O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

Toshkent Moliya instituti

M. KARIMOV, R.ABDIKARIMOV

Oliy matematika

(O‘quv qo‘llanma)

ТОШКЕНТ
“IQTISOD-MOLIYA”
2008

M.Karimov, R.Abdikarimov «Oliy matematika» fanidan o‘quv qo‘l-lanma. T.: "IQTISOD-MOLIYA", 2008 yil, 242 bet.

Ushbu o‘quv qo‘llanma oliy matematikaning chiziqli algebra, tekislik va fazoda anal itik geometriya elementiarini o‘z ichiga oladi.

O‘quv qo‘llanma O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta’-limning bilim va ta’lim sohasi - «Biznes va boshqaruv», «Moliya», Bank ishi», «Soliq va soliqqa tortish», «Buxgalteriya hisobi va audit», «Kasb ta’limi» ta’lim yo‘nalishlari uchun mo‘ljallangan bo‘lib, yangi dastur va davlat ta’lim standartlariga mos keladi. Har bir mavzu mustaqil ishlash uchun misollar bilan to’ldirildi.

O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligining Toshkent Moliya instituti qoshidagi oliy o‘quv yurtlararo ilmiy - uslubiy kengashda muhokama qilingan va nashrga tavsiya etilgan.

Taqrizchilar: R. Mo‘minova fizika-matmiatika fanlari nomzodi,dots;
B. A. Xudoyorov fizika-matematika fanlari nomzodi,dots.

1-§. Determinantlar va ularning xossalari

1. Ikkinchi-tartibli determinantlar. Determinantlarning asosiy xossalari.

Haqiqiy a, b, c va d haqiqiy sonlar berilgan bo‘lsin. Ular ikkinchi **– tartibli determinant** yoki **aniqlovchi** deb ataluvchi $ad - bc$ sonni aniqlaydi va $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ko‘rinishda yoziladi.

Ta’rifga asosan, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

a, b, c va d sonlarga determinant elementlari deyiladi. Ikkinchi tartibli determinantda a, b- birinchi, c, d- ikkinchi satr, a, c- birinchi, b, d – ikkinchi ustun, a, d- bosh yoki birlamchi, b, c- ikkilamchi diagonallar bir-biridan farqlaniladi.

ikkinchi-tartibli determinant misolida determinantlarning quyidagi asosiy xossalarini tekshirib ko‘rish qiyin emas.

Determinantning kattaligi:

1-xossa: satrlari mos ustunlari bilan almashtirilsa - o‘zgarmaydi;

2-xossa: satrlari (ustunlari) o‘rinlari almashtirilsa - ishorasi qarama-qarshisiga o‘zgaradi;

3-xossa: biror-bir satr (ustun) har bir elementi k haqiqiy songa ko‘-paytirilsa - k marta ortadi;

4-xossa: biror-bir satr (ustun) har bir elementi nolga teng bo‘lsa – nolga teng;

5-xossa: ikki satr (ustun) mos elementlari o‘zaro teng yoki proport-sional bo‘lsa - nolga teng.

Quyida ta’riflanadigan 3-tartibli, ixtiyoriy n-tartibli determinantlar uchun ham yuqoridagi xossalar o‘rinli.

2. Uchinchi-tartibli determinantlar

Uchinchi tartibli determinant yoki **aniqlovchi** deb,

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \qquad (1)$$

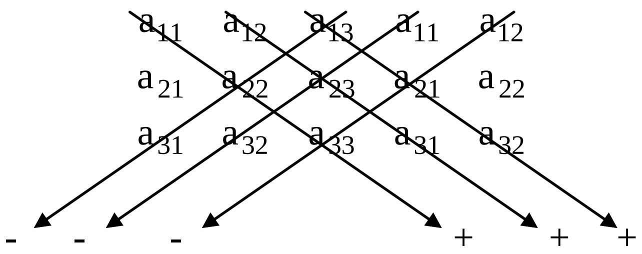
yig‘indiga teng songa aytiladi va

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = |a_{ik}|$$

ko‘rinishda yoziladi.

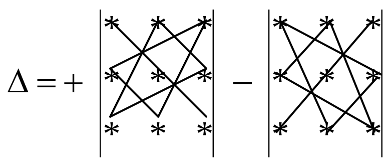
Haqiqiy a_{ik} $(i, k = \{1, 2, 3\})$ sonlarga determinantning elementlari deyiladi. a_{ik} element i- satr va k- ustun elementi bo‘lib, ularning kesishmasida joylashgan. Uchinchi-tartibli determinantda ham satr va ustunlar, bosh va ikkilamchi diagonallar bir-biridan farqlaniladi.

(1) standart ifoda sodda tuzilishga ega. a_{ik} elementlar bo‘yicha hisoblanadigan Δ yig‘indini **Sarryus** qoidasi yordamida tuzish mumkin. Determinant ustunlariga o‘ngdan birinchi va ikkinchi ustunlarini ko‘chirib yozib, kengaytirilgan jadval tuzamiz:



Bosh diagonal yo‘nalishida joylashgan elementlar ko‘paytirilib musbat ishora bilan, ikkilamchi diagonal yo‘nalishidagi elementlar ko‘paytirilib manfiy ishora bilan olinsa, (1) yig‘indi hosil bo‘ladi.

Δ yig‘indi uchburchaklar usulida ham tuzilishi mumkin:



Oldidagi ishorasi bilan birga har bir ko‘paytma determinantning hadi deyiladi. Har bir ko‘paytma determinantning har bir satri va ustuni element – vakillaridan tarkib topgan. (1) ifodaning standart deyilishiga sabab, uning har bir hadida ko‘paytuvchi elementlar birinchi indeks - satr nomerining o‘sish tartibida joylashtirilgan. Ikkinchi indeks ustun nomerlari esa quyidagi tartibda joylashgan:

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{array}\right\} (2) \qquad \left.\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right\} (3)$$

(2) va (3) 1, 2 va 3 sonlarining o‘rin almashtirishlaridir. (1, 2, 3) tartiblangan o‘rin almashtirishga asosiy o‘rin almashtirish deyiladi.

Agar o‘rin almashtirishda uning ikki aniq elementlari o‘rinlari almashtirilsa, ushbu elementlar transpozitsiyalangan deyiladi. Transpozitsiyalanganda o‘rin almashtirish tizimi boshqasi bilan almashinadi. Masalan,

$$(1,\ 2,\ 3) \to (3, 2, 1) \to (3,\ 2,\ 1) \quad \text{ва ҳоказо.}$$

Agar biror-bir o‘rin almashtirish tizimi asosiysidan bir necha N_1, N_2, va hokazo transpozitsiyalash usullari bilan hosil qilingan bo‘lsa, ushbu sonlar ayni vaqtda yoki juft yoki toq sonlar ekanligini ta’kidlash muhimdir. O‘rin almashtirish tizimi asosiysidan juft (toq) sondagi transpozitsiyalar yordamida olingan bo‘lsa, mos ravishda juft (toq) deyiladi.

$j = (j_1, j_2, j_3)$ o‘rin almashtirish tizimi berilgan bo‘lsin. Bu yerda, j_1, j_2, j_3 - 1, 2 va 3 sonlarining tanlangan biror-bir tartibi. t(j)- asosiy (1, 2, 3) o‘rin almashtirishdan j o‘rin almashtirishga o‘tish uchun zarur transpozitsiyalar soni bo‘lsin. Agar t(j) – juft (toq) son bo‘lsa, j- juft (toq) o‘rin almashtirishdir.

(2) o‘rin almashtirishlar tizimi juft, (3) o‘rin almashtirishlar tizimi esa toqdir.

Yuqorida keltirilgan tushunchalardan foydalanib, uchinchi tartibli determinantni boshqa teng kuchli ta’rifini berish mumkin.

Uchinchi-tartibli determinant yoki aniqlovchi deb, quyidagi yig‘indiga teng Δ songa aytiladi:

$$\Delta = \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j1} a_{2j2} a_{3j3},$$

bu yerda, $j(j_1, j_2, j_3)$ - asosiy (1, 2, 3) o‘rin almashtirishdan hosil bo‘lishi mumkin bo‘lgan o‘rin almashtirishlar.

Ushbu ta’rif n- tartibli determinantni ta’riflashda umumlashtirilishi mumkin.

3. n - tartibli determinantlar

n – tartibli determinant yoki **aniqlovchi** deb, quyidagi yig‘indiga teng Δ songa aytiladi:

$$\Delta = \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j1} a_{2j2} \dots a_{njn} \qquad \text{ва}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ko‘rinishda yoziladi, bu yerda, $j\ (j_1, j_2, \dots, j_n)$ - asosiy (1, 2, …, n) o‘rin almashtirishdan olinishi mumkin bo‘lgan ixtiyoriy o‘rin almashtirish, t(j) – asosiydan j o‘rin almashtirishga o‘tishda transpozitsiyalar soni.

$(-1)^{t(j)} a_{1j1} a_{2j2} \dots a_{njn}$ ko‘paytmaga determinantning hadi deyiladi. n – tartibli determinant n^2 haqiqiy son – elementlar orqali aniqlanadi va yig‘indi n! ta haddan iborat.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Ikkinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
2. Determinantning kattaligi uning satrlari mos ustunlari bilan almashtirilsa qanday o‘zgaradi?
3. Determinantning satrlari (ustunlari) o‘rinlari almashtirilsa-chi?
4. Determinant biror-bir satri (ustuni) elementlari umumiy ko‘paytuvchisini uning ishorasidan tashqariga ko‘paytuvchi sifatida chiqarish mumkinmi?
5. Qanday hollarda determinantning kattaligi nolga teng?
6. Uchinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
7. Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning Sarryus qoidasi nimadan iborat?
8. Uchinchi tartibli determinantni hisoblashning uchburchak sxemasini yozing.
9. Transpozitsiyalash deganda nimani tushunasiz?
10. Juft yoki toq o‘rin almashtirish tizimi deb qanday o‘rin almashtirishga aytiladi?
11. n- tartibli determinant deb nimaga aytiladi?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Ikkinchi tartibli determinant.
2. Determinant elementi.
3. Determinant satri.
4. Determinant ustuni.
5. Determinant bosh va ikkilamchi diagonali.
6. Uchinchi tartibli determinant.
7. Determinant hadi.
8. O‘rin almashtirishda transpozitsiyalash.
9. Asosiy o‘rin almashtirish.
10. Juft yoki toq o‘rin almashtirish.
11. n - tartibli determinant.

Mustaqil ishlash uchun misollar

1.1. Quyida berilgan aniqlovchilarni hisoblang:

a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1{,}5 & 8 \\ 1{,}25 & \frac{14}{3} \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} \sqrt[4]{2} & 5 \\ -0,(9) & \sqrt[4]{8} \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} \sqrt{5}-2 & 3 \\ 3 & 2+\sqrt{5} \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -9,(6) \\ \sqrt[3]{\frac{27}{8}} & \sin\frac{\pi}{4} \end{vmatrix}$ j) $\begin{vmatrix} \sin 41^0 & \sin 49^0 \\ -\cos 41^0 & \cos 49^0 \end{vmatrix}$

h) $\begin{vmatrix} a^2-b^2 & a^3-b^3 \\ (a^2-b^2)^{-1} & (a-b)^{-1} \end{vmatrix}$ i) $\begin{vmatrix} \sqrt[3]{25}b^{\frac{2}{3}} & \sqrt[3]{b} \\ \sqrt[3]{5} & \dfrac{1}{(\sqrt[3]{5}b^{\frac{1}{3}}+2)^{-1}} \end{vmatrix}$

k) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ l) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ m) $\begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ n) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix}$

o) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}$ p) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ r) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

s) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ t) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 5 & x & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

1.2. Tenglamalarni yeching:

a) $\begin{vmatrix} x & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x & 3 \end{vmatrix}$ b) $\dfrac{1}{\begin{vmatrix} x & 7 \\ x & x \end{vmatrix}} = -\dfrac{1}{6}$

c) $\begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix} + x = 0$ d) $\begin{vmatrix} |x| & x^3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

e) $(0,6)^x (25/9)^{\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & x \end{vmatrix}} = \left(\dfrac{27}{125}\right)^3$ f) $2^x \begin{vmatrix} 4^x & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 = 0$

j) $\log_4 \dfrac{2}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \log_4 \begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ h) $\begin{vmatrix} 2 & \lg x \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\sqrt{\lg x}$

i) $|x|^{x\begin{vmatrix} x & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = 1$ k) $(0,6)^{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & x \end{vmatrix}} + (0,8)^{\begin{vmatrix} 2 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = 1$

l) $\begin{vmatrix} \sin x & 0 & -\dfrac{3}{2} \\ -2 & 1 & 4 \\ 0,5 & 0 & \cos x \end{vmatrix} = 1$ m) $\cos^2\dfrac{\pi x}{4} + \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ x & x & 2 \\ 6 & -5 & x \end{vmatrix}} = 0$

1.3. Tengsizliklarni yeching:

a) $\dfrac{5}{x\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & x \end{vmatrix}} \le 0$ b) $\dfrac{1}{\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} < 1/3$ c) $\begin{vmatrix} x & 4 \\ |x| & x \end{vmatrix} + 3 > 0$

d) $\sqrt{x\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & x \end{vmatrix}} > -2$ e) $\sqrt{x\begin{vmatrix} x & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} > 2$ f) $\sqrt{\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} < 2$

j) $\sqrt{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix}} < \sqrt{x}$ h) $\sqrt{\begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 5 & x \end{vmatrix}} < x$ i) $\sqrt{x\begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}} < \begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

k) $\log_{0,5}\left(\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ x & 1 \end{vmatrix} - x^2\right) > 3$ l) $\log_x\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ x & 7 \end{vmatrix} > 1$ m) $\begin{vmatrix} 3^x & 2 & -1 \\ 9^x & 2^x & 0 \\ 2^x & 0 & 1 \end{vmatrix} > 0$

1.4. Quyidagi o‘rin almashtirish tizimlarining juft yoki toqligini aniqlang:

a) (2; 1; 3), b) (3; 1; 2), c) (1; 3; 2; 4),
d) (2; 3; 1; 4), e) (3; 4; 1; 5; 2), f) (2; 5; 3; 4; 1),
j) (2; 5; 3; 1; 4; 6), h) (6; 5; 3; 1; 4; 2).

2-§. Determinantlarning xossalari

1. Minor va algebraik to‘ldiruvchilar haqida tushuncha

n- tartibli $\Delta = |a_{ik}|$ determinant berilgan bo‘lib, uning ixtiyoriy i-satrini va ixtiyoriy k-ustunini o‘chiramiz. Qolgan ifoda (n-1)– tartibli determinantni tashkil etadi va a_{ik} elementning **minori** deyiladi. a_{ik} element minori M_{ik} yozuv bilan belgilanadi.

a_{ik} elementning **algebraik to‘ldiruvchisi** yoki **ad’yunkti** deb, $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ kattalikka aytiladi.

Masalan, uchinchi tartibli $\Delta = |a_{ik}|$ determinantning a_{12} elementi minori M_{12} va algebraik to‘ldiruvchisi A_{12} mos ravishda:

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}, \quad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}$$

2. Determinantlarning xossalari

Ixtiyoriy n- tartibli determinant o‘zining asosiy xossalaridan (1 – mavzuga qaralsin) tashqari, qo‘shimcha ravishda quyidagi xossalarga ham ega.

6-xossa: Determinantning ixtiyoriy satri yoki ustuni elementlarining o‘z algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytmalarining yig‘indisi uning kattaligiga teng:

$$\Delta=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \ \ (i=1,2,\ldots,n) \ \ (1) \qquad \Delta=\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \ \ (k=1,2,\ldots,n) \ \ (2)$$

(1) yig‘indi n-tartibli determinantni i- satr elementlari bo‘yicha yoyish formulasi deyilsa, (2) yig‘indi k– ustun elementlari bo‘yicha yoyish formulasi deyiladi.

Masala: Uchinchi tartibli $\Delta = |a_{ik}|$ determinantni ikkinchi ustun elementlari bo‘yicha yoying.

Uchinchi tartibli determinantni ikkinchi ustun elementlari bo‘yicha yoyish formulasini qo‘llaymiz, natijada

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i2}A_{i2}=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32} = -a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-$$
$$-a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}=-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{22}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-$$
$$-a_{32}(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21})=\Delta$$

7-xossa: Determinant biror satri (yoki ustuni) elementlarining boshqa parallel satr (yoki ustun) mos elementlari algebraik to‘ldiruvchilariga ko‘paytmalarining yig‘indisi nolga teng:

$$\Delta=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}=\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj}=0 \quad (i\neq j, \ i,j=1,2,\ldots,n)$$

Ushbu xossa determinantlarning 5- xossasi asosida isbotlanadi.

8-xossa: n-tartibli aniq bir satrlari (ustunlari) bir-biridan farq qiluvchi, qolganlari esa aynan bir xil bo‘lgan Δ_1 va Δ_2 determinantlar berilgan bo‘lsin. Berilgan Δ_1 va Δ_2 determinantlarning yig‘indisi ko‘rsatilgan farqli satri (ustuni) mos elementlarining yig‘indisidan iborat, umumiy satrlari (ustunlari) esa o‘zgarmas qoladigan n-tartibli Δ determinantga teng.

Masalan, uchinchi ustunlari farqli, qolgan ustunlari aynan bir xil uchinchi tartibli determinantlar quyidagicha qo‘shiladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{31} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33}+b_{33} \end{vmatrix}$$

9-xossa: Determinant kattaligi uning biror satri (ustuni) elementlariga boshqa parallel satr (ustun) mos elementlarini bir xil songa ko‘paytirib qo‘shganda o‘zgarmaydi.

Yuqori tartibli determinantlarni hisoblashning ratsional usuli uning biror satri yoki ustunida keltirilgan xossa asosida nollar yig‘ib, so‘ngra shu satr yoki ustun bo‘yicha yoyib hisoblashdir. Yuqori tartibli determinantni hisoblash masalasi ketma-ket ravishda quyi tartibli determinantlarni hisoblash bilan almashinadi.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -3 & 9 \\ -1 & 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -3 & 3 & 4 \\ 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= -3\begin{vmatrix} -15 & 0 & -14 \\ 6 & 0 & 9 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -15 & -14 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 9\begin{vmatrix} -15 & -14 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9\cdot(-17) = -153$$

10-xossa: n- tartibli berilgan $\Delta_1 = |a_{ik}|$ va $\Delta_2 = |b_{ik}|$ determinantlar ko‘paytmasi n- tartibli $\Delta = |c_{ik}|$ determinantga teng va uning ixtiyoriy c_{ik} ele-menti quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}$$

c_{ik} element Δ_1 determinant i- satri elementlarining Δ_2 determinant k- ustuni mos elementlariga ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng.

Masalan:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{vmatrix}$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. n-tartibli determinant ixtiyoriy elementi minori deb nimaga aytiladi?
2. Algebraik to‘ldiruvchi yoki ad’yunkt deb nimaga aytiladi?
3. n-tartibli determinantni i-satr elementlari bo‘yicha yoyib hisoblash formulasini yozing.
4. n-tartibli determinantni k-ustun elementlari bo‘yicha yoyib hisoblash formulasini yozing.
5. Determinantni transponirlashdan tashqari uning ustida qanday almashtirishlar bajarganda kattaligi o‘zgarmaydi?
6. Yuqori tartibli determinantlarni nollar yig‘ib hisoblash usuli nimadan iborat?
7. Determinantlarni qo‘shish mumkinmi va qanday?
8. Tartiblari teng determinantlarni ko‘paytirish qoidasi nimadan iborat?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Determinant elementi minori.
2. Element algebraik to‘ldiruvchisi yoki ad’yunkti.
3. Determinantni satr yoki ustun elementlari bo‘yicha yoyish.
4. Determinantlarni qo‘shish.
5. Determinantlarni ko‘paytirish.

Mustaqil ishlash uchun misollar

2.1. Berilgan $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ -5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ aniqlovchining barcha elementlari algebraik to‘ldiruvchilarini toping va $\Delta = \sum_{k=1}^{3} a_{i3} A_{3k}$ ekanligini tekshirib ko‘ring.

2.2. Quyidagilarni eng ma’qul usulda hisoblang:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 81 & 2 \\ -1 & 9 & 1 \\ 3 & -7 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -80 & 2 \\ -1 & -9 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -74 \\ 4 & 0 & 9 \\ -1 & 1{,}5 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -3 & 2 & 75 \\ 4 & 0 & -9 \\ -1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 101 & -99 & -7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & -5 & 1 \\ -101 & 98 & 7 \end{vmatrix}$ g) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ -1 & 14 & -13 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0,(3) & 0 \\ 2 & -14 & 13 \end{vmatrix}$

2.3. Aniqlovchilarni ko‘paytirish qoidasidan foydalanib, berilgan $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ va $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$ aniqlovchilarni bir-biriga mumkin bo‘lgan barcha usullarda ko‘paytiring, $\Delta_1\Delta_2 = 52$ ekanligini tekshirib ko‘ring.

3-§ Matritsalar va ular ustida amallar

1. Matritsa haqida tushuncha

a_{ik} haqiqiy sonlar n ta satr va m ta ustunda joylashgan quyidagi to‘g‘ri to‘rtburchak

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ik})$$

shaklidagi jadvalga n x m o‘lchamli **matritsa** deyiladi.

a_{ik} haqiqiy sonlar matritsa elementlari deb ataladi.

1 x m o‘lchamli matritsaga **satr matritsa**, n x 1 o‘lchamli matritsaga **ustun matritsa** deyiladi. **Nol matritsa** deb, har bir elementi nolga teng bo‘lgan matritsaga aytiladi.

n x m o‘lchamli $A = (a_{ik})$ va $B = (b_{ik})$ matritsalar berilgan bo‘lsin. Agar matritsalarning barcha mos elementlari o‘zaro teng bo‘lsa, matritsalar o‘zaro teng deyiladi va $A = B$ ko‘rinishda yoziladi.

2. Matritsalar ustida amallar.

O‘lchamlari aynan teng A va B matritsalarni qo‘shganda, ularning mos elementlari qo‘shiladi: $A + B = (a_{ik}) + (b_{ik}) = (a_{ik} + b_{ik})$.

Haqiqiy son matritsaga ko‘paytirilganda, matritsaning har bir elementi shu songa ko‘paytiriladi: $k\,(a_{ik}) = (k\,a_{ik})$.

Misol. Amallarni bajaring:

$$2\begin{pmatrix}3 & 4\\ 7 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}3 & 4\\ 7 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 5\\ -4 & -7\\ 3 & -3\end{pmatrix}$$

Matritsalarni qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari quyidagi xossalarga bo‘ysinadi: 1) A + B = B + A; 2) A + (B + C) = (A + B) + C; 3) k(A + B) = kA + kB; 4) k(nA) = (kn)A ; 5) (k + n)A = kA + nA.

Agar A matritsaning ustunlari soni B matritsaning satrlari soniga teng bo‘lsa, A va B matritsalar **o‘zaro zanjirlangan matritsalar** deyiladi. O‘zaro zanjirlangan matritsalarni ko‘paytirish mumkin.

n x m o‘lchamli A = (a_{ik}) matritsani m x p o‘lchamli B = (b_{ik}) matritsaga ko‘paytmasi n x p o‘lchamli C = (c_{ik}) matritsaga teng bo‘lib, uning c_{ik} elementlari quyidagicha aniqlanadi

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\ ,$$

ya’ni c_{ik} element A matritsa i-satri elementlarining B matritsa k-ustuni mos elementlariga ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng.

Masalan:

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}\end{pmatrix}$$

Matritsalarni ko‘paytirish quyidagi xossalarga bo‘ysinadi:

1. (kA)B = k(AB); 2. (A + B)C = AC + BC;
3. A(B + C) = AB + AC; 4. A(BC) = (AB)C.

Matritsalarning ko‘paytmasi ko‘paytuvchi matritsalar nolmas bo‘lishiga qaramasdan, nol matritsani berishi ham mumkin.

A va B matritsalarning ko‘paytmasi har doim o‘rin almashtirish qonuniga bo‘ysinavermaydi, ya’ni umuman olganda AB ≠ BA. AB = BA tenglikni qanoatlantiruvchi A va B matritsalarga **o‘rin almashinuvchi** matritsalar deyiladi.

Berilgan n x m o‘lchamli A matritsaning har bir satri mos ustunlari bilan almashtirilsa, hosil bo‘lgan m x n o‘lchamli matritsaga A matritsaning **transponirlangan matritsa**si deyiladi va A^T ko‘rinishda belgilanadi.

Matritsalar ko‘paytmasi transponirlangani uchun quyidagi formula o‘rinli: $(AB)^T = B^T A^T$.

Satrlari soni n ustunlari soni m ga teng bo‘lgan matritsaga n–tartibli **kvadratik matritsa** deyiladi. Kvadratik matritsaning quyidagi xususiy ko‘rinishlari bir-biridan farqlaniladi:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – **yuqori uchburchakli matritsa;**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – **quyi uchburchakli matritsa;**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – **diagonal matritsa;**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$ - **birlik matritsa.**

Matritsalar o‘zlarining quyidagi sonli xarakteristikalari bo‘yicha taqqoslanadi: 1) kvadratik matritsa determinanti; 2) normasi; 3) rangi.

3. Kvadrat matritsa determinanti. Matritsa normasi

Berilgan n - tartibli $A = (a_{ik})$ **kvadratik matritsaning determinanti yo**ki **aniqlovchisi** deb, n – tartibli $|a_{ik}|$ determinantga aytiladi va det (A) ko‘rinishda yoziladi.

Kvadrat matritsaning determinanti yoki aniqlovchisi uning asosiy sonli xarakteristikasi hisoblanadi. Yuqori, quyi uchburchakli va diagonal matritsalarning determinanti bosh diagonal elementlarining ko‘paytmasiga teng bo‘lsa, birlik matritsaning determinanti birga teng.

Ikki teng o‘lchovli kvadrat matritsalar ko‘paytmasining determinanti alohida matritsalar determinantlari ko‘paytmasiga teng: det(AB) = det(A) det(B).

Berilgan n x m o‘lchamli $A = (a_{ik})$ **matritsaning normasi** deb, unga mos qo‘yiluvchi quyidagi nomanfiy

$$N=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}a_{ik}^{2}}\quad \text{songa aytiladi.}$$

Masalan, $A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 4 & -9\\ 8 & 1\end{pmatrix}$ matritsaning normasi

$$N=\sqrt{3^2+(-5)^2+4^2+(-9)^2+8^2+1^2}=14.$$

4. Matritsa rangi va uni aniqlash usullari

n x m o‘lchamli A = ($a_{iк}$) matritsa berilgan bo‘lib, p matritsaning satrlari soni n va ustunlari soni m larning kichigidan katta bo‘lmagan son bo‘lsin. Matritsaning ixtiyoriy p ta satrini va ixtiyoriy p ta ustunini o‘chiramiz. O‘chirilgan elementlar p- tartibli kvadratik matritsani tashkil etadi va unga o‘z navbatida p-tartibli determinant yoki minorni mos qo‘yish mumkin.

A **matritsaning rangi** deb, noldan farqli matritsa osti minorlarining eng katta tartibiga aytiladi va rang(A) ko‘rinishida ifodalanadi.

1-masala. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\\ 3 & -7\end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang?

Berilgan matritsa 3 x 2 o‘lchamli bo‘lgani uchun satrlari va ustun-lari sonini taqqoslaymiz va kichigi 2 ni tanlaymiz. Matritsadan ikkinchi tartibli minorlar ajratamiz va ularning kattaligini hisoblaymiz. Jarayonni noldan farqli ikkinchi-tartibli minor ajralmaguncha davom etamiz:

$$M_1=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix}=0,\quad M_2=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -7\end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

Berilgan matritsadan noldan farqli eng yuqori ikkinchi tartibli minor ajraldi. Demak, ta’rifga binoan, A matritsa rangi 2 ga teng.

2-masala. $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -2 & 4 & -6\end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang?

B matritsadan ajralishi mumkin bo‘lgan eng yuqori - ikkinchi tart-ibli har qanday minor nolga teng:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Demak, matritsa rangi ikkiga teng bo‘la olmaydi. V matritsa nolmas matritsa bo‘lgani uchun uning rangi 1 ga teng.

3-masala. $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ matritsa rangini aniqlang?

C matritsa uchinchi tartibli kvadratik matritsa. Undan yagona eng yuqori 3-tartibli M_1 minor ajraladi. M_1 minor kattaligini hisoblaymiz:

$M_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0.$ $M_1 = 0$ bo‘lgani uchun, C matritsa rangi 3 ga teng bo‘la olmaydi. $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ bo‘lgani uchun, rang(C) = 2.

Matritsa rangi uning ustida quyidagi **elementar almashtirishlar** bajarganda o‘zgarmaydi.

1. Matritsa biror satri (ustuni) har bir elementini biror noldan farqli songa ko‘paytirganda;
2. Matritsa satrlari (ustunlari) o‘rinlari almashtirilganda;
3. Matritsa biror satri (ustuni) elementlariga uning boshqa parallel satri (ustuni) mos elementlarini biror songa ko‘paytirib, so‘ngra qo‘shganda;
4. Matritsa transponirlanganda.

Matritsa rangini aniqlashning ta’rif asosida biz yuqorida masalalarda ko‘rgan **«minorlar ajratib hisoblash»** usuli va nollar yig‘ib hisoblashga asoslangan **«Gauss algoritmi»** usullari mavjud.

Matritsa rangi «Gauss algoritmi» yoki nollar yig‘ish usuli asosida quyidagicha aniqlanadi: dastlabki ko‘rinishdagi matritsa yuqorida sanab o‘tilgan elementar almashtirishlar yordamida «**trapetsiyasimon matritsa**» ko‘rinishiga keltiriladi. Trapetsiyasimon matritsa deb, bosh diagonaldan yuqorida yoki quyida joylashgan har bir elementi nolga teng bo‘lgan matritsaga aytiladi. Trapetsiyasimon matritsaning rangi yoki xuddi shuning o‘zi dastlabki matritsaning rangi trapetsiyasimon matritsaning noldan farqli bosh diagonal elementlari soniga teng.

Masala. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 0 & 7\\ 2 & 3 & -1 & 4\end{pmatrix}$ matritsaning rangini nollar yig‘ish usulida aniqlang?

Berilgan dastlabki matritsa ustida quyidagicha elementar almashtirishlar bajaramiz va uning ko‘rinishini trapetsiyasimon ko‘rinishga keltiramiz:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 0 & 7\\ 2 & 3 & -1 & 4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 7 & -3 & -2\\ 0 & 7 & -3 & -2\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & 7 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Trapetsiyasimon matritsa bosh diagonal elementlaridan ikkitasi noldan farqli bo‘lgani uchun uning rangi va shu bilan birga berilgan matritsa rangi ikkiga teng.

Nazorat savollari

1. Matritsa deb nimaga aytiladi?
2. Satr matritsa, ustun matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
3. Nol matritsa deb-chi?
4. Qanday matritsalarga o‘zaro teng matritsalar deyiladi?
5. Aynan bir xil o‘lchamli matritsalar qanday qo‘shiladi?
6. Sonni matritsaga ko‘paytirish amali qanday bajariladi?
7. Matritsalarni qo‘shish va matritsani songa ko‘paytirish amallari bo‘ysinadigan xossalarni sanab o‘ting?
8. Matritsa satrlarini mos ustunlari bilan almashtirish amali qanday nomlanadi?
9. O‘zaro zanjirlangan matritsalar qanday ko‘paytiriladi?
10. Matritsalarni ko‘paytirish amali qanday xossalarga bo‘ysinadi?
11. Matritsalarni ko‘paytirish amali o‘rin almashtirish qonuniga bo‘ysinadimi?
12. n-tartibli kvadratik matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
13. Kvadrat matritsaning qanday xususiy ko‘rinishlarini bilasiz?
14. Matritsalar taqqoslanishi mumkin bo‘lgan qanday sonli xarakteristikalarni bilasiz?
15. n-tartibli kvadrat matritsaning determinanti yoki aniqlovchisi deb nimaga aytiladi?
16. Matritsaning normasi deb-chi?
17. Matritsaning rangi deb nimaga aytiladi?

18. Matritsa rangini hisoblashning qanday usullarini bilasiz?

19. Matritsa ustida qanday amallarni bajarganda uning rangi o‘zgarmaydi?

20. Matritsa rangini nollar yig‘ib aniqlash usuli nimadan iborat?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Matritsa.
2. Nol matritsa.
3. Kvadrat matritsa.
4. Yuqori yoki quyi uchburchakli matritsa.
5. Diagonal matritsa.
6. Birlik matritsa.
7. Trapetsiyasimon matritsa.
8. Transponirlangan matritsa.
9. Kvadratik matritsa determinanti yoki aniqlovchisi.
10. Matritsa normasi.
11. Matritsa osti minori.
12. Matritsa rangi.
13. Gauss algoritmi.

Mustaqil ishlash uchun misollar

3.1. Matritsalar ustida amallarni bajaring:

a) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $-3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}^2$

f) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 4 \end{pmatrix}^2$ g) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

3.2. Quyida berilgan matritsalarning ranglarini «minorlar ajratish» usulida aniqlang:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

3.3. Quyidagi matritsalarning ranglarini «Gauss algoritmi» usuli yordamida toping:

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

3.4. x va y larning qanday qiymatlarida quyidagi

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 & -2 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

matritsa rangi 2 ga teng bo‘ladi?

3.5. λ parametrning qanday qiymatlarida $\begin{pmatrix} 5-\lambda & 7 \\ 2 & \log_2 \lambda \end{pmatrix}$ va $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ \sqrt{\lambda} & \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}$ matritsalar o‘zaro teng, $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ \lambda^2 - 16 & \frac{5}{\lambda + 4} \end{pmatrix}$ matritsa diagonal ko‘rinishda bo‘lishini toping.

4-§. Teskari matritsa va uni qurish

1. Teskari matritsa haqida tushuncha

n – tartibli kvadratik $A = (a_{ik})$ matritsa berilgan bo‘lsin. Agar A matritsa determinanti noldan farq qilib, uning rangi tartibi n ga teng bo‘lsa, matritsaga maxsusmas matritsa deyiladi. Agarda det(A) = 0 bo‘lib, rangi n dan kichik bo‘lsa, A matritsaga maxsus matritsa deyiladi.

Teorema. Ikki teng tartibli kvadrat matritsalarning ko‘paytmasi, ko‘paytuvchi matritsalarning har biri maxsusmas bo‘lgandagina, maxsusmas matritsadan iborat bo‘ladi.

To‘g‘ridan-to‘g‘ri ko‘paytirish yo‘li bilan n - tartibli birlik E va n – tartibli har qanday A matritsalarning o‘zaro o‘rin almashinuvchi ekanligini, ko‘paytma A matritsani berishini, ya’ni $A\cdot E = E\cdot A = A$ tengliklar o‘rinli bo‘lishini misollarda tekshirib ko‘rish qiyin emas.

Berilgan A kvadratik matritsaning teskari matritsasi deb, tartibi A matritsaning tartibiga teng va A matritsaga chapdan yoki o‘ngdan ko‘paytmasi birlik E matritsaga teng bo‘lgan A^{-1} matritsaga aytiladi: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$.

Yuqoridagi teoremaga asosan E birlik matritsaning maxsusmas ekanligini e’tiborga olsak, maxsus matritsaning teskari matritsaga ega emasligini xulosa qilamiz. Har qanday maxsusmas kvadrat matritsaning yagona teskari matritsasi mavjudligi quyidagi teoremadan kelib chiqadi.

Teorema. Teskari matritsa mavjud bo‘lishi uchun $\det(A) \neq 0$ bo‘lib, A matritsaning maxsusmas bo‘lishi zarur va yetarli.

2. Teskari matritsa qurish algoritmlari

Berilgan maxsusmas kvadrat matritsaning teskari matritsasini qurishning «klassik» va Jordan usullari mavjud.

Berilgan $A = (a_{i\kappa})$ kvadratik matritsa har bir elementini o‘zining ad’yunkti bilan almashtirib, so‘ngra hosil bo‘lgan matritsani transponirlasak, quyidagi A matritsa elementlari mos ad’yunktlari matritsasining transponirlangan matritsasi $A^{\vee}$ ni hosil qilamiz:

$$A^{\vee} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$A^{\vee}$ matritsaga A matritsaning qo‘shma matritsasi deyiladi.

n- tartibli determinantning 6 va 7 xossalariga asosan:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix}$$

Tenglikni ixcham shaklda $A \cdot A^{\vee}$ = det $A \cdot E$ ko‘rinishda yozish mumkin. Tenglamaning ikkala tomonini noldan farqli det A ga bo‘lsak,

$$A \frac{1}{\det A} A^{\vee} = E.$$

Ikkinchi tomondan teskari matritsa ta’rifiga binoan $A \cdot A^{-1} = E$. Tenglamalarni solishtirib, A kvadratik maxsusmas matritsaning teskari matritsasi A^{-1} uchun quyidagi formulani olamiz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\vee}$$

Oxirgi formula A maxsusmas matritsaning teskarisini qurish klassik usul formulasi deyiladi. Umuman olganda, klassik usulda teskari matritsa qurish jarayoni quyidagi ketma-ket bajariladigan qadamlarni o‘z ichiga oladi:

1. Berilgan A kvadrat matritsa determinanti kattaligi hisoblanadi. Agar $\det A \neq 0$ bo‘lsa, keyingi qadamga o‘tiladi. Agarda $\det A = 0$ bo‘lsa, A matritsa maxsus va teskari matritsa mavjud emas;

2. $A = (a_{i\kappa})$ matritsa elementlarining mos ad’yunklari hisoblanadi va tartib saqlangan holda, matritsa elementlari mos ad’yunktlari matritsasi $(A_{i\kappa})$ tuziladi;

3. $(A_{i\kappa})$ matritsa transponirlanadi va A matritsa elementlari mos ad’yunklari matritsasining transponirlangan matritsasi yoki shuning o‘zi qo‘shma $A^{\vee} = (A_{\kappa i})$ matritsasi tuziladi;

4. $A^{\vee} = (A_{\kappa i})$ matritsa har bir elementi detA ga bo‘linadi va A^{-1} teskari matritsa quriladi.

Masala. $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ maxsusmas matritsaning teskari matritsasini klassik usulda quring.

Klassik usulda ikkinchi tartibli maxsusmas matritsa teskarisi

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

formula asosida quriladi. Formulani qo‘llab,

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ -0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

natijani olamiz. Teskari matritsa to‘g‘ri qurilganini ta’rif asosida tekshirib ko‘ramiz:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,2 & 0,4\\ -0,1 & 0,3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$$

Demak, berilgan A matritsaning teskarisi $A^{-1}=\begin{pmatrix}0,2 & 0,4\\ -0,1 & 0,3\end{pmatrix}$.

Berilgan A kvadratik matritsa teskarisi A^{-1} Jordan usuli asosida quyidagicha quriladi: A matritsaga o‘ngdan tartibi uning tartibiga teng birlik E matritsa qo‘shiladi va kengaytirilgan (A | E) matritsa tuziladi. Parallel ravishda kengaytirilgan matritsaning chap va o‘ng qismlari satrlari ustida elementar almashtirishlar bajarilib, chap qism birlik matritsa ko‘rinishiga keltiriladi. Kengaytirilgan matritsaning chap qismi birlik E matritsa ko‘rinishiga keltirilganda uning o‘ng qismida teskari A^{-1} matritsa hosil bo‘ladi. Teskari matritsa qurish Jordan usuli algoritmi quyidagi sxema shaklida ifodalanishi mumkin: (A | E) ~ (E | A^{-1}).

Masala. $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 4 & 4\end{pmatrix}$ matritsaning teskarisini Jordan usuli yordamida quramiz.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}5 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}5 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4}\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}4 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4}\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4}\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{16}\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{3}{4}\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{16}\\ 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{9}{16}\\ -1 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} & \frac{13}{16}\end{array}\right).$$

Oxirgi ko‘rinishdagi kengaytirilgan matritsa o‘ng qismida teskari matritsa shakli hosil bo‘ldi. Teskari matritsa to‘g‘ri qurilganini ta’rif asosida tekshirib ko‘rish mumkin.

Teskari matritsa o‘zining quyidagi xossalariga ega:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$; 2) $(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$; 3) $(AV)^{-1} = V^{-1}A^{-1}$.

O‘z - o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Maxsusmas matritsa deb qanday kvadratik matritsaga aytiladi?
2. Maxsus matritsa deb-chi?
3. Teng tartibli qanday kvadratik matritsalarni ko‘paytirganda ko‘paytma maxsusmas matritsadan iborat bo‘ladi?
4. Maxsusmas matritsaning teskari matritsasi deb qanday matritsaga aytiladi?
5. Nima uchun maxsus matritsaning teskarisi mavjud emas?
6. Kvadratik matritsaning teskari matritsasini qurishning qanday usullarini bilasiz?
7. Teskari matritsa qurishning klassik usuli qanday jarayonlardan iborat? Formulasini yozing.
8. Uchinchi tartibli maxsusmas matritsa teskarisini klassik usulda qurish kengaytirilgan formulasini yozing?
9. Teskari matritsa qurish Jordan usuli algoritmi nimalardan iborat?
10. Teskari matritsaning qanday xossalarini bilasiz?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Maxsusmas kvadratik matritsa.
2. Maxsus kvadratik matritsa.
3. Teskari matritsa.
4. Matritsa elementlari mos ad’yunktlari matritsasining transponirlangan matritsasi yoki qo‘shma matritsa.
5. Teskari matritsa qurish klassik usuli jarayonlari.
6. Teskari matritsa qurish Jordan usuli algoritmi.

Mustaqil ishlash uchun misollar

4.1. Quyidagi matritsalardan maxsuslarini ajrating:

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & -\mathrm{tgx} \\ -\mathrm{ctgx} & 0{,}5 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 10 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Quyida berilgan matritsalarning teskari matritsalarini «klassik usul»da toping:

a) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$$d)\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix} \qquad e)\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

Quyidagi matritsalarning teskari matritsalarini «Jordano usuli»da aniqlang:

$$a)\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix} \qquad c)\begin{pmatrix}1 & ctg\alpha\\ tg\alpha & 2\end{pmatrix}$$

$$d)\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ -2 & 0 & -1\\ 4 & 4 & 1\end{pmatrix} \qquad e)\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & -3\\ 4 & 3 & -2\end{pmatrix}$$

5-§. Chiziqli tenglamalar sistemasi

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi haqida tushuncha. Sistemaning yechimi

Iqtisodiy masalalarning aksariyati bir necha noma’lumli (aytaylik m ta) chekli sondagi (aytaylik n ta) chiziqli tenglamalarni o‘z ichiga olgan va ushbu tenglamalarning umumiy yechimini topish masalasi qo‘yilgan quyidagi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

chiziqli tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Bu yerda, a_{ik} – haqiqiy sonlar bo‘lib, sistemaning koeffitsientlari; b_i - haqiqiy sonlar esa uning ozod hadlari deyiladi. Sistemaning (1) ko‘rinishdagi shakliga m ta noma’lumli n ta **chiziqli tenglamalar normal sistemasi** deyiladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$ **- koeffitsentlar yoki asosiy matritsa,**

$$(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$ – matritsaga esa

kengaytirilgan matritsa deyiladi.

(1) **sistemaning yechimi yoki yechimlari to‘plami** deb, uning har bir tenglamasini sonli ayniyatga aylantiradigan mumkin bo‘lgan barcha m ta haqiqiy sonlarning tartiblangan $(x_1; x_2; \dots ; x_m)$ tizimlari to‘plamiga aytiladi.

Sistemani yechish deganda – uning barcha yechimlarini topish yoki yechimga ega emasligini ko‘rsatish tushuniladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi yechimga ega bo‘lsa - **birgalikda**, yagona yechimga ega bo‘lsa - **aniq**, cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lsa - **aniqmas** va umuman yechimi mavjud bo‘lmasa – **birgalikda bo‘lmagan** sistema deyiladi.

Tenglamalar sistemasining biror-bir tenglamasi zid (qarama-qarshi) tenglama bo‘lsa, sistemaning o‘zi ham zid, ya’ni birgalikda bo‘lmagan sistemani tashkil etadi. Aynan teng yechimlar to‘plamiga ega tenglamalar sistemalariga esa **teng kuchli (ekvivalent) sistemalar** deb ataladi.

2. Chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi mavjudligi va yagonaligi haqida teoremalar.

(1) umumiy ko‘rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikdalik va aniqlik masalasini quyidagi teorema ochib beradi.

Kroneker-Kapelli teoremasi. Chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘lishi uchun uning asosiy matritsasi rangining kengaytirilgan matritsasi rangiga teng bo‘lishi zarur va yetarli.

Agar asosiy A matritsa rangi kengaytirilgan (A | B) matritsa rangiga teng bo‘lib, teng ranglar o‘z navbatida noma’lumlar soni m ga teng bo‘lsa, ya’ni rang(A) = rang(A | B) = m, sistema aniq bo‘ladi.

Agar A matritsa rangi kengaytirilgan (A | B) matritsa rangiga teng bo‘lib, teng ranglar noma’lumlar soni m dan kichik bo‘lsa, ya’ni rang(A) = rang(A | B) < m, sistema aniqmas bo‘ladi.

Agarda asosiy matritsa rangi kengaytirilgan matritsa rangidan kichik bo‘lsa, sistema birgalikda bo‘lmaydi.

n ta noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi normal ko‘rinishda berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2)$$

(2) sistema uchun uning aniqlik sharti muhimdir.

Kramer teoremasi. n ta noma'lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi aniq bo'lishi uchun uning asosiy matritsasi determinantining noldan farqli bo'lishi zarur va yetarli. Yagona yechim $\left(\frac{\det A_1}{\det A}; \frac{\det A_2}{\det A};\right.$ $\left.\ldots; \frac{\det A_j}{\det A}; \ldots; \frac{\det A_n}{\det A}\right)$ tartiblangan tizimdan iborat bo'ladi, bu yerda A_j asosiy A matritsadan j-ustunning ozod hadlar ustuni bilan almashtirilgani bilan farq qiluvchi matritsa. Agarda detA = 0 bo'lsa, (2) sistema yoki aniqmas yoki birgalikda bo'lmaydi.

Masala. Quyida berilgan chiziqli tenglamalar sistemalarini birgalikda va aniqligini tekshiring. Birgalikdagi sistemalarni Kramer formulalari yordamida yeching:

$$1)\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -5 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Berilgan sistemalar uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi bo'lgani uchun, dastlab, Kramer teoremasini tatbiq etamiz:

1) $\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$ bo'lgani uchun - sistema aniq.

Yagona yechim Kramer formulalari yordamida topiladi:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{27} = -\frac{81}{27} = -3, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 7 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{27} = \frac{54}{27} = 2,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 7 \\ 4 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{27} = \frac{27}{27} = 1.$$ Sistema yechimi: (-3; 2; 1).

2) $\det A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$. Kramer teoremasiga ko‘ra, sistema yoki aniqmas yoki birgalikdamas. Kroneker-Kapelli teoremasiga murojaat etib, sistema kengaytirilgan matritsasi rangini Gauss algoritmi yordamida aniqlaymiz:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 4 & 5 & -3 & | & -5 \\ 1 & 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 0 & 7 & -5 & | & 9 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & | & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 0 & 7 & -5 & | & 9 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

rang(A) = 2 = 2 = rang(A | B) < 3 (noma’lumlar soni) shartlar bajarilgani uchun sistema aniqmas va quyidagi sistemaga teng kuchli:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = x_3 + 7 \\ 4x_1 + 5x_2 = 3x_3 - 5 \\ x_3 \in R. \end{cases}$$

Oxirgi sistemani Kramer formulasi yordamida yechish mumkin:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_3 + 7 & 1 \\ 3x_3 - 5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = -\frac{x_3 + 20}{7}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & x_3 + 7 \\ 4 & 3x_3 - 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{5x_3 + 9}{7}.$$

Sistema yechimi: $\left(-\frac{x_3+20}{7}; \frac{5x_3+9}{7};\ x_3\right),\ x_3 \in R.$

3) detA = 0 bo‘lgani uchun sistema yoki aniqmas yoki birgalikdamas. Sistema kengaytirilgan matritsasi rangini nollar yig‘ib, hisoblaymiz:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 4 & 5 & -3 & | & -4 \\ 1 & 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 0 & 7 & -5 & | & 10 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & | & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 0 & 7 & -5 & | & 10 \\ 0 & 0 & 0 & | & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

rang(A) = 2 < 3 = rang(A | B) munosabat o‘rinli bo‘lgani uchun sistema birgalikdamas.

3. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining nolmas yechimlari mavjudlik shartlari.

Agar (1) sistema tenglamalari barcha ozod hadlari nolga teng bo‘lsa, chiziqli tenglamalar sistemasi **bir jinsli sistema** deyiladi. Agarda tenglamalar ozod hadlaridan hech bo‘lmaganda bittasi noldan farqli bo‘lsa, sistema **bir jinsli bo‘lmagan sistema** deb ataladi.

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi doimo birgalikda, chunki rang(A) = rang(A | O) tenglik har doim o‘rinli. Bundan tashqari, bir jinsli sistema har doim m ta nollar tizimi - **nolli** yoki **trivial** (0; 0; …; 0) yechimga egaligi bilan xarakterlanadi.

Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi uchun uning nolmas yechimlarga egalik shartini bilish muhimdir. Javob Kroneker–Kapelli teoremasidan kelib chiqadi.

Teorema. Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi nol yechimdan tashqari nolmas yechimlarga ham ega bo‘lishi uchun sistema asosiy matritsasi rangining noma’lumlar sonidan kichik bo‘lishi zarur va yetarli.

Teoremadan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin.

1-xulosa. Agar bir jinsli sistemaning noma’lumlari soni uning tenglamalari sonidan katta bo‘lsa, sistema nol yechimdan tashqari nolmas yechimlarga ham ega.

2-xulosa. n ta noma’lumli n ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi nol yechimdan tashqari nolmas yechimlarga ham ega bo‘lishi uchun sistema asosiy matritsasining determinanti nolga teng bo‘lishi zarur va yetarli.

O‘z- o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi deb nimaga aytiladi?
2. Sistemaning yechimi deb-chi?
3. Qanday sistemalarga birgalikda, aniq, aniqmas va birgalikda bo‘lmagan sistemalar deyiladi?
4. Chiziqli tenglamalar sistemasi yechimi mavjudlik va yagonalik yetarli shartlari nimalardan iborat?
5. n ta noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi uchun Kramer teoremasi nimani aniqlab beradi?
6. Aniqmas chiziqli tenglamalar sistemasini Kramer formulalaridan foydalanib yechish mumkinmi?
7. Bir jinsli sistema deb qanday sistemaga aytiladi?
8. Nima uchun chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi doimo birga-

likda va ajralib turuvchi xususiyati nimadan iborat?

9. Bir jinsli sistemaning nol yechimdan tashqari nolmas yechimlarga ham egalik yetarli shartlaridan qaysilarini bilasiz?

Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi.
2. Sistema yechimi.
3. Birgalikdagi sistema.
4. Aniq sistema.
5. Aniqmas sistema.
6. Birgalikda bo'lmagan yoki zid sistema.
7. Sistemaning asosiy matritsasi.
8. Sistemaning kengaytirilgan matritsasi.
9. Kramer formulalari.
10. Bir jinsli sistema.
11. Bir jinsli bo'lmagan sistema.
12. Bir jinsli sistemaning nolmas yechimlari.

Mustaqil ishlash uchun misollar

Quyida berilgan chiziqli tenglamalar sistemalarining birgalikdaligi va aniqligini tekshiring, birgalikdagi sistemalarni Kramer formulalari yordamida va grafik usulda yeching:

a) $\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 7x + 2y = -8 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3 \\ -6x_1 + 7x_2 = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 = -12 \\ 4x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -5 \\ 4x_1 - 6x_2 = -9 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 = -1 \\ 2x_1 + 8x_2 = -2 \end{cases}$

Quyida berilgan sistemalar a parametrning qanday qiymatlarida yechimga ega emas (birgalikda emas):

a) $\begin{cases} x + ay = 3 \\ x - 2ay = a + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 - ax_2 = a + 2 \\ (a+1)x_1 - 6x_2 = 4 - a \end{cases}$ c) $\begin{cases} ax_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + ax_2 = 2 - a \end{cases}$

Quyida berilgan sistemalar a parametrning qanday qiymatlarida cheksiz ko'p yechimga ega (aniqmas):

a) $\begin{cases} x + ay = -3 \\ (a-5)x - 3ay = 4a + 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + ax_2 = 2 - a \end{cases}$

$$c)\ \begin{cases}(a-1)x_1 + ax_2 = 10-2a\\ \frac{a}{2}x_1 + x_2 = a-3\end{cases}$$

Quyidagi sistemalarning birgalikdaligi va aniqligini tekshiring, birgalikdagi sistemalarni Kramer formulalari yordamida yeching:

$$a)\ \begin{cases}3x-2y+4z=5\\ 2x+y-6z=-3\\ x-4y+z=-2\end{cases}\qquad b)\ \begin{cases}2x_1+x_2+x_3=1\\ 4x_1-3x_2-x_3=1\\ 3x_1-5x_2-2x_3=-1\end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases}x_1+3x_2-2x_3=3\\ 5x_1+x_3=-4\\ 6x_2+4x_3=1\end{cases}\qquad d)\ \begin{cases}4x_1+9x_2+7x_3=-3\\ x_1+x_2+x_3=0\\ 2x_1-3x_2-x_3=2\end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases}x_1-2x_2-x_3=6\\ 2x_1+x_2-x_3=-1\\ -3x_1-4x_2+5x_3=8\end{cases}\qquad f)\ \begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0\\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4=1\\ 3x_1+4x_2-x_3+2x_4=2\\ x_1-x_2-x_3=3\end{cases}$$

$$g)\ \begin{cases}x_1-x_2=4\\ 2x_1+3x_2=-1\\ 8x_1+7x_2=6\end{cases}\qquad h)\ \begin{cases}5x_1+3x_2=-1\\ 7x_1+4x_2=-2\\ 3x_1+2x_2=0\end{cases}$$

6-§. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullarb

1. Chiziqli tenglamalar sistemasini teskari matritsa usulida yechish

n ta noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$

berilgan bo‘lsin. Matritsalarni ko‘paytirish amali va matritsalar tengligi ta’rifidan foydalanib, sistemani

$$A\cdot X = B$$

matritsali tenglama ko‘rinishida yozish mumkin. Bu yerda, $A = (a_{i\kappa})$ -

asosiy matritsa, B – ozod hadlar ustun matritsasi va X - noma’lumlar ustun matritsasi.

Sistemaning asosiy matritsasi A maxsusmas bo‘lib, A^{-1} uning teskari matritsasi bo‘lsin. $A\cdot X = B$ tenglama ikkala qismini chapdan teskari A^{-1} matritsaga ko‘paytiramiz va

$$A^{-1}\cdot A = E, \quad E\cdot X = X$$

tengliklarni e’tiborga olsak,

$$X = A^{-1}\cdot B \qquad (1)$$

tenglamani olamiz. (1) tenglama **tenglamalar sistemasi yechimini matritsa shakldа yozish yoki sistemani teskari matritsa usulida yechish formulasi** deyiladi. Shunday qilib, sistemani teskari matritsa usulida yechish uchun A kvadrat matritsa teskarisi A^{-1} quriladi va u chapdan ozod hadlar matritsasi B ga ko‘paytiriladi.

Masala. Quyida berilgan chiziqli tenglamalar sistemalarini teskari matritsa usulida yeching:

$$1)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 5 \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -6 \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 = -8 \end{cases}$$

$$1)\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Sistema yechimi: (9; -5).

2) $\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ qism matritsa rangi sistema rangiga teng bo‘lgani uchun sistema dastlabki ko‘rinishini unga teng kuchli quyidagi shakli bilan almashtiramiz:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_3 = -2x_2 + 2 \\ 3x_1 + x_3 = -6x_2 + 5 \end{cases}$$

Yuqoridagi sistemani matritsalar usulini qo‘llab yechish mumkin:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2x_2 + 2 \\ -6x_2 + 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 + \dfrac{22}{13} \\ -\dfrac{1}{13} \end{pmatrix}.$$

Sistema aniqmas bo‘lib, umumiy yechim ko‘rinishlaridan biri

$(-2x_2 + \frac{22}{13}; x_2; -\frac{1}{13})$ shaklda yozilishi mumkin. Bu yerda, $x_2 \in R$.

3) Sistema asosiy matritsasi teskarisini Jordan usulida aniqlaymiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{16} & \frac{3}{8} & \frac{7}{16} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{16} & \frac{7}{8} & \frac{11}{16} \end{array}\right)$$

Sistema yagona yechimini teskari matritsa usuli formulasini qo‘l-lab, quramiz:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{16} & \frac{3}{8} & \frac{7}{16} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{8} & \frac{11}{16} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Sistema yechimi: (-2; -1; 2).

Har bir usul kabi teskari matritsa usuli o‘zining afzallik va noqulay-lik jihatlarga ega. Bir nechta asosiy matritsalari aynan teng va biri-biridan faqat ozod hadlari ustuni bilan farq qiluvchi sistemalarni teskari matritsa usulida yechgan maqsadga muvofiq. Chunki, bir marta qurilgan teskari matritsa mos ozod hadlari ustuniga ko‘paytiriladi va natija oli-naveradi. Usulning noqulay jihati teskari matritsa qurish jarayoni bilan bog‘liq bo‘lib, ayniqsa, detA nolga yaqin bo‘lganda ko‘p xonali sonlar ustida hisob-kitoblarni talab etadi.

2. Sistemaning umumiy yechimi. Gauss usuli. Gauss usulining Gauss-Jordan modifikatsiyasi

m ta noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin.

Agar sistema tenglamalarining birida x_k $(k = \{1, 2, \ldots, m\})$ noma’lum +1 koeffitsient bilan qatnashib, qolgan barcha tenglamalarida x_k noma’lumli hadlar mavjud bo‘lmasa yoki yo‘qotilgan bo‘lsa, siste-ma x_k noma’lumga nisbatan ajratilgan yoki x_k noma’lum sistemaning ajratilgan noma’lumi deyiladi. Ajratilgan noma’lum bazis noma’lum deb ham yuritiladi.

Sistemaning har bir tenglamasi ajratilgan yoki bazis noma’lumga ega ko‘rinishiga **noma’lumlari ajratilgan** yoki **bazisga keltirilgan sis-tema** deyiladi. Har qanday birgalikdagi sistema o‘zining ajratilgan yoki bazis noma’lumlari tizimi mavjudligi bilan xarakterlanadi. Noma’lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistemaning ajratilgan yoki bazis noma’lumlari tizimiga tegishli bo‘lmagan noma’lumlari ajratilmagan, ozod yoki erkli noma’lumlar deb ataladi. Masalan, quyidagi

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \qquad\qquad - x_5 = -1 \\ \quad - x_2 + x_3 \qquad 4x_5 = 7 \\ \quad + 5x_2 \qquad + x_4 - 3x_5 = 6 \end{cases}$$

noma’lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistemada x_1, x_3 va x_4 ajratilgan yoki bazis noma’lumlar bo‘lsa, x_2 va x_5 noma’lumlar esa ozod yoki erkli noma’lumlardir.

Agar noma’lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistemaning har bir noma’lumi uning ajratilgan yoki bazis noma’lumlari tizimiga tegishli bo‘lsa, sistema aniq, ya’ni yagona yechimga ega bo‘ladi. Agarda noma’lumlari ajratilgan sistema erkli noma’lumlarga ham ega bo‘lsa, aniqmas, ya’ni cheksiz ko‘p yechimlarga ega bo‘ladi.

Berilgan dastlabki shakldagi sistemaning **umumiy yechimi** deb, unga teng kuchli bo‘lgan noma’lumlari ajratilgan yoki biror-bir bazisga keltirilgan sistemaga aytiladi.

Sistemaning umumiy yechimini qurish usuliga esa **Gauss usuli** deyiladi. Sistemaning barcha yechimlarini topish uchun uning umumiy yechimini qurish yetarli. Berilgan sistemaning umumiy yechimini aniqlash uchun uning ustida quyidagi elementar almashtirishlar bajariladi:

1) sistema tenglamalari o‘rinlarini almashtirish mumkin;

2) sistema biror-bir tenglamasi ikkala qismini biror noldan farqli songa ko‘paytirish mumkin;

3) sistema biror-bir tenglamasiga uning boshqa tenglamasini songa ko‘paytirib, qo‘shish mumkin.

Agar sistemani almashtirish jarayonida

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_m = 0$$

nol yoki trivial tenglama hosil bo‘lsa, u o‘chiriladi. Agarda,

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_m = b \ (b \neq 0)$$

zid yoki qarama-qarshi tenglama hosil bo‘lsa, sistemaning o‘zi ham zid, ya’ni birgalikda emas.

Sistema umumiy yechimini qurish usuli – Gauss usulining bir necha modifikatsiyalari mavjud. Quyida **Gaussning klassik** yoki ixcham sxema usuli va **Jordan modifikatsiyalari** bilan tanishamiz.

Gaussning klassik yoki ixcham sxema usuli to‘g‘ri va teskari yurishlardan iborat. To‘g‘ri yurishda sistemaning asosiy matritsasi trapetsiyali yoki uchburchakli ko‘rinishga keltiriladi. Teskari yurishda uning noma’lumlari ketma-ket ravishda aniqlanadi va umumiy yechim quriladi.

Masala. 5 - mavzuda Kramer formulalari yordamida yechilgan (1) sistemani Gaussning klassik usulida yeching.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ \mathbf{x_1} + 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ +4x_2 + x_3 = 9 \\ +\frac{7}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3 = \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \\ +4x_2 + x_3 = 9 \\ -\frac{27}{8}x_3 = -\frac{27}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi mazmun-mohiyati quyidagidan iborat: dastlabki normal ko‘rinishda berilgan sistemaning kengaytirilgan (A | B) matritsasi quriladi. Yuqorida zikr etilgan sistemani teng kuchli sistemaga aylantiruvchi elementar almashtirishlardan foydalanib, kengaytirilgan matritsaning chap qismida yoki uning qism ostida birlik matritsa hosil qilinadi. Bunda birlik matritsadan o‘ngda yechimlar ustuni hosil bo‘ladi. Gauss-Jordan usulini quyidagicha sxematik ifodalash mumkin:

$$(A \mid B) \sim (E \mid X^*).$$

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish Gauss-Jordan usuli noma’lumlarni ketma-ket yo‘qotish Gauss strategiyasi va teskari matritsa qurish Jordan taktikasiga asoslanadi. Teskari matritsa oshkor shaklda qurilmaydi, balki o‘ng ustunda bir yo‘la teskari matritsaning ozod hadlar ustuniga ko‘paytmasi – yechimlar ustuni quriladi.

Masala. 5 – mavzuda Kramer formulalari yordamida yechilgan sistemalarni Gauss-Jordan usulida yeching.

$$1)\ \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 7 \\ 8 & 0 & 5 & -19 \\ 7 & 0 & 1 & -20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & -13 \\ -27 & 0 & 0 & 81 \\ 7 & 0 & 1 & -20 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 4 & 5 & -3 & | & -5 \\ 1 & 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 14 & 0 & 2 & | & -40 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & | & -13 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{|} & \cancel{0} \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix}$$

Sistema aniqmas bo‘lib, umumiy yechim ko‘rinishlaridan biri (x_1; $-5x_1 - 13$; $-7x_1 - 20$) shaklga ega. Bu yerda, x_1 erkli noma’lum va $x_1 \in R$.

$$3) \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 4 & 5 & -3 & | & -4 \\ 1 & 3 & -2 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & | & 7 \\ 14 & 0 & 2 & | & -39 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & | & -13 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 7 & 0 & 1 & | & -20 \end{pmatrix}$$

Sistemaning ikkinchi tenglamasi zid tenglama. Demak, sistemaning o‘zi ham zid, ya’ni birgalikda emas.

Nazorat savollari

1. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa shaklida yozish mumkinmi va qanday ?
2. Sistema yechimi matritsa ko‘rinishida qanday yoziladi?
3. Sistemani matritsa usulida yechish yoki teskari matritsa usulining afzallik va noqulaylik jihatlari nimalardan iborat?
4. Ajratilgan noma’lum deb qanday noma’lumga aytiladi?
5. Noma’lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistema deb qanday sistemaga aytiladi?
6. Birgalikdagi sistema nima bilan xarakterlanadi va erkli noma’lumlar deb nimaga aytiladi?
7. Sistemaning umumiy yechimi deb nimaga aytiladi?
8. Gauss usuli deb-chi?
9. Gauss usulining qanday modifikatsiyalarini bilasiz?
10. Sistema Gaussning klassik usulida qanday yechiladi?
11. Sistema ustida elementar almashtirishlar deganda nimani tushunasiz?

12. Sistema barcha yechimlarini topish o‘rniga uning umumiy yechimini qurish yetarlimi?

13. Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi mazmun-mohiyatini so‘zlab bering va sxemasini yozing?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Matritsali tenglama.
2. Sistema yechimining matritsa ko‘rinishi.
3. Teskari matritsa usuli.
4. Ajratilgan yoki bazis noma’lum.
5. Noma’lumlari ajratilgan yoki bazisga keltirilgan sistema.
6. Noma’lumlari ajratilgan sistemaning bazis noma’lumlari tizimi.
7. Noma’lumlari ajratilgan sistemaning erkli noma’lumlari.
8. Chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi.
9. Gauss usuli.
10. Sistema ustida elementar almashtirishlar.
11. Gaussning klassik yoki ixcham sxema usuli.
12. To‘g‘ri yurish va teskari yurish.
13. Gauss usulining Jordan modifikatsiyasi.

Mustaqil ishlash uchun misollar

6.1. Quyidagi sistemalarni teskari matritsa usulida yeching:

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1 \\ 7x_1 + 4x_2 = -6 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 1 \\ 2x_1 - 9x_2 = 1 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 = -8 \\ 2x_1 + 2x_2 = 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -4 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = -8 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3 \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_2 - x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ g) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -3 \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -4 \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 7 \end{cases}$

6.2. Quyidagi sistemalarni Gaussning ixcham sxemasi usulida yeching:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - 6x_2 = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -5 \\ -6x_1 + 4x_2 = 9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = -2 \\ 3x_1 - 9x_2 = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -6 \\ 3x_1 + x_2 = 1 \\ 5x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -3 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -6 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -5 \\ -x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$

k) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 7 \end{cases}$

6.3. Quyidagi sistemalarni Gauss-Jordan usulida yeching:

a) $\begin{cases} x_1 - 0{,}5x_2 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 7 \\ -3x_1 - 4x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_3 = -4 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_3 = -5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 6 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$

$$\text{g)}\ \begin{cases} x_1+3x_2-2x_3-x_4=-2 \\ -x_1-2x_2+x_3-2x_4=1 \\ 2x_1+x_2-x_3+4x_4=3 \end{cases} \qquad \text{h)}\ \begin{cases} x_1+4x_2-2x_3+3x_4=-3 \\ 3x_1+5x_2-4x_3+6x_4=-5 \\ -2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=5 \\ x_1+3x_2+x_3+x_4=-4 \end{cases}$$

$$\text{i)}\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+2x_4=7 \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=6 \\ x_1-3x_2+2x_3-2x_4=1 \\ 5x_2-3x_3+6x_4=5 \end{cases} \qquad \text{j)}\begin{cases} -x_1-2x_2+x_3+2x_4+4x_5=-4 \\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4+2x_5=5 \\ x_1-x_2-3x_3-x_4+x_5=-3 \\ 3x_1-2x_2-4x_3-2x_4-3x_5=-4 \\ 4x_1+3x_2+x_4-3x_5=7 \end{cases}$$

$$\text{k)}\ \begin{cases} 4x_1-3x_2+x_3-2x_4+3x_5=8 \\ 2x_1-x_2+3x_3-x_4+2x_5=9 \\ 6x_2-2x_3+7x_4-3x_5=-4 \\ x_1+2x_2-2x_3+3x_4-x_5=-2 \end{cases}$$

6.4. Quyida berilgan bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemalaridan aniqmaslarini ajratib ko‘rsating va ularning umumiy yechimini yozing:

$$\text{a)}\ \begin{cases} 7x+3y=0 \\ 9x+4y=0 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} 3x_1-2x_2=0 \\ 2{,}5x_1-1{,}(6)x_2=0 \end{cases} \qquad \text{c)}\ \begin{cases} x_1+4x_2=0 \\ 3x_1-x_2=0 \\ -x_1+2x_2=0 \end{cases}$$

$$\text{d)}\ \begin{cases} 2x-y-3z=0 \\ 4x-2y+z=0 \end{cases} \qquad \text{e)}\ \begin{cases} 2x-y-3z=0 \\ x-0{,}5y-1{,}5z=0 \end{cases} \qquad \text{f)}\ \begin{cases} x_1-3x_2+x_3=0 \\ 2x_1+x_2-4x_3=0 \\ 3x_1-x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

$$\text{g)}\ \begin{cases} x-4y-z=0 \\ 3x-6y-z=0 \\ -x+7y+2z=0 \end{cases} \qquad \text{h)}\ \begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3+x_4=0 \\ x_1+2x_2+5x_3-3x_4=0 \\ x_1-3x_2-x_3-2x_4=0 \end{cases}$$

6.5. Quyidagi bir jinsli sistemalar λ parametrning kanday qiymatlarida nolmas yechimlarga ham ega ekanligini aniqlang:

$$\text{a)}\ \begin{cases} x_1-(2-\lambda)x_2=0 \\ (\lambda-4)x_1+3x_2=0 \end{cases} \qquad \text{b)}\ \begin{cases} \lambda x_1-3x_2-2x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+2x_3=0 \\ \lambda x_1+2x_2+3x_3=0 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ \lambda x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

6.6. Quyida berilgan sistemalar λ parametrning qanday qiymatlarida birgalikda emasligini aniqlang:

$$a)\ \begin{cases} 2x_1 - 6x_2 = \lambda^2 \\ x_1 - 3x_2 = 8 \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -\lambda \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = \lambda \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = -2 \end{cases}$$

7-§. Arifmetik vektorlar va ular ustida amallar

1. n o‘lchovli haqiqiy arifmetik fazo. Arifmetik vektor haqida tushuncha

O‘rta maktab matematika kursida real fazo vektorlari – yo‘nalishli kesma shaklida tasvirlanishi mumkin bo‘lgan geometrik vektorlar va ular ustida amallar o‘rganilgan edi. Maktab kursida real (bir, ikki va uch o‘lchovli) fazo vektorlari va nuqtalari orasida o‘zaro birga-bir moslik borligini uqish muhimdir. Real R_3 fazo tushuncha va elementlarini ixtiyoriy n ($n \geq 4$, $n \in N$) o‘lchovli fazo uchun yoyish yoki umumlashtirish mumkin. n o‘lchovli haqiqiy fazo abstrakt - to‘qima tushuncha bo‘lib, uning vektorlarini yo‘nalishli kesma – geometrik vektor shaklida emas, balki arifmetik ifodalash mumkin.

n o‘lchovli haqiqiy arifmetik fazo tushuncha va elementlari murakkab, xususan iqtisodiy jarayonlarni matematik tekshirish imkonini beradi.

n o‘lchovli haqiqiy arifmetik fazo deb, mumkin bo‘lgan barcha n ta haqiqiy sonlarning tartiblangan tizimlari to‘plamiga aytiladi va R_n yozuv bilan belgilanadi.

Har bir alohida olingan $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tizim R_n fazo arifmetik vektori yoki nuqtasi deyiladi. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ haqiqiy sonlarga **x** vektor yoki nuqtaning mos koordinatalari yoki komponentlari deyiladi. Tizim koordinatalari soni n esa **x** arifmetik vektor yoki nuqta o‘lchovi deyiladi.

x = (x_1, x_2, …, x_n) vektorning qarama-qarshi vektori deb **-x** = (-x_1, -- x_2, …, -x_n) vektorga aytiladi. n ta nollardan iborat (0, 0, …, 0) tizimga n o‘lchovli nol vektor deyiladi va **θ** harfi bilan belgilanadi.

Ikki n o‘lchovli **x** = (x_1, x_2, …, x_n) va **y** = (y_1, y_2, …, y_n) arifmetik vektorlar berilgan bo‘lsin.

