Е.З. РАБИНОВИЧ

ГИДРАВЛИКА

Е. З. РАБИНОВИЧ

ГИДРАВЛИКА

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
нефтяных специальностей вузов

5

МОСКВА «НЕДРА» 1980

УДК 532.5(075)

Рабинович Е. З. Гидравлика: Учебное пособие для вузов.— М.: Недра, 1980.— 278 с.

В учебном пособии рассматриваются основные вопросы общего курса гидравлики: физические свойства жидкостей, гидростатика, общие законы и уравнения гидродинамики, гидравлические сопротивления, истечение жидкости через отверстия, движение жидкости в напорных трубопроводах, безнапорное движение. Излагаются отдельные задачи гидравлики неньютоновских жидкостей, теории подобия и моделирования.

Основные положения иллюстрируются примерами из различных областей нефтяной техники.

Учебное пособие предназначено для студентов нефтяных специальностей высших учебных заведений. Его содержание соответствует утвержденным программам. Книга может быть использована также инженерно-техническими работниками предприятий нефтяной промышленности.

Табл. 24, ил. 192, список лит.— 19 назв.

Рецензенты: 1) кафедра Московского инженерно-строительного института;
2) проф. *Некрасов Б. Б.* (Московский автомеханический институт)

Р $\frac{30805-492}{043(01)-80}$ 131—80 3608000000

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является учебным пособием по курсу общей гидравлики для нефтяных специальностей высших учебных заведений, и ее содержание соответствует действующим в настоящее время учебным программам.

Вслед за общим курсом гидравлики учебными планами большинства нефтяных специальностей предусмотрено изучение ряда специальных «гидравлических» дисциплин, таких, например, как подземная гидравлика, гидроаэромеханика в бурении и др. Во многих профилирующих технологических дисциплинах имеются разделы, посвященные исследованию отдельных гидравлических процессов и явлений.

В связи с этим, а также учитывая сравнительно небольшой объем книги, автор полагал излишним перегружать ее материалами, не имеющими прямого, непосредственного отношения к кругу вопросов, предусмотренных программами для изучения в общем курсе гидравлики. Однако автор считал нужным дать в книге самые общие понятия по таким существенно важным вопросам, как гидравлические расчеты магистральных нефтепроводов, газопроводов, безнапорных трубопроводов, открытых каналов. Автор нашел необходимым также более подробно, чем это предусмотрено программами, рассмотреть основы гидравлики неньютоновских жидкостей и теории подобия и моделирования, получившие в последнее время весьма широкое развитие в науке.

Значительное внимание при изложении материала книги уделено раскрытию физической сущности изучаемых гидравлических явлений и иллюстрации их примерами из различных областей нефтяной техники.

В книге помещен основной справочный материал, необходимый для выполнения инженерных расчетов. Поэтому автор полагает, что она окажется полезной и для инженерно-технических работников нефтяной промышленности. Они смогут пользоваться ею в своей повседневной практической деятельности.

Автор выражает искреннюю благодарность основному рецензенту книги проф., д-ру техн. наук Б. Б. Некрасову за большую работу, проделанную им при просмотре рукописи, а также проф., д-ру техн. наук А. Д. Альтшулю и проф., д-ру техн. наук В. А. Архангельскому, сделавшим ряд ценных указаний.

Автор будет признателен всем приславшим свои замечания по книге. Письма с пожеланиями и замечаниями следует направлять по адресу: 103633, Москва, К-12, Третьяковский пр., 1/19, издательство «Недра».

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ВВЕДЕНИЕ В ГИДРАВЛИКУ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И КРАТКАЯ ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ГИДРАВЛИКИ

Гидравликой называют прикладную науку о законах движения и равновесия жидкостей и о способах применения этих законов к решению конкретных технических задач. Практическое значение гидравлики весьма велико, так как она является основой ряда специальных дисциплин.

Знание законов гидравлики совершенно необходимо для специалистов-нефтяников, поскольку все основные производственные процессы в нефтяной промышленности в той или иной форме связаны с использованием и перемещением жидкостей (нефть, нефтепродукты, химические реагенты, вода, глинистый раствор) по различным гидравлическим системам.

Человек с первых шагов своего исторического развития практически занимался решением различных вопросов гидравлики. Так, археологические исследования показывают, что еще за пять тысячелетий до нашей эры в ряде стран древнего мира уже существовали оросительные каналы и были известны простейшие устройства для подъема воды. Во многих местах сохранились остатки водонапорных и гидротехнических сооружений (водоводы, плотины, акведуки). Однако никаких сведений о гидравлических расчетах этих сооружений не имеется, и, надо полагать, все они были построены на основании чисто практических навыков и правил.

Первые свидетельства о научном подходе к решению гидравлических задач относятся к 250 году до нашей эры, когда Архимедом был открыт закон о равновесии тела, погруженного в жидкость.

В дальнейшем, однако, на протяжении более чем полутора тысячелетий гидравлика не получила сколько-нибудь заметного развития. В эту эпоху, характеризовавшуюся общим застоем в науке и культуре, были преданы забвению не только первые элементы знания, но и в значительной степени практические навыки инженерного искусства. И только в XVI—XVII вв., в эпоху Возрождения, когда появились работы Стевина, Леонардо да Винчи, Галилея, Паскаля, Ньютона, касающиеся, в частности, весьма важных гидравлических явлений, получила дальнейшее развитие гидравлика как наука.

Изучением покоя и движения жидкостей занималась также теоретическая гидромеханика, развивавшаяся как самостоятельный раздел теоретической механики.

В XVII—XVIII вв. крупнейшими учеными-математиками и механиками (Эйлер, Бернулли, Лагранж) — были установлены основные законы и получены исходные уравнения гидромеханики. Исследования этих ученых носили главным образом теоретический характер и, включая ряд допущений в отношении физических свойств жидкости, давали скорее качественную, нежели количественную оценку явлений, значительно расходясь иногда с данными опыта, который до недавнего времени не играл в гидромеханике значительной роли. Естественно, гидромеханика не могла удовлетворить многочисленные запросы практики, особенно возросшие в XIX в. в связи с бурным ростом техники, требовавшей немедленного, конкретного решения различных чисто инженерных задач. Это и явилось причиной развития особой прикладной науки, называемой гидравликой. В развитии гидравлики большую роль сыграли труды Шези, Дарси, Буссинеска, Вейсбаха, Н. Е. Жуковского и многих других ученых и инженеров.

В отличие от гидромеханики в гидравлике выводы строились на основе упрощенных схем различных явлений и в теоретические уравнения вводились эмпирические коэффициенты, получаемые в результате обработки опытных данных (опыт в гидравлике имеет весьма большое значение). Так, при исследовании движения потока жидкости в гидравлике обычно ограничиваются определением средних скоростей движения и средних давлений в потоке, в то время как в гидромеханике в большинстве случаев рассматривают изменение этих величин в потоке при переходе от одной точки к другой.

В течение долгого времени гидравлика и гидромеханика развивались обособленно. И если вначале методы исследования, применяемые в гидравлике и гидромеханике, отличались довольно четко, то с течением времени это отличие постепенно стиралось. Сближение между этими двумя направлениями в науке, наметившееся в начале XX в. в связи с работами выдающегося ученого Л. Прандтля, в значительной мере устранило существенные недостатки, свойственные как гидравлике прошлого, представлявшей собой сугубо эмпирическую науку, науку опытных формул и коэффициентов, так и классической гидромеханике, имевшей преимущественно теоретический характер.

Современная гидравлика — это наука, в которой теория и опыт взаимно обогащаются и дополняются. Гидравлика широко использует методы и результаты теоретической гидромеханики, поэтому в настоящее время различие в понятиях «гидравлика» и «гидромеханика» исчезло. По существу, это два направления одной и той же науки — «гидромеханики»: гидромеханика теоретическая и техническая (гидравлика).

Большую роль в развитии гидравлики и гидромеханики сыграли основоположники гидромеханики Даниил Бернулли и Леонард Эйлер. Они жили и работали в России и были членами Петербургской академии наук. Широко известны работы Н. П. Петрова, создавшего гидродинамическую теорию смазки, Н. Е. Жуковского, выполнившего ряд замечательных исследований в различных областях гидромеханики, А. Н. Крылова, разработавшего теорию плавания корабля, Н. Н. Павловского в области теории неравномерного движения и фильтрации жидкости.

В нефтяной гидравлике фундаментальное значение имеют исследования В. Г. Шухова по гидравлическому расчету магистральных нефтепроводов, Л. С. Лейбензона, положившего начало подземной гидромеханике, И. Г. Есьмана, И. А. Чарного, В. И. Черникина, Р. И. Шищенко, В. С. Яблонского.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Жидкими телами, или жидкостями, называют физические тела, легко изменяющие свою форму под действием самых незначительных сил. В отличие от твердых тел жидкости характеризуются весьма большой подвижностью своих частиц и поэтому обладают свойством текучести и способностью принимать форму сосуда, в которой они налиты.

Различают жидкости капельные и газообразные. Капельные — это жидкости, встречающиеся в природе и применяемые в технике: вода, нефть, бензин и т. д. Все капельные жидкости оказывают большое сопротивление изменению объема и трудно поддаются сжатию. При изменении давления и температуры их объем изменяется весьма незначительно. Газообразные жидкости (газы) изменяют свой объем под влиянием указанных факторов в значительной степени. В гидравлике обычно изучают капельные жидкости. В дальнейшем для краткости будем называть их просто жидкостями. Газообразные жидкости, их свойства и применение рассматриваются в термодинамике и аэромеханике.

Капельные жидкости практически не оказывают заметного сопротивления растягивающим усилиям. Силы сцепления, существующие между молекулами этих жидкостей, проявляются только на их поверхности в виде так называемых сил поверхностного натяжения, где и обнаруживается известная сопротивляемость жидкости разрыву. Эти объясняется, например, существование тонкой пленки мыльного пузыря, образование капли, удерживаемой от падения и т. д. Силы сопротивления разрыву у жидкости ничтожно малы. Так, для разрыва воды достаточна сила, примерно в десять миллионов раз меньшая силы, необходимой для разрыва стали (железа). Поэтому при решении

обычных задач гидравлики считают, что растягивающие усилия в жидкости отсутствуют *.

Наряду с этим следует особо подчеркнуть, что капельные жидкости оказывают существенное сопротивление сдвигающим силам, которое проявляется при движении жидкости в виде сил внутреннего трения. Правильный учет сил внутреннего трения при движении жидкости — одна из основных задач гидравлики.

В гидравлике жидкость рассматривается как совокупность материальных точек (частиц) в ограниченном объеме. Размеры этих частиц принимаются бесконечно малыми, однако они никак не сопоставимы с размерами молекул во много раз меньших, из которых в действительности состоит жидкость. Физически подобные частицы представляют собой как бы некоторую достаточно большую их совокупность. При этом предполагается, что жидкость заполняет рассматриваемый объем сплошь, без каких бы то ни было пустот и, таким образом, представляет собой сплошную среду — континуум.

Различают твердые поверхности, ограничивающие объем жидкости (например, стенки и дно сосудов, заключающих жидкость), и свободные поверхности, по которым жидкость граничит с другими жидкостями или газами (например, поверхность соприкасания жидкости с воздухом в открытом сосуде).

Силы, действующие на ограниченный объем жидкости, в гидравлике, как и в теоретической механике, принято делить на внутренние и внешние. Внутренние — это силы взаимодействия между отдельными частицами рассматриваемого объема жидкости. Внешние силы делятся на поверхностные, приложенные к поверхностям, ограничивающим объем жидкости (например, силы, действующие на свободную поверхность, силы реакции стенок и дна сосудов), и на массовые, или объемные, непрерывно распределенные по всему объему жидкости (например, силы тяжести, силы инерции).

В гидравлике как массовые, так и поверхностные силы обычно рассматривают в виде единичных сил: массовые силы относят к единице массы, а поверхностные — к единице площади. Единичная массовая сила численно равна соответствующему ускорению. Единичная поверхностная сила представляет собой напряжение этой силы и в общем случае раскладывается на составляющие: нормальное напряжение (его называют гидромеханическим давлением) и напряжение касательное.

Для облегчения и упрощения ряда теоретических выводов и исследований в гидравлике иногда используют понятие идеальной, или совершенной, жидкости, обладающей абсолютной несжимаемостью, полным отсутствием температурного расшире-

* Отметим, однако, что, как показывают новейшие работы по физике жидкостей, в некоторых особых случаях и в жидкости возможно возникновение весьма больших кратковременных растягивающих усилий (например, в тщательно отфильтрованных и дегазированных жидкостях).

ния и не оказывающей сопротивления растягивающим и сдвигающим усилиям. Конечно, идеальная жидкость — жидкость фиктивная, не существующая в действительности. Все реальные жидкости в той или иной степени характеризуются всеми перечисленными выше свойствами. Однако, как отмечено выше, сжимаемость, температурное расширение и сопротивление растяжению у реальных жидкостей ничтожно малы и обычно не учитываются. Таким образом, основной и, по существу, единственной особенностей, отличающей реальную жидкость от идеальной, является наличие у первой сил сопротивления сдвигу, определяемых особым свойством жидкости — вязкостью. Ввиду этого реальную жидкость иногда называют вязкой, а идеальную — невязкой.

Следует иметь в виду, что помимо общепринятого в гидравлике понятия идеальной жидкости в гидромеханике используют также понятие идеальной сжимаемой жидкости. Сжимаемость, однако, проявляется и становится ощутимой лишь при весьма больших скоростях движения жидкости, близких к скорости звука. Поэтому в гидравлике, имеющей дело со скоростями, значительно меньшими, фактор сжимаемости обычно не учитывают (исключение — гидравлический удар) и оперируют понятием идеальной несжимаемой жидкости, опуская слово «несжимаемая».

§ 3. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ

Состояние и поведение встречающихся в природе в применяемых в технике жидкостей находятся в непосредственной зависимости от их физических свойств. Поэтому первая задача, предшествующая изучению гидравлики,— определение физических свойств жидкостей, выявление факторов, влияюших на них, и установление единиц их измерения.

В настоящее время в СССР в качестве основной принята Международная система единиц (СИ). Основными в этой системе являются следующие единицы: длины — метр (м), времени — секунда (с), массы — килограмм (кг), термодинамической температуры — кельвин (К). В инженерной практике до сих пор известное применение находят единицы технической системы (МКГСС) и физической (СГС). Они пока используются в измерительных приборах, выпускаемых промышленностью, встречаются в изданных ранее нормативных и литературных материалах (справочниках, каталогах, монографиях).

Единицей **с и л ы** в СИ служит сила, сообщающая массе в 1 кг ускорение, равное 1 м/с^2; ее называют ньютоном (обозначают буквой Н); 1 Н = кг·м/с^2.

Применяют также укрупненные единицы: килоньютон (кН) и меганьютон (МН); 1 кН = $1 \cdot 10^3$ Н; 1 МН = $1 \cdot 10^6$ Н.

Для измерения **г и д р о м е х а н и ч е с к о г о д а в л е н и я (н а п р я ж е н и я)**, представляющего собой силу, отнесенную

к площади, принят ньютон на квадратный метр (Н/м^2). Эту единицу давления называют паскалем (Па). Укрупненные единицы $1 \cdot 10^3$ Па и $1 \cdot 10^6$ Па называют соответственно килопаскалем (кПа) и мегапаскалем (МПа).

Единица давления, равная $1 \cdot 10^5$ Н/м^2 = 10^5 Па, носит название бара (бар).

Рассмотрим основные физические свойства жидкостей, с которыми приходится иметь дело при гидравлических расчетах.

П л о т н о с т ь. Плотностью называют количество массы (m) жидкости, содержащееся в единице объема (V); ее обозначают греческой буквой ρ и определяют из отношения

$$\rho = m/V. \tag{1.1}$$

Единицей плотности является килограмм на кубический метр (кг/м^3).

Плотности обычных капельных жидкостей (за исключением ртути) близки к плотности воды (табл. 1.1) и весьма слабо изменяются с изменением давления и температуры.

Таблица 1.1

Плотность некоторых жидкостей

Жидкость	Температура t, С	Плотность ρ, кг/м^3	Жидкость	Температура t, С	Плотность ρ, кг/м^3
Вода пресная	15	999	Ацетон	20	790
Вода морская	15	1 020	Древесный спирт	0	800
Ртуть	15	13 560	Алкоголь	15	790
Касторовое масло	15	970	Глицерин безводный	0	1260
Керосин	15	790—820			
Бензин	15	680—780	Нефть	20	760—900
Бензол	0	900			

Таблица 1.2

Плотность воды при атмосферном давлении

Температура t, °С	Плотность ρ, кг/м^3	Температура t, °С	Плотность ρ, кг/м^3	Температура t, °С	Плотность ρ, кг/м^3
0	999,82	30	995,67	70	977,81
4	1000,00	40	992,24	80	971,83
10	999,73	50	988,07	90	965,34
20	998,23	60	983,24	100	958,38

С повышением температуры плотность жидкостей, как правило, уменьшается. Некоторым исключением из этого общего правила является вода при температуре от 0 до 4° С. В этом интервале температур наибольшую плотность вода имеет при 4° С (табл. 1.2).

Для определения плотности нефтепродуктов при любой температуре и атмосферном давлении применяют формулу Менделеева:

$$\rho_t = \frac{\rho_{15}}{1 + \beta_t (t^\circ - 15)}, \qquad (1.2)$$

где ρ_t, ρ_{15} — плотность нефтепродуктов при температуре соответственно t и 15° С; β_t — температурный коэффициент объемного расширения нефтепродукта (см. стр. 13).

Если жидкость неоднородна, формула (1.1) позволяет найти лишь среднее значение плотности. Чтобы определить истинное ее значение в данной точке, необходимо рассмотреть бесконечно малый объем жидкости ΔV и найти предел соответствующего отношения:

$$\rho = \lim \left| \frac{\Delta m}{\Delta V} \right|_{\Delta V \to 0}. \qquad (1.3)$$

Рис. 1.1

Иногда в гидравлике используют понятие *относительной плотности* — безразмерного числа, представляющего собой отношение плотности данной жидкости к наибольшей плотности дистиллированной воды, взятой при 4°С.

Плотность жидкости определяют различными способами. В производственных условиях плотность обычно измеряют специальным прибором, называемым ареометром (рис. 1.1). Ареометр представляет собой удлиненный пустотелый стеклянный цилиндр. Он градуирован и имеет две шкалы: ареометрическую шкалу *А*, показывающую плотность жидкости, и термометрическую шкалу *В*, показывающую температуру жидкости во время опыта. Для измерения плотности ареометр погружают в сосуд с исследуемой жидкостью. Благодаря грузу, находящемуся в нижней его части (обычно ртуть или дробь), ареометр плавает, сохраняя вертикальное положение. Деление на ареометрической шкале, до которого он погружается, показывает значение плотности (отсчет ведут по верхнему краю мениска жидкости).

Существуют ареометры, показывающие плотность в условных градусах (например, в градусах Боме). В системные единицы эти градусы могут быть пересчитаны по специальным формулам.

Плотность жидкости весьма просто определить также при помощи сообщающихся сосудов.

Газообразные жидкости по сравнению с капельными обладают значительно меньшей плотностью, которая подвержена большим изменениям в зависимости от давления и температуры.

Для совершенных (идеальных) газов, подчиняющихся законам Бойля—Мариотта и Гей-Люссака, существует следующая зависимость между давлением p, плотностью ρ и температурой t:

$$p/\rho = Rt, \qquad (1.4)$$

известная под названием уравнения состояния совершенных газов. Здесь R — удельная газовая постоянная, она равна работе расширения 1 кг газа при его нагревании на 1 К при постоянном давлении. Измеряется газовая постоянная в джоулях на килограмм и кельвин [Дж/(кг·К)].

Плотность (при $t = 0°$ С, $p = 101\,325$ Па) и газовая постоянная для некоторых газов приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Плотность и газовая постоянная некоторых газов

Газ	ρ, кг/м³	R, Дж/(кг·К)	Газ	ρ, кг/м³	R, Дж/(кг·К)
Воздух	1,293	287,0	Аргон	1,783	208,2
Кислород	1,429	259,8	Гелий	0,179	2078,0
Азот	1,251	296,8	Метан	0,717	518,8
Водород	0,090	4124,0	Этилен	1,251	296,6
Углекислота	1,977	188,9	Аммиак	0,771	488,3

Реальные газы не подчиняются уравнению состояния (1.4). Отклонения их свойств от этого уравнения возрастают с повышением давления и понижением температуры и при больших давлениях учитываются введением поправочных коэффициентов сжимаемости, устанавливаемых опытным путем.

Удельный вес. Удельным (или объемным) весом жидкости (удельной силой тяжести) γ называют вес G единицы ее объема V:

$$\gamma = G/V. \qquad (1.5)$$

Удельный вес и плотность жидкости связаны между собой весьма важной зависимостью, которую широко используют при гидравлических расчетах. Умножив обе части выражения (1.1) на g, получим:

$$\rho g = mg/V = G/V.$$

Но так как G/V есть удельный вес γ, то, очевидно,

$$\gamma = \rho g. \qquad (1.6)$$

Следует подчеркнуть, что удельный вес не является величиной постоянной (справочной), так как он зависит от ускорения силы тяжести, изменяющегося в зависимости от места измерения. Но при решении ряда гидравлических задач использование удельного веса оказывается весьма удобным и целесообразным. В таких случаях его рекомендуется определять по уравнению (1.6), умножая плотность жидкости ρ (постоянная величина) на ускорение силы тяжести g в пункте измерения.

Отметим также, что в обычных условиях изменение g незначительно, поэтому им часто пренебрегают, принимая $g = 9{,}81$ м/с^2 = const, и используют при расчетах среднее значение удельного веса, соответствующее этому ускорению.

Изменение удельного веса капельных жидкостей в зависимости от температуры тождественно изменению их плотности: с повышением температуры удельный вес уменьшается (за исключением воды, у которой наибольший удельный вес при $t = 4°$ С). Удельный вес нефтепродуктов (при атмосферном давлении) можно пересчитать на любую температуру по формуле, аналогичной (1.2).

Удельный объем. Объем жидкости V, занимаемый единицей массы m, называют удельным и обозначают v:

$$v = V/m. \tag{1.7}$$

Удельный объем есть величина, обратная плотности:

$$v = 1/\rho.$$

Следовательно, единицей его измерения является кубический метр на килограмм (м^3/кг).

Сжимаемость жидкостей характеризуется коэффициентом сжимаемости (или объемного сжатия) β_V, представляющим относительное изменение объема ΔV жидкости на единицу изменения давления Δp.

$$\beta_V = -\frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta p}. \tag{1.8}$$

Знак минус здесь означает, что положительному приращению (т. е. увеличению) давления p соответствует отрицательное приращение (уменьшение) объема V.

Коэффициент сжимаемости измеряется в квадратных метрах на ньютон (м^2/Н), т. е. обратен единице гидромеханического давления.

Таблица 1.4

Коэффициент сжимаемости некоторых жидкостей

Жидкость	$\beta_V \cdot 10^{10}$, Па$^{-1}$	Жидкость	$\beta_V \cdot 10^{10}$, Па$^{-1}$
Вода	4,75	Ртуть	0,30
Нефть	7,40	Бензин	9,20
Эфир	11,00	Глицерин	2,50

Величина, обратная коэффициенту сжимаемости ($1/\beta_V$), называется *модулем объемной упругости* жидкости и обозначается символом K. Единицей измерения модуля объемной упругости является ньютон на квадратный метр (Н/м^2). Модуль объемной упругости, как и коэффициент сжимаемости, непостоянен. Он изменяется в зависимости от давления и температуры. Средние значения коэффициента сжимаемости некоторых жидкостей при давлениях до $5000 \cdot 10^4$ Па приведены в табл. 1.4.

Значения модуля объемной упругости K для воды в зависимости от давления и температуры приведены в табл. 1.5.

Для нефтепродуктов модуль объемной упругости в среднем можно принимать равным $1{,}35 \cdot 10^9$ Па, для глинистых растворов — $2{,}5 \cdot 10^9$ Па.

Как уже отмечалось, из-за малой сжимаемости капельных жидкостей и ничтожного ее влияния на рассматриваемые в гидравлике явления при расчетах сжимаемостью жидкостей обычно пренебрегают и считают их практически несжимаемыми за исключением отдельных случаев (например, гидравлический удар), которые всегда особо оговаривают.

Таблица 1.5

Модуль объемной упругости K для воды (10^9 Па^1)

Температура, °С	Давление, МПа				
	0,5	1	2	4	8
0	1,89	1,90	1,92	1,95	1,98
5	1,93	1,95	1,97	2,01	2,07
10	1,95	1,97	2,01	2,05	2,12
15	1,97	2,00	2,03	2,09	2,17
20	1,98	2,02	2,06	2,12	2,22

Температурное расширение. Изменение объема жидкости в зависимости от температуры (температурное расширение) характеризуется температурным коэффициентом объемного расширения β_t, выражающим относительное изменение объема жидкости (ΔV) при повышении ее температуры (Δt) на 1° С:

$$\beta_t = \frac{1}{V} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}. \tag{1.9}$$

Здесь V — первоначальный объем жидкости.

Единицей температурного коэффициента объемного расширения является кельвин в минус первой степени (К$^{-1}$) или градус Цельсия в минус первой степени (°С$^{-1}$).

Температурный коэффициент объемного расширения для несжимаемых жидкостей ничтожно мал (например, для воды при температуре от 0 до 10° С и давлении 0,1 МПа $\beta_t = 0{,}000014$°С$^{-1}$).

Средние значения β_t для нефтепродуктов при $t = 15°$ С

ρ, кг/м^3	β_t, °С$^{-1}$	ρ, кг/м^3	β_t, °С$^{-1}$
700	0,00082	900	0,00064
800	0,00077	920	0,00060
850	0,00072		

При обычных гидравлических расчетах температурное расширение жидкостей, как правило, не учитывают.

Давлением насыщенных паров жидкости, или упругостью паров, называют давление, при котором пары жидкости находятся в равновесии с жидкостью и число молекул, переходящих из жидкости в пар, равно числу молекул, совершающих обратный переход.

Давление насыщенных паров различных жидкостей в значительной степени зависит от температуры и, как правило, увеличивается с ее повышением (табл. 1.6).

Таблица 1.6

Давление насыщенных паров (Па)

Жидкость	Температура жидкости t, °С					
	0	5	10	20	30	40
Вода	613	872	1225	2 332	4 214	7 350
Легкая нефть	3430	—	—	7 840	—	13 720
Бензин	6468	—	7938	10 682	16 562	22 538
Глинистый раствор	—	—	1764	3 136	5 390	8 320

Продолжение табл. 1.6

Жидкость	Температура жидкости t, °С					
	50	60	70	80	90	100
Вода	12 348	19 894	31 164	47 334	70 070	101 325
Легкая нефть	—	37 240	—	85 260	—	—
Бензин	31 948	—	—	—	—	—
Глинистый раствор	13 720	—	—	—	—	—

Давление насыщенных паров можно определить так же как давление, соответствующее точке кипения жидкости при данной температуре. Поэтому, например, если жидкость находится в каком-либо сосуде (резервуар, трубопровод), абсолютное давление $p_{абс}$ в котором равно давлению насыщенных паров $p_{н.п}$ ($p_{абс}=p_{н.п}$), жидкость будет кипеть, а сосуд заполняться ее парами.

Поверхностное натяжение (капиллярность). Это свойство жидкости обусловлено силами взаимного притяжения, возникающими между частицами поверхностного слоя и вызывающими напряженное его состояние. Под действием указанных сил поверхность жидкости оказывается как бы покрытой равномерно натянутой тонкой пленкой, которая стремится придать объему жидкости форму с наименьшей поверхностью.

Силы поверхностного натяжения оказывают на жидкость дополнительное давление, нормальное к ее поверхности. Это давление измеряется в ньютонах на квадратный метр (Н/м²) и может быть определено по формуле Лапласа:

$$p=\sigma\left[1/r_1+1/r_2\right], \qquad (1.10)$$

где σ — коэффициент поверхностного натяжения; r_1 и r_2 — радиусы кривизны кривых, получаемых при пересечении поверхности жидкости любыми двумя взаимно перпендикулярными плоскостями, проведенными через нормаль к этой поверхности в какой-либо точке. Средние значения σ (Н/м) для некоторых жидкостей на границе раздела с воздухом следующие:

Вода	0,073	Нефть	0,025
Спирт	0,0225	Глицерин	0,065
Бензол	0,029	Ртуть	0,490

Обычно с повышением температуры поверхностное натяжение жидкостей уменьшается.

Особенно сильно поверхностное натяжение проявляется в трубках весьма малого диаметра (капиллярных), где благодаря действию дополнительного давления, вызываемого этим натяжением, положение поверхности жидкости изменяется по сравнению с нормальным ее уровнем (капиллярность).

Для капиллярных трубок формула (1.10) принимает вид

$$p=2\sigma/r, \qquad (1.11)$$

где r — радиус трубки.

Возможны два случая изменения уровня: поднятие, если жидкость смачивает стенки (например, вода), и опускание, если жидкость не смачивает стенки (ртуть).

Для воды при $t=20°$ С высота капиллярного поднятия (в миллиметрах) в стеклянной трубке определяется формулой

$$h=29{,}8/d,$$

где d — внутренний диаметр трубки.

Для ртути при тех же условиях опускание уровня (в мм)

$$h=10{,}15/d.$$

Силы поверхностного натяжения приходится учитывать при исследовании таких гидравлических явлений, как, например, движение жидкости в капиллярных трубках измерительных приборов, где явление капиллярности может значительно исказить результаты измерений, при решении отдельных задач подземной фильтрации жидкости и т. п. При обычных гидравлических расчетах влиянием этих сил из-за их незначительности, как правило, пренебрегают.

жидкостей зависимость вязкости от температуры различна. Для воды она имеет вид

$$\nu = \frac{0{,}0178}{1 + 0{,}0337t + 0{,}000221t^2},$$

где ν — кинематическая вязкость в Ст; t — температура, °С. Вычисленные по этой формуле значения вязкости воды при различной температуре приведены в табл. 1.7. Средние значения вязкости для некоторых жидкостей приведены в табл. 1.8, а для нефтей различных месторождений Советского Союза — в табл. 1.9.

Таблица 1.7

Кинематическая вязкость воды

t, °С	$\nu \cdot 10^4$, м²/с	t, °С	$\nu \cdot 10^4$, м²/с	t, °С	$\nu \cdot 10^4$, м²/с
0	0,0178	12	0,0124	30	0,0080
5	0,0152	15	0,0114	50	0,0055
10	0,0131	20	0,0101	100	0,0028

Таблица 1.8

Кинематическая вязкость некоторых жидкостей

Жидкость	t, °С	$\nu \cdot 10^4$, м²/с	Жидкость	t, °С	$\nu \cdot 10^4$, м²/с
Бензин	18	0,0065	Ртуть	0	0,00125
Спирт винный	18	0,0133	Сталь жидкая (0,3% С)	1550	0,00370
Керосин	18	0,0250			
Глицерин	20	8,7000			

Таблица 1.9

Кинематическая вязкость нефтей некоторых месторождений

Месторождение	t, °С	$\nu \cdot 10^4$, м²/с	Месторождение	t, °С	$\nu \cdot 10^4$, м²/с
Ромашкинское, Татарская АССР (девонская нефть)	20	0,0857	Осинское, Пермская область	20	0,1532
То же	50	0,0377	То же	50	0,0710
Туймазинское, Башкирская АССР (девонская нефть)	20	0,0976	Малгобекское, Чечено-Ингушская АССР:		
			тяжелая нефть	20	1,2030
То же	50	0,0446	То же	50	0,1700
Мегионское, Тюменская область	20	0,0760	легкая нефть	20	0,4080
То же	50	0,0378	То же	50	0,0940
Хадыженское, Краснодарский край	20	0,0854			
То же	50	0,0364			

Зависимость вязкости от температуры для некоторых жидкостей изображена на рис. 1.3 и 1.4. Кривая на рис. 1.3 показывает значения кинематической вязкости машинного масла, а кривые на рис. 1.4 — значения динамической вязкости растительных масел (*1* — спермацетового; *2* — оливкового; *3* — сурепного). Как видно из приведенных данных, вязкость жидкости сильно зависит от температуры.

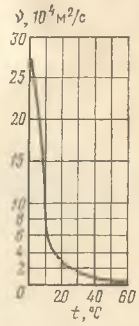


Рис. 1.3

Вязкость различных сортов жидкости одного названия, например, нефти, в зависимости от химического состава и молекулярного строения может иметь различные значения.

Температурная зависимость вязкости нефти хорошо описывается формулой П. А. Филонова:

$$\nu_t = \nu_0 e^{-ut}, \quad (1.16)$$

где ν_t, ν_0 — кинематическая вязкость нефти при температуре, соответственно, t и 0° С; e — основание натуральных логарифмов ($e = 2{,}71$); u — коэффициент, устанавливаемый по экспериментальным данным.

Для определения коэффициента u необходимо знать вязкость нефти ν_1 и ν_2 при температуре t_1 и t_2:

$$u = \frac{\ln(\nu_1/\nu_2)}{t_2 - t_1}.$$

Для вязких нефтей средние значения $u = 0{,}05 \div 0{,}1$ на 1° С. С увеличением вязкости значение u обычно увеличивается.

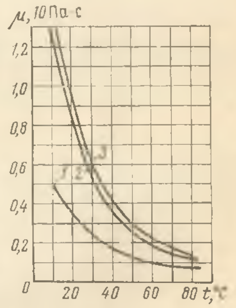


Рис. 1.4

Подчеркнем, что при практических расчетах к выбору значений вязкости следует подходить весьма осторожно. В каждом отдельном случае целесообразно основываться на данных специальных лабораторных исследований.

Вязкость жидкостей, как показывают опыты, зависит также от давления. При возрастании давления она обычно увеличивается. Исключением является вода, для которой при температуре до 32° С с повышением давления вязкость уменьшается. При давлениях, встречающихся в практике (до 20 МПа), изменение вязкости жидкостей весьма мало и при обычных гидравлических расчетах не учитывается.

При турбулентном режиме для «гидравлически гладких» труб (закон сопротивления Блазиуса)

$$\lambda = 0{,}3165/\mathrm{Re}^{0,25} = a_2/\mathrm{Re}^{0,25}. \tag{6.2}$$

При турбулентном режиме в автомодельной области «вполне шероховатых» труб (квадратичный закон сопротивления) коэффициент λ не зависит от числа Рейнольдса, поэтому показатель степени у Re здесь следует положить равным нулю. Если исходить, например, из формулы Шифринсона (4.88), будем иметь

$$\lambda = 0{,}11\,(k_1/d)^{0,25} = a_3/\mathrm{Re}^0 = a_3. \tag{6.3}$$

Задача осложняется в случае турбулентного режима в доквадратичной области смешанного трения, в которой λ одновременно является функцией и числа Рейнольдса, и шероховатости стенок. Сохраняя и здесь для λ принятую выше форму записи, приближенно, по В. Д. Белоусову, можно принять

$$\lambda = 10^{0,127\lg k_1/d - 0,627}/\mathrm{Re}^{0,123} = a_4/\mathrm{Re}^{0,123}. \tag{6.4}$$

Формула (6.4) получена спрямлением кривой $\lg\lambda = f(\lg \mathrm{Re})$ в области смешанного трения на графике Никурадзе, т. е. ее заменой на этом участке прямой линией, начальная точка которой на границе с областью «гидравлически гладких» труб находится по формуле Блазиуса, а на границе с автомодельной областью — по формуле Шифринсона.

Таким образом, имеем общую зависимость

$$\lambda = a/\mathrm{Re}^n = a\nu^n/v^n d^n, \tag{6.5}$$

справедливую, как видим, для любых режимов движения жидкости. В ней коэффициент a и показатель степени n в зависимости от характера режима имеют различные значения, определяемые из формул (6.1)—(6.4).

Подставив это выражение в формулу (4.14), будем иметь:

$$h_{\text{тр}} = \frac{a\nu^n}{v^n d^n}\,\frac{L}{d}\,\frac{v^2}{2g}.$$

С учетом того, что

$$v = Q/(\pi d^2/4),$$

получим следующее общее выражение для потерь напора на трение (формула Л. С. Лейбензона):

$$h_{\text{тр}} = \frac{4^{2-n}\pi^{n-2}a}{2g}\,\frac{Q^{2-n}}{d^{5-n}}\,\nu^n L = A\,\frac{Q^m\nu^n}{d^k}\,L, \tag{6.6}$$

где

$$A = \frac{4^{2-n}\pi^{n-2}a}{2g};\quad m = 2 - n;\quad k = 5 - n.$$

Значения коэффициента A и показателей степени m, n и k в формуле (6.6) для различных режимов движения жидкости приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Значения коэффициента A и показателей степени m, n и k в формуле (6.6)

Характер режима	A, $с^2/м$	m	n	k
Ламинарный	4,15	1,00	1,00	4,00
Турбулентный, область «гидравлически гладких» труб (формула Блазиуса)	0,0246	1,75	0,25	4,75
Турбулентный, автомодельная область, «вполне шероховатые» трубы (квадратичный закон сопротивления)	0,0826 λ или 0,0091 $(k_1/d)^{0,25}$*	2,00	0	5,00
Турбулентный, область смешанного трения **	$0{,}0804\cdot 10^{0,127\lg k_1/d - 0,627}$	1,877	0,123	4,877

* При λ по формуле Шифринсона (4.88).
** При λ на границе автомодельной области по формуле Шифринсона

Для определения расхода, если не учитывать местные потери, из выражения (6.6) получим:

$$Q = \sqrt[m]{\frac{d^k h_{\text{тр}}}{A\nu^n L}} = B\,\frac{d^r}{\nu^p}\sqrt[m]{\frac{h_{\text{тр}}}{L}}, \tag{6.6'}$$

где

$$B = 1/\sqrt[m]{A};\quad r = k/m;\quad p = n/m.$$

Значения коэффициента B и показателей r и p в формуле (6.6′) при различных режимах течения жидкости приведены в табл. 6.2.

