a+h_1)$, $f_2 = f(a+2h_1)$, $f_3 = f(a+3h_1)$, $f_4 = f(a+4h_1) = f(b)$. Так же, как в методе перебора, устанавливаем, что минимум расположен на

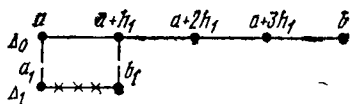


Рис. 7. Модифицированный перебор ($x^* \in [a, a+h_1]$)

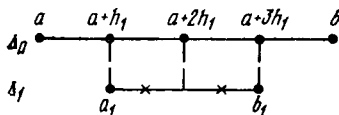


Рис. 8. Модифицированный перебор ($x^* \in [a+h_1, a+3h_1]$)

отрезке Δ_1 :

$$\Delta_1 = \begin{cases} [a; a+h_1] & \text{при } f_0 < f_1 \\ [a; a+2h_1] & \text{при } f_0 \geq f_1 < f_2 \\ [a+h_1; a+3h_1] & \text{при } f_0 \geq f_1 \geq f_2 < f_3 \\ [a+2h_1; b] & \text{при } f_0 \geq f_1 \geq f_2 \geq f_3 < f_4 \\ [a+3h_1; b] & \text{при } f_0 \geq f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq f_4 \end{cases}$$

В результате получим отрезок $\Delta_1 = [a_1, b_1]$ по указанному выше правилу. Далее повторяем описанную выше процедуру, т. е. полагаем $h_2 = (b_1 - a_1)/4$, вычисляем $f_0, \dots, f_4$ и т. д. до тех пор, пока длина Δ_k не станет меньше заданной точности ε .

Особенностью процедуры деления промежутка на четыре равных отрезка является то, что на каждом последующем отрезке приходится вновь вычислять не более трех значений. А именно, если $\Delta_1 = [a, a+h_1]$, то значения f в концах уже вычислены и остается вычислить только f_1, f_2, f_3 . Эта ситуация показана на рис. 7, где крестиками отмечены точки, в которых проводятся новые вычисления. То же самое происходит в случае, если $\Delta_1 = [a+3h_1, b]$. Отметим, что в каждом из этих случаев $|\Delta_1|$ длина Δ_1 равна $0,25 |\Delta_0|$, т. е. сокращается в 4 раза. В трех остальных случаях нужно проводить всего лишь два дополнительных вычисления значений f . На рис. 8 изображен случай $\Delta_1 = [a+h_1, a+3h_1]$. Здесь вычисленными значениями являются значения f в точках $a+h_1=a_1$, $a+2h_1=a_1+2h_2$ и $a+3h_1=b_1$, т. е. остается вычислить только два значения f_1 и f_3 (значения f в точках, помеченных крестиками). Можно показать, что из всех методов, в которых происходит деление промежутка на равные отрезки, только в описанном методе требуется наименьшее число вычислений значений f для гарантированного обеспечения заданной точности.

Пример 2. Решим задачу из примера 1 модифицированным перебором ($\varepsilon=0,1$). Начальный шаг $h_1=0,75$, вычисляем f_h :

k	0	1	2	3	4
$x^{(k)}$	1	1,75	2,5	3,25	4
f_k	0,3	-0,0346	-0,1663	-0,2037	-0,1863

Отсюда $a_1=2,5$ и $b_1=4$, следовательно, $h_2=0,375$; $x^{(0)}=2,5$; $x^{(1)}=2,875$; $x^{(2)}=3,25$; $x^{(3)}=3,625$; $x^{(4)}=4$. Новые вычисляемые значения — только $f_1=f(2,875)$ и $f_3=f(3,625)$; в результате получаем:

k	0	1	2	3	4
$x^{(k)}$	2,5	2,875	3,25	3,625	4
f_k	-0,1663	-0,1936	-0,2037	-0,2004	-0,1863

Отсюда $a_2=2,875$ и $b_2=3,625$; $h_3=0,1875$. Новые вычисления дают:

k	0	1	2	3	4
$x^{(k)}$	2,875	3,0625	3,25	3,4375	3,625
f_k	-0,1936	-0,2005	-0,2037	-0,2035	-0,2004

Отсюда $a_3=3,0625$ и $b_3=3,4375$; теперь $h_4=0,09375$, т. е. новые вычисления дадут уже требуемую точность:

k	0	1	2	3	4
$x^{(k)}$	3,0625	3,15625	3,25	3,34375	3,4375
f_k	-0,2005	-0,2025	-0,2037	-0,204	-0,2035

Итак, окончательно получаем $x^*=3,34375 \pm 0,09375$.

Для нахождения минимума методом перебора требовалось вычисление 24 значений функции f (причем только 31 вычисление гарантировало нахождение минимума с заданной точностью $\varepsilon=0,1$). При модифицированном переборе потребовалось всего 11 вычислений (причем это же число и гарантировало заданную точность).

Модифицированный перебор целесообразно применять в случаях, если требуется высокая точность. Пусть длина исходного отрезка $|\Delta_0|$, а требуемая точность $\varepsilon > 0$, тогда в методе перебора может потребоваться до $N = \lceil |\Delta_0|/\varepsilon \rceil + 1$ вычислений (здесь $[x]$ — целая часть числа x), т. е. $N \sim |\Delta_0|/\varepsilon$ вычислений. При модифицированном переборе отрезок уменьшается при каждой итерации не менее чем в 2 раза, т. е. если число итераций равно n , то $|\Delta_n| \leq |\Delta_0| \cdot 2^{-n}$. Значит, для достижения требуемой точности ε необходимо порядка $\log_2 (|\Delta_0|/\varepsilon)$ итераций:

$$|\Delta_0| \cdot 2^{-n} \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \log_2 (|\Delta_0|/\varepsilon).$$

На первой итерации производится пять вычислений, а на каждой последующей — не более трех (чаще всего

два), а всего вычислений не более чем $5 + (n-1)3 = 3n+2$. Учитывая, что $n \sim \log_2 (|\Delta_0|/\varepsilon)$, получаем $N_1 \sim 3 \log_2 (|\Delta_0|/\varepsilon)$, а это существенно отличается от $N \sim |\Delta_0|/\varepsilon$, что видно из следующих данных:

N	2	4	8	16	32	64	128	526	1024
N_1	3	6	9	12	15	18	21	27	30

Метод Фибоначчи. Этот метод похож на модифицированный перебор, но отличается от него тем, что на каждой итерации происходит разбиение отрезка на 4 части разной величины так, что за исключением первой итерации на каждой последующей производится всего одно вычисление значения функции. Из методов нулевого порядка этот метод требует наименьшего числа вычислений значений функций для гарантированного достижения требуемой точности.

Отрезок $\Delta_0 = [a, b]$ разбивается на 4 части двумя точками $y_1 < z_1$ так, что $|y_1 - a| = |z_1 - b|$, т. е. одинаково удаленными от концов. Если установлено, что минимум лежит на отрезке $\Delta_1 = [a, z_1]$, то полагая $z_2 = y_1$ и откладывая от a отрезок длиной $|z_1 - z_2| = |z_1 - y_1|$, получим разбиение отрезка Δ_1 , удовлетворяющее тем же условиям, что и предыдущее разбиение (рис. 9). Этот процесс продолжается до достижения заданной точности. При этом на первом шаге требуется вычислить значения функции в двух точках y_1, z_1 , на следующем — только в одной новой точке разбиения (на рис. 6 — это y_2) и т. д. Методов такого рода (с переменными разбиениями) много, но все они задаются начальным разбиением Δ_0 , а дальше все идет автоматически, по вполне определенным законам. Итак, для определения точек разбиения в методе Фибоначчи требуется только задать начальное разбиение.

Опишем теперь формально сам алгоритм.

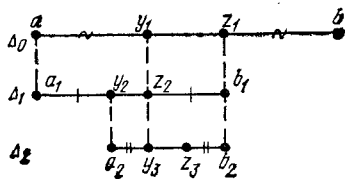


Рис. 9. Метод Фибоначчи

Подготовительная процедура определяет число требуемых шагов для получения заданной точности по правилу: число шагов равно такому n , при котором $F_{n+1} < |\Delta_0|/\varepsilon \leq F_{n+2}$, здесь $|\Delta_0|$ — длина $\Delta_0 = [a_0, b_0]$; ε — заданная точность; F_{n+1} и F_{n+2} — числа Фибоначчи;

$$F_1 = F_2 = 1; \quad F_3 = F_2 + F_1; \quad F_4 = F_3 + F_2, \quad \dots, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Приведем двенадцать первых чисел Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Первый шаг — вычисление двух начальных значений $f(y_1)$, $f(z_1)$, где

$$y_1 = a_0 + \frac{F_n}{F_{n+2}} \mid \Delta_0 \mid \text{ и } z_1 = b_0 - \frac{F_n}{F_{n+2}} \mid \Delta_0 \mid. \quad (\text{II.1})$$

Общий (k -й) шаг алгоритма [к этому моменту известны a_{k-1} , b_{k-1} , y_k , z_k , $f(y_k)$, $f(z_k)$]. Возможны два варианта:

если $f(y_k) \leq f(z_k)$, то положим $a_k = a_{k-1}$, $b_k = z_k$, $y_{k+1} = a_k + b_k - y_k$, $z_{k+1} = y_k$. Кроме того, полагаем $f(z_{k+1}) = f(y_k)$ и вычисляем одно значение $f(y_{k+1})$;

если $f(y_k) > f(z_k)$, то положим $a_k = y_k$, $b_k = b_{k-1}$, $z_{k+1} = a_k + b_k - z_k$, $y_{k+1} = z_k$. Кроме того, полагаем $f(y_{k+1}) = f(z_k)$ и вычисляем одно значение $f(z_{k+1})$.

Теперь, если $k < n$, делаем $(k+1)$ -й шаг; если $k = n$, получаем $x^* \in \Delta_n$.

Пример 3. Решим задачу примера 1 методом Фибоначчи.

Определяем число шагов. Так как $|\Delta_0| = 3$ и $\varepsilon = 0,2$, то $|\Delta_0|/\varepsilon = 15$, $F_7 = 13 < 15 < 21 = F_8$, т. е. $n = 6$.

Согласно формулам (II.1): $y_1 = 1 + \frac{F_6}{F_8} \cdot 3 \approx 2,1429$, $z_1 = 4 - \frac{F_6}{F_8} \cdot 3 \approx 2,8571$.

Вычисления дают [для сравнения приводим значения $f(1)$ и $f(4)$, хотя вычислять их в методе не требуется]:

	a_0	y_1	z_1	b_0
x	1	2,1429	2,8571	4
$f(x)$	0,3	-0,119	-0,193	-0,186

Так как $f(y_1) > f(z_1)$, то полагаем $a_1 = y_1$, $y_2 = z_1$, $b_1 = b_0$ и $z_2 = a_1 + b_1 - z_1 \approx 3,2858$.

Вычисляем $f(z_2)$ и получаем:

	a_1	y_2	z_2	b_1
x	2,1429	2,8571	3,2858	4
$f(x)$	-0,119	-0,193	-0,204	-0,186

Продолжая вычисления, получаем:

	a_2	y_3	z_3	b_3
x	2,8571	3,2858	3,5713	4
$f(x)$	-0,193	-0,204	-0,202	-0,186
	a_3	y_4	z_4	b_3
x	2,8571	3,1426	3,2858	3,5713
$f(x)$	-0,193	-0,202	-0,204	-0,202
	a_4	y_5	z_5	b_4
x	3,1426	3,2858	3,4281	3,5713
$f(x)$	-0,202	-0,204	-0,204	-0,202
	a_5	y_6	z_5	b_5
x	3,1426	3,2849	3,2858	3,4281
$f(x)$	-0,202	-0,204	-0,204	-0,204

Ограничивая точность вычисления значений функции тремя знаками после запятой, можно заключить, что $x^* \in [y_5, b_4]$, обеспечив требуемую точность (даже вдвое выше). Дальнейшие вычисления требуют более высокой точности вычислений значений функции. При этом для достижения требуемой точности потребовалось вычислить семь значений функции. Сравним число вычислений значений функции в методе Фибоначчи N_2 и методом перебора N :

N	2	4	8	16	32	64	128	526	1024
N_2	4	6	7	9	10	11	13	16	18

Несложно показать, что $N_2 \sim [\ln(|\Delta_0|/\varepsilon)]/\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Метод золотого сечения. Этот метод практически совпадает с методом Фибоначчи и применяется в тех случаях, когда отношение $|\Delta_0|/\varepsilon$ велико (например, более 1000). В методе золотого сечения на нулевом шаге берут $y_1 = a_0 + \lambda(b_0 - a_0)$ и $z_1 = b_0 - \lambda(b_0 - a_0)$, где $\lambda = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0,3819$. Это значение λ при больших n прак-

тически совпадает с $F_n/F_{n+2} \approx \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

В остальном метод повторяет метод Фибоначчи, однако критерием остановки служат либо достижение требуемой точности, либо невозможность продолжать вычисления из-за ограниченной точности вычислений значения функции. Рассмотрим два метода первого порядка.

Метод деления пополам. Требуется найти нуль производной $f'(x)$ выпуклой функции. Пусть $\Delta_0 = [a_0, b_0]$, вычисляем $f'(a_0)$ и $f'(b_0)$. Если $f'(a_0) \geq 0$, то $x^* = a_0 -$

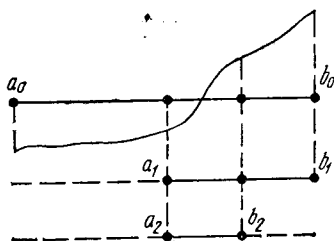


Рис. 10. Метод деления пополам

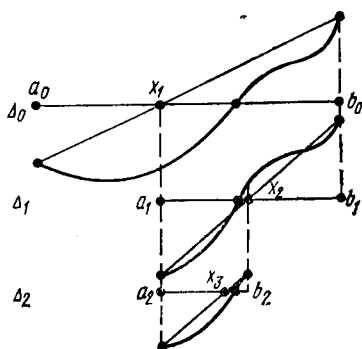


Рис. 11. Метод хорд

минимум. Если $f'(b_0) \leq 0$, то $x^* = b_0$; если же $f'(a_0) < 0$, а $f'(b_0) > 0$, берем середину $x_1 = (a_0 + b_0)/2$ отрезка Δ_0 . Вычисляем $f'(x_1)$:

если $f'(x_1) < 0$, то полагаем $a_1 = x_1$, $b_1 = b_0$;

если $f'(x_1) > 0$, то полагаем $a_1 = a_0$, $b_1 = x_1$;

если $f'(x_1) = 0$, то полагаем $x^* = x_1$.

В результате получаем (рис. 10) новый отрезок $\Delta_1 = [a_1, b_1]$, причем $x^* \in \Delta_1$. Затем повторяем все сначала. Оценка точности задается длиной Δ_n . На каждом шагу точность удваивается, при этом, за исключением первого шага, требуется вычислить одно значение производной.

Метод хорд (Ньютона). Начало такое же, как и в методе деления пополам. Однако деление теперь происходит по другому принципу: в качестве точки x_1 берется точка пересечения хорды, соединяющей концы графика $f'(x)$ (рис. 11). Легко видеть, что на k -м шагу

$$x_{k+1} = \frac{a_k f'(b_k) - b_k f'(a_k)}{f'(b_k) - f'(a_k)}.$$

Далее во всем повторяет-

ся предыдущий метод, причем последовательность x_k сходится к x^* . Точность обычно оценивается разностью $|x_k - x_{k+1}|$ и по значению производной (как правило, l берут равным двум или трем).

Пример 4. Решим задачу, рассмотренную выше, методом хорд. Вычислим $f'(x) = 0,3 - 1/x$. Ясно, что производная равна нулю при $x^* = 10/3 = 3,33...$ Итак, $f'(1) = -0,7$ и $f'(4) = 0,05$, поэтому $a_0 = 1$, $b_0 = 4$; вычисления дают $x_1 = 3,8$ и $f'(3,8) \approx 0,037$. Теперь $a_1 = 1$; $b_1 = 3,8$; $f'(a_1) = -0,7$; $f'(b_1) = 0,037$, поэтому $x_2 = 3,66$ и $f'(3,66) \approx 0,027$. Аналогично $a_2 = 1$; $b_2 = 3,66$; $f'(a_2) = -0,7$; $f'(b_2) = 0,027$, поэтому $x_3 = 3,56$ и т. д.

Метод парабол. Это — метод 2-го порядка. В этом методе $x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$. Геометрически это означает следующее: в точке x_k разлагаем $f(x)$ в ряд Тейлора до членов второго порядка:

$$f(x) \sim f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) + \frac{f''(x_k)}{2}(x - x_k)^2. \quad (\text{II.2})$$

В качестве x_{k+1} берется значение x , минимизирующее квадратный трехчлен в правой части формулы (II.2).

Пример 5. Решим ту же задачу, что и выше, методом парабол. Так как $f'(x) = 0,3 - x^{-1}$, то $f''(x) = x^{-2}$ и $x_{k+1} = x_k - (0,3 - x_k^{-1})x_k^2 = 2x_k - 0,3x_k^2$. Начнем с $x_1 = 1$; вычисления дают:

k	1	2	3	4	5	6
x_k	1	1,7	2,533	3,14	3,32	3,333

На первый взгляд может показаться, что методы высоких порядков показывают более быструю сходимость, чем методы нулевого порядка. Однако это не совсем так. Во-первых, сфера их применения ограничивается условиями теорем сходимости и условиями дифференцируемости функций. Во-вторых, они удобны, как правило, лишь в тех случаях, когда производные находятся в явном виде — в виде функций, не требующих сложных вычислений их значений. В противном случае производные заменяют на их приближенные значения, вычисляемые с помощью конечных разностей:

$$f'(x_k) \sim h^{-1} [f(x_k + h) - f(x_k)]; \quad (\text{II.3})$$

$$f''(x_k) \sim h^{-2} [f(x_k + 2h) - 2f(x_k + h) + f(x_k)], \quad (\text{II.4})$$

где h должно быть достаточно мало.

Таким образом, для вычисления f' требуется два, а для вычисления f'' — три вычисления значений функции. При этом погрешности вычисления производных могут вызвать существенное замедление сходимости методов. В активном эксперименте, когда для вычисления значений функции проводится эксперимент, длительность которого может измеряться часами и сутками, требуется наименьшее число измерений значений функции. Поэтому при планировании такого эксперимента необходимо выбирать точки измерений из соображений миними-

зации их числа. Для точного измерения (или высокоточного) одним из таких методов является метод Фибоначчи. Если же требуется очень грубая оценка (например, $|\Delta_0|/\varepsilon < 7$), метод перебора дает лучшие результаты.

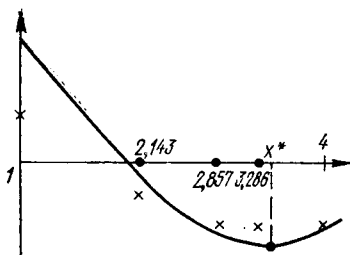


Рис. 12. Аппроксимация методом парабол

Активный эксперимент требует специального подхода к методике расчета точек измерения. Представим себе, что прибор, показания которого снимают, дает существенные погрешности в вычислении значений функции. Это обстоятельство нельзя не учитывать, ибо разрешающая способность любого прибора ограничена. Применение любого из описанных выше методов, как уже неоднократно отмечалось, требует достаточно высокой точности измерений и особенно вблизи точки экстремума. Поэтому ошибки вычисления могут существенно повлиять на результат. Пусть в методе Фибоначчи вычисления значений функции производятся с точностью до 0,05 (т.е. такова разрешающая способность прибора), тогда в примере 3 мы бы получили:

	a_0	y_1	z_1	b_0
x	1	2,1429	2,8571	4
$f(x)$	0,3	-0,1	-0,2	-0,2
	a_1	y_2	z_2	b_1
x	2,1429	2,8571	3,2858	4
$f(x)$	-0,1	-0,2	-0,2	-0,2

Таким образом, можно только сказать, что $x^* \in [2, 8571; 4]$. В то же время имеется 4 значения функции f и, значит, вполне можно использовать аппроксимирующую функцию, например, в виде квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$. В качестве x^* можно взять точку $x^* = -b/(2a)$ (рис. 12).

II.3. МЕТОДЫ МНОГОМЕРНОЙ БЕЗУСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Большинство алгоритмов многомерной минимизации строится по следующему принципу. Пусть дана точка $x^{(k)}$, тогда на $(k+1)$ -м шаге последовательно решаются две задачи:

отыскание направления $\xi^{(k)}$, по которому двигаться дальше;

отыскание минимума функции f вдоль этого направления, т. е. задача одномерной минимизации $\min_h f(x^{(k)} + h\xi^{(k)})$.

Если $\xi^{(k)}$ и $h^{(k)}$ — решения этих задач, то

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \xi^{(k)} h^{(k)}.$$

Алгоритм останавливается, когда значения $f(x^{(k)})$, $f(x^{(k+1)})$, ... либо последовательно получаемые точки становятся близки, т. е. $\|x^{(k)} - x^{(k+l)}\| < \varepsilon$, где l — заданное число и ε — заданная точность. Рассмотрим четыре таких метода.

Циклический покоординатный спуск. Этот алгоритм весьма прост при программной реализации и может использоваться как метод нулевого порядка (если в процедуре одномерной минимизации используется метод нулевого порядка). Пусть требуется найти минимум выпуклой функции $f(x)^2$ при $x \in \mathbb{R}^n$. В качестве направлений спуска (т. е. направлений, по которым последовательно уменьшают значения функции) выбираются поочередно базисные векторы $e_1, \dots, e_n, e_1, \dots, e_n, \dots$. Иными словами, последовательно решаются минимизационные задачи (k -й шаг):

$$\min_{x_1} f(x_1, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}), \text{ ее решение } x_1^{(k)};$$

$$\min_{x_2} f(x_1^{(k)}, x_2, x_3^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}), \text{ ее решение } x_2^{(k)};$$

$$\dots \dots \dots \min_{x_n} f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \dots, x_n), \text{ ее решение } x_n^{(k)}.$$

Получив точку $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$, решаем вопрос об остановке. Если критерий остановки невыполнен, то делаем следующий $(k+1)$ -й шаг и т. д.

Пример 5. $f(x) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2$, т. е. решается задача трехмерной минимизации. В качестве исходной точки возьмем $x^{(0)} = (0; 0; 0)$.

1-й шаг. Фиксируем $x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$, тогда $f(x_1, 0, 0) = 5x_1^2$, значит $x_1^{(1)} = 0$. Берем следующее направление $\xi = e_2$, т. е. фиксиру-

ем $x_1^{(1)} = 0$ и $x_3^{(0)} = 0$, тогда $f(0, x_2, 0) = 5x_2^2 - 2x_2$, значит *, $x_2^{(1)} = 0,2$.

Следующее направление $\xi = e_3$, т. е. фиксируем $x_1^{(1)} = 0$ и $x_2^{(1)} = 0,2$, тогда $f(0; 0,2; x_3) = x_3^2 - 0,2$, значит, $x_3^{(1)} = 0$.

В результате получим точку $x^{(1)} = (0; 0,2; 0)$.

2-й шаг. Фиксируем $x_2^{(1)} = 0,2$, $x_3^{(1)} = 0$, тогда $f(x_1; 0,2; 0) = 5x_1^2 - 0,8x_1 + c$, значит, $x_1^{(2)} = 0,08$. Аналогично $f(0,08; x_2; 0) = 5x_2^2 - 2,32x_2 + c$, значит, $x_2^{(2)} = 0,232$; $f(0,08; 0,232; x_3) = x_3^2 - 0,32x_3 + c$, значит, $x_3^{(2)} = 0,16$; $x^{(2)} = (0,08; 0,232; 0,16)$.

3-шаг.

$f(x_1; 0,232; 0,16) = 5x_1^2 - 0,928x_1 + c$, значит, $x_1^{(3)} \approx 0,1$;

$f(0,1; x_2; 0,16) \approx 5x_2^2 - 3x_2 + c$, значит, $x_2^{(3)} \approx 0,3$;

$f(0,1; 0,3; x_3) = x_3^2 - 0,4x_3 + c$, значит, $x_3^{(3)} = 0,2$;

$x^{(3)} = (0,1; 0,3; 0,2)$.

4-шаг.

$f(x_1; 0,3; 0,2) = 5x_1^2 - 2x_1 + c$, значит, $x_1^{(4)} = 0,2$;

$f(0,2; x_2; 0,2) = 5x_2^2 - 3,6x_2 + c$, значит, $x_2^{(4)} = 0,36$;

$f(0,2; 0,36; x_3) = x_3^2 - 0,8x_3 + c$, значит, $x_3^{(4)} = 0,4$;

$x^{(4)} = (0,2; 0,36; 0,4)$.

Дальнейшие вычисления облегчаются тем, что наша задача — квадратичная. Таким образом, если ее рассматривать как минимизацию квадратного трехчлена по x_1 , то

$$f(x_1, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}) = 5x_1^2 - 4(x_2^{(k-1)} + x_3^{(k-1)})x_1 + c,$$

т. е. по уже упомянутой формуле для точки минимума получим

$$x_1^{(k)} = 0,4(x_2^{(k-1)} + x_3^{(k-1)}).$$

Рассматривая f как функцию x_2 , аналогично получим

$$f(x_1^{(k)}, x_2, x_3^{(k-1)}) = 5x_2^2 - 2(2x_1^{(k)} + 1)x_2 + c,$$

т. е. $x_2^{(k)} = 0,2(2x_1^{(k)} + 1) = 0,4x_1^{(k)} + 0,2$.

Наконец,

$$f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3) = x_3^2 - 4x_1^{(k)}x_3 + c, \text{ т. е. } x_3^{(k)} = 2x_1^{(k)}.$$

* Здесь пользуемся тем, что минимум квадратного трехчлена $y = at^2 + bt + c$ достигается в точке $t^* = -b/(2a)$; далее свободный член c не вычисляется, так как на значение t^* он не влияет.

Пользуясь приведенными формулами, легко провести дальнейшие расчеты:

Шаг k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
4	0,2	0,36	0,4
5	0,3	0,32	0,6
6	0,37	0,35	0,74
7	0,44	0,38	0,88
8	0,5	0,4	1
9	0,56	0,42	1,12
10	0,62	0,45	1,24
11	0,67	0,47	1,34
12	0,72	0,49	1,44
13	0,77	0,51	1,54
14	0,82	0,53	1,64
.....			

Сравним расчеты с другой начальной точкой, например, с $x^{(0)} = (10; 10; 10)$:

Шаг k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	10	10	10
1	8	3,4	16
2	7,8	3,3	15,6
3	7,56	3,2	15,1
4	7,3	3,1	14,6
.....			

Из приведенных данных видно, что изменение переменных происходит довольно медленно, но при этом довольно быстро «складывается» некоторая пропорция между значениями координат. Точное значение x^* в этой задаче равно (2; 1; 4). Складывающаяся пропорция позволяет надеяться на то, что существует «удачное» направление, движение по которому способно существенно сократить объем вычислений. Таким направлением является направление линейной экстраполяции $\xi = x^{(k+1)} - x^{(k)} \approx x^{(k)} - x^{(k-1)}$. Сделаем сдвиг вдоль этого направления, подойдем ближе к x^* . Другим направлением такого рода является антиградиентное.

Метод наискорейшего спуска. Градиентом $\nabla f(x^{(k)})$ дифференцируемой функции f в точке $x^{(k)}$ является вектор $\nabla f(x^{(k)}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$, где все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ берутся в точке $x^{(k)}$. Градиент указывает направление наискорейшего роста функции f в точке $x^{(k)}$, а обратное направление (антиградиентное), следовательно, указывает направление наискорейшего убывания функции f в точке $x^{(k)}$. Таким образом, на k -м шаге

выбирается направление $\xi^{(k)} = -\nabla f(x^{(k)})$, а шаг $h^{(k)}$ находится одной из процедур одномерной минимизации, поэтому

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \nabla f(x^{(k)})h^{(k)},$$

где $h^{(k)} = \arg \min_{h>0} f(x^{(k)} - \nabla f(x^{(k)})h)$.

Пример 6. Для функции из примера 5 сделаем несколько шагов методом наискорейшего спуска. Пусть $x^{(0)} = (0; 0; 0)$ — та же, что и в примере 5. Вычислим антиградиент $f: -\nabla f(x) = (-10x_1 + 4x_2 + 4x_3; 4x_1 - 10x_2 + 2; 4x_1 - 2x_3)$.

1-й шаг. $\xi^{(0)} = -\nabla f(x^{(0)}) = (0; 2; 0)$, следовательно, $f(x^{(0)} + h\xi^{(0)}) = f(0 + 0h; 0 + 2h; 0 + 0h) = f(0; 2h; 0) = 20h^2 - 4h$, откуда $h^{(0)} = 4/40 = 0,1$ и $x^{(1)} = x^{(0)} + 0,1(0; 2; 0) = (0; 0,2; 0)$.

2-й шаг. $\xi^{(1)} = -\nabla f(x^{(1)}) = (0,8; 0; 0)$ и, значит, $f(x^{(1)} + h\xi^{(1)}) = f(0 + 0,8h; 0,2 + 0h; 0 + 0h) = f(0,8h; 0,2; 0) = 3,2h^2 - 0,64h + c$, откуда $h^{(1)} = 0,1$ и $x^{(2)} = x^{(1)} + 0,1(0,8; 0; 0) = (0,08; 0,2; 0)$.

3-й шаг. $\xi^{(2)} = (0; 0,32; 0,32)$; $f(x^{(2)} + h\xi^{(2)}) = f(0,08 + 0h; 0,2 + 0,32h; 0 + 0,32h) = 0,6144h^2 - 0,2048h + c$, откуда $h^{(2)} = 0,16$ и $x^{(3)} = (0,08; 0,2; 0) + 0,16(0; 0,32; 0,32) \approx (0,08; 0,25; 0,05)$.

4-й шаг. $\xi^{(3)} = (0,4; -0,18; 0,22)$; $f(x^{(3)} + h\xi^{(3)}) = 0,6224h^2 - 0,24h + c$, откуда $h^{(3)} \approx 0,19$ и $x^{(4)} = (0,16; 0,22; 0,1)$.

Пусть теперь дано другое начальное условие $x^{(0)} = (10; 10; 10)$, тогда $\xi^{(0)} = (-20; -58; 20)$; $h^{(0)} \approx 1,3$ и $x^{(1)} \approx (7; -65; 13)$.

Ниже приведены результаты девяти шагов:

k	$\xi^{(k)}$	$h^{(k)}$	$x^{(k)}$
0	$(-20; -58; 20)$	1,3	$(10; 10; 10)$
1	$(-278; 680; 2)$	0,075	$(7; -65; 13)$
2	$(157; 60; -88)$	0,1	$(-15,5; 12,5; 13)$
3	$(-15; 69; 6)$	0,086	$(0,5; -6,5; 4)$
4	$(19,6; 4,8; -10,2)$	0,1	$(-0,8; 0,6; 3,5)$
5	$(-2,4; 7,8; -0,2)$	0,085	$(1,2; -0,1; 2,5)$
6	$(2,24; 0,4; -1)$	0,3	$(1; 0,56; 2,5)$
7	$(-6,15; 1,88; 2,28)$	0,054	$(1,67; 0,68; 2,2)$
8	$(-1; -0,44; 0,72)$	0,112	$(1,34; 0,78; 2,32)$
9	$(-0,1; 0,42; 0,12)$	—	$(1,23; 0,65; 2,4)$

Когда градиент становится малым, следует увеличивать точность вычислений, так как в противном случае можно столкнуться с таким явлением, как осцилляция, когда погрешность вычисления становится относительно большой (т. е. по отношению к значениям частных производных), что вызывает сильные отклонения от нужного направления спуска.

¹ На первых шагах не требуется высокой точности вычислений, из-за погрешности в вычислениях последовательные направления $\xi^{(k)}$ и $\xi^{(k+1)}$ оказываются перпендикулярными.

Метод второго порядка. Этот метод полностью аналогичен методу парабол. Приближаем $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}^{(k)}$ квадратичной функцией:

$f(\mathbf{x}) \sim f(\mathbf{x}^{(k)}) + (\nabla f(\mathbf{x}^{(k)}), \mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}) + (1/2)(\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}), (\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}))$, где $\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)}) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}^{(k)}) \right)$ — матрица вторых производных в точке $\mathbf{x}^{(k)}$.

Точку минимума $\mathbf{x}^*$ этой функции легко найти, она удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)})(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)}) + \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}) = 0.$$

Отсюда, если $\mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)})$ — невырожденная матрица, то $\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{(k)} = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}) \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})$.

Эту точку берут в качестве следующего приближения:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}^{(k)}) \nabla f(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Этим методом (по самому его содержанию) можно найти минимум функции из примера 5 за один шаг, однако он не удобен, если производные f не заданы аналитически, а вычисляются с помощью конечных разностей. Указанные трудности преодолеваются при использовании близкого к описанному (но являющемуся методом первого порядка) следующего метода.

Метод сопряженных градиентов. На больших расстояниях от точки минимума $\mathbf{x}^*$ применение метода аналогично методу наискорейшего спуска. Если функция f дважды непрерывно дифференцируема и матрица вторых производных $\mathbf{A}(\mathbf{x}^*)$ не вырождена, то для точек $\mathbf{x}^{(i)}$ и $\mathbf{x}^{(i+1)}$, очевидно, выполняется приближенное равенство

$$\nabla f(\mathbf{x}^{(i+1)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(i)}) \approx \mathbf{A}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)}).$$

Пользуясь этим уравнением, по градиентам в точках $\mathbf{x}^{(i)}$ можно последовательно строить матрицы $\mathbf{A}_k^{-1}$, близкие к матрице $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}^*)$. Приведем одну из таких рекуррентных процедур. Обозначим $\mathbf{r}^{(i)} = \mathbf{x}^{(i+1)} - \mathbf{x}^{(i)}$ и $\mathbf{f}^{(i)} = \nabla f(\mathbf{x}^{(i+1)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(i)})$. Пусть $a_{ij}^{(k)}$ — элемент матрицы

A_k^{-1} и $A_0^{-1} = E$ — единичная матрица, тогда формулы

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{r_i^{(k-1)} r_j^{(k-1)}}{(r^{(k-1)}, f^{(k-1)})} - \frac{\sum_{m,l} a_{im}^{(k-1)} a_{jl}^{(k-1)} f_m^{(k-1)} f_l^{(k-1)}}{(f^{(k-1)}, A_{k-1}^{-1} f^{(k-1)})}$$

определяют последовательность симметричных матриц A_k^{-1} , обладающих указанным свойством. Теперь последовательность точек $x^{(i)}$ задается формулами

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} + h^{(i)} \xi^{(i)},$$

где $\xi^{(i)} = -A_i^{-1} \nabla f(x^{(i)})$ и $h^{(i)} = \arg \min_{h \geq 0} f(x^{(i)} + h \xi^{(i)})$.

II.4. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задачи линейного программирования составляют простейший класс задач условной оптимизации. В то же время этот класс достаточно универсален в том смысле, что практически все алгоритмы условной оптимизации используют в качестве процедуры решения задачи линейного программирования (см. II.5). Поэтому подробно рассмотрим один из основных методов решения задач линейного программирования — симплексный метод.

Случай двух переменных

Рассмотрим задачу линейного программирования (ЛП) в стандартной форме. Для простоты ограничимся случаем двух переменных

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 \rightarrow \min \quad (II.5)$$

при условиях:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\geq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\geq b_2; \\ \dots &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 &\geq b_n; \end{aligned} \right\} \quad (II.6)$$

$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \quad (II.7)$$

Случай двух переменных позволяет наглядно проиллюстрировать основные особенности задачи ЛП на плос-

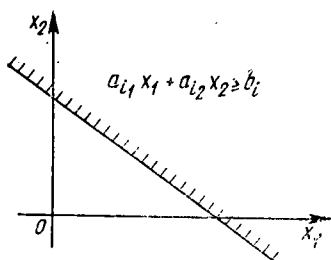


Рис. 13. Полуплоскость, задаваемая неравенством

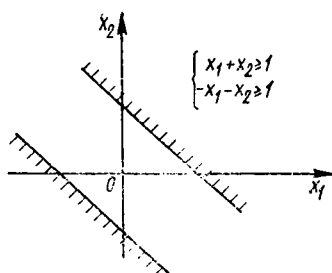


Рис. 14. Пересечение пусто

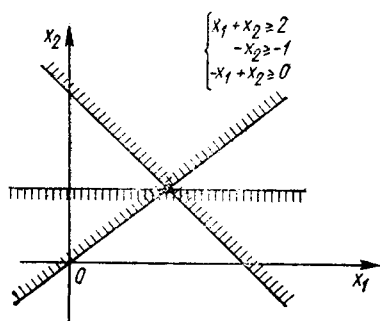


Рис. 15. Пересечение состоит из одной точки

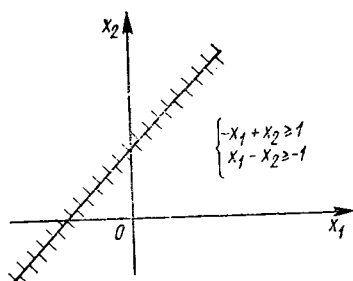


Рис. 16. Пересечение — прямая

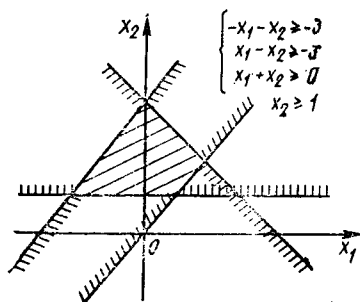


Рис. 17. Ограниченное многоугольное множество

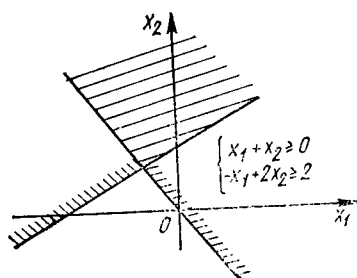


Рис. 18. Неограниченное многоугольное множество

кости Ox_1x_2 . Прежде всего отметим, что каждое из неравенств (II.6) определяет полуплоскость (за исключением тривиального случая $a_{i1}=a_{i2}=0$, который не будет рассматриваться), изображенную на рис. 13.

Система неравенств (II.6) определяет пересечение (т. е. общую часть) n полуплоскостей. Пересечение может быть пустым (рис. 14), состоять из одной точки (рис. 15), в виде прямой (рис. 16) или выпуклого многоугольника, ограниченным (рис. 17) или неограниченным (рис. 18).

Неравенства (II.7) определяют первую четверть (первый ортант). Таким образом, система неравенств (II.6) — (II.7) описывает те части перечисленных фигур, которые лежат в первой четверти. Случай, когда система неравенств противоречива, не представляет особого интереса, так как задача ЛП при этом не имеет решения. Ограничимся рассмотрением случая, когда множество D допустимых решений, т. е. тех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют системе неравенств (II.6) — (II.7), образует выпуклый многоугольник (ограниченный или неограниченный). Пусть (x_1^0, x_2^0) — произвольное допустимое решение, тогда множество точек (x_1, x_2) , на которых целевая функция (II.5) принимает значения, меньшие, чем в точке (x_1^0, x_2^0) , образует открытую полуплоскость, удовлетворяющую неравенству $c_1x_1 + c_2x_2 < z^0$, где $z^0 = c_1x_1^0 + c_2x_2^0$.

Если эта полуплоскость пересекается с множеством D , т. е. в D содержатся точки, в которых значение функции $z = f(x_1, x_2)$ меньше, чем z^0 , то (x_1^0, x_2^0) не может быть оптимальным (минимизирующим) решением задачи ЛП. На рис. 19 заштрихована область D , прямая l задается уравнением $c_1x_1 + c_2x_2 = z^0$ и делит всю плоскость на две полуплоскости. Полуплоскость, в которой $f(x_1, x_2) \geq z^0$, обозначена π . Понятно, что точка $(x_1^0, x_2^0) \in D$ будет точкой минимума тогда, когда не будет ни одной точки $(x_1, x_2) \in D$, для которой

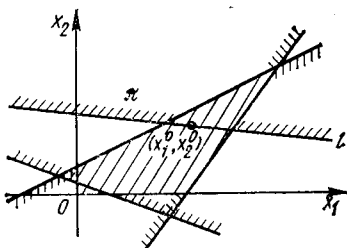


Рис. 19. Случай внутренней точки

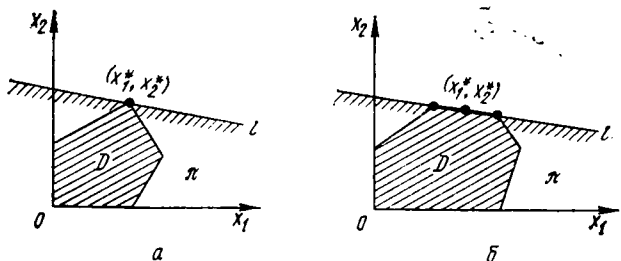


Рис. 20. Экстремум на границе:
а — в вершине; б — на ребре

$f(x_1, x_2) < f(x_1^*, x_2^*)$. Значит, любая точка $(x_1, x_2) \in D$ будет удовлетворять неравенству $f(x_1, x_2) \geq f(x_1^*, x_2^*)$, т. е. лежать в полуплоскости $\pi = \{(x_1, x_2) \mid c_1 x_1 + c_2 x_2 \geq c_1 x_1^* + c_2 x_2^*\}$ (рис. 20). Из рис. 20, б видно, что оптимальных решений может быть бесконечно много.

Однако может быть и так, что множество D будет непусто, а оптимальных решений нет. Например, для задачи ЛП

$$z = -x_1 - x_2 \rightarrow \min$$

при условиях (рис. 21)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 1; \\ x_1 &\geq 0; \quad x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

можно построить последовательность допустимых решений, таких, что целевая функция $z = f(x_1, x_2)$ на этой последовательности будет неограниченно уменьшаться. Такой последовательностью может быть, например, последовательность $\{(n, n) \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$, при этом $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-2n) = -\infty$. В этом случае говорят, что задача ЛП неограничена.

Рис. 21. Неограниченная задача линейного программирования

решение, т. е. существует какое-нибудь оптимальное решение, то существует оптимальное решение, являющееся вершиной многогранника (при $n \geq 3$ — многогранного множества) допустимых решений D . Поясним этот факт для случая двух переменных. Пусть (x_1^*, x_2^*) — какое-нибудь оптимальное решение, тогда, как уже говорилось, все множество D лежит по одну сторону прямой l , задаваемой уравнением $c_1x_1 + c_2x_2 = z^*$, где $z^* = c_1x_1^* + c_2x_2^*$. Это означает, что точка (x_1^*, x_2^*) лежит на границе множества D . Если эта точка — вершина, то все доказано.

Пусть (x_1^*, x_2^*) не является вершиной, т. е. она лежит на стороне k многоугольника (см. рис. 20, б). Если эта сторона не параллельна прямой l , то она пересекает ее в точке (x_1^*, x_2^*) , и, следовательно, по обе стороны прямой l лежат точки множества D (принадлежащие стороне k), а это противоречит тому, что точка (x_1^*, x_2^*) — оптимальное решение. Таким образом, сторона k параллельна прямой l . Отсюда любая точка стороны k — оптимальное решение. Поскольку первая четверть (в которой содержится множество D) не может содержать целиком никакой прямой, то сторона k имеет хотя бы один конец (точнее, сторона — либо отрезок, либо луч), т. е. вершину многоугольника D . Итак, получена вершина, являющаяся оптимальным решением.

Это свойство задач ЛП позволяет свести задачу отыскания минимума на бесконечном множестве D к выбору той из вершин многоугольника, в которой значение целевой функции наименьшее, т. е. свести задачу минимизации к конечному перебору. В общем случае (при $n \geq 3$) вершин многогранного множества может оказаться очень много, да и находить их не так просто, как в двумерном случае. Это означает, что перебор вершин следует упорядочить в целях сокращения числа перебираемых вершин. Одним из методов такого упорядоченного перебора и является симплексный метод.

Алгоритм симплексного метода

Рассмотрим задачу ЛП с двумя переменными

$$f = -4x_1 - 3x_2 \rightarrow \min \quad (\text{II.8})$$

при условиях:

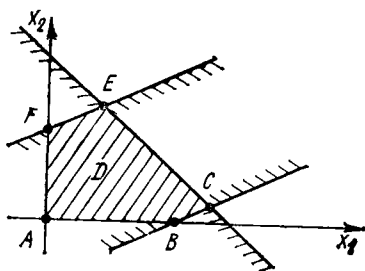


Рис. 22. Область D

$$-x_1 - x_2 \geq -6; \quad (\text{II.9})$$

$$x_1 - x_2 \geq -4; \quad (\text{II.10})$$

$$-x_1 + x_2 \geq -4; \quad (\text{II.11})$$

$$-x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0. \quad (\text{II.12})$$

Изобразив на плоскости допустимое множество D (рис. 22), обнаруживаем, что оно является пятиугольником $ABCEF$ с вершинами: $A(0; 0)$; $F(0; 4)$, $E(1; 5)$, $C(5; 1)$ и $B(4; 0)$.

Вычислив значения целевой функции $f(x_1, x_2)$, в этих вершинах, получим, что наименьшее значение функция $f(x_1, x_2)$ достигает в точке C : $f(5; 1) = -4 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = -23$.

Теперь рассмотрим эту же задачу иначе. Перепишем неравенство (II.9) в следующем виде:

$$6 - x_1 - x_2 \geq 0 \quad (\text{II.13})$$

и обозначим $x_3 = 6 - x_1 - x_2$, тогда неравенство (II.13) будет означать $x_3 \geq 0$. Поступив аналогичным образом с неравенствами (II.10) и (II.11), сопоставим исходной задаче (II.8) — (II.12) новую задачу ЛП:

$$f = -4x_1 - 3x_2 \rightarrow \min \quad (\text{II.14})$$

при условиях:

$$x_3 = 6 - x_1 - x_2; \quad (\text{II.15})$$

$$x_4 = 4 + x_1 - x_2; \quad (\text{II.16})$$

$$x_5 = 4 - x_1 + x_2; \quad (\text{II.17})$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \quad (\text{II.18})$$

Эти задачи эквивалентны в том смысле, что, подставив оптимальное решение $(x_1^*, x_2^*) = (5; 1)$ в задачу (II.14) — (II.18), получим ее оптимальное решение $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (5; 1; 0; 8; 0)$ и $f^* = -23$, и наоборот, взяв первые две координаты оптимального решения второй задачи, получим оптимальное решение первой. Формально же вторая задача содержит пять переменных и, значит, геометрически интерпретируется в пятимерном пространстве.

Разберемся, как выглядит множество, определяемое системой ограничений (II.15)–(II.18). Допишем к уравнениям (II.15)–(II.17) еще два тривиальных уравнения $x_1 = x_1$ и $x_2 = x_2$ и получим систему:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0 + 1x_1 + 0x_2; \\ x_2 &= 0 + 0x_1 + 1x_2; \\ x_3 &= 6 - 1x_1 - 1x_2; \\ x_4 &= 4 + 1x_1 - 1x_2; \\ x_5 &= 4 - 1x_1 + 1x_2. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.19})$$

Систему (II.19) удобно записать в векторном виде:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_2, \quad (\text{II.19a})$$

или

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{a}^1 x_1 + \mathbf{a}^2 x_2. \quad (\text{II.19б})$$

$$\text{где } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{a}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Это не что иное, как запись общего решения системы (II.15)–(II.17) через фундаментальный набор $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2$ решений. Поскольку векторы $\mathbf{a}^1$ и $\mathbf{a}^2$ линейно независимы, то их линейные комбинации с произвольными коэффициентами x_1 и x_2 «пробегают» двумерное подпространство $\mathbf{R}^2$ в пятимерном пространстве. Если это подпространство сдвинуть на вектор $\mathbf{b}$, получим двумерную плоскость π решений системы (II.15)–(II.17) (рис. 23).

Итак, все решения системы (II.15)–(II.17) образуют плоскость π и, значит, D является подмножеством π . Теперь попробуем учесть ограничения (II.18). Для начала заметим, что множество $\{\mathbf{a}^1 t_1 + \mathbf{a}^2 t_2 \mid t_1, t_2 \geq 0\}$ является конусом $K(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2)$, натянутым на векторы $\mathbf{a}^1$ и $\mathbf{a}^2$ (рис. 24), причем образующие этого конуса сонаправлены с $\mathbf{a}^1$ и $\mathbf{a}^2$ соответственно. Вершина конуса определяется условием $t_1 = t_2 = 0$, ребро конуса, сонаправленное с $\mathbf{a}^2$, задается условием $t_1 = 0$, сонаправленное с $\mathbf{a}^1$ ребро — условием $t_2 = 0$, наконец, внутренность

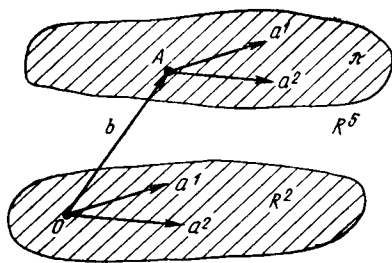


Рис. 23. Многообразие решений неоднородной системы

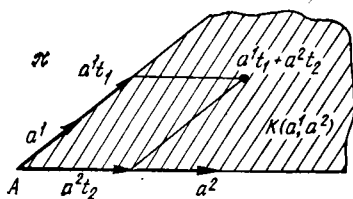


Рис. 24. Конус $K(a^1, a^2)$

конуса задается условием $t_1, t_2 > 0$. Таким образом, с учетом условий (II.18) имеем $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, т. е. множество D лежит в конусе $K(a^1, a^2)$ с вершиной A в плоскости π .

Отметим, что координаты точки A совпадают с координатами вектора $\mathbf{b}$ и что $A \in D$, поскольку для A все x_i неотрицательны ($x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 6$, $x_4 = 4$, $x_5 = 4$). Так как по условию (II.18) неотрицательными должны быть все координаты вектора $\mathbf{x}$, то небольшое увеличение x_1 или x_2 или обеих переменных сразу не выводит из области D . Однако при больших значениях x_1 или x_2 может стать отрицательной, например, координата x_3 [см. уравнение (II.19)]. Это указывает на то, что наше множество D не совпадает с конусом $K(a^1, a^2)$, а является его подмножеством — точнее, выпуклым многоугольником (так как лежит в плоскости), одной из вершин которого является A , и стороны, выходящие из этой вершины, лежат на образующих конуса.

Найти соседние с точкой A вершины проще всего, двигаясь по сторонам или по образующим, т. е. увеличивая одну из переменных x_1 или x_2 и оставляя другую из них равной нулю. Пусть $x_2 = 0$. Увеличивая x_1 , будем двигаться из A вдоль a^1 . При этом будут уменьшаться x_3 и x_5 , для $x_1 = 4$ переменная $x_5 = 0$ ($x_3 = 2 > 0$) [см. уравнение (II.19)]. Если $x_1 > 4$, то $x_5 < 0$ и, значит, мы вышли из области D . При $x_1 = 4$ получаем $x_3 = 2$, $x_4 = 8$, $x_5 = 0$ (напомним, что $x_2 = 0$), т. е. координаты новой вершины $B(4; 0; 2; 8; 0)$. Вектор $AB = 4a^1$ является стороной многоугольника D (рис. 25). Как и ранее в вершине A , в вершине B обращаются в нуль ровно две пере-

менные x_1 и x_5 . Это свидетельствует о том, что для нахождения сторон, выходящих из этой вершины, следует представить векторы из D в виде, аналогичном (II.19), но с другими свободными переменными в правой части — с x_2 и x_5 . Другими словами, в системе (II.15) — (II.18) надо выразить x_1, x_3, x_4 через x_2 и x_5 .

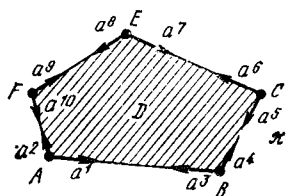


Рис. 25. Граф многоугольника

Это делается так: из выражения (II.17) имеем $x_1 = 4 - x_5 + x_2$ и, подставляя это выражение для x_1 в (II.15) — (II.16), получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 4 - x_5 + x_2; \\ x_3 &= 2 + x_5 - 2x_2; \\ x_4 &= 8 - x_5. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.20})$$

Это означает, что множество D является подмножеством конуса

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2, \quad x_2, x_5 \geq 0$$

(т. е. $x = b^1 + a^3 x_5 + a^4 x_2$) с вершиной B и образующими a^3 и a^4 .

Одна из образующих $a^3 = -a^1$, так как обе лежат на стороне AB , но направлены в противоположные стороны (см. рис. 25). Рассуждая аналогично, вдоль вектора a^4 из вершины B можем сдвинуться до новой вершины C , если, положив $x_5 = 0$, увеличим x_2 до 1. При этом вершина C будет иметь координаты $(5; 1; 0; 8; 0)$.

Выразив из системы (II.20) переменные x_1, x_2, x_4 через x_3 и x_5 , получим:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 5 - \frac{1}{2} x_5 - \frac{1}{2} x_3; \\ x_2 &= 1 + \frac{1}{2} x_5 - \frac{1}{2} x_3; \\ x_4 &= 8 - x_5, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.21})$$

откуда следует, что D лежит в конусе

$$x = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3, \quad x_5, x_3 \geq 0$$

(т. е. $x = b^2 + a^6 x_5 + a^5 x_3$) с вершиной C и образующими a^5 и a^6 .

Отметим, что $a^5 = -\frac{1}{2} a^4$ (так как они лежат на стороне BC и направлены в противоположные стороны). Для получения следующей вершины E необходимо сдвинуться вдоль a^6 . Из вершины E попадаем в вершину F , из F — в A (эти переходы рекомендуем читателю сделать самостоятельно). Итак, обойдя все вершины многоугольника $ABCEF$, придем в исходную вершину A . Таким образом, множество D в нашей задаче является плоским многоугольником и найден способ перебора вершин многогранников, задаваемых системами линейных неравенств, если известна какая-нибудь начальная вершина.

В общем случае, когда многогранное множество D не является плоским, из каждой вершины выходит более двух ребер, и перебор всех вершин становится сложной комбинаторной задачей. Поэтому естественным путем совершенствования перебора является такой, когда каждый раз приходится переходить в ту из соседних вершин, в которой целевая функция принимает меньшее значение. Проиллюстрируем это на примере задачи (II.14) — (II.18).

Пусть отправной точкой является вершина A . В ней имеем следующее представление множества допустимых решений D аппроксимирующим конусом K , т. е. таким конусом, образующими которого служат лучи, выходящие из точки A и направленные по сторонам многогранного множества D (в нашем случае по AB и AF):

$$x = b + a^1 x_1 + a^2 x_2, \quad x_1, x_2 \geq 0.$$

Здесь x_1 и x_2 — независимые переменные. В соответствии с принятой терминологией их называют свободными переменными. В отличие от них зависимые пере-

менные x_3, x_4, x_5 называют базисными. Функция $z=f(x_1, x_2)$ выражена через свободные переменные: $z=-4x_1-3x_2$. Так как коэффициенты при x_1 и x_2 отрицательные, то увеличение любой из этих переменных может только уменьшить значение функции f . Таким образом, в любой точке аппроксимирующего конуса K , отличной от вершины A , т. е. когда хотя бы одна из свободных переменных x_1 или x_2 будет положительна, функция только уменьшится. Другими словами, в вершине A функция z принимает наибольшее значение в конусе K . Отсюда вытекает, что это значение наибольшее на подмножестве D множества K . Следовательно, если искать наибольшее значение z на D , то получим ответ: наибольшее значение z достигается в точке A с координатами $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0; 0; 6; 4; 4)$ и равно $f(A)=f(0; 0)=-4 \cdot 0-3 \cdot 0=0$.

Решая задачу на минимум, можно сдвинуться в любую из вершин B и F , уменьшив при этом функцию z . Сдвинемся в вершину B , т. е. вдоль вектора a^1 . При этом $x_2=0$, а x_1 становится равным 4. Следовательно, в вершине B функция z примет значение $f(B)=f(4; 0)=-4 \cdot 4-3 \cdot 0=-16$. В вершине B аппроксимирующий конус K_2 задается условиями:

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_2, \quad x_2, x_5 \geq 0, \quad (\text{II.22})$$

где свободными переменными являются x_2 и x_5 . Чтобы повторить рассуждения, необходимо выразить функцию z через эти свободные переменные x_2, x_5 :

$$z = -4x_1 - 3x_2 = -4(4 - x_5 + x_2) - 3x_2 = -16 + 4x_5 - 7x_2.$$

Теперь видно, что движение по ребру BA (т. е. увеличение x_5) увеличивает значения функции z , а сдвиг по ребру BC (т. е. увеличение x_2) уменьшает значения z . Переход в вершину C означает увеличение x_2 до 1 (при этом $x_5=0$). Следовательно, $f(C)=-16+4 \cdot 0-7 \cdot 1=-23$. Аппроксимирующий в точке C конус задается

условиями:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_5 + \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3, \quad x_3, x_5 \geq 0, \quad (\text{II.23})$$

т. е. свободными переменными являются x_3 и x_5 . Воспользуемся уравнением для второй координаты в условии (II.23): $x_2 = 1 + 1/2x_5 - 1/2x_3$.

Подставляя это выражение вместо x_2 в формулу

$$z = -16 + 4x_5 - 7x_2 = -16 + 4x_5 - 7(1 + 1/2x_5 - 1/2x_3) = -23 + 1/2x_5 + 7/2x_3,$$

получим выражение z через свободные переменные x_5 и x_3 . На всем аппроксимирующем конусе K_3 (и тем более на его подмножестве D) значения функции z могут быть только больше, чем в вершине C . Действительно, поскольку коэффициенты при x_5 и x_3 положительные, то увеличение x_5 или x_3 может только увеличить значения z . Итак, наименьшее значение z достигается в вершине C с координатами $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (5; 1; 0; 8; 0)$ и равно $f(C) = -23$.

Из изложенного следует, что для реализации метода необходимо найти хотя бы одну вершину многогранного множества D (что можно осуществить с помощью симплексного метода). Каждой вершине A_i соответствует свой аппроксимирующий конус K_i для множества D , который можно описать соотношением:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{b}^i + \mathbf{a}^{i_1}x_{i_1} + \mathbf{a}^{i_2}x_{i_2} + \dots + \mathbf{a}^{i_m}x_{i_m}, \\ x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m} &\geq 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.24})$$

где $\mathbf{a}^{i_1}, \mathbf{a}^{i_2}, \dots, \mathbf{a}^{i_m}$ — линейно независимая система образующих конуса K_i ; $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ — свободные переменные.

При этом вершина (нольмерная грань) задается равенством $x_{i_1} = x_{i_2} = \dots = x_{i_m} = 0$; на ребрах (одномерных гранях), выходящих из этой вершины, отлична от нуля одна из свободных переменных $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$;

на двумерных гранях — две из свободных переменных; на трехмерных — три и т. д., внутри K_i отличны от нуля все переменные. Вершина A_i называется невырожденной, если все базисные переменные в ней положительны. Если вершина A_i невырожденная, то, изменяя любую из свободных переменных, по соответствующему ребру можно перейти в соседнюю вершину. В симплексном методе всегда выбирается то ребро, при движении по которому целевая функция z уменьшается (при решении задачи на минимум). Для этого целевая функция записывается в базисе $a^{i_1}, \dots, a^{i_m}$, т. е. выражается через свободные переменные с использованием уравнений (II.24). При этом отрицательность коэффициента при какой-либо из свободных переменных в целевой функции показывает, что в соответствующем направлении функция z убывает. Затем выбирается одно из направлений, в котором функция z убывает. (Случай вырождения вершины будет рассмотрен ниже.)

После выбора направления движения решается вопрос о том, каков должен быть шаг в следующую вершину. Эта процедура в алгоритме называется выбором ведущего элемента. Поясним это на примере системы (II.21):

$$\begin{aligned}x_1 &= 5 - 1/2x_5 - 1/2x_3; \\x_2 &= 1 + 1/2x_5 - 1/2x_3; \\x_4 &= 8 - x_5.\end{aligned}$$

Предположим, что меняется x_5 . Поскольку во втором уравнении этой системы коэффициент положителен, то с увеличением x_5 увеличивается x_2 , т. е. x_2 не может стать отрицательной. Отрицательными могут стать только те базисные переменные, выражения которых через свободные переменные имеют отрицательные коэффициенты при x_5 , т. е. x_1 и x_4 . Посмотрим, когда они обращаются в нуль:

$$\begin{aligned}x_1 = 0 &\Rightarrow 5 - 1/2x_5 = 0 \Rightarrow x_5 = 5 : 1/2 = 10; \\x_2 = 0 &\Rightarrow 8 - x_5 = 0 \Rightarrow x_5 = 8 : 1 = 8.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что требуется отыскать отношения свободных членов к абсолютным величинам отрицательных коэффициентов и выбрать из них наименьшее. Поскольку $x_4 = 0$ при $x_5 = 8$, следовательно, при больших

значениях x_5 переменная x_4 станет отрицательной. Таким образом, шагом будет $8a^5$.

Сделав этот шаг, переходим в следующую вершину, в которой x_5 уже будет положительной ($=8$), а $x_4=0$, т. е. x_4 следует сделать свободной переменной. Для этого перестроим нашу систему уравнений так, чтобы она определяла новый аппроксимирующий конус.

Как только в выражении целевой функции через свободные переменные все коэффициенты станут неотрицательными, получим минимум целевой функции.

При выборе шага в столбце может не оказаться ни одного отрицательного коэффициента. Это значит, что соответствующую свободную переменную можно неограниченно увеличивать, а целевую функцию — неограниченно уменьшать. В этом случае задача ЛП не имеет решения — она не ограничена.

Случай вырождения

Рассмотрим систему ограничений (II.9) — (II.12) с небольшим изменением: в последнем неравенстве вместо свободного члена (-4) поставим параметр ε . Получим систему:

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 &\geq -6; \\ x_1 - x_2 &\geq -4; \\ -x_1 + x_2 &\geq \varepsilon; \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

При $\varepsilon = -4$ эта система определяет множество, изображенное на рис. 22. Если ε устремить к нулю, то вершина B устремится к вершине A . При $\varepsilon = 0$ обе вершины сольются и появится вырожденная вершина, в которой сходятся границы не двух областей, задаваемых ограничениями, а сразу трех: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ и $-x_1 + x_2 \geq 0$. Говорят, что в этой точке активны три ограничения. В невырожденных вершинах активны только два ограничения.

В канонической форме записи вырожденность означает равенство нулю базисной переменной. Так, в нашем случае аналогично системе (II.15) — (II.18) получим:

$$\begin{aligned} x_3 &= 6 - x_1 - x_2; \\ x_4 &= 4 + x_1 - x_2; \\ x_5 &= 0 - x_1 + x_2; \\ x_1 &\geq 0, \quad \dots, \quad x_5 &\geq 0, \end{aligned}$$

т. е. в вершине A базисная переменная $x_5=0$. Если попытаться увеличить x_1 , то выяснится, что этого сделать нельзя. Точнее говоря, можно сделать нулевой шаг по ребру a^1 аппроксимирующего конуса K_1 (рис. 26).

В данном случае ничего особенного не происходит: перейдя к другим свободным переменным x_5 и x_2 , т. е. сделав нулевой шаг, построим другой аппроксимирующий конус K_2 (см. рис. 26) и выйдем из этой вершины.

Хуже обстоит дело, когда «слипаются» три и более вершин или «слипаются» две вершины неплоского множества D . В таком случае возникает опасность, что машина при работе будет постоянно выбирать направления, выводящие из области D , т. е. такие, в которых делаются только нулевые шаги. Пример «слипания» трех вершин изображен на рис. 27.

В этом примере машина может выбрать свободные переменные так, что при минимуме в вершине E попасть в нее из вершины A ($=B=C$) будет невозможно. Например, под заданный алгоритм можно так подать исходную информацию, что машина выберет направление a^1 ; сделает нулевой шаг; перестроит систему так, что следующим выбираемым направлением окажется a^2 , по которому также можно сделать только нулевой шаг; после следующей перестройки выбираемое направление окажется a^1 и все будет повторяться, т. е. произойдет закливание.

Бороться с закливанием можно двумя способами. Первый способ — выбирать в случае вырождения направление движения среди ребер случайно. Тогда вероятность не выйти из вершины будет нулевой. Второй способ заключается в том, чтобы ликвидировать само вырождение. В начале этого раздела пояснялось, как наступает вырождение — свободный член e в уравнении обращается в нуль. Если проделать обратное, т. е. в тех уравнениях для базисных переменных, где свободные члены равны нулю, поставить маленькие положительные величины (обычно это последовательные степени одного

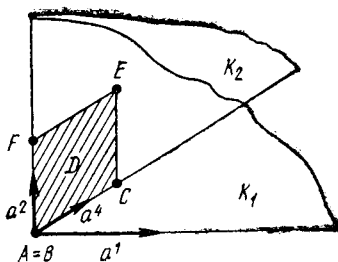


Рис. 26. Вырождение

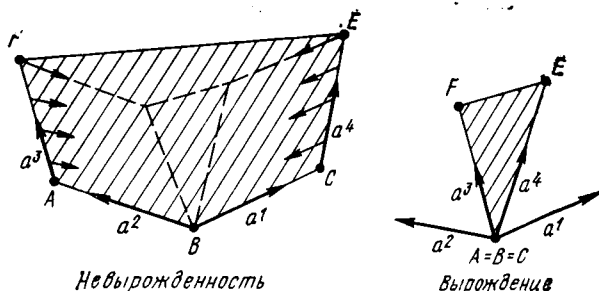


Рис. 27. Возникновение вырождения

числа, т. е. ε , ε^2 , ε^3 и т. д.), то вырождение снимается (т. е. как бы из вырожденной фигуры, изображенной на рис. 27, переходим к невырожденной фигуре, изображенной на рис. 27). После прохождения слипшихся вершин можно принять $\varepsilon=0$ и вернуться к исходной задаче.

II.5. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОЙ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Рассмотрим методы решения задач вида

$$f(x) \rightarrow \min \text{ при } x \in D \subset \mathbb{R}^n,$$

где $f(x)$ — строго выпуклая дифференцируемая функция; D — непустое замкнутое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, задаваемое системой неравенств:

$$\begin{aligned} g_1(x) &\leq 0; \\ &\dots \dots \dots \\ g_m(x) &\leq 0, \end{aligned}$$

где g_i — выпуклые непрерывно дифференцируемые функции.

Такие задачи называются задачами выпуклой оптимизации.