$x_i = y_i$ (i = {1,2, … , n}) munosabatlar o‘rinli, ya’ni vektorlarning har bir mos koordinatalari o‘zaro teng bo‘lsa, **x** va **y** vektorlarga o‘zaro teng vektorlar deyiladi. **x** va **y** vektorlarning tengligi **x** = **y** ko‘rinishda yoziladi.

2. Arifmetik vektorlar ustida chiziqli amallar va ularning xossalari

n o‘lchovli arifmetik vektorlar ustida **chiziqli amallar** quyidagicha bajariladi:

1. Berilgan **x** va **y** vektorlarni qo‘shganda ularning mos koordinatalari qo‘shiladi: **x + y** = ($x_1 + y_1$; $x_2 + y_2$; …; $x_n + y_n$).

2. Berilgan **x** vektorni k haqiqiy songa ko‘paytirganda uning har bir koordinatasi k marta ortadi: k**x** = (kx_1; kx_2; …; kx_n).

Vektorlar ustida chiziqli amallar quyidagi xossalarga bo‘ysinadi:

1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;
2) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$;
3) $\mathbf{x} + (-\mathbf{y}) = \mathbf{x} - \mathbf{y}$;
4) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha}\, y$;
5) $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$;
6) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$;
7) $\mathbf{x} + \boldsymbol{\theta} = \mathbf{x}$;
8) $\mathbf{x}\, 1 = \mathbf{x}$,

bu yerda, **x, y** va **z** – arifmetik vektorlar, α va β esa haqiqiy sonlar.

3. Arifmetik vektorlarning skalyar ko‘paytmasi. Vektor uzunligi Skalyar ko‘paytma xossalari

Berilgan **x** = (x_1; x_2; …; x_n) va **y** = (y_1; y_2; …; y_n) arifmetik vektorlarning **skalyar ko‘paytmasi** deb, vektorlar mos koordinatalari ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng songa aytiladi va (**x, y**) shaklda yoziladi. Ta’rifga binoan,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \text{ yoki } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Berilgan **x** = (x_1; x_2; …; x_n) vektorning moduli yoki uzunligi (normasi) deb, quyidagi formula bo‘yicha aniqlanadigan nomanfiy |**x**| songa aytiladi:

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \quad \text{yoki} \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} .$$

Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi quyidagi xossalarga bo‘ysinadi:

1) $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$, 3) $(\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z})$,

2) $(\alpha\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, 4) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

4. Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi. Vektorlar orasidagi burchak. Uchburchak tengsizligi

Skalyar ko‘paytma xossalaridan foydalanib, quyidagi **Koshi–Bunyakovskiy tengsizligi**ni isbotlash mumkin:

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|.$$

Tengsizlik bo‘yicha **x** va **y** vektorlar skalyar ko‘paytmasi absolut qiymati vektorlar modullari ko‘paytmasidan katta emas.

Koshi–Bunyakovskiy tengsizligi koordinatalarda

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$

ko‘rinishda yoziladi. Shunday bir yagona $\lambda = \cos\varphi \in [-1; 1]$ $(\varphi\in[0;\pi])$ son tanlash mumkinki, bunda

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}| \cos\varphi \quad (\varphi \in [0; \pi]).$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Oxirgi tenglikdan real fazoda bo‘lgani kabi, abstrakt R_n fazoda ham uning **x** va **y** arifmetik vektorlari orasidagi burchak haqida gapirish mumkin va uning kattaligi kosinusini aniqlash mumkin:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{|\mathbf{x}|\,|\mathbf{y}|} \quad (\varphi \in [0; \pi])$$

R_n fazoda ham **uchburchak** yoki **Minkovskiy tengsizligi** deb ataluvchi

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|$$

tengsizlik o‘rinli.

O‘z – o‘zini tekshirish uchun savollar

1. n o‘lchovli haqiqiy arifmetik fazo deganda nimani tushunasiz?
2. n o‘lchovli arifmetik vektor yoki nuqta deb-chi?
3. Qanday arifmetik vektorlarga o‘zaro teng vektorlar deyiladi?
4. Vektorlar ustida chiziqli amallar deganda qanday amallar tushuniladi?
5. Arifmetik vektorlar qanday qo‘shiladi?
6. Arifmetik vektor va son qanday ko‘paytiriladi?
7. Vektorlar ustida bajariladigan chiziqli amallar bo‘ysinadigan xossalarni sanab o‘ting?

8. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi deb nimaga aytiladi?
9. Arifmetik vektor uzunligi deb-chi?
10. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi bo‘ysinadigan qanday xossalarni bilasiz?
11. Koshi – Bunyakovskiy tengsizligini yozing?
12. n o‘lchovli fazo arifmetik vektorlari orasidagi burchakni topish masalasini qo‘yish mumkinmi?
13. Uchburchak yoki Minkovskiy tengsizligini yozing?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. n o‘lchovli arifmetik fazo.
2. Arifmetik vektor.
3. Nol vektor.
4. Vektorlar ustida chiziqli amallar.
5. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi.
6. Arifmetik vektor uzunligi yoki moduli.
7. Koshi – Bunyakovskiy tengsizligi.
8. Arifmetik vektorlar orasidagi burchak.
9. Uchburchak tengsizligi.

Mustaqil ishlash uchun misollar

7.1. Geometrik **a** va **b** vektorlar o‘zaro qanday xususiyatga ega bo‘lganda quyidagi munosabatlar bajariladi:

a) $|a+b| = |a-b|$; b) $|a+b| = |a|+|b|$;

c) $|a-b| = |a|+|b|$; d) $|a+b| > |a-b|$;

e) $|a+b| < |a-b|$; f) $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$; g) $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \boldsymbol{\theta}$.

7.2. λ parametrning qanday qiymatlarida **a** $\left(1; \sqrt{\lambda+3}; -5; \dfrac{6}{\lambda+1}\right)$ va **b** $(2-\lambda; 2\lambda; -5; \log_2(\lambda+7))$ vektorlar o‘zaro teng, **c** $(\lambda^2-1; 0; \lg|\lambda|; 0; \arccos|\lambda|)$ esa nol vektor bo‘lishini toping?

7.3. **a** = (-2; 1; -2) va **b** = (3; - 4; 0) vektorlar berilgan. Quyidagi amallarni bajaring yoki hisoblang:

a) $-2\mathbf{a}$; b) $5\mathbf{a}+3\mathbf{b}$; c) $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$; d) $\sqrt{\mathbf{b}^2}$;

d) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2$; f) $(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$; g) $(3\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-2\mathbf{b})$.

7.4. Quyidagi vektorlar orasidagi burchaklarni toping:

a) **a**($\sqrt{3}$; -1) va **b**(0; 1); b) **a**(-5; 3; -1) va **b**(-2; -3; 1);

c) **a**(1; 0; 1; 0) va **b**(1; 1; 1; 1); d) **a**(1; 1; 1; 1; 0) va **b**(2; 0; 1; 0; 2).

8-§. Vektorlar sistemasi.

1. Vektorlar chiziqli kombinatsiyasi. Chiziqli tenglamalar sistemasini vektor tenglama shaklida yozish

n o‘lchovli m ta vektorlardan iborat quyidagi

$$\begin{array}{ll} & \mathbf{a_1}(a_{11}; a_{21}; \ldots; a_{n1}) \\ & \mathbf{a_2}(a_{12}; a_{22}; \ldots; a_{n2}) \\ (*) & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \mathbf{a_m}(a_{1m}; a_{2m}; \ldots; a_{nm}) \end{array}$$

vektorlar sistemasi va $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – haqiqiy sonlar berilgan bo‘lsin.

n o‘lchovli $\lambda_1\mathbf{a_1} + \lambda_2\mathbf{a_2} + \ldots + \lambda_m\mathbf{a_m}$ yoki $\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j\mathbf{a_j}$ vektorga $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}$ vektorlarning mos ravishda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ koeffitsientli chiziqli **kombinatsiyasi** deyiladi.

Masala. $\mathbf{a_1}$(1; -1; 2; -3), $\mathbf{a_2}$(3; 0; 1; -2), $\mathbf{a_3}$(-1; 2; 1; 3) vektorlar sistemasi berilgan. 2$\mathbf{a_1}$ - $\mathbf{a_2}$ + 3$\mathbf{a_3}$ chiziqli kombinatsiya koordinatalarini aniqlang.

Vektorlar ustida ko‘rsatilgan chiziqli amallarni bajaramiz:

$$2a_1^T - a_2^T + 3a_3^T = 2\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\0\\1\\-2\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{matrix}2\cdot1-3+3\cdot(-1)\\2\cdot(-1)-0+3\cdot2\\2\cdot2-1+3\cdot1\\2\cdot(-3)-(-2)+3\cdot3\end{matrix} = \begin{pmatrix}-4\\4\\6\\5\end{pmatrix}$$

Demak, 2$\mathbf{a_1}$ - $\mathbf{a_2}$ + 3$\mathbf{a_3}$ = (-4; 4; 6; 5).

Vektorlar ustida chiziqli amallardan foydalanib, vektorlar tengligi ta’rifiga asoslanib, m noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi normal

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

ko‘rinishini quyidagicha

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{pmatrix} x_2 + \dots + \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{pmatrix} x_m = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

yoki

$$\mathbf{a_1}x_1 + \mathbf{a_2}x_2 + \dots + \mathbf{a_m}x_m = b \quad \text{yoki} \quad \sum_{j=1}^{m} x_j \mathbf{a_j} = b \qquad (1)$$

vektor shaklda yozish mumkin. (1) tenglik **chiziqli tenglamalar sistemasini yozishning vektor shakli** deyiladi.

$\mathbf{a_j}(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ (j={1; 2; …; m}) mos ravishda j – shart vektori, $\mathbf{b}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ vektorga esa **cheklash vektori** deyiladi. (1) vektor tenglamani qanoatlantiruvchi mumkin bo‘lgan barcha m ta haqiqiy sonlarning tartiblangan ($\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_m$) tizimlari to‘plamiga uning yechimi deyiladi. Agar ($k_1; k_2; \dots; k_m$) tizim (1) tenglama yechimlaridan biri bo‘lsa, u holda $k_1\mathbf{a_1} + k_2\mathbf{a_2} + \dots + k_m\mathbf{a_m} = \mathbf{b}$ yoki ixchamroq yozganda $\sum_{j=1}^{m} k_j \mathbf{a_j} = \mathbf{b}$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Boshqacha aytganda $\mathbf{a_j}$, (j={1; 2; …; m}) shart vektorlarining mos ravishda k_j, (j={1; 2; …; m}) koeffitsientli chiziqli kombinatsiyasi **b** cheklash vektoriga teng.

2. Vektorni berilgan vektorlar sistemasi bo‘yicha yoyish

(*) vektorlar sistemasi va $\mathbf{b}(b_1; b_2; \dots; b_n)$ vektor berilgan bo‘lsin.

Ta’rifga binoan, $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \mathbf{a_j}$ va **b** vektorlarning o‘zaro tengligini ta’minlaydigan tartiblangan ($\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_m$) tizim tanlash (tayinlash yoki ko‘rsatish) mumkin bo‘lsa, n o‘lchovli **b** vektor berilgan n o‘lchovli (*) vektorlar sistemasi bo‘yicha yoyiladi deyiladi va $\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_m$ sonlar **yoyilma koeffitsientlari** deb ataladi.

b vektorni berilgan $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_m}$ vektorlar sistemasi bo‘yicha

yoyish uchun $$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{a_j} x_j = \mathbf{b} \qquad (2)$$

chiziqli tenglamalar sistemasining yechimlaridan birini ko‘rsatish yetarli. Agar (2) chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda va aniq bo‘lsa, **b** vektor (*) sistema vektorlari bo‘yicha yagona usulda yoyiladi, agar birgalikda va aniqmas bo‘lsa, cheksiz ko‘p usulda yoyilishi mumkin. Agarda chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘lmasa, **b** vektor (*) sistema vektorlari bo‘yicha yoyilmaydi.

Masala. $\mathbf{b}(3;\ -7;\ 6;\ 9)$ vektorni $\mathbf{a_1}(1;\ -1;\ 2;\ 0)$, $\mathbf{a_2}(2;\ -2;\ 1;\ 3)$, $\mathbf{a_3}(-1;\ 3;\ 0;\ 1)$, $\mathbf{a_4}(-3;\ 1;\ 2;\ 4)$ vektorlar sistemasi bo‘yicha yoying.

$\mathbf{b} = \mathbf{a_1}x_1 + \mathbf{a_2}x_2 + \mathbf{a_3}x_3 + \mathbf{a_4}x_4$ vektor tenglama tuzamiz va uning yechimini Gauss-Jordan usulida aniqlaymiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -3 & | & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & | & -7 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & | & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & | & 9 \end{pmatrix} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

Demak, $\mathbf{b}$ vektor berilgan vektorlar sistemasi bo‘yicha yagona usulda $\mathbf{b} = \mathbf{a_1} + 2\mathbf{a_2} - \mathbf{a_3} + \mathbf{a_4}$ ko‘rinishda yoyiladi.

3. Chiziqli bog‘liq va chiziqli erkli vektorlar sistemalari

n o‘lchovli m ta vektorlardan iborat (*) vektorlar sistemasi berilgan bo‘lsin.

$\mathbf{a_1}x_2 + \mathbf{a_2}x_2 + \ldots + \mathbf{a_m}x_m = \boldsymbol{\theta}$ (bu yerda $\boldsymbol{\theta}$ - n o‘lchovli nol vektor) vektor tenglama yoki shuning o‘zi m ta noma’lumli n ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasini tuzamiz.

$\mathbf{a_1}x_2 + \mathbf{a_2}x_2 + \ldots + \mathbf{a_m}x_m=\boldsymbol{\theta}$ vektor tenglama aniq bo‘lib, yagona trivial (nol) yechimga ega bo‘lsa, (*) vektorlar sistemasi o‘zaro chiziqli bog‘lik bo‘lmagan yoki chiziqli erkli vektorlar sistemasi deyiladi.

$\mathbf{a_1}x_2 + \mathbf{a_2}x_2 + \ldots + \mathbf{a_m}x_m = \boldsymbol{\theta}$ vektor tenglama aniqmas bo‘lib, trivial yechimdan tashqari notrivial (nolmas) yechimlarga ham ega bo‘lsa, (*) vektorlar sistemasi chiziqli bog‘lik sistema deyiladi. Aniqlik uchun nolmas $(x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_m)$ yechimda $x_m \neq 0$ bo‘lsin. Unda

$$\mathbf{a^{(m)}} = -\frac{x_1}{x_m}\mathbf{a_1} - \frac{x_2}{x_m}\mathbf{a_2} - \ldots - \frac{x_{m-1}}{x_m}\mathbf{a_{m-1}}$$

munosabat o‘rinli bo‘lib, (*) vektorlaridan biri qolganlarining chiziqli kombinatsiyasiga teng. Bu esa sistemaning chiziqli bog‘liqligini anglatadi.

Agar vektorlar sistemasi yagona nolmas vektordan tashkil topgan bo‘lsa chiziqli erkli; yagona nol vektordan iborat bo‘lsa, chiziqli bog‘liqdir. Chiziqli erkli sistemaning har qanday qism osti sistemasi – chiziqli erkli, chiziqli bog‘liq sistemaning har qanday kengaytirilgan sistemasi esa chiziqli bog‘liqdir. Demak, tarkibida nol vektor mavjud har qanday vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liqdir.

Berilgan sistema vektorlari koordinatalaridan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

matritsa tuzamiz.

(*) vektorlar sistemasining chiziqli erkli yoki chiziqli bog‘liqligi quyidagi teorema yordamida aniqlanadi.

Teorema. Agar berilgan (*) sistema vektorlari aniqlaydigan A matritsa rangi r sistema vektorlari soni m ga teng bo‘lsin, ya’ni r = m, (*) sistema chiziqli erkli, agarda A matritsa rangi r, sistema vektorlari soni m dan kichik, ya’ni r < m bo‘lsa, (*) sistema chiziqli bog‘liqdir.

Teorema isboti bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining yagona trivial yechimga egaligi va trivial yechimdan tashqari notrivial yechimlarga egaligi haqidagi teorema asosida isbotlanadi va uning shartlari tasdig‘ini quyidagi xususiy misollarda tekshirib ko‘rish mumkin.

Masalalar.

1) R_2 haqiqiy fazoda (koordinatalar tekisligida) ikki $\mathbf{a_1}(a_{11}; a_{21})$ va $\mathbf{a_2}(a_{12}; a_{22})$ vektorlardan iborat sistema berilgan bo‘lsin. Agar vektorlar kollinear bo‘lmasa, r(A) = 2 = 2 = m munosabatlar o‘rinli va sistema – chiziqli erkli. Agarda vektorlar kollinear bo‘lsa, r(A) = 1 < 2 = m munosabatlar o‘rinli bo‘lib, sistema chiziqli bog‘liqdir.

2) R_2 haqiqiy fazoda $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_k}$ ($k \geq 3$) vektorlar berilgan bo‘lsin. Ushbu holda $r(A) \leq 2 < k = m$ munosabatlar o‘rinli bo‘lib, sistemaning ixtiyoriy vektori qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi shaklida tasvirlanishi mumkin. R_2 fazoda 3 ta va undan ortiq vektorlar sistemasi har doim chiziqli bog‘liq sistemani tashkil etadi.

3) R_3 haqiqiy fazoda $\mathbf{a_1}(a_{11}; a_{12}; a_{13})$ va $\mathbf{a_2}(a_{12}; a_{22}; a_{32})$ vektorlar sistemasi berilgan bo‘lsin. Agar vektorlar kollinear bo‘lmasa, r(A) = 2 = 2 = m munosabatlar o‘rinli va sistema chiziqli erkli. Agarda vektorlar kollinear bo‘lsa, r(A) = 1 < 2 = m shartlar bajariladi va sistema chiziqli bog‘liqdir.

4) R_3 haqiqiy fazoda $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}$ vektorlardan iborat sistema berilgan bo‘lsin. Agar vektorlar o‘zaro komplanar bo‘lmasa, r(A) = 3 = 3 = m munosabatlar o‘rinli va sistema – chiziqli erkli. Aks holda, $r(A) \leq 2 < 3 = m$ shartlar o‘rinli bo‘lib sistema chiziqli bog‘liqdir.

5) R_3 haqiqiy fazoda $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_k}$ ($k \geq 4$) vektorlar sistemasi uchun $r(A) \leq 3 < k = m$ munosabatlar o‘rinli bo‘lib, sistema har doim chiziqli

bog‘liq. R_3 fazoda kamida to‘rtta vektorlardan iborat har qanday sistema chiziqli bog‘liqdir va hokazo.

Masala. $\mathbf{a_1}(2; -1; 3; 0)$, $\mathbf{a_2}(8; -9; 1; -4)$, $\mathbf{a_3}(-3; 4; 1; 2)$ vektorlar sistemasining chiziqli erkli yoki chiziqli bog‘liqligini aniqlang.

Sistema vektorlari koordinatalaridan matritsa tuzamiz va uning rangini Gauss algoritmi yordamida aniqlaymiz:

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 2 & 8 & -3 \\ -1 & -9 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & \frac{5}{2} \\ 3 & -11 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -5 & 0 \\ 3 & -11 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

$r(A) = 2 < 3 = m$ munosabatlar o‘rinli bo‘lgani uchun berilgan sistema chiziqli bog‘liq sistemani tashkil etadi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deb nimaga aytiladi?
2. m ta noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi normal shaklini vektor shaklda yozing.
3. Vektor tenglamaning yechimi deb nimaga aytiladi?
4. Berilgan vektorni berilgan vektorlar sistemasi bo‘yicha qanday yoyish mumkin?
5. Berilgan vektor berilgan vektorlar sistemasi bo‘yicha yagona, cheksiz ko‘p usullarda yoyilishi yoki umuman yoyilmasligi mumkinmi?
6. Qanday vektorlar sistemasiga chiziqli erkli vektorlar sistemasi deyiladi?
7. Chiziqli bog‘liq vektorlar sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?
8. Yagona nolmas vektordan, yagona nol vektordan iborat sistemalar qanday sistemalar?
9. Chiziqli erkli sistemaning qism osti, chiziqli bog‘liq sistemaning kengaytirilgan va tarkibida nol vektor mavjud vektorlar sistemalari haqida nimalar deyish mumkin?
10. Vektorlar sistemasining chiziqli erkli yoki chiziqli bog‘liq bo‘lishi yetarli shartlari nimalardan iborat?
11. R_2 fazoda berilgan ikki o‘zaro kollinear va nokollinear vektorlar haqida nimalar deyish mumkin? R_2 fazoning har qanday uchta vektorlari haqida-chi?
12. R_3 fazoda berilgan uchta o‘zaro komplanar va nokomplanar vektorlar haqida nimalar deyish mumkin? R_3 fazoning har qanday to‘rtta vektorlari haqida-chi?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi.
2. Chiziqli kombinatsiya koeffitsientlari.
3. Chiziqli tenglamalar sistemasini yozishning shakllaridan biri-vektor tenglama.
4. Shartlar va cheklash vektorlari.
5. Vektor tenglama yechimi.
6. Vektorni vektorlar sistemasi bo‘yicha yoyish.
7. Chiziqli erkli vektorlar sistemasi.
8. Chiziqli bog‘liq vektorlar sistemasi.

Mustaqil ishlash uchun misollar

Quyida vektorlar sistemasi va ularning chiziqli kombinatsiyasi berilgan:

a) $\mathbf{a_1}(1; -3)$, $\mathbf{a_2}(2; 5)$, $\mathbf{a_3}(-2; 1)$ va $-\mathbf{a_1} + \mathbf{a_2} + 2\mathbf{a_3}$;

b) $\mathbf{a_1}(0; 2; -1)$, $\mathbf{a_2}(4; -3; 2)$ va $3\mathbf{a_1} - 2\mathbf{a_2}$;

c) $\mathbf{a_1}(-1; 0; 3; -2)$, $\mathbf{a_2}(2; 3; -1; 5)$, $\mathbf{a_3}(-3; 4; 1; 2)$ va $2\mathbf{a_1} + 5\mathbf{a_2} - 3\mathbf{a_3}$.

Chiziqli kombinatsiyalar koordinatalarini aniqlang.

b vektorni berilgan vektorlar sistemasi bo‘yicha yozing:

a) $\mathbf{b}(5; 3)$: $\mathbf{a_1}(1; -4)$, $\mathbf{a_2}(3; 5)$;

b) $\mathbf{b}(-3; 7)$: $\mathbf{a_1}(1; -2)$, $\mathbf{a_2}(-2; 4)$;

c) $\mathbf{b}(9; -2; -3)$: $\mathbf{a_1}(4; 1; 5)$, $\mathbf{a_2}(-5; -1; -4)$, $\mathbf{a_3}(1; -1; 2)$;

d) $\mathbf{b}(1; -3; 2)$: $\mathbf{a_1}(1; -2; -2)$, $\mathbf{a_2}(-3; 5; 6)$;

e) $\mathbf{b}(6; -1; -8)$: $\mathbf{a_1}(1; 2; 3)$, $\mathbf{a_2}(-4; 1; 6)$, $\mathbf{a_3}(5; 2; -1)$;

f) $\mathbf{b}(1; -3; 2)$: $\mathbf{a_1}(1; 4; -1)$, $\mathbf{a_2}(-2; 1; 3)$, $\mathbf{a_3}(-5; -2; 7)$;

g) $\mathbf{b}(3;-1; 4; 5)$: $\mathbf{a_1}(2; 1; 3; 2)$, $\mathbf{a_2}(1;-2; 4;-4)$, $\mathbf{a_3}(3; 1; -5; 2)$, $\mathbf{a_4}(-4;-3; 1;-6)$;

i) $\mathbf{b}(2; 1;-4; 0)$: $\mathbf{a_1}(1; 2; 1; 3)$, $\mathbf{a_2}(-3; 1; 5;-1)$, $\mathbf{a_3}(2; 4;-1; 6)$, $\mathbf{a_4}(1; 3; 1;5)$.

Quyidagi vektorlar sistemalarining chiziqli erkli yoki chiziqli bog‘liqligini aniqlang:

a) $\mathbf{a_1}(1; -3)$, $\mathbf{a_2}(-2; 6)$;   b) $\mathbf{a_1}(1; -3)$, $\mathbf{a_2}(-2; 5)$;   c) $\mathbf{a_1}(1; -3; 2)$, $\mathbf{a_2}(2; -6; 5)$;

d) $\mathbf{a_1}(-2; 4; 6)$, $\mathbf{a_2}(-3; 6; 9)$ e) $\mathbf{a_1}(1; 4; 5)$, $\mathbf{a_2}(2; -1; 1)$, $\mathbf{a_3}(-1; 1; 3)$;

f) $\mathbf{a_1}(2; 1; -4)$, $\mathbf{a_2}(2; -1; 1)$, $\mathbf{a_3}(-1; 1; 3)$;

g) $\mathbf{a_1}(2; 0; -1; 1)$, $\mathbf{a_2}(3; 8; -1; 5)$, $\mathbf{a_3}(1; 0; -2; 4)$, $\mathbf{a_4}(-1; 0; 1; -3)$;

h) $\mathbf{a_1}(1; 0; 0; 1)$, $\mathbf{a_2}(2; -1; 2; -1)$, $\mathbf{a_3}(3; 2; 4; 1)$, $\mathbf{a_4}(1; 1; 1; 1)$.

9-§. Vektorlar sistemasining bazisi va rangi. Kanonik bazis

1. Vektorlar sistemasining bazisi va rangi

n o‘lchovli m ta $\mathbf{a_1, a_2, \dots, a_m}$ vektorlardan iborat vektorlar sistemasi berilgan bo‘lib, chiziqli bog‘liq sistemani tashkil etsin. $\mathbf{a^{(i)}}, \mathbf{a^{(j)}}, \dots, \mathbf{a^{(k)}}$ $(1 \le i < j <\dots< k \le m)$ sistema esa berilgan $\mathbf{a_1, a_2, \dots, a_m}$ sistemaning qism osti sistemalaridan biri bo‘lsin.

Agar: birinchidan, $\mathbf{a^{(i)}}, \mathbf{a^{(j)}}, \dots, \mathbf{a^{(k)}}$ $(1 \le i < j <\dots< k \le m)$ sistema chiziqli erkli; ikkinchidan, $\mathbf{a_1, a_2, \dots, a_m}$ sistemaning har bir vektori $\mathbf{a^{(i)}}, \mathbf{a^{(j)}}, \dots, \mathbf{a^{(k)}}$ $(1 \le i < j <\dots< k \le m)$ sistema vektorlari bo‘yicha yagona usulda yoyilsa, u holda $\mathbf{a^{(i)}}, \mathbf{a^{(j)}}, \dots, \mathbf{a^{(k)}}$ $(1 \le i < j <\dots< k \le m)$ vektorlar sistemasiga $\mathbf{a_1, a_2, \dots, a_m}$ **vektorlar sistemasining bazisi** deyiladi.

$\mathbf{a_1, a_2, \dots, a_m}$ vektorlar sistemasining har qanday chiziqli erkli qism osti sistemasini sistemaning bazisigacha to‘ldirish mumkin. Berilgan $\mathbf{a_1, a_2, \dots, a_m}$ sistemaning bazislaridan birini topish uchun $\mathbf{a_1}x_1+\mathbf{a_2}x_2+\dots+\mathbf{a_m}x_m = \boldsymbol{\theta}$ vektor tenglama tuziladi va uning biror-bir ko‘rinishdagi umumiy yechimi quriladi. Qurilgan umumiy yechimning bazis noma’lumlari oldidagi mos koeffitsient – vektorlardan iborat sistema uning bazisini tashkil etadi. Har qanday chiziqli bog‘liq vektorlar sistemasi umumiy yechim ko‘rinishlariga mos holda bir nechta bazisga ega bo‘lishi mumkin. Har bir bazisdagi vektorlar soni esa tengligicha qoladi.

Berilgan $\mathbf{a_1, a_2, \dots, a_m}$ vektorlar sistemasining ixtiyoriy bazisi tarkibidagi vektorlar soniga uning **rangi** deyiladi.

Masala. Quyida berilgan vektorlar sistemasining bazislaridan birini quring va rangini aniqlang:

$\mathbf{a_1}(1; -1; 2; 3)$, $\mathbf{a_2}(-2; -3; 0; 1)$, $\mathbf{a_3}(-2; -9; 4; 6)$, $\mathbf{a_4}(-1; 2; -2; -1)$.

$\mathbf{a_1}x_1 + \mathbf{a_2}x_2 + \mathbf{a_3}x_3 + \mathbf{a_4}x_4 = \boldsymbol{\theta}$ vektor tenglama umumiy yechimini Gauss-Jordan usulida quramiz.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & -9 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1, x_2 va x_4 noma’lumlar umumiy yechimning bazis noma’lumlari. Demak, mos ravishda, $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ va $\mathbf{a_4}$ vektorlar tizimi berilgan sistemaning bazislaridan birini tashkil etadi. Tizim 3 ta vektordan tarkib topgani uchun berilgan vektorlar sistemasining rangi 3 ga teng.

Agar $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}$ vektorlar sistemasining rangi r ga teng bo‘lsa, u holda sistemaning r ta vektoridan tuzilgan har qanday chiziqli erkli qism osti sistemasi uning bazisi bo‘ladi.

2. Ortogonal va ortonormallangan vektorlar sistemalari

Agar berilgan ikki n o‘lchovli $\mathbf{a_1}$ va $\mathbf{a_2}$ vektorlarning skalyar ko‘-paytmasi nolga teng bo‘lsa, $\mathbf{a_1}$ va $\mathbf{a_2}$ vektorlar o‘zaro **ortogonal vektorlar** deyiladi. «Ortogonal» iborasi real fazo vektorlari uchun «perpendikulyar» iborasi bilan almashtirilishi mumkin. Masalan, $\mathbf{a_1}(-1; 2; 0; 3)$ va $\mathbf{a_2}(4; 2; -5; 0)$ vektorlar o‘zaro ortogonal vektorlardir, chunki

$$(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}) = -1\cdot 4 + 2\cdot 2 + 0\cdot(-5) + 3\cdot 0 = 0.$$

n o‘lchovli nolmas vektorlardan tarkib topgan vektorlar sistemasi berilgan bo‘lib, sistema vektorlarining har qanday ikki jufti o‘zaro ortogonal bo‘lsa, u holda sistemaga **ortogonal vektorlar sistemasi** deyiladi.

Masalan, $\mathbf{a_1}(3; 2; 1)$, $\mathbf{a_2}(2; -3; 0)$, $\mathbf{a_3}(-3; -2; 13)$ vektorlar sistemasi ortogonaldir, chunki

$$(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}) = 0,\ (\mathbf{a_1}, \mathbf{a_3}) = 0 \text{ va } (\mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}) = 0.$$

Har qanday nolmas vektorlardan iborat ortogonal vektorlar sistemasi chiziqli erkli sistemadir.

n o‘lchovli k ta $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_k}$ vektorlardan iborat chiziqli erkli sistema berilgan bo‘lsin. $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_k}$ vektorlar sistemasi ustida ortogonal vektorlar sistemasini qurish mumkin, ya’ni chiziqli erkli $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_k}$ sistemani, mos ravishda $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_k}$ ortogonal sistema bilan almashtirish mumkin. Almashtirish quyidagi Shmidt formulalari yordamida amalga oshiriladi:

$$\mathbf{b_1} = \mathbf{a_1},\quad \mathbf{b_t} = \mathbf{a_t} - \sum_{i=1}^{t-1} \frac{(\mathbf{b_i}, \mathbf{a_t})}{(\mathbf{b_i}, \mathbf{b_i})}\mathbf{b_i} \qquad (\mathbf{t} \in \{\mathbf{2; 3; \ldots; k}\}).$$

$\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_k}$ chiziqli erkli vektorlar sistemasi ustida ortogonal $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \ldots, \mathbf{b_k}$ vektorlar sistemasini keltirilgan qurish usuli $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_k}$ vektorlar sistemasini **ortogonallash jarayoni** deyiladi.

Masala: $\mathbf{a_1}(1; 1; 1)$, $\mathbf{a_2}(0; 1; 1)$, $\mathbf{a_3}(0; 0; 1)$ vektorlar sistemasi ustida ortogonal sistema quring.

Berilgan vektorlar sistemasi chiziqli erkli sistemadir, chunki rang $(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}) = 3 = 3$ (vektorlar soni). Demak, ortogonallash jarayonini qo‘llab, berilgan sistemani $\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}$ ortogonal sistema bilan almashtirish mumkin.

$$\mathbf{b_1} = \mathbf{a_1}(1;\ 1;\ 1);$$

$$\mathbf{b_2} = \mathbf{a_2} - \frac{(\mathbf{b_1},\mathbf{a_2})}{(\mathbf{b_1},\mathbf{b_1})}\mathbf{b_1} = (0;\ 1;\ 1)\text{-}\frac{2}{3}(1;\ 1;\ 1) = (\text{-}\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3});$$

$$\mathbf{b_3} = \mathbf{a_3} - \frac{(\mathbf{b_1},\mathbf{a_3})}{(\mathbf{b_1},\mathbf{b_1})}\mathbf{b_1} - \frac{(\mathbf{b_2},\mathbf{a_3})}{(\mathbf{b_2},\mathbf{b_2})}\mathbf{b_2} = (0;\ 0;\ 1)\text{-}\frac{1}{3}(1;\ 1;\ 1)\text{-}\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}(-\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}) =$$

$$= (0; -\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}).$$

Berilgan vektorlar sistemasi ustida qurilgan ortogonal sistema vektorlarini butun koordinatali vektorlarga aylantirib, (1; 1; 1); (-2; 1; 1); (0; -1; 1) natijani olamiz.

Nolmas **b** vektorning normallangan yoki birlik vektori deb, $\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$ vektorga aytiladi.

Har bir vektori normallangan, ya’ni birlik vektor ko‘rinishga keltirilgan ortogonal sistemaga **ortonormallangan vektorlar sistemasi** deyiladi.

Agar $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{b_2}$, …, $\mathbf{b_k}$ ortogonal vektorlar sistemasi bo‘lsa, $\frac{\mathbf{b_1}}{|\mathbf{b_1}|}$, $\frac{\mathbf{b_2}}{|\mathbf{b_2}|}$, …, $\frac{\mathbf{b_k}}{|\mathbf{b_k}|}$ ortonormallangan vektorlar sistemasidir.

Masala. $\mathbf{a_1}(1; 1; 1)$, $\mathbf{a_2}(0; 1; 1)$, $\mathbf{a_3}(0; 0; 1)$ vektorlar sistemasi ustida ortonormallangan sistema quring.

Berilgan vektorlar sistemasi ustida dastlab qurilgan ortogonal $\mathbf{b_1}(1; 1; 1)$; $\mathbf{b_2}(-2; 1; 1)$; $\mathbf{b_3}(0; -1; 1)$ sistemaning har bir vektorini birlik ko‘rinishiga keltiramiz.

$$\frac{\mathbf{b_1}}{|\mathbf{b_1}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}(1;\ 1;\ 1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{\mathbf{b_2}}{|\mathbf{b_2}|} = \frac{1}{\sqrt{(-2)^2+1^2+1^2}}(-2;\ 1;\ 1) = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}};\ \frac{1}{\sqrt{6}};\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\frac{\mathbf{b_3}}{|\mathbf{b_3}|} = \frac{1}{\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2}}(0;-\ 1;\ 1) = \left(0;\ \text{-}\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Ortonormallangan sistema $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{2}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$,

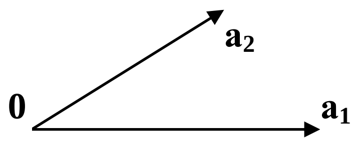
$\left(0; -\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ vektorlar tarkibidan iborat.

3. R_n fazoda bazis va koordinatalar. Kanonik bazis

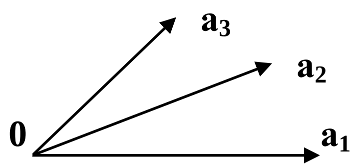
n o‘lchovli haqiqiy arifmetik R_n fazoning bazisi deb, har qanday chiziqli erkli n o‘lchovli n ta vektorlarning tartiblangan tizimiga aytiladi. n o‘lchovli n ta $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ vektorlardan iborat tartiblangan tizim R_n fazo bazisi va **a** uning ixtiyoriy vektori bo‘lsin. U holda **a** vektor tanlangan bazis vektorlari bo‘yicha ularning yagona chiziqli kombinatsiyasi $\mathbf{a} = x_1\mathbf{a_1} + x_2\mathbf{a_2} + \ldots + x_n\mathbf{a_n}$ ko‘rinishida yoyilishi mumkin. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ haqiqiy sonlarga **a** vektorning $\mathbf{a_1, a_2, \ldots, a_n}$ bazisdagi koordinatalari deyiladi.

Xususan, haqiqiy koordinatalar tekisligi (R_2) bazisi deb, tekislikda tanlangan ixtiyoriy tartiblangan ikkita nokollinear vektorlarga aytiladi.

R_2 fazoda tanlangan 0 nuqta va $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ bazis birgalikda tekislikda D*ekart koordinatalari sistemasi* deyiladi (1-rasm).



1-rasm



2-rasm

Ixtiyoriy $\mathbf{a}\in R_2$ vektor tanlangan $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ bazis vektorlari bo‘yicha yagona usulda yoyilishi mumkin.

Haqiqiy real uch o‘lchovli fazo (R_3) bazisi deb, unda ixtiyoriy tanlangan uchta tartiblangan nokomplanar vektorlarga aytiladi.

R_3 fazoda tanlangan 0 nuqta va $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ bazis birgalikda fazoda **D*ekart koordinatalari sistemasi*** deyiladi (2-rasm). Ixtiyoriy $\mathbf{a}\in R_3$ vektor tanlangan $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ bazis vektorlari bo‘yicha yagona usulda yoyilishi mumkin.

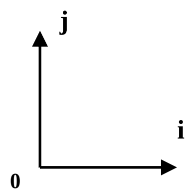
n-o‘lchovli haqiqiy arifmetik **fazo** (R_n) **ortogonal bazisi** deb, vektorlari juft-jufti bilan o‘zaro ortogonal bo‘lgan bazisga aytiladi.

R_n **fazo ortonormallangan bazisi** deb esa, har bir vektori normallangan ortogonal bazisga aytiladi.

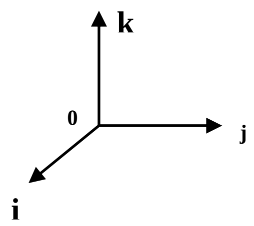
n-o‘lchovli n ta $\mathbf{e_1}(1; 0; \ldots; 0)$, $\mathbf{e_2}(0; 1; \ldots; 0)$, …, $\mathbf{e_n}(0; 0; \ldots; 1)$ vektorlardan iborat ortonormallangan bazisga $\mathbf{R_n}$ **fazo kanonik bazisi** deyiladi.

Xususan, $\mathbf{i}(1; 0)$, $\mathbf{j}(0; 1)$ bazis R_2 fazo kanonik bazisi deyilsa, $\mathbf{i}(1; 0; 0)$, $\mathbf{j}(0; 1; 0)$, $\mathbf{k}(0; 0; 1)$ bazis esa R_3 fazo kanonik bazisi deyiladi.

Tekislikda (fazoda) ortonormallangan bazisli *Dekart* koordinatalar sistemasiga *to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi* deyiladi (9.3-rasm, 9.4-rasm).



3-rasm



4-rasm

R_n fazoda berilgan ixtiyoriy chiziqli erkli vektorlar sistemasini fazo bazisigacha to‘ldirish mumkin.

Nazorat savollari

1. Vektorlar sistemasi bazisi deb nimaga aytiladi?
2. Vektorlar sistemasining har qanday chiziqli erkli qism osti sistemasini uning bazisigacha to‘ldirish mumkinmi?
3. Chiziqli bog‘liq vektorlar sistemasining bazislaridan biri qanday quriladi?
4. Chiziqli bog‘liq vektorlar sistemasi bir necha bazisga ega bo‘lishi mumkinmi va nima uchun?
5. Vektorlar sistemasining rangi deb nimaga aytiladi?
6. Ortogonal vektorlar sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?
7. Chiziqli erkli vektorlar sistemasini ortogonal sistemaga aylantirish mumkinmi va qanday?
8. Ortogonallash jarayoni deganda nimani tushunasiz?
9. Ortonormallangan vektorlar sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?
10. Ortogonal sistemani ortonormallangan sistemaga aylantirish jarayoni nimadan iborat?
11. n- o‘lchovli haqiqiy arifmetik fazo bazisi deb nimaga aytiladi?
12. R_n fazo ixtiyoriy vektorini uning bazisi bo‘yicha yoyish mumkinmi va qanday?
13. R_n fazo kanonik bazisi deb nimaga aytiladi?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Vektorlar sistemasi bazisi.
2. Vektorlar sistemasi rangi.
3. Ortogonal vektorlar sistemasi.

4. Ortogonallash jarayoni.
5. Ortonormallangan vektorlar sistemasi.
6. Fazo bazisi.
7. Kanonik bazis.

Mustaqil ishlash uchun misollar

9.1. Quyida berilgan vektorlar sistemalarining bazislaridan birini quring va ranglarini aniqlang:

a) $\mathbf{a_1}(2; -5)$, $\mathbf{a_2}(-6; 15)$;

b) $\mathbf{a_1}(3; -1; 2)$, $\mathbf{a_2}(1; 4; -1)$, $\mathbf{a_3}(7; 2; 3)$;

c) $\mathbf{a_1}(1; 2; -1; 3)$, $\mathbf{a_2}(0; 3; 4; 1)$, $\mathbf{a_3}(-2; -1; 6; -5)$, $\mathbf{a_4}(5; 4; 2; -4)$;

d) $\mathbf{a_1}(-3; 1; 1; 4)$, $\mathbf{a_2}(-2; 0; -1; 5)$, $\mathbf{a_3}(5; -3; -5; -2)$, $\mathbf{a_4}(-1; 1; 2; -1)$;

e) $\mathbf{a_1}(1;-2; 3; 0; -1)$, $\mathbf{a_2}(2; 4; -1; 3; 1)$, $\mathbf{a_3}(-3; 1; 0; 4; 2)$, $\mathbf{a_4}(-6; -9; 5; -2; -1)$; $\mathbf{a_5}(-9; 0; -2; 5; 4)$.

9.2. Vektorlar juftliklaridan o‘zaro ortogonallarini ajrating:

a) $\mathbf{a_1}(2; -3)$ va $\mathbf{a_2}(6; 4)$; b) $\mathbf{a_1}(-4; 3)$ va $\mathbf{a_2}(2; 3)$;

c) $\mathbf{a_1}(1; 3; 2)$ va $\mathbf{a_2}(0; 2; -3)$; d) $\mathbf{a_1}(-1; 5; -4)$ va $\mathbf{a_2}(3; 0; 2)$;

e) $\mathbf{a_1}(1; 3; 2; -3)$ va $\mathbf{a_2}(1; 1; 1; 2)$;

f) $\mathbf{a_1}(1; 2; 3; 4)$ va $\mathbf{a_2}(-2; 0; 1; 2)$.

9.3. Quyida berilgan chiziqli erkli vektorlar sistemalari ustida ortogonal va ortonormallangan vektorlar sistemalari quring:

a) $\mathbf{a_1}(1; 1)$, $\mathbf{a_2}(1; 2)$; b) $\mathbf{a_1}(1; 0; 1)$, $\mathbf{a_2}(1; 1; 1)$, $\mathbf{a_3}(1; -3; 3)$;

c) $\mathbf{a_1}(1; 1; 1; 0)$, $\mathbf{a_2}(0; 1; 1; 1)$, $\mathbf{a_3}(0; 0; 1; 1)$.

9.4. $\mathbf{a_1}(1; 3; 2)$, $\mathbf{a_2}(0; 2; -3)$, $\mathbf{a_3}(13; -3; -2)$ vektorlar sistemasi R_3 fazoning ortogonal bazisi bo‘la olishini ko‘rsating va $\mathbf{b}(-9; 9; 19)$ vektorning ushbu bazisidagi koordinatalarini toping.

9.5. $\mathbf{a_1}(2; 1; 1; 1)$ va $\mathbf{a_2}(-3; 2; 3; 1)$ vektorlarning ortogonalligini tekshirib ko‘ring. Ularni R_4 fazoning ortonormal bazisigacha to‘ldiring.

10-§. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimi. Chiziqli tenglamalar sistemasi umumiy yechimining vektor shakli

1. Vektor ko‘rinishda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikdalik va aniqlik shartlari

m ta noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi vektor shaklda berilgan bo‘lsin:

$$\mathbf{a_1}x_1 + \mathbf{a_2}x_2 + \ldots + \mathbf{a_m}x_m = \mathbf{b}.$$

Vektor shaklda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘lishi uchun $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_m}$ shartlar vektorlari sistemasi rangining **b** cheklash vektori hisobiga kengaytirilgan $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}$ vektorlar sistemasi rangiga teng bo‘lishi zarur va yetarli.

Agar $\text{rang}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m) = \text{rang}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}) = m$ bo‘lsa, sistema aniq bo‘ladi.

Agar $\text{rang}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m) = \text{rang}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}) < m$ bo‘lsa, sistema aniqmas bo‘ladi.

Agarda $\text{rang}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m) < \text{rang}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b})$ bo‘lsa, sistema birgalikda bo‘lmaydi.

m ta noma’lumli n ta chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi vektor shakldа berilgan bo‘lsin:

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_m x_m = \boldsymbol{\theta}.$$

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi har doim birgalikda, chunki shartlar vektorlari $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ sistemasi rangi cheklash nol vektori hisobiga kengaytirilgan $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \boldsymbol{\theta}$ sistema rangiga teng va m ta nollar tizimi uning yechimi bo‘lishi bilan xarakterlanadi. Bir jinsli sistema uchun $\text{rang}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m) = m$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, sistema aniq bo‘lib, yagona nol yechimga ega.

Agarda bir jinsli sistema uchun $\text{rang}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m) < m$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, sistema nol yechimdan tashqari nolmas yechimlarga ham egaligi bilan xarakterlanadi. Ushbu holda, har bir nolmas yechim m o‘lchovli vektor sifatida qaralishi mumkin.

Demak, sistema yechimlarining chiziqli kombinatsiyasi, chiziqli-erkliligi yoki chiziqli–bog‘liqligi haqida gapirish mumkin. Bir jinsli sistema har qanday yechimlarining ixtiyoriy chiziqli kombinatsiyasi uning yechimi bo‘la oladi.

2. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimi

Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari sistemasi yoki tizimi deb, uning chiziqli bog‘liq bo‘lmagan nolmas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_k$ yechimlariga aytiladiki, sistemaning har bir yechimi ushbu yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida aniqlanishi mumkin.

Bir jinsli sistema shartlar vektorlari $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ sistemasining rangi r ga teng bo‘lib, sistema noma’lumlari soni n dan kichik bo‘lsin. Bunday bir jinsli sistema o‘zining fundamental yechimlari tizimi mavjudligi bilan xarakterlanadi va tizim har biri m o‘lchovli $m - r$ nolmas vektorlardan tarkib topadi.

Bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari tizimi quyidagicha quriladi:

1. Bir jinsli sistemaning umumiy yechimi quriladi.

2. $m-r$ o‘lchovli $m-r$ ta vektorlardan iborat biror – bir chiziqli – erkli vektorlar sistemasi tanlanadi. Har bir vektori $m-r$ o‘lchovli $\mathbf{e_1}(1; 0; \ldots; 0)$, $\mathbf{e_2}(0; 1; \ldots; 0)$, …, $\mathbf{e_{m-r}}(0; 0; \ldots; 1)$ sistemani tanlash mumkin;

3. Umumiy yechim erkli noma’lumlari o‘rniga $\mathbf{e_1}$ vektor mos koordinatalarini qo‘yib, bazis noma’lumlar aniqlanadi va mos ravishda $\mathbf{F_1}$ fundamental yechim quriladi. $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$, …, $\mathbf{e_{m-r}}$ vektorlardan foydalanib, mos ravishda, $\mathbf{F_2}$, $\mathbf{F_3}$, …, $\mathbf{F_{m-r}}$ fundamental yechimlar quriladi.

Masala. Quyida berilgan bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari tizimidan birini quring va uning umumiy yechimini vektor shaklda aniqlang:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ 5x_2 + x_3 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Sistemaning umumiy yechimini Gauss – Jordan usulida quramiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 4 & | & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 0 & 5 & | & 0 \\ -2 & -1 & 1 & -2 & 3 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Sistema noma’lumlari soni $m = 5$ va sistema rangi $r = 2$ bo‘lgani uchun, $m - r = 3$. Chiziqli – erkli $\mathbf{e_1}(1; 0; 0)$, $\mathbf{e_2}(0; 1; 0)$ va $\mathbf{e_3}(0; 0; 1)$ sistemani tanlaymiz.

$\mathbf{e_1}(1; 0; 0)$ vektor koordinatalarini umumiy yechimning mos erkli noma’lumlari o‘rniga qo‘yib, bazis noma’lumlarni aniqlaymiz va $\mathbf{F_1}(2; 1; 0; 0; -1)$ fundamental yechimni quramiz. $\mathbf{e_2}(0; 1; 0)$ vektor yordamida $\mathbf{F_2}(-\frac{13}{5}; 0; 1; 0; \frac{7}{5})$ va $\mathbf{e_3}(0; 0; 1)$ vektor yordamida esa $\mathbf{F_3}(1; 0; 0; 1; 0)$ fundamental yechimlarni quramiz.

Bir jinsli sistemaning umumiy yechimi qurilgan fundamental yechimlar tizimi orqali vektor shaklda quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\mathbf{X} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bu yerda, λ_1 , λ_2 va λ_3 ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

3. Bir jinsli bo‘lmagan chiziqli tenglamalar sistemasi umumiy yechimi vektor shakli

m ta noma’lumli n ta chiziqli bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar sistemasi vektor shaklda berilgan bo‘lsin:

$$\mathbf{a_1}x_1 + \mathbf{a_2}x_2 + \ldots + \mathbf{a_m}x_m = \mathbf{b} \quad (\mathbf{b} \neq \boldsymbol{\theta}).$$

Sistemaning ozod hadlari ustuni nol ustun bilan almashtirilgan

$$\mathbf{a_1}x_1 + \mathbf{a_2}x_2 + \ldots + \mathbf{a_m}x_m = \boldsymbol{\theta}$$

ko‘rinishiga dastlabki bir jinslimas sistemaning keltirilgan sistemasi deyiladi. Sistemani keltirilgan ko‘rinishga keltirish uchun uning cheklash vektori **b** ni nol vektor **θ** bilan almashtirish kifoya.

Berilgan bir jinslimas sistemaning umumiy yechimini vektor shaklda quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\mathbf{X} = \mathbf{F_0} + \lambda_1\mathbf{F_1} + \lambda_2\mathbf{F_2} + \ldots + \lambda_{m-r}\mathbf{F_{m-r}}\,.$$

Bu yerda, $\mathbf{F_0}$ - dastlabki bir jinslimas sistemaning xususiy yechimlaridan biri, $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$, …, $\mathbf{F_{m-r}}$ - keltirilgan sistema fundamental yechimlari tizimi, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-r}$ – ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Masala. Quyida berilgan sistema umumiy yechimini vektor shaklda quring:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 2 \\ \quad\;\; 5x_2 - 7x_3 \qquad\quad + 5x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$$

Biz oldingi masalada berilgan sistema keltirilgan sistemasi fundamental yechimlari tizimini qurdik. Berilgan sistema xususiy yechimlaridan birini, aytaylik, $\mathbf{F_0} = (\frac{6}{5};\ 0;\ 0;\ 0;\ \frac{1}{5})$ ni tuzish qiyin emas. Demak, berilgan sistema umumiy yechimi vektor shakli quyidagicha yozilishi mumkin

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{5} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bu yerda, λ_1 , λ_2 va λ_3 – ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Nazorat savollari

1. Vektor shaklda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining birgalikdalik yetarli sharti nimadan iborat?
2. Vektor shaklda yozilgan chiziqli tenglamalar sistemasining aniqlik va aniqmaslik yetarli shartlari nimalardan iborat?
3. Sistemaning birgalikdamaslik yetarli sharti-chi?
4. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasining fundamental yechimlari tizimi deb nimaga aytiladi?
5. Bir jinsli sistema qanday shartlar bajarilganda o‘zining fundamental yechimlari tizimiga egaligi bilan xarakterlanadi?
6. Bir jinsli sistema fundamental yechimlari tizimini qurish jarayoni nimalarni o‘z ichiga oladi?
7. Agar bir jinsli sistema fundamental yechimlari tizimi qurilgan bo‘lsa, uning umumiy yechimini vektor shaklda yozish mumkinmi va qanday?
8. Bir jinslimas sistemaning keltirilgan sistemasi deb nimaga aytiladi?
9. Bir jinslimas sistema umumiy yechimi vektor shaklda qanday yoziladi?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi shartlar vektorlari sistemasining rangi.
2. Sistema kengaytirilgan vektorlari sistemasining rangi.
3. Bir jinsli sistema fundamental yechimlari tizimi.
4. Fundamental yechimlar tizimini qurish jarayoni.
5. Fundamental yechimlar chiziqli kombinatsiyasi.
6. Bir jinsli sistema umumiy yechimining vektor shakli.
7. Bir jinslimas sistemaning keltirilgan sistemasi.
8. Bir jinslimas sistema umumiy yechimining vektor shakli.

Mustaqil ishlash uchun misollar

10.1. Quyida berilgan bir jinsli sistemalarning fundamental yechimlari tizimlaridan birini quring va umumiy yechimlarini vektor shaklida yozing:

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$

$$c)\ \begin{cases} 4x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad d)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$e)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 - x_6 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 + 4x_6 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - 2x_6 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 0 \end{cases}$$

10.2. Sistema umumiy yechimlarini vektor shaklda quring:

$$a)\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 - 3x_4 = -5 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 7 \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 4 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -3 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 2 \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 4x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 + 3x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 - 2x_6 = -7 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + x_6 = -1 \end{cases}$$

11-§. Chiziqli algebra usullarining ba’zi chiziqli iqtisodiy modellarning tahlilida qo‘llanilishi

1. Tarmoqlararo balansning matematik modeli. Rejalashtirishning asosiy masalasi

Chiziqli algebra usullari keng ko‘lamda iqtisodiyotni rejalashtirish bilan bog‘liq masalalarni yechishda qo‘llaniladi. Biz quyida asosan, tarmoqlararo balansning matematik modeli bilan tanishamiz.

Iqtisodiyotni sonli tahlil qilish va xususan, ijtimoiy mahsulot ishlab chiqarish jarayonini tahlil qilish masalasi o‘zaro ishlab chiqarish mahsulotlari va xizmatlar oqimlarini qarashga keltiriladi. Shu nuqtai nazardan iqtisodiy sistema har biri biror-bir turdagi mahsulot ishlab chiqarishga moslashgan tarmoqlardan iborat deb qaralishi mumkin. Ishlab chiqarilgan mahsulotlar o‘zaro ayirboshlanadi va tarmoqlar orasida mahsulot oqimlari vujudga keladi. O‘zaro mahsulot oqimlarining vujudga kelishi muqarrardir, chunki har bir tarmoq o‘z mahsulotini ishlab chiqarish jarayonida o‘zga tarmoq mahsulotidan foydalanadi yoki uni sarflaydi.

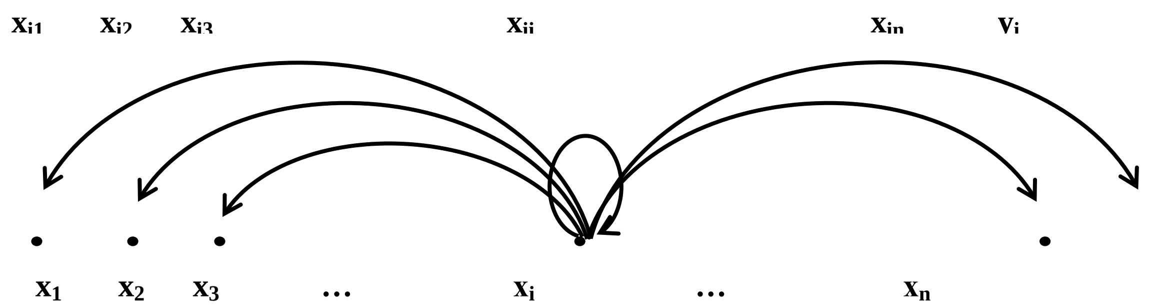
Iqtisodiyotning normal rivojlanish asosiy shartlaridan biri barcha tarmoqlar bo‘yicha ishlab chiqarish sarflari va umumiy yig‘indi mahsulot orasida balansning mavjudligidir. Bunda ishlab chiqarilgan mahsulotning bir qismi ishlab chiqarish tarmoqlari sohasiga qayt-masligini va shaxsiy ehtiyojni qondirishga, jamg‘arishga sarflanishini yoki eksportga chiqarilishini e’tiborga olish talab etiladi.

Iqtisodiy sistemaning yalpi mahsuloti uning n ta o‘zaro bog‘liq tarmoqlarida ishlab chiqariladi deylik. Ishlab chiqarish sikli yakunlanadigan vaqtni o‘z ichiga olgan davrni qaraymiz.

x_1, x_2, …, x_n – mos ravishda, birinchi, ikkinchi, …, n – tarmoqlarning natural birliklarda ishlab chiqaradigan yalpi mahsulot hajmlari bo‘lsin. Aytaylik, qaralayotgan davrda x_1 – metallurgiya tarmog‘ining tonna hisobida ishlab chiqaradigan metall miqdori, x_2 – kimyo tarmog‘ining ishlab chiqaradigan mahsuloti miqdori, x_3 – avtomobilsozlik tarmog‘ining ishlab chiqaradigan yengil avtomobillari soni bo‘lsin va hokazo.

$\mathbf{x}(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ – sistemaning yalpi mahsulot vektori deyiladi. k – tarmoqning x_k birlik mahsulotini ishlab chiqarish uchun i – tarmoq mahsuloti sarfini x_{ik} orqali belgilaymiz. Masalan, misolimizda x_{13} – x_3 dona yengil avtomobil ishlab chiqarish uchun 1-tarmoq mahsuloti metall sarfi miqdorini anglatadi. i - tarmoqning ishlab chiqarish sohasiga qaytmaydigan yakuniy mahsulot miqdori y_i bo‘lsin. $\mathbf{u}(u_1; u_2; \ldots; u_n)$ – sistemaning yakuniy mahsulot vektori deyiladi.

Sistemaning i - tarmog‘i mahsuloti x_i uchun moddiy balans sxemasini «mahsulot ishlab chiqarish va uni taqsimlash» prinsipi bo‘yicha quyidagicha tasvirlash mumkin.



Moddiy balansning oqimlar tenglamalarini

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} + y_i \quad (i = 1;\ 2;\ \dots;\ n) \qquad (1)$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

k – mahsulotning bir (shartli) birligini ishlab chiqarish uchun i-mahsulotning bevosita sarfi miqdori a_{ik} bo‘lsin. a_{ik} kattaliklarga bevosita xarajat koeffitsientlari yoki texnologik koeffitsientlar deyiladi.

Masalan, misolimizga qaytsak, a_{13} – 1 dona yengil avtomobil ishlab chiqarish uchun bevosita sarflanadigan metall miqdoridir.

O‘z-o‘zidan ko‘rinadiki, i – mahsulotning k - tarmoqqa jami sarfi x_{ik} k-tarmoqning bir birlik mahsulotini ishlab chiqarish uchun i - mahsulotning bevosita sarfi a_{ik} ning ushbu tarmoq ishlab chiqaradigan mahsulot miqdori x_k ga ko‘paytirilganiga teng: $x_{ik} = a_{ik}x_k$ ya’ni, ishlab chiqarish sarflarida chiziqlilik printsipi o‘rinli bo‘lsin. (1) tenglamalar sistemasini

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k + y_i \qquad \text{yoki} \qquad x_i - \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = y_i$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Oxirgi sistemani, o‘z navbatida, vektor-matritsa ko‘rinishida quyidagicha yozish mumkin:

$$\mathbf{X - AX = Y} \qquad \text{yoki} \qquad \mathbf{(E - A)X = Y} \qquad (2)$$

Bu yerda, E – n-tartibli birlik matritsa bo‘lib, $A=(a_{ik})$ – bevosita xarajat koeffitsientlari matritsasi yoki texnologik matritsa.

a_{ik} kattaliklarni o‘zgarmas deb qaraymiz. (2) tenglamaga Leontьev-ning chiziqli modeli deyiladi. Agar $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\theta}$ bo‘lsa, Leontьev modeli yopiq, $\mathbf{Y} \neq \boldsymbol{\theta}$ bo‘lganda esa model ochiq deyiladi.

Masala quyidagi hollarning biri ko‘rinishida qo‘yilishi mumkin:

1) yakuniy mahsulot hajmlari vektori **Y** ga qarab, sistema yalpi mahsulot hajmi vektori **X** ni hisoblash;

2) **X** ga qarab, **Y** ni hisoblash.

Rejalashtirishni asosiy masalalaridan biri bu birinchi masaladir, ya’ni **Y** vektorning berilishiga qarab, **X** vektorni hisoblashdir. Leontьev-ning ochiq modeliga tegishli asosiy masala – tegishli model ixtiyoriy yakuniy ehtiyoj **Y** ni qondira oladimi, degan savolga javob berishdan iborat. Ma’nosiga ko‘ra **X** nomanfiy bo‘lgani uchun iqtisodiy sistema A matritsa qanday bo‘lganda nomanfiy yechimga ega bo‘lishini tekshirish-dan iborat.

X_0 - AX_0 vektorning nomanfiyligini ta'minlaydigan manfiymas **X_0** vektor mavjud bo'lsa, A matritsaga (shu jumladan, modelga) samarali matritsa (model) deyiladi.

Ochiq model uchun A matritsaning samaralilik zaruriy va yetarli shartlari isbotlangan. Ularning biriga ko'ra, ochiq (2) model samarali bo'lishi uchun manfiymas A matritsaning barcha xos qiymatlari moduli bo'yicha 1 dan kichik bo'lishi yetarli.

Agar (2) modelda nomanfiy A matritsa samarali bo'lsa, u holda ixtiyoriy berilgan nomanfiy **Y** vektor uchun (2) tenglamalar sistemasi yagona manfiymas **X** yechimga ega bo'ladi. Boshqacha aytganda, har bir yakuniy mahsulot nomanfiy **Y** vektoriga, yagona manfiymas ishlab chiqarish hajmi **X** vektori mos keladi.

A matritsa samarali bo'lsa, nomanfiy $(E\text{-}A)^{-1}$ matritsa mavjud bo'lib, asosiy masala yechimi

$$\mathbf{X = (E\text{-}A)^{-1}\, Y} \qquad (3)$$

formula bo'yicha topiladi.

2. Bilvosita xarajatlar haqida tushuncha. To'la xarajatlar haqida tushuncha

Sistemaning bevosita xarajat koeffitsientlari matritsasi $A = (a_{ik})$ berilgan bo'lsin. Ma'lumki, k - tarmoqning bir birlik mahsulotini ishlab chiqarish uchun $\mathbf{a^k} = (a_{1k}; a_{2k}; \ldots; a_{nk})^T$ mahsulotlar zarur. Bu A matritsaning k – ustunidan iborat. O'z navbatida, $\mathbf{a^k}$ mahsulotlarni ishlab chiqarish uchun $\mathbf{a^{k(1)}}$ mahsulotlar zarur bo'ladi. $\mathbf{a^{k(1)}}$ ustun vektor bo'lib, $\mathbf{a^{k(1)}} = (a_{1k}^{(1)}; a_{2k}^{(1)}; \ldots; a_{nk}^{(1)})^T$ va $\mathbf{a^{k(1)}} = A\mathbf{a^k}$.

Vektor–matritsali tenglamada $\mathbf{a^{k(1)}}$ vektorning koordinatalari k-mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun sarflanadigan barcha tarmoqlar mahsulotlarini tayyorlashda i – mahsulot xarajatlari bo'lib, birinchi tartibli bilvosita xarajat koeffitsientlari deyiladi.

$a^{k(1)}$ ($k\in\{1; 2; \ldots; n\}$) ustun vektorlardan tuzilgan $A^{(1)}$ matritsa birinchi tartibli bilvosita xarajat koeffitsientlari matritsasi deyiladi va

$$A^{(1)} = (a^{1(1)}; a^{2(1)}; \ldots; a^{k(1)}; \ldots; a^{n(1)}) = (Aa^1; Aa^2; \ldots; Aa^k; \ldots; Aa^n) = AA = A^2.$$

Shunday qilib, $A^{(1)} = AA = A^2$.

Birinchi tartibli bilvosita xarajatni ta'minlash uchun zarur xarajatlar ikkinchi tartibli bilvosita xarajatlar deyiladi va $a^{k(2)} = Aa^{k(1)}$. $A^2 = AA^{(1)}$ – ikkinchi tartibli bilvosita xarajat koeffitsientlari matritsasi deyiladi.

Yuqoridagi mulohazalarni davom ettirib, j - tartibli bilvosita xarajat koeffitsientlari va ularning matritsasini kiritish mumkin, ya'ni

$$a^{k(j)} = A^j a^k \quad \text{va} \quad A^{(j)} = AA^{(j-1)}.$$

Bevosita va barcha tartibli bilvosita xarajat koeffitsientlari yig'indisi

$$c_{ik} = a_{ik} + a_{ik}^{(1)} + a_{ik}^{(2)} + \dots + a_{ik}^{(j)} + \dots \ .$$

to'la xarajat koeffitsientlari deyiladi.

$C = (c_{ik})$ – matritsa, mos ravishda, to'liq moddiy xarajat koeffitsientlari matritsasi deyilib,

$$C = A + A^{(1)} + A^{(2)} + \dots + A^{(j)} + \dots \ .$$

$B = C + E = E + A + A^{(1)} + A^{(2)} + \dots + A^{(j)} + \dots$ matritsa ham o'z navbatida, to'la xarajat koeffitsientlari matritsasi deyiladi. A matritsa samarali bo'lsa, matritsali qator yaqinlashuvchidir. V matritsa elementlari k-mahsulotning bir birligini ishlab chiqarish uchun i - mahsulot sarflaridan tashqari, har bir tarmoqning bir birlik yakuniy mahsulotini vujudga keltirish xarajatlarini ham o'z ichiga oladi. $B = (E-A)^{-1}$ tenglikni isbotlash qiyin emas. Natijada (3) formula $X = BY$ ko'rinishni oladi.

Mustaqil ishlash uchun misollar

Ikki tarmoqdan iborat iqtisodiy sistemaning bevosita xarajat koeffitsientlari matritsasi A va yakuniy mahsulot vektori **Y** berilgan. Sistemaning yalpi mahsulot hajmi vektori **X** ni toping.

Dastlab:

a**)** sistemaning tarmoqlararo moddiy balans modelini tuzing;

b) B matritsani matritsali qatorni kesish usulida taqriban quring va **X** ni toping;

c) B matritsani teskari matritsa topish Jordan usulida quring va **X** ni toping;

d**)** masalani programma yordamida kompyuterda yeching.

1) $A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}24 \\ 0{,}12 & 0{,}08 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1200 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}18 \\ 0{,}14 & 0{,}06 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1200 \\ 1400 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} 0{,}16 & 0{,}2 \\ 0{,}15 & 0{,}1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1400 \\ 1600 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} 0{,}22 & 0{,}1 \\ 0{,}25 & 0{,}16 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1600 \\ 1800 \end{pmatrix}$

5) $A = \begin{pmatrix} 0{,}14 & 0{,}18 \\ 0{,}1 & 0{,}21 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1800 \\ 2000 \end{pmatrix}$

```
5   CLS
10 PRINT "MM-70 Karimova Madina &  KBI-91 Abdikarimova Dinora"
20 KEY OFF
30 PRINT "@ copyright by Karimova Madina &  Abdikarimova Dinora"
40 LOCATE 3, 11
50 PRINT "matritsa ustida amallar va ularning iqtisodiyotda qo'l-lanishi"
60 LOCATE 4, 20
65 PRINT "balans modelini tuzish"
66 LOCATE 5, 21
70 PRINT "Ixtiyoriy tugmani bosing"
80 A$ = INKEY$: IF A$ = " " THEN 80
100 DIM A(2, 2), AA(2, 2), Y(2)
105 PRINT "A matritsani kiriting"
110 FOR I = 1 TO 2
115 C = 0
120 FOR J = 1 TO 2
122 PRINT "A"; I; J
125 INPUT A(I, J)
130 C = C + A(I, J)
135 PRINT "E - A matritsani quring"
140 IF I = J THEN A(I, J) = 1 – A(I, J) ELSE A(I, J) = 0 – A(I, J)
160 NEXT J
170 ' matritsani samaradorligini tekshiring,
180 IF ABS(C) >= 1 THEN 480
190 NEXT I
200 PRINT "U vektorni kiriting"
210 FOR I = 1 TO 2: PRINT "Y"; I: INPUT Y(I): NEXT I
220 ' teskari matritsa quring
230 D = A(1, 1) * A(2, 2) – A(1, 2) * A(2, 1): IF D = 0 THEN 500
250 AA(1,1) = A(2,2): AA(2,1) = - A(1,2):AA(1,2) = - A(2,1): AA(2,2)
    =A(1, 1)
260 FOR I = 1 TO 2
270 FOR J = 1 TO 2
280 A(I, J) = AA(J, I) / D
```

```
300 NEXT J, I
330 ‘ X yalpi mahsulot hajmini hisoblang
360 FOR I = 1 TO 2
380 S = 0
400 FOR J = 1 TO 2
410 S = S + A(I, J) * Y(J)
420 NEXT J: X(I) = S
430 NEXT I
440 PRINT “yalpi mahsulot hajmi”
450 FOR I = 1 TO 2: PRINT “x”; I; “=”; X(I): NEXT I
470 GOTO 510
480 PRINT “matritsa samarali emas”
490 GOTO 510
500 PRINT “determinant nolga teng”
510 LOCATE 22, 30: PRINT “see you”
520 END
```

12-§. Tekislikda analitik geometriya elementlari. Tekislikda to‘g‘ri chiziq

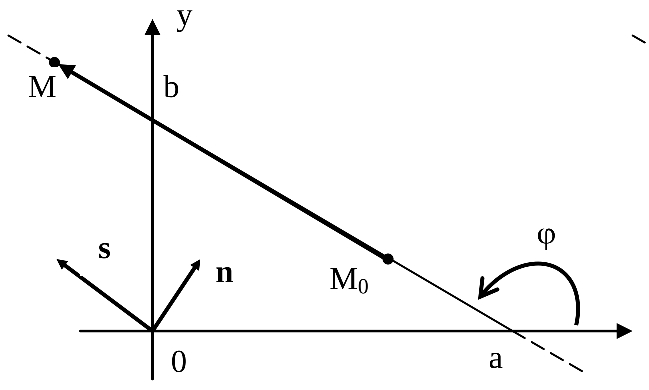
1. Tekislikda to‘g‘ri chiziqning turli ko‘rinishdagi tenglamalari

Tekislikda koordinatalar sistemasini tanlash uning nuqtalarini analitik ifodalash imkonini beradi.

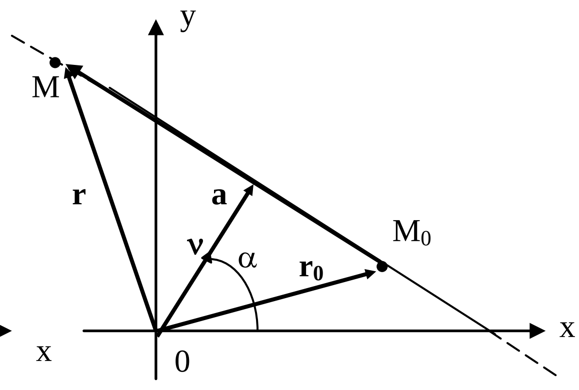
Analitik geometriyada tekislikdagi har qanday chiziq biror-bir umumiy xossaga ega nuqtalar to‘plami sifatida qaraladi. Tekislikda kiritilgan to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasiga mos holda qaralayotgan chiziqning ixtiyoriy nuqtasining koordinatalari x va y orqali belgilansa, uning barcha nuqtalari uchun umumiy xossa x va y larga nisbatan tenglama ko‘rinishida ifodalanadi.

Shunday qilib, chiziqda yotuvchi ixtiyoriy nuqta koordinatalarini qanoatlantiruvchi x va y larga nisbatan $F(x, y) = 0$ tenglamaga chiziq tenglamasi deyiladi yoki $F(x, y) = 0$ tenglama chiziqni aniqlaydi deyiladi.