Из общей формулы Лейбензона (6.6) путем несложных преобразований может быть получен ряд упрощенных зависимостей, весьма удобных и целесообразных для выполнения практических расчетов.

Рассмотрим некоторые из этих зависимостей. При их выводе будем исходить из формулы (6.6) и обозначим в ней A/d^k через K_d (коэффициент сечения), ν^n через $K\nu$ (вязкостный коэффициент), Q^m через K_Q (расходный коэффициент). Получим следующую запись формулы для гидравлического уклона:

$$i = h_{\text{п. п}}/L = K_d K_\nu K_Q. \tag{6.7}$$

Таблица 6.2

Значение коэффициента B и показателей степени r и p в формуле (6.6′)

Характер режима	B	r	p
Ламинарный	0,241	4	1
Турбулентный, область «гидравлически гладких» труб (формула Блазиуса)	8,340	2,71	0,143
Турбулентный, автомодельная область, «вполне шероховатые» трубы (квадратичный закон сопротивления)	$3{,}478\,\lambda^{-0,5}$, или * $10{,}476\,(k_1/d)^{-0,125}$	2,50	0
Турбулентный, область смешанного трения **	$(0{,}0804 \cdot 10^{0,127\,\lg k_1/d - 0,627})^{-0,533}$	2,60	0,065

* При λ по формуле Шифринсона (4.88).
** При λ на границе автомодельной области по формуле Шифринсона.

Ламинарный режим. Для этого случая (см. табл. 6.1) $k=4$; $n=1$; $m=1$, следовательно,

$$i=\frac{4,15}{d^4}\nu Q=K_d\nu Q, \tag{6.8}$$

где $K_d=4{,}15/d^4$.

Турбулентный режим. Область гидравлически гладких труб. Здесь (в области применимости формулы Блазиуса, при $\mathrm{Re}\leqslant 100\,000$)

$$i=0{,}0146\nu^{0,25}Q^{1,75}/d^{4,75}, \tag{6.9}$$

т. е. $K_d=0{,}0146/d^{4,75}$; $K_\nu=\nu^{0,25}$; $K_Q=Q^{1,75}$.

Автомодельная область (квадратичный закон сопротивления). Для этой области имеем $K_d=8\lambda/\pi^2gd^5$; $K_\nu=\nu^0=1$; $K_Q=Q^2$, и формула (6.7) принимает вид

$$i=8\lambda Q^2/\pi^2gd^5. \tag{6.10}$$

Введем далее обозначение

$$\sqrt{\pi^2gd^5/8\lambda}=K. \tag{6.11}$$

Тогда получим

$$i=Q^2/K^2 \tag{6.12}$$

или

$$Q^2=K^2i. \tag{6.13}$$

Коэффициент K в формуле (6.13) называют *модулем расхода*. Если величину, обратную K^2,

$$1/K^2=8\lambda/\pi^2gd^5 \tag{6.14}$$

обозначить через S (ее называют удельным сопротивлением трубопровода), то вместо формулы (6.13) можно записать

$$i=Q^2S. \tag{6.15}$$

Формула (6.13) очень проста, поэтому ее часто применяют для практических расчетов в области турбулентного режима при квадратичном законе сопротивления. Последний соответствует движению жидкости при больших значениях числа Рейнольдса, что на практике происходит в водопроводах. Поэтому указанную формулу часто называют «водопроводной». При $i=1$ из формулы (6.13) следует $Q=K$, т. е. модуль расхода представляет собой расход жидкости при уклоне, равном единице.

Доквадратичная область смешанного трения. Если при движении жидкости в трубопроводе имеет место турбулентный режим в доквадратичной области шероховатых труб (весьма часто встречающийся на практике случай), когда $\lambda=f(\varepsilon,\ \mathrm{Re})$, для расчета могут быть использованы установленные выше зависимости для квадратичного закона сопротивления с введением в них поправочного коэффициента β (на «неквадратичность»).

По-прежнему будем исходить из основной формулы Дарси—Вейсбаха (4.14). Произведем в ней замену $v=4Q/\pi d^2$, умножим и разделим правую часть на $\lambda_{кв}$. Получим

$$i=\frac{h_{тр}}{L}=\frac{\lambda}{\lambda_{кв}}\frac{8Q^2}{g\pi^2d^5}\lambda_{кв}, \tag{6.16}$$

где λ — действительный коэффициент гидравлического сопротивления трубопровода; $\lambda_{кв}$ — коэффициент сопротивления того же трубопровода при квадратичном законе сопротивления.

Учитывая далее выражение (6.11) и обозначая $\lambda/\lambda_{кв}$ через β (поправочный коэффициент на «неквадратичность»), вместо формулы (6.16) будем иметь общее соотношение:

$$i=\beta Q^2/K^2, \tag{6.17}$$

удобное для расчета трубопроводов в доквадратичной области турбулентного режима.

Чтобы определить поправочный коэффициент на «неквадратичность», воспользуемся известными формулами для коэффициента гидравлического сопротивления, например формулой Альтшуля (4.85) для доквадратичной области шероховатых труб и формулой Шифринсона (4.88) для квадратичной области турбулентного режима. При этом найдем

$$\beta=\frac{0{,}11\,(k_1/d+68/\mathrm{Re})^{0,25}}{0{,}11\,(k_1/d)^{0,25}}=\left(1+\frac{68\nu}{vk_1}\right)^{0,25}. \tag{6.18}$$

Основной смысл выполненных преобразований состоит в том, что входящие в полученные зависимости расчетные коэффициенты, являющиеся функцией диаметра трубы, шероховатости стенок и вязкости жидкости, легко табулируются, т. е. могут быть заранее подсчитаны и сведены в таблицы. Подобные таблицы имеются, например, в руководствах по гидравлике автора настоящей книги.

Подчеркнем, что в настоящее время широкое развитие вычислительной техники (применение ЭВМ и функциональных ручных компьютеров) позволяет легко и быстро производить все необходимые при гидравлическом расчете трубопроводов вычисления непосредственно по формуле Лейбензона.

§ 66. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ РАСЧЕТЕ И ПРОЕКТИРОВАНИИ ТРУБОПРОВОДОВ

В первоначальной и наиболее общей постановке задачи при проектировании трубопроводов обычно задаются расход жидкости и положения начального и конечного пунктов трубопровода. В случае сложного трубопровода задача соответственно усложняется. В результате проведения топографических изысканий и сопоставления отдельных вариантов на плане местности наносят трассу и строят продольный профиль трубопровода. Таким образом, при гидравлическом расчете оказываются известными также длина трубопровода и все его высотные отметки. Определению подлежат диаметр трубопровода и напор в его начальном сечении.

Рассматриваемая задача допускает множество решений, так как при прочих условиях диаметр одновременно определяет и потери напора: чем меньше диаметр, тем больше потери и, наоборот, чем больше диаметр, тем меньше потери. Поэтому при решении исходят из требований оптимальности и технической целесообразности сооружения и эксплуатации трубопровода.

При меньших диаметрах требуются значительно меньшие капитальные затраты на сооружение трубопровода, чем при больших. Стоимость труб, объем земляных работ и работ по укладке труб тем ниже, чем меньше диаметр. Однако уменьшение диаметра трубопровода приводит к увеличению потерь напора и, следовательно, к увеличению мощности насосов и двигателей. Экономически наиболее выгодный диаметр должен соответствовать наименьшей полной стоимости трубопровода, зависящей от капитальных затрат на сооружение и прокладку самого трубопровода, а также от расходов на сооружение насосных станций и эксплуатационных расходов.

По В. С. Яблонскому, приближенно можно принять, что экономически наивыгоднейший диаметр обычно соответствует скорости течения жидкости 1 м/с, т. е. диаметру, определяемому

по формуле $d_э = 1{,}12\sqrt{Q}$, где при расходе жидкости Q выражен в кубических метрах в секунду, диаметр $d_э$ — в метрах.

Для более точного определения экономически наивыгоднейшего диаметра существует ряд методов, изучаемых в специальных курсах по проектированию и сооружению трубопроводов. В основе этих методов лежит следующий прием. Составляют выражение для полной годовой стоимости трубопровода, включая как капитальные затраты на его сооружение и прокладку, так и эксплуатационные расходы, выраженные в функции от диаметра трубопровода. Затем находят минимум этой функции, т. е. берут первую производную от стоимости по диаметру и приравнивают ее к нулю. Из получаемого таким образом уравнения определяют диаметр трубопровода, соответствующий минимуму его полной стоимости.

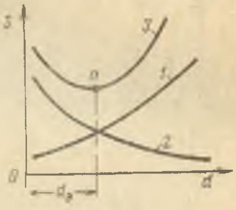


Рис. 6.5

Искомое значение диаметра может быть определено также графическим способом. При этом по одной координатной оси (рис. 6.5), например оси абсцисс, откладывают диаметры трубопроводов d, а по другой оси, ординат,— соответствующие этим диаметрам стоимости S — капитальные затраты (кривая *1*) и эксплуатационные расходы (кривая *2*). Суммированием ординат этих кривых находят полную стоимость трубопровода (кривая *3*), имеющую минимум в некоторой точке a, которая определяет экономически наивыгоднейший диаметр $d_э$.

Помимо основной задачи, рассмотренной в общей постановке при гидравлическом расчете трубопроводов, могут встретиться следующие частные задачи:

1) определение перепада напора, необходимого для пропуска заданного расхода жидкости по данному трубопроводу;

2) определение расхода жидкости по данному трубопроводу при заданном перепаде напора;

3) определение необходимого диаметра трубопровода для пропуска данного расхода при известном перепаде напора.

Затруднения при решении некоторых задач могут встретиться в случае, если число Рейнольдса невелико, т. е. коэффициент λ зависит от Re. Последнее же становится известным лишь по окончании расчета.

Решения указанных задач рассматриваются ниже.

§ 67. РАСЧЕТ ПРОСТОГО ТРУБОПРОВОДА

Пусть (рис. 6.6) имеются два резервуара: питающий A и расходующий B с установившейся разностью уровней $\Delta z = z_A - z_B$, соединенные между собой простым трубопроводом длиной L и постоянным диаметром d (в других случаях роль верхнего резервуара может выполнять насос, установленный в начале трубопровода и создающий там давление $\rho g z_A$; нижний резервуар также может отсутствовать, и жидкость будет вытекать в атмосферу через отверстие в конце трубопровода).

Пусть резервуары открыты и давление на свободной поверхности жидкости в них равно атмосферному. Средние скорости в сечениях на поверхности жидкости в резервуарах обозначим v_A и v_B.

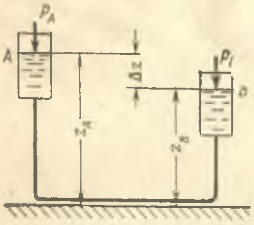


Рис. 6.6

Составим для указанных сечений уравнение Бернулли

$$z_A + p_A/\rho g + v_A^2/2g = z_B + p_B/\rho g + v_B^2/2g + \sum h_{A\text{-}B}.$$

Пренебрегая в этом уравнении значениями скоростных напоров $v_A^2/2g$ и $v_B^2/2g$ вследствие их малости по сравнению с остальными величинами, а также учитывая, что $p_A = p_B$, получаем $\Delta H = \Delta z = \Sigma h_{\text{A-B}}$.

Полная потеря напора определяется как сумма потерь на трение по длине трубопровода $h_{\text{тр}} = \lambda (L/d)(v^2/2g)$ и местных потерь * $h_{\text{м. п}} = \Sigma \zeta v^2/2g$: $\Delta H = \zeta_{\text{сист}} v^2/2g$, где $\zeta_{\text{сист}} = \lambda L/d + \Sigma\zeta$, как уже указывалось, называют коэффициентом сопротивления трубопровода (системы).

Из последнего уравнения по заданному ΔH легко определить скорость и расход жидкости:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\zeta_{\text{сист}}}} \sqrt{2g\Delta H}\,, \tag{6.19}$$

$$Q = fv = f \frac{1}{\sqrt{\zeta_{\text{сист}}}} \sqrt{2g\Delta H}\,. \tag{6.20}$$

При большой длине трубопровода, когда местными потерями по сравнению с потерями на трение по длине можно пренебречь, расход определяется непосредственно по формуле Лейбензона (6.6). В частном случае квадратичного закона сопротивления его можно найти также из более простого выражения (6.13):

$$Q = K\sqrt{i} = K\sqrt{\Delta H/L}\,. \tag{6.21}$$

Указанные уравнения позволяют определить также диаметр трубопровода (в том случае, когда перепад напора, длина трубопровода, расход жидкости и ее вязкость известны). Наиболее просто эта задача решается при квадратичном законе сопро-

* Их можно также учесть введением эквивалентных длин.

тивления — из формулы (6.21) находят модуль расхода и по соответствующим таблицам устанавливают стандартный диаметр трубопровода, отвечающий ближайшему (к полученному расчетом) большему значению этого модуля. В такой постановке, однако, задача о гидравлическом расчете трубопровода встречается сравнительно редко, так как обычно диаметр трубы выбирают исходя из технико-экономических соображений.

Если трубопровод состоит из участков *1*, *2*, *3*, ..., n различной длины L_1, L_2, ..., L_n и разного диаметра d_1, d_2, ..., d_n, последовательно соединенных между собой (рис. 6.7), задача решается аналогично предыдущей.

При таком последовательном соединении полная потеря напора на всем протяжении трубопровода от начальной его точки A до конечной B определяется как сумма потерь на отдельных участках

$$\Delta H = \Delta z = \sum h_{A\text{-}B}\, h_{\text{тр}1} + h_{\text{тр}2} + \ldots + h_{\text{тр}\,n} + h_{\text{м. п}1} + h_{\text{м. п}2} + \ldots + h_{\text{м. п}\,n} \tag{6.22}$$

и может быть выражена через коэффициент сопротивления системы следующим образом:

$$\Delta H = \zeta_{\text{сист}} v_1^2/2g, \tag{6.22'}$$

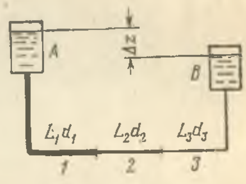


Рис. 6.7

где v_1 — скорость в каком-нибудь произвольно выбираемом сечении трубопровода, а коэффициент сопротивления системы

$$\zeta_{\text{сист}} = \lambda_1 \frac{L_1}{d_1} + \lambda_2 \frac{L_2}{d_2}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 + \cdots + \lambda_n \frac{L_n}{d_n}\left(\frac{F_1}{F_n}\right)^2 + \zeta_1 + \zeta_2\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 + \cdots + \zeta_n\left(\frac{F_1}{F_n}\right)^2. \tag{6.23}$$

Если не учитывать местные потери и по-прежнему исходить из общей формулы Лейбензона (6.6), уравнение (6.22) можно представить в следующем виде *:

$$\Delta H = A_1 \frac{Q_1^m \nu^n}{d_1^k} L_1 + A_2 \frac{Q_2^m \nu^n}{d_2^k} L_2 + \ldots + A_n \frac{Q_n^m \nu^n}{d_n^k} L_n,$$

откуда, принимая во внимание, что в простом трубопроводе $Q_1 = Q_2 = Q_n = Q$, находим:

$$\Delta H = Q^m \nu^n \left(\frac{A_1 L_1}{d_1^k} + \frac{A_2 L_2}{d_2^k} + \cdots + \frac{A_n L_n}{d_n^k}\right)$$

* Здесь, как и далее, предполагается, что на всех участках трубопровода один и тот же режим движения жидкости. Правильность этого предположения в дальнейшем должна быть проверена — для всех участков должны быть определены числа Рейнольдса и полученные результаты уточнены.

и легко определяем искомый расход жидкости

$$Q=\sqrt[m]{\frac{\Delta H}{\nu^{n}\left(\frac{A_1L_1}{d_1^k}+\frac{A_2L_2}{d_2^k}+\cdots+\frac{A_nL_n}{d_n^k}\right)}}. \tag{6.24}$$

В случае квадратичного закона сопротивления, выполнив аналогичные преобразования, получим:

$$Q=\sqrt{\frac{\Delta H}{L_1/K_1^2+L_2/K_2^2+\ldots+L_n/K_n^2}}. \tag{6.25}$$

§ 68. СЛОЖНЫЕ ТРУБОПРОВОДЫ

Расчет сложных трубопроводов обычно изучается в специальных курсах. Поэтому здесь рассматриваются только простейшие примеры сложных трубопроводов и приводятся основы их гидравлического расчета. Местные сопротивления при этом, как и ранее, не принимаются во внимание или могут быть учтены введением эквивалентных длин.

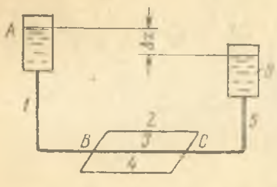


Рис. 6.8

Рассмотрим параллельное соединение трубопроводов (рис. 6.8). В этом случае магистральный трубопровод в некоторой точке B разветвляется на несколько параллельных линий 2, 3, 4, ..., сходящихся затем вместе в одной общей точке магистрали C.

Пусть длины и диаметры отдельных участков подобного трубопровода, в том числе параллельно включенных линий, будут $L_1, \ldots, L_5$ и $d_1, \ldots, d_5$. Расходы соответственно обозначим: в магистрали $Q_1=Q_5=Q$, в параллельных линиях — Q_2, Q_3, Q_4.

Для параллельных трубопроводов всегда можно составить систему уравнений, число которых равно числу параллельных линий. Так, для расхода в магистрали можно записать

$$Q=Q_2+Q_3+Q_4. \tag{6.26}$$

Имея в виду, что значения напора в точках разветвления B и C одинаковы для всех параллельно включенных линий, приходим к выводу, что потери напора в них должны быть одинаковы, независимо от того, для какой линии их подсчитывают.

Таким образом,

$$h_{тр2}=h_{тр3}=h_{тр4} \tag{6.27}$$

или в общем случае

$$A_2\frac{Q_2^m\nu^n}{d_2^k}L_2=A_3\frac{Q_3^m\nu^n}{d_3^k}L_3=A_4\frac{Q_4^m\nu^n}{d_4^k}L_4. \tag{6.28}$$

Решая совместно уравнения (6.26) и (6.28), можно найти искомые расходы. Из уравнения (6.28) имеем

$$Q_3=Q_2\left(\frac{A_2L_2d_3^k}{A_3L_3d_2^k}\right)^{1/m}; \quad Q_4=Q_2\left(\frac{A_2L_2d_4^k}{A_4L_4d_2^k}\right)^{1/m}.$$

Подставив затем эти значения в уравнение (6.26), получим:

$$Q=Q_2+Q_2\left(\frac{A_2L_2d_3^k}{A_3L_3d_2^k}\right)^{1/m}+Q_2\left(\frac{A_2L_2d_4^k}{A_4L_4d_2^k}\right)^{1/m}, \tag{6.29}$$

откуда находим

$$Q_2=\frac{Q}{1+\left(\frac{A_2L_2d_3^k}{A_3L_3d_2^k}\right)^{1/m}+\left(\frac{A_2L_2d_4^k}{A_4L_4d_2^k}\right)^{1/m}}. \tag{6.30}$$

Аналогично определяем остальные расходы.

Изображенный на рис. 6.8 трубопровод представляет собой последовательное соединение отдельных участков: участка магистрали *1*, участка включенных в магистраль параллельных линий *2*, *3*, *4* и участка магистрали *5*. Полная потеря напора в этом случае определяется так же, как при обычном последовательном соединении, т. е. как сумма потерь на отдельных участках. При этом необходимо иметь в виду, что потери напора в параллельных линиях не складываются и в уравнение потерь вследствие равенства (6.27) вводится только потеря в одной из этих линий, безразлично в какой, например в линии *2*. Поэтому

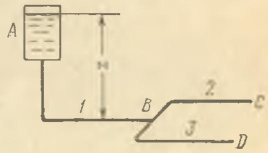


Рис. 6.9

$$\Delta H=\Delta z=\sum h_{тр}=h_{тр1}+h_{тр2}+h_{тр5}, \tag{6.31}$$

или

$$\Delta z=A_1\frac{Q_1^m\nu^n}{d_1^k}L_1+A_2\frac{Q_2^m\nu^n}{d_2^k}L_2+A_5\frac{Q_5^m\nu^n}{d_5^k}L_5.$$

Изложенное позволяет наметить схемы гидравлического расчета и для других видов сложных трубопроводов.

Для простейшего разветвленного трубопровода (рис. 6.9), в котором участки *1* и *2* (также *1* и *3*) соединены между собой последовательно, а участки *2* и *3* включены параллельно и истечение жидкости в точках C и D, расположенных в одной горизонтальной плоскости, происходит в атмосферу, по аналогии с предыдущим имеем *:

$$\Delta H = z = \sum h_{тр} = h_{тр1} + h_{тр2} = A_1 \frac{Q_1^m \nu^n}{d_1^k} L_1 + A_2 \frac{Q_2^m \nu^n}{d_2^k} L_2$$

или

$$\Delta H = z = \sum h_{тр} = h_{тр1} + h_{тр3} = A_1 \frac{Q_1^m \nu^n}{d_1^k} L_1 + A_3 \frac{Q_3^m \nu^n}{d_3^k} L_3 .$$

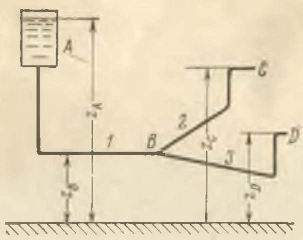


Рис. 6.10

Причем вследствие того, что $h_{тр2} = h_{тр3}$,

$$A_2 \frac{Q_2^m}{d_2^k} L_2 = A_3 \frac{Q_3^m}{d_3^k} L_3 .$$

Кроме того, $Q_1 = Q_2 + Q_3$.

Если точки C и D расположены в разных горизонтальных плоскостях (рис. 6.10) с различными высотами концевых сечений (или различными давлениями в них), аналогичная система уравнений получает вид:

$$z_A - z_C = h_{тр1} + h_{тр2} = A_1 \frac{Q_1^m \nu^n}{d_1^k} L_1 + A_2 \frac{Q_2^m \nu^n}{d_2^k} L_2 ;$$

$$z_A - z_D = h_{тр1} + h_{тр3} = A_1 \frac{Q_1^m \nu^n}{d_1^k} L_1 + A_3 \frac{Q_3^m \nu^n}{d_3^k} L_3 ,$$

откуда

$$z_C + A_2 \frac{Q_2^m \nu^n}{d_2^k} L_2 = z_D + A_3 \frac{Q_3^m \nu^n}{d_3^k} L_3 .$$

Имеем также

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad \text{и} \quad (z_A - z_B) - h_B = h_{тр1} = A_1 \left(Q_1^m \nu^n / d_1^k\right) L_1,$$

где h_B — пьезометрический напор, соответствующий давлению в точке B, определяемый из выражения

$$h_B = h_{тр2} + (z_C - z_B) = A_2 \frac{Q_2^m \nu^n}{d_2^k} L_2 + (z_C - z_B)$$

или

$$h_B = h_{тр3} + (z_D - z_B) = A_3 \frac{Q_3^m \nu^n}{d_3^k} L_3 + (z_D - z_B).$$

* Здесь, как и ранее, индексы 1, 2, 3 указывают номера участков трубопровода.

Как видим, в данном случае число расчетных уравнений на единицу превышает число параллельно включенных участков (ветвей) трубопровода. Совместное решение этих уравнений позволяет найти искомые расходы Q_2, Q_3 и Q_1.

Кольцевые трубопроводы рассчитывают принципиально по такой же схеме, что и при параллельном соединении. Так, в случае параллельного соединения, когда расходный пункт C питается с двух сторон (рис. 6.11), как и ранее, имеем

$$\Delta H = \sum h_{тр} = h_{тр1} + h_{тр2} = h_{тр1} + h_{тр3};$$

$$h_{тр2} = h_{тр3};$$

$$Q = Q_1 = Q_2 + Q_3 .$$

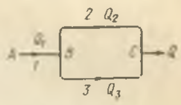


Рис. 6.11

Задача усложняется, если в трубопроводе имеется несколько расходных пунктов, например, в простейшем случае кольцевого трубопровода, изображенного на рис. 6.12. При этом задаются значениями расходов Q_2, Q_3 и Q_4 и направлением движения жидкости в отдельных участках *2*, *3*, *4* кольца и вычисляют потери напора от общей точки разветвления B до расходных пунктов C и D. Если в первом предположении принять, например, что точка C питается только с одной стороны, а точка D — с двух, то, как это следует из свойств параллельного соединения, необходимо, чтобы потеря напора на участке *4* равнялась сумме потерь на участках *2* и *3*: $h_{тр4} = h_{тр2} + h_{тр3}$.

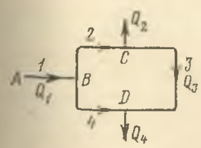


Рис. 6.12

Расчет производят до тех пор, пока путем изменения значений расхода и направления движения жидкости не будет достигнуто указанное равенство потерь.

На практике кольцевые трубопроводы (их обычно называют кольцевыми сетями) — весьма сложные трубопроводные системы, состоящие из нескольких (иногда многих) трубопроводных колец, по которым в различные расходные пункты (узлы) подаются разные расходы.

Большим достоинством подобных сетей является возможность в случае необходимости (авария, ремонт) выключать отдельные участки сети без нарушения подачи жидкости в остальную ее часть.

горизонтальной плоскости, происходит в атмосферу, по аналогии с предыдущим имеем*:

$$\Delta H = z = \sum h_{тр} = h_{тр1} + h_{тр2} = A_1 \frac{Q_1^m \nu^n}{d_1^k} L_1 + A_2 \frac{Q_2^m \nu^n}{d_2^k} L_2$$

или

$$\Delta H = z = \sum h_{тр} = h_{тр1} + h_{тр3} = A_1 \frac{Q_1^m \nu^n}{d_1^k} L_1 + A_3 \frac{Q_3^m \nu^n}{d_3^k} L_3 .$$

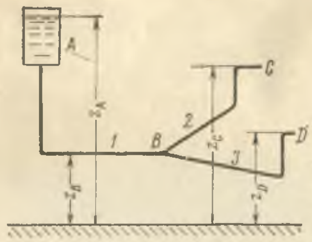


Рис. 6.10

Причем вследствие того, что $h_{тр2} = h_{тр3}$,

$$A_2 \frac{Q_2^m}{d_2^k} L_2 = A_3 \frac{Q_3^m}{d_3^k} L_3 .$$

Кроме того, $Q_1 = Q_2 + Q_3$.

Если точки C и D расположены в разных горизонтальных плоскостях (рис. 6.10) с различными высотами концевых сечений (или различными давлениями в них), аналогичная система уравнений получает вид:

$$z_A - z_C = h_{тр1} + h_{тр2} = A_1 \frac{Q_1^m \nu^n}{d_1^k} L_1 + A_2 \frac{Q_2^m \nu^n}{d_2^k} L_2 ;$$

$$z_A - z_D = h_{тр1} + h_{тр3} = A_1 \frac{Q_1^m \nu^n}{d_1^k} L_1 + A_3 \frac{Q_3^m \nu^n}{d_3^k} L_3 ,$$

откуда

$$z_C + A_2 \frac{Q_2^m \nu^n}{d_2^k} L_2 = z_D + A_3 \frac{Q_3^m \nu^n}{d_3^k} L_3 .$$

Имеем также

$$Q_1 = Q_2 + Q_3 \quad \text{и} \quad (z_A - z_B) - h_B = h_{тр1} = A_1 \left(Q_1^m \nu^n / d_1^k\right) L_1,$$

где h_B — пьезометрический напор, соответствующий давлению в точке B, определяемый из выражения

$$h_B = h_{тр2} + (z_C - z_B) = A_2 \frac{Q_2^m \nu^n}{d_2^k} L_2 + (z_C - z_B)$$

---

* Здесь, как и ранее, индексы 1, 2, 3 указывают номера участков трубопровода.

или

$$h_B = h_{тр3} + (z_D - z_B) = A_3 \frac{Q_3^m \nu^n}{d_3^k} L_3 + (z_D - z_B).$$

Как видим, в данном случае число расчетных уравнений на единицу превышает число параллельно включенных участков (ветвей) трубопровода. Совместное решение этих уравнений позволяет найти искомые расходы Q_2, Q_3 и Q_1.

Кольцевые трубопроводы рассчитывают принципиально по такой же схеме, что и при параллельном соединении. Так, в случае параллельного соединения, когда расходный пункт C питается с двух сторон (рис. 6.11), как и ранее, имеем

$$\Delta H = \sum h_{тр} = h_{тр1} + h_{тр2} = h_{тр1} + h_{тр3};$$

$$h_{тр2} = h_{тр3};$$

$$Q = Q_1 = Q_2 + Q_3 .$$

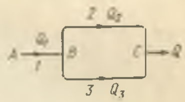


Рис. 6.11

Задача усложняется, если в трубопроводе имеется несколько расходных пунктов, например, в простейшем случае кольцевого трубопровода, изображенного на рис. 6.12. При этом задаются значениями расходов Q_2, Q_3 и Q_4 и направлением движения жидкости в отдельных участках *2*, *3*, *4* кольца и вычисляют потери напора от общей точки разветвления B до расходных пунктов C и D. Если в первом предположении принять, например, что точка C питается только с одной стороны, а точка D — с двух, то, как это следует из свойств параллельного соединения, необходимо, чтобы потеря напора на участке *4* равнялась сумме потерь на участках *2* и *3*: $h_{тр4} = h_{тр2} + h_{тр3}$.

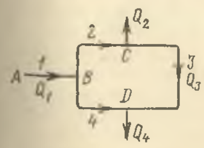


Рис. 6.12

Расчет производят до тех пор, пока путем изменения значений расхода и направления движения жидкости не будет достигнуто указанное равенство потерь.

На практике кольцевые трубопроводы (их обычно называют кольцевыми сетями) — весьма сложные трубопроводные системы, состоящие из нескольких (иногда многих) трубопроводных колец, по которым в различные расходные пункты (узлы) подаются разные расходы.

Большим достоинством подобных сетей является возможность в случае необходимости (авария, ремонт) выключать отдельные участки сети без нарушения подачи жидкости в остальную ее часть.

Сложные кольцевые сети рассчитывают путем последовательных приближений на основе изложенных выше принципов, сводящихся к выполнению двух основных условий:

1) баланса расходов, т. е. равенства притока и оттока жидкости (с учетом отбора) в каждом узле

$$\sum Q = 0; \tag{6.32}$$

2) баланса потерь напора, заключающегося в равенстве нулю алгебраической суммы потерь напора для каждого кольца

$$\sum h_{\text{тр}} = 0. \tag{6.32$'$}$$

Рассмотрим также приближенное решение задачи об определении потерь напора в трубопроводе, на участке AB которого имеется непрерывный путевой расход (рис. 6.13). Длину этого участка обозначим L, проходящий по нему транзитный расход — $Q_т$, путевой расход — $Q_п$. При этом примем, что $Q_п$ по всей длине L распределяется равномерно, т. е. на единице длины участка AB

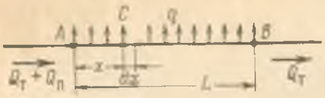


Рис. 6.13

$$q = Q_п/L.$$

Расход в некотором произвольном сечении этого участка C, расположенном на расстоянии x от начального сечения A, будет меньше расхода в сечении A, равного $Q_т + Q_п$, на величину отбора на длине x—qx и составит

$$Q_x = (Q_т + Q_п) - Q_п x/L.$$

Ограничимся случаем, когда движение жидкости происходит в квадратичной области турбулентного режима. Тогда для потери напора на трение на элементарном участке трубопровода длиной dx у сечения C получим

$$dh_{\text{тр}} = \frac{Q_x^2}{K^2}dx = \frac{(Q_т + Q_п - Q_п x/L)^2 dx}{K^2}.$$

Интегрируя затем это выражение в пределах от 0 до L, получаем расчетную формулу для определения потери напора на всем участке трубопровода длиной L при непрерывном путевом расходе:

$$h_{\text{тр}} = \int_0^L \frac{(Q_т + Q_п - Q_п x/L)^2 dx}{K^2} = \frac{1}{K^2}\int_0^L \left[(Q_т + Q_п)^2 - \right.$$

$$\left. - \frac{2(Q_т + Q_п)Q_п x}{L} + \frac{Q_п^2 x^2}{L}\right]dx$$

или окончательно

$$h_{\text{тр}} = \frac{L}{K^2}\left(Q_т^2 + Q_т Q_п + Q_п^2/3\right).$$

В частном случае, когда на участке L отбирается весь расход, т. е. транзитный расход $Q_т = 0$, потеря напора

$$h_{\text{тр}} = \frac{1}{3}\frac{Q_п^2}{K^2}L.$$

Это выражение известно под названием формулы Дюпюи. Из него следует, что потери напора в трубопроводе при непрерывном путевом расходе оказываются в 3 раза меньше той потери напора, которая была бы в отсутствие путевой раздачи и при таком же расходе, полностью сосредоточенном в конце трубопровода.

Аналогичная зависимость может быть получена и для ламинарного режима. В этом случае потеря напора при непрерывном путевом расходе будет в 2 раза меньше, чем при равном ему расходе, сосредоточенном в конце трубопровода.

§ 69. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТРУБОПРОВОДОВ

При гидравлическом расчете трубопроводов весьма широко используют графические методы расчета. Применение графических методов значительно облегчает и упрощает решение некоторых сложных задач, а в отдельных случаях (например, при исследовании совместной работы нескольких центробежных насосов на один общий трубопровод) является практически единственно возможным приемом, позволяющим получить искомое решение.

Предположим, что в простейшем случае имеется трубопровод диаметром d и длиной L и по нему перекачивается жидкость, кинематическая вязкость ν которой (при заданной температуре перекачки) известна. Для определения потери напора в этом трубопроводе будем исходить из обобщенной формулы Лейбензона (6.6). В § 65 было установлено, что входящие в эту формулу коэффициент A и показатели степени m, n и k зависят от режимов движения жидкости в трубопроводе, устанавливаемых по значениям числа Рейнольдса. В условиях рассматриваемой задачи (d=const; L=const; ν=const) Re полностью определяется подаваемым по трубопроводу расходом.

Таким образом, можно считать, что потеря напора в данном трубопроводе представляет собой функцию только расхода жидкости $\Delta H = f(Q)$.

Изобразим эту зависимость графически. Для этого, произвольно задаваясь рядом значений Q, вычислим соответствующие им значения напора ΔH и отложим (в масштабе) по оси абсцисс значения Q, а по оси ординат — вычисленные значения ΔH. Соединив полученные точки плавной линией, построим кривую (рис. 6.14) изменения потери напора в трубопроводе в зависимости от пропускаемого расхода. Эта кривая называется *характеристической кривой*, или *гидравлической характеристикой трубопровода.*

В общем случае характеристическая кривая трубопровода состоит из отдельных участков разной формы — некоторого небольшого прямолинейного участка для ламинарного режима (при малых Q) и параболической кривой для турбулентного режима (в области больших Q), в свою очередь состоящей из участков различной крутизны (т. е. парабол с различными показателями степени) в разных зонах этого режима.

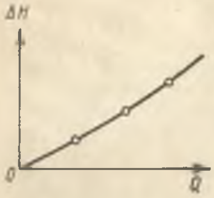


Рис. 6.14

Практически, однако за исключением особых случаев, рабочий участок характеристики находится в области турбулентного режима. Поэтому обычно характеристики принято изображать в виде параболических кривых.

Рассмотрим построение характеристик для некоторых сложных трубопроводов. Для простоты будем считать их лежащими в одной горизонтальной плоскости.

В случае последовательного соединения трубопроводов (см. рис. 6.7) предварительно строят характеристики отдельных последовательно включенных участков трубопровода. На рис. 6.15 изображены такие характеристики: I — характеристика участка *1*; II — участка

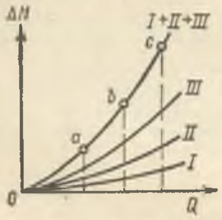


Рис. 6.15

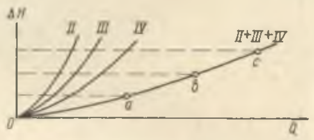


Рис. 6.16

2; III — участка *3*. Поскольку при последовательном соединении потери напора суммируются, сложим кривые I, II, III по вертикали. Для этого проведем ряд прямых, параллельных оси ординат, каждая из которых пересечет все три кривые, и сложим ординаты точек пересечений этих прямых с кривыми. Получим ряд точек a, b, c, принадлежащих новой кривой $I+II+III$, которая представляет собой искомую суммарную характеристику всего рассматриваемого трубопровода.

При параллельном соединении (см. рис. 6.8, участки *2*, *3*, *4*) также прежде всего следует построить характеристики отдельных параллельно включенных участков. Пусть на рис. 6.16 кривые II, III и IV — такие характеристики участков *2*, *3* и *4*. Как уже указывалось, при параллельном соединении общий расход определяется как сумма расходов в отдельных параллельно включенных участках. Потери напора в этих участках одинаковы, и полная потеря напора определяется как потеря в одном из них. Поэтому для построения суммарной характеристики необходимо провести ряд горизонтальных прямых, параллельных оси абсцисс, и сложить при постоянных ординатах абсциссы точек их пересечения с характеристиками отдельных участков. В результате получим ряд точек a, b, c, определяющих суммарную характеристику $II+III+IV$ трубопровода при параллельном соединении.

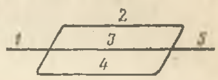


Рис. 6.17

Таким образом, *для построения суммарной характеристики сложного трубопровода необходимо сложить характеристики отдельных участков при параллельном соединении по горизонтали, а при последовательном — по вертикали.*

В общем случае, когда трубопровод состоит из ряда участков, соединенных между собой как последовательно, так и параллельно (рис. 6.17), суммарную характеристику всего трубопровода находят, как указано выше, последовательным сложением предварительно построенных характеристик всех отдельных участков. При этом сначала по горизонтали суммируют характеристики параллельно включенных участков *2*, *3*, *4*, затем их суммарную характеристику складывают по вертикали с характеристиками участков *1* и *5*, включенных последовательно.