Прямое перенесение методов безусловной оптимизации на случай условной оптимизации не дает удовлетворительных результатов, что видно на следующем простом примере:

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min; \\ D &\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2 \leq 0; \\ x_1 - 2 \leq 0; \\ x_2 - 2 \leq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

Если в качестве начального приближения $\mathbf{x}^{(0)}$ взять точку $\mathbf{x}^{(0)} = (2; 0)$, то при применении, например, градиентных методов будем наблюдать явление заклинивания, когда направление спуска будет выводющим из области. Действительно, на-

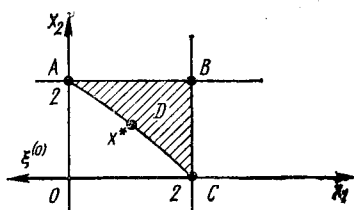


Рис. 28. Заклинивание

$$\xi^{(0)} = -\nabla f(\mathbf{x}^{(0)}) = (-4; 0)$$

задает движение вдоль оси Ox_1 (рис. 28). Но любой ненулевой шаг вдоль этого направления выводит из области D , которая является треугольником ABC . Таким образом, метод наискорейшего спуска остановился бы в этой точке $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} = \dots = \mathbf{x}^{(0)}$, хотя минимум достигается в точке $\mathbf{x}^* = (1; 1)$.

Рассмотрим три метода решения задач выпуклой оптимизации.

Метод Келли

Этот метод позволяет решать задачу

$$(\mathbf{p}, \mathbf{x}) \rightarrow \min \quad \text{при} \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{II.25})$$

где $g_j(\mathbf{x})$ — выпуклые непрерывно дифференцируемые функции.

К задаче (II.25) сводится и общая задача выпуклого программирования

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \min \quad \text{при} \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{II.26})$$

где $f(\mathbf{x}), g_1(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})$ — выпуклые и непрерывно дифференцируемые функции.

Для доказательства достаточно отметить, что задача (II.26) равносильна задаче

$$\begin{aligned} u \rightarrow \min \quad & \text{при} \quad f(\mathbf{x}) - u \leq 0; \\ g_j(\mathbf{x}) \leq 0, \quad & j = 1, \dots, m, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

где формально возросли число ограничений (до $m+1$) и размерность переменной (новая переменная $\tilde{\mathbf{x}} = (u, x_1, \dots, x_m)$).

Задача (II.27) имеет тот же вид, что и задача (II.25), если взять $p = (1, 0, 0, \dots, 0)$. Обозначим для краткости область $\{x \mid g_j(x) \leq 0, j=1, \dots, m\}$ буквой D . Суть алгоритма состоит в том, чтобы на каждом шагу заменять нелинейную задачу линейной.

Подготовительный шаг. Выберем несколько точек $x^{(-1)}, \dots, x^{(-k)} \in \mathbb{R}^n$ и проведем касательные гиперплоскости ко всем графикам $\Gamma_j = \{(y, x_1, \dots, x_n) \mid y = g_j(x)\}$ в этих точках:

$$y = g_j(x^{(i)}) + \langle \nabla g_j(x^{(i)}), x - x^{(i)} \rangle,$$

где $j = 1, \dots, m, i = -1, \dots, -k$.

Из выпуклости g_j следует $g_j(x^{(i)}) + \langle \nabla g_j(x^{(i)}), x - x^{(i)} \rangle \leq g_j(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$. В частности, если $\tilde{x} \in D$, то $g_j(\tilde{x}) \leq 0$ и, значит,

$$g_j(x^{(i)}) + \langle \nabla g_j(x^{(i)}), \tilde{x} - x^{(i)} \rangle \leq 0, \quad (\text{II.28})$$

т. е. $\tilde{x} \in D_0$ — многогранной области, задаваемой системой mk неравенств (II.28), значит, $D \subset D_0$.

Первый шаг. Решаем задачу линейного программирования

$$(p, x) \rightarrow \min \text{ при } x \in D_0,$$

получаем некоторое значение $x^{(0)} \in D_0$, предполагая, что задача имеет решение. Заметим, что $\min_{x \in D_0} (p, x) \leq$

$\leq \min_{x \in D} (p, x)$, так как $D \subset D_0$, поэтому из $x^{(0)} \in D$ следует

$\min_{x \in D_0} (p, x) = (p, x^{(0)}) = \min_{x \in D} (p, x)$, т. е. если $x^{(0)} \in D$, то

$x^{(0)}$ — решение исходной задачи (II.25). Итак, вначале необходимо выяснить, принадлежит ли $x^{(0)}$ области D , т. е. проверить выполнение неравенств $g_j(x^{(0)}) \leq 0$. Если все неравенства выполняются, то $x^{(0)}$ — решение. Пусть неравенства не выполняются для $j \in \{j_1, j_2, \dots, j_{m_0}\} = J_0$ ($m_0 \leq m$), т. е. $g_j(x^{(0)}) > 0$ при $j \in J_0$. Определим новую многогранную область D_1 , задаваемую системой неравенств (II.28) и дополнительными неравенствами

$$g_j(x^{(0)}) + \langle \nabla g_j(x^{(0)}), x - x^{(0)} \rangle \leq 0 \text{ при } j \in J_0 \quad (\text{II.29})$$

(т. е. $km + m_0$ неравенствами).

Отметим, что $D_1 \subset D_0$ [ибо система неравенств (II.28) для D_1 выполнена] и $D \subset D_1$ (по той же причине, что $D \subset D_0$). Кроме того, $\mathbf{x}^{(0)} \notin D_1$, т. е. неравенства (II.29) «отсекли» $\mathbf{x}^{(0)}$; действительно, по определению J_0 имеем

$$j \in J_0 \Rightarrow 0 < g_j(\mathbf{x}^{(0)}) + (\nabla g_j(\mathbf{x}^{(0)}), \mathbf{x}^{(0)} - \mathbf{x}^{(0)}) = g_j(\mathbf{x}^{(0)}).$$

Второй шаг. Решаем линейную задачу $(p, \mathbf{x}) \rightarrow \min$ при $\mathbf{x} \in D_1$, получаем $\mathbf{x}^{(1)}$. Если $\mathbf{x}^{(1)} \in D$, то $\mathbf{x}^{(1)}$ — решение; если $\mathbf{x}^{(1)} \notin D$, то выделяем множество индексов $J_1 = \{j | g_j(\mathbf{x}^{(1)}) > 0\}$ и строим, как выше, новую многогранную область D_2 : $D \subset D_2 \subset D_1 \subset D_0$ и $\mathbf{x}^{(1)} \notin D_2$ и т. д. В результате получаем последовательности $\{\mathbf{x}^{(i)}\}$ и $D \subset \dots \subset D_i \subset D_{i-1} \subset \dots \subset D_1 \subset D_0$, причем если $\mathbf{x}^{(i)} \in D$, то $\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{x}^{(i+1)} = \mathbf{x}^{(i+2)} = \dots$ — решение исходной задачи; если $\mathbf{x}^{(i)} \notin D$, то $\mathbf{x}^{(i)} \in D_i$ и $\mathbf{x}^{(i)} \notin D_{i+1}$.

Покажем, что если точки $\mathbf{x}^{(-1)}, \dots, \mathbf{x}^{(-k)}$ выбраны так, что область D_0 — компакт, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p, \mathbf{x}^{(n)}) = \min_{\mathbf{x} \in D} (p, \mathbf{x}).$$

Действительно, последовательность $\{\mathbf{x}^{(n)}\}$ лежит в области D_0 и, значит, имеет предельную точку $\bar{\mathbf{x}}$, которая принадлежит всем D_k (так как для любого k все элементы последовательности $\{\mathbf{x}^{(n)}\}$, начиная с номера k , лежат в D_k). Пусть $\{\mathbf{x}^{(n_i)}\}$ — подпоследовательность, сходящаяся к $\bar{\mathbf{x}}$. В силу непрерывности ∇g имеем при $i \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} g_j(\mathbf{x}^{(n_i)}) &\rightarrow g_j(\bar{\mathbf{x}}); \quad (p, \mathbf{x}^{(n_i)}) \rightarrow (p, \bar{\mathbf{x}}); \\ \nabla g_j(\mathbf{x}^{(n_i)}) &\rightarrow \nabla g_j(\bar{\mathbf{x}}). \end{aligned}$$

Используя свойства пределов, получаем

$$(p, \mathbf{x}^{(n_i)}) < \min_{\mathbf{x} \in D} (p, \mathbf{x}) \Rightarrow (p, \bar{\mathbf{x}}) < \min_{\mathbf{x} \in D} (p, \mathbf{x}). \quad (\text{II.30})$$

Ввиду того что $\bar{\mathbf{x}} \in D_k$ для любого k , имеем

$$g_j(\mathbf{x}^{(n_i)}) + (\nabla g_j(\mathbf{x}^{(n_i)}), \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(n_i)}) < 0. \quad (\text{II.31})$$

Переходя в неравенстве (II.31) к пределу и учитывая, что $\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}^{(n_i)} \rightarrow 0$, получаем для $j = 1, \dots, m$ неравенства $g_j(\bar{\mathbf{x}}) < 0$, т. е. $\bar{\mathbf{x}} \notin D$. Отсюда вытекает неравенство $(p, \bar{\mathbf{x}}) > \min_{\mathbf{x} \in D} (p, \mathbf{x})$, которое вместе с неравенством (II.30) дает $(\bar{\mathbf{x}}, p) = \min_{\mathbf{x} \in D} (p, \mathbf{x})$.

Таким образом, любая предельная точка x последовательности дает решение задачи. Учитывая, что последовательность $\{x^{(n)}\}$ обладает релаксационным свойством, по построению имеем: если $n \geq m$, то $(x^{(n)}, p) \geq (x^{(m)}, p)$, а из монотонности и ограниченности последовательности $\{(x^{(n)}, p)\}$ вытекает, что она имеет предел, т. е. ее предельная точка $(\bar{x}, p)$ единственная. Отсюда $\lim_{n \rightarrow \infty} (x^{(n)}, p) = (\bar{x}, p)$. Утверждать, что $x^{(n)} \rightarrow \bar{x}$, нельзя.

Псевдоградиентные методы

Рассматриваемые два из псевдоградиентных методов позволяют решать задачу минимизации выпуклой непрерывно дифференцируемой функции в замкнутой многогранной области D .

Метод Франк—Вулфа. Нулевой шаг состоит в том, что мы находим $x^{(0)} \in D$, что можно сделать, например, симплексным методом.

Опишем общий шаг алгоритма. Пусть уже известен вектор $x^{(k)}$. Тогда направление спуска — вектор $\xi^{(k)}$ выбирается как решение линейной задачи

$$(\nabla f(x^{(k)}), \xi) \rightarrow \min \text{ при } x^{(k)} + \xi \in D,$$

т. е. в некотором смысле близкое к направлению наискорейшего спуска, чем и объясняется название метода псевдоградиентный. Шаг h_k выбирается таким, что f минимизируется на пересечении луча $x^{(k)} + \xi^{(k)} h$ ($h \geq 0$) с областью D в точке $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \xi^{(k)} h_k$, т. е. $h_k = \min\{1, \mu_0\}$, где μ_0 — решение задачи:

$$f(y) \rightarrow \min \text{ при } y = x^{(k)} + \xi^{(k)} \mu, \mu \geq 0.$$

В результате получаем вектор

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + h_k \xi^{(k)}$$

и т. д.

Метод Розена или метод проектируемых градиентов. В этом методе направление спуска внутри области совпадает с направлением наискорейшего спуска, а на границе — с его проекцией на границу. Введем некоторые обозначения. Пусть

$$g_j(x) = (a^{(j)}, x) - b^{(j)}, \quad j = 1, \dots, m,$$

где $\mathbf{a}^{(j)}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{b}^{(j)} \in \mathbb{R}^n; H_j = \{\mathbf{x} \mid g_j(\mathbf{x}) = 0\}$ — ограничивающие гиперплоскости.

Отметим, что вектор $\mathbf{a}^{(j)}$ ортогонален H_j (так как $\mathbf{a}^{(j)} = \nabla g_j$), поэтому подпространство N , натянутое на систему векторов $\{\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(l)}\}$, ортогонально многообразию $M = \bigcap_{j=1}^l H_j$. Пусть $M \neq \emptyset$, тогда параллельным

переносом (т. е. заменой $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{c}$) можно добиться того, что начало координат будет в M , т. е. $\mathbf{O} \in M$. Если при этом система векторов $\{\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(l)}\}$ линейно независима, то $\dim M = n - l$ и $\dim N = l^*$, а все пространство $\mathbb{R}^n$ разлагается в прямую сумму $\mathbb{R}^n = N \oplus M$, т. е. для любого $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ существует единственная пара векторов $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, такая, что $\mathbf{u} \in N, \mathbf{v} \in M$ и $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. При этом $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ называются проекциями $\mathbf{u}$ на подпространства N и M соответственно. Чтобы построить операторы проектирования, заметим, что если $\mathbf{A}_l$ — матрица вида

$$\mathbf{A}_l = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(l)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} a_2^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} a_2^{(2)} & \dots & a_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(l)} a_2^{(l)} & \dots & a_n^{(l)} \end{pmatrix},$$

то для любого $\mathbf{v} \in M$ имеем $\mathbf{A}_l \mathbf{v} = 0$. Действительно,

$$\mathbf{A}_l \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} \\ a_1^{(2)} & \dots & a_n^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^{(l)} & \dots & a_n^{(l)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{v} \rangle \\ \langle \mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{v} \rangle \\ \dots \\ \langle \mathbf{a}^{(l)}, \mathbf{v} \rangle \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{II.32})$$

так как $\mathbf{v}$ ортогонален всем $\mathbf{a}^{(i)}, i = 1, \dots, l$. Предположим, что $\dim N = l$, т. е. $\text{rang } \mathbf{A}_l \leq n$, тогда $\mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^T$ — невырожденная матрица $l \times l$; действительно, для любого $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ и $\mathbf{h} \neq 0$

$$(\mathbf{A}_l \mathbf{A}_l^T \mathbf{h}, \mathbf{h}) = (\mathbf{A}_l^T \mathbf{h}, \mathbf{A}_l^T \mathbf{h}) > 0,$$

* Символ $\dim L$ означает размерность подпространства (многообразия) L .

так как из $A_i^T h = 0$ следовала бы линейная зависимость строк матрицы $A_i: h_1 a^{(1)} + h_2 a^{(2)} + \dots + h_i a^{(i)} = 0$.

Итак, существует $l \times l$ матрица $\{A_i A_i^T\}^{-1}$ и можно рассмотреть оператор $P_i = E - A_i^T \{A_i A_i^T\}^{-1} A_i$, который является оператором проектирования на многообразие M . Проверим это. Если $v \in M$, то

$$P_i v = E v - A_i^T \{A_i A_i^T\}^{-1} A_i v = v - 0 = v$$

[в силу равенства (II.32)]. Если $u \in N$, то u разлагается по базису $\{a^{(1)}, \dots, a^{(i)}\}$ в подпространстве N , поэтому достаточно посмотреть, во что переходит базис N . Запишем систему базисных векторов N в виде столбцов матрицы

$$\| a^{(1)}, \dots, a^{(i)} \| = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} a_1^{(2)} & \dots & a_1^{(i)} \\ a_2^{(1)} a_2^{(2)} & \dots & a_2^{(i)} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_n^{(1)} a_n^{(2)} & \dots & a_n^{(i)} \end{pmatrix} = A_i^T,$$

тогда

$$P_i A_i^T = \| P_i a^{(1)}, \dots, P_i a^{(i)} \|.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} P_i A_i^T &= E A_i^T - A_i^T \{A_i A_i^T\}^{-1} A_i A_i^T = A_i^T - A_i^T \{A_i A_i^T\}^{-1} \{A_i A_i^T\} = \\ &= A_i^T - A_i^T E = A_i^T - A_i^T = 0, \end{aligned}$$

т. е. $P_i a^{(1)} = P_i a^{(2)} = \dots = P_i a^{(i)} = 0$. В силу линейности P_i любой $u \in N$ переводится им в 0. Итак, если $y \in R^n$ и $y = u + v$, где $u \in N$, $v \in M$, то

$$P_i y = P_i u + P_i v = 0 + v = v,$$

т. е. P_i — оператор проектирования на многообразие M ортогонально $\bar{N}$.

Если точка $\bar{x} \in M$, то векторы $a^{(1)}, \dots, a^{(i)}$ с началами в этой точке направлены из области D во внешность области D^* , таким же свойством обладает и весь конус K_i их линейных комбинаций с неотрицательными коэф-

* Поскольку сдвиг точки $x \in H_j$ [т. е. $g_j(x) = 0$] вдоль $a^{(j)} = \nabla g_j(x)$ приводит к увеличению g_j , т. е. в новой точке x^1 выполняется неравенство $g_j(x^1) > 0$ и $x^1 \notin D$.

фициентами (рис. 29). Поэтому $\bar{x} \in M$ является решением задачи в том случае, когда

$$\begin{aligned} P_l(-\nabla f(\bar{x})) &= 0 \quad \text{и} \\ (A_l A_l^T)^{-1} A_l(-\nabla f(\bar{x})) &\geq 0. \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

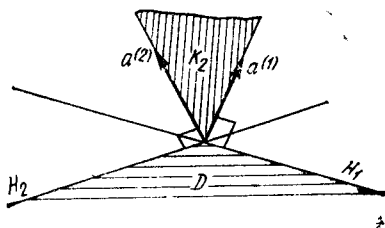


Рис. 29. Двойственные конусы

Условия (II.33) представляют собой иначе записанные условия Куна-Таккера в дифференциальной форме. На самом деле $P_l(-\nabla f(\bar{x})) = 0$ означает $-\nabla f(\bar{x}) \in N$, т. е. существует вектор $\bar{u}$ такой, что $-\nabla f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^l \bar{u}_i a^{(i)}$, значит, $(\bar{u}, \nabla_x g) + \nabla_x f(\bar{x}) = 0$ или иначе $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{u}) = 0$, где $L(x, u) = f(x) + (u, g(x))$. К тому же $u \equiv (A_l A_l^T)^{-1} \times \times A_l(-\nabla f(\bar{x})) \geq 0$. Иными словами, $-\nabla f(\bar{x}) \in K_l$, т. е. угол между $-\nabla f(\bar{x})$ и любым направлением внутрь области D — тупой. А это означает, что по любому направлению внутрь области D функция f не убывает, следовательно, $\bar{x}$ — точка минимума.

Перейдем к описанию алгоритма. Нулевой шаг состоит в нахождении $x^{(0)} \in D$. Пусть уже найдены $x^{(k)}$ и $g_j(x^{(k)}) = 0$ для $j = 1, 2, \dots, l$ (что не уменьшает общности, ибо всегда можно так перенумеровать ограничения, что обращающиеся в нуль будут иметь первые номера) и $\{a^{(1)}, \dots, a^{(l)}\}$ — линейно независимая система. Возможны два случая:

1) $P_l(-\nabla f(x^{(k)})) \neq 0$, тогда в качестве направления спуска берется вектор

$$\xi^{(k)} = \frac{P_l[-\nabla f(x^{(k)})]}{\|P_l[-\nabla f(x^{(k)})]\|};$$

$$2) P_l[-\nabla f(x^{(k)})] = 0, \quad \text{т. е.} \quad -\nabla f(x^{(k)}) = \sum_{i=1}^l u_i a^{(i)},$$

в этом случае если все $u_i \geq 0$, то $x^{(k)}$ — решение задачи.

Если $u_l < 0$, то «исключаем» H_l (т. е. вектор $a^{(l)}$ из матрицы A_l), строим новый проектор P_{l-1} по новой мат-

рице A_{l-1} . В силу линейной независимости системы $\{a^{(i)}\}$, $i=1, \dots, l$ имеем $P_{l-1}(a^{(l)}) \neq 0$, значит,

$$P_{l-1}(-\nabla f(x^{(k)})) = u_l P_{l-1}(a^{(l)}) \neq 0.$$

Направление спуска

$$\xi^{(k)} = \frac{P_{l-1}(-\nabla f(x^{(k)}))}{\|P_{l-1}(-\nabla f(x^{(k)}))\|}.$$

Выбор шага h_k производится из следующих соображений: шаг должен быть таким, чтобы точка $x^{(k+1)}$ не выходила из области D и вдоль направления $\xi^{(k)}$ минимизируется $f(x)$, т. е. требуется решить задачу

$$f(x^{(k)} + h\xi^{(k)}) \rightarrow \min \text{ при } x^{(k)} + h\xi^{(k)} \in D.$$

Если луч $\{x^{(k)} + h\xi^{(k)} \mid h \geq 0\}$ «протыкает» гиперплоскость H_j при $h=h_j$, то

$$g_j(x^{(k)} + h\xi^{(k)}) = 0, \text{ т. е. } (a^{(j)}, x^{(k)} + h_j\xi^{(k)}) - b^{(j)} = g_j(x^{(k)}) + h_j(a^{(j)}, \xi^{(k)}) = 0,$$

откуда
$$h_j = -\frac{g_j(x^{(k)})}{(a^{(j)}, \xi^{(k)})}.$$

Если h больше хотя бы одного из h_j , то $x^{(k)} + h\xi^{(k)} \notin D$, поэтому границе D принадлежит точка с минимальным h_j , т. е. с $h' = \min\{h_1, \dots, h_m\}$. Если h'' есть решение задачи $\min_{h>0} f(x^{(k)} + h\xi^{(k)})$, то шаг $h^{(k)}$ вы-

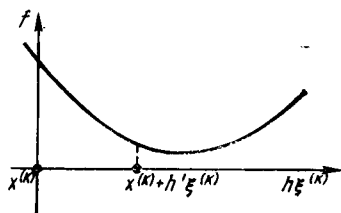


Рис. 30. Выбор шага

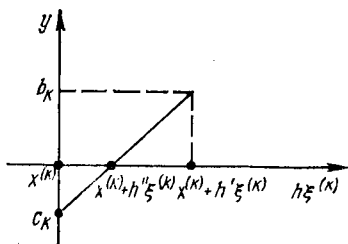


Рис. 31. Линейное приближение

бирается по формуле $h^{(k)} = \min \{h', h''\}$. В результате получаем следующую точку $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + h^{(k)} \xi^{(k)}$.

При вычислении h'' иногда удобно поступить следующим образом: вычислим $b_k = (-\nabla f(\mathbf{x}^{(k)} + h' \xi^{(k)}), \xi^{(k)})$, если $b_k \leq 0$, то на отрезке $[\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(k)} + h' \xi^{(k)}]$ функция убывает (рис. 30) и $h^{(k)}$ берут равным h' ; если $b_k > 0$, применяют линейную интерполяцию (рис. 31) для нахождения h'' :

$$h'' = \frac{c_k}{c_k - b_k} h',$$

где $c_k = (-\nabla f(\mathbf{x}^{(k)}), \xi^{(k)}) < 0$.

В этом случае ошибка может оказаться и большей, но для квадратичной функции результат будет точным!

В случае, когда система векторов $\{\mathbf{a}^{(1)}, \dots, \mathbf{a}^{(l)}\}$ линейно зависима, в качестве направления спуска $\xi^{(k)}$ выбирают, например, решение задачи

$$\begin{aligned} & (\nabla f(\mathbf{x}^{(k)}), \xi) \rightarrow \min \text{ при} \\ & (\mathbf{a}^{(i)}, \xi) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l, \\ & -1 \leq \xi_1 \leq 1, \dots, -1 \leq \xi_n \leq 1. \end{aligned}$$

Глава III. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПЕРЕКАЧКИ ВЯЗКИХ ПРОДУКТОВ ПО ТРУБОПРОВОДАМ

III.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА С ПОМОЩЬЮ МНОГОЧЛЕНОВ

Для расчета процессов, связанных с движением продукта по трубопроводам, и рационального подбора оборудования для его транспортировки необходимо знать потери давления на трение при течении продукта по трубам. ЭВМ позволяет определить потери давления на трение при движении широкого класса дисперсных систем на основе экспериментальных реологических данных, определяющих связь двух величин: напряжения сдвига τ и скорости сдвига $\dot{\gamma}$ [5]. Потери давления при движении вязкого продукта определяются выражениями:

$$Q/\pi R^3 = \frac{1}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \tau^2 \dot{\gamma}(\tau) d\tau, \quad (\text{III.1})$$

где Q — расход продукта, м³/с; R — радиус трубы, м; τ — напряжение сдвига, Н/м²; τ_w — напряжение сдвига на стенке трубы, Н/м²; $\dot{\gamma}$ — скорость сдвига, с⁻¹;

$$h_d = 2\tau/R, \quad (\text{III.2})$$

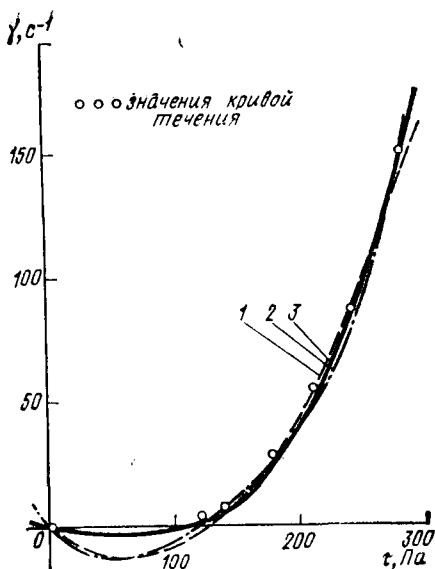
где h_d — перепад давления на 1 м трубы, Па.

Результаты эксперимента заданы в табличной форме (см. рабочую информативу программы № 1) функцией $f(\tau)$ на отрезке $[\tau_0, \tau_k]$, т. е. известны значения $\dot{\gamma}$ на множестве точек $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k$, или $\dot{\gamma}_i = f_i(\tau_i)$, где $i=0, 1, 2, \dots, k$.

Однако конечным результатом обработки данных эксперимента является не только подбор приближенной аналитической функции, но и проведение необходимых математических операций (интегрирование, суммирование

Рис. 32. Графическая интерпретация процедуры аппроксимации кривой течения степенными полиномами:

1 — 2-й степени; 2 — 3-й степени; 3 — 4-й степени



ние и т. д.) и оценка точности расчетов по приближенным значениям при сопоставлении с результатами определения тех же величин, полученных графическим методом.

Если в подготовленных данных эксперимента учтено влияние на результат измерений случайных погрешностей, то задача машинной обработки подготовленных данных может быть реализована в два последовательных этапа:

определение последовательности смены процедур обработки экспериментальной кривой на стадии аналитического описания функцией;

организация совокупности программных алгоритмов в процессе полной обработки результатов.

Исследования показали, что полученная зависимость представляется функцией $\gamma(\tau)$, которая с достаточной точностью не определяется на всем отрезке $[0, \tau_k]$ единой аналитической функцией.

На первом шаге аналитического представления производилась аппроксимация экспериментальной кривой полиномами 2, 3, 4-й и т. д. степеней поочередно. Для оперативной оценки наилучшего приближения аппроксимирующей функции к реальной на машине производи-

лось одновременно воспроизведение функции по точкам в области определения от нуля (по аргументу) до другого граничного табличного значения. Для функции $\gamma(\tau)$ выявлено, что независимо от степени аппроксимации полинома при малых значениях τ значения полинома заходят в отрицательную область, что при дальнейшем интегрировании приводит к появлению недопустимой погрешности в расчетах.

На рис. 32 показана процедура подбора единых полиномов 2, 3 и 4-й степеней, восстановленных по точкам во всей области определения функции $\gamma(\tau)$ с шагом $\Delta\tau = 0,5$ Па. На графике видно, что кривая полинома 3-й степени подходит ближе остальных к узлам аппроксимации и незначительно заходит в отрицательную область. Пунктиром обозначена реальная кривая течения продукта по трубам.

Серия из 13 экспериментов подтвердила то, что наиболее криволинейный участок функции в области положительных значений с наименьшими погрешностями аппроксимируется полиномом вида $\sum_{n=0}^m B_n \tau^n$ 3-й степени.

Участок с большими (по сравнению с первым наименьшим табличным значением $\gamma_{\text{экс.}}$) значениями γ , выше одного порядка, точнее аппроксимируется полиномом 4-й степени. На основании оценки погрешности аппроксимации исследуемой зависимости единой функцией во всей области определения был сделан вывод о целесообразности перехода к функциональному аналитическому представлению ее полиномами с различными степенями аппроксимации на нескольких участках. При этом для каждого экспериментального варианта определяются отдельно число участков и степени аппроксимации на них.

Так как функция $\gamma(\tau)$ на участке от нуля до первого табличного значения $\gamma_{\text{экс. мин}}$ практически никогда не определена, хотя из физики явления следует, что она выражена криволинейной зависимостью γ от τ , то для исключения грубых ошибок при интегрировании и из соображений обеспечения запаса по потерям давления на трение наилучшей на этом участке следует считать аппроксимацию исследуемой зависимости полиномом 1-й степени.

Программа № 1 аппроксимации кривой течения полиномами по участкам

Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю."ДЛЯ"V=1"ШАГ"1"ДО" (ЧМ×Г)"ВЫПОЛНИТЬ"В1[V]=0;"
 ДЛЯ"V=1"ШАГ"1"ДО"ЧМ"ВЫПОЛНИТЬ"В[V]=0;"РАЗРЯДНОСТЬ"Е;
 U=0; U1=0;"ДЛЯ"Ш=1"ШАГ"1"ДО"Г"ВЫПОЛНИТЬ"(N=N1[Ш]; K=K
 1[Ш]; "ДЛЯ"1=1"ШАГ"1"ДО"ЧМ"ВЫПОЛНИТЬ"(X[I]=0; Y[I]=0); "Д
 ЛЯ"V=1"ШАГ"1"ДО"К"ВЫПОЛНИТЬ"(X[V]=X1[V+U]; Y[V]=Y1[V
 +U]); S=0;"ДЛЯ"1=1"ШАГ"1"ДО"(3×N+2)"ВЫПОЛНИТЬ"D[I]=0;"ДЛ
 Я"J=1"ШАГ"1"ДО"ЧМ"ВЫПОЛНИТЬ""ДЛЯ"1=1"ШАГ"1"ДО"ЧМ"ВЫП
 ОЛНИТЬ"A[J, I]=0;"ДЛЯ"J=1"ШАГ"1"ДО"К"ВЫПОЛНИТЬ"(I=1; R1
 =1; D[I]=D[I]+R1; Ы.R2=R1×Y[J]; D[I+2×N+1]=D[I+2×N+1]+R2; P1.R1
 =R1×X[J]; D[I+1]=D[I+1]+R1; I=I+1;"ЕСЛИ"1<N+2"ТО"("НА"ЬБ); "Е
 СЛИ"1<2×N+1"ТО"("НА"Р1)); "ДЛЯ"1=1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛН
 ИТЬ""ДЛЯ"J=1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"A[I, J]=D[I-1+J]; "Д
 ЛЯ"1=1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"В[I]=D[2×N+1+I]; "ДЛЯ"Ж=
 1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"(Т=0;"ДЛЯ"1=Ж"ШАГ"1"ДО"(N+
 1)"ВЫПОЛНИТЬ"(Д=Σ(P=1, Ж-1, A[I, P]×A[P, Ж]); A[I, Ж]=A[I, Ж]-Д
); "ЕСЛИ"ABS(A[I, Ж])>Т"ТО"(Т=ABS(A[I, Ж]); М=1)); "ЕСЛИ"М=Ж'
 "ТО"("НА"Э1); "ДЛЯ"J=1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"(Т=A[Ж,
 J]; A[Ж, J]=A[М, J]; A[М, J]=Т); Т=В[Ж]; В[Ж]=В[М]; В[М]=Т; Э1.
 "ЕСЛИ"ABS(A[Ж, Ж])≤EPS"ТО"(S=1;"НА"Л1); "ДЛЯ"1=Ж+1"ШАГ"1"
 ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"A[I, Ж]=A[I, Ж]/A[Ж, Ж]; "ДЛЯ"J=Ж+1"ШАГ"
 "1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"(Д=Σ(P=1, Ж-1, A[Ж, P]×A[P, J]); A[Ж, J]
 =A[Ж, J]-Д; Д=Σ(P=1, Ж-1, A[Ж, P]×В[P]); В[Ж]=В[Ж]-Д; "ДЛЯ"
 Ж=N+1"ШАГ"(-1)"ДО"1"ВЫПОЛНИТЬ"(Д=Σ(P=Ж+1, N+1, A[Ж, P]×В[
 P]); В[Ж]=(В[Ж]-Д)/A[Ж, Ж]; R3=0; L2=0;"ДЛЯ"1=1"ШАГ"1"ДО"
 К"ВЫПОЛНИТЬ"(J=N; R1=В[J+1]; L.R1=R1×X[I]+В[J]; J=J-1;"Е
 СЛИ"J>0"ТО"("НА"Л); R2=ABS(R1-Y[I]); L2=L2+R2|2;"ЕСЛИ"R2
 >R3"ТО"(R3=R2; R4=Y[I]); "ЕСЛИ"R4=0"ТО"(R1=0)"ИНАЧЕ"(R1
 =R3/R4); L2=√(L2/K); "ВЫВОД"34, R3, "ПРОБЕЛ"2, R1, "ПРОБЕЛ", L2
 ; L1."ВЫВОД"34, "СТРОКА", S, "ВЫВОД"34, "МАССИВ"В; V=0; Ю2.V=V
 +1; В1[V+U1]=В[V]; В[V]=0;"ЕСЛИ"V<ЧМ"ТО""НА"Ю2; U=U+K; U1
 =U1+ЧМ)"КОНЕЦ"◇

Рабочая информатива

"ПУСТЬ"D[14]; A[5,5]; ЧМ=5; EPS=1_Ю-12; Г=4; В1[25]; ЧТ=17; N1[4]
 =1,3,3,4; K1[4]=2,5,5,5; ЧВ[4]=2,4,4,5; ХМР[4]=75,173,220,346; ХОР[4]
 =0,75,173,220; ДХР[4]=1,1,1,1; X[17]; Y[17]; X1[17]=0,75,75,86,100,1
 53,173,153,173,189,197,200,200,236,259,307,346; Y1[17]=0,33,33,6,1,1,8
 3,1,8,3,5,4,9,16,2,27,48,6,81,145,8"КОНЕЦ"◇

Д и р е к т и в а

"ВЫП"Е=12;Е1=4;"НА"Ю"КОН"◇

Примечание. Порядок заполнения рабочей информативы и смысловая интерпретация символов даны в программе № 2.

Машинная программа, обеспечивающая вывод относительной погрешности аппроксимации в каждом узле, позволяет, не изменяя алгоритма обработки кривой, произвести оценку точности по участкам. Эта оценка показала, что максимальная относительная погрешность аппроксимации сохраняется в допустимых пределах (по сравнению с инструментальной погрешностью средств измерений в эксперименте), если динамический диапазон значений функции $y(\tau)$ на каждом участке не превосходит одного порядка.

Исходя из выявленного условия, в рабочую часть программы сначала распределяются табличные значения аргумента и функции наиболее криволинейной части экспериментальной кривой в пределах значений, различающихся примерно на порядок. Затем распределяются остальные промежуточные значения τ и y . Любой участок аппроксимации должен содержать не менее 4—5 узлов, причем желательно перекрытие промежуточных участков между собой в области меньших значений аргумента на участке.

Если при оценке относительной погрешности аппроксимации по выводимым на экран дисплея данным окажется, что она превышает выбранную допустимую, то для ее корректировки необходимо повторить разбиение, увеличив число участков. Изменение входных данных при этом сводится к изменению в рабочей части программы порядка записи координат узлов аппроксимации и соответствующих им служебных констант (число точек на участке, степень аппроксимации, пределы и шаг интегрирования и т. д.). При получении удовлетворительных результатов аппроксимации «останов счета» не производится и программа автоматически переходит к интегрированию функции с распределением соответствующих коэффициентов полиномов по участкам функции.

Полученные на участках функции интегрируются в

соответствии с алгоритмом

$$Q = \frac{\pi R^3}{\tau_{wi}^3} \sum_{i=1}^n \int_{\tau_{0i}}^{\tau_{wi}} \gamma_i(\tau) \tau^2 d\tau, \quad (\text{III.3})$$

где τ_{0i} , τ_{wi} — нижний и верхний пределы интегрирования на участке; i — число участков аппроксимации.

Программа обеспечивает вывод всех существующих в области определения функции от нуля до $\tau_{\text{экс. макс}}$ значений Q , лежащих в интервале от $1,4 \cdot 10^{-4}$ до $28 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$ и соответствующих им значений перепадов давления

$$h_{\text{н.к}} = 2\tau/R_h. \quad (\text{III.4})$$

Эта часть программы реализуется последовательно для нескольких значений радиусов труб ($R_h = 0,01; 0,016; 0,02; 0,025; 0,04; 0,05; 0,075; 0,1 \text{ м}$) также автоматически. Аналитическое выражение функции (III.3), представленной полиномами на участках аппроксимации, определяющее течение вязкого продукта в общем виде и реализуемое программой, записано в нее в следующем виде:

$$Q = \frac{\pi R^3}{\tau_{wi}^3} \sum_{i=1}^n \left(\frac{B_{0i} \tau_{wi}^3}{3} + \frac{B_{1i} \tau_{wi}^4}{4} + \frac{B_{2i} \tau_{wi}^5}{5} + \right. \\ \left. + \frac{B_{3i} \tau_{wi}^6}{6} + \frac{B_{4i} \tau_{wi}^7}{7} - \frac{B_{0i} \tau_{0i}^3}{3} - \frac{B_{1i} \tau_{0i}^4}{4} - \right. \\ \left. - \frac{B_{2i} \tau_{0i}^5}{5} - \frac{B_{3i} \tau_{0i}^6}{6} - \frac{B_{4i} \tau_{0i}^7}{7} - \frac{Q_{i-1} \tau_{w(i-1)\text{max}}}{\pi R^3} \right), \quad (\text{III.5})$$

где Q_{i-1} — значение Q на конце предыдущего участка; $\tau_{w(i-1)\text{max}}$ — максимальное значение τ на предыдущем участке; B_{0i} , B_{1i} , B_{2i} , B_{3i} , B_{4i} — коэффициенты аппроксимирующего полинома на i -м участке аппроксимации при аргументе в степенях соответственно τ^0 , τ^1 , τ^2 , τ^3 , τ^4 .

Структурное построение общей программы состоит в стыковке трех стандартных программ в единую в такой последовательности:

аппроксимация экспериментальной кривой течения по участкам;

воспроизведение на выбранных участках значений γ и расчет относительных погрешностей в узлах аппроксимации с выводом этих данных для оценки;

интегрирование в цикле по всем заданным радиусам

изменяющейся на участке функции по заданному алгоритму после оценки точности аппроксимации и корректировки с выводом значений интеграла Q из заданного ряда значений и соответствующих им значений $h_{\text{л}}$ и t .

Такая последовательность обработки в единой программе позволяет не только оперативно оценивать погрешность и изменять аппроксимацию, но и исключить ошибки оператора на промежуточных операциях.

Программа № 2 расчета потерь давления на трение при аппроксимации кривой течения полиномами по участкам

Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю."ДЛЯ"V=1"ШАГ"1"ДО"(ЧМХГ)"ВЫПОЛНИТЬ"В1[V]=0;"ДЛЯ"V=1"ШАГ"1"ДО"ЧМ"ВЫПОЛНИТЬ"В[V]=0;"РАЗРЯДНОСТЬ"Е;U=0;U1=0;"ДЛЯ"Ш=1"ШАГ"1"ДО"Г"ВЫПОЛНИТЬ"(N=N1[Ш];K=K1[Ш];"ДЛЯ"Г=1"ШАГ"1"ДО"ЧМ"ВЫПОЛНИТЬ"(X[I]=0;Y[I]=0);"ДЛЯ"V=1"ШАГ"1"ДО"К"ВЫПОЛНИТЬ"(X[V]=X1[V+U];Y[V]=Y1[V+U]);S=0;"ДЛЯ"Г=1"ШАГ"1"ДО"(3XN+2)"ВЫПОЛНИТЬ"D[I]=0;"ДЛЯ"J=1"ШАГ"1"ДО"ЧМ"ВЫПОЛНИТЬ""ДЛЯ"Г=1"ШАГ"1"ДО"ЧМ"ВЫПОЛНИТЬ"A[J,I]=0;"ДЛЯ"J=1"ШАГ"1"ДО"К"ВЫПОЛНИТЬ"(I=1;R1=1;D[I]=D[I]+R1;Ы.R2=R1XU[J];D[I+2XN+1]=D[I+2XN+1]+R2;P1.R1=R1XX[J];D[I+1]=D[I+1]+R1;I=I+1;"ЕСЛИ"И<N+2"ТО"("НА"Ы);"ЕСЛИ"И<2XN+1"ТО"("НА"Р1));"ДЛЯ"Г=1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ""ДЛЯ"J=1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"A[I,J]=D[I-1+J];"ДЛЯ"Г=1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"В[I]=D[2XN+1+I];"ДЛЯ"Ж=1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"(Т=0;"ДЛЯ"И=Ж"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"((Д=Σ(P=1,Ж-1,A[I,P]XA[P,Ж]);A[I,Ж]=A[I,Ж]-Д);"ЕСЛИ"ABS(A[I,Ж])>Т"ТО"(Т=ABS(A[I,Ж]);M=I);"ЕСЛИ"М=Ж"ТО"("НА"Э1);"ДЛЯ"J=1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"(Т=A[Ж,J];A[Ж,J]=A[M,J];A[M,J]=Т);Т=В[Ж];В[Ж]=В[M];В[M]=Т;Э1."ЕСЛИ"ABS(A[Ж,Ж])≤EPS"ТО"(S=1;"НА"Л1);"ДЛЯ"И=Ж+1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"A[I,Ж]=A[I,Ж]/A[Ж,Ж];"ДЛЯ"J=Ж+1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"(Д=Σ(P=1,Ж-1,A[Ж,P]XA[P,J]);A[Ж,J]=A[Ж,J]-Д);Д=Σ(P=1,Ж-1,A[Ж,P]XB[P]);В[Ж]=В[Ж]-Д;"ДЛЯ"Ж=N+1"ШАГ"1"ДО"1"ВЫПОЛНИТЬ"(Д=Σ(P=Ж+1,N+1,A[Ж,P]XB[P]);В[Ж]=(В[Ж]-Д)/A[Ж,Ж]);R3≠0;L2=0;"ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"К"ВЫПОЛНИТЬ"(J=N;R1=В[J+1];L.R1=R1XX[I]+B[J];J=J-1;"ЕСЛИ"J>0"ТО"("НА"Л);R2=ABS(R1-Y[I]);L2=L2+R2↑2;"ЕСЛИ"R2>R3"ТО"(R3=R2;R4=Y[I]);"ЕСЛИ"R4=0"ТО"(R1=0)"ИНАЧЕ"(R1=R3/R4);L2=√(L2/К);"ВЫВОД"01,R3,"ПРОБЕЛ"2,R1,"ПРОБЕЛ",L2;L1."ВЫВОД"01,"СТРОКА",S;"ВЫВОД"01,"МАССИВ"В;V=0;Ю2.V=V+1;В1[V+U1]=В[V];В[V]=0;"ЕСЛИ"V<ЧМ"ТО""НА"Ю2;U=U+K;U1=U1+ЧМ;W=0;"ДЛЯ"V=1"ШАГ"1"ДО"Г"ВЫПОЛНИТЬ"(ХО=ХОР[V];ХМ=ХМР[V];DХ=DХР[V];Х2=ХО-DХ;ЧМ=ЧВ[V];Б."ЕСЛИ"Х2<ХМ"ТО""НА"Б1И

НАЧЕ""НА"Б2; Б1.Х2=Х2+DХ; "ДЛЯ"Й=1"ШАГ"1"ДО"ЧТ"ВЫПОЛНИТЬ" ("ЕСЛИ"Х2=Х1[Й]"И"У1[Й]≠0"ТО" (АГ=В1[1+W]+В1[2+W]×Х2+В1[3+W]×Х2↑2+В1[4+W]×Х2↑3+В1[5+W]×Х2↑4; ПОГРЕШН=(АГ-У1[Й])×100/У1[Й]; "ВЫВОД"01,Х2,"ПРОБЕЛ"2,АГ,"ПРОБЕЛ"2,ПОГРЕШН;"ЕСЛИ"Х1[Й]≥ХМ"ТО""НА"Б1)); "ИДТИ""НА"Б; Б2."ВЫВОД"01,DХ,"ПРОБЕЛ"2,Х2,"ПРОБЕЛ"2,АГ; W=W+5); "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ДЛЯ"U=1"ШАГ"1"ДО"ЧР"ВЫПОЛНИТЬ" (R=RP[U]; W=0; I1=0; "ДЛЯ"V=1"ШАГ"1"ДО"Г"ВЫПОЛНИТЬ" (ХО=ХОР[V]; DХ=DХР[V]; ХМ=ХМР[V]; Х2=ХО+DХ; Я."ЕСЛИ"Х2<ХМ"ТО""НА"М1"ИНАЧЕ""НА"М2; М1.Х2=Х2+DХ; Ш=(π×R↑3)/Х2↑3; Q=((В1[1+W]×Х2↑3/3+В1[2+W]×Х2↑4/4+В1[3+W]×Х2↑5/5+В1[4+W]×Х2↑6/6+В1[5+W]×Х2↑7/7-В1[1+W]×ХО↑3/3-В1[2+W]×ХО↑4/4-В1[3+W]×ХО↑5/5-В1[4+W]×ХО↑6/6-В1[5+W]×ХО↑7/7)+I1)×Ш; DР=(Х2×2)/R; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ЕСЛИ"Q>.134000₁₀-3"И"Q<.143000₁₀-3"ИЛИ"Q>.272000₁₀-3"И"Q<.280000₁₀-3"ИЛИ"Q>.403000₁₀-3"И"Q<.415000₁₀-3"ИЛИ"Q>.547000₁₀-3"И"Q<.563000₁₀-3"ИЛИ"Q>.680000₁₀-3"И"Q<.700000₁₀-3"ИЛИ"Q>.820000₁₀-3"И"Q<.845000₁₀-3"ИЛИ"Q>.950000₁₀-3"И"Q<.985000₁₀-3"ИЛИ"Q>.109000₁₀-2"И"Q<.113500₁₀-2"ИЛИ"Q>.122000₁₀-2"И"Q<.128000₁₀-2"ИЛИ"Q>.134000₁₀-2"И"Q<.140000₁₀-2"ИЛИ"Q>.150000₁₀-2"И"Q<.156000₁₀-2"ИЛИ"Q>.163000₁₀-2"И"Q<.169000₁₀-2"ИЛИ"Q>.175000₁₀-2"И"Q<.183000₁₀-2"ИЛИ"Q>.191000₁₀-2"И"Q<.199000₁₀-2"ИЛИ"Q>.204000₁₀-2"И"Q<.210000₁₀-2"ИЛИ"Q>.220000₁₀-2"И"Q<.226000₁₀-2"ИЛИ"Q>.233000₁₀-2"И"Q<.239000₁₀-2"ИЛИ"Q>.248000₁₀-2"И"Q<.280000₁₀-2"ТО""ВЫВОД"01,"СТРОКА"1,Q,"ПРОБЕЛ"2,DР,"ПРОБЕЛ"2,Х2"ИНАЧЕ""ИДТИ""НА"Я;"ЕСЛИ"Q<.281000₁₀-2"ТО""НА"Я"ИНАЧЕ""ВЫВОД"01,R; М2."ВЫВОД"01,"СТРОКА"3,R,"ПРОБЕЛ"2,Q,"ПРОБЕЛ"2,DР,"ПРОБЕЛ"2,Х2,"ПРОБЕЛ",I1; W=W+5; I1=I1+Q/Ш) "КОНЕЦ"◇

В рабочие информативы программ № 1 и 2 записываются следующие параметры:

П[14]; А[5, 5]; В[5]; В1[25]; ЧМ=5 — служебные константы для реализации аппроксимирующей части программы при максимальном значении степени полинома $N=4$;

EPS — минимальное значение разности (по методу наименьших квадратов);

Г — количество участков аппроксимации;

ЧТ — суммарное число узлов аппроксимации на всех участках;

K1[Г] — количество участков аппроксимации на каждом участке;

N1[Г] — степени аппроксимации на каждом участке аппроксимации;

ЧВ[Г] — число коэффициентов полинома на каждом участке;

ХОР [Г] — начальные координаты аргумента на участках;

ХМР [Г] — конечные координаты аргумента на участках;

DXP [Г] — шаг по аргументу для расчета интеграла $Q(\tau)$ на каждом участке;

X[ЧТ]; У[ЧТ] — места, бронируемые под массивы значений аргумента и функции;

X1[ЧТ]; У1[ЧТ] — экспериментальные значения аргумента и функции, перечисленные в порядке нарастания по всем участкам.

Параметры, включаемые дополнительно в рабочую информативу программы № 2: ЧR — число расчетных радиусов труб; RP[ЧR] — массив значений радиусов.

Для обработки экспериментальных данных по определению реологических свойств вязкого продукта машинным способом при аналитическом описании определено следующее:

1. При выбранной аппроксимации экспериментальной кривой полиномами вида $\sum_{n=0}^m B_n \tau^n$ наилучшим с точки

зрения аппроксимации является разбиение кривой течения на несколько участков:

первый — от нуля до первого минимального значения $\gamma_{\min}$ в области определения $0 \div \tau_{\min}$ аппроксимируется полиномом 1-й степени;

последний — от $\approx 0,1 \gamma_{\max}$ до последнего граничного значения функции $\gamma(\tau)$ в области ее определения аппроксимируется полиномом 4-й степени;

промежуточные участки ограничиваются значениями $\gamma_{\text{экс}}$, различающимися не более чем на порядок, могут перекрываться соседними участками и аппроксимируются полиномами 3-й степени. Число узлов аппроксимации на участке должно быть не менее 4—5.

2. Относительная погрешность аппроксимации в узлах в соответствии с выбранной методикой должна быть не более $\pm 3 \%$, а после корректировки точности может достигать значений порядка $\pm 10^{-4} \%$.

3. Наименьшие значения относительной погрешности аппроксимации выдерживаются в узлах с большими по модулю значениями (до $10^{-8} \%$).

Ограничение таким образом погрешности аппроксимации обеспечило определение $h_{\text{л}}$ для выбранных Q с относительной погрешностью в пределах от 0 до 8 % по

Таблица 3

Темпера- тура продукта, °С	Потери давления на трение на 1 м длины трубопровода (в кПа) при различном расходе продукта, м³/с					
	$1,39 \cdot 10^{-4}$	$2,78 \cdot 10^{-4}$	$8,33 \cdot 10^{-4}$	$1,38 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$2,78 \cdot 10^{-3}$

Томатная паста, содержащая 25,2% сухих веществ

Диаметр трубопровода 0,05 м

20	15	16	21,8	—	—	—
—0,2	16,6	19,3	25	—	—	—

Диаметр трубопровода 0,08 м

20	7,8	8,5	9,96	10,97	12,24	12,94
—0,2	7,95	8,98	12,22	12,67	14,55	15,28

Диаметр трубопровода 0,1 м

20	5,74	6,28	7,2	7,75	8,44	8,84
—0,2	5,68	6,38	7,81	8,67	9,64	10,23

Диаметр трубопровода 0,15 м

20	2,35	3,43	4,13	4,4	4,66	4,81
—0,2	2,95	3,46	4,17	4,55	4,97	5,2

Диаметр трубопровода 0,18 м

20	1,49	2,07	3,16	3,43	3,77	3,76
—0,2	2,1	2,55	3,16	3,45	3,72	3,89

Диаметр трубопровода 0,2 м

20	1,16	1,62	2,6	2,95	3,16	3,26
—0,2	2,05	2,4	2,72	2,95	3,19	3,32

Диаметр трубопровода 0,3 м

—0,2	0,42	0,84	1,3	1,57	1,73	1,8
------	------	------	-----	------	------	-----

Томатная паста, содержащая 31,2% сухих веществ

Диаметр трубопровода 0,032 м

33	54,7	63,5	82,4	—	—	—
72	32	37,5	50,8	—	—	—
89	28,6	34,5	47	—	—	—

Диаметр трубопровода 0,04 м

33	36,8	43,8	55,8	62	—	—
72	21,1	26	34,1	39,3	—	—
89	16,1	23,1	31,8	36,3	—	—

Диаметр трубопровода 0,05 м

33	24,7	29,8	38,5	43	47,8	50,2
72	14	17,8	22,6	25,9	29,9	31,7

Диаметр трубопровода 0,08 м

33	12,2	13,4	17,1	19,4	21,9	23
----	------	------	------	------	------	----

Темпера- тура продукта, °C	Потери давления на трение на 1 м длины трубопровода (в кПа) при различном расходе продукта, м³/с					
	$1,39 \cdot 10^{-4}$	$2,78 \cdot 10^{-4}$	$8,33 \cdot 10^{-4}$	$1,38 \cdot 10^{-3}$	$2,2 \cdot 10^{-3}$	$2,78 \cdot 10^{-3}$

Томатное пюре, содержащее 20% сухих веществ

Диаметр трубопровода 0,05 м

11	10,1	11,5	13,7	—	—	—
0	11,2	12,4	15,8	—	—	—

Диаметр трубопровода 0,08 м

11	4,9	5,6	6,65	7,45	8,01	8,3
0	5,5	6,2	7,42	8,05	8,85	9,35

Диаметр трубопровода 0,1 м

11	3,28	3,92	4,75	5,24	5,72	6,0
0	3,67	4,4	5,44	5,78	6,2	6,46

Пюре из яблок (асептического консервирования)

Диаметр трубопровода 0,032 м

27	2,02	2,7	4,32	5,3	6,62	7,3
89	0,63	0,88	1,57	1,95	3,68	3,75

Диаметр трубопровода 0,04 м

—1	3,06	3,8	5,55	6,65	7,95	8,55
27	1,42	1,68	2,58	3,22	3,91	4,3
89	0,25	0,45	0,88	1,17	1,44	1,59

Диаметр трубопровода 0,05 м

—1	2,0	2,48	3,5	4,2	4,92	5,4
27	0,84	1,15	1,55	1,91	2,37	2,6
89	0,1	0,2	0,5	0,63	0,85	0,95

Диаметр трубопровода 0,08 м

—1	0,9	1,07	1,43	1,64	1,9	2,04
27	0,15	0,29	0,65	0,74	0,84	0,9

Пюре из тыквы и яблок для детского питания

Диаметр трубопровода 0,032 м

24,5	28,3	34,3	49,3	—	—	—
------	------	------	------	---	---	---

Диаметр трубопровода 0,04 м

24,5	19,6	22,8	31,4	37,1	44	—
------	------	------	------	------	----	---

Диаметр трубопровода 0,1 м

24,5	0,9	1,79	5,35	6,9	7,86	8,20
------	-----	------	------	-----	------	------

сравнению с обработкой графическим методом интегрирования. Так как графическим методом проводилось интегрирование кривой, заменяемой линейно-ломаной (при соединении узлов аппроксимации прямыми), то полученные значения $h_{\text{л}}$ можно считать более достоверными.

При использовании на участках аппроксимации функций с относительной погрешностью в узлах до $\pm 10\%$ появляется дополнительная погрешность в определении $h_{\text{л}}$ (по сравнению с 3% -ной) $\pm 3\%$.

Программа обеспечивает вывод следующих данных: признака невырожденности матрицы системы уравнений, принятой при аппроксимации;

абсолютной, относительной и средней квадратической погрешностей аппроксимации на участках;

коэффициентов полиномов на каждом участке;

значений аргумента, функции и относительной погрешности (в $\%$) в узлах аппроксимации на всех участках;

при контроле — координат аргумента и функции, производимых с любым заданным шагом в области определения, и шага;

значений интеграла $Q(\tau)$ из выбранного ряда ($Q = 1,4 \cdot 10^{-4} \div 2,8 \cdot 10^{-3}$ м³/с) и соответствующих значений перепадов давления $h_{\text{л}}$ на 1 м трубы;

значений пределов интегрирования на участках, суммарного интеграла на предыдущем участке и значений радиуса R , для которого производится расчет величин Q и $h_{\text{л}}$.

По разработанной программе определены потери давления при движении томатопродуктов, пюре из яблок, пюре из тыквы и яблок при температурах от -6 до $+89^\circ\text{C}$ по трубопроводам диаметром $0,02\text{—}0,2$ м и расход продукта.

Некоторые численные результаты представлены в табл. 3.

Данные табл. 3 являются исходными для дальнейшего расчета линий транспортировки продуктов.

Программа расчета по сути является трехмерной моделью процесса, в котором искомый удельный перепад давления $h_{\text{л}}$ в трубопроводе зависит от двух переменных параметров: расхода и радиуса трубы при фиксированной температуре продукта и содержании сухих веществ.

III.2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА С ПОМОЩЬЮ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

При увеличении вязкости продукта, расширении температурного диапазона и исследуемых диаметров труб полиномиальный способ аппроксимации кривой течения при моделировании процесса начинает давать недопустимую погрешность аппроксимации. Это связано с тем, что при появлении на кривых течения явных точек излома и недостаточном числе экспериментальных точек измерений в заданном диапазоне приходится применять предварительную графическую обработку исходного материала (определение границ участков аппроксимации, восстановление недостающих точек). Такая обработка при применении ЭВМ методически некорректна и приводит к неоправданным потерям машинного времени. Если же ее не применять, то появляются сдвиги значений полиномов на границах участков аппроксимации при их стыковке и «провалы» значений полинома между узлами аппроксимации.

В целях ликвидации указанных недостатков был разработан способ аналитического описания каждого аппроксимируемого участка кривой течения монотонной знакопостоянной функцией [5]. Функция в координатах $\tau = f(\gamma)$ на каждом участке (координаты измерений при эксперименте) имеет вид

$$\tau = \frac{\gamma^m}{K + B\gamma^m} + \tau_0, \quad (\text{III.6})$$

где m — показатель степени аппроксимации, определяющей «прогиб» функции; K, B — масштабные коэффициенты; τ_0 — минимальное экспериментальное значение τ при $\gamma=0$ для первого участка аппроксимации, в начале кривой.

Но так как зависимости потерь давления от расходов определены выражениями (III.3) и (III.4), то интегрировать описываемую экспериментальную кривую необходимо в координатах $\gamma = f(\tau)$. В этих координатах на каждом участке аппроксимации при повороте осей координат на 90° функция принимает вид

$$\gamma = \left(\frac{K(\tau - \tau_0)}{1 - B(\tau - \tau_0)} \right)^{1/m}, \quad (\text{III.7})$$

где τ_0 для всех остальных участков, кроме первого, есть приближенно задаваемое значение аргумента в функции (III.7) при $\gamma=0$ (точка пересечения с осью абсцисс).

Минимизация по погрешности аппроксимации функции $\gamma(\tau)$ производится следующим образом: фиксируются крайние на участке значения τ и γ , а показатель степени программно варьируют до тех пор, пока значение среднего квадратического отклонения относительной погрешности аппроксимации в узлах не достигнет минимума. Значения τ_0 для участков (кроме первого) задаются на 15 % ниже минимального значения τ на стыке с предыдущим участком. Количество узлов аппроксимации на участке выбирается таким, чтобы максимальное значение γ на нем отличалось от минимального не более чем на порядок. Обычно при соблюдении этих условий погрешность лежит в пределах единиц процентов и соизмерима с инструментальной погрешностью измерений. Если же ее значение неудовлетворительно, то минимизацию на этом участке следует повторить, проварьировав предварительно значение τ_0 , затем, при неудаче, уменьшая число узлов аппроксимации на 1.

Экспериментальная кривая течения в требуемых для последующего интегрирования координатах аппроксимируется на нескольких (трех, четырех и т. д.) участках кривыми одного вида, но с различными масштабными коэффициентами и степенями «прогиба», проходящими в коридоре между экспериментальными значениями с отклонениями, удовлетворяющими после окончания аналитического описания предъявляемым требованиям к точности. Выбранный вид кривых исключает появление при минимизации в промежутках между узлами аппроксимации «провалов» функции и перегибов или смены знака производной. Способ минимизации при последовательном уменьшении количества узлов принципиально позволяет довести погрешность аппроксимации до нуля (при трех узлах), однако такое снижение нежелательно из-за сильного спрямления кривой течения.

В общем виде кривая течения описывается аналитически м выражением:

$$\gamma_i = \left(\frac{K_i (\tau - \tau_{0i})}{1 - B_i (\tau - \tau_{0i})} \right)^{1/m_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

$$\begin{aligned} \tau_{0i} &\leq \tau \leq \tau_{m1}; \\ \tau_{m1} &< \tau \leq \tau_{m2}; \\ &\dots \dots \dots \\ \tau_{mi-1} &< \tau \leq \tau_{mi}. \end{aligned} \tag{III.8}$$

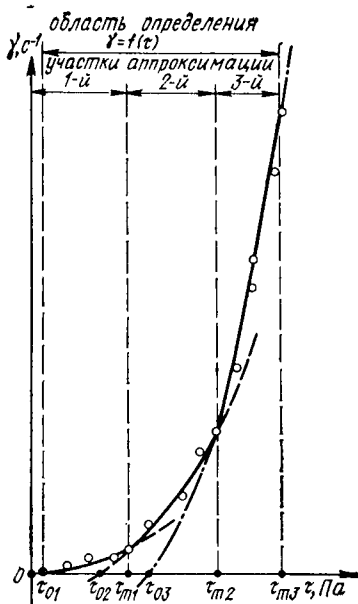


Рис. 33. Графическая интерпретация процедуры аппроксимации по участкам кривой течения рациональными функциями

На рис. 33 представлена кривая течения в координатах $\gamma = f(\tau)$, аппроксимированная на трех участках. Пунктиром и штрихпунктиром показаны функции за пределами их областей определения, кружками — экспериментально полученные узлы аппроксимации. При аппроксимации табличной функции $\gamma(\tau)$ специальной функцией процедура расчета параметров процесса перекачки разбивается на два этапа — аппроксимацию каждого участка экспериментальной кривой течения и интегрирования функции $\gamma(\tau)\tau^2$ и расчет зависимости $h_{\text{д}}$ от Q в заданном интервале значений Q .

В рабочую информативу программы первого этапа процедуры записываются следующие параметры:

- M — степень аппроксимации («прогиба») функции $\gamma(\tau)$;
- EPS — минимальное значение погрешности аппроксимации, при котором прекращается счет;
- $\pm DM$ — знак и шаг варьирования степени аппроксимации;
- N — количество узлов аппроксимации на участке;
- $A[N]$ — места, бронируемые под значения минимизируемой функции (по числу N);
- $X0$ — начальное приближение значения аргумента τ_0 при пересечении функцией оси абсцисс ($\gamma=0$);
- $X3$ — минимальное значение аргумента τ_0 в зоне аппроксимации;
- $X4$ — максимальное значение аргумента τ_0 в зоне аппроксимации;
- $A3$ — минимальное значение функции $\gamma(\tau)$ в зоне аппроксимации;
- $A4$ — максимальное значение функции $\gamma(\tau)$ в зоне аппроксимации;

$X[N]$ — массив значений τ в зоне аппроксимации;

$Y[N]$ — массив значений γ в зоне аппроксимации.

Программа № 3 аппроксимации кривой течения функциями специального вида

Стандартная информатива

"ПУСТЬ" $Y.B = ((A4 \uparrow M) \times (X3 - X0)) - ((A3 \uparrow M) \times (X4 - X0)) / (((A4 \uparrow M) - (A3 \uparrow M)) \times (X4 - X0) \times (X3 - X0))$; $K = ((A4 \uparrow M) \times (1 - (B \times (X4 - X0)))) / (X4 - X0)$; "ДЛЯ" $I = 1$ "ШАГ" 1 "ДО" N "ВЫПОЛНИТЬ" $A[I] = ((K \times (X[I] - X0)) / (1 - (B \times (X[I] - X0)))) \uparrow (1/M)$; "РАЗРЯДНОСТЬ" $E1$; "ВЫВОД" $01, X[I]$, "ПРОБЕЛ", $A[I]$, "СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ" E ; $L = \sqrt{(\sum_{J=2, N-1} ((A[J] - Y[J]) / Y[J]) \times 100) \uparrow 2)}$; "РАЗРЯДНОСТЬ" $E1$; "ВЫВОД" $01, M$, "ПРОБЕЛ", K , "ПРОБЕЛ", B , "ПРОБЕЛ", L , "СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ" E ; "ЕСЛИ" $L > EPS$ "ТО" "НА" $Ц1$ "ИНАЧЕ" "СТОП"; $Ц1.M = M + DM$; "НА" $Ю$ "КОНЕЦ" $\diamond$

Рабочая информатива

"ПУСТЬ" $M = 1.8$; $EPS = 0.5$; $DM = -0.2$; $A[14]$; $N = 14$; $X0 = 13$; $X3 = 199.5$; $X4 = 518.5$; $A3 = .708$; $A4 = 169.6$; $X[14] = 13, 123.6, 155.5, 199.5, 235.2, 240, 247.3, 259.3, 279.2, 307.1, 347, 410.6, 474.5, 518.5$; $Y[14] = 1_{10} - 9, .1968, .3936, .708, 1.181, 2.13, 3.543, 6.38, 10.467, 18.84, 31.4, 56.52, 94.2, 169.6$ "КОНЕЦ" $\diamond$

Минимизированные функции интегрируются по программе № 4 в соответствии с выражением (III.3). Работа программы с аппроксимирующей кривой ведется по участкам последовательно от значения $\gamma = 0$ в соответствии с алгоритмами (III.3) и (III.4). Помимо стандартного численного интегрирования при переходе на следующий участок программой предусмотрено автоматическое изменение значений m , K , B , τ_0 , а значения Q на границе (в конце каждого участка) запоминаются для суммирования с его текущим значением на следующем участке. При интегрировании и расчете $h_{\text{д}}$ в рабочую информативу задаются:

I — в числовой форме минимальное значение удельного расхода продукта, с которого целесообразно производить вывод значений $h_{\text{д}}$ и соответствующих им Q ;

N — количество узлов аппроксимации;

$T1[N]$ — массив значений τ_1 в начале каждого участка аппроксимации для всех минимизированных функций (по числу участков N);

ХМ1 [N] — массив значений τ_2 в конце каждого участка;
 ТО [N] — массив значений первых приближений τ_0 для
 всех функций;

$\left. \begin{array}{l} K1 [N] \\ B1 [N] \\ M1 [N] \end{array} \right\}$ — массивы масштабных коэффициентов и сте-
 пеней аппроксимации для всех функций;

DX — шаг интегрирования;

R — радиус трубопровода.