Tekislikda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi tanlangan bo‘lsin. To‘g‘ri chiziqning tekislikdagi tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan vaziyatini ushbu to‘g‘ri chiziqning biror-bir $M_0(x_0; y_0)$ nuqtasi va to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar nolmas $\mathbf{n}(A;B)$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$ vektor yoki to‘g‘ri chiziqqa parallel nolmas $\mathbf{s}(m; n)$ $(m^2 + n^2 \neq 0)$ vektor to‘liq aniqlaydi. **n** vektor to‘g‘ri chiziqning normal vektori, **s** vektor esa yo‘naltiruvchi vektori deyiladi (1-rasm).



1-rasm.



2-rasm.

Koordinatalar sistemasining boshidan o‘tmaydigan to‘g‘ri chiziqni oxiri to‘g‘ri chiziqda joylashgan uning yagona **a** normal radius vektori birga-bir aniqlaydi (2-rasm).

To‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy M(x; y) nuqtasi uchun **n**(A; B) va $\mathbf{M_0M}$ $(x-x_0; y-y_0)$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi nolga teng:

$$(\mathbf{n}, \mathbf{M_0M}) = 0$$

yoki koordinatalarda

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0.$$

Tenglamalar nuqtasi va normal vektori bilan berilgan to‘g‘ri chiziqni aniqlaydi.

$$A\,x + B\,y + C = 0\ ,\ (A^2 + B^2 \neq 0) \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi tenglamaga tekislikda to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. To‘g‘ri chiziq umumiy (12.1) ko‘rinishdagi tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, quyidagi tasdiqlar o‘rinli:

a) Agar $C = 0$ bo‘lsa, $A\,x + B\,y = 0$ to‘g‘ri chiziq koordinatalar boshidan o‘tadi;

b) **n**(A; B) nolmas vektor (1) ko‘rinishdagi to‘g‘ri chiziqning normal vektoridir.

Agar umumiy tenglamada $A\,B\,C \neq 0$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, (1) tenglama quyidagi ko‘rinishga keltiriladi:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (2)$$

(2) tenglama to‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi deyiladi.

Agar (1) tenglamada $B \neq 0$ bo‘lsa, umumiy tenglama to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi deb ataluvchi

$$y = kx + b \qquad (3)$$

ko‘rinishga keltiriladi, bu yerda, $k = \mathrm{tg}\varphi$ – to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsienti, φ - to‘g‘ri chiziq bilan ox abssissa o‘qining musbat yo‘nalishi orasidagi burchak kattaligi va $b = y(0)$ – boshlang‘ich ordinata.

To‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy $M(x; y)$ nuqtasi uchun $\mathbf{s}(m; n)$ va $\mathbf{M_0M}(x-x_0;\ \ y-y_0)$ vektorlar o‘zaro kollinear, demak

$$\mathbf{M_0M} = t\mathbf{s} \qquad (4)$$

bu yerda, t- ixtiyoriy haqiqiy son bo‘lib, parametr deyiladi.

(4) tenglama to‘g‘ri chiziqning vektor parametrli tenglamasi deyiladi va koordinatalarda

$$\begin{cases} x - x_0 = tm, \\ y - y_0 = tn \end{cases} \qquad (5)$$

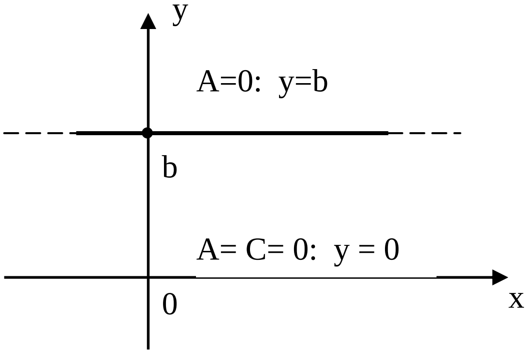
ko‘rinishni oladi. (5) tenglamalarga to‘g‘ri chiziqning parametrli tenglamalari deyiladi.

Agar (5) tenglamalarda t parametr yo‘qotilsa, to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi deb ataluvchi quyidagi

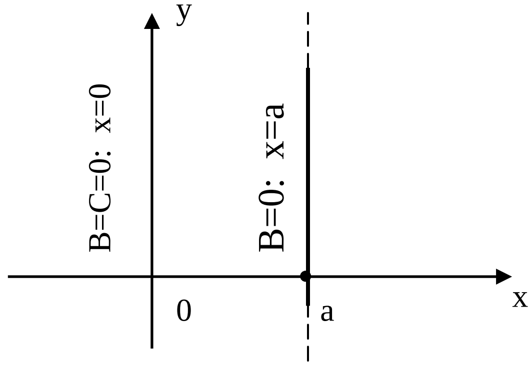
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} \qquad (6)$$

ko‘rinishdagi tenglamasi hosil bo‘ladi.

Umumiy (1) ko‘rinishdagi tenglamaning turli xususiy hollari va ularga mos to‘g‘ri chiziqlar quyidagi rasmlarda keltirilgan:



3-rasm.



4-rasm.

Agar $|\mathbf{a}| = P\ \ (P \geq 0)$, $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{a}}{P} = (\cos\alpha; \cos\beta) - \mathbf{a}$ normal radius vektorning birlik vektori bo‘lib, to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy $M(x; u)$ nuqtasining mos radius vektori $\mathbf{r}(x; y)$ bo‘lsa, u holda $\mathbf{r}$ radius vektorning **a yo**ki $\mathbf{v}$ vektordagi sonli proeksiyasi P ga teng:

$$Pr_{\mathbf{v}}\,\mathbf{r} = P \quad \text{yoki} \quad |\mathbf{v}|\, Pr_{\mathbf{v}}\mathbf{r} = P \quad \text{yoki} \quad (\mathbf{r}, \mathbf{v}) = P(P \geq 0) \qquad (7)$$

(7) tenglama to‘g‘ri chiziqning vektor ko‘rinishdagi tenglamasi deyiladi. (7) tenglama koordinatalarda $x \cos\alpha + y \cos\beta = P$ yoki

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = P \ \ (P\geq 0) \qquad (8)$$

ko‘rinishni oladi. Bu yerda, α - **a** yoki **v** vektorning 0x o‘qining musbat yo‘nalashi bilan hosil qilgan burchak kattaligi. (8) shakldagi tenglama to‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi deyiladi. (1) shakldagi tenglamadan (8) shakldagi tenglamaga o‘tish uchun umumiy ko‘rinishdagi tenglama normallovchi ko‘paytuvchi deb ataladigan $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ songa ko‘paytiriladi, bunda + yoki – ishoradan S ozod had ishorasining qarama-qarshisi tanlanadi, aks holda $P = -\mu S \geq 0$ munosabat bajarilmaydi.

Masala. $3x + 4y - 8 = 0$ tenglamani normal ko‘rinishga keltiring.

Berilgan umumiy shakldagi tenglama uchun normallovchi ko‘paytuvchi $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{1}{5}$. Tenglamani $\mu = \frac{1}{5}$ ga ko‘paytiramiz, natijada to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagi ko‘rinishda normal holga keltiriladi:

$$\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = \frac{8}{5}.$$

2. Berilgan bir va ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamalari. To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak. To‘g‘ri chiziqlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari

Berilgan $M_0(x_0; y_0)$ nuqtadan o‘tuvchi va burchak koeffitsienti k ga teng bo‘lgan to‘g‘ri chiziq $y - y_0 = k(x - x_0)$ tenglama bilan aniqlanadi.

Koordinatalar tekisligida berilgan ikki $M_1(x_1; y_1)$ va $M_2(x_2; y_2)$ $(M_1 \neq M_2)$ nuqtalardan o‘tuvchi yagona to‘g‘ri chiziq tenglamasi $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ ko‘rinishga ega.

Burchak koeffitsientli $y = k_1x + v_1$ (l_1) va $y = k_2x + v_2$ (l_2) tenglamalari bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi φ burchak kattaligi quyidagi formula yordamida aniqlanadi (5 – rasm):

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

Oxirgi formuladan burchak koeffitsientlar tilida l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari kelib chiqadi:

$$l_1 \perp l_2: \ 1 + k_1k_2 = 0, \qquad l_1 \parallel l_2: \ k_1 = k_2.$$

Koordinatalar tekisligida umumiy ko‘rinishdagi

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \ (l_1) \ \text{va} \ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \ (l_2)$$

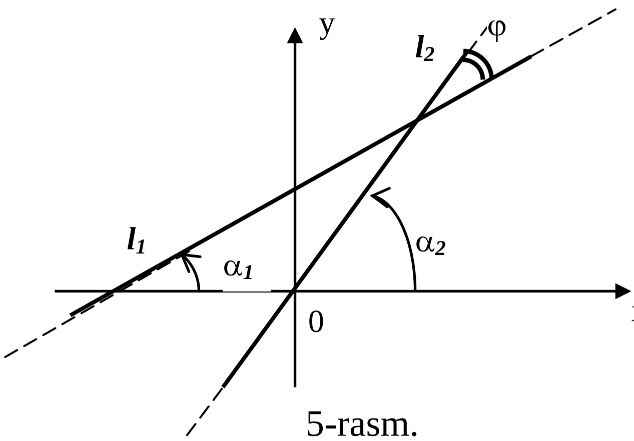
tenglamalari bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi φ burchak kattaligi l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlarning normal $\mathbf{n_1}(A_1; B_1)$ va $\mathbf{n_2}(A_2; B_2)$ vektorlari orasidagi burchak kattaligiga teng.

Ushbu tasdiq umumiy shakldagi tenglamalari bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni topish masalasini ularning normal vektorlari orasidagi burchakni topish masalasi bilan almashtirish imkonini beradi:

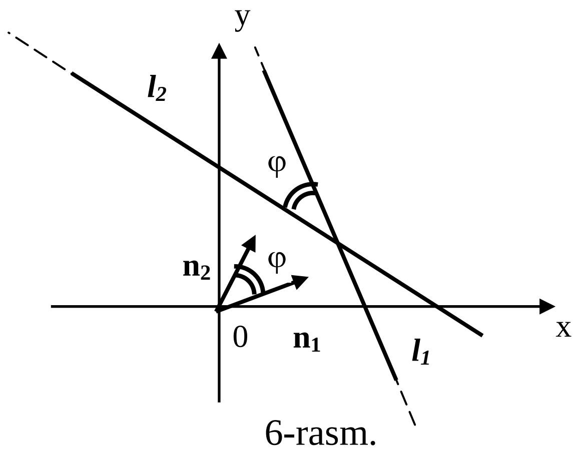
$$\cos\varphi = \frac{(n_1, n_2)}{|n_1||n_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

A va B koeffitsientlar tilida l_1 va l_2 to‘g‘ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari quyidagi munosabatlardan iborat:

$$l_1 \perp l_2: \quad A_1A_2 + B_1B_2 = 0, \quad l_1 \parallel l_2: \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$



5-rasm.



6-rasm.

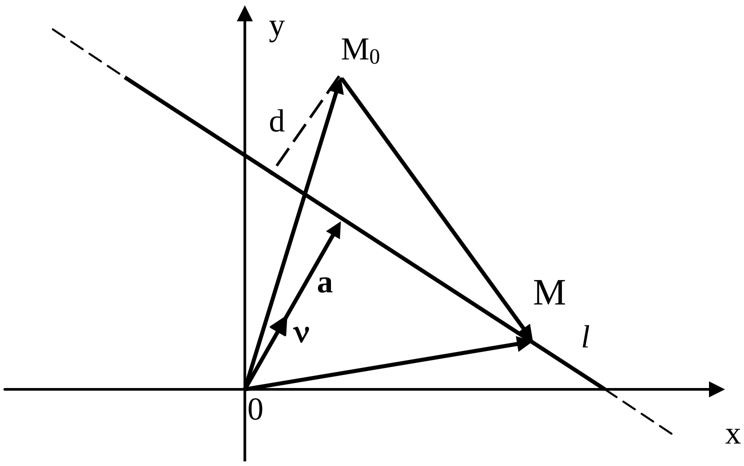
3. Berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqacha masofa

Koordinatalar tekisligida $M_0(x_0; y_0)$ nuqta va umumiy $Ax + By + C = 0$ shakldagi tenglamasi bilan l to‘g‘ri chiziqlar berilgan bo‘lib, nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani topish masalasi qo‘yilgan bo‘lsin.

Berilgan M_0 nuqtadan berilgan l to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan d masofa $\mathbf{M_0M}(x - x_0;\ y - y_0)$ vektorning **a** yoki **ν** vektordagi sonli proeksiyasining absolut qiymatiga teng (7 – rasm):

$$d = |Pr_{\nu}(\mathbf{OM} - \mathbf{OM_0})| = |(\mathbf{OM} - \mathbf{OM_0}), \boldsymbol{\nu}| = |(\mathbf{OM}, \boldsymbol{\nu}) - (\mathbf{OM_0}, \boldsymbol{\nu})|.$$

Yoki $d = |(\mathbf{OM_0}, \boldsymbol{\nu}) - (\mathbf{OM}, \boldsymbol{\nu})|$. Vektor shakldagi so‘nggi formula $(\mathbf{OM}, \boldsymbol{\nu}) = R$ ekanligini hisobga olsak, koordinatalarda $d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - R|$ ko‘rinishni oladi.



7 - rasm.

A va B koeffitsientlar tilida esa d masofa quyidagi

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

formula vositasida hisoblanadi.

Masala. $M_0(-4; 1)$ nuqtadan $3x + 4y - 8 = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha masofani toping?

Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofani hisoblash formulasini qo‘llaymiz:

$$d = \frac{|3 \cdot (-4) + 4 \cdot 1 - 8|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{16}{5} = 3{,}2 \text{ (bir.).}$$

Nazorat savollari

1. Koordinatalar tekisligida berilgan nuqtadan o‘tuvchi va berilgan vektorga perpendikulyar to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing?
2. Tekislikda to‘g‘ri chiziqning umumiy ko‘rinishdagi tenglamasi deb qanday shakldagi tenglamaga aytiladi?
3. Umumiy tenglamada A va V koeffitsientlarning geometrik ma’nosi nimadan iborat?
4. To‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini yozing va geometrik izohlang?
5. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasini yozing va koeffitsientlarining geometrik ma’nosini izohlang?
6. Koordinatalar tekisligida berilgan nuqtadan o‘tuvchi va berilgan vektor yo‘nalishidagi to‘g‘ri chiziqning parametrli tenglamalarini yozing?

7. To‘g‘ri chiziqning kanonik ko‘rinishdagi tenglamasini yozing?

8. Koordinatalar tekisligida to‘g‘ri chiziqning vektor shakldagi tenglamasini yozing va izohlang?

9. To‘g‘ri chiziqning normal ko‘rinishdagi tenglamasi deb qanday shakl-dagi tenglamaga aytiladi?

10. To‘g‘ri chiziqning umumiy shakldagi tenglamasini uning normal shakldagi tenglamasiga keltirish jarayoni nimalardan iborat?

11. Koordinatalar tekisligida berilgan nuqtadan o‘tuvchi va burchak koeffitsienti ma’lum bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing?

12. Koordinatalar tekisligida berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing?

13. Burchak koeffitsientli tenglamalari bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak qanday formula yordamida aniqlanadi?

14. Burchak koeffitsientlar tilida to‘g‘ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlarini yozing?

15. Umumiy shakldagi tenglamalari bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak qanday aniqlanadi?

16. Umumiy tenglamalar koeffitsientlari tilida to‘g‘ri chiziqlarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari nimalardan iborat?

17. Koordinatalar tekisligida berilgan nuqtadan berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani hisoblash formulalarini yozing va ularni izohlang?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Koordinatalar tekisligida chiziq tenglamasi.
2. Normal vektor.
3. Yo‘naltiruvchi vektor.
4. To‘g‘ri chiziqning umumiy shakldagi tenglamasi.
5. To‘g‘ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi.
6. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.
7. Burchak koeffitsient.
8. To‘g‘ri chiziqning parametrli tenglamalari.
9. To‘g‘ri chiziqning kanonik shakldagi tenglamasi.
10. To‘g‘ri chiziqning vektor shakldagi tenglamasi.
11. To‘g‘ri chiziqning normal shakldagi tenglamasi.
12. Normallovchi ko‘paytuvchi.
13. Bir nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi.
14. Ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi.
15. To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak.

16. Perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlar.
17. Parallel to‘g‘ri chiziqlar.
18. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa.

Mustaqil ishlash uchun misollar

12.1. A(1; 2), B(2; 3), C(-2; 0), D(-3; -1) nuqtalar ichidan 3x-4y+5=0 to‘g‘ri chiziqda yotganlarini ajratib ko‘rsating?

12.2. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi to‘g‘ri chiziqlarning tenglamalarini tuzing:

a**)** Koordinatalar boshidan o‘tuvchi va **n**(1;4) vektorga perpendikulyar;

b**)** A(2; -5) nuqtadan o‘tuvchi va **C**(3; 4) vektorga parallel;

c**)** Koordinata o‘qlaridan a = 5, b = -3 kesmalar ajratuvchi;

d**)** B(-4; -1) nuqtadan o‘tuvchi va burchak koeffitsienti k=2;

e**)** C(-1; 3) va D(2; 5) nuqtalardan o‘tuvchi;

f**) m**(2; -1) vektorga perpendikulyar bo‘lib, ou ordinatani 3 nuqtada kesuvchi;

g**)** Uchlari E(4;-5), N(2; 3) nuqtalarda kesmaning o‘rta perpendikulyari;

h**)** F(8; 6) nuqtadan o‘tib koordinatalar burchaklaridan yuzasi 12 kv. bir. uchburchak ajratuvchi.

12.3. ABCD parallelogramning uchta uchi koordinatalari berilgan:

A(-2; 7), B(4; -2), C(-6; -4). Uning tomonlari tenglamalarini tuzing va D nuqta koordinatalarini toping.

12.4. AVS uchburchak uchlari koordinatalari berilgan:

A(3; 2), B(1; 5) va C(-1; 2). Quyidagilarni aniqlang:

a) S uchidan tushirilgan CD balandlik tenglamasi va uzunligini;

b) Burchak ABC kattaligini;

v) A uchidan o‘tkazilgan AE mediana tenglamasini;

g) AE mediana va CD balandlik kesishgan nuqta koordinatalarini.

12.5. Quyidagi to‘g‘ri chiziq juftliklari ichidan o‘zaro parallel va perpendikulyar bo‘lganlarini ajratib ko‘rsating:

a**)** 2x–y–3 = 0 va 6x-3y+5 = 0; b**)** x-2y-7 = 0 va 6x+3y+2 = 0;

c**)** 3x+2y+4 = 0 va 5x-7y+6 = 0; d**)** y = 2x+3 va x+2y-5 = 0;

e**)** $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}=1$ va y = -2x+5.

12.6. K(-1; 3) nuqtadan quyidagi to‘g‘ri chiziqlargacha bo‘lgan masofalarni toping:

a**)** x-y = 0; b**)** 3x-4y+1= 0; c**)** 8x+6y-9 = 0.

12.7. 12.5 masaladagi o‘zaro parallel to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofani toping.

12.8. 2x + 5y - 3 = 0 to‘g‘ri chiziqda yotib, (3; -7) va (5; -1) nuqtalardan baravar uzoqlashgan nuqtani toping.

12.9. Qarama-qarshi uchlari (-6; 7) va (-2; 3) nuqtalarda joylashgan kvadratning tomonlari tenglamalarini tuzing.

12.10. Uchburchak uchlaridan biri (-1; 2) nuqtada bo‘lib, uning ikki medianalari tenglamalari berilgan: 5x + 4y - 17 = 0, 4x - y - 8 = 0.

Uchburchak tomonlari tenglamalarini tuzing.

3-§. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar

1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar haqida tushuncha. Ellips va uning kanonik tenglamasi.

Chiziq tenglamasi koordinatalar sistemasining joylashishiga qarab turli ko‘rinishda bo‘lishi mumkin. Koordinatalarni almashtirish yordamida chiziqning ixtiyoriy shakldagi tenglamasini sodda (kanonik) ko‘rinishga keltirish mumkin.

Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy ko‘rinishdagi tenglamasi deb,

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$$

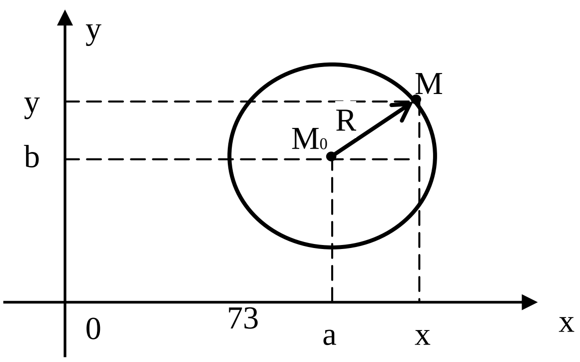
shakldagi tenglamaga aytiladi.

O‘rta maktab matematikasida o‘rganilgan aylana ikkinchi tartibli egri chiziqlar jumlasiga kiradi. Buning tasdig‘i sifatida aylanaga berilgan ta’rifni va uning sodda tenglamasini eslash kifoya. Tekislikda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi tanlangan bo‘lib, koordinatalar tekisligida markaz deb ataluvchi $M_0(a; b)$ nuqtadan teng radius deb ataluvchi R masofada yotuvchi nuqtalar to‘plami (geometrik o‘rni) bo‘lmish aylana quyidagi

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

tenglama bilan aniqlanadi (1–rasm).

Ushbu tenglama aylananing kanonik tenglamasi deyiladi. Markazi koordinatalar boshida va R radiusli aylana $x^2 + y^2 = R^2$ tenglama vositasida ifodalanadi.



1- rasm.

Umumiy tenglamasi bilan berilgan ikkinchi tartibli egri chiziq aynan aylanani aniqlashi uchun uning koeffitsientlari quyidagi munosabatlarni bajarishi yetarli:

$$A = C\,,\ \ B = 0 \ \ \text{va} \ \ D^2 + E^2 – AF > 0\,.$$

Tekislikda fokuslari deb ataluvchi berilgan F_1 va F_2 nuqtalargacha bo‘lgan masofalari yig‘indisi o‘zgarmas kattalikka (fokuslar orasidagi masofadan katta) teng nuqtalar to‘plamiga **ellips** deyiladi.

Agar o‘zgarmas kattalikni 2a, fokuslar orasidagi masofani esa 2c bilan belgilasak va tekislikda ox abssissa o‘qi fokuslari orqali o‘tuvchi, koordinatalar boshi F_1F_2 kesmaning o‘rtasida joylashgan koordinatalar sistemasi tanlasak, ellips tenglamasi soddalashadi va quyidagi kanonik ko‘rinishga keladi

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{bu yerda} \quad b^2 = a^2 – c^2 \ \ (a > c).$$

Ushbu holda ellips fokuslari: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ (2-rasm).

Koordinatalar boshi 0 nuqta ellipsning simmetriya markazi, koordinata o‘qlari esa uning simmetriya o‘qlari hisoblanadi.

$A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ nuqtalarga ellipsning uchlari, $0A_2 = a$ va $0A_1= b$ kesma uzunliklariga uning mos ravishda katta va kichik yarim o‘qlari deyiladi.

Shunday qilib, ellips ikki simmetriya o‘qlariga va simmetriya markaziga ega qavariq yopiq chiziqdir.

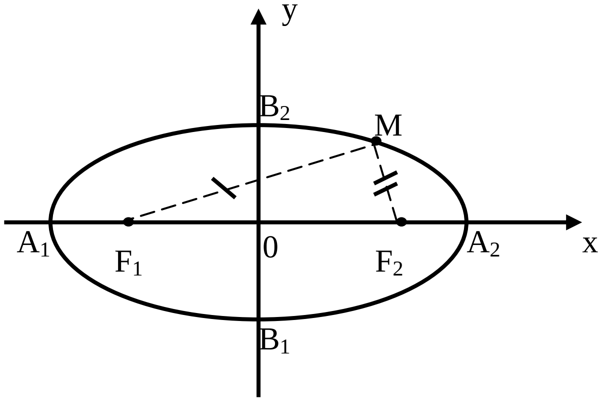
$\varepsilon=\dfrac{c}{a}$ kattalikka ellipsning ekstsentrisiteti deb ataladi va har qanday ellips uchun $\varepsilon < 1$ munosabat o‘rinli. Ekstsentrisitet ellipsning cho‘zinchoqligini xarakterlaydigan kattalikdir.

Aylana ellipsning xususiy holi bo‘lib, ekstsentrisiteti 0 ga teng yoki katta va kichik yarim o‘qlari teng bo‘lgan ellipsdir.

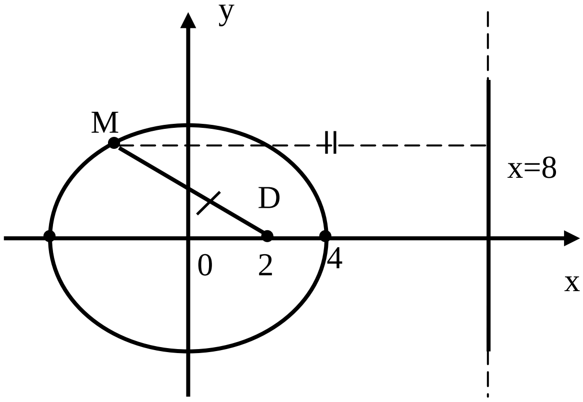
Simmetriya markazi $(x_0; y_0)$ nuqtada va simmetriya o‘qlari koordinata o‘qlariga parallel ellips tenglamasi quyidagi ko‘rinishdan iborat:

Masala. D(2; 0) nuqtaga x = 8 to‘g‘ri chiziqqa qaraganda ikki marta yaqinroq masofada joylashadigan M(x, u) nuqtalarning harakat traektoriyasini aniqlang.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$



2-rasm.



3-rasm.

M nuqta harakat traektoriyasini tekislikda $2DM = MK$ tenglamani qanoatlantiruvchi M nuqtalar to‘plami sifatida aniqlaymiz (3-rasm). Koordinatalar tekisligida ikki nuqta orasidagi masofani va nuqtadan vertikal to‘g‘ri chiziqqacha masofani topish formulalarini qo‘llab,

$$2\sqrt{(x-2)^2+y^2}=|8-x|$$

tenglamani olamiz va uni soddalashtirsak, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ ko‘rinishga keladi. Shunday qilib, M nuqta ellips bo‘ylab harakatlanadi, ellipsning katta o‘qi va fokuslari ox abssissa o‘qida joylashadi (3-rasm).

2. Giperbola va uning kanonik tenglamasi

Tekislikda fokuslari deb ataluvchi berilgan F_1 va F_2 nuqtalargacha masofalari ayirmasi absolut qiymati o‘zgarmas kattalikka (nolga teng emas va fokuslar orasidagi masofadan kichik) teng nuqtalar to‘plamiga **giperbola** deyiladi.

Agar o‘zgarmas kattalik 2a, fokuslar orasidagi masofa 2c orqali belgilansa va yuqorida ellips uchun tanlangan koordinatalar sistemasi tanlansa, u holda giperbola tenglamasi quyidagi kanonik ko‘rinishga keladi:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{bu yerda } b^2 = c^2 - a^2 \ (c > a).$$

Giperbola fokuslari: $F_1(-c; 0)$ va $F_2(c; 0)$ (4-rasm).

0 nuqta giperbolaning simmetriya markazi, koordinata o‘qlari esa uning simmetriya o‘qlaridir. Giperbola abssissa o‘qini haqiqiy uchlari deb ataluvchi $A_1(-a; 0)$ va $A_2(a; 0)$ nuqtalarda kesadi.

$0A = a$ kattalik uning haqiqiy yarim o‘qi deyiladi. $B_1(0; -b)$ va $B_2(0; b)$ nuqtalar giperbolaning mavhum uchlari deyilsa, $0B_2 = b$ kattalik uning mavhum yarim o‘qi deyiladi.

Giperbolaning asosiy to‘g‘ri to‘rtburchagi deb, markazi koordinatalar boshida, tomonlari koordinata o‘qlariga parallel va uning uchlaridan o‘tuvchi to‘g‘ri to‘rtburchakka aytiladi.

Giperbola o‘zining ikkita $y = \pm\frac{b}{a}x$ tenglamalar bilan aniqlanadigan asimptotalariga ega. Giperbola asimptotalari uning asosiy to‘g‘ri to‘rtburchagi diagonallaridir. Giperbolani qurish uchun dastlab uning asosiy to‘g‘ri to‘rtburchagini va asimptotalarini qurgan ma’qul.

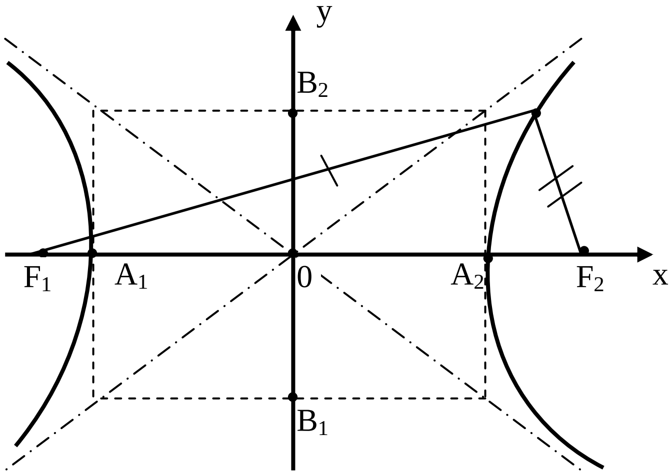
Giperbola ekstsentrisiteti $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ bo‘lib, uning asosiy to‘g‘ri to‘rtburchagining cho‘zinchoqligini xarakterlaydi.

Simmetriya markazi $(x_0; y_0)$ nuqtada va simmetriya o‘qlari koordinata o‘qlariga parallel giperbola

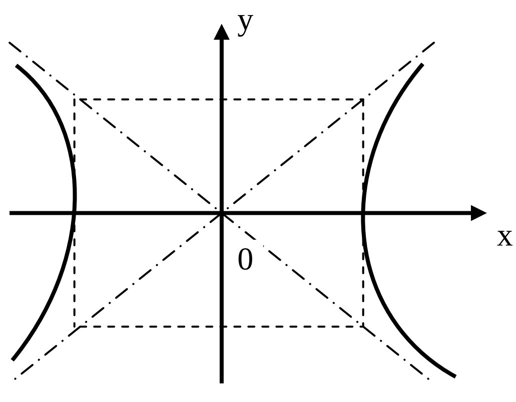
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

tenglama bilan aniqlanadi.

Yarim o‘qlari teng, ya’ni $a = b$ giperbolaga teng tomonli giperbola deyiladi. Teng tomonlama giperbola tenglamasi $x^2 - y^2 = a^2$ ko‘rinishda bo‘lib, uning asosiy to‘g‘ri to‘rtburchagi kvadratdan iborat va ekstsentrisiteti $\sqrt{2}$ ga teng.



4-rasm.



5-rasm.

Masala. Asimptotalari $y = \pm\frac{1}{2}x$ tenglamalar bilan berilgan, fokuslari orasidagi masofa 10 birlikka teng bo‘lgan giperbola tenglamasini tuzing.

Giperbola fokuslari abssissa o‘qida yotadi deb qarab, uning kanonik tenglamasini tuzamiz: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Fokuslar orasidagi masofa $F_1F_2 = 2c = 10$ bo‘lganidan, c = 5.

Giperbola uchun $c^2 = a^2 + b^2$ bo‘lganidan va $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ berilganidan foydalanib, quyidagi sistemani tuzamiz va uni yechamiz:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases}$$

Sistema yechimi: $a = 2\sqrt{5}$ va $b = 2\sqrt{5}$. Demak, giperbola tenglamasi $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ kanonik tenglamadan iborat (5–rasm).

3. Parabola va uning kanonik tenglamasi

Tekislikda fokusi deb ataluvchi berilgan F nuqtadan va direktrisasi deb ataluvchi berilgan DD' to‘g‘ri chiziqdan teng masofada yotuvchi nuqtalar tuplamiga **parabola** deyiladi.

Abssissa o‘qi F fokus nuqtadan DD' direktrisaga perpendikulyar ravishda o‘tuvchi, ordinata o‘qi esa fokus va direktrisalarning o‘rtasidan o‘tuvchi koordinatalar sistemasi tanlasak, parabola tenglamasi quyidagi kanonik ko‘rinishni oladi

$$y^2 = 2\,P\,x,$$

bu yerda, P – fokus va direktrisa orasidagi masofa.

Direktrisa tenglamasi $y = -\frac{P}{2}$, fokus esa $F(\frac{P}{2}; 0)$ (6 – rasm).

Koordinatalar boshi parabola uchi, abssissa o‘qi esa uning simmetriya o‘qidir. Parabola ekstsentrisiteti $\varepsilon = 1$.

Agar ordinata o‘qi parabola simmetriya o‘qi bo‘lsa, u holda uning tenglamasi $x^2 = 2\,P\,y$ $(P>0)$ ko‘rinishda bo‘lib, direktrisa tenglamasi $y = -\frac{P}{2}$ va fokusi $F(0; \frac{P}{2})$ nuqtadir.

Uchi $(x_0; y_0)$ nuqtada, simmetriya o‘qlari koordinata o‘qlaridan biriga parallel parabola quyidagi tenglamalar bilan aniqlanadi:

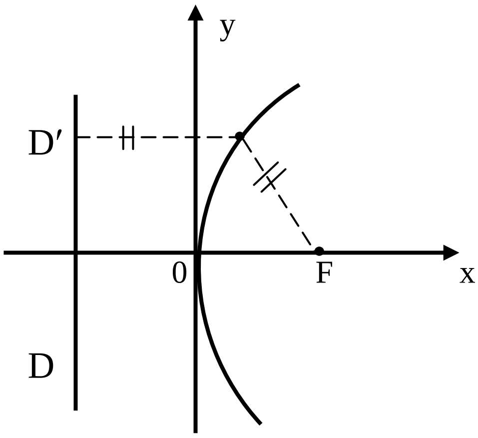
$$(y-y_0)^2 = 2P(x-x_0) \quad \text{yoki} \quad (x-x_0)^2 = 2\,P(y-y_0).$$

Masala. 0y ordinata o‘qiga va $x^2 + y^2 = 4$ aylanaga urinuvchi aylanalar markazlari to‘plami tenglamasini tuzing.

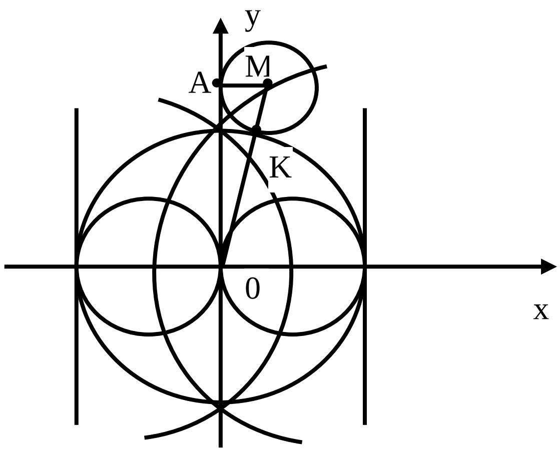
M(x; y) – aylanalar markazlari to‘plamining ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. Masala shartiga binoan KM = AM (7-rasm). Berilgan aylana radiusi 0K=2 ekanligini va KM = 0M – 0K tenglikni hisobga olsak, koordinatalarda quyidagi tenglamani olamiz:

$$x^2 + y^2 - 2 = |x| \quad \text{yoki} \quad y^2 = 4\,|x| + 4.$$

Ushbu tenglama uchlari (-1; 0) va (1; 0) nuqtalarda, fokuslari koordinatalar boshida, direktrisalari mos ravishda $x = -2$ va $x = 2$ to‘g‘ri chiziqlardan iborat, abssissa o‘qi simmetriya o‘qi bo‘lgan parabolalarni ifodalaydi (7-rasm).



6-rasm.



7-rasm.

Nazorat savollari

1. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning umumiy ko‘rinishdagi tenglamasini yozing.
2. Umumiy tenglama koeffitsientlari qanday munosabatlarni qanoatlantirganda, ikkinchi tartibli egri chiziq aynan aylanani aniqlaydi?
3. Tekislikda qanday nuqtalar to‘plamiga ellips deyiladi?
4. Ellipsning kanonik shakldagi tenglamasini yozing va uni izohlang?
5. Ellipsning uchlari, yarim o‘qlari, simmetriya markazi va simmetriya o‘qlarini ko‘rsating.
6. Ellipsning ekstsentrisiteti deb qanday kattalikka aytiladi va u nimani xarakterlaydi?
7. Qanday ellipsga aylana deyiladi?
8. Tekislikda qanday nuqtalar to‘plamiga giperbola deyiladi?
9. Giperbolaning kanonik shakldagi tenglamasini yozing va uni sharhlang.
10. Giperbolaning haqiqiy va mavhum uchlarini, yarim o‘qlarini ko‘rsating, simmetriya markazi, simmetriya o‘qlari va asosiy to‘g‘ri to‘rtburchagi mavjudmi?
11. Giperbolaning ekstsentrisiteti deb qanday kattalikka aytiladi va u nimani xarakterlaydi?

12. Qanday to‘g‘ri chiziqlarga giperbolaning asimptotalari deyiladi va ularning tenglamalarini yozing?

13. Qanday giperbolaga teng tomonli giperbola deyiladi va uning kanonik tenglamasini yozing?

14. Tekislikda qanday nuqtalar to‘plamiga parabola deyiladi?

15. Parabolaning kanonik shakldagi tenglamasini yozing va uni izohlang?

16. Parabola fokusini aniqlang va direktrisasi tenglamasini yozing?

17. Ordinata o‘qi simmetriya o‘qi bo‘lgan parabola, uning direktrisasi tenglamalarini yozing va fokusini aniqlang?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Ikkinchi tartibli egri chiziq.
2. Ellips va uning kanonik tenglamasi.
3. Ellips fokuslari, uchlari, katta va kichik yarim o‘qlari, simmetriya markazi va simmetriya o‘qlari.
4. Ellips ekstsentrisiteti.
5. Giperbola va uning kanonik tenglamasi.
6. Giperbola fokuslari, haqiqiy va mavhum uchlari, yarim o‘qlari, simmetriya markazi va simmetriya o‘qlari.
7. Giperbola ekstsentrisiteti.
8. Giperbola asimptotalari va ularning tenglamalari.
9. Teng tomonli giperbola.
10. Parabola va uning kanonik tenglamasi.
11. Parabola fokusi, direktrisasi, uchi va simmetriya o‘qi.

Mustaqil ishlash uchun misollar

13.1. Ellipsning kanonik tenglamasini quyidagi berilganlar bo‘yicha tuzing:

a**)** $F_1(-3; 0)$ va $F_2(3; 0)$ fokuslarigacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi $2a = 10$;

b) uchlari $A_1(-5; 0)$, $A_2(5; 0)$, $B_1(0; -3)$ va $B_2(0; 3)$ nuqtalarda;

c**)** fokuslari orasidagi masofa $2c = 8$ va ekstsentrisiteti $\varepsilon = 0{,}5$;

d) (1; 3) va (-4; -1) nuqtalardan o‘tuvchi;

e) katta yarim o‘qi $a = 10$ va ekstsentrisiteti $\varepsilon = 0{,}6$;

f**)** $(-2; \frac{11}{\sqrt{15}})$ nuqtadan o‘tib, ekstsentrisiteti $\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{15}}$;

13.2. Abssissa o‘qi bilan A(4; 0) uchida, ordinata bilan esa B(0; 3) uchida urinuvchi ellips tenglamasini tuzing.

13.3. R(1; -1) nuqtadan $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ ellipsga kesuvchi o‘tkazilgan. Agar R nuqta hosil bo‘lgan vatarning o‘rta nuqtasi bo‘lsa, kesuvchi tenglamasini tuzing.

13.4. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ellips to‘g‘ri burchak ostida ko‘rinadigan nuqtalar geometrik o‘rni tenglamasini quring.

13.5. Giperbolaning kanonik tenglamasini quyida berilganlar bo‘yicha tuzing:

a**)** $F_1(-4;\ 0)$ va $F_2(4;\ 0)$ fokuslarigacha masofalar ayirmasining moduli 2a = 6;

b**)** haqiqiy uchlari orasidagi masofa 2a = 8, fokuslari orasidagi masofa 2c = 10;

c**)** haqiqiy yarim o‘qi a = 3 va (6; $2\sqrt{3}$) nuqtadan o‘tuvchi;

d**)** ($4\sqrt{17}$; 4) va (4; 0) nuqtalardan o‘tuvchi;

e**)** (-5; 3) nuqtadan o‘tib, ekstsentrisiteti $\varepsilon=\sqrt{2}$;

f**)** (-$\sqrt{2}$; 1) nuqtadan o‘tib, teng yonli bo‘lgan;

g**)** asimptotalari orasidagi burchak 60^0 va (6; -3) nuqtadan o‘tuvchi.

13.6. F(-8; 0) nuqtaga nisbatan x = -2 to‘g‘ri chiziqqa ikki marta yaqin masofada joylashgan M(x; y) nuqta harakat traektoriyasini quring?

13.7. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ giperbola to‘g‘ri burchak ostida ko‘rinadigan nuqtalar geometrik o‘rni tenglamasini quring.

13.8. Parabolaning kanonik tenglamasini quyidagi berilganlar bo‘yicha tuzing:

a) 0x o‘qida joylashgan fokusi va uchigacha masofa $\frac{P}{2}=4$;

b) 0y o‘qida joylashgan fokusi va direktrisasi orasidagi masofa R = 6;

v) abssissa o‘qi simmetriya o‘qi bo‘lib, M(2; 3) nuqtadan o‘tuvchi;

g) uchi koordinatalar boshida va fokusi (3; 0) nuqtada;

d) uchi koordinatalar boshida va direktrisasi y + 12 = 0.

13.9. $\mathbf{y}^2$ = 12x parabola nuqtalaridan x – y + 7 = 0 to‘g‘ri chiziqqacha eng qisqa masofani toping.

13.10. $\mathbf{y}^2$ = 4x parabola to‘g‘ri burchak ostida ko‘rinadigan nuqtalar geometrik o‘rni tenglamasini quring.

14-§. Fazoda analitik geometriya elementlari. Fazoda tekislik

1. Fazoda tekislikning turli ko‘rinishdagi tenglamalari. Nuqtasi va normal vektori bilan berilgan tekislik tenglamasi

R_3 fazoda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi tanlangan bo‘lib, **a** radius vektor berilgan bo‘lsin. **a** radius vektor oxiridan vektorga yagona mumkin bo‘lgan perpendikulyar tekislik (T) o‘tkazilgan, M(x, y, z) nuqta tekislikning ixtiyoriy nuqtasi va **0M** = **r**(x, y, z) nuqtaning radius vektori bo‘lsin.

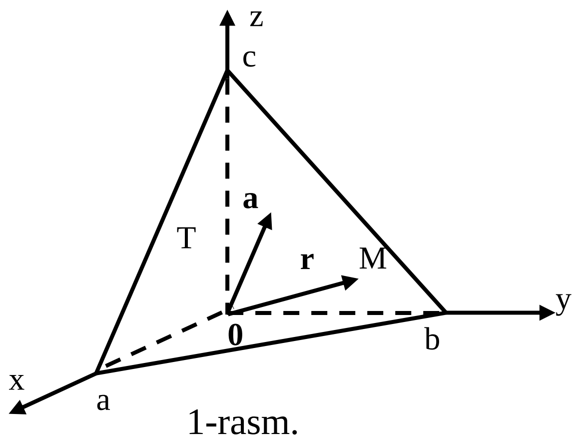
$|\mathbf{a}| = P$, $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{a}}{P} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ - **a** vektorning birlik vektori, α, β va γ **a** yoki **v** vektorning koordinata o‘qlarining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchaklari bo‘lsin (1-rasm).

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ va $\cos\gamma$ **a** yoki **v** vektorning yo‘naltiruvchi kosinuslari deyiladi. Har qanday **r** vektorning **v** vektordagi sonli proeksiyasi P ga teng:

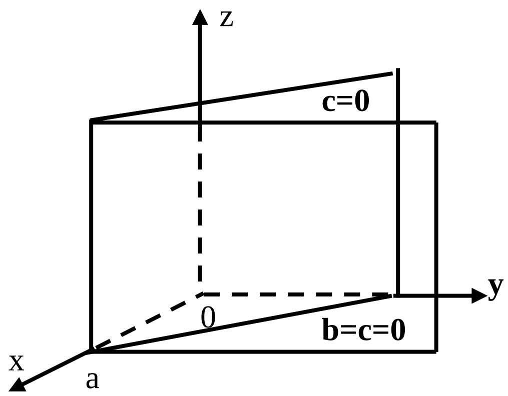
$$Pr_{\mathbf{v}}\,\mathbf{r} = (\mathbf{r}, \mathbf{v}) = P \quad (P \geq 0) \qquad (1)$$

(1) tenglamaga T tekislikning vektor shakldagi tenglamasi deyiladi. Vektor tenglama koordinatalarda

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = P \quad (P \geq 0) \qquad (2)$$



1-rasm.



2-rasm.

ko‘rinishda yoziladi. (2) tenglama tekislikning normal shakldagi tenglamasi deyiladi. Agar (2) tenglamani noldan farqli biror-bir songa ko‘paytirsak, tenglamaga teng kuchli

$$A x + B y + C z + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0) \qquad (3)$$

ko‘rinishdagi tenglamani olamiz. (3) tenglamaga T tekislikning umumiy ko‘rinishdagi tenglamasi deyiladi.

Har qanday (3) ko‘rinishdagi tenglamani (2) normal shakldagi tenglamaga keltirish mumkin. Buning uchun umumiy tenglamani normallovchi ko‘paytuvchi $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ ga ko‘paytirish yetarli. P= -μ D ning nomanfiyligini ta’minlash maqsadida “+” yoki “–” ishoralaridan ozod had D ishorasining qarama-qarshisi tanlanadi. Natijada

$$\mu A x + \mu B y + \mu C z = P \quad (P \geq 0)$$

Bu yerda, $(\mu A)^2 + (\mu B)^2 + (\mu C)^2 = 1$ munosabat o‘rinli bo‘lib, **ν** = (μA, μB, μC) vektorning birlik vektor va uning koordinata o‘qlaridagi sonli proektsiyalari, mos ravishda quyidagilarga

$$\mu A = \cos\alpha, \quad \mu B = \cos\beta, \quad \mu C = \cos\gamma$$

tengligini payqash qiyin emas.

Agar tekislik umumiy ko‘rinishdagi tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, tenglama shaklidan tekislikning o‘zi haqida quyidagilarni aniqlash mumkin: 1) agar D = 0 bo‘lsa, A x + B y + C z = 0 tekislik koordinata boshidan o‘tadi; 2) **N** = (A, B, C) vektor T tekislikka perpendikulyar, ya’ni tekislikning normal vektoridir, chunki u **ν** = (μA, μB, μC) vektorga kollinear: μ**N** = **ν**.

Umumiy tenglamaning xususiy hollarini tahlil qilish mumkin. Agar C = 0 bo‘lsa, Ax + By + D = 0 tenglama bir tomondan x0u koordinatalar tekisligida to‘g‘ri chiziqni ifodalasa, R_3 fazoda to‘g‘ri chiziqdan o‘tib, x0u koordinatalar tekisligiga perpendikulyar yoki 0z applikata o‘qiga parallel tekislikni aniqlaydi (2-rasm). B = C = 0 bo‘lsa, Ax + D = 0 tekislik 0x abssissa o‘qini $x = -\frac{D}{A} = a$ nuqtada o‘qqa perpendikulyar yoki y0z koordinatalar tekisligiga parallel ravishda kesuvchi tekislikni aniqlaydi (2-rasm) va hokazo. X = 0 – y0z koordinatalar tekisligi tenglamasi, y = 0 – x0z koordinatalar tekisligi tenglamasi va z = 0 esa x0y koordinatalar tekisligi tenglamasidir.

Agar umumiy ko‘rinishdagi tekislik tenglamasida A, B, C va D sonlarning har biri noldan farq qilsa, u holda (3) umumiy tenglama quyidagi ko‘rinishga keltirilishi mumkin

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{4}$$

bu yerda, $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$ va $c = -\frac{D}{C}$. (4) tenglamaga tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi deyiladi (2 – rasm).

Berilgan $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan berilgan **N**(A, B, C) vektorga perpendikulyar ravishda o‘tuvchi tekislik tenglamasi vektor shaklda (**N, r–**

$\mathbf{r_0}) = 0$ ko‘rinishda yozilsa, koordinatalarda

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$$

shaklda yoziladi. Bu yerda, $\mathbf{r_0}$ – M_0 nuqtaning radius vektori.

Masala. $M_0(-2, 3, -1)$ nuqtadan o‘tib, **N=**(1, -4, 2) vektorga perpendikulyar tekislik tenglamasini tuzing.

Tuzilgan tenglamaga binoan: $1\cdot(x+2)-4\cdot(y-3)+2\cdot(z+1)=0$ yoki $x-4y+2z+16=0$.

2. Berilgan uch nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi. Tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchak. Tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari

Fazoda bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan uchta $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$ va $(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalar berilgan bo‘lib, ular orqali o‘tuvchi yagona tekislik tenglamasini tuzish masalasi qo‘yilgan bo‘lsin.

Tekislik $(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o‘tgani uchun $A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$ tenglama o‘rinli, bu yerda A, B va C koeffitsientlar bir vaqtda nolga teng emas. Tekislik berilgan ikkinchi $(x_2; y_2; z_2)$ va uchinchi $(x_3; y_3; z_3)$ nuqtalardan ham o‘tgani uchun quyidagi munosabatlar o‘rin-li:

$$A(x_2-x_1) + B(y_2-y_1) + C(z_2-z_1) = 0,$$
$$A(x_3-x_1) + B(y_3-y_1) + C(z_3-z_1) = 0.$$

A, B va C noma’lumlarga nisbatan uchta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo‘ldi. Ma’lumki, ushbu bir jinsli sistema determinanti nolga teng bo‘lgandagina nolmas yechimlarga ega. Demak, berilgan bir to‘g‘ri chiziqda yetmaydigan uchta nuqtadan o‘tuvchi yagona tekislik tenglamasi

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

shaklda yoziladi. Tenglamani quyidagi ko‘rinishda ham yozish mumkin:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Oxirgi ikki tenglamaning o‘zaro teng kuchli ekanligini tekshirib ko‘rish qiyin emas.

Ikki T_1 va T_2 tekislik umumiy ko‘rinishdagi tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (T_1) \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (T_2) \end{cases}$$

Berilgan tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchak ularning normal $\mathbf{N_1}(A_1; B_1; C_1)$ va $\mathbf{N_2}(A_2; B_2; C_2)$ vektorlari orasidagi φ burchakka teng. Ushbu tenglik tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchakni topish masalasini ularning normal vektorlari orasidagi burchakni topish masalasi bilan almashtirish imkonini beradi:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{N_1}, \mathbf{N_2})}{|\mathbf{N_1}||\mathbf{N_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Bu yerda, $0 \le \varphi \le \pi$. Berilgan tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari quyidagilardan iborat:

$$T_1 \perp T_2: \quad (\mathbf{N_1}, \mathbf{N_2}) = 0 \quad \text{yoki} \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0,$$

$$T_1 \,||\, T_2: \quad \mathbf{N_1} = \lambda\mathbf{N_2} \quad \text{yoki} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Masala. $x + y + z = 1$ va $z = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni toping.

Berilgan tekisliklar hosil qilgan ikki yoqli burchak mos normal vektorlar (1, 1, 1) va (0, 0, 1) orasidagi φ burchakka teng:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1}}.$$

Demak, $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3. Berilgan nuqtadan berilgan tekislikgacha masofa

R_3 fazoda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi kiritilgan bo‘lib, berilgan M_0 nuqtadan umumiy ko‘rinishdagi tenglamasi bilan berilgan $Ax + By + Cz + D = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$ tekislik orasidagi d masofani topish masalasi qo‘yilgan bulsin.

$\mathbf{r_0}(x_0, y_0, z_0)$ vektor M_0 nuqtaning radius vektori va $\mathbf{r}(x, y, z)$ vektor esa tekislikning ixtiyoriy M nuqtasi radius vektori bo‘lsin. d masofa $\mathbf{r_0} - \mathbf{r}$ vektorning **a** yoki **v** vektordagi sonli proeksiyasining absolut qiymatiga teng: $d = |Pr_{\mathbf{v}}(\mathbf{r_0}-\mathbf{r})|$. Masofani hisoblash formulasi vektor ko‘rinishda yoki tekislikning normal tenglamasi parametrlari orqali yozilishi mumkin (13-mavzuga qarang). Tekislikning umumiy tenglamasi parametrlari orqali esa

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

ko‘rinishda yoziladi.

Masala. (-1, 4, -3) nuqtadan x+2y–2z+5=0 tekislikgacha bo‘lgan masofani toping.

Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofani hisoblash formulasiga binoan:

$$d = \frac{|-1 + 2\cdot 4 - 2\cdot(-3) + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 6 \text{ (bir.).}$$

Nazorat savollari

1. Fazoda kiritilgan to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan tekislik vaziyati qanday aniqlanadi?
2. Tekislikning vektor shakldagi tenglamasini yozing va uni izohlang?
3. Tekislikning normal shakldagi tenglamasini yozing?
4. Tekislikning umumiy ko‘rinishdagi tenglamasi deb, qanday shakldagi tenglamaga aytiladi?
5. Umumiy tenglama koeffitsientlarining geometrik ma’nosi nimadan iborat?
6. Tekislik umumiy ko‘rinishdagi tenglamasi uning normal shakldagi tenglamasiga qanday keltiriladi?
7. Tekislik umumiy tenglamasining mumkin bo‘lgan barcha xususiy hollarini sharhlab bering?
8. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi deb, qanday shakldagi tenglamaga aytiladi va nima uchun?
9. Koordinatalar fazosida berilgan nuqtadan berilgan vektorga perpendikulyar ravishda o‘tuvchi tekislik tenglamasini yozing?
10. Fazoda bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan berilgan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasining qanday shakllarini bilasiz?
11. Ikki tekislik orasidagi ikki yoqli burchakni topish masalasi qanday yechiladi?
12. Tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik shartlarini yozing?
13. Koordinatalar fazosida berilgan nuqtadan berilgan tekislikgacha bo‘lgan masofani hisoblash formulasini yozing?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Tekislikning vektor shakldagi tenglamasi.
2. Tekislikning normal tenglamasi.
3. Tekislikning umumiy tenglamasi.
4. Tekislik umumiy tenglamasini normallash.
5. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi.
6. Nuqtadan vektorga perpendikulyar ravishda o‘tuvchi tekislik tenglamasi.
7. Uchta bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi.
8. Tekisliklar orasidagi ikki yoqli burchak.
9. Tekisliklarning perpendikulyarligi.
10. Tekisliklarning parallelligi.
11. Nuqtadan tekislikgacha masofa.

Mustaqil ishlash uchun misollar

14.1. (1; 2; -3) nuqtadan o‘tib, **n**(4; -1; 5) vektorga perpendikulyar bo‘lgan tekislik tenglamasini tuzing.

14.2. (0; -1; 2), (2; 1; 3) va (1; 2; 3) nuqtalardan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

14.3. (2; -3; 1) nuqtadan o‘tib, $4x+y-2z+7 = 0$ tekislikka parallel va perpendikulyar ravishda o‘tuvchi tekisliklar tenglamalarini tuzing.

14.4. 0y ordinata o‘qidan va (1; 2; 3) nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasini tuzing.

14.5. ABCD tetraedr uchlari berilgan A(3; -1; 5), B(4; -1; 3), C(0; 5; 1) va D(4; 0; 2):

a) C nuqtadan o‘tib, AB qirraga perpendikulyar bo‘lgan tekislik tenglamasini yozing.

b) D uchidan o‘tib, ABC yoqqa parallel tekislik tenglamasini yozing.

14.6. Quyidagi tekisliklarning koordinatalari sistemasiga nisbatan joylashishi xususiyatlarini ko‘rsating:

a) $x – y + 1 = 0$; b) $x + 2z = 0$; c) $x - 2y + 3z = 0$;
d) $y – z + 2 = 0$; e) $x + 3 = 0$; f) $2z + 3 = 0$;
g) $2x – z + 4 = 0$; h) $3y + z = 0$; i) $4x + 3y = 0$;
j) $2y - 5 = 0$.

14.7. Tekisliklar tenglamalarini tuzing:

a) (3; 2; -1) nuqtadan o‘tuvchi va koordinatalar tekisligini har biriga parallel bo‘lgan;

b) (-2; 3; 1) nuqtadan va koordinata o‘qlarining har biridan o‘tuvchi.

14.8. Quyidagi tekislik tenglamalarini kesmalarga nisbatan va normal ko‘rinishga keltiring:

a) $3x - 2y - 6z + 5 = 0$; b) $-x + 8y - 4z + 17 = 0$.

14.9. (4; 5; -3) va (2; -1; 3) nuqtalardan baravar uzoqlashgan nuqtalar geometrik o‘rni tenglamasini yozing.

14.10. $x+5y-z+2=0$ va $4x-y+3z-1=0$ tekisliklar kesishish chizig‘idan o‘tuvchi va: a) koordinatalar boshidan; b) (1; 1; 1) nuqtadan; **c)** 0y o‘qiga parallel bo‘lgan tekisliklar o‘tkazing.

14.11. Quyida tekislik juftliklari orasidagi ikki yoqlama burchaklarni toping:

a) $2x-2y+z+5 = 0$ va $16x+8y+2z-1= 0$;

b) $2x+5y+4z+8 = 0$ va $6x-3z+1= 0$.

14.12. Quyidagi nuqtalardan berilgan tekisliklargacha masofalarni to ping:

a) (3; -1; 4), $2x+2y+z-9 = 0$;

b) (1; 0; -3), $2x+3y+5 = 0$;

v) (-1; 2; $\sqrt{2}$), $5x-3y+\sqrt{2}z = 0$.

14.13. $Ax+By+Cz+D_1= 0$ va $Ax+By+Cz+D_2 = 0$ o‘zaro parallel tekisliklar orasidagi masofani topish formulasini keltirib chiqaring.

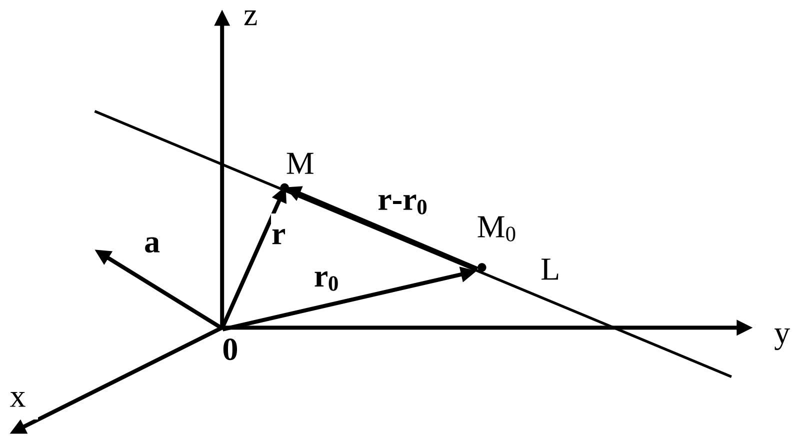
15-§. Fazoda to‘g‘ri chiziq

1. To‘g‘ri chiziq va tekislikning perpendikulyarlik va parallellik shartlari

Fazoda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi tanlangan bo‘lib, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta va nolmas $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ radius vektor berilgan bo‘lsin. M_0 nuqtadan **a** vektorga parallel L to‘g‘ri chiziq o‘tkazamiz. M(x, y, z) nuqta L to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi va $\mathbf{r}(x, y, z)$ vektor uning radius vektori, $\mathbf{r_0}(x_0, y_0, z_0)$ vektor esa berilgan M_0 nuqtaning radius vektori bo‘lsin. $\mathbf{r}–\mathbf{r_0}$ vektor L to‘g‘ri chiziqda yotgani uchun berilgan **a** vektorga kollineardir:

$$\mathbf{r} - \mathbf{r_0} = t\,\mathbf{a} \qquad (1)$$

(1) tenglamada t ixtiyoriy haqiqiy son bo‘lib, parametr deyiladi. Agar t parametr haqiqiy sonlar o‘qida turli son qiymat qabul qilsa, $\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + t\,\mathbf{a}$ vektor oxiri L to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakat qiladi (1-rasm). (1) tenglamaga fazoda berilgan nuqtadan berilgan vektor yo‘nalishida o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning vektor tenglamasi deyiladi.



1-rasm.

Koordinatalarda (1) tenglama quyidagi uchta tenglamalarga ajraladi:

$$\begin{cases} x - x_0 = ta_1, \\ y - y_0 = ta_2, \\ z - z_0 = ta_3. \end{cases} \qquad (2)$$

(2) tenglamalarga to‘g‘ri chiziqning parametrli tenglamalari deyiladi. Agar (2) sistemada t parametr yo‘qotilsa, quyidagi qo‘sh tenglama hosil bo‘ladi:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \qquad (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0) \qquad (3)$$

(3) ko‘rinishdagi tenglamaga fazoda to‘g‘ri chiziqning kanonik ko‘rinishdagi tenglamasi deyiladi. (3) tenglamada a_1, a_2, a_3 sonlardan ixtiyoriy biri yoki ikkitasi nolga teng bo‘lishi mumkin.

Ushbu hollarda, qulayligi uchun maxrajlarda bir yoki ikkita nollar yozish qabul qilingan bo‘lib, yozuv shartli tus oladi. (3) tenglama fazoda $M_0(x_0, u_0, z_0)$ nuqtadan o‘tib, $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$ vektorga parallel to‘g‘ri chiziqni aniqlaydi.

Masala. Koordinatalar fazosida (2, -3, 1) nuqtadan o‘tib, (-1, 0, 4) vektorga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

To‘g‘ri chiziqning kanonik ko‘rinishdagi tenglamasi, (3) tenglamaga binoan,

$$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y + 3}{0} = \frac{z - 1}{4}$$

shaklda bo‘ladi. Ushbu tenglamalar o‘z navbatida quyidagi tenglamalar sistemasiga teng kuchli:

$$\begin{cases} 4x + z - 7 = 0, \\ \quad y + 3 = 0. \end{cases}$$

Shunday qilib, qaralayotgan to‘g‘ri chiziq z = - 4x+7 va y= -3 tekisliklarning umumiy kesishish to‘g‘ri chizig‘idan iborat.

Fazoda ikki tekislik o‘zlarining umumiy
$A_1x + B_1 y + C_1z + D_1 = 0$ (T_1) va $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ (T_2) ko‘rinishdagi tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin.

Agar $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, T_1 va T_2 tekisliklar turli o‘zaro parallel tekisliklarni aniqlaydi. Agar $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ munosabatlar bajarilsa, T_1 va T_2 tekisliklar ustma – ust joylashadi, ya’ni berilgan tenglamalar teng kuchli bo‘lib, aynan bir tekislikni aniqlaydi. Qolgan barcha hollarda tekisliklar to‘g‘ri chiziq bo‘ylab kesishadi. Berilgan tekisliklar umumiy tenglamalaridan tuzilgan

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{4}$$

sistema aynan to‘g‘ri chiziqni aniqlashi uchun
$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ matritsa rangining 2 ga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.
Yoki xuddi shuning o‘zi, quyidagi ikkinchi tartibli

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

aniqlovchilardan birining noldan farqli bo‘lishi kifoya.

Aniqlik uchun ulardan birinchisi noldan farqli bo‘lsin. Unda (4) tenglamalar sistemasini x va y ga nisbatan yechish mumkin:

$$\begin{cases} x = \alpha z + \mu, \\ y = \beta z + \nu. \end{cases}$$

Yuqoridagi tenglamalar sistemasi esa, quyidagi

$$\frac{x-\mu}{\alpha} = \frac{y-\nu}{\beta} = \frac{z}{1}$$

tenglamalarga teng kuchli, bu yerda, α, β, μ va ν ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Haqiqatdan ham, ushbu tenglamalar fazoda $(\mu, \nu, 0)$ nuqtadan o‘tib, $(\alpha, \beta, 1)$ vektorga parallel to‘g‘ri chiziqni aniqlaydi.

Asosiy matritsasi rangi 2 ga teng bo‘lganda, (4) ko‘rinishdagi tenglamalar sistemasiga fazoviy to‘g‘ri chiziqning umumiy shakldagi tenglamalari deyiladi.

Masala. 0u ordinata o‘qining kanonik shakldagi tenglamalarini tuzing.
0u o‘qi x0u va u0z koordinata tekisliklari kesishmasidan iborat:

$$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} x = 0y \\ z = 0y \end{cases}$$

Oxirgi tenglamalar sistemasini shartli ravishda $\frac{x}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$ ko‘rinishda yozish mumkin. Haqiqatdan ham, 0u o‘qi (0, 0, 0) nuqtadan o‘tib, **j**(0, 1, 0) vektor yo‘nalishidagi to‘g‘ri chiziqdir.

2. Fazoda ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. Fazoda to‘g‘ri chiziqning turli ko‘rinishdagi tenglamalari.

Fazoda ikki L_1 va L_2 to‘g‘ri chiziqlar kanonik

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3} \ (L_1) \text{ va } \frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3} \ (L_2)$$

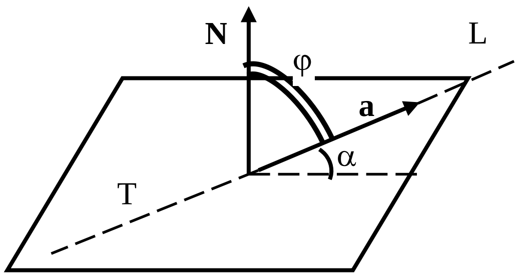
ko‘rinishdagi tenglamalari bilan berilgan bo‘lib, ular orasidagi burchak kattaligini topish masalasi qo‘yilgan bo‘lsin. Berilgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi φ burchak, L_1 va L_2 larning yo‘naltiruvchi vektorlari **a**(a_1, a_2, a_3) va **b**(b_1, b_2, b_3) orasidagi burchakka teng. Berilgan to‘g‘ri chiziqlar bir tekislikda yotishi yoki o‘zaro ayqash bo‘lishi mumkin. Barcha hollarda ular orasidagi burchakni topish masalasi to‘g‘ri chiziqlarning yo‘naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakni topish masalasiga keltiriladi:

$$\cos\varphi = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Fazoda umumiy ko‘rinishdagi tenglamasi bilan (T) tekislik va kanonik ko‘rinishdagi tenglamalari bilan (L) to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \ (T), \qquad \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \ (L)$$

Berilgan to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi α burchak sinusi (L) to‘g‘ri chiziq yo‘naltiruvchi vektori **a**(a_1, a_2, a_3) bilan (T) tekislik normal vektori **N**(A, B, C) orasidagi φ burchak kosinusiga teng (2-rasm).



2-rasm

Masala vektorlar orasidagi burchak kattaligini topish masalasiga keltirildi. Shunday qilib,

$$\cos\varphi = \sin\alpha = \frac{a_1 \cdot A + a_2 \cdot B + a_3 \cdot C}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

To‘g‘ri chiziq va tekisliklarning perpendikulyarlik va parallellik shartlari quyidagi munosabatlardan iborat:

$$L \perp T: \quad \frac{a_1}{A} = \frac{a_2}{B} = \frac{a_3}{C}, \qquad L \,||\, T: \quad a_1A + a_2B + a_3C = 0.$$

Masala. (-3, 4, -2) nuqtadan o‘tib, $x + 2y - 5z + 8 = 0$ tekislikka perpendikulyar bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

To‘g‘ri chiziq tekislikka perpendikulyar bo‘lganidan, tekislik normal vektori to‘g‘ri chiziq yo‘naltiruvchisidir. Demak, to‘g‘ri chiziqning kanonik shakldagi tenglamalari

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+2}{-5}$$

ko‘rinishga ega.

Nazorat savollari

1. Fazoda kiritilgan to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan to‘g‘ri chiziq qanday aniqlanadi?
2. Fazoda to‘g‘ri chiziqning vektor tenglamasini yozing?
3. To‘g‘ri chiziqning parametrli tenglamalari deb qanday tenglamalarga aytiladi?
4. Berilgan nuqtadan berilgan vektor yo‘nalishida o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning kanonik ko‘rinishdagi tenglamalarini yozing va uni izohlang?
5. Fazoda to‘g‘ri chiziqning umumiy shakldagi tenglamalarini yozing va uni izohlang?
6. 0z applikata o‘qining kanonik tenglamalarini tuzing?
7. Fazoda kanonik ko‘rinishdagi tenglamalari bilan berilgan to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak qanday aniqlanadi?
8. Fazoda to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak qanday aniqlanadi?
9. To‘g‘ri chiziq bilan tekislik perpendikulyarlik va parallellik shartlarini yozing?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Fazoda nuqtadan o‘tuvchi va vektorga parallel to‘g‘ri chiziq kanonik tenglamalari.
2. Fazoda to‘g‘ri chiziqning umumiy shakldagi tenglamalari.

3. Fazoda to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak.
4. To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak.
5. To‘g‘ri chiziq va tekislik perpendikulyarligi.
6. To‘g‘ri chiziq va tekislik parallelligi.

Mustaqil ishlash uchun misollar

15.1. Quyida berilgan to‘g‘ri chiziqlarda yotuvchi bir nechta nuqta koordinatalarini aniqlang:

a) $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{4}$ b) $\begin{cases} x=3+t \\ y=2t \\ z=-4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x-y+z+6=0 \\ x+3y-4z-1=0 \end{cases}$

15.2. a) $\begin{cases} x+y-z+3=0 \\ 2x-y+2z-4=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=2-t \\ y=-5+2t \\ z=3+4t \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqlarning koordinata tekisliklari bilan kesishish nuqtalarini toping.

15.3. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi to‘g‘ri chiziq tenglamalarini tuzing:

a) (2; -3; 1) va (-1; 4; -2) nuqtalardan o‘tuvchi;

b) (-4; 3; -2) nuqtadan o‘tib, **a**(1; 0; -3) vektorga parallel va perpendikulyar bo‘lgan;

c) 2x-y+3z+4 = 0 tekislikning 0xu koordinatalar tekisligi bilan kesishmasi;

d) x+y-z+2 = 0 tekislik bilan (1; 0; 3), (1; -1; -2), (2; -2; 1) nuqtalardan o‘tuvchi tekislik kesishmasi.

15.4. Quyida to‘g‘ri chiziqlarning kanonik va parametrik tenglamalarini tuzing:

a) $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-2y+3z-6=0 \\ 3x+2y-z+4=0 \end{cases}$

15.5. (1; -3; 4) nuqtadan o‘tib, $\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ 3x+2y-z+4=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini quring.

15.6. Quyidagi to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashish xususiyatlarini ko‘rsating:

a) $\begin{cases} 3x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-5z=0 \\ 2y+z+3=0 \end{cases}$ c**)** $\begin{cases} x-3=0 \\ 2y+z=0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} y=0 \\ x+2y-3z+4=0 \end{cases}$

15.7. $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ to‘g‘ri chiziq koeffitsientlari qanday shartlarni bajarganda quyidagilar o‘rinli:

a) 0u o‘qiga parallel;
b) 0x o‘qini kesib o‘tadi;
c) 0z o‘qi bilan ustma-ust yotadi;
d) 0xu koordinatalar tekisligida yotadi;
e) koordinatalar boshidan o‘tadi.

15.8. $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z}{\sqrt{5}}$ va $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-4}{\sqrt{2}}$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping.

15.9. λ ning qanday qiymatida $\frac{x-3}{\lambda}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-7}{2}$ va $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{4}$ to‘g‘ri chiziqlar kesishadi.

15.10. a) $\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{6}$ va 6x+15y-10z+7=0;

b) $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+3}{2}$ va 2x+y+z-1=0.

To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni toping.

16-§. Chiziqli fazo. Yevklid fazo

1. Chiziqli fazo va uning o‘lchovi. n o‘lchovli fazoda bazis va koordinatalar

Elementlari vektorlar deb ataluvchi L to‘plam berilgan bo‘lsin. Agar L to‘plamda:

1) ixtiyoriy **x**єL va **y**єL vektorlar juftiga **x** va **u** vektorlarning yig‘indisi deb ataluvchi yagona **z** = **x** + **y** є L vektorni mos qo‘yuvchi;

2) **x**єL vektorga va λ haqiqiy songa **x** vektorning λ songa ko‘paytmasi deb ataluvchi yagona **z** =λ**x** є L vektorni mos qo‘yuvchi qonuniyat o‘rnatilgan bo‘lsa, u holda L vektorlar to‘plamiga *haqiqiy chiziqli fazo* deyiladi.