В тех случаях, когда отдельные участки трубопроводов лежат в разных плоскостях, при построении и суммировании характеристик необходимо учитывать также разность высот Δz между начальной и конечной точками указанных участков. Характеристики этих участков следует строить не от начала координат, а из точек, отстоящих от него на величину Δz. Ее нужно откладывать вверх, если конечная точка участка располагается выше начальной (подъем жидкости), и вниз, если конечная точка находится ниже начальной (опускание жидкости). Так следует поступать и в тех случаях, когда подача жидкости происходит в полости с повышенным или пониженным давлением, в первом случае откладывая вверх, а во втором — вниз высоту $\Delta z' = p/\rho g$, соответствующую этому давлению. Перестроенные таким образом характеристики иногда называют *кривыми «потребного напора»*.

§ 4. ВЯЗКОСТЬ ЖИДКОСТИ И ЗАКОНЫ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

Вязкостью называют свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление сдвигающим касательным усилиям. Это свойство не может быть обнаружено при покое жидкости, так как оно проявляется лишь при ее движении.

Чтобы выяснить физическую сущность понятия вязкости, рассмотрим следующую схему. Пусть имеются две параллельные пластинки A и B (рис. 1.2). В пространстве между ними заключена жидкость. Нижняя пластинка пусть будет неподвижна, а верхняя движется поступательно с некоторой постоянной скоростью v_1. При этом, как показывает опыт, слои жидкости, прилегающие непосредственно к пластинкам (прилипшие), будут иметь одинаковые с ними скорости, т. е. слой, прилегающий к верхней пластинке, будет двигаться со скоростью v_1, а слой, прилегающий к нижней пластинке, будет находиться в покое. Промежуточные слои будут скользить один по другому со скоростью, пропорциональной их расстоянию до нижней пластинки. Если расстояние между пластинками обозначить n, то скорость v_y слоя жидкости, находящегося на расстоянии y от этой пластинки, будет равна $v_1(y/n)$.

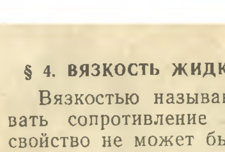


Рис. 1.2

Еще Ньютон высказал предположение (впоследствии подтвержденное опытом), что силы сопротивления, возникающие при таком скольжении слоев, пропорциональны площади соприкосновения слоев и скорости скольжения. Тогда, приняв площадь соприкосновения равной единице, можно записать

$$\tau = \mu (dv/dy), \tag{1.12}$$

где τ — сила сопротивления, отнесенная к единице площади, или напряжение трения; μ — коэффициент пропорциональности, зависящий от рода жидкости, или динамическая вязкость жидкости.

Таким образом, *вязкость есть физическое свойство жидкости, характеризующее ее сопротивляемость скольжению или сдвигу.*

Величину dv/dy изменения скорости в направлении, нормальном к направлению самой скорости, называют *градиентом скорости,* или *скоростью сдвига* (в схеме, представленной на рис. 1.2, очевидно $dv/dy = v_1/n$). В дальнейшем скорость сдвига будем обозначать также $\dot{\gamma}$. Тогда вместо уравнения (1.12) получим:

$$\tau = \mu\dot{\gamma}, \tag{1.13}$$

или

$$\dot{\gamma} = \tau/\mu. \tag{1.14}$$

Существуют жидкости, для которых зависимость (1.12) неприменима. В отличие от обычных ньютоновских эти жидкости называют неньютоновскими, или аномальными. Поэтому в более общем виде уравнение (1.14) следует записать в виде

$$\dot{\gamma} = dv/dy = f(\tau). \tag{1.15}$$

Выражение (1.15) справедливо как для ньютоновских, так и для неньютоновских жидкостей.

Очевидно, что для ньютоновских жидкостей $f(\tau) = \tau/\mu$, а для неньютоновских функция $f(\tau)$ может иметь различный вид в зависимости от рода жидкости.

В общих курсах гидравлики обычно изучают лишь ньютоновские жидкости; неньютоновские, как правило, здесь не рассматриваются, этим занимается реология — специальная наука, выделившаяся в самостоятельный раздел механики. Некоторые понятия и положения реологии, являющиеся необходимой теоретической предпосылкой для решения отдельных инженерных задач, связанных с применением неньютоновских жидкостей в нефтяном деле, рассматриваются в гл. 7.

Практически вязкость определяют опытным путем при помощи специальных приборов, называемых вискозиметрами. Конструкции вискозиметров, принцип их действия и методика измерений описываются в § 39.

Единицей измерения динамической вязкости является паскаль на секунду (Па · с), ее называют *пуазейлем.*

На практике динамическую вязкость часто измеряют в пуазах (П); так называют единицу динамической вязкости в физической системе единиц. Вязкость маловязких жидкостей и газов обычно измеряют в сотых долях пуаза, называемых сантипуазами (сП).

Между пуазейлем и пуазом существует следующее соотношение: 1 Па · с = 10 П.

В гидравлике часто пользуются также величиной, получаемой в результате деления динамической вязкости на плотность. Ее называют кинематической вязкостью и обозначают буквой ν. В соответствии с определением кинематическая вязкость

$$\nu = \mu/\rho.$$

Единицей кинематической вязкости является квадратный метр на секунду ($м^2/с$).

В физической системе кинематическую вязкость измеряют в стоксах (Ст). Сотую часть стокса называют сантистоксом (сСт).

Указанные единицы связаны между собой простым соотношением: 1 $м^2/с = 1 \cdot 10^4$ Ст.

Величину, обратную динамической вязкости $\xi = 1/\mu$, называют текучестью.

Как показывают многочисленные наблюдения, вязкость жидкости уменьшается с повышением температуры. Для разных

Для газов зависимость вязкости от давления и температуры весьма существенна: с повышением давления кинематическая вязкость газов уменьшается, а с увеличением температуры возрастает и наоборот (табл. 1.10).

Таблица 1.10

Кинематическая вязкость некоторых газов

Газ	t, °C	$p \cdot 0{,}1$, МПа	$\nu \cdot 10^4$, м²/с
Воздух	0	1	0,133
То же	100	1	0,245
»	0	0,01	13,3
»	0	100	0,00133
Кислород	0	1	0,014
Водород	0	1	0,945
Гелий	0	1	1,060
Окись углерода	0	1	0,130

Большие значения кинематической вязкости газов и отмеченные выше особенности ее изменения на первый взгляд могут показаться парадоксальными. Однако это легко объяснить, если учесть, что в знаменатель выражения для кинематической вязкости (1.14) входит плотность, подверженная для газов очень большим изменениям в зависимости от температуры и давления и имеющая для них весьма малые, по сравнению с капельными жидкостями, значения.

ГЛАВА ВТОРАЯ

ГИДРОСТАТИКА

§ 5. ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ

Гидростатикой называют раздел гидравлики, в котором рассматриваются законы равновесия жидкостей и практические приложения этих законов.

Прежде чем перейти к непосредственному изучению гидростатики, введем ряд новых понятий и определений. Выделим в жидкости, находящейся в равновесии, некоторый объем (рис. 2.1), рассечем его произвольной плоскостью AB на две части и мысленно отбросим одну из них, например, верхнюю. При этом к плоскости AB мы должны приложить силы, действие которых будет эквивалентно действию отброшенной верхней части объема на оставшуюся нижнюю его часть.

Рассмотрим в плоскости сечения AB замкнутый контур площадью ΔF, включающий в себя некоторую произвольную точку a. Пусть на эту площадь из названных сил взаимодействия приходится сила ΔP. Отношение

$$p_{\text{ср}} = \Delta P / \Delta F, \tag{2.1}$$

представляющее собой силу, действующую на единицу площади, будем называть средним гидростатическим давлением, или средним напряжением гидростатического давления по площади ΔF.

Истинное давление в различных точках этой площади может быть разным; в одних точках оно больше, а в других — меньше среднего гидростатического давления. Очевидно, что в общем случае среднее давление $p_{\text{ср}}$ будет тем меньше отличаться от истинного в точке a, чем меньшей будет площадь ΔF, и в пределе (при стремлении ее к нулю) среднее гидростатическое давление совпадает в этой точке с истинным.

Таким образом, истинное гидростатическое давление p (обычно называемое просто гидростатическим) будет

$$p = \lim \left| \frac{\Delta P}{\Delta F} \right|_{\Delta F \to 0}. \tag{2.2}$$

Для жидкостей, находящихся в равновесии, оно аналогично напряжению сжатия в твердых телах.

На практике гидростатическое давление определяют различными способами. Если при этом учитывают атмосферное давление, действующее на свободную поверхность жидкости, его называют полным или абсолютным.

Часто атмосферное давление на свободную поверхность не принимают во внимание, определяя так называемое избыточное, или манометрическое (сверх атмосферного), давление. Манометрическое давление есть разность между абсолютным давлением в жидкости и атмосферным давлением:

$$p_{ман} = p_{абс} - p_{атм}.$$

Встречаются случаи, когда гидростатическое давление в жидкости оказывается меньше атмосферного. В таких случаях говорят о вакууме (разрежении). Вакуум определяется разностью между атмосферным, и абсолютным давлением в жидкости ($p_{вак} = p_{атм} - p_{абс}$) и изменяется в пределах от нуля до 0,1 МПа.

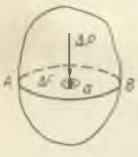


Рис. 2.1

Вакуум можно также характеризовать абсолютным давлением.

Атмосферное давление зависит от высоты над уровнем моря (табл. 2.1).

Гидростатическое давление обладает следующими двумя основными свойствами; оно направлено по внутренней нормали к площадке, на которую действует, и его значение в данной точке не зависит от направления (т. е. от ориентировки в пространстве площадки, включающей эту точку).

Первое свойство является простым следствием того положения, что в покоящейся жидкости отсутствуют касательные и растягивающие усилия. Предположим, что гидростатическое давление направлено не по нормали, т. е. не перпендикулярно, а под некоторым углом к площадке. Тогда его можно разложить на нормальную и касательную составляющие. Наличие последней ввиду отсутствия в покоящейся жидкости сил сопротивления сдвигающим усилиям неизбежно привело бы к движению вдоль площадки, т. е. нарушило бы ее равновесие. Следовательно, единственно возможным направлением гидростатического давления является его направление по нормали к площадке.

Таблица 2.1

Атмосферное давление в зависимости от высоты над уровнем моря

Высота над уровнем моря, м	Атмосферное давление, кПа	Высота над уровнем моря, м	Атмосферное давление, кПа
0	101,0	500	95,0
100	100,0	800	92,0
200	99,0	1000	90,0
300	97,5	1500	84,5
400	96,5	2000	80,0

Предположим далее, что гидростатическое давление будет направлено по внешней, а не по внутренней нормали, т. е. не внутрь рассматриваемого объема, а наружу. Так как жидкость не оказывает сопротивления растягивающим усилиям, то и в этом случае частицы жидкости придут в движение и ее равновесие будет нарушено. Значит, гидростатическое давление всегда направлено по внутренней нормали и представляет собой сжимающее давление.

Для доказательства второго свойства выделим в покоящейся жидкости призму (рис. 2.2) сечением ΔF. Один торец призмы пусть будет перпендикулярен к образующей, а второй — наклонен к ней под некоторым углом α. Длину призмы обозначим L. Мысленно отбросив жидкость, окружающую выделенную в ней призму, заменим действие отброшенной жидкости силами давления на грани призмы. В соответствии со сказанным выше, это будут силы. нормальные к граням.

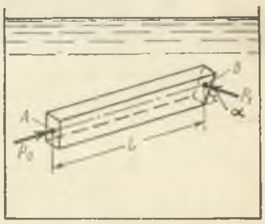


Рис. 2.2

Обозначим далее через p_0 и p_1 среднее давление соответственно на торце, перпендикулярном к образующей, и на скошенном торце; составим выражение для суммы проекций всех сил, действующих на призму и на ось, совпадающую с осью призмы. Поскольку призма находится в равновесии, указанная сумма проекций сил должна равняться нулю. Пусть Q — проекция на эту ось единичной объемной силы, т. е. силы, приложенной к единице объема (в частном случае, когда из объемных сил действует только сила тяжести, $Q = -\rho g$). Тогда проекция объемных сил, приложенных к призме, будет $Q\Delta FL$; проекция силы давления на торец A $p_0\Delta F$, а силы давления на скошенный торец — $p_1(\Delta F/\sin\alpha)\ \sin\alpha = -p_1\Delta F$.

Силы давления на боковые грани призмы проекций на ее ось не дадут. Поэтому сумма проекций всех сил составит

$$p_0\Delta F - p_1\Delta F + Q\Delta FL = 0,$$

откуда

$$p_1 = p_0 + QL. \tag{2.3}$$

Следовательно, величина p_1 оказывается не зависящей от угла α. В пределе (при ΔF, стремящемся к нулю) p_0 и p_1 представляют собой истинные значения давления в точках A и B и в соответствии с уравнением (2.3) определяются положением этих точек в пространстве.

Таким образом, гидростатическое давление во всякой точке имеет одно и то же значение по всем направлениям и является функцией только ее координат:

$$p = f(x,\ y,\ z). \qquad (2.4)$$

Из уравнения (2.3) следует также, что если давление, например в точке A, изменится на величину Δp_0, то на такую же величину изменится оно и в любой точке жидкости. В этом заключается известный из физики закон Паскаля, формулируемый обычно следующим образом: давление, производимое на жидкость, передается внутри жидкости во все стороны с одинаковой силой. На применении этого закона основываются расчеты машин, работающих под гидростатическим давлением.

§ 6. ГИДРОСТАТИЧЕСКИЕ МАШИНЫ

Рассмотрим принцип действия и основные схемы некоторых, наиболее часто применяемых гидростатических машин, работа которых основана на использовании закона Паскаля.

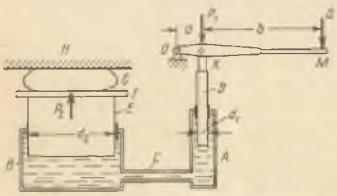


Рис. 2.3

Гидравлический пресс. Гидравлический пресс применяют для получения больших сжимающих усилий, что необходимо, например, для деформации металлов при обработке давлением (прессование, ковка, штамповка), при испытании различных материалов, уплотнении рыхлых материалов и т. д. Принципиальная схема пресса показана на рис. 2.3. Пресс состоит из двух цилиндров A и B (малого и большого диаметра), соединенных трубкой C. В малом цилиндре находится поршень D, соединенный с рычагом OKM, имеющим неподвижную шарнирную опору в точке O, а в большом цилиндре — поршень (плунжер) E, составляющий одно целое со столом (платформой) F, на котором помещается прессуемое тело G. Рычаг OKM приводится в действие вручную или при помощи специального двигателя. При этом поршень D начинает двигаться вниз и оказывать на находящуюся под ним жидкость давление, которое передается на поршень E и заставляет его вместе со столом двигаться вверх до тех пор, пока тело G не войдет в соприкосновение с неподвижной плитой H. При дальнейшем подъеме стола начинается процесс прессования (сжатия) тела G.

Если рассматриваемое устройство служит не для прессования, а только для поднятия груза, т. е. представляет собой гидравлический подъемник, неподвижная плита H оказывается лишней и из конструкции исключается.

Помимо указанных основных частей гидравлический пресс всегда снабжается всасывающими и нагнетательными клапанами, регулирующими работу пресса, и клапаном, предохраняющим его от разрыва при чрезмерном возрастании давления (на схеме клапаны не показаны).

Установим основные соотношения, определяющие работу пресса. Пусть усилие, действующее на конец M рычага OKM, будет Q, а плечи рычага $OK = a$, $KM = b$. Тогда, рассматривая равновесие рычага, составим уравнение моментов относительно его центра вращения O:

$$Q(a + b) = P_1 a,$$

из которого легко найдем силу

$$P_1 = Q(a + b)/a,$$

передаваемую на поршень D малого цилиндра и создающую в жидкости добавочное гидростатическое давление:

$$p = \frac{P_1}{\pi d_1^2/4}.$$

Это давление передается на поршень E большого цилиндра, в результате чего полная сила давления на этот поршень, обусловливаемая силой Q, будет

$$P_2 = p\,\frac{\pi d_2^2}{4} = Q\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \frac{a + b}{a},$$

где d_1 и d_2 — диаметры поршней, соответственно малого и большого.

Из последнего выражения видно, что силу P_2 можно получить сколь угодно большой путем выбора соответствующих размеров цилиндров и плеч движущего рычага. Действительная сила P_2', передаваемая на стол и осуществляющая процесс прессования, оказывается несколько меньше силы P_2 из-за неизбежных потерь энергии на преодоление сил трения в движущихся частях пресса и утечек жидкости через различные неплотности и зазоры. Это учитывается введением в последнюю формулу коэффициента полезного действия пресса η *:

$$P_2' = Q\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \frac{a + b}{a}\,\eta.$$

* Кроме того, в величину P_2' следовало бы вносить поправку, учитывающую различие в высотном положении нижних поверхностей поршней E и D; однако она обычно столь незначительна, что в практических расчетах ее не учитывают.

Практически $\eta = 0{,}75 \div 0{,}85$. В современных гидравлических прессах можно получить весьма большие усилия. В этих конструкциях малый цилиндр выполняют обычно в виде поршневого насоса высокого давления, подающего рабочую жидкость (воду или масло) в большой цилиндр (собственно пресс), часто с включением специального устройства — гидравлического аккумулятора, выравнивающего работу насоса.

Гидравлический аккумулятор служит для аккумулирования, т. е. накапливания, собирания энергии, и применяется в тех случаях, когда необходимо выполнить кратковременную работу, требующую значительных механических усилий, например поднять большую тяжесть, открыть и закрыть ворота шлюзов и т. п.

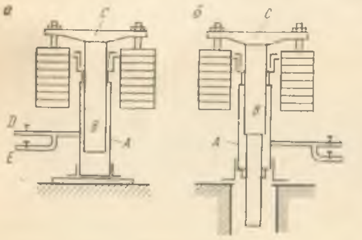


Рис. 2.4

Наиболее широкое применение гидравлические аккумуляторы получили при работе гидравлических прессов. Их используют здесь как установки, накапливающие энергию (жидкость) в период холостого хода пресса и отдающие ее при рабочем ходе, когда подача насосов оказывается недостаточной. Различают грузовые и пневматические аккумуляторы. Грузовой аккумулятор (рис. 2.4, *а*) состоит из цилиндра A, в котором помещен плунжер B, соединенный своей верхней частью с платформой С, несущей большой груз. В аккумулятор по трубе D насосом нагнетается жидкость (вода или масло), которая поднимает вверх плунжер с грузом. При достижении крайнего верхнего положения насос автоматически выключается.

Обозначим через G вес плунжера с грузом, а H — полную высоту его подъема. Тогда энергия, накопленная аккумулятором при полном подъеме плунжера, будет GH, а создаваемое им в жидкости гидростатическое давление $p = G/F$, где F — площадь сечения плунжера. Так как вес груза — величина постоянная, давление жидкости в аккумуляторе не зависит от степени его разрядки, т. е. от количества жидкости, находящейся в цилиндре. Под этим постоянным давлением жидкость подводится по трубе E к гидравлическим машинам-орудиям, например к прессовым насосам, обеспечивая тем самым их работу с постоянной нагрузкой.

Полная работа, совершаемая аккумулятором, определяется выражением $A = pFH\eta$.

Гидростатическое давление, создаваемое аккумулятором, будет тем больше, чем меньше площадь сечения плунжера. Однако при чрезмерном уменьшении сечения плунжер может оказаться недостаточно прочным. Поэтому в тех случаях, когда необходимо получить очень большое давление, применяют так называемые дифференциальные аккумуляторы со ступенчатым поршнем (рис. 2.4, *б*), в которых давление на жидкость передается через небольшую площадь кольцевого уступа ступенчатого поршня, пропущенного сквозь обе крышки цилиндра (верхнюю и нижнюю). Следовательно, сечение поршня может быть выбрано такого размера, при котором обеспечивается необходимая прочность.

Рис. 2.5

В машиностроении (особенно, когда необходимо получить большие давления) применяют в основном пневматические аккумуляторы, представляющие собой закрытый сосуд, заполненный сжатым газом. При подаче в этот сосуд жидкости объем газовой камеры уменьшается, вследствие чего давление газа повышается и достигает к концу зарядки (заполнения жидкостью) своего наибольшего значения. Чтобы предотвратить возможность растворения газа в жидкости, в таких аккумуляторах применяют специальные разделители (обычно поршневые или диафрагменные). На рис. 2.5 представлена принципиальная схема газового аккумулятора баллонного типа с диафрагменным разделителем (мембраной) A.

§ 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ЖИДКОСТИ

Выделим в жидкости, находящейся в покое, бесконечно малый ее объем в форме параллелепипеда со сторонами, параллельными осям координат и равными соответственно dx, dy, dz (рис. 2.6), и рассмотрим равновесие действующих на этот параллелепипед внешних сил.

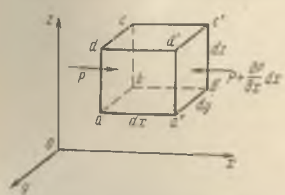


Рис. 2.6

Такими силами являются: 1) поверхностные силы гидростатического давления на грани параллелепипеда со стороны окружающей его жидкости; 2) объемные (массовые) силы.

Составим уравнения проекций этих сил на координатные оси. При этом ограничимся подробным рассмотрением лишь одного из них, например уравнения проекций на ось x. Обозначим через p гидростатическое давление в одной какой-либо точке грани $abcd$ и будем считать его средним для всей грани. Тогда полная сила давления на эту грань с точностью до бесконечно малых высшего порядка определится выражением $dP_x = pdydz$, где $dydz$ — площадь грани.

Давление на противоположную грань $a'b'c'd'$ будет отличаться от этого давления. Здесь необходимо учесть, что гидростатическое давление в покоящейся жидкости зависит от координат и изменяется непрерывно по линейному закону. Поскольку при переходе от грани $abcd$ к грани $a'b'c'd'$ изменилась только одна координата x (на величину dx), среднее гидростатическое давление на этой грани будет $p+(\partial p/\partial x)\,dx$, где $\partial p/\partial x$ — частный дифференциал, взятый по координате x.

При этом полная сила давления на грань $a'b'c'd'$

$$dP_x^* = [p + (\partial p/\partial x)\,dx]\,dydz.$$

Указанные силы dP_x и dP_x^* проектируются на ось x в натуральную величину. Направление первой из них совпадает с ее положительным направлением, а вторая направлена в противоположную сторону.

Найдем далее проекцию объемных (массовых) сил dQ на ось x. Определим ее как произведение элементарной массы рассматриваемого параллелепипеда $dm=\rho dxdydz$ на проекцию ускорения X * этих сил на ту же ось:

$$dQ_x = dmX = \rho dxdydzX.$$

Просуммировав и приравняв к нулю установленные таким образом выражения для проекций всех действующих на рассматриваемый параллелепипед сил, получим первое уравнение равновесия:

$$dP_x - dP_x^* - dQ_x = pdy\,dz - [p + (\partial p/\partial x)\,dx]\,dy\,dz - \rho dx\,dy\,dzX = 0.$$

После ряда несложных преобразований найдем

$$(\partial p/\partial x)\,dx\,dy\,dz - \rho dxdydzX = 0.$$

Разделив затем это уравнение на $\rho dxdydz$ (т. е. отнеся все силы к единице массы), будем иметь:

$$(1/\rho)\,(\partial p/\partial x) - X = 0. \tag{2.5}$$

Аналогичные уравнения получим для проекций на оси y и z:

$$(1/\rho)\,(\partial p/\partial y) - Y = 0; \tag{2.5'}$$

$$(1/\rho)\,(\partial p/\partial z) - Z = 0. \tag{2.5''}$$

Эти уравнения можно представить также в виде

$$\partial p/\partial x = \rho X;$$

$$\partial p/\partial y = \rho Y; \tag{2.6}$$

$$\partial p/\partial z = \rho Z.$$

* Проекции ускорения на другие оси обозначим Y и Z.

Их называют дифференциальными уравнениями равновесия жидкости. Впервые они были выведены в 1775 г. Л. Эйлером и выражают в дифференциальной форме закон распределения гидростатического давления.

§ 8. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ГИДРОСТАТИКИ

Будем исходить из дифференциальных уравнений равновесия (2.6). Умножим каждое из них соответственно на dx, dy, dz и сложим. Получим

$$(\partial p/\partial x)\,dx + (\partial p/\partial y)\,dy + (\partial p/\partial z)\,dz = \rho\,(Xdx + Ydy + Zdz). \tag{2.7}$$

Так как в случае равновесия гидростатическое давление является функцией только координат $p=f\ (x,\ y,\ z)$, левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал dp. Следовательно,

$$dp = \rho\,(Xdx + Ydy + Zdz). \tag{а}$$

Соблюдение условий равновесия требует при этом, чтобы и правая часть уравнения (2.7) была полным дифференциалом некоторой другой функции U координат $U=f\ (x,\ y,\ z)$, частные производные которой по координатам равны проекциям ускорений объемных сил:

$$\partial U/\partial x = X; \qquad \partial U/\partial y = Y; \qquad \partial U/\partial z = Z. \tag{б}$$

Такая функция называется силовой, или потенциальной, а силы, удовлетворяющие условиям (б), силами, имеющими потенциал.

Таким образом,

$$Xdx + Ydy + Zdz = (\partial U/\partial x)\,dx + (\partial U/\partial y)\,dy + (\partial U/\partial z)\,dz = dU. \tag{в}$$

При этом уравнение (2.7) принимает вид

$$dp = \rho dU \tag{2.8}$$

и может быть проинтегрировано.

Рассмотрим наиболее часто встречающийся на практике случай равновесия тяжелой (т. е. находящейся под воздействием одной только силы тяжести), однородной ($\rho=\mathrm{const}$) капельной жидкости. При этом проекции ускорения объемных сил будут равны: $X=0$; $Y=0$; $Z=-g$, и уравнение (2.8) получит следующую форму записи:

$$dp = -\rho g dz$$

или, что то же самое,

$$dp + \rho g dz = 0. \tag{2.8'}$$

Проинтегрировав последнее уравнение, найдем:

$$p + \rho g z = C. \tag{2.9}$$

Постоянная интегрирования C может быть определена здесь, например, из условий на свободной поверхности жидкости. Обозначив через p_0 давление в какой-нибудь точке этой поверхности, а через z_0 ее ординату, будем иметь:

$$p_0 + \rho g z_0 = C.$$

После подстановки последнего выражения в уравнение (2.9) получим

$$p + \rho g z = p_0 + \rho g z_0,$$

или

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z) = p_0 + \rho g h, \tag{2.10}$$

где $h = z_0 - z$ — глубина погружения рассматриваемой точки под свободной поверхностью.

Уравнение (2.10) является фундаментальным. Оно называется основным уравнением гидростатики и показывает, что гидростатическое давление в любой точке покоящейся тяжелой капельной жидкости полностью определяется глубиной ее погружения под свободной поверхностью жидкости или под какой-либо другой поверхностью с известным на ней давлением, говоря иначе, изменяется в зависимости только от вертикальной координаты этой точки.

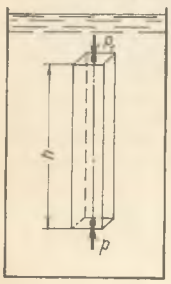


Рис. 2.7

Уравнение (2.10) можно получить и более простым путем. Для этого выделим в жидкости вертикальную призму сечением ΔF и высотой h (рис. 2.7) и спроектируем все приложенные к ней силы на вертикальную ось. Поскольку проекции сил давления на боковые грани призмы равны нулю, уравнение равновесия получит вид

$$p\Delta F = p_1 \Delta F + \rho g h \Delta F,$$

где p_1, p — среднее давление, соответственно, на верхний и нижний торец призмы; $\rho g h \Delta F$ — сила тяжести (вес) призмы.

Отсюда

$$p = p_1 + \rho g h. \tag{2.11}$$

Если верхний торец призмы совпадает со свободной поверхностью жидкости, давление на которой равно p_0, будем иметь $p = p_0 + \rho g h$, т. е. уравнение, тождественное (2.10).

Подчеркнем также, что если бы при выводе уравнения (2.3) мы рассматривали вертикальную призму и в качестве объемных сил учитывали только силу тяжести (для этого следует положить $Q = -\rho g$), то вместо (2.3) получили бы уравнение (2.11).

Применив такие рассуждения к призме с горизонтальной осью, мы получим для суммы проекций всех сил на эту ось выражение $p_3 \Delta F = p_4 \Delta F$, т. е. $p_3 = p_4$, где p_3, p_4 — давления на торцовые площадки призмы.

Таким образом, в случае покоящейся тяжелой жидкости давление во всех точках одной и той же горизонтальной плоскости будет одинаковым и, следовательно, в формулах (2.10) и (2.11) значения p совпадут с истинным значением давления. Вследствие этого и гидростатическое давление полностью определяется глубиной погружения рассматриваемой точки под свободной поверхностью жидкости или под поверхностью с известным на ней давлением, говоря иначе, изменяется в зависимости только от вертикальной координаты точки.

Особенно простым получается выражение для манометрического (избыточного) давления в жидкости со свободной поверхностью: $p = \rho g h$, т. е. давление пропорционально глубине погружения.

Рассмотрим также равновесие тяжелой газообразной жидкости. При этом ограничимся случаем, когда газ во всех точках имеет одинаковую температуру и находится далеко от точки сжижения, т. е. когда (по Мариотту)

$$p/\gamma = p/\rho g = K = \text{const}.$$

Поскольку из объемных сил здесь по-прежнему действует только сила тяжести, будет справедливо уравнение (2.8′). В таком случае его можно записать следующим образом:

$$dp + \rho g dz = dp + (p/K)\,dz = 0,$$

или

$$dp/p + (1/K)\,dz = 0.$$

Проинтегрировав последнее выражение, получим

$$K \ln p + z = C.$$

Постоянную C найдем, если известно давление газа в некоторой точке, ордината которой равна z_0:

$$C = K \ln p_0 + z_0.$$

Тогда

$$K \ln p + z = K \ln p_0 + z_0$$

и, следовательно,

$$K \ln (p/p_0) = z_0 - z = h, \tag{2.12}$$

где h — глубина погружения точки с давлением p под точкой с давлением p_0.

Формулу (2.12) применяют при так называемом барометрическом нивелировании, заключающемся в определении разности высот двух точек земной поверхности по соответственным показателям барометров.

§ 9. ПОВЕРХНОСТИ РАВНОГО ДАВЛЕНИЯ

Поверхность, проведенную в покоящейся жидкости таким образом, что давление во всех ее точках будет одинаковым, называют поверхностью равного давления.

Поскольку для такой поверхности $p = \mathrm{const}$, то, очевидно, $dp = 0$, а так как при этом $\rho \neq 0$, то, как это следует из уравнения (2.8):

$$dU = Xdx + Ydy + Zdz = 0. \tag{2.13}$$

Выражение (2.13) представляет собой дифференциальное уравнение поверхности равного давления, которая, как видим, одновременно является поверхностью равного потенциала, или поверхностью уровня.

Поверхности равного давления обладают следующими основными свойствами: построенные для различных гидростатических давлений, они не имеют общих точек, т. е. не пересекаются одна с другой, и всегда нормальны к направлению равнодействующей внешних объемных сил, приложенных к жидкости.

Исследуем формы поверхностей равного давления и свободной поверхности жидкости. Сначала рассмотрим случай однородной тяжелой капельной жидкости. Будем считать, что размеры сосуда, который заполняет эта жидкость, весьма незначительны по сравнению с размерами Земли и поэтому изменением силы тяжести (по значению и направлению) в пределах сосуда вполне возможно пренебречь. При этом проекции ускорения объемных сил будут равны: $X = 0$; $Y = 0$; $Z = -g$ и уравнение (2.13) примет вид $-gdz = 0$ или после интегрирования

$$z = \mathrm{const}. \tag{2.14}$$

Это и есть уравнение горизонтальной плоскости, форму которой имеют все поверхности равного давления в тяжелой жидкости. Частным случаем таких поверхностей является открытая (свободная) поверхность, на которой давление равно атмосферному.

Рассмотрим далее примеры определения форм поверхностей равного давления в случаях так называемого относительного покоя, т. е. покоя жидкости относительно содержащего ее сосуда, в то время как сам сосуд находится в движении. Из теоретической механики известно, что в подобных случаях при составлении уравнений равновесия относительно системы координат, движущейся вместе с телом, к силам тяжести должны

быть добавлены и силы инерции, направление которых, как известно, всегда противоположно направлению ускорения.

Сначала определим поверхности уровня в тяжелой жидкости, находящейся в цистерне, движущейся по горизонтальному пути в направлении оси x с постоянным ускорением a (рис. 2.8). В этом случае $X = -a$; $Y = 0$; $Z = -g$ и дифференциальное уравнение поверхности равного давления записывается так:

$$-adx - gdz = 0,$$

или

$$ax + gz = \mathrm{const} \tag{2.15}$$

и представляет собой уравнение наклонной плоскости $b-b$, составляющей с горизонтом угол α:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = dx/dz = a/g.$$

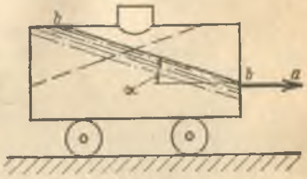


Рис. 2.8

Поскольку значение этого угла определяется только ускорениями, приходим к выводу, что положение свободной поверхности не будет зависеть от рода находящейся в цистерне жидкости. Любая другая поверхность уровня в жидкости также будет плоскостью, наклоненной к горизонту под углом α. Если бы движение цистерны было не равноускоренным, а равнозамедленным, направление ускорения изменилось бы на обратное и наклон свободной поверхности также обратился бы в другую сторону (см. рис. 2.8, пунктир).

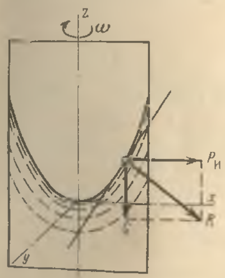


Рис. 2.9

Теперь рассмотрим часто встречающийся на практике случай относительного покоя жидкости во вращающихся сосудах (например, в сепараторах и центрифугах, применяемых для разделения жидкостей). Здесь (рис. 2.9) на любую частицу жидкости при ее относительном равновесии действуют объемные силы: тяжести $G = mg$ и инерции $P_и = m\omega^2 r$, где r — расстояние частицы от оси вращения $\left(r = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$; ω — частота вращения сосуда.

Проекции ускорений этих сил на оси координат будут равны:

$X = \omega^2 x$; $Y = \omega^2 y$; $Z = -g$, что приводит к следующему дифференциальному уравнению:

$$\omega^2 xdx + \omega^2 ydy - gdz = 0.$$

2 Заказ № 1363

Интегрирование этого уравнения дает

$$\omega^2 x^2/2+\omega^2 y^2/2-gdz=\mathrm{const}$$

или

$$(\omega^2/2)(x^2+y^2)-gdz=\omega^2 r^2/2-gdz=\mathrm{const}. \qquad (2.16)$$

Поверхности равного давления, в том числе и свободная поверхность жидкости, описываемые уравнением (2.16), представляют собой параболоиды вращения относительно оси z, которые в сечении вертикальными плоскостями дают параболы, а в горизонтальных плоскостях — окружности.

Распределение давления в жидкости может быть получено при этом из основного уравнения равновесия (2.8). Для данного случая имеем

$$dp=\rho(\omega^2 x dx+\omega^2 y dy-gdz),$$

откуда после интегрирования находим

$$p=(\rho\omega^2/2)(x^2+y^2)-\rho gdz+C=\rho\omega^2 r^2/2-\rho gdz+C.$$

Если затем давление в некоторой точке на оси вращения ($x=0$; $y=0$, $z=z_0$) обозначить p_0 и составить для нее уравнение, аналогичное предыдущему: $p_0=-\rho g z_0+C$, определим постоянную интегрирования

$$C=p_0+\rho g z_0.$$

Тогда

$$p=\rho\omega^2 r^2/2-\rho gz+p_0+\rho g z_0=p_0+\rho\omega^2 r^2/2+\rho g(z_0-z). \qquad (2.17)$$

Отсюда видно, что при вращении сосуда давление в жидкости оказывается больше обычного гидростатического давления в неподвижном сосуде и будет тем больше, чем больше радиус и угловая скорость.

§ 10. СООБЩАЮЩИЕСЯ СОСУДЫ

Предположим, что имеются два сообщающихся сосуда A и B (рис. 2.10), заполненных жидкостями различной плотности (ρ_1 и ρ_2). Будем считать, что в общем случае сосуды закрыты и давления на свободных поверхностях жидкости в них соответственно равны p_1 и p_2. Пусть поверхностью раздела жидкостей в сосуде A является поверхность ab и слой жидкости в нем равен h_1. Определим в этих условиях положение уровня жидкости в сосуде B.

Гидростатическое давление в плоскости ab в соответствии с уравнением (2.10) будет $p=p_1+\rho_1 g h_1$, если определять его исходя из известного давления p_1 на поверхности жидкости в сосуде A.

Это давление можно также определить следующим образом:

$$p=p_2+\rho_2 g h_2,$$

где h_2 — искомая глубина погружения поверхности ab под уровнем жидкости в сосуде B. Отсюда получим условие для определения h_2:

$$p_1+\rho_1 g h_2=p_2+\rho_2 g h_2.$$

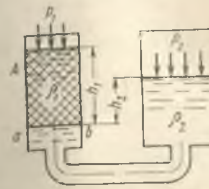


Рис. 2.10

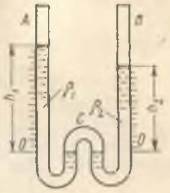


Рис. 2.11

В частном случае, когда сосуды открыты (давление на свободных поверхностях равно атмосферному) и, следовательно, $p_1=p_2=p_{\text{атм}}$, имеем

$$\rho_1 h_1=\rho_2 h_2,$$

откуда

$$\rho_1/\rho_2=h_2/h_1, \qquad (2.18)$$

т. е. в сообщающихся сосудах при одинаковом давлении на свободных поверхностях высота жидкостей, отсчитываемая от поверхности раздела, обратно пропорциональна их плотности.