*Программа № 4 расчета потерь давления на трение
 по кривой течения, аппроксимированной по участкам
 функциями специального вида*

Стандартная + рабочая информативы
 "ПУСТЬ"Ю."РАЗРЯДНОСТЬ"Е;J=1;I1=0;X1=T1[J];XO=TO[J];K=
 K1[J];B=B1[J];M=M1[J];XM=XM1[J];X2=T1[J];Э1."РАЗРЯДНОСТ
 Б"Е;X2=X2+DX;"ЕСЛИ"X2<XM"ТО""НА"Э3"ИНАЧЕ""НА"Э6;Э3.DP
 =(X2×2)/R;H=(X2-X1)/10;U=($\pi \times R^3$)/X2³;I=(10×H× $\sum$ (L=1,I1,Q
 [L]×F(X1+(L-1)×H))/598752;I=(U×I)+ $\sum$ (N=1,J-1,I1[N]);"РАЗ
 РЯДНОСТЬ"Е1;"ЕСЛИ"1<.300000₁₀-2"ТО""НА"Э5"ИНАЧЕ""НА"Э4;
 Э6."РАЗРЯДНОСТЬ"Е;X2=XM1[J];DP=(X2×2)/R;H=(X2-X1)/10;U1
 =($\pi \times R^3$)/X2³;I1=(10×H× $\sum$ (L=1,I1,Q[L]×F(X1+(L-1)×H))/598
 752);I1[J]=U1×I1;"НА"Э2;Э5."ЕСЛИ"1>.100000₁₀-3"ТО""ВЫВОД"
 1,I,"ПРОБЕЛ",DP,"ПРОБЕЛ",X2,"СТРОКА";"НА"Э1;Э2.I= $\sum$ (N=1,J,I1
 [N]);J=J+1;X2=T1[J];X1=T1[J];K=K1[J];B=B1[J];M=M1[J];XO
 =TO[J];XM=XM1[J];"РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВОД"01,X2,"МАССИВ"
 I1,"СТРОКА";"РАЗРЯДНОСТЬ"Е;"ЕСЛИ"J>N"ТО""НА"Э4"ИНАЧЕ"
 ""НА"Э3;Э4."ВЫВОД"01,R,"ПРОБЕЛ",DX,"ПРОБЕЛ",X2"ГДЕ"11[3];T
 1[3]=3,334000₁₀2,.117400₁₀3;ТО[3]=3,16,50;K1[3]=.179800₁₀1,.59960
 0₁₀-1,.104400₁₀0;B1[3]=-.176200₁₀,-.711300₁₀-2,.294300₁₀-2;M1[3
]=.100000₁₀-1,.105000₁₀1,.740000₁₀0;XM1[3]=334000₁₀2,.117400₁₀3
 ,.239300₁₀3;DX=.620000₁₀1;R=.550000₁₀-1;Q[I1]=16067,106300,-48
 525,272400,-260550,427368,-260550,272400,-48525,106300,16067;F(
 Z)=((K×(Z-XO))/(1-(B×(Z-XO))))¹(1/M)×(Z²);N=3"КОН
 ЕЦ"◇

На печать после счета выводятся следующие пара-
 метры:

I — значение расхода Q, подсчитанное для текущего значе-
 ния т₂;

DP — соответствующее выведенному расходу Q значе-
 ние перепада давления;

X2 — текущее значение т₂;

R — радиус трубопровода;

DX — шаг интегрирования.

Полное машинное время, затрачиваемое на расчет

трубопровода одного диаметра, порядка 30 мин. Несмотря на увеличение процедуры и времени счета способ аналитического описания кривой течения рациональной функцией имеет дополнительные (помимо вышеизложенных) преимущества перед полиномиальным, состоящие в том, что начальный участок кривой течения от $\gamma=0$ до первого экспериментального значения $\gamma_{\text{экс}}$ аппроксимируется нелинейной функцией, более вероятно приближающейся к реальной. Такая аппроксимация повышает точность расчета зависимости $h_{\text{д}}$ от Q при больших (до 1 м) радиусах трубопровода, когда большинство ожидаемых в реальных условиях значений Q выявляются на начальном участке. Способ расчета применим к любым вязким продуктам с известными реологическими свойствами.

III.3. РАСЧЕТ ПОТЕРЬ ДАВЛЕНИЯ НА ТРЕНИЕ

Программное моделирование позволяет наращивать индекс мерности модели процесса. Экспериментальные данные по реологии продукта (являющиеся основой для расчета потерь давления на трение), используемые в предыдущих моделях, позволяют произвести указанный расчет для фиксированного значения температуры продукта. Экспериментатора же зачастую интересует ход процесса в широкой температурной области. Для рассматриваемого процесса температура является третьим параметром. Увеличение контрольных точек температурного диапазона при измерении зависимости между скоростью сдвига $\dot{\gamma}$ и напряжением сдвига τ ограничено техническими и экономическими факторами, а также неприемлемо для широкого динамического диапазона температур, диаметров трубопровода, удельных расходов с точки зрения компактности представления результатов счета. Исследования показали, что для аналитического описания четырехмерной модели на ЭВМ в выбранном диапазоне параметров такого процесса с последующим восстановлением зависимости перепада давления от удельного расхода достаточно экспериментально измерить зависимость $\tau=f(\dot{\gamma})$ в 4—5 точках температурного диапазона.

Исходными данными для описания модели процесса являются семейства кривых течения в координатах $\dot{\gamma}=f(\tau)$. Значения $\dot{\gamma}$ и τ должны быть за-

даны в табличной форме для двух крайних значений температуры $t_{\min}$ и $t_{\max}$ и двух промежуточных с оптимальными интервалами. Задача описания четырехмерной области значений перепадов давления в зависимости от удельного расхода, температуры и диаметра трубопровода также разбивается на две последовательные части: описательную и расчетную.

В описательной части производится аналитическое описание трехмерной области кривых течения $\tau = f(\gamma, t)$ в заданном экспериментом диапазоне температур. Эта часть состоит из следующих этапов:

все кривые течения в координатах $\gamma = f(\tau)$ разбиваются на несколько участков (зон), ограничиваемых значениями γ , которые различаются на границах зон не более чем на порядок, или определяют точки излома на кривой;

для двух крайних значений температуры $t_{\min}$ и $t_{\max}$ в каждой зоне производится аппроксимация кривых течения функциями вида (III.7) по программе № 5.

Программа № 5 аппроксимации функции и поворота осей системы координат

Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю."ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"N"ВЫПОЛНИТЬ"(A[I]=((X[I]↑M)/(K+(VX(X[I]↑M)))))+Y0;"РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВОД"01,X[I],"ПРОБЕЛ",A[I],"СТРОКА";"РАЗРЯДНОСТЬ"Е;L=√((Σ(J=2,N-1,((A[J]-Y[J])/Y[J])×100)↑2));"РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВОД"01,M,"ПРОБЕЛ",K,"ПРОБЕЛ",B,"ПРОБЕЛ",L,"СТРОКА";"РАЗРЯДНОСТЬ"Е;"ЕСЛИ"L>EPS"ТО""НА"Ц1"ИНАЧЕ""СТОП";Ц1.M=M+DM;"НА"Ю"КОНЕЦ"◇

В рабочую информативу программы записываются следующие параметры:

M — степень аппроксимации функции $\gamma(\tau)$;

EPS — предельное минимальное значение относительной погрешности аппроксимации (в %), по достижении которого счет останавливается;

±DM — знак и шаг варьирования степени аппроксимации;

N — количество узлов аппроксимации;

A[N] — места, бронируемые в памяти для значений аппроксимирующей функции (по числу N);

XO — первое приближение значения аргумента при зна-

- чении функции, равно нулю, т. е. τ_0 (точка пересечения функции $\gamma(\tau)$ с осью абсцисс);
- $X[N]$ — экспериментальные значения напряжений сдвигов в узлах аппроксимации (по числу N);
- $Y[N]$ — экспериментальные значения скорости сдвига в узлах аппроксимации;
- $X3, X4$ — минимальное и максимальное значения напряжения сдвига в зоне аппроксимации;
- $A3, A4$ — минимальное и максимальное значения скорости сдвига в зоне аппроксимации.

Рабочая информация

"ПУСТЬ" $M=.018_{10}1$; $EPS=.05_{10}0$; $DM=-.02_{10}0$; $A[14]$; $N=14$; $Y0=13$; $X[14]$
 $=1_{10}-9, .1968, .3936, .708, 1.181, 2.13, 3.543, 6.38, 10.467, 18.84, 31.4, 56.52, 94$
 $.2, 169.6$; $A3=199.5$; $A4=518.5$; $X3=0.708$; $X4=169.6$; $Y[14]=13, 123.6, 155.5$
 $, 199.5, 235.2, 240, 247.3, 259.3, 279.2, 307.1, 347, 410.6, 474.5, 518.5$; $K=.5071_{10}$
 -2 ; $B=-.3468_{10}-14$ "КОН"

На печать выводятся данные:

- M — значение степени аппроксимации минимизированной функции;
- K, B — значения масштабных коэффициентов;
- L — среднее квадратическое отклонение (в %) относительной погрешности аппроксимации;
- $A[I]$ — массив значений минимизированной функции в узлах аппроксимации;
- $X[I]$ — массив значений аргумента τ в узлах.

В результате минимизации аппроксимирующей функции определяются координаты γ при фиксированных значениях τ .

Так как полученные значения минимизированной функции отличаются от экспериментальных, а кодирование координат кривых течения необходимо производить при фиксированных значениях γ , для найденных аппроксимирующих функций также надо найти новые значения τ , соответствующие фиксируемому для всей области значениям γ .

Для этого надо «повернуть» оси координат на 90° и по известным M, K, B и γ определить новые значения τ . Операция поворота осей системы координат производится по программе № 5. В рабочей информации программы № 5 необходимо поменять местами наименования символов $XO \leftrightarrow YO$, $X[I] \leftrightarrow Y[I]$, $A3 \leftrightarrow X3$, $A4 \leftrightarrow X4$ и дополнить ее значениями $K1, B1, M1$, полу-

ценными в результате минимизации функции $\gamma(\tau)$. После счета на печать выводятся параметры во всех узлах аппроксимации:

$X[I]$ — значения γ , равные исходным экспериментальным;

$A[I]$ — значения τ , полученные в результате минимизации и поворота осей.

Имея для двух крайних значений температуры новые зависимости τ от γ , следует произвести аппроксимацию функции зависимости значений τ от t для каждого фиксированного значения γ от $\gamma=0$ до $\gamma_{\max}$ по программе № 6. Аппроксимирующая функция имеет вид

$$\tau = \frac{1}{K_2 t^{M_2} + B_2}. \quad (\text{III.9})$$

Программа № 6 поворота осей координат для функции $\gamma(\tau)$

Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю.К=(1-A4/A3)/(A4*((X4↑M)-(X3↑M))); B=(1/A3)-(K*(X3↑M)); "ДЛЯ" I=1 "ШАГ" 1 "ДО" N "ВЫПОЛНИТЬ" (A[I]=1/(K*(X[I]↑M)+B)); "РАЗЯДНОСТЬ" E1; "ВЫВОД" 01,X[I],"ПРОБЕЛ",A[I],"СТРОКА"; "РАЗЯДНОСТЬ" E; L=√((Σ(J=1,N,((A[J]-Y[J])/Y[J])×100)↑2)); "РАЗЯДНОСТЬ" E1; "ВЫВОД" 01,M,"ПРОБЕЛ",K,"ПРОБЕЛ",B,"ПРОБЕЛ",L,"СТРОКА"; "РАЗЯДНОСТЬ" E; "ЕСЛИ" L>EPS "ТО" "НА" Ц1 "И НАЧЕ" "СТОП"; Ц1.M=M+DM; "НА" Ю "КОНЕЦ" ◇

В рабочую информативу программы № 6 записываются параметры:

M — степень «прогиба» аппроксимирующей функции;

EPS — предельное минимальное значение относительной погрешности аппроксимации (в %), при котором прекращается счет;

±DM — знак и шаг варьирования степени аппроксимации;

N — количество узлов аппроксимации;

A[N] — места, бронируемые для значений аппроксимирующей функции;

X[N] — массив экспериментальных значений температуры по нарастающей от $t_{\min}$ до $t_{\max}$;

Y[N] — массив значений τ , соответствующих массиву X[N];

X_3, X_4 — минимальное и максимальное значения температуры продукта;

A_3, A_4 — соответствующие им значения τ .

Рабочая информатива

"ПУСТЬ" $M=+.59_{ю1}$; $EPS=.1$; $DM=+.1$; $A[6]$; $N=6$; $A_3=333.3$; $A_4=81.98$;
 $X_3=283$; $X_4=365$; $X[6]=283,293,306,323,345,365$; $Y[6]=333.3,279.2,235.2,151.6,119.1,81.98$ "КОН"◇

После минимизации функции (III.9) на печать выводятся параметры:

M — степень аппроксимации минимизированной функции;

K, B — масштабные коэффициенты;

L — среднее квадратическое отклонение относительной погрешности аппроксимации в узлах (в %).

При восстановлении по минимизированной функции значения τ для искомой температуры диапазона достаточно в рабочую информативу программы № 6 записать значение степени M_2 , полученное при минимизации функции (III.9), а в массиве $X[I]$ значением температуры, для которого производится расчет, заменить ближайшее из массива. После первого цикла счета в массиве выведенных параметров будет находиться искомое значение τ при соответствующей t . Для восстановления кривой течения при любой температуре из заданного диапазона аналогичная процедура восстановления производится по всем рабочим информативам, соответствующим своему фиксированному в области значений температуры значению γ . Число рабочих информатив, в которых кодируются все координаты τ , соответственно равно числу значений γ . На этом описательная процедура заканчивается. Дальнейший расчет зависимости h_d от Q и R производится по программе № 3.

Глава IV. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА БЫСТРОГО ЗАМОРАЖИВАНИЯ ПРОДУКТОВ

IV.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ В ЦЕНТРЕ ОБРАЗЦА

Экспериментальные исследования процесса замораживания калибровочного элемента продукта шаровой конфигурации показали, что при температуре продукта в зоне $0 \div -1^\circ\text{C}$ и при любой температуре хладагента происходит кристаллизация влаги [1]. В неравновесном режиме это явление выражается в появлении пологого участка на графике кривой зависимости относительной температуры θ от нормированного времени τ (кривые 1, 2, 3) или в смене знака производной (кривые 4, 5) (рис. 34). Очевидно, в интервале температур хладагента $-15 \div -120^\circ\text{C}$ существует кривая, начиная с которой производная функции $\theta = f(\tau)$ обращается в нуль (кривая 6). Для нахождения такой оптимальной кривой замораживания можно было бы экспериментально производить замораживание с регистрацией термограмм последовательно с шагом по температуре хладагента в интервале между -30 и -60°C . Однако такая операция весьма дорогостоящая, длительная и трудоемкая.

Если проанализировать графики производных $d\theta/d\tau$ (рис. 35) экспериментальных кривых замораживания, то уже по трем кривым можно обнаружить нелинейность их изменения в зависимости от температуры хладагента. Нахождение равновесного режима сводится к нахождению кривой, расположенной между кривыми 1 и 2, причем достаточно найти значения ординат этой кривой в интервале времени $0.2 < \tau < 0.5$. Для этого сначала необходимо найти аналитические выражения функций, описывающих кривые 1—3 в этом интервале. Из рис. 35 видно, что все кривые имеют три экстремума, поэтому следовало ожидать их наилучшей аппроксимации полиномом 4-й степени, что и подтвердилось при анализе. Кривые 1—3, заданные табличными значениями абсцисс

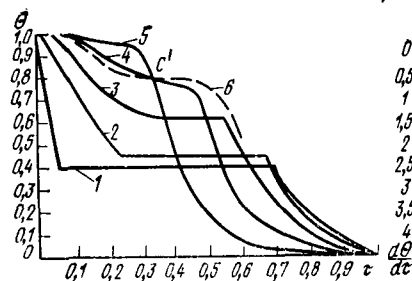


Рис. 34. Зависимость относительной температуры в центре шара от нормированного времени при температуре хладагента:

1 — -5°C ; 2 — -15°C ; 3 — -30°C ;
4 — -60°C ; 5 — -120°C ; 6 — $-50,5^{\circ}\text{C}$

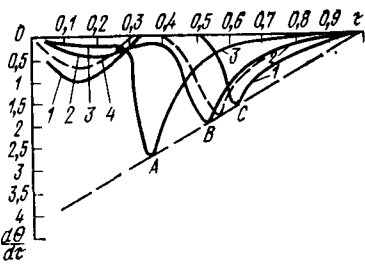


Рис. 35. Зависимость скорости изменения относительной температуры от нормированного времени при температуре хладагента:

1 — -30°C ; 2 — -60° ; 3 — -120°C ;
4 — $-50,5^{\circ}\text{C}$

и ординат, аппроксимировались по программе № 1 полиномами 4-й степени с фиксацией одного из корней (правого) в точке $\tau=1$, $d\theta/d\tau=0$. Максимальная средняя квадратическая погрешность аппроксимации в интервале $0.227 < \tau \leq 0.556$ составила не более 11 %.

Следующий этап — нахождение координат точек, лежащих на всех промежуточных (между 1 и 2) кривых с шагом по температуре хладагента 0.5°C , по которым можно было бы после идентичной аппроксимации восстановить оптимальную кривую. Для этого выбираем интервал $\Delta\tau$, в котором наиболее характерно нелинейное изменение тенденции смещения участков кривых без изменения их вида. Первый интервал $\Delta\tau: 0.2 \div 0.3$. В нем производятся три сечения при $\tau=\text{const}$, имеющие значения $\tau_1=0.227$; $\tau_2=0.253$; $\tau_3=0.267$. Если аналитически описать в этих сечениях изменение координат $d\theta/d\tau$ в зависимости от температуры хладагента полиномом 2-й степени (предотвращая возможность «провалов» функций 3-го или 4-го порядка из-за малого количества узлов аппроксимации — трех), а затем восстановить их значения в интервале $-30 \div -60^{\circ}\text{C}$ с шагом 0.5°C , в результате можно получить таблицу значений функции $d\theta/d\tau = f(t)$ при $\tau=0.227$; 0.253 ; 0.267 .

Далее производится аналогичная процедура аппроксимации в сечениях при $d\theta/d\tau=\text{const}$ и равных $d\theta_1/d\tau=0.5$; $d\theta_2/d\tau=1$; $d\theta_3/d\tau=1.5$ в интервале $0.3 < \tau < 0.6$ и

для трех экстремумов (точки A, B, C). В результате получаются четыре таблицы значений $\tau=f(t)$ с шагом по температуре хладагента $0,5^\circ\text{C}$. Выбирая из полученных таблиц семь значений абсцисс и соответствующие им ординаты для любого фиксированного значения t , можно произвести аппроксимацию кривой по восьми узлам (включая фиксированный корень при $\tau=1$). Методом последовательных приближений программно находится температура, при которой значения ординат аппроксимирующего полинома 4-й степени не заходят в положительную область $d\theta/d\tau$. В данном конкретном случае эти условия выполняются при $t=-50,5^\circ\text{C}$. Максимум функции

$$d\theta/d\tau = 3 \cdot 33 - 56 \cdot 6\tau + 269\tau^2 - 476\tau^3 + 260\tau^4 \quad (\text{IV.1})$$

в области $0.227 < \tau < 0.556$ имеет координаты: $\tau \cong 0.377$; $d\theta/d\tau \cong -0.0306$.

Восстановление кривой зависимости относительной температуры в центре шара от времени при $t=-50,5^\circ\text{C}$ производится интегрированием выражения (IV.1).

$$\theta(\tau) = \int \frac{d\theta}{d\tau} d\tau + C = 3 \cdot 33\tau - 28\tau^2 + 89 \cdot 7\tau^3 - 119\tau^4 + \\ + 52\tau^5 + 0 \cdot 7637. \quad (\text{IV.2})$$

Для восстановления константы интегрирования необходимо определить положение точки C' на рис. 34, соответствующей левой границе интервала определения функции при аппроксимации. Эта операция выполняется также путем аналитического описания тенденции сдвига этой точки в зависимости от температуры хладагента по нелинейному закону в сечении при $\tau=0.227$. В этом сечении фиксируются четыре ординаты θ на кривых 2, 3, 4, 5. По четырем точкам тенденция аппроксимируется полиномом 2-й степени. При восстановлении кривой 6 к получаемым ординатам необходимо прибавлять разницу между значениями θ при $t=-50,5^\circ\text{C}$ и θ при $\tau=0.227$, равную 0,7637. Восстановленная кривая 6 представлена на рис. 34 пунктиром, а ее производная 4 — на рис. 35.

IV.2. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ПО ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ ЗАТРАТАМ

Предварительные исследования семейства нормированных кривых замораживания калибровочного элемента продукта шаровой конфигурации показали, что в



Рис. 36. Термограммы, снятые в центре образца продукта (шар диаметром 40 мм) при температуре хладагента:

1 — -15°C ; 2 — -30°C ; 3 — -60°C ; 4 — -120°C

центре шара неравновесная зона кристаллизации (с плоским участком), стремящаяся к нулю, достигается при температуре хладагента -50.5°C . Исходные данные для оптимизации процесса в ступенчатом режиме представлены семействами кривых зависимости температуры продукта t в центре образца от времени выдержки при различных значениях температуры хладагента $t_{\text{ха}}$ (-15 , -30 , -60 и -120°C) (рис. 36).

После выбора осей координат так, чтобы ось абсцисс проходила через максимальное значение (по модулю) температуры хладагента, исходные данные условно записываются в табличном виде в первом квадранте координат $-t_{\text{ц}} = f(T)$, где T — время выдержки:

$$t_{\text{ха}} = -15^{\circ}\text{C}$$

T , мин	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$-t_{\text{ц}}$, $^{\circ}\text{C}$	137.8	136.64	134	130.33	127	124.67	122.67	120.7	119.3

$$t_{\text{ха}} = -30^{\circ}\text{C}$$

T , мин	0	2	4	6	8	10	12
$-t_{\text{ц}}$, $^{\circ}\text{C}$	137.8	136	130.87	126.2	123,6	122.67	120

$$t_{\text{ха}} = -60^{\circ}\text{C}$$

T , мин	0	2	4	6	8	10	13	14
$-t_{\text{ц}}$, $^{\circ}\text{C}$	137.8	135.8	132.8	128.1	124	120.3	117.5	115

$$t_{\text{ха}} = -120^{\circ}\text{C}$$

T , мин	0	2	4	6	6,5
$-t_{\text{ц}}$, $^{\circ}\text{C}$	137.8	136,4	130	121.7	120

Рассмотрим последовательно режимы процесса.

Переходный режим

Границы участков процесса до момента перехода к равновесному режиму определяются спрямлением экспериментальной кривой от начала процесса ($T=0$) до начала перегиба кривой, т. е. до момента появления первого положительного значения относительной погрешности аппроксимации ее отрезком прямой с фиксацией двух крайних на участке точек по следующей программе.

Программа № 7 спрямления кривых замораживания

Стандартная информатива

"ПУСТЬ" $Ю.К = (A4 - A3) / (X4 - X3)$; $В = A3 - X3 \times (A4 - A3) / (X4 - X3)$; "ДЛЯ" $I = 1$ "ШАГ" I "ДО" N "ВЫПОЛНИТЬ" $(A[I] = X[I] \times K + B; ОТН[I] = ((A[I] - Y[I]) / A[I]) \times 100; "РАЗРЯДНОСТЬ" E1; "ВЫВОД" 01, X[I], "ПРОБЕЛ", Y[I], "ПРОБЕЛ", ОТН[I], "СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ" E); L = \sqrt{(\sum_{J=2, N-1, ((A[J] - Y[J]) / Y[J]) \times 100)^2} / (N - 1))}$; "РАЗРЯДНОСТЬ" $E1$; "ВЫВОД" $01, X4, "ПРОБЕЛ", K, "ПРОБЕЛ", B, "ПРОБЕЛ", L, "СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ" E; "ЕСЛИ" L \geq 4$ "ТО" "НА" $Ц1$ "ИНАЧЕ" "СТОП"; $Ц1. X4 = X4 + DX$; "НА" $Ю$ "КОНЕЦ" $\diamond$

В рабочую информативу заносятся данные:

$X3, X4$ — координаты аргумента левого и правого концов отрезка спрямляющей прямой;

N — число точек на участке спрямления;

$A3, A4$ — значения ординат крайних точек на участке спрямления;

$A[N], ОТН[N]$ — места для значений прямой в узлах и относительных погрешностей спрямления в узлах;

DX — шаг приращения значения аргумента;

$X[N], Y[N]$ — массивы исходных данных по экспериментальной кривой в узлах аппроксимации T и $t_{ц}$.

Рабочая информатива для $t_{ха} = -15^\circ C$

"ПУСТЬ" $X3 = 0; N = 5; A[5]; X4 = 8; ОТН[5]; A3 = 137.8; A4 = 127.0; DX = -2;$
 $X[5] = 0, 2, 4, 6, 8; Y[5] = 137.8, 136.67, 134, 130.3, 127$ "КОН" $\diamond$

Результат счета

$X[1] = 0$	$A[1] = 137.8$	$ОТН[1] = 0$
$X[1] = 2$	$A[1] = 135.1$	$ОТН[1] = -1.16$
$X[1] = 4$	$A[1] = 132.4$	$ОТН[1] = -1.208$
$X[1] = 6$	$A[1] = 129.7$	$ОТН[1] = -0.4626$
$X[1] = 8$	$A[1] = 127$	$ОТН[1] = 0$
$X4 = 8;$	$K = -1.35;$	$B = 137.8;$
		$L = 0.8598\%.$

Рабочая информатива для $t_{ха} = -30^{\circ}\text{C}$

"ПУСТЬ" $X_3=0$; $N=5$; $A[5]$; $X_4=7$; $OTH[5]$; $A_3=137.8$; $A_4=120.5$; $DX=-2$
 $; X[5]=0, 2, 4, 6, 7$; $Y[5]=137.8, 136, 130.87, 126.2, 123.6$ "КОН"◇

Результат счета

$X[I]=0$	$A[I]=137.8$	$OTH[I]=0$
$X[I]=2$	$A[I]=133.7$	$OTH[I]=-1.687$
$X[I]=4$	$A[I]=129.6$	$OTH[I]=-0.913$
$X[I]=6$	$A[I]=125.6$	$OTH[I]=-0.45$
$X[I]=7$	$A[I]=123.6$	$OTH[I]=0$
$X_4=7$;	$K=-2.028$;	$V=137.8$;
		$L=0.97\%$.

Рабочая информатива для $t_{ха} = -60^{\circ}\text{C}$

"ПУСТЬ" $X_3=0$; $N=6$; $A[6]$; $X_4=10$; $OTH[6]$; $A_3=137.8$; $A_4=123.6$; $DX=-2$
 $; X[6]=0, 2, 4, 6, 8, 10$; $Y[6]=137.8, 136, 132.3, 128.7, 124.3, 120.5$ "КОН"◇

Результат счета

$X[I]=0$	$A[I]=137.8$	$OTH[I]=0$
$X[I]=2$	$A[I]=134.3$	$OTH[I]=-1.235$
$X[I]=4$	$A[I]=130.8$	$OTH[I]=-1.08$
$X[I]=6$	$A[I]=127.4$	$OTH[I]=-1$
$X[I]=8$	$A[I]=123.9$	$OTH[I]=-0.27$
$X[I]=10$	$A[I]=120.5$	$OTH[I]=0$
$X_4=10$;	$K=-1.73$;	$V=137.8$;
		$L=0.86\%$.

Рабочая информатива для $t_{ха} = -120^{\circ}\text{C}$

"ПУСТЬ" $X_3=0$; $N=5$; $A[5]$; $X_4=6.5$; $OTH[5]$; $A_3=137.8$; $A_4=120$; $DX=+5$
 $; X[5]=0, 2, 4, 6, 6.5$; $Y[5]=137.8, 136.4, 130, 121.7, 120$ "КОН"◇

Результат счета

$X[I]=0$	$A[I]=137.8$	$OTH[I]=0$
$X[I]=2$	$A[I]=132.3$	$OTH[I]=-3.08$
$X[I]=4$	$A[I]=126.8$	$OTH[I]=-2.486$
$X[I]=6$	$A[I]=121.3$	$OTH[I]=-0.27$
$X[I]=6.5$	$A[I]=120$	$OTH[I]=0$
$X_4=6.5$;	$K=-2.738$;	$V=137.8$;
		$L=1.93\%$.

Тангенс угла наклона K отрезка прямой для каждой температуры определяет интегральную скорость $v_{и}$ замораживания в переходном режиме. Значения интегральных скоростей процесса в зависимости от температуры хладагента приведены ниже.

$t_{ха}, ^{\circ}\text{C}$	-15	-30	-60	-120
$v_{и}, ^{\circ}\text{C/мин}$	-1.35	-2.028	-1.73	-2.738

Функция зависимости интегральной скорости процесса от температуры хладагента определяется по программе № 1 аппроксимацией полиномом 3-й степени.

Рабочая информатива

"ПУСТЬ" D[14]; A[5,5]; B[5]; ЧМ=5; EPS=1_ю-12; Г=1; B1[25]; ЧТ=4; N1[1]=3; K1[1]=4; ЧВ[1]=4; У[4]; Х[4]; Х1[4]=-15, -30, -60, -120; У1[4]=1.35, 2.08, 1.73, 2.74 "КОН" ◇

Результат счета: $R1=0,3 \cdot 10^{-6}$; $L2=0,2 \cdot 10^{-6}$; $B[5]=-0,2708555$; $-0,14601$; $-0,00275$; $-0,1 \cdot 10^{-4}$.

Функция $v_{\Pi}=f(t_{\text{ха}})$ запишется в виде полинома

$$v_{\Pi} = -0.27 - 0.146t_{\text{ха}} - 0.0027t_{\text{ха}}^2 - 0.00001t_{\text{ха}}^3. \quad (\text{IV.3})$$

Функция зависимости времени существования переходного процесса от температуры хладагента определяется по исходным данным, которые в свою очередь определяются границами спрямленных участков Х4 экспериментальных кривых $t=f(T)$ по времени:

$t_{\text{ха}}, ^\circ\text{C}$	-15	-30	-60	-120
$T_{\Pi}, \text{мин}$	8	7	10	6.5

По стандартной программе № 1 производится аппроксимация этой зависимости полиномом 3-й степени.

Рабочая информатива для $T_{\Pi}=f(t_{\text{ха}})$

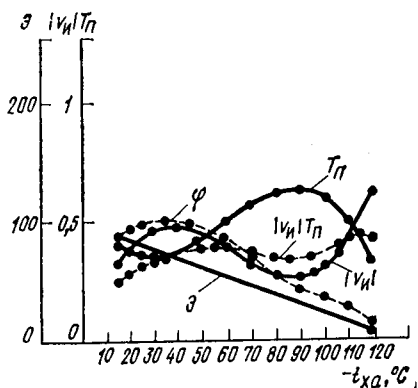
"ПУСТЬ" D[14]; A[5,5]; B[5]; ЧМ=5; EPS=1_ю-12; Г=1; B1[25]; ЧТ=4; N1[1]=3; K1[1]=4; ЧВ[1]=4; У[4]; Х[4]; Х1[4]=-15, -30, -60, -120; У1[4]=-8, -7, -10, -6.5 "КОН" ◇

Функция T_{Π} от $t_{\text{ха}}$ представляется полиномом

$$T_{\Pi} = -12.071 - 0.397t_{\text{ха}} - 0.009167t_{\text{ха}}^2 - 0.000052t_{\text{ха}}^3. \quad (\text{IV.4})$$

Функция зависимости $\mathcal{E}$ энергетической экономичности процесса от $t_{\text{ха}}$ определяется при условии, что затраты энергии на поддержание температуры хладагента зависят от нее линейно. Тогда на поддержание температуры -120°C необходимо затрачивать 120 условных энергетических единиц (уе) в единицу времени, температуры -15°C — 15 уе. Энергетическая экономичность есть величина, обратная затратам, и в нормированных единицах (по максимальному значению функции

Рис. 37. Переходный режим. Графики нормированных функций температуры хладагента: T_{Π} — времени существования переходного процесса; $|v_{\Pi}|$ — модуля интегральной скорости охлаждения; $|v_{\Pi}|T_{\Pi}$ — модуля максимально достижимой температуры в центре образца; $\mathcal{E}$ — энергетической экономичности; Φ — оптимизации



$|v_{\Pi}|T_{\Pi}$ определится для $t_{xa} = -120^{\circ}\text{C}$ как $\mathcal{E} = 10.94$ узе, соответственно для $t_{xa} = -15^{\circ}\text{C}$ $\mathcal{E} = 87.5$ узе.

Функция зависимости $\mathcal{E}$ от t_{xa} определяется аппроксимацией полиномом 1-й степени по исходным данным:

$t_{xa}, ^{\circ}\text{C}$	-15	-120
$\mathcal{E}$, узе	87.5	10.94

Рабочая информатива

"ПУСТЬ" $D[14]$; $A[5,5]$; $B[5]$; $CM=5$; $EPS=1_{\text{ю}}-12$; $\Gamma=1$; $B1[25]$; $CT=2$; $N1[1]=1$; $K1[1]=2$; $CB[1]=2$; $X[2]$; $Y[2]$; $X1[2]=-15, -120$; $Y1[2]=87.5, 10.93$ " КОИ" $\diamond$

Нормированная функция $\mathcal{E} = f(t_{xa})$ имеет вид

$$\mathcal{E} = 98.63 + 0.73677t_{xa}. \quad (\text{IV.5})$$

Нормирование функции $v_{\Pi} = f(t_{xa})$ в области определения по оси ординат приводит ее значения в соответствие с экстремальным значением функции $T_{\Pi} = f(t_{xa}) - 12.75$. Нормирующий коэффициент K_{Π} получается делением этого значения на максимальное по модулю значение функции $v_{\Pi}T_{\Pi} = -2.738$; $K_{\Pi} = 4.657$. Умножив на K_{Π} все значения коэффициентов полинома, описывающего эту функцию, получим нормированный полином

$$|v_{\Pi(\text{норм})}| = 1.309 + 0.683t_{xa} + 0.013t_{xa}^2 + 0.000068t_{xa}^3. \quad (\text{IV.6})$$

Функции $v_{и(норм)}$ и $T_{п}$ воспроизводятся подстановкой в выражения полиномов значений аргумента в области определения от -15 до -120°C с шагом через -5°C . Графики этих функций представлены на рис. 37. Точные значения функций рассчитываются по программам № 8 и 9.

Программа № 8 воспроизведения функции $v_{и(норм)}$

"ПУСТЬ"Ю.Х=-15; Ж.У=В0+В1×Х+В2×Х↑2+В3×Х↑3; "ВЫВОД"01,Х,"ПРОБЕЛ",У,"ПРОБЕЛ"; DX=-5; Х=Х+DX; "НА"Ж"ГДЕ" В0=.130932₁₀1; В1=.683000₁₀0; В2=.129200₁₀-1; В3=.683000₁₀-4"КОНЕЦ"◇

Результат счета

Х	У	Х	У	Х	У
-15	-6.259	-45	-9.49	-75	-6.07
-20	-7.73	-50	-9.08	-80	-5.6
-25	-8.76	-55	-8.54	-85	-5.4
-30	-9.399	-60	-7.92	-90	-5.3
-35	-9.7	-65	-7.27	-95	-5.57
-40	-9.71	-70	-6.6	-100	-6.13

Программа № 9 воспроизведения функции $T_{п}$

"ПУСТЬ"Ю.Х=-15; Ж.У=В0+В1×Х+В2×Х↑2+В3×Х↑3; "ВЫВОД"01,Х,"ПРОБЕЛ",У,"ПРОБЕЛ"; DX=-5; Х=Х+DX; "НА"Ж"ГДЕ" В0=-.120700₁₀2; В1=-.397000₁₀0; В2=-.920000₁₀-2; В3=-.520000₁₀-4"КОНЕЦ"◇

Результат счета

Х	У	Х	У	Х	У
-15	-7.99	-50	-8.6	-85	-12.7
-20	-7.38	-55	-9.3	-90	-12.64
-25	-7.06	-60	-10	-95	-12.5
-30	-7.0	-65	-10.7	-100	-11.99
-35	-7.17	-70	-11.4	-105	-11.2
-40	-7.52	-75	-11.9	-110	-10
-45	-8.0	-80	-12.5	-115	-8.6
				-120	-6.5

Графическое воспроизведение функции $\mathcal{E}$ (см. рис. 37) производится по двум точкам таблицы исходных данных.

Функция зависимости максимально достижимой температуры хладагента $|v_{и}|T_{п}=f(t_{ха})$ в переходном режиме воспроизводится по программе № 10.

Программа № 10 воспроизведения функции максимально достижимой температуры хладагента

"ПУСТЬ"Ю.Х=-15; Ж.У=(В0+В1×Х+В2×Х↑2+В3×Х↑3)×(В4+В5×Х+В6×Х↑2+В7×Х↑3); "ВЫВОД"01,Х,"ПРОБЕЛ",У,"ПРОБЕЛ"; DX=-5; Х=Х+DX;
 "НА"Ж"ГДЕ"В0=-.130900₁₀1; В1=-.683000₁₀0; В2=-.129000₁₀-1; В3=-.680000₁₀-4; В4=-.120700₁₀2; В5=-.397000₁₀0; В6=-.920000₁₀-2;
 В7=-.520000₁₀-4"КОНЕЦ"◇

Результат счета

Х	У	Х	У	Х	У
-15	-50	-50	-78	-85	-67.6
-20	-57	-55	-79.5	-90	-67.4
-25	-61.8	-60	-79.2	-95	-69.4
-30	-65.8	-65	-77.7	-100	-73.5
-35	-69.5	-70	-75.2	-105	-82.2
-40	-73	-75	-72.2	-110	-84.9
-45	-76	-80	-69.5	-115	-87.5
				-120	-82.5

Произведение трех нормированных функций $|v_i|$, T_p и $\mathcal{E}$ (с нормирующим коэффициентом $1/5064$, приводящим значение функции φ к единице) имеет экстремум в области определения всех трех функций. Взяв производную φ' по t_{xa} и приравняв ее нулю, можно найти то значение t_{xa} , при котором энергетические затраты на достижение максимального значения температуры продукта за минимальное время оптимальны, т. е. выигрыш во времени за счет увеличения скорости течения процесса поглощается потерями в его энергетике. Для построения графика функции φ в области определения сначала воспроизводят ее по программе № 11 с шагом -5°C , а затем в зоне экстремума с шагом -1°C .

Программа № 11 воспроизведения функции φ

"ПУСТЬ"Ю.Х=-15; Ж.У=((В0+В1×Х+В2×Х↑2+В3×Х↑3)×(В4+В5×Х+В6×Х↑2+В7×Х↑3))×(В8+В9×Х)/5064; "ВЫВОД"01,Х,"ПРОБЕЛ",У,"ПРОБЕЛ"; DX=-5; Х=Х+DX; "НА"Ж"ГДЕ"В0=-.130900₁₀1; В1=-.683000₁₀0; В2=-.129000₁₀-1; В3=-.680000₁₀-4; В4=-.120700₁₀2; В5=-.397000₁₀0; В6=-.920000₁₀-2; В7=-.520000₁₀-4; В8=.986300₁₀2; В9=.740000₁₀0"КОНЕЦ"◇

Результат счета с шагом $\Delta X = -5^\circ\text{C}$

X	Y	X	Y	X	Y
-15	-0.866	-50	-0.95	-85	-0.48
-20	-0.945	-55	-0.91	-90	-0.43
-25	-0.979	-60	-0.85	-95	-0.39
-30	-0.99	-65	-0.78	-100	-0.36
-35	-1	-70	-0.7	-105	-0.33
-40	-0.997	-75	-0.62	-110	-0.29
-45	-0.98	-80	-0.54	-115	-0.24
				-120	-0.17

Результат счета в зоне экстремума с шагом $\Delta X = -1^\circ\text{C}$

X	-33	-34	-35	-36	-37	-38
Y	-0.998	-0.9995	-1.00009	-1.00029	-1.00021	-0.9997

Оптимальное значение температуры хладагента в переходном режиме, при котором достигается максимальное значение температуры продукта за минимум времени выдержки и оптимальных энергозатратах, составляет -36°C . Границы участка переходного режима (начала участка кристаллизации) при температуре на первой ступени замораживания $t_{\text{ха}} = -36^\circ\text{C}$ определяются следующим образом.

По полиному (IV.4) $T_{\text{п}} = f(t_{\text{ха}})$ рассчитывается время переходного режима для $t_{\text{ха}} = -36^\circ\text{C}$:

$$T_{\text{п}-36^\circ\text{C}} = 12.07 - 14.29 + 11.66 = 7.22 \text{ мин.}$$

По полиному $v_{\text{и}} = f(t_{\text{ха}})$ рассчитывается интегральная скорость процесса для $t_{\text{ха}} = -36^\circ\text{C}$: $v_{\text{и}-36^\circ\text{C}} = 2.1^\circ\text{C/мин.}$

Зная скорость и время для $t_{\text{ха}} = -36^\circ\text{C}$, определим значение перепада температуры в центре шара, до которой охладится образец: $\Delta t_{-36^\circ\text{C}} = 2.1 \cdot 7.22 = 15.16^\circ\text{C}$.

Температура в центре образца при $t_{\text{ха}} = -36^\circ\text{C}$ через 7.22 мин примет значение $+2.64^\circ\text{C}$, т. е. $t = 17.8 - 15.6$.

Равновесный режим

Функция зависимости времени существования режима до критической точки от температуры хладагента определяется так: из графиков кривых замораживания (для центра шара) в реальном масштабе времени (см. рис. 38) выводится зависимость от $t_{\text{ха}}$ времени равновесного режима—в интервале от точки перегиба до начала горизонтального участка;

$t_{\text{ха}}, ^\circ\text{C}$	-15	-30	-50.5
$T_{\text{рав}}, \text{мин}$	8	3.5	0

Эти исходные данные аппроксимируются полиномом 2-й степени по программе № 1.

Рабочая информатива для $T_{\text{рав}} = f(t_{\text{ха}})$

"ПУСТЬ" D[14]; A[5,5]; B[5]; ЧМ=5; EPS=1_ю-12; Г=1; В1[25]; ЧТ=3; N
1[1]=2; К1[1]=3; ЧВ[1]=3; X[3]; Y[3]; X1[3]=-15,-30,-50.5; Y[3]=8
.3,5,0"КОН"◇

Функция $T_{\text{рав}} = f(t_{\text{ха}})$ запишется выражением

$$T_{\text{рав}}(t_{\text{ха}}) = 14.1386 + 0.46386t_{\text{ха}} + 0.0036414t_{\text{ха}}^2. \quad (\text{IV.7})$$

Ввиду того, что для $t_{\text{ха}} = -50.5^\circ\text{C}$ горизонтальный участок кристаллизации «стягивается» в точку ($T_{\text{рав}} = 0$), а в интервале температур $-15 \div -50.5^\circ\text{C}$ время равновесного режима достоверно определено только для двух значений $t_{\text{ха}}$: -15 и -30°C , то для аналитического описания постоянных времени процесса в исследуемом режиме необходимо в интервале температур от -30 до -50.5°C восстановить $T_{\text{рав}}$ еще минимум для двух промежуточных значений $t_{\text{ха}}$ (-36 и -42°C) и для $t_{\text{ха}} = -49^\circ\text{C}$, лежащей близко к $t_{\text{ха}} = -50^\circ\text{C}$, но со временем $T_{\text{рав}}$, не обращаясь в нуль. Воспроизведением функции по полиному (IV.7) $T_{\text{рав}} = f(t_{\text{ха}})$ рассчитывается время $T_{\text{рав}}$ для выбранных значений $t_{\text{ха}}$:

$t_{\text{ха}}, ^\circ\text{C}$	-36	-42	-49	-15	-30
$T_{\text{рав}}, \text{мин}$	2.16	1.08	0,15	8	3.5

Для определения зависимости постоянных времени $\tau_{\text{рав}}$ от $t_{\text{ха}}$ в процессе охлаждения центра шара из семейства кривых рис. 37 формируются исходные данные. Так как постоянные времени определяются аппроксимирующей экспонентой, то для ее подбора вместо участка кривой замораживания в равновесном режиме необходимо перенести оси координат так, чтобы ось абсцисс проходила для каждой кривой через максимальное (по модулю) значение температуры продукта, достигаемое при $T \rightarrow \infty$ (практически равное $t_{\text{ха}}$), а ось ординат — через границу между участками переходного и равновесного режимов. Исходя из этих условий исходные данные запишутся так:

$$-t_{\text{ц}} = f(T_{\text{рав}}) \text{ для } t_{\text{ха}} = -15^\circ\text{C:}$$

$T, \text{ мин}$	0	2	4	6	8
$-t_{\text{ц}}, ^\circ\text{C}$	22	19.67	17.67	15.67	14.33

$$-t_{\text{ц}} = f(T_{\text{рав}}) \text{ для } t_{\text{ха}} = -30^\circ\text{C};$$

$T, \text{ мин}$	0	1	3
$-t_{\text{ц}}, ^\circ\text{C}$	33.6	32.67	30

Повторим порядок расчета начального значения $t_{\text{ц}}$ продукта на участке равновесного режима (оно совпадает с конечным значением $t_{\text{ц}}$ продукта на участке переходного режима) для $t_{\text{ха}} = -36^\circ\text{C}$:

по полиному $T_{\text{п}} = f(t_{\text{ха}})$: $T_{\text{п}-36^\circ\text{C}} = 7.22 \text{ мин}$;

по полиному $v_{\text{и}} = f(t_{\text{ха}})$: $|v_{\text{и}-36^\circ\text{C}}| = 2.1^\circ\text{C/мин}$.

Перепад температуры продукта $\Delta t_{\text{ц}} = 7.22 \cdot 2.1 = 15.16^\circ\text{C}$.

Температура $t_{\text{рав}-36^\circ\text{C}} = t_{\text{н}} - \Delta t_{\text{ц}} = 17.8 - 15.16 = 2.64^\circ\text{C}$
 $-t_{\text{ц}} = f(T_{\text{рав}}) \text{ для } t_{\text{ха}} = -36^\circ\text{C}$:

$T, \text{ мин}$	0	2.16
$-t_{\text{ц}}, ^\circ\text{C}$	36.64	34.5

для $t_{\text{ха}} = -42^\circ\text{C}$: $T_{\text{п}-42^\circ\text{C}} = 7.7 \text{ мин}$; $|v_{\text{и}-42^\circ\text{C}}| = 2.08^\circ\text{C/мин}$; $t_{\text{рав}-42^\circ\text{C}} = 1.8^\circ\text{C}$.

$-t_{\text{ц}} = f(T_{\text{рав}}) \text{ для } t_{\text{ха}} = -42^\circ\text{C}$:

$T, \text{ мин}$	0	1.08
$-t_{\text{ц}}, ^\circ\text{C}$	43.8	40.5

для $t_{\text{ха}} = -49^\circ\text{C}$: $T_{\text{п}-49^\circ\text{C}} = 8.5 \text{ мин}$; $|v_{\text{и}-49^\circ\text{C}}| = 1.99^\circ\text{C/мин}$; $t_{\text{рав}-49^\circ\text{C}} = 0.9^\circ\text{C}$.

$-t_{\text{ц}} = f(T_{\text{рав}}) \text{ для } t_{\text{ха}} = -49^\circ\text{C}$:

$T, \text{ мин}$	0	0.15
$-t_{\text{ц}}, ^\circ\text{C}$	49.9	47.5

По исходным данным $-t = f(T_{\text{рав}})$ производится аппроксимация зависимости вида

$$-t_{\text{ц}} = -t_{\text{н}} e^{-T/\tau_{\text{рав}}}, \quad (\text{IV.8})$$

и по программе № 12 определяются постоянные времени при минимуме погрешности аппроксимации.

Программа № 12 определения постоянных времени $\tau_{\text{рав}}$ Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю."РАЗРЯДНОСТЬ"Е; DT=V×T; "ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"Н"ВЫ
 ПОЛНИТЬ" (A[I]=A2-(A2-A1)×e↑(-(X[I]/T))); DY[I]=Y[I]-A[I];
 ОТН[I]=(DY[I]/Y[I])×100;"РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВОД"01,X[I],"ПР
 ОБЕЛ",Y[I],"ПРОБЕЛ",A[I],"ПРОБЕЛ",ОТН[I],"СТРОКА";"РАЗРЯДН
 ОСТЬ"Е; L=√((Σ(J=2,N,((A[J]-Y[J])/Y[J])×100)²)/(N-1));"Р
 АЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВОД"01,T,"ПРОБЕЛ",L,"СТРОКА";"РАЗРЯДНО
 СТЬ"Е;"ЕСЛИ" L>EPS"ТО""НА"Ц"ИНАЧЕ""СТОП"; Ц.T=T+DT;"НА"
 Ю"КОНЕЦ"◇

В рабочую информативу записываются следующие параметры:

±B — знак и числовое значение доли, которую составля-
 ет шаг вариации постоянной времени экспоненты, от
 значения этой постоянной;

EPS — числовое значение погрешности аппроксимации,
 по достижении которого прекращается счет;

N — количество узлов аппроксимации;

T — первое приближение постоянной времени экспонен-
 ты;

DY[N], ОТН[N] — места, бронируемые для значений аб-
 солютной и относительной погрешности в узлах ап-
 проксимации;

A2 — асимптотическое значение температуры продукта в
 выбранной системе координат, к которому стремится
 аппроксимирующая экспонента;

A3 — значение температуры продукта в выбранной сис-
 теме координат в узле, к которому жестко «привя-
 зывается» экспонента;

A1 — начальное значение температуры продукта в вы-
 бранной системе координат (при $T=0$);

X3 — координата аргумента в узле привязки;

X[N] — массив значений аргумента (исходные данные) —
 времени T в узлах аппроксимации;

Y[N] — массив значений функции (исходные данные) —
 температуры продукта — $t_{\text{ц}}$ в узлах.

На печать выводятся:

T — значение времени экспоненты;

L — средняя квадратическая погрешность аппроксима-
 ции.

Рабочая информатива для $t_{\text{ха}} = -15^{\circ}\text{C}$

"ПУСТЬ" $\text{В} = -0.1$; $\text{EPS} = 0.5$; $\text{N} = 5$; $\text{A}[5]$; $\text{T} = 19$; $\text{У}[5]$; $\text{ОТН}[5]$; $\text{A}_3 = 14.33$; $\text{A}_2 = 0$; $\text{A}_1 = 22$; $\text{X}_3 = 8$; $\text{X}[5] = 0, 2, 4, 6, 8$; $\text{У}[5] = 22, 19.67, 17.67, 15.67, 14.33$ "КОН"◇

Результат счета

X [I]	0	2	4	6	8
A [I]	22	19.72	17.68	15.85	14.2
ОТН [I]	0	-0.27	-0.06	-5.95	0.8435

$\text{T} = 18.3$ мин; $\text{L} = 0.73\%$.

Рабочая информатива для $t_{\text{ха}} = -30^{\circ}\text{C}$

"ПУСТЬ" $\text{В} = -0.1$; $\text{EPS} = 0.5$; $\text{N} = 3$; $\text{A}[3]$; $\text{T} = 19$; $\text{У}[3]$; $\text{ОТН}[3]$; $\text{A} = 30.00$; $\text{A}_2 = 0$; $\text{X}_3 = 3$; $\text{X}[3] = 0, 1, 3$; $\text{У}[3] = 33.6, 32.67, 30$; $\text{T} = 26.2$; $\text{A}_1 = 33.6$ "КОН"◇

Результат счета

X [I]	0	1	3
A [I]	33.6	32.34	29.96
ОТН [I]	0	1.0	0.12

$\text{T} = 26.5$ мин; $\text{L} = 0.715\%$.

Рабочая информатива для $t_{\text{ха}} = -36^{\circ}\text{C}$

"ПУСТЬ" $\text{В} = -0.1$; $\text{EPS} = 0.5$; $\text{N} = 2$; $\text{A}[2]$; $\text{T} = 19$; $\text{У}[2]$; $\text{ОТН}[2]$; $\text{A}_2 = 0$; $\text{У}[2] = 38.64, 34.5$; $\text{T} = 17.6$; $\text{A}_1 = 38.64$; $\text{X}[2] = 0, 2.16$; $\text{X}_3 = 2.16$; $\text{A}_3 = 34.5$ "КОН"◇

Результат счета

X [I]	0	2.16
A [I]	38.64	34.17
ОТН [I]	0	0.94

$\text{T} = 19.1$ мин; $\text{L} = 0.94\%$.

Рабочая информатива для $t_{\text{ха}} = -42^{\circ}\text{C}$

"ПУСТЬ" $\text{В} = -0.1$; $\text{EPS} = 0.5$; $\text{N} = 2$; $\text{A}[2]$; $\text{T} = 19$; $\text{У}[2]$; $\text{ОТН}[2]$; $\text{A}_2 = 0$; $\text{У}[2] = 43.80, 40.5$; $\text{T} = 13.8$; $\text{A}_1 = 43.80$; $\text{X}[2] = 0, 1.08$; $\text{X}_3 = 1.08$; $\text{A}_3 = 40.5$ "КОН"◇

Результат счета

X [I]	0	1.08
A [I]	43.8	40.5
ОТН [I]	0	0.007

$\text{T} = 13.8$ мин; $\text{L} = 0.007\%$.

Рабочая информатива для $t_{ха} = -49^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" $B=0.1$; $EPS=0.5$; $N=2$; $A[2]$; $T=19$; $Y[2]$; $OTH[2]$; $A2=0$; $X3=0$; $Y[2]=49.90, 47.5$; $T=3.04$; $A1=49.90$; $X[2]=0, 0.15$; $A3=47.5$ "КОН" $\diamond$

Результат счета

$X[1]$	0	0.15
$A[1]$	49.9	47.49
$OTH[1]$	0	0.005

$$T = 3.04 \text{ мин}; \quad L = 0.005\%.$$

Результаты определения постоянных времени процесса в равновесном режиме (зависимость $\tau_{рав}$ от $t_{ха}$):

$t_{ха}, ^\circ\text{C}$	-15	-30	-36	-42	-49
$\tau_{рав}, \text{мин}$	18.3	26.5	19.1	13.8	3.04

Определение функции зависимости постоянной времени от температуры хладагента в равновесном режиме проводится аппроксимацией полиномом 2-й степени по программе № 1.

Рабочая информатива аппроксимации функции $\tau_{рав} = f(t_{ха})$

"ПУСТЬ" $D[14]$; $A[5,5]$; $B[5]$; $CM=5$; $EPS=1_{ю}-12$; $\Gamma=1$; $B1[25]$; $CT=5$; $N1[1]=2$; $K1[1]=5$; $CB[1]=3$; $X[5]$; $Y[5]$; $X1[5]=-15, -30, -36, -42, -49$; $Y1[5]=18.3, 26.5, 19.1, 13.8, 3.04$ "КОН" $\diamond$

Результат счета: $L2=1.3\%$; $B_0=-7.3677$; $B1=-2.4134$; $B2=-0.04518$.

Функция $\tau_{рав} = f(t_{ха})$ запишется полиномом

$$\tau_{рав} = -7.3677 - 2.4134 t_{ха} - 0.04518 t_{ха}^2. \quad (IV.9)$$

Графики функций $T_{рав} = f(t_{ха})$ и $\tau_{рав} = f(t_{ха})$, воспроизведенных в области определения, представлены на рис. 38. Все функции нормированы по ординате к единице по аналогии с переходным режимом.

При определении функции оптимальности протекания процесса в равновесном режиме находят нормирующие коэффициенты для функции $T_{рав}(t_{ха})$ $K_{н1}=1/8$ и для функции $\tau_{рав}(t_{ха})$ $K_{н2}=1/25$ (в соответствии с максимальными значениями функций в области определения и приведения их к 1). Общий $K_n=1/200$. Максимум функции находится дифференцированием ее и приравни-

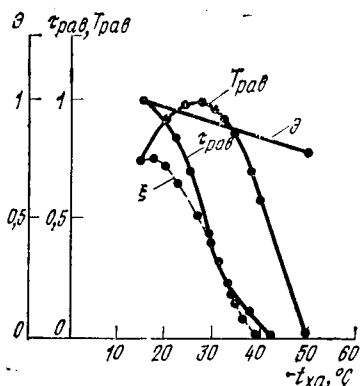


Рис. 38. Равновесный режим. Графики нормированных функций температуры хладагента: $T_{рав}$ — времени существования равновесного режима; $\tau_{рав}$ — постоянной времени процесса охлаждения; ξ — энергетической экономичности; ξ — оптимизации

ванием производной нулю. Для графического построения (см. рис. 38) функция $\xi = T_{рав}\tau_{рав}$ воспроизводится по программе № 13 с шагом -1°C .

Программа № 13 воспроизведения $\xi = T_{рав}\tau_{рав}$

"ПУСТЬ"Ю.X=-15; Ж.У=((ВО+В1×Х+В2×Х↑2)×(В3+В4×Х+В5×Х↑2))/2.00;"ВЫВОД"01,Х,"ПРОБЕЛ",У,"ПРОБЕЛ"; DX=-1; Х=Х+DX;"НА"Ж"ГДЕ"ВО=.141400₁₀2; В1=.460000₁₀0; В2=.360000₁₀-2; В3=-.737000₁₀1; В4=-.241000₁₀1; В5=-.450000₁₀-1"КОНЕЦ"◇

Результат счета

X [I]	-15	-16	-17	-18
Y [I]	0.74	0.7508	0.7507	0.745

Максимум функции ξ достигается при $t_{xa} = -16^\circ\text{C}$; $\xi_{\max} = 0.7508$. Так как этот максимум находится практически на границе области определения, то оптимум по энергетике остается там же, при $t_{xa} = -16^\circ\text{C}$.

Для определения времени выдержки в равновесном режиме необходимо рассчитать по полиному $\tau_{рав} = f(t_{xa})$ постоянную времени процесса при $t_{xa} = -16^\circ\text{C}$. Расчет производится по программе № 14.

Программа № 14 расчета $\tau_{рав} = f(t_{xa})$

"ПУСТЬ"Ю.X=-16; Ж.У=(ВО+В1×Х+В2×Х↑2); "ВЫВОД"01,Х,"ПРОБЕЛ",У,"ПРОБЕЛ"; DX=-5; Х=Х+DX;"НА"Ж"ГДЕ"ВО=-.737000₁₀1; В1=-.241000₁₀1; В2=-.45001₁₀-1"КОНЕЦ"◇

Результат счета: $X = -16$, $Y = 19,68$. Постоянная времени $\tau_{\text{рав}} - 16^\circ\text{C} = 19,68$ мин.

Конечное значение температуры продукта в конце участка переходного режима составляет $2,64^\circ\text{C}$. При определении времени протекания процесса по формуле, описывающей экспоненциальный закон изменения $-t_{\text{ц}} = f(T)$ во времени (по программе № 12), начальное значение $-t_{\text{цн}}$ рассчитывается как сумма: $-t_{\text{цн}} = 16 + 2,64 = 18,64^\circ\text{C}$.

Конечное значение температуры на экспоненте рассчитывается как разность между $-t_{\text{цн}}$ и суммой температур, на которые должен охладиться продукт от $2,64$ до $-1,5^\circ\text{C}$ (температура кристаллизации): $2,64 + 1,5 = 4,14^\circ\text{C}$, т. е. $-t_{\text{цк}} = 18,64 - 4,14 = 14,5^\circ\text{C}$.

Рабочая информация программы № 12 расчета времени протекания процесса

"ПУСТЬ" $B = +0,1$; $EPS = .5$; $N = 2$; $A[2]$; $Y[2]$; $OTH[2]$; $A3 = 14,5$; $A2 = 0$; $A1 = 18,64$; $T = 19,68$; $X3 = 4,9$; $X[2] = 0,4,9$; $Y[2] = 18,64, 14,5$ "КОН" $\diamond$

Результат счета

$X[1]$	0	4,9
$Y[1]$	18,64	14,53
$OTH[1]$	0	-0,22

Время выдержки продукта при температуре $t_{\text{ха}} = -16^\circ\text{C}$ составляет 4,9 мин. Конечное значение $t_{\text{рав.к}} = -1,5^\circ\text{C}$.

Режим вымораживания

Интегральная скорость вымораживания образца продукта (в центре) $v_{\text{вым}}$ при температурах -60 и -120°C определяется спрямлением экспериментальных кривых на участках от $t = -15^\circ\text{C}$ по программе № 7. Исходные данные записываются по семейству кривых замораживания в системе координат, выбираемых аналогично предыдущему режиму:

$$t_{\text{ха}} = -60^\circ\text{C}$$

T , мин	0	1	3	4	5,1
$-t_{\text{ц}}$, $^\circ\text{C}$	58,5	57,5	55	48	30

$$t_{\text{ха}} = -120^\circ\text{C}$$

T , мин	0	0,5	1,2
$-t_{\text{ц}}$, $^\circ\text{C}$	118,5	113,5	90

Рабочая информатива для функции $v_{\text{вым}} = f(T)$ при $t_{\text{ха}} = -60^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" $B = -0.1$; $EPS = 5$; $X3 = 0$; $N = 5$; $A[5]$; $Y[5]$; $OTH[5]$; $A3 = 58.5$; $A4 = 30$; $X4 = 5.1$; $DX = 0.1$; $X[5] = 0.1, 3, 4, 5.1$; $Y[5] = 58.5, 57.5, 55, 48, 30$ "КОН" ◇

Результат счета

X [I]	0	1	3	4	5.1
A [I]	58.5	52.9	41.73	36.14	30
OTH [I]	0	-8.6	-31.7	-32.8	0

$X4 = 5.1$; $K = -5.588$; $B = 58.5$; $L = 17.7\%$;
 $|v_{\text{вым}} - 60^\circ\text{C}| = 5.588^\circ\text{C/мин.}$

Рабочая информатива при $t_{\text{ха}} = -120^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" $B = -0.1$; $EPS = 5$; $X3 = 0$; $N = 3$; $A[3]$; $DY[3]$; $OTH[3]$; $A4 = 90$; $X4 = 1.2$; $DX = 0.1$; $X[3] = 0, 0.5, 1, 2$; $Y[3] = 118.5, 113.5, 90$; $A3 = 118.5$ "КОН" ◇

Результат счета

X [I]	0	0.5	1.2
A [I]	118.5	107.2	90
OTH [I]	0	-5.87	0

$X4 = 1.2$; $K = -24.58$; $B = 118.5$; $L = 3.9\%$;
 $|v_{\text{вым}} - 120^\circ\text{C}| = 24.58^\circ\text{C/мин.}$

Зависимость модуля интегральной скорости вымораживания от температуры хладагента представлена в виде следующих исходных данных:

$t_{\text{ха}}, ^\circ\text{C}$	-60	-120
$ v_{\text{вым}} , ^\circ\text{C/мин}$	5.588	24.58

Функция $|v_{\text{вым}}| = f(t_{\text{ха}})$ в интервале $-50.6 \div -120^\circ\text{C}$ определяется аппроксимацией исходных данных полиномом 1-й степени по программе № 1.

Рабочая информатива для $|v_{\text{вым}}| = f(t_{\text{ха}})$

"ПУСТЬ" $D[14]$; $A[5,5]$; $B[5]$; $ЧМ = 5$; $EPS = 10$; $\Gamma = 1$; $B1[25]$; $ЧГ = 2$; $N1[1] = 1$; $K1[1] = 2$; $ЧВ[1] = 2$; $X[2]$; $Y[2]$; $X1[2] = -60, -120$; $Y1[2] = 5.58, 24.58$ "КОН" ◇

Результат счета: $|v_{\text{вым}}| = -13.51 - 0.3175 t_{\text{ха}}$.

Нормированная по максимальному значению при $t_{\text{ха}} = -120^\circ\text{C}$ к единице функция $|v_{\text{вым}}|_н$ запишется вы-

ражением

$$|v_{\text{ВЫМ}}|_{\text{н}} = |v_{\text{ВЫМ}}|/24.58 = -0.5497 - 0.0129t_{\text{ха}} \quad (L2 = 0.01\%). \quad (\text{IV.10})$$

Функция энергетической экономичности процесса $\mathcal{E}_{\text{ВЫМ}}$ в интервале температур хладагента $-50.5 \div -120^\circ\text{C}$ определяется аппроксимацией табличных исходных данных полиномом 1-й степени по программе № 1:

$t_{\text{ха}}, ^\circ\text{C}$	-50.5	-90	-120
$\mathcal{E}_{\text{ВЫМ}}, \text{уэе}$	1	0.5	0.13

Рабочая информатива для функции $\mathcal{E}_{\text{ВЫМ}} = f(t_{\text{ха}})$

"ПУСТЬ" D[14]; A[5,5]; B[5]; ЧМ=5; EPS=1_ю-12; Г=1; В1[25]; ЧТ=3; N1[1]=2; К1[1]=3; ЧВ[1]=3; X[3]; Y[3]; X1[3]=-50.5,-90,-120; Y1[3]=1,.5,.13"КОН"◇

Результат счета

$$\mathcal{E}_{\text{ВЫМ}} = 1.6208 + 0.00124t_{\text{ха}} \quad (L2 = 0.0018\%). \quad (\text{IV.11})$$

Функция оптимальности процесса вымораживания $\gamma_{\text{ОПТ}}$ определяется по формуле

$$\gamma_{\text{ОПТ}} = |v_{\text{ВЫМ}}| \mathcal{E}_{\text{ВЫМ}} T_{\text{ВЫМ}}. \quad (\text{IV.12})$$

Время выдержки интегральной скорости $|v_{\text{ВЫМ}}|$ в зависимости от $t_{\text{ха}}$ выразится полиномом 1-й степени.

Аппроксимация производится по результатам счета по программе № 1.

$t_{\text{ха}}, ^\circ\text{C}$	-50.5	-60	-120
$T_{\text{ВЫМ}}, \text{мин}$	5.75	5.1	1.2

Рабочая информатива для функции $T_{\text{ВЫМ}} = f(t_{\text{ха}})$

"ПУСТЬ" D[14]; A[5,5]; B[5]; ЧМ=5; EPS=1_ю-12; Г=1; В1[25]; ЧТ=3; N1[1]=2; К1[1]=3; ЧВ[1]=3; X[3]; Y[3]; X1[3]=-50.5,-60,-120; Y1[3]=5.75,5.1,1.2"КОН"◇

Результат счета

$$T_{\text{ВЫМ}} = 9.034 + 0.0653t_{\text{ха}}. \quad (\text{IV.13})$$

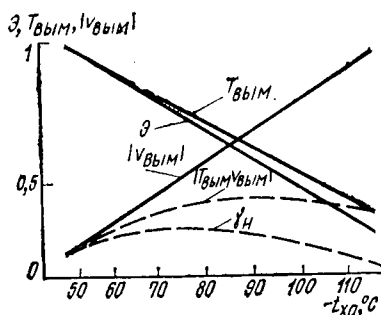


Рис. 39. Режим вымораживания. Графики нормированных функций температуры хладагента:

$T_{\text{выим}}$ — времени существования режима вымораживания; $|v_{\text{выим}}|$ — модуля интегральной скорости вымораживания; $|T_{\text{выим}} v_{\text{выим}}|$ — модуля максимально достижимой температуры в центре образца; ϑ — энергетической экономичности; γ_n — оптимизации

Нормированная к единице функция (IV.13) $T_{\text{выим.н}} = f(t_{\text{xa}})$ запишется выражением

$$T_{\text{выим.н}} = T_{\text{выим}}/5.75 = 1.57 + 0.011t_{\text{xa}}. \quad (\text{IV.14})$$

Функция γ_n воспроизводится (рис. 39) по программе № 15. Минимум γ_n находится также по производной γ'_n , приравненной нулю.