Ta’rifda keltirilgan vektorlarni qo‘shish va vektorni songa ko‘paytirish amallari quyidagi aksiomalarga bo‘ysinadi.

a) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$,
b) $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$,
c) $\mathbf{x}+\boldsymbol{\theta}=\mathbf{x}$,
e) $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$,
f) $(\lambda+\mu)\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}$,
g) $(\lambda\mu)\mathbf{x}=\lambda(\mu\mathbf{x})$,

d) $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}$,   h) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$,

bu yerda **x**, **y** va **z** L to‘plamga tegishli ixtiyoriy vektorlar bo‘lsa λ va μ esa ixtiyoriy haqiqiy sonlardir.

Elementlari L chiziqli fazoda bo‘lgani kabi qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari vositasida chiziqli fazoni tashkil etuvchi L to‘plamning har qanday qism osti to‘plamiga L chiziqli fazoning *qism osti fazosi* deyiladi.

Chiziqli fazoning qism osti fazosiga misollar keltiramiz:

1) Ikki o‘lchovli haqiqiy arifmetik R^2 fazo chiziqli fazo sifatida o‘zining quyidagi qism osti fazolariga ega:

a) R^2 fazoning o‘zi;

b) koordinatalar boshi, ya’ni yagona ikki o‘lchovli nol vektordan iborat to‘plam (nol fazo),

c) koordinatalar boshidan o‘tuvchi har qanday to‘g‘ri chiziqda yotuvchi vektorlar to‘plami fazosi;

2) R^3 fazoning koordinatalar markazidan o‘tuvchi tekislikda yotgan vektorlar to‘plami R^3 fazoning qism osti fazosini tashkil etadi,

3) R^n fazoda mumkin bo‘lgan barcha $(x_1; x_2; \ldots; x_{n-1}; 0)$ haqiqiy sonlarning tartiblangan tizimlari to‘plami fazosi R^n fazoning qism osti fazosidir va hokazo.

L chiziqli fazoda mavjud har qanday chiziqli erkli vektorlar sistemalarining tarkibidagi vektorlar soni n ga teng va undan oshmasa, u holda chiziqli fazo *n o‘lchovli* deyiladi va L^n yozuv bilan belgilanadi. n – soniga esa *chiziqli fazoning o‘lchovi* deyiladi.

n o‘lchovli chiziqli fazoning bazisi deb, har qanday chiziqli erkli n ta vektorlarning tartiblangan tizimiga aytiladi.

L^n chiziqli fazoning har bir **x** vektorini bazis vektorlarining yagona ko‘rinishdagi chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida tasvirlash mumkin.

Agar $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ – L^n chiziqli fazoning ixtiyoriy tanlangan bazislaridan biri bo‘lsa, u holda L^n fazoning har bir **x** vektori uchun yagona $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e_1} + x_2\mathbf{e_2} + \ldots + x_n\mathbf{e_n}$ chiziqli yoyilma o‘rinli bo‘ladi. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sonlarga **x** vektorining $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ *bazisdagi koordinatalari* deyiladi va **x** vektor $\mathbf{x}(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ ko‘rinishda yoziladi.

Agar L^n chiziqli fazoda boshqa bazis tanlansa, unda **x** vektorning koordinatalari ham mos ravishda o‘zgaradi.

Masala: $\mathbf{a_1}(1; -1; 2; -3)$, $\mathbf{a_2}(-2; 1; -1; 4)$, $\mathbf{a_3}(-3; 1; 0; 5)$ va $\mathbf{a_4}(3; -2; 3; -7)$ vektorlar sistemasiga tortilgan chiziqli qism osti fazoning bazislaridan birini va uning o‘lchovini aniqlang.

Masala chiziqli bog‘liq vektorlar sistemasining bazisi va rangini topish usulida (§11 ga qaralsin) yechiladi.

$\mathbf{a_1}x_1 + \mathbf{a_2}x_2 + \mathbf{a_3}x_3 + \mathbf{a_4}x_4 = \boldsymbol{\theta}$ vektor tenglama umumiy yechimi Gauss-Jordan usulida quriladi:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 & | & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & | & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 & | & 0 \\ -3 & 4 & 5 & -7 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 3 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 3 & 6 & -3 & | & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Qurilgan umumiy yechimning bazis x_1 va x_4 noma’lumlari oldidagi vektor – koeffitsientlardan iborat $\mathbf{a_1}$ va $\mathbf{a_4}$ qism osti sistema berilgan vektorlar sistemasiga tortilgan chiziqli qism osti fazoning bazislaridan biri bo‘lib, fazo o‘lchovi 2 ga teng.

2. Yevklid fazo. Bazisni almashtirish. Ortogonal matritsa

Agar haqiqiy chiziqli fazoda skalyar ko‘paytma aniqlangan bo‘lsa, ya’ni fazoning ixtiyoriy **x** va **y** vektorlar juftiga yagona **(x, y)** haqiqiy son mos qo‘yilsa, u holda haqiqiy chiziqli fazoga *Yevklid fazo* deyiladi. Ta’rifda keltirilgan moslik har qanday **x, y, z** vektorlar va λ son uchun quyidagi aksiomalarga bo‘ysinadi:

a) **(x, y) = (y,x)**
b) **(x+y, z) = (x, z) + (y, z)**
c) **(λx, y) = λ(x, y)**
d) **(x, x) ≥ 0**

Skalyar ko‘paytma aniqlangan haqiqiy chiziqli fazo Yevklid fazoda metrika haqida gapirish mumkin. Biz oldingi mavzularda ta’riflagan vektor uzunligi (moduli yoki normasi), vektorni birlik vektorga keltirish, vektorlar orasidagi burchak, ortogonallik va ortonormallik tushunchalari, Koshi-Bunyakovskiy va Minkovskiy (yoki uchburchak) tengsizliklari Yevklid fazoga xosdir.

n o‘lchovli Yevklid fazoda n ta vektorlarning ortonormallangan bazisi mavjud.

Vektorlari ortonormallangan sistemani tashkil etgan bazisga *ortonormallangan bazis* deyiladi.

Ortonormallangan bazisda berilgan ikki $\mathbf{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ va $\mathbf{y}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi ularning mos koordinatalari ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng, ya’ni

$$(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

n o‘lchovli chiziqli L^n fazoda ikki: dastlabki $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \ldots, \mathbf{e_n}$ bazis va yangi

$\mathbf{e_1'}$, $\mathbf{e_2'}$, …, $\mathbf{e_n'}$ bazislar tanlangan bo‘lsin. Agar yangi bazis vektorlari dastlabki bazis vektorlari orqali quyidagi formulalar bo‘yicha ifodalanishi aniqlangan bo‘lsa, ya’ni

$$\begin{cases} e'_1 = P_{11}e_1 + P_{12}e_2 + \ldots + P_{1n}e_n \\ e'_2 = P_{21}e_1 + P_{22}e_2 + \ldots + P_{2n}e_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n = P_{n1}e_1 + P_{n2}e_2 + \ldots + P_{nn}e_n \end{cases} \qquad (1)$$

u holda **x** vektorning dastlabki bazisdagi koordinatalari uning yangi bazisdagi koordinatalari orqali quyidagi formulalar bo‘yicha ifodalanadi:

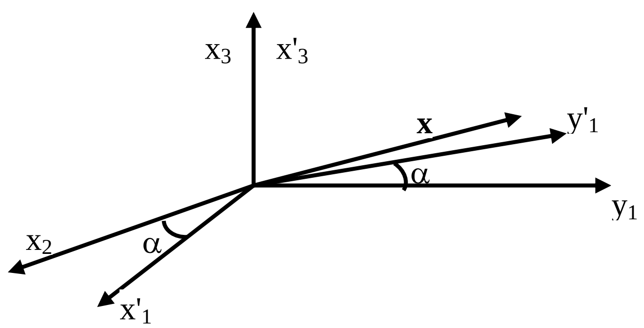
$$\begin{cases} x_1 = P_{11}x'_1 + P_{21}x'_2 + \ldots + P_{n1}x'_n \\ x_2 = P_{12}x'_1 + P_{2n}x'_2 + \ldots + P_{nn}x'_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = P_{1n}x'_1 + P_{12}x'_2 + \ldots + P_{1n}x'_n \end{cases} \qquad (2)$$

yoki matritsa shaklida $\mathbf{x} = P^T\mathbf{x'}$, bu yerda P^T (1) sistema koeffitsientlar matritsasining transponirlangan matritsasi:

$$P^T = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{21} & \ldots & P_{n1} \\ P_{12} & P_{22} & \ldots & P_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{1n} & P_{2n} & \ldots & P_{nn} \end{pmatrix}$$

Ushbu matritsaga *bazisdan yangi bazisga o‘tish matritsasi* deyiladi.

Masala. Uch o‘lchovli fazoda **i, j, k** bazisdan ikkinchi to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasini **0z** applikata o‘qi atrofida α burchakli burishdan hosil bo‘lgan **i′, j′, k′** bazisga o‘tish matritsasini tuzing.



Yangi bazis vektorlarining dastlabki bazis vektorlari orqali ifodalanishi quyidagi sistema ko‘rinishidan iborat:

$$\begin{cases} \mathbf{i}' = \cos\alpha\,\mathbf{i} + \sin\alpha\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} \\ \mathbf{j}' = -\sin\alpha\,\mathbf{i} + \cos\alpha\,\mathbf{j} + 0\,\mathbf{k} \\ \mathbf{k}' = 0\,\mathrm{i} + 0\mathbf{j} + \mathbf{k} \end{cases}$$

Dastlabki bazisdan yangi bazisga o‘tish matritsasi

$$P^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ixtiyoriy vektorning dastlabki koordinatalarini uning yangi koordinatalari orqali ifodalovchi (2) formulalar quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\begin{cases} x_1 = \cos\alpha x'_1 - \sin\alpha x'_2 \\ x_2 = \sin\alpha x'_1 + \cos\alpha x'_2 \\ x_3 = x'_3 \end{cases}$$

Agar haqiqiy elementli **P** matritsaning transponirlangan $\mathbf{P^T}$ matritsasi uning teskari $\mathbf{P^{-1}}$ matritsasiga teng bo‘lsa, ya’ni $\mathbf{P^T = P^{-1}}$, u holda **P** *ortogonal matritsa* deyiladi.

Ta’rifdan **P** ortogonal matritsa uchun $\mathbf{P\,P^T = P\,P^{-1} = E}$ tengliklar o‘rinli bo‘lishi va **P** matritsa determinanti 1 yoki –1 ga teng bo‘lishini payqash qiyin emas.

To‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasini (umuman, ortogonal koordinatalar sistemasini) har qanday almashtirganda o‘tish matritsasi rolini ortogonal matritsa o‘taydi.

Ko‘rilgan masalada **P** matritsaning ortogonalligini $\mathbf{(P^T = P^{-1})}$ tekshirib ko‘rish mumkin.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Chiziqli fazo deb nimaga aytiladi?
2. Chiziqli fazoning qism osti fazosi deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
3. n o‘lchovli chiziqli fazo deb, qanday chiziqli fazoga aytiladi?
4. Chiziqli fazo o‘lchovi deb nimaga aytiladi?
5. n o‘lchovli chiziqli fazo bazisi deb nimaga aytiladi?
6. Har qanday $\mathbf{x \in L^n}$ vektorni fazoning bazisi orqali yoyish mumkinmi?
7. Vektorning biror-bir bazisdagi koordinatalari deb nimaga aytiladi?
8. Qanday chiziqli fazoga yevklid fazosi deyiladi?
9. n o‘lchovli yevklid fazoning ortonormallangan bazisi deb nimaga aytiladi?
10. $\mathbf{L^n}$ fazoda bir bazisdan ikkinchi bazisga o‘tish matritsasi qanday tuziladi?

11. Qanday haqiqiy elementli matritsaga ortogonal matritsa deyiladi? Ortogonal matritsa determinanti haqida nima deya olasiz?

Ma'ruza tayanch iboralari

1. Chiziqli fazo.
2. Chiziqli fazo qism osti fazosi.
3. Chiziqli fazo bazisi.
4. Chiziqli fazo o'lchovi.
5. Vektorning bazisdagi koordinatalari.
6. Yevklid fazo.
7. Ortonormallangan bazis.
8. O'tish matritsasi.
9. Ortogonal matritsa.

Mustaqil ishlash uchun misollar

16.1. Quyidagi vektorlar sistemalariga tortilgan chiziqli qism osti fazosining bazislaridan birini, ortonormallangan bazisini va o'lchamini toping:

a) $\mathbf{a_1}(0; 1; -3)$, $\mathbf{a_2}(3; 5; 0)$, $\mathbf{a_3}(1; 2; -1)$;

b) $\mathbf{a_1}(1; 0; 1; 0)$, $\mathbf{a_2}(0; 1; 1; 0)$, $\mathbf{a_3}(0; 1; 0; 1)$, $\mathbf{a_4}(1; 0; 0; 1)$.

16.2. a) $\mathbf{x}(2; -1)$ vektor $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ bazisda berilgan. Vektorning $\mathbf{e'_1=e_1-3e_2}$, $\mathbf{e'_2=2e_1+e_2}$ bazisdagi koordinatalarini toping.

b) $\mathbf{x}(3; -2; 4)$ vektor $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ bazisda berilgan. Vektorning $\mathbf{e'_1=e_1+2e_2-3e_3}$, $\mathbf{e'_2=e_1+e_2+e_3}$, $\mathbf{e'_3=2e_1-e_2+2e_3}$ bazisdagi koordinatalarini toping.

16.3. Quyidagi matritsalardan ortogonallarini ajrating:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0{,}5 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

16.4. Quyida berilgan ikki vektorlar sistemalaridan har biri bazis bo'la olishini isbotlang. Ushbu bazislarda berilgan aynan bir vektorning koordinatalari orasida munosabatlarni o'rnating:

a) $\mathbf{e}_1(1; 2)$, $\mathbf{e}_2(1; 1)$, $\mathbf{e'}_1(1; -1)$, $\mathbf{e'}_2(3; 4)$;

b) $\mathbf{e}_1(2; 1; -1)$, $\mathbf{e}_2(3; 1; 2)$, $\mathbf{e}_3(1; 0; 4)$, $\mathbf{e'}_1(1; 1; -1)$, $\mathbf{e'}_2(2; 3; -2)$, $\mathbf{e'}_3(3; 4; -4)$.

16.5. $\mathbf{R}_3$ da **i, j, k** bazisdan fazoni 0u ordinata o‘qi atrofida $\boldsymbol{\alpha}$ burchakka burgandagi bazisga o‘tish matritsasini quring.

17-§. Chiziqli operatorlar va ular ustida amallar

1. Chiziqli operator va uning matritsasi

L chiziqli fazoni va uning **A** almashtirishini yoki operatorini, ya’ni har bir $\mathbf{x} \in L$ vektorga shu L fazoning biror-bir **y** vektorini mos qo‘yuvchi qonunni qaraymiz. Ushbu qonun $\mathbf{y = Ax}$ ko‘rinishida yoziladi.

L fazoning har qanday **z** va **z′** vektorlari va ixtiyoriy λ haqiqiy son uchun $\mathbf{A(z+z')=Az+Az'}$; $\mathbf{A(\lambda z)=\lambda Az}$ tengliklar o‘rinli **A** almashtirishi chiziqli *fazoning chiziqli almashtirishi* (yoki o*peratori*) deyiladi.

Agar L fazo n o‘lchovli bo‘lib, unda $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ bazis tanlangan bo‘lsa, u holda **x** vektor koordinatalari va uning aksi **y** vektor koordinatalari orasidagi bog‘liqlik quyidagi sistema ko‘rinishida aniqlanadi

$$\begin{cases} \mathbf{y}_1 = \mathbf{a}_{11}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{12}\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{a}_{1n}\mathbf{x}_n, \\ \mathbf{y}_2 = \mathbf{a}_{21}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{22}\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{a}_{2n}\mathbf{x}_n, \\ \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \mathbf{y}_n = \mathbf{a}_{n1}\mathbf{x}_1 + \mathbf{a}_{n2}\mathbf{x}_2 + \ldots + \mathbf{a}_{nn}\mathbf{x}_n, \end{cases}$$

yoki matritsa ko‘rinishida **Y = AX,** bu yerda

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \ldots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \ldots & \mathbf{a}_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{a}_{n1} & \mathbf{a}_{n2} & \ldots & \mathbf{a}_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \ldots \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \ldots \\ \mathbf{y}_n \end{pmatrix}.$$

i – ustuni tanlangan $\mathbf{Ae}_i$ vektorning koordinatalaridan tuzilgan **A** matritsaga *chiziqli almashtirish matritsasi* deyiladi.

Bazis almashtirilib, dastlabki bazisdan yangi bazisga $\mathbf{P}^T$ o‘tish matritsa yordamida o‘tilsa, chiziqli almashtirishning dastlabki bazisdagi **A** matritsasiga yangi bazisda $\mathbf{(P^T)^{-1}AP^T}$ matritsa mos keladi. **A** va $\mathbf{(P^T)^{-1}AP^T}$ matritsalar *o‘zaro o‘xshash matritsalar* deyiladi. **A** matritsadan $\mathbf{(P^T)^{-1}AP^T}$ matritsaga o‘tish **A** *matritsani o‘xshashlik almashtirishi* deyiladi.

Shunday qilib, ayni bir chiziqli almashtirishga turli bazislarda o‘xshash matritsalar mos keladi.

2. Chiziqli operatorlar ustida amallar

Chiziqli almashtirish ustida bajariladigan amallarni ko‘rib chiqamiz:

a) Almashtirishlarni qo‘shish. Ikki chiziqli almashtirishlar matritsa ko‘rinishida berilgan bo‘lsin: **Y = AX, Z = BX.** Chiziqli almashtirish-lar-ning yig‘indisi deb, quyidagicha aniqlanadigan **S** almashtirishga aytiladi.

$$\mathbf{Y + Z = (A + B)X = CX}\ .$$

b) Almashtirishni songa ko‘paytirish. Matritsa ko‘rinishida **Y=AX** chiziqli almashtirish va ixtiyoriy λ haqiqiy son berilgan bo‘lsin. Berilgan almashtirishni λ songa ko‘paytmasi deb, quyidagi **V** almashtirishga aytiladi: **Z = (λA)X = BX.**

v) Almashtirishlarni ko‘paytirish. Ikki ketma-ket chiziqli almashtirishlar **Y = AX** va **Z = BY** berilgan bo‘lsin. **Y** uchun ifodani birinchi formuladan ikkinchisiga qo‘ysak, **Y = AX** almashtirishning **Z = BY** almashtirishga ko‘paytmasi deb ataladigan quyidagi **F** almashtirishni olamiz:

$$\mathbf{Z = B(AX) = (BA)X = FX}$$

g) Teskari almashtirish. Matritsa shaklida **Y=AX** chiziqli almashtirish berilgan bo‘lib, **A** - kvadrat maxsusmas matritsa **(detA≠0)** bo‘lsin. Tenglama ikkala qismini chapdan teskari $\mathbf{A^{-1}}$ matritsaga ko‘paytirib, **Y=AX** chiziqli almashtirishning teskari almashtirishi deb ataluvchi $\mathbf{X=A^{-1}Y}$ chiziqli almashtirishni olamiz.

3. Chiziqli operator xos vektori va xos qiymati

Agar shunday bir λ son tanlash mumkin bo‘lsaki, bunda $\mathbf{Ax=\lambda x}$ tenglikni qanoatlantiruvchi har qanday nolmas **x** vektorga **A** *chiziqli almashtirishning xos vektori* deyiladi. λ sonning o‘ziga esa **A** chiziqli almashtirishning **x** xos vektoriga mos keluvchi *xos qiymati* deyiladi.

Xos vektorlar quyidagi xossalarga ega:

1. Har bir xos vektorga yagona xos qiymat mos keladi;

2. Agar $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}$ – **A** chiziqli almashtirishning ayni bir λ xos qiymatga mos keluvchi xos vektorlari bo‘lsa, u holda ularning yig‘indisi $\mathbf{x_1+x_2}$ vektor ham **A** chiziqli almashtirishning λ xos qiymatiga mos keluvchi xos vektori bo‘ladi.

3. Agar **x** – **A** chiziqli almashtirishning λ xos qiymatiga mos xos vektori bo‘lsa, **x** ga kollinear har qanday **kx** vektor ham **A** chiziqli almashtirishning o‘sha λ xos qiymatiga mos xos vektori bo‘ladi.

Agar $\mathbf{L^n}$ fazoda bazis tanlangan bo‘lsa, $\mathbf{Ax = \lambda x}$ tenglikni matritsa shaklida yozish mumkin: $\mathbf{AX = \lambda X}$.

Tenglikni qanoatlantiruvchi har qanday nolmas ustun **A** matritsaning λ xos qiymatiga *mos xos vektori* deyiladi.

AX = λX <=> **AX = λEX** <=> **(A-λE)X = θ** bo'lib, oxirgi tenglik koordinatalarda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} (\mathbf{a_{11}} - \lambda)\mathbf{x_1} + \mathbf{a_{12}x_2} + \ldots + \mathbf{a_{1n}x_n} = \mathbf{0} \\ \mathbf{a_{21}x_1} + (\mathbf{a_{22}} - \lambda)\mathbf{x_2} + \ldots + \mathbf{a_{2n}x_n} = \mathbf{0} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ \mathbf{a_{n1}x_1} + \mathbf{a_{n2}x_2} + \ldots + (\mathbf{a_{nn}} - \lambda)\mathbf{x_n} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Xos vektorlarni qurish uchun sistemaning nolmas yechimlarini topish zarur. n ta noma'lumli n ta bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi nolmas yechimlarga faqatgina sistema determinanti nolga teng bo'lgandagina ega bo'ladi, ya'ni

$$\mathbf{det(A - \lambda E)} = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{yoki}$$

$\mathbf{a_n}\lambda^n + \mathbf{a_{n-1}}\lambda^{n-1} + \ldots + \mathbf{a_1}\lambda + \mathbf{a_0} = \mathbf{0}$, bu yerda, $\mathbf{a_n = (-1)^n}$, $\mathbf{a_0 = detA}$.

Oxirgi yozilgan tenglamalar **A** matritsaning xarakteristik tenglamalari, uning ildizlari esa xarakteristik sonlari yoki **A** matritsaning xos qiymatlari deyiladi.

Masala. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ matritsaning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping.

Xarakteristik tenglama tuzamiz va uni yechib, **A** matritsaning xos qiymatlarini aniqlaymiz:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} \iff \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \iff \lambda \in \{1; 6\}$$

$\lambda_1 = 1$ xos qiymatga mos xos vektorlardan birini quramiz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 3 \end{cases}, \text{ ya'ni } \mathbf{X_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 6$ xos qiymatga mos xos vektorlardan biri esa:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}, \quad \mathbf{X_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matritsaning xarakteristik ko‘phadi bazis tanlanishiga bog‘lik emas. Ayni bir chiziqli almashtirishga turli bazislarda o‘xshash matritsalar mos kelgani uchun, o‘xshash matritsalarning xarakteristik ko‘phadlari tengdir. Agar $\mathbf{X_1}$, $\mathbf{X_2}$, …, $\mathbf{X_k}$ xos vektorlar juft-jufti bilan turli xos qiymatlarga tegishli bo‘lsa, ular chiziqli erkli sistemani tashkil etadi.

4. Chiziqli operator matritsasini diagonal ko‘rinishga keltirish

A matritsa berilgan $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$, …, $\mathbf{e_n}$ bazis vektorlar matritsaning xos vektorlaridan iborat bo‘lgandagina **A** matritsa diagonal ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar o‘xshash **A** va $\mathbf{K^{-1}AK}$ matritsalar berilgan bo‘lib, $\mathbf{D=K^{-1}AK}$ matritsa diagonal matritsa bo‘lsa, u holda **K** matritsa **A** matritsani diagonal ko‘rinishga keltiradi deyiladi. **D** diagonal matritsaning bosh diagonali **A** matritsaning xos qiymatlaridan, **K** matritsaning **i** - ustuni λ_i xos qiymatlarga tegishli xos vektor mos koordinatalaridan tuziladi.

Berilgan matritsani diagonal matritsaga keltiruvchi **K** matritsa quyidagicha quriladi:

1) **A** matritsaning barcha xos qiymatlari topiladi;

2) Har bir λ_i xos qiymatga mos $(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{E})\ \mathbf{X} = \boldsymbol{\theta}$ bir jinsli sistemaning fundamental yechimlari – xos vektorlari tuziladi;

3) **i –** ustuni λ_i ga tegishli fundamental yechimning mos koordinatalaridan iborat **K** matritsa quriladi.

Masala. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ matritsani diagonal ko‘rinishiga keltiruvchi **K** matritsani quring.

Yuqorida matritsaning xos qiymatlari $\lambda\epsilon\{1;\ 6\}$ va ularga mos xos vektorlari $\mathbf{X}_1=\begin{pmatrix}-2\\ 3\end{pmatrix}$, $\mathbf{X}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ tuzilgan edi. Demak, **K** matritsa $\mathbf{K}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ ko‘rinishda yozilishi mumkin. $\mathbf{K^{-1}AK = D}$ ekanligini tekshirib ko‘ramiz:

$$\mathbf{K}^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{18}{5} & \frac{12}{5}\end{pmatrix}$$

$$D = K^{-1}AK = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{18}{5} & \frac{12}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Har qanday **x** va **y** vektorlar uchun **(x, Ay) = (y, Ax)** tenglik o‘rinli **A** chiziqli almashtirishga *simmetrik almashtirish* deyiladi.

A chiziqli almashtirish simmetrik bo‘lishi uchun ortonormallangan bazisda uning matritsasining simmetrik bo‘lishi $((\mathbf{a}_{ik}) = (\mathbf{a}_{ki}))$ zarur va yetarlidir.

Haqiqiy elementli simmetrik matritsa quyidagi xossalarga ega:

1. Simmetrik matritsaning barcha xos qiymatlari haqiqiy.

2. Simmetrik matritsaning turli xos qiymatlariga mos keluvchi xos vektorlari ortogonal.

3. Agar **A** matritsa haqiqiy elementli simmetrik matritsa bo‘lib, **B** matritsa ortogonal bo‘lsa, u holda o‘xshash $\mathbf{B}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ matritsa simmetrik va haqiqiydir.

Har qanday haqiqiy simmetrik **A** matritsani **Q** ortogonal matritsa yordamida diagonal ko‘rinishga keltirish mumkin.

A simmetrik matritsani diagonal ko‘rinishga keltiruvchi **Q** ortogonal matritsa quyidagicha quriladi:

1) **A** matritsani diagonal ko‘rinishga keltiruvchi **K** matritsa quriladi.

2) **K** matritsaning ustunlari ortogonallash jarayoniga tortiladi va har biri birlik vektorga keltiriladi.

3) Ustunlari ortonormallangan vektorlar sistemasini tashkil etgan **Q** matritsa quriladi.

O‘z–o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Chiziqli fazoning chiziqli almashtirishi yoki operatori deb nimaga aytiladi?
2. Matritsaning o‘xshashlik almashtirishi deganda nimani tushunasiz?
3. Chiziqli almashtirish ustida bajariladigan qanday amallarni bilasiz?
4. Chiziqli almashtirishning xos vektori va xos qiymati deb nimaga aytiladi?
5. Xos vektorlarning qanday xossalarini bilasiz?
6. **A** matritsa xarakteristik tenglamasini yozing.
7. Matritsaning xarakteristik ko‘phadi bazis tanlanishiga bog‘liqmi?
8. Qanday bazisda matritsa diagonal ko‘rinishga ega bo‘ladi?

9. Berilgan matritsani diagonal ko‘rinishga keltiruvchi matritsa qanday quriladi?

10. Simmetrik chiziqli almashtirish deb, qanday almashtirishga aytiladi?

11. Har qanday simmetrik matritsani diagonal ko‘rinishga keltirish mumkinmi? Agar mumkin bo‘lsa, qanday qilib?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Chiziqli almashtirish yoki operator.
2. Chiziqli almashtirish matritsasi.
3. O‘xshash matritsalar.
4. Almashtirishlarni qo‘shish.
5. Almashtirishni songa ko‘paytirish.
6. Almashtirishlarni ko‘paytirish.
7. Teskari almashtirish.
8. Chiziqli almashtirish xos vektori.
9. Chiziqli almashtirish xos qiymati.
10. Xarakteristik tenglama.
11. Xarakteristik ko‘phad.
12. Diagonal matritsa.
13. Simmetrik chiziqli almashtirish.
14. Simmetrik matritsa.

Mustaqil ishlash uchun misollar

17.1. To‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasining abssissa o‘qiga nisbatan tekislik simmetriyasi koordinata o‘qlarining birlik vektorlari bazisida chiziqli almashtirish bo‘la olishini isbotlang va almashtirish matritsasini quring.

17.2. Tekislikdagi $\mathbf{a_1}(1;\,1)$, $\mathbf{a_2}(2;\,1)$ vektorlarni mos ravishda $\mathbf{b_1}(1;\,2)$, $\mathbf{b_2}(1;\,3)$ vektorlarga o‘tkazadigan yagona chiziqli almashtirish mavjudligini isbotlang. Almashtirish matritsasini barcha vektorlar berilgan bazisda toping.

17.3. **A** chiziqli almashtirish $\mathbf{a_1}(1;\,2)$, $\mathbf{a_2}(-1;\,1)$ bazisda $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{pmatrix}$ matritsaga ega. Almashtirishning $\mathbf{b_1}(1;\,-2)$, $\mathbf{b_2}(3;\,-1)$ bazisdagi matritsani toping.

17.4. **A** chiziqli almashtirish $\mathbf{e_1, e_2, e_3}$ bazisda $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & 5 & -3\end{pmatrix}$ matritsaga ega. Almashtirishning $\mathbf{'_1=2e_1+3e_2-e_3}$, $\mathbf{e'_2 = e_1+2e_2+3e_3}$, $\mathbf{e'_3=4e_1+7e_2+6e_3}$ bazisdagi matritsani toping.

17.5. Ikki chiziqli almashtirishlar berilgan:

$\begin{cases}\mathbf{x_1 = y_1 + 2y_2}\\ \mathbf{x_2 = 2y_1 - y_2}\end{cases}$ $\begin{cases}\mathbf{y_1 = z_1 - z_2}\\ \mathbf{y_2 = 2z_1 + 3z_2}\end{cases}$ $\mathbf{x_1, x_2}$ larni $\mathbf{z_1, z_2}$ orqali ifoda lovchi chiziqli almashtirishni toping.

17.6. $\begin{cases}\mathbf{x_1 = y_1 + 2y_2 - 3y_3}\\ \mathbf{x_2 = 2y_1 - y_2 + y_3}\\ \mathbf{x_3 = y_1 - 3y_2 - y_3}\end{cases}$ almashtirishning teskari chiziqli almashtirishni toping.

R_2 va R_3 fazoning biror-bir bazisida berilgan A chiziqli almashtirishning xos qiymatlari va xos vektorlarini toping:

a) $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 3 & 7\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}-5 & 8\\ 6 & 3\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}2 & 5 & -1\\ -1 & -3 & 0\\ 2 & 3 & -2\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}-1 & -1 & 4\\ -5 & -2 & 5\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & -3 & 1\\ -5 & -3 & 1\end{pmatrix}$

17.8. Quyidagi matritsalarni diagonal ko‘rinishga keltiruvchi o‘tish matritsalarini quring:

a) $\begin{pmatrix}5 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}6 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & -3 & 1\\ -5 & -3 & 1\end{pmatrix}$

18-§. Kvadratik shakllar va ularni kanonik ko'rinishga keltirish

l. Musbat matritsalar. Ularning xos qiymatlari va xos vektorlarining xossalari

Har bir koordinatasi musbat vektorga musbat vektor deyilsa, har bir elementi musbat sonlardan iborat matritsaga esa musbat matritsa deyiladi.

A musbat matritsa xos qiymatlari va xos vektorlari quyidagi xossalarga ega:

1) A matritsaning shunday bir $\lambda^* > 0$ xos qiymati mavjudki, uning har qanday λ xos qiymatlari uchun $\lambda^* > |\lambda|$ munosabatlar o'rinli;

2) Har qanday $\mu > \lambda^*$ uchun μE — A matritsa maxsusmas va $(\mu E-A)^{-1}$ matritsa musbat;

3) λ^* xos qiymatga tegishli x^* xos vektor musbat;

4) x^* xos vektordan tashqari koordinatalari nomanfiy xos vektorlar mavjud emas.

2. Kvadratik shakllar va ularni kanonik ko‘rinishga keltirish

n ta $x_1, x_2, ..., x_n$ noma'lumlarning ikkinchi darajali bir jinsli

$$\varphi(x) = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + ... + a_{1n} x_n +$$
$$+ a_{21} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + ... + a_{2n} x_2 x_n +$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ a_{n1} x_n x_1 + a_{n2} x_n x_2 + ... + a_{nn} x_n^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k \qquad (1)$$

ko'phadiga noma'lumlarning kvadratik shakli deyiladi.

Bu yerda, $a_{ik} = a_{ki}$ ($I \neq k$, $i, k = \{1,2,..., n\}$).

(1) kvadratik shakl koeffitsiyentlaridan quyidagi simmetrik A matritsani va noma'lumlar satr — matritsasini tuzamiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = (x_1, x_2, ..., x_n).$$

Kvadratik shakl matritsa ko‘rinishida quyidagicha yoziladi:

$$\varphi(X) = X A X^T.$$

Misol. $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_2 - 8x_2x_3$ kvadratik shakl matritsasi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

Agar kvadratik shakl $(x_1, x_2, ..., x_n) = X$ noma'lumlari $X = SY$ maxsusmas chiziqli almashtirish vositasida yangi $Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ noma'lumlar bilan almashtirilsa, u holda uning ko‘rinishi yangi $y_1, y_2, ..., y_n$ noma'lumlarda

$$\varphi_1(y_1, y_2, \dots, y_n) = Y\,(S^T A\,S)\,Y^T$$

ko‘rinishni oladi. Bu yerda, $S^t A\,S$ – o‘xshash simmetrik matritsa.

(1) kvadratik shakl rangi deb, A matritsa rangiga aytiladi.

Kvadratik shakl rangi uning nom’lumlari chiziqli maxsusmas almashtirilganda o'zgarmaydi.

Kvadratik shaklni kanonik ko‘rinishga keltirish deganda uning ko‘rinishini

$$\varphi_1(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \qquad (2)$$

shaklga keltirish tushuniladi.

(2) kanonik ko‘rinishdagi kvadratik shakl rangi noldan farqli λ_2 lar soniga teng.

A matritsa haqiqiy elementli simmetrik matritsa bo‘lgani uchun (1) kvadratik shaklni (2) kanonik ko‘rinishga aylantirish masalasi simmetrik chiziqli almashtirish matritsasini diagonal ko‘rinishga aylantirish masalasiga keltiriladi.

Har bir kvadratik shakl uchun uning noma'lumlarini shunday bir chiziqli maxsusmas $X = Q\,Y$ almashtiiish tanlash mumkinki, bu yerda Q - ortogonal matritsa, (1) ko‘rinishdagi kvadratik shakl (2) ko‘rinishni oladi. $Q^t AQ$ diagonal matritsa bo'lib, (2) kanonik ko'rinishdagi kvadratik shakl matritsasidir.

A matritsa xarakteristik tenglamasining ildizlari (1) kvadratik shakl xarakteristik sonlari deyilsa, xaralcteristik sonlarga mos xos vektorlar yo‘nalishlari kvadratik shaklning bosh yo‘nalishlari deyiladi.

Kvadratik shaklni kanonik ko‘rinishga keltirish qoidasi ikkinchi tartibli egri chiziqlar va sirtlarni tekshirishda qo‘llaniladi.

Masala. Kvadratik shaklni kanonik ko‘rinishga keltiruvchi ortogonal almashtirishni quring va kanonik ko‘rinishni yozing:

$$\varphi(x_1; x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 .$$

Xarakteristik tenglama tuzamiz va uning ildizlari —xarakteristik sonlarni aniqlaymiz:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 <=> \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 <=> \lambda = \{1;6\}.$$

Kvadratik shaklning kanonik ko‘rinishi: $\varphi_1 = y_1^2 + 6y_2^2$

λ_1=l xos qiymatga mos birlik xos vektor e_1' $(2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$;

λ_2=6 xos qiymatga mos birlik xos vektor e_2' $(-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$.

O'tish matritsasi quyidagi ortogonal matritsadan iborat:

$$Q = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Agar har bir nolmas x vektor uchun φ(x) > 0 (φ < 0) bo‘lsa, φ(x) kvadratik shakl musbat (manfiy) aniqlangan deyiladi. φ(x) kvadratik shakl musbat aniqlangan bo‘lsa, uning qarama-qarshisi -φ(x) shakl manfiy aniqlangan bo'ladi.

Kvadratik shaklning barcha xos qiymatlari musbat (manfiy) bo‘lgandagina kvadratik shakl musbat (manfiy) aniqlangan bo‘ladi.

A = (a_{ik}) matritsaning burchak yoki bosh minorlarini quramiz:

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = |a_{ik}|.$$

A matritsa ko‘rinishi va bosh minorlar ishoralari bo‘yicha kvadratik shaklning musbat (manfiy) aniqlanganligi yoki aniqmasligi haqida xulosa yasash mumkin.

Kvadratik shakl matritsasi bosh minorlari har binning musbat bo‘lishi, uning musbat aniqlanishi uchun zarur va yetarli.

Toq tartibli bosh minorlarning har biri manfiy bo‘lib, juft tartibli bosh minorlar har binning musbat bo‘lishi, kvadratik shaklning manfiy aniqlanishi uchun zarur va yetarli.

Nazorat savollari

1. Musbat matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
2. Musbat matritsa xos qiymat va xos vektorlarining qanday xossalarini bilasiz?
3. n ta noma'lumlarning kvadratik shakli deb qanday ko‘phadga aytiladi?
4. Kvadratik shakl matritsasi qanday tuziladi?
5. Kvadratik shaklni matritsa ko‘rinishida yozish mumkinrni va qanday?
6. Kvadratik shaklning kanomk ko‘rinishi deb, uning qanday shakliga aytiladi?
7. Kvadratik shakl matritsasini diagonal ko‘rinishga keltiruvchi ortogonal matritsa mavjudmi va nima uchun?
8. Kvadratik shaklni kanonik ko‘rinishga keltirish masalasi qanday yechiladi?

9. Kvadratik shaklning xarakteristik sonlari va bosh yo‘nalishlari deb nimalarga aytiladi?

10. Kvadratik shakl rangi deb nimaga aytiladi?

11. Musbat va manfiy aniqlangan kvadratik shakllar deb, qanday shakllarga aytiladi?

12. Kvadratik shakl matritsasining bosh yoki burchak minorlari deb, nimalarga aytiladi?

13. Kvadratik shakl musbat va manfiy aniqlanganlik yetarli shartlari nimalardan iborat?

Mavzuning tayanch iboraiari

1.Musbat vektor.
2.Musbat matritsa.
3.n ta noma'lumlarning kvadratik shakli.
4.Kvadratik shakl matritsasi.
5.Kvadrat shaklning kanonik ko'rinishi.
6.Kvadratik shakl xarakteristik sonlari va bosh yo'nalishlari.
7.Kvadratik shakl rangi.
8.Musbat va manfiy aniqlangan kvadratik shakllar.
9.Kvadratik shakl matritsasining bosh yoki burchak minorlari.

Mustaqil isbotlash uchun misollar

18.1. Kvadratik shakllarni kanonik ko'rinishga keltiruvchi ortogonal almashtirishlarni toping va kanonik shaklni yozing:

a) $3x_1^2 + 6x_1x_2 + 3x_2^2$;

c) $8x_1x_2$;

d) $6x_1^2$

18.2. Kvadratik shakllarni kanonik ko‘rinishga keltiring:

a) $3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$;

b) $3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 6x_1x_2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;

c) $5x_1^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 8x_2x_3$;

d) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2$.

19-§. R_n fazoda nuqtalar to‘plami

1. n o‘lchovli haqiqiy arifmetik fazoda nuqta atrofi. R_n fazoda chegaralangan to‘plam.

n o‘lchovli haqiqiy arifmetik fazoda ikki $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ va $N(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. **R_n da nuqtalar orasidagi masofa** real fazoda qo‘llanilgan formulani umumlashtirish asosida aniqlanadi. Berilgan n o‘lchovli M va N nuqtalar orasidagi d masofa

$$d(M;N)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

formula asosida hisoblanadi. R_n fazoda nuqtalar orasidagi d masofa, real fazoda bo‘lgani kabi, quyidagi xossalarga bo‘ysinadi:

1. Har qanday M va N nuqtalar uchun $d(M; N) = d(N; M)$.

2. $d(M; N) \geq 0$, ya’ni agar $M \neq N$ bo‘lsa, $d(M; N) > 0$ va agar $M = N$ bo‘lsa, $d(M; N) = 0$.

3. Har qanday M , N va K nuqtalar uchun uchburchak tengsizligi deb ataluvchi $d(M; N) \leq d(M; K) + d(K; N)$ munosabatlar o‘rinli.

n o‘lchovli haqiqiy arifmetik fazoda $M_0(x_{10}; x_{20}; \dots; x_{n0})$ nuqta va $r > 0$ son berilgan bo‘lsin. **R_n fazoda M_0 nuqtaning r atrofi** deb, M_0 markazdan r sondan kichik masofada yotuvchi mumkin bo‘lgan barcha $M(x_1; x_2; \dots; x_n)$ nuqtalar to‘plamiga aytiladi va $S_r(M_0)$ yozuv bilan belgilanadi. Ta’rifga ko‘ra,

$S_r(M_0) = \{ M(x_1; x_2; \dots; x_n) \in R_n \mid d(M; M_0) < r \}$.

Masalan, $M_0(1; -2; 3; -1)$ nuqtaning $r = 3$ atrofi va $M_1(-1; 0; 2; -1)$, $M_2(0; -1; 3; 1)$, $M_3(3; 0; 2; -2)$ nuqtalar qaralayotgan bo‘lsin.

$d(M_1; M_0) = 3 = 3 = r$, $d(M_2; M_0) = \sqrt{6} < 3 = r$, $d(M_3; M_0) = \sqrt{10} > 3 = r$ munosabatlar o‘rinli bo‘lgani uchun, $M_1 \notin S_r(M_0)$, $M_2 \in S_r(M_0)$, $M_3 \notin S_r(M_0)$.

R_1 (haqiqiy sonlar o‘qi) fazoda $M_0(x_0)$ nuqtaning r atrofi $(x_0 - r; x_0 + r)$ intervaldan iborat. R_2 (haqiqiy koordinatalar tekisligi) fazoda $M_0(x_{10}; x_{20})$ nuqtaning r atrofi markazi M_0 nuqtada radiusi r ga teng ichki doiradan iborat. R_3 fazoda esa $M_0(x_{10}; x_{20}; x_{30})$ nuqtaning r atrofi, markazi M_0 nuqtada radiusi r ga teng ichki shardan iborat va hokazo.

R_n fazoda n o‘lchovli nuqtalarning biror-bir V to‘plami berilgan bo‘lsin. V to‘plamga tegishli har qanday $M(x_1; x_2; \dots; x_n)$ nuqtaning har bir koordinatasi uchun $|x_1| \leq A$, $|x_2| \leq A$, …, $|x_n| \leq A$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi $A > 0$ son mavjud bo‘lsa, V nuqtalar to‘plamiga **R_n fazoda chegaralangan to‘plam** deyiladi.

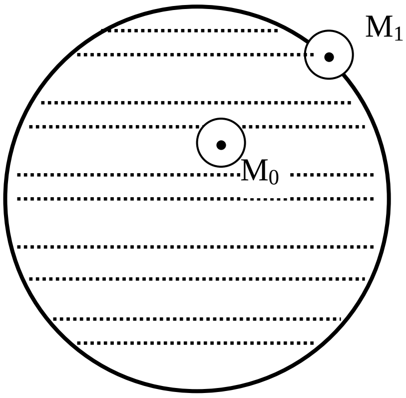
Masalan, R_n fazoda M_0 nuqtaning r atrofi $S_r(M_0)$ – chegaralangan to‘plam.

2. To‘plamning ichki va chegaraviy nuqtalari, uning quyuqlanish nuqtasi. Yopiq va ochiq to‘plamlar. Ixcham to‘plam.

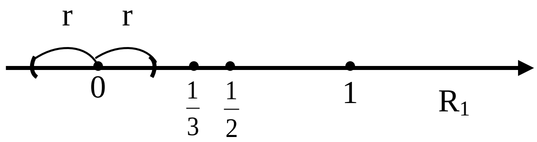
n o‘lchovli V **nuqtalar to‘plamining ichki nuqtasi** deb, o‘zining biror-bir atrofi bilan V to‘plamga tegishli nuqtaga aytiladi.

V **nuqtalar to‘plamining chegaraviy nuqtasi** deb, har qanday atrofi to‘plamga tegishli va tegishli bo‘lmagan nuqtalardan iborat nuqtaga aytiladi.

1-rasmda M_0 nuqta V to‘plamning ichki, M_1 nuqta esa uning chegaraviy nuqtasidir.



1-rasm.



2- rasm.

V nuqtalar to‘plamining barcha chegaraviy nuqtalari to‘plamiga uning **chegarasi** deyiladi.

Masalan, ikki o‘lchovli $V = \{M(x_1; x_2) \in R_2 \mid \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leq 1\}$ nuqtalar to‘plami uchun $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} < 1$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi har bir $M(x_1; x_2)$ nuqta uning ichki nuqtasi, markazi O(0; 0) nuqtada, koordinata o‘qlari simmetriya o‘qlari va yarim o‘qlari a va b ga teng ellips uning chegarasidir.

n o‘lchovli V **nuqtalar to‘plamining quyuqlanish nuqtasi** deb, har bir atrofi V to‘plamning cheksiz ko‘p nuqtalarini o‘z ichiga oluvchi $M_0 \in R_n$ nuqtaga aytiladi.

Masalan, R_1 fazoda O(0) nuqta bir o‘lchovli $V = \{\frac{1}{k} \mid k \in N\}$ nuqtalar to‘plamining quyuqlanish nuqtasidir (2-rasm), chunki O(0) markazning har qanday r atrofi to‘plamning cheksiz ko‘p nuqtalarini o‘z ichiga oladi. To‘plamning quyuqlanish nuqtasi to‘plamga tegishli bo‘lishi shart emas. Misolimizda $O(0) \notin V$.

Har bir n o‘lchovli quyuqlanish nuqtasi o‘ziga tegishli nuqtalar to‘plamiga **R_n fazoda yopiq to‘plam** deyilsa, har bir n o‘lchovli nuqtasi ichki nuqta bo‘ladigan nuqtalar to‘plamiga esa **R_n da ochiq to‘plam** deyiladi.

Masalan, $\{M(x_1; x_2) \in R_2 \mid x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$ to‘plam R_2 da yopiq to‘plam bo‘lsa, $\{M(x_1; x_2) \in R_2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ to‘plam esa R_2 da ochiq to‘plamdir. R_n fazoda M_0 nuqtaning r atrofi $S_r(M_0)$ – ochiq to‘plam.

Ochiq va yopiq to‘plamlarning quyidagi xossalarini sanab o‘tish mumkin:

1. Agar V to‘plamning chegarasi shu to‘plamga tegishli bo‘lsa, V yopiq to‘plamdir.
2. Har qancha yopiq to‘plamlarning kesishmasi – yopiq to‘plam.
3. Chekli sondagi yopiq to‘plamlarning birlashmasi – yopiq to‘plam.
4. Chekli sondagi ochiq to‘plamlarning kesishmasi – ochiq to‘plam.
5. Har qancha ochiq to‘plamlarning birlashmasi – ochiq to‘plam.
6. Agar V to‘plamning to‘ldiruvchisi yopiq bo‘lgandagina V to‘plamning o‘zi ochiqdir.

R_n fazoda chegaralangan va yopiq n o‘lchovli nuqtalar to‘plamiga **ixcham (kompakt) nuqtalar to‘plami** deyiladi.

Masalan, [0; 1] kesma R_1 fazoda ixcham to‘plamdir.

3. R_n fazoda nuqtalarning qavariq to‘plami va qavariq chiziqli kombinatsiyasi. Qavariq to‘plamning chetki nuqtalari.

n o‘lchovli haqiqiy R_n fazoda ikki $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ va $N(y_1; y_2; \ldots; y_n)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. R_n fazoda [M N] **kesma** deb, koordinatalari

$$\begin{cases} z_1 = \alpha x_1 + (1-\alpha) y_1; \\ z_2 = \alpha x_2 + (1-\alpha) y_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad \ldots\ldots \\ z_n = \alpha x_n + (1-\alpha) y_n, \quad \text{бу ерда } \alpha \in [0;1], \end{cases}$$

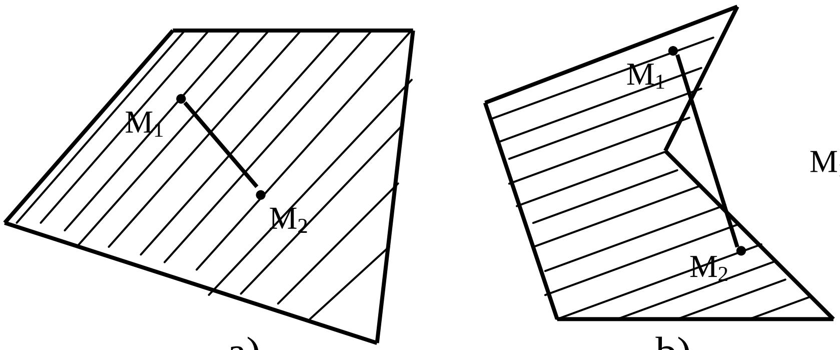
munosabatlarni qanoatlantiruvchi mumkin bo‘lgan barcha $P(z_1; z_2; \ldots; z_n)$ nuqtalar to‘plamiga aytiladi. Ta’rifga binoan,

$$[M\,N] = \{P \in R_n \mid P = \alpha M + (1-\alpha)N,\ \alpha \in [0; 1]\}.$$

n o‘lchovli R nuqtalar to‘plamiga M va N **nuqtalarning chiziqli qavariq kombinatsiyasi** ham deyiladi.

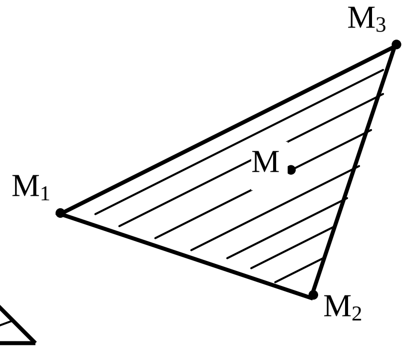
M_1 va M_2 nuqtalar n o‘lchovli V nuqtalar to‘plamiga tegishli ixtiyoriy ravishda tanlangan nuqtalar bo‘lsin. Har qanday ikki M_1 va M_2 nuqtalari qaralmasin, ularni tutashtiruvchi $[M_1 M_2]$ kesma ham V to‘plamga tegishli bo‘lsa, V nuqtalar to‘plamiga **R_n fazoda qavariq nuqtalar to‘plami** deyiladi.

Geometrik figuralardan quyidagilar qavariq nuqtalar to‘plamiga misol bo‘la oladi: kesma, to‘g‘ri chiziq, nur, tekislik, yarim tekislik, doira, uchburchak, shar, tetraedr va hokazo. 3. a) rasmda tasvirlangan figura qavariq nuqtalar to‘plami bo‘lsa, 3. b) rasmda keltirilgan figura qavariq nuqtalar to‘plami bo‘la olmaydi.



a) b)

3 - rasm.



4 - rasm.

Umuman, n o‘lchovli haqiqiy R_n fazoda quyidagilar qavariq nuqtalar to‘plamiga misol bo‘ladi:

1) R_n fazoning o‘zi;
2) $\{M(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in R_n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b\}$;
3) $\{M(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in R_n \mid a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b\}$;
4) n o‘lchovli nuqtaning har qanday r atrofi va hokazo.

R_n fazoda n o‘lchovli $M_1, M_2, \ldots, M_k$ **nuqtalarning qavariq chiziqli kombinatsiyasi** deb, ixtiyoriy n o‘lchovli $M = \lambda_1M_1 + \lambda_2M_2 + \ldots + \lambda_кM_к$ nuqtaga aytiladi, bu yerda $\lambda_1 \ge 0$, $\lambda_2 \ge 0, \ldots, \lambda_к \ge 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_к = 1$.

Agar $[M_1 M_2]$ kesmaning ixtiyoriy M nuqtasini uning M_1 va M_2 uchlari chiziqli qavariq kombinatsiyasi shaklida ifodalash mumkin bo‘lsa, uchlari M_1, M_2 va M_3 nuqtalarda uchburchakning har qanday M nuqtasini M_1, M_2 va M_3 nuqtalarning chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida tasvirlash mumkin (4-rasm) va hokazo. Umuman, n o‘lchovli $M_1, M_2, \ldots, M_k$ nuqtalar qavariq V nuqtalar to‘plamiga tegishli bo‘lsa, ularning har qanday chiziqli qavariq

$$M = \lambda_1M_1 + \lambda_2M_2 + \ldots + \lambda_kM_k$$

kombinatsiyasi ham V to‘plamga tegishli bo‘ladi.

n o‘lchovli $M_1, M_2, \ldots, M_k$ nuqtalarning mumkin bo‘lgan barcha chiziqli qavariq kombinatsiyalari to‘plamiga ularning qavariq qobig‘i deb ham ataladi. Nuqtalarning qavariq qobig‘i qavariq nuqtalar to‘plamidir. Agar M_1, $M_2, \ldots, M_k$ nuqtalar biror-bir qavariq nuqtalar to‘plamiga tegishli bo‘lsa, ularning qavariq qobig‘i ham ushbu qavariq to‘plamga tegishli bo‘ladi.

V to‘plam n o‘lchovli nuqtalarning biror-bir qavariq to‘plami bo‘lsin.

V **qavariq to‘plamning chetki nuqtasi** deb, o‘zidan tashqari to‘plam nuqtalarining chiziqli qavariq kombinatsiyasi shaklida yoyilmaydigan yoki shuning o‘zi, uchlari to‘plamga tegishli biror-bir kesmaning o‘rta nuqtasi bo‘la olmaydigan nuqtaga aytiladi. Masalan, 4-rasmda tasvirlangan qavariq nuqtalar to‘plami – uchburchakning M_1, M_2 va M_3 uchlari uning chetki nuqtalaridir. Optimallashga doir iqtisodiyot masalalarida masalaning rejalar to‘plami bo‘sh bo‘lmasa, bunday to‘plam qavariq to‘plam bo‘lib, uning chetki nuqtalari tayanch rejalar deyiladi. Masalaning tayanch rejalari muhim ahamiyatga ega, chunki ularning soni chekli bo‘lib, optimal yechimi mavjud masalalarda tayanch rejalardan biri optimal reja bo‘ladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. R_n fazoda nuqta atrofi deganda nimani tushunasiz? Misollar keltiring.
2. n o‘lchovli nuqtalarning chegaralangan to‘plami deb, qanday to‘plamga aytiladi? Misollar keltiring.
3. Nuqtalar to‘plamining ichki va chegaraviy nuqtalari deb, uning qanday nuqtalariga aytiladi? To‘plamning chegarasi deb-chi?
4. To‘plamning quyuqlanish nuqtasi deganda nimani tushunasiz? Quyuqlanish nuqtasi to‘plamga tegishli bo‘lmasligi mumkinmi?
5. Yopiq va ochiq nuqtalar to‘plamlarini ta’riflang. Ularga misollar keltiring.
6. Ixcham nuqtalar to‘plami deb, qanday nuqtalar to‘plamiga aytiladi? Misollar keltiring.
7. R_n fazoda nuqtalarning qavariq to‘plami qanday to‘plam?
8. Nuqtalarning qavariq to‘plamiga misollar keltiring.
9. Nuqtalarning chiziqli qavariq kombinatsiyasi deb nimaga aytiladi?
10. Qavariq nuqtalar to‘plamining chetki nuqtasi deb, qanday nuqtaga aytiladi?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. n o‘lchovli nuqtalar orasidagi masofa.
2. n o‘lchovli nuqta atrofi.
3. Chegaralangan nuqtalar to‘plami.
4. Nuqtalar to‘plamining ichki nuqtasi.
5. Nuqtalar to‘plamining chegaraviy nuqtasi.

6. Nuqtalar to‘plami chegarasi.
7. Nuqtalar to‘plamining quyuqlanish nuqtasi.
8. Yopiq nuqtalar to‘plami.
9. Ochiq nuqtalar to‘plami.
10. Ixcham (kompakt) nuqtalar to‘plami.
11. Qavariq nuqtalar to‘plami.
12. n o‘lchovli nuqtalarning chiziqli qavariq kombinatsiyasi.
13. Qavariq nuqtalar to‘plamining chetki nuqtasi.

Mustaqil ishlash uchun misollar

19.1. R_4 fazoda M(0; 1; 2; 3), N(-1; 2; 1; 2), P(-2; 3; 1; 3) nuqtalar orasidagi masofalarni hisoblang.

19.2. R_5 fazoda A(-1; 0; 1; -1; 2), V(2; 1; -1; 0; -2), S(0; -2; 1; 2; 0), D(1; -1; 1; -1; 1) nuqtalar belgilangan. O(0; 0; 0; 0; 0) markazning r = 3 atrofiga tegishli nuqtalarni ajratib ko‘rsating.

19.3. a) R_1 fazoda $M_0(1)$ nuqtaning r = 2 atrofini shtrixlab ko‘rsating va intervalni yozing.

b) R_2 fazoda $M_0(1; 2)$ nuqtaning r = 4 atrofini shtrixlab ko‘rsating va analitik ifodalang.

c) R_3 fazoda $M_0(1; 2; 3)$ nuqtaning r = 5 atrofiga tegishli nuqtalar koordinatalarini qanoatlantiruvchi analitik munosabatni yozing.

19.4. Koordinatalari quyida keltirilgan cheklash shartlarini qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plamlarining chegaralangan, ochiq yoki yopiq va ixchamligini aniqlang:

a) R_1 fazoda $1<x_1<3$; b) R_2 fazoda $1 \le x_1 \le 3$;

c) R_2 fazoda $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ 0 \le x_1 \le 4. \end{cases}$ d) R_2 fazoda $\begin{cases} x_1 + 2x_2 > 6, \\ x_1 + 2x_2 < 8, \\ x_1 > 0. \end{cases}$

e) R_2 fazoda $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$ f) R_2 fazoda $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 + 3x_2 \ge 3, \\ x_1 \ge 1, x_2 \ge 0. \end{cases}$

g) R_2 fazoda $x_1^2 + 4x_2^2 < 4$; h) R_2 fazoda $4x_1 - x_2^2 \ge 0$, $x_1 \le 2$.

19.5. R_4 fazoda $3x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 \le 0$ yarim fazo va A(4; -1; 0; 3), B(3; -4; 5; 4), C(0; 1; 2; 0), O(0; 0; 0; 0) nuqtalar berilgan. Yarim fazoga tegishli nuqtalarni aniqlang, ulardan ichki va chegaraviy nuqtalarni ajratib ko‘rsating.

19.5. Quyidagi nuqtalar to‘plamlaridan qavariq to‘plamlarni ajratib ko‘rsating:

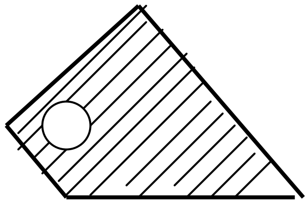
a) R_2 fazoda to‘g‘ri chiziq va undan tashqarida yotuvchi nuqta;

b) R_2 fazoda umumiy uchga ega ikki uchburchak;

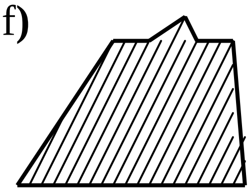
c) R_2 fazoda umumiy tomonga ega ikki to‘g‘ri to‘rtburchak;

d) R_2 fazoda umumiy tomonga ega kvadrat va uchburchak;

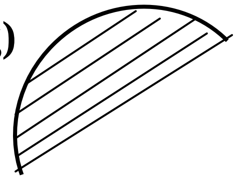
e)



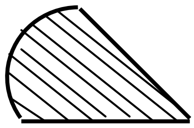
f)



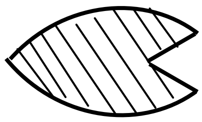
g)



h)



i)



j) R_3 fazoda markazi tegishli bo‘lmagan shar;

k) R_3 fazoda uchi tegishli bo‘lmagan konus;

l) R_3 fazoda umumiy qirraga ega ikki kub.

19.7. Koordinatalar tekisligida koordinatalari quyida berilgan chiziqli shartlarni qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plamini chizib tasvirlang. Qavariq nuqtalar to‘plamlarini ajrating va ularning chetki nuqtalarini aniqlang:

a) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6, \\ 4x_1 + 6x_2 = 9. \end{cases}$ b) $\left[\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 = 6, \\ 4x_1 + 6x_2 = 9. \end{array} \right.$ c) $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 20, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 + 5x_2 \le 5, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$ e) $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ 0 \le x_2 \le 2. \end{cases}$ f) $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 16, \\ 0 \le x_1 \le 8, \\ 0 \le x_2 \le 6. \end{cases}$

19.8. a) A(1; -3; 4) va B(-1; 5; 2) nuqtalarning chiziqli qavariq kombinatsiyasidan iborat ixtiyoriy ikki nuqtani aniqlang;

b) $M_1(0; 2)$, $M_2(4; 5)$ va $M_3(6; 1)$ nuqtalarning chiziqli qavariq kombinatsiyasidan iborat ixtiyoriy uchta nuqtani quring.

20-§. R_n fazoda yaqinlashish

1. n o‘lchovli haqiqiy fazoda nuqtalar ketma-ketligi haqida tushuncha. Sonli ketma-ketlik.

n o‘lchovli haqiqiy fazoda har bir k natural songa aniq bir n o‘lchovli M_k nuqtani mos qo‘yuvchi qonuniyat o‘rnatilgan bo‘lsa, R_n fazoda cheksiz **n o‘lchovli nuqtalarning ketma-ketligi** berilgan deyiladi. Nuqtalar ketma – ketligi $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots,$ yoki $\{M_k\}$ ko‘rinishda yoziladi. $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ nuqtalar ketma-ketlik hadlari: M_1 – birin-chi, M_2 – ikkinchi, M_k – k - hadi deyiladi va hokazo.

Masalan, har bir k natural songa ikki o‘lchovli $M_k(k; \frac{1}{k})$ nuqta mos qo‘yilgan bo‘lsin. Bu esa, R_2 haqiqiy koordinatalar tekisligida $M_1(1; 1)$, $M_2(2; \frac{1}{2})$, $M_3(3; \frac{1}{3})$, …, $M_k(k; \frac{1}{k})$, … nuqtalar ketma-ketligi berilganligini anglatadi.

Bir o‘lchovli nuqtalar ketma-ketligi **sonli ketma-ketlik** deb yuritiladi.Ta’rifga binoan, har bir k natural songa aniq bir x_k haqiqiy sonni mos qo‘yuvchi qonun berilgan bo‘lsa, R_1 haqiqiy sonlar o‘qida $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$, yoki $\{x_k\}$ nuqtalar (sonlar) ketma-ketligi berilgan deyiladi.

Masalan, har bir k natural songa $x_k = \frac{4k}{k+1}$ son mos qo‘yilgan bo‘lsa, 2, $\frac{8}{3}$, 3, …, $\frac{4k}{k+1}$, . . . sonlar ketma-ketligi berilganligini anglatadi.

Har bir hadi n o‘lchovli $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligi berilgan va $N_1 = M_{k1}$, $N_2 = M_{k2}$, …, $N_m = M_{km}$, …, bu yerda $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_m < \ldots$ munosabatlar o‘rinli bo‘lsa, $\{N_m\}$ nuqtalar to‘plamiga $\{M_k\}$ **nuqtalar to‘plamining qism osti to‘plami** deyiladi. Shunday qilib, qism osti nuqtalar ketma-ketligi berilgan nuqtalar ketma-ketligi hadlaridan tuziladi va hadlarining oldinma–ketin kelish tartibi saqlanadi.

Masalan, 10, 20, 30, …, 10m , … sonli ketma-ketlik 5, 10, 15, …, 5k, … sonli ketma-ketlikning qism osti ketma-ketligidir.

2. R_n fazoda nuqtalar ketma-ketligining limiti. Sonli ketma-ketlik limiti.

R_n fazoda biror-bir $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligi berilgan bo‘lsin.

n o‘lchovli M_0 nuqtaning har qanday ε atrofiga berilgan nuqtalar ketma-ketligining biror-bir mos tartib raqamidan boshlab, barcha hadlari tegishli bo‘lsa, ya’ni har qanday oldindan tayinlanadigan $\varepsilon > 0$ uchun K tartib raqamni (ε ga bog‘liq ravishda) ko‘rsatish mumkin bo‘lsaki, barcha $k>K$ tartib raqamli hadlar $M_k \in S_\varepsilon(M_0)$ bo‘lsa, M_o nuqtaga $\{M_k\}$

nuqtalar ketma-ketligining limiti deyiladi.

M_0 nuqta $\{M_k\}$ nuqtalar ketma – ketligining limiti ekanligi $\lim\limits_{k\to\infty}\{M_k\} = M_0$ yoki $M_k \to M_0$ ko‘rinishda yoziladi.

Xususan, a sonning har qanday oldindan tayinlanadigan ε atrofi uchun $\{x_k\}$ sonli ketma-ketlikning shunday bir N tartib raqamini (ε ga bog‘liq ravishda) tanlash mumkin bo‘lsaki, barcha k > N tartib raqamli hadlari $|x_k – a| < \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantirsa, a soni $\{x_k\}$ **sonli ketma-ketlikning limiti** deyiladi.

Masalan, $\left\{\frac{4k}{k+1}\right\}$ sonli ketma-ketlikning limiti 4 ga teng, ya’ni $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\frac{4k}{k+1}\right\} = 4$ ekanligini ta’rif asosida isbotlaylik.

Ta’rifga ko‘ra, 4 soni berilgan $\left\{\frac{4k}{k+1}\right\}$ sonli ketma-ketlikning limiti bo‘ladi, agar uning har qanday oldindan tayinlanadigan ε atrofi uchun, sonli ketma-ketlikning mos N tartib raqamini ko‘rsatish mumkinki, barcha k > N hadlari uchun $\left|\frac{4k}{k+1} - 4\right| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Oxirgi tengsizlikni ayniy almashtiramiz:

$$\left| -\frac{4}{k+1} \right| < \varepsilon \iff \frac{4}{k+1} < \varepsilon \iff \frac{4}{\varepsilon} < k+1 \iff k > \frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}.$$

Natijada, N ning butunligini e’tiborga olsak, $N = \left[\frac{4-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$ formula asosida har bir ε uchun mos N tartib raqamini tanlash mumkin:

ε	2	1	0,1	0,01	...
N(ε)	1	3	39	399	…

Bu esa, aynan 4 soni $\left\{\frac{4k}{k+1}\right\}$ sonli ketma-ketlikning limiti ekanligini anglatadi.

n o‘lchovli nuqtalar ketma-ketligining limitini aniqlashda sonli ketma-ketlik limiti muhim ahamiyatga ega. Quyidagi mulohazalar o‘rinli:

1. M_k va M_0 nuqtalar orasidagi $\{d(M_k; M_0)\}$ masofalar conli ketma-ketligi limiti nolga teng bo‘lgandagina, M_0 nuqta $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligining limiti bo‘ladi;

2. $\{M_k(x_{1k}; x_{2k}; \ldots; x_{nk})\}$ ketma-ketlik nuqtalari koordinatalari sonli ketma-ketliklari uchun $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_{1k}\} = x_{10}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_{2k}\} = x_{20}$, …, $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_{nk}\} = x_{n0}$

munosabatlar o‘rinli bo‘lgandagina, $M_o(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ nuqta uning limiti bo‘ladi.

Masalan, ikki o‘lchovli $M_0(0;\ 4)$ nuqta $\left\{M_k\left(\frac{1}{k}; \frac{4k}{k+1}\right)\right\}$ nuqtalar ketma-ketligining limitidir, chunki $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{k}\right\}=0,\ \lim\limits_{k\to\infty}\left\{\frac{4k}{k+1}\right\}=4$ munosabatlar o‘rinli.

Chekli limitga ega n o‘lchovli nuqtalar ketma-ketligi **yaqinlashuvchi ketma-ketlik** deyiladi. Yaqinlashuvchi nuqtalar ketma-ketligi uchun quyidagi xossalar o‘rinli:

1) yaqinlashuvchi ketma – ketlik yagona limitga ega ;

2) har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangandir. Har bir chegaralangan ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratish mumkin;

3) n o‘lchovli nuqtalar ketma-ketligi M_0 nuqtaga yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda uning har bir qism ketma-ketligi ham M_0 nuqtaga yaqinlashadi;

4) M_0 nuqta biror-bir V nuqtalar to‘plamining quyuqlanish nuqtasi bo‘lsa, V to‘plam nuqtalaridan M_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ketma-ketlik ajratish mumkin;

5) yopiq V to‘plamga tegishli nuqtalar ketma-ketligi M_0 nuqtaga yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda $M_0 \in V$.

3. Cheksiz kichik va cheksiz katta sonli ketma-ketliklar. Yaqinlashuvchi sonli ketma – ketliklar limitlarining arifmetik xossalari.

Oldindan tayinlanadigan har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun $\{\alpha_k\}$ sonli ketma-ketlikning shunday bir N (ε ga bog‘liq) tartib raqamini ko‘rsatish mumkin bo‘lsaki, barcha $k > N$ tartib raqamli hadlari uchun $|\alpha_к| < 0$ tengsizlik qanoatlantirilsa, $\{\alpha_k\}$ sonli ketma-ketlikka cheksiz kichik sonli ketma-ketlik deyiladi. Ta’rifga ko‘ra, $\lim\limits_{k\to\infty}\{a_k\} = 0.$

Limiti nolga teng har qanday sonli ketma-ketlikka **cheksiz kichik sonli ketma-ketlik** deyiladi. Masalan, $\left\{\frac{1}{k}\right\},\ \left\{\frac{4k}{k^2+1}\right\}$ sonli ketma-ketliklar cheksiz kichik sonli ketma-ketliklardir, chunki

$$\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{k}\right\}=0,\quad \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{4k}{k^2+1}\right\}=0$$

Ketma–ketlik limitini aniqlashda cheksiz kichik sonli ketma-ketlikdan foydalaniladi. $\{x_k\}$ sonli ketma-ketlik uchun $\{x_k\} = a + \{\alpha_k\}$

tenglik o‘rinli bo‘lgandagina, a soni uning limiti bo‘ladi.

Masalan, $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\dfrac{3k^2+10^6}{5k^2}\right\}=\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\dfrac{3}{5}+\dfrac{10^6}{5k^2}\right\}=\dfrac{3}{5}$.

Cheksiz kichik sonli ketma-ketliklar xossalarini sanab o‘tish maqsadga muvofiq:

1) $\{\alpha_k\}$ va $\{\beta_k\}$ cheksiz kichik sonli ketma-ketliklar bo‘lsa, ularning yig‘indisi yoki ayirmasidan tuzilgan $\{\alpha_k \pm \beta_k\}$ ketma ketliklar ham cheksiz kichikdir;

2) $\{\alpha_k\}$ cheksiz kichik va $\{x_k\}$ chegaralangan sonli ketma-ketliklar bo‘lsa, ularning ko‘paytmasidan tuzilgan $\{x_k \alpha_k\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik sonli ketma-ketlikdir;

3) chekli sondagi cheksiz kichik sonli ketma-ketliklar ko‘paytmalari ham cheksiz kichik sonli ketma-ketlikdir.

Oldindan tayinlanadigan har qanday $A > 0$ son uchun $\{\gamma_k\}$ sonli ketma-ketlikning shunday bir N (A ga bog‘liq) tartib raqamini tanlash mumkin bo‘lsaki, barcha $k > N$ tartib raqamli hadlari uchun $|\gamma_k| > A$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $\{\gamma_k\}$ sonli ketma-ketlikka **cheksiz katta sonli ketma-ketlik** deyiladi.