На принципе сообщающихся сосудов основано устройство прибора для определения плотности жидкости (рис. 2.11). Сообщающиеся сосуды в нем — вертикальные стеклянные трубки A и B соединены изогнутым коленом C. Одну из трубок заполняют исследуемой жидкостью, другую — жидкостью известной плотности ρ_1 (например, водой), причем в таких количествах, чтобы уровни жидкостей в колене C находились на одной и той же отметке прибора O. Затем измеряют высоту стояния жидкостей в трубках (h_1 и h_2) и, зная, что высота обратно пропорциональна плотности, легко находят плотность исследуемой жидкости: $\rho_2=\rho_1(h_1/h_2)$.

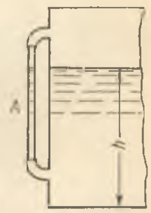


Рис. 2.12

Если оба сообщающихся сосуда будут заполнены одной и той же жидкостью, то $\rho_1=\rho_2$ и $h_1=h_2$, т. е. высота стояния жидкости в этих сосудах будет одинакова. На этом основано устройство так называемых водомерных стекол А (рис. 2.12), применяемых для определения уровня жидкости h в закрытых сосудах (например, в резервуарах, паровых котлах и др.).

Принцип сообщающихся сосудов лежит в основе ряда других приборов, служащих для измерения давления и имеющих весьма широкое применение на практике.

§ 11. ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ

Приборы для измерения гидростатического давления можно подразделить на две основные группы: жидкостные и механические.

Простейшим прибором жидкостного типа является пьезометр, измеряющий давление в жидкости высотой столба той же жидкости.

Пьезометр (рис. 2.13) представляет собой стеклянную трубку небольшого диаметра обычно не менее 5 мм, открытую с одного конца. Второй конец трубки присоединен к сосуду, в котором измеряют давление.

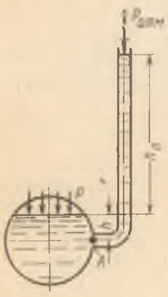


Рис. 2.13

Пусть давление p на поверхности жидкости в сосуде будет выше атмосферного. Тогда жидкость в трубке пьезометра поднимется выше уровня жидкости в сосуде на некоторую высоту $h_п$. Гидростатическое давление жидкости в точке A, взятой у основания пьезометрической трубки на глубине h от свободной поверхности жидкости в сосуде, определяется по основному уравнению гидростатики:

$$p_A = p_{атм} + \rho g (h_п + h),$$

следовательно,

$$h_п + h = (p_A - p_{атм})/\rho g.$$

Кроме того, имеем $p_A = p + \rho g h$. Находим $p = p_{атм} + \rho g h_п$.

Как видно, высота поднятия жидкости в пьезометрической трубке, так называемая пьезометрическая высота, характеризует избыточное давление в сосуде и может служить мерой для определения его значения.

Измерение давления высотой столба жидкости весьма удобно и часто применяется в технике.

Давление, равное 1 Па, соответствует ртутному столбу высотой 0,0075 мм или водяному столбу высотой 0,102 мм.

Полезно запомнить также, что физическая атмосфера (1,033 кгс/см²) определяется ртутным столбом высотой 760 мм. Для нефтей и нефтепродуктов, имеющих меньшую плотность, высота столба жидкости в пьезометре, естественно, будет больше.

Пьезометр — очень чувствительный и точный прибор, однако он удобен только при измерении небольших давлений. Для значительных давлений трубка пьезометра должна быть чрезмерно длинной, что осложняет его применение. В этом случае используют так называемые жидкостные манометры, в которых давление уравновешивается не жидкостью, находящейся в сосуде, а жидкостью большей плотности. Обычно такой жидкостью является ртуть. Так как плотность ртути больше плотности воды в 13,6 раза, то трубка ртутного манометра оказывается значительно короче пьезометрической и сам прибор компактнее.

Ртутный манометр (рис. 2.14) представляет собой U-образную стеклянную трубку, изогнутое колено которой заполняется ртутью. Под действием давления p в сосуде уровень ртути в левом колене манометра понижается, а в правом — повышается. При этом гидростатическое давление в точке A, взятой на поверхности ртути в левом колене, определяется по аналогии с указанным выше:

$$p_A = p + \rho_1 g h_1 = p_{атм} + \rho_{рт} g h_{рт},$$

где ρ_1, $\rho_{рт}$ — плотность, соответственно, жидкости в сосуде и ртути. Отсюда

$$p = p_{атм} + \rho_{рт} g h_{рт} - \rho_1 g h_1.$$

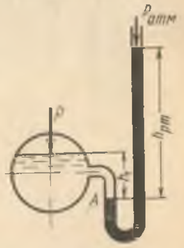


Рис. 2.14

Для измерения высоких давлений применяют поршневой манометр, представляющий собой обращенный гидравлический пресс.

Поршневой манометр (рис. 2.15) состоит из трубки A, через которую измеряемое давление p передается на поршень B, оканчивающийся широкой металлической пластинкой C. Под пластинкой находится резиновая диафрагма D, соприкасающаяся с водой, заполняющей короткое колено манометра E. Нижнюю часть этого колена и открытую трубку G заполняют ртутью.

Если обозначить f — площадь поршня, F — площадь металлической пластинки, h — высоту ртути в манометрической трубке, то согласно уравнению равновесия

$$p = (F/f)\, \rho_{рт} g h.$$

Из этого выражения видно, что поршневой манометр при сравнительно малой высоте ртутного столба позволяет измерять весьма высокие давления.

Дифференциальный манометр (рис. 2.16) применяют в тех случаях, когда необходимо измерить не давление в сосуде, а разность давлений в двух сосудах (A и B) или в двух точках жидкости в одном и том же сосуде.

Здесь, как и раньше, для давления p на уровне поверхности ртути в левом колене (точка C) имеем

$$p = p_A + \rho_1 g h_1 = p_B + \rho_1 g h_2 + \rho_{рт} g h,$$

откуда

$$p_A - p_B = \rho_1 g (h_2 - h_1) + \rho_{рт} g h$$

или, поскольку $h_2 - h_1 = -h$,

$$p_A - p_B = (\rho_{рт} - \rho_1) g h.$$

Таким образом, разность давлений определяется разностью уровней в двух коленах дифференциального манометра.

Микроманометры используют при измерениях незначительных давлений и измерениях повышенной точности. Одна из конструкций микроманометра, так называемый наклонный микроманометр, показана на рис. 2.17. Манометр включает в себя резервуар A, присоединяемый к сосуду, в котором измеряют давление, и манометрическую трубку B, угол наклона которой к горизонту α можно менять.

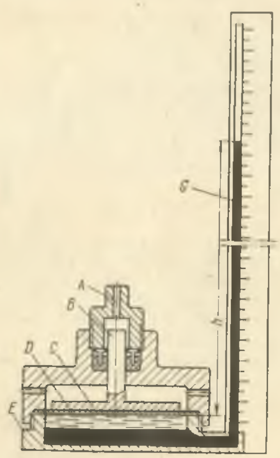


Рис. 2.15

Рис. 2.16

Давление у основания трубки, измеряемое микроманометром, определяется выражением $p = \rho g l \sin \alpha$.

По сравнению с обычным манометром микроманометр обладает значительно бо́льшей точностью измерений, так как он позволяет вместо малой высоты h (см. рис. 2.17) отсчитывать длину l тем большую, чем меньше угол α.

Для измерения давления ниже атмосферного (в сосуде имеется вакуум) служат приборы, называемые вакуумметрами.

Вакуумметры обычно измеряют не непосредственно давление, а вакуум, т. е. давление, не достающее до атмосферного. Принципиально они ничем не отличаются от ртутных манометров и представляют собой заполненную ртутью изогнутую трубку (рис. 2.18), один конец которой A соединяется с сосудом B, где измеряется давление p, а другой C открыт. Например, нужно измерить давление газа в сосуде B. В этом случае имеем $p_{атм} = p + \rho_{рт} g h_{рт}$, откуда $p = p_{атм} - \rho_{рт} g h_{рт}$.

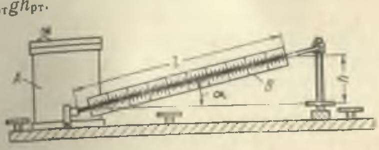


Рис. 2.17

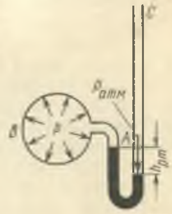


Рис. 2.18

Высоту $h_{рт} = (p_{атм} - p)/\rho_{рт} g$, соответствующую вакууму в сосуде ($p_{вак} = p_{атм} - p$), обычно называют вакуумметрической высотой и обозначают $h_{вак}$.

Рис. 2.19

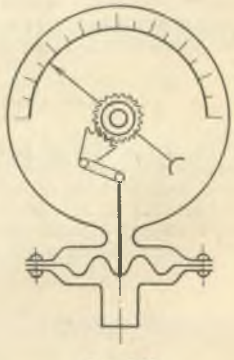


Рис. 2.20

Не всегда манометры и вакуумметры заполняют ртутью. В отдельных случаях (в зависимости от назначения и условий работы) для этой цели используют и другие жидкости. При этом, однако, следует иметь в виду, что для заполнения вакуумметров нельзя применять летучие жидкости (спирт, эфир), так как при пониженном давлении они будут интенсивно испаряться и могут закипеть.

Применение рассмотренных приборов жидкостного типа, в том числе ртутных, ограничивается областью сравнительно невысоких давлений. В основном их используют в лабораторной практике.

Если необходимо измерять высокие давления, применяют приборы второго типа — механические.

Пружинный манометр (рис. 2.19) является наиболее распространенным из механических манометров. Он состоит из полой тонкостенной изогнутой латунной трубки (пружины A), один конец которой запаян и соединен посредством цепи B с зубчатым механизмом C. Второй, открытый конец трубки сообщается с сосудом, в котором замеряется давление. Через этот конец в трубку A поступает жидкость. Под действием давления пружина частично распрямляется и через зубчатый механизм приводит в движение стрелку, по отклонению которой определяют значение давления. Такие манометры обычно снабжаются градуированной шкалой, показывающей давление в атмосферах, а иногда и самописцами.

Кроме того, существуют так называемые мембранные манометры, в которых жидкость воздействует на тонкую металлическую (или из прорезиненной материи) пластинку — мембрану. Деформация мембраны посредством системы рычагов передается стрелке, указывающей значение давления. Схема такого манометра изображена на рис. 2.20.

§ 12. ДАВЛЕНИЕ НА ПЛОСКИЕ СТЕНКИ

Зная закон распределения гидростатического давления в жидкости, можно найти полную силу давления на ограничивающие жидкость поверхности — стенки и дно сосуда. Эта задача сводится к определению силы давления (по значению и направлению) и нахождению точки ее приложения.

Рассмотрим сначала плоские поверхности — плоские стенки.

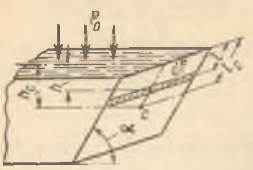


Рис. 2.21

Предположим, что имеется плоская стенка площадью F, наклоненная к горизонту под некоторым углом α (рис. 2.21). Разделим ее по высоте на ряд элементарных горизонтальных (весьма узких) полосок dF и определим давление на одну из них. Гидростатическое давление в любой точке на оси полоски определяется формулой

$$p = p_0 + \rho g h,$$

где p_0 — давление на свободной поверхности жидкости; h — глубина погружения рассматриваемой точки.

Так как ширина выделенной полоски мала, гидростатическое давление во всех точках ее можно считать одинаковым и равным давлению в точках на оси полоски. Поэтому давление dR на всю полоску получим умножением значения указанного гидростатического давления на величину dF

$$dR = p\,dF = (p_0 + \rho g h)\,dF.$$

Оно будет направлено нормально к стенке. Но, поскольку стенка состоит из ряда таких элементарных полосок, сила давления на всю стенку определится суммированием сил давления на отдельные полоски

$$R = \int_F dR = \int_F (p_0 + \rho g h)\,dF = p_0 \int_F dF + \rho g \int_F h\,dF.$$

Интеграл $\int_F dF = F$, а величина $\int_F h\,dF$ может быть представлена в виде

$$\int_F h\,dF = \int_F l \sin\alpha\,dF = \sin\alpha \int_F l\,dF,$$

где l — расстояние до любой полоски от поверхности жидкости, отсчитываемое в плоскости стенки.

Величина $\int_F l\,dF$ — статический момент площади F относительно линии пересечения поверхности жидкости с плоскостью стенки, она равняется Fl_c, где l_c — расстояние от плоскости стенки до центра тяжести C этой площади. Следовательно,

$$\int_F h\,dF = Fl_c \sin\alpha = Fh_c.$$

Здесь $h_c = l_c \sin\alpha$ — глубина погружения центра тяжести стенки. Тогда

$$R = p_0 F + \rho g h_c F = (p_0 + \rho g h_c)\,F.$$

Замечая, что величина, стоящая в скобках, представляет собой гидростатическое давление в центре тяжести стенки, получаем окончательно:

$$R = p_c F, \qquad (2.19)$$

т. е. давление жидкости на плоскую стенку равно произведению величины смоченной площади стенки на гидростатическое давление в ее центре тяжести.

Если давление на свободную поверхность жидкости в сосуде и на внешнюю поверхность стенки равно атмосферному, полное избыточное давление на стенку

$$R = \rho g h_c F. \tag{2.20}$$

В случае, когда стенка расположена горизонтально (угол $\alpha = 0$), т. е. представляет собой не боковую стенку, а горизонтальное дно сосуда, суммарное давление определяется по тем же формулам и составляет $R = pF = \rho g H F$, где H — высота столба жидкости в сосуде.

Рис. 2.22

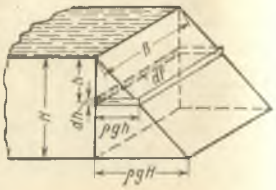


Рис. 2.23

Следовательно, давление на дно зависит не от формы и объема сосуда, а только от площади дна и высоты столба жидкости в сосуде. Поэтому для сосудов разной формы (рис. 2.22), заполненных одной и той же жидкостью до одного и того же уровня H и имеющих одинаковую площадь дна, сила полного давления на дно будет одинакова.

Это свойство жидкости, на первый взгляд противоречащее обычным представлениям, известно под названием *гидростатического парадокса*.

В ряде случаев (например, для прямоугольных стенок) полное давление на плоскую стенку можно определить графическим способом. Для этого отложим у основания стенки нормально к ее поверхности отрезок, равный $\rho g H$ (рис. 2.23), и соединим его конец прямой линией с точкой стенки, взятой на свободной поверхности жидкости. Будет получена так называемая эпюра давления (см. § 16), представляющая собой в данном случае прямоугольный треугольник. Выделим далее на стенке элементарную площадку dF, высотой dh и шириной B, равной ширине стенки, и найдем силу давления на эту площадку

$$dR = p dF = \rho g h B dh.$$

Нетрудно видеть, что величина dR — объем элементарного параллелепипеда, высота которого равна dh, а площадь основа-

ния $\rho g h B$ (где $\rho g h$ — гидростатическое давление в центре тяжести площадки dF).

Определяя таким же образом силы давления на другие, аналогичные элементарные площадки и суммируя их, приходим к выводу, что полное давление на всю стенку определяется объемом трехгранной призмы с площадью основания, равной $\rho g H H/2$, и высотой B.

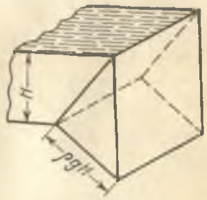


Рис. 2.24

Действительно, объем такой призмы $V = \rho g H^2 B/2$, что совпадает с величиной полного давления R на рассматриваемую плоскую стенку.

Аналогично можно найти полное давление и на другие типы плоских стенок. Так, для наклонной прямоугольной стенки полное давление определяется объемом наклонной трехгранной призмы (рис. 2.24).

§ 13. ЦЕНТР ДАВЛЕНИЯ

Сила давления жидкости на стенку кроме значения и направления характеризуется также точкой ее приложения. Эта точка называется *центром давления*.

Рассмотрим весьма часто встречающийся на практике случай, когда стенка имеет ось симметрии, лежащую в вертикальной плоскости. Центр давления в этом случае лежит на оси симметрии и для его определения остается найти только одну вертикальную координату. Для этого рассмотрим плоскую стенку (рис. 2.25), аналогичную изображенной на рис. 2.21, сохранив прежние обозначения.

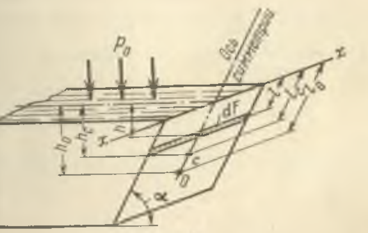
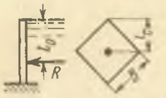
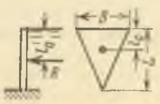
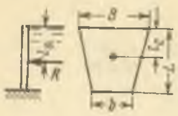
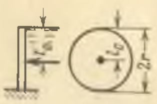
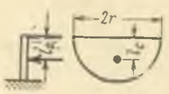


Рис. 2.25

Используя теорему теоретической механики о моменте равнодействующей (момент равнодействующей силы относительно некоторой оси равняется сумме моментов составляющих сил относительно той же оси), приравниваем сумму моментов сил дав-

Таблица 2.2

Полное давление жидкости и глубина погружения центра тяжести и центра давления для различных плоских стенок

Схема	Форма стенки	Площадь стенки	Глубина погружения центра тяжести l_c	Полное давление жидкости на стенку R	Глубина погружения центра давления l_0
	Прямоугольник	BL	$\frac{L}{2}$	$\rho gBL\frac{L}{2}$	$\frac{2}{3}L$
	Квадрат	B^2	$\frac{\sqrt{2}}{2}B$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\rho gB^3$	$\frac{7\sqrt{2}}{12}B$
	Равнобедренный треугольник	$\frac{1}{2}BL$	$\frac{L}{3}$	$\frac{1}{6}\rho gBL^2$	$\frac{1}{2}L$
	Трапеция	$\frac{1}{2}L(B+b)$	$\frac{L}{3}\cdot\frac{2b+B}{b+B}$	$\frac{1}{6}\rho gL^2(b+B)$	$\frac{L}{2}\cdot\frac{3b+B}{2b+B}$
	Круг	πr^2	r	$\rho g\pi r^3$	$\frac{5}{4}r$
	Полукруг	$\frac{1}{2}\pi r^2$	$\frac{4}{3}\cdot\frac{r}{\pi}$	$\frac{2}{3}\rho gr^3$	$\frac{3}{16}\pi r$

ления на элементарные площадки dF относительно оси x, совпадающей с линией пересечения поверхности жидкости с плоскостью стенки, к моменту равнодействующей силы давления на всю стенку F относительно той же оси:

$$\int_F \rho g h dF l = \rho g h_c F l_0.$$

Здесь l — расстояние в плоскости стенки от оси до центра тяжести элементарной площадки *, а l_0 — расстояние от оси до центра давления 0 всей площади F.

Далее, имея в виду, что $h = l \sin\alpha$ и $h_c = l_c \sin\alpha$, где l_c — расстояние в плоскости стенки от оси до центра тяжести c площади F, получаем:

$$\int_F \rho g \sin\alpha dF l^2 = \rho g l_c \sin\alpha F l_0$$

или

$$\rho g \sin\alpha \int_F dF l^2 = \rho g \sin\alpha F l_c l_0$$

и

$$\int_F dF l^2 = F l_c l_0.$$

Как известно, выражение $\int dF l^2$ представляет собой момент инерции I площади стенки F относительно оси x. Следовательно, $F l_0 l_c = I$, откуда

$$l_0 = I / F l_c. \tag{2.21}$$

Полученное выражение часто оказывается более удобным представлять в другом виде, заменяя момент инерции площади относительно оси, совпадающей с урезом жидкости, моментом инерции I_c относительно оси, проходящей через центр тяжести. В теоретической механике между этими величинами устанавливается следующая зависимость:

$$I = I_c + F l_c^2.$$

Подставив приведенное значение в выражение (2.21), получим окончательно:

$$l_0 = l_c + I_c / F l_c.$$

Из последнего выражения видно, что центр давления находится всегда ниже центра тяжести стенки (например, в случае прямоугольной стенки, одна из сторон которой совпадает с поверхностью жидкости, центр давления находится на $^1/_3$, а центр тяжести на $^1/_2$ ее высоты от основания, т. е. от низа стенки).

Полное давление, а также глубина погружения центра тяжести и центра давления для некоторых плоских стенок различной формы приведены в табл. 2.2.

---

* В пределе (при стремлении ширины элементарной полоски к нулю) это расстояние практически совпадает с расстоянием до центра давления элементарной полоски.

§ 14. ДАВЛЕНИЕ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

Весьма широкое применение на практике имеют различного рода цилиндрические поверхности, подверженные давлению жидкости (например, стенки труб, резервуаров и всевозможных цилиндрических сосудов, секторные затворы плотин и др.).

Для определения полной силы давления в этом случае рассмотрим некоторую цилиндрическую поверхность $ABCD$ (рис. 2.26, a), подверженную давлению жидкости. Исследуем условия равновесия объема жидкости AA_1BCC_1D, ограниченного справа самой цилиндрической поверхностью, слева вертикальной плоскостью A_1BCC_1 и снизу плоскостью AA_1C_1D.

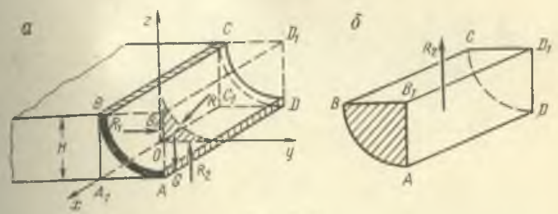


Рис. 2.26

На этот объем действуют следующие силы:

1) со стороны жидкости — горизонтальная сила давления на вертикальную плоскость A_1BCC_1, определяемая как сила давления на плоскую стенку $R_1 = \rho g (H/2) F_{A_1BCC_1}$;

2) снизу на плоскость AA_1C_1D — сила, направленная по вертикали снизу вверх: $R_2 = \rho g F_{AA_1C_1D}$;

3) сила тяжести (вес) G рассматриваемого объема жидкости, направленная по вертикали вниз и приложенная к центру тяжести этого объема;

4) со стороны цилиндрической поверхности — сила реакции этой поверхности R, равная по значению, но обратная по направлению искомой силе давления жидкости на поверхность.

Следует иметь в виду, что все указанные силы лежат в одной плоскости, нормальной к образующей цилиндрической поверхности и проходящей через ее плоскость симметрии.

Под действием этой системы сил выделенный объем жидкости находится в равновесии. Составим обычные уравнения равновесия, проектируя силы на координатные оси y и z:

$$\sum Y = R_1 - R_y = 0;$$

$$\sum Z = R_2 - G - R_z = 0,$$

откуда находим составляющие силы R по координатным осям

$$R_y = R_1; \tag{2.22}$$

$$R_z = R_2 - G. \tag{2.23}$$

Из полученных выражений следует, что горизонтальная составляющая R_y равна силе давления жидкости на плоскость A_1BCC_1, представляющую собой проекцию поверхности на вертикальную плоскость. Вертикальная составляющая R_z определяется разностью двух сил, из которых первая R_2 равна весу жидкости в объеме прямоугольной призмы сечением AA_1BB_1, а вторая G есть вес выделенного объема жидкости AA_1BCC_1D. Их разность представляет собой, очевидно, вес жидкости, взятой в объеме ABB_1D_1CD, над цилиндрической поверхностью.

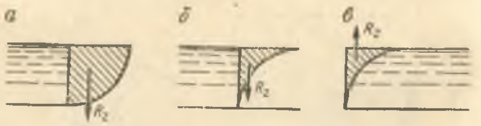


Рис. 2.27

Этот объем носит название *тела давления* и для наглядности изображен на рис. 2.26, *б* (штриховкой показано сечение тела давления плоскостью, нормальной к оси тела).

Сечения тела давления для некоторых случаев представлены на рис. 2.27. Необходимо иметь в виду, что вертикальная составляющая может иметь различное направление в зависимости от положения ограничивающей поверхности по отношению к жидкости. В тех случаях, когда жидкость находится над ограничивающей поверхностью (рис. 2.27, *а*, *б*), эта сила R_z направлена сверху вниз и тело давления определяется действительным объемом жидкости над этой поверхностью. Если жидкость располагается под ограничивающей поверхностью (рис. 2.27, *в*), вертикальная составляющая R_z направлена снизу вверх; тело давления в этом случае соответствует фиктивному объему жидкости над поверхностью.

Зная составляющие, легко найти равнодействующую силу давления

$$R = \sqrt{R_y^2 + R_z^2} \tag{2.24}$$

и установить ее направление, определяемое по углам наклона силы к осям координат:

$$\cos(R,\ y) = R_y/R;$$

$$\cos(R,\ z) = R_z/R.$$

Положение центра давления на цилиндрическую поверхность находят обычно графическим путем. Для этого на чертеже (рис. 2.28) проводят направления горизонтальной и вертикальной составляющих R_y и R_z (первое на $^1/_3$ расстояния от нижней кромки поверхности, второе — через центр тяжести тела давления) и находят точку их пересечения. Затем через эту точку под углом $(R,\ y)$ к горизонтали проводят известное направление равнодействующей R, пересечение которой с цилиндрической поверхностью и определяет положение центра давления 0.

В частном случае, когда цилиндрическая поверхность является поверхностью кругового цилиндра, положение центра давления определяют проще.

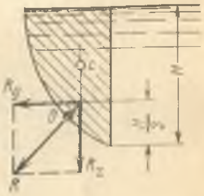


Рис. 2.28

Так как силы гидростатического давления нормальны к площадкам, на которые они действуют, то сила давления на элементарные площадки и равнодействующая сила давления на всю поверхность проходят через центр кругового цилиндра. Поэтому для нахождения центра давления достаточно провести через геометрический центр c цилиндрической поверхности линию действия равнодействующей силы R до ее пересечения с поверхностью.

§ 15. ДАВЛЕНИЕ НА КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Определение давления на цилиндрическую поверхность представляет собой частный случай общей задачи о давлении на криволинейные поверхности. Чтобы получить общее решение, возьмем сосуд произвольной формы и выделим на его стенке какую-либо криволинейную поверхность S, ограниченную контуром $AMBN$ (рис. 2.29).

Будем искать составляющие полного давления на эту поверхность по координатным осям, выбрав, например, начало координат на свободной поверхности жидкости и расположив оси так, как это показано на чертеже. При этом ограничимся определением лишь одной составляющей R_x, параллельной оси x, поскольку остальные составляющие можно найти аналогичным образом.

Найдем проекцию поверхности S на некоторую плоскость NN, нормальную к оси x и расположенную между этой поверхностью и координатной плоскостью zOy. Отметим, что указанную плоскость проекций NN, как и направление самой оси x, можно выбирать по-разному.

На жидкость, заключенную в объеме между поверхностью S, плоскостью NN и поверхностью проектирующего цилиндра, образующие которого параллельны оси x, действуют следующие силы: тяжести (вес) G_x выделенного объема жидкости; давления жидкости R_{F_x} на проекцию поверхности S на плоскость NN; давления на боковую поверхность указанного объема (их проекция на ось x равна нулю); реакции R со стороны поверхности S, равная по значению, но обратная по направлению искомой силе давления жидкости.

Проектируя эти силы на ось x, имеем:

$$\sum X = R_{F_x} + G_x \cos \alpha_x - R_x = 0,$$

откуда для проекции силы реакции получаем

$$R_x = R_{F_x} + G_x \cos \alpha_x. \tag{2.25}$$

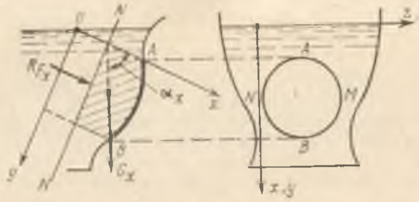


Рис. 2.29

Аналогично находят выражения для проекции силы реакции и на другие координатные оси:

$$R_y = R_{F^y} + G_y \cos \alpha_y, \tag{2.25'}$$

$$R_z = R_{F_z} + G_z \cos \alpha_z. \tag{2.25''}$$

где α_x, α_y, α_z — углы между направлением линии действия силы тяжести и осями координат x, y, z.

Таким образом, получаем следующую общую теорему о давлении на криволинейную поверхность: *проекция силы давления на криволинейную поверхность S на заданную ось x равна сумме проекций на эту ось веса жидкости, находящейся между поверхностью S, поверхностью проектирующего цилиндра и плоскостью проекций, нормальной к оси x, и силы давления жидкости на проекцию поверхности S на ту же плоскость проекции.*

Применение этой теоремы к частному случаю горизонтальности оси x приводит к выводам, изложенным в предыдущем параграфе.

§ 16. ЭПЮРЫ ГИДРОСТАТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ

Изменения гидростатического давления на поверхность, ограничивающую жидкость, изображают очень наглядно при помощи графиков, или эпюр, давления. При этом давление, воз-

растающее с глубиной погружения точки его приложения по линейному закону, откладывают в определенном масштабе в виде отрезков, нормальных к поверхности.

Предположим, требуется построить эпюру абсолютного давления на вертикальную стенку AB сосуда, наполненного жидкостью, имеющей плотность ρ, до уровня h (рис. 2.30, *а*). Давление на свободной поверхности жидкости равно атмосферному. Изменение гидростатического давления по высоте стенки в этом случае определяется выражением

$$p = p_{атм} + \rho g h,$$

представляющим уравнение прямой линии. Поэтому для построения эпюры давления необходимо отложить от точки A на

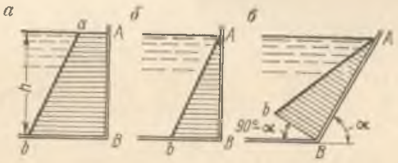


Рис. 2.30

свободной поверхности жидкости ($h=0$) отрезок aA соответствующий в масштабе построения атмосферному давлению, а от точки B у дна сосуда — отрезок bB, соответствующий давлению в этой точке $p=p_{атм}+\rho g h$, и соединить концы этих отрезков прямой ab. Полученная фигура — трапеция $AabB$ и будет эпюрой гидростатического давления.

Эпюра избыточного (манометрического) давления $p=\rho g h$ для той же стенки, очевидно, будет иметь вид прямоугольного треугольника AbB (рис. 2.30, *б*).

В том случае, когда сосуд имеет наклонную стенку, составляющую с горизонтальной плоскостью некоторый угол α, эпюра избыточного гидростатического давления представляет собой также прямоугольный треугольник AbB (рис. 2.30, *в*), в котором отрезки, изображающие давление, наклонены к горизонтальной плоскости под углом $90° - \alpha$.

Если стенка состоит из ряда отдельных плоских граней, наклоненных под различными углами к горизонту (рис. 2.31, *а*) в виде некоторой ломаной линии $ABCD$, эпюра гидростатического давления может быть построена так же, как и для обычной плоской стенки. Для этого отложим сначала от точки B нормально к грани AB отрезок Bb, изображающий гидростатическое давление в этой точке. Затем соединим точки A и b прямой и получим эпюру давления на указанную грань в виде прямоугольного треугольника AbB. Затем перейдем к построению эпюры давления на грань BC. Отложим от точек B и C этой грани нормально к ней отрезки, соответствующие гидростатическим давлениям: от точки B — отрезок Bb', равный Bb, и от точки C — отрезок Cc. В результате получим трапецию $Bb'cC$, представляющую собой эпюру давления на грань BC.

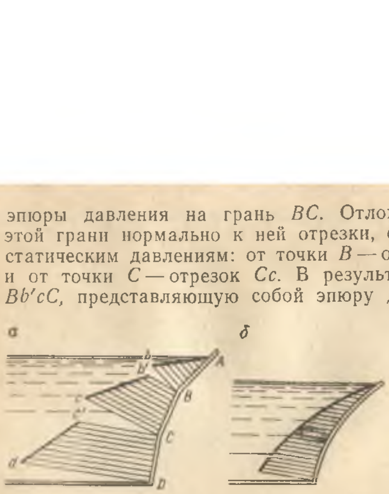


Рис. 2.31

Аналогичным путем построим эпюру давления и для последней грани CD (трапеция $Cc'dD$).

Отметим также случай, когда стенка имеет криволинейную форму. Гидростатическое давление в отдельных точках такой стенки также изображается отрезками прямых, нормальных к стенке в соответствующих точках, а эпюра давления в этом случае представляет криволинейный треугольник (рис. 2.31, *б*).

§ 17. РАВНОВЕСИЕ ТЕЛА В ПОКОЯЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Определим силу полного давления со стороны жидкости на погруженное в нее тело. Для этого рассмотрим некоторое тело произвольной формы объемом V и плотностью ρ_1, погруженное в жидкость плотностью ρ (рис. 2.32), и найдем составляющие силы давления по координатным осям (оси x и y расположим в горизонтальной плоскости, ось z направим по вертикали).

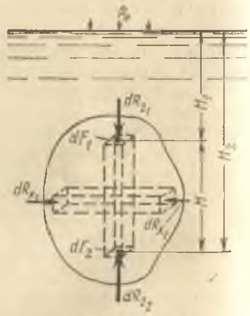


Рис. 2.32

Найдем сначала составляющую давления по оси x, для чего разобьем тело на ряд весьма тонких горизонтальных призм с осями, параллельными этой оси. Нетрудно видеть, что, так как глубины погружений обоих оснований подобных элементарных призм под свободной поверхностью жидкости одинаковы и проекции площадей этих оснований равны между собой, будут равны и проекции давлений dR_1 и dR_2 на ось x, а поскольку при этом проекции давления на концевые площадки каждой призмы противоположны по направлению, то их сумма будет равна нулю. Это относится и к горизонтальной составляющей давления по оси y.

Для определения вертикальной составляющей разобьем тело на ряд элементарных вертикальных призм. Гидростатическое давление в центрах тяжести торцовых площадок таких призм обозначим p_1 и p_2, а давление на свободной поверхности жидкости — p_0.

Заменив эти давления их значениями в зависимости от глубины погружения площадок $p_1 = p_0 + \rho g H_1$; $p_2 = p_0 + \rho g H_2$ и обозначив нормальные к оси сечения призмы dF_1 и dF_2 ($dF_1 = dF_2 = dF$) для вертикальных составляющих давления на указанные площадки, получим:

$$dR_{z_1} = (p_0 + \rho g H_1)\, dF_1;$$

$$dR_{z_2} = (p_0 + \rho g H_2)\, dF_2.$$

Эти две силы различны по значению и противоположны по направлению. Первая направлена по вертикали вниз, вторая — вверх. Их равнодействующая будет

$$dR_z = dR_{z_2} - dR_{z_1} = (p_0 + \rho g H_2)\, dF - (p_0 + \rho g H_1)\, dF =$$

$$= \rho g (H_2 - H_1)\, dF = \rho g H dF = \rho g dV,$$

где H — высота рассматриваемой элементарной призмы; $dV = HdF$ — объем этой призмы.

Из полученного выражения видно, что вертикальная составляющая давления будет направлена вверх (в сторону большей силы) и равна силе тяжести (весу) жидкости в объеме указанной призмы.

Сложив давления на все элементарные призмы, на которое разбито тело, получим:

$$R = \int_F dR_z = \int_F \rho g dV = \rho g \int_F dV = \rho g V. \tag{2.26}$$

Таким образом, вертикальная составляющая давления со стороны жидкости на погруженное в нее тело направлена вверх и равна силе тяжести (весу) жидкости в объеме тела.

Этот закон впервые был установлен за 250 лет до нашей эры Архимедом и известен под названием закона Архимеда. Он имеет большое значение при решении задач, связанных с плаванием тел; на нем, в частности, основана теория плавания корабля. Силу давления R при этом часто называют *архимедовой подъемной силой*.

Из закона Архимеда следует, что на тело, погруженное в жидкость, в конечном счете действуют две силы: сила тяжести (вес тела) G и архимедова подъемная сила R (рис. 2.33).

При этом могут иметь место следующие основные случаи.

1. Плотность тела и жидкости одинакова ($\rho_1 = \rho$).

Тогда

$$G = \rho_1 gV; \qquad R = \rho gV.$$

Равнодействующая этих сил $G - R = 0$. Следовательно, тело будет находиться в состоянии безразличного равновесия, т. е., помещенное на любую глубину, оно не будет ни всплывать, ни тонуть.

2. Плотность тела больше плотности жидкости ($\rho_1 > \rho$). Следовательно, вес тела больше подъемной силы ($G > R$) и их равнодействующая $G - R$ направлена вниз. Тело будет тонуть.

3. Плотность тела меньше плотности жидкости ($\rho_1 < \rho$). Значит, вес тела меньше подъемной силы ($G < R$) и их равнодействующая $G - R$ направлена вверх. Погруженное в жидкость

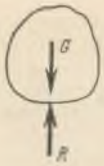


Рис. 2.33

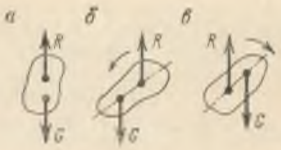


Рис. 2.34

тело будет всплывать до тех пор, пока вследствие выхода части его над поверхностью жидкости подъемная сила не уменьшится настолько, что станет равной весу тела. После этого тело будет плавать на поверхности жидкости. Подъемная сила в этом случае называется поддерживающей.

Кроме условия $R = G$ для равновесия тела, погруженного в жидкость, необходимо также, чтобы точки приложения этих сил лежали на одной вертикали.

Если тело однородно, точки приложения указанных сил совпадают (рис. 2.34, *а*); если тело неоднородно, эти точки не совпадают и для равновесия, кроме равенства сил G и R, необходимо, чтобы их линии действия были направлены по одной прямой. В противном случае (рис. 2.34, *б, в*) силы G и R образуют пару сил, под действием которой тело повернется и придет в положение равновесия лишь тогда, когда точки приложения обеих сил будут расположены на одной вертикали.

Наибольший практический интерес представляют условия равновесия при плавании тел (т. е. равновесия тел, погруженных в жидкость частично).

Теория плавающего тела подробно изучается в специальных дисциплинах, например в теории корабля. Здесь мы ограничимся рассмотрением лишь гидравлической сущности этой теории.