Программа № 15 воспроизведения функции γ_n

"ПУСТЬ"Ю.X=-50; Ж.У=(В0+В1ХХ)Х(В2+В3ХХ)Х(В4+В5ХХ); "ВЫВОД"01,Х,"ПРОБЕЛ",У,"ПРОБЕЛ"; ДХ=-5; Х=Х+ДХ; "НА"Ж"ГДЕ"В0=-.549000₁₀0; В1=-.129000₁₀-1; В2=.162000₁₀1; В3=.124000₁₀-1; В4=.157000₁₀1; В5=.113000₁₀- "КОНЕЦ"◇

Результат счета с шагом -5°C

X [I]	Y [I]	X [I]	Y [I]	X [I]	Y [I]
-50	0.097	-75	0,24	-100	0,1899
-55	0.147	-80	0,2419	-105	0,167
-60	0.184	-85	0,237	-110	0,1413
-65	0.213	-90	0,226	-115	0,115
-70	0.23	-95	0,2099	-120	0,088

Результат счета с шагом -1°C

X [I]	Y [I]	X [I]	Y [I]	X [I]	Y [I]
-72	0.2078	-73	0.20806	-74	0.2079
				-75	0.20745
				-76	0.20667

Минимум функции $\gamma_n = 0.20806$ при $t_{\text{xa}} = -73^\circ\text{C}$.

По полиному $|v_{\text{выим}}| = f(t_{\text{xa}})$ определяется скорость вымораживания до $t = -30^\circ\text{C}$: $|v_{\text{выим}}|_{-30} \text{ с} = 9.66^\circ\text{C/мин.}$

Зная перепад температур от $t_{\text{цн}} = -1.5^\circ\text{C}$ до $t_{\text{цк}} = -30^\circ\text{C}$, найдем $\Delta t_{\text{ц}} = 28.5^\circ\text{C}$, а затем определим время

Рис. 40. Оптимальный по энергозатратам режим быстрого замораживания образца продукта

выдержки при $t_{ха} = -73^\circ\text{C}$:
 $T_{\text{вым}} - 73^\circ\text{C} = \Delta t_{\text{ц}} / v_{\text{вым}} | -30^\circ\text{C} =$
 $= 28.5 / 9.66 = 2.95 \text{ мин.}$

Технология процесса быстрого замораживания (рис. 40) при чисто энергетической оптимизации запишется исходными данными:

$t_{ха}, ^\circ\text{C}$	-36	-16	-73
$T_{\text{вым}}, \text{мин}$	7.22	4.9	2.95

$$\Sigma T_{\text{вым}} = 15.08 \text{ мин.}$$

Сравнительный анализ неоптимального и оптимального процессов быстрого замораживания продуктов по энергетическим и временным затратам позволяет отметить следующее.

Неоптимальный режим, исключая появление горизонтального участка на кривой замораживания во время кристаллизации влаги, имеет параметры:

$t_{ха}, ^\circ\text{C}$	-50 ÷ -18	-18	-50,5
$T_{\text{вым}}, \text{мин}$	1.5	22.5	12

Если принять энергетические затраты в условных энергетических единицах (уэе), то за 1,5 мин израсходуется:

$$\text{на первом участке } P_1 = \left(\frac{50 - 18}{2} + 18 \right) 1,5 = 51 \text{ уэе};$$

$$\text{на втором участке } P_2 = 18 \cdot 22.5 = 405 \text{ уэе};$$

$$\text{на третьем участке } P_3 = 50.5 \cdot 12 = 606 \text{ уэе};$$

$$\Sigma P_{\text{неопт}} = 1062 \text{ уэе.}$$

Суммарное время процесса $\Sigma T_{\text{вым. неопт}} = 36 \text{ мин.}$

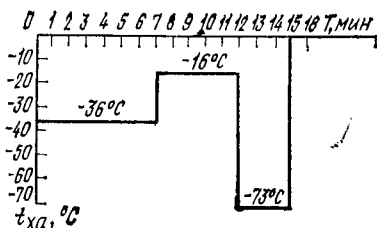
В оптимальном (по энергетике) режиме израсходуется:

$$\text{на первом участке } P_1 = 36 \cdot 7.22 = 260 \text{ уэе};$$

$$\text{на втором участке } P_2 = 16 \cdot 4.9 = 78.4 \text{ уэе};$$

$$\text{на третьем участке } P_3 = 73 \cdot 2.95 = 215.4 \text{ уэе};$$

$$\Sigma P_{\text{опт}} = 554 \text{ уэе.}$$



Суммарное время процесса $\Sigma T_{\text{вым. опт}} = 15.07$ мин.

Экономия энергии $\delta_P = \left(\frac{1062 - 554}{1062} \right) 100 = 47.83\%$.

Экономия времени $\delta_T = \left(\frac{36 - 15}{36} \right) 100 = 58.3\%$.

IV.3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА ПО КАЧЕСТВУ ГОТОВОГО ПРОДУКТА И ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМ ЗАТРАТАМ

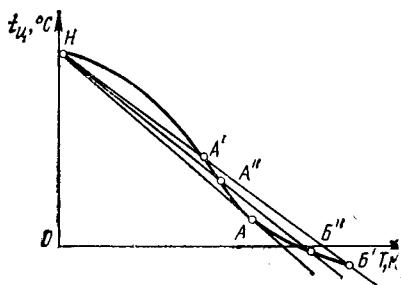
При оптимизации процесса по энергетическим затратам воздействие температуры хладагента на качество продукта учитывалось только при исключении появления горизонтального участка на термограмме в режиме кристаллизации влаги. Под оптимизацией процесса по качеству понимается обеспечение его течения при таких условиях, когда термограмма в любой зоне имеет минимальную нелинейность.

Оптимизация процесса по качеству продукта сводится к определению такого режима, при котором за минимальное время достигался бы максимальный перепад температуры в центре образца при воздействии хладагента любой температуры в выбранном диапазоне с поддержкой процесса в пределах квазилинейной зоны. При этом при ступенчатом воздействии температуры хладагента (для поддержания максимальной скорости замораживания) необходимо исключить попадание его в зону кристаллизации с горизонтальным участком на термограмме.

Исходными данными при постановке задачи оптимизации являются термограммы зависимости температуры в центре образца продукта шаровой конфигурации $t_{\text{ц}}$ от времени охлаждения при различных температурах хладагента. На рис. 41 представлена термограмма в укрупненном масштабе. Кривую замораживания (без учета зоны кристаллизации влаги) условно можно разбить на две зоны, характеризующиеся качеством процесса охлаждения:

зона переходного и квазилинейного режимов, от начального значения температуры в центре $t_{\text{ц1}}$ (точка H) до точки A . В этой зоне изменение температуры происходит сначала по экспоненциальному закону (до точек A' , A'' , ...) с постоянной времени, определяемой видом продукта, перепадом температуры хладагента $\Delta t_{\text{ха}}$ ■

Рис. 41. Термограммы центра образца продукта в зонах переходного, квазилинейного и нелинейного режимов замораживания



геометрией образца, затем на небольшом участке (от A' до A) по квазилинейному закону;

зона нелинейного режима характеризуется замедлением процесса охлаждения после точки A до точек B'' , B' , ... и характеризуется либо энергетической недостаточностью воздействия хладагента на продукт, либо началом необратимых процессов при приближении к зоне кристаллизации.

Так как при любом значении перепада температуры хладагента обойти переходный режим невозможно, поиск оптимальных параметров целесообразно вести в интегральных величинах, характеризующих весь квазилинейный режим (с переходным и квазилинейным участками до точки перегиба кривой замораживания).

Нахождение границы зоны квазилинейного интегрального режима охлаждения в области, определяемой экспериментальными значениями $\Delta t_{\text{ха}}$

Процесс охлаждения от начала координат до точки A характеризуется интегральной скоростью $v_{\text{и}}$ изменения температуры в центре образца $t_{\text{ц}}$ за время охлаждения T и перепадом температуры хладагента $\Delta t_{\text{ха}}$. В соответствии с рис. 41 на кривой замораживания по программе № 14 производится спрямление участка этой кривой отрезками прямой HA' , HA'' , HA . Параметром, сигнализирующим о попадании правого конца отрезка прямой в точку A (конец квазилинейного и начало нелинейного режимов), является относительная погрешность аппроксимации. В программе № 14 шагом изменяются координаты правого конца отрезка аппроксимирующей прямой до тех пор, пока для всех промежуточных узлов (от A' до B') не исчезнут положительные значения относитель-

ной погрешности аппроксимации. Узел, с которого наблюдаются только ее отрицательные значения, соответствует точке А. Угол наклона вектора HA к оси абсцисс есть интегральная скорость процесса в квазилинейном режиме при фиксированном значении $\Delta t_{\text{ха}}$.

Программа № 16 спрямления кривой замораживания в квазилинейном режиме

Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю."ДЛЯ"Я=Ж"ШАГ"1"ДО"Н"ВЫПОЛНИТЬ"(К[Я]=(А4[Я]—А3)/(Х4[Я]—Х3); В[Я]=((Х4[Я]×А3)–(А4[Я]×Х3))/(Х4[Я]—Х3); "ДЛЯ"1"ШАГ"1"ДО"Н"ВЫПОЛНИТЬ"(А[1]=Х[1]×К[Я]+В[Я]; ОТН[1]=((А[1]–У[1])/А[1])×100; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"01,ОТН[1], "СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ"6); $L=\sqrt{(\sum_{J=2, N-1} ((A[J]+U[J])/U[J]) \times 100)^2 / (N-1)}$; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"01,Ж,"ПРОБЕЛ",К[Я], "ПРОБЕЛ",Х4[Я], "ПРОБЕЛ",L,"СТРОКА"); "РАЗРЯДНОСТЬ"6; "ЕСЛИ" $L>3$ "ТО""НА"Ю"ИНАЧЕ""СТОП"; "НА"Ю"КОНЕЦ"◇

Экспериментальные термограммы сняты для четырех значений температуры хладагента $t_{\text{ха}}$, что соответствует при начальном значении температуры в центре образца $t_{\text{цн}} = 17.7^\circ\text{C}$ следующим перепадам $\Delta t_{\text{ха}}$:

$t_{\text{ха}}, ^\circ\text{C}$	—15	—30	—60	—120
$\Delta t_{\text{ха}}, ^\circ\text{C}$	32.7	47.7	77.7	137.7

В рабочую информативу записываются следующие параметры:

- Н — количество узлов аппроксимации на кривой замораживания;
- Х3, А3 — координаты начала спрямляющего отрезка прямой и кривой замораживания по оси абсцисс (времени) и ординат (температуры продукта);
- Ж, N1 — номера начального и конечного узлов спрямления на правом конце отрезка прямой;
- Х4[N1] — массив координат узлов спрямления (от начального Ж до конечного N1) по оси абсцисс;
- А4[N1] — массив координат узлов спрямления по оси ординат;
- ОТН[N1] — места, бронируемые для значений относительной погрешности аппроксимации (по числу N);
- А[N], К[N], В[N] — места, бронируемые для параметров аппроксимирующего отрезка прямой;

$X[N]$, $Y[N]$ — массивы координат всех узлов аппроксимации по осям абсцисс и ординат.

Рабочая информатива для $\Delta t_{\text{ха}} = 32.7^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" $N=12$; $X[12]=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$; $Y[12]=17.7,16.8,15.8,14,12.4,10.7,8.7,7.3,6.5,5.2,4,3$; $X4[8]=5,6,7,8,9,10,11,12$; $A4[8]=12.4,10.7,8.7,7.3,6.5,5.2,4,3$; $A3=17.7$; $X3=0$; $OTH[12]$; $A[12]$; $K[12]$; $B[12]$; $N1=8$; $J=4$
"КОН"◇

Результат счета

$OTH[1]$, % -7.9 -11.25 -14.49 -12 -10.7 -8.08 -1.162
 $J=4$; $K[Y]=-1,3$; $X4[Y]=8$; $L=8.7\%$.

На печать выводятся параметры:
 J ; $K[Y]$ — интегральная скорость на отрезке спрямления;
 $X4[Y]$ — координаты по оси времени правого узла спрямления на отрезке;
 L — средняя квадратическая погрешность аппроксимации в узлах на отрезке спрямления;
 $\Delta t_{\text{ха}} = 32.7^\circ\text{C}$; $v_{и32.7} = -1.3^\circ\text{C}/\text{мин}$; $T_{32.7} = 8$ мин;
 $|a_{и32.7}| = 0.1625^\circ\text{C}/\text{мин}^2$ — интегральное ускорение на участке.

Рабочая информатива для $\Delta t_{\text{ха}} = 47.7^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" $N=10$; $X[10]=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$; $Y[10]=17.7,17.2,13.3,10.9,8.6,26.4,2.68,1.35,0$; $A4[8]=13.3,10.9,8.6,26.4,2.68,1.35,0$; $X4[8]=3,4,5,6,7,8,9,10$; $A3=17.7$; $X3=0$; $OTH[10]$; $A[10]$; $J=5$; $N1=8$; $K[10]$; $B[10]$ "КОН"◇

Результат счета

$OTH[1]$, % -12.4 -24.7 -12.4 -10.4 -10.8 -5 0
 $J=5$; $K[Y]=-1,957$; $X4[Y]=7$; $L=33.27\%$;
 $\Delta t_{\text{ха}} = 47.7^\circ\text{C}$; $v_{и47.7} = -3.158^\circ\text{C}/\text{мин}$; $T_{47.7} = 5$ мин;
 $|a_{и47.7}| = 0,2795^\circ\text{C}/\text{мин}^2$.

Рабочая информатива для $\Delta t_{\text{ха}} = 77.7^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" $N=5$; $X[5]=15,15.5,16,16.5,17$; $Y[5]=-11,-19.5,-28.7,-32.6,-36$; $X4[3]=16,16.5,17$; $A4[3]=-28.7,-32.6,-36$; $A3=17.7$; $X3=0$; $OTH[5]$; $A[5]$; $K[3]$; $B[3]$; $X=1$; $N1=3$ "КОН"◇

Результат счета

ОТН [I], % 62.9 37.6 12.6 5.29 0
 $\text{Ж}=3$; $\text{K}[\text{Я}]=-3.16$; $\text{X4}[\text{Я}]=17$; $\text{L}=31\%$; $\Delta t_{\text{ха}}=77.7^\circ\text{C}$;
 $v_{\text{и } 77.7}=-3.158^\circ\text{C/мин}$; $T_{77.7}=17 \text{ мин}$;
 $|a_{\text{и } 77.7}|=0,18576^\circ\text{C/мин}^2$.

Рабочая информатива для $\Delta t_{\text{ха}}=137.7^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" $\text{N}=12$; $\text{X}[12]=6.5, 6.75, 7, 7.25, 7.5, 7.75, 8, 8.25, 8.5, 9, 9.5, 10$; $\text{Y}[12]=0, -3, -7, -12, -17, -30, -46, -60.5, -66.5, -75, -84, -89$; $\text{X4}[6]=8, 8.25, 8.5, 9, 9.5, 10$; $\text{A4}[6]=-46, -60.5, -66.5, -75, -84, -89$; $\text{A3}=17.7$; $\text{X3}=0$; ОТН[12];
 $\text{A}[12]$; $\text{K}[6]$; $\text{B}[6]$; $\text{Ж}=5$; $\text{N1}=6$ "КОН"◇

Результат счета

ОТН [I], % 100 94.5 87.7 70.97 72.83 54.0 32.3 14.3 9.2 4.600
 $\text{Ж}=5$; $\text{K}[\text{Я}]=-10.7$; $\text{X4}[\text{Я}]=9.5$; $\text{L}=58\%$; $\Delta t_{\text{ха}}=137.7^\circ\text{C}$;
 $v_{\text{и } 137.7}=-10.7^\circ\text{C/мин}$; $T_{137.7}=9,5 \text{ мин}$; $|a_{\text{и } 137.7}|=1,12^\circ\text{C/мин}^2$.

Определение функциональной зависимости интегрального ускорения $|a_{\text{и}}| = |v_{\text{и}}/T_{\Delta t_{\text{ха}}}|$ в квазилинейном режиме от перепада температуры хладагента

В результате спрямления кривых замораживания найденные для квазилинейного режима значения модуля интегрального ускорения процесса охлаждения представляются в виде табличной зависимости от перепадов температуры:

$\Delta t_{\text{ха}}, ^\circ\text{C}$	32.7	47.7	77.7	137.7
$ a_{\text{и}} , ^\circ\text{C/мин}^2$	0.1625	0.2795	0.18576	1.12

Критическая температура для исследуемого продукта, при которой обеспечивается равенство подводимого и отводимого тепла, имеет значение -50.5°C , что соответствует перепаду температуры хладагента $\Delta t_{\text{ха}}=68.2^\circ\text{C}$. Так как практика замораживания продуктов показала, что при оттаивании после глубокого охлаждения продукт значительно теряет свои вкусовые качества по сравнению с идентичным менее глубоким замораживанием, то предпочтительнее выбрать максимум функции ускорения $|a_{\text{и}}|=f(\Delta t_{\text{ха}})$ (при наличии нескольких максимумов

в температурном диапазоне хладагента) в более высоко-температурной докристаллизационной области. В связи с этим достаточно подобрать функцию $|a_n| = f(\Delta t_{ха})$, хорошо совпадающую в зоне $t_{ха}$ от 0 до -60°C . Аппроксимирующая функция имеет вид

$$|a_n| = \frac{\Delta t_{ха}}{K + B\Delta t_{ха} + M\Delta t_{ха}^2}, \quad (\text{IV.15})$$

где K, B, M — константы аппроксимации.

Программа № 17 аппроксимации функции $|a_n|$ ($\Delta t_{ха}$)

Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю.К=(X3/(1-X3/X4))×(1/A3-1/A4+M×(X4-X3)); B=1/A4-K/
X4-M×X4;"ДЛЯ"І=1"ШАГ"І"ДО"N"ВЫПОЛНИТЬ"(A[І]=X[І]/(K+B×
X[І]+M×(X[І]²));"РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВОД"01,Y[І],"ПРОБЕЛ",
A[І],"СТРОКА";"РАЗРЯДНОСТЬ"6);L=√(Σ(J=1,N,((A[J]-Y[J])/
Y[J])×100)²)/(N-1));"РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВОД"01,M,"ПРОБЕЛ",
K,"ПРОБЕЛ",B,"ПРОБЕЛ",L,"СТРОКА";"РАЗРЯДНОСТЬ"6;"ЕСЛИ"L
>EPS"ТО""НА"ЦІ"ИНАЧЕ""СТОП";ЦІ.M=M+DM;"НА"Ю"КОНЕЦ"◇

В рабочую информативу программы № 17 заносятся параметры:

M — начальное приближение коэффициента аппроксимации, определяющего «прогиб» функции $|a_n|$;

EPS — минимальное значение погрешности аппроксимации, по достижении которого прекращается счет;

N — количество узлов аппроксимации;

$A[N]$ — места, бронируемые для значений аппроксимирующей функции (по числу N) в узлах;

$X3, A3, X4, A4$ — координаты привязки (фиксации) аппроксимирующей функции к узлам;

$X[N], Y[N]$ — массивы табличных значений аргумента и аппроксимируемой функции в узлах;

$\pm DM$ — знак и шаг варьирования коэффициента M .

На печать выводятся данные:

$Y[І]$ — табличные значения аппроксимируемой функции в узлах;

$A[І]$ — значения аппроксимирующей функции в узлах;

M, K, B — значения коэффициентов при аргументе в полиноме знаменателя функции $|a_n|$;

L — средняя квадратическая погрешность аппроксимации в узлах.

Рабочая информатива программы аппроксимации функции $|a_{и}| = f(\Delta t_{ха})$

"ПУСТЬ" $M = 0.22$; $EPS = 0.5$; $A [4]$; $N = 4$; $X3 = 47.7$; $A3 = 0.2795$; $X4 = 77.7$; $A4 = 0.18576$; $X [4] = 32.7, 47.7, 77.7, 137.7$; $Y [4] = 0.1625, 0.2795, 0.18576, 1.12$ "КОН"

Результат счета

$Y [1]$	0.1625	0.2795	0.1857	0.112
$A [1]$	0.1673	0.2795	0.1857	0.0655

$M = 22$; $K = 592.3$; $B = -19.33$; $L = 54\%$.

Аппроксимирующая функция имеет вид

$$|a_{и}| = \frac{\Delta t_{ха}}{592.3 - 19.33 \Delta t_{ха} + 0.22 \Delta t_{ха}^2}. \quad (IV.16)$$

На рис. 42 представлена табличная и аналитическая функции $|a_{и}|$. Приравнявая производную $|a_{и}|'$ нулю, можно получить значение аргумента $\Delta t_{ха} = 51.8^\circ\text{C}$, при котором функция $|a_{и}|$ имеет максимум $|a_{и}|_{\max} = 0.285695$. Перепад температуры $\Delta t_{ха} = 51.8^\circ\text{C}$ соответствует температуре хладагента на ступени $t_{ха} = -44.1^\circ\text{C}$.

Включение в процедуру оптимизации энергетического параметра

Расчет оптимальной температуры хладагента, обеспечивающей в докристаллизационной зоне квазилинейный режим охлаждения с максимальным ускорением изменения температуры в центре образца продукта, показал, что это значение составляет $\approx -44.1^\circ\text{C}$. Но чтобы

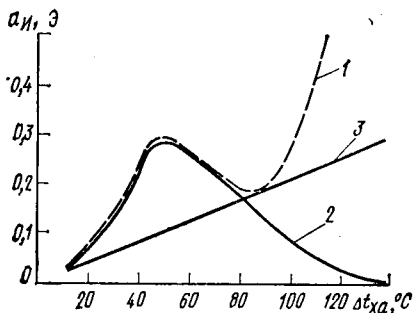


Рис. 42. Графики нормированных функций перепада температуры замораживания:

1 — табличной; 2 — аналитической; 3 — энергозатрат

учесть влияние на оптимальность процесса энергетических затрат, необходимо определить удельные энергетические затраты на поддержание требуемого (по условиям качественной оптимальности) ускорения $|a_{\text{и}}|$. Для этого надо ввести характеристику энергетических затрат в виде функции условных энергозатрат в единицу времени $\mathcal{E} = f(\Delta t_{\text{ха}})$ и нормировать ее по координате $\Delta t_{\text{ха}}$, приведя к максимальному значению, равному максимальному значению $|a_{\text{и}}|_{\text{max}} = 0.285695$ в учитываемой области определения. Если принять, что для обеспечения перепада температуры хладагента 137.7°C необходимо затрачивать 0.285695 узе в единицу времени, а при $0^\circ\text{C} \rightarrow 0$ узе, то функция вида $y = kx$ (см. рис. 42) примет вид

$$\mathcal{E} = \frac{0.285695}{137.7} \Delta t_{\text{ха}} = 0.0020747 \Delta t_{\text{ха}}^2. \quad (\text{IV.17})$$

Отношение функции $\mathcal{E}$ к $|a_{\text{и}}|$ и есть функция удельных затрат на формирование ускорения процесса, т. е.

$$\varphi = 1.2288 - 0.0401039 \Delta t_{\text{ха}} + 0.0004564 \Delta t_{\text{ха}}^2. \quad (\text{IV.18})$$

Взяв производную от φ по $\Delta t_{\text{ха}}$

$$\varphi' = -0.0401 + 0.00091 \Delta t_{\text{ха}} \quad (\text{IV.19})$$

и приравняв ее нулю, найдем то значение перепада температуры $\Delta t_{\text{ха}}$, при котором эти затраты минимальны, т. е. $\Delta t_{\text{ха}} = 43.93^\circ\text{C} \approx 44^\circ\text{C}$ ($t_{\text{ха}} = -26.3^\circ\text{C}$).

Определение функции зависимости абсолютного значения температуры в центре образца от перепада температуры хладагента и времени охлаждения

Так как переходный процесс при любом перепаде температуры хладагента протекает по экспоненциальному закону, а участок с квазилинейным режимом является его продолжением, то с некоторой погрешностью (в пределах погрешности эксперимента) можно задаться видом функции, приближенно описывающей кривую замораживания в квазилинейном режиме:

$$t_{\text{ц}} = B + K e^{MT}, \quad (\text{IV.20})$$

где $t_{\text{ц}}$ — текущее значение температуры в центре образца, $^\circ\text{C}$; T — время охлаждения, мин; B , K , M — константы аппроксимации.

Программа № 18 аппроксимации кривой замораживания функцией $t_{\text{д}} = f(T)$

Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю.К=(A3-B)/(e↑(M×X3)); "ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"Н"ВЫПОЛНИТЬ"(A[I]=B+K×(e↑(M×X[I]))); "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"01,У[1], "ПРОБЕЛ",А[1], "СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ"6); L=√(Σ(J=1,N,((A[J]-У[J])/У[J])×100)↑2)/(N-1)); "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"01, М,"ПРОБЕЛ",К,"ПРОБЕЛ",В,"ПРОБЕЛ",L,"СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ"6; "ЕСЛИ"Л>EPS"ТО""НА"Ц1"ИНАЧЕ""СТОП"; Ц1.М=М+DM; "НА"Ю"КОНЕЦ"◇

В рабочую информативу записываются следующие параметры:

М — первое приближение значения показателя степени, определяющего «прогиб» функции $t_{\text{д}}(T)$;

EPS — минимальное значение погрешности аппроксимации, по достижении которого прекращается счет;

N — число узлов аппроксимации;

A[N] — места, бронируемые для значений аппроксимирующей функции (по числу N узлов);

X3, A3 — координаты привязки правого конца аппроксимирующей функции по осям абсцисс и ординат;

B — координата аппроксимируемой функции по оси ординат на левом конце (при $T=0$);

ОТН[N] — места, бронируемые для значений относительной погрешности аппроксимации (по числу N);

X[N], Y[N] — массивы координат всех узлов аппроксимации по осям абсцисс и ординат;

±DM — знак и шаг варьирования показателя степени М.

Исходные данные здесь те же, что и в программе № 16 спрямления кривых замораживания.

Рабочая информатива программы подбора функции $t_{\text{д}}(T)$ для $\Delta t_{\text{ха}} = 32.7^\circ\text{C}$ ($t_{\text{ха}} = -15^\circ\text{C}$)

"ПУСТЬ"М=+.25; EPS=.5; А[8]; N=8; X3=8; A3=7.3; B=17.7; X[8]=1,2,3,4,5,6,7,8; У[8]=17.7,16.8,15.8,14.0,12.4,10.7,8.7,7.3; ОТН[8]; DM=+.1"КОН"◇

Результат счета: М=0.25; К=-1.407; В=17.7; L=7.386 %.

Рабочая информатива для $\Delta t_{\text{ха}} = 47.7^\circ\text{C}$.

"ПУСТЬ"М=+.24; EPS=.5; А[7]; N=7; X3=7; A3=4; B=17.7; X[7]=1,2,3,4,5,6,7; У[7]=17.7,17.2,13.3,10.9,8.6,26.4; ОТН[7]; DM=+.1"КОН"◇

Результат счета: $M=0.24$; $K=-2.553$; $B=17.7$; $L=13.95\%$.

Рабочая информатива для $\Delta t_{ха}=77.7^{\circ}\text{C}$ и при ожидаемом в процессе формирования режима замораживания ступенчатом перепаде температуры хладагента $\Delta t_{ха} \geq 16^{\circ}\text{C}$

"ПУСТЬ" $M=+.36$; $EPS=.5$; $A[4]$; $N=4$; $B=17.7$; $OTH[4]$; $DM=.01$; $X[4]=15, 15.5, 16, 16.5$; $Y[4]=-11, -19.5, -28.7, -32.6$; $A3=-32.6$; $X3=16.5$ "КОН"◇

Результат счета: $M=0.36$; $K=-0.1323$; $B=17.7$; $L=11.27\%$.

Рабочая информатива для $\Delta t_{ха}=77.7^{\circ}\text{C}$ и при ожидаемом ступенчатом перепаде температуры в центре образца $\Delta t_{ц} \leq 16^{\circ}\text{C}$

"ПУСТЬ" $M=.22$; $EPS=.5$; $A[4]$; $N=4$; $X3=8$; $B=17.7$; $Y[4]=17, 12, 8, 4$; $X[4]=2, 4, 6, 8$; $OTH[4]$; $A3=4$; $DM=.01$ "КОН"◇

Результат счета: $M=0.22$; $K=-2.357$; $B=17.7$; $L=11.87\%$.

Рабочая информатива для $\Delta t_{ха}=137.7^{\circ}\text{C}$

"ПУСТЬ" $M=.832$; $EPS=.5$; $B=17.7$; $DM=.002$; $X3=7.75$; $A3=-30$; $A[6]$; $N=6$; $X[6]=6.5, 6.75, 7, 7.25, 7.5, 7.75$; $Y[6]=.8, -.3, -.7, -.12, -.17, -.30$; $OTH[6]$ "КОН"◇

Результат счета: $M=0.832$; $K=-0.07554$; $B=17.7$; $L=13.68\%$.

Зависимости коэффициентов $|K|$ и M^{-1} от $\Delta t_{ха}$ выражаются следующими данными:

для ожидаемого $\Delta t_{ц} \geq 16^{\circ}\text{C}$:

$\Delta t_{ха}, ^{\circ}\text{C}$	32.7	47.7	77.7	137.7
$ K $	1.407	2.553	0.1323	0.755
$1/M$	4	4.16	2.78	1.2

для ожидаемого $\Delta t_{ц} \leq 16^{\circ}\text{C}$:

$\Delta t_{ха}, ^{\circ}\text{C}$	32.7	47.7	77.7	137.7
$ K $	1.407	2.553	2.357	0.0755
$1/M$	4	4.16	4.515	1.2

По виду приведенных зависимостей $|K|=f(\Delta t_{ха})$ и $1/M=f(\Delta t_{ха})$ для аппроксимации наиболее подходит функция вида (IV.15). Поскольку оптимальный процесс определен на первой ступени в докристаллизационной

зоне ($\Delta t_{\text{ха}} = 44^\circ\text{C}$), а вторая ступень должна быть реализована (во избежание формирования горизонтального участка на кривой замораживания) при $\Delta t_{\text{ха}} = -50.5^\circ\text{C}$, то при аппроксимации по программе № 17 |K| и 1/M достаточно обеспечить их хорошее аналитическое описание в двух областях существования:

$$\begin{aligned} \text{для } |K| \quad & \begin{cases} 0 \leq \Delta t_{\text{ха}} \leq 47.7^\circ\text{C} - |K|_1 (\Delta t_{\text{ц}} \geq 16^\circ\text{C}) \\ 47.7^\circ\text{C} < \Delta t_{\text{ха}} < 137.7^\circ\text{C} - |K|_2 (\Delta t_{\text{ц}} < 16^\circ\text{C}) \end{cases} \\ \text{для } 1/M \quad & \begin{cases} 0 \leq \Delta t_{\text{ха}} \leq 77.7^\circ\text{C} - (1/M)_1 (\Delta t_{\text{ц}} \geq 16^\circ\text{C}) \\ 77.7^\circ\text{C} < \Delta t_{\text{ха}} < 137.7^\circ\text{C} - (1/M)_2 (\Delta t_{\text{ц}} < 16^\circ\text{C}) \end{cases} \end{aligned}$$

Рабочая информатива к программе № 17 аппроксимации функции $|K|_1(\Delta t_{\text{ха}})$ в области $0 \div 47.7^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" M=.1; EPS=.5; A[4]; N=4; X3=32.7; A3=1.407; X4=47.7; A4=2.553; X[4]=32.7,47.7,77.7,137.7; Y[4]=1.407,2.553,.1323,.0755; DM=.1"K"ON"◇

Результат счета

Y [1]	1.407	2.553	0.1323	0.0755
A [1]	1.406	2.552	0.5374	0.147

$$M_1=0.1; K_1=189.1; B_1=-8.343.$$

Выражение для расчета $|K|_1$:

$$|K|_1 = \frac{\Delta t_{\text{ха}}}{189.1 - 8.343\Delta t_{\text{ха}} + 0.1\Delta t_{\text{ха}}^2}. \quad (\text{IV.21})$$

Рабочая информатива к программе № 17 аппроксимации функции $|K|_2(\Delta t_{\text{ха}})$ в области $47.7 \div 137.7^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" M=.026; EPS=.5; A[4]; N=4; X3=47.7; A3=2.553; X4=137.7; A4=0.0755; X[4]=32.7,47.7,77.7,137.7; Y[4]=1.407,2.553,.1323,.0755; DM=.1"KON"◇

Результат счета

Y [1]	1.407	2.553	0.1323	0.0755
A [1]	-0.1355	2.552	0.1354	0.0755

$$M = 0.026; K = -789.4; B = 15.7.$$

Выражение для расчета $|K|_2$:

$$|K|_2 = \frac{\Delta t_{\text{ха}}}{-789.4 + 15.7\Delta t_{\text{ха}} + 0.026\Delta t_{\text{ха}}^2}. \quad (\text{IV.22})$$

Рабочая информатива к программе № 17
 аппроксимации функции $(1/M)_1(\Delta t_{xa})$ в области $0 \div 77^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" $M=.00734$; $EPS=.5$; $A[4]$; $N=4$; $X3=32.7$; $A3=4$; $X4=77.7$; $A4=2.78$; $X[4]=32.7, 47.7, 77.7, 137.7$; $Y[4]=4, 4.16, 2.78, 1.2$; $DM=.1$ "КОН" $\diamond$

Результат счета

Y [1]	4	4.16	2.78	1.2
A [1]	4	4.161	2.78	1.369

$M = 0.00734$; $K = 12.45$; $B = -0.3709$.

Выражение для расчета $(1/M)_1$:

$$(1/M)_1 = \frac{\Delta t_{xa}}{12.45 - 0.3709 \Delta t_{xa} + 0.00734 \Delta t_{xa}^2} \quad (IV.23)$$

Рабочая информатива к программе № 17
 аппроксимации функции $(1/M)_2(\Delta t_{xa})$ в области $77 \div 137.7^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" $M=.009$; $EPS=.5$; $A[4]$; $N=4$; $X3=32.7$; $A3=4$; $X4=77.7$; $A4=2.78$; $X[4]=32.7, 47.7, 77.7, 137.7$; $Y[4]=4, 4.16, 2.78, 1.2$; $DM=.1$ "КОН" $\diamond$

Результат счета

Y [1]	4	4.16	2.78	1.2
A [1]	4	4.51	2.78	1.24

$M = 0.009$; $K = 16.67$; $B = -0.5541$.

Выражение для расчета $(1/M)_2$:

$$(1/M)_2 = \frac{\Delta t_{xa}}{16.67 - 0.5541 \Delta t_{xa} + 0.009 \Delta t_{xa}^2} \quad (IV.24)$$

Рабочая информатива к программе № 17
 аппроксимации функции $|K|_2(\Delta t_{xa})$ в области $0 \div 77.7^\circ\text{C}$
 и ожидаемом перепаде $\Delta t_{\text{ц}} \leq 16^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" $M=.0173$; $EPS=.5$; $A[4]$; $N=4$; $X3=32.7$; $A3=1.407$; $X4=77.7$; $A4=2.357$; $X[4]=32.7, 47.7, 77.7, 137.7$; $Y[4]=1.407, 2.553, 2.357, 0.755$; $DM=.1$ "КОН" $\diamond$

Результат счета

Y [1]	1.407	2.553	2.357	0.755
A [1]	1.406	2.551	2.357	0.8888

$M = 0.0173$; $K = 60.12$; $B = -1.693$.

Выражение для расчета $|K|_2$:

$$|K|_2 = \frac{\Delta t_{xa}}{60.12 - 1.693\Delta t_{xa} + 0.0173\Delta t_{xa}^2}. \quad (IV.25)$$

Рабочая информатива к программе № 17 аппроксимации функции $(1/M)_2(\Delta t_{xa})$ в области $0 \div \div 77.7^\circ\text{C}$ и ожидаемом перепаде $\Delta t_{\text{ц}} \leq 16^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" $M = -.0007$; $EPS = .5$; $A[4]$; $N = 4$; $X3 = 32.7$; $A3 = 4$; $X4 = 77.7$; $A4 = 4.545$; $X[4] = 32.7, 47.7, 77.7, 137.7$; $Y[4] = 4, 4.16, 4.545, 1.2$; $DM = .1$ "КОН" $\diamond$

Результат счета

$Y[I]$	4	4.16	4.545	1.2
$A[I]$	4	4.161	4.545	5.602

$$M = -0.0007; \quad K = -0.08582; \quad B = 0.2755.$$

Выражение для расчета $(1/M)_2$:

$$(1/M)_2 = \frac{\Delta t_{xa}}{-0.08582 + 0.2755\Delta t_{xa} - 0.0007\Delta t_{xa}^2}. \quad (IV.26)$$

Функция зависимости температуры в центре образца $t_{\text{ц}}$ от перепада температуры Δt_{xa} и времени охлаждения определяется подстановкой выражений для расчета $|K|$ и $1/M$ в выражение $t_{\text{ц}} = f(\Delta t_{\text{ц}})$. В общем виде выражение для расчета $t_{\text{ц}}$ примет вид

$$t_{\text{цк}} = t_{\text{цн}} - \left(\frac{\Delta t_{xa}}{K_1 + B_1\Delta t_{xa} + M_1\Delta t_{xa}^2} \right) \times \\ \times \exp \left[\left(\frac{K_2 + B_2\Delta t_{xa} + M_2\Delta t_{xa}^2}{\Delta t_{xa}} \right) T \right], \quad (IV.27)$$

где $t_{\text{цк}}$ — конечная температура на ступени; $t_{\text{цн}}$ — начальная температура.

Из выражения (IV.27), задаваясь начальной и конечной температурами в центре образца, можно рассчитать время охлаждения при оптимальном перепаде

$$T_{\text{опт}} = \left[\ln \left(\frac{(t_{\text{цн}} - t_{\text{цк}}) (K_1 + B_1\Delta t_{xa} + M_1\Delta t_{xa}^2)}{\Delta t_{xa}} \right) \right] \Delta t_{xa} / (K_2 + \\ + B_2\Delta t_{xa} + M_2\Delta t_{xa}^2). \quad (IV.28)$$

Двухступенчатый режим. Режим характеризуется перепадом температуры на первой ступени $\Delta t_{xa} = 44^\circ\text{C}$

($t_{ха} = -26.3^{\circ}\text{C}$) и на второй $\Delta t_{ха} = 68.2^{\circ}\text{C}$ ($t_{ха} = -50.5^{\circ}\text{C}$).

Программа № 19 расчета охлаждения образца до $t_{цк} = 1^{\circ}\text{C}$ при $t_{цн} = 17.7^{\circ}\text{C}$

"ПУСТЬ"Ю.Х=44; Ж.У=(LN(((ТЦ1-ТЦ2)×(К1+В1×Х+М1×(Х↑2)))/Х)×Х)/(К2+В2×Х+М2×(Х↑2)); "ВЫВОД"01,Х,"ПРОБЕЛ",У,"ПРОБЕЛ"; DX=5; Х=Х+DX; "НА"Ж"ГДЕ"ТЦ1=1.77000₁₀2; ТЦ2=1; К1=.189100₁₀3; В1=-.834300₁₀1; М1=.100000₁₀0; К2=.124500₁₀2; В2=-.370900₁₀0; М2=.734000₁₀-2"КОНЕЦ"◇

Результат счета: $X=44$; $Y=7.57$; $T_{охл}=7.57$ мин при $t_{ха} = -26.3^{\circ}\text{C}$.

Так как функция $T_{охл}(\Delta t_{ха})$ для перепадов $\Delta t_{ц} \leq 16^{\circ}\text{C}$ определена коэффициентами при $|K|$ и $1/M$, то в рабочую информативу сначала надо заложить соответствующие коэффициенты, просчитав время охлаждения T до $t_{цк} = -15^{\circ}\text{C}$.

Программа № 20 расчета $T_{охл}$ при $\Delta t_{ха} = 68.2^{\circ}\text{C}$ ($t_{ха} = -50.5^{\circ}\text{C}$) и охлаждении образца до $t_{цк} = -15^{\circ}\text{C}$ от $t_{цн} = 1^{\circ}\text{C}$

"ПУСТЬ"Ю.Х=.682000₁₀2; Ж.У=(LN(((ТЦ1-ТЦ2)×(К1+В1×Х+М1×(Х↑2)))/Х)×Х)/(К2+В2×Х+М2×(Х↑2)); "ВЫВОД"01,Х,"ПРОБЕЛ",У,"ПРОБЕЛ"; DX=5; Х=Х+DX; "НА"Ж"ГДЕ"ТЦ1=1; ТЦ2=-3; К1=.601200₁₀2; В1=-.169300₁₀1; М1=.173000₁₀-1; К2=-.858200₁₀-1; В2=.275500₁₀0; М2=-.700000₁₀-3"КОНЕЦ"◇

Результат счета: $X=68.2$; $Y=7.83$; $T_{охл}=7.83$ мин при $t_{ха} = -50.5^{\circ}\text{C}$.

Затем определяется время охлаждения для $\Delta t_{ха}$ при $\Delta t_{ц} \geq 16^{\circ}\text{C}$ до $t_{цк} = -30^{\circ}\text{C}$ от $t_{цн} = +1^{\circ}\text{C}$.

Программа № 21 расчета $T_{охл}$ при $\Delta t_{ха} = 68.2^{\circ}\text{C}$ ($t_{ха} = -50.5^{\circ}\text{C}$) и охлаждении образца до $t_{цк} = -30^{\circ}\text{C}$ от $t_{цн} = 1^{\circ}\text{C}$

"ПУСТЬ"Ю.Х=.682000₁₀2; Ж.У=(LN(((ТЦ1-ТЦ2)×(К1+В1×Х+М1×(Х↑2)))/Х)×Х)/(К2+В2×Х+М2×(Х↑2)); "ВЫВОД"01,Х,"ПРОБЕЛ",У,"ПРОБЕЛ"; DX=5; Х=Х+DX; "НА"Ж"ГДЕ"ТЦ1=1; ТЦ2=-30; К1=-.789400₁₀3; В1=.157000₁₀2; М1=.260000₁₀-1; К2=.124500₁₀2; В2=-.370900₁₀0; М2=.734000₁₀-2"КОНЕЦ"◇

Результат счета: $X=68.2$; $Y=16.68$; $T_{\text{охл}} = 16.68$ мин при $t_{\text{ха}} = -50.5^\circ\text{C}$.

Для второй ступени окончательно рассчитывается время охлаждения от $t_{\text{цн}} = 1^\circ\text{C}$ до $t_{\text{цк}} = -15^\circ\text{C}$ для $\Delta t_{\text{ц}} \geq 16^\circ\text{C}$.

Программа № 22 расчета $T_{\text{охл}}$ при $\Delta t_{\text{ха}} = 68.2^\circ\text{C}$ ($t_{\text{ха}} = -50.5^\circ\text{C}$) и охлаждении образца до $t_{\text{цк}} = -15^\circ\text{C}$ от $t_{\text{цн}} = 1^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ"Ю.X=.682000_{Ю2}; Ж.Y=(LN(((ТЦ1-ТЦ2)×(K1+B1×X+M1×(X↑2)))/X)×X)/(K2+B2×X+M2×(X↑2)); "ВЫВОД"01,X,"ПРОБЕЛ",Y,"ПРОБЕЛ"; DX=5; X=X+DX; "НА"Ж"ГДЕ"ТЦ1=1; ТЦ2=-15; K1=-.789400_{Ю3} B1=.157000_{Ю2}; M1=.260000_{Ю-1}; K2=.124500_{Ю2}; B2=-.370900_{Ю0}; M2=.734000_{Ю-2}"КОНЕЦ"◇

Результат счета: $X=68.2$; $Y=14.6$; $T_{\text{охл}} = 14.6$ мин при $\Delta t_{\text{ха}} = 68.2^\circ\text{C}$.

Истинное время охлаждения на конечном участке второй ступени определяется при $t_{\text{ха}} = -50.5^\circ\text{C}$ как разность, т. е. $T_{\text{охл}} = 16.68 - 14.6 = 2.08$ мин. Общее время охлаждения образца при $t_{\text{ха}} = -50.5^\circ\text{C}$ есть сумма времени на начальном и конечном участках: $T_{-50.5^\circ\text{C}} = 7.83 + 2.08 = 9.9$ мин.

Двухступенчатый режим запишется в табличной форме:

$t_{\text{ха}}, ^\circ\text{C}$	-26.3	-50.5
$T, \text{мин}$	7.57	9.9

Трехступенчатый режим. Для обеспечения прохождения зоны кристаллизации при повышенном абсолютном значении $|t_{\text{ха}}| \geq 50.5^\circ\text{C}$, исключающем появление горизонтального участка в зоне кристаллизации, до температуры -3°C и снижении энергозатрат в режиме вымораживания от -3 до -30°C рассчитан трехступенчатый режим: $-26.3 \div -50.5 \div -47^\circ\text{C}$.

Программа № 23 расчета времени охлаждения при $\Delta t_{\text{ха}} = 68.2^\circ\text{C}$ ($t_{\text{ха}} = -50.5^\circ\text{C}$) от $t_{\text{цн}} = 1^\circ\text{C}$ до $t_{\text{цк}} = -3^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ"Ю.X=.682000_{Ю2}; Ж.Y=(LN(((ТЦ1-ТЦ2)×(K1+B1×X+M1×(X↑2)))/X)×X)/(K2+B2×X+M2×(X↑2)); "ВЫВОД"01,X,"ПРОБЕЛ",Y,"ПРОБЕЛ"; DX=5; X=X+DX; "НА"Ж"ГДЕ"ТЦ1=1; ТЦ2=-15; K1=.601200_{Ю2}; B1=-.169300_{Ю1}; M1=.173000_{Ю-1}; K2=-.858200_{Ю-1}; B2=.275500_{Ю0}; M2=-.700000_{Ю-3}"КОНЕЦ"◇

Результат счета: $X=68.2$; $Y=1.7$; $T_{\text{охл}}=1.7$ мин при $\Delta t_{\text{ха}}=68.2^\circ\text{C}$.

Программа № 24 расчета времени охлаждения при $\Delta t_{\text{ха}}=44^\circ\text{C}$ ($t_{\text{ха}}=-47^\circ\text{C}$) от $t_{\text{цн}}=-3^\circ\text{C}$ до $t_{\text{цк}}=-30^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ"Ю.Х=.440000_{Ю2}; Ж.У=(LN(((ТЦ1-ТЦ2)×(К1+В1×Х+М1×(Х↑2)))×Х)/(К2+В2×Х+М2×(Х↑2))); "ВЫВОД"01,Х,"ПРОБЕЛ",У,"ПРОБЕЛ"; DX=5; Х=Х+DX; "НА"Ж"ГДЕ"ТЦ1=-3; ТЦ2=-30; К1=.189100_{Ю3}; В1=-.834300_{Ю1}; М1=.100000_{Ю0}; К2=.121500_{Ю2}; В2=-.370900_{Ю0}; М2=.734000_{Ю0}-2"КОНЕЦ"◇

Результат счета: $X=44$; $Y=9.61$; $T_{\text{охл}}=9.61$ мин при $t_{\text{ха}}=-47^\circ\text{C}$.

Трехступенчатый режим запишется в табличной форме:

$t_{\text{ха}}, ^\circ\text{C}$	-26.3	-50.5	-47
$T, \text{мин}$	7.57	1.7	9.61

Сравнительный анализ оптимальных режимов и режима с чисто энергетической оптимизацией

Различные режимы характеризуются следующими параметрами:

неоптимальный режим: $\Sigma P_{\text{неопт}}=1062$ уэе; $\Sigma T_{\text{неопт}}=36$ мин;

режим с чисто энергетической оптимизацией: $\Sigma P_{\text{э}}=554$ уэе, экономия энергии $\delta_P=47.8\%$; $\Sigma T_{\text{э}}=15.07$ мин, экономия времени $\delta_T=58.3\%$;

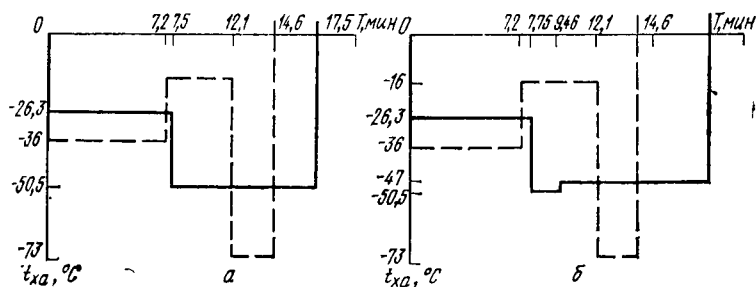


Рис. 43. Оптимальные режимы быстрого замораживания продукта: а — двухступенчатый; б — трехступенчатый

двухступенчатый режим: $\Sigma P_{2c} = 26.3 \cdot 7.57 + 50.5 \cdot 9.9 = 699$ уе, экономия энергии $\delta_P = 34\%$; $\Sigma T_{2c} = 17.5$ мин, экономия времени $\delta_T = 51.5\%$; трехступенчатый режим: $\Sigma P_{3c} = 26.2 \cdot 7.57 + 50.5 \cdot 1.7 + 47 \cdot 9.61 = 737$ уе, экономия энергии $\delta_P = 30.6\%$; $\Sigma T_{3c} = 19.06$ мин, экономия времени $\delta_T = 47\%$.

Из сравнения данных видно, что режимы, учитывающие качественную оптимизацию, дают экономию энергии и времени значительно меньшую, чем режим с чисто энергетической оптимизацией, но достаточную, чтобы конкурировать с неоптимальным режимом. Выбор между двух- и трехступенчатым режимами должен основываться на оценке дополнительных затрат на техническую реализацию. На рис. 43 представлены графики двух- и трехступенчатого режимов (для сравнения пунктиром показан режим с чисто энергетической оптимизацией).

Расчет ожидаемых термограмм центра образца

Для значений $K_1, B_1, M_1, K_2, B_2, M_2$, входящих в виде параметров в выражение для расчета времени охлаждения на ступени, составим таблицу (табл. 4) соответствия их различным областям существования и применения в температурном диапазоне $t_{ха}$ и перепада $\Delta t_{ха}$.

По основной стандартной программе № 22 рассчитываются термограммы для обоих режимов (модификации программы № 22 — с № 25 по № 29).

Двухступенчатый режим. Первая ступень, рассчитывается за время от 0 до 7.57 мин с шагом $\Delta X = 1$ мин.

Т а б л и ц а 4

Область существования в температурном диапазоне	$\Delta t_{\text{ц}} > 16^\circ \text{C}$		$\Delta t_{\text{ц}} < 16^\circ \text{C}$	
	$0 < \Delta t_{\text{ха}} < 47^\circ \text{C}$	$47^\circ \text{C} < \Delta t_{\text{ха}} < 77^\circ \text{C}$	$77^\circ \text{C} < \Delta t_{\text{ха}} < 137^\circ \text{C}$	$0 < \Delta t_{\text{ха}} < 77^\circ \text{C}$
K_1	189.1	—789.4	—789.4	60.12
B_1	—8.343	15.7	15.7	—1.693
M_1	0.1	0.026	0.026	—0.0173
K_2	12.45	12.45	16.67	—0.08582
B_2	—0.3709	—0.3709	—0.5541	0.2756
M_2	0.00734	0.00734	0.009	—0.0007

Вторая ступень рассчитывается в два этапа: за время от 0 до 7.83 мин с шагом 1 мин и за время от 14.6 до 16.68 мин с шагом 1 мин.

Программа № 25 расчета времени охлаждения на 1-й ступени

"ПУСТЬ"Ю.Z=1; Ж.У=ТЦ1-((Z/(K1+B1×Z+M1×(Z↑2)))×(e↑(((K2+B2×Z+M2×(Z↑2))/Z)×X)))"; "ВЫВОД"01,Z,"ПРОБЕЛ",У,"ПРОБЕЛ"; DZ=1; Z=Z+DZ; "НА"Ж"ГДЕ"Z=44; ТЦ1=.177000₁₀2; K1=.189100₁₀3; B1=-.834300₁₀1; M=.1; K2=.124500₁₀2; B2=-.370900₁₀0; M2=.734000₁₀-2"КОНЕЦ"◇

Результат счета

X	1	2	3	4	5	6	7	7.57
Y	14.1	13.19	11.99	10.48	8.57	6.15	3.09	0.999

Программа № 26 расчета времени охлаждения на 2-й ступени (1-й этап)

"ПУСТЬ"Ю.Z=1; Ж.У=ТЦ1-((Z/(K1+B1×Z+M1×(Z↑2)))×(e↑(((K2+B2×Z+M2×(Z↑2))/Z)×X)))"; "ВЫВОД"01,Z,"ПРОБЕЛ",У,"ПРОБЕЛ"; DZ=1; Z=Z+DZ; "НА"Ж"ГДЕ"Z=.682000₁₀2; ТЦ1=1; K1=.601200₁₀2; B1=-.169300₁₀1; M1=.173000₁₀-1; K2=-.858200₁₀-1; B2=.275500₁₀0; M2=-.700000₁₀-3"КОНЕЦ"◇

Результат счета

X		1	2	3	4
Т с учетом ступени	1-й	8.57	9.57	10.57	11.57
Y		-2.4	-3.27	-4.36	-5.72
X		5	6	7	7.83
Т с учетом ступени	1-й	12.57	13.57	14.57	15.5
Y		-7.42	-9.57	-12.25	-14.9

Программа № 27 расчета времени охлаждения на 2-й ступени (2-й этап)

"ПУСТЬ"Ю.Z=1; Ж.У=ТЦ1-((Z/(K1+B1×Z+M1×(Z↑2)))×(e↑(((K2+B2×Z+M2×(Z↑2))/Z)×X)))"; "ВЫВОД"01,Z,"ПРОБЕЛ",У,"ПРОБЕЛ"; DZ=1; Z=Z+DZ; "НА"Ж"ГДЕ"Z=.682000₁₀2; ТЦ1=1; K1=-.789400₁₀3; B1=.157000₁₀2; M1=.260000₁₀-1; K2=.124500₁₀2; B2=-.370900₁₀0; M2=.734000₁₀-2"КОНЕЦ"◇

Результат счета

X	14.6	15	16	16.68
T с учетом 1-го этапа	15.5	15.9	16.9	17.5
Y	-15.18	-17.34	-24.06	-29.98

По результатам расчета строится график прогнозируемой термограммы в координатах X — время охлаждения, Y — температура в центре образца.

Трехступенчатый режим. Первая ступень рассчитывается аналогично таковой для двухступенчатого режима. Вторая ступень рассчитывается за время от 0 до 1.7 мин с шагом 0.5 мин; третья ступень — за время от 0 до 9.6 мин с шагом 1 мин.

Программа № 28 расчета времени охлаждения на 2-й ступени

"ПУСТЬ"Y.Z=.500000_{ю0}; Ж.Y=ТЦ1-((Z/(K1+B1×Z+M1×(Z↑2)))×(e↑((K2+B2×Z+M2×(Z↑2))/Z)×X)); "ВЫВОД"01,Z,"ПРОБ ЕЛ",Y,"ПРОБЕЛ"; DZ=.500000_{ю0}; Z=Z+DZ; "НА"Ж"ГДЕ"Z=.682000_{ю2}; ТЦ1=1; K1=.601200_{ю2}; B1=-.169300_{ю1}; M1=.173000_{ю1}-1; K2=-.858200_{ю1}-1; B2=.275500_{ю0}; M2=-.700000_{ю1}-3"КОНЕЦ"◇

Результат счета

X	0.5	1	1.5	1.71
Y	1	-2.4	-2.81	-2.99

Программа № 29 расчета времени охлаждения на 3-й ступени

"ПУСТЬ"Y.Z=.100000_{ю1}; Ж.Y=ТЦ1-((Z/(K1+B1×Z+M1×(Z↑2)))×(e↑((K2+B2×Z+M2×(Z↑2))/Z)×X)); "ВЫВОД"01,Z,"ПРОБЕЛ",Y,"ПРОБЕЛ"; DZ=.100000_{ю1}; Z=Z+DZ; "НА"Ж"ГДЕ"Z=.440000_{ю2}; ТЦ1=-3; K1=.189100_{ю3}; B1=-.834300_{ю1}; M1=.100000_{ю0}; K2=.124500_{ю2}; B2=-.370900_{ю0}; M2=.734000_{ю1}-2"КОНЕЦ"◇

Результат счета

X	Y	X	Y
1	-3	6	-14.5
2	-7.51	7	-17.6
3	-8.7	8	-21.5
4	-10.2	9	-26.4
5	-12.1	9.61	-30

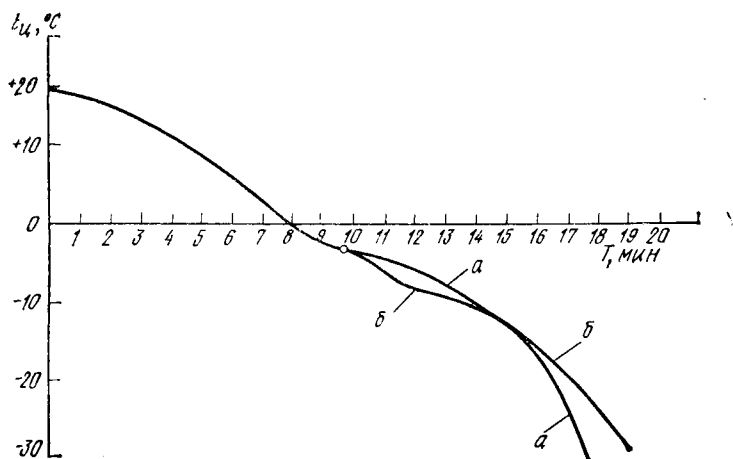


Рис. 44. Прогнозируемые термограммы двухступенчатого (а) и трехступенчатого (б) режимов замораживания (для центра образца)

На рис. 44 изображены прогнозируемые термограммы двух- и трехступенчатого режимов замораживания образца.

Чтобы оценить качественную оптимизацию режимов по стандартной программе, необходимо аппроксимировать полученные термограммы полиномами 1-й степени и сравнить величину отклонения кривых термограмм от линейного закона изменения температуры в центре образца. Оценка производится по средней квадратической погрешности аппроксимации каждой кривой. Исходные данные записываются в координатах $|-t_n| = f(T)$ при смещении оси абсцисс на минимальное значение температуры в центре -30°C .

Двухступенчатый режим в табличной форме запишется так:

T	$ -t_n $	T	$ -t_n $	T	$ -t_n $
0	120.5	7	84	14	51
1	118.5	8	76.5	15	43
2	116.5	9	69.5	16	33
3	112	10	67	17	16
4	106	11	65	17.6	0
5	99	12	61		
6	91	13	56.5		

Для трехступенчатого режима имеем:

T	$ -t_{ц} $	T	$ -t_{ц} $	T	$ -t_{ц} $
0	120.5	7	84	14	48.5
1	118.5	8	76.5	15	43
2	116.5	9	69.5	16	36
3	112	10	67	17	27
4	106	11	60	17.6	20.8
5	99	12	55	18.9	0
6	91	13	52.5		

Двухступенчатый режим описывается полиномом $|-t_{ц}| = 128.07 - 6.139 T$ с погрешностью $\delta = 6.6 \%$; трехступенчатый — $|-t_{ц}| = 126.75 - 5.97 T$ с погрешностью $\delta = 4.39 \%$. Очевидно, трехступенчатая термограмма ближе к линейной в 1,5 раза.

Глава V. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛОВОЙ СУШКИ ПРОДУКТОВ

V.1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КРИВЫХ СУШКИ

Задача оптимизации процесса тепловой сушки продуктов в принудительном режиме сводится к определению соотношений между параметрами процесса: температурой сушильного агента на каждой ступени, временем выдержки, начальной температурой сушки и начальной и конечной влажностью продукта, позволяющими без снижения качества готового продукта провести процесс с минимальным суммарным временем сушки при минимуме энергозатрат.

На основе экспериментального высушивания продуктов до постоянной массы в условиях трехкратного повторения опытов и совпадения их результатов в пределах погрешности эксперимента были получены кривые сушки и кривые скорости сушки коллоидных тел с капиллярно-пористой структурой при варьировании температуры сушильного агента (воздуха) t_{ca} от 60 до 100 °С. Характерной особенностью кривой сушки таких продуктов является отсутствие начального периода постоянной скорости, что делает невозможным применение известных методов расчета продолжительности сушки, поэтому для реализации расчета параметров процесса был применен метод аналитического моделирования.

Методика аналитического описания трехмерной модели процесса

Исходными данными для аналитического описания процесса является семейство кривых, выражающих зависимость массы высушиваемого продукта G от времени T_c и заданных в табличной форме $G=f(T_c)$, для различных (пяти) значений температуры сушильного агента: 60, 70, 80, 90 и 100 °С.

Графический анализ и физическая сущность процесса (наличие асимптотического значения: при $T \rightarrow \infty$ $G \rightarrow G_{\min}$) обусловили выбор вида аппроксимирующей функции:

$$G = G_{\min} - (G_{\min} - G_{\max}) e^{-T_c/\tau}, \quad (V.1)$$

где $G_{\min}$ — асимптотическое значение G , кгс; $G_{\max}$ — начальное значение G при $T_c = 0$, кгс; τ — постоянная времени экспоненты, ч; T_c — текущее значение аргумента — времени сушки, ч.

Значения $G_{\min}$ и $G_{\max}$ для всех кривых сушки в исходных данных одинаковы, поэтому аналитические функции, аппроксимирующие экспериментальные кривые, будут отличаться только значениями постоянной времени τ .

Для вычисления первого приближения значения τ функцию (V.1) в области определения:

$$G = G_{\max} \quad \text{при} \quad T_{c \min} = 0;$$

$$G = G_{\min} \quad \text{при} \quad T_{c \max} \rightarrow \infty,$$

следует привязать к конкретному экспериментальному значению (к координатам одной из точек таблицы данных)

$$A_3 = G_{\min} - (G_{\min} - G_{\max}) e^{X_3/\tau}. \quad (V.2)$$

Решая уравнение (V.2) относительно τ , получим

$$\tau = - \frac{X_3}{\ln(G_{\min} - G_{\max}) - \ln(G_{\min} - A_3)}. \quad (V.3)$$

Расчет значений аппроксимирующей функции в каждом узле $A[1]$ аппроксимации осуществляется по программе № 30.

Программа № 30 нахождения первого приближения τ

Стандартная информатива

```
"ПУСТЬ"Ю."РАЗРЯДНОСТЬ"Е; T=X3/(LN(A1-A2)-LN(A3-A2)); YC=
Σ(J=1,N, Y[J])/N; Ю1.DT=BXТ; "ДЛЯ"І=1"ШАГ"1"ДО"N"ВЫПОЛНИТ
Б"(A[I]=A2-(A2-A1)Xе↑(-(X[I]/T));); L=√(Σ(J=2,N(((A[J]-
Y[J])/Y[J])×100)↑2)/(N-1)); "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"01,Т,"ПРОБЕЛ",L,"СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е; "ЕСЛИ"L>EPS"ТО""НА"Ц"И
НАЧЕ""СТОП"; Ц.Т=Т+DT; "НА"Ю1"КОНЕЦ"◇
```

На первом шаге в выражение (V.1) подставляют значения τ в соответствии с формулой (V.3), затем варьируют значение τ с шагом 0.05 до тех пор, пока мера точности аппроксимации массива значений функции во всех узлах

$$L = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^N \left(\frac{Y[i] - A[i]}{Y[i]} \right)^2 \cdot 100 \right) / (N - 1)} \quad (V.4)$$

не достигнет минимума.

В рабочую информативу записываются следующие параметры:

X[I] — массив значений аргумента (времени) в узлах аппроксимации;

Y[I] — массив значений массы G в узлах;

A[I] — места, бронируемые для значений аппроксимирующей функции в узлах;

N — количество узлов аппроксимации;

B — шаг варьирования постоянной времени τ ;

K — коэффициент пропорциональности начального значения $K\tau$, от которого начинается варьирование;

EPS — значение относительной погрешности аппроксимации, по достижении которого счет прекращается;

X3 — значение аргумента (T_c) в узле привязки;

A3 — значение функции на экспериментальной кривой в узле привязки;

A1, A2 — максимальное и минимальное значения массы продукта.

Рабочая информатива для $t_{ca}=60^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" B=+.01; EPS=.5_ю0; X3=16; N=17; A[17]; T=9.54; DY[17]; ОТН[17]; A3=40.8; A1=144.5; A2=21.90; X[17]=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16; Y[17]=144.64,133.92,124.1,115.17,105.35,97.32,90.17,81.25,76.78,71.42,66.07,61.6,58.92,53.8,49.3,44.95,40.8; V[17]"КОН"◇

Рабочая информатива для $t_{ca}=70^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" B=-.01; EPS=.5_ю0; N=19; A[19]; T=5.60; DY[19]; ОТН[19]; A3=21.95; A1=144.5; A2=21.90; X3=18.7; Y[19]=134.4,121.6,108.8,97.6,86.4,75.2,68.8,62.4,54.4,49.6,42.8,38.9,35.1,29.9,26.6,25.0,23.5,22,21.95; V[19]; X[19]=.7,1.7,2.7,3.7,4.7,5.7,6.7,7.7,8.7,9.7,10.7,11.7,12.7,13.7,14.7,15.7,16.7,17.7,18.7"КОН"◇

Рабочая информатива для $t_{ca}=80^{\circ}\text{C}$

"ПУСТЬ"В=-.01; EPS=.5₁₀₀; X3=21; N=22; A[22]; T=6.23; DY[22]; ОТН [22]; A3=22.0; A1=320.2; A2=10.00; X[22]=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21; Y[22]=320.2,285.71,247.9,206.8,185.71,157.98,136.97,118.48,102.52,86.55,73.11,61.34,53.78,47.05,39.49,36.13,34.45,29.9,26.6,25.0,23.5,22.0; V[22]"КОН"◇

Рабочая информатива для $t_{ca}=90^{\circ}\text{C}$

"ПУСТЬ"В=-.01; EPS=.5₁₀₀; X3=21; N=22; A[22]; T=6.23; DY[22]; ОТН [22]; A3=22.0; A1=320.2; A2=10.00; X[22]=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21; Y[22]=320.2,285.71,247.9,209.8,185.71,157.98,136.97,118.48,102.52,86.55,73.11,61.34,53.78,47.05,39.49,36.13,34.45,29.9,26.6,25.0,23.5,22.0; V[22]"КОН"◇

Рабочая информатива для $t_{ca}=100^{\circ}\text{C}$

"ПУСТЬ"В=-.01; EPS=.5₁₀₀; X3=14; N=15; A[15]; T=2.87; DY[15]; ОТН [15]; A3=23.5; A1=326.3; A2=21.95; X[15]=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14; Y[15]=326.3,264.02,190.7,135.29,98.64,73.06,58.57,49.19,40.66,35.55,31.55,28.2,25.0,23.5,23.5; V[15]"КОН"◇

По получении τ при $L=L_{\min}$ для точного определения значения τ в программу № 31 заносится полученное значение его вместо K под символом T . Остальные исходные данные в рабочей информативе программы № 31 те же, что и в программе № 30. Варьирование τ производится с десятикратным уменьшением шага $\Delta\tau$.