$\{\gamma_k\}$ ketma-ketlikning cheksiz katta sonli ketma-ketlik ekanligi $\lim\limits_{k\to\infty}\{\gamma_k\}=\infty$ (yoki $-\infty$) ko‘rinishda yoziladi. Masalan, $\left\{\dfrac{k^2}{10k+1}\right\}$, $\left\{\dfrac{-k^3+2}{10^8k^2+10^4k+1}\right\}$ - cheksiz katta sonli ketma-ketliklarga misol bo‘la oladi, chunki ularning limiti, mos ravishda, ∞ va $-\infty$ ga teng.

Cheksiz katta sonli ketma-ketliklar uchun quyidagi xossalar o‘rinli:

1) har qanday cheksiz katta sonli ketma-ketlik chegaralanmagandir. Har bir **chegaralanmagan ketma-ketlik** cheksiz katta bo‘lavermaydi;

2) $\left\{\dfrac{1}{\gamma_k}\right\}$ – ketma-ketlik cheksiz kichik sonli ketma-ketlik bo‘lgandagina, $\{\gamma_k\}$ $(\gamma_k \neq 0)$ ketma-ketlik cheksiz katta sonli ketma-ketlik bo‘ladi.

Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklar limitlari quyidagi xossalarga ega:

1) $\{x_k\}$ ketma-ketlik o‘zgarmas, ya’ni $\{x_k\} = c$ bo‘lsa, unda $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}=c$;

2) $\{x_k\}$ va $\{y_k\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo‘lib, m - o‘zgarmas son bo‘lsin. U holda:

a) $\{x_k+y_k\}$, b) $\{x_k\, y_k\}$, c) $\left\{\frac{x_k}{y_k}\right\}$, d) $\{m\, x_k\}$, e) $\{x_k^{\,m}\}$

ketma-ketliklar ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va

a) $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k+y_k\}=\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}+\lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\}$;

b) $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k y_k\}=\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}\lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\}$;

c) $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\frac{x_k}{y_k}\right\}=\frac{\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}}{\lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\}}\ \left(\lim\limits_{k\to\infty}\{y_k\}\neq 0\right)$;

d) $\lim\limits_{k\to\infty}\{mx_k\}=m\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}$;

e) $\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k^m\}=\left(\lim\limits_{k\to\infty}\{x_k\}\right)^m$ tengliklar o‘rinli.

Sonli ketma-ketliklar limitlarini aniqlashda yuqorida keltirilgan xossalardan foydalaniladi.

4. Monoton sonli ketma-ketliklar. e soni.

Agar $\{x_k\}$ sonli ketma-ketlikning ikkinchi hadidan boshlab, har bir hadi, o‘zidan oldingi hadidan qat’iy katta (kichik emas), ya’ni $x_{k+1}>x_k$ ($x_{k+1}\geq x_k$) bo‘lsa, $\{x_k\}$ **o‘suvchi (kamayuvchimas) ketma-ketlik** deyiladi. Agarda $\{x_k\}$ ketma-ketlikning ixtiyoriy oldinma–ketin keluvchi hadlari uchun $x_{k+1}<x_k$ ($x_{k+1}\leq x_k$) munosabatlar o‘rinli, ya’ni uning ikkinchi hadidan boshlab, har bir hadi, o‘zidan oldingi hadidan qat’iy kichik (katta emas) bo‘lsa, $\{x_k\}$ **kamayuvchi (o‘suvchimas) ketma-ketlik** deb ataladi.

O‘suvchi yoki kamayuvchi sonli ketma-ketliklar **monoton ketma-ketliklar** deb yuritiladi. Masalan, $\left\{\frac{k+1}{k}\right\}$ sonli ketma-ketlik uchun $2<\frac{3}{2}<\frac{4}{3}<\ldots<\frac{k+1}{k}<\frac{k+2}{k+1}<\ldots$ munosabatlar o‘rinli bo‘lganidan, monoton kamayuvchi ketma – ketlikdir.

Har bir monoton va chegaralangan sonli ketma-ketlik - yaqinlashuvchi. Ushbu mulohaza **sonli ketma-ketlik yaqinlashishining yetarli sharti** bo‘lib hisoblanadi.

Masalan, $\left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right\}$ sonli ketma-ketlik monoton (o‘suvchi) va chegaralanganligi uchun yaqinlashuvchidir. Ketma-ketlik limiti irratsional son e ga teng: $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right\}=e \quad (e=2{,}718...)$. e soni uzluksiz to’lov-li murakkab foiz masalalarida, kapital jamg‘armalarining samaradorli-gini baholash masalalarida va hokazolarda qo‘llaniladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. n o‘lchovli haqiqiy fazoda nuqtalar ketma-ketligi deganda nimani tushunasiz?
2. Sonli ketma-ketlik deb, qanday nuqtalar ketma-ketligiga aytiladi? Sonli ketma-ketlikning qo‘shimcha qanday ta’riflarini bilasiz?
3. Nuqtalar ketma-ketligining qism osti ketma-ketligi deb, nimaga aytiladi?
4. n o‘lchovli nuqtalar ketma-ketligining limiti deb, qanday nuqtaga aytiladi?
5. Sonli ketma-ketlik limitini ta’riflang?
6. Nima uchun n o‘lchovli nuqtalar ketma-ketligining limitini aniqlashda sonli ketma – ketlik limiti muhim ahamiyatga ega?
7. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning qanday xossalarini bilasiz?
8. Cheksiz kichik sonli ketma-ketlik deb, qanday sonli ketma-ketlikka aytiladi? Misollar keltiring.
9. Cheksiz katta sonli ketma-ketlik deb-chi? Misollar keltiring.
10. Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklar arifmetik xossalarini sanab o‘ting?
11. Monoton sonli ketma-ketlik deb, qanday sonli ketma-ketlikka aytiladi?
12. Sonli ketma-ketlik yaqinlashuvchanlik yetarli sharti nimadan iborat?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. n o‘lchovli nuqtalar ketma-ketligi.
2. Sonli ketma-ketlik.
3. Nuqtalar ketma-ketligining qism osti ketma-ketligi.
4. Nuqtalar ketma-ketligining limiti.
5. Sonli ketma-ketlik limiti.
6. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik.
7. Cheksiz kichik sonli ketma-ketlik.
8. Cheksiz katta sonli ketma-ketlik.
9. Monoton sonli ketma-ketlik.
10. Monoton va chegaralangan sonli ketma-ketlik.

Mustaqil ishlash uchun misollar

20.1. Umumiy hadi ifodasi bilan berilgan sonli ketma-ketliklarning dastlabki to‘rtta hadlarini yozing:

a) $x_n = 16^{-\frac{1}{n}}$; b) $x_n = \sin\frac{\pi n}{2} + \cos\frac{\pi n}{2}$.

20.2. Umumiy hadi ifodasi bilan berilgan nuqtalar ketma-ketliklarining dastlabki to‘rtta hadlarini yozing:

a) $\left\{M_k\left(\frac{k+1}{k}; \frac{1}{2^k}\right)\right\}$; b) $\left\{M_k\left(\sqrt{k^2-2k+1};\ \sin\frac{\pi k}{4};\ (-1)^k k^2\right)\right\}$.

20.3. Sonli ketma – ketlik limiti ta’rifidan foydalanib, $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\} = a$ ekanligini isbotlang. Har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun a nuqtaning ε atrofiga tegishli ketma-ketlikning dastlabki hadi tartib raqami N ni toping va quyidagi jadvalni to‘ldiring:

ε	1	0.1	0,01	0,001	. . .
N					

a) $x_n = \frac{6n+1}{3-2n}$, a = -3; b) $x_n = \frac{2n^2-1}{n^2+3}$, a = 2.

20.4. Umumiy hadi ifodasi bilan berilgan quyidagi sonli ketma-ketliklardan cheksiz kichik $\{\alpha_n\}$ va cheksiz katta $\{\gamma_n\}$ ketma-ketliklarni ajratib ko‘rsating:

a) $x_n = \frac{10^9 n}{n^2+1}$; b) $x_n = \log_2(n+1)$;

c) $x_n = \sin\frac{n!}{n}$; d) $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$;

e) $x_n = \frac{\sqrt[4]{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^2+n+1}}$; f) $x_n = \sqrt{2n+7} - \sqrt{2n-1}$.

20.5. 0,9; 0,99; 0,999; … sonli ketma – ketlik limiti $\lim\limits_{n\to\infty} 0,\underbrace{999...9}_{n}$ ni hisoblash yo‘li bilan, 0,(9) = 1 tenglik to‘g‘riligini isbotlang.

20.6. Limitlarni hisoblang:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^2}{(5n)^2}$; b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{9n-8}{4n+3}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n\sqrt{n^2+n+1}}{3n-2}$; d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)^3-(n+1)^3}{(n-1)^2+(n+1)^2}$;

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{8n^3-3n^2+7n-3}}{4n+3}$; f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2-1}+n)^2}{\sqrt[3]{27n^6+n^3+1}}$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{(n+1)!+n!}$; h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{5^{n-1}}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}}$;

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^2}$; j) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{16n^4-7}}{2+4+6+\ldots+2n}$;

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+\ldots-2n}{2n-1}$; l) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$;

m) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}\right]$;

n) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+1}{3^n-1}$; o) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^{\frac{1}{n}}-1}{3^{\frac{1}{n}}+1}$;

p) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$; q) $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{M_k\left(\dfrac{k}{k+1};\sqrt{\dfrac{9k-3}{16k+9}}\right)\right\}$.

21-§. Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiya

1. Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiya haqida tushuncha. Funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlar to‘plami.

n o‘lchovli haqiqiy fazoda $V = \{M(x_1; x_2; \ldots; x_n)\} \in R_n$ nuqtalar to‘plami berilgan bo‘lsin.

V to‘plamga tegishli har bir $M(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ nuqtaga aniq biror-bir y haqiqiy sonni mos qo‘yuvchi f qonunga $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o‘zgaruvchilarning V nuqtalar to‘plamida berilgan funksiyasi deyiladi. **n ta o‘zgaruvchilarning funksiyasi** $y = f(M)$ yoki $y = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ ko‘rinishda yoziladi. $f(M)$ haqiqiy son u funksiyaning M nuqtada erishadigan qiymatini anglatadi.

Xususan, agar V є R_1 bo‘lib, V to‘plam $R_1=\{x\}$ haqiqiy sonlar to‘plamining qism osti to‘plamidan iborat bo‘lsa, V to‘plamda **bir o‘zgaruvchili y = *f* (x) funksiya** berilgan deyiladi.

Misollar: 1) $f(x) = ln x$ – $V = \{x \in R_1 \mid x>0\}$ to‘plamda berilgan bir x o‘zgaruvchili funksiya. Xususan, $f(e) = ln e = 1$.

2) $f(M)=\dfrac{1}{x_1^2+x_2^2}-V=R_2 \setminus O(0;0)$ to‘plamda berilgan ikki x_1 va x_2 o‘zgaruvchili funksiya. M(- 1; 2) nuqtada $f(-1; 2) = 0{,}2$.

3) $f(M)=\sqrt{7-x_1^2-x_2^2-x_3^2}-V=\{M(x_1;x_2;x_3)\in R_3 \mid x_1^2+x_2^2+x_3^2\le 7\}$ to‘plamda berilgan uch x_1, x_2 va x_3 o‘zgaruvchili funksiya. M(1; -1; 1) nuqtada $f(1; -1; 1) = 2$.

$y = f(M) = f(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ funksiya berilgan R_n fazoga tegishli to‘plamga uning **aniqlanish sohasi** deyiladi va D(*f*) yoki D(y) yozuv bilan ifodalanadi.

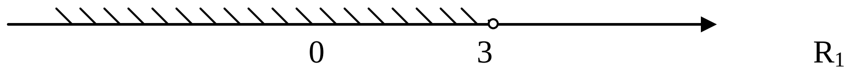
y = *f*(M) funksiya o‘z aniqlanish sohasi D(*f*) ning har bir nuqtasida qabul qilishi mumkin bo‘lgan barcha qiymatlari to‘plamiga esa uning **qiymatlari to‘plami** yoki o‘zgarish sohasi deyiladi. Funksiya qiymatlar to‘plami R_1 haqiqiy sonlar to‘plamining qism osti to‘plami bo‘lib, E(*f*) yoki E(y) belgilar bilan yoziladi.

Misollar: Quyida berilgan funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping va tegishli fazoda tasvirlang. Funksiyalarning qiymatlar to‘plamini aniqlang:

1) $y = log_2(3–x)$, 2) $y=\sqrt{4x_1-x_2^2}$,

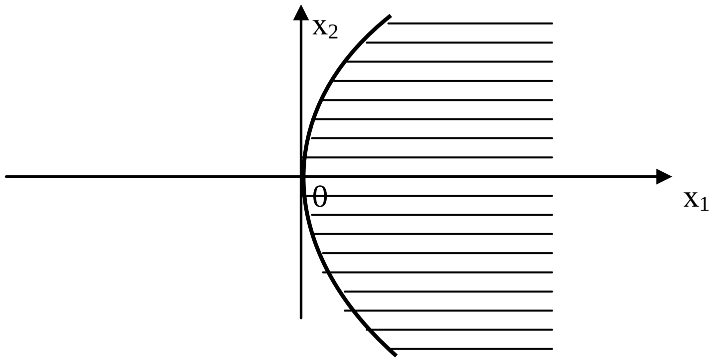
3) $y = \arccos x_1 + \arccos x_2 + \arccos x_3$.

1) bir o‘zgaruvchili $y = log_2(3-x)$ funksiya aniqlanish sohasi D(y): $3–x > 0$ tengsizlik yechimidan iborat. Shunday qilib, $D(y) = (-\infty; 3) \in R_1$. Funksiya aniqlanish sohasi sonlar o‘qida $(-\infty; 3)$ ochiq nur ko‘rinishida tasvirlanadi:



Funksiya qiymatlari to‘plami esa sonlar o‘qidan iborat, ya’ni $E(y) = R_1$.

2) funksiya ikki o‘zgaruvchili bo‘lib, uning aniqlanish sohasi D(y) = $\{M(x_1; x_2) \in R_2 \mid x_1 \ge \frac{x_2^2}{4}\}$. Funksiya aniqlanish sohasi haqiqiy koordinatalar tekisligi R_2 da quyidagicha tasvirlanadi:

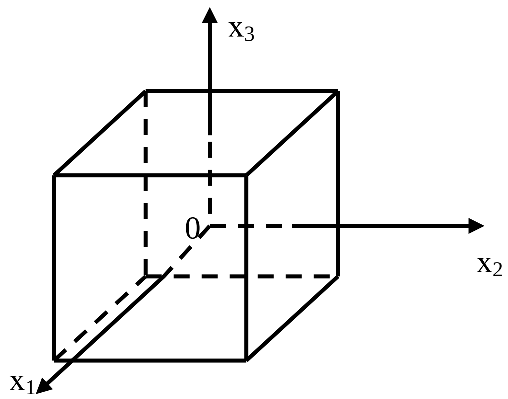


Funksiya qiymatlari to‘plami $E(y) = [0; \infty)$.

3) berilgan uch o‘zgaruvchili funksiya aniqlanish sohasi

$D(y) = \{M(x_1; x_2; x_3) \in R_3 \mid -1\leq x_1\leq 1,\ -1\leq x_2 \leq 1, -1 \leq x_3 \leq 1\}$.

Funksiya aniqlanish sohasi R_3 fazoda qirrasi 2 ga teng, simmetriya markazi koordinatalar boshida, yoqlari esa koordinatalar tekisliklariga parallel bo‘lgan kubdan iborat:



Funksiya qiymatlari to‘plami $E(y) = [0; 3\pi]$.

2. Bir o‘zgaruvchili funksiya umumiy xossalari va grafigi. Teskari funksiya.

$V \subseteq R_1$ nuqtalar to‘plamida aniqlangan bir o‘zgaruvchili $y = f(x)$ **funksiyaning grafigi** deb, mumkin bo‘lgan barcha $(x; f(x))$, $x \in V$ juftliklarning x0y to‘g‘ri burchakli koordinatalar tekisligidagi aksiga aytiladi.

R_1 fazoda, $x = 0$ nuqtaga nisbatan simmetrik, nuqtalarning V qism to‘plami va unda aniqlangan $y = f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin.

Agar har qanday $\pm x \in V$ lar uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, bir o‘zgaruvchili $y = f(x)$ funksiya V to‘plamda **juft funksiya** deyiladi. Juft funksiya grafigi 0u ordinata o‘qiga nisbatan simmetrikdir.

Agar har qanday $\pm x \in V$ lar uchun $f(-x) = -f(x)$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, $y = f(x)$ V to‘plamda **toq funksiya** deyiladi. Toq funksiya grafigi esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrikdir.

Masalan, juft natural darajali $y = x^{2n}$ ($n \in N$) funksiya juft funksiyaga misol bo‘lsa, toq natural darajali $y = x^{2n-1}$ ($n \in N$) toq funksiyaga misoldir.

$y = f(x)$ funksiya uchun shunday bir musbat t son mavjud bo‘lsaki, funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli har qanday x va $x + t$ nuqtalari uchun $f(x+t) = f(x)$ tenglik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya **davriy funksiya** deyiladi. t soni esa **funksiya davri** deb yuritiladi. Amalda funksiya davrlari ichidan eng kichigi T ni topish masalasi qo‘yiladi, qolgan barcha davrlar uning butun karralisidan iborat bo‘ladi.

Masalan, $y = 5\sin(0{,}25\pi x)$ funksiyaning eng kichik musbat davri

$$T = \frac{2\pi}{0{,}25\pi} = 8.$$

$y = f(x)$ funksiya $V \subseteq R_1$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, uning birorbir V_1 qism osti to‘plamidan ixtiyoriy ravishda tanlanadigan ikki x_1 va x_2 nuqtalar uchun $x_1 < x_2$ munosabatdan $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \le f(x_2)$) tengsizlik kelib chiqsa, u holda $y = f(x)$ funksiya V_1 **to‘plamda o‘suvchi (kamayuvchi emas)** deyiladi.

Agarda funksiya aniqlanish sohasiga tegishli V_1 to‘plamdan ixtiyoriy ravishda tanlanadigan ikki x_1 va x_2 nuqtalar uchun $x_1 < x_2$ shartdan $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$) tengsizlik kelib chiqsa, $y = f(x)$ funksiya V_1 **to‘plamda kamayuvchi (o‘suvchi emas)** deyiladi.

O‘suvchi va kamayuvchi funksiyalarga qat’iy **monoton funksiyalar** deyiladi.

Masalan, $y = e^x$ aniqlanish sohasi R_1 da qat’iy monoton o‘suvchi funksiyaga misol bo‘lsa, x haqiqiy sonning butun qismi $y = [x]$ esa kamayuvchimas funksiyaga misol bo‘la oladi.

$y = f(x)$ funksiya $D(y) \subseteq R_1$ sohada aniqlangan bo‘lib, Ye(u) uning qiymatlar to‘plami bo‘lsin. Ushbu funksiya uchun har qanday $x_1, x_2 \in D(y)$ lar qaralmasin, $x_1 \ne x_2$ shart qanoatlantirilganda, $f(x_1) \ne f(x_2)$ munosabat bajarilsin. U holda, har bir $u \in E(y)$ songa $f(x) = y$ tenglikni qanoatlantiruvchi aniq bir $x \in D(y)$ sonni mos qo‘yish mumkin, boshqacha aytganda, $E(y)$ to‘plamda berilgan **$y=f(x)$ funksiyaga teskari $x=g(y)$ funksiya**ni aniqlash mumkin.

Berilgan $y = f(x)$ funksiyaning qiymatlari to‘plami $E(y)$ teskari funksiya uchun aniqlanish sohasi bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(y)$ teskari funksiya uchun qiymatlar sohasi rolini o‘taydi.

Biror–bir $[a; b]$ kesmada aniqlangan, qat’iy monoton va uzluksiz $y = f(x)$ funksiya, o‘zining $[f(a); f(b)]$ kesmada aniqlangan, qat’iy monoton va uzluksiz $x = g(y)$ teskari funksiyasiga ega.

Masalan, y = sin x funksiya $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ kesmada aniqlangan, qat'iy monoton o'suvchi va uzluksiz bo'lganidan, [-1 ; 1] kesmada aniqlangan, qat'iy o'suvchi va uzluksiz x = arcsin y teskari funksiyasiga ega.

O'zaro teskari $f(x)$ va g(x) funksiya grafiklari birinchi chorak simmetriya o'qi y = x to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrikdir.

3. Chegaralangan funksiya. Qavariq va botiq funksiyalar haqida tushuncha.

$V_1 \subseteq D(y)$ nuqtalar to'plamida berilgan $y = f(x)$ funksiyaning V_1 da erishadigan qiymatlari to'plami yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, **funksiya V_1 da yuqoridan (quyidan) chegaralangan** deyiladi.

$y = f(x)$ funksiyaning yuqoridan (quyidan) chegaralanganligi, shunday bir K son mavjudligini anglatadiki, barcha $M \in V_1$ nuqtalar uchun $f(M) \leq K$ ($f(M) \geq K$) tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$V_1 \subseteq D(y)$ nuqtalar to'plamida ham quyidan va ham yuqoridan chegaralangan funksiyaga, V_1 **to'plamda chegaralangan funksiya** deb ataladi. Ushbu holda, agar $V_1 = D(y)$ bo'lsa, $y = f(M)$ funksiya aniqlanish sohasida chegaralangan deyiladi va uning qiymatlari to'plami chegaralangan sonlar to'plamidan iborat bo'ladi.

Agar $y = f(M)$ funksiya V_1 to'plamda yuqoridan (quyidan) chegaralanmagan bo'lsa, V_1 to'plamga tegishli $\{M_k\}$ nuqtalar ketma-ketligi mavjudki, $\lim\limits_{k\to\infty}\{f(M_k)\} = +\infty$ ($\lim\limits_{k\to\infty}\{f(M_k)\} = -\infty$) munosabat o'rinlidir.

Misollar:

1) bir o'zgaruvchili $y = x^2$ funksiya aniqlanish sohasi R_1 da quyidan chegaralangan funksiyadir, chunki E(y)=[0; ∞);

2) ikki o'zgaruvchili $y = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}$ funksiya o'z aniqlanish sohasi $D(y) = \{M(x_1; x_2) \in R_2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ to'plamda chegaralangandir, chunki E(y) = [0; 1].

$y = f(M)$ funksiya qavariq $V \subseteq R_n$ nuqtalar to'plamida aniqlangan bo'lsin.

V qavariq to'plamga tegishli har qanday ikki $M_1(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ va $M_2(u_1; u_2; \ldots; u_n)$ nuqtalar va ixtiyoriy $0 \leq \alpha \leq 1$ son uchun $f(P) \leq \alpha f(M_1) + (1-\alpha) f(M_2)$ ($f(P) \geq \alpha f(M_1) + (1-\alpha) f(M_2)$) tengsizliklar o'rinli bo'lsa, bu yerda $R(\alpha x_1 + (1-\alpha)u_1;\ \alpha x_2 + (1-\alpha)u_2; \ldots; \alpha x_n + (1-\alpha)u_n)$, u holda, $y = f(M)$ funksiya **V to'plamda qavariq (botiq) funksiya** deyiladi.

Masalan, $y = x^2$ funksiya R_1 da qavariq funksiyaga misol bo'lsa, $y = -x^2$ funksiya esa R_1 da botiq funksiyaga misol bo'ladi. n o'zgaruvchili chiziqli $y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$ funksiya R_n fazoda bir vaqtda ham qavariq va ham botiq funksiyadir.

Qavariq funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

1. $-f(M)$ funksiya V to‘plamda botiq bo‘lgandagina, $f(M)$ funksiya V da qavariq funksiya bo‘ladi.

2. $f_1(M)$ va $f_2(M)$ funksiyalar V to‘plamda qavariq bo‘lsa, ularning ixtiyoriy nomanfiy k_1 va k_2 koeffitsientli chiziqli $k_1f_1(M) + k_2f_2(M)$ kombinatsiyasi V to‘plamda qavariq bo‘ladi.

3. $f(M)$ funksiya V to‘plamda qavariq bo‘lib, $\{M \in V \mid f(M) \leq b\}$ to‘plam bo‘sh bo‘lmasa, bu yerda b ixtiyoriy son, u holda to‘plamning o‘zi ham qavariq to‘plamdir.

Botiq funksiyalar ham yuqoridagi xossalarga o‘xshash xossalarga ega.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. n o‘zgaruvchili funksiyani ta’riflang?
2. Bir o‘zgaruvchili funksiya deb nimaga aytiladi?
3. Bir, ikki va uch o‘zgaruvchili funksiyalarga misollar keltiring.
4. Funksiyaning aniqlanish sohasi deb nimaga aytiladi?
5. Funksiyaning qiymatlari to‘plami deb-chi?
6. Bir o‘zgaruvchili funksiya grafigi deganda nimani tushunasiz?
7. Bir o‘zgaruvchili juft-toq funksiyalarni ta’riflang va ularga misollar keltiring.
8. Juft va toq funksiya grafiklari qanday tabiatga ega?
9. Davriy funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi? Misollar keltiring.
10. Davriy funksiya asosiy davri deganda nimani tushunasiz?
11. To‘plamda o‘suvchi va kamayuvchi funksiyalarni ta’riflang? O‘suvchi va kamayuvchi funksiyalarga misollar keltiring.
12. Monoton funksiya deganda qanday funksiyani tushunasiz?
13. Berilgan funksiya teskari funksiyasi deb nimaga aytiladi?
14. Yagona teskari funksiya mavjudligi shartlari nimalardan iborat?
15. O‘zaro teskari funksiyalar grafiklari qanday tabiatga ega?
16. To‘plamda yuqoridan (quyidan) chegaralangan funksiya deb, qanday funksiyaga aytiladi? Misollar keltiring.
17. Chegaralangan funksiya deb-chi? Misollar keltiring.
18. Qavariq to‘plamda berilgan qavariq (botiq) funksiyani ta’riflang? Misollar keltiring.
19. Qavariq funksiyaning qanday xossalarini bilasiz?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. n o‘zgaruvchili funksiya.
2. Bir o‘zgaruvchili funksiya.
3. Funksiya aniqlanish sohasi.
4. Funksiya qiymatlar to‘plami.
5. Bir o‘zgaruvchili funksiya grafigi.
6. Juft funksiya.
7. Toq funksiya.
8. Davriy funksiya.
9. O‘suvchi funksiya.
10. Kamayuvchi funksiya.
11. Monoton funksiya.
12. Teskari funksiya.
13. Chegaralangan funksiya.
14. Qavariq funksiya.
15. Botiq funksiya.

Mustaqil ishlash uchun misollar

21.1. Agar $f(x)=(3x+1)\left(\frac{2}{x-1}-5\right)$ bo‘lsa, a) $f(0)$; b) $f(2)$; c) $f(x+1)$; d) $f\left(\frac{1}{x-1}\right)$; e) $f(x)+1$, f) $\frac{1}{f(x)}$ larni toping?

21.2. Quyidagi bir o‘zgaruvchili funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping:

a) $y=\frac{2x-3}{x(x+1)}$; b) $y=\sqrt[4]{\frac{2x+3}{4-x}}$;

c) $y=\lg(3x-x^2)-5\sqrt{x-2}$; d) $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{5x+x^3}}$;

e) $y=\frac{1}{x-2}+\sqrt{4x-x^3}$; f) $y=\frac{\sqrt{3+2x-x^2}}{(x^2-x)(x-2)}$;

g) $y=\log_2(1-\sqrt{4-x^2})$; h) $y=\sqrt{\log_{0,2}(x^2-5x+7)}$;

i) $y=\arcsin\frac{1-2x}{3}$; j) $y=\arccos e^x$;

k) $y=\sqrt{2\sin x+1}$; l) $y=\sqrt{\cos^2 x-\cos x}$.

21.3. Quyidagi ikki o‘zgaruvchili funksiyalar aniqlanish sohalarini yozing va koordinatalar tekisligida tasvirlang:

a) $f(x_1; x_2) = \sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2}$; b) $f(x_1; x_2) = ln(x_1^2 + x_2^2 - 9)$;

c) $f(x_1; x_2) = \lg\left(1 - \frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2^2}{9}\right)$; d) $f(x_1; x_2) = \sqrt{x_2^2 - 8x_1}$;

e) $f(x_1; x_2) = \ln(x_1 - x_2)$

.

21.4. Bir o‘zgaruvchili funksiyalarning qiymatlar to‘plamini toping:

a) $y = \sqrt{3 - x^2}$; b) $y = \frac{5}{x-2}$; c) y = -2x^2 + 3x – 1;

d) $y = \sqrt{2x - x^2}$; e) $y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$; f) y = log_3(x^2– 2x + 2);

g) $y = \frac{|x|}{x} + 1$; h) y = |x + 2| + |x – 1|; i) y = *lg* sin x;

j) $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 - 2x + 2}$; k) **y** = 3sin2x - 4cos2x; l) $y = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$;

m) $y = \frac{\cos 2x}{\sin x + \cos x}$; n) $y = \frac{\sin x}{\sin\frac{x}{2}}$; o) $y = \frac{1}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

21.5. Koordinatalar o‘qlarini parallel ko‘chirish usuli va almashtirishlar bajarib, funksiya grafiklarini chizing. Grafiklardan foydalanib, o‘sish va kamayish intervallarini yozing, chegaralangan funksiyalarni ajratib ko‘rsating:

a) $y = \frac{1}{3}x - 2$; b) y = -2x –3; c) y = -(x – 2)^2 + 1;

d) $y = \frac{2x - 3}{x + 1}$; e) $y = \sqrt{x + 4}$; f) $y = 1 + \sqrt{x^2}$;

g) **y** = |x| + |x – 2|; h) **y** = -| |x| - 1|; i) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$;

j) y =|$log_{0,5}$ (-x) |; k) y = 1 - cos x; l) y = sin 2x;

m) $y = 2\cos\frac{x}{2}$; n) $y = -2\sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right)$; o) y = cos x – sin x.

21.6. Quyida berilgan funksiyalardan juft-toqlarini ajrating:

a) $y = x^4 + 2x^2$; b) $y = \sqrt[3]{x - x^3}$; c) $y = \dfrac{3|x|}{\mathbf{x^2} + 1}$;

d) $y = |x + 2| - 3x^2$; e) $u = |x + 1| + |x - 1|$; f) $u = e^x$;

g) $u = x|x| + \arcsin(x^3)$; i) $y = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{\mathbf{5}}$;

j) $y = \dfrac{2^x - 2^{-x}}{\mathbf{5}}$; k) $y = \dfrac{x}{\mathbf{3^x} - 1}$;

l) $y = \dfrac{5^x - 1}{5^x + 1}$; m) $y = \sqrt{9 - x + x^2} + \sqrt{9 + x + x^2}$;

n) $y = x \cdot \dfrac{4^x - 1}{4^x + 1}$; o) $y = \dfrac{\lg(1 - x)}{1 + x}$;

p) $y = 2\sin(x + \frac{\pi}{4})$; r) $y = (\sin x + 1)^2$;

s) $y = \dfrac{x^2|\mathbf{x}|}{\cos 2x}$; t) $y = \dfrac{\cos x}{x}$.

21.7. Grafiklarni ko‘shish usulini qo‘llab, funksiya grafiklarini chizing:

a) $y = x + \sin x$; b) $u = x - \text{sos } x$; c) $u = \cos x - 2^x$.

21.8. Quyidagi funksiyalarning asosiy davrlarini toping:

a) $y = -2\sin(3x)$; b) $y = 5\cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{10}\right)$;

c) $y = \dfrac{\operatorname{tg}(2x - 1)}{3}$; d) $y = 0{,}6\sin\left(\dfrac{\pi x}{2} + 1\right)$;

e) $u = |\sin x|$; f) $y = 3\sin(2x) - 2\cos(3x)$;

g) $y = \sin\dfrac{\pi x}{4} + \cos\dfrac{\pi x}{3}$; i) $y = \sin\dfrac{3x}{4}\cos\dfrac{3x}{4}$;

j) $y = \sin^2(4x) + 1$; k) $y = \cos^2\dfrac{x}{3} + \sin^2\dfrac{x}{4}$.

21.9. Quyidagi funksiyalarning teskari funksiyalarini quring:

a) y = 2 – 5x; b) $y=\frac{2}{x+1}-3$; c) $y=\frac{x+2}{3-2x}$; d) $y=\frac{1}{2-x}+4$;

e) y =2^{x-1}; f) y = 2 + *log*(x + 2); g) $y=\frac{1}{2}\sin(5x)$.

21.10. Quyidagi funksiyalardan qavariq va botiqlarini ajrating:

a) y = $2x^2$ (x є R); b) $y=-\frac{x^2}{2}$ (x є R);

c) y = sos x (x є $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$) ; d) y = sin x (x є [- π; 0].

22-§. Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiya limiti

1. Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiya limiti haqida tushuncha. Ajoyib limitlar. Yaqinlashuvchi funksiya xossalari

y = *f*(M) = *f*(x_1; x_2; …; x_n) funksiya $V \subseteq R_n$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, $M_0(x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$ nuqta V to‘plamning quyuqlanish nuqtasi bo‘lsin. Funksiya limitining bir-biriga o‘zaro teng kuchli Geyne va Koshi tillaridagi ta’riflari mavjud.

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya limiti Geyne yoki nuqtalar ketma-ketligi tilida quyidagicha ta’riflanadi: Har bir hadi V to‘plamga tegishli va M_0 quyuqlanish nuqtasidan farqli har qanday $M_1, M_2, …, M_k, …$ nuqtalar ketma-ketligi M_0 nuqtaga intilganda, mos funksiya qiymatlari *f*(M_1), *f*(M_2), …, *f*(M_k), … sonli ketma-ketligi b songa intilsa, u holda b soni ***f* (M) funksiyaning M → M_0 dagi limiti** deyiladi va

$$b=\lim_{M\to M_0} f(M) \quad \text{yoki} \quad b=\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0\\ \dots\dots\\ x_n\to x_n^0}} f(M)$$

ko‘rinishda yoziladi.

Xususan, bir o‘zgaruvchili y = *f*(x) funksiya uchun: har qanday x_0 songa intiluvchi argument qiymatlari $x_1, x_2, …, x_k, …$ sonli ketma – ketligi uchun, bu yerda x_k є V, $x_k \neq x_0$ (k = 1, 2, 3, …), funksiya qiymatlari *f*(x_1), *f*(x_2), …, *f*(x_k), … sonli ketma – ketligi b songa intilsa, b soni ***f* (x) funksiyaning x → x_0 dagi limiti** deyiladi va $b=\lim\limits_{x\to x_0} f(M)$ ko‘rinishda yoziladi.

Funksiya limiti Koshi yoki $\varepsilon - \delta$ tilida quyidagicha ta’riflanadi:

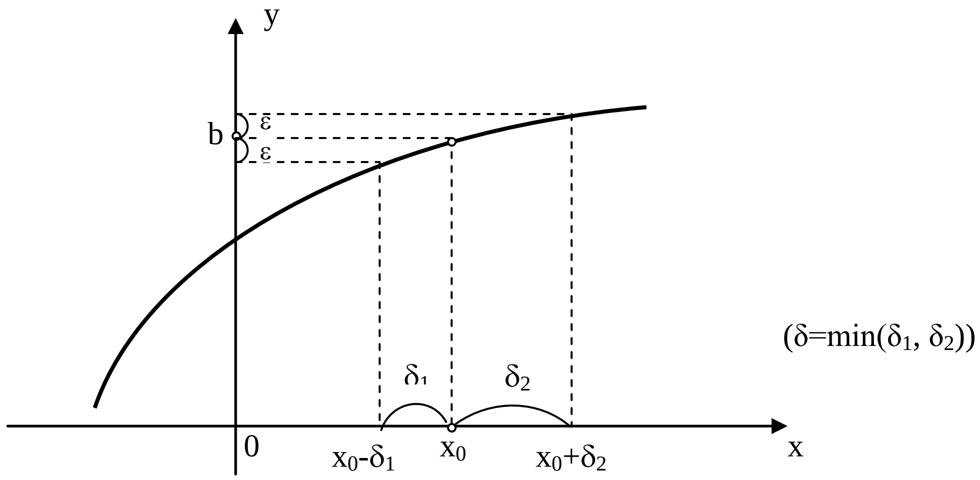
Har qanday oldindan tayinlanadigan $\varepsilon > 0$ son uchun M_0 nuqtaning δ atrofi $S_\delta(M_0)$ ni ko‘rsatish mumkin bo‘lsaki, barcha $M \in S_\delta(M_0) \cap V$, $M \neq M_0$ nuqtalar uchun $|f(M) - b| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda b soni $f(M)$ funksiyaning $M \to M_0$ dagi limiti deyiladi.

Xususiy holda, bir o‘zgaruvchili $y = f(x)$ funksiya uchun: Har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun shunday bir $\delta > 0$ son tanlash mumkin bo‘lsaki, V to‘plamga tegishli va $0 < |x - x_0| < \delta$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi har bir x uchun $|f(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, b soni $f(x)$ funksiyaning $x \to x_0$ dagi limiti deyiladi (1-rasm).

Yuqorida keltirilgan ta’riflardan birini qo‘llab, masalan,

1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$, 2) $\lim\limits_{\substack{x_1 \to -1 \\ x_2 \to 2}} \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2} = 0{,}2$ yoki 3) $\lim\limits_{x \to 0} \cos\dfrac{1}{x}$

mavjud emasligini isbotlash mumkin.



1-rasm.

Quyida sanab o‘tiladigan va **ajoyib limitlar** nomini olgan limitlar ham ta’riflar asosida isbotlanadi.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ (1-ajoyib limit asosiy shakli).

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{tg}x}{x} = 1$. 3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x} = 1$. 4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}x}{x} = 1$.

5. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$. (2-ajoyib limit asosiy shakli).

6. $\lim\limits_{x\to 0}\log_a\dfrac{1+x}{x}=\log_a e$.   7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.   9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$.

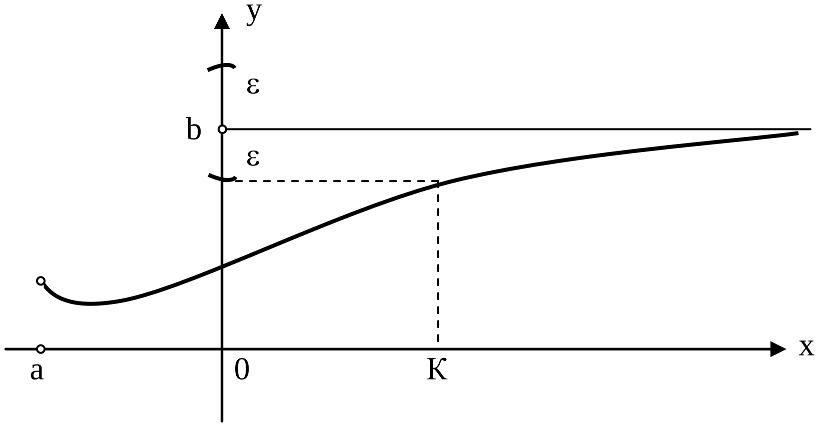
Limitga ega funksiyalar o‘zlarining quyidagi xossalari bilan xarakterlanadi:

1) y = *f* (M) funksiya $M\to M_0$ da limitga ega bo‘lsa, ushbu limit yagonadir;

2) y = *f* (M) funksiya $M\to M_0$ da chekli limitga ega bo‘lsa, M_0 nuqtaning δ atrofi $S_\delta(M_0)$ mavjudki, $S_\delta(M_0)\cap V$ to‘plamda *f* (M) funksiya chegaralangan bo‘ladi.

2. Bir o‘zgaruvchili funksiya uchun bir tomonlama va $x\to\infty$ dagi limitlar.

Bir o‘zgaruvchili y = *f* (x) funksiya biror V = (a; ∞) nurda aniqlangan bo‘lsin (2-rasm). Har qanday ε > 0 son uchun shunday K > 0 sonni ko‘rsatish mumkin bo‘lsaki, barcha | x | > K munosabatni qanoatlantiruvchi x lar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, b soni ***f* (x) funksiyaning x → ∞ dagi limiti** deyiladi.



2 – rasm.

y = *f* (x) funksiyaning x → - ∞ dagi limiti ham yuqoridagidek ta’riflanadi.

Masalan, 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^x}=3$, chunki x → + ∞ da $\left(\frac{1}{5}\right)^x\to 0$;

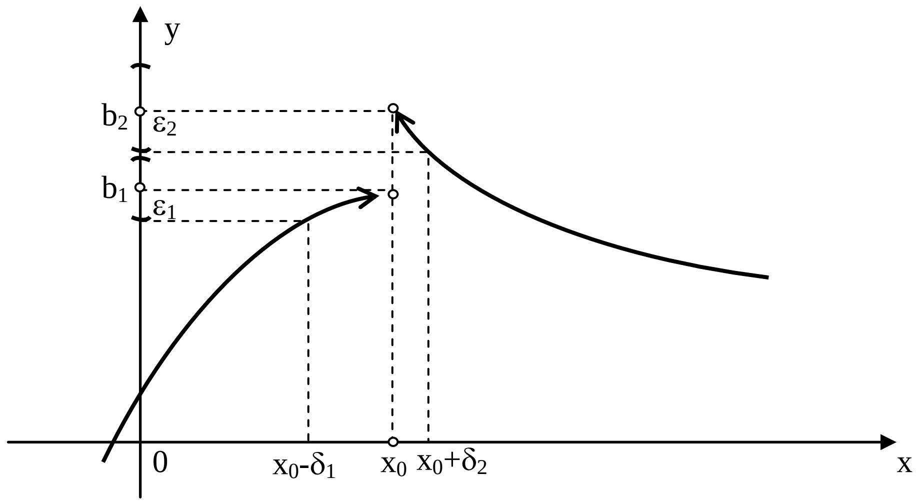
2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{1+\left(\frac{1}{5}\right)^x}=0$, chunki $x\to-\infty$ da $\left(\frac{1}{5}\right)^x\to+\infty$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

Bir o'zgaruvchili $y=f(x)$ funksiya $x<x_0$ da aniqlangan bo'lib, x_0 nuqta aniqlanish sohasining quyuqlanish nuqtasi bo'lsin (3–rasm).

Har qanday $\varepsilon>0$ son uchun $\delta_1>0$ sonni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, $x_0-\delta_1<x<x_0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x)-b_1|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $b_1=f(x_0-0)$ son $f(x)$ **funksiyaning $x\to x_0$ da chapdan limiti** deyiladi va $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ ko'rinishda yoziladi.

$y=f(x)$ **funksiyaning $x\to x_0$ da o'ngdan limiti** ham shunga o'xshash aniqlanadi va $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$ ko'rinishda yoziladi (3 – rasm).



3-rasm.

Masalan, 1) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}=1$; 2) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}=0$.

$y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada limiti, funksiya shu nuqtada chapdan va o'ngdan limitlarga ega bo'lib, $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ tenglik bajarilganda, mavjud bo'ladi.

3. Limitlar haqida asosiy teoremalar. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar.

Limitlar haqidagi asosiy teoremalar quyidagilardan iborat:

1. Agar $y = f(M) = C$ (C – o‘zgarmas) bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = C$.

2. $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ mavjud bo‘lsa, u holda ixtiyoriy k son uchun

$$\lim_{M\to M_0} [kf(M)] = k \lim_{M\to M_0} f(M)$$

3. Agar $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$ va $\lim\limits_{M\to M_0} g(M)$ mavjud bo‘lsa,

a) $\lim\limits_{M\to M_0}[f(M) \pm g(M)]$ ham mavjud bo‘ladi va

$$\lim_{M\to M_0}[f(M) \pm g(M)] = \lim_{M\to M_0} f(M) \pm \lim_{M\to M_0} g(M).$$

b) $\lim\limits_{M\to M_0}[f(M) \cdot g(M)]$ mavjud bo‘ladi va

$$\lim_{M\to M_0}[f(M) \cdot g(M)] = \lim_{M\to M_0} f(M) \cdot \lim_{M\to M_0} g(M)$$

c) $\lim\limits_{M\to M_0} g(M) \neq 0$ o‘rinli bo‘lganda, $\lim\limits_{M\to M_0} \dfrac{f(M)}{g(M)}$ ham mavjud bo‘ladi va $\lim\limits_{M\to M_0} \dfrac{f(M)}{g(M)} = \dfrac{\lim\limits_{M\to M_0} f(M)}{\lim\limits_{M\to M_0} g(M)}$.

d) M_0 nuqtaning biror atrofida $f(M) \le g(M)$ munosabat bajarilsa, u holda $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) \le \lim\limits_{M\to M_0} g(M)$ tengsizlik ham o‘rinli bo‘ladi.

Limitlar haqidagi teoremalar bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiya limitlarini hisoblashda qo‘llaniladi.

Masalan, $\lim\limits_{\substack{x_1\to -1\\ x_2\to 2}} \dfrac{1}{x_1^2 + x_2^2} = \dfrac{1}{\lim\limits_{\substack{x_1\to -1\\ x_2\to 2}} x_1^2 + \lim\limits_{\substack{x_1\to -1\\ x_2\to 2}} x_2^2} = \dfrac{1}{(-1)^2 + 2^2} = 0{,}2$

.

Agar $\lim\limits_{M\to M_0} \alpha(M) = 0$ bo‘lsa, $\alpha(M)$ funksiya **$M \to M_0$ da cheksiz kichik funksiya** deyiladi.

Xususan, agar $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$ bo‘lsa, bir o‘zgaruvchili $\alpha(x)$ funksiya **$x \to x_0$ da cheksiz kichik** deb ataladi.

Masalan, $\alpha(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$ funksiya $x \to -1$ va $x \to \infty$ larda cheksiz kichik funksiyadir.

Cheksiz kichik funksiya o‘zining quyidagi xossalariga ega:

1) $M \to M_0$ da $\alpha(M)$ cheksiz kichik funksiya bo‘lib, $f(M) = b + \alpha(M)$ bo‘lganda, $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ mavjud va aynan b ga tengdir;

2) chekli sondagi va har biri $M \to M_0$ da cheksiz kichik funksiyalarning yig‘indisi yoki ko‘paytmasi cheksiz kichik funksiyalardir.

3) $M \to M_0$ da cheksiz kichik funksiyaning, M_0 nuqtaning biror atrofida chegaralangan funksiyaga ko‘paytmasi, cheksiz kichik funksiyadir.

Agar $\lim\limits_{M \to M_0} \gamma(M) = \infty$ (yoki $-\infty$) bo‘lsa, $\gamma(M)$ funksiya $\mathbf{M \to M_0}$ **da cheksiz katta funksiya** deyiladi.

Xususan, agar $\lim\limits_{x \to x_0} \gamma(x) = \infty$ (yoki $-\infty$) bo‘lsa, $\gamma(x)$ funksiya $x \to x_0$ da cheksiz katta bir o‘zgaruvchili funksiya deb ataladi.

Masalan, $\gamma(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$ funksiya $x \to 0$ da cheksiz kattadir.

4. Ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar. Funksiyalarni taqqoslash.

Bir o‘zgaruvchili $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar berilgan bo‘lib, $x \neq x_0$ da $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ va $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$ mavjud bo‘lsin. U holda, quyidagi h hollarning biri o‘rinli bo‘ladi:

a) Agar $l \neq 0$ va $l \neq \infty$ bo‘lsa, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $\mathbf{x \to x_0}$ **da teng tartibli funksiyalar** deyilib, $f(x) = 0^*(g(x))$ ko‘rinishda yoziladi;

b) Agar $l = 1$ bo‘lsa, $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $\mathbf{x \to x_0}$ **da ekvivalent yoki teng kuchli** deyilib, $f(x)\ g(x)$ yozuvda ifodalanadi;

c) Agar $l = 0$ bo‘lsa, $f(x)$ funksiya $x \to x_0$ da $g(x)$ funksiyaga nisbatan yuqori tartibli kichik deyiladi va $f(x) = o(g(x))$ yozuvda yoziladi;

d) Agarda $l = \infty$ bo‘lsa, unda $g(x) = o(f(x))$.

Masalan: 1. $x \to 0$ da $tg(2x) = 0^*(5x)$, chunki $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tg2x}{5x} = \dfrac{2}{5}$.

2. $x \to 0$ da $x^3 = o(x^2)$, chunki $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{x^2} = 0$.

3. $x \to \infty$ da $x^2 = o(x^3)$, chunki $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{x^3} = 0$.

4. $x \to 0$ da $\operatorname{tg} 2x \sim \sin 2x$, chunki $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 2x} = 1$.

Agar $x \to x_0$ da $\alpha(x)$ funksiya cheksiz kichik bo‘lsa, quyidagi teng kuchliliklar (ekvivalentliklar) o‘rinli:

1. $\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 2. $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 3. $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$.

4. $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$; 5. $\log_a [1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x) \log_a e$.

6. $\ln[1 + \alpha(x)] \sim \alpha(x)$; 7. $1 - \cos \alpha(x) \sim \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$.

8. $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$; 9. $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$.

10. $[1 + \alpha(x)]^n - 1 \sim n\,\alpha(x)$; 11. $\sqrt[n]{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \dfrac{\alpha(x)}{n}$.

Yuqorida keltirilgan ekvivalentliklardan funksiyalar limitini hisoblashda foydalanish maqsadga muvofiq.

Masalan, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x^3)}{(1 - \cos x)\operatorname{arctg} x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3}{\dfrac{x^2}{2} x} = 2$.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya limitini nuqtalar ketma-ketligi tilida ta’riflang?
2. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya limitini $\varepsilon - \delta$ tilida ta’riflang?
3. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ta’riflaridan foydalanib, bir o‘zgaruvchili funksiya limitini ta’riflashda qanday almashtirishlar bajarish yetarli deb hisoblaysiz?
4. Funksiya limiti ta’riflarida limit (quyuqlanish) nuqtasining funksiya aniqlanish sohasiga tegishli bo‘lishi shartmi?
5. Ajoyib limitlar deb ataluvchi limitlarni yozing.
6. Yaqinlashuvchi funksiyalar bo‘ysinadigan qanday xossalarni bilasiz?
7. Bir o‘zgaruvchili funksiyaning $x \to \infty$ dagi limitini ta’riflang?
8. Bir o‘zgaruvchili funksiya uchun bir tomonlama limitlarni ta’riflang?
9. Funksiya nuqtada limitga ega bo‘lishi uchun qanday shartlarning bajarilishini yetarli hisoblaysiz?
10. Limitlar haqidagi asosiy teoremalarni sanab o‘ting?
11. Cheksiz kichik funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi va uning qanday xossalarini bilasiz?
12. Cheksiz katta funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi?
13. Qanday funksiyalarga teng tartibli funksiyalar deyiladi?

14. Teng kuchli (yoki ekvivalent) funksiyalar deganda nimani tushunasiz?

15. Kichiklik tartibi yuqori deganda-chi?

16. Ekvivalent funksiyalarga misollar keltiring.

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Funksiya limiti.
2. Yaqinlashuvchi funksiya.
3. Ajoyib limit.
4. Bir tomonlama (chapdan yoki o‘ngdan) limit.
5. Funksiyaning cheksizdagi limiti.
6. Cheksiz kichik funksiya.
7. Cheksiz katta funksiya.
8. Teng tartibli funksiyalar.
9. Teng kuchli yoki ekvivalent funksiyalar.
10. Yuqori tartibli kichik funksiya.

Mustaqil ishlash uchun misollar.

22.1**.** $y = x^2$ funksiya berilgan. Agar argument $x \to -2$, u holda $y \to 4$. Funksiya limiti 4 sonining $\varepsilon = 0{,}01$ atrofiga mos, -2 nuqtaning δ atrofi qanday bo‘lganda, $|x + 2| < \delta$ tengsizlikdan $|y - 4| < \varepsilon = 0{,}01$ munosabat kelib chiqadi?

22.2. Limitlarni toping:

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-3x+1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-3x+1}$; 3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-3x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}}\dfrac{x^2-2}{x^4+x^2+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-4x}{x^2-3x+2}$; 6) $\lim\limits_{x\to -0,5}\dfrac{1+5x+6x^2}{8x^3+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x-2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^4-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+3x}{x^3-x+2}$; 11) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^5-7x^2+4x}{9x^4+2x^3-10}$; 12) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5+6x^3-7x}{3x^2-2x^3}$;

13) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2+x}+3x}$; 14) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{x+1}-1}$; 15) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$;

16) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{5+x}-\sqrt{5}}{x}$; 17) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2-\sqrt{x}}$; 18) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$;

19) $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$; 20) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$; 21) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha x}{\sin \beta x}$;

22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sin x)^3}{\sin x^2}$; 23) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\arcsin 2x}{7x}$; 24) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-\operatorname{arctg}x}{3x+\arcsin x}$;

25) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}$; 26) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin x-\cos x}{1+\sin x-\cos x}$; 27) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}{1-\sin nx}$;

28) $\lim\limits_{\alpha\to\pi}\dfrac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$; 29) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg}x\right]$; 30) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos x-0{,}5}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$;

31) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$; 32) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$; 33) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$;

34) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{\frac{x+1}{5}}$; 35) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$; 36) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\operatorname{cosec}x}$;

37) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{5x}$; 38) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x-1}{x}$; 39) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin 2x}$;

40) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{x-2}$; 41) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right]$.

22.3. $y=1-\sqrt{x}$ va $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ funksiyalar $x\to 1$ holda cheksiz kichik funksiyalardir. Ulardan qaysi biri yuqori tartibli?

22.4. Quyidagi $x\to 0$ holda cheksiz kichik funksiyalarning x ga nisbatan tartibini aniqlang:

a) $\sqrt[3]{1+x}-1$; b) $e^{\sqrt{x}}-1$; c) $e^{\sin x}-1$; d) $\sin(\sqrt{1+x}-1)$.

22.5. Radiusi R ga teng bo‘lgan doiraga kvadrat ichki chizilgan, kvadratga doira ichki chizilgan, doiraga esa kvadrat ichki chizilgan va hokazo doira – kvadratlardan n tadan. Barcha doiralar yuzalari yig‘indisi va kvadratlar yuzalari yig‘indilarining $n\to\infty$ dagi limitlarini toping.

23-§. Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiya uzluksizligi

1. Bir va ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi

$y=f(M)=f(x_1;x_2;\ldots;x_n)$ funksiya $V\subseteq R_n$ to‘plamda aniqlangan bo‘lib, $M_0(x_1^0;x_2^0;\ldots;x_n^0)$ nuqta V to‘plamning quyuqlanish nuqtasi va $M_0\in V$ bo‘lsin.

Funksiyaning nuqtada uzluksizligini, funksiya limitini ta’riflagan kabi, ikki teng kuchli ta'riflardan biri orqali aniqlash mumkin.

Har bir hadi V to'plamga tegishli va uning M_0 quyuqlanish nuqtasiga yaqinlashuvchi har qanday $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$ nuqtalar ketma-ketligi uchun, mos funksiya qiymatlari $f(M_1)$, $f(M_2), \ldots, f(M_k), \ldots$ sonli ketma-ketligi $f(M_0)$ songa intilsa, u holda **f(M) funksiya M_0 nuqtada uzluksiz** deyiladi.

Har qanday oldindan tayinlanadigan $\varepsilon > 0$ son uchun M_0 nuqtaning shunday bir δ atrofi $S_\delta(M_0)$ ni ko'rsatish mumkin bo'lsaki, barcha $M \in S_\delta(M_0) \cap V$ nuqtalar uchun $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $f(M)$ funksiya M_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

$y = f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtada uzluksizligi $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ ning mavjudligini va uning funksiyaning M_0 nuqtada erishadigan qiymati $f(M_0)$ ga tengligini anglatadi, ya'ni $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

$\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ shart $\lim\limits_{M \to M_0} [f(M) - f(M_0)] = 0$ shartga teng kuchli ekanligini e'tiborga olsak, argumentlar orttirmalari deb ataladigan $x_1 - x_1^0 = \Delta x_1,\ x_2 - x_2^0 = \Delta x_2,\ \ldots,\ x_n - x_n^0 = \Delta x_n$ almashtirishlar va ularga mos funksiyaning M_0 nuqtadagi orttirmasi deyiladigan $f(M) - f(M_0) = \Delta f(M_0)$ almashtirish kiritsak, shartlar

$$\lim_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \Delta x_n \to 0}} \Delta f(M_0) = 0$$

ko'rinishda yoziladi. Bu esa, funksiyaning nuqtada uzluksizligi, shu nuqtada barcha argumentlarning cheksiz kichik orttirmalariga funksiyaning ham cheksiz kichik orttirmasi mos kelishini anglatadi.

Xususiy holda, yuqorida keltirilgan ta'riflarni bir o'zgaruvchili funksiya uchun bayon qilishda M ni x bilan almashtirish kifoya qiladi.

Masalan:

1) $y = \cos x$ funksiya har bir $x_0 \in R_1$ nuqtada uzluksiz, chunki

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(\cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0) =$$

$$= -2 \lim_{\Delta x \to 0}(\sin\frac{\Delta x}{2}\sin(x_0 + \frac{\Delta x}{2})) = 0$$

2) $y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_n x_n$ chiziqli funksiya har bir $M(x_1; x_2; \ldots; x_n) \in R_n$ nuqtada uzluksiz va hokazo.

2. Uzluksiz funksiyalar xossalari. To‘plamda uzluksizlik

Nuqtada uzluksiz funksiyalar quyidagi xossalar bilan xarakterlanadi:

1. f(M) va g(M) funksiyalar M_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda M_0 nuqtada quyidagi funksiyalar ham uzluksiz bo‘ladi:

a) $f(M) + g(M)$; b) $k f(M)$ (k – o‘zgarmas); c) $f(M) \cdot g(M)$;

d) $\dfrac{f(M)}{g(M)}$ $(g(M_0) \neq 0)$.

2. Agar f(M) funksiya V to‘plamda aniqlangan bo‘lib, $M_0 \in V$ nuqtada uzluksiz va $f(M_0) > 0$ $(f(M_0) < 0)$ bo‘lsa, u holda M_0 nuqtaning shunday bir δ atrofi $S_\delta(M_0)$ mavjudki, barcha $M \in S_\delta(M_0) \cap V$ nuqtalar uchun $f(M) > 0$ $(f(M) < 0)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

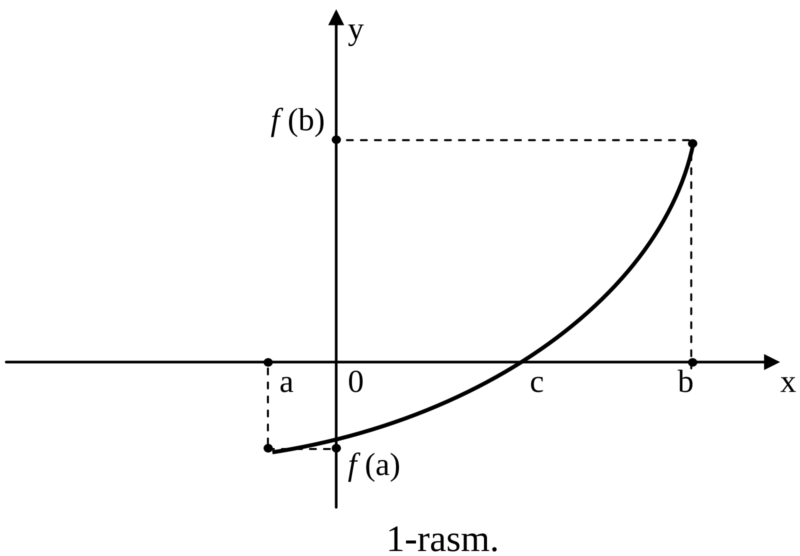
To‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz funksiyaga **to‘plamda uzluksiz funksiya** deyiladi.

To‘plamda uzluksiz funksiyalar esa quyidagi xossalarga ega:

1. Agar f(M) funksiya ixcham (chegaralangan va yopiq) V to‘plamda uzluksiz bo‘lsa, u holda f(M) funksiya V to‘plamda chegaralangandir.

2. Agar f(M) funksiya ixcham V to‘plamda uzluksiz bo‘lsa, u holda f(M) funksiya V to‘plamda o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi. Bir o‘zgaruvchili funksiya uchun yuqorida qayd qilingan xossalardan tashqari, qo‘shimcha quyidagi xossa o‘rinli:

3. Agar f (x) funksiya [a; b] kesmada uzluksiz va kesmaning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlarga erishsa $(f(a) \cdot f(b) < 0)$, u holda (a; b) intervalga tegishli kamida bitta c nuqta topiladiki, $f(c) = 0$ tenglik bajariladi (1-rasm).



1-rasm.

3. Bir tomonlama uzluksizlik. Bir o‘zgaruvchili funksiyaning uzilish nuqtalari.

Bir o‘zgaruvchili $y = f(x)$ funksiya argumentning $x \le x_0$ $(x \ge x_0)$ qiymatlarida aniqlangan bo‘lsin.

Agar $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ $\left(\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)\right)$

munosabat bajarilsa, ***f*** **(x) funksiya $\mathbf{x_0}$ nuqtada chapdan (o‘ngdan) uzluksiz** deyiladi.

Masalan, $f(x) = \begin{cases} 2^{\frac{1}{x}}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ funksiya 0 nuqtada chapdan uzluksiz,

chunki, $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = \lim\limits_{x\to -0} 2^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0)$.

$y = f(x)$ funksiya [a; b] kesmaning har bir ichki nuqtasida uzluksiz bo‘lib, a nuqtada o‘ngdan va b nuqtada chapdan uzluksiz bo‘lgandagina [**a; b**] **kesmada uzluksiz** bo‘ladi.

Bir o‘zgaruvchili $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin. Funksiyaning x_0 nuqtaning o‘zida aniqlangan bo‘lishi shart emas. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lmasa, funksiya x_0 nuqtada uzilgan yoki x_0 nuqta uning **uzilish nuqtasi** deyiladi.

$y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada chapdan va o‘ngdan limitlari mavjud bo‘lib, o‘zaro teng bo‘lmasa, ya’ni

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0) \ne f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x)$$

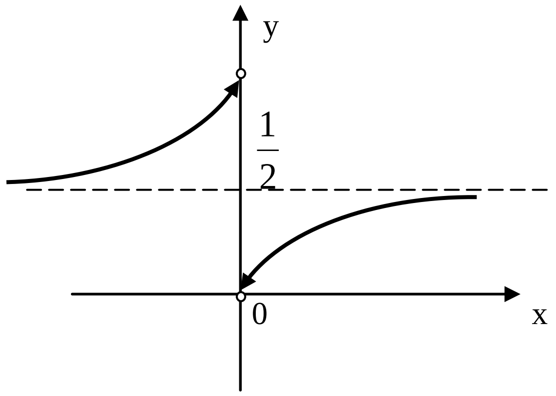
u holda x_0 nuqta **funksiyaning birinchi tur uzilish nuqtasi** deyiladi.

Masalan, $f(x) = \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$ funksiya $x_0 = 0$ nuqtada birinchi tur uzilishga

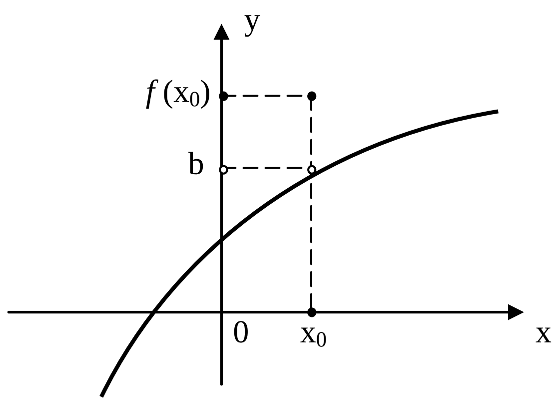
ega, chunki $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = 1 \ne 0 = \lim\limits_{x\to +0} f(x)$ (2 – rasm).

Agar x_0 nuqtada funksiyaning chapdan va o‘ngdan limitlari $f(x_0 - 0)$ va $f(x_0 + 0)$ lar o‘zaro teng bo‘lib, funksiyaning x_0 nuqtada erishadigan qiymati $f(x_0)$ dan farq qilsa, unda x_0 nuqta **uzliksizlikni tiklash mumkin bo‘lgan uzilish nuqtasi** deb ataladi (3 – rasm).

$y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada chapdan yoki o‘ngdan limitlarining biri mavjud bo‘lmasa (xususan, cheksiz bo‘lsa), u holda x_0 nuqta **funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi** deyiladi.



2-rasm.



3-rasm.

Masalan, $f(x)=2^{\frac{1}{x}}$ funksiya $x_0 = 0$ da ikkinchi tur uzilishga ega, chunki $f(+0) =\infty$.

Bir necha o‘zgaruvchili funksiyalar uzilish nuqtalaridan tashqari, uzilish chiziqlari, sirtlari va hokazolarga ega bo‘lishlari mumkin.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Funksiyaning nuqtada uzluksizligining qanday ta’riflarini bilasiz?
2. Funksiya uzluksizligining ta’riflari funksiya limiti mos ta’riflaridan farqli jihatlari nimalardan iborat?
3. Nuqtada uzluksiz bir o‘zgaruvchili funksiyalarga misollar keltiring?
4. Nuqtada uzluksiz funksiyalarning qanday xossalarini bilasiz?
5. To‘plamda uzluksiz funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi?
6. To‘plamda uzluksiz funksiyalarning xossalarini sanab o‘ting?
7. Kesmada uzluksiz bir o‘zgaruvchili funksiyaning o‘ziga xos xossasi nimadan iborat?
8. Nuqtada bir tomonlama (chapdan yoki o‘ngdan) uzluksiz funksiyani ta’riflang va misollar keltiring?
9. Bir o‘zgaruvchili funksiya uchun birinchi tur uzilish nuqtasi deb, qanday nuqtaga aytiladi? Misollar keltiring?
10. Uzliksizlikni tiklash mumkin bo‘lgan uzilish nuqtasi deb, qanday nuqtaga aytiladi?
11. Bir o‘zgaruvchili funksiya uchun ikkinchi tur uzilish nuqtasi deb, qanday nuqtaga aytiladi? Misollar keltiring?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Nuqtada uzluksiz funksiya.

2. To‘plamda uzluksizlik.
3. Bir tomonlama uzluksizlik.
4. Birinchi tur uzilish nuqtasi.
5. Uzliksizlikni tiklash mumkin bo‘lgan uzilish nuqtasi.
6. Ikkinchi tur uzilish nuqtasi.

Mustaqil ishlash uchun misollar

23.1. y funksiya quyidagicha aniqlangan:

$$y=\begin{cases}\frac{1}{x}, & \text{агар } x<-1;\\ x, & \text{агар } -1\le x<1;\\ x^2-6x+6, & \text{агар } x\ge 1.\end{cases}$$

Funksiyani sonlar o‘qida uzluksiz deyish mumkinmi? (Grafigini chizing).

23.2. $f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{агар } x\le 2;\\ ax^2+9, & \text{агар } x>2\end{cases}$ parametrli funksiya berilgan. a parametrning qanday qiymatida *f* (x) funksiya uzluksiz bo‘ladi? Masala yechimini funksiya grafigini chizib izohlang?

23.3. $y_1=\frac{1}{x+3}$ va $y_2=\frac{1}{(x-2)^2}$ funksiyalar qanday nuqtalarda uzilishga ega. Funksiyalar grafiklarini chizing. Uzilish nuqtalari yaqinida funksiyalarning o‘zini tutishidagi farqni aniqlang?

23.4. $y=\frac{x^2-1}{x^3-1}$ funksiya x = 1 nuqtada aniqlanmagan. u(1) qanday bo‘lganda, u(1) bilan qayta aniqlangan funksiya x = 1 nuqtada uzluksiz bo‘ladi?

23.5. $y=\frac{\sin x}{x}$ va $y=\frac{\cos x}{x}$ funksiyalar x = 0 nuqtada uzilishning qanday turiga ega. x = 0 nuqta atrofida funksiya grafiklari xarakterini aniqlang?

23.6. $y=\begin{cases}\frac{|x|}{x}, & \text{агар } x\ne 0;\\ 0, & \text{агар } x=0\end{cases}$ funksiyani uzluksizlikka tekshiring? Funksiya grafigini chizing.

23.7. Quyidagi funksiyalarni uzluksizlikka tekshiring, uzluksizlik oraliqlarini va uzilish nuqtalari turini aniqlang:

a) $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$; b) $y = \frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}$; c) $y = x \cdot \sin\frac{\pi}{x}$;

d) $y = \frac{3^{\frac{1}{x}} - 1}{3^{\frac{1}{x}} + 1}$; e) $y = \frac{1}{1+4^{\operatorname{tg}x}}$.

24-§. Bir o‘zgaruvchili funksiya hosilasi va differensiali

1. Hosila haqida tushuncha. Funksiya differensiali

Bir o‘zgaruvchili $y = f(x)$ funksiya x nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin.

$f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi **birinchi tartibli hosilasi** deb, shu nuqtada funksiya orttirmasi $\Delta y = \Delta f(x)$ ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining, Δx nolga intilgandagi chekli limitiga aytiladi va $f'(x)$, y', y_x, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ ifodalarning biri orqali yoziladi.

Ta’rifga ko‘ra, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Agar $f(x)$ funksiya x nuqtada uzluksiz bo‘lib, $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$ (yoki $-\infty$) bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya x **nuqtada cheksiz hosila**ga ega deyiladi va $f'(x) = \infty$ (yoki $-\infty$) shaklda yoziladi.

Chekli yoki cheksizligidan qat’i nazar,

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to -0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{va} \quad f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

limitlarga, mos ravishda, $f(x)$ **funksiyaning x nuqtada chapdan va o‘ngdan hosilalari** deyiladi.

$f(x)$ funksiyaning x nuqtada bir tomonlama, chapdan $f'_-(x)$ va o‘ngdan $f'_+(x)$ hosilalari mavjud bo‘lib, o‘zaro teng bo‘lgandagina, funksiya x nuqtada hosilaga ega bo‘ladi va $f'(x) = f'_-(x) = f'_+(x)$.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning hosilasi $f'(x)$ ni topish amaliga **funksiyani differensiallash** deb ataladi.

Masalan: 1) $y = x^3$ funksiya har qanday haqiqiy x da chekli hosilaga ega, chunki

$$y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2] = 3x^2.$$

Shunday qilib, $(x^3)' = 3x^2$ $(x \in R)$.

2) $y = \sqrt[3]{x}$ funksiya $x = 0$ nuqtada cheksiz hosilaga ega:

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{0 + \Delta x} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} = +\infty .$$

3) $y = |x|$ funksiya esa $x = 0$ nuqtada har ikki bir tomonlama hosilalari $y'_+(0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1;$ $y'_-(0) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{e^{-\Delta x} - 1}{\Delta x} = -1$ mavjud bo‘lishiga qaramasdan, hosilaga ega emas, chunki $y'_+(0) \neq y'_-(0)$.

Erkli o‘zgaruvchi yoki **argument x ning differensiali** deb, uning orttirmasi Δx ga aytiladi va dx orqali belgilanadi, ya’ni $dx = \Delta x$.

Agar $y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ orttirmasi, $\Delta y = A(x)dx + \alpha(dx)$ ko‘rinishda tasvirlansa, bu yerda $A(x)$ – o‘zgaruvchi, $dx \to 0$ da $\alpha(dx) = 0(dx)$, u holda $f(x)$ funksiya x **nuqtada differensiallanuvchi** deyiladi.

Masalan, $y = x^3$ funksiya ixtiyoriy x nuqtada differensiallanuvchi, chunki $\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = 3x^2dx + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = 3x^2 \Delta x + \alpha(dx)$.

$y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi **birinchi tartibli differensiali** deb, shu nuqtada funksiya orttirmasi Δy ning dx ga nisbatan bosh chiziqli qismi $A(x)dx$ ga aytiladi va dy yoki $df(x)$ yozuv bilan belgilanadi. Ta’rifga binoan, $dy = A(x)dx$ va $\Delta y = dy + \alpha(dx)$.

Agar $f(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda funksiya shu nuqtada uzluksizdir. Funksiyaning nuqtada uzluksizligi uning differensiallanuvchanligining zaruriy sharti hisoblanadi, ammo yetarli emas. Masalan, yuqoridagi misolimizda, $y = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada uzluksiz bo‘lgani bilan differensiallanuvchi emas.