Способность плавающего тела, выведенного из состояния равновесия, вновь возвращаться в это состояние называется *остойчивостью*.

В теории корабля различают два вида остойчивости: поперечную (при крене судна), когда один борт превышает другой (рис. 2.35), и продольную, когда один конец судна (нос или корма) находится выше другого (рис. 2.36). Практически более важны исследования поперечной остойчивости, так как продольная остойчивость обычно весьма значительна.

Силу тяжести (вес) жидкости, взятой в объеме погруженной части судна, называют *водоизмещением*, а точку приложе-

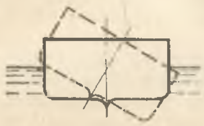


Рис. 2.35

Рис. 2.36

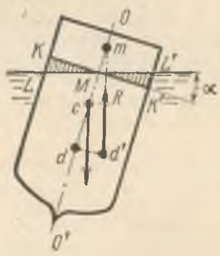


Рис. 2.37

ния равнодействующей давления (т. е. центр давления) — *центром водоизмещения*. При нормальном положении судна центр тяжести его c (рис. 2.37) и центр водоизмещения d лежат на одной вертикальной прямой OO', представляющей ось симметрии судна и называемой *осью плавания*.

Пусть под влиянием внешних сил судно наклонилось на некоторый угол α (см. рис. 2.37), часть судна KLM вышла из жидкости, а часть $K'L'M$ погрузилась в нее. При таком повороте положение центра тяжести c в теле судна останется неизменным. Не изменится и водоизмещение, но положение центра водоизмещения d станет иным. Пусть оно теперь будет d'. Приложим в точке d' подъемную силу R и линию ее действия продолжим до пересечения с осью симметрии судна OO'. Полученная точка m называется *метацентром*, а расстояние между метацентром и центром тяжести по оси плавания — *метацентрической высотой*. Обозначим это расстояние h и будем считать его положительным, если точка m лежит выше точки c, и отрицательным — в противном случае.

Таким образом, плавающее судно имеет три характерные точки: центр тяжести, не меняющий своего положения по отношению к судну при любом его положении; центр водоизмещения, перемещающийся при крене судна; метацентр, также изменяющий свое положение в зависимости от крена *.

Рассмотрим теперь условия равновесия судна. Здесь могут представиться следующие основные случаи в зависимости от относительного расположения метацентра и центра тяжести;

1) остойчивое равновесие — метацентр лежит выше центра тяжести ($h>0$); пара сил, поворачивая судно, возвращает его в первоначальное положение;

2) безразличное равновесие — метацентр и центр тяжести совпадают ($h=0$);

3) неостойчивое равновесие — метацентр лежит ниже центра тяжести ($h<0$); пара сил вызывает дальнейшее опрокидывание судна.

Значит, чем ниже центр тяжести и чем больше метацентрическая высота, тем больше остойчивость судна. Поэтому метацентрическая высота может быть принята за меру остойчивости. Практически ее нормальное значение для торговых судов находится в пределах 0,3—0,8 м.

* При небольшом крене ($\alpha<15°$) положение метацентра можно считать постоянным.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ОСНОВЫ ГИДРОДИНАМИКИ

§ 18. ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ГИДРОДИНАМИКИ

Гидродинамикой (точнее, технической гидродинамикой) называют раздел гидравлики, в котором изучаются законы движения жидкости. Так же называют раздел теоретической гидромеханики, в котором рассматриваются аналогичные вопросы.

Движение жидкости по сравнению с движением твердого тела отличается значительно большей сложностью. Если состояние жидкости в покое определяется лишь гидростатическим давлением, то ее состояние в движении характеризуется еще и скоростью движения ее частиц. В общем случае значения давления и скорости, различные в разных точках пространства, могут изменяться и в зависимости от времени.

В реальных жидкостях взаимодействие между частицами определяется не только силами давления, но и касательными силами, обусловленными вязкостью жидкости.

Поэтому в гидродинамике, как указывалось, для упрощения исследований жидкость часто полагают идеальной — лишенной вязкости и однородной, т. е. имеющей постоянную во всех точках плотность.

Из-за большого числа переменных величин, характеризующих движение жидкости, сложности наблюдаемых при этом явлений и трудности математического исследования действительное движение жидкости обычно заменяют некоторой условной, упрощенной схемой. Такой схемой, лежащей в основе гидравлики и логически наиболее удачно отвечающей естественным представлениям о движении жидкости, является схема, рассматривающая поток жидкости состоящим из отдельных элементарных струек. В гидравлике эту схему часто называют струйчатой моделью движения.

Если при исследовании исходить из этой упрощенной модели и пользоваться понятием средней скорости потока, то для математического описания движения достаточно проследить за изменением скорости, давления и других величин в зависимости только от одной переменной — расстояния рассматриваемого поперечного сечения потока от некоторого начального его сечения. Подобное движение называют *одномерным* (или одноразмерным). Указанный метод исследования весьма широко применяется в практической гидравлике. Получаемые при этих допущениях уравнения движения идеальной жидкости затем исправляют, вводя соответствующие поправки и коэффициенты, переносят на реальные жидкости и применяют для решения конкретных практических задач.

Если полностью учитывают изменение скоростей, давлений и т. д. по двум или трем координатным осям, движение соответственно называют *двухмерным* (двухразмерным), или *плоским*, и *трехмерным* (трехразмерным), или *пространственным*.

Двухмерные и трехмерные движения рассматриваются в основном в теоретической гидродинамике. При этом движение жидкости представляется как непрерывная и последовательная деформация сплошной материальной среды. Его изучение имеет цель — выразить математически, в форме дифференциальных уравнений, основные кинематические и динамические характеристики как непрерывные функции координат и времени и может быть выполнено двумя методами: Лагранжа и Эйлера.

Метод Лагранжа заключается в наблюдении за движением одних и тех же, мысленно отмеченных, частиц жидкости, проходящих через различные точки пространства, и, по существу, сводится к изучению траекторий этих частиц и прослеживанию во времени за изменением их кинематических характеристик.

По методу Эйлера объектом наблюдения являются кинематические характеристики различных частиц жидкости, непрерывно следующих одна за другой через определенные, зафиксированные точки пространства. Метод Эйлера оказывается более простым и удобным. Задавая внешние объемные (массовые) силы проекциями их ускорений X, Y, Z, а скорости проекциями скоростей v_x, v_y, v_z на координатные оси и присоединяя гидродинамическое давление p и плотность жидкости ρ, для каждой частицы такой идеальной однородной жидкости получаем всего восемь величин, определение зависимости которых от времени t и координат x, y, z и составляет содержание основных задач гидродинамики.

Для решения этих задач можно составить пять уравнений, дающих зависимости между указанными восемью величинами; три из них при этом предполагаются заданными.

Условие однородности жидкости ($\rho = \text{const}$) представляет собой в данном случае простейшую форму первого из этих уравнений — так называемого *характеристического уравнения* (или *уравнения состояния*).

Остальные уравнения этой системы — дифференциальные уравнения движения и уравнение неразрывности будут рассмотрены ниже.

§ 19. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Прежде чем приступить к изучению струйчатой модели движения жидкости, необходимо установить ряд новых понятий и определений. С этой целью рассмотрим некоторое пространство, сплошь заполненное движущейся жидкостью, состоящей

из отдельных элементарных частиц бесконечно малых размеров. Напомним, что размеры этих частиц несоизмеримы с размерами молекул и атомов и жидкость заполняет пространство без каких бы то ни было пустот, т. е. представляет собой сплошную материальную среду.

Каждая из указанных жидких частиц, находясь в данный момент времени в какой-то определенной точке пространства, обладает вполне определенными скоростью и давлением. При переходе этой частицы в другую точку пространства, отстоящую от первой на весьма малом расстоянии, ее скорость и давление изменяются также весьма незначительно. Таким образом, можно считать, что скорость и давление будут непрерывно меняться в зависимости от положения рассматриваемой частицы в пространстве, т. е. будут являться непрерывными функциями координат.

Картина скоростей в каждый данный момент времени в пространстве, заполненном движущейся жидкостью, называется *полем скоростей,* а картина давлений — *полем давлений.* При этом следует иметь в виду, что здесь и далее речь идет о так называемом гидродинамическом давлении. Последнее определяется как поверхностная сила взаимодействия между частицами жидкости, отнесенная к единице площади. Для идеальной жидкости оно обладает теми же свойствами, что и гидростатическое давление, т. е. по значению также не зависит от направления площадки, на которую действует, и нормально к ней,

Выделим в указанной массе жидкости произвольную частицу и проследим за ее движением в пространстве. С течением времени эта частица пройдет через ряд точек пространства *1, 2, 3, ..., n* с различными скоростью и давлением. Геометрическое место таких точек, являющихся последовательным положением движущейся частицы жидкости, представляет траекторию жидкой частицы.

Если скорость и давление в каждой данной точке пространства, заполненного движущейся жидкостью, остаются все время постоянными (но могут меняться при переходе от одной точки пространства к другой), движение называют *установившимся.* Говоря иначе, при установившемся движении поле скоростей и поле давлений с течением времени остаются неизменными. Это есть движение, постоянное во времени и изменяющееся в пространстве; при нем скорость и давление зависят от координат движущейся жидкой частицы, т. е. от ее положения в пространстве, и не зависят от времени. Таким образом, при установившемся движении

$$v = f_1(x, y, z);$$

$$p = f_2(x, y, z). \tag{3.1}$$

При неустановившемся движении жидкости поля скоростей и давлений будут непрерывно меняться. В этом случае скорость и давление в каждой точке пространства зависят как от координат движущейся частицы, так и от времени:

$$v = f_1(x,\ y,\ z,\ t);$$

$$p = f_2(x,\ y,\ z,\ t). \tag{3.2}$$

Примером установившегося движения является истечение жидкости из отверстия в стенке или дне сосуда, когда уровень жидкости в этом сосуде все время поддерживается постоянным ($H_1 = \mathrm{const}$), т. е. количество поступающей в сосуд и вытекающей из него жидкости одинаково. В этом случае (рис. 3.1, *а*) форма вытекающей струи *1*, скорость и давление в любом ее сечении остаются неизменными. Если же уровень жидкости в сосуде с течением времени будет меняться ($H_2 \neq \mathrm{const}$), например понижаться по мере вытекания жидкости из отверстия, движение станет *неустановившимся,* будут меняться скорость истечения жидкости и форма струи *2* (рис. 3.1, *б*).

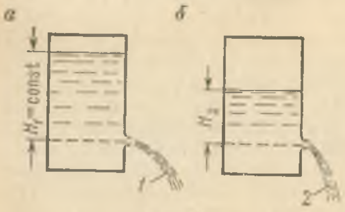


Рис. 3.1

Другим примером установившегося движения является движение жидкости в трубопроводе при ее перекачке центробежными насосами. Так как рабочее колесо центробежного насоса практически вращается равномерно с постоянной угловой скоростью, подача жидкости в трубопровод будет происходить также непрерывно и равномерно, все время в одинаковых количествах, с постоянными скоростью и давлением.

Наоборот, при перекачке поршневыми насосами, когда поршень движется с переменной скоростью, имеет место неустановившееся движение, при котором скорость и давление в трубопроводе меняются во времени.

§ 20. СХЕМА ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

В основе указанной в § 18 схемы движения жидкости лежат понятия о линии тока и элементарной струйке.

Рассмотрим, как и ранее, некоторую часть пространства, заполненного движущейся жидкостью. В некоторой произвольной точке построим вектор скорости v_B (рис. 3.2), изображающий (по значению и направлению) скорость частицы жидкости *B*, находящейся в данный момент времени в этой точке. На этом векторе, на весьма малом расстоянии от точки *B*, возьмем точку *C* и построим вектор v_C, соответствующий скорости частицы в этой точке в тот же момент времени. На векторе v_C возьмем точку *D*, отложим от нее вектор скорости v_D и т. д. В результате получим ломаную линию *BCDEFGH*, стороны которой совпадают с направлениями векторов скоростей частиц жидкости *B, C, D, E, F, G, H* в данный момент времени.

Если безгранично уменьшать длину отрезков *BC*, *CD*, *DE*, *EF*, *FG*, *GH*, то в пределе ломаная линия превратится в некоторую кривую, называемую *линией тока.*

Итак, линией тока называется кривая, проведенная через ряд точек в движущейся жидкости таким образом, что векторы скоростей частиц жидкости, находящихся в данный момент в этих точках, являются к ней касательными.

Рис. 3.2

Необходимо иметь в виду различие между траекторией частицы жидкости и линией тока. В то время как траектория относится лишь к одной определенной частице жидкости и показывает путь, проходимый этой частицей в пространстве за некоторый промежуток времени, линия тока связывает между собой различные, лежащие на ней частицы и характеризует направление их движения в данный момент времени.

Линии тока соответствуют состоянию поля скоростей в движущейся жидкости в данный момент времени. Если в следующий момент поле скоростей изменится, изменится и положение линий тока.

Однако в случае установившегося движения, характеризуемого неизменностью поля скоростей во времени, частицы жидкости будут следовать вдоль неизменных линий тока. Таким образом, линии тока и траектории жидкости совпадают между собой только при установившемся движении.

Линии тока и траектории можно сделать видимыми, чем широко пользуются в лабораторной практике при экспериментальных исследованиях и наблюдениях над движением жидкости. Для этого на поверхности жидкости рассеивают, например, мелкие частицы какого-нибудь вещества, не растворимого в жидкости, и фотоаппаратом производят съемку *. При съемке

* Существуют и более совершенные методы исследования, основанные на применении особых равновесомых с жидкостью эмульсий, специальных приборов — высокочастотного кино и др. Эти методы описаны в специальной литературе.

Рис. 3.3

с малой выдержкой эти частицы дают на пластинке короткие черточки (штрихи), которые при достаточно большом количестве частиц сливаются и показывают общую картину линий тока.

При съемке с большой выдержкой и малым числом частиц последние оставляют на пластинке длинные следы в виде кривых линий, представляющих собой траектории. На рис. 3.3 показано положение линий тока при обтекании жидкостью пластинки (*а*) и крыла (*б*).

Выделим в жидкости элементарную площадку dF и через все ее точки, находящиеся как внутри площадки, так и на контуре, проведем линии тока (рис. 3.4). Совокупность этих линий образует некоторый объемный пучок, называемый *элементарной струйкой жидкости*.

Рис. 3.4

При установившемся движении элементарная струйка обладает следующими свойствами:

1) поскольку линии токов, из которых состоит струйка, с течением времени не меняют своей формы, то и форма всей струйки остается неизменной во времени;

2) ввиду того, что линии тока в данном случае являются и траекториями частиц жидкости, перетекание последней через боковую поверхность из одной струйки в другую невозможно; струйка как бы оказывается заключенной в жесткие стенки, образующие некоторую трубчатую поверхность, называемую *трубкой тока*.

Вследствие весьма малого поперечного сечения элементарной струйки скорости в различных точках ее сечения будут незначительно отличаться одна от другой и их можно считать одинаковыми. Вдоль струйки по ее длине как поперечное сечение, так и скорость могут изменяться. Если взять ряд таких «жестких» элементарных струек, то их совокупность образует поток жидкости.

Скорости движения отдельных струек, из которых складывается поток, различны. Как показывает опыт, наибольшие скорости имеют частицы жидкости, находящиеся у оси потока, наименьшие — у стенок. Таким образом, поток жидкости рассматривается состоящим из отдельных элементарных струек, движущихся с различными скоростями.

Рассматривая перемещение элементарного объема жидкости в реальных условиях, можно установить, что в общем случае наряду с поступательным движением происходят вращение вокруг некоторой мгновенной оси и одновременно деформация (изменение формы) рассматриваемого объема. Поэтому можно считать, что скорость перемещения любой точки жидкой частицы складывается из трех скоростей; поступательной, деформационной и вращательной. Такой общий случай движения жидкости называется *вихревым*. Частный случай движения, при котором частицы не испытывают вращения вокруг мгновенных осей, называют *безвихревым*, или *потенциальным*.

Вращательные движения (они всегда наблюдаются при течении реальных жидкостей) в гидродинамике связывают с понятием о вихре. Для выяснения этого понятия рассмотрим в массе движущейся жидкости некоторую элементарную частицу A, вращающуюся в данный момент времени вокруг оси 1-2 с угловой скоростью ω* (рис. 3.5, *а*). Далее на весьма малом расстоянии от центра частицы A через точку *2* проведем ось вращения *2-3* другой частицы B для того же момента времени. Аналогичные построения выполним и для ряда других частиц C, D, E и т. д. В результате таких построений получим некоторую ломаную линию 1-2-3-4-5, которая в пределе при уменьшении отдельных составляющих ее отрезков до бесконечно малого значения превращается в кривую, называемую *вихревой линией*. Как это следует из построения, каждый элементарный отрезок вихревой линии представляет собой мгновенную ось вращения соответствующей жидкой частицы.

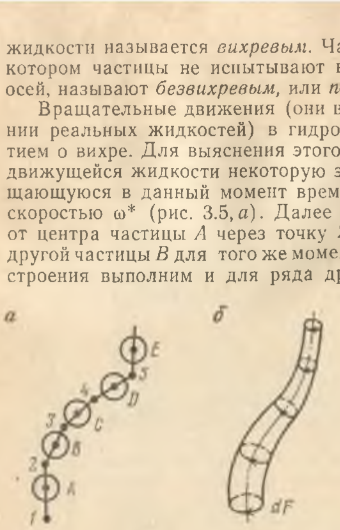


Рис. 3.5

Если взять в жидкости элементарную площадку dF (рис. 3.5,*б*) и через все ее точки провести вихревые линии, то совокупность совместно вращающихся вокруг этих линий жидких частиц образует так называемую *вихревую трубку*.

Из приведенных построений очевидна аналогия между понятиями вихревой линии и вихревой трубки, с одной стороны, и линией тока и элементарной струйкой, с другой.

Появление вихрей можно объяснить следующим образом. При движении жидкости у стенок, ограничивающих поток, всегда образуется некоторый неподвижный, прилипший слой. Между отдельными неподвижными жидкими частицами этого слоя и какой-нибудь ближайшей к ним движущейся частицей (на нижней ее поверхности) возникает сила трения, направленная в сторону, обратную движению. Подобная, но противоположно направленная сила трения появляется и на верхней поверхности этой частицы, между нею и другой движущейся частицей. Следовательно, на каждую частицу жидкости действуют две равные по значению и обратные по направлению

* В общем случае неустановившегося движения жидкости положение этой оси, как и частота вращения частицы с течением времени изменяется.

силы, образующие пару сил и вызывающие вращение этой частицы вокруг некоторой мгновенной оси. Из сказанного видно, что причиной появления вихрей является наличие в жидкости обтекаемых ею тел (в данном случае стенок), у которых зарождаются вращательные движения отдельных жидких частиц, передающиеся от одной частицы к другой и ведущие к образованию вихрей.

Вихревые движения отличаются сравнительно большой сложностью и исследуются в теоретической гидромеханике. В общих же курсах гидравлики обычно ограничиваются рассмотрением упрощенной «струйчатой» модели движения жидкости.

§ 21. ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПОТОКА

При изучении потоков жидкости вводят ряд понятий, характеризующих потоки с гидравлической и геометрической точек зрения. Такими понятиями являются: площадь живого сечения, периметр смачивания и гидравлический радиус.

Площадью живого сечения, или *живым сечением потока*, называют площадь сечения потока, проведенную нормально к направлению линий тока, т. е. нормально к направлению скоростей элементарных струек*. Обозначим эту площадь F. В ряде случаев живые сечения потока, строго говоря, являются криволинейными. Так, при движении жидкости в конически расходящейся трубе (рис. 3.6), когда поток состоит из ряда расходящихся элементарных струек, живое сечение представляет собой криволинейную поверхность AB. Но, если расхождение струек невелико (движение жидкости в этом случае называют медленно изменяющимся), под живым сечением обычно понимают плоское сечение потока, нормальное к общему направлению движения жидкости, т. е. сечение A_1B_1, нормальное к оси трубы.

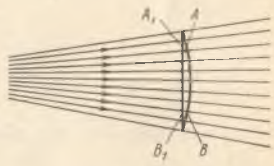


Рис. 3.6

Живое сечение может быть ограничено твердыми стенками полностью или частично (во втором случае часть живого сечения ограничивается открытой поверхностью жидкости). Если стенки ограничивают поток полностью, движение жидкости называют *напорным;* в случае частичного ограничения потока движение называют *безнапорным*. Напорные потоки иногда называют также *сплошь заполненными*, а безнапорные — *незаполненными*.

*В дальнейшем живое сечение будем называть просто поперечным сечением

3 Заказ № 1363

Напорное движение характеризуется тем, что гидродинамическое давление в любой точке потока отлично от атмосферного и может быть как больше, так и меньше последнего. Безнапорное же движение определяется постоянным давлением на свободную поверхность, обычно равным атмосферному.

Примером напорного движения может служить движение жидкости в трубопроводе при ее перекачке насосами, истечении из резервуара или водонапорного бака, а примером безнапорного — движение жидкости в открытых каналах и реках.

Часть периметра живого сечения, по которому поток соприкасается с ограничивающими его стенками называют *периметром смачивания*. Обозначим его A. При напорном движении жидкости геометрический периметр и периметр смачивания совпадают по значению, а при безнапорном периметр смачивания будет отличен от геометрического, так как линия, по которой жидкость соприкасается с воздухом, в длину периметра смачивания не входит. Так, для канала, изображенного на рис. 3.7, периметр смачивания $A = b + 2h$, а геометрический равен $2b + 2h$.

Рис. 3.7

Отношение площади живого сечения к периметру смачивания ($R = F/A$) называют *гидравлическим радиусом сечения*.

Подчеркнем, что гидравлический и геометрический радиусы — два совершенно различных понятия. Например, при напорном движении жидкости в круглой трубе диаметром d геометрический радиус $r = d/2$, а гидравлический радиус $R = F/A = \pi d^2/4\pi d = d/4$. При движении жидкости в открытом канале (см. рис. 3.7) $R = bh/(b+2h)$, а понятие геометрического радиуса этому сечению вообще не присуще.

§ 22. РАСХОД И СРЕДНЯЯ СКОРОСТЬ

Расходом потока называют количество жидкости, протекающей через поперечное сечение потока в единицу времени. Количество протекающей жидкости, измеренное в объемных единицах, носит название *объемного расхода* и обозначается Q. Соответствующую объемному расходу массу жидкости m называют *массовым расходом*. В гидравлике приходится иметь дело главным образом с объемным расходом жидкости. В дальнейшем будем называть его просто расходом.

Между объемным и массовым расходом существует следующая зависимость:

$$m = \rho Q. \tag{3.3}$$

Наиболее часто применяемые на практике единицы измерения объемного расхода: кубический метр в секунду (м³/с), кубический метр в час (м³/ч), литр в секунду (л/с), литр в минуту

(л/мин); единицы измерения массового расхода: килограмм в секунду (кг/с), килограмм в минуту (кг/мин), килограмм в час (кг/ч), тонна в секунду (т/с), тонна в час (т/ч).

Наряду с этим в гидравлике широко используют понятие весового расхода G и равнозначные ему понятия производительность, дебит, пропускная способность.

Расход элементарной струйки жидкости dQ может быть определен следующим образом. Обозначим dF_a площадь некоторого поперечного сечения струйки *a-a* (рис. 3.8). Тогда объем жидкости $dQ_a dt$, прошедшей через это сечение за весьма малое время dt, будет составлять $dL \cdot dF_{\text{ср}}$, где dL — расстояние вдоль оси струйки, на которое перемещаются в течение указанного времени частицы жидкости, находившиеся в начальный момент времени в сечении *a-a*; $dF_{\text{ср}}$ — средняя на расстоянии dL площадь поперечного сечения струйки.

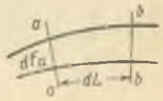


Рис. 3.8

Отсюда имеем

$$dQ_a = dF_{\text{ср}}\,(dL/dt).$$

Здесь dL/dt — средняя на участке dL скорость течения жидкости, составляющей элементарную струйку.

Будем неограниченно уменьшать промежуток времени dt. Тогда в пределе, при $dt \to 0$, получим $dQ_a = v_a dF_a$.

Поскольку сечение элементарной струйки было выбрано нами произвольно, то, очевидно,

$$dQ = v dF, \tag{3.4}$$

т. е. расход жидкости, проходящей через поперечное сечение элементарной струйки, равняется произведению площади поперечного сечения струйки на скорость в этом сечении. Уравнение (3.4) называют *уравнением расхода для элементарной струйки*.

Если рассматривать поток жидкости как совокупность большого числа элементарных струек, то, очевидно, общий расход жидкости Q для всего потока в целом можно определить как сумму элементарных расходов всех отдельных струек, из которых состоит поток.

$$Q = \int dQ = \int v dF. \tag{3.5}$$

Чтобы найти эту сумму, необходимо знать закон распределения скоростей в поперечном сечении потока. Поскольку во многих случаях такой закон неизвестен, в общем случае суммирование оказывается невозможным. Поэтому сделаем предположение, что частицы жидкости по всему поперечному сечению потока движутся с одинаковой скоростью. Эту воображаемую фиктивную скорость (с которой должны двигаться через сечение потока все частицы для того, чтобы расход жидкости был равен расходу, получаемому при движении жидкости

3*

с действительными, неодинаковыми для различных частиц скоростями) называют *средней скоростью потока* ($v_{ср}$).

Таким образом, получаем уравнение расхода для потока в следующем виде:

$$Q = v_{ср}F. \tag{3.6}$$

Из этого уравнения находим

$$v_{ср} = Q/F = \int v dF/F. \tag{3.7}$$

Расход жидкости, подсчитанный по средней скорости, можно представить как объем цилиндра с площадью основания F и высотой $v_{ср}$ (рис. 3.9,*а*). Если расход определяется по действительным скоростям, закон распределения которых в поперечном сечении потока задан некоторой кривой, например параболой, значение его определяется объемом соответствующего параболоида вращения с той же площадью основания F, как это и показано на рис. 3.9, *б*. Очевидно, объемы цилиндра и параболоида, определяющие этот расход, должны быть равными (так как независимо от методов подсчета расход должен быть одним и тем же).

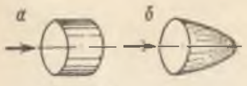


Рис. 3.9

Если движение жидкости установившееся и при этом размеры и форма сечений вдоль потока не изменяются, следовательно, и средние скорости во всех поперечных сечениях потока одинаковы, движение называется *равномерным*.

Неравномерным называют такое установившееся движение жидкости, при котором по длине потока изменяются его поперечное сечение и, следовательно, средняя скорость.

Равномерным, например, является движение жидкости в трубе постоянного диаметра с постоянным расходом жидкости, а неравномерным — движение жидкости в трубе переменного сечения.

Уточним также определение медленно изменяющегося движения. При таком движении кривизна элементарных струек, из которых состоит поток жидкости, весьма незначительна и также мал угол расхождения между осями отдельных струек. В связи с этим поперечные сечения потока можно рассматривать как плоские сечения, нормальные к оси потока (это и было принято нами ранее). Распределение давления по сечению при медленно изменяющемся движении подчиняется закону гидростатики. Этому понятию часто соответствует, например, движение в естественных руслах, когда живое сечение изменяется непрерывно, но достаточно плавно вдоль потока.

Выделим далее сечениями *а-а* и *b-b*, отстоящими одно от другого на расстоянии dL, некоторый отсек той же элементарной

струйки (см. рис. 3.8). В этот отсек в единицу времени через сечение *а-а* втекает объем жидкости $dQ_a = v_a dF_a$, а через сечение *b-b* из него вытекает объем $dQ_b = v_b dF_b$.

Примем затем, что движение жидкости носит характер установившегося движения, жидкость несжимаема и в ней невозможно образование незаполненных пространств — пустот, т. е. будем считать, что соблюдается условие сплошности или неразрывности движения. Учитывая, что форма элементарной струйки с течением времени не изменяется и поперечный приток в струйку как и отток из нее отсутствуют, приходим к выводу, что элементарные расходы жидкости, проходящие через сечения *а-а* и *b-b*, должны быть одинаковы.

Таким образом, $dQ_a = dQ_b$, или $v_a dF_a = v_b dF_b$.

Подобные соотношения можно составить для любых двух сечений струйки. Поэтому в более общем виде получаем, что всюду вдоль струйки

$$dQ = v dF = \text{const}. \tag{3.8}$$

Уравнение (3.8) представляет собой математическое выражение условия неразрывности. Оно называется *уравнением постоянства расхода*. Иногда его называют также *уравнением неразрывности*.

Перейдя к потоку в целом и используя понятие средней скорости, получим путем аналогичных рассуждений уравнение постоянства расхода для потока:

$$Q = v_{ср}F = \text{const}. \tag{3.9}$$

Из уравнения (3.9) следует

$$v_{1ср}/v_{2ср} = F_2/F_1, \tag{3.10}$$

т. е. средние скорости в поперечных сечениях потока при неразрывности движения обратно пропорциональны площадям этих сечений.

§ 23. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Уравнение Бернулли является основным в технической гидромеханике. Оно устанавливает зависимость между скоростью и давлением в различных сечениях одной и той же элементарной струйки.

При выводе этого уравнения ограничимся случаем установившегося медленно изменяющегося движения.

Выделим в пространственной элементарной струйке объем, ограниченный в некоторый момент времени t сечениями *1—1* и *2—2*, нормальными к оси струйки O_1O_2 (рис. 3.10). Первоначально будем считать жидкость идеальной, т. е. лишенной вязкости. Силы внутреннего трения в такой жидкости отсутствуют и к выделенному объему струйки приложены только силы тяжести и силы гидродинамического давления. Пусть за некоторый малый промежуток времени dt указанный объем переместится в положение $1'$-$1'$ и $2'$-$2'$. Применим к его движению теорему кинетической энергии, согласно которой приращение кинетической энергии движущейся системы материальных частиц равно сумме работ всех сил, действующих на систему. Эта теорема может быть выражена следующим простым уравнением:

$$\Delta W = \sum A, \tag{3.11}$$

где ΔW — приращение кинетической энергии; ΣA — сумма работ действующих сил.

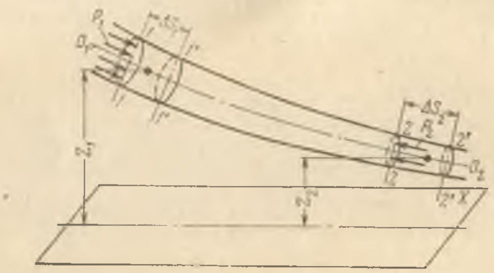


Рис. 3.10*.

В рассматриваемом случае приращение кинетической энергии определяется как разность значений кинетической энергии в двух положениях перемещающегося объема, т. е. как разность кинетической энергии объема $V_{1'\text{-}2'}$ и объема $V_{1\text{-}2}$. Замечая, что объем $V_{1'\text{-}2}$ входит как составная часть в выражения для объемов $V_{1\text{-}2}$ и $V_{1'\text{-}2'}$:

$$V_{1\text{-}2} = V_{1\text{-}1'} + V_{1'\text{-}2};$$

$$V_{1'\text{-}2'} = V_{1'\text{-}2} + V_{2\text{-}2'},$$

и имея в виду, что кинетическая энергия объема $V_{1'\text{-}2}$ при установившемся движении жидкости одинакова как в момент времени t, так и в момент $t+dt$, приходим к выводу: искомое приращение кинетической энергии в конечном счете определяется разностью кинетической энергии объемов $V_{2\text{-}2'}$ и $V_{1\text{-}1'}$. Названные объемы есть результат перемещения за время dt торцовых сечений выделенного участка элементарной струйки. Обозначив v_1 и v_2 скорости в сечениях *1-1* и *2-2* найдем, что соответствующие перемещения будут равны v_1dt и v_2dt, а рассматриваемые объемы:

* Вместо ΔS_1 и ΔS_2 должно быть dS_1 и dS_2.

$$V_{1\text{-}1'} = dF_1v_1dt = dQ_1dt;$$

$$V_{2\text{-}2'} = dF_2v_2dt = dQ_2dt,$$

где dQ_1 и dQ_2 — значения расхода в сечениях *1-1* и *2-2*.

Но по условию неразрывности расход во всех сечениях элементарной струйки одинаков ($dQ_1 = dQ_2 = dQ$) и, следовательно, $V_{1\text{-}1'} = V_{2\text{-}2'} = dQdt$. Масса же рассматриваемых объемов $dm = \rho dQdt$.

Таким образом, выражение для приращения кинетической энергии можно записать в виде

$$\Delta W = \frac{\rho dQdt}{2}v_2^2 - \frac{\rho dQdt}{2}v_1^2$$

или

$$\Delta W = \frac{dm}{2}v_2^2 - \frac{dm}{2}v_1^2 = dm\left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2}\right).$$

Перейдем теперь к определению работы сил, действующих на рассматриваемый объем жидкости. Работа силы тяжести равна произведению этой силы на путь, пройденный точкой ее приложения, т. е. центром массы (тяжести) движущегося объема жидкости по вертикали. Рассматривая, как и ранее, выделенный объем струйки в двух его положениях состоящим из объема $V_{1'\text{-}2}$ и равных между собой объемов $V_{1\text{-}1'}$ и $V_{2\text{-}2'}$, легко прийти к заключению, что работа $A_т$ сил тяжести будет равна произведению силы тяжести объема $V_{1\text{-}1'}$ на расстояние по вертикали между центрами масс объемов $V_{1\text{-}1'}$ и $V_{2\text{-}2'}$ т. е.

$$A_т = dmgz_1 - dmgz_2 = dmg(z_1 - z_2),$$

где z_1 и z_2 — расстояния по вертикали от произвольной горизонтальной плоскости, называемой плоскостью сравнения, до центров масс объемов $V_{1\text{-}1'}$ и $V_{2\text{-}2'}$, иначе говоря, вертикальные координаты центров масс этих объемов.

Силы давления, действующие на объем жидкости, складываются из сил давления на его боковую поверхность и на концевые поперечные сечения. Работа сил давления на боковую поверхность равна нулю, так как эти силы во все время движения нормальны к перемещению их точек приложения. Сумма работ сил давления $\Sigma A_д$ на торцовые сечения составляет

$$\sum A_д = p_1dF_1dS_1 - p_2dF_2dS_2,$$

где p_1dF_1, p_2dF_2 — силы давления на торцы *1-1* и *2-2*; dS_1, dS_2 — элементарные перемещения точек приложения этих сил за время dt (работа сил давления на торец *2* отрицательна, так как направление силы p_2dF_2 противоположно перемещению dS_2).

Но величины dF_1dS_1 и dF_2dS_2 есть равные между собой объемы $V_{1-1'}$ и $V_{2-2'}$ массы dm. Поэтому с учетом того, что $dm=\rho V_{1-1'}=\rho V_{2-2'}$, выражение для суммы $\Sigma A_д$ можно представить в виде

$$\sum A_д=(dm/\rho)(p_1-p_2).$$

Подставив найденные выражения для работ сил и для приращения кинетической энергии в уравнение (3.11), получим:

$$dm\frac{(v_2^2-v_1^2)}{2}=dmg(z_1-z_2)+\frac{dm}{\rho}(p_1-p_2).$$

Разделим затем это уравнение на $dm=\rho dQdt$, т. е. отнесем его к единице массы протекающей жидкости, и перегруппируем члены. Будем иметь

$$gz_1+p_1/\rho+v_1^2/2=gz_2+p_2/\rho+v_2^2/2. \quad (3.12)$$

Учитывая, что сечения *1-1* и *2-2* взяты нами произвольно, это уравнение можно распространить на всю струйку, применив его для любых поперечных сечений, взятых по ее длине, и представить в более общем виде:

$$gz+p/\rho+v^2/2=\text{const}. \quad (3.13)$$

Уравнения (3.12) и (3.13) представляют собой разную запись уравнения Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости. Сумму трех слагаемых, входящих в уравнение (3.13), называют *полной удельной энергией жидкости* в данном сечении струйки и обозначают э. Различают удельную энергию положения gz, удельную энергию давления p/ρ и кинетическую удельную энергию $v^2/2$.

В соответствии с этим уравнение Бернулли можно сформулировать следующим образом: для элементарной струйки идеальной жидкости полная удельная энергия, т. е. сумма удельной энергии положения, удельной энергии давления и кинетической удельной энергии есть величина постоянная во всех сечениях струйки.

В дальнейшем (см. § 32) это уравнение будет получено иным путем — в результате интегрирования дифференциальных уравнений движения идеальной жидкости.

§ 24. ФИЗИЧЕСКАЯ СУЩНОСТЬ И ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

Уравнение Бернулли для струйки идеальной жидкости по существу представляет собой закон сохранения механической энергии, составленный применительно к единице массового расхода жидкости. Это следует из того, что в процессе его вывода значения работы сил, приложенных к выделенному объему

струйки, и значения кинетической энергии этого объема были разделены на величину $\rho dQdt$.

Отсюда становится ясным, что, поскольку член $v^2/2$ есть мера кинетической энергии единицы массы движущейся жидкости, сумма членов $dz+(p/\rho)$ будет мерилом ее потенциальной энергии.

В отношении величины gz это очевидно. Действительно, если частица жидкости массы dm расположена на высоте z относительно некоторой плоскости и находится под действием сил тяжести, то способность ее совершать работу, т. е. ее потенциальная энергия относительно этой плоскости, равна $dmgz$. Будучи поделена на массу частиц dm, эта часть потенциальной энергии, называемая *удельной потенциальной энергией положения*, даст величину gz.

Для получения более ясного физического представления о том, что потенциальная энергия измеряется и величиной p/ρ, рассмотрим следующую схему. Пусть к трубе, заполненной жидкостью с избыточным давлением p, присоединен пьезометр, снабженный на входе краном. Кран сначала закрыт, т. е. пьезометр свободен от жидкости, и элементарный кольцевой объем жидкости dV массой ρdV перед краном находится под давлением p. Если затем открыть кран, жидкость в пьезометре поднимется на некоторую высоту. Как было установлено ранее, эта высота $h_п=p/\rho g$.

Работа сил тяжести при этом перемещении объема dV будет $A_т=-\rho gdVh_п$. Настолько же возрастет его потенциальная энергия.