Программа № 31 нахождения точного значения τ Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю."РАЗРЯДНОСТЬ"Е; УС= $\Sigma(J=1, N, Y[J])/N$; Ю1.DT=ВХТ; "ДЛЯ"І=1"ШАГ"І"ДО"N"ВЫПОЛНИТЬ"(A[І]=A2-(A2-A1)Xе↑(-(X[І]/T))) ; DY[І]=Y[І]-A[І]; ОТН[І]=(DY[І]/Y[І]) $\times$ 100; V[І]=(A2-A1)Xе↑(-(X[І]/T))/T; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"01,X[І],"ПРОБЕЛ",Y[І], "ПРОБЕЛ",A[І], "ПРОБЕЛ",V[І], "ПРОБЕЛ",ОТН[І], "СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е; L= $\sqrt{(\Sigma(J=2, N, ((A[J]-Y[J])/Y[J]) $\times$ 100) 2)/(N-1))}$; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"01,T,"ПРОБЕЛ",L,"СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е; "ЕСЛИ" L $\geq$ EPS"ТО""НА"Ц"ИНАЧЕ""СТОП"; Ц.T=T+DT; "НА"Ю1"КОНЕЦ"◇

На печать выводятся следующие параметры:

$X[I]$, $Y[I]$ — значения аргумента и функции в узлах аппроксимации;

$A[I]$ — значение аппроксимирующей функции в узле аппроксимации;

$OTH[I]$ — относительная погрешность в узле аппроксимации;

$V[I]$ — значение производной (скорости сушки) в узле;

T — значение постоянной времени τ ;

L — средняя квадратическая погрешность аппроксимации по всем узлам (в %).

По описанной методике получены следующие минимизированные значения τ :

при $t_{ca\ 1} = 60^\circ \text{C}$	$\tau_1 = 13.9$ мин,
при $t_{ca\ 2} = 70^\circ \text{C}$	$\tau_2 = 9.46$ мин,
при $t_{ca\ 3} = 80^\circ \text{C}$	$\tau_3 = 6,9$ мин,
при $t_{ca\ 4} = 90^\circ \text{C}$	$\tau_4 = 4,6$ мин,
при $t_{ca\ 5} = 100^\circ \text{C}$	$\tau_5 = 2.94$ мин.

Значения τ формируются в табличную зависимость от значения температуры сушильного агента.

Следующий этап — аппроксимация по программе № 32 сформированной табличной зависимости $\tau = f(t_{ca})$ функцией вида

$$Y = B + Kt_{ca}^M. \quad (V.5)$$

Процедура аппроксимирования аналогична предыдущей. Функция (V.5) с первым приближением показателя степени M фиксируется в области определения:

$$\begin{aligned} Y &= A3 && \text{при } t_{\min} = X3, \\ Y &= A4 && \text{при } t_{\max} = X4, \end{aligned}$$

затем значение показателя степени варьируют до достижения параметром L минимума.

Программа № 32 аппроксимации функции $\tau(t_{ca})$

Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю.В=(((A3↑M) × X4) - ((A4↑M) × X3)) / ((A3↑M) × (A4↑M) × (X4 - X3)); K=(X3×(1-(V×(A3↑M)))) / (A3↑M); "ДЛЯ" I=1"ШАГ" 1"ДО" N" ВЫПОЛНИТЬ"(A[I]=B+K×(X[I]↑M); "РАЗРЯДНОСТЬ" E1; "ВЫВОД" 01 X[I], "ПРОБЕЛ", A[I], "СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ" E); L=√((Σ(J=2, N-1, ((A[J]-Y[J])/Y[J])×100)↑2)); "РАЗРЯДНОСТЬ" E1; "ВЫВОД" 01 M, "ПРОБЕЛ", K, "ПРОБЕЛ", V, "ПРОБЕЛ", L, "СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ" E; "ЕСЛИ" L>EPS"ТО""НА" Ц1"ИНАЧЕ""СТОП"; Ц1.M=M+DM; "НА" Ю "КОНЕЦ"◇

В рабочую информативу программы № 32 записываются параметры:

М — начальное приближение показателя степени;

N — количество узлов аппроксимации;

X3, X4 — минимальное и максимальное значения аргумента в узлах;

A3, A4 — значения функции в узлах привязки соответственно с индексами аргумента;

DM — шаг варьирования показателя степени;

ОТН [I] — места, бронируемые для значений относительной погрешности аппроксимации;

X [I], Y [I] — массивы значений аргумента и табличной функции.

Рабочая информатива программы № 32 подбора функции (V.5)

"ПУСТЬ"М=−.1003000₁₀1; EPS=.50; A[5]; N=5; X3=60; X4=100; A3=13.9; A4=2.94; X[5]=60,70,80,90,100; Y[5]=13.9,9.46,6.9,4.6,2.94; DM=−.0005"КОН"◇

Результат счета: М=−1.003; К=1659; В=−13.64; L=3,545 %.

Общий вид функции, описывающей трехмерную модель процесса сушки,

$$G = G_{\min} - (G_{\min} - G_{\max}) e^{-\frac{T_c}{B + Kt^M}} \quad (V.6)$$

или с числовыми значениями параметров

$$G = 21.9 - (21.9 - 144.5) e^{-\frac{-T_c}{-13.64 + 1659t - 1.003}}.$$

Оценка точности аналитического описания трехмерной модели процесса сушки

Программа № 33 оценки точности моделирования процесса

Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю."РАЗРЯДНОСТЬ"Е;"ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"Н"ВЫПОЛНИТЬ"
:(A[I]=A2-(A2-A1)X↑(-(X[I]/(B+KX(T↑M))))); DY[I]=Y[I]-A[I]
]; ОТН[I]=(DY[I]/Y[I])X100;"РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВОД"01,X[I],"
ПРОБЕЛ",ОТН[I],"СТРОКА";"РАЗРЯДНОСТЬ"Е; L=√(Σ(J=1,N,(((
A[J]-Y[J])/Y[J])X100)↑2));"РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВОД"01,L,"СТ
РОКА""КОНЕЦ"◇

По формуле (V.6) восстанавливаются все значения массы в узлах аппроксимации. Оценка точности описания всего массива данных производится по формуле

$$\sigma = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{A[I] - Y[I]}{Y[I]} \right)^2 \right] / (N - 2)} \quad (V.7)$$

(разность $N-2$ учитывает наличие в выражении для расчета двух переменных).

В программе № 33 используются рабочие информативы программы № 30. При этом для каждого значения t_{ca} выводятся значения дисперсий аппроксимации исходного трехмерного континуума кривых функцией с двумя переменными.

Результат счета

$t_{ca}, ^\circ C$	60	70	80	90	100
$D, \%$	231.4	903	97	151.78	267.65

Сумма дисперсий $\Sigma D = 1715\%$; $\sigma = 4.17$ при $N = 101$.

Анализ всего массива данных показал, что относительная погрешность, превышающая значение σ , количественно распределена по температурам:

$t_{ca}, ^\circ C$	60	70	80	90	100
m (количество), шт	3	4	0	4	4

Общее количество $m = 15$.

Фактическая вероятность сохранения погрешности аппроксимации ниже $\sigma = 4.17\%$ составляет 0.85, что согласуется с теоретическим значением доверительной вероятности $P \geq 0.67$ (при одном σ) для нормального закона распределения.

Максимальное значение относительной погрешности находится на уровне $\sigma_{max} \cong 8.44\%$.

V.2. ВЫБОР ПО КРИВЫМ СУШКИ ОПТИМАЛЬНОГО ПО КАЧЕСТВУ РЕЖИМА

В табличной форме кривые сушки могут быть аппроксимированы функциями, описываемыми уравнением вида

$$W = W_R - (W_R - W_H) e^{-Tc/\tau}, \quad (V.8)$$

где W_n — начальная влажность продукта, %; W_k — условное асимптотическое значение конечной влажности продукта, к которому стремится функция (V.8) при неограниченном увеличении времени сушки, %; T_c — время сушки, ч; τ — постоянная времени аппроксимирующей экспоненты, зависящая от температуры сушильного агента и вида продукта, ч.

Полученные уравнения вида (V.8) для каждого значения температуры позволяют рассчитать в интервале температур (например, от 60 до 100 °C) время сушки продукта при любом ее значении, но не выбрать по ним оптимальный режим, так как отсутствует критерий выбора.

Нахождение критерия оптимальности состоит в следующем. По изменению массы продукта G в течение времени сушки строится графическая зависимость вида $G = f(T_c)$. Затем, взяв значения массы продукта G_{i+1} и G_i за равные промежутки времени T_{ci+1} и T_{ci} , можно построить зависимости скорости убыли массы от времени для различных t_{ca} .

$$\frac{\Delta G}{\Delta T_c} = \frac{G_i + G_{i+1}}{T_{ci} - T_{ci+1}} = f(T_c, t_{ca}). \quad (V.9)$$

Такие зависимости для выбранных температурных режимов представлены на рис. 45. Анализ кривых (V.9) (для различных t_{ca}) показывает, что для режимов сушки с температурами сушильного агента $t_{ca} = \text{const}$ на кривых (V.9) характерны начальные участки с квазипостоянной скоростью убыли влаги, протяженность которых увеличивается по мере уменьшения t . Протяженность участка квазипостоянной скорости в режиме $t_{ca} = 100^\circ\text{C}$ оценивается временем порядка 2—2.2 ч, по истечении которого скорость убыли влаги резко снижается и становится меньше скорости при температуре $t_{ca} = 90^\circ\text{C}$ в данный момент

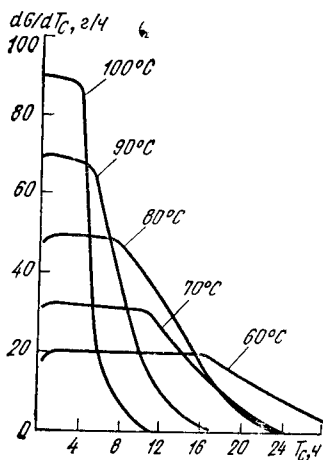


Рис. 45. Семейство кривых скорости убыли влаги при различной температуре сушильного агента

времени и т. д. Причем за этот промежуток времени начинают происходить необратимые микропроцессы на поверхности продукта (карамелизация, меланоидинообразование и т. п.), ведущие к быстрому качественному изменению структуры продукта, в свою очередь препятствующему интенсивному отбору влаги с начальной квазипостоянной скоростью. Следовательно, протяженность участка квазипостоянной скорости убыли влаги можно рассматривать как независимый параметр при определении функциональной зависимости времени сушки от температуры сушильного агента и выбрать его в качестве критерия оптимальности процесса сушки по качеству при данной температуре.

Из рассмотрения зависимостей $dG/dT_c = f(T_c)$, представленных на рис. 45, следует, что целесообразно вести процесс сушки при ступенчатом изменении температуры сушильного агента через интервалы времени, не превышающие протяженности участка квазипостоянной скорости для соответствующих температур. Ограничивая в ступенчатом режиме время $T_{с 100^{\circ}\text{C}}$, $T_{с 90^{\circ}\text{C}}$ и т. д., можно выбрать оптимальный режим, соответствующий минимальному общему времени сушки ΣT с квазилинейной убылью влаги в течение всего процесса. При этом основным критерием выбора оптимального режима (и соответственно времени $T_{с 100^{\circ}\text{C}}$, $T_{с 90^{\circ}\text{C}}$ и т. д.) является не минимальное время сушки вообще, а время, одновременно обеспечивающее сохранение высокого качества готового продукта.

У.3. ВКЛЮЧЕНИЕ В ПРОЦЕСС ОПТИМИЗАЦИИ КРИТЕРИЕВ ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ И ЭНЕРГОЗАТРАТ

Так как в эксперименте суммарный (ступенчатый по температуре сушильного агента) процесс показал по дегустационной шкале наилучший балл 4,5, то для дальнейшей оптимизации необходимо определить значения нелинейности процесса на каждой ступени за время ее воздействия. Для этого по программе № 34 производится спрямление отрезков экспериментальных кривых сушки от начала ее до конца интервала, характеризующегося максимальной относительной погрешностью спрямления, которая задается для всех кривых одинаковой.

Уравнение спрямляющей (аппроксимирующей) кривой

$$Y = KX + B \quad (V.10)$$

сравнивается в узлах аппроксимации по амплитуде со значениями влажности W эксперимента.

Программа № 34 спрямления начального участка кривых сушки

Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю.К=(A4-A3)/(X4-X3); B=A3-X3×(A4-X3)/(X4-X3); "ДЛЯ" I=1 "ШАГ" 1 "ДО" N "ВЫПОЛНИТЬ" (A[I]=X[I]×K+B; ОТН[I]=(A[I]-Y[I])/A[I]×100; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"01,X[I],"ПРОБЕЛ",A[I],"ПРОБЕЛ",ОТН[I],"СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е; L=√((Σ(J=2,N-1,(((A[J]-Y[J])/Y[J])×100)²)/(N-1))); "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"01,X4,"ПРОБЕЛ",K,"ПРОБЕЛ",B,"ПРОБЕЛ",L,"СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е; "ЕСЛИ" L>4 "ТО" "НА" Ц1 "ИНАЧЕ" "СТОП"; Ц1.X4=X4+DX; "НА" Ю "КОНЕЦ"◇

В рабочую информативу записываются параметры: X3, X4 — координаты начала и конца интервала сушки по времени;

A3, A4 — координаты по оси влажности W , соответствующие границам временного интервала;

N — количество узлов аппроксимации;

A[I], ОТН[I] — места, бронируемые для значений аппроксимирующей функции и относительной погрешности аппроксимации в узлах;

X[I], Y[I] — массивы значений аргумента и табличной функции в интервале спрямления;

±DX — знак и шаг наращивания правого конца отрезка аппроксимирующей прямой, равный интервалу между соседними значениями аргумента.

Рабочие информативы

для $t_{ca}=100^{\circ}C$

"ПУСТЬ" B=-.01; EPS=.5₁₀₀; X3=0; N=3; A[3]; X4=1.7; DY[3]; ОТН[3]; A3=264.0; A4=151; X[3]=0,1,1.7; Y[3]=264.00,190.7,151; V[3] "КОН"◇

для $t_{ca}=90^{\circ}C$

"ПУСТЬ" $B=-.01$; $EPS=.5_{10}0$; $X3=0$; $N=5$; $A[5]$; $X4=2.9$; $DY[5]$; $OTH[5]$;
 $A3=151.5$; $A4=72$; $X[5]=0,0.6,1.6,2.6,2.9$; $Y[5]=151.5$; $131.34,101.5,76.$
 $87,72$; $V[5]$ "КОН"

для $t_{ca}=80^{\circ}C$

"ПУСТЬ" $B=-.01$; $EPS=.5_{10}0$; $X3=0$; $N=6$; $A[6]$; $X4=5.0$; $DY[6]$; $OTH[6]$;
 $A3=73,1$; $A4=36.13$; $X[6]=0,1,2,3,4,5$; $Y[6]=73.1,61.34,53.8,47.05,39.49,$
 36.13 ; $V[6]$ "КОН"

Результаты счета для исследованных значений температуры представлены ниже:

для $t_{ca}=100^{\circ}C$

$T_c, ^{\circ}C$	0	1	1.7	$X4 = 1,7$
$W, \%$	264	190.7	151	$K = -66,47$
$\delta, \%$	0	3.46	0.0001	$B = 264$

для $t_{ca}=90^{\circ}C$

$T_c, ^{\circ}C$	0	0.6	1.6	2.6	2.9	$X4 = 2.9$
$W, \%$	151.5	131.3	101.5	76.87	72	$K = -27,41$
$\delta, \%$	0	2.748	5.702	4.18	0.0004	$B = 151.5$

для $t_{ca}=80^{\circ}C$

$T_c, ^{\circ}C$	0	1	2	3	4	5	$X4 = 5$
$W, \%$	73.1	61.34	53.8	47.05	39.49	36.13	$K = -7.39$
$\delta, \%$	0	6.64	7.7	7.6	9.3	0	$B = 73.1$

Зависимость максимальной относительной погрешности аппроксимации от температуры выражается следующими данными:

$t_{ca}, ^{\circ}C$	80	90	100
$\delta, \%$	9.27	5.7	3.45

Нелинейность в заданном режиме интервала времени аппроксимируется в интервале температур $80-100^{\circ}C$ по программе № 35. По этой же программе производится и аппроксимация величины $\Delta=100-\delta$ функцией вида

$$K = M - Me^{-t_{ca}^{\theta}},$$

где K — нелинейная функция, описывающая табличные значения Δ ; M — асимптота значений K , изменяющаяся программно до тех пор, пока погрешность аппроксимации не достигнет минимума; θ — постоянная времени аппроксимирующей экспоненты.

Программа № 35 аппроксимации функции Δt_{ca}

Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю.К=ХЗ/ЛN(М/(М-АЗ)); "ДЛЯ"І=1"ШАГ"1"ДО"N"ВЫПОЛНИТЬ"(А[І]=М-(М/(e↑(Х[І]/К))); ОТН[І]=((А[І]-У[І])/А[І])×100; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"01,Х[І],"ПРОБЕЛ",А[І],"ПРОБЕЛ",ОТН[І],"СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е; L=√((Σ(Ј=2,N,(((А[Ј]-У[Ј])/У[Ј])×100)↑2)/(N-1))); "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"01,АЗ,"ПРОБЕЛ",К,"ПРОБЕЛ",М,"ПРОБЕЛ",L,"СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е; "ЕСЛИ" L>ПГР"ТО""НА"Ц1"ИНАЧЕ""СТОП"; Ц1.М=М-DM; "НА"Ю"КОНЕЦ"◇

В рабочую информативу записываются параметры:
М — первое приближение асимптотического значения K аппроксимирующей функции;

ХЗ — шаг варьирования асимптотического значения M в процессе поиска минимального значения среднего квадратического отклонения значений функции от табличных в узлах аппроксимации — ПГР;

N — количество узлов аппроксимации;

А[І], ОТН[І] — места, бронируемые для значений аппроксимирующей функции и относительной погрешности в узлах.

Рабочая информатива

"ПУСТЬ"М=+ .1000000₁₀1; EPS=.50; DM=-.10; А[3]; N=3; ХЗ=80; АЗ=.2; ПГР=4; ОТН[3]; Х[3]=80,90,100; У[3]=.2,.345,.588"КОН"◇

В результате расчета получены следующие минимальные относительные погрешности аппроксимации:

$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	80	90	100	$M=104$
ОТН[І], %	0.69	-0.01	0	$\Theta=37.95$
$\Delta[І], \%$	91.36	94.29	96.54	$L=0.009$

Общий вид функции зависимости Δ от температуры

$$K = 104 - 104e^{-t_{ca}/37.95}. \quad (V.11)$$

Функция δ соответственно имеет вид

$$\delta = -4 + 104e^{-t_{ca}/37.95}. \quad (V.12)$$

По формуле (V.12) воспроизводятся все значения функции δ в интервале температур от 80 до 100 °C по программе № 36.

Программа № 36 воспроизведения функции $\delta(t_{ca})$

"ПУСТЬ"Ю.X=80; Ж.Y=-4+(104/(e↑(X/K))); "ВЫВОД"01,X,"ПРОБЕЛ",
Y,"ПРОБЕЛ"; DX=1; X=X+DX; "ПА"Ж"ГДЕ"K=.379500₁₀₂; M=104"КОН
ЕЦ"◇

При оптимизации процесса используются следующие значения δ :

$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	$\delta, \%$	$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	$\delta, \%$	$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	$\delta, \%$
80	8.633	87	6.505	94	4.736
81	8.305	88	6.232	95	4.509
82	7.985	89	5.966	96	4.288
83	7.673	90	5.707	97	4.072
84	7.369	91	5.455	98	3.862
85	7.074	92	5.209	99	3.658
86	6.786	93	4.969	100	3.450

Постоянные времени процессов сушки уточняют для всех экспериментальных температур в линейной части экспериментальных кривых. При уточнении асимптота, изменяющаяся из-за длительного воздействия высоких температур, при аппроксимации принимается $W_{\text{min}}=0$. Вначале определяют границы прямолинейных участков (в ступенчатом режиме), ограничивающие ввод исходных данных при определении скорректированных постоянных времени процессов.

Зависимости времени существования квазилинейных процессов T_c и величины $1/T_c$ (обратной времени) от температуры могут быть представлены в табличном виде:

$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	80	90	100
$T_c, \text{ч}$	5	2.9	1.7
$1/T_c, \text{ч}^{-1}$	0.2	0.35	0.588

Аппроксимация зависимости $1/T_c=f(t_{ca})$ производится по программе № 37

$$Y^M = K(X + B),$$

где коэффициент B показывает значение температуры, при которой $T_c \rightarrow 0$.

Программа № 37 аппроксимации функции $1/T_c = f(t_{ca})$

Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю.В= ((X3×(A4↑M)) - (X4×(A3↑M)))/(A3↑M - A4↑M); K=(A3↑M)/(X3+V); "ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"Н"ВЫПОЛНИТЬ"(A[I]=(K×(X[I]÷V))↑(1/M); "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"01,X[1],"ПРОБЕЛ",A[I],"СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; L=√(Σ(J=1, N, ((A[J]-Y[J])/Y[J]×100)↑2)); "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"01,М,"ПРОБЕЛ",К,"ПРОБЕЛ",В,"ПРОБЕЛ",L,"СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ЕСЛИ"Л>EPS"ТО""Н А"Ц1"ИНАЧЕ""СТОП"; Ц1.М=М+DM; "НА"Ю"КОНЕЦ"◇

Рабочая информатива

"ПУСТЬ"М=+.1000000₁₀1; EPS=.50; DM=-.10; A[3]; N=3; X3=80; A3=.2; ПГР=4; ОТН[3]; X[3]=80,90,100; Y[3]=.2,.345,.588"КОН"◇

Запись входных параметров в информативу осуществляется аналогично предыдущей программе воспроизведения функции.

Значения $1/T_c$ для температур 60—80 °С рассчитываются по результатам расчета, аналогичного комплексу расчетов в диапазоне 80—100 °С: М=0.13; К=0.006104; В=52.89; L=1.29 %.

Общее выражение для функции $1/T_c$ в диапазоне температур 60—80 °С запишется в виде следующего уравнения:

$$1/T_c = [0.006104 (t_{ca} + 52.9)]^{7.692}. \quad (V.13)$$

Для упрощения расчета $1/T_c$ при температурах 60 и 70 °С в рабочую информативу программы № 33 в массив X[I] вместо X=80 и X=90 подставляются соответственно 60 и 70 и производится ввод программы на счет. После счета получены следующие данные:

$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	60	70	80	90	100
$T_c, ^\circ\text{C}$	17.5	9.1	5	2.9	1.7

Затем осуществляется корректировка постоянных времени τ процессов с ограничением ввода данных экспериментов до границ, определяемых значениями T_c , по программе № 38.

Программа № 38 корректировки постоянных времени τ Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю."РАЗРЯДНОСТЬ"Е; УС= $\Sigma(J=1,N,Y[J])/N$; Ю1.ДТ=ВХТ;"ДЛЯ"І=1"ШАГ"І"ДО"N"ВЫПОЛНИТЬ"(А[І]=А2-(А2-А1)Хе↑(-(X[І]/Т))) ; DY[І]=Y[І]-А[І]; ОТН[І]=(DY[І]/Y[І])×100; V[І]=(А2-А1)Хе↑(-(X[І]/Т))/Т;"РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВОД"01,X[І],"ПРОБЕЛ",Y[І],"ПРОБЕЛ",А[І],"ПРОБЕЛ",V[І],"ПРОБЕЛ",ОТН[І],"СТРОКА";"РАЗРЯДНОСТЬ"Е); L= $\sqrt{(\Sigma(J=2,N,((A[J]-Y[J])/Y[J])\times 100)^2)/(N-1))}$;"РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВОД"01,Т,"ПРОБЕЛ",L,"СТРОКА";"РАЗРЯДНОСТЬ"Е;"ЕСЛИ" L>EPS"ТО""НА"Ц"ИНАЧЕ""СТОП"; Ц.Т=Т+ДТ;"НА"Ю1"КОНЕЦ"◇

В рабочую информативу программы № 38 записываются параметры:

В — относительный шаг изменения постоянной времени от начального значения T_c ;

X3 — координата границы линейного участка, соответствует найденному значению;

A3 — значение влажности, соответствующее граничному значению X3;

A1 — начальное значение влажности при $X=0$;

A2 — скорректированное для линейных процессов значение асимптоты;

N — количество узлов аппроксимации в линейном интервале;

A [I], DY [I], ОТН [I], V [I] — места, бронируемые для значений в узлах аппроксимации, функции абсолютной разности между значением функции и табличным значением влажности, относительной погрешности аппроксимации и значений производной от функции;

X [I], Y [I] — массивы табличных значений аргумента и кривой эксперимента;

Т — начальное приближение искомой постоянной времени.

Рабочая информатива

"ПУСТЬ"В=-.01; EPS=.5; X3=14; N=15; A[15]; Т=14; DY[15]; ОТН[15]; A3=23.5; A1=326.3; A2=21.95; X[15]=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14; Y[15]=326.3,264.02,190.7,135.29,98.64,73.06,58.57,49.19,40.66,35.55,31.55,28.2,25,23.5,23.5; V[15]"КОН"◇

Результат счета

постоянная времени τ в пределах времени сушки 17 ч
при $t_{ca}=60^\circ\text{C}$: $\tau_{60}=14.72$ ч; $L=2.13\%$;

функция, описывающая процесс, $W_{60}=349,1 e^{-T_c/14.72}$;

постоянная времени τ в пределах времени сушки 9 ч
при $t_{ca}=70^\circ\text{C}$: $\tau_{70}=11.6$ ч; $L=1.36\%$;

функция $W_{70}=300 e^{-T_c/11.66}$;

постоянная времени τ в пределах времени сушки 5 ч
при $t_{ca}=80^\circ\text{C}$: $\tau_{80}=7.2$ ч; $L=1.09\%$;

функция $W_{80}=320.17 e^{-T_c/7.2}$;

постоянная времени τ в пределах времени сушки 3 ч
при $t_{ca}=90^\circ\text{C}$: $\tau_{90}=4.03$ ч; $L=1.03\%$;

функция $W_{90}=273.3 e^{-T_c/4.03}$;

постоянная времени τ в пределах времени сушки
2 ч при $t_{ca}=100^\circ\text{C}$: $\tau_{100}=3.88$ ч; $L=3.54\%$;

функция $W_{100}=326.6 e^{-T_c/3.88}$;

Далее осуществляется поиск закономерности, связывающей постоянную времени процесса с температурой сушильного агента t_{ca} . Зависимость τ от t_{ca} выражается следующими данными:

$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	60	70	80	90	100
$\tau, \text{ч}$	14.72	11.66	7.2	4.03	3.88

и аппроксимируется в интервале температур $80-100^\circ\text{C}$ функцией вида

$$\tau = \tau_{\min} - (\tau_{\min} - \tau_{\max}) e^{-T_c/\theta} \quad (\text{V.14})$$

по программе № 38 со смещением значений аргумента на -80°C .

При этом в рабочую информативу записываются параметры: $X3=20$; $A3=3.88$; $A1=7.2$; $A2=3.873$; $N=3$; $A[3]$; $DY[3]$; $OTH[3]$; $V[3]$; $X[3]=0, 10, 20$; $Y[3]=7.2, 4.03, 3.88$; $T=3.0$.

Результат счета

$X[I] - 80^\circ\text{C}$	$Y[I]$	$A[I]$	L
0	7.2	7.2	0
10	4.03	4.03	0.02
20	3.88	3.88	0.01

$$T = 3.28; L = 0.0164\%.$$

Постоянная времени в диапазоне температур $80-$

100 °C описывается выражением вида

$$\tau = 3.873 - (3.873 - 7.2)e^{-(t_{ca}-80)/3.28}. \quad (V.15)$$

Из выражения (V.15) находятся все значения τ в диапазоне 80—100 °C по программе № 32. В рабочую информативу программы заносятся данные, рассчитанные по формуле (V.15). Значения τ , используемые при оптимизации процессов в интервале 80—100 °C, приведены ниже.

t_{ca}	$\tau_{корр}$	t_{ca}	$\tau_{корр}$
79	8.38596	90	4.03075
80	7.2	91	4.9893
81	6.3257	92	3.9587
82	5.6812	93	3.9362
83	5.206	94	3.9196
84	4.8557	95	3.9074
85	4.5975	96	3.8983
86	4.4071	97	3.8917
87	4.2667	98	3.8868
88	4.1633	99	3.8831
89	4.087	100	3.880

Восстановление процесса сушки по ступеням производится в соответствии со скорректированными значениями τ по исходным данным:

$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	100	90	80
$T_c, \text{ч}$	1.7	2.9	5

путем спрямления экспоненты, описывающей процесс и имеющей вид

$$W = W'_{\max} e^{-T_c/\tau_{корр}}, \quad (V.16)$$

где $\tau_{корр}$ — скорректированное значение постоянной времени; $W'_{\max}$ — исходное начальное значение влажности продукта (в соответствии с верифицированным процессом $W'_n=261,27\%$).

Для $t_{ca}=100^\circ\text{C}$ функция (IV.16) примет вид

$$W'_{100} = 261.27e^{-T_c/3.88}. \quad (V.17)$$

Спрявление функции производится по программе № 39 до достижения величиной $\delta_{\max}$ значения, рассчитываемого по формуле (V.12), т. е. $\delta_{100}=3.45\%$.

Программа № 39 спрямления функции $W'_{100}(T_c)$

Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю. А4=АМИН - (АМИН - АМАК) / ($e^{\uparrow}(X4/T)$); DX=CX X4; K=(A4 - A3) / (X4 - X3); B=A3 - X3 × (A4 - A3) / (X4 - X3); "ДЛЯ" I=1 "ШАГ" 1 "ДО" N "ВЫПОЛНИТЬ" (A[I]=X[I] × K + B; Y[I]=АМИН - (АМИН - АМАК) / ($e^{\uparrow}(X[I]/T)$); ОТН[I] = ((A[I] - Y[I]) / A[I]) × 100; "РАЗРЯДНОСТЬ" E1; "ВЫВОД" 01, X[I], "ПРОБЕЛ", Y[I], "ПРОБЕЛ", ОТН[I], "СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ" E; L = $\sqrt{(\sum_{J=2, N-1} ((A[J] - Y[J]) / Y[J]) \times 100)^2}$; "РАЗРЯДНОСТЬ" E1; "ВЫВОД" 01, X4, "ПРОБЕЛ", K, "ПРОБЕЛ", B, "ПРОБЕЛ", L, "СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ" E; "ЕСЛИ" L ≥ ПГР "ТО" "НА" Ц1 "И НАЧЕ" "СТОП"; Ц1. X4=X4 - DX; "НА" Ю "КОНЕЦ" ◇

В рабочую информативу записываются параметры:
X3, A3 — координаты начала процесса;

X4 — первое приближение значения времени в конце линейного интервала, ожидаемого по достижении $\delta = 3.45\%$;

C — относительное приращение времени на шаге варьирования;

T — скорректированное значение постоянной времени процесса для t_{ca} ;

АМИН — асимптота, учитывающая нелинейность процесса;

АМАК — начальное значение абсолютной влажности продукта;

X[N] — координаты по времени узлов аппроксимации в интервале спрямления;

N — количество узлов спрямления.

Рабочая информатива для $t_{ca} = 100^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" X3=0; N=9; A[9]; ОТН[8]; A3=261.3; X4=2.080; C=-.02; T=03.88; АМИН=00.00; АМАК=261.30; ПГР=4.00; Y[N]; X[9]=0, 7, 8, 9, 1.0, 1.2, 1.3, 1.4, 2.08 "КОН" ◇

Результат счета: при X4=1 и ОТН=3.459 % координата конца прямолинейного участка X4=2.08 ч, скорость процесса $K = -52.12\%$ /ч, конечное значение влажности $Y = 152.8\%$ при X4=2.08 ч. Через 2.08 ч надо снизить температуру сушильного агента до 90°C .

Рабочая информатива для $t_{ca} = 90^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" X3=0; N=9; A[9]; ОТН[8]; A3=152.8; X4=2.780; C=-.01; T=04.03; АМИН=00.00; АМАК=152.80; ПГР=4.00; Y[N]; X[9]=0, 7, 8, 9, 1.4, 1.5, 1.6, 2.2, 2.78 "КОН" ◇

Результат счета: при $X_4=1.5$ ч и $ОТН=5.73\%$ координата $X_4=2.78$ ч, скорость $K=-27.93\%/ч$, конечное значение влажности $Y=76.65\%$. Через 2.78 ч производится шаг на 80°C .

Рабочая информатива для $t_{ca}=80^\circ\text{C}$.

"ПУСТЬ" $X_3=0$; $N=9$; $A[9]$; $ОТН[8]$; $A_3=80.15$; $X_4=3.290$; $C=+.01$; $T=5.15$; $АМИН=10.00$; $АМАК=80.15$; $ПГР=4.00$; $Y[N]$; $X[9]=0,9,1.6,1.8,2.0,2.5,3.0,3.2,3.29$ "КОН" $\diamond$

Результат счета: при $X_4=3.4$ и $ОТН=8.54\%$ координата $X_4=6.12$ ч, скорость $K=-7.17\%$, конечное значение влажности $Y=32.76\%$. Для доведения продукта до $W_k=22\%$ необходимо досушить продукт при $t_{ca}=80^\circ\text{C}$ в течение 9 ч. Суммарное время сушки до $W_k=32.76\%$ составит 10.98 ч, до $W_k=22\%$ — 13.86 ч.

У.4. РАСЧЕТ РЕЖИМА, ОПТИМАЛЬНОГО ПО КАЧЕСТВУ, ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ И ЭНЕРГОЗАТРАТАМ

Процесс сушки характеризуется двумя функциями: функцией зависимости допустимой нелинейности от температуры сушильного агента (качественная характеристика)

$$\varphi_1 = 104 - 104(e^{-t_{ca}/37.98}), \quad (V.18)$$

которая характеризует скорость отбора влаги при различных температурах до допустимого уровня;

функцией зависимости постоянной времени процесса от температуры (энергетическая характеристика)

$$\varphi_2 = 3.873 - (3.873 - 7.2)e^{-\left(\frac{t_{ca}-80}{3.28}\right)}, \quad (V.19)$$

которая характеризует допустимое время поддержания скорости φ_1 .

Нормированные характеристики имеют вид:

$$\varphi_{1н} = 1 - (1/e^{t_{ca}/37.95}); \quad (V.20)$$

$$\varphi_{2н} = 0.5379 + (0.4621/e^{(t_{ca}-80/3.28)}). \quad (V.21)$$

Очевидно, произведение этих функций, характеризующее оптимальное энергопотребление при заданном качестве продукта, имеет минимум, т. е. минимальное зна-

чение абсолютной влажности, до которого допустим отбор влаги, при условии

$$d(\varphi_{1H}\varphi_{2H})/dt_{ca} = 0. \quad (V.22)$$

Расчет значений функции (V.22) с шагом 1°C дает следующие результаты:

$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	90	91	92	93
$d(\varphi_{1H}\varphi_{2H})$	0.507	0.503	0.501	0.499
$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	94	95	96	97
$d(\varphi_{1H}\varphi_{2H})$	0.4986	0.498275	0.498277	0.4985

Минимум имеет место при $t_{ca}=95^\circ\text{C}$.

Контрольный вариант режима с начальной температурой 95°C и шагом 2°C моделируется на каждой последующей ступени. Спрямление экспоненциальных функций, описывающих процессы сушки, производится по стандартной программе № 39 для пяти значений исходной влажности продукта: 350, 325, 300, 275, 250 % при $W_H=350$ %. В рабочую информативу программы № 39 записываются параметры: постоянная времени при $t_{ca}=95^\circ\text{C}$; $T_c=3.907$ ч, спрямление ведется по максимальной относительной погрешности $\text{OTH}=4.51$ %.

Результат счета

при $X_4=1.3$ ч $\text{OTH}=4.509$ %, $X_4=2.38$ ч, $Y=190.3$ %, $W_H=325$ %;
 при $X_4=1.3$ ч $\text{OTH}=4.509$ %, $X_4=2.38$ ч, $Y=176.7$ %, $W_H=300$ %;
 при $X_4=2.38$ ч $Y=163.1$ %, $W_H=275$ %;
 при $X_4=2.38$ ч $Y=149.5$ %, $W_H=250$ %;
 при $X_4=2.38$ ч $Y=135.9$ %.

1-й шаг — до 93°C .

Исходные данные: $T=3.936$ ч, $\text{OTH}=4.97$ %.

при $X_4=2.52$ ч	$Y=100.3$ %,	$W_H=190.3$ %;
при $X_4=2.52$ ч	$Y=93.14$ %,	$W_H=176.7$ %;
при $X_4=2.52$ ч	$Y=85.98$ %,	$W_H=163.1$ %;
при $X_4=2.52$ ч	$Y=78.81$ %,	$W_H=149.5$ %;
при $X_4=2.52$ ч	$Y=71.64$ %,	$W_H=135.9$ %;

2-й шаг — до 91°C .

Исходные данные: $T=3.989$ ч, $OTH=5.46$ %.

при $X_4=2.68$ ч	$Y=51.22$ %,	$W_H=100.3$ %;
при $X_4=2.68$ ч	$Y=47.57$ %,	$W_H=93.14$ %;
при $X_4=2.68$ ч	$Y=43.92$ %,	$W_H=85.98$ %;
при $X_4=2.68$ ч	$Y=40.25$ %,	$W_H=78.81$ %;
при $X_4=2.68$ ч	$Y=36.59$ %,	$W_H=71.64$ %;

3-й шаг — до $89^\circ C$.

Исходные данные: $T=4.1633$ ч, $OTH=5.97$ %.

при $X_4=2.878$ ч	$Y=25.34$ %,	$W_H=51.22$ %;
при $X_4=2.878$ ч	$Y=23.53$ %,	$W_H=47.57$ %;
при $X_4=2.86$ ч	$Y=22$ %,	$W_H=43.92$ %;
при $X_4=2.66$ ч	$Y=22$ %,	$W_H=40.25$ %;
при $X_4=2.28$ ч	$Y=22$ %,	$W_H=36.59$ %;

Шаг на $2^\circ C$ необходим только для двух значений W_H : 350 и 325 %. Исходные данные: $T=4.267$ ч, $OTH=6.51$ %.

при $X_4=0.63$ ч	$Y=21.86$ %,	$W_H=25.34$ %;
при $X_4=0.32$ ч	$Y=21.8$ %,	$W_H=23.5$ %.

Режимы для различных значений начальной влажности воздуха сведены в табл. 5.

В связи с тем что в производственных условиях заранее неизвестно значение W_H , а следовательно, и число шагов по ступеням, определяется начальное значение абсолютной влажности продукта, при котором изменяется количество ступеней по температуре. До границы свыше $W_{гр}$ приращение времени сушки на следующей ступени составляет $0,0124$ ч/%. После границы $W_{гр}$ распределение времени сушки на предыдущей ступени со-

Таблица 5

W_H , %	T_c (в ч) при t_{ca} , $^\circ C$					ΣT_c , ч
	95	93	91	89	87	
350	2.38	2.52	2.68	2.878	0.63	11.088
325	2.38	2.52	2.68	2.878	0.32	10.778
300	2.38	2.52	2.68	2.878	—	10.44
275	2.38	2.52	2.68	2.878	—	10.24
250	2.38	2.52	2.68	2.878	—	9.86

ставляет 0,0152 ч/%. Тогда граница, определяющаяся временем $T_{89}=2.878$ ч и $T_{87}=0$, может быть определена так: $W_{гр}=300+0.018/0.0152=301.18$ %. Принимается $W_{гр}=301$ %.

Зависимость времени сушки (по обе стороны от граничного значения $W_{гр}=301$ %) от влажности W определяется по функции зависимости T_c при $t_{ca}=87^\circ\text{C}$ от W , которая опишется полиномом 1-й степени с исходными данными:

W , %	301	325	350
T_c , ч	0	0.32	0.63

Расчет ведется по стандартной программе аппроксимации полиномом.

Результат расчета

$$T_{87} = -3.865 + 0.01285W; \quad (V.23)$$

погрешность аппроксимации $L=0.54$ %.

Функция $T_{89}=f(W)$ при $W>W_{гр}$ опишется полиномом 1-й степени с исходными данными ($t_{ca}=89^\circ\text{C}$):

W , %	250	275	300	301
T_c , ч	2.1	2.48	2.86	2.878

Результат расчета

$$T_{89} = -1.708 + 0.01523W. \quad (V.24)$$

По формуле (V.23) определяется $W_{\max}$, при которой окажется необходимым сделать еще один шаг на 85°C . Для этого надо получить зависимость времени сушки при температуре 87°C от влажности.

Спрямление скорректированной функции $T_{\text{корр}}=f(t_{ca})$ по программе № 39 дает время 6.12 ч при температуре 80°C . Тогда зависимость $T_c=f(t_{ca})$ определится по стандартной программе № 38 (в интервале температур $80^\circ\text{C}\leq T_c\leq 100^\circ\text{C}$) и опишется функцией

$$T_c = T_{\min} - (T_{\min} - T_{\max}) e^{-(t_{ca}-80)/\xi}. \quad (V.25)$$

Для приведения начала функции к началу координат в нуле по оси t_{ca} ось системы координат смещается на 80°C . Тогда в исходном массиве данных температурам 80, 89, 91, 93, 95, 100°C будут соответствовать координаты аргумента 0, 9, 11, 13, 15, 20°C .

В рабочую информативу записываются параметры:

X_3 — максимальное значение приведенной температуры (соответствует 100°C);
 A_1 — время протекания процесса при минимальной температуре сушильного агента в исследуемом температурном диапазоне;
 A_2 — первое приближение асимптоты (по времени);
 A_3 — время протекания процесса при максимальной температуре;
 $X[I], Y[I]$ — координаты табличной зависимости T_c от t_{ca} .

Рабочая информатива программы № 38

"ПУСТЬ" $B=+.01$; $EPS=.5$; $X_3=20$; $N=6$; $A[6]$; $DY[6]$; $OTH[6]$; $V[6]$; $T=5.591$; $A_1=6.12$; $A_2=2.07$; $A_3=2.08$; $X[6]=0,9,11,13,15,20$; $Y[6]=6.12,2.878,2.68,2.52,2.38,2.08$ " КОН "

Результат счета

$X[I]$	$Y[I]$	$A[I]$	$OTH[I]$
0	6.12	6.12	0
9	2.878	2.879	0.06
11	2.68	2.636	1.6
13	2.52	2.465	2.1
15	2.38	2.346	1.39
20	2.08	2.183	4.9

Постоянная времени $\xi=5.591$ ч; $L=2.6$ %.

Для расчета значений времени сушки при различных температурах в рабочих информативах достаточно на первом цикле вместо поисковых значений X поставить приведенные соответственно при смещении начала координат функции (V.25).

Результат расчета

$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	81	82	83	84	85	86	87	88	89
$T_c, \text{ч}$	5.456	4.902	4.438	4.05	3.726	3.454	3.228	3.038	2.878

Значение $W_{\max}$ при шаге на 85°C находится подстановкой значения T_c при 87°C в уравнение (V.23): $3.228 = -3.865 + 0.01285 W_{\max}$, отсюда $W_{\max}=552$ %.

По формуле (V.24) определится $W_{\min}$, при которой для полного завершения цикла сушки достаточно трех ступеней по 2°C до 91°C включительно: $0 = -1.708 + 0.01523 W_{\min}$; $W_{\min}=112$ %.

Область определения процесса сушки исследуемого продукта при начальном значении температуры сушки

95 °С и шаге 2 °С запишется в виде $112 \% \div 301 \% \div \div 552 \%$.

При ожидаемой начальной влажности продукта от 112 до 301 % процесс опишется выражением

$$T_c = T_{95} + T_{93} + T_{91} + \underbrace{(-1.708 + 0.01523W_H)}_{T_{89}};$$

при ожидаемой начальной влажности от 301 до 552 %

$$T_c = T_{95} + T_{93} + T_{91} + T_{89} + \underbrace{(-3.865 + 0.01285W_H)}_{T_{87}},$$

где $T_{95} = 2.38$ ч; $T_{93} = 2.52$ ч; $T_{91} = 2.68$ ч; $T_{89} = 2.878$ ч.

УПРОЩЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА РЕЖИМА СУШКИ ПРОДУКТА

Постоянная времени процесса в диапазоне температур 80—100 °С описывается выражением (V.15) или

$$\tau_{(80 \div 100)} = 3.873 - (3.873 - 7.2)/e^{(t_{ca} - 80)/3.23}. \quad (V.26)$$

Для диапазона температур 60—80 °С в соответствии с формулой (V.14) по программе № 15 со смещением аргумента на 60 °С аппроксимируется зависимость τ от t_{ca} .

Рабочая информатива аппроксимации функции $\tau_{(60 \div 80)} = f(t_{ca})$ к программе № 38

"ПУСТЬ" В=+.01; EPS=.5; DM=.2; A[3]; N=3; A2=0; A1=14.2; X[3]=0; 1 0.20; Y[3]=14.22,11.66,7.2; X3=20; A3=7.2; T=29.4; DY[3]; OTH[3]; V[3]"КОН"◇

Результат счета

$t_{ca} - 60^\circ\text{C}$	τ	A [1]	OTH [1]
0	14.22	14.22	0
10	11.66	10.11	13.2
20	7.2	7.202	0.029

$\theta = 29.4$ ч; $L = 9.3\%$.

Выражение для расчета $\tau_{(60 \div 80)} = f(t_{ca})$

$$\tau_{(60 \div 80)} = 14.22/e^{(t_{ca} - 60)/29.4}. \quad (V.27)$$

Общее выражение для расчета допустимого времени сушки T_c при данной температуре (V.13) не скорректи-

ровано по линейности процесса для диапазона 60—80 °С. Ранее получено выражение для расчета скорректированного $T_{\text{корр}}$ в диапазоне 80—100 °С

$$T_{(80+100)} = 2.07 - (2.07 - 6.12)/e^{\frac{(t_{\text{ca}}-80)}{5.591}}, \quad (\text{V.28})$$

в связи с чем необходимо произвести корректировку времени сушки и для диапазона 60—80 °С.

Выражение для расчета $T_{\text{корр}}$ в диапазоне 60—80 °С находят по программе № 38 по аналогии с выражением (V.15), но со смещением аргумента на 60 °С с помощью функции вида

$$T_c = T_{\text{max}}/e^{(t_{\text{ca}}-60)/\theta}. \quad (\text{V.29})$$

Рабочая информация расчета функции $T_{(60+80)} = f(t_{\text{ca}})$ к программе № 38

"ПУСТЬ"В=.01; EPS=.6; X3=29; N=3; A[3]; DU[3]; OTN[3]; V[3]; A1=17.5; A2=4.5; A3=2.9; X[3]=0,10,20; Y[3]=17.5,9.1,6.12; T=9.62"КОИ"
◇

Результат счета

$t_{\text{ca}} - 60^\circ \text{C}$	T_c	A [1]	OTN [1], %
0	17.5	17.5	0
10	9.1	9.097	0.031
20	6.12	6.125	0.093

$$0 = 9.62; \quad L = 0.069\%.$$

Выражение для расчета $T_{c(60+80)} = f(t_{\text{ca}})$

$$T_{c(60+80)} = 4.5 - (4.5 - 17.5)/e^{(t_{\text{ca}}-60)/9.62}. \quad (\text{V.30})$$

Если $W_{\text{н}}$ — начальное, а $W_{\text{к}}$ — конечное значение абсолютной влажности продукта, то общее выражение для расчета режима в зависимости от начальной температуры сушки $t_{\text{н}}$ с шагом $\Delta t_{\text{н}}$ запишется в виде

$$T_{c, \text{к}} = \left[\ln \frac{W_{\text{н}}}{W_{\text{к}}} - \left(\frac{T_c(t_{\text{н}})}{\tau(t_{\text{н}})} + \frac{T_c(t_{\text{н}} + \Delta t_{\text{н}})}{\tau(t_{\text{н}} + \Delta t_{\text{н}})} + \frac{T_c(t_{\text{н}} + 2\Delta t_{\text{н}})}{\tau(t_{\text{н}} + 2\Delta t_{\text{н}})} + \dots + \frac{T_c(t_{\text{н}} + (n-1)\Delta t_{\text{н}})}{\tau(t_{\text{н}} + (n-1)\Delta t_{\text{н}})} \right) \right] \tau(t_{\text{н}} + n\Delta t_{\text{н}}), \quad (\text{V.31})$$

где $T_{с.к}$ — время сушки на последнем температурном шаге, соответствующем температуре $t_{с.а.к}$; n — число температурных шагов (ступеней) от t_n .

Значения T_c и τ подсчитываются в интервале температур 100—80 °C по формулам (V.28) и (V.15), а после $t_{с.а.к}=80$ °C — по формулам (V.30) и (V.27).

Расчет режима 95—80 °C с шагом 5 °C: $t_n=95$ °C; $W_n=250$ %; $W_k=22$ %.

По формуле (V.31)

$$T_{с.к} = \left[\ln \frac{250}{22} - \left(\frac{2.38}{3.905} + \frac{2.78}{4.02} + \frac{3.74}{4.58} \right) \right] 7.2 = 2,26 \text{ ч.}$$

Режим сушки:

$t_{с.а.}$, °C	95	90	85	80
T_c , ч	2.28	2.78	3.74	2.26

Энергозатраты режима 100÷95÷90 °C составляют 1178 уе.

Энергозатраты оптимального режима:

$$P_{\text{опт}} = 95 \cdot 2.38 + 90 \cdot 2.78 + 85 \cdot 3.74 + 80 \cdot 2.26 = 975 \text{ уе.}$$

По сравнению с неоптимальным режимом сушки экономия энергии составит 17.2 %.

V.6. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА СУШКИ КОНЦЕНТРАТОВ В РЕЖИМЕ ТУРБОПОДДУВА

Аналитическое описание кривых сушки

Введение турбоподдува при сушке слоя пищевого концентрата на сушилке с подвижной лентой позволяет значительно снизить продолжительность сушки. Задача оптимизации состоит в нахождении оптимальных температур сушки на ступенях и направления градиента температуры в сушилке от входа к выходу, обеспечивающих минимум времени сушки при минимуме энергозатрат без потери качества.

Исходные данные зависимости абсолютной влажности W продукта от времени сушки T_c при различных поддувах продукта потоком сушильного агента приведены в табл. 6.

Зависимость $W=f(t_{с.а.})$ аппроксимируется функцией вида

$$W = W_{\text{min}} - (W_{\text{min}} - W_n) e^{-T_c/\tau}, \quad (\text{V.32})$$

где W — текущее значение абсолютной влажности продукта, %; $W_{\min}$ — асимптотическое значение W , к которому стремится экспонента при $T_c \rightarrow \infty$, %; W_n — начальное значение влажности, %; T_c — текущее значение аргумента — времени сушки, мин; τ — постоянная времени аппроксимирующей экспоненты, мин.

Таблица 6 }

Слабый турбоподдув		Сильный турбоподдув			
$t_{ca} = 75^\circ \text{C}$		$t_{ca} = 75^\circ \text{C}$		$t_{ca} = 110+75^\circ \text{C}$	
T_c , мин	W , %	T_c , мин	W , %	T_c , мин	W , %
0	140.1	0	140.1	0	140.1
5	123.2	4	114.7	5.5	100.6
10	114.7	9	89.9	10.5	89.3
15	106.2	14	67.2	15.5	80.8
20	94.9	19	49.7	20.5	75.1
25	84.7	24	38.4	25.5	69.5
30	75.1	29	29.4	30.5	52.5
35	65.5	34	21.5	35.5	38.4
40	59.3	39	18.1	40.5	29.9
45	52.5	44	15.8	45.5	24.3
50	44.1			50.5	18.6
55	35.6				
60	29.9				
65	27.1				

По программе № 30, по минимуму средней квадратической погрешности аппроксимации $L_{\min}$ находится первое приближение значения τ .

Рабочая информация аппроксимации кривой сушки при постоянной температуре $t_{ca}=75^\circ\text{C}$ и сильном турбоподдуве (см. табл. 6)

"ПУСТЬ" $B=+0.1$; $EPS=.5_{10}0$; $N=10$; $A[10]$; $T=16.0$; $DY[10]$; $OTH[10]$; $A3=15.80$; $A1=140.1$; $A2=6.43$; $X3=44.0$; $X[10]=0.4, 9, 14, 19, 20, 29, 34, 39, 44$; $y[10]=140.1, 114.7, 89.9, 67.2, 49.7, 38.4, 29.4, 21.5, 18.1, 15.8$; $V[10]$ "КОН"

Результат счета: $\tau=12.75$; $L_{\min}=12.89\%$.

По программе № 31 находится уточненное значение τ для $W_{\min}=15\%$; $\tau=12.52$; $L_{\min}=12.75\%$.

Для нахождения супремума $\sup L_{\min}$ в интервале $W_{\min}$ от 15.5 до 0 необходимо произвести аппроксимацию кривой сушки для нескольких значений $W_{\min}$, а по полученным результатам найти минимум функции $L_{\min}=f(W_{\min})$:

$W_{\min}, \%$	15.5	14.7	13	10	0
$L_{\min}, \%$	13.43	12.36	10.38	8	10.28

Зависимость $L_{\min}(W_{\min})$ аппроксимируется по стандартной программе полиномом 2-й степени

$$L_{\min} = 10.28 - 1.01W_{\min} + 0.0785W_{\min}^2. \quad (V.33)$$

Приравнивая производную $L'_{\min}$ нулю, определяем $W_{\min}$: $-1.01 + 2 \cdot 0.0785 W_{\min} = 0$ или $W_{\min} = 6.43 \%$, соответствующую $\sup L_{\min}$.

Аппроксимация кривой сушки при $t_{ca} = 75^\circ\text{C}$ без турбоподдува (см. табл. 6) при асимптоте $W_{\min} = 6.43 \%$ дает $\tau = 16$, $\sup L_{\min} = 7.39 \%$. Кривая сушки описывается функцией

$$W = 6.43 - (6.43 - 140.1)e^{-T_c/16}. \quad (V.34)$$

При дальнейшей аппроксимации исследуемых кривых сушки асимптота для них выбирается равной $W_{\min} = 6.43 \%$.

Рабочая информатива аппроксимации кривой сушки с турбоподдувом в ступенчатом режиме при $t_{ca} = 110 \div 75^\circ\text{C}$ через 10°C по 10 мин (см. табл. 6) программы № 30

"ПУСТЬ" В=+.01; EPS=.5100; N=11; A[11]; T=16.0; DY[11]; OTH[11]; A3=18.60; A1=140.1; A2=06.43; X3=50.5; X[11]=0.5,5,10.5,15.5,20.5,25.5,30.5,35.5,40.5,45.5,50.5; Y[11]=140.1,100.6,89.3,80.8,75.1,69.5,52.5,38.4,29.9,27.3,18.6; V[11]"КОН"◇

Результат счета: $\sup L_{\min} = 13.5 \%$; $W_{\min} = 24$ мин.

Кривая описывается функцией

$$W = 6.43 - (6.43 - 140.1)e^{-T_c/24}. \quad (V.35)$$

Время сушки до $W_k = 15.8 \%$ составляет $T_c = 63.8$ мин.

Рабочая информатива аппроксимации кривой сушки при $t_{ca} = 75^\circ\text{C}$ и слабом турбоподдуве (см. табл. 6) программы № 30

"ПУСТЬ" В=+.01; EPS=.5100; N=14; A[14]; T=24.0; DY[14]; OTH[14]; A3=27.10; A1=140.1; A2=06.43; X3=65.0; V[14]; X[14]=0.5,10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60,65; Y[14]=140.1,123.2,114.7,106.2,94.9,84.7,75.1,65.5,59.3,52.5,44.1,35.6,29.9,27.1"КОН"◇

Таблица 7

Параметры	Слабый турбоподдув	Сильный турбоподдув	
$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	75	75	110÷75
$T_{c. \text{эксп.}}$	101	44	64
$Q, \%$	38,9	26,4	26,2
T_c до $W_K = 10\%, \text{ мин}$	127	54,5	80,5

Результат счета: $\sup L_{\min} = 9.33 \%$; $\tau = 38$ мин.
Кривая описывается функцией

$$W = 6.43 - (6.43 - 140.1) e^{-T_c/38}. \quad (V.36)$$

Время сушки до $W_{\min} = 15.8 \%$ $T_c = 101$ мин.

Результаты аналитического описания кривых сушки сведены в табл. 7.

В табл. 7 Q означает содержание комков, а значения T_c при $W = 10 \%$ соответствуют $W_K = 11.1 \%$.

Оптимизация процесса сушки по времени в зависимости от t_{ca} при сильном турбоподдуве

Для оптимизации производится аппроксимация кривых сушки для $t_{ca} = 60, 90$ и 110°C . Исходные данные приведены в табл. 8.

При аппроксимации по программам № 30, 31 кривых сушки усреднение асимптоты недопустимо, поэтому производится их поиск для каждого значения t_{ca} .

Рабочая информатива для $t_{ca} = 60^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" B = -.01; EPS = .5100; N = 14; A[14]; DY[14]; OTH[14]; A3 = 13.00;
A1 = 140.1; A2 = 05.31; X3 = 64.5; V[14]; T = 21.63; X[14] = 0.4, 5.9, 5.14, 5.19.
5.24, 5.29, 5.34, 5.39, 5.44, 5.49, 5.54, 5.59, 5.64, 5; Y[14] = 140.1, 111.9, 94.9, 78, 6
3.8, 49.7, 35.6, 32.8, 27.1, 24.3, 18.6, 15.8, 13, 13 "КОН" ◇

Данными для подбора асимптоты методом последовательного приближения служат $W_{\min}$ и $L_{\min}$:

$W_{\min}, \%$	0	3	5.5	6	6.43	7
$L_{\min}, \%$	8.5	6.1	5.34	5.41	5.6	5.8

Поиск $W_{\min}$ дает результат: $L_{\min} = 8.52 - 1.16 W_{\min} + 0.109 W_{\min}^2$; $W_{\min} = 5.31$; $\sup L_{\min} = 5.33 \%$.

Таблица 8

$t_{ca} = 60^{\circ} C$		$t_{ca} = 90^{\circ} C$		$t_{ca} = 110^{\circ} C$	
$T_c, \text{ мин}$	$W, \%$	$T_c, \text{ мин}$	$W, \%$	$T_c, \text{ мин}$	$W, \%$
0	140.1	0	140.1	0	140.1
4.5	111.9	4.75	109	5.25	114.7
9.5	94.9	9.75	86.4	10.25	92.1
14.5	78	14.75	69.5	15.25	75.1
19.5	63.8	19.75	52.5	20.25	58.2
24.5	49.7	24.75	38.4	25.25	35.6
29.5	35.6	29.75	27.1	30.25	29.9
34.5	32.8	34.75	21.5	35.25	24.3
39.5	27.1	39.75	13	40.25	21.5
44.5	24.3	44.75	10.2	45.25	13
49.5	18.6	49.75	7.3	50.25	7.3
54.5	15.8			55.25	7.3
59.5	13				
64.5	13				

21

Процент комков Q

23

31

Вид функции кривой для $t_{ca}=60^{\circ}\text{C}$

$$W = 5.31 - (5.31 - 140.1)e^{-T_c/21.63}. \quad (\text{V.37})$$

Время сушки до $W_k=11.1\%$ (при относительной влажности 10%) $T_c=68$ мин, $\sup L_{\min}=5.33\%$.

Рабочая информатива для $t_{ca}=90^{\circ}\text{C}$

"ПУСТЬ" B=+.01; EPS=.5100; N=11; A[11]; DY[11]; OTH[11]; A3=7.3; A1=140.1; A2=00.00; V[11]; T=12.00; X3=49.75; X[11]=0,4.75,9.75,14.75,19.75,24.75,29.75,34.75,39.75,44.75,49.75; Y[11]=140.1,109.0,86.4,69.5,52.5,38.4,27.1,21.5,13.0,10.2,7.3"КОИ"◇

Для подбора асимптоты воспользуемся следующими данными:

$W_{\min}, \%$	0	0.5	1.5	3	6
$L_{\min}, \%$	9.69	10.62	11.34	14.63	20.71

Асимптота $W_{\min} = 0$.

Вид функции кривой для $t_{ca}=90^{\circ}\text{C}$

$$W = 140.1e^{-T_c/17.34}. \quad (\text{V.38})$$

Время сушки T_c до $W_k=11.1\%$ составляет 43.9 мин.

Рабочая информатива для $t_{ca}=110^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" $B=+.01$; $EPS=.5100$; $N=12$; $A[12]$; $DY[12]$; $OTH[12]$; $A3=7.3$; $A1=140.1$; $A2=00.00$; $V[12]$; $T=18.70$; $X3=55.25$; $X[12]=0.5.25, 10.25, 15.25, 20.25, 25.25, 30.25, 35.25, 40.25, 45.25, 50.25, 55.25$; $Y[12]=140.1, 114.7, 92.1, 75.1, 58.2, 35.6, 29.9, 24.3, 21.5, 13.0, 7.3, 7.3$ "КОН" $\diamond$

Данными для подбора асимптоты являются:

$W_{min}, \%$	0	0.5
$L_{min}, \%$	15.39	15.3

Вид функции кривой для $t_{ca}=110^\circ\text{C}$

$$W = 140.1e^{-T_c/18.7}. \quad (V.39)$$

Время сушки T_c до $W_k=11.1\%$ составляет 47.4 мин.

Зависимость времени сушки от t_{ca} выражается данными:

$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	60	75	90	110
$T_c, \text{мин}$	68	54.5	43.9	47.4

Оптимальная температура сушки $T_{c, \text{опт}}$ находится аппроксимацией функции $T_c=f(t_{ca})$ полиномом 2-й степени. Вид полинома

$$T_c = 208.87 - 3.88t_{ca} + 0.01736t_{ca}^2.$$

Приравнивая производную T'_c нулю, получим

$$t_{ca, \text{опт}} = 3.38/(2 \cdot 0.01736) = 97.36^\circ\text{C}.$$

Время сушки $T_{c, \text{опт}}$ при $t_{ca, \text{опт}}=97^\circ\text{C}$ составит 44.3 мин.

При аппроксимации полином сместился на 1.37°C от оси абсцисс, поэтому с учетом смещения окончательно имеем $T_{c, \text{опт}}=43.9^\circ\text{C}$.

Оптимизация процесса сушки концентратов по качеству и производительности

Экспериментальные значения индекса $P=100-Q$ (P — процент кондиционного продукта) после цикла сушки при прочих равных условиях и разных температурах t_{ca} представлены ниже.

$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	60	75	90	110
$P, \%$	77	73,6	79	69

Из приведенных данных видно, что в диапазоне t_{ca} от 60 до 90°C качество продукта — величина постоянная (в пределах математического ожидания $P_M \pm \sigma$ — средняя квадратическая погрешность), а после $t_{ca} = 90^\circ\text{C}$ начинает падать.

Так как минимум времени сушки выявлен при $t_{ca, \text{опт}} = 97^\circ\text{C}$, необходимо определить, выходит ли P_{97} при этой температуре и времени T_{97} за пределы $P_{\text{min}} \pm \sigma$. Для этого производится аппроксимация функции $P = f(t_{ca})$, заданной таблично, в интервале температур $60-90^\circ\text{C}$, затем значение P_{97} на отрезке прямой $P = f(t_{ca})$ в интервале температур $90-110^\circ\text{C}$ в точке 97°C сравнивается с минимальным значением P_{min} в узлах $t_{ca} = 60, 75$ и 90°C . Аппроксимация полиномиальной функции $P_{\text{пол}} = f(t_{ca})$ ведется по стандартной программе и дает $P_{\text{пол}} = 71.53 + 0.067 t_{ca}$ при $L = 2.074 \%$.

Значения $P_{\text{пол}}$ при различных t_{ca} приведены ниже.

$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	60	75	90
$P_{\text{пол}}, \%$	75.55	76.55	77.56

Аппроксимация отрезка прямой в интервале $t_{ca} = 90-110^\circ\text{C}$ дает $P_{\text{пол}} = 141.1 - 0.706 t_{ca}$ при $L = 1.2 \%$. При $t_{ca, \text{опт}} = 97^\circ\text{C}$ $P_{\text{пол}} = 72.6 \%$. Минимальное значение индекса качества $P_{\text{min}} = 73.6 \%$ при $t_{ca} = 75^\circ\text{C}$. С учетом $P_{\text{min}} - \sigma = 73.6 - 0.02074 \cdot 76.55$ $P_{\text{min}} - \sigma = 72 \%$. Значение P_{97} лежит в допустимых пределах, т. е. в интервале температур $60-90^\circ\text{C}$.

Оптимизация режима сушки концентратов

Нахождение квазилинейного участка экспоненты, которой описывается кривая сушки при любой температуре сушильного агента, осуществляется в следующем порядке:

производится аппроксимация начального участка экспоненты полиномом 1-й степени при фиксации левого [при $T_c = 0$ (рис. 46)] узла и варьировании координат правого до получения средней квадратической погрешности аппроксимации L_{min} порядка $1/5$ погрешности аппроксимации экспериментальной кривой экспонентой: $\sup L_{\text{min}}/2 \cong 5.31/5 \leq 1 \%$;

находятся координаты точки A пересечения прямой, имеющей ту же производную, что и аппроксимирующий полином, и проходящей через начало экспоненты. Координаты этой точки определяют время существования квазилинейного участка $T_{\text{л}}$ с заданной нелинейностью и значение убыли влаги $\Delta W_{\text{л}}$ за это время. Указанные параметры ($T_{\text{л}}$ и $\Delta W_{\text{л}}$) необходимы для расчета значений критерия оптимальности квазилинейного режима участка.

Так как спрямляющий полином заведомо смещен в сторону больших значений ординат функции, то, учитывая, что средняя квадратическая погрешность аппроксимации экспонентой имеет наименьшее значение порядка 5 %, максимальное относительное отклонение значения ординаты на прямой от значения на экспоненте не должно превышать половины, т. е. ≤ 2.5 %. При этом аппроксимирующий полином 1-й степени должен иметь в 5 раз меньшую среднюю квадратическую погрешность аппроксимации, т. е. ≈ 1 %.

Критерий оптимизации: удельные затраты энергии на единицу изъятной влаги (в кВт·ч/%). Эквивалентом работы (мощности) является произведение $t_{\text{са}}T_{\text{с}}$. Эквивалент удельных затрат

$$\Delta \mathcal{E} = (t_{\text{са}}T_{\text{с}})/\Delta W.$$

Величина $\Delta \mathcal{E}$ в оптимальном режиме должна иметь минимум.

Кривые сушки описываются следующими функциями: для $t_{\text{са}} = 60^\circ\text{C}$ — (V.37), для $t_{\text{са}} = 75 \div 70^\circ\text{C}$ — (V.34), для $t_{\text{са}} = 90 \div 80^\circ\text{C}$ — (V.38), для $t_{\text{са}} = 110^\circ\text{C}$ — (V.39).

В процессе спрямления экспонент путем аппроксимации их по программе № 30 значения среднего квадратического отклонения $L2$ ограничиваются для всех кривых на одном уровне.