$y = f(x)$ funksiyaning x nuqtada chekli $f'(x)$ hosilasining mavjudligi, $f(x)$ funksiya shu nuqtada differensiallanuvchanligining yetarli shartidir. Ushbu holda, $A(x) = f'(x)$ va $dy = f'(x)dx$ tengliklar o‘rinli.

Masalan, $y = x^3$ funksiyaning ixtiyoriy $x \in R$ nuqtadagi differensiali $dy = (x^3)' dx = 3x^2 dx$.

Agar $\Delta y = dy + 0(\Delta x)$ tenglikda Δx yetarlicha kichik bo‘lsa, taqribiy hisoblarda qo‘llaniladigan $\Delta y \approx dy$ yoki $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$ formulalarni olamiz.

Masalan, taqribiy hisoblash formulasini qo‘llab, $\sqrt[3]{124}$ ni hisoblash talab etilsin. $y = \sqrt[3]{x}$ funksiya uchun taqribiy hisoblash formulasi $\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2}\Delta x$ ko‘rinishda yoziladi. Natijada,

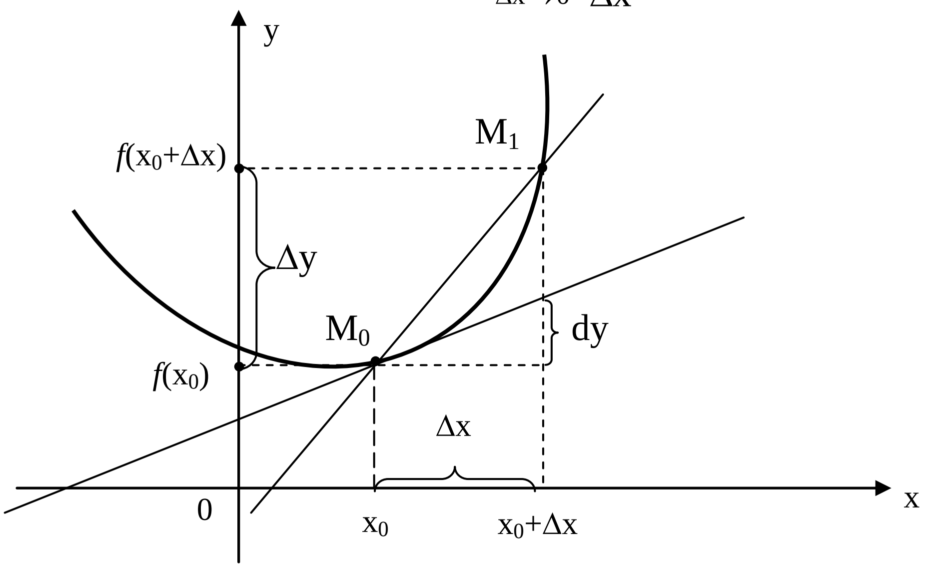
$$\sqrt[3]{124}=\sqrt[3]{125-1}\approx\sqrt[3]{125}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{125^2}(-1)=5-\frac{1}{75}=4\frac{74}{75}.$$

Agar $f(x)$ funksiya biror-bir (a; b) oraliqning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo‘lsa, shu **oraliqda differensiallanuvchi funksiya** deyiladi. Bundan tashqari, agarda $f'(x)$ ushbu oraliqda uzluksiz bo‘lsa, u holda funksiya **oraliqda uzluksiz differensiallanuvchi** deb yuritiladi.

2. Hosila va differensialning geometrik va fizik ma’nolari.

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan va shu atrofda grafigi chizilgan bo‘lsin.

$y=f(x)$ funksiya grafigining $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtasiga o‘tkazilgan **urinma** deb, M_0M_1 kesuvchining $M_1(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$ nuqta grafik bo‘ylab $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtaga ixtiyoriy ravishda intilgandagi limit holatiga aytiladi (rasmga qarang). M_0M_1 kesuvchining burchak koeffitsienti $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ga teng bo‘lib, uning Δx nolga intilgandagi limiti, bir tomondan urinma burchak koeffitsienti $k=\operatorname{tg}\alpha$ ga teng bo‘lsa, ikkinchi tomondan hosila ta’rifiga ko‘ra, $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi birinchi tartibli hosilasi $f'(x_0)$ ga teng: $k=\operatorname{tg}\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$.



Bundan esa, birinchi tartibli hosilaning geometrik ma’nosi kelib chiqadi. $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi $f'(x_0)$ hosilasi, funksiya grafigining x_0 abssissali nuqtasiga o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientiga teng: $f'(x_0)=k$.

Hosilaning geometrik ma’nosidan foydalanib, $y=f(x)$ funksiya grafigining $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtasiga o‘tkazilgan **urinma va normal tenglamalari**, mos ravishda, quyidagicha yozilishi mumkin:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ va } y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Masalan, $y = \sqrt[3]{x}$ funksiya grafigining $x_0 = 1$ abssissali nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tenglamasi:

$$y - \sqrt[3]{1} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{1^2}(x - 1) \quad \text{yoki} \quad y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1)$$

$y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi birinchi tartibli differensiali du esa, kattalik jihatdan, funksiya grafigining $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinmasining x_0 nuqta $x_0 + \Delta x$ nuqtaga o‘tganda mos ordinata orttirmasiga teng Rasmdan, agarda Δx yetarlicha kichik bo‘lganda, taqribiy tenglik $\Delta y \approx dy$ ning o‘rinli ekanligini uqish qiyin emas.

$y = f(x)$ funksiya x nuqtada chekli $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lsa, uni shu nuqtada erksiz o‘zgaruvchi y ning erkli o‘zgaruvchi x ga nisbatan **o‘zgarish tezligi** sifatida talqin qilish mumkin. Funksiya orttirmasini uning differensiali bilan almashtirilishi esa, erksiz o‘zgaruvchining o‘zgarishini argumentning kichik o‘zgarishiga nisbatan chiziqli jarayon sifatida hisoblash imkonini beradi. Masalan, moddiy nuqtaning to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakat qonuni $S = S(t)$ funksiya bilan berilgan bo‘lsin. U holda, ixtiyoriy t vaqt onidagi v **oniy tezlik** kattaligi harakat qonunidan vaqt bo‘yicha olingan birinchi tartibli hosila qiymatiga teng: $v(t) = S'(t)$. $dS = v(t) \cdot dt$ differensial esa, moddiy nuqta t va $t + dt$ vaqt onlari oralig‘ida t momentdagi oniy v tezligi bilan tekis harakat qilganda bosib o‘tishi mumkin bo‘lgan masofani aniqlaydi.

3. Hosilaning iqtisodiy tatbiqlari.

Amaliy iqtisodiyotda tayyorlangan mahsulot hajmi bilan xom ashyo sarfi orasida bog‘liqlikni o‘rnatuvchi **ishlab chiqarish funksiyalari**, tarmoqlar rivojini ta’minlashda, optimallash masalalarida keng qo‘llaniladi. Masalan, ikki o‘zgaruvchili (faktorli) Kobb – Duglas ishlab chiqarish funksiyasi tayyorlangan mahsulot hajmi y bilan ishlab chiqarish fondlari kattaligi K va jonli mehnat sarfi hajmi L orasidagi munosabatni quyidagicha aniqlaydi:

$$y = q \cdot K^{\alpha} L^{1-\alpha}.$$

Bu yerda, q va α tanlanadigan o‘zgarmas sonlar.

Ishlab chiqarish funksiyalari differensiallanuvchi deb taxmin qilinsa, hosila tushunchasi bilan bog‘liq ularning differensial xarakteristikalari muhim ahamiyat kasb etadi. Masalan, agar $y = f(x)$ ishlab chiqarish funksiyasi tayyorlangan mahsulot hajmi u bilan xom ashyo sarfi hajmi x orasidagi bog‘liqlikni ifodalasa, $f'(x)$ **limit mahsulot** deyiladi. Agarda,

$y = f(x)$ ishlab chiqarish xarajatlari u bilan mahsulot hajmi o‘rtasida munosabatni aks ettirsa, $f'(x)$ **limit xarajatlar** deb yuritiladi.

$y = f(x)$ funksiya elastikligi x argumentning kichik nisbiy o‘zgarish jadalligiga nisbatan u funksiyaning nisbiy o‘zgarish unumini aniqlaydi. **Elastiklik koeffitsienti** ε quyidagicha hisoblanadi:

$$\varepsilon = \frac{dy}{y} : \frac{dx}{x} \quad \text{yoki} \quad \varepsilon = y' \cdot \frac{x}{y}.$$

Elastiklik koeffitsienti tovarlarga bo‘lgan ehtiyoj talabi masalalarini, tovarlarning bahosi va iste’molchilarning daromadiga bog‘liq holda, tekshirishda keng qo‘llaniladi. Elastiklik koeffitsientining yuqoriligi ehtiyoj qondirilish darajasining bo‘shligini anglatsa, uning past darajaligi ushbu ehtiyojning qondirilmay ko‘p turib qolganini anglatadi.

Ikki faktorli Kobb – Duglas ishlab chiqarish funksiyasi uchun hosila bilan bog‘liq asosiy iqtisodiy – matematik tushunchalar (differensial xarakteristikalar) quyidagilar:

y'_K - limit fond unumdorligi; y'_L - limit mehnat unumdorligi;

$y'_K \cdot \frac{K}{y}$ - fondlar bo‘yicha elastiklik koeffitsienti;

$y'_L \cdot \frac{L}{y}$ - mehnat resurslari bo‘yicha elastiklik koeffitsienti.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Bir o’zgaruvchili funksiyaning birinchi tartibli hosilasini ta’riflang?
2. Funksiya nuqtada cheksiz hosilaga ega bo‘lishi mumkinmi?
3. Funksiyaning nuqtada bir tomonlama hosilalari deb nimaga aytiladi?
4. Funksiyaning nuqtada hosilaga ega bo‘lish shartlari nimalardan iborat?
5. Funksiyani differensiallash deganda nimani tushunasiz?
6. Nuqtada differensiallanuvchi funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi?
7. Funksiyaning nuqtada differensiallanuvchi bo‘lish zaruriy va yetarli shartlari nimalardan iborat?
8. Funksiyaning birinchi tartibli differensiali deganda nimani tushunasiz?
9. Taqribiy hisoblash formulasini yozing?
10. Qanday funksiyaga to‘plamda differensiallanuvchi va uzluksiz

differensiallanuvchi funksiya deyiladi?

11. Birinchi tartibli hosilaning geometrik ma’nosi nimadan iborat?

12. Birinchi tartibli differensialning geometrik ma’nosi – chi?

13. Birinchi tartibli hosila va differensialning fizik ma’nosini bayon qiling?

14. Ishlab chiqarish funksiyasi deganda nimani tushunasiz?

15. Ishlab chiqarish funksiyalarining differensial xarakteristikalariga misollar keltiring?

16. Elastiklik koeffitsienti formulasini yozing?

17. Ikki faktorli Kobb- Duglas ishlab chiqarish funksiyasining qanday asosiy differensial xarakteristikalarini bilasiz?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Funksiyaning birinchi tartibli hosilasi.
2. Bir tomonlama hosilalar.
3. Differensiallanuvchi funksiya.
4. Funksiyaning birinchi tartibli differensiali.
5. To‘plamda differensiallanuvchi funksiya.
6. To‘plamda uzluksiz differensiallanuvchi funksiya.
7. Ishlab chiqarish funksiyalari.
8. Limit mahsulot.
9. Limit xarajatlar.
10. Elastiklik koeffitsienti.

Mustaqil ishlash uchun misollar

24.1. $y = x^2$ funksiyaning $x = -2$ nuqtada argument Δx ning:

a) 1; b) 0,2;
c) 0,1; d) 0,01

qiymatlariga mos orttirmalarini toping?

24.2. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzing, agar:

a) $y = x^3 - 2x + 3$, $x = 0$, $\Delta x = 0.1$;

b) $y = \frac{1}{x}$, $x = 0,5$, $\Delta x = 0.02$;

c) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $\Delta x = 0,01$.

Nisbatlarning $\Delta x \to 0$ dagi limitlari, birinchi holda –2 ga, ikkinchi holda – 4 ga, uchinchi holda esa $\frac{1}{4}$ ga tengligini ko‘rsating.

24.3. Hosila ta’rifidan foydalanib, quyidagi funksiyalarning berilgan nuqtalardagi birinchi tartibli hosilalarini toping:

1) $y = x^4$, $x = 1$; 2) $y = \sqrt[4]{x}$, $x = 16$;

3) $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 0{,}8$; 4) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x = 4$;

5) $y = 5^x$, $x = 0$; 6) $y = \log_5 x$, $x = 1$;

7) $y = \sin x$, $x = 0$; 8) $y = tg\, x$, $x = 0$.

24.4. Quyidagi funksiyalarning berilgan x va Δx larda orttirma va differensiallarini toping:

a) $y = x^2 - x$, $x = 10$, $\Delta x = 0{,}1$;
b) $y = \sqrt{x}$, $x = 4$, $\Delta x = 0{,}41$;
c) $y = 2^x$, $x = 2$, $\Delta x = 0{,}4$.

Funksiya orttirmasini uning differensiali bilan almashtirilgandagi absolyut va nisbiy xatolarni hisoblang?

24.5. Funksiyalarning birinchi tartibli differensiallarini toping:

1) $y = 2\sqrt{x}$; 2) $y = \frac{1}{3x^3}$;

3) $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; 4) $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$.

24.6. Quyidagi funksiyalarning berilgan nuqtalarda uzluksizligi va differensiallanuvchanligini tekshiring:

a) $y = |x^3|$, $x = 0$; b) $y = |\sin x|$, $x = 0$ va $x = \frac{\pi}{2}$.

24.7. Taqribiy hisoblash formulasini qo‘llab, radikalli sonli ifodalarning qiymatlarini hisoblang:

a) $\sqrt{16{,}08}$; b) $\sqrt{35{,}68}$; c) $\sqrt[3]{65{,}024}$;

d) $\sqrt[4]{79{,}628}$; e) $\sqrt[5]{32{,}81}$.

24.8. $y = x^2$ parabolaga, uning:

a) $x = -2$ abssissali nuqtasiga; b) (1; 1) nuqtasiga;

c) $y = 3x$ to‘g‘ri chiziq bilan kesishish nuqtalariga o‘tkazilgan urinmalarning burchak koeffitsientlarini toping?

24.9. $y = x^3$ kubik parabolaning qanday nuqtalariga o‘tkazilgan urinmalarning burchak koeffitsienti 12 ga teng bo‘ladi?

24.10. Quyidagi chiziqlar qanday burchak ostida kesishadi:

a) $y = x^2$ parabola va $y = 3x - 2$ to‘g‘ri chiziq;

b) $y = \sqrt{x}$ parabola va $y = \frac{1}{x}$ giperbola;

c) $x^2 + y^2 = 8$ aylana va $y^2 = 2x$ parabola;

d) $y = \sin x$ sinusoida va $y = \cos x$ kosinusoida ($x \in [0; \pi]$).

24.11. $y = x^2$ parabolaning qanday nuqtasiga o‘tkazilgan urinma:

a) $4x - y - 5 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘ladi;

b) $2x - 6y + 5 = 0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘ladi;

c) $y = 3x + 1$ to‘g‘ri chiziq bilan 45^o li burchak tashkil etadi?

24.12. Quyidagi funksiya grafiklari abssissalari bilan berilgan nuqtalariga o‘tkazilgan urinma va normal tenglamalarini tuzing:

a) $y = \frac{1}{x}$, $x_0 = -1$; b) $y = \ln x$, $x_0 = e$;

c) $y = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$; d) $y = 1 - \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}$, $x_0 = 3$;

e) $y = \frac{x+9}{x+5}$, $x_0 = 0$.

24.13. $y = x^2 - 4x + 5$ parabola va $y = x + 1$ to‘g‘ri chiziqlar kesishish nuqtalariga normallar o‘tkazilgan. Normallar va kesishish nuqtalarini tutashtiruvchi vatar hosil qilgan uchburchak yuzasini toping?

24.14. Moddiy nuqtaning to‘g‘ri chiziqli traektoriya bo‘ylab harakat qonuni $s = \frac{t^4}{4} - 4t^3 + 16t^2$ (m.) berilgan. Qanday vaqt onlarida (sek.) uning harakat tezligi nolga teng bo‘ladi?

24.15. Bolalar o‘yinchoqlari ishlab chiqaradigan firmaning xarajat $f(x)$ va daromad $g(x)$ funksiyalari berilgan (x – kunlik mahsulot hajmi):

$$f(x) = \frac{50x^2 - 300x}{x+2}, \quad g(x) = \frac{100x^2 + 300x}{x+1}.$$

a) foyda funksiyasini tuzing;

b) limit xarajatlar funksiyasini quring;

c) limit daromad funksiyasini quring;

d) limit foyda funksiyasini quring?

24.16. Avtomobil ehtiyot qismlari ishlab chiqaruvchi firmaning xarajat va daromad funksiyalari quyidagi ko‘rinishga ega:

$$f(x) = 6000 + 300x + \frac{6000x}{x+50}, \quad g(x) = -\frac{x^3}{50} + x^2 + 600x.$$

Bu yerda, x – kunlik mahsulot hajmi ($0 < x < 200$).

Firmaning:

a) foyda funksiyasini tuzing;
b) limit daromad funksiyasini quring;
c) limit xarajatlar funksiyasini quring;
d) limit foyda funksiyasini quring.

25-§. Hosila va differensialni hisoblash qoidalari Yuqori tartibli hosila va differensiallar

1. Differensiallanuvchi funksiyalar haqida teoremalar. Elementar funksiyalar hosilalari jadvali

Limitlar haqida teoremalar kabi, differensiallanuvchi funksiyalar haqida ham teoremalar mavjud.

u(x) va v(x) funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo‘lib, k biror-bir o‘zgarmas son bo‘lsa, u holda x nuqtada

a) u(x) + v(x); b) k u(x); c) $u(x)\cdot v(x)$; d) $\dfrac{u(x)}{v(x)}$

funksiyalar ham differensiallanuvchi bo‘ladi va quyidagilar o‘rinli :

1) $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$; $d[u(x) + v(x)] = du(x) + dv(x)$.

2) $[k\,u(x)]' = k\,u'(x)$; $d[k\,u(x)] = k\,du(x)$.

3) $[u(x)\cdot v(x)]' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$;
$d[u(x)\cdot v(x)] = u(x)\cdot dv(x) + v(x)\cdot du(x)$.

4) $$\left[\frac{u(x)}{v(x}\right]' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)};$$

$$d\left[\frac{u(x)}{v(x}\right] = \frac{du(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot dv(x)}{v^2(x)}, \quad (v(x) \neq 0).$$

Funksiya hosilasini hisoblashda **differensiallash qoidalari**dan tashqari, elementar funksiyalar hosilalari jadvalidan ham foydalaniladi.

$f(x)$	$f'(x)$
C (o‘zgarmas)	0
x^p	x^{p-1}
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$
a^x	$a^x\, ln a$
$f(x)$	$f'(x)$

$f(x)$	$f'(x)$
sin x	cos x
cos x	-sin x
tg x	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$
ctg x	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$f(x)$	$f'(x)$

e^x	e^x		arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x\, lna}$		arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
			arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$
$ln\,\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$		arcctg x	$-\frac{1}{1+x^2}$

Misollar. Differensiallash qoidalari va hosilalar jadvalidan foydalanib, quyidagi funksiyalar hosilalarini hisoblang:

1. $y=\sqrt[3]{x^2}+5^x e^x - x^2 \text{arctg}x.$ 2. $y=\frac{2^x+3x^2}{\ln x}.$

1. $y'=[\sqrt[3]{x^2}+5^x e^x - x^2\text{arctg}x]'=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+(5e)^x ln(5e)-(x^2)'\cdot\text{arctg}x-$

$-x^2\cdot(\text{arctg}x)'=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}+5^x e^x ln(5e)-2x\,\text{arctg}x-\frac{x^2}{1+x^2}.$

2. $y'=\frac{(2^x+3x^2)'\cdot lnx-(2^x+3x^2)\cdot(lnx)'}{(lnx)^2}=\frac{(2^x ln2+6x)\cdot lnx-(2^x+3x^2)\cdot\frac{1}{x}}{(lnx)^2}$

2. Murakkab funksiya hosilasi va differensiali

$y = f(u)$ va $u = g(x)$ **funksiyalarning superpozitsiyasi**dan iborat $y = f[g(x)]$ **murakkab funksiya** berilgan bo‘lsin.

Agar $u = g(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi, o‘z navbatida $y = f(u)$ funksiya $u_0 = g(x_0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda $y = f[g(x)]$ murakkab funksiya ham x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘ladi va $\frac{dy}{dx}=\left(\frac{dy}{du}\right)\cdot\left(\frac{du}{dx}\right)$ yoki $y'(x_0) = f'(u_0)\cdot g'(x_0)$.

Murakkab funksiyaning erkli o‘zgaruvchi bo‘yicha hosilasi, shu funksiyani tashkil etgan (superpozitsiyalanuvchi) funksiya hosilalarining ko‘paytmasiga teng.

Murakkab funksiya differensiali uchun $dy = y'(x_0)\cdot dx = f'(u_0)\cdot du$ tengliklar o‘rinli, bu yerda $du = g'(x_0)\cdot dx$. Murakkab funksiya birinchi tartibli differensialini hisoblash uchun uning biror o‘zgaruvchi bo‘yicha hosilasini shu o’zgaruvchining differensialiga ko‘paytirish yetarli. Bunda differensialni hisoblash shakli o‘zgarishsiz qolib, o’zgaruvchilarning tanlanilishiga yoki ularning erkli yoki erksizligiga bog‘liq emas.Ushbu xossa birinchi tartibli differensial shaklining invariantlik xossasi deyiladi.

Misol.

1. $y = ln\,tg\frac{x}{2}$ funksiyaning birinchi tartibli hosilasi va differensialini hisoblaymiz:

$$y' = \left[ln\,tg\frac{x}{2}\right]' = \frac{\left[tg\frac{x}{2}\right]'}{tg\frac{x}{2}} = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

$$dy = y'dx = \frac{1}{\sin x}$$

2. $y = x^{\sin x}$ $(x > 0)$ funksiya hosilasini hisoblash uchun, dastlab tenglikning ikkala tomonini logarifmlaymiz va so‘ngra hosila olamiz:

$(ln y)' = (\sin x \cdot ln x)'$ <=> $\frac{y'}{y} = \cos x \cdot ln x + \frac{\sin x}{x}$.

Natijada, $y' = x^{\sin x}(\cos x \cdot ln x + \frac{\sin x}{x})$.

3. Yuqori tartibli hosilalar va differensiallar

$y = f(x)$ funksiya uchun birinchi tartibli hosila y' aniqlangan bo‘lsin. Funksiyaning ikkinchi tartibli y'' hosilasi u' dan olinadigan hosila (agar uning mavjudlik sharti bajarilsa) sifatida aniqlanadi: $y'' = (y')'$.

Yuqoridagi mulohazani davom ettirib, funksiyaning uchinchi, to‘r-tinchi va hokazo, ixtiyoriy **n – tartibli hosila**larini aniqlash mumkin. Yuqori tartibli hosilalarni yozishda quyidagi belgilar qo‘llaniladi:

$$f^{(n)}(x),\ y'''_{xxx},\ y^{V},\ y,\ \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Shunday qilib, $y''' = (y'')'$, $y^{(4)} = (y''')'$, . . . , $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$.

Yuqori tartibli hosilalarni hisoblashda, birinchi tartibli hosilani hisoblash qoidalari kabi qoidalar qo‘llaniladi. Masalan, $y = \sin^2 x$ funk-siya uchun $y' = (\sin^2 x)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x$, $y'' = (\sin 2x)' = 2\cos 2x$, $y''' = (2\cos 2x)' = -4\sin 2x$ va hokazo.

Quyida keltirilgan ba’zi funksiyalarning yuqori n – tartibli hosila-lari uchun tegishli formulalarni olish va ularni jadval holida yig‘ish mumkin:

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
x^p	$p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)x^{p-n}$

e^x	e^x
e^{kx}	$k^n e^{kx}$
$Ln x$	$\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$
$\sin kx$	$k^n \sin(kx+\dfrac{\pi n}{2})$
$\cos kx$	$k^n \sin(kx+\dfrac{\pi n}{2})$

$y = f(x)$ funksiyaning **yuqori tartibli differensiallari** ham ketma – ket ravishda, mos hosilalari kabi aniqlanadi:

$d^2y = d(dy)$ – ikkinchi tartibli differensial;

$d^3y = d(d^2y)$ – uchinchi tartibli differensial;

. . . .

$d^ny = d(d^{n-1}y)$ - n-tartibli differensial.

Agar $y = f(u)$ funksiya berilgan bo‘lib, u erkli o‘zgaruvchi yoki x ning chiziqli $u = kx + b$ funksiyasidan iborat bo‘lsa, u holda:

$$d^2y = y''(du)^2,\ d^3y = y^{(3)}(du)^3, \ldots, d^ny = y^{(n)}(du)^n.$$

Agarda $y = f(x)$ funksiyada $u = g(x) \neq kx + b$ bo‘lsa, u holda yuqori tartibli differensiallar uchun **invariantlik xossasi** o‘rinli bo‘lmaydi, chunki $d^2y = f''(u) \cdot (du)^2 + f'(u) \cdot d^2u$ va hokazo.

4. Teskari funksiya hosilalari

$y = f(x)$ funksiya $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi bo‘lib, shu intervalda uzluksiz $x = g(y)$ teskari funksiyaga ega va $y'(x) \neq 0$ bo‘lsin. U holda, $x = g(y)$ teskari funksiya ham differensiallanuvchi bo‘lib, $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Oxirgi tenglikni u bo‘yicha differensiallaymiz va y''_{xx} mavjud bo‘lsa,

$$x''_{yy} = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^2}x'_y = -\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}$$

Differensiallashni davom etib, teskari funksiyaning istalgan tartibli hosilasini aniqlash mumkin.

Masalan, $y = e^x$ $(y > 0)$ funksiya uchun $x = \ln y$ teskari funksiyadir.

Uning hosilasi $x'_y = (\ln y)' = \dfrac{1}{y'_x} = \dfrac{1}{(e^x)'} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{y}$.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Funksiyalar yig‘indisi, songa ko‘paytmasi, o‘zaro ko‘paytmasi va nisbatlarining hosila va differensiallarini hisoblash qoidalari nimalardan iborat?
2. Elementar funksiyalarning birinchi tartibli hosilalarini yozing?
3. Murakkab funksiyaning hosilasi qanday topiladi.
4. Murakkab funksiya birinchi tartibli differensialining invariantlik xossasi deganda nimani tushunasiz?
5. Logarifmlab differensiallash jarayoni nimalardan iborat?
6. Yuqori tartibli hosilalar va differensiallar qanday aniqlanadi?
7. Qanday xollarda murakkab funksiya yuqori tartibli differensiali uchun invariantlik xossasi o‘rinli va qanday xollarda o‘rinli emas?
8. Teskari funksiya hosilasini topish formulasini yozing?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Differensiallash qoidalari.
2. Yig‘indining hosila va differensiali.
3. Ko‘paytmaning hosila va differensiali.
4. Bo‘linmaning hosila va differensiali.
5. Murakkab funksiya hosilasi va differensiali.
6. Murakkab funksiya birinchi tartibli differensialining invariantligi.
7. Logarifmlab differensiallash.
8. Yuqori tartibli hosilalar va differensiallar.
9. Teskari funksiya hosilasi.

Mustaqil ishlash uchun misollar

25.1. Differensiallash qoidalari va hosilalar jadvalidan foydalanib, quyidagi funksiyalarning birinchi tartibli hosilalarini toping:

1) $y = 3x - 2\sqrt{x}$; $y'(1)$, $y'(\frac{1}{4})$ larni hisoblang?

2) $y = \frac{x^2 - 5x - 1}{x^3}$; $y'(-1)$, $y'(2)$ larni hisoblang?

3) $y = \frac{3}{5 - x} + \frac{x^2}{5}$; $y'(0)$, $y'(2)$ larni hisoblang?

4) $y = \frac{2 - x}{x + 1}$; $y'(1)$ ni hisoblang?

5) $y = (\sqrt{x^3} + 1) \cdot x$; $y'(0)$ ni hisoblang?

6) $y = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$; $y'(0)$, $y'(1)$ larni hisoblang?

7) $y=\frac{1-x^3}{1+x^3}$; 8) $y=\frac{x}{1-\cos x}$;

9) $y=\frac{\sin x}{x}+\frac{x}{\sin x}$; 10) $y=\frac{\sin x}{1+\cos x}$;

11) $y=x\arcsin x+\sqrt{x}$; 12) $y=\frac{x}{1+x^2}-\mathrm{arctg}x$;

13) $y = x^2\, log_4 x$; 14) $y = (x^2 - 2x + 3)\, e^x$.

25.2. Quyidagi funksiyalarni differensiallang:

1) $y=(x^2+x+2)^{\frac{3}{2}}$; $y'(1)$ ni toping?

2) $y=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; $y'(2)$ ni toping?

3) $y=(3x^2-\frac{4}{x}+6)^5$; 4) $y=(1-2x^{\frac{1}{2}})^6$;

5) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}+\frac{5}{\sqrt[4]{(x^2+2)^3}}$; 6) $y=\sqrt{1+2\mathrm{ctg}x}$;

7) $y = 3\sin^2 x - \sin^3 x$; 8) $y=\sin\sqrt{1+x^2}$;

9) $y=\frac{\cos^2(1-\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}$; 10) $y=\arccos\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$;

11) $y=\arcsin\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$; 12) $y=\mathrm{arctg}(x-\sqrt{1+x^2})$;

13) $y=\sqrt{1+ln^2x}$; 14) $y = ln(x^2 - 4x)$;

15) $y = \mathrm{arctg}[ln(3x + 2)]$; 16) $y = e^{\arcsin 2x}$;

17) $y = \sin(e^{3x-2})$; 18) $y = 4^x \cdot x^4$;

19) $y=x-\sqrt{1-x^2}\cdot\arcsin x$; 20) $y=\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$;

21) $y=ln(x+\sqrt{x^2-1})-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; 22) $y = ln(e^x\cos x + e^{-x}\sin x)$;

23) $y=x^{\frac{1}{x}}$; 24) $y=2x^{\sqrt{x}}$;

25) $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$; 26) $y = (1 + x^2)^{\sin x}$.

25.3. Berilgan funksiyalarning yuqori tartibli hosilalarini toping:

a) $y = x^3 + 3x - 4$; $y'' = ?$ b) $y = (x + 4)^5$; $y''' = ?$

c) $y = x^6 - 4x^3 + 4$; $y^{(4)} = ?$ d) $y = e^{2x+1}$; $y''(0) = ?$

e) $y = \mathrm{arctg}\, x$; $y''(1) = ?$ f) $y=\frac{1}{1-x}$; $y^{(5)} = ?$

25.4. Funksiyalarning n - tartibli hosilalarining umumiy ifodasini toping:

1) $y = e^{2x}$; 2) $y = e^{-x}$; 3) $y = \sin ax + \cos bx$;

4) $y = \sin^2 x$; 5) $y = \frac{1}{2}x + 1$; 6) $y = ln(ax + b)$.

25.5. Yuqori tartibli differensiallarni toping:

a) $y = \sqrt[3]{x^2}$; $d^2y = ?$ b) $y = x^p$; $d^3y = ?$

c) $y = e^{-3x}$; $d^2y = ?$ d) $y = \sin^2 x$; $d^3y = ?$

25.6. Berilgan funksiyalarning teskari funksiyalari hosilalarini toping:

1) $y = e^{\arcsin x}$; 2) $y = \frac{1 - x^4}{1 + x^4}$; 3) $y = xe^{-x}$.

26-§. Differensiallanuvchi funksiya uchun o‘rta qiymat haqida teoremalar. Teylor formulasi. Lopital qoidasi

1. Differensiallanuvchi funksiya uchun o‘rta qiymat haqida Roll va Lagranj teoremalari

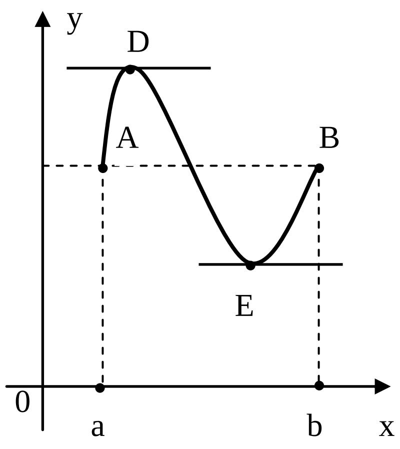
Differensiallanuvchi funksiyalar uchun **o‘rta qiymat** haqidagi teoremalar nomini olgan tasdiqlardan asosiylari bilan tanishamiz.

Roll teoremasi: $y = f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Agar funksiya $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi bo‘lib, $f(a) = f(b)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda $(a; b)$ intervalga tegishli hech bo‘lmaganda bitta shunday bir s nuqta topiladiki, $f'(c) = 0$ bo‘ladi.

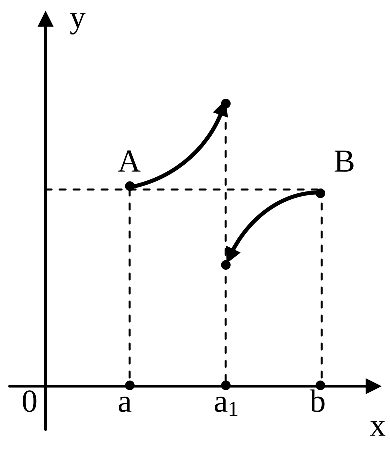
Teoremani geometrik izohlaydigan bo‘lsak, teorema shartlari bajarilganda, $y = f(x)$ funksiya grafigi AB yoyga tegishli hech bo‘lmaganda bitta (1-rasmda ikkita D va E) nuqta topiladiki, chiziqning shu nuqtasiga o‘tkazilgan urinma 0x abssissalar o‘qiga parallel bo‘ladi. Teoremaning har bir sharti ahamiyatlidir, chunki ulardan biri bajarilmasa, $(a; b)$ intervalda $f'(c) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi s nuqta topilmasligi mumkin. Masalan, 2-rasmda grafigi keltirilgan funksiya uchun uzluksizlik sharti bajarilmagan, a_1 nuqta uning uzilish nuqtasi.

3-rasmda tasvirlangan funksiya uchun esa uning differensiallanuvchanlik sharti bajarilmagan, a_2 nuqtada funksiya hosilaga ega emas. Egri chiziqlarga tegishli va $(a; b)$ interval doirasida urinmalari 0x o‘qiga parallel bo‘ladigan biror-bir nuqta mavjud emas.

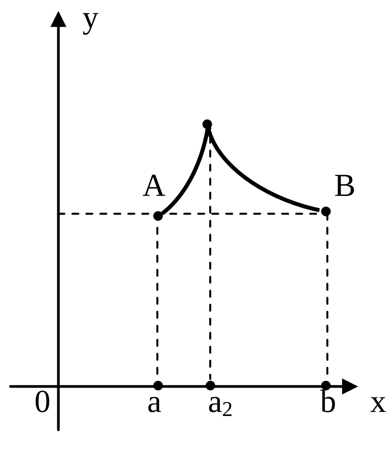
Lagranj teoremasi: $y = f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, $(a; b)$ intervalda differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda $(a; b)$ intervalga tegishli kamida bitta s nuqta topiladiki, $f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b-a)$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.



1 - rasm.



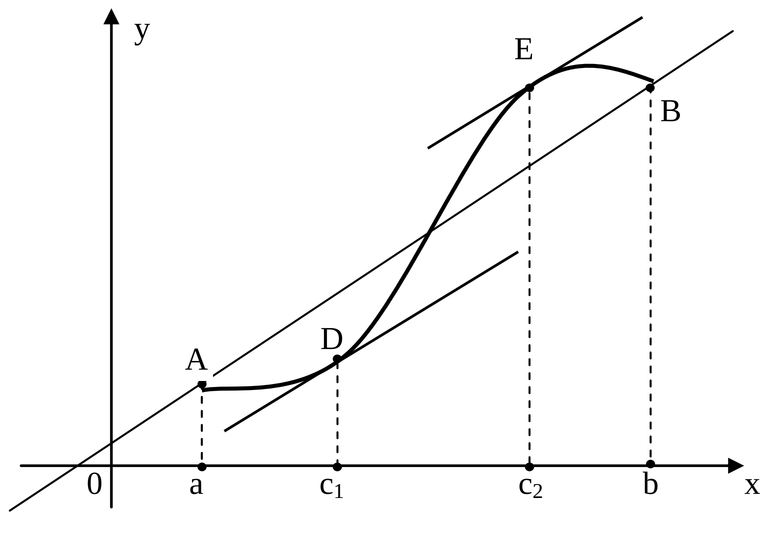
2 - rasm.



3 - rasm.

Lagranj teoremasida Roll teoremasidagidek, funksiyaning [a; b] kesmaning chetki nuqtalarida teng qiymatlarga erishishi talab qilinmaydi. Teoremadan xususiy $f(a) = f(b)$ holda, $f'(c) = 0$ ekanligi kelib chiqadi, shu ma'noda Lagranj teoremasi Roll teoremasining umumlashmasi hisoblanadi.

Teoremani geometrik izohlaydigan bo'lsak, uning har bir sharti o'rinli bo'lganda, $y = f(x)$ funksiya grafigi AB yoyga tegishli hech bo'lmaganda bitta (4-rasmda ikkita D va E) nuqta topiladiki, chiziqning shu nuqtasiga o'tkazilgan urinma AB vatarga parallel bo'ladi.



4-rasm.

Agar $b = a + \Delta x$ almashtirish kiritsak, c nuqtani $c = a + \theta(b - a) = a + \theta\Delta x$ $(\theta \in (0; 1))$ ko'rinishda ifodalash mumkin. Almashtirishlar e'tiborga olinsa, **Lagranj formulasi** $f(a + \Delta x) - f(a) = f'(a + \theta\Delta x)\Delta x$ shaklda yoziladi va **Lagranjning chekli orttirmalar formulasi** deyiladi.

2. Teylor - Makloren formulalari va ularning qo‘llanilishi.

$y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va shu atrofda $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x)$ hosilalarga ega bo‘lsa, u holda atrofga tegishli har bir x uchun **Teylor formulasi**

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

tengligi o‘rinli bo‘ladi, bu yerda $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ - Teylor formulasining Lagranj shaklidagi **qoldiq hadi** deb yuritiladi.

Agar $x = a + \Delta x$ almashtirish kiritsak, Teylor formulasi

$$f(a+\Delta x) - f(a) = \frac{f'(a)}{1!}\Delta x + \frac{f''(a)}{2!}(\Delta x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\Delta x)^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\theta\Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}$$

($\theta \in (0;1)$) **Lagranjning umumlashma chekli orttirmalar formulasi** deb ataladigan ko‘rinishini oladi.

Agar Teylor formulasida $a = 0$ bo‘lsa, ushbu

$$f(a) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (\theta \in (0;1))$$

Makloren formulasi deb ataladigan formulani olamiz.

Teylor - Makloren formulalari funksiyalarni ko‘phad shaklida ifodalashda, funksiyalarning taqribiy qiymatlarini hisoblashda, funksiyalarni tekshirish va limitlarni aniqlashda qo‘llaniladi.

Masalan, $x = 0$ nuqta atrofidagi har bir x uchun quyidagilar o‘rinli:

$$1)\ e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x);$$

$$2)\ (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x);$$

$$3)\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x);$$

$$4)\ \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x);$$

$$5)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x).$$

3. Aniqmasliklarni ochish Lopital qoidasi

Lopital qoidasi: a nuqtaning biror atrofida differensiallanuvchi, nuqtaning o‘zida differensiallanuvchi bo‘lishi shart bo‘lmagan $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun, shu atrofda $g'(x)\neq 0$ va yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$ shartlar o‘rinli bo‘lib, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit mavjud bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ ham mavjud bo‘ladi va $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ tenglik o‘rinli.

Yuqoridagi qoida a ni ∞ bilan almashtirilgan hol uchun ham o‘rinli.

Lopital qoidasi $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishidagi aniqmasliklarni ochishda qo‘llaniladi. Agar $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nisbat $x = a$ nuqtada $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishidagi aniqmasliklardan iborat bo‘lsa, u holda qoida $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ nisbatga qo‘llaniladi va jarayon aniqmaslik ochilmaguncha davom ettiriladi.

Algebraik almashtirishlar yordamida $(0\cdot\infty)$ yoki $(\infty-\infty)$ ko‘rinishdagi aniqmasliklar $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ aniqmasliklarning biriga keltiriladi, so‘ngra Lopital qoidasi qo‘llanilib, aniqmasliklar ochiladi.

Dastlab logarifmlash yo‘li bilan esa (1^{∞}), (∞^{0}), (0^{0}) ko‘rinishdagi aniqmasliklar $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ aniqmasliklarga keltiriladi.

Misollar. Lopital qoidasini qo‘llab, limitlarni toping:

1. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-x-12}{\ln(x+4)}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to -3}\frac{(x^2-x-12)'}{[\ln(x+4)]'}=\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x-1}{\frac{1}{x+4}}=-7$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\left[(x-1)\cdot \mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}\right]=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)'}{(\mathrm{ctg}\frac{\pi x}{2})'}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2\sin^2\frac{\pi x}{2}}{-\pi}=-\frac{2}{\pi}$.

O‘z - o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Differensiallanuvchi funksiya uchun o‘rta qiymat haqidagi Roll teoremasini bayon qiling va uning geometrik ma’nosini izohlang?

2. O‘rta qiymat haqidagi Lagranj teoremasi nimani tasdiqlaydi va

teoremaning geometrik ma’nosini chaqing?

3. Lagranjning chekli orttirmalar formulasini yozing?

4. Roll teoremasi Lagranj teoremasining xususiy holi deyish mumkinmi va nima uchun?

5. Teylor formulasi nimani aniqlab beradi va uni yozing?

6. Teylor formulasining Lagranj shaklidagi koldik hadini yozing?

7. Lagranjning umumlashma chekli orttirmalar formulasini yozing va uni Lagranjning chekli orttirmalar formulasi bilan solishtiring?

8. Makloren formulasi deb, qanday formulaga aytiladi?

9. Teylor - Makloren formulalarining qo‘llanilishini gapirib bering?

10. Lopital qoidasi nimalardan iborat?

11. Lopital qoidasi yordamida $(0 \cdot \infty)$, $(\infty - \infty)$, (0^0), (1^∞) va (∞^0) aniqmasliklarni ham ochish mumkinmi va qanday qilib?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Differensiallanuvchi funksiya uchun o‘rta qiymat.
2. Lagranj formulasi.
3. Lagranjning chekli orttirmalar formulasi.
4. Teylor formulasi.
5. Teylor formulasining qoldiq hadi.
6. Lagranjning umumlashma chekli orttirmalar formulasi.
7. Makloren formulasi.
8. Lopital qoidasi.

Mustaqil ishlash uchun misollar

26.1. Roll teoremasi tasdig‘ini quyidagi kesmalarda berilgan funksiyalar uchun tekshirib ko‘ring:

a) $[1; 2]$: $y = x^2 - 3x + 8$; b) $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$: $y = log_2 \cos x$;

c $[0; \pi]$: $y = e^{\sin x}$; d) $[-1; 2]$: $y = \sqrt{x^3 + 4x^2 - 7x - 6}$.

26.2. Lagranj teoremasi tasdig‘ini quyidagi kesmalarda berilgan funksiyalar uchun tekshirib ko‘ring:

a) $[0; 3]$: $y = x^2$; b) $[e; e^2]$: $y = ln x$.

26.3. Quyidagi funksiyalar uchun berilgan kesmalarda Lagranj formulasini yozing:

a) $y = \sin 2x$, $[\alpha; \beta]$; b) $y = x - x \cdot ln x$, $[1; 1 + \Delta x]$.

26.4. a) $y = \frac{1}{x}$ funksiya uchun $a = 1$ nuqtada Teylorning n - tartibli formulasini yozing?

b) $y=\sqrt{x}$ funksiya uchun a = 4 nuqtada Teylorning 3 – tartibli formulasini yozing?

c) $y = \cos^2 x$ funksiya uchun $a = 0$ nuqtada Teylorning 2 – tartibli formulasini yozing?

26.5. a) $x^3 + 3x^2 – 2x + 4$ ko‘phadni $x + 1$ ikkihad darajalari bo‘yicha yoying?

b) $x^4 – 5x^3 + x^2 – 3x + 4$ ko‘phadni $x – 4$ ikkihad darajalari bo‘yicha yoying?

c) $f(x) = x^8 – 2x + 5x^6 – x + 3$ funksiyaning $a = 2$ nuqtada Teylor formulasiga yoyilmasining dastlabki uchta hadini toping va $f(2,01)$, $f(1,98)$ larni taqriban hisoblang?

26.6. $e^x \approx 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}$ taqribiy hisoblash formulalarini qo‘llab,

a) $ye^{0,02}$; b) $\sqrt{e}$; c) $ye^{-0,1}$ sonli ifodalarni hisoblang?

26.7. $ln(1+x)\approx x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$ formulani qo‘llab,

a) ln 1.01; b) ln0,95 sonli ifodalarni hisoblang?

26.8. Lopital qoidasini qo‘llab, funksiya limitlarini toping:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{ln\cos x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\mathrm{tg}x}{x-\sin x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^5-1}{x^6-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5^x-4^x}{3^x-2^x}$;

7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{e^x-e^{-x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2\cdot e^{-x})$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}[(\pi-2\mathrm{arctg}x)\cdot lnx]$; 10) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x}{lnx}-\frac{1}{lnx}\right)$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\mathrm{ctg}x\right)$; 12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)x\right]$; 13) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot e^{\frac{1}{x}})$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^x$; 15) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\mathrm{tg}x}$; 16) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$;

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$.

27-§. Funksiyani hosila yordamida to‘la tekshirish va uning grafigini chizish

1. Funksiyaning o‘sish va kamayish shartlari

Funksiyaning o‘zgarish xarakteri bilan uning hosilasi orasida bog‘-liqlik mavjud bo‘lib, hosila yordamida fiinksiya tabiatiga mansub bir qator xossalarni aniqlash mumkin.

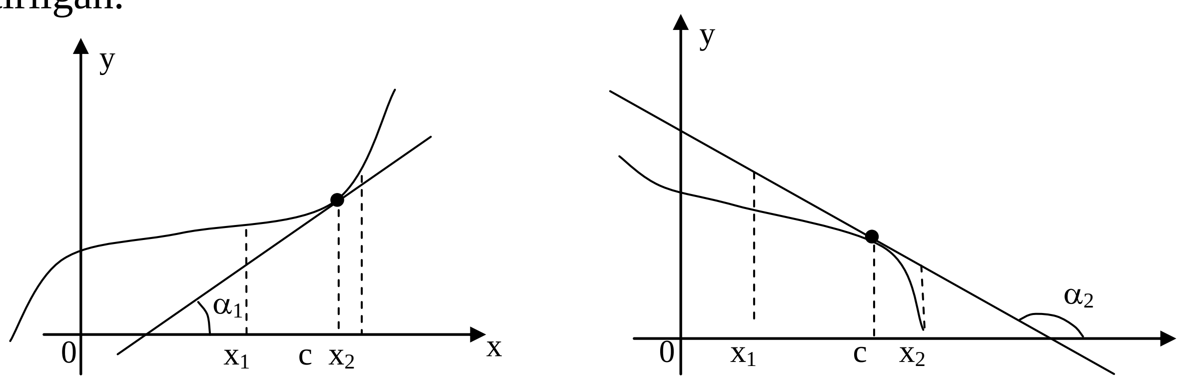
V= [a;b] oraliqda y = f(x) fiinksiya berilgan bo‘lib, har qanday shu oraliqdan tanlanadigan ikki x_1 va x_2 sonlar uchun $x_1 < x_2$ munosabatdan $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$ tengsizlik kelib chiqsa, u holda y = f(x) funksiya V oraliqda o‘suvchi (kamayuvchi) deyilishini eslatib o‘tamiz (3-§ ga qarang).

V= [a;b] kesmada aniqlangan y = f(x) funksiya, shu kesmada uzluksiz va (a;b) intervalda differensiallanuvchi bolsin. Funksiyaning V oraliqda o‘sishi (yoki kamayishi)ning yetarli sharti quyidagi teoremadan iborat.

1 - T**eorema.** V oraliqda differensiallanuvchi f(x) funksiya shu oraliqda o‘suvchi (kamayuvchi) bo‘lishi uchun, oraliqning har bir ichki nuqtasida P(x) hosilaning musbat (manfiy) bo‘lishi yetarli.

X oraliqqa tegishli har qanday x_1 va x_2 nuqtalar qaralmasin, $[x_1;x_2]$ kesmada f(x) funksiya uchun Lagranj teoremasi o‘rinli, ya’ni, $f(x_2)$ - $f(x_1)$ = f(c) $(x_2 - x_1)$, bu yerda $x_1 < x_2$ va c € $(x_1;x_2)$. Tenglikdan, agar f(c) > 0 bo‘lsa, $f(x_2) > f(x_1)$ va funksiya o‘suvchi, agarda f(c) < 0 bo‘lsa, $f(x_2)< f(x_1)$ va funksiya kamayuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Funksiya monotonlik alomatlarining geometrik izohi 1 rasmlarda keltirilgan.



a) $f'(c_1) = tga_1>0$b)   b) $f'(c_2) = tg\ a_2 < 0$

1 - rasm.

$y = f(x)$ funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinmalar X oraliq ichki nuqtalarida OX o‘qi musbat yo‘nalishi bilan o‘tkir burchak hosil etsa, funksiya o‘suvchi, o‘tmas burchak hosil qilsa kamayuvchidir.

Masala. $y = x- e^{-2x}$ funksiyani monotonlikka tekshiring.

Berilgan funksiya R da aniqlangan va har bir x€R nuqtada $y'(x) = e^{-2x} \cdot (1 - 2x)$ hosilaga ega bo‘lib, differensiallanuvchidir. Agar $x < 1/2$ bo‘lsa, $y'(x) > 0$ bo‘lib, funksiya o‘suvchi, agarda $x > 1/2$ bo‘lsa, $y'(x) <0$ bo‘lib, funksiya kamayuvchidir.

Demak, $y = x\cdot e^{-2x}$ fijnksiya (-∞; l/2) oraliqda monoton o‘suvchi, (l/2; ∞) oraliqda esa monoton kamayuvchidir.

Masala. $f(x) = x$-arctgx fiinksiyaning sonlar o‘qida o‘suvchi ekanligini isbotlang.

f ‘ (x) = (x-arctgx)’ = 1 - 1/1+x^2 bo‘lib, har bir x€R uchun, f ‘(x) > 0. Demak, funksiya R da monoton o‘suvchi.

2. Funksiya ekstremumlari. Ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari

$y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror δ atrofida aniqlangan bo‘lib, x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsin.

Agar barcha x€(x_0-5; x_0) U (x_0;x_0+δ) nuqtalar uchun $f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$) tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, x_0 f(x) funksiyaning qat’iy maksimum (minimum) nuqtasi deyiladi. (2 a - rasm).

Agarda har bir x€(x_0-5;x_0) U (x_0;x_0+δ) uchun $f(x) < f(x_0)$ (f(x)>fl;x_0)) tengsizlik bajarilsa, u holda x_0 f(x) funksiyaning noqat’iy maksimum (minimum) nuqtasi deyiladi (2 b - rasm).

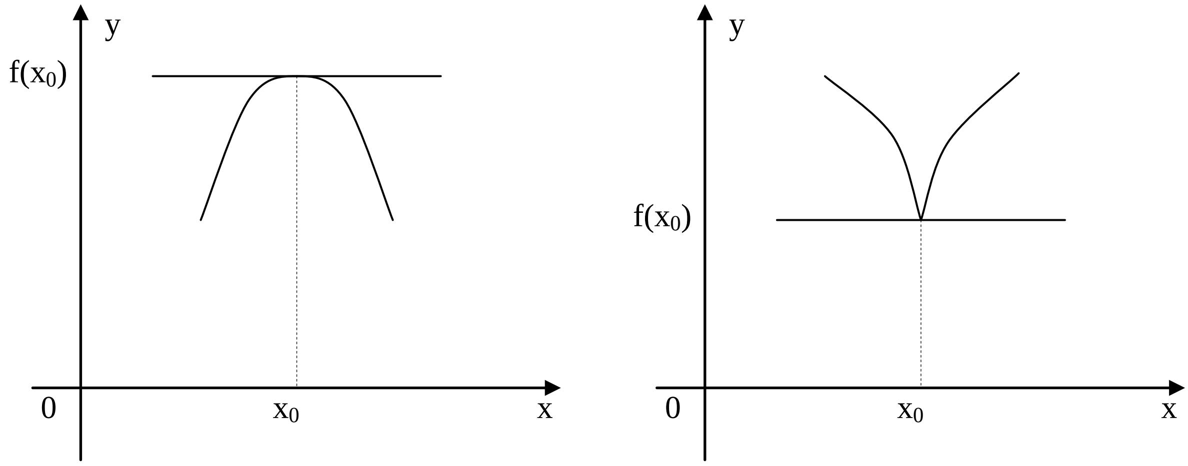
Funksiyaning qat’iy va noqat’iy maksimum va minimum nuqtalariga, uning lokal (mahalliy) xarakterdagi ekstremum nuqtalari deyiladi.

Agar x_0 f(x) funksiyaning maksimum nuqtasi bo‘lsa, u holda x_0 nuqtaning qaralayotgan 6 atrofida $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) < 0$ ($\Delta f(x_0) < 0$) munosabatlar o‘rinli bo‘ladi. Agarda x_0 f(x) funksiyaning minimum nuqtasi bo‘lsa, unda $\Delta f(x_0) > 0$ ($\Delta f(x_0) > 0$) tengsizliklar bajariladi.

2 - Teorema. (Funksiya ekstrcmumining zaruriy sharti)

Agar x_0 nuqta f{x) funksiyaning ekstremum nuqtasi bo‘lib, funksiya uning biror atrofida aniqlangan bo‘lsa, u holda f ‘(x_0) = 0 yoki f ‘(x_0) - mavjud emas.

Teoremani geometrik izohlash mumkin. Teorema shartlari bajarilganda, $y = f(x)$ funksiya grafigining x_0 abssisali nuqtasiga o‘tkazilgan urinma yoki mavjud va OX o‘qiga parallel (2 a - rasm), yoki mavjud emas (2 b - rasm).



a) $f'(x_0) = 0$ b) $f'(x_0)$ - mavjud emas.

2 - rasm.

Funksiya ekstremumining zaruriy shartlarini qanoatlantiruvchi, ya'ni funksiya hosilasi f(x) ni nolga aylantiruvchi yoki f '(x) mavjud bo'l-magan, funksiya aniqlanish sohasining ichki nuqtalariga uning kritik nuqtalari deyiladi. Ulardan f '(x)=0 tenglamani qanoatlantiruvchi kritik nuqtalarga statsionar nuqtalar deyiladi.

Misol. $y = (x-4)\cdot\sqrt[3]{x}$ funksiyaning kritik nuqtalarini toping.

Funksiya sonlar o'qida aniqlangan va $y'(x) = 4/3\cdot x-1/\sqrt[3]{x}$. x = 1 da y'(l) = 0 bo'lib, x = 0 da y'(0) - mavjud emas.

Demak, x = 1 nuqta funksiyaning statsionar nuqtasi, {0;l} nuqtalar to'plami esa uning kritik nuqtalari to'plamidir.

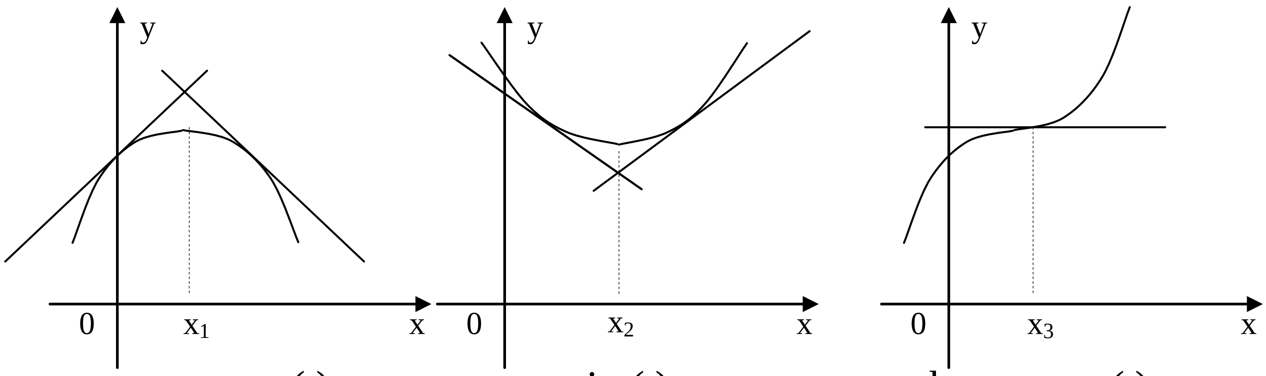
Funksiya ekstremumi zaruriy shartini qanoatlantiruvchi har bir kritik nuqta uning ekstremum nuqtasi bo'lavermaydi. Masalan, $y = x^3$ funksiya R da monoton o'suvchi, chunki $(x^3)' \geq 0$, x€R. x = 0 nuqta esa uning kritik (statsionar) nuqtasi chunki y'(0) = 0. Funksiya sonlar o'qida monoton o'suvchi bo'lgani uchun, x = 0 kritik nuqtasi uning ekstremumi bo' la olmaydi.

Funksiyaning ekstremum nuqtalari uning kritik nuqtalari ichidan quyidagi yetarli shartlardan biri asosida tanlanadi.

3 - Teorema. (1-yetarli shart) f(x) funksiya x_0 kritik nuqtaning biror δ atrofida differensiallanuvchi x_0 nuqtaning o'zida uzluksiz bo'lib, diffcrensiallanuvchi bo'lishi shart bo'lmasin. Agar $(x_0-\delta; x_0)$ va $(x_0; x_0+\delta)$ intervallarda f '(x) hosila qarama-qarshi ishorali qiymatlarga erishsa, x_0 ekstremum nuqta bo'ladi. Xususan:

a) agarda $(x_0$-$\delta;x_0)$ da $f(x) > 0$, $(x_0; x_0+\delta)$ da f ‘(x) < 0 bo‘lsa, x_0 qat’iy maksimum nuqta (3a - rasm); b) agarda $(x_o$- δ; $x_0)$ da f ‘(x)<0, $(x_0; x_0+\delta)$ da f (x)>0 bo‘lsa, x_0 - qat’iy minimum nuqta (3b - rasm).

Agarda f ‘(x) x_0 dan o‘tayotib, o‘z ishorasini saqlab qolsa, x_0 kritik nuqta ekstremum nuqta bo‘la olmaydi (3c - rasm).

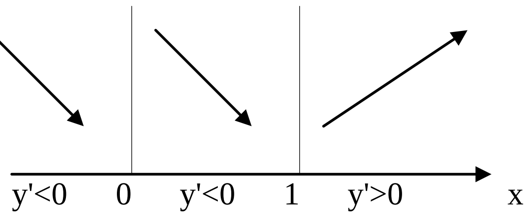


x_1-max(.) x_2-min (.) x_3-ekstremum (.) emas

3 - rasm

Masala. $y = (x - 4)\cdot\sqrt[3]{x}$ funksiyaning ekstremum nuqtalarini toping.

Yuqorida funksiyaning kritik nuqtalari to‘plami {0;l} aniqlangan edi. Funksiya aniqlanish sohasi sonlar o‘qini kritik nuqtalar yordamida intervallarga ajratamiz va yetarli shartlarni tekshirib ko‘ramiz:



Demak, x = 0 kritik nuqta ekstremum nuqta emas, x = 1 nuqta esa, funksiyaning minimum nuqtasi bo‘lib, y(l) = - 3.

4 - Teorema. (2-yetarli shart) $f(x_0) = 0$ bo‘lib, x_0 statsionar nuqtada ikkinchi tartibli hosila f ''(x_0) mavjud bo‘lsa, u holda agar f (x_0) <0 bo‘lsa. x_0 – maksimum nuqta, agar f ''(x_0)>0 bo‘lsa, x_0 - minimum nuqta va agarda f ''(x_0) = 0 bo‘lsa, x_0 nuqtada ekstremumning mavjudlik masalasi ochiq qoladi.

Masala. $y = x^3 + 6x^2$ funksiyaning ekstremum nuqtalarini toping.

Funksiya hosilasi y’= 3-$(x^2$+4x) va y’(x) = 0 tenglama yechimlari x = -4, x = 0 nuqtalar uning statsionar nuqtalaridir. Ikkinchi tartibli hosila y''= 6 - (x+2). Statsionar nuqtalarda y''(- 4) = -12 < 0, y''(0) = 12 > 0 bo‘lgani uchun, ikkinchi yetarli shartga ko‘ra x = - 4 - qat’iy maksimum nuqta va y(- 4) = 32, x = 0 - qat’iy minimum nuqta va y(0) = 0.

5 - Teorema. (3 - yetarli shart) f(x) funksiya uchun x_0 nuqta va o‘z navbatida f ‘(x_0) = f "(x_0) - $f^{(n-1)}(x_0)$ = 0 tengliklar o‘rinli va $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ bo‘lsin. Unda:

a) agar n juft bo‘lib, $f^{(n)}(x_0) < 0$ bo‘lsa, x_0 - qat’iy maksimum nuqta, $f^{(n)}(x_0) > 0$ bo‘lsa, x_0 – qat’iy minimum nuqta bo‘ladi;

b) agarda n - toq bo‘lsa, x_0 - ekstremum nuqta bo‘lmaydi.

Masalan, $y = x^4$ funksiya uchun y’(x) = $4x^3$, y"(x) = $12x^2$, y’"(x) = 24x, y""(x) 24. y’ = 0 tenglama yechimi x = 0 statsionar nuqtada y’(0) = y"(0) = y’"(0) = 0 va y""(0) = 24 > 0 bo‘lgani uchun, uchinchi yetarli shartga ko‘ra x = 0 - qat’iy minimum nuqta va y(0) = 0.

3. Funksiyaning to‘plamda eng katta va eng kichik qiymatlari

Amaliy iqtisodiyot, xususan optimatlash masalalarida funksiyaning V to‘plamda eng katta va eng kichik qiymallarini, ya’ni global ekstrcmumlarini topish muhim ahamiyatga ega.

Bir o‘zgaruvchili y = f(x) funksiya biror - bir V€R, to‘plamda aniqlangan va x_0 € V bo‘lsin.

Agar liar bir x_0 € V uchun $f(x) \leq f(x_0)$ tengsizlik bajarilsa, x_0 nuqtada f(x) funksiya o‘zining eng katta $f_{max} = f(x_0)$ qiymatini qabul qiladi va aksincha, har bir x € V uchun $f(x) > f(x_0)$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $x_{()}$ nuqtada f(x) funksiya o‘zining eng kichik $f_{min} = f(x_0)$ qiymatiga erishadi deyiladi.

Agar y = f(x) funksiya V = [a;b] kesmada uzluksiz bo‘lsa, ixcham to‘plamda uzluksiz funksiya xossalaridan biriga ko‘ra (§5ga qarang) u ushbu kesmada o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlarini qabul qiladi. Funksiya o‘zining global ekstremumlarini nafaqat kesmaga tegishli ekstremum nuqtalarida, shu bilan birga uning chetki nuqtalarida ham erishishi mumkin.

Funksiyaning kesmada eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun:

a) funksiyaning kesmaga tegishli kritik nuqtalari aniqlaniladi;

b) funksiyaning topilgan kritik nuqtalarida va kesmaning chetki nuqtalarida qiymatlari hisoblanadi;

c) ushbu qiymatlar o‘zaro solishtiriladi va eng katta, eng kichigi tanlanadi.

Masala. f(x) = x + l/x , [0.01;10] kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping.

$f'(x) = (x + 1/x)' = 1-1/x^2$ boiib, $x = \pm 1$ nuqtalar funksiyaning statsionar nuqtalaridir. Ulardan $x = 1$ nuqta kesmaga tegishli yagona statsionar nuqta.

Shunday qilib, $x = 0{,}01$, $x = 1$ va $x = 10$ nuqtalarda funksiya qiymatlarini hisoblaymiz:

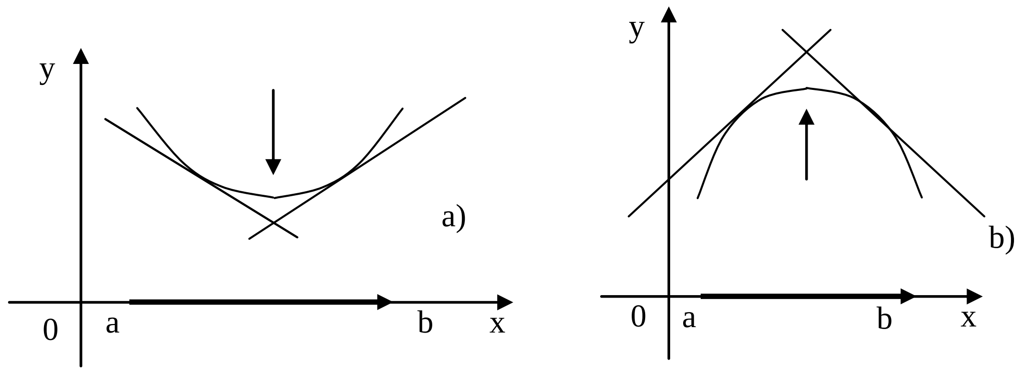
$f(0{,}01) = 100{,}01$; $f(1) = 2$; $f(10) = 10{,}1$. Demak, qaralayotgan kesmada funksiyaning global minimumi $x = 1$ nuqtada bo‘lib, $f_{min} = f(1) = 2$, $x = 0{,}01$ nuqta esa uning global maksimumi va $f_{max} = f(0{,}01) = 100{,}01$.

Agar qaralayotgan kesmada funksiya uzilish nuqtalariga ega bo‘lsa, yuqoridagilarga qo‘shimcha, funksiyani uzilish nuqtalarida tekshirishlar qo‘shiladi. Funksiya (a;b) intervalda berilgan bo‘lsa, funksiyani a nuqtada o‘ngdan, b nuqtada esa chapdan tekshirish talab qilinadi.

4. Funksiyaning qavariqligi. Egilish nuqtalari

3 - § da qavariq to‘plamda berilgan qavariq yoki botiq funksiya ta’riflangan edi. Ko‘p hollarda, qavariq iborasi qavariqligi bilan quyiga, botiq iborasi esa qavariqligi bilan yuqoriga qaragan deb yuritiladi.

$y = f(x)$ funksiya [a;b] kesmada uzluksiz, (a;b) intervalda differensiallanuvchi bo‘lsa, kesmada qavariq yoki botiq funksiyani o‘zgacha ta’riflash va shu bilan birga, (a;b) intervalda ikki marta differcnsial-lanuvchi bo‘lsa, [a;b] kesmada qavariqlik shartini aniqlash imkoni tug‘iladi.



4-rasm

$y = f(x)$ funksiya grafigi (a;b) interval chegarasida o‘z urinmalaridan yuqorida yotsa, grafik [a;b] kesmada qavariqligi bilan quyiga yo‘nalgan (yoki qavariq) deyiladi (4-a rasm). Agarda funksiya grafigi (a;b) interval chegarasida o‘z urinmalaridan quyida yotsa, grafik [a;b] kesmada qavariqligi bilan yuqoriga yo‘nalgan (yoki botiq) deyiladi (4-b rasm).

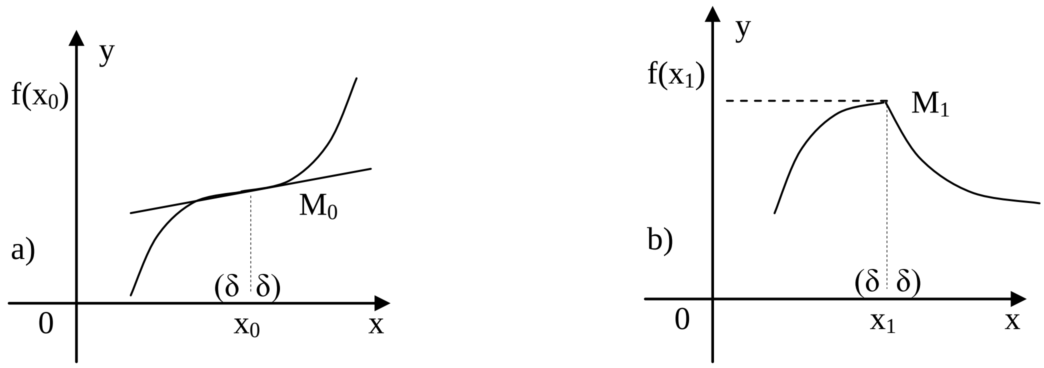
6 - Teorema. y = f(x) funksiya (a;b) intervalda ikkinchi tartibli f "(x) hosilasiga ega bo‘lib, [a;b] kesmaning chetki nuqtalarida uzluksiz bo‘lsa, u holda (a;b) intervalda f "(x) > 0 bo‘lsa, funksiya grafigi [a;b] kesmada qavariqligi bilan quyiga, f "(x) ≤ 0 bo‘lganda esa qavariqligi bilan yuqoriga yo‘nalgan bo‘ladi.

Masala. y = (x - 4)·$\sqrt[3]{x}$ funksiyani qavariqligini tekshiring.

$$y'' = \left(\frac{4}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)' = \frac{4}{3}\cdot\left(x^{1/3} - x^{-2/3}\right)' = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{3x\cdot\sqrt[3]{x^2}}\right) = \frac{4x+2}{9x\cdot\sqrt[3]{x^2}}$$

x € (-∞;2)U(0; ∞) da f "(x) > 0 va funksiya grafigi qavariqligi bilan quyiga,
x € (-2;0) da f "(x) < 0 va funksiya qavariqligi bilan yuqoriga yo‘naltirilgandir.

y = f(x) funksiya grafigining x_0 abssisali nuqtasiga o‘tkazilgan urinma mavjud bo‘lib, (x_0 - δ ; x_0) va (x_0; x_0 + δ**)** intervallarda funksiya grafigining qavariqligi turli yo‘nalishda bo‘lsa, u holda (x_0; f(x)) nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi deyiladi.



5-rasm.

5 - a rasmda M_0(x_0; f(x_0)) nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasidir. 5-b rasmda M_1(x_1; f(x_1)) nuqta esa funksiya grafigining egilish nuqtasi bo‘la olmaydi, chunki qavariqlik yo‘nalishi turlicha bo‘lgan bilan M_1(x_1; f(x_1)) nuqtada urinma mavjud emas.

7-teorema. (Egilish nuqta zaruriy sharti) Agar y = f(x) funksiya x_0 nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lib, M_0(x_0; f(x_0)) nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi bo‘lsa, u holda yoki f "(x_0) = 0 yoki f "(x_0) - mavjud emas.

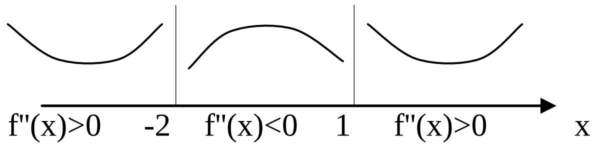
8-teorema. (Egilish nuqta yetarli sharti) y = f(x) funksiya grafigining (x_0; f(x_0)) nuqtasiga o‘tkazilgan urinma, xususan vertical urinma bo‘lib, x_0 nuqtaning biror δ atrofida ikkinchi tartibli f "(x) hosila mavjud bo‘lsin va f "(x_0) = 0 yoki f "(x) - mavjud bo‘lmasin. Agar (x_0 - δ; x_0) va (x_0; x_0

+ δ) intervallarda f "(x) turli ishorali qiymatlarga ega bo‘lsa, $M_0(x_0; f(x_0))$ nuqta y = f(x) funksiya grafigining egilish nuqtasi bo‘ladi.

Masalan, $y = (x-4)\cdot\sqrt[3]{x}$ funksiya uchun

$$y' = \frac{4}{3}\cdot\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}}; \quad y'' = \frac{4}{9}\cdot\frac{x+2}{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}$$

funksiyaning qavariqlik oraliqlari quyidagicha:



y’ (-2) = - $\sqrt[3]{16}$; y’(0) = ∞ bo‘lib, grafikning x = 0 abssisali nuqtasiga o‘tkazilgan urinma vertikal ordinata o‘qidir. Demak, funksiya grafigmrag egilish nuqtalari (-2; 2 $\sqrt[3]{2}$); (0; 0).