Потенциальная же энергия единицы массы жидкости увеличится на величину

$$A_т/\rho dV=\rho gdVh_п/\rho gV=gh_п=p/\rho.$$

Таким образом, единица массы, находящейся под давлением p, как бы несет в себе еще «заряд» потенциальной энергии, определяемый удельной энергией давления p/ρ.

В гидравлике для характеристики удельной энергии часто используют понятие напора. Под напором понимают энергию жидкости, отнесенную к единице силы тяжести, а не массы, как это было сделано ранее при выводе уравнения Бернулли.

В соответствии с этим вместо уравнения (3.13) получаем

$$z+p/\rho g+v^2/2g=\text{const} \quad (3.14)$$

— уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости в другой форме, весьма удобной для гидравлических расчетов.

Аналогично будем различать напоры: полный $H=z+p/\rho g+v^2/2g$, геометрический z, пьезометрический $p/\rho g$, скоростной $v^2/2g$. При этом уравнение Бернулли (3.14) можно сформулировать так: для элементарной струйки идеальной жидкости полный напор, т. е. сумма геометрического, пьезометрического и скоростного напоров, есть величина постоянная во всех ее сечениях.

Нетрудно показать, что между напором и удельной энергией существует следующая простая зависимость:

$$H = э/g. \qquad (3.15)$$

Напор измеряется единицами длины. Действительно, величиной z измеряется вертикальная координата центра тяжести сечения струйки. Единица измерения $p/\rho g = h$ и $v^2/2g$ — линейная (метр). Это дает возможность строить графики уравнения Бернулли. По оси абсцисс откладывают расстояния по оси струйки от некоторого сечения, принимаемого за начальное, а по оси ординат — значения составляющих напора для ряда сечений струйки.

В дальнейшем будем обозначать полный напор буквой H. В соответствии с уравнением (3.14) изменение полного напора вдоль струйки при движении идеальной жидкости изображают горизонтальной прямой ($H = \text{const}$).

Предположим, что элементарная струйка, произвольно расположенная в пространстве, несет расход жидкости dQ. Тогда скоростной напор в любом сечении струйки

$$v^2/2g = dQ^2/2g\,(dF)^2,$$

где dF — площадь сечения струйки.

Пусть напор относительно некоторой плоскости сравнения есть H_1 и ордината z оси струйки задана положением плоскости сравнения. Тогда можно вычислить значения пьезометрического напора в любом сечении струйки.

$$p/\rho g = H_1 - z - dQ^2/2g\,(dF)^2. \qquad (3.16)$$

Аналогично, если заданы положения плоскости сравнения, напор H_1 и значения пьезометрического напора для ряда сечений струйки, можно найти скоростной напор в этих сечениях:

$$v^2/2g = H_1 - z - p/\rho g \qquad (3.17)$$

и, следовательно, определить скорость v.

Подчеркнем, что в выражениях (3.16) и (3.17) положение плоскости сравнения не оказывает влияния на значения величин $p/\rho g$ и $v^2/2g$, поскольку изменение положения этой плоскости в равной мере изменяет значение как H_1, так и z.

Разность $H_1 - z$ при этом не изменяется (сказанное подтверждает, что плоскость сравнения может назначаться произвольно).

Вычислив в одном случае по уравнению (3.16) значения $p/\rho g$ или в другом по уравнению (3.17) $v^2/2g$, можно представить на одном графике изменения по длине струйки значений всех составляющих (z, $p/\rho g$, $v^2/2g$) полного напора H. Такой

график (рис. 3.11) в дальнейшем будем называть *графиком уравнения Бернулли*. Кривая *аа* на этом графике называется *пьезометрической линией*. Она изображает изменение суммы геометрического и пьезометрического напоров ($z + p/\rho g$) по длине струйки и является, таким образом, характеристикой изменения ее удельной потенциальной энергии.

Изменение этой энергии, отнесенное к единице длины, носит название *пьезометрического уклона* и обозначается $i_п$. Значение пьезометрического уклона для некоторого сечения струйки определяется выражением

$$i_п = d\,(z + p/\rho g)/dL$$

при $dL \to 0$, где dL — длина элементарного участка струйки, включающего рассматриваемое сечение.

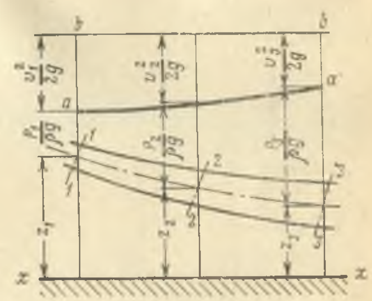


Рис. 3.11

Выражение

$$i_{п1\text{-}2} = \frac{(z_1 + p_1/\rho g) - (z_2 + p_2/\rho g)}{L_{1\text{-}2}}$$

определяет среднее значение пьезометрического уклона на участке между сечениями *1-1* и *2-2* длиною $L_{1\text{-}2}$, а выражение —

$$i_{п1\text{-}3} = \frac{(z_2 + p_2/\rho g) - (z_3 + p_3/\rho g)}{L_{2\text{-}3}}$$

— среднее значение пьезометрического уклона на участке между сечениями *2-2* и *3-3* длиной $L_{2\text{-}3}$.

§ 25. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ СТРУЙКИ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Если вместо идеальной жидкости рассматривать реальную (в которой при движении возникают касательные напряжения), то уравнение Бернулли должно будет существенным образом измениться. Действительно, если при движении идеальной жидкости ее полная удельная энергия или напор H сохраняет постоянное значение по длине струйки, то при движении реальной жидкости эта энергия будет убывать по направлению движения. Причина этому — неизбежные затраты энергии на преодоление сопротивлений движению, обусловленные внутренним трением в вязкой жидкости. Значит, для струйки реальной жидкости полная удельная энергия в сечении *1-1*

$$э_1 = gz_1 + p_1/\rho + v_1^2/2$$

будет всегда больше, чем полная удельная энергия в следующем за ним на некотором расстоянии сечении *2-2*

$$э_2 = gz_2 + p_2/\rho + v_2^2/2,$$

на величину указанных потерь энергии, и уравнение Бернулли вследствие этого принимает вид

$$gz_1 + p_1/\rho + v_1^2/2 = gz_2 + p_2/\rho + v_2^2/2 + э_{1\text{-}2}. \qquad (3.18)$$

Подобно тому, как три члена левой части этого уравнения и три первых члена правой его части представляют собой полную удельную энергию жидкости соответственно в сечениях *1-1* и *2-2*, так и величина $э_{1\text{-}2}$ является мерой энергии, потерянной единицей массы жидкости на преодоление сопротивлений при ее движении между указанными сечениями.

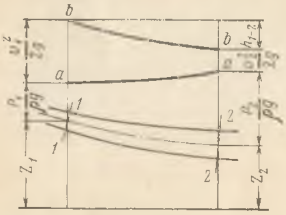


Рис. 3.12

Соответствующий этой потере удельной энергии напор называют *потерей напора* между сечениями *1-1* и *2-2* и обозначают $h_{1\text{-}2}$.

Следовательно, уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости можно представить и в виде

$$z_1 + p_1/\rho g + v_1^2/2g = z_2 + p_2/\rho g + v_2^2/2g + h_{1\text{-}2}. \qquad (3.19)$$

В соответствии с этим график уравнения Бернулли для струйки реальной жидкости будет отличаться от аналогичного графика для идеальной жидкости (см. рис. 3.11). Поскольку в случае реальной жидкости полный напор вдоль струйки не постоянен, а убывает по направлению движения, изменения его значений по длине струйки изображают не горизонтальной прямой, как в предыдущем случае, а некоторой кривой *bb* (рис. 3.12). В частном случае, когда струйка имеет постоянное сечение, потеря напора по ее длине будет пропорциональна расстоянию от начального сечения и изменение полного напора изобразится как наклонная прямая.

Для характеристики относительного изменения полного напора на единицу длины струйки вводится понятие *гидравлический уклон*. Аналитически гидравлический уклон i представляет собой производную от потери напора по соответствующему

расстоянию, отсчитанному от начального сечения по оси струйки.

$$i = dh_{1\text{-}2}/dL. \qquad (3.20)$$

Гидравлический уклон — отвлеченная, безразмерная величина.

Среднее значение гидравлического уклона на участке элементарной струйки между сечениями *1-1* и *2-2* определяется как потеря напора на единицу длины струйки:

$$i_{ср} = \frac{h_{1\text{-}2}}{L_{1\text{-}2}} = \frac{(z_1 + p_1/\rho g + v_1^2/2g) - (z_2 + p_2/\rho g + v_2^2/2g)}{L_{1\text{-}2}}, \qquad (3.21)$$

где L_{1-2} — расстояние между сечениями *1-1* и *2-2*.

§ 26. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ПОТОКА РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

При решении различных практических вопросов о движении жидкостей приходится иметь дело не с элементарными струйками, а с потоками конечных размеров. Уравнение Бернулли в этом случае может быть получено при рассмотрении потока как совокупности множества элементарных струек.

Будем исходить из уравнения (3.18). Умножив все члены этого уравнения на ρdQ (массовый расход жидкости), получим:

$$\rho dQ\frac{v_1^2}{2} + \rho dQ\left(gz_1 + \frac{p_1}{\rho}\right) = \rho dQ\frac{v_2^2}{2} + \rho dQ\left(gz_2 + \frac{p_2}{\rho}\right) + \rho dQ э_{1\text{-}2}.$$

Подобные выражения можно составить для всех отдельных струек. Сложив их, будем иметь:

$$\int \rho dQ\frac{v_1^2}{2} + \int \rho dQ\left(gz_1 + \frac{p_1}{\rho}\right) = \int \rho dQ\frac{v_2^2}{2} +$$

$$\int \rho dQ\left(gz_2 + \frac{p_2}{\rho}\right) + \int \rho dQ э_{1\text{-}2}. \qquad (3.22)$$

Рассмотрим каждый из членов этого уравнения отдельно. Выражения

$$\int \rho dQ\frac{v_1^2}{2} = \frac{\rho}{2}\int dQ v_1^2$$

и

$$\int \rho dQ\frac{v_2^2}{2} = \frac{\rho}{2}\int dQ v_2^2$$

представляют, очевидно, значения кинетической энергии всей массы жидкости, протекающей в единицу времени через поперечные сечения потока *1-1* и *2-2*.

Для практических целей оказывается удобным эти выражения заменить выражениями кинетической энергии потока, подсчитываемыми по средней для всего потока скорости $v_{\text{ср}}$, т. е. представить в виде $\rho Q v_{\text{ср}1}^2/2$ и $\rho Q v_{\text{ср}2}/2$.

Однако

$$(\rho/2)\int dQv^2 \neq \rho Q\left(v_{\text{ср}}^2/2\right).$$

Объясняется это тем, что $\int dQv^2$ есть арифметическая сумма произведений расходов отдельных элементарных струек (dQ) на квадраты их действительных скоростей (v^2), в то время как $Qv_{\text{ср}}^2$ — произведение суммарного расхода потока ($Q = \int dQ$) на квадрат средней скорости потока ($v_{\text{ср}}^2$), представляющей среднее арифметическое величин v в первой степени ($v_{\text{ср}} = \int v/n$, где n — число струек).

Поэтому, чтобы произведенная замена не изменила значение кинетической энергии потока, в выражение $(\rho/2)\,Qv_{\text{ср}}^2$ необходимо ввести некоторый поправочный коэффициент α, называемый коэффициентом Кориолиса. Этот коэффициент представляет собой отношение действительной кинетической энергии жидкости, протекающей через поперечное сечение потока в единицу времени, к кинетической энергии, которая имела бы место при том же расходе, если бы все частицы жидкости обладали одинаковыми скоростями, равными средней скорости, т. е.

$$\alpha = \int dQv^2/Qv_{\text{ср}}^2.$$

С учетом того, что $dQ = vdF$ и $Q = v_{\text{ср}}F$, последнее выражение можно представить в виде

$$\alpha = \int v^3 dF/v_{\text{ср}}^2 F.$$

Обычно коэффициент Кориолиса определяется опытным путем на основании измерений скорости в различных точках исследуемого потока. Он зависит от степени неравномерности распределения скоростей в его поперечном сечении и всегда больше единицы. Для так называемого ламинарного режима в цилиндрической трубе $\alpha = 2$, а для турбулентного $\alpha = 1{,}045 \div 1{,}10$.

Рассмотрим теперь выражение второго члена уравнения (3.22), представляющего собой потенциальную энергию потока.

При медленно изменяющемся движении, которое в основном и рассматривается в гидравлике, распределение давлений в живых сечениях потока подчиняется основному закону гидростатики (см. § 22). Поэтому можно принять, что величина $gz + p/\rho$ во всех точках сечения такого потока будет одинакова и, следовательно,

$$\int \rho dQ\,(gz + p/\rho) = \rho\,(gz + p/\rho)\int dQ = \rho Q\,(gz + p/\rho).$$

Третий член уравнения (3.22), выражающий сумму работ сил сопротивления, можно представить (подразумевая под $э_{1\text{-}2}$ осредненное значение потерь удельной энергии) в виде

$$\int \rho dQ э_{1\text{-}2} = \rho Q э_{1\text{-}2}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (3.22), будем иметь:

$$\rho Q\,\frac{\alpha_1 v_{\text{ср}1}^2}{2} + \rho Q\left(gz_1 + \frac{p_1}{\rho}\right) = \rho Q\,\frac{\alpha_2 v_{\text{ср}2}^2}{2} + \rho Q\left(gz_2 + \frac{p_2}{\rho}\right) + \rho Q э_{1\text{-}2}$$

или после сокращения на ρQ и перегруппировки слагаемых

$$gz_1 + p_1/\rho + \alpha_1\left(v_{\text{ср}1}^2/2\right) = gz_2 + p_2/\rho + \alpha_2\left(v_{\text{ср}2}^2/2\right) + э_{1\text{-}2}. \tag{3.23}$$

Это и есть уравнение Бернулли для потока реальной жидкости.

При практических расчетах часто принимают $\alpha = 1$, тем самым пренебрегая неравномерностью распределения скоростей и полагая, что все струйки как бы движутся с одной и той же средней скоростью. Это и будет приниматься нами дальше (за исключением отдельных, особо оговариваемых случаев). Кроме того, мы будем опускать индексы «ср» при $v_{\text{ср}}$, подразумевая везде, что речь идет о средних значениях этой величины. Тогда форма записи уравнения Бернулли для целого потока становится идентичной его записи для элементарной струйки:

$$gz_1 + p_1/\rho + v_1^2/2 = gz_2 + p_2/\rho + v_2^2/2 + э_{1\text{-}2} \tag{3.24}$$

или

$$z_1 + p_1/\rho g + v_1^2/2g = z_2 + p_2/\rho g + v_2^2/2g + h_{1\text{-}2}. \tag{3.25}$$

В таком виде уравнение Бернулли обычно и применяют при решении практических задач для потоков однородной несжимаемой капельной жидкости при установившемся движении, происходящем под действием одной (из объемных) силы тяжести.

Ввиду особой важности этого уравнения подчеркнем, что его составляют для различных живых сечений потока, вблизи которых движение жидкости должно удовлетворять условиям медленно изменяющегося движения, хотя на пути между этими сечениями движение может не отвечать указанным условиям.

Как уже отмечалось, член $h_{1\text{-}2}$ в уравнении (3.25) учитывает потери напора на преодоление сопротивлений движению жидкости. При этом в гидравлике различают два основных вида сопротивлений:

сопротивления, проявляющиеся по всей длине потока, обусловленные силами трения частиц жидкости друг о друга и о стенки, ограничивающие поток; соответствующие им потери напора будем называть *потерями на трение* по длине и обозначать $h_{\text{тр}}$;

местные сопротивления, обусловленные различного рода препятствиями, устанавливаемыми в потоке (задвижка, кран, колено), приводящими к изменениям значения или направления скорости течения жидкости; соответствующие им потери напора (местные потери) будем обозначать $h_{\text{м. п}}$.

Полная потеря напора между двумя сечениями потока при наличии сопротивлений обоих видов

$$h_{1\text{-}2} = h_{\text{тр}} + h_{\text{м. п}}. \qquad (3.26)$$

Определение потерь напора при движении реальных жидкостей составляет одну из основных задач практической гидравлики. Подробно эта задача рассматривается ниже.

§ 27. ГРАФИК УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ ПОТОКА РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

График уравнения Бернулли для потока реальной жидкости может быть построен на основании данных, изложенных в § 25, с учетом дополнительного члена $h_{1\text{-}2}$ в правой части этого уравнения.

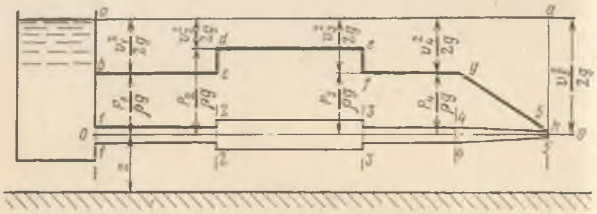


Рис. 3.13

В качестве примера построим такой график для случая истечения жидкости из сосуда с постоянным уровнем по горизонтальной трубе переменного сечения*. Посмотрим, какой вид имел бы этот график в случае идеальной жидкости. В этом случае полный напор по всей длине трубы сохраняет постоянное значение и напорная линия изображается в виде горизонтальной прямой *aa* (рис. 3.13).

Пусть известная по условиям истечения средняя скорость жидкости в начальном сечении трубы *1-1* равна v_1. Вычислим скоростной напор $v_1^2/2g$ и, отложив в масштабе графика его значение вниз от напорной линии (отрезок *ab*), получим пьезометрический напор в этом сечении $p_1/\rho g$. При постоянном диаметре на участке трубы между сечениями *1-1* и *2-2* величины $v^2/2g$ и, следовательно, $p/\rho g$ сохраняют постоянное значение, чему на рис. 3.13 будет соответствовать участок пьезометрической линии в виде отрезка горизонтальной прямой *bc*. В сечении *2-2* в связи с резким увеличением диаметра трубы скорость резко уменьшается, а давление, как это следует из уравнения Бернулли $p_1/\rho g + v_1^2/2g = p_2/\rho g + v_2^2/2g$, наоборот, резко увеличивается до p_2. Поэтому пьезометрическая линия здесь круто возрастает (участок *cd*), затем до сечения *3-3*, ввиду постоянства диаметра трубы, по-прежнему изображается горизонтальной

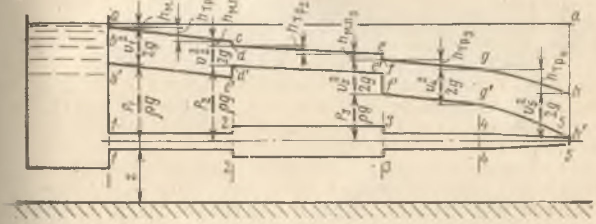


Рис. 3.14

прямой *de*. В сечении *3-3* происходит обратное явление: диаметр трубы резко уменьшается, скорость возрастает, давление падает и пьезометрическая линия круто опускается вниз (участок *ef*). Между сечениями *3-3* и *4-4* из-за указанных выше причин пьезометрическая линия изображается также горизонтальной прямой *fg*. На последнем участке трубопровода его диаметр постепенно уменьшается. Давление здесь постепенно снижается до атмосферного в выходном сечении. Следовательно, пьезометрическая линия представится в виде наклонной прямой *gh*.

Построим аналогичный график для случая движения в трубе реальной жидкости. Прежде всего, построим напорную линию. Для этого в сечении *1-1* (рис. 3.14) отложим от уровня жидкости по вертикали вниз отрезок *ab*, равный потере напора при входе в трубу (эта потеря в соответствии с данной выше классификацией является местной — $h_{\text{м. п}_1}$) о способе ее определения будет сказано ниже). На участке трубы между сечениями *1-1* и *2-2* наблюдается потеря напора на трение по длине. Пусть эта потеря напора равна $h_{\text{тр. 1}}$. Тогда для получения точки, принадлежащей напорной линии в конце данного участка, т. е. в сечении *2-2*, необходимо из полного напора в сечении *1-1*

* Ввиду того, что труба горизонтальна, геометрический напор z для всех сечений одинаков и поэтому не принимается во внимание. Рассуждая иначе, мы можем принять за плоскость сравнения горизонтальную плоскость, проходящую через ось трубы; тогда по всей длине трубы $z=0$.

вычесть указанную потерю напора. В результате будет получена точка *c*. Так как диаметр трубы на участке между сечениями *1-1* и *2-2* постоянен, будет одинаков и гидравлический уклон, представляющий собой потерю напора на единицу длины, и поэтому напорная линия изобразится в виде наклонной прямой *bc*.

В сечении *2-2* при внезапном расширении трубы происходит местная потеря напора $h_{м.п_2}$, на участке трубы между сечениями *2-2* и *3-3* — потеря напора на трение по длине $h_{тр.2}$, в сечении *3-3* при сужении трубы — местная потеря напора $h_{м.п_3}$, на участке между сечениями *3-3* и *4-4* — потеря напора по длине $h_{тр.3}$.

Напорная линия для этих участков строится аналогично предыдущему и представляет собой ломаную линию *bcdefg*, состоящую из отдельных прямолинейных отрезков, показывающих изменение полного напора. На последнем участке трубы переменного диаметра между сечениями *4-4* и *5-5* гидравлический уклон увеличивается с уменьшением диаметра (так как потери возрастают с увеличением скорости). Напорная линия здесь изобразится в виде кривой *gh*.

Из построения очевидно, что отрезки между горизонтальной прямой *aa*, соответствующей напорной линии при движении идеальной жидкости, и полученной напорной линией представляют собой потери напора на отдельных участках трубопровода.

Для построения пьезометрической линии необходимо из ординат напорной линии вычесть отрезки, соответствующие значениям скоростных напоров, которые могут быть определены по уравнению Бернулли и уравнению постоянства расхода. В данном случае пьезометрическая линия представляет собой ломаную линию *b'c'd'e'f'g'h'*.

§ 28. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ИЛЛЮСТРАЦИЯ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ

Уравнение Бернулли можно проиллюстрировать весьма простыми опытами. Рассмотрим установку, показанную на рис. 3.15. Установка состоит из бака *A*, к которому присоединена горизонтальная труба *B* постоянного сечения, снабженная на выходном конце краном *C* для регулировки расхода жидкости. К трубе присоединены пьезометрические трубки *1-5*.

Бак заполняют жидкостью, обычно водой, из водопроводной трубы *D* при закрытом кране *C* на трубе *B*. При этом уровни жидкости во всех пьезометрических трубках и баке будут одинаковы. Затем кран *C* открывают и наблюдают за положением уровней в пьезометрах при установившемся движении* воды в трубе *B*.

* Что достигается регулированием постоянного положения уровня в баке.

Так как при движении жидкости по трубе происходит потеря напора, уровни жидкости постепенно понижаются от начала трубы к ее концу. Наивысший уровень будет в пьезометрической трубке *1*, установленной в начале трубы, а наинизший (близкий к нулю) — в трубке *5*. При этом очевидно, что раз-

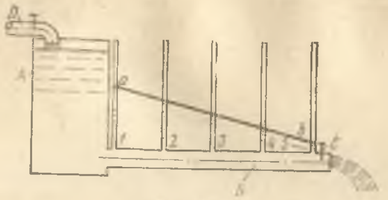


Рис. 3.15

ность уровней в пьезометрических трубках представит собой потери напора на соответствующих участках горизонтальной трубы. Например, разность уровней в трубках *1* и *2* представляет потерю напора на участке между этими трубками, разность уровней в трубках *1* и *5* — потерю напора на участке между трубками *1* и *5* и т. д. Прямая *ab*, соединяющая уровни в трубках, представляет собой пьезометрическую линию.

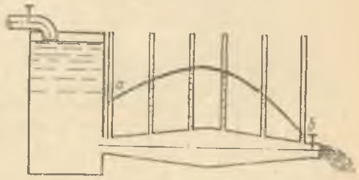


Рис. 3.16

Если труба переменного сечения (например, сначала плавно расширяется, затем сужается, рис. 3.16), то вследствие значительных скоростей течения в суженных сечениях величина $v^2/2g$ будет большой, а пьезометрический напор $p/\rho g$ малым. В расширенных сечениях, наоборот, скоростной напор будет малым, а пьезометрический — большим. В результате пьезометрическая линия будет иметь вид кривой *ab*.

§ 29. ИЗМЕРЕНИЕ РАСХОДОВ И СКОРОСТЕЙ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Наиболее простыми и вместе с тем точными способами измерения расхода жидкости являются объемный и весовой (массовый).

При объемном способе измерения протекающая в исследуемом потоке (например, в трубе) жидкость поступает в особый, тщательно проградуированный сосуд (мерный бак), время наполнения которого точно фиксируется по секундомеру. Если объем этого бака V, а измеренное время его наполнения t, объемный расход будет $Q=V/t$.

При весовом способе взвешивают жидкость, поступившую в бак за время t, определяют ее массу m_V, находят массовый расход $m=m_V/t$ и по нему, зная плотность жидкости вычисляют объемный расход:

$$Q=m/\rho.$$

Однако объемный и весовой способы пригодны лишь при сравнительно небольших значениях расхода жидкости (иначе размеры мерных баков были бы громоздкими, а замеры — затруднительными). Кроме того, этими способами невозможно замерить расход в произвольном сечении, например длинного трубопровода или канала, без нарушения их целостности.

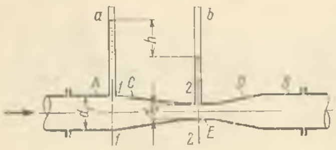


Рис. 3.17

В связи с этим объемный и весовой способы, как правило, не применяют, за исключением случаев измерений сравнительно небольших расходов жидкостей в коротких трубах и каналах. На практике используют специальные приборы, предварительно отградуированные объемным или весовым способом.

Одним из таких приборов является **расходомер Вентури**. Большим преимуществом этого прибора являются простота конструкции и отсутствие каких-либо движущихся частей. Расходомеры Вентури могут быть расположены горизонтально, вертикально и под любым углом, что принципиального значения не имеет. Рассмотрим расходомер с горизонтальной осью (рис. 3.17). Он состоит из двух цилидрических труб A и B диаметром d_1, соединенных посредством двух конических участков (патрубков) C и D с цилиндрической вставкой E меньшего диаметра d_2. В сечениях *1-1* и *2-2* к расходомеру присоединены пьезометрические трубки a и b, разность уровней жидкости h в которых показывает разность давлений в этих сечениях.

Составляя уравнение Бернулли для сечений *1-1* и *2-2* и пренебрегая очень небольшим на малой длине между этими сечениями потерями, получаем $p_1/\rho g+v_1^2/2g=p_2/\rho g+v_2^2/2g$, откуда $p_1/\rho g-p_2/\rho g=v_2^2/2g-v_1^2/2g$. Но $p_1/\rho g-p_2/\rho g=h$ и, следовательно,

$$h=v_2^2/2g-v_1^2/2g.$$

Кроме того, из уравнения постоянства расхода имеем $v_1F_1=v_2F_2$.

Выразим отсюда v_1 через v_2: $v_1=v_2\ (F_2/F_1)$.

Подставив это значение в предыдущее уравнение

$$h=(v_2^2/2g)\left[1-(F_2/F_1)^2\right],$$

определим среднюю скорость в сечении *2-2:*

$$v_2=\sqrt{\frac{2gh}{1-(F_2/F_1)^2}}.$$

Тогда искомый расход жидкости будет

$$Q=v_2F_2=F_2\sqrt{\frac{2gh}{1-(F_2/F_1)^2}}.$$

Однако вследствие неравномерности распределения скоростей в поперечных сечениях потока, а также неизбежных потерь напора между рассматриваемыми сечениями действительный расход жидкости будет несколько отличаться от вычисленного по этой формуле, что учитывают, вводя в нее поправочный коэффициент β. В результате

$$Q=\beta F_2\sqrt{\frac{2gh}{1-(F_2/F_1)^2}}.$$

Коэффициент β для каждого расходомера устанавливают опытным путем на основании ряда предварительных измерений расходов при различных скоростях движения жидкости. В этом заключается градуирование расходомера.

Практически для определения расхода пользуются формулой

$$Q=c\sqrt{h},$$

где коэффициент

$$c=\beta F_2\sqrt{\frac{2g}{1-(F_2/F_1)^2}}$$

называют *постоянной расходомера* (для данного расходомера он имеет вполне определенное значение).

В большинстве случаев разность давлений в сечениях *1-1* и *2-2* трубчатого расходомера измеряют при помощи дифференциального манометра, обычно ртутного. Тогда, как это следует из описания дифференциального манометра,

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \left(\frac{\rho_1}{\rho} - 1\right) h_1.$$

Поэтому в полученные выше формулы вместо h необходимо ввести величину

$$[\rho_1/\rho - 1]\, h_1,$$

где ρ_1 — плотность ртути манометра; h_1 — разность уровней ртути в обоих коленах дифференциального манометра. При этом для определения расхода соответственно получаем следующие формулы:

$$Q = \beta F_2 \sqrt{\frac{2g\,[\rho_1/\rho - 1]\, h_1}{1 - (F_2/F_1)^2}}\ ;$$

$$Q = c_1 \sqrt{h_1},$$

где постоянная расходомера

$$c_1 = \beta F_2 \sqrt{\frac{2g\,[\rho_1/\rho - 1]}{1 - (F_2/F_1)^2}}\ .$$

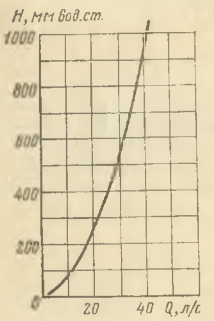


Рис. 3.18

На практике вместо вычисления по формулам расход жидкости часто определяют по так называемым градуировочным кривым, получаемым опытным путем и дающим для данного расходомера прямую зависимость между показаниями манометра H и измеряемыми расходами жидкости Q. Одна из таких кривых приведена на рис. 3.18.

Другим широко распространенным прибором для измерения расхода является расходомерная шайба (или диафрагма), обычно выполняемая в виде пластины с круглым отверстием в центре, устанавливаемой между фланцами трубопровода (рис. 3.19). Края отверстия чаще всего имеют острые входные кромки (под углом 45°) или закругляются по форме втекающей в отверстие струи жидкости (сопло). Два пьезометра a и b (или дифференциальный манометр) служат для измерения перепада давления до и после диафрагмы.

Расход определяют по замеренной разности уровней в трубках пьезометров по формуле, аналогичной формуле $Q = c\sqrt{h}$.

Коэффициент c находят опытным путем для каждого типа диафрагмы в отдельности.

Расходы могут быть вычислены также в результате измерений скоростей течения жидкости и живых сечений потока. Одним из широко применяемых для этой цели приборов является гидрометрическая вертушка. Ее используют для измерений в естественных потоках (реках) и открытых каналах.

Вертушка (рис. 3.20) состоит из крыльчатки A, представляющей собой колесо с винтовыми лопастями, насаженное на горизонтальный вал C. Установленная в потоке крыльчатка под действием протекающей жидкости вращается, причем частота ее вращения прямо пропорциональна скорости течения. От вертушки вверх выводятся провода B, идущие к электрическому звонку, подающему сигнал при каждом замыкании электрической цепи (замыкание осуществляется через определенное число оборотов особым контактным механизмом, помещенным в камере вертушки), или к специальному счетчику, автоматически записывающему число оборотов и время *.

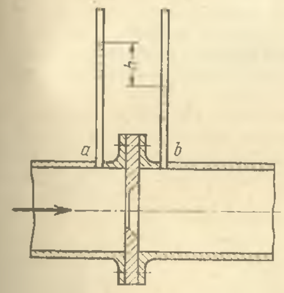


Рис. 3.19

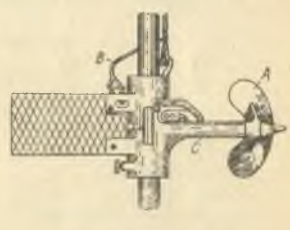


Рис. 3.20

Расход жидкости определяют следующим образом: вычерчивают в масштабе живое сечение потока (рис. 3.21) и разбивают его на ряд элементарных сечений ΔF_1, ΔF_2, ... Затем вертушкой измеряют скорости v_1, v_2, ... в центрах тяжести этих сечений c_1, c_2, ... Элементарные расходы через эти сечения

$$q_1 = \Delta F_1 v_1; \qquad q_2 = \Delta F_2 v_2, \ \ldots$$

* На принципе вертушки основан крыльчатый расходомер, применяемый для измерения расхода жидкости в напорных трубопроводах. Расходомер состоит из крыльчатки с винтовыми лопастями, обычно изготовляемой из целлулоида, помещаемой внутри корпуса и приводимой во вращение протекающей через расходомер жидкостью. Ось крыльчатки соединена со счетчиком, записывающим частоту ее вращения, по которой судят о расходе.

Существуют два типа крыльчатых расходомеров, в одних ось крыльчатки параллельна оси трубы, на которой установлен расходомер, в других ось крыльчатки перпендикулярна к оси трубы. Расходомеры первого типа получили наиболее широкое применение, особенно в водопроводном деле.

Полный расход жидкости находят сложением элементарных расходов по всему сечению:

$$Q = \sum q_i = \Delta F_1 v_1 + \Delta F_2 v_2 + \ . \ . \ .$$

Для замеров скорости в некоторой точке потока (как в небольших открытых потоках, главным образом, при лабораторных исследованиях, так и в трубах) применяют трубку Пито. В простейшем виде трубка Пито (рис. 3.22, *а*) представляет собой изогнутую под прямым углом трубку небольшого диаметра, устанавливаемую в потоке открытым нижним концом навстречу течению жидкости; второй, верхний, конец трубки выводят из потока наружу.

Рис. 3.21

Если такую трубку установить в открытом потоке, например в канале, где давление на свободной поверхности жидкости равно атмосферному, то, как было указано ранее, высота h поднятия жидкости в трубке над поверхностью потока представит собой величину скоростного напора $v^2/2g$ в точке установки трубки.

Таким образом, $h = v^2/2g$, откуда скорость движения жидкости

$$v = \sqrt{2gh}.$$

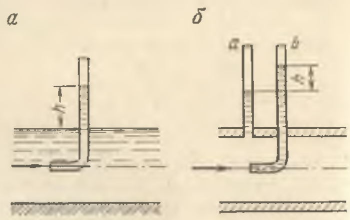


Рис. 3.22

Действительная скорость вследствие неизбежных потерь напора в самой трубке и некоторого нарушения потока, вызываемого введением в него инородного тела, оказывается несколько больше и определяется по формуле

$$v = a\sqrt{2gh},$$

где a — поправочный коэффициент, определяемый для каждой трубки опытным путем.

Дальнейшим развитием и усовершенствованием трубки Пито является устройство, применяемое для измерения скорости течения жидкости в напорных трубопроводах, состоящее из двух трубок (рис. 3.22, *б*), одна из которых a — обычный пьезометр, показывающий пьезометрический напор $p/\rho g$, а другая b подобна трубке Пито и измеряет полный напор $p/\rho g + v^2/2g$. Разность уровней жидкости в обеих трубках h дает значение скоростного напора $v^2/2g$, по которому определяют скорость.

Обычно обе трубки совмещаются в одном приборе, называемом трубкой Прандтля. Трубки расположены концентрически, концы их присоединены к дифференциальному манометру. По внутренней трубке передается в манометр полный напор, а по внешней, имеющей по боковой поверхности вырез или отверстия, — пьезометрический напор. Чтобы уменьшить нарушения потока жидкости возле трубки, ее оголовку придают удобообтекаемую сферическую форму. Размеры трубки могут быть очень малыми — до 0,5 мм в диаметре (шприцевая игла), так что измеряемая ею скорость может быть принята за скорость в данной точке.

Скорость движения жидкости в точке установки трубки Прандтля определяется по формуле

$$v = a\sqrt{2gh\,[\rho_1/\rho - 1]}\ .$$

Помещая трубку Прандтля в различных точках поперечного сечения потока, можно найти распределение скоростей в этом сечении и вычислить затем значение расхода жидкости.

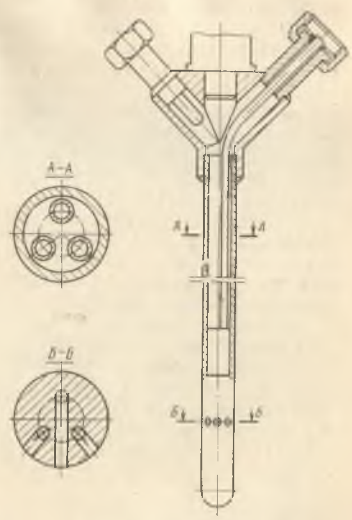


Рис. 3.23

Для измерения скоростей в действующих трубопроводах в процессе их эксплуатации весьма удобна модификация трубки Прандтля, выполненная в виде цилиндрического зонда. Подобный зонд (рис. 3.23) представляет собой цилиндрическую трубку, в нижней части которой имеются три приемных отверстия: центральное (среднее) и два крайних.

При измерениях зонд вводится в трубопровод через сальниковое устройство в верхней части трубы. Значения скорости находят по перепаду давлений между полным давлением в центральном отверстии и давлениями в крайних отверстиях, равными сумме статического и некоторой (определяемой тарировкой) части динамического давления.

§ 30. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В предыдущих параграфах за основу была принята струйчатая модель движения жидкости и движение рассматривалось в основном как одноразмерное и установившееся.

Здесь и в последующих параграфах движение жидкости исследуется с помощью иных методов и приемов — с позиций теоретической гидродинамики.

Как известно, движение идеальной жидкости характеризуется отсутствием в ней сил внутреннего трения, вызывающих появление касательных напряжений. Поэтому силы гидродинамического давления в потоке подобной жидкости, как и в случае покоя, имеют только нормальную составляющую. Это позволяет при выводе дифференциальных уравнений движения воспользоваться полученными ранее (см. § 7) дифференциальными уравнениями гидростатики (2.5) — (2.5″): $X-(1/\rho)(\partial p/\partial x)=0$; $Y-(1/\rho)(\partial p/\partial y)=0$; $Z-(1/\rho)(\partial p/\partial z)=0$.