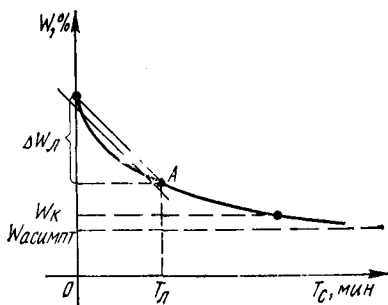


Рис. 46. Графическая интерпретация процедуры поиска квазилинейного участка экспоненты

Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю."РАЗРЯДНОСТЬ"Е; "ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО" (3×N+2) "ВЫПОЛНИТЬ" D[I]=0; "ДЛЯ"J=1"ШАГ"1"ДО"K"ВЫПОЛНИТЬ" (I=1; R1=1; D[I]=D[I]+R1; F[J]=Φ(X[J]); Q. R2=R1×F[J]; D[I+2×N+1]=D[I+2×N+1]+R2; P1.R1=R1×X[J]; D[I+1]=D[I+1]+R1; I=I+1; "ЕСЛИ" I<N+2"ТО" ("НА"Q); "ЕСЛИ" I<2×N+1"ТО" ("НА"Р1)); "ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО" (N+1) "ВЫПОЛНИТЬ" "ДЛЯ"J=1"ШАГ"1"ДО" (N+1) "ВЫПОЛНИТЬ" A[I, J]=D[I-1+J]; "ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО" (N+1) "ВЫПОЛНИТЬ" B[I]=D[2×N+1+I]; "ДЛЯ"Ж=1"ШАГ"1"ДО" (N+1) "ВЫПОЛНИТЬ" (T=0; "ДЛЯ"И=Ж"ШАГ"1"ДО" (N+1) "ВЫПОЛНИТЬ" (D=Σ(P=1, Ж-1, A[I, P]×A[P, Ж]); A[I, Ж]=A[I, Ж]-D); "ЕСЛИ" ABS(A[I, Ж])>T"ТО" (T=ABS(A[I, Ж]); M=I); "ЕСЛИ" M=Ж"ТО" ("НА"K1); "ДЛЯ"J=1"ШАГ"1"ДО" (N+1) "ВЫПОЛНИТЬ" (T=A[Ж, J]; A[Ж, J]=A[M, J]; A[M, J]=T; T=B[Ж]; B[Ж]=B[M]; B[M]=T; K1."ЕСЛИ" ABS(A[Ж, Ж])≤EPS"ТО" (S=1; "НА"М1); "ДЛЯ"И=Ж+1"ШАГ"1"ДО" (N+1) "ВЫПОЛНИТЬ" A[I, Ж]=A[I, Ж]/A[Ж, Ж]; "ДЛЯ"J=Ж+1"ШАГ"1"ДО" (N+1) "ВЫПОЛНИТЬ" (D=Σ(P=1, Ж-1, A[Ж, P]×A[P, J]); A[Ж, J]=A[Ж, J]-D; D=Σ(P=1, Ж-1, A[Ж, P]×B[P]); B[Ж]=B[Ж]-D); "ДЛЯ"Ж=N+1"ШАГ"(-1)"ДО"1"ВЫПОЛНИТЬ" (D=Σ(P=Ж+1, N+1, A[Ж, P]×B[P]); B[Ж]=(B[Ж]-D)/A[Ж, Ж]); R3=0; L2=0; "ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"K"ВЫПОЛНИТЬ" (J=N; R1=B[J+1]; L. R1=R1×X[I]+B[J]; J=J-1; "ЕСЛИ" J>0"ТО" ("НА"L); R2=ABS(R1-F[I]); L2=L2+R2↑2; "ЕСЛИ" R2>R3"ТО" (R3=R2; R4=F[I]); "ЕСЛИ" R4=0"ТО" (R1=0) "ИНАЧЕ" (R1=R3/R4); L2=√(L2/K); "ВЫВОД"01, R3, "ПРОБЕЛ", R1, "ПРОБЕЛ", L2; M1."ВЫВОД"01, "СТРОКА", S; "ВЫВОД"01, "МАССИВ"В; "ВЫВОД"01, "МАССИВ"Г"КОНЕЦ"◇

Исходные данные, записываемые в рабочую информативу, аналогичны исходным данным программы аппроксимации полиномом, за исключением числовых массивов значений аргумента, задаваемого произвольно, и функции.

Массивы аргумента и функции для $t_{ca}=60^{\circ}\text{C}$: X[11]=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10; Y[11]=140.1, 134, 128.2, 122.6, 117.3, 112.3, 107.5, 102.8, 98.4, 94.2, 90.2. Значения Y[11] — значения функции на экспоненте.

Аппроксимирующий полином $W_{ap}=138.3-4.377 T_c$; $L2=1.01\%$.

Параметры спрямляющей прямой между узлами экспоненты X=0 и X=10: X=5; Y=112.3; A[I]=115.1; ОТН[I]=2.475; K=-4.99; X_{ap}=10.

Условие адекватности функций в пределах заданной нелинейности выполнено. Значение $W_{\text{ап}}$ при $X_{\text{ап}}=10$ рассчитывается по формуле (V.37). Влажность продукта на границе квазилинейного участка $W_{\text{л}}=111.9$; $\Delta W_{\text{л}}=140.1-111.9=28.2$.

Для $t_{\text{са}}=75^{\circ}\text{C}$ по формуле (IV.34) находим $W_{\text{ап}}=138.5-6.72 T_{\text{с}}$; $L2=1.018 \%$.

Числовые значения массивов в рабочей информативе: $X[8]=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.2$; $Y[8]=140.1, 132, 124.4, 117.3, 110.5, 104.2, 98.3, 91.7$.

Результаты спрямления кривой сушки для $t_{\text{са}}=75^{\circ}\text{C}$: $X=5$; $Y=110.5$; $A[I]=113.2$; $\text{ОТН}[I]=2.394$; $K=-6.72$; $X_{\text{ап}}=7.2$; $W_{\text{л}}=49.7$; $\Delta W_{\text{л}}=140.1-49.7=90.4$.

Для $t_{\text{са}}=90^{\circ}\text{C}$ по формуле (V.38) имеем $W_{\text{ап}}=138.43-6.5 T_{\text{с}}$; $L2=1.00 \%$.

Числовые значения массивов в рабочей информативе: $X[9]=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7.6$; $Y[9]=140.1, 132.3, 124.8, 117.8, 111.2, 105, 99.1, 93.6, 90.4$.

Результаты спрямления кривой сушки для температуры сушильного агента 90°C : $X=5$; $Y=105$; $A[I]=107.4$; $\text{ОТН}[I]=2.4$; $K=-6.54$; $X_{\text{ап}}=7.6$; $W_{\text{л}}=90.38$; $\Delta W_{\text{л}}=140.1-90.38=49.72$.

Для $t_{\text{са}}=110^{\circ}\text{C}$ по формуле (V.39) имеем $W_{\text{ап}}=138.33-6 T_{\text{с}}$; $L2=1.01 \%$.

Числовые значения массивов в рабочей информативе: $X[10]=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8.2$; $Y[10]=140.1, 132.8, 125.9, 119.3, 113.1, 107.2, 101.6, 96.4, 91.3, 90.4$.

Результаты спрямления кривой сушки для $t_{\text{са}}=110^{\circ}\text{C}$: $X=5$; $Y=113.1$; $A[I]=109.7$; $\text{ОТН}[I]=2.378$; $K=-6.06$; $X_{\text{ап}}=8.2$; $W_{\text{л}}=90.36$; $\Delta W_{\text{л}}=140.1-90.36=49.74$.

Результаты поиска квазилинейных участков на кривых сушки с максимальными значениями относительных

Т а б л и ц а 9

$t_{\text{са}}, ^{\circ}\text{C}$	Интегральная скорость $ \Delta W_{\text{л}}/\Delta T_{\text{с}} $, %/мин	$\Delta W_{\text{л}}, \%$	Время сушки $T_{\text{с}}, \text{мин}$	$\Delta \mathcal{E}, \text{у.е.}$
60	4.99	28.2	10	2.13
75	6.72	49.7	7.2	1.509
90	6.54	49.72	7.6	1.81
110	6.06	49.74	8.2	2.2

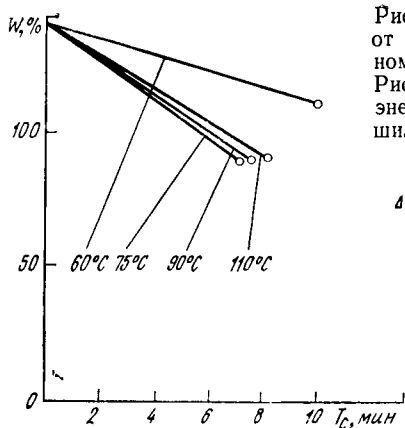
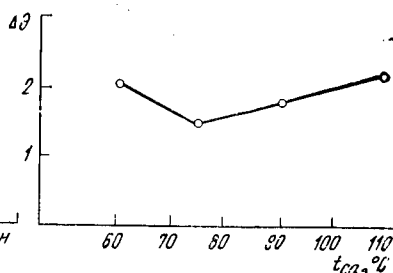


Рис. 47. Зависимость убыли влаги от времени сушки в квазилинейном режиме
Рис. 48. Зависимость удельных энергозатрат от температуры сушильного агента



отклонений экспоненты от прямой 2.5 % сведены в табл. 9.

На рис. 47 представлена зависимость убыли влаги по спрямленным экспонентам в квазилинейном режиме от времени сушки, на рис. 48 — удельных энергозатрат от температуры сушильного агента.

Из рис. 48 видно, что начиная с некоторого значения t_{ca} (лежащего около 75°C), квазилинейный участок существует в интервале процента убыли влаги со 140.1 до 49.7—49.74 %. Следовательно, при стабилизации ограничения уровня абсолютной влажности $W_{л}$, характеризующего квазилинейные участки сушки, на значении $W \approx 49.7\%$ время сушки до этого уровня при $t_{ca} = 75^{\circ}\text{C}$ минимально. Критерий оптимальности $\Delta\theta$ имеет минимум в районе 75°C .

Оптимизация процесса сушки на второй ступени двухступенчатого режима

Оптимизация процесса по энергозатратам начинается с аппроксимации второй ступени сушки экспонентой. Исходные данные: на первой ступени сушка производилась в квазилинейном режиме при $t_{ca} = 75^{\circ}\text{C}$ в течение 7 мин. Затем температура сушильного агента изменялась ступенчато до значений 60, 90 и 100°C . Значения зависимости абсолютной влажности W от T_c приведены в табл. 10.

Таблица 10

T_c , мин	W (в %) при t_{ca} , °C		
	60	90	110
0	109	109	109
5	92.1	72.3	72.3
10	75.1	55.4	49.7
15	61.8	35.6	35.6
20	49.7	30	24.3
25	38.4	21.5	18.6
30	32.8	15.8	13
35	27.1	13	10.2
40	21.5	10.2	
45	18.6		
50	16.8		
55	13		
60	10.2		

Зависимость $W=f(T_c)$ аппроксимируется функцией (V.32). По программам № 7, 8 рассчитываются значения τ для T_c .

Результат счета для $T_c=60^\circ\text{C}$: $\tau_{60}=21.63$; $\text{sup } L_{\text{min}}=6.44\%$. Значение W_{min} взято таким же, как и в одноступенчатом режиме. $\text{Sup } L_{\text{min}}=6.44\%$ сохраняется при $\tau_{60}=21.63$.

Процесс на второй ступени при $t_{ca}=60^\circ\text{C}$ описывается функцией

$$W_{60} = 5.31 - (5.31 - 109)e^{-T_c/21.63}. \quad (\text{V.40})$$

Время сушки T_{c60} до $W_K=11.1\%$ составит 62.5 мин.

Результат расчета для $t_{ca}=90^\circ\text{C}$: $\tau_{90}=15.89$; $L_{\text{min}}=9.94\%$.

Вид функции

$$W_{90} = 109e^{-T_c/15.89}. \quad (\text{V.41})$$

Время сушки T_{c90} до $W_K=11.1\%$ составит 36.3 мин.

Результат расчета для $t_{ca}=110^\circ\text{C}$: $\tau_{110}=14.05$; $L_{\text{min}}=6.73\%$.

Вид функции

$$W_{110} = 109e^{-T_c/14.05}. \quad (\text{V.42})$$

Время сушки T_{c110} до $W_K=11.1\%$ составит 32 мин.

Результат расчета для $t_{ca}=75^{\circ}\text{C}$: время сушки T_{c75} до $W_k=11.1\%$ составит 47.5 мин.

Получены следующие значения эквивалента удельных затрат $\Delta\mathcal{E}$ на второй ступени:

$t_{ca}, ^{\circ}\text{C}$	60	75	90	110
$\Delta\mathcal{E}, \text{ уэе}$	38.2	36.3	33.3	35.9

Функция удельных затрат $\Delta\mathcal{E}=f(t_{ca})$ аппроксимируется полиномом 2-й степени, в результате получаем:

$$\Delta\mathcal{E} = 71.45 - 0.817t_{ca} + 0.0045t_{ca}^2; \quad L2 = 0.67\%. \quad (\text{V.43})$$

Производная $\Delta\mathcal{E}' = -0.817 + 0.009 t_{ca}$ при $t_{ca} = 90.8^{\circ}\text{C}$ равна нулю.

Расчет оптимизированного по двум параметрам режима сушки на второй ступени

Зависимость постоянной времени сушки от t_{ca} аппроксимируется полиномом 2-й степени:

$t_{ca}, ^{\circ}\text{C}$	60	80	110
$\tau, \text{ мин}$	21.63	15.89	14.05

В результате аппроксимации получим:

$$\tau = 43.838 - 0.4893t_{ca} + 0.001987t_{ca}^2; \quad L2 = 1 \cdot 10^{-6}\%. \quad (\text{V.44})$$

При $t_{ca}=90.8^{\circ}\text{C}$ постоянная времени экспоненты $\tau_{90.8}=15.79$.

Так как оптимальное значение $t_{ca.\text{опт}}$ лежит в интервале температур $90\text{—}110^{\circ}\text{C}$ с асимптотами $W_{\min}=0$, то

$$W_{90.8} = 109e^{-T_c/15.79}. \quad (\text{V.45})$$

Если оптимальное значение $t_{ca.\text{опт}}$ окажется в интервале температур $60\text{—}90^{\circ}\text{C}$, то $W_{\min}$ необходимо будет пересчитать по аппроксимирующему полиному 2-й степени с такими значениями:

$t_{ca}, ^{\circ}\text{C}$	60	75	90
$W_{\min}, \%$	5.31	6.43	0

Время сушки для $t_{ca}=90.8^{\circ}\text{C}$ до $W_k=11.1\%$ рассчитывается по выражению (V.45):

$$T_{c90.8} = 15.79 \ln(109/11.1) = 36 \text{ мин.}$$

Эквивалент удельных энергозатрат $\Delta\mathcal{E}_{90.8}=33.36$ узе.

В результате расчета получим оптимизированный по двум параметрам режим сушки:

	$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	$T_{c.\text{опт}}, \text{ мин}$	$\Sigma T_0, \text{ мин}$	$\Sigma \Delta\mathcal{E}, \text{ узе}$
I ступень	75	7	43	50.28
II ступень	90.8	36		

Затраты энергии $P=75 \cdot 7 + 90.8 \cdot 36 = 3793.8$ узе.

Для режима с максимальной производительностью зависимость времени сушки T_c от t_{ca} выражается следующими данными:

$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	60	75	90	110
$T_c, \text{ мин}$	62.5	47.5	36.3	32

Минимум T_c находится при $t_{ca}=110^\circ\text{C}$.

Скоростной режим характеризуется следующими данными:

	$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	$T_{c.\text{опт}}, \text{ мин}$	$\Sigma T_0, \text{ мин}$	$\Sigma \Delta\mathcal{E}, \text{ узе}$
I ступень	75	7	39	52.8
II ступень	110	32		

Затраты энергии $P=75 \cdot 7 + 110 \cdot 32 = 4045$ узе.

Выигрыш во времени $\delta_P = +9.3\%$.

Проигрыш в энергозатратах $\delta_t = -6.75\%$.

Удельные энергозатраты на единицу продукции на 5 % больше, чем в оптимальном режиме.

Включение в процедуру оптимизации процесса индекса качества

Функция $\Delta\mathcal{E}=f(t_{ca})$ описывается выражением (V.43). Зависимость процента брака $\bar{P}$ от t_{ca} на второй ступени представлена ниже.

$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	60	75	90	110
$\bar{P}, \%$	50	57.8	57.8	50

Зависимость $\bar{P}=f(t_{ca})$ аппроксимируется полиномом 2-й степени:

$$\bar{P} = -40.09 + 2.328t_{ca} - 0.0137t_{ca}^2. \quad (\text{V.46})$$

Так как процент брака $\bar{P}(t_{ca})$ является эквивалентом энергозатрат на доработку партии продукта, то его зна-

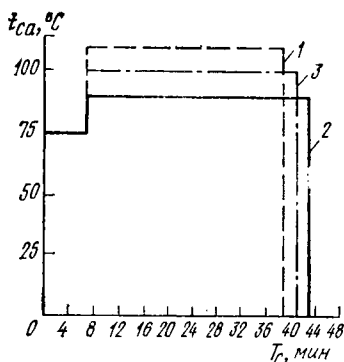


Рис. 49. Оптимизированные режимы сушки по параметрам:
1 — одному; 2 — двум; 3 — трем

чение можно считать дополнительными удельными затратами. Поэтому сумма $\xi(t_{ca})$ функций (V.43) и (V.46) также будет иметь минимум (уже с учетом дополнительных затрат на доработку продукта).

$$\xi(t_{ca}) = \Delta\mathcal{E}(t_{ca}) + \bar{P}(t_{ca});$$

$$\frac{d\xi(t_{ca})}{dt_{ca}} = 0. \quad (V.47)$$

Определяем $t_{ca, \text{опт}}$ режима, оптимизируемого по трем параметрам:

$$(0.009t_{ca} - 0.817) + K(2.328 - 0.0274t_{ca}) = 0,$$

где K — коэффициент, учитывающий долю затрат на доработку комков брака в энергозатратах на основную сушку.

$K = 1/5$ при $t_{ca, \text{опт}} = 99.8^\circ\text{C}$.

Время сушки $T_{c99.8}$ для $t_{ca} = 99.8^\circ\text{C}$ до $W_k = 11.1\%$ рассчитывается по формуле (V.46), постоянная времени — по формуле (V.44): $\tau_{99.8} = 14.79$. Тогда $T_{c99.8} = 14.79 \ln(109/11.1) = 33.8$ мин.

Эквивалент удельных энергозатрат $\Delta\mathcal{E}_{99.8} = 34.42$ узе.

Оптимальный режим характеризуется следующими значениями:

	$t_{ca}, ^\circ\text{C}$	$T_{c, \text{опт}}, \text{мин}$	$\Sigma T_c, \text{мин}$	$\Sigma \Delta\mathcal{E}, \text{узе}$
I ступень	75	7	40.8	51.35
II ступень	99.8	33.8		

Затраты энергии $P_{\text{опт}} = 75 \cdot 7 + 99.8 \cdot 33.8 = 3789.2$ узе.

На рис. 49 (штрихпунктир) изображен оптимальный по трем параметрам режим сушки.

Контрольные двухступенчатые режимы сушки с неоптимальными энергетическими затратами

Для контроля расчета оптимальных по энергозатратам режимов была проведена сушка аналогичного исходного материала в двухступенчатом режиме. Параметры

Таблица 11

T_c , мин	W (в %) при t_{ca} , °C			
	60	75	90	100
0	95	94.2	94.2	140.1
5	75.1	75.4	75.4	100
10	58.1	58.9	55.4	86.4
15	46.8	49.2	44.1	69.4
20	35.5	38.2	35.6	52.5
25	32.8	32.7	27.1	38.5
30	27.2	24.9	21.5	27.2
35	24.2	21.7	18.6	18.6
40	18.6	15.2	13	13
45	15.9	13	10.2	10.2
50	15.9	12		
55	13			

режима на I ступени: $W_k = 94 \div 95$ %; $t_{ca} = 100$ °C; на II ступени: $t_{ca} = 60, 75, 90$ и 100 °C.

Экспериментальные кривые сушки на II ступени аппроксимировались экспонентами по исходным данным табл. 11. Начало экспоненты для $t_{ca} = 60, 75, 90$ °C перенесено по времени на конец квазилинейного участка I ступени.

После математической обработки аппроксимирующие функции принимают вид, приведенный в табл. 12.

Параметры режимов на II ступени приведены в табл. 13.

Сравним режимы, оптимизированные по двум параметрам: $T_c = 43$ мин; $P = 3794$ узе и по трем: $T_c = 40.8$ мин; $P = 3789$ узе.

Таблица 12

t_{ca} , °C	Вид функции	L_{min} , %	T_c до уровня $W_k = 11.1$ %, мин
60	$W_{60} = 5.31 - (5.31 - 95)/e^{T_c/21.5}$	6.9	59
75	$W_{75} = 6.43 - (6.43 - 94.2)/e^{T_c/18.68}$	6.9	54.7
90	$W_{90} = 94.2/e^{T_c/20.44}$	3.7	43.7
100	$W_{100} = 140.1/e^{T_c/17.52}$	9.78	36.3

Таблица 13

$t_{ca}, ^\circ C$	$\Sigma T_0, \text{ мин}$	$P, \text{ узе}$	Брак, %
60	67	4340	70
75	62.7	5502.5	70
90	51.7	5453	70
100	44.3	4430	63

У.7. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА СУШКИ КОНЦЕНТРАТОВ С ДОБАВКАМИ ПОВЕРХНОСТНО-АКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВ

Качество готового концентрата ухудшает наличие в нем комков. Снижение комков до минимума достигается добавлением в концентрат перед высушиванием поверхностно-активных веществ (ПАВ), что, однако, приводит к удорожанию готового продукта. Задача оптимизации процесса сушки с ПАВ сводится к нахождению таких доз добавок, которые обеспечивали бы получение продукта с заданным содержанием комков без снижения качества и увеличения времени сушки. Решение задачи осуществляется в несколько этапов.

Аналитическое описание кривых зависимости качества готового продукта от дозы ПАВ и его начальной влажности

Экспериментальные кривые зависимости содержания комков в продукте от W_H и дозы ПАВ представлены в табл. 14.

Таблица 14

Доза, ПАВ $\delta, \%$	Содержание комков Q (в %) при $W_H, \%$					
	31	36	41	46	51	56
0	62	64	85	97	99	100
0.2	25	40	51	—	—	—
0.4	11	16	35	53	83	88
0.6	8	11	27	—	—	—
1.0	8	10	20	58	64	73

Зависимость $Q = f(W_n, \delta)$ представлена на рис. 50. Анализируя кривые, можно ввести ограничения на значения области существования, задавшись максимально допустимым значением $Q \approx 50\%$. Тогда значения аргумента W_n лежат в пределах от 30 до 53 %.

При этом аппроксимирующая функция $Q(W_n)$ значительно упрощается и принимает вид

$$Q = -\tau \ln \frac{W_2 - W_n}{W_2 - W_1} - Q_0, \quad (V.48)$$

где τ — постоянная времени аппроксимирующей кривой; W_2 — асимптотическое значение начальной влажности продукта, к которому стремится аппроксимирующая функция $Q(W_n)$, в рамках ограничиваемой области определения, %; W_1 — начальное значение влажности продукта W_n , %; Q_0 — остаточное содержание комков в продукте при минимальном значении начальной влажности продукта W_n , %.

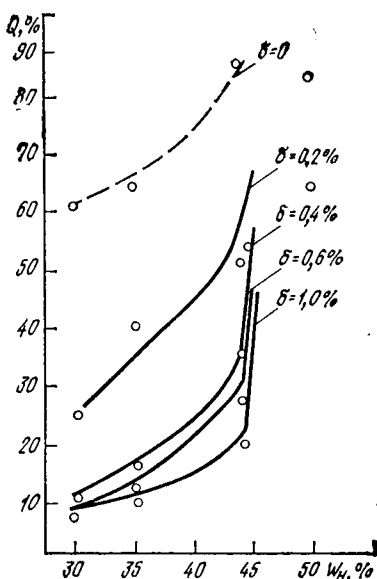


Рис. 50. Зависимость качества продукта от начальной влажности его при различных дозах ПАВ

Программа № 41 расчета параметров аппроксимирующих функций для фиксированных значений δ

Стандартная информатива

```
"ПУСТЬ"Ю."РАЗРЯДНОСТЬ"Е;Ю1."ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"Н"ВЫПОЛНИТЬ"(А[I]=(-ТХЛН((W2-X[I])/(W2-W1))))-Q0;DY[I]=Y[I]-A[I];ОТН[I]=(DY[I]/Y[I])×100;"РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВОД"01,X[I],"ПРОБЕЛ",Y[I],"ПРОБЕЛ",A[I],"ПРОБЕЛ",ОТН[I],"СТРОКА";"РАЗРЯДНОСТЬ"Е;L=√((Σ(J=1,N,(((A[J]-Y[J])/Y[J])×100)²)/(N-1))); "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВОД"01,Т,"ПРОБЕЛ",L,"СТРОКА";"РАЗРЯДНОСТЬ"Е;"ЕСЛИ"Л>EPS"ТО""НА"Ц"ИНАЧЕ""СТОП":Ц.Т=Т+ДТ;"НА"Ю1"КОНЕЦ"◇
```

Рабочая информатива для $\delta=0.2\%$

"ПУСТЬ" $T=33$; $EPS=.5$; $W_1=31$; $W_2=52$; $OTH[4]$; $X[4]=31,36,44,46$; $Y[4]=25,40,51,70$; $DT=+1$; $N=4$; $A[4]$; $DY[4]$; $Q_0=-25$ "КОН" $\diamond$

Результат счета

$X[I]$	$Y[I]$	$A[I]$	$OTH[I], \%$
31	25	25	0
36	40	33.97	+15.06
44	51	56.84	-11.46
46	70	66.34	+5.226

$T=33$; $L=11.32\%$.

Функция $Q_{0.2}(W_H)$ примет вид

$$Q_{0.2} = -33 \ln \frac{52 - W_H}{21} + 25. \quad (V.49)$$

Соответствие символов алгоритма и программы следующее: $\tau—T$; $Q—Y[I]$; $W—X[I]$; $W_1—W_1$; $W_2—W_2$; $Q_0—Q_0$.

Рабочая информатива для $\delta=0.4\%$

"ПУСТЬ" $T=15$; $EPS=.5$; $W_1=31$; $W_2=47$; $OTH[4]$; $X[4]=31,36,44,46$; $Y[4]=11,16,35,53$; $DT=+1$; $N=4$; $A[4]$; $DY[4]$; $Q_0=-11$ "КОН" $\diamond$

Результат счета

$X[I]$	$Y[I]$	$A[I]$	$OTH[I], \%$
31	11	11	0
36	16	16.62	-3.877
44	35	36.1	-3.17
46	53	52.58	+0.776

$T=15$; $L=2.93\%$.

Функция $Q_{0.4}(W_H)$ примет вид

$$Q_{0.4} = -15 \ln \frac{47 - W_H}{36} + 11. \quad (V.50)$$

Рабочая информатива для $\delta=0.6\%$

"ПУСТЬ" $T=11$; $EPS=.5$; $W_1=31$; $OTH[4]$; $X[4]=31,36,44,46$; $Y[4]=8,11,27,53$; $DT=+1$; $N=4$; $A[4]$; $DY[4]$; $Q_0=-8$; $W_2=46.5$ "КОН" $\diamond$

Результат счета

X[I]	Y[I]	A[I]	OTH[I], %
31	8	8	0
36	11	12.28	-11.67
44	27	28.07	-3.96
46	53	45.77	+13.63

$T=11$; $L=10,62\%$.

Функция $Q_{0.6}(W_H)$ примет вид

$$Q_{0.6} = -11 \ln \frac{46.5 - W_H}{38.5} + 8. \quad (V.51)$$

Рабочая информатива для $\delta=1\%$

"ПУСТЬ" $T=6.5$; $EPS=.5$; $W_1=31$; $OTH[4]$; $X[4]=31,36,44,46$; $Y[4]=8,10,20,51$; $DT=+1$; $N=4$; $A[4]$; $DY[4]$; $Q_0=-8$; $W_2=46.5$ "КОН"◇

Результат счета

X[I]	Y[I]	A[I]	OTH[I], %
31	8	8	0
36	10	10.62	-6.246
44	20	20.95	-4.79
46	51	45.09	+11.57

$T=6.5$; $L=8.082\%$.

Функция $Q_{1.0}(W_H)$ примет вид

$$Q_{1.0} = -6.5 \ln \frac{46.05 - W_H}{38.05} + 8. \quad (V.52)$$

Асимптоты W_2 определяются методом последовательного приближения по минимуму среднего квадратического отклонения аппроксимирующей функции от экспериментальной для каждого δ .

Переход к качественной характеристике функции $Q(W_H)$

Содержание неомковового компонента в порции готового продукта является показателем (индексом) качества K_1 . Пропорциональный переход к пятибалльной системе оценки этого индекса путем нормирования функции

$$K_1(W_H) = 5 \left(1 - \frac{Q(W_H)}{100} \right) \quad (V.53)$$

дает функцию качества продукта, оцениваемого по сохранению комков.

Другая качественная характеристика выводится из степени восстанавливаемости готового продукта после варки и сушки при насыщении водой. Условно для рассматриваемого продукта принимается следующая балльная оценка индекса K_2 (по той же шкале): при исходной влажности (перед сушкой) 20 % — 0 баллов, при 50 % — 5 баллов.

Функция качества $K_2(W_H)$ по восстанавливаемости

$$K_2(W_H) = 0.167W_H - 3.4. \quad (V.54)$$

Произведение функций $K_1(W_H)K_2(W_H)$ имеет максимум (соответствующий наилучшему соотношению индексов качества), который можно принять за оптимальное значение и найти из условия

$$d[K_1(W_H)K_2(W_H)]/dW_H = 0 \quad (V.55)$$

или

$$d \left[(0.167W_{\text{опт}} - 3.4) \left(5 \left(1 + \frac{\tau \ln \frac{W_2 - W_{\text{опт}}}{W_2 - W_1}}{100} \right) \right) \right] / dW = 0. \quad (V.56)$$

Значение K_1K_2 для всех δ :

δ	K_1K_2	$W_{\text{опт}}, \%$
0.2	9.27	40
0.4	10.7	41
0.6	12.4	43
1.0	14.41	44

Для графического построения функции $(K_1K_2)_\delta = f(W_H)$ (рис. 51) рассчитываются значения K_1, K_2 по стандартной программе № 42. Соответствие индексов алгоритма и программы следующее: $W_1 \rightarrow X_1$, $(K_1K_2) \rightarrow Y$, $Q_0 \rightarrow X_0$.

Программа № 42 воспроизведения функции $(K_1K_2)_\delta(W_H)$ для $\delta = 0.2 \%$

"ПУСТЬ"Ю.X=30; W1=31; W2=52; X0=25; T=33; Ж.Y=((0.167000₁₀0X)/.340000₁₀1)X5X(1-(-(TXLN((W2-X)/(W2-W1)))+X0)/100); "ВЫВОД" 01,X,"ПРОБЕЛ",Y,"ПРОБЕЛ"; DX=2; X=X+DX; "НА"Ж"КОНЕЦ"◇

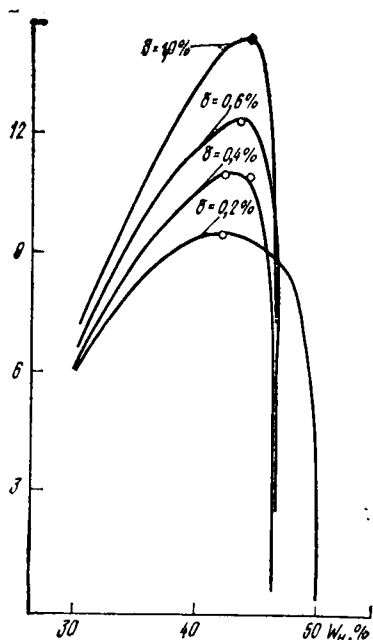


Рис. 51. Зависимость суммарного индекса качества от начальной влажности продукта при различных дозах ПАВ

В целях облегчения процедуры поиска максимума функций (V.55) и исключения появления ошибок на промежуточных этапах расчета целесообразно произвести расчет значений самих функций (а не их производных) в интервале определения с переменным шагом. Сначала шаг воспроизведения выбирается из расчета разбиения этого интервала на 7—8 частей, затем шаг мельчится пополам. При этом погрешность определения координаты максимума функции не превышает значения порядка 0.5 %.

Результат счета с шагом $\Delta W_n = 2\%$

X	30	32	34	36	38	40	42	44
Y	6.16	7.13	7.96	8.62	9.08	9.27	9.13	8.51

Результат счета с шагом $\Delta W_n = 2\%$

X	39	42	43	44.1	45
Y	9.248	9.128	8.893	8.518	7.97

Программа № 43 воспроизведения функции
($K_1 K_2$)_δ (W_n) для $\delta = 0.4\%$

"ПУСТЬ"Ю.X=30; W1=11; W2=47; X0=11; T=15; Ж.Y=((1.67000₁₀0×X) - .340000₁₀1)×5×(1 - ((T×LN((W2-X)/(W2-W1)))))+X0)/100;" ВЫВОД
"01,X,"ПРОБЕЛ",Y,"ПРОБЕЛ"; DX=2; X=X+DX;" НА "Ж"КОНЕЦ"◇

Результаты счета с шагом $\Delta W_n = 2\%$

X	30	32	34	36	38	40	42	44	46
Y	6.26	7.37	8.4	9.3	10.05	10.57	10.73	10.21	7.55

Результат счета с шагом $\Delta W_H = 1 \%$:

X	41	42	43	44	45
Y	10.7	10.73	10.59	10.21	9.39

Программа № 44 воспроизведения функции $(K_1 K_2)_\delta (W_H)$ для $\delta = 0.6 \%$

"ПУСТЬ"Ю.X=30; W1=8; W2=.465000₁₀2; X0=8; T=11; Ж.Y=((.167000₁₀0 X X) - .340000₁₀1) X 5 X (1 - ((T X L N((W2 - X) / (W2 - W1)))) + X0) / 100); "ВЫВОД"01,X,"ПРОБЕЛ",Y,"ПРОБЕЛ";DX=2; X=X+DX; "НА"Ж"КОНЕЦ"◇

Результат счета с шагом $\Delta W_H = 2 \%$

X	30	32	34	36	38	40	42	44	46
Y	6.66	7.9	9.07	10.15	11.1	11.88	12.36	12.22	9.46

Результат счета с шагом $\Delta W_H = 1 \%$

X	41	42	43	44	45
Y	12.17	12.36	12.41	12.22	11.58

Программа № 45 воспроизведения функции $(K_1 K_2)_\delta (W_H)$ для $\delta = 1 \%$

"ПУСТЬ"Ю.X=30; W1=8; W2=.465000₁₀2; X0=8; T=.650000₁₀1; Ж.Y=((.167000₁₀0 X X) - .340000₁₀1) X 5 X (1 - ((T X L N((W2 - X) / (W2 - W1)))) + X0) / 100; "ВЫВОД"01,X,"ПРОБЕЛ",Y,"ПРОБЕЛ";DX=2; X=X+DX; "НА"Ж"КОНЕЦ"◇

Результат счета с шагом $\Delta W_H = 2 \%$

X	30	32	34	36	38	40	42	44	46
Y	6.95	8.31	9.63	10.89	12.06	13.13	13.99	14.41	10.46

Результат счета с шагом $\Delta W_H = 1 \%$

X	43	44	45	46
Y	14.29	14.41	14.13	10.46

Из результатов счета видно, что среднее значение оптимума по W_H составляет $42 \pm 2 \%$, причем с повышением дозы ПАВ значение индекса качества $(K_1 K_2)$ растет.

Оптимизация дозы ПАВ по стоимости

Значения индекса качества $(K_1 K_2)$ в зависимости от δ приведены ниже

$\delta, \%$	0.2	0.4	0.6	1.0
$(K_1 K_2)_\delta$	9.27	10.7	12.4	14.41

Функция $(K_1 K_2)(\delta)$, нормированная по пятибалльной шкале, запишется так:

$\delta, \%$	0.2	0.4	0.6	1.0
$(K_1 K_2)_\delta$	1.854	2.14	2.48	2.885

Нормированная функция $(K_1 K_2)(\delta)$ аппроксимируется полиномом 1-й степени:

$$(K_1 K_2)(\delta) = 1.596 + 1.289\delta. \quad (V.57)$$

Для исследуемого продукта стоимостью $C_{\text{пр}} = 780$ руб./т и ПАВ стоимостью $C_{\text{ПАВ}} = 26.5$ руб./кг относительные удельные затраты $\Delta C = C_{\text{ПАВ}} / C_{\text{пр}}$ в зависимости от дозы δ выразятся следующими данными:

$\delta, \%$	0.2	0.4	0.6	1.0
$\Delta C, \%$	6.79	13.59	20.37	33.97

Функция $\Delta C(\delta)$, приведенная к 1:

$\delta, \%$	0.2	0.4	0.6	1.0
ΔC_H	0.068	0.14	0.2	0.34

Функция экономической эффективности введения ПАВ

$$\mathcal{E}(\delta) = 1 - \Delta C_H(\delta) \quad (V.58)$$

запишется так:

$\delta, \%$	0.2	0.4	0.6	1.0
$\mathcal{E}(\delta)$	0.832	0.86	0.8	0.66

Функция (V.58) аппроксимируется полиномом 1-й степени

$$\mathcal{E}(\delta) = 0.875 - 0.215\delta. \quad (V.59)$$

Функция индекса качества $(K_1 K_2)(\delta)$ эквивалентна функции товарной стоимости продукции и имеет размерность суммы $C_{\text{пр}} + C_{\text{ПАВ}}$, т. е. рубли.

Функция экономической эффективности введения ПАВ $\mathcal{E}(\delta)$ эквивалентна рентабельности производства и имеет размерность $\frac{\text{руб. прибыли}}{\text{руб. сырья} + \text{руб. затрат}}$.

Произведение $(K_1 K_2) (\delta) \mathcal{Z}(\delta)$ эквивалентно (в соответствии с размерностью) прибыли (в руб.) и имеет максимум, определяющий оптимум дозы ПАВ по качеству и себестоимости при условии

$$d[(K_1 K_2) (\delta) \mathcal{Z}(\delta)]/d\delta = 0 \quad (V.60)$$

или

$$d(-0.554\delta^2 + 0.7849\delta + 1.397)/d\delta = 0; \quad (V.61)$$

$$\delta_{\text{опт}} = 1.416\%.$$

Полученное значение $\delta_{\text{опт}}$ показывает, что в принципе дозу ПАВ целесообразно увеличивать до 1.4 % при условии сохранения вкусовых свойств продукта. В выбранной области определения (0—1 %) наилучшим значением является $\delta = 1\%$.

Глава VI. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССА СТАБИЛИЗАЦИИ ЖИРСОДЕРЖАЩИХ ПРОДУКТОВ ПРИ ДОБАВКАХ АНТИОКСИДАНТОВ

VI.1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КРИВЫХ ОКИСЛЕНИЯ

Для увеличения срока хранения жирсодержащих продуктов в жир добавляют антиоксиданты, препятствующие его окислению, следовательно, порче продукта, содержащего жир. Оптимизация процесса стабилизации уровня окисления продуктов состоит в подборе таких соотношений между значениями перекисных чисел, характеризующих качество продукта, при минимуме расхода добавки и процентом добавки антиоксиданта, которые позволяли бы обеспечить требуемый срок хранения продукта в реальных условиях [2].

Аналитическое описание кривых окисления в нормальных условиях

Исходными данными являются семейства кривых окисления (роста перекисного числа $Pч$) продукта при добавках натуральных антиоксидантов различной концентрации и без них в зависимости от времени хранения в форсированных условиях (при аэрации и повышенной до 40 °С температуре окружающей среды). На рис. 52 представлены кривые окисления жира с добавками горчичного порошка.

Кривые окисления по характеру нелинейности, наилучшим образом учитывающему лавинообразный рост $Pч$, с некоторого момента времени могут быть аппроксимированы функцией вида

$$Pч = \tau \ln \left(\frac{t_{\max}}{t_{\max} - t} \right) + Pч_0, \quad (VI.1)$$

где τ — постоянная времени аппроксимирующей кривой; $Pч$ — перекисное число, % йода; $Pч_0$ — начальное значение $Pч$ (в момент начала хранения или ввода добавки); t — текущее время хранения;

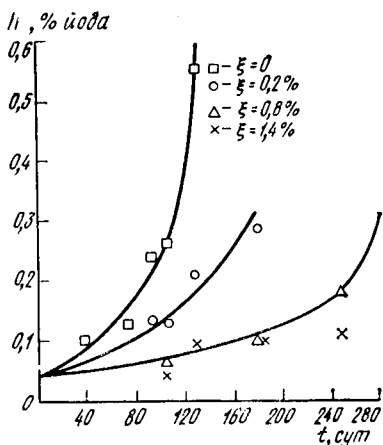


Рис. 52. Кривые окисления жира при различных добавках антиоксиданта

$t_{\max}$ — асимптотическое значение времени хранения, при котором развивается лавинообразный процесс.

Для минимизации функции (VI.1) фиксируется асимптотическое значение $t_{\max}$, а затем постоянная времени τ , определяющая «прогиб» функции в области определения $0 \leq t < t_{\max}$, варьируется от первого приближения $\tau = T$ с шагом DT до тех пор, пока среднее квадратическое отклонение L относительной погрешности аппроксимации не достигнет минимума:

$$L = \sqrt{\left[\sum_{i=2}^n \left(\frac{A_i - P_{\chi_i}}{A_i} \right)^2 \right] / (n-2)}, \quad (\text{VI.2})$$

где A_i — значения аппроксимирующей функции в узлах аппроксимации; P_{χ_i} — значения перекисного числа экспериментальной кривой окисления; n — количество узлов аппроксимации.

При этом аналитическая функция $P_{\chi} = f(t)$ располагается в границах интервала между экспериментальными значениями P_{χ_i} . Аппроксимация производится по программе № 46.

Программа № 46 аппроксимации кривых окисления

Стандартная информатива

```
"ПУСТЬ"Ю."РАЗРЯДНОСТЬ"Е; "ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"Н"ВЫПОЛНИТЬ
"(А[ I ]=ТХЛН(ХМ/(ХМ-Х[ I ]))+В; ОТН[ I ]=((А[ I ]-У[ I ])/У[ I ])×100;
'РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"01,Х[ I ],"ПРОБЕЛ",У[ I ],"ПРОБЕЛ",А[ I ],
'ПРОБЕЛ",ОТН[ I ],"СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е; L=√((Σ( J=2,N,(((
У[ J ]-А[ J ])/А[ J ])×100)²)/(N-1))); "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"01
,Т,"ПРОБЕЛ",ХМ,"ПРОБЕЛ",В,"ПРОБЕЛ",L,"СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ"
Е; "ЕСЛИ"L>EPS"ТО""НА"Ц1"ИНАЧЕ""СТОП"; Ц1.Т=Т+DT; "НА"Ю
"КОНЕЦ"◇
```


В рабочую информативу записываются следующие параметры:

T — первое приближение варьируемой постоянной времени;

EPS — минимальное значение среднего квадратического отклонения погрешности аппроксимации, по достижении которого прекращается счет;

N — количество узлов аппроксимации;

A[N], ОТН[N] — места, бронируемые для значений аппроксимирующей функции и относительной погрешности в каждом узле аппроксимации (по числу N);

B — начальное значение перекидного числа P_{i0} (при $t=0$);

XM — асимптотическое значение аргумента, при котором функция $P_i(t) \rightarrow \infty$;

X[N], Y[N] — массивы экспериментальных значений аргумента и функции;

$\pm DT$ — знак и шаг варьирования постоянной времени функции.

Исходные данные по контрольной кривой в форсированных условиях (40°C , $\xi=0$) приведены ниже.

t, сут	0	40	75	95	105	130
P_i , % йода	0.04	0.1	0.125	0.24	0.26	0.535

Рабочая информатива (40°C ; $\xi=0$)

"ПУСТЬ" T=.148; EPS=0.5; N=6; A[6]; ОТН[6]; B=0.04; XM=135; Y[6]=0.04,0.1,125,0.24,0.260,535; X[6]=0,40,75,95,105,130; DT=+.01"КОН"◇

Результат счета

X[I]	0	40	75	95	105	130
Y[I]	0.04	0.1	0.125	0.24	0.26	0.535
A[I]	0.04	0.092	0.16	0.22	0.263	0.528
ОТН[I]	0	-7.99	+28.0	-8.32	+1.0	-1.35

T=0.148; XM=135; B=0.4; L=11.31%.

В рабочей информативе далее изменяется значение XM-асимптоты и производится повторный поиск функции по минимуму L. Методом последовательных приближений находится такое значение асимптоты, при котором величина L минимальна из всех минимальных для фиксированных XM. В результате расчетов при варьировании XM получены следующие значения:

ХМ	140	137	136	135	134	132
T	0.166	0.158	0.152	0.148	0.142	0.136
L _{min}	12.96	11.81	11.48	11.31	11.34	11.82

Для контрольной кривой минимизация функции $Пч(t)$ при аппроксимации по двум параметрам даст: $t_{\max}=135$; $\tau=0,148$; $L_{\min}=11.34\%$ (t и τ в сутках).

Аналитическое выражение функции ($\xi=0$)

$$Пч = 0.148 \ln \left(\frac{135}{135-t} \right) + Пч_0. \quad (VI.3)$$

Кривую окисления при $\xi=0$ в нормальных условиях (при 20°C) не удастся идентифицировать в области определения t на уровне $Пч=0.535$ (как в случае $\xi=0$ при 40°C) из-за недостатка экспериментальных данных. Поэтому предварительно перед минимизацией кривой окисления необходимо спрогнозировать ее поведение при криволинейной тенденции роста. С этой целью исследуемая кривая сначала аппроксимируется степенной функцией вида

$$Пч = Пч_0 + Kt^M, \quad (VI.4)$$

где M — степень аппроксимации, определяющая «прогиб» функции; K — масштабный коэффициент.

По получении числовых значений параметров из формулы (VI.4) для этой кривой окисления восстанавливается несколько точек на уровне значений $Пч$ от 0.2 до 0.535, которые условно принимаются за фактические. После этого производится аналогичная операция минимизации при аппроксимации ее функцией вида (VI.1).

При аппроксимации степенной функцией выбирается ее правая ветвь, находящаяся в первом квадранте системы координат $t, Пч$. Для минимизации функция фиксируется в двух крайних точках кривой в начале координат при $t=0, Пч=Пч_0$ и в конце экспериментального срока хранения при $t=t_{\max}, Пч=Пч_{\max}$. Затем программно показатель степени при аргументе варьирует от первого приближения M с шагом DM до тех пор, пока среднее квадратическое отклонение (VI.2) не достигнет минимума. Для каждого значения M коэффициент K в выражении (VI.4) определяется из соотношения

$$K = (Пч_{\max} - Пч_0)/t_{\max}^M, \quad (VI.5)$$

где $Пч_{\max}$ — значение перекисного числа в правой крайней точке кривой.

Аппроксимация ведется по программе № 47.

Программа № 47 аппроксимации кривой окисления
в нормальных условиях без добавок

Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю."РАЗРЯДНОСТЬ"Е; $K = (A4 - B) / (X4 \uparrow M)$; "ДЛЯ"И=1"ШАГ"1'
'ДО"Н"ВЫПОЛНИТЬ" $(A[I] = K \times (X[I] \uparrow M) + B; OTH[I] = ((A[I] - Y[I]) / Y[I]) \times 100;$ "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"01, X[I], "ПРОБЕЛ", Y[I], "ПРОБЕЛ", A[I], "ПРОБЕЛ", OTH[I], "СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е; $L = \sqrt{(\sum_{J=2, N} ((Y[J] - A[J]) / A[J]) \times 100)^2 / (N - 2)}$; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "В
ВЫВОД"01, M, "ПРОБЕЛ", K, "ПРОБЕЛ", B, "ПРОБЕЛ", L, "СТРОКА"; "РАЗР
ЯДНОСТЬ"Е; "ЕСЛИ" L > EPS "ТО" "НА" Ц1 "ИНАЧЕ" "СТОП"; Ц1. M = M + D
M; "НА" Ю "КОНЕЦ" ◇

В рабочую информативу записываются параметры:
M — первое приближение варьируемой степени, определяющей «прогиб» функции;

X4 — максимальное значение аргумента в области определения функции (конец срока хранения);

A4 — значение перекисного числа в конце срока хранения;

B — начальное значение перекисного числа $Pч_0$;

$\pm DM$ — знак и шаг варьирования показателя степени M.

Остальные параметры идентичны параметрам в рабочей информативе к программе № 46. Исходными данными для аппроксимации кривой окисления в нормальных условиях являются следующие:

t, сут	0	60	210	300	420
Pч, % йода	0.02	0.05	0.09	0.15	0.2

Рабочая информатива

"ПУСТЬ" M=1.26; EPS=0.5; N=5; A[5]; OTH[5]; B=0.02; X4=420; A4=0.200; X[5]=0,60,210,300,420; Y[5]=0.02,0.05,0.09,0.15,0.200; DM=+.020"
КОНЕЦ" ◇

Результат счета

X[I]	0	60	210	300	420
Y[I]	0.02	0.05	0.09	0.15	0.2
A[I]	0.02	0.355	0.09515	0.1378	0.1999
OTH[I]	0	-28.99	+5.731	-8.132	-0.5 · 10 ⁻²

Аналитическое выражение функции $Pч(t)_н$:

$$Pч_н = 0.8912 \cdot 10^{-4} t^{1.26} + 0.02. \quad (VI.6)$$

По формуле (VI.6) дополнительно определяются координаты двух точек со значениями $0.2 \leq Pч_н \leq 0.53$: $Pч_н = 0.3626$ при $t = 700$; $Pч_н = 0.5233$ при $t = 950$.

Чтобы исключить погрешность, накапливающуюся при подсчете этих значений, достаточно в рабочую информативу программы № 47 расчета функции (VI.4) записать вместо любых двух значений $X[I]$ значения 700 и 950 (при минимизированных K и M).

Следующий шаг состоит в возврате к операции минимизации функции, описывающей кривую окисления в нормальных условиях по программе № 46. Исходными данными для аппроксимации кривой будут следующие:

t , сут	0	60	210	300	420	700	950
$Pч_н$, % йода	0.02	0.05	0.09	0.15	0.2	0.3626	0.523

Рабочая информатива для расчета функции $Pч_н(t)$ в нормальных условиях

"ПУСТЬ" $T=0.78$; $EPS=0.5$; $N=7$; $A[7]$; $OTH[7]$; $B=0.02$; $XM=2000$; $Y[7]=0.02, 0.05, 0.09, 0.15, 0.200, 0.3626, 0.5233$; $X[7]=0.60, 0.210, 0.300, 0.420, 0.700, 0.950$; D
 $T=+0.1$ "КОН"

Результат счета ($20^\circ C$; $\xi=0$)

$X[I]$	0	60	210	300	420	700	900
$Y[I]$	0.02	0.05	0.09	0.15	0.2	0.3626	0.5233
$A[I]$	0.02	0.0438	0.1	0.1467	0.2038	0.3560	0.5225
$OTH[I]$	0	-12.5	+18.4	-2.16	+1.93	-1.817	-0.13

$T=0.78$; $XM=2000$; $B=0.02$; $L_{min}=1.87\%$.

При варьировании асимптоты XM в пределах $1800 \leq XM \leq 2200$ получены следующие результаты:

XM	1800	1900	1950	2000	2050	2100	2200
T	0.68	0.74	0.76	0.78	0.80	0.83	0.88
L_{min} , %	8.84	8.77	8.73	8.718	8.72	8.73	8.77

Функция $Pч_н(t)$ запишется выражением

$$Pч_н = 0.78 \ln \left(\frac{2000}{2000 - t} \right) + Pч_0. \quad (VI.7)$$

Имея аналитические выражения кривых окисления в нормальных (VI.7) и форсированных (VI.3) условиях

при отсутствии добавок антиоксидантов, можно определить функцию пересчета.

Функция пересчета между функциями (VI.3) и (VI.7) вычисляется как отношение времени протекания этих процессов. Чтобы получить функцию пересчета времени процесса в форсированных условиях на нормальные, необходимо обе функции преобразовать поворотом осей системы координат на 90° так, чтобы аргумент и функция поменялись местами. При повороте осей имеем:

время в форсированных условиях как функция перекисного числа

$$t_{\text{ФР}} = \frac{135 [(e^{(Пч-Пч_0)/0.148}) - 1]}{e^{(Пч-Пч_0)/0.148}}; \quad (\text{VI.3})^*$$

время в нормальных условиях

$$t_{\text{Н}} = \frac{2000 [e^{(Пч-Пч_0)/0.78}) - 1]}{e^{(Пч-Пч_0)/0.78}}. \quad (\text{VI.7})^*$$

Отношение $\varphi = t_{\text{Н}}/t_{\text{ФР}}$ и есть функция пересчета:

$$\varphi = \frac{14.81 e^{5.49(Пч-Пч_0)} [(e^{(Пч-Пч_0)/0.78}) - 1]}{e^{(Пч-Пч_0)/0.148} - 1}. \quad (\text{VI.8})$$

Функция пересчета φ позволяет рассчитать время протекания процесса окисления для любого конкретного продукта с любым процентом добавки антиоксиданта при одном ограничении — независимости функции пересчета от процента добавки. На уровне $Пч=0.3\%$ функция φ принимает значение 4.75.

Аналитическое описание кривых окисления с добавками при температуре хранения 40°C

Исходные данные для аппроксимации ($\xi=0.2\%$):

t , сут	0	40	95	105	130	180
$Пч$, % йода	0.04	0.05	0.13	0.13	0.21	0.29

Рабочая информатива для $\xi=0.2\%$

"ПУСТЬ" $T=1.00000_{10}0$; $EPS=5.00000_{10}0$; $N=6$; $A[6]$; $ОТН[6]$; $B=4.00000_{10}-1$; $ХМ=220$; $X[6]=0.40, 95, 105, 130, 180$; $Y[6]=.400000_{10}-1, .500000_{10}-1, .130000_{10}0, .130000_{10}0, .210000_{10}0, .290000_{10}0$; $DT=+.010000_{10}0$ " КОН
 "◇"

Результат счета

X[I]	0	40	95	105	130	180
Y[I]	0.04	0.05	0.13	0.13	0.21	0.29
A[I]	0.04	0.0696	0.124	0.137	0.175	0.3124
ОТН[I]	0	+3916	-4.4	+5.4	-16.6	+7.7

$T=0.14$; $XM=210$; $B=0.04$; $L=16.04\%$.

При варьировании асимптоты XM в пределах $200 \leq XM \leq 240$ получены следующие результаты:

XM	200	210	220	230	240
T	0.13	0.14	0.15	0.17	0.18
$L_{min}, \%$	16.61	16.04	16.10	16.16	16.37

Функция $Пч(t)$ ($\xi=0.2$) запишется выражением

$$Пч = 0.14 \ln \left(\frac{210}{210-t} \right) + Пч_0. \quad (VI.9)$$

На уровне $Пч=0.3\%$ время $t_{фр}=177$ сут. Пересчет времени на нормальные условия с помощью функции (VI.8) дает следующее значение времени по достижении перекисного числа $Пч=0.3\%$ с добавкой $\xi=0.2\%$: $t_{н0.2}=841$ сут.

Исходные данные для аппроксимации ($\xi=0.8\%$)

t , сут	0	105	130	180	250
$Пч$, %	0.04	0.06	0.09	0.1	0.18

Рабочая информатива для $\xi=0.8\%$

"ПУСТЬ" $T=.070000_{10}0$; $EPS=.500000_{10}0$; $N=5$; $A[5]$; $ОТН[5]$; $B=.400000_{10}-1$; $XM=290$; $X[5]=0,105,130,180,250$; $Y[5]=.400000_{10}=1,060000_{10}0,090000_{10}0,100000_{10}0,180000_{10}0$; $DT=-.010000_{10}0$ "КОН"◇

Результат счета

X[I]	0	105	130	180	250
Y[I]	0.04	0.06	0.09	0.1	0.18
A[I]	0.04	0.07146	0.08162	0.1078	0.1786
ОТН[I]	0	+19.2	-9.3	+7.858	-0.788

$T=0.07$; $XM=290$; $B=0.04$; $L=10.2\%$.

При варьировании асимптоты XM в пределах $260 \leq XM \leq 300$ получены следующие результаты:

XM	260	280	290	300
T	0.05	0.06	0.07	0.07
$L_{min}, \%$	12.55	10.27	10.20	10.82

Функция $Pч(t)$ ($\xi=0.8\%$) запишется выражением

$$Pч = 0.07 \ln \left(\frac{290}{290-t} \right) + Pч_0. \quad (VI.10)$$

На уровне $Pч=0.3\%$ время $t_{фр}=283$ сут. Пересчет времени на нормальные условия с помощью функции (VI.8) дает следующее значение времени по достижении $Pч=0.3\%$ с добавкой антиоксиданта $\xi=0.8\%$: $t_{н0.8}=1344$ сут.

Определение функциональной зависимости времени окисления продукта до $Pч=0.3\%$ от дозы ξ в нормальных условиях

Для контрольной кривой (VI.3) * функция (VI.4) на уровне $Pч=0.3\%$ имеет значение времени $t_{фр0}=111$ сут. Пересчет времени на нормальные условия с помощью функции (VI.8) дает значение времени по достижении $Pч=0.3\%$ с добавкой $\xi=0$: $t_{н0}=531$ сут.

Исходными данными для подбора аппроксимирующей функции $t_{0.3}=f(\xi)$ — время окисления до $Pч=0.3\%$ в зависимости от ξ являются следующие:

$\xi, \%$	0	0.2	0.8
$t_{н}, \text{сут}$	531	841	1344

Характер изменения времени окисления до $Pч=0.3\%$ — экспоненциальный. Вид аппроксимирующей функции

$$t_{0.3} = t_{\max} + (t_{\min} - t_{\max}) e^{-\xi/\tau}, \quad (VI.11)$$

где $t_{\max}$ — условное асимптотическое значение времени окисления до $Pч=0.3\%$, к которому стремится функция (VI.11) при неограниченном увеличении процента добавки ξ ; $t_{\min}$ — время окисления при отсутствии добавки ($\xi=0$); τ — постоянная времени аппроксимирующей экспоненты.

Минимизацию функции (VI.11) удобно произвести аналогично процедуре минимизации функции (VI.1). Так же как и для (VI.1) фиксируется значение асимптоты, затем варьируется постоянная времени до получения минимума среднего квадратического отклонения L в узлах аппроксимации. Из серии вариаций асимптоты выбирается функция с супремумом L . Аппроксимация ведется по программе № 48.

Программа № 48 аппроксимации функции $L(t_{\max})$ для супремума L

Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю."РАЗРЯДНОСТЬ"Е; "ДЛЯ"І=1*ШАГ"І"ДО"N"ВЫПОЛНИТЬ
 "(A[I]=XМ+(В-XМ)×(1/(e↑(X[I]/T))) ; ОТН[I]=((A[I]-У[I])/У[I])
 ×100;"РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВОД"01,X[I],"ПРОБЕЛ",У[I],"ПРОБЕЛ
 ",A[I],"ПРОБЕЛ",ОТН[I],"СТРОКА";"РАЗРЯДНОСТЬ"Е); L=√(Σ(J=2,N,((У[J]-A[J])/A[J])×100)↑2)/(N-1)); "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВ
 ОД"01,T,"ПРОБЕЛ",XМ,"ПРОБЕЛ",В,"ПРОБЕЛ",L,"СТРОКА";"РАЗРЯ
 ДНОСТЬ"Е;"ЕСЛИ"L>EPS"ТО""НА"ЦІ"ИНАЧЕ""СТОП"; ЦІ.T=T+DT;
 "НА"Ю"КОНЕЦ"◇

В рабочую информативу программы записываются параметры:

В — начальное значение времени окисления продукта без добавки (в нормальных условиях);

ХМ — асимптотическое значение времени окисления, к которому стремится функция (VI.11);

X[N], Y[N] — массивы значений процента добавки ξ и расчетных значений времени окисления при этих добавках, пересчитанные через функцию (VI.8) (на уровне $Пч=0.3\%$).

Остальные служебные константы такие же, как и в рабочих информативах предыдущих процедур (программы № 46, 47).

Рабочая информатива аппроксимации функции $t_{0.3}(\xi)$

"ПУСТЬ"Т=.616800₁₀0; EPS=.500000₁₀0; N=3; A[3]; ОТН[3]; В=531; ХМ=1650; X[3]=0.,20.,8; У[3]=531,841,1344; DT=-.000100₁₀0"КОН"◇

Результат счета

X[I]	0	0.2	0.8
У[I]	531	841	1344
A[I]	531	840.8	1344
ОТН[I]	0	-0.013	+0.0094

T=0.6168; ХМ=1650; В=531; L=0.0115%.

При варьировании асимптоты $t_{\max}$ получены следующие результаты:

ХМ	1640	1650
T	0.608	0.6168
L _{min.} %	0.108	0.011

Подбор функции (VI.11) с погрешностью $L \cong 0.011\%$ можно считать вполне удовлетворительным для дальнейших расчетов.

Функция (VI.11) принимает вид

$$t_{0.3}(\xi) = 1650 - 1119e^{-\xi/0.6168}. \quad (\text{VI.11})^*$$

Наличие асимптоты для этой функции $t_{\max} = 1650$ сут свидетельствует о том, что предельное время окисления при неограниченном увеличении процента вносимой в продукт добавки антиоксиданта составляет ≈ 4.6 года.

VI.2. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕНТА ДОБАВКИ АНТИОКСИДАНТА ПО МАТЕРИАЛЬНЫМ ЗАТРАТАМ НА ЕЕ ВВОД В ПРОДУКТ

Предельное значение процента добавки ξ принимается из соображений сохранения органолептических свойств продукта $\xi_{\max} = 1\%$. Если принять, что материальные затраты пропорциональны проценту добавки и при $\xi = \xi_{\max}$ принимаются за 1, а при $\xi = 0$ равны нулю, то функция $P(\xi)$ этих затрат в условных единицах (например, в условных рублях) в зависимости от ξ представится прямой линией в координатах ξ (рис. 53) с безразмерной ординатой. Уравнение прямой

$$P(\xi) = \xi. \quad (\text{VI.12})$$

Эффективность протекания процесса вследствие роста продолжительности хранения при увеличении ξ характеризуется первой производной $\dot{t}_{0.3}(\xi)$ — интенсивностью (или скоростью).

Функцию (VI.11) * следует привести к безразмерной ординате в системе координат (см. рис. 53).

$$\dot{t}_{0.3}(\xi) = 1 - 0.678e^{-\xi/0.6168}, \quad (\text{VI.13})$$

$$\frac{d\dot{t}_{0.3}(\xi)}{d\xi} = e^{-\xi/0.6168}. \quad (\text{VI.14})$$

График производной (VI.14) представлен на рис. 53.

Произведение функции материальных затрат на интенсивность процесса [определяемую скоростью изменения функции (VI.13)] имеет максимум, при отклонении от которого в обе стороны увеличение продолжительности хранения путем внесения добавок сопровождается

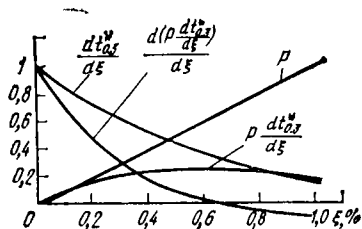


Рис. 53. Графики нормированных функций процента добавки антиоксиданта:

P — стоимости добавки; $\frac{dt_{0.3}^*}{d\xi}$ — интенсивности окисления до $\Pi_0 = 0,3\%$;
 $P \frac{dt_{0.3}^*}{d\xi}$ — оптимизации; $\left(P \frac{dt_{0.3}^*}{d\xi} \right) \frac{d}{d\xi}$ — производной функции оптимизации

падением интенсивности самого процесса:

$$P(\xi) \frac{dt_{0.3}^*(\xi)}{d\xi} = \xi e^{-\xi/0.6168}. \quad (\text{VI.15})$$

Производная функции (VI.15) по ξ , приравненная нулю,

$$\left(1 - \frac{\xi}{0.6168}\right) e^{-\xi/0.6168} = 0$$

определяет координату оптимальной добавки $\xi_{\text{опт}}$ в точке перегиба функции (VI.15): $\xi_{\text{опт}} = 0.6168\%$.

По формуле (VI.11) * рассчитывается ожидаемое время окисления продукта при $\xi_{\text{опт}}$ до значения $\Pi_0 = 0.3\%$: $t_{\text{опт}} = 1238 \text{ сут} = 3.43 \text{ года}$.

Минимально допустимое значение ξ_{min} , обеспечивающее срок хранения $t_{0.3} = 3$ года, определится по формуле (VI.11) *: $1080 = 1650 - 1119 e^{-\xi_{\text{min}}/0.6168}$, откуда $\xi_{\text{min}} = 0.6168 \ln 1.963 = 0.416\%$.

Все значения ξ между $\xi_{\text{min}} = 0.416\%$ и $\xi_{\text{опт}} = 0.617\%$ можно считать также приемлемыми для обеспечения заданного срока хранения $t_{0.3} \geq 3$ лет. Окончательный выбор должен основываться на анализе потерь качества за время хранения и изменении органолептических характеристик в зависимости от этого промежуточного значения ξ .

VI.3. РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЦЕНТА ДОБАВКИ АНТИОКСИДАНТА

Так как с точки зрения технологии исследуемого процесса предельное значение перекисного числа в конце хранения на уровне 0.3% йода выбрано в качестве од-

ного из оптимизационных параметров при определении функциональной зависимости продолжительности хранения от процента добавки антиоксиданта ξ , то общее выражение для определения требуемого значения ξ может быть получено подстановкой в формулу (VI.11) выражения (VI.7) * при $Пч=0.3\%$:

$$t_{0.3} = t_{\max} + \left(\frac{A \left(e^{\frac{0.3 - Пч_0}{B}} - 1 \right)}{e^{\frac{0.3 - Пч_0}{B}}} - t_{\max} \right) e^{-\frac{\xi}{\tau}}, \quad (\text{VI.16})$$

где $t_{0.3}$ — требуемое время хранения продукта при его окислении до $Пч=0.3\%$, сут; $Пч_0$ — начальное значение $Пч$, % йода; A, B — константы процесса окисления в нормальных условиях без добавки ($\xi=0$).

После преобразования выражение (VI.16) примет вид

$$\xi = \tau \ln \frac{(A - t_{\max}) e^{\frac{0.3 - Пч_0}{B}} - A}{e^{\frac{0.3 - Пч_0}{B}} (t_{0.3} - t_{\max})}. \quad (\text{VI.17})$$

В соответствии с выражением (VI.7) * для рассматриваемой системы продукт — антиоксидант имеем константы $A=2000$; $B=0.78$ и в соответствии с формулой (VI.11) * — $\tau=0.6168$; $t_{\max}=1650$.