5. Funksiyani tekshirish va grafigini chizishning umumiy sxemasi

1.) Funksiyaning aniqlanish sohasi topiladi, uzilish nuqtalari va ularning atrofida funksiya o‘z-o‘zini tutishi aniqlanadi.

2.) Funksiyaning juft-toqligi, davriyligi va cheksizlikda o‘z-o‘zini tutishi tekshiriladi. Funksiya grafigining asimptotalari topiladi.

3.) Funksiyaning monotonlik intervallari vaekstremumlari topiladi.

4.) Funksiya grafigining qavariqlik yo‘nalishlari, egilish nuqtalari aniqlanadi.

5.) Funksiya grafigining eskizi chiziladi va qiymatlan lo‘plami topiladi.

O’z - o‘zini tekshirish uchun savollar

1.Intcrvalda qat’iy o‘suvchi va qat’iy kamayuvchi funksiya ta’rifini bering?

2.Intcrvalda qat’iy bo‘lmagan o‘suvchi va qat’iy bo‘lmagan kamayuvchi funksiya ta’rifini ifodalang?

3.Funksiyaning qat’iy va qat’iy bo‘lmagan maksimum va minimum nuqtalarini ta’riflang?

4.Funksiyaning ekstremum nuqtalari deb nimaga aytiladi?

5.Funksiyaning kritik nuqtalarini ta’riflang?

6.Ekstremumning zaruriy shartini ifodalang?

7.Funksiya ekstremumi yetarlilik shartini birinchi tartibli hosila yordamida ifodalang?

8.Funksiya ekstremumi yetarlilik shartini ikkinchi tartibli hosila yordamida ta’riflang?

9.Funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari qanday topiladi?

10.Funksiya grafigining qavariqligi hamda egilish nuqtalari ta'rifini bering?

11.Funksiyani umumiy tekshirish va grafigini yasash sxemasini bayon qiling?

Tayanch so'z va iboralar

1. Qat'iy o'suvchi va qat'iy kamayuvchi funksiya.
2. Qat'iy bo'lmagan o'suvchi va qat'iy bo'lmagan kamayuvchi funksiya.
3. Qat'iy va qat'iy bo'lmagan maksimum va minimum nuqtalar.
4. Funksiyaning ekstremum nuqtalari.
5. Funksiyaning kritik nuqtalari.
6. Funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari.
7. Funksiya grafigining qavariqligi, egilish nuqtalari.
8. Statsionar nuqta.

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Funksiyalarning monotonlik oraliqlarini toping:

a) $y = x^2 - 4x - l$; b) $y = 3x - x^3$;

c) $y = xe^{-x}$; d) $y = x-2\sin x,\ 0 \le x \le 2\pi$

e) $y = (x - l)^1 \cdot (2x+3)^2$; f) $y = e^x/x$;

g) $y = x^2 \ln x$; h) $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$

i) $y = (x+1)\sqrt{x^2-1}$ j) $y = \frac{\sqrt{1+|x+2|}}{1+|x|}$

2. Funksiyalarning ekstremumlarini toping:

a) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 1$; b) $y = \frac{x^2}{x-2}$;

c) $y = \frac{\ln x}{x}$; d) $y = \sqrt{2+x-x^2}$;

e) $y = x = \frac{1}{x}$; f) $y = xe^{-2x}$;

g) $y = 2\sin x + \cos 2x$; h) $y = \frac{\sqrt[3]{1+|x|}}{1+|4x+5|}$;

i) $y = \frac{(2-x)^3}{(3-x)^3}$ j) $y = x^3 \cdot e^{-4x}$;

3. Funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini toping:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, $[-2; \frac{5}{2}]$;

b) $y = x^2 \ln x$, $[1; e]$;

c) $y = \frac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$, $[0; 1]$;

d) $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$, $[0; 1]$;

e) $y = \sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}$, $[-1; 1]$

f) $y = xe^{-x}$, $[0; \infty]$;

g) $y = 2\sin x + \sin 2x$, $[0; \frac{3\pi}{2}]$;

h) $y = x - 21nx$, $[\frac{3}{2}; e]$;

i) $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$ $[-1; 2]$;

j) $y = \frac{x^4+1}{x^2+1}$, $[-1 ; 1]$.

4. Quyidagi funksiyalar grafigining qavariqlik hamda egilish nuqtalarini toping:

a) $y = \frac{x}{1+x^2}$;

b) $y = x + x^{5/3}$;

c) $y = \ln(l+x^2)$;

d) $y = \mathrm{arctg}x - x$;

e) $y = \frac{1}{1-x^2}$;

f) $y=x^5-10x^2+3x$;

5. Funksiyalami tekshiring va grafigini chizing.

a) $y = (x+2)(x-1)^2$; b) $y = \frac{x-1}{x^2-2x}$; c) $y = x = \frac{1}{x}$;

d) $y = x\sqrt{1-x}$; e) $y = x - \mathrm{arctg}x$; f) $y = x \ln x$; g) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$;

h) $y = \sin x \cdot \sin 3x$; i) $y = e^x - x$; j) $y = \frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$;

28-§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi

1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari

n erkli o‘zgaruvchili $y = f(M)$ funksiya $M_0(x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo‘lsin. $M_i(x_1^0,...,x_i^0+\Delta x_i,...,x_n^0)$ nuqtani qaraymiz. Agar $\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\dfrac{f(M_i)-f(M_0)}{\Delta x_i}$ mavjud bo‘lsa, u holda bu chekli limitga $y=f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi xususiy hosilasi deyiladi va quyidagicha belgilanadi: y'_{x_i}, $\dfrac{\partial y}{\partial x_i}$, $\left.\dfrac{\partial f(M)}{\partial x_i}\right|_{M=M_0}$, f'_{x_i}.

Shunday qilib, $\left.\dfrac{\partial f(M)}{\partial x_i}\right|_{M=M_0}=\lim\limits_{\Delta x_i\to 0}\dfrac{f(M_i)-f(M_0)}{\Delta x_i}=$

$$=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{f(x_1^0,...,x_i^0+\Delta x_i,...,x_n^0)-f(x_1^0,...,x_i^0,...,x_n^0)}{\Delta x_i}$$

Xususiy hosilaning ta’rifidan shu narsa kelib chiqadiki, $y=f(M)$ dan x_i bo‘yicha xususiy hosilani topishda x_1, ... , x_{i-1}, x_{i+1}, ... , x_n o‘zgaruvchilarni o‘zgarmas deb qarab, x_i bo‘yicha oddiy hosila topilar ekan.

1-Misol. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^5\cdot x_3^2-3x_1\cdot x_2^4+7x_2-9$

Barcha o‘zgaruvchilar bo‘yicha xususiy hosilalarni toping.

Yechish.

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x_1}=\frac{\partial}{\partial x_1}(2x_1^5\cdot x_3^2-3x_1\cdot x_2^4+7x_2-9)=10x_1^4\cdot x_3^2-3x_2^4$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x_2}=\frac{\partial}{\partial x_2}(2x_1^5\cdot x_3^2-3x_1\cdot x_2^4+7x_2-9)=-12x_1\cdot x_2^3+7$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x_3}=\frac{\partial}{\partial x_3}(2x_1^5\cdot x_3^2-3x_1\cdot x_2^4+7x_2-9)=4x_1^5\cdot x_3$$

2-Misol. $f(x_1,x_2)=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ funksiyaning $M_0(-4;3)$ nuqtada xususiy hosilalarini toping.

Yechish. $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=\dfrac{2x_1}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}}=\dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$;

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}};\quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}=-\frac{4}{5};\quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2}=\frac{3}{5}$$

2. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning to‘la orttirmasi

$y=f(M)$ funksiya $M_0(x_1^0,...,x_i^0,...,x_n^0)$ nuqta atrofida aniqlangan bo‘lsin. $M_\Delta(x_1^0+\Delta x_1,...,x_i^0+\Delta x_i,...,x_n^0+\Delta x_n)$ nuqtani qaraymiz. $y=f(M)$ funksiyaning M_0 nuqtadagi to‘la orttirmasi deb, ushbu $f(M_\Delta)-f(M_0)$ ayirmaga teng songa aytiladi, ya’ni

$\Delta f = f(M_\Delta) - f(M_0) = f(x_1^0 + \Delta x_1, ..., x_i^0 + \Delta x_i, ..., x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0)$

.

3-misol. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ funksiyaning $M_0(1;-2)$ nuqtadagi to‘la orttirmasini toping.

Yechish.

$\Delta f(M_0) = (1 + \Delta x_1)^2 + (-2 + \Delta x_2)^2 - [1^2 + (-2)^2] = 2\Delta x_1 + 1 + \Delta x_1^2 + 4 -$
$- 4\Delta x_2 + \Delta x_2^2 - 1 - 4 = 2\Delta x_1 - 4\Delta x_2 + (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2$

3. Funktsiyaning differensiallanuvchanligi

$y = f(M)$ funksiya $M_0(x_1^0, x_2^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0)$ nuqta atrofida aniqlangan bo‘lsin.

Agar $y = f(M)$ funksiyaning $\Delta f(M_0)$ to‘la orttirmasi M_0 nuqtada $\Delta f(M_0) = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + ... + A_n\Delta x_n + \alpha_1\Delta x_1 + ... + \alpha_n\Delta x_n$ ko‘rinishda ifoda etilsa, $f(M)$ funksiya M_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi. Bu yerda, A_1, A_2, ... , A_n - Δx_1, ... , Δx_n larga bog‘liq bo‘lmagan sonlar, $\alpha_i (i = \overline{1, n})$ лар $\Delta x_i \to 0$ da nolga intiluvchi cheksiz kichik funksiyalar.

4-misol. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ funksiya $M_0(1;-2)$ nuqtada differensial-lanuvchi, chunki $\Delta f(M_0) = 2\Delta x_1 - 4\Delta x_2 + (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2$ ya’ni

$\Delta f = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2$,

bu yerda $A_1 = 2,\ A_2 = -4,\ \alpha_1 = \Delta x_1, \alpha_2 = \Delta x_2$ ga teng.

5-misol. n o‘zgaruvchining chiziqli funksiyasi

$$f(M) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + b,$$

R^n fazoning ixtiyoriy $M \in R^n$ nuqtasida differensiallanuvchidir.

a) agar funksiya biror nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda bu funksiya ushbu nuqtada uzluksiz bo‘ladi;

b) agar $f(M)$ funksiya M_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda bu funksiya ushbu nuqtada barcha xususiy hosilalarga ega bo‘ladi, shu bilan birga

$$\Delta f = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1 + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2 + ... + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n} \cdot \Delta x_n + \alpha_1\Delta x_1 + \alpha_2\Delta x_2 + ... + \alpha_n\Delta x_n$$

bajariladi. Bu yerda $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ лар Δx_1, Δx_2, ..., $\Delta x_n \to 0$ da nolga intiluvchi cheksiz kichik funksiyalar;

v) agar $f(M)$ funksiya M_0 nuqta atrofida barcha xususiy hosilalarga ega bo‘lib, bu hosilalar M_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda $f(M)$

funksiya bu nuqtada differensiallanuvchi bo‘ladi.

4. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning differensiali

Agar $f(\mathrm{M})$ funksiya M_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, M_0 nuqtada $f(\mathrm{M})$ funksiya to‘la orttirmasining bosh chiziqli qismiga M_0 nuqtada uning **differensiali** deyiladi va $df(\mathrm{M}_0)$ kabi belgilanadi, ya’ni

$$df(\mathrm{M}_0)=\frac{\partial f(\mathrm{M}_0)}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1+\frac{\partial f(\mathrm{M}_0)}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial f(\mathrm{M}_0)}{\partial x_n}\cdot\Delta x_n.$$

Bu yerda $dx_1=\Delta x_1,\ dx_2=\Delta x_2,\ \ldots,\ dx_n=\Delta x_n$ deb olish mumkin. U holda

$$df(\mathrm{M}_0)=\frac{\partial f(\mathrm{M}_0)}{\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial f(\mathrm{M}_0)}{\partial x_2}\cdot dx_2+\ldots+\frac{\partial f(\mathrm{M}_0)}{\partial x_n}\cdot dx_n$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

6-misol. $f(\mathrm{M})=x_1^3x_2+x_2^2x_3+x_3$ funksiyaning $\mathrm{M}_0(2; 1; -3)$ nuqtadagi differensialini toping.

Yechish. $f(\mathrm{M})$ ning differensiali

$$df(\mathrm{M})=\frac{\partial f}{\partial x_1}\cdot dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\cdot dx_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}\cdot dx_3$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bundan

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=3x_1^2x_2,\qquad \frac{\partial f}{\partial x_2}=x_1^3+2x_2x_3,\qquad \frac{\partial f}{\partial x_3}=x_2^2+1 \quad \text{va}$$

$$\frac{\partial f(\mathrm{M}_0)}{\partial x_1}=12,\quad \frac{\partial f(\mathrm{M}_0)}{\partial x_2}=2,\quad \frac{\partial f(\mathrm{M}_0)}{\partial x_3}=2$$ bo‘lgani uchun,

$df(\mathrm{M}_0)=12dx_1+2dx_2+2dx_3$ bo‘ladi.

Differentsialning asosiy xossasi

Agar $y=f(\mathrm{M})$ funksiya M_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda cheksiz kichik $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ lar uchun

$$\Delta f(\mathrm{M}_0)\approx df(\mathrm{M}_0)$$

bajariladi, ya’ni

$$\Delta f(\mathrm{M}_0)\approx\frac{\partial f(\mathrm{M}_0)}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1+\frac{\partial f(\mathrm{M}_0)}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial f(\mathrm{M}_0)}{\partial x_n}\cdot\Delta x_n.$$

Bir necha o‘zgaruvchili funksiya uchun taqribiy hisoblash formulasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$f(\mathrm{M}_\Delta)\approx f(\mathrm{M}_0)+\frac{\partial f(\mathrm{M}_0)}{\partial x_1}\cdot\Delta x_1+\frac{\partial f(\mathrm{M}_0)}{\partial x_2}\cdot\Delta x_2+\ldots+\frac{\partial f(\mathrm{M}_0)}{\partial x_n}\cdot\Delta x_n.$$

7-misol. $1{,}02^{2,01}$ ni taqribiy hisoblang.

Yechish. $z = x^y$ funksiyani qaraymiz. Uning $M_0(1; 2)$ nuqtadagi qiymati $z(M_0)= 1^2 = 1$ ga teng.

$z = x^y$ funksiyaning to‘liq differensialini topamiz:

$$dz = y\, x^{y-1}\, \Delta x + x^y\, ln x\, \Delta y$$

$x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0{,}02$ va $\Delta y = 0{,}01$ ga teng. Shuning uchun

$$dz = 2 \cdot 1^3 \cdot 0{,}02 + 1^2 \cdot ln 1 \cdot 0{,}01 = 0{,}04.$$

U holda $(1{,}02)^{2{,}01} \approx f(M_0) + dz = 1 + 0{,}04 = 1{,}04$.

O’z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Funktsiyaning x_i o‘zgaruvchi bo‘yicha orttirmasi deb nimaga aytiladi va u qanday topiladi?
2. Funktsiyaning xususiy hosilasi nima?
3. Funktsiyaning to‘la orttirmasi nima va u qanday ifodalanadi?
4. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning differensiali nima?
5. Differentsiallanuvchi funksiyaning qanday xossalarini bilasiz?
6. Nuqtada differensiallanuvchanlikning zaruriy sharti nimadan iborat?
7. Nuqtada differensiallanuvchanlikning yetarli sharti-chi?
8. Differentsialning asosiy xossasini ifodalab bering.

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. R^n fazoda nuqta.
2. Xususiy hosila.
3. Funktsiyaning orttirmasi.
4. Funktsiyaning to‘la orttirmasi.
5. Funktsiyaning differensiallanuvchanligi.
6. Differentsial.

Mustaqil yechish uchun misollar

28.1. Quyidagi funksiyalarning xususiy hosilalarini toping:

a) $z = x - y$; b) $z = x^3 y - y^3 x^2$;

c) $z = \dfrac{u}{v} + \dfrac{v}{u}$; d) $z = \dfrac{x - y}{x + y}$;

e) $z = ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; f) $z = \arcsin \dfrac{\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

g) $w = xyz + yzv + zvx + vxy$; h) $z = (2x + y)^{2x+y}$;

i) $u=\sin(x^2+y^2+z^2)$; j) $u=x^{yz}$.

28.2. Funktsiyalarning to‘la differensialini toping:

a) $z=\dfrac{x+y}{x-y}$; b) $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$;

c) $z=\sin(xy)$; d) $z=\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$;

f) $z=x^2y^4-x^3y^3+x^4y^2$; g) $u=\dfrac{z}{x^2+y^2}$;

h) $z=ln\cos\dfrac{x}{y}$; i) $z=ln\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)$;

j) $z=e^{x+y}(x\cos y+y\sin x)$; k) $u=2^{xyz}$.

28.3. Funktsiya to‘la differensialining qiymatini toping:

a) $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$, $x=3$, $y=4$, $\Delta x=0{,}1$, $\Delta y=0{,}2$;

b) $z=e^{xy}$, $x=1$, $y=1$, $\Delta x=0{,}15$, $\Delta y=0{,}1$;

c) $z=\dfrac{xy}{x^2-y^2}$, $x=2$, $y=1$, $\Delta x=0{,}01$, $\Delta y=0{,}03$;

d) $z=\sqrt{y^2-x^2}$, $x=3$, $y=5$, $\Delta x=0{,}02$, $\Delta y=0{,}01$.

28.4. Taqribiy hisoblang:

a) $1{,}04^{2{,}02}$; b) $ln(0{,}09^3+0{,}99^3)$;

c) $\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}$; d) $\sqrt{5\cdot e^{0{,}02}+2{,}03^2}$.

29-§. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning differensial hisobi (davomi)

1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning gradienti

$y=f(M)$ funksiyaning $M_0\in R^n$ nuqtadagi **gradienti** deb, koordinatalari M_0 nuqtadagi $f(M)$ funksiyaning mos xususiy hosilalar qiymatlariga teng bo‘lgan n o‘lchovli vektorga aytiladi va $\operatorname{grad} f\big|_{M=M_0}$ ko‘rinishda yoziladi:

$$\operatorname{grad} f\big|_{M_0}=\left\{\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n}\right\}$$

1-misol. $f(x_1,x_2)=3x_1^2\cdot x_2-4x_1^3+2x_2^2-5$ funksiyaning $M_0(1;-1)$ nuqtadagi gradientini toping.

Yechish. $\dfrac{\partial f(M)}{\partial x_1}=6x_1\cdot x_2-12x_1^2$, $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial x_1}=-18$,

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x_2}=3x_1^2+4x_2, \qquad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2}=-1$$

Demak, grad $f(M_0)$=(-18, -1) ga teng bo‘ladi.

Gradientning asosiy hossasi:

$y=f(M)$ funksiya $M_0(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ nuqtada differensiallanuvchi bo‘lib, $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,...,a_n)$ - n o‘lchovli birorta nolmas vektor bo‘lsin. $M_t(x_1^0+a_1t,\ x_2^0+a_2t,...,x_n^0+a_nt)$ nuqtani qaraymiz. U holda, agar:

1) ushbu skalyar ko‘paytma $\mathrm{grad}f\big|_{M_0}\cdot\boldsymbol{\alpha}<0$ bo‘lsa, u holda shunday $T_1>0$ son mavjud bo‘ladiki, barcha t, $0<t<T_1$ lar uchun $f(M_t)<f(M_0)$ tengsizlik bajariladi;

2) skalyar ko‘paytma $\mathrm{grad}f\big|_{M_0}\cdot\boldsymbol{\alpha}>0$ bo‘lsa, u holda shunday $T_2>0$ soni mavjud bo‘ladiki, barcha t, $0<t<T_2$ lar uchun $f(M_t)>f(M_0)$ tengsizlik bajariladi.

Berilgan $f(M)$ funksiyaning $M_0(x_1^0,...,x_n^0)$ nuqtada erishadigan qiymatidan katta bo‘ladigan nuqtani topish uchun quyidagicha ish tutamiz:

1) ko‘chish yo‘nalishini tanlaymiz, ya’ni shunday vektor $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,...,a_n)$ topamizki, natijada $\mathrm{grad}f\big|_{M_0}\cdot\boldsymbol{\alpha}>0$ bo‘lsin;

2) $M_t(x_1^0+a_1t,\ x_2^0+a_2t,...,x_n^0+a_nt)$ nuqtani qaraymiz va $t>0$ parametrni shunday tanlaymizki, $f(M_t)>f(M_0)$ bo‘lsin.

2-misol. $f(M)=-3x_1^2-3x_2^2+2x_1\cdot x_2+10x_1-6x_2+2$ funksiyaning $M_0(-1;1)$ nuqtadagi qiymatidan katta bo‘ladigan nuqtani toping.

Yechish. Funktsiyaning gradientini topamiz:

$\mathrm{grad}f(M)=(-6x_1+2x_2+10;\ -6x_2+2x_1-6)$. M_0 nuqtadagi qiymati $\mathrm{grad}f\big|_{M_0}=(18,-14)$ bo‘ladi. Agar $\boldsymbol{\alpha}$ = (1,-1) bo‘lsa, u holda $\mathrm{grad}f\big|_{M_0}\cdot\boldsymbol{\alpha}=18+14=32>0$ bo‘ladi. $M_t(-1+t;\ 1-t)$ nuqtani qaraymiz. U holda $f(M_t)=-8t^2+32t-22$ ga teng bo‘ladi va t = 2 da $\frac{df(M_t)}{dt}=0$ ga teng. Demak, t = 2 da $f(M_t)$ funksiya eng katta qiymatga erishadi. Agar t = 2 bo‘lsa, $M_t(1,-1)$ bo‘ladi va bu nuqtada $f(M_t)=10$ ga teng. M_0 nuqtada esa $f(M_0)=-22$ ga teng edi.

Bir necha o‘zgaruvchi funksiyaning ekstremumini topish gradientlar usulida gradientning asosiy xossasidan foydalaniladi.

2. Yuqori tartibli xususiy hosilalar

Faraz qilaylik, M_0 nuqta va uning atrofida $f(M)$ funksiya $\frac{\partial f}{\partial x_j}$

xususiy hosilaga ega bo‘lsin.

Birinchi tartibli xususiy hosilalardan x_i o‘zgaruvchilar bo‘yicha M_0 nuqtada olingan xususiy hosilalar **ikkinchi tartibli xususiy hosilalar** deb aytiladi va quyidagicha belgilanadi: $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Turli o’zgaruvchilar bo‘yicha olingan xususiy hosilalarga **aralash xususiy hosilalar** deyiladi. Xuddi shuningdek, ikkinchi tartibli xususiy hosilalardan olingan xususiy hosilalar **uchinchi tartibli xususiy hosilalar** deyiladi va h.k.

3-misol. $f(M) = 2x_1^5 \cdot x_2^2 - 3x_1^6 + 4x_2^3$ funksiyaning barcha ikkinchi tartibli xususiy hosilalarini toping.

Yechish.

a) birinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 10x_1^4 \cdot x_2^2 - 18x_1^5; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_1^5 \cdot x_2 + 12 \cdot x_2^2$$

b) ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni topamiz:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_1}) = 40x_1^3 \cdot x_2^2 - 90x_1^4,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial f}{\partial x_2}) = \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_1}) = 20x_1^4 \cdot x_2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f}{\partial x_2}) = 4x_1^5 + 24x_2.$$

3. Funktsiyaning lokal ekstremumlari. Statsionar nuqta. Ekstremumning zaruriy sharti.

$y = f(M)$ funksiya M_0 nuqta r atrofi $S_r(M_0)$ da aniqlangan bo‘lsin.

Agar M_0 nuqtaning $S_r(M_0)$ atrofiga tegishli barcha $M \in S_r(M_0)$lar ($M \neq M_0$) uchun $f(M_0) < f(M)$ ($f(M_0) > f(M)$) munosabatlar bajarilsa, M_0 nuqta **lokal minimum (maksimum) nuqta** deyiladi.

Lokal maksimum va minimum nuqtalarga funksiyaning lokal ekstremum nuqtalari deb ataladi.

Agar $M_0 \in R^n$ nuqtada $f(M)$ funksiyaning gradienti nol vektor bo‘lsa, ya’ni

$$\mathrm{grad} f\Big|_{M_0} = 0$$

u holda bu nuqta $f(M)$ funksiyaning **statsionar nuqtasi** deyiladi.

4-misol. $f(x_1,x_2)=x_1^2-x_1\cdot x_2+x_2^2+6x_1-9x_2-5$ funksiyaning statsionar nuqtasini toping.

Yechish: Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning ixtiyoriy gradienti $M\in R_2$ nuqtada

$\mathrm{grad}f\big|_M=(2x_1-x_2+6;\ -x_1+2x_2-9)$ ga teng.

$\mathrm{grad}f\big|_M=0$ bo‘lishi uchun $\begin{cases}2x_1-x_2+6=0\\ -x_1+2x_2-9=0\end{cases}$ bajarilishi kerak. Sistema yechimi $\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=4\end{cases}$, demak $M_0(-1;4)$ statsionar nuqta.

Funktsiya ekstremumining zaruriy sharti

Agar $y=f(M)$ differensiallanuvchi funksiya M_0 nuqtada ekstremumga ega bo‘lsa, u holda uning shu nuqtadagi xususiy hosilalari nolga teng bo‘lish zarur:

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x_i}=0,\qquad i=\overline{1,n}.$$

4. Ikki o‘zgaruvchili funksiya ekstremumining yetarli sharti

Ikki o‘zgaruvchili $y=f(x_1,x_2)$ funksiya uchun quyidagi belgilashlar kiritaylik:

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1^2}=A,\qquad \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_1\partial x_2}=B\quad \text{va}\quad \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_2^2}=C\ \text{ bo‘lsin.}$$

U holda:

1) agar B^2-AC<0 bo‘lsa, M_0 statsionar nuqta lokal ekstremum nuqtasi bo‘lib,

a) A < 0 bo‘lsa, maksimum nuqtasi;

b) A > 0 bo‘lsa, minimum nuqtasi.

2) agar B^2-AC > 0 bo‘lsa, u holda M_0 statsionar nuqta ekstremum nuqtasi bo‘lmaydi;

3) agar B^2-AC = 0 bo‘lsa, u holda bu nuqta ekstremum nuqtasi bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin. Masala yechimi qo‘shimcha tekshirishni talab etadi.

O’z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Bir necha o‘zgaruvchining funksiyasi gradienti nima?
2. Gradientning asosiy xossalarini tushuntirib bering.
3. Funktsiyaning lokal ekstremumi nimadan iborat?
4. Lokal minimum va maksimumni tushuntiring.

5. Statsionar nuqta nima?
6. Yuqori tartibli xususiy hosilani ta’riflang?
7. Aralash xususiy hosilani tushuntirib bering.
8. Ekstremumning zaruriy sharti nima?
9. Ekstremumning yetarlilik sharti nimadan iborat?
10. Ikki o‘zgaruvchi funksiyasi uchun ekstremumning yetarlilik shartini ayting.

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Funktsiya gradienti.
2. Lokal ekstremum.
3. Statsionar nuqta.
4. Yuqori tartibli xususiy hosila.
5. Aralash xususiy hosila.

Mustaqil bajarish uchun misollar

29.1. Quyidagi funksiyalarning M_0 nuqtadagi gradientini toping:

a) $z = x^2 + y^2,$ $M_0(3,2);$

b) $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2},$ $M_0(2,1);$

c) $z = x - 3y + \sqrt{3xy},$ $M_0(3,4);$

d) $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},$ $M_0(x_0,y_0).$

29.2. Yuqori tartibli xususiy hosilalarni toping:

a) $z = y\,\mathit{ln}x,$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ?;$

b) $z = x^2 \mathit{ln}(x + y),$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ?;$

c) $z = \cos(x + y),$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ?;$

d) $u = \frac{x^4 - 8xy^3}{x - 2y},$ $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = ?;$

e $z = x^2 y^3,$ $\frac{\partial^5 z}{\partial x^2 \partial y^3} = \frac{\partial^5 z}{\partial y^3 \partial x^2}$ ekanligini ko‘rsating;

f) $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3},$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},$ $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = ?$

g) $z=\arcsin(xy), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=?$

h) $w=e^{xyz}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y\partial z}=?$

i) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2-2xz}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=?$

j) $u=e^x(x\cos y-y\sin y)$ funksiya uchun $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ bajarilishini ko‘rsating;

k) $v=\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}$ funksiya uchun

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial x}\right)=0$ bajarilishini ko’rsating.

29.3. Funktsiyalarni ekstremumga tekshiring.

a) $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$;

b) $z=x^3+y^3-15xy$;

c) $z=xy^2(1-x-y)$;

d) $z=\frac{1}{2}xy+(47-x-y)(\frac{x}{3}+\frac{y}{4})$;

e) $z=x^2+xy+y^2-2x-y$;

f) $z=e^{x-y}(x^2-2y^2)$.

30-§. Aniqmas integral

1. Boshlang‘ich funksiya va aniqmas integral

[a, b] kesmada aniqlangan $y=f(x)$ funksiya uchun ushbu kesmaning barcha nuqtalarida

$$F'(x)=f(x)$$

tenglik bajarilsa, u holda $F(x)$ funksiya shu kesmada $f(x)$ funksiyaning **boshlang‘ich funksiyasi** deyiladi.

Masalan: $\frac{1}{3}\sin 3x$ funksiyaning hosilasi $\cos 3x$ ga teng. Shuning uchun, $\frac{1}{3}\sin 3x$ funksiya $\cos 3x$ funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladi.

Teorema (boshlang‘ich funksiya mavjudligi haqida).

Har bir uzluksiz funksiya, bir-biridan ixtiyoriy o‘zgarmasga farq qiluvchi cheksiz ko‘p boshlang‘ich funksiyalarga ega.

Boshlang‘ich funksiyaning umumiy $F(x)+C$ ko‘rinishi berilgan $y=f(x)$ funksiyaning **aniqmas integrali** deyiladi, bu yerda C –

ixtiyoriy o‘zgarmas son va

$$\int f(x)dx$$

kabi belgilanadi. Bunda $\int$ - integral belgisi, $f(x)$- integral osti funksiyasi, $f(x)dx$ - integral ostidagi ifoda, x- integrallash o‘zgaruvchisi.

2. Asosiy integrallar jadvali

Asosiy integrallar jadvali quyidagi formulalardan iborat:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \ \ (n \neq -1)$; 2. $\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$;

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$; 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln a} + C$;

5. $\int e^x dx = e^x + C$; 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$; 8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$;

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$; 10. $\int tgx dx = -ln|\cos x| + C$;

11. $\int ctgx dx = ln|\sin x| + C$; 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$;

13. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$; 14. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \lambda}} = ln\left|x + \sqrt{x^2 + \lambda}\right| + C$.

3. Aniqmas integral xossalari.

Aniqmas integral quyidagi xossalarga ega:

1) aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

2) aniqmas integralning differensiali integral belgisi ostidagi ifodaga teng:

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

3) uzluksiz differensiallanuvchi funksiyaning differensialidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o‘zgarmas S ning yig‘indisiga teng:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

4) o’zgarmas A ko‘paytuvchini integral belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin:

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$$

5) chekli sondagi funksiyalarning algebraik yig‘indisidan olingan aniqmas integral shu funksiyalarning har biridan olingan aniqmas integrallarning algebraik yig‘indisiga teng:

$$\int[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int f_n(x)dx$$

4. Integrallash usullari

Integrallashning eng asosiy usullarini qarab chiqamiz: yoyish, o‘zgaruvchini almashtirish va bo‘laklab integrallash.

1) Yoyish usuli. Bu usul integral ostidagi funksiyani, har biri jadval integraliga keladigan, bir nechta funksiyalar yig‘indisiga yoyishga asoslanadi.

Misollar: Integrallarni toping: a) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^2}dx$; b) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

a) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^2}dx = \int\left(\frac{x}{x^2} + \frac{2\sqrt{x}}{x^2} + \frac{1}{x^2}\right)dx = \int\frac{dx}{x} + 2\int x^{-\frac{3}{2}}dx + \int x^{-2}dx =$

$= ln|x| - 4x^{-\frac{1}{2}} - x^{-1} + C = ln|x| - \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} + C$

b) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} + \int\frac{dx}{\sin^2 x} = \mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x + C$

2) Aniqmas integralda o‘zgaruvchini almashtirish.

Jadvalda qatnashmagan $\int f(x)dx$ integralni hisoblash kerak bo‘lsin. x ni t erkli o‘zgaruvchining biror differensiallanuvchi funksiyasi orqali ifodalaymiz: $x = \varphi(t)$, bunga teskari $t = \varphi(x)$ funksiyasi mavjud bo‘lsin, u holda $dx = \varphi'(t)dt$ va $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)dt$ bo‘lib, integral jadvaliga mos keladigan integral hosil qilamiz.

Misollar:

1) $\int\cos 5x dx$ ning integralini toping. O’zgaruvchini almashtiramiz:

$$x = \frac{t}{5};\quad dx = \frac{dt}{5}$$

natijada, $\int\cos 5x dx = \frac{1}{5}\int\cos t dt = \frac{1}{5}\sin t + C = \frac{1}{5}\sin 5x + C$.

2) $\int x\sqrt{x-2}dx$ ning integralini toping.

$\sqrt{x-2} = t$ belgilash kiritamiz. U holda x-2=t^2, x=t^2+2, dx=2tdt bo‘ladi.

Natijada, $\int x\sqrt{x-2}dx = \int(t^2+2)t\cdot 2tdt = 2\left[\int t^4dt + 2\int t^2dt\right] = \frac{2t^5}{5} + \frac{4t^3}{3} + C =$

$$=\frac{2}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}(x-2)^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{5}\frac{1}{(x-2)^{2}\sqrt{x-2}}+\frac{4}{3}\frac{1}{(x-2)\sqrt{x-2}}+C.$$

3) Bo‘laklab integrallash. Integrallash quyidagi

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

formula yordamida amalga oshiriladi. Bu yerda u, v – differensiallanuvchi funksiyalar.

Bu formulani qo‘llash uchun, integral ostidagi ifoda ikki qismga ajratiladi va birinchi qismini u, qolgan qismini esa dv deb olinadi, natijada berilgan integralga nisbatan oson integrallanadigan $\int vdu$ integral hosil bo‘ladi.

Misollar: Integralni toping: $\int x^2 ln x dx$

$u=ln x$, $dv=x^2dx$ belgilashlar kiritamiz. U xolda $du=\frac{dx}{x}$, $v=\frac{x^3}{3}$ hosil bo‘ladi. Formulani qo‘llash natijasida,

$$\int x^2 ln x dx=\frac{x^3}{3}ln x-\int\frac{x^3}{3}\frac{dx}{x}=\frac{x^3}{3}ln x-\frac{x^3}{9}+C.$$

5. Eng sodda ratsional kasrlarni integrallash

Ikki ko‘phadning $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ nisbati kasr-ratsional funksiya yoki ratsional funksiya deyiladi. Agar $m < n$ bo‘lsa, ratsional kasr to‘g‘ri, $m\geq n$ bo‘lsa, ratsional kasr noto‘g‘ri kasr bo‘ladi. Ratsional kasr noto‘g‘ri bo‘lgan hoda kasrning suratini maxrajiga, ko‘phadni ko‘phadga bo‘lish yo‘li bilan uning butun qismini ajratish kerak.

Quyidagi kasrlar:

I. $\frac{A}{x-a}$;

II. $\frac{A}{(x-a)^m}$ ($m\geq 2$ va butun);

III. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ (maxrajning diskriminanti $D=\frac{p^2}{4}-q<0$);

IV. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ ($n\geq 2$ va butun, $D<0$)

bu yerda A, B, p, q, a – haqiqiy sonlar.

eng sodda ratsional kasrlar deyiladi.

I va II turdagi sodda kasrlar integrallash jadvaliga oson keltiriladi:

I. $\int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C$;

II. $\int \frac{Adx}{(x-a)^m} = -\frac{A}{m-1} \cdot \frac{1}{(x-a)^{m-1}} + C$.

III turdagi sodda kasrning integralini topish uchun suratda kasrning maxrajidan olingan hosilani ajratamiz:

$$(x^2 + px + q)' = 2x + p.$$

U holda $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx +$

$$+(B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + (B-\frac{Ap}{2})\int \frac{d(x+\frac{p}{2})}{(x+\frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + (B-\frac{Ap}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

Endi IV turdagi integralni hisoblaymiz. Suratda maxrajning hosilasini ajratamiz:

U holda

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + (B-\frac{Ap}{2})}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx +$$

$$+(B-\frac{Ap}{2})\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}.$$

Birinchi integral darhol hisoblanadi:

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} = \frac{1}{(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}}.$$

Ikkinchi integralda $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{dx}{\left[(x+\frac{p}{2})^2 + (q-\frac{p^2}{4})\right]^n}$ quyidagi almashtirishlar bajaramiz:

$$x + \frac{p}{2} = t, \quad dx = dt \quad \text{va} \quad q - \frac{p^2}{4} = \alpha^2$$

U holda $\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}dx=\int\frac{dt}{(t^2+\alpha^2)^n}$ hosil bo‘ladi. Demak, IV turdagi integral rekurrent formula yordamida bajariladi.

6. Trigonometrik funksiyalar qatnashgan ifodalarni integrallash.

a) $\int R(\sin x,\cos x)dx$ ko‘rinishdagi integral, bu yerda R – ratsional funksiya. Ushbu turdagi integral $tg\frac{x}{2}=z$ o‘rniga qo‘yish bilan z o‘zgaruvchili:

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2z}{1+z^2};\qquad \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-z^2}{1+z^2};\qquad x = 2arctgx;$$

$dx=\frac{2dz}{1+z^2}$ ratsional funksiyaning integraliga almashtiriladi;

b) $R(\sin x,\cos x)$ funksiya sinx ga nisbatan toq bo‘lsa, ya’ni $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ bo‘lsa, z = cosx, dz = - sinxdx o‘rniga qo‘yish bilan ratsionallashtiriladi;

c $R(\sin x,\cos x)$ funksiya cosx ga nisbatan toq bo‘lsa, z = sinx, dz = cosxdx o‘rniga qo‘yish bu funksiyani ratsionallashtiradi;

d) $R(\sin x,\cos x)$ funksiya sinx va cosx ga nisbatan juft bo‘lsa, z = sinx, dz = cosxdx o‘rniga qo‘yish bilan ratsionallashtiriladi;

e) $\int\cos^m x\sin^n xdx$ ko‘rinishdagi integral, bu yerda m, n – natural sonlar.

Bu integral m va n sonlarining juft yoki toqligiga qarab:

1) Agar m yoki n toq bo‘lsa, mos ravishda z = sinx va z = cosx

2) Agar m va n juft bo‘lsa,

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2};\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2};\ \sin x\cos x=\frac{\sin 2x}{2}$$

darajani pasaytirish formulalaridan foydalanib ratsionallashtiriladi.

Misol. Ushbu $\int\cos x\sin^2 xdx$ integralni hisoblang.

Bu misolda $R(\sin x,\cos x)=\cos x\sin^2 x$ va $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ bo‘lgani uchun, ya’ni funksiya cosx ga nisbatan toqligi uchun, z = sinx, dz = cosxdx o‘rniga qo‘yish bu funksiyani ratsionallashtiradi:

$$\int\cos x\sin^2 xdx=\int z^2dz=\frac{z^3}{3}+C=\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

f) $\int\sin nx\sin mxdx$, $\int\sin nx\cos mxdx$, $\int\cos nx\cos mxdx$

ko‘rinishdagi integrallar trigonometrik funksiyalarning ko‘paytmasini yig‘indiga almashtiruvchi formulalar

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]$$

yordamida integrallar jadvaliga keltirilib hisoblanadi.

O’z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Berilgan funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi deb nimaga aytiladi?
2. Berilgan funksiyaning aniqmas integrali deb nimaga aytiladi?
3. Aniqmas integralning asosiy xossalari nimadan iborat? Uni ifodalang.
4. Integrallashning qanday asosiy usullarini bilasiz?
5. Integrallashda yoyish usulining mohiyati nima?
6. Aniqmas integralda o‘zgaruvchini almashtirish usulining mazmunini aytib bering? Misol keltiring.
7. Bo‘laklab integrallash formulasini keltirib chiqaring.
8. Asosiy integrallar jadvalini yoddan yozib bering?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Boshlang‘ich funksiya.
2. Aniqmas integral.
3. Asosiy integrallar jadvali.
4. Aniqmas integralning xossalari.
5. Integrallashning yoyish usuli.
6. Aniqmas integralda o‘zgaruvchini almashtirish.
7. Bo‘laklab integrallash.
8. Integral osti funksiya.
9. Integral ostidagi ifoda.
10. Integrallash o‘zgaruvchisi
11. Ixtiyoriy o‘zgarmasga farq qiluvchi boshlang‘ich funksiya

Mustaqil ishlash uchun misollar

30.1. F(x) funksiya $f(x)$ funksiya uchun boshlang’ich funksiya ekanligini isbotlang.

a) $F(x)=2x^3+\frac{3}{4}x^4+5$, $\quad f(x)=3(x+2)x^2$;

b) $F(x)=2x+e^{2x}$, $\quad f(x)=2(1+e^{2x})$;

c) $F(x)=\sin x\cos x$, $\quad f(x)=\cos 2x$;

d) $F(x)=x-ln(1+x^2)$, $\quad f(x)=\frac{(1-x)^2}{1+x^2}$.

30.2. Aniqmas integrallarni toping:

a) $\int x\sqrt{x}dx$; $\quad$ b) $\int\frac{dx}{\sqrt[7]{x}}$;

c) $\int\frac{2-x^4}{1+x^2}dx$; $\quad$ d) $\int\sin(2-3x)dx$;

e) $\int\frac{xdx}{x^2-1}$; $\quad$ f) $\int\frac{5x+3}{\sqrt{3-x^2}}dx$;

j) $\int(2x+1)^{30}dx$; $\quad$ h) $\int\sin(a+bx)dx$;

i) $\int(1-x)(2+\sqrt{x})dx$; $\quad$ k) $\int 2^x e^x dx$;

l) $\int\frac{\cos3x-\cos x}{\sin 2x}dx$; $\quad$ m) $\int\frac{5+2tg^2x}{\sin^2 x}dx$;

n) $\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx$; $\quad$ o) $\int\cos7x\cos3xdx$.

30.3. O’rniga qo‘yish usuli bilan integrallang.

a) $\int\frac{dx}{16+25x^2}$; $\quad$ b) $\int\frac{4^x dx}{\sqrt[3]{5+4^x}}$;

c) $\int\frac{\sin x\,dx}{\sqrt[3]{\cos x}}$; $\quad$ d) $\int 5^x\cos5^x dx$;

e) $\int\frac{dx}{\sin x}$; $\quad$ f) $\int\cos^3 xdx$.

30.4. Bo‘laklab integrallang

a) $\int x ln xdx$; $\quad$ b) $\int\arcsin xdx$; $\quad$ c) $\int(x+1)e^x dx$;

d) $\int x^2\sin xdx$; $\quad$ e) $\int\frac{x}{\cos x^2}dx$; $\quad$ f) $\int x^2 ln xdx$;

j) $\int ln(1+x^2)\,dx$; $\quad$ h) $\int ln^2 xdx$; $\quad$ i) $\int x\,\mathrm{arctg}x\,dx$;

k) $\int(1-8x^2)\cos4xdx$; $\quad$ l) $\int\sqrt[3]{x^2}ln xdx$; $\quad$ m) $\int\sin ln xdx$.

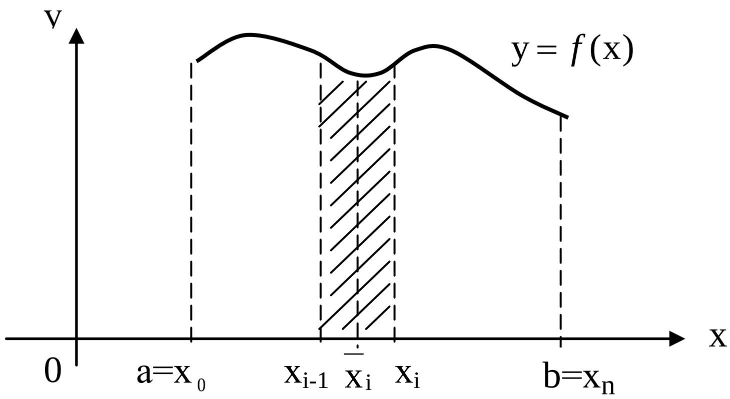
31-§. Aniq integral

1. Asosiy tushunchalar. Aniq integral

[a,b] kesmada uzluksiz yoki bo‘lakli uzluksiz $y = f(x)$ funksiya uchun **integral yig‘indi** deb,

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i$$

ifodaga aytiladi. Bu yerda n - [a,b] kesma ajratilgan qismiy (kesma) intervallar soni, $\bar{x}_i$ - uzunligi Δx_i (1-rasm) ga teng bo‘lgan $[x_{i-1}, x_i]$ kesmaga tegishli ixtiyoriy nuqta.



1-rasm

$y = f(x)$ funksiyaning [a,b] kesmada **aniq integrali** deb, ushbu

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

integral yig‘indi eng katta qismiy kesma nolga intilgandagi limitiga aytiladi va $\int_a^в f(x)dx$ kabi belgilanadi. Bu yerda a va b sonlar integrallashning **quyi va yuqori chegarasi** deyiladi.

Shunday qilib, aniq integralning ta’rifidan:

$$\int_a^в f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\bar{x}_i\right)\Delta x_i$$

2. Aniq integralning asosiy xossalari.

Aniq integralning asosiy xossalarini keltiramiz:

1^0. Aniq integralning chegaralari almashtirilsa, integralning ishorasi o‘zgaradi:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2^0. Ixtiyoriy a, b va c sonlar uchun (a < c < b)

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

3^0. O’zgarmas ko‘paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx$$

4^0. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig‘indisining aniq integrali qo‘shiluvchilar aniq integrallarining yig‘indisiga teng.

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)dx$$

5^0. (O’rta qiymat haqida teorema). Agar $y = f(x)$ funksiya [a,b] kesmada uzluksiz bo‘lsa, kamida bitta shunday $x = c \in [a,b]$ nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$

tenglik bajariladi.

6^0. (Nyuton-Leybnits teoremasi). Agar F(x) funksiya, uzluksiz $y = f(x)$ funksiyaning biror bir boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Nyuton-Leybnits formulasi o‘rinli bo‘ladi.

3. Aniq integralni hisoblash qoidalari

a) **Nyuton-Leybnis formulasi.** Aniq integralni hisoblashning asosiy yagona aniq usuli integral ostidagi funksiya uchun boshlang‘ich funksiyani aniqlash va so‘ngra Nyuton – Leybnits formulasini qo‘llashdir. Uni quyidagicha yozish mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx = F(a)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Shunday qilib, aniq integralni bevosita integral yig‘indi limiti sifatida emas, balki Nyuton-Leybnits formulasi bo‘yicha hisoblash mumkin;

b) **Aniq integralda o‘zgaruvchini almashtirish**. $\int_a^b f(x)dx$ integral berilgan bo‘lsin. $y = f(x)$ funksiya [a, b] intervalda uzluksiz funksiya. $x=\varphi(t)$ o‘zgaruvchini almashtirish bilan integrallash o‘zgaruvchisi t bo‘lgan yangi aniq integralga kelamiz. Bunda $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ funksiyalar $[\alpha$, β] intervalda uzluksiz hamda x = φ(t) funksiya α va β ni mos ravishda a va b ga o‘tkazadi, ya’ni

$$\varphi(\alpha) = a,\ \ \varphi(\beta) = b.$$

Bu shartlar bajarilganda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

formula o‘rinli bo‘ladi;

c) **Aniq integralda bo‘laklab integrallash.** Faraz qilaylik, u(x) va v(x) funksiyalar [a, b] intervalda differensiallanuvchi funksiyalar. Aniq integralda bo‘laklab integrallash quyidagi formula

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$

bo‘yicha amalga oshiriladi;

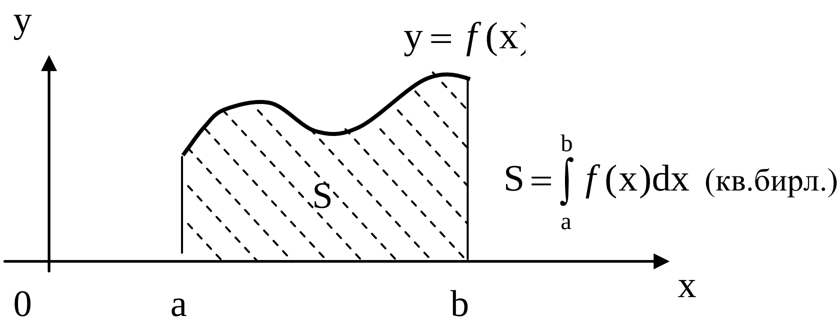
d) Agar: 1) $f(x)$ funksiya toq bo‘lsa, ya’ni $f(-x) = -f(x)$, u holda

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0;$$

2) $f(x)$ funksiya juft bo‘lsa, ya’ni $f(-x) = f(x)$, u holda

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

Aniq integralning geometrik ma’nosi quyidagicha: Aniq integral yuqoridan $y = f(x) \geq 0$ funksiyaning grafigi, quyidan 0x o‘qi, yon tomonlari esa x = a va x = b to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasiga son jihatdan teng bo‘ladi (2-rasm).



2-rasm

Misollar. Integralni hisoblang: a) $\int_0^\pi \sin x dx$; b) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

a) $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2$

b) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$

4. Aniq integralni taqribiy hisoblash

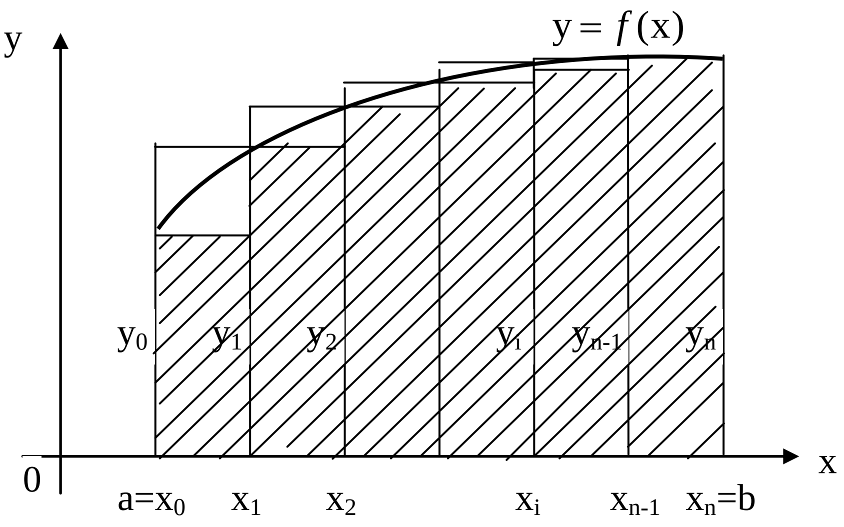
Ko‘p hollarda berilgan funksiyaning boshlang‘ich funksiyasini elementar funksiyalarda ifoda etish mumkin bo‘lavermaydi. Bunday hollarda aniq integralni hisoblash uchun taqribiy formulalardan foydalaniladi. [a,b] integrallash kesmasi n ta teng va har birining uzunligi $h = \frac{b-a}{n}$ ga teng bo‘laklarga bo‘linadi.

1. To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi (3-rasm).

$$\int\limits_a^b y dx \approx h(y_0 + y_1 + \ldots\ldots + y_{n-1})$$

2. Trapetsiya formulasi (31.4-rasm).

$$\int\limits_a^b y dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots\ldots + y_{n-1}\right),$$

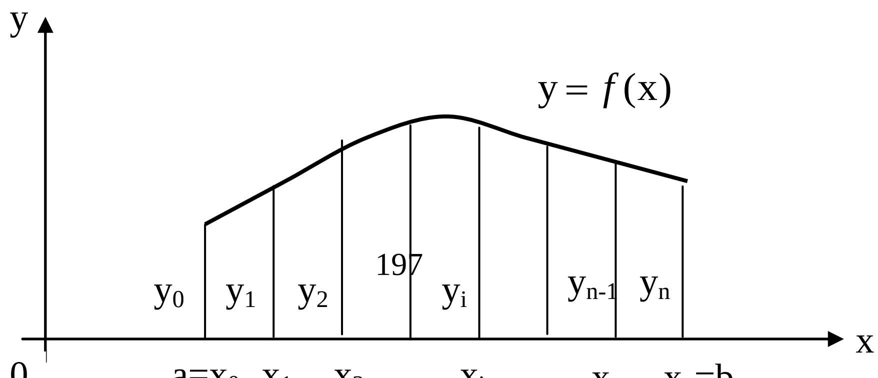


3-rasm

3. Parabola formulasi (Simpson formulasi)

n - juft deb olingan hol. Integral quyidagicha hisoblanadi:

$$\int\limits_a^{в} y dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots . + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$



4-rasm

5. Aniq integralning geometrik tadbiqi

a) Yassi shaklning yuzlarini hisoblash

$y = f(x)$ funksiya grafigi, x = a, x = b ikkita to‘g‘ri chiziq va 0x o‘q bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi $f(x) \geq 0$ bo‘lsa,

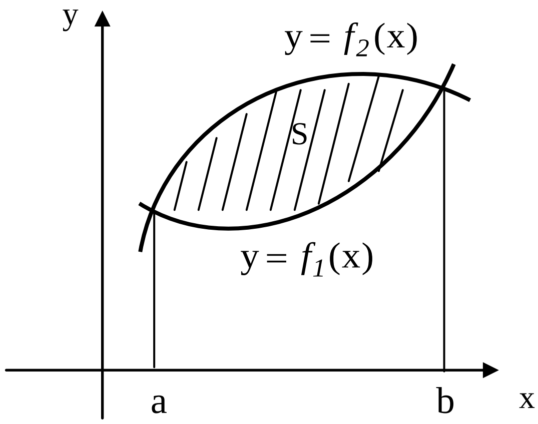
$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx \qquad \text{(kv.birl.)}$$

formula bo‘yicha hisoblanadi (2-rasm).

$y = f_2(x)$ va $y = f_1(x)$ egri chiziqlar bilan chegaralangan soha yuzasi

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx \qquad \text{(kv.birl.)}$$

formula bilan topiladi. Bu yerda, a va b chiziqlar kesishish nuqtalarining abstsissalari, [a,b] da $f_2(x) \geq f_1(x)$ (5-rasm).



5-rasm

b) Aylanish jismlarining hajmini hisoblash.

$y = f(x)$ uzluksiz egri chiziq, abstsissalar o‘qi hamda x = a, x = b (a < b) to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning 0x o‘q atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan jismning hajmi

$$V = \pi\int_a^b [f(x)]^2 dx \qquad \text{(kub. birl.)}$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

Xuddi shunga o‘xshash, uzluksiz x = φ(y) egri chiziq, ordinatalar o‘qi va y = c hamda y = d (c < d) to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning 0y o‘q atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan jismning hajmi

$$V=\pi\int_{c}^{d}[\varphi(y)]^2dy \qquad \text{(kub. birl.)}$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

c) Yassi egri chiziq yoylari uzunliklarini hisoblash

$y=f(x)$ funksiya [a,b] kesmada silliq bo‘lsa, u holda bu egri chiziqning x = a, x = b to‘g‘ri chiziqlari bilan chegaralangan yoyining uzunligi

$$l=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(y')^2}dx \qquad \text{(birl.)}$$

formula bo‘yicha hisoblanadi.

g) Aylanish jismlari sirtining yuzini hisoblash

x = a, x = b to‘g‘ri chiziqlari bilan chegaralangan $y=f(x)$ egri chiziqning 0x o‘q atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan sirt yuzi S_x

$$S_x=2\pi\int_{a}^{b}y\sqrt{1+(y')^2}dx \qquad \text{(kv.birl.)}$$

formula bo‘yicha topiladi.

Xuddi shunga o‘xshash, y = c, y = d to‘g‘ri chiziqlari bilan chegaralangan uzluksiz x = φ(y) egri chiziqning 0y o‘q atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan sirt yuzi S_y

$$S_y=2\pi\int_{c}^{d}x\sqrt{1+(x')^2}dy \qquad \text{(kv.birl.)}$$

formula bo‘yicha topiladi.

O’z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Integral yig‘indi nima?
2. Qismiy kesmalar nimadan iborat?
3. Aniq integralni ta’riflang?
4. Berilgan kesmada berilgan funksiyaning aniq integralini ta’riflang?
5. Integrallash chegaralari nima?
6. Aniq integralning eng sodda xossalari nimadan iborat va ularni ifodalang?
7. Aniq integralning $y=f(x)\geq 0$ bo‘lganda geometrik ma’nosi nima?
8. O’rta qiymat haqida teoremani ifodalang? Uning geometrik ma’nosini aytib bering?
9. Nyuton-Leybnis formulasini ifodalang?
10. Aniq integralni taqribiy hisoblash deganda nimani tushunasiz?

Taqribiy hisoblashning qaysi usullarini bilasiz?

11. Taqribiy hisoblashning to‘g‘ri to‘rtburchaklar usulini ifodalang? Geometrik ma’nosini bering?

12. Aniq integralni taqribiy hisoblashning trapetsiyalar usulini ifodalang? Geometrik ma’nosini bering?

13. Simpson usuli yoki parabola usulining mazmunini ifodalang va uning geometrik ma’nosiga to‘xtaling?

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Integral yig‘indi.
2. Aniq integral.
3. Integrallash chegaralari.
4. O’rta qiymat.
5. Nyuton-Leybnis formulasi.
6. Taqribiy integrallash qadami.
7. To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi.
8. Trapetsiyalar formulasi.
9. Parabola (Simpson) formulasi.

Mustaqil ishlash uchun misollar

31.1. Aniq integralni hisoblang

a) $\int_1^2 \frac{dx}{2x-1}$; b) $\int_1^e \frac{dx}{x(1+ln^2 x)}$;

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x dx$; d) $\int_1^e \frac{ln^2 x}{x} dx$;

e) $\int_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}dx$; f) $\int_1^3 \frac{xdx}{1+x^4}$;

j) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x}$; h) $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$;

i) $\int_0^1 \frac{x^3dx}{1+x^8}$; k) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2dx}{x^2+1} dx$;

l) $\int_0^{\pi} x\sin x dx$; m) $\int_1^e \sqrt[4]{x}\, ln x dx$;

n) $\int_1^e ln^2 x dx$; o) $\int_{-1}^0 \arccos x\, dx$;

p) $\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$; q) $\int_{-1}^0 (2x+3)e^{-x}dx$.

31.2. Quyida berilgan aniq integrallarni to‘g‘ri to‘rtburchaklar, trapetsiya va Simpson formulalari yordamida taqribiy hisoblang. Qismiy kesmalar soni n qavs ichida berilgan:

a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}dx, \quad (n=10)$; b) $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx, \quad (n=10)$;

c) $\int_2^5 \frac{dx}{\ln x}, \quad (n=6)$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x}dx, \quad (n=10)$.

31.3. Quyida aniq integrallarni integral yig‘indi limiti sifatida hisoblang.

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$; b) $\int_0^x \cos t dt$; c) $\int_0^1 e^x dx$; g) $\int_1^2 \frac{dx}{x^2}$.

31.4. Nuqtaning tezligi v = 9,8t - 0,003t^2 qonun bo‘yicha o‘zgaradi. t = 0 dan t = 5 gacha bo‘lgan vaqt oralig‘ida nuqta o‘tgan yo‘lni toping. Bu nuqtaning yo‘lning oxiridagi (ya’ni t = 5 dagi) tezlanishini toping.

31.5. Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan shaklning yuzini toping.

a) $y=\cos x; \quad y=0; \quad x=0; \quad x=\frac{\pi}{2}$; b) $y=\sin x; \quad y=0; \quad 0\le x\le \pi$;

c) $y=2x-x^2, \; y=0$; d) $y=\frac{1}{x^2}; \quad y=0; \quad x=1; \quad x=2$;

e) $y=\sqrt{x}; \quad y=0; \quad x=4$; f) $y=x^2; \quad y=\sqrt[3]{x}$;

g) $y=\sqrt{x}; \quad y=\sqrt{4-3x}; \quad y=0$; h) y = 5-x^2; y = x-1.

31.6. I chorakda yotuvchi x^2 + y^2 = 16 aylana yoyi va x = 1, x = 3 to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan shaklning 0x o‘q atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan jism hajmini toping.

31.7. y^2 = 9x parabola va y = x to‘g‘ri chiziq bilan chegaralangan shaklning 0y o‘q atrofida aylanishdan hosil bo‘lgan jism hajmini toping.

32-§. Xosmas integrallar

1. 1-tur xosmas integral

$y=f(x)$ funksiya [a,+∞) oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin (1-

rasm). $\int\limits_a^b f(x)dx$ integralni qaraymiz.

[a,+∞) oraliqda $f(x)$ funksiyaning **1-tur xosmas integrali** deb, quyidagi

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$$

limitga aytiladi va $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ kabi belgilanadi, ya'ni

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

Agar limit mavjud va chekli bo'lsa, u holda xosmas $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ integral **yaqinlashuvchi** deyiladi. Bu limit integralning qiymati sifatida qabul qilinadi.

Agar limit mavjud bo'lmasa yoki xususan cheksiz bo'lsa, xosmas integral **uzoqlashuvchi** deyiladi.

Xuddi shuningdek, 1-tur xosmas integral (-∞,b] oraliq uchun $\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$ kabi aniqlanadi (2-rasm).

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya (-∞;+∞) oraliqda aniqlangan va uzluksiz hamda c∈(-∞;+∞) bo'lsin. U holda xosmas integrallar:

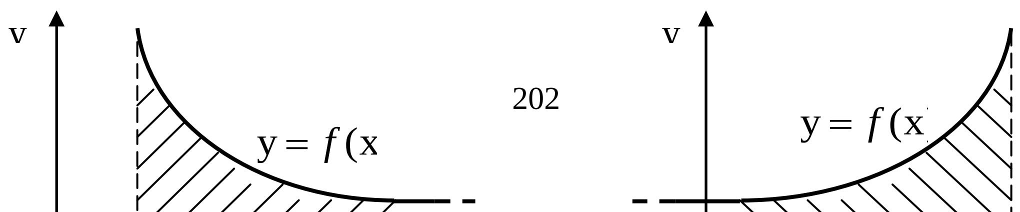
$$\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$$

yig'indisi $f(x)$ funksiyaning (-∞;+∞) oraliqdagi 1-tur xosmas integrali deb ataladi va $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ kabi belgilanadi.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{+\infty} f(x)dx \qquad (2)$$

Shunday qilib, (2) yig'indidagi har bir xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu holda (2) yig'indi s nuqtaning tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi.

1) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(2\sqrt{b} - 2\sqrt{1}) = 2\lim_{b\to+\infty}(\sqrt{b} - 1) = +\infty$.



1-rasm 2-rasm

Demak, ushbu integral uzoqlashuvchi ekan.

$$2)\ \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_a^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\operatorname{arctg}x\Big|_a^b=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}a)=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

Demak, xosmas integral yaqinlashuvchi ekan.

2. 2-tur xosmas integral

$f(x)$ funksiya [a,b) oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, x = b nuqta atrofida chegaralanmagan bo‘lsin (3-rasm). U holda

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx$$

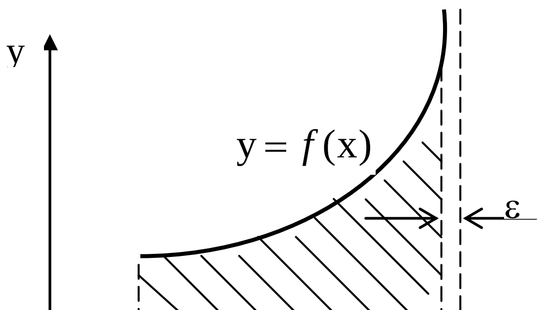
limitga [a,b) oraliqda $f(x)$ funksiyasining **2-tur xosmas integrali** deyiladi:

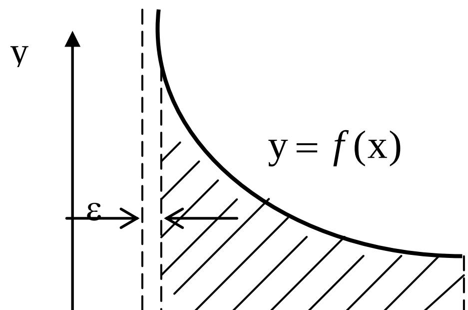
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon}f(x)dx \qquad (3)$$

Agar (3) limit mavjud va chekli bo‘lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi deyiladi. Agar limit mavjud bo‘lmasa yoki cheksizga teng bo‘lsa, xosmas integral uzoqlashuvchi deb ataladi. (a,b] oraliqda aniqlangan, uzluksiz va x = a nuqta atrofida chegaralanmagan funksiya uchun xosmas integral xuddi shuningdek aniqlanadi (4-rasm):

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^{b}f(x)dx$$

$f(x)$ funksiya [a, b] oraliqning c∈[a,b] nuqtasidan tashqari barcha nuqtalarida aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, x = c nuqtaning atrofida

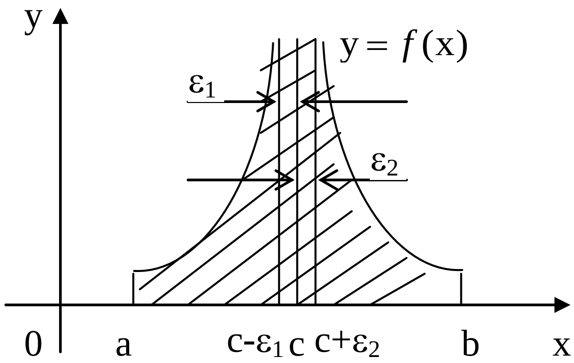




3-rasm 4- rasm

chegaralanmagan bo‘lsin (5-rasm). U holda bu funksiyaning [a, b] kesmadagi 2-tur xosmas integrali xosmas integrallarning yig‘indisi kabi aniqlanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (5)$$



5-rasm

Agar (5) formulaning o‘ng tarafidagi har bir xosmas integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, $f(x)$ funksiyadan [a,b] oraliqda olingan xosmas integral ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Misollar:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ xosmas integralni hisoblang. Integral ostidagi $y = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ funksiya x = 1 nuqtada uzilishga ega. Demak,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(-2\sqrt{1-x}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} = -2 \lim_{\varepsilon\to+0} (\sqrt{1-1+\varepsilon} - \sqrt{1-0}) =$$

$$= -2 \lim_{\varepsilon\to+0} (\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{1}) = 2$$

2) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ xosmas integralni hisoblang.

Integral ostidagi $y = \frac{1}{(x-1)^2}$ funksiya x = 1 $\in$[0,2] nuqtada 2-tur uzilishga ega. Demak,

$$\int_0^2\frac{dx}{(x-1)^2}=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_0^{1-\varepsilon_1}\frac{dx}{(x-1)^2}+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{1+\varepsilon_2}^{2}\frac{dx}{(x-1)^2}=-\lim_{\varepsilon_1\to 0}\frac{1}{x-1}\bigg|_0^{1-\varepsilon_1}-\lim_{\varepsilon_2\to 0}\frac{1}{x-1}\bigg|_{1+\varepsilon_2}^{2}=$$

$$=-\lim_{\varepsilon_1\to 0}\left(-\frac{1}{\varepsilon_1}+1\right)-\lim_{\varepsilon_2\to 0}\left(1-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)=\infty$$

Demak, berilgan integral uzoqlashuvchi ekan.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Xosmas integral deb nimaga aytiladi?
2. Xosmas integralning turlarini ayting?
3. 1-tur xosmas integralni ta'riflang?
4. 2-tur xosmas integral deb nimaga aytiladi?
5. Yaqinlashuvchi xosmas integralni ta'riflang?
6. Uzoqlashuvchi xosmas integralni ifodalang?

Ma'ruzaning tayanch iboralari

1. Xosmas integral.
2. 1-tur xosmas integral.
3. 2-tur xosmas integral.
4. Yaqinlashuvchi xosmas integral.
5. Uzoqlashuvchi xosmas integral.

Mustaqil ishlash uchun misollar

32.1. 1 - tur xosmas integrallarni hisoblang. Yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlang.

a) $\int_0^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$; b) $\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{4+x^2}$;

c) $\int_1^{+\infty}\frac{ln(1+x)}{x}dx$; d) $\int_1^{+\infty}\left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$;

e) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$; f) $\int_1^{+\infty}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^2}dx$;

g) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2xdx}{x^2+1}$; h) $\int_0^{+\infty}\frac{x}{x^3+1}dx$;

i) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$; k) $\int_1^{+\infty}\frac{ln(x^2+1)}{x}dx$;

l) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$;   m) $\int\limits_{0}^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$;

n) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$;   o) $\int\limits_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

p) $\int\limits_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\frac{3}{2}}}$;   r) $\int\limits_{0}^{+\infty} x \sin x dx$;

s) $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$;   t) $\int\limits_{0}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$.

32.2. 2 - tur xosmas integrallarni hisoblang. Yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlang.

a) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^4}}$;   b) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$;

c) $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^5 dx}{\sqrt{4-x^2}}$;   d) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$;

e) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$;   f) $\int\limits_{0}^{1} x \ln^2 x dx$;

j) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$;   h) $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$;

i) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^4}}$;   k) $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x \ln x}$;

l) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$;   m) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx$;

n) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$;   o) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$;

p) $\int\limits_{0}^{1} x \ln^2 x dx$;   r) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

33-§. Oddiy differensial tenglamalar

l. Oddiy differensial tenglamalarning asosiy tushunchalari

Matematika va uning tatbiqlarining muhim masalalari x ni emas, balki uning biror noma’lum y(x) funksiyasini topish masalasi qo‘yilgan va tarkibida x, y(x), shu bilan birga uning $y'(x)$, $y''(x),...,y^{(n)}(x)$ hosilalarini o‘z ichiga olgan murakkab tenglamalarni yechishga keltiriladi. Masalan, $y' + 2y - x^3 = 0$, $y'' = c\cdot ax$, $y''' + y = 0$.

Erkli o‘zgaruvchi x ni, noma’lum y(x) funksiyani va uning n tartibli hosilasiga qadar hosilalarini bog‘lovchi tenglamaga n-tartibli oddiy diffcrcnsial tcnglama deyiladi. Yuqoridayozilgan tenglamalar, mos ravishda, birinchi, ikkinchi va uchinchi tartibli differensial tenglamalardir. Umumiy ko‘rinishda n-tartibli differensial tenglama

$$F(x, y, y', y'',..., y^n) = 0 \qquad (1)$$

shakldа yoziladi.

(1) tenglamani ayniyatga aylantiruvchi va kamida n marta differensial-lanuvchi har qanday y = f(x) funksiyaga **differensial tenglama yechimi** deyiladi.

Masalan, $y = e^{-x}$ funksiya $y' + y = 0$ differensial tenglama yechimi bo‘lib, tenglamaning cheksiz ko‘p yechimlaridan biridir. Har qanday $y = c\cdot e^{-x}$ funksiya ham, bu yerda, c - ixtiyoriy o‘zgarmas, tenglamani qanoatlantiradi. Ushbu differensial tenglama yechilganda, uning yechimi $y = c\cdot e^{-x}$ ko‘rinishdan o‘zgacha bo‘lishi mumkin emasligini aniqlaymiz. Shu ma’noda, $y = c\cdot e^{-x}$ funksiya uning umumiy yechimi deyiladi. Umumiy yechimda ixtiyoriy o‘zgarmas c qatnashgani uchun, tenglama yechimlari to‘plami yagona ixtiyoriy c o‘zgarmasga bog‘liq deyiladi.

O’zgarmas c ga turli son qiymatlar berilganda, uning konkret yoki xususiy yechimlari kelib chiqadi.