Подчеркнем, что рассматриваемая жидкость несжимаема и однородна и в ней выделен некоторый элементарный объем в форме параллелепипеда со сторонами dx, dy, dz, перемещающийся со скоростью v. Составляющие скорости по осям координат обозначим v_x, v_y, v_z.

Уравнения равновесия для системы сил, действующих на этот находящийся в движении объем жидкости, могут быть легко получены, если на основании известного из теоретической механики принципа Даламбера к реально действующим, учитываемым уравнениям (2.5) — (2.5″) силам (давления, объемным и массовым) присоединить силу инерции. Последняя определяется как произведение массы параллелепипеда $dm=\rho dxdydz$ на ускорение его движения $a=dv/dt$:

$$P_{и}=-dma=-\rho dxdydz\,(dv/dt).$$

Здесь знак минус указывает, что направление силы инерции противоположно направлению ускорения.

Напомним, что в уравнениях (2.5) — (2.5″) все силы были представлены в виде проекций на координатные оси и отнесены к единице массы рассматриваемого объема жидкости.

Поступая так и в отношении силы инерции, для составляющих этой силы по осям координат, отнесенным к единице массы, найдем: $P_{их}=-dv_x/dt$; $P_{иy}=-dv_y/dt$; $P_{иz}=-dv_z/dt$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} &X-(1/\rho)(\partial p/\partial x)-dv_x/dt=0;\\ &Y-(1/\rho)(\partial p/\partial y)-dv_y/dt=0;\\ &Z-(1/\rho)(\partial p/\partial z)-dv_z/dt=0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Подчеркнем, что в общем случае величины v_x, v_y и v_z являются функцией координат x, y, z и времени t, поэтому их полный дифференциал, например dv_x, будет

$$dv_x=\frac{\partial v_x}{\partial x}dx+\frac{\partial v_x}{\partial y}dy+\frac{\partial v_x}{\partial z}\partial z+\frac{\partial v_x}{\partial t}dt.$$

Аналогичные выражения могут быть записаны для dv_y и dv_z.

Внесем их в систему уравнений (3.27), имея в виду соотношения: $dx/dt=v_x$; $dy/dt=v_y$; $dz/dt=v_z$. Получим

$$\begin{aligned} &X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_x}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_x}{\partial z}v_z+\frac{\partial v_x}{\partial t};\\ &Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial v_y}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_y}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_y}{\partial z}v_z+\frac{\partial v_y}{\partial t};\\ &Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial v_z}{\partial x}v_x+\frac{\partial v_z}{\partial y}v_y+\frac{\partial v_z}{\partial z}v_z+\frac{\partial v_z}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Уравнения (3.28) — это *дифференциальные уравнения движения идеальной (невязкой) жидкости*. Они устанавливают связь между проекциями объемных, массовых сил и скоростей, давлением и плотностью жидкости и являются основой для изучения многих основных вопросов гидродинамики. Их называют *уравнениями Эйлера*.

§ 31. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Выделим мысленно в пространстве некоторый неподвижный элементарный объем в форме параллелепипеда со сторонами dx, dy, dz (рис. 3.24) и исследуем условия протекания жидкости через его боковые грани. Будем считать, например, что через вертикальную грань $abcd$ жидкость втекает в параллелепипед, а через грань $a'b'c'd'$ вытекает из него. Примем также, что по-прежнему жидкость несжимаема и однородна, сплошь (без разрывов и пустот) заполняет все пространство и скорость ее меняется непрерывно при переходе от одной точки пространства к другой.

Предположим, что скорость в точке e взятой на грани $abcd$, равна v. Ее проекцию на ось x обозначим v_x. Учитывая непрерывность изменения скорости, для ее составляющей по этой же оси в точке e' на грани $a'b'c'd'$, отстоящей от грани $abcd$ на расстоянии dx, получим

$$v_x+(\partial v_x/\partial x)\,dx.$$

В этих условиях масса жидкости, втекающая в параллелепипед через грань $abcd$ в единицу времени (массовый расход), может быть определена как

$$dm_x=\rho v_x dydz.$$

Для массы жидкости, вытекающей из параллелепипеда через грань $a'b'c'd'$, соответственно найдем

$$dm_x' = \rho\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}\,dx\right) dydz.$$

Таким образом, изменение массы жидкости в параллелепипеде за единицу времени в направлении оси x, равное разности указанных величин, составит

$$dm_x' - dm_x = \rho\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x}\,dx\right) dydz - \rho v_x dydz = \rho\,\frac{\partial v_x}{\partial x}\,dxdydz.$$

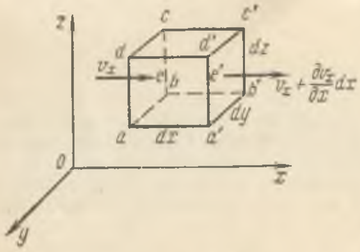


Рис. 3.24

Аналогичные выражения можно получить и для изменения массы жидкости по осям y и z:

$\rho\,(\partial v_y/\partial y)\,dxdydz;$

$\rho\,(\partial v_z/\partial z)\,dxdydz.$

Полное изменение массы жидкости в объеме параллелепипеда в единицу времени будет

$$\rho\,(\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z)\,dxdydz.$$

Однако, имея в виду принятое условие несжимаемости и сплошности жидкости, заполняющей исследуемое пространство, следует считать, что масса жидкости внутри рассматриваемого параллелепипеда все время должна сохраняться постоянной. Значит, полное изменение массы жидкости в параллелепипеде должно равняться нулю.

Следовательно,

$$\rho\,(\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z)\,dxdydz = 0,$$

что после ряда сокращений приводит к уравнению

$$\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z = 0, \qquad (32.9)$$

называемому *дифференциальным уравнением неразрывности*. Это уравнение является пятым в системе дифференциальных уравнений гидродинамики. Нетрудно видеть, что оно имеет тот же физический смысл, что и установленное ранее уравнение постоянства расхода (3.8) и также представляет собой математическое выражение закона сохранения массы.

§ 32. ИНТЕГРАЛ БЕРНУЛЛИ

Дифференциальные уравнения движения Эйлера (3.27) при известных условиях могут быть проинтегрированы. Условия эти следующие:

рассматривается установившееся движение элементарной струйки идеальной жидкости;

жидкость несжимаема и однородна;

силы, действующие на жидкость, имеют потенциал (см. § 8).

Тогда поступим следующим образом. Умножим первое из уравнений (3.27) на dx, второе на dy и третье на dz и полученную систему уравнений сложим почленно:

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}\,dy + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz\right) = \frac{dv_x}{dt}\,dx + \frac{dv_y}{dt}\,dy + \frac{dv_z}{dt}\,dz\,. \qquad (3.30)$$

При сформулированных выше условиях многочлен $Xdx + Ydy + Zdz$ представляет собой полный дифференциал потенциальной силовой функции U:

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{\partial U}{\partial x}\,dx + \frac{\partial U}{\partial y}\,dy + \frac{\partial U}{\partial z}\,dz = dU.$$

Кроме того, поскольку рассматривается установившееся движение, при котором гидродинамическое давление является только функцией координат и не зависит от времени, то трехчлен в скобках в левой части уравнения (3.30) также является полным дифференциалом давления

$$(\partial p/\partial x)\,dx + (\partial p/\partial y)\,dy + (\partial p/\partial z)\,dz = dp.$$

Приняв затем во внимание, что $dx/dt = v_x$; $dy/dt = v_y$; $dz/dt = v_z$, представим правую часть уравнения (3.30) в виде:

$$(dv_x/dt)\,dx + (dv_y/dt)\,dy + (dv_z/dt)\,dz = v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z = \frac{1}{2}\,d\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{1}{2}\,dv^2.$$

После ряда преобразований это уравнение можно переписать следующим образом:

$$dU - (1/\rho)\,dp = \frac{1}{2}\,dv^2$$

или

$$d\,[U - p/\rho - v^2/2] = 0.$$

Проинтегрировав его, найдем:

$$U - p/\rho - v^2/2 = \text{const}. \qquad (3.31)$$

Если из внешних объемных сил на жидкость действует только сила тяжести, то $X=0$, $Y=0$, $Z=-g$ и, следовательно,

$$U=-gz.$$

При этом выражение (3.31) превращается в уравнение (интеграл) Бернулли

$$gz+p/\rho+v^2/2=\text{const} \tag{3.32}$$

для установившегося движения элементарной струйки идеальной жидкости, идентичное уравнению (3.13), полученному иным путем.

§ 33. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Дифференциальные уравнения движения реальной (вязкой) жидкости можно получить, дополнив уравнения Эйлера (3.27), выведенные для идеальной (невязкой) жидкости, составляющими сил внутреннего трения, обусловленными вязкостью.

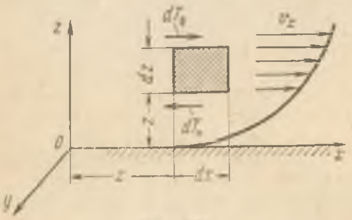


Рис. 3.25

Подчеркнем, что входящие в уравнения Эйлера объемные (массовые) силы, отнесенные к единице массы жидкости и определяемые поэтому через проекции соответствующих ускорений X, Y, Z и dv_x/dt, dv_y/dt, dv_z/dt, останутся при этом неизменными, а силы поверхностные будут иными и кроме нормальных сил давления, выражаемых через нормальные напряжения, будут иметь место касательные (вязкостные) силы сопротивления, выражающиеся через соответствующие касательные напряжения.

Подробный вывод уравнений для нахождения составляющих касательных сил сопротивления по координатным осям оказывается весьма громоздким и трудоемким и обычно излагается в фундаментальных пособиях по гидромеханике.

Рассмотрим упрощенное решение этой задачи, приводящее к тем же конечным результатам, что и точный вывод, и одновременно дающее достаточно четкое представление о физической сущности явлений, происходящих в вязкой жидкости при ее движении. С этой целью выделим в движущейся жидкости объем в форме элементарного параллелепипеда (рис. 3.25) с гранями, параллельными координатным плоскостям, и сторонами dx, dy, dz. Сначала для простоты исследуем одноразмерное движение этого объема. Будем считать, что оно происходит вдоль оси x и скорость движения v_x изменяется только в направлении оси z.

Представим себе далее, что твердая, неподвижная поверхность, совпадающая с плоскостью xOy, тормозит движение жидкости и значение скорости v_x от нуля на этой поверхности возрастает по некоторой кривой.

При положительном градиенте скорости вдоль оси Oz на горизонтальных гранях, ограничивающих выделенный параллелепипед, возникнут элементарные силы трения:

на нижней грани $dT_н=\tau dxdy$, направленная против движения,

на верхней грани, где касательное напряжение получило приращение $(d\tau/dz)dz$, $dT_в=[\tau+(d\tau/dz)dz]dxdy$, направленная в сторону движения.

Таким образом, равнодействующая указанных сил трения в направлении оси x будет

$$dT_x=dT_в-dT_н=(d\tau/dz)\,dxdydz.$$

Подставим сюда значение напряжения внутреннего трения, определяемое уравнением $\tau=\mu(dv_x/dz)$, (где, напомним, μ — динамическая вязкость, которая для данной жидкости, находящейся в определенных условиях, может считаться постоянной). Тогда будем иметь

$$dT_x=\frac{d}{dz}\left(\mu\frac{dv_x}{dz}\right)dxdydz=\mu\frac{d^2v_x}{dz^2}dxdydz.$$

Отнесем затем это выражение к единице массы, т. е. разделим на $dm=\rho dxdydz$. Обозначим также μ/ρ через ν (кинематическая вязкость жидкости). В результате получим

$$\frac{dT_x}{dm}=\frac{\mu}{\rho}\frac{d^2v_x}{dz^2}=\nu\frac{d^2v_x}{dz^2}. \tag{3.33}$$

Перейдем теперь к общему случаю трехмерного движения жидкости в пространстве, при котором существуют составляющие скорости в направлении всех трех координатах осей. Имея в виду, что эти составляющие v_x, v_y, v_z являются функциями трех координат x, y, z, по аналогии с выражением (3.33), полученным для частного случая одномерного движения, при котором скорость определялась как функция одной лишь координаты z, придем к следующему выводу: в рассматриваемом случае трехмерного движения проекция, например, касательной силы сопротивления на ось x (как и ранее отнесенная к единице массы) должна быть представлена в виде

$$\nu\left(\frac{\partial^2v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2v_x}{\partial z^2}\right). \tag{3.34}$$

Аналогичные выражения могут быть записаны для проекций единичной силы сопротивления на оси y и z. К таким же результатам приводит подробный вывод, обычно выполняемый в полном объеме в теоретической гидромеханике.

Дополняя полученными выражениями вида (3.34) дифференциальные уравнения Эйлера (3.27), получаем дифференциальные уравнения движения реальной (вязкой) жидкости:

$$
\begin{aligned}
&X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)=\frac{dv_x}{dt},\\
&Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)=\frac{dv_y}{dt},\\
&Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{dz^2}\right)=\frac{dv_z}{dt}.
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

Впервые эти уравнения были получены в 1822 г. французским гидромехаником Навье, затем в 1845 г. их вывод был усовершенствован англичанином Стоксом. Поэтому их называют уравнениями Навье — Стокса.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

§ 34. РЕЖИМЫ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Одна из основных задач практической гидравлики — оценка потерь напора на преодоление гидравлических сопротивлений, возникающих при движении реальных жидкостей в различных гидравлических системах. Точный учет этих потерь во многом определяет надежность технических расчетов, степень совершенства и экономическую целесообразность инженерных решений, принимаемых при проектировании.

Чтобы правильно определить эти сопротивления, прежде всего необходимо составить ясное представление о механизме самого движения жидкости. При исследовании вопроса приходим к заключению о существовании двух различных, резко отличающихся режимов движения. Это было известно еще в первой половине XIX в., но со всей очевидностью наличие двух режимов движения было подтверждено только в 1883 г. известным физиком Рейнольдсом на основе весьма простых и наглядных опытов.

Сущность этих опытов сводится к следующему. Имеется бак A, к которому присоединена горизонтальная стеклянная труба B, снабженная краном C (рис. 4.1). Над баком устанавливается сосуд D с окрашенной жидкостью, подаваемой в трубу B по тонкой трубке E. Перед проведением опытов бак заполняют водой (например, из водопровода через трубу F), и ее уровень поддерживают постоянным при помощи сливной линии H. Затем, открывая кран C, в трубе B создают поток жидкости, а открывая кран K на трубе E, в этот поток подают тонкую струю окрашенной жидкости.

Постепенно все более открывая кран C, можно повышать расход, и, следовательно, скорость течения жидкости в трубе B. При этом можно наблюдать следующую картину: при небольших скоростях течения в трубе B окрашенная жидкость движется в виде отчетливо выраженной тонкой струйки (рис. 4.2, *а*), не смешиваясь с потоком неокрашенной воды; при повышении скорости течения окрашенная струйка начинает колебаться и принимает волнообразные очертания. Затем на отдельных ее участках начинают появляться разрывы, она теряет отчетливую форму и, наконец, при каком-то определенном значении скорости полностью разрывается, целиком размываясь жидкостью (рис. 4.2, *б*). При этом отдельные частицы красящего вещества смешиваются со всей массой жидкости, равномерно ее окрашивая.

4 Заказ № 1363

Если в этом случае подмешать в поток жидкости мелкие твердые частицы такой же плотности, что и сама жидкость, перемещение этих частиц будет происходить по весьма сложным криволинейным траекториям.

При проведении опыта в обратном порядке, т. е. при постепенном закрытии крана, наблюдаемые явления повторяются в обратном порядке, но обычно при несколько других значениях скоростей.

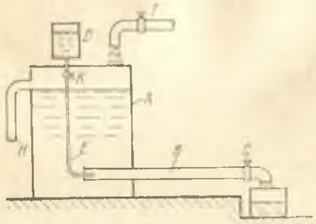


Рис. 4.1

Движение жидкости при малых скоростях, когда отдельные струйки жидкости движутся параллельно оси потока, называют *ламинарным* (от латинского слова «ламина» — слой), или струйчатым. Ламинарное движение можно рассматривать как движение отдельных слоев жидкости, происходящее без перемешивания частиц.

Второй вид движения жидкости, наблюдаемый при больших скоростях, называют *турбулентным* («турбулентус» по-латински — вихревой). В этом случае в движении жидкости нет видимой закономерности. Отдельные частицы перемешиваются между собой и движутся по самым причудливым, все время изменяющимся траекториям. Такое движение также называют беспорядочным. В действительности, однако, и при турбулентном режиме имеют место определенные закономерности.

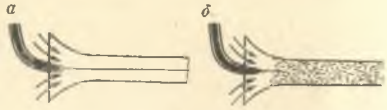


Рис. 4.2

§ 35. ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА

Обобщив результаты своих опытов, проведенных на круглых трубах, а также исходя из некоторых теоретических соображений, которые будут рассмотрены в гл. 8, Рейнольдс нашел общие условия, при которых возможны существование того или иного режима и переход от одного режима к другому. Он установил, что основными факторами, определяющими характер режима, являются: средняя скорость движения жидкости v, диаметр трубопровода d, плотность жидкости ρ, ее абсолютная вязкость μ. При этом чем больше размеры поперечного сечения и плотность жидкости и чем меньше ее вязкость, тем легче, увеличивая скорость, осуществить турбулентный режим.

Для характеристики режима движения жидкости Рейнольдс ввел безразмерный параметр Re, учитывающий влияние перечисленных выше факторов, называемый *числом* (или *критерием*) *Рейнольдса*.

$$\mathrm{Re} = vd\rho/\mu. \tag{4.1}$$

Так как $\mu/\rho = \nu$, формулу (4.1) можно записать в виде

$$\mathrm{Re} = vd/\nu. \tag{4.2}$$

Границы существования того или иного режима движения жидкости определяются двумя критическими значениями числа Рейнольдса: нижним $\mathrm{Re}_{\text{кр. н}}$ и верхним $\mathrm{Re}_{\text{кр. в}}$. Значения скорости, соответствующие этим значениям числа Рейнольдса, также называют критическими. При $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{кр. н}}$ возможен только ламинарный режим, а при $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{кр. в}}$ — только турбулентный; при $\mathrm{Re}_{\text{кр. н}} < \mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{кр. в}}$ наблюдается неустойчивое состояние потока. Таким образом, для определения характера режима движения жидкости необходимо в каждом отдельном случае вычислить по формуле (4.2) число Рейнольдса и сопоставить результат с критическими значениями.

В опытах самого Рейнольдса были получены следующие значения: $\mathrm{Re}_{\text{кр. н}} = 2000$, $\mathrm{Re}_{\text{кр. в}} = 12\,000$. Многочисленные эксперименты, проведенные в более позднее время, показали, что критические числа Рейнольдса не являются вполне постоянными и в действительности при известных условиях неустойчивая зона может оказаться значительно шире.

В настоящее время при расчетах принято исходить только из одного критического значения числа Рейнольдса — $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 2300$. При $\mathrm{Re} < 2300$ режим всегда считается ламинарным, а при $\mathrm{Re} > 2300$ — всегда турбулентным. При этом движение жидкости в неустойчивой зоне исключается из рассмотрения, что приводит к некоторому запасу и большей надежности в гидравлических расчетах.

Без особого труда могут быть получены значения Re также для сечения любой формы, не только круговой. Имея в виду, что при круговом сечении гидравлический радиус $R = d/4$, подставим в формулу (4.2) вместо d его значение, равное $4R$. Тогда получим формулу для числа Рейнольдса, выраженного через гидравлический радиус:

$$\mathrm{Re} = 4vR/\nu, \tag{4.3}$$

откуда

$$\mathrm{Re}/4 = vR/\nu.$$

Принимая по-прежнему для критического значения числа Рейнольдса независимо от формы живого сечения $\mathrm{Re}_{кр}=2300$, находим, что для сечения любой формы критерием для суждения о характере режима движения является величина, равная $2300/4=575$. Таким образом, если $vR/\nu<575$, режим ламинарный, если $vR/\nu>575$, режим турбулентный.

В гл. 8 будет показано, что число Рейнольдса является одним из основных критериев гидродинамического подобия напорных потоков. Оно является как бы мерой отношения кинетической энергии жидкости к работе сил вязкого трения и от него в общем случае зависят все безразмерные коэффициенты, входящие в расчетные зависимости, которые применяют в практике гидравлических расчетов.

§ 36. ОБЩИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ПОТЕРИ НАПОРА ПРИ РАВНОМЕРНОМ ДВИЖЕНИИ

Исследуем равномерное движение потока жидкости — напорное (движение в трубопроводах) или безнапорное (движение в открытых каналах). Поскольку в этом случае средние скорости во всех поперечных сечениях одинаковы, местные сопротивления отсутствуют и существуют только сопротивления, проявляющиеся по длине потока, вызывающие соответствующие потери напора на трение.

Чтобы получить общее выражение для этих потерь, рассмотрим поток жидкости с равномерным движением, ось которого наклонена к горизонту под углом α (рис. 4.3).

Выделим в этом потоке двумя сечениями *1-1* и *2-2* некоторый объем малой длины L и применим к его движению теорему теоретической механики о движении центра масс. Так как движение жидкости равномерное, ускорение центра масс выделенного объема равно нулю. Следовательно, сумма проекций всех внешних сил, приложенных к указанному объему, на любую ось также должна быть равна нулю.

Такими внешними силами являются:

сила давления P_1 и P_2 в сечениях *1-1* и *2-2*, нормальные к этим сечениям и направленные: первая — в сторону движения, вторая — в сторону, обратную движению; эти силы равны произведению средних гидродинамических давлений в этих сечениях p_1 и p_2 на площадь сечения потока F, а именно: $P_1=p_1F$; $P_2=p_2F$;

силы гидродинамического давления на боковую поверхность рассматриваемого объема со стороны окружающей его жидкости p_n, направленные нормально к этой поверхности;

сила тяжести (вес объема, ограниченного сечениями *1-1* и *2-2*), направленная по вертикали вниз и определяемая выражением $G=\rho gFL$;

сила сопротивления движению T.

Сделаем допущение, что все частицы жидкости движутся с одинаковыми скоростями, равными средней скорости потока. Тогда сила сопротивления будет равна силе трения, возникающей на боковой поверхности выделенного объема. Для ее определения обозначим силу трения, приходящуюся на единицу поверхности (т. е. касательное напряжение), τ.

При этом полная сила трения

$$T=\tau AL,$$

где A — смоченный периметр того же объема, между сечениями *1-1* и *2-2*. Эта сила направлена параллельно оси потока в сторону, обратную течению.

Составим сумму проекций всех перечисленных сил на ось xx, параллельную оси потока. С учетом того, что силы p_n не дают проекции на указанную ось, получим

$$P_1-P_2+G\sin\alpha-T=0.$$

Подставив в это уравнение установленные выше выражения отдельных сил и приняв во внимание, что $\sin\alpha=(z_1-z_2)/L$, будем иметь

$$p_1F-p_2F+\rho gFL\frac{z_1-z_2}{L}-\tau AL=0.$$

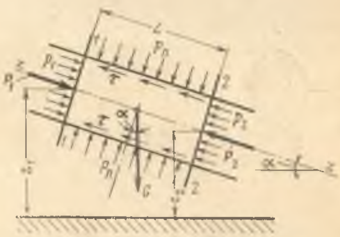


Рис. 4.3

Разделив затем полученное уравнение на ρgF с учетом того, что $A/F=R$ (где R — гидравлический радиус сечения), преобразуем его следующим образом:

$$z_1+p_1/\rho g=z_2+p_2/\rho g+(\tau/\rho g)(L/R). \tag{4.4}$$

Сравнивая уравнение (4.4) и уравнение Бернулли в его обычной форме (3.25), составленное также для равномерного движения ($v_1=v_2$), приходим к следующему общему выражению для потери напора по длине потока:

$$h_{тр}=(\tau/\rho g)(L/R), \tag{4.5}$$

которое называют также *основным уравнением равномерного движения*.

Рассмотрим наиболее интересный и важный для нас случай движения жидкости в напорном трубопроводе круглого сечения. При этом поступим следующим образом. Обозначим r внутренний радиус трубы и выберем начало координат в центре ее поперечного сечения O, направив ось x по оси трубы, а ось z по вертикали (рис. 4.4).

Выделим затем внутри трубы объем жидкости в виде цилиндра, радиус которого y, длина L, и применим к нему основное уравнение (4.5).

Поскольку гидравлический радиус круглого сечения $R=y/2$, это уравнение получит здесь следующую форму записи:

$$h_{тр}=(\tau/\rho g)\,(2L/y). \tag{4.6}$$

В частном случае, когда труба горизонтальна ($z_1=z_2$), уравнение (4.6) можно записать также в виде

$$h_{тр}=\Delta p/\rho g=2\tau L/\rho g y, \tag{4.7}$$

где Δp — падение (перепад) давления на участке L.

Отсюда для единичной силы трения (касательного напряжения) на радиусе y имеем

$$\tau=\Delta p y/2L. \tag{4.8}$$

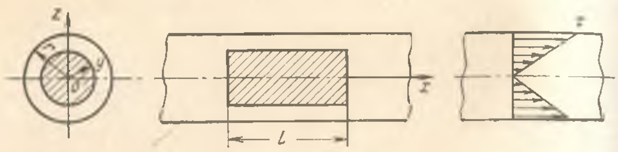


Рис. 4.4

Полученное выражение позволяет установить закон распределения касательных напряжений в поперечном сечении трубы. Из него видно, что τ изменяется по линейному закону: наименьшее его значение $\tau_0=0$ будет на оси трубы (при $y=0$), а наибольшее — у ее стенок (при $y=r$):

$$\tau_r=\Delta p r/2L. \tag{4.9}$$

График изменения τ по сечению трубы представлен на рис. 4.4 (справа).

Здесь уместно подчеркнуть, что основное уравнение равномерного движения (4.5), равно как и общие выражения для определения потери напора (4.6) и перепада давления (4.7) в круглой трубе, а также закон распределения касательных напряжений по сечению трубы, выражаемый зависимостью (4.8), в одинаковой степени применимы как для ламинарного, так и для турбулентного режима.

Если принять далее, как это было предложено Шези на основе опытов 1775 г., величину $\tau/\rho g$ пропорциональной квадрату скорости, а коэффициент пропорциональности обозначить $(1/C)^2$, т. е. принять, что $\tau/\rho g=(1/C^2)\,v^2$, то из уравнения (4.6) получим

$$h_{1\text{-}2}=v^2L/C^2R. \tag{4.10}$$

С учетом того, что $h_{тр}/L=i$ (где i — гидравлический уклон), из выражения (4.10) получается следующая формула для скорости при равномерном движении жидкости:

$$v=C\sqrt{Ri}. \tag{4.11}$$

Ее обычно называют *формулой Шези*.

Значения коэффициента C в формуле (4.11) определяют опытным путем.

Величина C^2 имеет размерность ускорения. Для практического применения, однако, эмпирические коэффициенты удобнее иметь безразмерными. Поэтому коэффициент Шези C впоследствии был заменен

$$C=\sqrt{8g/\lambda}, \tag{4.12}$$

где λ — безразмерная величина, обычно называемая *коэффициентом гидравлического трения* или *гидравлического сопротивления*. Такая замена позволяет привести формулу (4.10) к очень удобному для практического пользования виду:

$$h_{1\text{-}2}=\lambda\,(L/4R)\,(v^2/2g). \tag{4.13}$$

Поскольку для круглых труб $4R=d$, то из уравнения (4.13) получаем так называемую формулу Дарси—Вейсбаха для определения потерь напора при равномерном движении жидкости в круглых трубах:

$$h_{1\text{-}2}=\lambda\,(L/d)\,(v^2/2g). \tag{4.14}$$

Формулы (4.11) и (4.14) являются наиболее распространенными для определения потерь напора. Первую из них применяют главным образом при расчетах открытых потоков, а вторую — напорных (в круглых трубах).

Выполним еще одно преобразование.

Сопоставим значения гидравлического уклона, получаемые из формулы Дарси—Вейсбаха (4.14): $i=h_{тр}/L=(\lambda/2r)\,(v^2/2g)$ и из выражений (4.7) и (4.9): $i=h_{тр}/L=\Delta p/\rho g L=2L\tau_r/\rho g L r=2\tau_r/\rho g r$.

Получаем

$$\lambda\,(v^2/4gr)=2\tau_r/\rho g r$$

или

$$\lambda v^2=8\tau_r/\rho. \tag{4.15}$$

Обозначим здесь

$$\tau_r/\rho=v_*^2, \tag{4.16}$$

где v_* — так называемая динамическая скорость (или скорость касательного напряжения на стенке трубы).

Тогда получим

$$(v_*/v)^2 = \lambda/8, \qquad (4.17)$$

т. е. квадрат отношения динамической скорости к средней скорости прямо пропорционален коэффициенту гидравлического сопротивления λ. Полученный результат, его можно записать также следующим образом:

$$v/v_* = \sqrt{8/\lambda}, \qquad (4.17')$$

будет использован нами в дальнейшем (см. § 43).

Нетрудно видеть, что формулы (4.10) и (4.14) принципиально ничем не отличаются, потеря напора в них выражается, по существу, в одной и той же форме — пропорционально квадрату средней скорости. Поэтому закон сопротивления, устанавливаемый этими формулами, принято называть *законом квадратичного сопротивления,* а сами формулы — *квадратичными.*

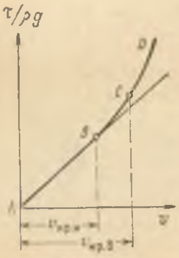


Рис. 4.5

Более поздние исследования показали, что на потерю напора помимо скорости оказывает существенное влияние ряд факторов (характер режима, форма и размеры сечения, вязкость жидкости, материал и состояние стенок), не учитываемых в явном виде формулами Шези и Дарси—Вейсбаха.

Исследования выявили также, что в действительности квадратичный закон сопротивления подтверждается далеко не во всех случаях движения жидкости и касательное напряжение пропорционально квадрату скорости в случае турбулентного режима только при достаточно больших числах Рейнольдса.

В остальных случаях турбулентного режима τ будет пропорционально скорости в степени, несколько меньше второй, а при ламинарном режиме — пропорционально скорости лишь в первой степени. Поэтому в общем случае следовало бы принять

$$\tau/\rho g = bv^n, \qquad (4.18)$$

где b — некоторый коэффициент пропорциональности; n — показатель степени, при ламинарном режиме $n=1$, а при турбулентном всегда $n>1$ и зависит от числа Рейнольдса.

На рис. 4.5 представлена графическая интерпретация уравнения (4.18). График построен на основании опытов Рейнольдса в координатных осях v и $\tau/\rho g$. Прямая AB на графике соответствует ламинарному режиму, а кривая CD — турбулентному. Участок кривой между точками B и C характеризует переходную зону.

Однако квадратичные формулы Шези и Дарси—Вейсбаха очень удобны для практических целей, целесообразны с точки

зрения единообразия расчета и обычно применяются как для турбулентного, так и для ламинарного режима. Отклонения же от квадратичного закона учитываются тем, что коэффициенты λ и C ставятся в косвенную зависимость от скорости. Таким образом, эти формулы устанавливают только общую форму закона сопротивлений. Для определения численного значения потери напора необходимо в каждом отдельном случае учесть еще и влияние всех указанных выше факторов. Этой цели служат специальные формулы для коэффициентов λ и C, которые рассматриваются ниже (см. § 45).

§ 37. ЛАМИНАРНЫЙ РЕЖИМ В КРУГЛОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

Определим основные закономерности ламинарного режима при равномерном движении в круглых трубах, ограничиваясь (для упрощения вывода) случаями, когда ось трубы горизонтальна. При этом будем рассматривать уже сформировавшийся поток, т. е. поток на участке, начало которого находится от входного сечения трубы на расстоянии, обеспечивающем стабилизированный вид распределения скоростей по сечению потока.

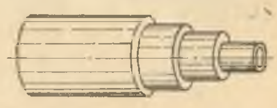


Рис. 4.6

Имея в виду сделанное ранее определение ламинарного режима, при котором движение имеет слоистый (струйный) характер и происходит без перемешивания частиц, следует считать, что при этом будут иметь место только скорости, параллельные оси трубы, поперечные же скорости отсутствуют. Можно представить себе, что в таком случае движущаяся жидкость как бы разделяется на бесконечно большое число бесконечно тонких, концентрично расположенных цилиндрических слоев, параллельных оси трубопровода и движущихся один внутри другого с различными скоростями, увеличивающимися в направлении от стенок к оси трубы (рис. 4.6). При этом скорость в слое, непосредственно соприкасающемся со стенками, вследствие прилипания равна нулю, а максимального значения она достигает в слое, движущемся по оси трубы.

Принятая схема движения и введенные выше упрощающие предположения позволяют установить закон распределения скоростей в поперечном сечении потока и получить расчетные зависимости для определения расхода жидкости и потери напора на трение по длине потока.

Будем исходить из установленного ранее общего выражения для градиента скорости (1.15), которое для течения в трубах нужно записывать следующим образом:

$$-dv/dy = f(\tau). \qquad (4.19)$$

Знак минус здесь берется потому, что с увеличением y, скорость v убывает, т. е. dv/dy отрицательно, а напряжение τ — величина существенно положительная.

Примем затем, что имеет место прилипание жидкости к стенке (отсутствие скольжения) и поэтому скорость у стенки $v_r=0$. Тогда вместо выражения (4.19) будем иметь

$$-\int_{v_y}^{0} dv=\int_{y}^{r} f(\tau)\,dy. \qquad (4.20)$$

Учтем также (это следует из закона распределения напряжений), что

$$y=r\,\tau/\tau_r. \qquad (4.21)$$

Найдем

$$dy=(r/\tau_r)\,d\tau. \qquad (4.22)$$

Сделав соответствующую подстановку в выражение (4.20), получим:

$$-\int_{v_y}^{0} dv=\frac{r}{\tau_r}\int_{\tau}^{\tau_r} f(\tau)\,d\tau. \qquad (4.23)$$

Следовательно,

$$v_y=\frac{r}{\tau_r}\int_{\tau}^{\tau_r} f(\tau)\,d\tau. \qquad (4.24)$$

Выражения (4.23) и (4.24) являются общими. Их интегрирование позволяет установить закон распределения скоростей при любом виде функции $f(\tau)$.

Решим эту задачу для течения в трубах ньютоновской жидкости*. В этом случае $f(\tau)=\tau/\mu$ и выражение (4.24) принимает вид

$$v_y=r/\tau_r\int_{\tau}^{\tau_r}\tau\,d\tau/\mu.$$

Интегрируя его, находим

$$v_y=(r/2\,\tau_r\mu)\,(\tau_r^2-\tau^2),$$

что после ряда подстановок и несложных преобразований приводит к уравнению

$$v_y=(\Delta p/4\,\mu L)\,(r^2-y^2), \qquad (4.25)$$

выражающему закон распределения скоростей в поперечном сечении круглой трубы при ламинарном режиме, известный под

* Решения аналогичных задач для жидкостей неньютоновских рассматриваются в гл. 7

названием *закона Стокса*. Его можно получить также непосредственно интегрированием уравнений движения вязкой жидкости Навье—Стокса (3.35).

Задаваясь различными значениями координаты y, по этому уравнению можно вычислить скорости в любой точке сечения. Максимальная скорость, очевидно, будет при $y=0$, т. е. на оси трубы

$$v_0=(\Delta p/4\,\mu L)\,r^2=(\Delta p/16\,\mu L)\,d^2. \qquad (4.26)$$

Попутно отметим, что средняя скорость потока при этом оказывается равной половине максимальной осевой скорости:

$$v_{\text{ср}}=0{,}5\,v_0. \qquad (4.27)$$

Изобразим уравнение (4.25) графически. Для этого вычисленные значения скорости отложим в определенном масштабе от некоторой произвольной прямой AA в виде отрезков, направленных по течению жидкости, и концы отрезков соединим плавной кривой (рис. 4.7). Полученная кривая представляет собой кривую распределения скоростей в поперечном сечении потока и, как это следует из уравнения (4.25), является параболой второй степени с осью, совпадающей с осью трубы.

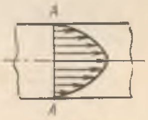


Рис. 4.7

Таким образом, при ламинарном режиме в цилиндрической трубе скорости в поперечном сечении потока изменяются по параболическому закону, а касательные напряжения — по линейному закону.

Полученные результаты справедливы для участков трубы с вполне развившимся ламинарным течением. В действительности жидкость, которая поступает в трубу, должна пройти от входного сечения определенный участок, прежде чем в трубе установится соответствующий ламинарному режиму параболический закон распределения скоростей.

Развитие ламинарного режима в трубе можно представить следующим образом. Пусть, например, жидкость входит в трубу из резервуара большого размера и кромки входного отверстия хорошо закруглены. В этом случае скорости во всех точках входного поперечного сечения будут почти одинаковы, за исключением весьма тонкого так называемого пограничного (или пристенного) слоя вблизи стенок, в котором вследствие прилипания жидкости к стенкам происходит почти внезапное падение скорости до нуля. Поэтому кривая скоростей во входном сечении может быть представлена достаточно точно в виде отрезка прямой (рис. 4.8).

По мере удаления от входа слои жидкости, соседние с пограничным слоем, вследствие трения у стенок начинают затормаживаться, толщина этого слоя постепенно увеличивается, а движение в нем, наоборот, замедляется. Центральная же часть потока (ядро течения), еще не захваченная трением, продолжает двигаться как одно целое с примерно одинаковой для всех слоев скоростью, причем (вследствие того, что количество протекающей жидкости остается неизменным) замедление движения в пограничном слое неизбежно вызывает увеличение скорости в ядре.

Таким образом, в середине трубы, в ядре, скорость течения все время возрастает, а у стенок, в растущем пограничном слое, уменьшается. Это происходит до тех пор, пока пограничный слой не захватит всего сечения потока и ядро не будет сведено к нулю. На этом формирование потока заканчивается и кривая скоростей принимает обычную для ламинарного режима параболическую форму (рис. 4.9).