Если принять $Пч_0=0.04\%$ и задаться сроком хранения 3 года (1080 сут), то по формуле (VI.17) $\xi_{\min}=0.396\%$.

Погрешность расчета Δ по инженерной методике (по сравнению с обобщенной) $\Delta = \frac{0.416 - 0.396}{0.416} 100 = 4.8\%$.

Оптимальное же значение ξ из-за специфики функции, описывающей процессы, всегда будет равно τ , т. е. для рассматриваемой системы продукт — антиоксидант достаточно добавки 0.6168% .

Глава VII. ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ СТЕРИЛИЗАЦИИ ПРОДУКТОВ В АВТОКЛАВАХ

VII.1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМОВ СТЕРИЛИЗАЦИИ

Задача оптимизации процесса стерилизации продуктов по производительности возникает при производстве консервов в цилиндрических банках. Эта задача сводится к определению таких соотношений между параметрами процесса (начальной и конечной температурой продукта и среды, температурой стерилизации, временем выдержки на ступенях, геометрическими размерами тары, физическими характеристиками продукта и т. д.), изменение которых в границах, определяемых стабильностью качества готового продукта, позволило бы изменить продолжительность выдержки на ступенях нагрева, стерилизации и охлаждения.

Исходными данными для оптимизации являются расчетные или адекватные им экспериментальные параметры режима стерилизации, отработанного в реальных условиях. Расчет ведется по стандартной методике путем решения дифференциального уравнения теплопроводности для ограниченного цилиндра при кондуктивном прогреве [8]. Результаты расчета исходного режима:

Z	T	Z	T	Z	T	Z	T
5	60.12	35	120.6	65	119.4	95	117.2
10	63.79	40	123.2	70	118.0	100	110.4
15	73.57	45	123.5	75	117.3	105	90.9
20	87.31	50	122.8	80	117.6	110	63.43
25	102.4	55	122.1	85	117.7	115	32.15
30	114.4	60	120.6	90	117.6	120	0.65

$T=32.15$; $LET=58.97$; $TA=115$; $Z1=20$; $HZ=70$; $Z3=115$; $BZ=50$,

где Z — текущее время, мин; T — температура в центре цилиндра, °C; LET — суммарный фактор летальности; TA — температура стерилизации, °C; $Z1$ — время прогрева в 1-й зоне (зона подогрева), мин; HZ — время выдержки во 2-й зоне (зона стерилизации), мин; $Z3$ — полное время цикла, мин; BZ — суммарное время в 1-й и 3-й зонах (зона охлаждения), мин.

Скорость прогрева теплоносителя в 1-й зоне v_1 за время t_1 до установления температуры стерилизации ТА выбирается максимально допустимой по ограничениям, накладываемым видом тары и техническими возможностями системы автоклав — теплоноситель.

Скорость сброса температуры в 3-й зоне v_2 до установленной конечной температуры продукта $T_{к.пр}$ (окружающей среды или теплоносителя ТСО) также выбирается максимально допустимой по ограничениям, накладываемым техническими характеристиками автоклава и системы противодавления.

В исходном режиме стерилизации определены время подъема t_1 температуры до температуры стерилизации ТА, время выдержки при $ТА = \text{const}$ и время охлаждения t_3 до конечной температуры продукта $T_{к.пр}$. Сумма времени обеспечивает требуемое по технологии суммарное значение фактора летальности $LET \cong 60$.

Для расчета оптимального (по производственным затратам времени) режима выбирается температурный диапазон для значений ТА от $ТА_{\min}$, равного значению в исходном режиме, до $ТА_{\max}$, — максимально допустимого для данного продукта (из условия обеспечения сохранения на требуемом уровне его органолептических характеристик). В выбранном диапазоне температур для пяти значений ТА (для двух граничных и трех промежуточных) производится расчет режимов стерилизации по стандартной методике при кондуктивном режиме по модифицированной программе № 49. Модифицированная программа обеспечивает итерационный пересчет режимов с шагом изменения координаты Z2 конца 2-й и начала 3-й зон до тех пор, пока совокупность значений $T_{к.пр}$ и LET не совпадет с требуемой по технологии.

Программа № 49 итерационного расчета режимов стерилизации в автоклавах

Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю."РАЗРЯДНОСТЬ"6; Z1=(ТА-ТСО)/В1; Z2=Z02; Z3=Z03; LE
T=0; Z=0; "НА"М; Ж1.Z2=Z02; Z3=Z03; LET=0; Z=0; M.Z=Z+DZ; "ЕС
ЛИ"Z<Z1"ТО""НА"М1"ИНАЧЕ""ЕСЛИ"Z<Z2"ТО""НА"М2"ИНАЧЕ""
ЕСЛИ"Z<Z3"ТО""НА"М3"ИНАЧЕ""НА"М4; M1.F=A×Z/Н↑2; I=0; L1.I=
I+1; "ЕСЛИ"F>X[I]"ТО""ИДТИ""НА"Л1; J0=I-1; J1=I; J2=I+1; C=W(F)
; Ц=V(F); "ЕСЛИ"J0>1"ТО" (J0=J0-1; J1=J1-1; J2=J2-1; C1=W(F); Ц
1=V(F); C=(C+C1)/2; Ц=(Ц+Ц1)/2); T=T0+(ТСО-T0)×C+В1×Z×Ц; "Е

СЛИ"Т<121"ТО"LET=LET+(1/((10↑(121-T))↑(1/Ж)))×DZ"ИНАЧЕ""Е
 СЛИ"Т>121"ТО"LET=LET+((10↑(T-121))↑(1/Ж))×DZ;"ВЫВОД"01,"С
 ТРОКА",Z,"ПРОБЕЛ",T,"ПРОБЕЛ",LET;"ИДТИ""НА"М;M2.F=A×Z/Н↑
 2;I=0;B1.I=I+1;"ЕСЛИ"F>X[I]"ТО""ИДТИ""НА"Б1;J0=I-1;J1=I;J2
 =I+1;C=W(F);Ц=V(F);"ЕСЛИ"J0>1"ТО"(J0=J0-1;J1=J1-1;J2=J2-1
 ;C1=W(F);Ц1=V(F);C=(C+C1)/2;Ц=(Ц+Ц1)/2);31=Z-Z1;F=A×31
 /Н↑2;I=0;L2.I=I+1;"ЕСЛИ"F>X[I]"ТО""ИДТИ""НА"Л2;J0=I-1;J1=I
 ;J2=I+1;Ц2=V(F);"ЕСЛИ"J0>1"ТО"(J0=J0-1;J1=J1-1;J2=J2-1;Ц
 3=V(F);Ц2=(Ц2+Ц3)/2);T=T0+(ТСО-T0)×C+B1×Z×Ц-B1×(Z-Z1)×
 Ц2;"ЕСЛИ"Т<121"ТО"LET=LET+(1/((10↑(121-T))↑(1/Ж)))×DZ"ИНА
 ЧЕ""ЕСЛИ"Т>121"ТО"LET=LET+((10↑(T-121))↑(1/Ж))×DZ;"ВЫВОД
 "01,"СТРОКА"1,Z,"ПРОБЕЛ"3,T;"ИДТИ""НА"М;M3.F=A×Z/Н↑2;I=0;
 Д1.I=I+1;"ЕСЛИ"F>X[I]"ТО""ИДТИ""НА"Д1;J0=I-1;J1=I;J2=I+1;C
 =W(F);Ц=V(F);"ЕСЛИ"J0>1"ТО"(J0=J0-1;J1=J1-1;J2=J2-1;C1=
 W(F);Ц1=V(F);C=(C+C1)/2;Ц=(Ц+Ц1)/2);31=Z-Z1;F=A×31/Н↑2;
 I=0;Ф2.I=I+1;"ЕСЛИ"F>X[I]"ТО""ИДТИ""НА"Ф2;J0=I-1;J1=I;J2=I+
 1;Ц2=V(F);"ЕСЛИ"J0>1"ТО"(J0=J0-1;J1=J1-1;J2=J2-1;Ц3=V(F);Ц
 2=(Ц2+Ц3)/2);32=Z-Z2;F=A×32/Н↑2;I=0;L3.I=I+1;"ЕСЛИ"F>X[I]"
 ТО""ИДТИ""НА"Л3;J0=I-1;J1=I;J2=I+1;Ц4=V(F);"ЕСЛИ"J0>1"ТО"(
 J0=J0-1;J1=J1-1;J2=J2-1;Ц5=V(F);Ц4=(Ц4+Ц5)/2);T=T0+(ТСО-T0
)×C+B1×Z×Ц-B1×(Z-Z1)×Ц2-B2×(Z-Z2)×Ц4;"ЕСЛИ"Т<121"ТО"LET
 =LET+(1/((10↑(121-T))↑(1/Ж)))×DZ"ИНАЧЕ""ЕСЛИ"Т>121"ТО"LET
 =LET+((10↑(T-121))↑(1/Ж))×DZ;"ВЫВОД"01,"СТРОКА",Z,"ПРОБЕЛ
 ",T,"ПРОБЕЛ",LET;"ИДТИ""НА"М;M4.BZ=Z1+Z3-Z2;HZ=Z2-Z1;"ВЫ
 ВОД"01,"СТРОКА",T,"ПРОБЕЛ",LET,"ПРОБЕЛ",TA,"СТРОКА",Z1,"ПРО
 БЕЛ",HZ,"ПРОБЕЛ",Z3,"ПРОБЕЛ",BZ;Z02=Z02+DZ;Z03=Z03+DZ;"Н
 А"Ж1"КОНЕЦ"◇

В рабочую информативу записываются параметры:
 B1 — скорость подъема температуры теплоносителя до
 температуры стерилизации в 1-й зоне, °С/мин;
 Z02 — начальное приближение значения суммарного вре-
 мени подъема температуры и стерилизации до нача-
 ла охлаждения, мин;
 Z03 — начальное приближение значения полного време-
 ни термообработки, мин;
 B2 — скорость измерения температуры теплоносителя
 при охлаждении, °С/мин;
 DZ — интервал расчета летальности LET по времени,
 мин;
 DZ — шаг варьирования координаты границы 2-й и 3-й
 зон, мин;
 X[N]; Y[N]; G[N] — массивы чисел и функции Фурье;

H — половина высоты цилиндра, см;
 A — коэффициент температуропроводности продукта;
 T_A — температура стерилизации, °C;
 T_{CO} — начальная температура теплоносителя, °C;
 T_O — начальная температура продукта, °C;
 J — количество градусов, соответствующее изменению
 «термического смертельного времени» в 10 раз, °C;
 T — температура в центре цилиндра, °C.

Рабочая информатива для $T_A = 120^\circ\text{C}$

"ПУСТЬ" $W(F) = U[J_0] + (U[J_1] - U[J_0]) \times (F - X[J_0]) / (X[J_1] - X[J_0]) + ((U[J_2] - U[J_1]) / (X[J_2] - X[J_1]) - (U[J_1] - U[J_0]) / (X[J_1] - X[J_0])) \times (F - X[J_0]) \times (F - X[J_1]) / (X[J_2] - (X[J_0]))$; $V(F) = G[J_0] + (G[J_1] - G[J_0]) \times (F - X[J_0]) / (X[J_1] - X[J_0]) + ((G[J_2] - G[J_1]) / (X[J_2] - X[J_1]) - (G[J_1] - G[J_0]) / (X[J_1] - X[J_0])) \times (F - X[J_0]) \times (F - X[J_1]) / (X[J_2] - X[J_0])$; $B_2 = 5$; $DZ = 5$; $H = 3.15$; $A = 0.108$; $T_A = 120$; $T_{CO} = 75$; $T_C = 60$; $J = 10$; $X[32] = 0.04, 0.06, 0.08, 0.1, 0.125, 0.15, 0.175, 0.2, 0.225, 0.25, 0.275, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 10.0$; $U[32] = 0.0, 0.002, 0.01, 0.024, 0.053, 0.086, 0.122, 0.164, 0.2, 0.245, 0.28, 0.313, 0.38, 0.44, 0.488, 0.53, 0.569, 0.607, 0.652, 0.605, 0.729, 0.755, 0.796, 0.824, 0.846, 0.878, 0.919, 0.939, 0.951, 0.959, 0.975$; $G[32] = 0.0, 0.0013, 0.0153, 0.054, 0.113, 0.209, 0.305, 0.401, 0.491, 0.562, 0.632, 0.688, 0.738, 0.807, 0.862, 0.905, 0.933, 0.951, 0.964, 0.982, 0.99, 0.994, 0.997, 0.999, 1.1, 1.1, 1.1, 1.1, 1.1$; $B_1 = 2.25$; $Z_0 = 120$; $DZ = -5$; $Z_0 = 90.0$ "КОН"

Результат расчета

при $T_A = 120^\circ\text{C}$: $T_{к.пр} = 32^\circ\text{C}$; $LET = 60$; $Z_1 = 20$ мин;
 $Z = 90$ мин; $Z_3 = 115$ мин;

при $T_A = 122^\circ\text{C}$: $T_{к.пр} = 32^\circ\text{C}$; $LET = 60.5$; $Z_1 = 20.88$ мин; $Z_2 = 48.5$ мин; $Z_3 = 74$ мин;

при $T_A = 125^\circ\text{C}$: $T_{к.пр} = 32^\circ\text{C}$; $LET = 60.7$; $Z_1 = 22.22$ мин; $Z_2 = 36.5$ мин; $Z_3 = 62$ мин;

при $T_A = 130^\circ\text{C}$: $T_{к.пр} = 32^\circ\text{C}$; $LET = 60.0$; $Z_1 = 24.44$ мин; $Z_2 = 30.6$ мин; $Z_3 = 57$ мин;

при $T_A = 135^\circ\text{C}$: $T_{к.пр} = 32^\circ\text{C}$; $LET = 60.5$; $Z_1 = 26.67$ мин; $Z_2 = 28.45$ мин; $Z_3 = 57$ мин.

Анализ режимов показывает, что при повышении температуры стерилизации время t_1 и t_3 растет, а время t_2 уменьшается. Обозначим суммарное время в 1-й и 3-й зонах $t_1 + t_3 = BZ$, а во 2-й зоне $t_2 = HZ$. За время BZ происходит расход энергии в 1-й зоне на прогрев системы автоклав — продукт — теплоноситель, во 2-й — расход воды на охлаждение.

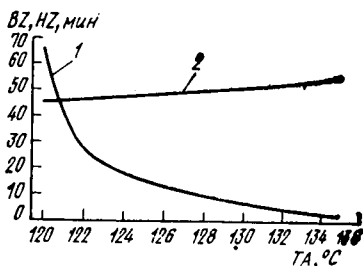


Рис. 54. Графики функций температуры стерилизации:

1 — времени выдержки в зоне стерилизации HZ(TA); 2 — суммарного времени выдержки в зонах нагрева и охлаждения BZ(TA)

За время HZ происходит только накопление фактора летальности без расхода энергии (потерями можно пренебречь). Очевидно, при некотором соотношении между HZ и BZ дальнейшее повышение температуры ТА, которое в основном приводит к снижению суммарного времени термообработки, нецелесообразно, поскольку: во-первых, отрицательный прирост $\Delta HZ/^{\circ}\text{C}$ может стать равным или меньше положительного прироста $\Delta BZ/^{\circ}\text{C}$, т. е. достигнет значения

$$\Delta HZ/^{\circ}\text{C} / \Delta BZ/^{\circ}\text{C} \leq 1; \quad (\text{VII.1})$$

во-вторых, увеличение энергозатрат за время прироста BZ повлияет на себестоимость продукции раньше, чем будет достигнуто соотношение (VII.1). Графики функций HZ и BZ представлены на рис. 54. Так как стоимости единиц времени t_1 (времени нагрева) и t_3 (времени охлаждения) по энергозатратам не равнозначны, то прием при охлаждении продукта водой энергозатраты в 10 раз меньше энергозатрат при нагревании.

Суммарное время тепловой обработки $\Sigma t = t_1 + t_2 + t_3$ ($t_2 = \text{HZ}$) при увеличении ТА снижается, а энергозатраты растут. В условных единицах энергозатраты можно выразить как произведение температуры на длительность процесса:

$$\Sigma P = \frac{(TA - T_{\text{CO}}) t_1}{2} + 0.1 \frac{(TA - T_{\text{к.пб}}) t_3}{2}. \quad (\text{VII.2})$$

Первое слагаемое в выражении (VII.2) определяет энергозатраты на нагрев, второе — на охлаждение.

В процессе моделирования режимов стерилизации при совпадении во всех режимах (в температурном диапазоне от TA_{min} до TA_{max}) фактора летальности LET и конечной температуры продукта регистрируется время

Таблица 15

t , мин	$TA_{\min}$	TA_1	TA_2	TA_3	$TA_{\max}$
t_1	$t_{1\max}$	t_{11}	t_{12}	t_{13}	$t_{1\min}$
t_2	$t_{2\max}$	t_{21}	t_{22}	t_{23}	$t_{2\min}$
t_3	$t_{3\max}$	t_{31}	t_{32}	t_{33}	$t_{3\min}$
Σt	$\Sigma t_{\max}$	Σt_1	Σt_2	Σt_3	$\Sigma t_{\min}$

t_1, t_2, t_3 . Зарегистрированные значения $t_1—t_3$ и суммарного времени приведены в табл. 15.

По данным табл. 15 рассчитываются энергозатраты для каждого значения TA . Рассчитанные значения ΣP в зависимости от TA показаны ниже.

TA , °C	$TA_{\min}$	TA_1	TA_2	TA_3	$TA_{\max}$
ΣP , усл. ед.	$\Sigma P_{\min}$	ΣP_1	ΣP_2	ΣP_3	$\Sigma P_{\max}$

Зависимость времени стерилизации $t_2=f(TA)$ аппроксимируется функцией вида

$$t_2(TA) = \tau_2 \ln \frac{T_{\max} - T_{\min}}{TA - T_{\min}}, \quad (\text{VII.3})$$

где τ_2 — постоянная времени аппроксимирующей кривой; $T_{\max}$ — координата пересечения аппроксимирующей кривой с осью абсцисс; $T_{\min}$ — асимптота аппроксимирующей кривой.

Аппроксимация функции (VII.3) ведется по программе № 50.

Программа № 50 аппроксимации функции $t_2(TA)$

Стандартная информатива

```
"ПУСТЬ"Ю."РАЗРЯДНОСТЬ"Е;"ДЛЯ"І=1"ШАГ"1"ДО"N"ВЫПОЛНИТЬ
"(A[І]=T*LN((ХМАК-ХМИН)/(X[І]-ХМИН)); V[І]=(-(T/(X[І]-Х
МИН))))); ОТН[І]=((A[І]-У[І])/У[І])*100;"РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВ
ОД"01,X[І],"ПРОБЕЛ",A[І],"ПРОБЕЛ",V[І],"ПРОБЕЛ",ОТН[І],"СТРО
КА";"РАЗРЯДНОСТЬ"Е); L=√((Σ(J=1,N,((У[J]-A[J])/A[J])*100)
↑2)/(N-1));"РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВОД"01,T,"ПРОБЕЛ",ХМИН,"ПР
ОБЕЛ",ХМАК,"ПРОБЕЛ",L,"СТРОКА";"РАЗРЯДНОСТЬ"Е;"ЕСЛИ" L >
EPS"ТО""НА"ЦІ"ИНАЧЕ""СТОП"; ЦІ.T=T+DT;"НА"Ю"КОНЕЦ"◇
```

В рабочую информативу записываются следующие параметры:

T — первое приближение значения постоянной времени τ ;

DT — шаг варьирования τ ;

N — количество узлов аппроксимации;

A[N], ОТН[N], V[N] — места, бронируемые для значений аналитической функции, относительной погрешности аппроксимации в узлах и значений производной: $dt_2/dTA = -\tau/(TA - TA_{\min})$;

X[N], Y[N] — массивы исходных координат аргумента и функции;

ХМИН — первое приближение $TA_{\min}$;

ХМАК — первое приближение $TA_{\max}$.

Методом последовательных приближений изменяется ХМИН до получения значения $L_{\min}$ — средней квадратической погрешности аппроксимации. Затем варьированием ХМАК при фиксированном ХМИН с $L_{\min}$ определяется значение супремума $\sup L_{\min}$.

Рабочая информатива

```
"ПУСТЬ" T=.126000102; EPS=.500000100; N=5; A[5]; СТН[5]; V[5]; У[5]
=70,27.62,14.28,6.16,1.78; X[5]=120,122,125,130,135; ХМАК=137.20; DT
=-0.20; ХМИН=119.90"КОН"◇
```

На печать выводятся: массивы X[N], A[N], V[N], ОТН[N], T — оптимизированное значение τ , ХМИН, ХМАК, $L_{\min}$.

Таблица 16

ХМАК, °С	ХМИН, °С	$L_{\min}$, %
137	119.85	10.5
	119.9	8.8
	119.95	8.9
	119.99	14.9

Таблица 17

ХМИН, °С	ХМАК, °С	$L_{\min}$, %
119.9	136.8	7.6
	137.2	7.53
	137.4	7.99

Результат счета

X[I]	120	122	125	130	135
A[I]	64.93	26.57	15.39	6.78	1.71
V[I]	-126.0	-6.0	-2.47	-1.24	-0.83
ОТН[I]	-7.1	-3.8	+7.8	+10.08	-3.7

$T=12.6$; $X_{\min}=119.9$; $X_{\max}=137.2$; $L_{\min}=7.54\%$.

В табл. 16 и 17 приведены сравнительные данные по поиску $L_{\min}$ и $\sup L_{\min}$ при различных комбинациях ХМАК и ХМИН.

Окончательное выражение для функции (VII.3)

$$t_2(TA) = 12.6 \ln \frac{(137.2 - 119.9)}{(TA - 119.9)}. \quad (\text{VII.4})$$

Аппроксимация функции энергозатрат $\Sigma P(TA)$ производится по программе № 1 аппроксимации полиномом 2-й степени.

Рабочая информатива программы аппроксимации полиномом по числовым данным

"ПУСТЬ" D[14]; A[5,5]; B[5]; ЧМ=5; EPS₁₀-12; Г-1; B1[25]; ЧТ=5; N1[1]=2; K1[1]=5; ЧВ[1]=3; ХМР[1]=135; ХОР[1]=120; DXР[1]=1.0000; X[5]; Y[5]; X1[5]=120,122,125,130,135; Y1[5]=560,606,674,801 "КОН"

Результат счета: $B_0=2652$; $B_1=-55.74$; $B_2=0.319$.

Зависимость суммарного времени тепловой обработки продукта $\Sigma t=f(TA)$ аппроксимируют функцией вида

$$\Sigma t(TA) = \theta - (\theta - \Sigma t_{\max}) e^{-\frac{TA - TA_{\min}}{\tau_1}}, \quad (\text{VII.5})$$

где θ — асимптота аппроксимирующей экспоненты; $\Sigma t_{\max}$ — максимальное значение суммарного времени тепловой обработки продукта

при минимальной температуре стерилизации; τ_1 — постоянная времени аппроксимирующей экспоненты.

Программа № 51 аппроксимации функции $\Sigma t(TA)$

Стандартная информатива

"ПУСТЬ"Ю."РАЗРЯДНОСТЬ"Е;"ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"N"ВЫПОЛНИТ Б"(A[I]=Q-((Q-TMAK)×(1/e↑((X[I]-XМИН)/T))) ; ОТН[I]=((A[I]-Y[I])/Y[I])×100;"РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВОД"01,X[I],"ПРОБЕЛ",Y[I],"ПРОБЕЛ",A[I],"ПРОБЕЛ",ОТН[I],"СТРОКА";"РАЗРЯДНОСТЬ"Е); L=√((Σ(J=2,N,((Y[J]-A[J])/A[J])×100)↑2)/(N-2));"РАЗРЯДНОСТЬ"Е1;"ВЫВОД"01,T,"ПРОБЕЛ",XМИН,"ПРОБЕЛ",TMAK,"ПРОБЕЛ",L,"СТРОКА";"РАЗРЯДНОСТЬ"Е;"ЕСЛИ"1>EPS"ТО""НА"Ц1"И НАЧЕ""СТОП"; Ц1.T=T+DT;"НА"Ю"КОНЕЦ"◇

Рабочая информатива

"ПУСТЬ"Т=.02₁₀2; EPS=.5; N=5; A[5]; ОТН[5]; V[5]; Y[5]=115,74,62,57,57; X[5]=120,122,125,130,135; TMAK=115; DT=-.5; XМИН=120; Q=56.9"КОН"◇

Результат счета: $\Theta = 56.9$; $\Sigma t_{\max} = 115$; $TA_{\min} = +120$; $\tau_1 = 1.7$.

Функция

$$\Sigma P(TA) - \Sigma P_{\min} \quad (\text{VII.6})$$

определяет зависимость прироста энергозатрат от температуры стерилизации ($\Sigma P_{\min}$ — минимальное значение энергозатрат при температуре стерилизации $TA = TA_{\max}$).

Функция

$$\frac{1}{\Sigma t(TA) - \Sigma t_{\min}} \quad (\text{VII.7})$$

определяет зависимость прироста производительности процесса в условных единицах продукции от температуры стерилизации TA ($\Sigma t_{\min}$ — минимальное значение суммарного времени тепловой обработки продукта при максимальном значении $TA_{\max}$).

Отношение функций (VII.6) и (VII.7) или произведение функций

$$(\Sigma P(TA) - \Sigma P_{\min})(\Sigma t(TA) - \Sigma t_{\min}) \quad (\text{VII.8})$$

определяет функцию удельного прироста энергозатрат на единицу прироста продукции.

Функция (VII.8) имеет минимум при оптимальном значении температуры стерилизации $TA = TA_{\text{опт}}$. Это значение выбирается из соотношения

$$\frac{d[(\Sigma P(TA) - \Sigma P_{\text{min}})(\Sigma t(TA) - \Sigma t_{\text{min}})]}{dTA} = 0 \quad (\text{VII.9})$$

путем приравнивания производной от функции (VII.8) по dTA нулю и решения уравнения (VII.9) относительно TA . После подстановки в выражение (VII.8) функций (VII.4) и (VII.5) и преобразования уравнение (VII.9) примет вид

$$\left[\left(\theta - (\theta - \Sigma t_{\text{max}}) e^{\frac{-TA_{\text{опт}} - TA_{\text{min}}}{\tau_1}} \right) - \Sigma t_{\text{min}} \right] (B_1 + 2B_2 TA_{\text{опт}}) + \\ + [(B_0 + B_1 TA_{\text{опт}} + B_2 TA_{\text{опт}}^2) - \Sigma P_{\text{min}}] \times \\ \times \left[\frac{(\theta - 2t_{\text{max}}) e^{\frac{-TA_{\text{опт}} - TA_{\text{min}}}{\tau_1}}}{\tau_1} \right] = 0. \quad (\text{VII.10})$$

Расчет $TA_{\text{опт}}$ производится по программе № 52.

Программа № 52 расчета оптимальной температуры стерилизации

```
"ПУСТЬ"Ю."РАЗРЯДНОСТЬ"Е; X=120; Ж.У=(( (Q-(Q-ТМАК)×(1/(e↑(
(X-ХМИН)/Т))) )-ТМИН)×(В1+(2×В2×Х))) + (( (В0+(В1×Х)+(В2×(Х↑
2))) -РМИН)×((Q-ТМАК)/Т)×(1/(e↑((X-ХМИН)/Т))))); "РАЗРЯДНО
СТЬ"Е1; "ВЫВОД"01,"СТРОКА",Х,"ПРОБЕЛ",У; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е; DX
=.100000101; X=X+DX; "НА"Ж"ГДЕ"Q=.569000102; ТМАК=115; ХМИН=
120; Т=.170000101; ТМИН=57; В1=-.557400102; В2=.319000100; В0=265
2; РМИН=560"КОНЕЦ"◇
```

Результат счета: $TA_{\text{опт}} = 121,9^\circ\text{C}$.

По выбранному оптимальному значению $TA_{\text{опт}}$ по формуле рассчитывается время нагрева t_1 продукта в оптимальном режиме до температуры стерилизации $TA_{\text{опт}}$:

$$t_1 = \frac{(TA_{\text{опт}} - TCO)}{v_1}, \quad (\text{VII.11})$$

здесь $v_1 = 2.25^\circ\text{C}/\text{мин}$; $t_1 = 20.85$ мин.

Время стерилизации t_2 рассчитывается по формуле (VII.3) с подстановкой в нее значения $TA = TA_{\text{опт}}$, т. е.

$$t_2 = \tau_2 \ln \frac{(T_{\text{max}} - T_{\text{min}})}{(T_{\text{опт}} - T_{\text{min}})}, \quad (\text{VII.12})$$

откуда $t_2 = 27.18$ мин.

Время охлаждения

$$t_3 = \Sigma t(TA_{\text{опт}}) - (t_1 + t_2) \quad (\text{VII.13})$$

или

$$t_3 = \theta - (\theta - \Sigma t_{\text{max}}) e^{-\frac{TA_{\text{опт}} - TA_{\text{min}}}{\tau_1}} - t_1 - t_2. \quad (\text{VII.14})$$

При выбранном $TA_{\text{опт}}$ $t_3 = 31.33$ мин.

VII.2. ОПТИМИЗАЦИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ ТАРЫ ДЛЯ КОНДУКТИВНО ПРОГРЕВАЕМЫХ ПРОДУКТОВ

Длительное прогревание, вызванное глубоким залеганием в объеме порции продукта термических центров, порождает задачу оптимизации геометрической конфигурации тары на стадии фасовки порции, подлежащей стерилизации. Путем выбора оптимальных соотношений

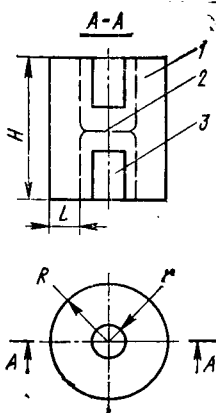


Рис. 55. Эффект вытеснения к стенкам тары термических центров (показаны пунктиром)

геометрических размеров банки удается вытеснить ожидаемые термические центры к поверхности, контактирующей с теплоносителем. Для этого порцию продукта формируют в виде осесимметричного тела, а в зонах, примыкающих к точкам пересечения его поверхности с осью симметрии, дополнительно создают вогнутые в направлении центра тяжести полости. Сущность эффекта вытеснения термических центров к нагреваемой поверхности проиллюстрирована на рис. 55.

В объеме 1 порции продукта, сформированном в виде цилиндра, в направлении центра тяжести 2 дополнительно создают вогнутые полости 3. При этом, если бы без дополнительных полостей область термического центра совпадала с центром тяжести цилиндра высотой H и отстояла от по-

верхности на расстояние R или $H/2$, то с дополнительными полостями термические центры вытеснялись бы от внешних поверхностей тела на расстояние, пропорциональное отношению площадей, участвующих в передаче тепла

$$L = R - r - \frac{r(R-r)}{R+r}, \quad (\text{VII.15})$$

где R — радиус тела, см; r — радиус вогнутой цилиндрической полости, см; L — расстояние от термического центра до внешней поверхности, см.

Если исходный объем тела (в см³)

$$V = \pi R^2 H, \quad (\text{VII.16})$$

а приращение объема ΔV за счет создания полостей

$$\Delta V = -\pi r^2 (H - R + r), \quad (\text{VII.17})$$

то относительный прирост объема перерабатываемого продукта в единицу времени

$$S = \frac{V + \Delta V}{V} K; \quad (\text{VII.18})$$

$$K = \frac{\Sigma t_1}{\Sigma t_2},$$

где Σt_1 — время тепловой обработки исходного тела; Σt_2 — время тепловой обработки тела с дополнительными полостями,

или

$$\delta = \left[1 - \frac{r^2 (H - R + r)}{R^2 H} \right] K. \quad (\text{VII.19})$$

Относительное сокращение времени тепловой обработки K является сложной нелинейной функцией, зависящей от многих параметров, так как суммарное время Σt складывается из времени подогрева t_1 , стерилизации t_2 и охлаждения t_3 . При изменении расстояния L время t_1 остается практически неизменным и при значительном изменении L определяется в основном техническими характеристиками стерилизатора. Время t_2 и t_3 уменьшаются соответственно в $\approx R/L$ и $\sqrt[3]{(R/L)^3}$ раз.

Более точную зависимость изменения K от r можно получить путем эксперимента или машинного моделирования процесса стерилизации в соответствии с методикой, описанной в п. VII.1. Суммарная глубина полостей (или одной полости) всегда выбирается такой, чтобы рас-

стояние от торцевых поверхностей до термических центров тела было равно расстоянию до них от боковой поверхности независимо от высоты H .

При увеличении производительности процесса в δ раз потери в стоимости готовой продукции за счет увеличения удельного расхода материала тары могут быть покрыты переходом на больший типоразмер тары. Аналогичный эффект в повышении производительности процесса получается при формировании порции продукта, размещаемой в мягкой таре, путем фиксации его между пуансоном и матрицей, придающих ему форму вогнутых полостей. Поскольку потери полезного объема тела порции пропорциональны квадрату приращения радиуса r , то предпочтительным расположением полостей в теле является локализация их вокруг оси симметрии с боковыми поверхностями, параллельными оси.

Так как критерии оптимальности формы и размеров тела могут быть разными, то возможны наиболее характерные ситуации, которые определяются этими критериями.

1. Критерием оптимальности формы тела является производительность процесса без учета материальных потерь при развитии поверхности тела, определяющем увеличение расхода материала тары. Такой подход целесообразен при стерилизации продукта в мягкой или жестяной таре с полостями, образованными штамповкой крышек.

По программе № 49 моделируется процесс стерилизации и определяется суммарное время тепловой обработки продукта. По исходным данным, которыми служат размеры банки ($H=5.8$ см; $R=3.2$ см), по программе № 49 определяют время, затраченное на стерилизацию: $\Sigma t = t_1 + t_2 + t_3 = 20 + 65 + 50 = 115$ мин.

Фактор летальности $LET \cong 11.3$, конечная температура продукта $T_{к.пр} = 90^\circ\text{C}$.

На стадии фасовки порция продукта формируется в виде цилиндра высотой $H=5.8$ см и радиусом $R=3.2$ см и с цилиндрическими вогнутыми полостями, расположенными на оси симметрии. При этом возможны два варианта:

а) вариант $r=0,3 R$ и $h=(H-R+r)/2$. Значение h выбирается таким, чтобы расстояния от боковой и торцевой поверхностей тела до термических центров были равны между собой. Тогда прогреваемость такого тела

будет эквивалентна прогреваемости исходного, но с высотой

$$H_{\text{опт}} = \frac{R}{R - 0.3R} H,$$

т. е. высота при расчете должна быть примерно в $\frac{R}{R - 0.3R}$ раз меньше исходной: $H_{\text{опт}} = H/1.5 = 3,87$ см при прочих равных условиях.

Результат моделирования по программе № 49: $\Sigma t_{\text{опт}} = 20 + 33.5 + 18.5 = 72$ мин; $\text{LET} = 11.3$; $T_{\text{к.пр}} = 91^\circ\text{C}$; $K = \frac{\Sigma t_1}{\Sigma t_{\text{опт}}} = 115/72 = 1.6$; $\delta = 0,9415 \cdot 1.6 = 1.5$ (при $H = 2R$);

б) вариант $r = 0.6 R$:

$$H_{\text{опт}} = \frac{R}{R - 0.6R} H = H/2.5 = 2.32 \text{ см.}$$

Результат моделирования: $\Sigma t_{\text{опт}} = 20 + 16.5 + 30.5 = 47$ мин.

2. Критерием оптимальности формы тела является повышение производительности процесса с сохранением удельного расхода материала тары на единицу выпускаемой продукции (объем готового продукта).

Для реализации задачи, поставленной по двум критериям, необходим переход к следующему, большему типоразмеру тары, определяющему формируемый объем тела, в ряду типоразмеров до тех пор, пока удельный расход материала тары с учетом повышения производительности путем увеличения этого объема не достигнет исходного значения (как у цилиндра с исходным типоразмером без дополнительных полостей).

Зная исходные параметры тела: $H = 5.8$ см; $R = H/2$; $\Sigma t_1 = 115$ мин, находим полную площадь поверхности исходного тела

$$S_{\text{и}} = 2\pi R (H + R)$$

и объем

$$V_{\text{и}} = \pi R^2 H.$$

Удельный расход материала в условных единицах на одну банку

$$\Delta S_{\text{и}} = S_{\text{и}}/V_{\text{и}} = 2(H + R)/HR.$$

Полная площадь поверхности тела оптимизируемой формы

$$S_{\text{опт}} = 2\pi R^* (H^* + R^* + nH^* - nR^* + n^2R^*),$$

а объем

$$V_{\text{опт}} = \pi R^{*2} (H^* - n^2H + n^2R^* - n^3R^*),$$

где n выбирается из соотношения $r = nR$; R^* , H^* — размеры тела следующего в ряду ГОСТа типоразмера.

Удельный расход материала тары в оптимизируемом теле

$$\Delta S_{\text{опт}} = \frac{S_{\text{опт}}}{V_{\text{опт}}} = \frac{2(H^* + R^* + nH^* - nR^* + n^2R^*)}{R^*(H^* - n^2H + n^2R^* - n^3R^*)}.$$

Условие $\Delta S_{\text{опт}} = \Delta S_{\text{и}}$ примет вид

$$\frac{H + R}{HR} = \frac{H^* + R^* + nH^* - nR^* + n^2R^*}{R^*(H^* - n^2H + n^2R^* - n^3R^*)}. \quad (\text{VII.20})$$

Переход в ряду типоразмеров от исходного к следующему строго фиксирует соотношение между R и R^* , H и H^* и значение K , зависящее от нового расстояния до термических центров L . Типоразмер по ГОСТ 5717—81 имеет $H^* = 9.3$ см и $R^* = 3.5$ см.

Подставив размеры в выражение (VII.20), получаем уравнение

$$n^3 + 225n^2 + 0.98n - 0.497 = 0. \quad (\text{VII.21})$$

Уравнение (VII.21) имеет решение в области аргумента $0 \leq n \leq 1$, т. е. левая часть его обращается в нуль при $r^* = 0.29 R^*$. Соотношение между радиусами тела и полости для нового типоразмера на границе изменения удельного расхода материала тары при варьировании n имеет вид $r^* = nR^*$.

По формуле (VII.15) рассчитывается новое расстояние L^* до термических центров: $L^* = 1.93$ см.

По стандартной методике моделируется процесс стерилизации эквивалентного исходного тела с $H_{\text{опт}} = 3.85$ см. Результат моделирования соответствует варианту а, т. е. $\Sigma t_{\text{опт}} = 72$ мин; $K = \Sigma t_1 / \Sigma t_{\text{опт}} = 115/72 = 1.6$.

По значению $H_{\text{опт}} = 3.85$ см восстанавливается эквивалентное значение величины $r_{\text{опт}}$ для тела с дополнительными полостями: $r_{\text{опт}} = 0.3$ см; $r = 0.96$ см.

По формуле (VII.19) подсчитывается повышение производительности

$$\delta = \left[1 - \frac{0.96^2 (5.8 - 3.2 + 0.96)}{3.2^2 \cdot 5.8} \right] 1.6 = 1.51,$$

т. е. производительность должна повыситься в 1.51 раза, или $\approx$ на 50 % при неизменном удельном расходе материала тары.

Из изложенного следует, что формирование дополнительных полостей с радиусами r порядка $(0.3 \div 0.6)R$ позволяет повысить производительность в 1.5—1.1 раза, но при этом наблюдаются потери в удельном расходе жести (для стеклянных и жестяных банок). Поэтому критерий оптимальности формы порции продукта по производительности приемлем только для продуктов, стерилизуемых в мягкой таре, для которых требуемую форму тела можно создать во время стерилизации, а также в жестяной таре, которая изготавливается штамповкой при уменьшении толщины стенок крышек.

Для двухфакторного критерия (по производительности и удельному расходу жести) оптимальности при переходе к следующему в ряду типоразмеру целесообразен выбор радиуса полостей r порядка $0.3R$, причем при таком соотношении удельный расход жести неизменен по сравнению с исходным, а производительность увеличивается $\approx$ на 50 %. В пределах же изменения r от $0.3R$ до $0.03R$ положительный эффект получается для обоих параметров: снижения удельного расхода жести и повышения производительности процесса. Оптимальное же значение соотношения между ними зависит от специфики конкретного производства и выбирается с учетом дополнительных экономических факторов.

Глава VIII. ЭКСТРАПОЛЯЦИОННОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЗАГОТОВОК СЫРЬЯ И ПРОИЗВОДСТВА КОНСЕРВОВ

VIII.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Основой управления социалистическим хозяйством является план. От того, насколько обоснованно он составлен, зависит эффективность управления. Существующий в перерабатывающей промышленности порядок планирования может быть значительно улучшен за счет предплановой разработки прогнозов количественных показателей заготовок сырья и выработки консервной продукции, так как для успешного развития производства необходимо правильно и своевременно выявлять тенденции и перспективы его будущего развития. И планы, и прогнозы явно или неявно базируются на предположениях относительно будущего.

Существуют два основных вида прогнозирования объемов производства продукции: генетическое (или поисковое) и целевое (или нормативное). Генетическое прогнозирование опирается на изучение тенденций развития, оценку их сохранения или изменения в будущем; целевое — базируется на определении общественных потребностей в продукции отрасли.

При первом виде на основе опыта прошлого развития определяются вероятные возможности, на основе второго — потребности и желаемые цели. Как правило, результаты прогноза, полученные при генетическом и целевом видах, не совпадают. Возникающие количественные различия определяют разницу между желаемой целью развития и его ожидаемым уровнем.

Вся совокупность методов генетического прогнозирования, основанных на математическом моделировании, может быть разбита на две группы, различающиеся характером используемых моделей и применяемого математического аппарата:

1) методы экстраполяции тенденций по различного рода кривым;

2) методы экономико-статистического моделирования, основанные на принципах факторного анализа.

Экстраполяционные методы наиболее разработаны. Экстраполяция (проекция в будущее) основана на использовании различных типов зависимостей важнейших параметров от данных за прошлый период. При этом предполагается, что существующая тенденция (тренд), достаточно устойчивая в прошлом, сохранится и в будущем, возможно с некоторыми изменениями. Это предположение основано на том, что для радикальных технических и технологических изменений требуется определенное время.

Экстраполяционные методы широко применяются в практических разработках из-за сравнительной простоты и возможности осуществления прогнозных расчетов на основе небольшого объема исходной информации.

Прогнозирование методами экстраполяции оправдано, если не предвидятся существенные качественные изменения (скачки) и предполагается, что уровень техники и технологии останется неизменным, т. е. область его использования ограничена прогнозированием эволюционных ситуаций и процессов, медленно изменяющихся во времени.

Методы экономико-статистического моделирования предполагают применение корреляционного и регрессионного анализа. При этом модель прогноза строится в виде некоторого уравнения множественной регрессии, в котором учтено индивидуальное воздействие на прогнозируемые показатели сразу нескольких факторов. В модели в математической форме отражаются взаимосвязи и зависимости, складывающиеся в реальной экономической жизни.

При построении взаимозависимых моделей возникают довольно сложные вопросы спецификации и идентификации составляющих их уравнений. Далеко не всегда имеющаяся информация по многим существенным аспектам прогнозтики настолько полна, надежна и точна, чтобы оправдывать применение этих сложных и трудоемких методов. Опыт показывает, что прогнозы, получаемые на основе многофакторных моделей, не обязательно точнее прогнозов, получаемых более простыми способами, например путем экстраполяции тенденций.

В области планирования и организации заготовок сырья для консервной промышленности имеется ряд проблем, требующих специального исследования. Среди них анализ и прогноз поставок на переработку плодоовощного сырья на основе современных экономико-математических методов.

Необходимость прогнозирования объемов поставок плодов и овощей на переработку постоянно ощущается в процессе управления консервным производством, поскольку многие предприятия из года в год сталкиваются с отклонениями фактического поступления сырья от требуемого количества.

Учитывая, что в консервной промышленности нет достаточного опыта прогнозирования количественных показателей производства с помощью экономико-математических методов, авторы в течение нескольких лет апробировали различные методы экстраполяционного прогнозирования и разрабатывали их модификации с учетом особенностей отрасли. При этом были подобраны аналитические функции, наиболее пригодные для описания изучаемых процессов. В частности, было установлено, что динамика заготовок сырья и, следовательно, производства плодоовощных консервов достаточно хорошо описывается и прогнозируется различными экстраполяционными методами, поскольку в последнее десятилетие в консервной отрасли не наблюдалось каких-либо скачкообразных изменений. Рост производственных фондов носил постепенный характер. Так же изменялись объемы заготовок сырья и производства консервов, за исключением отдельных лет, когда отмечались существенные отклонения от основной тенденции развития, вызванные случайными факторами, в основном неблагоприятными погодными условиями.

VIII.2. ОБЩАЯ СХЕМА РАЗРАБОТКИ ПРОГНОЗОВ

Различают три вида прогнозов: краткосрочные на 1 год, среднесрочные на 3—5 лет и долгосрочные на 15—20 лет.

Общая схема разработки прогноза включает следующие основные этапы:

выбор объекта прогнозирования и его характеристики;

сбор исходной информации, ее оценка и упорядочение;

выбор методов прогноза;
проведение прогностического расчета;
оценка результатов прогноза;
разработка конкретных рекомендаций и принятие решений по результатам прогноза.

В качестве конкретных объектов прогнозирования могут быть выбраны количественные показатели, характеризующие объемы заготовок сырья и производства консервной продукции как в целом, так и по отдельным видам и ассортиментным группам на предприятиях, в объединениях и отрасли.

Источником исходной информации служат данные официальной статистической и оперативной отчетности за прошлые годы.

При подготовке краткосрочных прогнозов, предназначенных в первую очередь для количественной оценки сезонности производства, данные берут с квартальным, месячным, декадным или другим интервалом за период 5—10 лет. При подготовке среднесрочных прогнозов достаточно иметь данные годовых объемов производства, однако глубина ретроспективы должна составлять не менее 15 лет.

На сбор данных в процессе получения прогнозов уходит довольно много времени, и этим нельзя пренебрегать. В некоторых случаях не существует в явной форме достоверных данных и их нужно извлекать из архивов и предварительно обрабатывать, прежде чем они станут пригодны для прогнозирования.

Субъективный подход исключается как при сборе данных за прошедший период, так и при составлении прогнозов.

При выборе метода прогноза следует исходить из положения, что прогноз должен носить многовариантный характер. Единственно точным критерием оценки достоверности прогноза является сопоставление оценок прогноза с фактически достигнутым уровнем. Однако уже на стадии составления прогноза возможна частичная оценка его достоверности, например, путем сопоставления результатов прогнозов одного и того же объекта, полученных разными методами. Расхождение результатов не более чем на 10—15 % можно признать удовлетворительным. Однако результаты прогноза нельзя считать окончательными, их нужно пересматривать систематически по мере получения новых данных.

Данные, характеризующие объемы заготовок сырья и производства плодовоовощных консервов, взятые за ряд прошлых лет с каким-либо интервалом (квартал, месяц, декаду и т. д.), образуют динамические или временные ряды. В общем случае временной ряд представляется в виде суммы нескольких составляющих — детерминированных и случайной компонент. В этом ряду детерминированные компоненты выражаются некоторой аппроксимирующей функцией, а случайная — оценивается с некоторой вероятностью.

Для временных рядов, характеризующих поставки плодовоовощного сырья и производство консервов, наиболее типичными являются три составляющие компоненты: тенденция (тренд), сезонные колебания и случайные колебания.

Тренд отражает общее изменение ряда (постоянный подъем или постоянное снижение) за длительный промежуток времени. Для расчета тренда наиболее часто применяют метод скользящих средних или одну из функций — линейную, полиномы, различного рода экспоненты и S-образные кривые.

При разработке прогноза экстраполяционными методами очень важно определить, какого рода зависимость наиболее точно характеризует линию тенденции. Экономисты обычно используют следующие зависимости:

арифметический тренд, когда рассматриваемый параметр изменяется на постоянную величину в течение каждого периода;

логарифмический тренд, когда рассматриваемый параметр изменяется на фиксированное число процентов в течение каждого периода;

модифицированный экспоненциальный тренд, когда рассматриваемый параметр изменяется на постоянный процент от величины изменения, происшедшего в прошлый период. При этой зависимости кривая приближается к своему верхнему пределу (асимптоте);

логистический тренд, когда рассматриваемый параметр изменяется по S-образной кривой, имеющей верхнюю и нижнюю асимптоты.

Сезонные колебания — это более или менее регулярные изменения временного ряда, обусловленные климатическими факторами и определяемые как отклонения эмпирического ряда от общей тенденции, рассчитанной тем или иным способом.

Случайные колебания обусловлены воздействием на процесс производства большого числа факторов, действующих в разных направлениях, и как правило, не поддающихся учету. Случайные колебания сказываются на отдельных значениях ряда, искажая тенденцию, а также сезонные колебания. Оценки колебаний необходимы для дальнейшего определения характеристик точности прогноза.

Значения детерминированных компонент (тренда и сезонных колебаний) можно оценить на основании ретроспективного анализа фактических данных. Случайные колебания оцениваются вероятностно-статистическими методами.

Помимо методов прогноза, основанных на разложении временного ряда на составляющие компоненты (итерационный метод), существуют методы, не требующие выделения и исключения сезонных колебаний, например гармонический анализ и эволюционный метод.

В п. VIII.7 даны программы расчетов прогнозов различными методами и инструкции по составлению рабочих информатив.

VIII.3. ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД

Итерационный метод основан на разложении изучаемого временного ряда на составляющие компоненты [6]. Если обозначим фактические данные поступления сырья или производства консервов за период t ($t=1, 2, \dots, m$) через y_t , тренд — через x_t , сезонную компоненту — через S_t и случайную — через r_t , то получим следующую модель временного ряда:

$$y_t = x_t + S_t + r_t. \quad (\text{VIII.1})$$

Тренд рассчитывается способом скользящей средней, а его функция — методом наименьших квадратов. Применение скользящей средней позволяет сгладить периодические и случайные колебания и тем самым выявить имеющуюся тенденцию в развитии. Например, если данные представлены за несколько лет с месячным интервалом, то первоначальный тренд рассчитывают как ряд скользящих средних из 13 первоначальных значений по формуле

$$x_t = \frac{y_{t-6} + y_{t-5} + \dots + y_t + y_{t+1} + \dots + y_{t+6}}{13}, \quad (\text{VIII.2})$$

где y_t — фактические данные; x_t — значения тренда временного ряда за период t ($t=1, 2, \dots, m$).

Чтобы оценить интенсивность сезонных колебаний в динамическом ряду, для каждого периода методом наименьших квадратов рассчитывают линейные функции между ежегодными фактическими данными и соответствующими значениями тренда по формуле

$$y_{jk}^* = b_k x_{jk} + a_k, \quad (\text{VIII.3})$$

где y_{jk}^* — сезонный показатель j -го года и k -го периода, представляющий сумму значений тренда и сезонной компоненты ($S_{jk} + x_{jk}$); b_k, a_k — коэффициенты регрессии.

Подставляя в уравнение (VIII.3) значения тренда, получаем сезонные показатели для отдельных периодов.

Тренд, полученный с помощью скользящей средней, может частично включать показатели сезонности, так как сезонные колебания непостоянны во времени из-за влияния случайных факторов. Чтобы выяснить, нет ли их во временном тренде, определим случайные величины r_{jk} :

$$r_{jk} = y_{jk} - y_{jk}^* \quad (\text{VIII.4})$$

и стандартные отклонения σ :

$$\sigma = \sqrt{\sum_{j=1}^n r_{jk}^2 / (n-1)}, \quad (\text{VIII.5})$$

где n — число пар значений фактических данных и тренда по каждому периоду.

С помощью случайных отклонений проверяем наличие экстремальных величин, вызванное внешними несезонными факторами. В качестве критерия используем удвоенное стандартное отклонение.

В случаях, когда хотя бы одно значение случайной компоненты (r_{jk}) превышает величину удвоенного стандартного отклонения ($2\sigma_k$), проводим еще одну итерацию. Вторая итерация (и при необходимости последующие) включает корректировку тренда, расчет уравнений регрессии, сезонных показателей и случайных отклонений.

Корректировку тренда, как и первоначальный расчет, выполняем методом скользящей средней. Поступление сырья и производство консервов без учета сезонной ком-

показатели определяем по формуле

$$y'_{jk} = y_{jk} - S_{jk}, \quad (\text{VIII.6})$$

где y'_{jk} — показатель j -го года и k -го периода без сезонной компоненты.

Этот показатель содержит только тренд и случайную компоненту, но трудность его расчета состоит в том, что S_{jk} неизвестна.

Подставив выражение (VIII.1) в формулу (VIII.6), получим

$$y'_{jk} = x_{jk} + r_{jk}. \quad (\text{VIII.7})$$

Скорректированный тренд находим, вычисляя скользящую среднюю из показателей y'_{jk} .

При вычислении первоначального тренда в начале и конце временного ряда выпадает несколько значений, а следовательно, и величины y'_{jk} , что существенно для прогноза. Во избежание дальнейшего сокращения ряда при корректировке тренда недостающие величины восстанавливают по формуле

$$(y_{jk} - a_k)/b_k \approx x_{jk} + r_{jk} = y'_{jk}. \quad (\text{VIII.8})$$

После этого повторяют расчет тренда, уравнений регрессии, сезонных показателей и случайных отклонений.

Применение этого метода показывает, что если годовые амплитуды поступления сырья и производства консервов сильно не различаются, он дает приемлемые результаты уже после первой или второй итерации.

Убедившись, что необходимости в повторении итерации нет, вычисляем сезонную компоненту из соотношения

$$S_{jk} = y_{jk} - x_{jk}, \quad (\text{VIII.9})$$

а для первых и последних значений исходного временного ряда — из уравнения

$$S_{jk} = y_{jk} - y'_{jk}. \quad (\text{VIII.10})$$

Для составления прогноза поступления сырья или производства консервов по периодам сезона необходимо рассчитать линейную функцию тренда из его откорректированных значений

$$x_t = bt + a, \quad (\text{VIII.11})$$

где $t=1, 2, 3, \dots, n$, т. е. порядковые номера значений временного ряда.

Если в уравнение (VIII.11) подставить t , т. е. порядковые номера прогнозируемых значений, и полученные значения тренда использовать для расчета сезонных показателей по формуле (VIII.3), получим искомый прогноз. Область рассеяния тренда и сезонных показателей в зависимости от требуемой степени вероятности ограничивается значениями $\pm\sigma_h$ или $\pm 2\sigma_h$.

На результаты прогноза значительно влияет значение временного ряда, от которого производится расчет линейного тренда, т. е. глубина ретроспективы. Отмечено, что чем глубже ретроспектива, тем круче линейный тренд, а следовательно, повышенные значения прогноза. Поэтому прогнозисту всякий раз приходится интуитивно или по второстепенным показателям определять, с какого года начинать расчет линейного тренда, а потом опять-таки делать интуитивный выбор между вариантами. Это является недостатком метода, однако в отдельных случаях метод бывает удобным, позволяя прогнозисту учитывать интуитивные ожидания свои и экспертов.

VIII.4. МЕТОД ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Поскольку сезонные колебания заготовок сырья и производства консервов представляют собой периодически изменяющийся процесс, для анализа и прогнозирования показателей можно применять гармонический анализ [7].

Сущность метода состоит в том, что временной ряд, являющийся сложной периодической функцией, разлагается на сумму конечного числа простейших синусоидальных и косинусоидальных функций, каждая из которых имеет свой период. Синусоидальная или косинусоидальная функция с определенным периодом представляет собой гармонику. Из теории гармонического анализа известно, что любой временной ряд можно с заданной степенью точности аппроксимировать тригонометрическим рядом с конечным числом гармоник.

Первая гармоника имеет период, равный длине исследуемого ряда, вторая — половине, третья — одной трети и т. д. Если число членов временного ряда равно n , то число гармоник не будет превышать $n/2$. Сезон-

ная составляющая часто хорошо описывается несколькими первыми гармониками.

В общем случае модель прогноза может быть записана в следующем виде:

$$\bar{y}(t) = a + bt + \sum_{i=1}^{[n/2]} \left[A_i \sin\left(\frac{2\pi}{n} it\right) + B_i \cos\left(\frac{2\pi}{n} it\right) \right], \quad (\text{VIII.12})$$

где $\bar{y}(t)$ — прогнозируемое значение; a, b — параметры линейного тренда; t — независимая переменная; n — число членов временного ряда; $[n/2]$ — целая часть числа $n/2$; i — номер гармоники; A_i, B_i — коэффициенты гармоник.

Параметры a и b определяются методом наименьших квадратов с использованием исходного временного ряда при решении системы уравнений:

$$\begin{cases} na + b \sum_{j=1}^n y_j = \sum y_j; \\ a \sum_{j=1}^n t_j + b \sum_{j=1}^n t_j^2 = \sum y_j t_j, \end{cases} \quad (\text{VIII.13})$$

где y_j — значения исходного ряда ($j=1, 2, \dots, n$).

Коэффициенты A_i и B_i оцениваются тем же методом по формулам Бесселя:

$$A_i = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n S(t) \sin\left(\frac{2\pi}{n} it\right); \quad (\text{VIII.14})$$

$$B_i = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^n S(t) \cos\left(\frac{2\pi}{n} it\right), \quad (\text{VIII.15})$$

где $S(t)$ — сезонная составляющая, полученная после исключения из исходного временного ряда линейного тренда.

Амплитуда i -й гармоники вычисляется по формуле

$$C_i = \sqrt{A_i^2 + B_i^2}. \quad (\text{VIII.16})$$

Как отмечалось, число гармоник не может превышать $n/2$, т. е. $i \leq n/2$. Поэтому по формулам (VIII.14) и (VIII.15) следует рассчитывать коэффициенты для

$(n/2-1)$ гармоник, так как для последней гармоники всегда $A_i=0$.

Предложенный метод достаточно удобен для анализа сравнительно коротких временных рядов (до 40—50 членов). Однако прогнозирование поставок сырья по таким коротким рядам не всегда обоснованно, так как во многих случаях наблюдаются очень большие колебания исходных значений, что ведет к снижению точности оценок параметров прогноза. Кроме того, использование более длинных временных рядов позволяет учитывать долговременные тенденции, сложившиеся в период, предшествующей прогнозу.

При прогнозировании по временным рядам, состоящим из большого числа членов (100 и более), метод менее эффективен из-за необходимости расчета большого числа гармоник, из которых только некоторые существенно влияют на результаты прогноза.

В целях сокращения объема вычислительной работы и обоснования адекватной модели сезонных колебаний целесообразно использовать специальные методы выявления скрытых периодичностей, из которых наиболее эффективна вычислительная схема Бюй—Балло, основанная на линейном преобразовании периодического процесса.

Задача вскрытия периодичностей принципиально отличается от задачи разложения в ряд Фурье. В методах вскрытия периодичностей период искомой компоненты не навязывается заранее, а определяется в процессе самого исследования.

По схеме Бюй—Балло интервал наблюдения исследуемого процесса $x(t)$, заданного в виде непрерывной кривой или таблицы значений, делится на отрезки длиной T . Затем вычисляется среднее арифметическое значение функций на всех отрезках. В суммарной кривой оказываются более четко выраженными гармонические компоненты с определенным периодом.

Преобразование по схеме Бюй—Балло осуществляет селективное действие по отношению к гармоническим компонентам с периодами, равными $2\pi/T$ и кратными им, т. е. выделяет периодическую функцию с периодом, равным пробному периоду T .

Эффективность селекции увеличивается пропорционально отношению длительности анализируемого отрезка к пробному периоду.

Селективное действие преобразования Бюй—Балло объясняется следующим образом: если пробный период T совпадает с периодом некоторой компоненты анализируемого процесса, то, составляя среднее арифметическое его отрезков длиной T , мы фактически оставляем эту компоненту неизменной, в то время как компоненты иных периодов сглаживаются (суммируются ординаты разных знаков и т. п.). Диапазон возможных значений периодов компонент, входящих в анализируемый процесс, должен быть задан заранее или приближенно оценен по виду процесса.

Если пробный период выбран неудачно, т. е. не совпадает с периодом ни одной из гармоник, содержащихся в анализируемом процессе, то в силу селективности преобразования в результате получится функция, мало отличающаяся от нуля.

При периодограммном анализе по схеме Бюй—Балло вычисляется зависимость меры размаха волны пробного периода от длины этого периода. Обычно в качестве такой меры используют среднее квадратическое отклонение $\sigma(T)$. При этом зависимость будет выглядеть следующим образом:

$$\sigma(T) = \sqrt{\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \bar{S}_i^2 - \left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \bar{S}_i \right)^2}, \quad (\text{VIII.17})$$

где T — длина пробного периода; $r=[N/T]$ — целая часть числа N/T ;

N — число членов исходного временного ряда; $\bar{S}_i = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r S_i + kT$

($i=1, 2, \dots, T$); S_i — значения амплитуды колебания с периодом, получаемые усреднением значений сезонной составляющей исходного ряда через интервалы, кратные пробному периоду; k — порядковый номер, соответствующий пробному периоду.

Зависимость средних квадратических отклонений от пробного периода называется периодограммой. Пики периодограммы указывают на наличие в исследуемом процессе тех или иных периодичностей, что позволяет построить математическую модель, состоящую из сумм гармоник, соответствующих выявленным периодам.

Модель прогноза, полученная на основе периодограм-

манализа, может быть записана в следующем виде:

$$y(t) = a + bt + \sum_{j=1}^m \left[A_j \sin \frac{2\pi}{T_j} t + B_j \cos \frac{2\pi}{T_j} t \right], \quad (\text{VIII.18})$$

где $y(t)$ — прогнозируемое значение; a, b — параметры линейного тренда; t — независимая переменная; m — число гармоник, соответствующих выявленным периодам; T_j — длина выявленных периодов ($j=1, 2, \dots, m$); A_j, B_j — коэффициенты гармоник.

Применение периодограммализа позволило существенно упростить модель прогноза и обеспечить возможность использования временных рядов любой длины при незначительных затратах машинного времени.

VIII.5. ЭВОЛЮЦИОННЫЙ МЕТОД

В основе метода лежит эволюционная модель, учитывающая предысторию процесса заготовок, связанную с развитием отрасли за годы Советской власти [3].

Ретроспективная оценка статистических данных за указанный период показала, что исходным пунктом для построения модели можно считать 1930 г., в котором объемы заготовок сырья и производства консервной продукции в промышленных масштабах близки к нулю. Естественно, что к настоящему времени тенденцию роста объема заготовок по максимальному числу известных данных за предыдущие годы можно описать математически в виде нелинейной зависимости количества заготавливаемого сырья или произведенных консервов Q (тыс. т, муб) от времени t (годы).

Исходные данные для нахождения функции тенденции роста записывают в виде таблицы количественных значений за отчетные периоды (дни, декады, месяцы и т. д.) в течение каждого года. ЭВМ позволяет по стандартным программам найти аппроксимирующую функцию

$$Q_f = f(t), \quad (\text{VIII.19})$$

где Q_f — объем производства, выраженный функционально; $f(t)$ — некоторая функция времени, выраженная полиномом вида

$$P_m(t) = \sum_{n=0}^m B_n t^n, \quad (\text{VIII.20})$$

где $P_m(t)$ — математическое обозначение функции в виде полинома;

B_n — постоянные коэффициенты при аргументе t ; m — максимальное значение n .

Прогнозом считается значение аппроксимирующей функции, экстраполируемое на один шаг (при определении тенденции роста по годам — на 1 год).

Критериями точности при таком методе прогнозирования являются погрешность экстраполяции функции по сравнению с известным значением Q для предшествующего прогнозируемому году и точность приближения функции Q_f к узлам аппроксимации.

Для предотвращения влияния на результат прогнозов резких перепадов между соседними значениями Q за отчетные периоды в течение сезона, вызываемых неравномерностью поставок сырья, прослеживали тенденцию роста заготовок и производства консервов по соответствующим периодам от года к году, фиксируя корень полинома на оси времени в 1930 г. Затем суммировали экстраполируемые на один шаг значения функций по периодам, что и принимали за общий годовой прогноз.

Исследования показали, что наилучшим приближением (по минимальной погрешности аппроксимации в узлах) является полином 2-й степени вида

$$Q_f = B_0 + B_1 t + B_2 t^2, \quad (\text{VIII.21})$$

где B_0, B_1, B_2 — коэффициенты полинома.

На рис. 56 на примере заготовок томатов представлена процедура аппроксимации функций тенденции роста этих заготовок по годам за восемь отчетных периодов (по 15 дней).

Эволюционный метод в отличие от итерационного предусматривает не только учет тенденции роста этих заготовок во времени от начала развития отрасли, но и возможность применения логистической модели. Для этого в программу вводят экстраполяцию функций в прогнозируемый год не по полиному, имеющему в области ожидаемых значений отрицательный радиус кривизны, а по экспоненте или параболе с положительным радиусом кривизны вида

$$Q_f^2 = K(t - 1930), \quad (\text{VIII.22})$$

где K — прогноз на последний год, для которого известны фактические значения.

Парабола мало отличается от экспоненты в экстраполируемой точке при шаге, не превышающем 0,5 %.

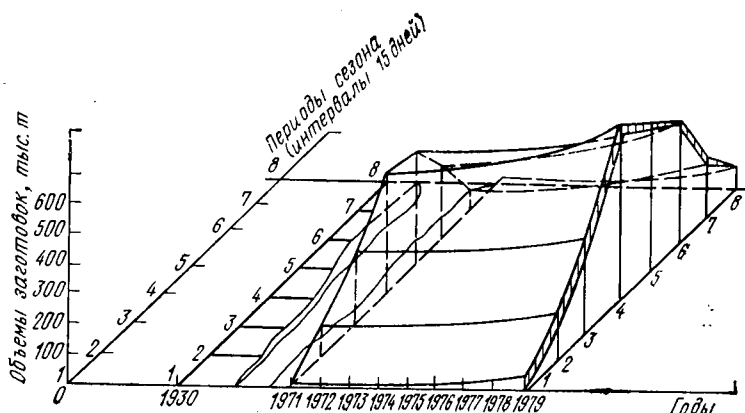


Рис. 56. Трехмерная графическая модель процедуры аппроксимации функций объемов заготовок сырья по внутрисезонным периодам

Такой прогноз соответствует результатам расчета по логистической модели и лучше совпадает с естественным ростом показателей. При этом на плоскость прогнозируемого года проектируется интервал, ограничиваемый оптимистическими и логистическими значениями прогноза.

В процессе работы с итерационным методом было выявлено, что результаты прогноза иногда существенно зависят от выбора начальной точки отсчета для расчета тренда на прогнозируемый период. Так, при большей глубине ретроспективы нередко получаются большие значения тренда, что ведет к завышению прогноза.

Анализ эволюционного метода с этой точки зрения показывает, что глубина ретроспективы не влияет на прогнозируемые значения и исключает необходимость субъективного вмешательства в процедуру расчета.

Проверка эволюционного метода на устойчивость прогноза при применении длины ряда исходных данных (с 9 до 18 лет) показала, что значения прогноза изменяются незначительно (в пределах 1,5 %).