$y''' = 0$ differensial tenglama yechimlarini bevosita qurish mumkin: $y'' = c_1$, $y' = c_1x+c_2$, $y = c_1x^2/2 + c_2x + c_3$. Bu yerda, c_1, c_2 va c_3 ixtiyoriy o‘zgarmaslar bo‘lib, ularning har qanday qiymatlarida $y = c_1x^2/2 + c_2x + c_3$ funksiya differensial tenglamani qanoatlantiradi va umumiy yechim bo‘lib hisoblanadi. $y'''=0$ differensial tenglama umumiy yechimi uch ixtiyoriy o‘zgarmasga bog‘liq va o‘zgarmaslar har birining konkret qiymatlarida xususiy yechim hosil bo‘ladi.

Yuqoridagi misollardan differensial tenglama umumiy yechimi o‘zgarmaslari soni tenglamaning tartibiga teng ekanligini va uning xususiy yechimlari umumiy yechimdan o‘zgarmaslarining konkret qiymatlarida kelib chiqishini xulosa qilish mumkin.

Differensial tenglama yechimlarini qurish jarayoniga differensial tenglamani integrallash deb yuritiladi. Differensial tenglamani integrallab, masalaning qo‘yilishiga qarab, uning yoki umumiy yechimi tuziladi yoki xususiy yechimi topiladi.

Birinchi tartibli differensial tenglama umumiy $F(x; y; y') = 0$ yoki y' hosilaga nisbatan yechilgan

$$y' = f(x;y) \tag{2}$$

ko‘rinishda yozilishi mumkin.

Ushbu tenglamalar ham, odatda, cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lib, ulardan biror-bir xususiy yechimni ajratib olish qo‘shimcha shartni talab etadi. Ko‘p hollarda ushbu shart Koshi masalasi shaklida qo‘yiladi. Koshi masalasi $y' = f(x;y)$ differensial tenglamaning $y/x = x_0 = y_0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiravchi yechimini topishdan iborat.

Masala yechimi mavjudlik va yagonalik sharti quyidagi teoremadan aniqlanadi.

Teorema. Agar $f(x;y)$ funksiya boshlang‘ich $(x_0;y_0)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan, uzluksiz va uzluksiz $\partial f/\partial y$ xususiy hosilaga ega bo‘lsa, u holda $(x_0;y_0)$ nuqtaning shunday bir atrofi mavjudki, ushbu atrofda $y' = f(x;y)$ differensial tenglama uchun $y/x = x_0 = y_0$ boshlang‘ich sharth Koshi masalasi ycchimi mavjud va yagonadir.

Differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari tushunchalariga aniqlik kiritamiz.

Agar boshlang‘ich $(x_0;y_0)$ nuqtaning berilishi (2) tenglama yechimining yagonaligini aniqlasa, u holda ushbu yagona yechimga xususiy yechim deyiladi. Boshqacha aytganda boshlang‘ich shart bir qiymatni aniqlaydigan yechim xususiy yechimdir.

Differensial tenglamaning barcha xususiy yechimlari to‘plamiga esa, umumiy yechim deyiladi.

Odatda, umumiy yechim yoki oshkor $y - \varphi(x,c)$ yoki oshkormas $\varphi(x,y,c) = 0$ ko‘rinishda yoziladi. Boshlang‘ich $(x_0;y_0)$ shart asosida c o‘zgarmas $y_0 = \varphi(x_0;c)$ tenglamadan topiladi.

Tenglamaning umumiy integral) (yoki yechimi) deb, c o‘zgarmasning turli qiymatlarida barcha xususiy yechimlari aniqlanadigan $\varphi(x,y,c) = 0$ munosabatga aytiladi.

Masalan, yechimning mavjudlik va yagonalik teorema shartlari yuqorida ko‘rilgan $y' = -y$ tenglama uchun xy tekislikning har bir nuqtasida bajariladi. Tenglama umumiy yechimi $y = c\cdot c^{x}$ formuladan iborat boiib, har qanday boshlang‘ich $y/x = x_0 = y_0$ shart mos c o‘zgarmas tan-langanda, qanoatlantiriladi. O‘zgarmas c $y_0 = c\cdot c^{-x}{}_0$ tenglamadan topiladi va $c = y_0\cdot e^{x}{}_0$.

Differcnsial tenglamani yechish uning umumiy yechimini (yoki umumiy integralini) topishni anglatadi.

(2) differensial tenglama yechimi mavjudligi va yagonaligini ta’minlaydigan muhim shartlardan $\partial f/\partial y$ xususiy hosilaning uzluksizligidir. Ba’zi bir nuqtalarda ushbu shart bajarilmasligi va ular orqali birorta ham integral chiziq o‘tmasligi yoki, aksincha, bir nechta integral chiziqlar o‘tishi mumkin. Bunday nuqtalarga differensial tenglamaning maxsus nuqtalari deyiladi.

Differensial tenglamaning integral chizig‘i faqat uning maxsus nuqtalaridan iborat bo‘lishi mumkin. Ushbu egri chiziqlar tenglamaning maxsus yechimlari deb yuritiladi.

2. O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar. Bir jinsii differensial tenglamalar

Birinchi tartibli ikkala qismini oddiy integrallash yo‘li bilan yechiladigan sodda tenglama

$$y' = f(x) \tag{3}$$

ko‘rinishga ega. Natijada, $y = \int f(x)dx$ va agar f(x) funksiyaning boshlang‘ich funksiyalaridan biri F(x) bo‘lsa, umumiy yechim $y = F(x)+c$ ko‘rinishda yoziladi.

(3) tenglamaning muhim umumlashmasi bo‘lmish o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama:

$$y' = P(x) - q(y) \quad \text{yoki} \quad dy/dx = P(x) \cdot q(y) \tag{4}$$

shaklda yozilishi mumkin.

Noma’lum funksiya y ning qaralayotgan o‘zgarish sohasida $q(y) \neq 0$ shart bajariladi deb, (4) tenglamani o‘zgaruvchilari ajralgan.

$$dy/q(y) = P(x) \cdot dx$$

shaklda yozamiz va ikkala qjsmini integrallab,

$$\int dy/q(y) = \int P(x) \cdot dx$$

tenglikni olamiz. Q(y) funksiya l/q(y) funksiyaning, P(x) esa p(x) ning boshlang‘ich funksiyalaridan biri bo‘lsa, (4) tenglamaning umumiy integrali:

$$Q(y) = P(x) + c$$

ko‘rinishdan iborat.

Masala. $y' = x - y^2$ tenglamaning barcha yechimlarini topish talab qilingan bo‘lsin. $y \neq 0$ shart o‘rinli deb, tenglama o‘zgaruvchilarini ajratamiz.

$$dy/dx = x \cdot y^2 \qquad \text{yoki} \qquad dy/y^2 = x \cdot dx.$$

Tenglamani integrallab, -1/y = ½ - x^2 + c yoki $y=-\dfrac{1}{{}^1\!/_2\cdot x^2+c}$

ko‘rinishda umumiy yechimni olamiz. Ushbu yechimga tenglamani yechish jarayonida yo‘qotilgan y = 0 yechimni ham qo‘shish lozim. Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama deb,

$$dy/dx = f(y/x) \qquad (5)$$

ko‘rinishdagi tenglamaga aytiladi.

(5) tenglamani yechish uchun noma’lum y(x) funksiyadan u(x) = y(x)/x funksiyaga o‘tamiz. Unda,

$$y = x\cdot u, \quad dy/dx = u + x\cdot du/dx$$

tengliklar o‘rinli bo‘lib, (5) tenglama:

$$u + x\cdot du/dx = f(u) \quad \text{yoki} \quad du/(f(u) - u) = dx/x$$

ko‘rinishga keltiriladi. Oxirgi tenglama o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglamadir va ma’lum usulda yechiladi. Natijada,

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\ln|x|=c.$$

u(x) funksiya topilgandan so‘ng, y(x) = x·u (x) funksiyaga qaytiladi.

Masala.

$$y'=\frac{x+y}{x-y}=0$$

tenglamani yeching.

Ushbu tenglama bir jinsli tenglama, chunki

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{y+x}{y-x}=\frac{y/x+1}{y/x-1}=\frac{u+1}{u-1}$$

bu yerda, u = y/x.

Noma’lum **u** fiinksiyaga nisbatan o‘zgaruvchilari ajralgan:

$$\frac{du}{\frac{u+1}{u-1}-u}=\frac{dx}{x} \qquad \text{yoki} \qquad \frac{(u-1)\cdot du}{-u^2+2u+1}=\frac{dx}{x}$$

tenglama hosil bo‘ladi. Tenglamani integrallasak,

$$-1/2\cdot\ln|-u^2+2u+1| = \ln|x| - 1/2 - \ln|C|$$

tenglikni va so‘ngra,

$$|-u^2 + 2u + l|^{-1/2} = |x|\cdot 1/\sqrt{C} \quad \text{yoki} \quad x^2\cdot|- u^2 + 2u + l| = |C|$$

yechimlarni va oxirida y = x - u funksiyaga qaytib, oshkormas shaklda:

$$x^2 + 2xy - y^2 = C$$

umumiy integralni quramiz.

3. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar.

Bernulli tenglamasi

Birinchi tartibli F(x,y,y') = 0 differensial tenglamaning chap qismi y va y' larga chiziqli bog‘liq shakliga chiziqli tenglama deyiladi. Chiziqli, birinchi tartibli differensial tenglama,

$$y' + P(x)\cdot y = f(x) \qquad (6)$$

ko‘rinishda yozilishi mumkin.

(6) tenglamani integrallash jarayoni, odatda, ikki bosqichdan iborat. Dastlab, tenglama o‘ng tomonidagi f(x) funksiyani 0 bilan almashtiriladi va

$$y' + P(x) - y = 0 \qquad (7)$$

tenglamaning umumiy yechimi topiladi. (7) tenglama (6) tenglamaning mos chiziqli bir jinsli tenglamasi deyiladi. (6) tenglamaning o‘zi esa, agar $f(x) \neq 0$ bo‘lsa, bir jinsli bo‘lmagan tenglama deyiladi. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi qurilgandan so‘ng, bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning biror-bir $y_1(x)$ xususiy yechimi topiladi.

Bir jinsli bo‘lmagan (1) tenglama umumiy yechimi, ushbu tenglama biror-bir xususiy $y_1(x)$ yechimi bilan uning mos bir jinsli tenglamasi umumiy yechimlari yig‘indisiga teng.

Birinchi bosqichda bir jinsli (7) tenglamani yechamiz.

Tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama bo‘lgani uchun,

$$dy/y = - P(x)\cdot dx.$$

Oxirgi tenglamani integrallab, $y = C\cdot e^{-P(x)}$ umumiy yechimni quramiz, bu yerda, P(x) flinksiya p(x) ning boshlang‘ich funksiyalaridan bin.

lkkinchi bosqichda (6) tenglama xususiy yechimlaridan birini ixtiyoriy o‘zgarmasni variatsiyalash usulida, ya’ni y,(x) xususiy yechimni $y_1(x) = u(x)\cdot e^{-P(x)}$ shaklda qidiramiz. Ushbu ifodani (6) tenglamaga qo‘yamiz va u(x) noma’lum funksiyaga nisbatan,

$$u'- e^{-P(x)} - u\cdot P'(x)\cdot e^{-P(x)} + P(x)\cdot u\cdot e^{-P(x)} = f(x)$$

tenglamani olamiz. $P'(x) = p(x)$ munosabat o‘rinli bo‘lgani uchun, tenglamaning chap tomondagi ikkinchi va uchinchi hadlari o‘zaro yeyishadi. Natijada,

$$u'\cdot e^{-P(x)} = f(x) \text{ yoki } du/dx = f(x)\cdot e^{P(x)}$$

tenglama kelib chiqadi. Uni integrallab, cheksiz ko‘p

$$u(x) = \int f(x)\cdot e^{P(x)}dx$$

boshlang‘ich funksiyalardan birini tanlaymiz.

Masala. $y' - 2x(y + l) = 0$ tenglamani yeching.

Tenglama $y' - 2x - y = 2x$ shaklda yozilishi mumkin va chiziqli tenglamadir. Tenglamaning mos bir jinsli tenglamasi $y' – 2x - y = 0$ ko‘rinishga ega. O’zgaruvchilarni ajratib, so‘ngra integrallaymiz:

$$dy/y = 2x\cdot dx \leftrightarrow \ln|y| = x^2+\ln|c| \leftrightarrow y = \pm c\cdot e^{x2}$$

Dastlabki bir jinslimas tenglamaning xususiy yechimi $y_0(x)$ ni $y_0(x) = u(x)\cdot e^{x2}$ ko‘paytma ko‘rinishida topamiz:

$$u' - e^{x2} + 2x\cdot u\cdot e^{x2} - 2x\cdot u\cdot e^{x2} = 2x \leftrightarrow u' = 2x\cdot e^{-x2}$$

va $u(x) = - e^{-x2} +c$, umumiy yechimdan $u(x) = - e^{-x2}$ xususiy yechimni tanlaymiz. Natijada, $y_0(x) = - e^{-x2}\cdot e^{x2} = -1$, shunday qilib, berilgan tenglamaning umumiy yechimini xususiy $y = - l$ va mos bir jinsli tenglama umumiy yechimi $y = c\cdot e^{x2}$ larning yig‘indisidan iborat:

$$y(x) = c\cdot e^{x2} - l;$$

Chiziqli differensial tenglamani yechishda qo‘llanilgan usul ba’zi chiziqsiz tenglamalarni ham yechish imkonini beradi. Xususan, chiziqsiz

$$y'+ P(x)\cdot y = q(x)\cdot y^n \qquad (8)$$

Bernulli tenglamasi deb yuritiladigan tenglamani yuqoridagi usulni qo‘llab, yechish mumkin. Dastlab, $y' + P(x)\cdot y = 0$ bir jinsli tenglamaning yechimlaridan biri $y_0(x)$ ni topamiz.

(8) tenglama umumiy yechimini $y(x) = u(x)\cdot y_0(x)$ ko‘rinishda qidiramiz. Natijada, noma’lum $u(x)$ ga nisbatan,

$$u'(x)\cdot y_0(x) = q(x)\cdot u^n(x) - y_0^n(x)$$

o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama kelib chiqadi va integrallanadi.

Masala. $y'+ 2y - e^{2x}\cdot y^2 = 0$ tenglamani yeching.

Dastlab, bir jinsli $y'+ 2y = 0$ tenglamani integrallaymiz va uning $y = c\cdot e^{-2x}$ umumiy yechimini olamiz. Yechimlaridan biri sifatida $y_0(x) = e^{-2x}$ funksiyani qarash mumkin. So‘ngra, berilgan tenglamada $y(x) = u(x)\cdot e^{-2x}$ almashtirish bajaramiz:

$$e^{-2x}\cdot u' = e^{-4x}\cdot e^{2x}\cdot u^2 \text{ yoki } du/u^2 = l.$$

Oxirgi tenglamani integrallab, $u(x) = l/(c - x)$ tenglikni olamiz. Natijada, tenglama umumiy yechimi:

$$y(x) = u(x)\cdot y_0(x) = e^{-2x}/(c - x).$$

O’z - o‘zini tekshirish uchun savollar

1.Oddiy differensial tenglama deb qanday tenglamalarga aytiladi?

2.Differensial tenglama tartibi deganda nima tushuniladi?

3.Differensial tenglama yechimi deganda qanday funksiya nazarda tutiladi?

4.Differensial tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari deb qanday yechimlarga aytiladi?

5.Tenglamani integrallash nimani anglatadi?

6.Tenglama umumiy yechimida ixtiyoriy o‘zgarmaslar soni bilan tenglama tartibi qanday munosabatda?

7.Koshi masalasi deganda qanday masala tushuniladi?

8.Koshi masalasi yechimining mavjudlik va yagonalik shartlarini bayon qiling?

9.Differensial tenglamaning maxsus nuqtalari va maxsus yechimlari deganda nimalar tushuniladi?

10.O’zgaruvchilari ajralgan yoki ajraladigan differensial tenglamalarga misollar keltiring?

11. Bir jinsli diflerensial tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi va uni yechish usulini tushuntirib bering?

12.Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deganda qanday tenglama tushuniladi?

13.Bir jinslimas chiziqli differensial tenglama umumiy yechimi ixtiyoriy o‘zgarmaslarni variatsiyalash usulida qanday quriladi?

14.Bernulli tenglamasini yozing va u qanday yechiladi?

Tayanch so‘z va iboralar

1. Oddiy differensial tenglama.
2. Differensial tenglama tartibi.
3. Differensial tenglama yechimi.
4. Tenglamaning umumiy va xususiy yechimi.
5. Differensial tenglamani integrallash.
6. Boshlang‘ich shartli Koshi masalasi.
7. Differensial tenglama maxsus nuqtasi va maxsus yechimi.
8. O‘zgaruvchilari ajralgan yoki ajraladigan differensial tenglama.
9. Bir jinsli differensial tenglama.
10. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama.
11. Ixtiyoriy o‘zgarmaslarni variatsiyalash usuli.
12. Bernulli tenglamasi.

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. Quyidagi egri chiziqlar oilalarining differensial tenglamalarini tuzing:

a) $y = cx/x$; b) $x^2 + y^2 = cx$; c) $y^2 = 2cx$;
d) $y = c_1 \cdot e^x + c_1 \cdot e^{-x}$ e) $y = (c_1+c_2x) \cdot e^{-2x}$

2. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalarning umumiy yechimlarini toping.

a) $x^2 \cdot y' = (1-x^3)/y$;   b) $y \cdot y' = (1+2x)/y^2$;   c) $x \cdot dx/y = \sqrt{(x^2+1)\cdot dy}$;

d) $y' \cdot tgx - y = 10$;   e) $\sqrt{(1-x^2)\cdot dy} + x\cdot\sqrt{1-y^2\cdot dy} = 0$;   f) $y' - e^{x+y}$

3. Koshi masalalarini yeching:

a) $(1+x^2)\cdot y' = 1+y^2$, $y_{x=0} = 1$ b) $y' = tgx \cdot ctgy$, $y_{x=0} = \pi/4$
c) $(1+e^{2x})\cdot y^2 \cdot y\, y' = e^x$, $y_{x=0} = 0$ d) $y \cdot \ln y \cdot dx = \sin x \cdot dy$, $y_{x=\pi/2} = 1$

4. Bir jinsli differensial tenglamalarni yeching:

a) $y' = y^2/x^2 - 1$;   b) $(x-y)\cdot dy - y\cdot dx = 0$;   c) $(x^2-y^2)\cdot dy = 2xy\cdot dx$;
d) $y' = y/x + x/y$;   e) $y' = 2xy/(3x^2-y^2)$, $y_{x=0} = 1$;
f) $(y - x\cdot y')\cdot arctgy/x + x = 0$, $y_{x=1} = 0$.

5. Chiziqli differensial tenglamalarni yeching:

a) $y' + y = 2x$;   b) $y' + 4y/x = x^3$;   c) $y' + 2xy = x\cdot e^{-x2}$;
d) $y' + y = \sin x$;   e) $y' + 2y = e^x$;   f) $y' - tgx\cdot y = 1/\cos x$; $y_{x=0} = O$
g) $y' - y/(x^2 + x) = 1$; $y_{x=1} = 0$.

6. Bernulli tenglamalari umumiy yechimlarini toping:

a) $y' + y/x = -x\cdot y^2$;   b) $y' + y/(x+1) = -y^2$;
c) $(x^2/y - y^3)\cdot dy - x\cdot dx = 0$;   d) $y' - tgx\cdot y = -\cos x\cdot y^2$;
e) $y' - 4/x = x\cdot\sqrt{y} = 0$.

34-§. O'zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar. Differensial tenglamalar sistemasi

1. Ikkinchi tartibli, o'zgarmas koeffitsientli, chiziqli differensial tenglamalar

Ikkinchi tartibli, o'zgarmas koeffitsientli, chiziqli differensial tenglama

$$y = y'' + P\cdot y' + q\cdot y = f(x) \qquad (1)$$

ko'rinishga ega bo'lib, tenglamada P va q o'zgarmas sonlar, f(x) esa uzluksiz funksiyadir.

Agar (1) tenglamada f(x) = 0 bo'lsa, u holda

$$y'' + P\cdot y' + q\cdot y = 0 \qquad (2)$$

tenglamaga (1) tenglamaning bir jinsli tenglamasi deyiladi.

Bir jinslimas (1) tenglama qaralayotganda uning mos bir jinsli (2) tenglamasi muhim ahamiyat kasb etadi. (2) tenglamaning yechimlari to‘plami esa o‘ziga xos xususiyatlarga egaligidan uni maxsus o‘rganish maqsadga muvofiq.

Dastlab, chiziqli - erkli va chiziqli bog‘liq funksiyalarga to’xtalamiz. Vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi, chiziqli erkliligi yoki chiziqli bog‘liqligi tushunchalarini ixtiyoriy funksiyalarga ham yoyish mumkin.

Berilgan $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ funksiyalarning c_1, c_2, ..., c_n o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli kombinatsiyasi deb,

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + ... + c_n \cdot y_n(x)$$ funksiyaga

aytiladi.

Agar $y_1(x)$, $y_2(x)$,..., $y_n(x)$ funksiyalardan istalgan biri qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi shaklida ifodalanmasa, ushbu funksiyalar sistemasiga **chiziqli erkli sistema** deyiladi. Aksincha, agar qaralayotgan funksiyalardan hech bo‘lmaganda biri qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida ifodalansa, funksiyalar tizimiga **chiziqli bog‘liq** deyiladi.

Bir necha funksiyalardan iborat sistemaning chiziqli erkliligi masalasini aniqlash usulmridan biri Bronskiy aniqlovchisi bilan bog‘liq.

Ikki $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar tizimi uchun, Bronskiy aniqlovchisi

$$W(y_1; y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

ko‘rinishga ega bo‘lib, uning nafaqat elementlari, shu bilan birga o‘zi ham x ning funksiyasidan iborat.

Aniqlovchi xossalariga ko‘ra, agar y_1, y_2 funksiyalar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, Bronskiy aniqlovchisining kattaligi x ning barcha qiymatlarida nolga teng. Demak, agar x ning biror-bir qiymatida $W(y_1;y_2) \neq 0$ bo‘lsa, y_1 va y_2 funksiyalar chiziqli erklidir.

Bir jinsli (2) tenglama bir necha yechimlarining har qanday chiziqli kombinatsiyasi uning yechimi bo‘la olishini tekshirib ko‘rish mumkin.

Agar ikki $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (2) tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo‘lsa, u holda ularning $W(y_1;y_2)$ Bronskiy aniqlovchisi x ning hech bir qiymatida nolga teng bo‘la olmaydi.

Yuqoridagi mulohazalarga asoslanib, chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar nazariyasida markaziy o‘rinni egallagan bir jinsli tenglamaning barcha yechimlari tuziljshi haqidagi quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

1 - Teorema. Agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (2) tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo‘lsa, u holda tenglamaning har bir yechimi ularning chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida ifodalanishi mumkin.)

(2) tenglamaning tartiblangan chiziqli erkli $y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlari tizimiga uning fundamental yechimlari sistemasi deyiladi.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ yechimlarning fundamentallik zaruriy va ham yetarli sharti $W(y_1;y_2) \neq 0$ tengsizlikning bajarilishi hisoblanadi.

Ta’rifdan foydalanib, teoremani o‘zgacha bayon qilish mumkin.

Agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ bir jinsli (2) tenglamaning fundamental yechimlari tizimlaridan biri bo‘lsa, u holda uning umumiy yechimi:

$$y(x_0) = c_1y_1 + c_2y_2.$$

ko‘rinishga ega, bu yerda, c_1, c_2 - ixtiyoriy o‘zgarmas sonlardip.

Masalan, $y'' + y = 0$ tenglama xususiy yechimlari sifatida $y_1 = \sin x$ va $y_2 = \cos x$ funksiyalarni tanlash mumkin.

Ularning Bronskiy aniqlovchisi

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = -1$$

Demak, y_1 va y_2 chiziqli erkli boiganidan, tenglama umumiy yechimi:

$$y(x) = c_1 \cdot \sin x + c_2 \cdot \cos x$$

o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli (2) tenglama fundamental yechimlari sistemasini qurishning sodda usuli mavjud.

(2) tenglama xususiy yechimini $y = e^{\lambda x}$ ko‘rsatkichli funksiya ko‘rinishida qidiramiz. Funksiyani ikki mavta differensiallab,

$$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$$

tengliklarni olamiz. y funksiya va uning hosilalarini (2) tenglamaga qo‘ysak,

$$(\lambda^2 + P \cdot \lambda + q) \cdot e^{\lambda x} = 0$$

tenglama hosil bo‘ladi. $e^{\lambda x} \neq 0$ (har doim musbat) ekanligini hisobga olsak, oxirgi tenglamaga teng kuchli

$$(\lambda^2 + P \cdot \lambda + q) = 0 \qquad (3)$$

tenglamani olamiz.

(3) algebraik tenglamaga (2) differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

(2) tenglamaning fundamental yechimlari sistemasini qurishning navbatdagi qadami quyidagicha: (3) kvadrat tenglama ikki λ_1 va λ_2

haqiqiy yoki kompleks ildizlarga ega boisin. Unda $y_1 = e^{\lambda 1x}$, $y_2 = e^{\lambda 2x}$ funksiyalarning har biri (2) tenglamaning yechimi bo‘ladi. Agar ushbu funksiyalar chiziqli erkli bo‘lsa, tenglama umumiy yechimi $c_1 e^{\lambda 1x} + c_2 e^{\lambda 2x}$ ko‘rinishda yoziladi.

Agar fiinksiyalar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, umumiy yechimni qurish jarayoni qo‘shimcha mulohazalarni talab etadi.

Umumiy yechimni tuzishning xarakteristik tenglama yechimlari bilan bog‘liq barcha hollarini qaraymiz:

1- hol: λ_1 va λ_2 ildizlar haqiqiy va turlicha. Ularga mos $y_1 = e^{\lambda 1x}$ va $y_2 = e^{\lambda 2x}$ yechimlar chiziqli erkli, chunki

$$W(y_1;y_2)=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1\cdot e^{\lambda_1 x} & \lambda_2\cdot e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}$$

Demak, y_1 va y_2 fundamental yechimlar sistemasini tashkil etadi.

Misol. $y'' - 8y' + 7y = 0$ tenglama umumiy yechimini quring.

Xarakteristik tenglama $\lambda^2 - 8\lambda + 7$ ko‘rinishga ega va uning ildizlari $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 7$. Natijada, chiziqli erkli $y_1 = e^x$ va $y_2 = e^{7x}$ xususiy yechimlami olamiz. Tenglama umumiy yechimi

$$y = c_1 - e^x + c_2\cdot e^7.$$

2-hol: λ_1 va λ_2 ildizlar o‘zaro qo‘shma $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ va $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ kompleks sonlar, bu yerda – $\beta \neq 0$.

Ildizlarga mos kompleks yechimlami Z_1 va Z_2 deb belgilaymiz:

$$Z_1 = e^{(\alpha + \beta i)}, \quad Z_2 = e^{(\alpha - \beta i)}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ bo‘lganidan, ular chiziqli erkli.

Eyler formulasidan foydalanib,

$Z_1 = e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x + i\cdot\sin\beta x)$, $Z_2 = e^{\alpha x}\cdot(\cos\beta x - i\cdot\sin\beta x)$, funksiyalarni olamiz. Funksiyalarining quyidagi chiziqli kombinatsiyalarini tuzamiz:

$$y_1 = 1/2\,(Z_1 + Z_2) = e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x,\ y_2 = l/(2\cdot i)(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x.$$

y_1 va y_2 funksiyalar (2) tenglamaning haqiqiy yechimlari bo‘lib, chiziqli erklidir. Natijada, umumiy yechim

$y = c_1\cdot e^{\alpha x}\cdot\cos\beta x + c_2\cdot e^{\alpha x}\cdot\sin\beta x = e^{\alpha x}\cdot(c_1\cdot\cos\beta x + c_2\cdot\sin\beta x)$ ko‘rinishda yoziladi.

Misol. $y''- 6y' + 10y = 0$ tenglama umumiy yechimini toping.

Xarakteristik tenglama

$$\lambda^2 - 6\lambda + 10 = 0$$

bo‘lib, uning ildizlari $\lambda_1 = 3+i$, $\lambda_2 = 3-i$. Shunday qilib, xususiy yechjimlar

$$y_1 = e^{3x} \cdot \cos x, \quad y_2 = e^{3x} \cdot \sin x.$$

Umumiy yechim:

$$y = e^{3x} \cdot (c_1 – \cos x + c_2 \cdot \sin x).$$

3-hol: λ_1 va λ_2 ildizlar o‘zaro teng va haqiqiy. $\lambda_1 = \lambda_2$ ildizlarga xususiy $e^{\lambda 1x}$ va $x \cdot e^{\lambda 1x}$ chiziqli erkli (tekshirib ko‘ring) yechimlami mos qo‘yish mumkin. Shunday qilib, umumiy yechim

$$y = c_1 \cdot e^{\lambda 1x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda 1x} = e^{\lambda 1x} \cdot (c_1 + c_2 \cdot x).$$

Misol. $y'' + 4y' + 4y = 0$ tenglama umumiy yechimini toping.

Xarakteristik tenglama $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ va $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$.

Umumiy yechim

$$y = e^{-2x} \cdot (c_1 + c_2 \cdot x).$$

2 - Teorema. Bir jinslimas (1) differensial tenglamaning umumiy yechimi ushbu tenglama biror $y_0(x)$ xususiy yechimi va mos bir jinsli (2) tenglama umumiy yechimlari yig‘indisiga teng.

(1) tenglama biror-bir xususiy yechimini ixtiyoriy o‘zgarmasni variantsiyalash usulida qurish mumkin.

Agar (1) tenglamaning o‘ng tomoni $f(x) = P(x) \cdot e^{\alpha x}$ ko‘rinishda bo‘lsa, bu yerda, $P(x)$ - ko‘phad, u holda tenglamaning xususiy yechimini qu-rishning oddiy usuli mavjud.

I hol: Agar α xarakteristik tenglamaning ildizlaridan biri bo‘lmasa, xususiy yechim $y = Q(x) \cdot e^{\alpha x}$ ko‘rinishda qidiriladi. Bu yerda: $Q(x)$ - darajasi $P(x)$ ning darajasiga teng aniqmas koeffitsiyentli ko‘phad. $y = Q(x) \cdot e^{\alpha x}$ ifoda (1) tenglamaga qo‘yiladi, $e^{\alpha x}$ ga qisqartirilgandan so‘ng, ko‘phadlar tengligidan, $Q(x)$ ko‘phadning aniqmas koeffitsiyentlari aniqlanadi.

Misol. $y'' - 6y' + 8y = (3x - l) \cdot e^x$ tenglamaning xususiy yechimini toping.

Ushbu holda a = 1, xarakteristik tenglama ildizlari esa 2 va 4 ga teng. Masala yechimini $y = (ax + b) \cdot e^x$ ko‘rinishda qidiramiz. Funksiya hosilalarini aniqlaymiz:

$y' = a \cdot e^x + (ax + b) \cdot e^x = (ax + a + b) \cdot e^x$

$y'' = a \cdot e^x + (ax + a + b) \cdot e^x = (ax + 2a + b) \cdot e^x$

y, y', y'' ifodalarni tenglamaga qo‘yiladi va e^x ga qisqartirilgandan so‘ng:

$$(ax + 2a + b) - 6 (ax + a + b) + 8 (ax + b) = x - 1 \text{ yoki}$$

$$3ax - 4a + 3b = 3x - l.$$

Mos koeffitsiyentlarni tenglab, a = 1, b = -1 natijani olamiz. Izlana-yotgan xususiy yechim:

$$y = (x - 1)\cdot e^{x};$$

II hol: Agar α xarakteristik tenglamalardan biriga teng bo‘lib, ikkinchisidan, farq qilsa, xususiy yechim $y = x\cdot Q(x)\cdot e^{\alpha x}$ ko‘rinishida izlanadi.

III hol: Agarda a xarakteristik tenglama ikki karrali ildizlariga teng bo‘lsa, u holda xususiy yechim $y = x^2\cdot Q(x)\cdot e^{\alpha x}$ ko‘rinishida qidiriladi.

2. Differensial tenglamalar sistemalari haqida umumiy ma’lumotlar

Agar bir noma’lum funksiyani emas, balki bir yo‘la bir nechta noma’lum funksiyani topish masalasi qo‘yilgan bo‘lsa, umuman olganda, masala chekli shartlari - tenglamalari ham bir nechta bo‘lishi zarur bo‘ladi. Agarda masala tenglamalari differensial tenglamalardan iborat bo‘lsa, u holda differensial tenglamalar sistemasi haqida gapirish mumkin.

Sistema har bir tenglamasida hosila tartibi 1 dan oshmasa, sistema bi-rinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi deb yuritiladi. Ikki noma’lum funksiyali ikki birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasi, odatda,

$$\begin{cases} \varphi(x, y_{1,}\ y_2, dy_1/dx; dy_2/dx) = 0 \\ \varphi(x, y_1, y_2, dy_1/dx; dy_2/dx) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

ko‘rinishda yoziladi.

Bir tenglama uchun Koshi masalasining qo‘yilishi tabiiy ravishda differensial tenglamalar sistemasi uchun umumlashtiriladi. Masalan, (4) sistema uchun Koshi masalasi boshlang‘ich $y_1(x_0) = y_1^0$, $y_2(x_0) = y_2^0$ shartlarni qanoatlantiravchi $y_1(x)$, $y_2(x)$ yechimlarni topishni anglatadi.

Har qanday yuqori tartibli differensial tenglamani yoki tenglamalar sistemasini birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasiga keltirish mumkin.

Masalan, $y'' = f(x, y, y')$ tenglamani

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = f(x, y, u) \end{cases}$$ sistema bilan almashtirish mumkin.

3. Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar sistemalari. Yuqori tartibli yagona differensial tenglamaga keltirish

Differensial tenglamalar sistemasining maxsus ko‘rinishi, chiziqli sistemalarni qarash bilan cheklanamiz.

Ikki noma’lum $y_1(x)$, $y_2(x)$ funksiyalar holi uchun chiziqli sistema

$$\begin{cases} dy_1/dx = a_{11}\cdot y_1 + a_{12}\cdot y_2 \\ \end{cases}$$

$$dy_2/dx = a_{21}\cdot y_1 + a_{22}\cdot y_2 \qquad (5)$$

ko‘rinishga ega bo‘lib, umuman olganda, α_{ij} koeffitsiyentlar erkli o‘zgaruvchi x ning uzluksiz funksiyalaridir.

(5) sistemani integrallash usullaridan biri, bir noma’lumli ikkinchi darajali differensial tenglamaga keltirishdir. (5) sistemaning birinchi tenglamasi ikkala qismini x bo‘yicha differensiallaymiz,

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \alpha_{11}\cdot\frac{dy_1}{dx} + \alpha_{12}\cdot\frac{dy_2}{dx} + \frac{d\alpha_{11}}{dx}\cdot y_1 + \frac{d\alpha_{12}}{dx}\cdot y_2$$

tenglamada dy_1/dx, dy_2/dx hosilalar sistemadagi ifodasi bilan almashtirilganda,

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \alpha_{11}(\alpha_{11}\cdot y_1 + \alpha_{12}\cdot y_2) + \alpha_{21}(\alpha_{21}\cdot y_1 + \alpha_{22}\cdot y_2) + \frac{d\alpha_{11}}{dx}\cdot y_1 + \frac{d\alpha_{12}}{dx}\cdot y_2$$

tenglama o‘ng qismida y_1 va y_2 qatnashgan hadlar guruhlanganda

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = \beta_1\cdot y_1 + \beta\cdot y_2 \qquad (6)$$

ko‘rinishni oladi, bu yerda β_1 va β_2 koeffitsiyentlar α_{ij} koeffitsiyentlar va ularning hosilaiari orqali aniq va ravshan ifodalanadi.

(6) tenglamani (5) sistemaning birinchi tenglamasi bilan birgalikda qarab,

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \alpha_{11}\cdot y_1 + \alpha_{12}\cdot y_2 \\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2} = \beta_1\cdot y_1 + \beta_2\cdot y_2 \end{cases} \qquad (7)$$

sistemani olamiz.

Erkli o‘zgaruvchi x ning qaralayolgan sohasida $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \neq 0$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, (7) sistemani y_1 va y_2 ga nisbatan yechish, ya’ni $\dfrac{dy_1}{dx}$ va $\dfrac{d^2y_1}{dx^2}$ lar orqali ifodalash mumkin. Natijada,

$$y_1 = a\cdot\frac{dy_1}{dx} + b\cdot\frac{d^2y_1}{dx^2} \qquad (8)$$

$$y_2 = c\cdot\frac{dy_1}{dx} + d\cdot\frac{d^2y_1}{dx^2} \qquad (9)$$

tenglamalarga ega bo‘lamiz. (8) tenglama yagona $y_1(x)$ noma’lum funksiyali, ikkinchi tartibli chiziqli tenglamadir. Agar dastlabki (5) sistemada

α_{ij} koeffitsiyentlar o‘zgarmas bo‘lsa, (8) tenglama ham o‘zgarmas koef-fitsiyentli bo‘lib, ushbu tenglamani yuqorida ko‘rilgan qulay usulda yechish mumkin.
Misol. Sistemani yeching.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -y_1 - 2y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -2y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

Birinchi tenglamani ikkala qismini differensiallaymiz, natijada

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = -\frac{dy_1}{dx} - 2\cdot\frac{dy_2}{dx} = -(-y_1 - 2y_2) - 2\cdot(2y_1 + 3y_2) = -3y_1 - 4y_2.$$

sistemaning birinchi tenglamasi bilan birgalikda

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -y_1 - 2y_2 \\ \dfrac{d^2y_1}{dx^2} = -3y_1 - 4y_2 \end{cases}$$

ko‘rinishni oladi.
Oxirgi sistemani y_1 va y_2 larga nisbatan yechamiz:

$$\begin{cases} y_1 = 2\dfrac{dy_1}{dx} - \dfrac{d^2y_1}{dx^2} \\ y_2 = -\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{dy_1}{dx} + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{d^2y_1}{dx^2} \end{cases}$$

Natijada, noma’lum $y_1(x)$ funksiyaga nisbatan

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} - 2\cdot\frac{dy_1}{dx} + y_1 = 0$$

tenglama hosil boladi. Ushbu tenglamani ma’lum usulda yechamiz va

$$y_1=(c_1+c_2-x)\cdot e^x$$

funksiyani olamiz. Oxirgi sistema ikkinchi tenglamasi yordamida

$$y_2=-1/2\cdot(2c_1+c_2+2c_2x)\cdot e^x$$

yechim ham kelib chiqadi.
Quyidagi almashtirishlarni kiritamiz:

$$\frac{dy_1}{dx} = \dot{y}_1,\ \frac{dy_2}{dx} = \dot{y}_2,\ A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\ \dot{Y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix}$$

Yuqoridagi almashtirishlar yordamida, (5) sistemani ixcham

$$\dot{Y} = A\cdot Y \qquad (10)$$

matritsali tenglama ko‘rinishida yozish mumkin.)
Masalan, quyidagi

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 4y_1 - y_2 \\ \dot{y}_2 = 2y_1 - 3_2 \end{cases}$$

sistemaning matritsa ko‘rinishi

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

4. O‘zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalarning chiziqli sistemasi va uning umumiy yechimini toping

(5) sistemaning α_{ij} koeffitsiyentlari o‘zgarmas bolsa, sistemani yechishda chiziqli algebra usullarini qo‘llash imkoni mavjud.

Dastlab boshida (5) sistema Trivial (nol) $y_1(x) = 0$, $y_2(x) = 0$ yechimlarga ham ega ekanligmi tekshirib ko‘rish qiyin emas. Sistemamng notrivial (nolmas) yechimlarini $y_1 = P_1 \cdot e^{\lambda x}$, $y_2 = P_2 \cdot e^{\lambda x}$ yoki matrisa $y = P \cdot e^{\lambda x}$, bu yerda, $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix}$ ko‘rinishida qidiramiz.

$Y = \lambda P \cdot e^{\lambda x}$ bo‘lganidan, Y va Y larni (10) tenglamaga qo‘yib, $e^{\lambda x}$ ga qisqartirilgandan so‘ng, λ, P juftliklarni topish uchun matritsali

$$A \cdot P = \lambda \cdot P \qquad (11)$$

tenglamani olamiz. (11) tenglamani yechish A matritsaning xos P vektorlari va X qiymatlarini topish masalasidir. A matritsaning xos qiymatlari

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} \\ \alpha_{11} & \alpha_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \qquad (12)$$

xarakteristik tenglama ildizlari bo‘lib, so‘ngra xos qiymatlarining har birigategishli xos vektorlar quriladi.)

λ_1 va λ_2 sonlar (12) xarakteristik tenglamaning turli haqiqiy ildizlari bo‘lsin. Agar P_1 vektor λ_1 xos qiymatga tegishli biror-bir xos vektor, P_2 esa λ_2 xos qiymatga mos biror xos vektor bo‘lsa, u holda (10) tenglamaning ikki xususiy yechimlari $Y_1 = P_1 \cdot e^{\lambda 1 \cdot x}$, $Y_2 = P_2 \cdot e^{\lambda 2 \cdot x}$ formulalardan aniqlanadi.

Umumiy yechim

$$Y = C_1 \cdot Y_1 + C_2 \cdot Y_2,$$

ko‘rinishga ega, bu yerda C_1 va C_2 ixtiyoriy o‘zgarmaslar.

Agar $\lambda_1 = \lambda_2$ bo‘lsa, unda ikki Y_1 va Y_2 xususiy yechimlarning o‘rniga birgina Y_1 yechimni olamiz. Ushbu holda ikki xususiy yechim sifatida Y_1 va $x\cdot Y_1$ lar tanlanadi.

Agarda X_1 va X_2 sonlar haqiqiy sonlar bo‘lmasa, u holda $\lambda_1 = \alpha + \beta\cdot i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta\cdot i$ - bu yerda $\beta \neq 0$. λ_1 va λ_2 kompleks xos qiymatlarga mos xos vektorlar quriladi. Xususiy $Y_1 = P_1\cdot e^{\lambda 1\cdot x}$, $Y_2 = P_2\cdot e^{\lambda 2\cdot x}$ yechimlar ham o‘zaro qo‘shma kompleks bo‘ladi. Haqiqiy yechimlarni olish uchun Y_1 va Y_2 larning chiziqli kombinatsiyasini quyidagi ko‘rinishda

$$Y_{10} = Y_1 + Y_2, \qquad Y_{20} = (l/2i)(Y_1 - Y_2)$$

quramiz.

Misol. Sistemani yeching.

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = 4y_1 + 2y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -3y_1 + 3y_2 \end{cases}$$

Ushbu sistema uchun

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

A matritsaning xos qiymatlari $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$ va ularga tegishli xos $P_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vektorlar qurilgan (I - qism, §17 ga qarang).

Xususiy yechimlar $Y_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^x$, $Y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{6x}$

Matritsa ko‘rinishda umumiy yechim $Y = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot e^x + C_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{6x}$

ko‘rinishda yozilib, undan esa

$y_1(x) = -2C_1\cdot e^x + C_2\cdot e^{6x}$, $y_2(x) = 3C_1\cdot e^x + C_2\cdot e^{6x}$ umumiy yechimlar olinadi.

O’z-o‘zini iekshirish uchun savollar

1.Ikkinchi tartibli, o‘zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglama deb, qanday ko‘rinishdagi tenglamaga aytiladi?

2.Bir jinsli tenglamaning farqli jihati nimadan iborat?

3.Chiziqli - bogliq, chiziqli erkli funksiyalarni ta’riflang.

4.Ikki funksiya uchun Bronskiy aniqlovchisini yozing va uni nimani aniqlashda qo‘llash mumkin?

5.Chiziqli bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi tuzilishi haqidagi teorema shartlari nimadan iborat?

6.Fundamental yechimlar sistemasi deganda nima tushuniladi?

7.Chiziqli, bir jinsli differensial tenglama umumiy yechimi uning fundamental yechimlari orqali yozilishi mumkinmi?

8.Bir jinsli chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimi qurishning qanday sodda usuli mavjud?

9.Xarakteristik tenglama qanday tuziladi?

10.Umumiy yechim turli hollarda qanday quriladi?

11.Bir jinslimas chiziqli differensial tenglama umumiy yechimi qanday qurilishi mumkin?

12.Bir jinslimas chiziqli differensial tenglama xususiy yechimi qanday quriladi?

13.Qanday sistemaga differensial tenglamalar sistemasi deyiladi?

14.Yuqori tartibli differensial tenglamani, birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasiga keltirish mumkinmi? Misolda tushuntiring.

15.Birinchi tartibli chiziqli differensial sistemasini yuqori tartibli tenglamaga keltirib, so‘ngra yechish mumkinmi[7]

16.Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar sistemasini matritsa ko‘rinishda yozish mumkinmi?

17.O’zgarmas koeffitsiyentli birinchi tartibli differensial tenglamalarning chiziqli sistemasi umumiy yechimini qurish jarayonini gapirib bering?

Tayanch so‘z va iboralar

1.O’zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensial tenglama.

2.Chiziqli-erkli va chiziqli-bog‘liq fiinksiyalar.

3.Funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi.

4.Bronskiy aniqlovchisi.

5.Bir jinsli chiziqli differensial tenglama fundamental yechimlari sistemasi.

6.Xarakteristik tenglama.

7.Umumiy va xususiy yechim. ,

8.Differensial tenglamalar sistemasi va uning yechimi.

9.Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi.

10.Diffeentsial tenglamalar sistemasini yozishning matritsa shakli.

11.O’zgarmas koeffitsiyentli differensial tenglamalar chiziqli sistemasi va uning umumiy yechimi.

Mustaqil ishlash uchun misollar

1. Quyidagi bir jinsli tenglamalarning umumiy yechimini toping:

a) $y'' - y' - 2y = 0$ b) $y'' - 4y = 0$

c) $y'' - 9y' = 0$ d) $3y'' + 2y' - 8y = 0$

e) $y'' - 2y' + y = 0$ f) $4y'' - 20y' + 25y = 0$

g) $y'' - 4y' + 13y = 0$ h) $4y'' + 2y' + y = 0$

2. Quyidagi bir jinslimas tenglamalarning xususiy yechimlaridan birinchi va umumiy yechimini toping:

a) $y'' + 2y' - 3 = 1$ b) $y'' + y = 2x^2 - x + 2$

c) $y'' - 2y' + y = e^{-2x}$ d) $y'' - 3y' + 2y = (-4x + 3) - e^x$

3. Tenglamalarning boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimlarini toping:

a) $y''- 4y' + 3y = 0;$ $y|_{x=0} = 6,$ $y'|_{x=0} = 10$

b) $4y'' + 4y'-y = 0;$ $y|_{x=0} = 2,$ $y'|_{x=0} = 0$

c) $y'' - y'= (-2x +2);$ $y|_{x=0} = 1,$ $y'|_{x=0} = 1$

d) $y'' - 2y' = (x^2 + x - 3)-e^x;$ $y|_{x=0} = 2,$ $y'|_{x=0} = 2$

4. Sistemalarni yeching.

a) $\begin{cases} dy_1/dx = y_1 + y_2 \\ dy_2/dx = y_1 - y_2 \end{cases}$ (Bir tenglamaga keltirish usulida).

b) $\begin{cases} dy_1/dx = 3y_1 + y_2 \\ dy_2/dx = 2y_1 + 2y_2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} dy_1/dx = -5y_1 + 8y_2 \\ dy_2/dx = 6y_1 + 3y_2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} dy_1/dx = 5y_1 + y_2 \\ dy_2/dx = -2y_1 + 2y_2 \end{cases}$

35-§. Sonli qatorlar

1. Sonli qator tushunchasi

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

ifodaga **sonli qator** deyiladi. Bu yerda a_1, a_2, ... , a_n, ... haqiqiy sonlar bo‘lib, qatorning hadlari, a_n – had qatorning n - hadi yoki **umumiy hadi** deb ataladi. Har bir (1) sonli qator uchun

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, \quad n = 1, 2, 3, ...$$

qismiy yig‘indilar S_n qurish mumkin.

Misol. Ushbu

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

sonli qator uchun qismiy yig‘indilar:

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2};\quad S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3};\ \ldots,$$

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1};$$

bo‘ladi.

Agar (1) qatorning qismiy yig‘indilari ketma-ketligi chekli limit S ga ega bo‘lsa, bu songa qatorning yig‘indisi deb ataladi:

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n \qquad (2)$$

Agar (2) chekli limitga ega bo‘lsa, qator yaqinlashuvchi, S - uning yig‘indisi deyiladi.

Misol. Yuqorida keltirilgan misol uchun:

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$$

Demak, berilgan sonli qator chekli limitga ega ekan. Qator yaqinlashuvchi.

Agar $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$ bo‘lsa yoki mavjud bo‘lmasa, qator uzoqlashuvchi deb ataladi.

$r_n = S - S_n$ songa qatorning qoldig‘i deyiladi. Yaqinlashuvchi sonli qator uchun $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$ bo‘ladi va demak yetarlicha katta n lar uchun $S\approx S_n$ o‘rinli bo‘ladi.

Misollar:

1) Ushbu geometrik progressiyaning hadlaridan tuzilgan $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_1q^{n-1}$ $(b_1\neq 0)$ sonli qator $|q|<1$ bo‘lsa yaqinlashuvchi, yig‘indisi $S=\frac{b_1}{1-q}$ bo‘ladi, $|q|\geq 1$ bo‘lsa, uzoqlashuvchidir;

2) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ sonli qator garmonik qator deyiladi va u uzoqlashuvchi qatordir.

3) Umumlashgan garmonik qator deb,

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

sonli qatorga aytiladi va bu sonli qator $p\leq 1$ da uzoqlashuvchi, $p>1$ da yaqinlashuvchidir.

2. Yaqinlashuvchi sonli qatorlarning asosiy xossalari

Yaqinlashuvchi sonli qatorlarning quyidagi asosiy xossalarini keltiramiz:

1^0. Agar qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda istalgan chekli sonlardagi hadlarni tashlab yuborish yoki unga chekli sondagi hadlarni qo‘shish natijasida hosil bo‘lgan qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

2^0. Yaqinlashuvchi sonli qatorning har bir hadi, bir xil λ soniga ko‘paytirilsa, u holda yig‘indi λ soniga ko‘paytiriladi; ya’ni

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lambda \cdot S$$

3^0. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ qatorlar yaqinlashuvchi bo‘lib, yig‘indilari mos ravishda A va B ga teng bo‘lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ sonli yig‘indisi ham yaqinlashuvchi bo‘lib, yig‘indisi A $\pm$ B ga teng.

4^0. (Yaqinlashuvchanlikning zaruriy alomati)

Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, uning umumiy hadi uchun $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ shart bajariladi. Lekin bu alomat yetarli alomat bo‘la olmaydi.

Agar $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ bo‘lsa, u holda berilgan sonli qator uzoqla-shuvchi bo‘ladi.

Misollar.

1) ushbu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5n+3}$ sonli qator uzoqlashuvchidir, chunki

$$S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{5n+3} = \frac{2}{5} \neq 0$$

2) quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + \ldots$$

sonli qator uzoqlashuvchi qator bo‘ladi, chunki

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$$

mavjud emas.

3. Musbat hadli sonli qatorlar yaqinlashishining alomatlari

Musbat hadli sonli qatorlar uchun quyidagi yaqinlashish va uzoqlashish alomatlarini keltiramiz.

1) Taqqoslash alomati. Musbat hadli ikkita

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3}$$

$$b_1 + b_2 + ... + b_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{4}$$

sonli qator uchun, biror N nomerdan boshlab $a_n \le b_n$ tengsizlik bajarilsa, u holda:

a) (4) qatorning yaqinlashishidan (3) qatorning ham yaqinlashishi;

(3) qatorning uzoqlashishidan (4) qatorning ham uzoqlashishi kelib chiqadi.

b) (3) va (4) sonli qatorlarning umumiy hadlari uchun $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ mavjud va $0 < k < +\infty$ bo‘lsa, u holda (3) va (4) sonli qatorlar bir vaqtda yoki yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Misol. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7}{5n}$ qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Berilgan qatorni uzoqlashuvchi garmonik qator $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ bilan taqqoslaymiz. Buning uchun $k = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{7}{5n}}{\frac{1}{n}} = \frac{7}{5}$ va $k \in (0;+\infty)$ ekanligini topamiz. Bundan berilgan qator uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.

2) Koshi alomati. Agar musbat hadli (3) qator uchun $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$ mavjud bo‘lsa, bu qator $k < 1$ bo‘lganda yaqinlashadi, $k > 1$ da esa uzoqlashadi, $k = 1$ da qatorning yaqinlashish masalasi ochiq qoladi.

Misol. Ushbu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n}$ sonli qatorni Koshi alomati yordamida yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Koshi alomatiga ko‘ra,

$$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$$

Demak, $k < 1$ bo‘lgani uchun berilgan qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

3) Dalamber alomati. Agar musbat hadli (3) qator uchun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d$$

mavjud bo‘lsa, u holda bu qator: $d < 1$ da yaqinlashadi, $d > 1$ da uzoqlashadi va d = 1 da qatorning yaqinlashish masalasi ochiq qoladi.

Misol. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}$ sonli qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. Dalamber alomatiga ko‘ra,

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{3^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n+1}=0<1$$

bo‘lgani uchun berilgan sonli qator yaqinlashuvchi bo‘ladi.

4) Koshining integral alomati. Agar (3) sonli qatorning hadlari musbat va o‘smaydigan bo‘lib, $x\geq 1$ bo‘lganda aniqlangan, uzluksiz, musbat va o‘smaydigan funksiya uchun $a_n=f(n),\ n=1,2,\ldots$ tengliklar o‘rinli bo‘lsa, u holda

$$\int_1^{\infty}f(x)dx$$

1- tur xosmas integral yaqinlashsa, berilgan qator ham yaqinlashadi, xosmas integral uzoqlashsa, sonli qator ham uzoqlashadi.

Umumlashgan garmonik qator ushbu alomat yordamida tekshiriladi.

Misol. Ushbu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ sonli qatorni yaqinlashishga tekshiring.

Yechish. $\frac{1}{1+1^2}+\frac{1}{1+2^2}+\ldots+\frac{1}{1+n^2}+\ldots$ sonli qator yaqinlashuvchi bo‘ladi, chunki $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ funksiya $x\geq 1$ bo‘lganda musbat, uzluksiz va o‘smaydi hamda uning uchun quyidagi 1- tur xosmas integral

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg}b-\frac{\pi}{4})=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

bo‘ladi.

4. Sonli qatorlarning absolut va shartli yaqinlashishi

O’zgaruvchi ishorali sonli qator

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \qquad (5)$$

berilgan bo‘lsin. (5) sonli qator hadlarining absolut qiymatlaridan yangi sonli qator

$$|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots \qquad (6)$$

tuzamiz.

Agar (6) qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda (5) sonli qator absolut

yaqinlashuvchi qator deyiladi.

Agar (6) qator uzoqlashuvchi bo‘lib, (5) qatorning o‘zi yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda (5) sonli qator **shartli yaqinlashuvchi qator** deyiladi. Absolut yaqinlashuvchi sonli qator hamma vaqt yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Ushbu

$$c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots (-1)^{n-1}c_n + \ldots \qquad (7)$$

sonli qatorga **ishoralari almashinuvi qator** deb ataladi. Bunday qatorlarni tekshirish uchun Leybnis teoremasidan foydalaniladi.

Leybnis teoremasi. Agar ishoralari almashinuvchi (7) qatorning hadlari uchun:

1. $c_1 > c_2 > c_3 > \ldots$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$

o‘rinli bo‘lsa, berilgan sonli qator yaqinlashuvchi bo‘ladi va uning yig‘indisi musbat bo‘lib, birinchi haddan katta bo‘lmaydi.

Ishorasi almashinuvchi qator qoldigi $|r_n| \le c_{n-1}$ tengsizlik bilan baholanadi.

Misol. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots$$

sonli qatorning yaqinlashuvchanligini tekshiring.

Yechish. Leybnis teoremasi shartlarining yuqorida berilgan ishorasi almashinuvchi qator uchun bajarilishini ko‘ramiz, ya’ni

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{n} > \ldots..$$

va

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

Demak, qator yaqinlashuvchi bo‘lar ekan. Absolut va shartli yaqinlashuvchi qatorlarning xossalari:

1. Absolut yaqinlashuvchi qatorda o‘rinlarini almashtirishdan tuzilgan yangi qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va yig‘indisi berilgan qator yig‘indisi bilan bir xil bo‘ladi.

2. Shartli yaqinlashuvchi qatorda, b soni ixtiyoriy son bo‘lishdan qat’i nazar, hadlar o‘rnini shunday almashtirish mumkinki, natijada olingan yangi sonli qator yig‘indisi b ga teng bo‘ladi.

3. Shartli yaqinlashuvchi sonli qatorda hadlar o‘rnini shunday almashtirish mumkinki, natijada uzoqlashuvchi yangi qator olinadi.

O’z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Sonli qator deb nimaga aytiladi? Misollar keltiring.
2. Sonli qatorning qismiy yig‘indisi nimadan iborat?
3. Yaqinlashuvchi sonli qator uchun qanday shart bajarilishi kerak?
4. Garmonik qator nima?
5. Yaqinlashuvchi sonli qatorning asosiy xossalarini bayon qiling.
6. Musbat hadli sonli qator deb nimaga aytiladi?
7. Musbat hadli sonli qatorning yaqinlashuvchanligini tekshirishning taqqoslash alomatini bayon qiling.
8. Musbat hadli sonli qator uchun Koshi alomatini bayon qiling.
9. Musbat hadli sonli qator uchun Dalamber alomatini aytib bering.
10. Koshining integral alomati nimadan iborat?
11. O’zgaruvchi ishorali sonli qator deb qanday sonli qatorga aytiladi?
12. Leybnis teoremasi ifodalang.
13. Absolut yaqinlashuvchi qator deb nimaga aytiladi?
14. Shartli yaqinlashuvchi qator nimadan iborat.
15. Absolut va shartli yaqinlashuvchi qatorlarning xossalarini bayon qiling.

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Sonli qator.
2. Qismiy yig‘indi.
3. Qator qoldig‘i.
4. Garmonik qator.
5. Yaqinlashuvchi qator.
6. Uzoqlashuvchi qator.
7. Musbat hadli sonli qator.
8. O’zgaruvchi ishorali sonli qator.
9. Absolut yaqinlashuvchi sonli qator.
10. Shartli yaqinlashuvchi sonli qator.
11. Taqqoslash alomati.
12. Koshi alomati.
13. Dalamber alomati.
14. Koshining integral alomati.

Mustaqil ishlash uchun misollar

35.1. Sonli qatorning umumiy hadi $u_n = \frac{n}{10^n + 1}$ berilgan. Dastlabki beshta hadini yozing.

35.2. Quyidagi sonli qatorning umumiy hadini yozing.

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \frac{7}{2^4} + \dots$;

b) $\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^4 + \dots$;

c) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots$;

d) $\mathrm{arctg}\frac{1}{2} + \mathrm{arctg}\frac{1}{8} + \dots$.

35.3. Taqqoslash alomatini qo‘llab, berilgan sonli qatorlarning yaqinlashuvchanligini tekshiring.

a) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} + \dots$;

b) $1 + \frac{1+2}{1+2^2} + \dots + \frac{1+n}{1+n^2} + \dots$.

35.4. Quyidagi sonli qatorlar yaqinlashuvchanligini Koshi alomati yordamida tekshiring.

a) $\frac{1}{3} + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n + \dots$;

b) $\arcsin 1 + \arcsin^2 \frac{1}{2} + \dots + \arcsin^n \frac{1}{n} + \dots$;

c) $\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \dots + \frac{1}{\ln^n (n+1)} + \dots$.

35.5. Sonli qatorlar yaqinlashuvchanligini Dalamber alomati yordamida tekshiring.

a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots$;

b) $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}+\ldots$;

c) $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$.

35.6. Koshining integral alomati yordamida quyidagi sonli qatorlar yaqinlashishini tekshiring.

a) $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots$;

b) $\left(\frac{1+1}{1+1^2}\right)^2+\left(\frac{1+2}{1+2^2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2+\ldots$.

36-§. Funktsional qatorlar

1. Funktsional qatorlar haqida tushuncha. Yaqinlashuvchi funksional qatorlar

Ushbu

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x) \qquad (1)$$

ifodaga **funktsional qator** deb ataladi. Bu yerda $f_1(x), f_2(x),\ldots, f_n(x),\ldots$ D to‘plamda aniqlangan funksiyalar. x ning (1) qator yaqinlashuvchi bo‘ladigan barcha qiymatlar to‘plamami Ω ($\Omega\subseteq D$) funtsional qatorning **yaqinlashish sohasi** deb ataladi.

$S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ yig‘indi funktsional qatorning **n-qismiy yig‘indisi** deb ataladi. Agar

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x), \quad x\in\Omega,$$

bo‘lsa, S(x) (1) qator yig‘indisi, $R_n(x)$ = S(x) - $S_n(x)$ ayirma esa **qator qoldig‘i** deyiladi.

Agar S(x), $x\in L$, ($L\subseteq\Omega$) funksiya (1) qatorning yig‘indisi bo‘lsa, u holda (1) funtsional qator L to‘plamda S(x) funksiyaga yaqinlashadi deyiladi.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ soni uchun shunday N nomer topilsaki, $n\geq N$ bo‘lganda barcha $x\in L$ uchun

$$|R_n(x)|<\varepsilon$$

bajarilsa, (1) funktsional qator L to‘plamda S(x) funksiyaga tekis yaqinlashadi deyiladi.

Agar funktsional qator L to‘plamda yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda qator bu to‘plamda tekis yaqinlashuvchi bo‘lishi shart emas, ammo L to‘plamning biror bir to‘plam ostida yaqinlashishi tekis bo‘lishi mumkin.

Funktsional qatorning tekis yaqinlashuvchi bo‘lishining Veyershtrass alomati.

Agar (1) funktsional qator uchun hadlari musbat shunday yaqinlashuvchi $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ qator mavjud bo‘lib, L to‘plamda

$$|f_n(x)| \le c_n$$

bo‘lsa, u holda funktsional kator L to‘plamda tekis yaqinlashadi.

Misol. Ushbu

$$\frac{\sin x}{1^2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots$$

funktsional qator $L = (-\infty; +\infty)$ to‘plamda tekis yaqinlashadi, chunki $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ va $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ yaqinlashuvchidir.

2. Funktsional qator yig‘indisining funktsional xossalari

Funktsional qator yig‘indisining quyidagi funktsional xossalarini keltiramiz:

1) Agar $f_n(x)$ funksiyalar [a,b] da uzluksiz bo‘lib, bu funksiyalardan tuzilgan ushbu

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$$

funktsional qator bu oraliqda $f(x)$ funksiyaga tekis yaqinlashsa:

a) $f(x)$ funksiya [a,b] oraliqda uzluksiz;

b) [a,b] oraliqda funktsional qatorni hadma-had integrallash mumkin bo‘ladi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx + \ldots + \int_a^b f_n(x)dx + \ldots$$

Misol. Ushbu

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots$$

funktsional qator $[0, \frac{1}{2}]$ oraliqda $\frac{1}{1-x}$ funksiyaga tekis yaqinlashadi. Demak,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} 1 \cdot dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x dx + \ldots + \int_0^{\frac{1}{2}} x^{n-1} dx + \ldots = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1-x}$$

yoki

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 \cdot 2} + \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2^n \cdot n} + \ldots = \ln 2$$

2) Agar $f_n(x)$ funksiyalar [a,b] oraliqda uzluksiz hosilalarga ega va bu oraliqda:

a) ushbu

$$f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$$

funktsional qator $f(x)$ funksiyaga yaqinlashsa;

b) ushbu

$$f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots+f_n'(x)+\ldots$$

funktsional qator tekis yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda [a,b] intervalda $f(x)$ funksiya uzluksiz hosilaga ega bo‘ladi:

$$f'(x)=f_1'(x)+f_2'(x)+\ldots+f_n'(x)+\ldots$$

3. Darajali qatorlar

Ushbu

$$a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+\ldots+a_n(x-c)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n \qquad (2)$$

ko‘rinishdagi funktsional qator markazi c nuqtada bo‘lgan **darajali qator** deyiladi.

Bu yerda $a_0, a_1, ..., a_n, ...$ va c – o‘zgarmas sonlar bo‘lib, darajali qatorning koeffitsientlari va markazi deyiladi.

Quyidagi uchta hol bo‘lishi mumkin:

1) (2) darajali qator faqat x = c da yaqinlashadi. Bunday qatorni barcha nuqtalarda uzoqlashuvchi deyiladi.

2) (2) darajali qator x ning har bir qiymatida yaqinlashadi. Bunday qatorni barcha nuqtalarda yaqinlashuvchi deyiladi va u absolut yaqinlashadi.

3) Shunday R > 0 soni mavjudki, (2) qator $|x-c|<R$ da absolut yaqinlashuvchi va $|x-c|>R$ da esa uzoqlashuvchi bo‘ladi. R qatorning **yaqinlashish radiusi** deyiladi. R = 0 barcha nuqtalarda uzoqlashuvchi va R = ∞ barcha nuqtalarda yaqinlashuvchi qatorning yaqinlashish radiusini ifodalaydi. R > 0 da (c - R, c + R) intervalni (2) qatorning yaqinlashish intervali deyiladi. Shuning bilan birga intervalning chetki nuqtalarida darajali qator yaqinlashuvchi ham uzoqlashuvchi ham bo‘lishi mumkin.

Misol. Quyidagi

$$\frac{x^1}{1\cdot 3^1}+\frac{x^2}{2\cdot 3^2}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot 3^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$$

darajali qatorning yaqinlashish sohasini toping.

Yechish. Dalamber alomatiga ko‘ra tekshiramiz:

$$|u_{n+1}(x)| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}\right|, \quad |u_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n\cdot 3^n}\right|$$

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{|x|^n}{n\cdot 3^n}} = \frac{|x|}{3}\cdot \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x|}{3}$$

d < 1 bo‘lganda qator yaqinlashadi :

$\frac{|x|}{3} < 1,\ |x| < 3\ ,\ x \in (-3;3)$ va demak R = 3.

Qator yaqinlashishini intervalning chetki nuqtalarida tekshiramiz:

1) x = - 3 bo‘lganda qator

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n} + \ldots$$

yaqinlashuvchi sonli qatorga aylanadi. Aniqrog‘i shartli yaqinlashadi.

2) x = 3 da

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

uzoqlashadi. Demak, yaqinlashish sohasi [-3;3) ni tashkil etadi.

Darajali qator quyidagi xossalarga ega:

1^0. Agar darajali qator oraliqning barcha nuqtalarida uzoqlashuvchi bo‘lmasa, u holda uning yig‘indisi $f(x)$ yaqinlashish sohasining har bir nuqtasida uzluksiz bo‘ladi.

2^0. Agar $x \in \Omega$ da

$$a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \ldots + a_n(x-c)^n + \ldots = f(x),$$

bo‘lsa, darajali qatorni yaqinlashish sohasining ichki nuqtalarida hadma-had integrallash mumkin:

$$a_0(x-c) + a_1\frac{(x-c)^2}{2} + \ldots + a_n\frac{(x-c)^{n+1}}{n+1} + \ldots = \int_c^x f(x)dx$$

3^0. Agar $x \in (c - R, c + R)$, R > 0 da

$$a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \ldots + a_n(x - c)^n + \ldots = f(x),$$

bo‘lsa, darajali qatorni yaqinlashish sohasining ichki nuqtalarida hadma-had differensiallash mumkin, ya’ni

$$a_1 + 2a_2(x-c) + \ldots + na_n(x-c)^{n-1} + \ldots = f'(x),\ x \in (c - R\ ,\ c + R)$$

4^0. Agar ushbu

$$a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \ldots + a_n(x - c)^n + \ldots$$

darajali qator oraliqning barcha nuqtalarida uzoqlashuvchi bo‘lmasa, u holda buning yig‘indisi $f(x)$ yaqinlashish sohasining ichki nuqtalarida barcha yuqori tartibli hosilalarga ega bo‘ladi. Shu bilan birga:

$$a_0 = f(c),\quad a_1 = f'(c),\quad a_2 = \frac{f''(c)}{2!},\ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!},\ \ldots$$

bo‘ladi.

4. Funktsiyani darajali qatorga yoyish.

Agar $f(x)$ funksiya $x = c$ da barcha yuqori tartibli hosilalarga ega bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya uchun

$$f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \ldots \qquad (3)$$

darajali qator **Teylor qatori** deb ataladi. $c = 0$ bo‘lgan holda (3) qatorni **Makloren qatori** deb ataladi.

(3) darajali qator $f(x)$ funksiyaga yaqinlashishining zaruriy va yetarli sharti bo‘lib,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

xizmat qiladi. Bu yerda

$$R_n(x) = \frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}[c + \theta(x-c)], \quad 0 < \theta < 1$$

Ba’zi funksiyalarni darajali qatorga yoyish jadvali.

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty$

2. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad -\infty < x < +\infty$

4. $\mathrm{arctg} x = x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad |x| \le 1$

5. $ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \quad -1 < x \le 1$

6. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \quad |x| < 1$

O’z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Funktsional qator deb nimaga aytiladi?
2. Funktsional qatorning yaqinlashish sohasi nimadan iborat?
3. Funktsional qatorning qismiy yig‘indisi nimadan iborat?
4. Funktsional qator qoldig‘i deb nimaga aytiladi?
5. Funktsional qatorning tekis yaqinlashuvchi bo‘lishining Veyershtrass alomatini bayon qiling.
6. Funktsional qator xossalarini ta’riflang.
7. Darajali qator deb qanday qatorga aytiladi?
8. Darajali qatorning xossalarini ifodalang.
9. Teylor qatori nimadan iborat?
10. Makloren qatori-chi?
11. Ba’zi funksiyalarning darajali qatorga yoyish formulasini yozib be ring.

Ma’ruzaning tayanch iboralari

1. Funktsional qator.
2. Yaqinlashish sohasi.
3. Qismiy yig‘indi.
4. Qator qoldig‘i.
5. Tekis yaqinlashish.
6. Veyershtrass alomati.
7. Darajali qator.
8. Teylor qatori.
9. Makloren qatori.

Mustaqil ishlash uchun misollar

36.1. Quyidagi funktsional qatorlarning yaqinlashish sohasini toping.

a) $1+e^{-x}+e^{-2x}+\ldots+e^{-(n-1)x}+\ldots;$

b) $1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}+\ldots+\frac{1}{n^x}+\ldots;$

c) $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{2^2(x^2+1)^2}+\frac{1}{3^2(x^2+1)^3}+\ldots+\frac{1}{n^2(x^2+1)^n}+\ldots;$

d) $x\operatorname{tg}\frac{x}{2}+x^2\operatorname{tg}\frac{x}{2^2}+\ldots+x^n\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}+\ldots;$

e) $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x^2}+...+\frac{1}{1+x^n}+...$.

36.2. Darajali qatorlarning yaqinlashish sohasini toping

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(2n-1)!}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-3)^n}{2n-1}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5x^{2n}}{2n+1}$; d) $\sum_{n=1}^{\infty}(nx)^n$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$; f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}$.

36.2. Quyidagi funksiyalarni

a) $f(x)=\sin^2 x$; b) $y=e^{-x^2}$;

c) $f(x)=3^x$; d) $f(x)=ln(x+a),\ \ a>0$.

x ning darajalari bo‘yicha yoying.

36.3. $y=ln x$ funksiyani x = 1 nuqta atrofida Teylor qatoriga yoying.

36.4. $y=\frac{1}{x}$ funksiyani x = 3 nuqta atrofida Teylor qatoriga yoying.

36.5. Quyidagi funksiyalarni Makloren qatoriga yoying.

a) $y=ln(1+e^x)$; b) $y=e^{\cos x}$;

c) $y=-ln\cos x$; d) $y=x^2e^x$.

МУНДАРИЖА

M. KARIMOV, R.ABDIKARIMOV

Oliy matematika

(O‘quv qo‘llanma)

Муҳаррир Ш. Худойбердиева

Саҳифаловчи Д. Тошходжаева

Босишга рухсат этилди 22.02.2008. Қоғоз бичими 60х84 $^{1}\!/_{16}$.
Ҳисоб-нашр табоғи   Адади   Буюртма №

“IQTISOD-MOLIYA” нашриёти
100084, Тошкент, Кичик ҳалқа йўли кўчаси, 7-уй

Тошкент Молия институти босмахонасида ризография усулида чоп этилди.
100084, Тошкент, Кичик ҳалқа йўли кўчаси, 7-уй