В табл. 18 приведены условные плановые и фактические объемы производства плодоовощных консервов (с месячным интервалом) в 1980 г. в сравнении с прогнозами, рассчитанными различными методами и их модификациями.

Таблица 18

Метод прогнозирования	Объем производства консервов (нарастающим итогом), млн. условных банок												Относительная ошибка годового плана, %	Коэффициент расхождений
	январь	февраль	март	апрель	май	июнь	июль	август	сентябрь	октябрь	ноябрь	декабрь		
Фактически	392	781	1136	1443	1539	1834	2724	4213	5869	6769	7238	7438	—	—
По плану	383	768	1116	1394	1493	1857	2795	4544	6578	7545	8093	9099	22,3	0,15
Итеративный														
тренд с 1971 г.	398	731	1065	1318	1417	1811	2805	4593	6592	7566	8103	8618	15,9	0,12
тренд с 1974 г.	372	682	995	1231	1320	1701	2661	4403	6245	7145	7655	8137	9,4	0,07
Эволюционный														
логистический вариант	398	774	1147	1400	1490	1879	2807	4573	6465	7367	7858	8328	12,0	0,09
оптимистический вариант	410	796	1180	1442	1536	1929	2857	4625	6595	7530	8027	8504	14,3	0,12
Гармонический	463	761	1022	1381	1947	2775	3840	5060	6306	7447	8383	9062	21,8	0,18

О точности каждого прогноза в отдельности судили по относительной ошибке, т. е. отношению абсолютной погрешности к фактическому объему производства. Полученные результаты показали, что при удовлетворительной точности итоговых (годовых) прогнозов отдельные промежуточные прогнозы имели довольно большую погрешность.

В качестве обобщенного критерия оценки всей совокупности прогнозов (т. е. 12-месячных прогнозов) был использован коэффициент расхождения, рассчитываемый по формуле Г. Тейла:

$$v = \frac{\sqrt{\sum (P_t - A_t)^2 / n}}{\sqrt{(\sum A_t^2) / n}} = \frac{\sqrt{\sum (P_t - A_t)^2}}{\sqrt{\sum A_t^2}}, \quad (\text{VIII.23})$$

где P_t и A_t — предсказанные и фактические значения за период t .

Коэффициент $v=0$, когда все $P_t=A_t$ (случай совершенного прогнозирования); $v=1$, когда применяемый метод прогнозирования приводит к той же ошибке, что и «наивная» экстраполяция неизменности абсолютных приростов; $v>1$, когда прогноз дает худшие результаты, чем предположение о неизменности исследуемого явления. Верхней границы коэффициент не имеет.

Анализ коэффициентов расхождения показывает, что все примененные методы и их модификации дают удовлетворительные прогнозы, расположенные к фактическим показателям ближе, чем плановые цифры. Однако детальное рассмотрение результатов прогнозов, не только приведенных в табл. 18, но и многих других, выявило определенные недостатки некоторых из методов. Так, метод гармонического анализа дает неоправданное завышение прогнозных значений в начале и конце сезона. Итерационный метод требует вмешательства прогнозиста в процедуру расчета, что не исключает субъективного подхода к составлению прогноза.

Наиболее ровные результаты показал логистический вариант эволюционного метода. Анализ показывает, что на данном этапе развития изменение объемов заготовок сырья и производства плодоовощных консервов лучше всего описывает логистическая или близкая к ней кривая. Эта модель принята для работы как основная.

VIII.6. МЕТОД РАСЧЕТА СРЕДНЕСРОЧНЫХ ПРОГНОЗОВ

Стандартная процедура аппроксимации функции $f(t)$, заданной значениями этой функции (в тыс. т, млн. условных банок и т. п.) и соответствующими им значениями аргумента t (в годах), составляет основную часть программы [4].

В каждый временной ряд вводятся фиктивные значения начала ряда $[t_0=30 \text{ лет}, f(t_0)=0]$, означающие начало развития отрасли и «привязывающие» один из корней полинома к оси t . Полином имеет вид

$$f(t) = B_0 + B_1 t + B_2 t^2, \quad (\text{VIII.24})$$

где B_0, B_1, B_2 — коэффициенты полинома; t — независимая переменная.

В процессе аппроксимации находится среднее квадратическое отклонение σ значений полинома в узлах аппроксимации от значений $f(t)$.

Для развития отрасли на данном временном отрезке принята логистическая модель с S-образной кривой. При этом на каждом шаге (на год) экстраполяции предусмотрена коррекция значения полинома в соответствии с выражением

$$f(t) = \sqrt[3]{f^2(t_{m-1})(t_{m-1} - 29)/(t_m - 30)}, \quad (\text{VIII.25})$$

где $f(t_{m-1})$ — значение полинома в последнем узле аппроксимации, предшествующем шагу экстраполяции (объем производства); t_{m-1} — значение аргумента в последнем узле аппроксимации (годы); t_m — значение аргумента на шаге экстраполяции.

На рис. 57 представлены кривые экстраполяции при условии роста и снижения объема производства. В обоих случаях замедляется интенсивность роста и падения объемов производства в экстраполируемой точке t_m , что соответствует S-образной характеристике прогноза.

Следующая процедура заключается в коррекции найденного на первом шаге прогнозируемого значения $f(t_m)$ с учетом скрытого периода колебаний. Очевидно, что скрытый период колебаний — величина условная, так как функция $Q=f(t)$, описывающая дискретное изменение Q по годам, не является периодической. При этом можно говорить только о преобладании коэффициентов при членах разложения ее в ряд Фурье у гармоники, период которой принимается за скрытый для всего временного ряда.

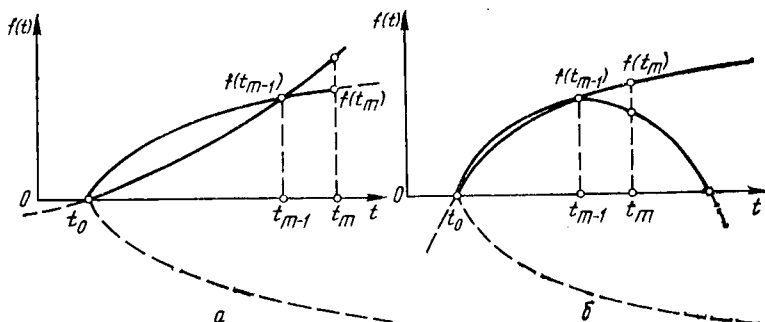


Рис. 57. Кривые экстраполяции при условии роста (а) и снижения (б) объемов производства

Классическая методика гармонического анализа в применении к поставленной задаче имеет ряд недостатков. При сравнении различных периодов колебаний функции $f(t)$ число гармоник, учитываемых в каждом периоде, ограничено. Ресурс машинного времени, затрачиваемый на разложение в ряд Фурье, с увеличением числа гармоник n резко возрастает и выходит за разумные пределы при $n > 5$. Поэтому была разработана другая методика поиска совпадения повторений в колебаниях функции $f(t)$, охватывающая все составляющие период гармоник без неоправданных затрат времени.

По этой методике в начале известного массива $Q = f(t)$ выбирается интервал условного скрытого периода. Значения объемов Q , соответствующие границам выбранного интервала (периода), соединяются прямой линией, фактически определяющей прямолинейную тенденцию роста Q в этом интервале. Затем в остальной части массива эволюционным методом производим прогнозирование ожидаемых объемов $f(t_m)$ с экстраполяцией во времени по шагам (годам) до конца массива.

На каждом шаге экстраполяции к полученным прогнозируемым значениям объемов $f(t_m)$ прибавляем отклонения ΔQ от значения прямолинейного тренда в выбранном интервале в соответствующем узле (на первом шаге в узле t_{n+1} , на втором — t_{n+2} и т. д., где t_n — начало интервала). Далее границы интервала сдвигаются на один шаг (год) вправо (в направлении увеличения t) и описанная операция повторяется до тех пор, пока не исчерпается весь массив Q .

Полученная серия экстраполяционных прогнозов анализируется следующим образом. Каждая последующая годовая тенденция изменения Q от года к году (как у фактической кривой, так и у прогнозируемых) расположена в координатах t, Q под углом к предыдущей годовой тенденции. Угол может быть как положительным, так и отрицательным независимо от прироста или падения Q и определяет знак производной $f'(t)$ в узле, предшествующем прогнозируемому.

Для всей серии контрольных прогнозов с выбранным скрытым периодом подсчитывается число совпадений знаков производных $f'(t)$ в каждой точке перегиба функции $f(t)$ у фактических объемов и у контрольных прогнозов. Отношение числа совпадений к общему числу прогнозов принимается за условную вероятность P_c существования данного скрытого периода колебаний у исследуемого массива Q .

Изложенная процедура поиска P_c последовательно повторяется для нескольких ожидаемых скрытых периодов (7, 8, 9, 10 или 11 лет), после чего их значения сравниваются. Критерием положительной оценки существования скрытого периода колебаний является наибольшее

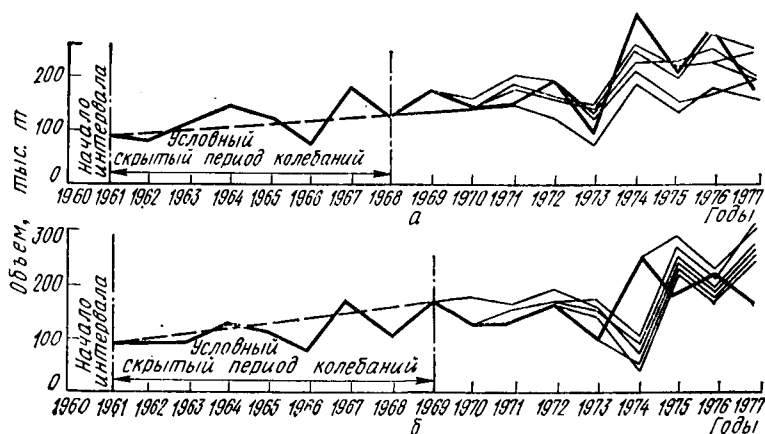


Рис. 58. Графическая интерпретация процедуры поиска скрытого периода колебаний объемов производства:

а — 8 лет; б — 9 лет; — — — — фактических; — — — — прогнозируемых; — — — — прямая тенденция роста объемов производства в интервале скрытого периода

значение P_c из всех полученных, а также его максимальное приближение к 1.

Графическая интерпретация описанной процедуры поиска P_c для двух значений скрытого периода представлена на рис. 58. Основная кривая (жирная линия) характеризует фактические объемы заготовок сырья с 1961 по 1977 г. Условная вероятность для периода в 8 лет $P_{c8}=0,83$, для периода в 9 лет $P_{c9}=0,38$. (Для того же временного ряда $P_{c7}=0,16$; $P_{c10}=0,42$; $P_{c11}=0,16$.) При сравнении рис. 58, а и б видно, что в периоде с высоким значением вероятности P_c тенденции колебаний прогнозов находятся в фазе с тенденциями колебаний фактических объемов и не зависят от положения интервала в массиве данных. Эта независимость и определяет высокую вероятность совпадения тенденций в будущем.

После нахождения скрытого периода коррекция прогнозируемого значения $f(t_m)$ осуществляется путем добавления к нему отклонения ΔQ от прямолинейной тенденции за предшествующий период.

Величину $f(t_m) + \Delta Q$ принимаем при повторении процедур аппроксимации на каждом последующем шаге экстраполяции за фактическое значение временного ряда. Описанные операции затем повторяем столько раз, на сколько лет производим экстраполяцию.

Так как разработанная программа предусматривает расчет прогнозов на 5 лет, необходимо учитывать тенденцию роста или падения суммарного объема производства в отрасли за предыдущие пятилетки. В соответствии с этим условием минимальное количество лет ретроспективного ряда не должно быть менее 15. В программе была принята экстенсивная модель изменения объемов производства от пятилетки к пятилетке, в которой учтено, что абсолютный объем растет по экспоненциальному закону. При этом возможно несколько вариантов изменения объемов производства в прошлом.

Тенденция роста в предшествующей пятилетке и в прогнозируемой — отрицательная, тогда прогнозируемую сумму объемов сохраняем на достигнутом в предшествующей пятилетке уровне (с нулевым приростом). Прогноз рассчитываем по формуле

$$f(t_m) = Cy_{4/5} + |(Cy_2 - Cy_3) / 10 + Cy_{3/5}|, \text{ (VIII.26)}$$

где Cy_4 — сумма в прогнозируемой пятилетке без коррекции; Cy_2 —

сумма фактических данных в предпредшествующей пятилетке; Cy_3 — сумма фактических данных в предшествующей пятилетке. — — —

Тенденция роста в предшествующей и предпредшествующей пятилетках положительная, относительный нескорректированный прирост в прогнозируемой пятилетке меньше относительного прироста в предшествующей. В этом случае за прогноз принимаем значение $f(t_m)$.

Тенденция роста в предшествующей и предпредшествующей пятилетках положительная, относительный ожидаемый прирост в прогнозируемой пятилетке больше относительного прироста в предшествующей (т. е. с экспоненциальным абсолютным приростом объема за пятилетку). Прогнозное значение объема рассчитывают по формуле

$$\{[f(t_m) - Cy_3/5] \exp [2 \ln 0,66 - \ln (1 - Cy_2/3 Cy_3)] / 100 \times \\ \times (Cy_4 - Cy_3) / Cy_3\} + Cy_3/5. \quad (VIII.27)$$

Для первого прогнозируемого года доверительный интервал отклонений от прогнозируемого значения δ выбран равным $\pm L$, что соответствует 67 % доверительной вероятности. Для последующих лет в программе предусмотрен учет «веерообразного» расхождения значений доверительного интервала в соответствии с выражением

$$\delta = \left(\sqrt{1 + \frac{1}{t_0} + \frac{(2t + t_0 - 1)^2}{(t_0^2 - 1)}} \right) L, \quad (VIII.28)$$

где t_0 — динамический ряд в ретроспективе; t — число прогнозируемых лет, начиная со 2-го года.

В целях проверки разработанной методики среднесрочного прогнозирования рассчитан ретроспективный прогноз объемов производства плодоовощных консервов в 1976—1980 гг., который представлен в табл. 19 в сравнении с плановыми и фактическими показателями.

Из данных табл. 19 видно, что относительная погрешность годовых и суммарного прогнозов была невысокой, за исключением 1980 г., крайне неблагоприятного по погодным условиям. Во всех случаях погрешность прогнозов была существенно меньше погрешности планов. Полученные относительные ошибки прогноза характеризуют предложенную методику среднесрочного прогнозирования как удовлетворительную.

Показатели	Объем производства консервов, млн. условных банок		
	1976 г.	1977 г.	1978 г.
Фактические	7457	7673	7673
Плановые	8260	8436	8636
Ретроспективный прогноз ($P=0,67$)	7739 ± 258	8064 ± 374	8231 ± 390
Относительная погрешность планов, %	10,8	9,9	12,6
Относительная погрешность прогнозов, %	0,3	0,2	2,2

Продолжение табл. 19

Показатели	Объем производства консервов, млн. условных банок		Всего за 1976—1980 гг.
	1979 г.	1980 г.	
Фактические	8218	7715	38736
Плановые	9676	10860	45868
Ретроспективный прогноз ($P=0,67$)	8678 ± 404	8871 ± 404	41583 ± 836
Относительная погрешность планов, %	17,7	40,8	18,4
Относительная погрешность прогнозов, %	0,7	9,7	5,2

VIII. 7. ПРОГРАММЫ И ИНСТРУКЦИИ ПО ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЮ

Программа № 53 расчета прогнозов итерационным методом

Стандартная информатива

"ПУСТЬ" L. "ВВОД" 33; "СТОП"; "ВВОД" 02; "РАЗРЯДНОСТЬ" 5; "ДРОБИ"
 ""НЕ""ДЕЛИТЬ"; $Z = (P-1)/2+1$; $J = 1$; $J = L \times K - Z + 1$; "ДРОБИ""ДЕЛИТ"
 Б"; "ДЛЯ" $V = Z$ "ШАГ" 1 "ВЫПОЛНИТЬ" ($S[V] = 0$; "ДЛЯ" $I = J$ "ШАГ" 1 "Д"
 О" ($J + P - 1$) "ВЫПОЛНИТЬ" $S[V] = S[V] + \Phi[I]$; $S[V] = S[V]/P$; $J = J + 1$; "
 ЕСЛИ" $V = Ж$ "ТО""НА" L1); L1. "ДЛЯ" $J = 1$ "ШАГ" 1 "ДО" К "ВЫПОЛНИТЬ"
 " ($CX = 0$; $CY = 0$; $CX2 = 0$; $CXY = 0$; "ДЛЯ" $I = J$ "ШАГ" К "ДО" ($(L-1) \times K + J$) "
 ВЫПОЛНИТЬ" ("ЕСЛИ" $I \geq Z$ "И" $I \leq Ж$ "ТО" ($CX = CX + S[I]$; $CY = CY + \Phi[I]$; C
 $X2 = CX2 + S[I]^2$; $CXY = CXY + \Phi[I] \times S[I]$; L2.)) ; $KV[J] = (CY \times CX2 - CXY \times$
 $CX) / ((L-1) \times CX2 - CX^2)$; $KA[J] = ((L-1) \times CXY - CX \times CY) / ((L-1) \times CX2$

$\neg \text{CX} \uparrow 2$); "ДЛЯ" $J=1$ "ШАГ" $I=1$ "ДО" K "ВЫПОЛНИТЬ" ("ДЛЯ" $V=J$ "ШАГ" K "ДО" $((L-1) \times K + J)$ "ВЫПОЛНИТЬ" ("ЕСЛИ" $V > Z$ "И" $V < J$ "ТО" $U[V] = \text{KA}[J] \times S[V] + \text{KB}[J]$)); "ДЛЯ" $I=1$ "ШАГ" $I=1$ "ДО" $(L \times K)$ "ВЫПОЛНИТЬ" ("ЕСЛИ" $I > Z$ "И" $I < J$ "ТО" $(R[I] = \Phi[I] - U[I]; R2[I] = R[I] \uparrow 2)$); "ДЛЯ" $I=1$ "ШАГ" $I=1$ "ДО" K "ВЫПОЛНИТЬ" $(CR=0; \text{"ДЛЯ" } V=I \text{ "ШАГ" } K \text{ "ДО" } ((L-1) \times K + I) \text{ "ВЫПОЛНИТЬ" ("ЕСЛИ" } V > Z \text{ "И" } V < J \text{ "ТО" } CR = CR + R2[V]); G[I] = \sqrt{(CR / (L-2)) \times 2})$; "ДЛЯ" $I=1$ "ШАГ" $I=1$ "ДО" K "ВЫПОЛНИТЬ" ("ДЛЯ" $V=I$ "ШАГ" K "ДО" $((L-1) \times K + I)$ "ВЫПОЛНИТЬ" ("ЕСЛИ" $V > Z$ "И" $V < J$ "ТО" "ЕСЛИ" $\text{ABS}(R[V]) > G[I]$ "ТО" "НА" PT)); "НА" $L3$; PT . "ФОРМАТ" 2; "ВЫВОД" 34 "ЗАГоловок" "ТАБЛИЦА" 4, $R1, R2, R3, R4, R5, R6, R7, R8$; $I=1-K$; $J=\text{ГОД}+L$; $PT1.I=I+K$; "ВЫВОД" 34 "ТАБЛИЦА" 4, $R[I], R[I+1], R[I+2], R[I+3], R[I+4], R[I+5], R[I+6], R[I+7]$; $\text{ГОД}=\text{ГОД}+1$; "ЕСЛИ" $\text{ГОД} < J$ "ТО" "НА" $PT1$; "ВЫВОД" 34 "ТАБЛИЦА" 4, $G[1], G[2], G[3], G[4], G[5], G[6], G[7], G[8]$; $L3$. "ДРОБИ" "НЕ" "ДЕЛИТЬ"; $T=L \times K - N1 + 1$; $N2=L \times K - (P-1)/2 + 1$; "ДРОБИ" "ДЕЛИТЬ"; $CNS = \sum (I=N1, N2-1, (S[I] \times (I-N1+1)))$; $CN = \sum (I=1, (N2-N1), I)$; $CN2 = \sum (I=1, (N2-N1), I^2)$; $CS = \sum (I=N1, N2-1, S[I])$; $KAT = ((N2-N1) \times CNS - CN \times CS) / ((N2-N1) \times CN2 - CN^2)$; $KBT = (CS \times CN2 - CNS \times CN) / ((N2-N1) \times CN2 - CN^2)$; "ДЛЯ" $I=1$ "ШАГ" $I=1$ "ДО" K "ВЫПОЛНИТЬ" $TR[I] = KAT \times (T+I) + KBT$; "ДЛЯ" $I=1$ "ШАГ" $I=1$ "ДО" K "ВЫПОЛНИТЬ" $PRG[I] = GR[I] \times \text{KA}[I] + \text{KB}[I]$; "ФОРМАТ" 2; "ВЫВОД" 34 "ЗАГоловок" "ТАБЛИЦА" 5, ПЕРИОД, ТРЕНД, ПРОГ, $G, 2G, H/\text{ПОК}, H/G$; $I=1$; $\text{НИ.НУ} = \sum (V=1, I, PRG[V])$; $HG = 2 \times \sqrt{(\sum (V=1, I, (G[V]/2) \uparrow 2) / I)}$; "ВЫВОД" 34 "ТАБЛИЦА" 5, $I, TR[I], PRG[I], G[I]/2, G[I], \text{НУ}, HG$; $I=I+1$; "ЕСЛИ" $I \leq K$ "ТО" "НА" $НИ$; $\text{ГОД}=1$; "НА" "Ю" "КОНЕЦ"

Рабочая информатива I

"ПУСТЬ" $L=L \times K$; $U[D]$; $S[D]$; $\text{KA}[K]$; $R[D]$; $G[K]$; $R2[D]$; $TR[K]$; $PRG[K]$; $PRO[I]$; $KB[K]$ "КОН"

Рабочая информатива II

"ПУСТЬ" $L=10$; $K=8$; $P=9$; $N1=7$; $\text{ГОД}=1$; $\Phi[80]=163,149,289,450,363,222,171,141,199,239,351,602,278,218,151,98,221,182,311,620,448,367,246,241,207,208,334,736,573,468,273,179,245,251,432,570,454,429,245,100,234,227,342,713,563,443,356,235,317,272,413,616,438,500,230,181,222,184,317,586,627,648,425,359,222,244,421,782,684,639,358,221,188,264,351,539,478,545,319,334$ "КОН"

В рабочую информативу записываются параметры:
 L — число лет во временном ряду;
 K — число прогнозируемых периодов в году;

Р — число членов для расчета скользящей средней;
 Ф [Л×К] — массив значений заготовок по К периодам за Л лет;
 ГОД — последняя цифра прогнозируемого года;
 № 1 — номер периода, начиная с которого вычисляется линейная функция тренда.
 На печать выводятся данные:
 R — массив средних квадратических отклонений по годам;
 Период — массив значений прогнозируемого периода;
 Тренд — массив значений прогнозируемого тренда;
 ПРОГ — массив значений прогнозируемых сезонных показателей;
 G — массив средних квадратических отклонений по периодам;
 2G — интервал отклонений;
 Н/ПОК — массив прогнозируемых значений по нарастающей;
 Н/G — массив отклонений по нарастающей.

Программа № 54 расчета прогнозов методом гармонического анализа

Стандартная информатива расчета прогнозов

"ПУСТЬ"Ю."РАЗРЯДНОСТЬ"4; T1=T/2; AO=2×((2×R+1)×Σ(I=1,R,Y[I])−3×Σ(I=1,R,Y[I]×I))/(R×(R−1)); VT=6×(2×Σ(I=1,R,Y[I]×I)−(R+1)×Σ(I=1,R,Y[I]))/(R×(R↑2−1)); "ВЫВОД"34,AO,"ПРОБЕЛ"5,BT,"СТРОКА"3; "ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"R"ВЫПОЛНИТЬ"S[I]=Y[I]−AO−BT×I; Д2=Σ(I=1,R,S[I]↑2)/R−(Σ(I=1,R,S[I])/R)↑2; DS=√(Д2); "ВЫВОД"34,DS; "ДЛЯ"N=1"ШАГ"1"ДО"L"ВЫПОЛНИТЬ"(A[N]=Σ(K=1,R,S[K]×COS(2×π×K×N/T))/T1; B[N]=Σ(K=1,R,S[K]×SIN(2×π×K×N/T))/T1; C[N]=√(A[N]↑2+B[N]↑2); "ВЫВОД"34,N,"ПРОБЕЛ"3,A[N], "ПРОБЕЛ"3, B[N], "ПРОБЕЛ"3, C[N], "СТРОКА"); "ДЛЯ"K=1"ШАГ"1"ДО"R1"ВЫПОЛНИТЬ"S1[K]=AO+BT×K+Σ(N=1,L,A[N]×COS(2×π×K×N/T))+B[N]×SIN(2×π×K×N/T); "ВЫВОД"34,"МАССИВ"S1,"СТРОКА"; Д1=Σ(I=1,R,(Y[I]−S1[I])↑2)/R; Д=√(Д1); "ВЫВОД"34,Д,"СТРОКА"; "ДЛЯ"K=1"ШАГ"1"ДО"Н"ВЫПОЛНИТЬ"(Д1=Σ(I=1,L,(Y[K+(I−1)×Н]−S1[K+(I−1)×Н])↑2)/Л; Д=√(Д1); "ВЫВОД"34,Д,"ПРОБЕЛ"3)"ГДЕ"Y[R]; S[R]; A[L]; B[L]; C[L]; S1[R1]"КОНЕЦ"◇

Стандартная информатива периодо- граммализа

"ПУСТЬ"Ю."РАЗРЯДНОСТЬ"8;"ДЛЯ"Т=3"ШАГ"1"ДО"100"ВЫПОЛНИ
ТЬ"(R=&(N/T); СИГМQ= $\sqrt{(T \times \sum_{i=1, T} (1/R \times \sum_{K=0, R-1} Q[1+K \times T])$
)¹² - $\sum_{i=1, T} 1/R \times \sum_{K=0, R-1} Q[1+K \times T])$ ¹²/(T × (T - 1)))"; "ВЫВОД"
34,Т,"ПРОБЕЛ",СИГМQ,"ПРОБЕЛ"3,"СТРОКА")"ТДЕ"Q[N]"КОНЕЦ"◇

В рабочую информативу записываются параметры:
R — количество значений исходного временного ряда (го-
ды); T=R;

L — число исследуемых гармоник;

Y[R] — массив значений исходного ряда;

R1 — количество значений временного ряда с учетом ко-
личества прогнозируемых значений;

H — число столбцов исходной таблицы данных;

L — число строк исходной таблицы данных;

На печать выводятся параметры:

AO, BT — параметры тренда;

N — номер гармоники;

A[N] — коэффициент при косинусе;

B[N] — коэффициент при синусе;

C[N] — амплитуда N-й гармоники;

S1[R1] — массив значений прогнозируемой функции;

D — среднее квадратическое отклонение от тенденций по
сумме значений;

D — массив средних квадратических отклонений для
каждого прогнозируемого значения.

Рабочая информатива для расчета по стан-
дартным программам

"ПУСТЬ"R=160; Y[160]=7,2485,7855,19115,19492,19681,14551,7108,2
935,190,899,5171,7286,13252,17668,21279,11285,9209,2194,1180,10,884,
3834,8246,16277,22666,15817,7143,843,70,265,3720,12106,12060,14237,
16581,13789,3625,1657,29,1289,4124,11401,20189,18806,14981,11125,34
94,2117,279,4169,12367,20418,22652,22422,10985,4255,1422,381,64,227,
2263,4323,17971,22082,20332,9975,3237,369,0,11,1690,6756,24893,2640
1,28546,18742,12413,2546,422,3432,8669,17872,21349,23817,22292,1401
4,6154,1476,0,0,50,2120,7047,22451,26792,24633,18949,5534,0,22,425,33
90,9854,23895,19415,12994,1783,227,0,0,11,2177,14092,27222,26896,266
32,19259,6652,1061,0,2169,11135,25295,30709,28680,26211,15853,4688,
244,0,0,860,9624,17454,17695,23470,15502,12753,2867,0,71,2991,5730,2
3291,22369,20289,13116,5116,1187,0,0,1750,7520,27691,30580,23884,14
681,6321,1200; T=160; L=20; R1=170; H=10; L=16"КОН"◇

"ПУСТЬ"Н."ДЛЯ"И=1"ШАГ"(Л+1)"ДО"(ЛХК-Л+К)"ВЫПОЛНИТЬ"У
 1[1]=0; V=2; I=1; H1."ДЛЯ"Z=0"ШАГ"1"ДО"(Л-1)"ВЫПОЛНИТЬ"У
 1[V+Z]=Φ[Z×K+1]; V=V+Z+1; I=I+1; "ЕСЛИ"1≤K"ТО""НА"Н1; "ВЫ
 ВОД"34,"СТРОКА"1,РЕСП; Ш=0; Ш1=0; ПП=0; ПП1=0; "ФОРМАТ"2; "
 ВЫВОД"34"ЗАГоловок""ТАБЛИЦА"1,Н,ЛОГ.ПРОГ.,L2,Н/ЛОГ.,Н/L
 2;"ДЛЯ"V=1"ШАГ"1"ДО"(ЧМХГ)"ВЫПОЛНИТЬ"В1[V]=0;"ДЛЯ"V
 =1"ШАГ"1"ДО"ЧМ"ВЫПОЛНИТЬ"В[V]=0;"РАЗРЯДНОСТЬ"Е; U=0;
 U1=0;"ДЛЯ"Ш=1"ШАГ"1"ДО"Г"ВЫПОЛНИТЬ"(N=NN[Ш]; K=K1[Ш]
 ; "ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"ЧМ"ВЫПОЛНИТЬ"(X[I]=0; Y[I]=0); "ДЛЯ"
 V=1"ШАГ"1"ДО"К"ВЫПОЛНИТЬ"(X[V]=X1[V+U]; Y[V]=Y1[V+U]
); S=0;"ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"(3×N+2)"ВЫПОЛНИТЬ"D[I]=0;"ДЛЯ"
 'J=1"ШАГ"1"ДО"ЧМ"ВЫПОЛНИТЬ""ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"ЧМ"ВЫП
 ОЛНИТЬ"A[J,I]=0;"ДЛЯ"J=1"ШАГ"1"ДО"К"ВЫПОЛНИТЬ"(I=1; R
 1=1; D[I]=D[I]+R1; Y.R2=R1×Y[J]; D[I+2×N+1]=D[I+2×N+1]+R2;
 P1.R1=R1×X[J]; D[I+1]=D[I+1]+R1; I=I+1;"ЕСЛИ"1<N+2"ТО"("НА"Ы
); "ЕСЛИ"1<2×N+1"ТО"("НА"Р1)); "ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"В
 ЫПОЛНИТЬ""ДЛЯ"J=1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"A[I,J]=D[
 I-1+J]; "ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"В[I]=D[2×N+1+I
]; "ДЛЯ"Ж=1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"(T=0;"ДЛЯ"И=Ж"Ш
 АГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"(D=Σ(P=1,Ж-1,A[I,P]×A[P,Ж]); A[
 I,Ж]=A[I,Ж]-D;"ЕСЛИ"ABS(A[I,Ж])>T"ТО"(T=ABS(A[I,Ж]); M=
 1); "ЕСЛИ"М=Ж"ТО"("НА"Э1); "ДЛЯ"J=1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫП
 ОЛНИТЬ"(T=A[Ж,J]; A[Ж,J]=A[M,J]; A[M,J]=T); T=B[Ж]; B[Ж]=
 B[M]; B[M]=T; Э1."ЕСЛИ"ABS(A[Ж,Ж])≤EPS"ТО"(S=1;"НА"L1); "
 ДЛЯ"И=Ж+1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"A[I,Ж]=A[I,Ж]/A[Ж,
 Ж]; "ДЛЯ"J=Ж+1"ШАГ"1"ДО"(N+1)"ВЫПОЛНИТЬ"(D=Σ(P=1,Ж-1,
 A[Ж,P]×A[P,J]); A[Ж,J]=A[Ж,J]-D; D=Σ(P=1,Ж-1,A[Ж,P]×B[P]);
 B[Ж]=B[Ж]-D;"ДЛЯ"Ж=N+1"ШАГ"(-1)"ДО"1"ВЫПОЛНИТЬ"(D=
 Σ(P=Ж+1,N+1,A[Ж,P]×B[P]); B[Ж]=(B[Ж]-D)/A[Ж,Ж]); R3=0; L2=
 0;"ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"К"ВЫПОЛНИТЬ"(J=N; R1=B[J+1]; L.R1=
 R1×X[I]+B[J]; J=J-1;"ЕСЛИ"J>0"ТО"("НА"L); R2=ABS(R1-Y[I]
); L2=L2+R2↑2;"ЕСЛИ"R2>R3"ТО"(R3=R2; R4=Y[I]); "ЕСЛИ"R4
 =0"ТО"(R1=0)"ИНАЧЕ"(R1=R3/R4); L2=√(L2/K); L1.Ш=Ш+1; LB[
 Ш]=L2; V=0; Ю2.V=V+1; B1[V+U1]=B[V]; B[V]=0;"ЕСЛИ"V<ЧМ"Т
 О""НА"Ю2; U=U+K; U1=U1+ЧМ); W=0;"ДЛЯ"V=1"ШАГ"1"ДО"Г"ВЫ
 ПОЛНИТЬ"(X0=XOP[V]; XM=XMP[V]; DX=DXP[V]; X2=X0-DX; ЧМ
 =ЧВ[V]; Б."ЕСЛИ"X2<XM"ТО""НА"Б1"ИНАЧЕ""НА"Б2; Б1.X2=X2+
 DX; (АГ=В1[1+W]+B1[2+W]×X2+B1[3+W]×X2↑2+B1[4+W]×X2↑3+B1[5

+W)×X2↑4; "ЕСЛИ"X2=81"ТО"ПРОГНОЗ82=(АГ↑2×52/51)↑.500000ю
 0"ИНАЧЕ""НА"Б); "НА"Б; Б2.ПП=ПП+ПРОГНОЗ82; ПП1=ПП1+АГ;
 Ш1=Ш1+1; HL2=√(Σ(Ш=1,Ш1,(LB[Ш])↑2)); "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "В
 ЫВОД"34"ТАБЛИЦА"1,Ш1,ПРОГНОЗ82,LB[Ш1],ПП,HL2; "РАЗРЯДНО
 СТЬ"Е; W=W+5) "КОНЕЦ"◇

В рабочую информативу записываются параметры:
 D [3N+2] — одномерный массив элементов по стандарт-
 ной программе № 0417, где N=2 — степень аппрокси-
 мации полинома;
 A [N+1, N+1] — двумерный массив элементов матрицы;
 B [N+1] — одномерный массив элементов матрицы;
 EPS — 10^{-12} — величина для определения вырожденно-
 сти матрицы;
 ЧМ — максимальное число коэффициентов аппроксима-
 ции на участке;
 Г — число аппроксимирующих полиномов (по числу от-
 четных периодов);
 В1 [ЧМ×Г] — максимальное число коэффициентов ап-
 проксимации (суммарно по всем периодам);
 ЧТ — общее число точек (узлов аппроксимации) по от-
 четным данным с учетом нулевых значений 1930 г.;
 NN [Г] — степени аппроксимации на каждом периоде;
 К1 [Г] — количество узлов аппроксимации на каждом от-
 четном периоде по числу лет, предшествующих про-
 гнозу, включительно 1930 г.;
 ЧВ [Г] — число коэффициентов аппроксимации в полино-
 ме на каждом периоде;
 ХМР [Г] — год прогнозирования для каждого периода;
 ХОР [Г] — год, предшествующий прогнозируемому, с ко-
 торого производится экстраполяция логистического
 прогноза;
 DXР [Г] — экстраполяции для каждого периода;
 X [ЧТ] — максимальное суммарное число лет, принимае-
 мых для расчета прогноза, для всех периодов;
 Y [ЧТ] — максимальное суммарное число значений в уз-
 лах аппроксимации;
 X1 [ЧТ] — массив координат лет в последовательности по
 отчетным периодам;
 Y1 [ЧТ] — объемы во всех узлах аппроксимации;
 LB [Г] — рабочий массив;
 РЕСП — признак отношения прогноза к ассортименту.
 На печать последовательно выдаются:
 N — порядковый номер сезонного периода (республики);

ЛОГ.ПРОГ — массив значений прогнозов по периодам;
 L2 — массив доверительных интервалов;
 Н/ЛОГ — массив значений прогнозов по нарастающей;
 Н/L2 — массив доверительных интервалов по нарастающей.

Вторая рабочая информатива та же, что и рабочая информатива для расчета прогнозов итерационным методом (см. программу № 53).

Рабочая информатива I

"ПУСТЬ" D[14]; A[5,5]; B[5]; EPS=1₁₀-9; ЧМ=5; Г=4; ЧТ=40; NN[4]=2,2,2,2; K1[4]=10,10,10,10; ЧВ[4]=3,3,3,3; ХМР[4]=81,81,81,81; ХОР[4]=73,73,73,73; DXР[4]=1,1,1,1; X[40]; Y[40]; X1[40]=30,73,74,75,76,77,78,79,80,81,30,73,74,75,76,77,78,79,80,81,30,73,74,75,76,77,78,79,80,81,30,73,74,75,76,77,78,79,80,81; Y1[40]; LB[Г]; B1[20]; РЕСП=ЗАВОС
 ЫР82-73"КОН"◇

Рабочая информатива II

"ПУСТЬ" Л=12; К=4; Ф[48]=414,248,1040,721,330,198,1051,624,312,212,1126,783,410,234,959,776,434,252,1088,649,408,234,1007,1055,570,312,1229,1090,562,300,950,791,478,331,1017,997,595,357,1039,965,640,189,348,1139,651,372,1274,1383"КОН"◇

Программа № 56 расчета среднесрочных прогнозов (на 5 лет)

Стандартная информатива поиска скрытого периода

"ПУСТЬ" Ю."РЯЗРЯДНОСТЬ"Е; U=0; "ДЛЯ"Ш=1"ШАГ"1"ДО"Г"ВЫПОЛНИТЬ" ("ДЛЯ"V=1"ШАГ"1"ДО"АА"ВЫПОЛНИТЬ" (X2[V]=X1[V+U]; Y2[V]=Y1[V+U]); Ц4."ДЛЯ"Я=1"ШАГ"1"ДО"Г"ВЫПОЛНИТЬ" (K2=K1[Я]; K3=0; Ц3."ДЛЯ"Ю=1"ШАГ"1"ДО"(АА-K3)"ВЫПОЛНИТЬ" (Y[Ю]=Y2[Ю+K3]; X[Ю]=X2[Ю+K3]); "ДЛЯ"Г1=1"ШАГ"1"ДО"АА"ВЫПОЛНИТЬ" (ТФ[Г1]=0; ТП[Г1]=0; Z[Г1]=0; Z1[Г1]=0; Z2[Г1]=0; УП[Г1]=0); "ДЛЯ"Г1=1"ШАГ"1"ДО"(АА-K2-K3)"ВЫПОЛНИТЬ" (K=K2+Г1-1; "ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"3"ВЫПОЛНИТЬ" (B[1]=0); S=0; "ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"(3×N+2)"ВЫПОЛНИТЬ" D[I]=0; "ДЛЯ"J=1"ШАГ"1"ДО"3"ВЫПОЛНИТЬ""ДЛЯ"И=1"ШАГ"1"ДО"3"ВЫПОЛНИТЬ" A[J,I]=0; "ДЛЯ"J=1"ШАГ"1"ДО"K"ВЫПОЛНИТЬ" (I=1; R1=1; D[I]=D[I]+R1; Q.R2=R1×Y[J]; D[I+2×N+1]=D[I+2×N+1]+R2; P1.R1=R1×X[J]; D[I+1]=D[I+1]+R1; I=I+1; "ЕСЛИ"И<N+2"ТО"(НА"Q); "ЕСЛИ"И<2×N+1"ТО"(НА"Р

1)); "ДЛЯ" I=1 "ШАГ" 1 "ДО" (N+1) "ВЫПОЛНИТЬ" "ДЛЯ" J=1 "ШАГ" 1 "ДО" (N+1) "ВЫПОЛНИТЬ" A[I,J]=D[I-1+J]; "ДЛЯ" I=1 "ШАГ" 1 "ДО" (N+1) "ВЫПОЛНИТЬ" B[I]=D[2xN+1+I]; "ДЛЯ" Ж=1 "ШАГ" 1 "ДО" (N+1) "ВЫПОЛНИТЬ" (T=0; "ДЛЯ" I=Ж "ШАГ" 1 "ДО" (N+1) "ВЫПОЛНИТЬ" (D=Σ(P=1, Ж-1, A[I,P]x A[P,Ж]); A[I,Ж]=A[I,Ж]-D); "ЕСЛИ" ABS(A[I,Ж])>T "ТО" (T=ABS(A[I,Ж]); M=1); "ЕСЛИ" M=Ж "ТО" ("НА" Ц1); "ДЛЯ" J=1 "ШАГ" 1 "ДО" (N+1) "ВЫПОЛНИТЬ" (T=A[Ж,J]; A[Ж,J]=A[M,J]; A[M,J]=T); T=B[Ж]; B[Ж]=B[M]; B[M]=T; Ц1. "ЕСЛИ" ABS(A[Ж,Ж])≤EPS "ТО" (S=0; "НА" L1); "ДЛЯ" I=Ж+1 "ШАГ" 1 "ДО" (N+1) "ВЫПОЛНИТЬ" A[I,Ж]=A[I,Ж]/A[Ж,Ж]; "ДЛЯ" J=Ж+1 "ШАГ" 1 "ДО" (N+1) "ВЫПОЛНИТЬ" (D=Σ(P=1, Ж-1, A[Ж,P]x A[P,J]); A[Ж,J]=A[Ж,J]-D; D=Σ(P=1, Ж-1, A[Ж,P]x B[P]); B[Ж]=B[Ж]-D); "ДЛЯ" Ж=N+1 "ШАГ" (-1) "ДО" 1 "ВЫПОЛНИТЬ" (D=Σ(P=Ж+1, N+1, A[Ж,P]x B[P]); B[Ж]=(B[Ж]-D)/A[Ж,Ж]); R3=0; L2=0; "ДЛЯ" I=1 "ШАГ" 1 "ДО" K "ВЫПОЛНИТЬ" (J=N; R1=B[J+1]; L.R1=R1xX[1]+B[J]; J=J-1; "ЕСЛИ" J>0 "ТО" ("НА" L); R2=ABS(R1-Y[1]); L2=L2+R2↑2; "ЕСЛИ" R2>R3 "ТО" (R3=R2; R4=Y[1]); "ЕСЛИ" R4=0 "ТО" (R1=0) "ИНАЧЕ" (R1=R3/R4); L2=√(L2/K); L1. "ВЫВОД" 01, "ПРОБЕЛ"; Ц6. ПР[G1]=B[1]+B[2]x(X[K2+G1])+B[3]x(X[K2+G1])↑2; УП[G1]=ПР[G1]+У[G1+1]-У[Я]+((У[K2+K3]-У[Я])xX[Я])/(K2-1)-((У[K2+K3]-У[Я])xX[G1+1])/(K2-1); Z[G1]=(У[K2+G1]-У[K2+G1-1])/(X[K2+G1]-X[K2+G1-1]); Z1[G1]=(У[K2+G1-1]-У[K2+G1-2])/(X[K2+G1-1]-X[K2+G1-2]); ТФ[G1]=(Z[G1]-Z1[G1])/(1+Z1[G1]xZ[G1]); "ЕСЛИ" G1=1 "ТО" "НА" Ц7; "ЕСЛИ" G1=2 "ТО" "НА" Ц8; Z2[G1]=(УП[G1]-УП[G1-1])/(X[K2+G1]-X[K2+G1-1]); Z3[G1]=(УП[G1-1]-УП[G1-2])/(X[K2+G1-1]-X[K2+G1-2]); ГП[G1]=(Z2[G1]-Z3[G1])/(1+Z2[G1]xZ3[G1]); "НА" Ц9; Ц7. Z2[G1]=(УП[G1]-У2[K2])/(X[K2+G1]-X[K2]); ТП[G1]=(Z2[G1]-Z1[G1])/(1+Z1[G1]xZ2[G1]); "НА" Ц9; Ц8. Z2[G1]=(УП[G1]-УП[G1-1])/(X[K2+G1]-X[K2+G1-1]); ТП[G1]=(Z2[G1]-Z2[G1-1])/(1+Z2[G1]xZ2[G1-1]); "НА" Ц9; Ц9. "ВЫВОД" 01, "ПРОБЕЛ"; "РАЗРЯДНОСТЬ" Е1; "ВЫВОД" 34, K1[Я], "ПРОБЕЛ", "МАССИВ" ТФ, "ПРОБЕЛ", "МАССИВ" ТП; "ВЫВОД" 34, "СТРОКА" 2; "РАЗРЯДНОСТЬ" Е; K3=K3+1; "ЕСЛИ" (AA-K3-K2)≥2 "ТО" "НА" Ц3; "ВЫВОД" 34, "СТРОКА" 4; U=U+AA) "КОНЕЦ" ◇

В рабочую информативу записываются параметры:
D[8]; B[3]; A[3, 3]; EPS=I₁₀-I₁₂ — константы аппроксимации полиномом 2-й степени;

N — степень полинома;

AA — число лет во временном ряду;

X[AA]; Y[AA];
X2[AA];
Y2[AA] } — массивы значений аргумента и функции (места бронируются для числа AA);

Γ — число исследуемых ожидаемых скрытых периодов;
 Ч — число лет прогнозирования;
 $\text{K1}[\text{Ч}]$ — массив исследуемых периодов в годах;
 $\text{X1}[\text{AA}]$ — массив значений лет (без сотен лет);
 $\text{Y1}[\text{AA}]$ — массив объемов по соответствующим годам;
 $\text{Z1}[\text{AA}]$ — массив тангенсов угла наклона прямой фактического прироста объемов на первом шаге от начала исследуемого периода;
 $\text{Z}[\text{AA}]$ — массив тангенсов угла наклона прямой фактического прироста на втором шаге от начала исследуемого периода;
 $\text{Z2}[\text{AA}]$ — массив тангенсов угла наклона прямой прогнозируемого прироста объемов на первом шаге от начала периода;
 $\text{Z3}[\text{AA}]$ — массив тангенсов угла наклона прямой прогнозируемого прироста объемов на втором шаге от начала периода;
 $\text{УП}[\text{AA}]$ — массив прогнозируемых значений объемов с учетом колебаний в периоде;
 $\text{ПР}[\text{AA}]$ — массив прогнозируемых полиномиальных значений объемов (без учета колебаний);
 $\text{ТФ}[\text{AA}]$ — массив производных фактического приращения объемов вдоль периода;
 $\text{ТП}[\text{AA}]$ — массив производных прогнозируемого приращения объемов вдоль периода.

Рабочая информатива поиска скрытого периода

"ПУСТЬ"X[23]; Y[23]; Ч=5; В[3]; I[8]; A[3,3]; EPS=1₁₀-9; N=2; Г=1;
 AA=23; ТП[23]; ТФ[23]; Z[23]; Z1[23]; Z2[23]; УП[23]; X2[23]; Z3[23];
 Y2[23]; ПР[23]; ИП[23]; K1[6]=6,7,8,9,10,11; X1[23]=59,60,61,62,63,64,65,66,67,68,69,70,71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,81; Y1[23]=6311,7383,7894,8604,8622,9378,8799,9821,10512,11904,12820,13190,13421,13297,14495,15914,17416,16719,17200,16450,17393,17930,16564"КОН"

Стандартная информатива расчета 5-летнего прогноза

"ПУСТЬ"Ю."РАЗРЯДНОСТЬ"Е; U=0; "ДЛЯ"ш=1"ШАГ"1"ДО"Г"ВЫПОЛНИТЬ"("ДЛЯ"V=1"ШАГ"1"ДО"(Ч+AA)"ВЫПОЛНИТЬ"(X[V]=X1[V+U]; Y[V]=Y1[V+U]); "ДЛЯ"я=1"ШАГ"1"ДО"Ч"ВЫПОЛНИТЬ"(K=я+AA-1; "ДЛЯ"i=1"ШАГ"1"ДО"З"ВЫПОЛНИТЬ"(B[i]=0); S=0, "ДЛЯ"i=1"ШАГ"1"ДО"(3XN+2)"ВЫПОЛНИТЬ"D[i]=0; "ДЛЯ"J=1"ШАГ"1"Д

O^*3 "ВЫПОЛНИТЬ" "ДЛЯ" $I=1$ "ШАГ" I "ДО" 3 "ВЫПОЛНИТЬ" $A[I,1]=0$; "ДЛЯ" $J=1$ "ШАГ" I "ДО" K "ВЫПОЛНИТЬ" ($I=1$; $R1=1$; $D[I]=D[I]+R1$; $Q.R2=R1 \times Y[J]$; $D[I+2 \times N+1]=D[I+2 \times N+1]+R2$; $P1.R1=R1 \times X[J]$; $D[I+1]=D[I+1]+R1$; $I=I+1$; "ЕСЛИ" $I < N+2$ "ТО" ("НА" Q); "ЕСЛИ" $I < 2 \times N+1$ "ТО" ("НА" $P1$)); "ДЛЯ" $I=1$ "ШАГ" I "ДО" $(N+1)$ "ВЫПОЛНИТЬ" "ДЛЯ" $J=1$ "ШАГ" I "ДО" $(N+1)$ "ВЫПОЛНИТЬ" $A[I,J]=D[I-1+J]$; "ДЛЯ" $I=1$ "ШАГ" I "ДО" $(N+1)$ "ВЫПОЛНИТЬ" $B[I]=D[2 \times N+1+I]$; "ДЛЯ" $J=1$ "ШАГ" I "ДО" $(N+1)$ "ВЫПОЛНИТЬ" ($T=0$; "ДЛЯ" $I=J$ "ШАГ" I "ДО" $(N+1)$ "ВЫПОЛНИТЬ" ($Д=\sum (P=1, J-1, A[I,P] \times A[P,J])$; $A[I,J]=A[I,J]-Д$); "ЕСЛИ" $ABS(A[I,J]) > T$ "ТО" ($T=ABS(A[I,J])$; $M=1$)); "ЕСЛИ" $M=J$ "ТО" ("НА" $\Pi 1$); "ДЛЯ" $J=1$ "ШАГ" I "ДО" $(N+1)$ "ВЫПОЛНИТЬ" ($T=A[J,J]$; $A[J,J]=A[M,J]$; $A[M,J]=T$; $T=B[J]$; $B[J]=B[M]$; $B[M]=T$; $\Pi 1$. "ЕСЛИ" $ABS(A[J,J]) \leq EPS$ "ТО" ($S=1$; "НА" $L1$); "ДЛЯ" $I=J+1$ "ШАГ" I "ДО" $(N+1)$ "ВЫПОЛНИТЬ" $A[I,J]=A[I,J]/A[J,J]$; "ДЛЯ" $J=J+1$ "ШАГ" I "ДО" $(N+1)$ "ВЫПОЛНИТЬ" ($Д=\sum (P=1, J-1, A[J,P] \times A[P,J])$; $A[J,J]=A[J,J]-Д$; $Д=\sum (P=1, J-1, A[J,P] \times B[P])$; $B[J]=B[J]-Д$); "ДЛЯ" $J=N+1$ "ШАГ" $I(-1)$ "ДО" 1 "ВЫПОЛНИТЬ" ($Д=\sum (P=J+1, N+1, A[J,P] \times B[P])$; $B[J]=(B[J]-Д)/A[J,J]$); $R3=0$; $L2=0$; "ДЛЯ" $I=1$ "ШАГ" I "ДО" K "ВЫПОЛНИТЬ" ($J=N$; $R1=B[J+1]$; $L.R1=R1 \times X[I]+B[J]$; $J=J-1$; "ЕСЛИ" $J > 0$ "ТО" ("НА" L); $R2=ABS(R1-Y[I])$; $L2=L2+R2 \uparrow 2$; "ЕСЛИ" $R2 > R3$ "ТО" ($R3=R2$; $R4=Y[I]$)); "ЕСЛИ" $R4=0$ "ТО" ($R1=0$) "ИНАЧЕ" ($R1=R3/R4$); $L2=\sqrt{(L2/K)}$; "ЕСЛИ" $Я < 2$ "ТО" $\Pi L=L2$ "ИНАЧЕ" $\Pi L=L2 \times \sqrt{(1+1/AA+(2 \times (Я-1)+AA-1) \uparrow 2)/(AA \uparrow 2-1))}$; $KBP[Я]=\Pi L \uparrow 2$; "РАЗРЯДНОСТЬ" $E1$; "ВЫВОД" 34 , "СТРОКА". ΠL ; $L1$. "ВЫВОД" 34 , "ПРОБЕЛ"; "РАЗРЯДНОСТЬ" E ; $\Pi 6.Z[Я]=B[1]+B[2] \times (X[Я+AA-1])+B[3] \times (X[Я+AA-1]) \uparrow 2$; "ЕСЛИ" $\Pi=1$ "ТО" $S1=AA-W1+1$ "ИНАЧЕ" "ЕСЛИ" $\Pi=2$ "ТО" $S1=AA-W2+1$ "ИНАЧЕ" "ЕСЛИ" $\Pi=3$ "ТО" $S1=AA-W3+1$ "ИНАЧЕ" "ЕСЛИ" $\Pi=4$ "ТО" $S1=AA-W4+1$ "ИНАЧЕ" "ЕСЛИ" $\Pi=5$ "ТО" $S1=AA-W5+1$ "ИНАЧЕ" "ЕСЛИ" $\Pi=6$ "ТО" $S1=AA-W6+1$ "ИНАЧЕ" "ЕСЛИ" $\Pi=7$ "ТО" $S1=AA-W7+1$ "ИНАЧЕ" "ЕСЛИ" $\Pi=8$ "ТО" $S1=AA-W8+1$ "ИНАЧЕ" "ЕСЛИ" $\Pi=9$ "ТО" $S1=AA-W9+1$ "ИНАЧЕ" "ЕСЛИ" $\Pi=10$ "ТО" $S1=AA-W10+1$ "ИНАЧЕ" "ЕСЛИ" $\Pi=11$ "ТО" $S1=AA-W11+1$ "ИНАЧЕ" "ЕСЛИ" $\Pi=12$ "ТО" $S1=AA-W12+1$ "ИНАЧЕ" "ЕСЛИ" $\Pi=13$ "ТО" $S1=AA-W13+1$ "ИНАЧЕ" "ЕСЛИ" $\Pi=14$ "ТО" $S1=AA-W14+1$ "ИНАЧЕ" "ЕСЛИ" $\Pi=15$ "ТО" $S1=AA-W15+1$ "ИНАЧЕ" "ЕСЛИ" $\Pi=16$ "ТО" $S1=AA-W16+1$; $Ы[Я]=(Y[AA]-Y[S1]) \times (X[Я+S1]-X[S1])/(X[AA]-X[S1])+Y[S1]$; $\Pi A[Я]=\sqrt{((Z[Я] \uparrow 2) \times (X[Я+AA-1]-29)/(X[Я+AA-1]-30))}$; $X[Я+AA]=X[Я+AA-1]+1$; $Y[Я+AA]=Y[Я+S1]-Ы[Я]+\Pi A[Я]$); "ДЛЯ" $Я=1$ "ШАГ" I "ДО" $Ч$ "ВЫПОЛНИТЬ" ($СУ1=Y[AA-14]+Y[AA-13]+Y[AA-12]+Y[AA-11]+Y[AA-10]$; $СУ2=Y[AA-9]+Y[AA-8]+Y[AA-7]+Y[AA-6]+Y[AA-5]$; $СУ3=Y[AA-4]+Y[AA-3]+Y[AA-2]+Y[AA-1]+Y[AA]$; $СУ4=Y[AA+1]+Y[AA+2]+Y[AA+3]+Y[AA+4]+Y[AA+5]$; $ОТД1=100 \times (СУ2-СУ1)/СУ1$; $ОТД2=100 \times (СУ3-СУ2)/СУ2$; $ОТД4=100 \times (СУ4-СУ3)/СУ3$; "ЕСЛИ" $ОТД2 < 0$ "ИЛИ" $ОТД4 < 0$ "ТО" "НА" $\Phi 1$ "ИНАЧЕ" "НА" $\Phi 2$; $\Phi 1.$ (

$\text{ПРОГН}[Я] = \text{У}[Я+АА] - \text{СУ}4/5 + \text{ABS}(\text{СУ}2 - \text{СУ}3)/10 + \text{СУ}3/5$; $\text{ОГДП} = 100 \times \text{ABS}((\text{СУ}2 - \text{СУ}3)/2)/\text{СУ}3$; "НА"Ф3; Ф2. $\text{Д1} = 1 - \text{СУ}2/(3 \times \text{СУ}3)$; $\text{Д2} = 2/3$; $\text{Д3} = e^{\uparrow}(2 \times \text{ЛN}(\text{Д2}) - \text{ЛN}(\text{Д1}))$; $\text{ОТД3} = 100 \times (2 - (3 \times \text{Д3}))$; "ЕСЛИ"ОТД4 < ОТД3 "ТО" "НА"Ф4 "ИНАЧЕ" "НА"Ф5; Ф4. $\text{ПРОГН}[Я] = \text{У}[Я+АА]$; $\text{ОТДП} = \text{ОТД4}$; "НА"Ф3; Ф5. $\text{ОТДП} = \text{ОТД3}$; $\text{ПРОГН}[Я] = ((\text{У}[Я+АА] - \text{СУ}3/5) \times \text{ОТД3} / \text{ABS}(\text{ОТД4})) + \text{СУ}3/5$; Ф3. $\text{ГОД} = \text{Х}[Я+АА]$; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"34, "СТРОКА", ГОД, "ПРОБЕЛ", $\text{ПРОГН}[Я]$, "ПРОБЕЛ", "СТРОКА"; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е; $\text{ПР}[\text{Ш}] = \sum(\text{Я}=1, \text{Ч}, \text{ПРОГН}[Я])$; $\text{СКВ}[\text{Ш}] = \sqrt{(\sum(\text{Я}=1, \text{Ч}, \text{КВП}[\text{Я}]))}$; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"34, ОТД1, "ПРОБЕЛ", ОТД2, "ПРОБЕЛ", ОТДП, "ПРОБЕЛ", $\text{ПР}[\text{Ш}]$; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е; $\text{U} = \text{U} + \text{Ч} + \text{АА}$; "ДЛЯ"Я=1 "ШАГ"1 "ДО"Ч "ВЫПОЛНИТЬ" ($\text{Z}[Я]=0$; $\text{ПА}[Я]=0$); $\text{ПС} = \sum(\text{Ш}=1, \text{Г}, \text{ПР}[\text{Ш}])$; "РАЗРЯДНОСТЬ"Е1; "ВЫВОД"34, "СТРОКА", ПС, "СТРОКА" "КОНЕЦ"

В рабочую информативу 5-летнего прогноза записываются параметры:

N — степень аппроксимации полинома;

$\text{D}[3\text{N}+2]$; $\text{A}[\text{N}+1, \text{N}+1]$; $\text{B}[\text{N}+1]$; EPS — служебные константы по стандартной программе;

Ч — число лет прогнозирования;

Г — число аппроксимируемых полиномов;

W — массив значений скрытых периодов;

АА — порядковый номер последнего в ряду узла аппроксимации;

S1 — порядковый номер последнего во временном ряду узла аппроксимации ($\text{S1} = \text{АА} - \text{W} + 1$);

$\text{ПА}[\text{Ч}]$; $\text{Ы}[\text{Ч}]$; $\text{L}[\text{Ч}]$ — константы скрытого периода;

$\text{Х}[\text{АА} + \text{Ч}]$; $\text{У}[\text{АА} + \text{Ч}]$ — максимальные значения количества лет и объемов в прогнозируемом периоде с учетом прогнозов;

$\text{Х1}[(\text{АА} + \text{Ч}) \times \text{Г}]$ — массив аргументов (лет) исходных данных плюс прогнозируемые годы;

$\text{У1}[(\text{АА} + \text{Ч}) \times \text{Г}]$ — массив объемов исходных данных с учетом мест под прогнозируемые;

$\text{ПРОГН}[\text{Ч}]$ — прогнозируемые значения объемов;

$\text{ПР}[\text{Г}]$ — суммарное значение прогнозируемого объема по одному ряду за весь прогнозируемый период;

$\text{СКВ}[\text{Г}]$ — средние квадратические отклонения от суммарного значения прогноза за прогнозируемый период;

$\text{КВП}[\text{Ч}]$ — квадрат половины доверительного интервала.

На печать выводятся параметры:

ГОД — год прогнозирования (без сотен лет);

Рабочая информатива расчета 5-летнего прогноза

"ПУСТЬ"X[20]: Y[20]: Ч=5; B[3]: D[8]; A[3,3]: EPS=1₁₀-9; N=2; ПA [5]
]; Ы[5]; Z[5]; X1[120]=66,67,68,69,70,71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,0,0,
0,0,0,66,67,68,69,70,71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,0,0,0,0,0,66,67,68,69,70,
71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,0,0,0,0,0,66,67,68,69,70,71,72,73,74,75,76,77,
78,79,80,0,0,0,0,0,66,67,68,69,70,71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,0,0,0,0,0,66,
67,68,69,70,71,72,73,74,75,76,77,78,79,80,0,0,0,0,0; Y1[120]=9821,10512,1
1904,12820,13190,13421,13297,14495,15914,17416,16719,17200,16450,173
93,17930,0,0,0,0,0,37363,39768,43557,46561,49564,53248,53889,57518,603
48,63362,63922,67875,66400,67929,67913,0,0,0,0,0,26509,25922,32904,371
08,38267,40394,41060,42562,45775,48821,53143,55351,54831,56746,63435
,0,0,0,0,0,1151,1112,1070,1099,1020,1011,981,963,970,986,959,977,986,937
,938,0,0,0,0,0,1120,1157,1283,1392,1348,1396,1400,1415,1468,1607,1609,1
645,1678,1682,1683,0,0,0,0,0,03250,3119,3248,3355,3492,3564,3848,4470,4
658,5291,6176,6576,6597,6463,6470,0,0,0,0,0; Γ=6; ИПОГН[5]; ИП[6]; KB
И[5]; CKB[6]; W1=8; W2=8; W3=8; W4=8; W5=8; W6=8"KOH"; AA=15"K
OH"◇

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев Е. Л., Воскобойников В. А. Моделирование и оптимизация по энергозатратам процесса быстрого замораживания пищевых продуктов с применением ЭВМ. — В кн.: Механизмы криоповреждения и криозащиты биологических объектов. Харьков, 1984, с. 193.
2. Алексеев Е. Л., Громаков В. Ю., Роечко Т. Ф. Оптимизация процесса стабилизации жиросодержащих продуктов. — М.: ВИНТИ, 1984, № 10, с. 116.
3. Алексеев Е. Л., Мегердичев Е. Я. Эволюционный метод прогнозирования заготовок сырья и прогнозы на 1980 г. — Консервная и овощесушильная промышленность, 1980, № 6, с. 30—32.
4. Алексеев Е. Л., Мегердичев Е. Я., Слесарев А. М. Прогнозирование на ЭВМ заготовок сырья и производства консервов на пятилетний период. — Консервная и овощесушильная промышленность, 1982, № 1, с. 4—6.
5. Алексеев Е. Л., Фомичева Л. А. Методика компактного аналитического описания на ЭВМ процесса перекачки вязких продуктов по трубопроводам и расчет потерь давления на трение. — Известия вузов СССР. Пищевая технология, № 1, 1984, с. 117.
6. Мегердичев Е. Я. Прогнозы поступления сырья на консервные предприятия в 1979 году. — Консервная и овощесушильная промышленность, 1979, № 4, с. 25—27.
7. Мегердичев Е. Я., Сорокованов В. А. Прогнозирование поставок сырья с помощью метода гармонического анализа. — Консервная и овощесушильная промышленность, 1980, № 2, с. 34—35.
8. Соколова И. А., Бабарин В. П. Математический расчет прогреваемости консервов в стеклянной таре при стерилизации. — Консервная и овощесушильная промышленность, 1981, № 12, с. 14—15.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Глава I. Методы оценки параметров аппроксимирующих функций	5
I.1. Выбор аппроксимирующих функций	5
I.2. Математический аппарат метрической теории аппроксимаций	8
I.3. Методы метрической аппроксимации	15
I.4. Элементы теории вероятностей и математической статистики	22
I.5. Метод наименьших квадратов в статистическом оценивании	38
Глава II. Методы оптимизации процессов	48
II.1. Классификация оптимизационных задач	48
II.2. Методы одномерной оптимизации	50
II.3. Методы многомерной безусловной оптимизации	61
II.4. Симплексный метод решения задач линейного программирования	67
II.5. Численные методы решения задач выпуклой условной оптимизации	82
Глава III. Моделирование процесса перекачки вязких продуктов по трубопроводам	92
III.1. Моделирование процесса с помощью многочленов	92
III.2. Моделирование процесса с помощью рациональных функций	104
III.3. Расчет потерь давления на трение	109
Глава IV. Моделирование и оптимизация процесса быстрого замораживания продуктов	114
IV.1. Определение критической температуры в центре образца	114
IV.2. Оптимизация процесса по энергетическим затратам	116
IV.3. Последовательная оптимизация процесса по качеству готового продукта и энергетическим затратам	136

Глава V. Моделирование и оптимизация процессов тепловой сушки продуктов	157
V.1. Аналитическое описание кривых сушки	157
V.2. Выбор по кривым сушки оптимального по качеству режима	163
V.3. Включение в процесс оптимизации критериев производительности и энергозатрат	165
V.4. Расчет режима, оптимального по качеству, производительности и энергозатратам	175
V.5. Упрощенный метод расчета режима сушки продукта	180
V.6. Оптимизация процесса сушки концентратов в режиме турбоподдува	182
V.7. Оптимизация процесса сушки концентратов с добавками поверхностно-активных веществ	198
Глава VI. Моделирование и оптимизация процесса стабилизации жирсодержащих продуктов при добавках антиоксидантов	207
VI.1. Аналитическое описание кривых окисления	207
VI.2. Оптимизация процента добавки антиоксиданта по материальным затратам на ее ввод в продукт	217
VI.3. Расчет оптимального процента добавки антиоксиданта	218
Глава VII. Оптимизация процессов стерилизации продуктов в автоклавах	220
VII.1. Аналитическое описание и оптимизация режимов стерилизации	220
VII.2. Оптимизация геометрической конфигурации тары для кондуктивно прогреваемых продуктов	230
Глава VIII. Экстраполяционное прогнозирование заготовок сырья и производства консервов	236
VIII.1. Постановка задачи	236
VIII.2. Общая схема разработки прогнозов	238
VIII.3. Итерационный метод	241
VIII.4. Метод гармонического анализа	244
VIII.5. Эволюционный метод	248
VIII.6. Метод расчета среднесрочных прогнозов	253
VIII.7. Программы и инструкции по их использованию	258
Список использованной литературы	270