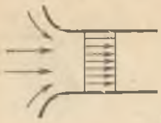


Рис. 4.8

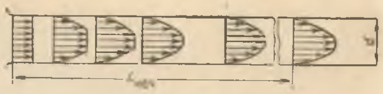


Рис. 4.9

Входной участок трубы, на котором складывается постоянная параболическая картина распределения скоростей, носит название *начального участка ламинарного режима*. Длина этого участка определяется по формуле

$$L_{нач}/d = 0{,}28\,\mathrm{Re}. \qquad (4.28)$$

§ 38. ПОТЕРИ НАПОРА ПРИ ЛАМИНАРНОМ РЕЖИМЕ

Зная закон распределения скоростей в поперечном сечении, можно без труда вывести теоретические формулы для определения расхода жидкости и потери напора на трение по длине потока при ламинарном режиме.

Для этого выделим в трубе (рис. 4.10) элементарное сечение в виде кольца внутренним радиусом y, толщиной dy и, следовательно, площадью сечения $dF_y = 2\pi y dy$. Так как толщина кольца взята нами бесконечно малой, примем, что во всех его точках скорость частиц жидкости v_y одинакова и может быть определена по уравнению (4.25).

Элементарный расход жидкости, проходящей через это кольцевое сечение, $dQ_y = v_y dF_y = v_y 2\pi y dy$.

Полный расход жидкости через все поперечное сечение трубы определяется как сумма таких элементарных расходов или, что

то же самое, как интеграл, взятый по всему сечению, т. е. в пределах от $y=0$ до $y=r$. Таким образом,

$$Q = \int_0^r dQ = \int_0^r v_y\, 2\pi y dy = \pi \int_0^r v_y d(y^2). \qquad (4.29)$$

Интегрируя выражение (4.29) по частям, находим:

$$Q = \pi \left[\left| v_y y^2 \right|_0^r - \int_0^r y^2 dv_y \right]. \qquad (4.30)$$

Первый член в правой части уравнения (4.30) равен нулю, так как при $y=r$ (у стенок) $v_r=0$, а на оси трубы $y=0$. Следовательно,

$$Q = -\pi \int_0^r y^2 dv_y. \qquad (4.31)$$

Рис. 4.10

Введем сюда новую переменную τ. Из выражения (4.21) имеем

$$y^2 = \tau^2 r^2/\tau_r^2. \qquad (4.32)$$

Примем во внимание также (4.22). Тогда, поскольку $-dv_y/dy = f(\tau)$, то

$$-dv_y = f(\tau)\, dy = f(\tau) \frac{r}{\tau_r}\, d\tau. \qquad (4.33)$$

Подставив в выражение (4.31) вместо y^2 и dv_y их значения (4.32) и (4.33), получим окончательно:

$$Q = \frac{\pi r^3}{\tau_r^3} \int_0^{\tau_r} f(\tau)\, \tau^2 d\tau. \qquad (4.34)$$

Интегрирование этого выражения дает возможность получить необходимые для выполнения практических расчетов соотношения между расходом и перепадом давления при любом виде функции $f(\tau)$. Рассмотрим здесь (как и § 37) решение этой задачи для случая течения ньютоновской жидкости, когда $f(\tau) = \tau/\mu$.

Подставив это значение в уравнение (4.34), будем иметь:

$$\frac{Q\tau_r^3}{\pi r^3} = \int_0^{\tau_r} \frac{\tau}{\mu} \tau^2 d\tau = \frac{1}{\mu} \int_0^{\tau_r} \tau^3 d\tau,$$

откуда после интегрирования найдем

$$Q\tau_r^3/\pi r^3 = (1/\mu)\left(\tau_r^4/4\right) \qquad (4.35)$$

или, что то же самое,

$$Q = (\pi r^3/4\,\mu)\,\tau_r. \qquad (4.36)$$

Произведя здесь замену [см. выражение (4.9)] $\tau_r = r\Delta p/2L$, а также $r = d/2$ (где d — диаметр трубы), получим окончательно формулу для определения расхода при ламинарном режиме:

$$Q = \frac{1}{128}\,\frac{\pi \Delta p}{\mu L}\,d^4, \qquad (4.37)$$

называемую *формулой Гагена—Пуазейля.*

При этом средняя скорость для всего сечения трубы

$$v_{\text{ср}} = \frac{Q}{\pi d^2/4} = \frac{1}{32}\,\frac{\Delta p}{\mu L}\,d^2 \qquad (4.38)$$

и, как это видно при сравнении с установленным ранее значением максимальной осевой скорости v_0 (4.26), будет равна половине этой скорости ($v_{\text{ср}} = 0{,}5\,v_0$).

Из формулы (4.38) легко найти искомую потерю напора

$$h_{\text{тр}} = \Delta p/\rho g = 32\,\mu v L/\rho g d^2. \qquad (4.39)$$

Последнее выражение несколько преобразуем, умножив числитель и знаменатель правой части на $v/2$. Выполнив затем перегруппировку величин, получим:

$$h_{\text{тр}} = (64\,\mu/vd\,\rho)\,(L/d)\,(v^2/2g).$$

Так как здесь $\mu/\rho = \nu$, а $\nu/vd = 1/\mathrm{Re}$, то

$$h_{\text{тр}} = (64/\mathrm{Re})\,(L/d)\,(v^2/2g). \qquad (4.40)$$

Сопоставление выражения (4.40) с основной формулой Дарси—Вейсбаха (4.14) для определения потерь напора на трение по длине, приводит к следующей формуле для коэффициента гидравлического сопротивления:

$$\lambda = 64/\mathrm{Re}. \qquad (4.41)$$

Эту формулу обычно и применяют для практических расчетов при ламинарном режиме в круглых трубах.

§ 39. ПРИБОРЫ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ

Вязкость жидкостей определяют при помощи приборов, называемых вискозиметрами. Имеется несколько типов вискозиметров, различных по своей конструкции и принципу действия. Основными из них являются вискозиметры капиллярные, истечения и ротационные.

В *капиллярных вискозиметрах,* часто применяемых в лабораторных условиях для точных измерений, вязкость жидкости определяют путем наблюдений над движением исследуемой жидкости по капиллярной трубке, т. е. трубке малого диаметра,

в которой вследствие этого устанавливается ламинарный режим. Вязкость находят в результате пересчета из формулы расхода при ламинарном режиме (4.37):

$$\mu = (1/128)\,(\Delta p/QL)\,\pi d^4, \qquad (4.42)$$

где Q — расход жидкости, протекающей по капиллярной трубке; d — диаметр трубки; L — длина трубки; Δp — перепад давления на длине L.

На практике, вязкость обычно определяют путем сравнения расходов или времен истечения одинаковых объемов двух жидкостей исследуемой и некоторой стандартной, например дистиллированной воды, вязкость которой известна,— по двум одинаковым капиллярным трубкам при всех прочих равных условиях. На самом деле, как это следует из формулы (4.37), расходы двух различных жидкостей, протекающих по двум капиллярным трубкам одинаковых диаметра и длины при постоянном перепаде давления, обратно пропорциональны их вязкости; время же истечения одинаковых объемов этих жидкостей, наоборот, прямо пропорционально вязкости. На этом принципе основано устройство капиллярного вискозиметра Н. Е. Жуковского.

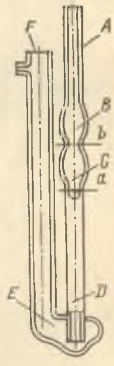


Рис. 4.11

В настоящее время наиболее широкое применение получил капиллярный вискозиметр Пинкевича—Оствальда (рис. 4.11). Он представляет собой стеклянную U-образную трубку, в одно из колен которой (A) с двумя расширениями в виде полых шариков (B и C) впаян капилляр D, открывающийся в нижней своей части в резервуар E второго, левого колена F.

После заполнения вискозиметра исследуемой жидкостью (с помощью резиновой груши или водоструйного насоса), его устанавливают в термостате так, чтобы расширение B находилось ниже уровня термостатирующей жидкости. Время выдержки в термостате должно быть не менее 15 мин при заданной температуре. Затем жидкость в колене A поднимают примерно до $^1/_3$ высоты расширения B, сообщают его с атмосферой (при этом жидкость по капилляру начнет перетекать в резервуар E) и измеряют время $t_{\text{и}}$ опускания мениска жидкости от метки b до a.

Определив аналогичным образом время $t_{\text{с}}$ истечения стандартной жидкости, кинематическая вязкость которой $\nu_{\text{с}}$ при температуре испытания известна, по формуле

$$\nu_{\text{и}} = (t_{\text{и}}/t_{\text{с}})\,\nu_{\text{с}}, \qquad (4.43)$$

находят кинематическую вязкость исследуемой жидкости.

Для вискозиметров заводского изготовления кинематическую вязкость можно определить и из более простого выражения $\nu_{\text{и}} = kt_{\text{и}}$, где k — постоянная вискозиметра (она дается в паспорте), зависящая от стандартной жидкости, по которой градуировался прибор, и от размеров его капилляра.

В *вискозиметрах истечения* вязкость жидкости определяют путем наблюдения за временем истечения исследуемой и стандартной жидкости из отверстия в дне сосуда. Одним из наиболее распространенных в технике типов вискозиметров истечения является вискозиметр Энглера.

Следует отметить, что еще в 1752 г. великий русский ученый М. В. Ломоносов изобрел «инструмент для исследования вязкости жидких материй по числу капель». В основе вискозиметра Энглера, как будет видно из дальнейшего, по существу лежит та же идея, что и в приборе, предложенном Ломоносовым.

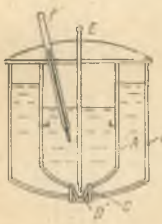


Рис. 4.12

Вискозиметр Энглера (рис. 4.12) состоит из латунного цилиндрического резервуара A, помещенного в водяную ванну B. К сферическому дну резервуара припаяна латунная цилиндрическая трубка C, в которую вставлена платиновая трубочка — насадок $Д$.

Перед проведением опыта отверстие насадка закрывают стопорным стержнем E и в резервуар A наливают 200 см³ исследуемой жидкости. Путем подогрева или охлаждения водяной ванны жидкости сообщают температуру (измеряемую термометром F), при которой необходимо определить вязкость. Эта температура во время опыта поддерживается постоянной. Затем, подняв стопорный стержень, открывают отверстие насадка и по секундомеру отмечают время $T_{\text{и}}$ истечения всего объема исследуемой жидкости. Так же определяют время $T_{\text{с}}$ истечения 200 см³ стандартной жидкости — дистиллированной воды при температуре 20° С (часто эта величина указывается в паспорте вискозиметра).

Отношение $t_{\text{и}}/t_{\text{с}}$ характеризует вязкость жидкости и называется *относительной вязкостью*. Эта величина выражается в так называемых условных градусах Энглера (°Е). Вязкость, измеренная в градусах Энглера, может быть переведена в кинематическую по формуле Убеллоде:

$$\nu = 0{,}0731°\,E - 0{,}0631/°\,E, \tag{4.44}$$

где ν — кинематическая вязкость, Ст.

По стандарту единица измерения относительной вязкости называется градусом условной вязкости (обозначается °ВУ), численно она равна градусу Энглера. Для перевода условной вязкости в кинематическую применяют специальные таблицы.

Ротационные вискозиметры, или вискозиметры с коаксиальными цилиндрами, состоят из двух соосных вертикальных цилиндров — вращающегося и неподвижного. Между цилиндрами заливается испытуемая жидкость, которая оказывает сопротивление вращению первого цилиндра и передает его второму. Вязкость жидкости в этих вискозиметрах определяют по частоте вращения подвижного цилиндра при заданном крутящем моменте или, наоборот, по крутящему моменту, вызывающему заданную частоту вращения.

Для измерения частоты вращения применяют счетчики, для измерения крутящего момента — различного рода механические динамометры, электродинамические измерительные устройства и др.

В настоящее время ротационные вискозиметры выполняются по двум принципиальным схемам — с вращающимся наружным цилиндром и вращающимся внутренним цилиндром. Наиболее широкое применение имеют вискозиметры первого типа.

Вискозиметры торсионные (рис. 4.13) являются разновидностью ротационных*. В них внутренний цилиндр A подвешивается на торсионе (упругая нить, стальная проволока) B и помещается в другой вращающийся цилиндр C, заполняемый исследуемой жидкостью. Движение жидкости вызывает закручивание внутреннего цилиндра и торсиона на некоторый угол, при котором момент возникающих упругих сил уравновешивается моментом сил внутреннего трения вращающейся жидкости. Вязкость жидкости определяют здесь по частоте вращения (угловой скорости) внешнего цилиндра n и углу φ закручивания торсиона.

Рис. 4.13

Угол закручивания торсиона измеряют механическим способом, заключающимся в регистрации перемещения связанной с торсионом стрелки или шкалы с делениями, относительно неподвижных деталей прибора либо оптическим способом — по отклонению луча света, падающего на закрепленное на торсионе зеркальце. Широко используют для этой цели также индуктивные датчики.

Из уравнения (1.13) имеем

$$\mu = \tau/\dot{\gamma}, \tag{4.45}$$

* При условии неподвижного закрепления внутреннего цилиндра эта схема принципиально тождественна схеме ротационного вискозиметра первого типа.

где напряжение сдвига

$$\tau = \frac{2C\varphi}{\pi h (R_н + R_в)^2}, \tag{4.46}$$

скорость сдвига

$$\gamma = \frac{\pi n}{30} \frac{R_н}{R_н - R_в}; \tag{4.47}$$

здесь C — постоянная прибора; h — высота слоя жидкости в нем; $R_н$ — внутренний радиус наружного цилиндра; $R_в$ — наружный радиус внутреннего цилиндра.

Известное применение на практике получили также вискозиметры других типов, в том числе основанные на затухании колебаний диска, подвешенного на тонкой нити и помещенного в сосуд с жидкостью, и такие, в которых вязкость определяют по времени равномерного падения шарика (обычно стального) в вертикальной прозрачной трубке, заполненной исследуемой жидкостью.

§ 40. МЕХАНИЗМ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

Многочисленные попытки подойти к исследованию турбулентного режима методами математического анализа в течение долгого времени оканчивались неудачей из-за невозможности охватить с помощью стройной законченной теории наблюдаемое при этом многообразие и сложность явлений. В турбулентном потоке каждая отдельно взятая частица жидкости движется по весьма сложной криволинейной траектории, отличной от траекторий соседних с ней частиц, и, как это видно из рассмотренных выше опытов Рейнольдса, перемещается не только в направлении оси потока, как при ламинарном режиме, но и участвует в беспорядочных поперечных движениях. Поэтому, если бы мы хотели проследить за движением такой отдельной частицы и попытались бы найти уравнения, описывающие ее движение, подобная задача оказалась бы практически неразрешимой.

Современная гидродинамика при изучении турбулентного режима идет по иному пути и использует в основном статистический метод исследования, рассматривающий не истинные, а «сглаженные» — средние по времени характеристики потока. На основании всестороннего теоретического и экспериментального исследования с помощью этого метода можно не только установить основные качественные закономерности, объясняющие механизм движения, но и получить (что особенно важно для практических целей) определенную их количественную оценку.

Рассмотрим некоторый поток жидкости при турбулентном режиме. Несмотря на то что каждая частица в этом потоке участвует как в продольных, так и в поперечных движениях, все же всегда можно установить главное направление движения. Таким

главным направлением, определяющим общее направление движения всего потока, очевидно, следует считать движение частиц вдоль оси потока, так как каждая из них, в конце концов, перемещается в этом направлении.

Отметим в пространстве, заполненном движущейся жидкостью, некоторую точку O (рис 4.14). Через нее будут проходить

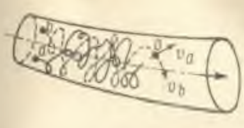


Рис. 4.14

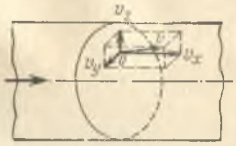


Рис. 4.15

различные частицы жидкости (например, частицы a и b), причем скорости этих частиц v_a и v_b будут различны не только по величине, но и по направлению. Скорости движущихся частиц жидкости в данной точке в данный момент времени называют *мгновенными местными скоростями* в данной точке, или просто *мгновенными скоростями*.

Если из точки O в каждый данный момент времени отложить соответствующий ему вектор мгновенной скорости и провести через концы таких векторов поверхность, можно получить векторную диаграмму скорости — так называемый *годограф скорости*.

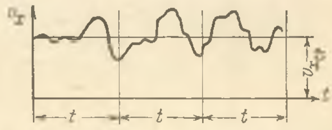


Рис. 4.16

В зависимости от формы этой поверхности различают однородный (изотропный) турбулентный поток, при котором поверхность шаровая, и неоднородный (анизотропный) поток, когда конец вектора скорости описывает более сложную замкнутую поверхность.

Любую мгновенную скорость v можно разложить на три составляющие: продольную (по оси x) v_x, направленную параллельно оси потока, и две поперечные, лежащие в плоскости живого сечения потока — горизонтальную составляющую v_y по оси y и вертикальную v_z по оси z (рис. 4.15).

Изобразим графически изменения этих составляющих в зависимости от времени. Для этого по оси ординат отложим значения составляющей мгновенной скорости в данной точке, а по оси абсцисс — соответствующее этим значениям время наблюдения t. На рис. 4.16 приведен график для осевой составляющей мгновенной скорости (соответствующей направлению главного движения всего потока), имеющей наибольшее значение для практических целей. Аналогичные графики могут быть построены и для поперечных составляющих. Эти графики носят название *графиков пульсаций*, само же изменение какой-либо составляющей мгновенной скорости во времени называется *пульсацией скоростей*. Явление пульсации может быть обнаружено в потоке при непосредственном наблюдении с помощью приборов, применяемых для измерения скоростей, рассмотренных в § 29, например по колебаниям уровня жидкости в трубке Пито, гидрометрической вертушкой и др.

Поскольку мгновенная скорость в данной точке не постоянна, а изменяется во времени, в гидродинамике для удобства исследования потока вводится понятие *усредненной скорости* — средней скорости в данной точке за достаточно большой промежуток времени. Будем обозначать ее $\bar{v}$. Черта над буквой обозначает операцию усреднения.

Для выяснения сущности этого понятия обратимся к графику, изображенному на рис. 4.16, и обозначим ΔF элемент поперечного сечения потока у точки O (см. рис. 4.15), а v_x — соответствующую ей продольную составляющую местной скорости. Тогда объемное количество жидкости, прошедшее через это сечение в течение бесконечно малого времени dt, будет равно $v_x \Delta F dt$. Объемное количество жидкости, прошедшее за некоторое конечное время t, определится выражением

$$V = \int_0^t v_x \Delta F dt,$$

чему отвечает элементарный расход жидкости

$$dQ = V/t = \frac{\Delta F \int_0^t v_x dt}{t} \tag{4.48}$$

Этот расход может быть подсчитан также по некоторой средней во времени продольной мгновенной скорости $\bar{v}_x$:

$$dQ = \bar{v}_x \Delta F. \tag{4.49}$$

Приравнивая оба выражения для расхода, находим:

$$\bar{v}_x = \frac{\int_0^t v_x dt}{t}. \tag{4.50}$$

Полученная таким образом величина $\bar{v}_x$ представляет собой продольную составляющую усредненной по времени или средней местной скорости.

Аналогичные выражения можно получить и для составляющих усредненной скорости по осям y и z — $\bar{v}_y$ и $\bar{v}_z$.

Тогда вектор полной усредненной скорости будет определяться выражением

$$\bar{v} = \sqrt{\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2}. \tag{4.51}$$

Введем еще одно понятие, которое понадобится в дальнейшем.

Разность между истинным и усредненным значениями мгновенной местной скорости называют пульсационной составляющей скорости (или просто пульсационной скоростью либо пульсационной добавкой). Ее обычно обозначают той же буквой, что и скорость, но со штрихом — v'.

Сумма пульсационных скоростей в рассматриваемой точке O за время t, как и среднее значение пульсационной скорости в этой точке, равна нулю.

Пульсационная скорость также может быть разложена на составляющие: продольную v_x', совпадающую с направлением продольной составляющей усредненной скорости $\bar{v}_x$, равную $v_x' = v_x^* - \bar{v}_x$, и поперечные составляющие v_y' и v_z' в плоскости, перпендикулярной к $\bar{v}_x$.

Из сказанного выше следует, что усредненная скорость есть такая постоянная фиктивная скорость, с которой в течение некоторого времени через данное элементарное сечение должны были бы двигаться частицы жидкости для того, чтобы расход жидкости был равен действительному расходу, прошедшему через это элементарное сечение за то же время, но при истинных изменяющихся во времени скоростях.

Усредненную скорость можно определить графически в результате соответствующей обработки графика пульсации. Для этого, имея в виду, что интеграл $\int_0^t v_x dt$ в числителе формулы (4.50) представляет собой площадь, заключенную между пульсационной кривой, осью абсцисс и ординатами, соответствующими начальному и конечному моментам времени, необходимо измерить эту площадь и заменить ее равновеликим прямоугольником с тем же основанием t. Высота этого прямоугольника представляет собой усредненную скорость. При этом очевидно, что чем больше будет рассматриваемый промежуток времени t (период усреднения), тем точнее будет полученное значение усредненной скорости.

Само собой разумеется, что понятие усредненной скорости, конечно, никоим образом не следует смешивать с установленным ранее понятием средней скорости, представляющей собой не среднюю по времени скорость в данной точке, а среднюю скорость для всего поперечного сечения. Эта последняя скорость

$$v_{ср} = 1/F \int\limits_F \bar{v}_x dF. \tag{4.52}$$

Введение понятия усредненной скорости имело существенное значение для изучения механизма турбулентного режима. Как показывает обработка графиков пульсации, несмотря на кажущуюся беспорядочность изменения скорости, усредненная скорость достаточно большое время остается постоянной. Поэтому в турбулентном потоке вместо поля мгновенных скоростей можно рассматривать поле усредненных скоростей и в дальнейшем, говоря о скоростях элементарных струек в турбулентном потоке, мы всегда будем иметь в виду именно эти усредненные по времени скорости. Поступая подобным образом, можно также рассматривать турбулентное движение как движение установившееся, хотя, строго говоря, оно является неустановившимся, поскольку линии тока в каждый данный момент времени изменяют свою форму.

Как было установлено, в турбулентном потоке всегда наблюдается пульсация скоростей. Под действием пульсации частицы жидкости, движущиеся в главном (осевом) направлении потока, получают, кроме того, и поперечные перемещения, вследствие чего между соседними слоями жидкости возникает обмен частицами, вызывающий непрерывное перемешивание жидкости.

Однако у стенок, ограничивающих поток, создаются особые условия для движения жидкости.

В теориях, господствовавших в гидравлике до начала XX в., принималось, что здесь образуется некоторый неподвижный, «мертвый» слой, по которому со значительными скоростями движется вся остальная масса жидкости. Наличие этого неподвижного слоя с неизбежностью приводило к неправдоподобным выводам о «разрыве» скоростей, т. е. к такому закону распределения скоростей * в поперечном сечении, при котором происходит внезапное, скачкообразное изменение скорости от нуля в неподвижном слое до некоторого конечного значения в остальной части потока.

Многочисленные экспериментальные данные, полученные различными исследователями по изучению турбулентных потоков (в основном в первой трети XX в), доказали очевидную несостоятельность этих теорий. Было установлено, что скорости течения жидкости непосредственно на самой поверхности стенок вследствие прилипания к ним смачивающей жидкости, равны нулю; на весьма малом расстоянии от стенок скорости достигают значительной величины; в остальных, более удаленных от стенок точках поперечного сечения происходит дальнейшее (но уже значительно более медленное) увеличение скорости.

* Имеются в виду осредненные скорости.

Все это явилось основанием для установления схематизированной модели турбулентного потока, обычно принимаемой за основную рабочую схему при исследованиях турбулентного режима. По этой схеме (рис. 4.17), предложенной в 30-х годах XX в. немецким физиком Л. Прандтлем, у стенок образуется весьма тонкий слой, в котором скорость изменяется не скачкообразно, а непрерывно и движение жидкости происходит по законам ламинарного режима. Основная же центральная часть потока (ядро), связанная с этим слоем, называемым вязким (или ламинарным) подслоем, короткой переходной зоной, движется турбулентно с почти одинаковой для всех частиц жидкости осредненной скоростью *.

Наличие у стенок твердых границ делает невозможным здесь поперечное движение частиц жидкости. Поэтому в ламинарном подслое перемешивание жидкости не происходит, ее частицы движутся тут по слегка извилистым траекториям, почти прямолинейным и параллельным стенкам.

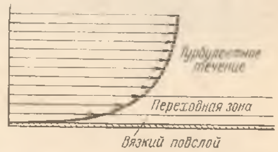


Рис. 4.17

Равномерное распределение скоростей, наблюдаемое в ядре потока, объясняется интенсивным перемешиванием основной массы жидкости в этой центральной части потока.

Наличие вязкого (ламинарного) подслоя доказано экспериментально в результате весьма тщательных и точных измерений. Толщина этого слоя весьма мала и обычно определяется долями миллиметра. Она зависит от числа Рейнольдса и тем меньше, чем больше это число, т. е. больше турбулентность потока.

Толщина отдельных зон турбулентного потока может быть установлена из следующих соотношений:

вязкий (ламинарный) подслой — $0 < v_* a/\nu < 7$;
переходная зона — $7 < v_* a/\nu < 70$;
турбулентное ядро — $v_* a/\nu > 70$.

Здесь, как и ранее, v_* — динамическая скорость, a — расстояние от стенки.

При значениях $\mathrm{Re} < 100\,000$ толщина вязкого подслоя $\delta_{в.с}$ в трубе круглого сечения может быть определена также по эмпирической формуле:

$$\delta_{в.с} = 62{,}8\, d\, \mathrm{Re}^{-0{,}875}, \tag{4.53}$$

где d — диаметр трубы.

* Понятие о вязком подслое не следует смешивать с более широким понятием пограничного слоя, под которым обычно понимают совокупность вязкого подслоя и переходной зоны.

§ 41. КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОТОКЕ

Рассмотрим вопрос о касательных напряжениях в турбулентном потоке.

Из указанного выше следует, что движение жидкости при турбулентном режиме всегда должно происходить со значительно большей затратой энергии, чем при ламинарном. При ламинарном режиме энергия расходуется только на преодоление сил внутреннего трения между движущимися с различной скоростью соседними слоями жидкости, а при турбулентном, кроме того, значительная энергия затрачивается на процесс перемешивания, вызывающий в жидкости дополнительные касательные напряжения.

Поэтому полное суммарное касательное напряжение, возникающее в турбулентном потоке, обычно определяют как сумму двух напряжений, вязкостного $\tau_в$, вызываемого внутренним трением жидкости, и дополнительного, так называемого инерционного $\tau_и$, обусловленного турбулентным перемешиванием:

$$\tau = \tau_в + \tau_и. \qquad (4.54)$$

Первое из них находится по уравнению (1.12), выражающему ньютоновские законы внутреннего трения вязкой жидкости.

Значительно сложнее оказывается определение второго слагаемого в уравнении (4.54). По сути дела оно обусловливается пульсационными добавками скорости, зависимость которых от осредненных характеристик турбулентного потока весьма сложна и до сих пор полностью не установлена.

Буссинеск одним из первых (в 1897 г.) предложил выражать это напряжение в виде уравнения, аналогичного уравнению Ньютона (1.12):

$$\tau_и = A dv/dy, \qquad (4.55)$$

где коэффициент пропорциональности A имеет размерность вязкости и называется турбулентной (или виртуальной) вязкостью. Численное значение A обычно во много раз превышает значение вязкости μ. Необходимо также иметь в виду, что турбулентная вязкость не является физическим свойством жидкости, а представляет собой определенную характеристику турбулентного потока, зависящую в основном от интенсивности турбулентного перемешивания и изменяющуюся при переходе от одной точки потока к другой. В частности, при приближении к стенке она стремится к нулю.

Наибольшее распространение получило предложение Прандтля, установленное им на основании рассмотренной выше модели турбулентного потока. По Прандтлю

$$\tau_и = \rho\, l^2 (dv/dy)^2. \qquad (4.56)$$

Новым является здесь величина l, которая называется длиной пути перемешивания и представляет собой некоторую длину, определяемую пульсационными добавками скорости.

Физически длину пути перемешивания можно представить как путь, который должна пройти в поперечном направлении частица жидкости относительно остальной ее массы, чтобы в результате смешивания с окружающим турбулентным потоком (по выражению Прандтля) «потерять свою индивидуальность» или, говоря иными словами, потерять свою поперечную пульсационную составляющую скорости.

Выражение (4.56) для инерционного напряжения может быть установлено следующим образом. Выделим в движущейся жидкости два слоя a и b (рис. 4.18), находящиеся один от другого на расстоянии l. Как уже указывалось, при турбулентном режиме, кроме перемещения жидкости в направлении главного движения потока будет происходить также и поперечное движение частиц, например в рассматриваемом случае от слоя a к слою b. Обозначим v' скорость этого поперечного движения (пульсационную скорость).

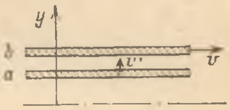


Рис. 4.18

За время Δt из одного слоя жидкости в другой через площадку ΔF, нормальную к направлению v', протекает масса жидкости

$$\Delta m = \rho \Delta F v' \Delta t.$$

Переместившись на расстояние l, указанная масса жидкости получит приращение количества движения:

$$\Delta m (dv/dy)\, l = \rho \Delta F v' \Delta t\, (dv/dy)\, l,$$

равное импульсу касательной силы T, параллельной оси потока $T\Delta t$.

Таким образом, будем иметь

$$T \Delta t = \rho \Delta F v' \Delta t\, (dv/dy)\, l.$$

Отнеся эту силу к единице площади и приняв, что v' — величина того же порядка, что и $(dv/dy)\,l$, получим следующее выражение для касательного (инерционного) напряжения:

$$\tau_и = T/\Delta F = \rho v' (dv/dy)\, l = \rho\, l^2 (dv/dy)^2.$$

При ламинарном режиме, когда перемешивания не происходит, длина пути перемешивания $l = 0$ и уравнение (4.54) обращается в обычное для этого случая уравнение (1.12), выражающее касательное напряжение пропорционально вязкости и скорости в первой степени.

При турбулентном же режиме, который (особенно при больших значениях числа Рейнольдса) характеризуется весьма интенсивным перемешиванием, значение второго члена в уравнении (4.54) резко возрастает. В этом случае вязкостным напряжением можно пренебрегать и определять полное напряжение как

$$\tau = \tau_и = \rho l^2 (dv/dy)^2. \tag{4.57}$$

Таким образом, при большой турбулентности потока, т. е. при больших числах Рейнольдса, можно считать, что касательное напряжение будет пропорционально плотности жидкости и квадрату градиента скорости. Если турбулентный режим характеризуется небольшими значениями числа Рейнольдса, вязкостное напряжение соизмеримо с инерционным и полное напряжение будет пропорционально скорости в степени, несколько меньше второй.

§ 42. ШЕРОХОВАТОСТЬ СТЕНОК

На механизм турбулентного потока большое влияние оказывает состояние ограничивающих его твердых стенок, всегда в той или иной степени обладающих известной шероховатостью.

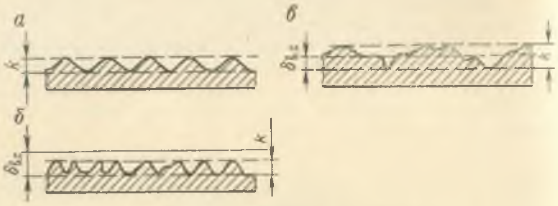


Рис. 4.19

Шероховатость характеризуется величиной и формой различных, порой самых незначительных по размерам, выступов и неровностей, имеющихся на стенках, и зависит от материала стенок и их обработки. Обычно с течением времени шероховатость изменяется от появления ржавчины, коррозии, отложения осадков и др.

В качестве основной характеристики шероховатости служит так называемая *абсолютная шероховатость* k, представляющая собой среднюю величину указанных выступов и неровностей, измеренную в линейных единицах (рис. 4.19, *а*).

Абсолютная шероховатость труб, мм:

Чистых цельнотянутых из латуни, меди, свинца	0,01
Новых цельнотянутых стальных	0,05—0,15
Стальных с незначительной коррозией	0,20—0,30
Новых чугунных	0,30
Асбоцементных	0,03—0,80
Старых стальных	0,50—2,00

Пусть (рис. 4.19, *б*) выступы шероховатости будут меньше, чем толщина вязкого (ламинарного) подслоя ($k < \delta_{в.с}$). Тогда неровности стенки будут полностью погружены в этот слой, турбулентная часть потока не будет входить в непосредственное соприкосновение со стенками и движение жидкости, а следовательно, и потери энергии, не будут зависеть от шероховатости стенок, а будут обусловлены лишь свойствами самой жидкости.

Если (рис. 4.19, *в*) высота выступов такова, что они превышают толщину вязкого подслоя ($k > \delta_{в.с}$), неровности стенок будут выступать в турбулентную область, увеличивать тем самым беспорядочность движения и существенным образом влиять на потерю энергии. В этом случае каждый отдельный выступ можно уподобить плохо обтекаемому телу, находящемуся в окружающем его потоке жидкости и являющемуся источником образования вихрей (рис. 4.20).

Рис. 4.20

В соответствии со сказанным в гидравлике различают поверхности гидравлически гладкие ($k < \delta_{в.с}$) и шероховатые ($k > \delta_{в.с}$).

Конечно, такое деление является условным. На самом деле, как уже указывалось, толщина вязкого подслоя непостоянна и уменьшается с увеличением числа Рейнольдса. У гидравлически гладких стенок с возрастанием числа Рейнольдса начинает проявляться их шероховатость, так как вязкий подслой становится тоньше и выступы шероховатости, которые первоначально полностью располагались в этом слое, начинают выходить из него, выступая в турбулентную зону. Следовательно, одна и та же стенка в зависимости от числа Рейнольдса может вести себя по-разному: в одном случае — как гладкая, а в другом — как шероховатая. Поэтому абсолютная шероховатость не может полностью характеризовать влияние стенок на движение жидкости. Естественно, что стенки с одной и той же абсолютной шероховатостью в потоках небольших поперечных размеров должны будут вносить бо́льшие возмущения в поток жидкости и оказывать бо́льшее сопротивление движению, чем в потоках большого сечения.

Для характеристики влияния шероховатости на гидравлические сопротивления с учетом условий соблюдения подобия в гидравлике вводится понятие *относительной шероховатости* ε, под которой понимается безразмерное отношение абсолютной шероховатости к некоторому линейному размеру, характеризующему сечение потока (например, к радиусу трубы r, глубине жидкости в открытом потоке h и др.).

Таким образом,

$$\varepsilon = k/r. \tag{4.58}$$

В некоторых случаях вводится также понятие *«относительной гладкости»* ε' — величины, обратной относительной шероховатости:

$$\varepsilon' = r/k. \tag{4.59}$$

В действительности, однако, как показали исследования, на гидравлические сопротивления влияет не только абсолютное значение шероховатости (высоты выступов), но в значительной степени и форма выступов, густота и характер их расположения. Следует различать стенки с равномерной и неравномерной шероховатостью. Равномерная шероховатость обычно создается искусственно при различного рода лабораторных исследованиях. Стенки же промышленных трубопроводов, как правило, характеризуются неравномерной шероховатостью с большим разбросом величин выступов относительно их среднего значения.

Трубы с равномерной шероховатостью можно считать гидравлически гладкими, если

$$\varepsilon \leqslant 33{,}7\,\mathrm{Re}^{-0{,}875}. \tag{4.60}$$

Для труб с неравномерной шероховатостью для этого необходимо, чтобы

$$\varepsilon \leqslant 10\,\mathrm{Re}^{-0{,}875}. \tag{4.61}$$

Поскольку учесть влияние всех перечисленных выше факторов непосредственными измерениями невозможно, в настоящее время для характеристики шероховатости стенок промышленных труб при гидравлических расчетах обычно используют понятие так называемой *эквивалентной шероховатости* k_1. Эта шероховатость представляет собой такую величину выступов однородной абсолютной шероховатости, которая дает при подсчетах одинаковую с действительной шероховатостью величину потери напора. Значения эквивалентной шероховатости определяют на основании гидравлических испытаний трубопроводов и пересчета их результатов по соответствующим формулам (см. § 45).

§ 43. ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

До сих пор, как на это неоднократно указывалось, несмотря на большое число теоретических и экспериментальных работ, выполненных различными исследователями, нет еще строгой теории турбулентного перемешивания. Не установлены и необходимые для выполнения инженерных расчетов строго обоснованные расчетные зависимости для количественного описания явлений, происходящих в турбулентных потоках.

В связи с этим широкое применение получили полуэмпирические теории турбулентности, основанные на схематизированных физических моделях турбулентного потока. Наибольшую известность из них получила полуэмпирическая теория, разработанная Прандтлем. В ее основу положена рассмотренная выше прандтлевская модель турбулентного потока, предполагающая его разделение на две части: турбулентное ядро и ламинарный подслой.

При этом были приняты следующие основные допущения*:

касательное напряжение по всему поперечному сечению потока одинаково и равно напряжению на стенке

$$\tau = \tau_r; \tag{4.62}$$

длина пути перемешивания пропорциональна расстоянию от стенки

$$l = \varkappa a, \tag{4.63}$$

где $\varkappa$ — так называемая *универсальная постоянная*.

С учетом сделанных допущений выражение (4.57) для касательного напряжения в случае трубы круглого сечения принимает вид

$$\tau_r = \rho \varkappa^2 a^2 (dv/da)^2. \tag{4.64}$$

Вспоминая далее, что $\tau/\rho = v_*^2$ (где v_* — динамическая скорость), выражение (4.57) можно переписать также следующим образом:

$$v_*^2 = \tau_r/\rho = \varkappa^2 a^2 (dv/da)^2$$

или

$$v_*/\varkappa a = dv/da. \tag{4.65}$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$v/v_* = (1/\varkappa) \ln a + C \tag{4.66}$$

— так называемый логарифмический закон распределения скоростей, справедливый для всего ядра турбулентного потока.

Для определения постоянной интегрирования C запишем уравнение (4.66) для границы ядра с ламинарным подслоем

$$v_\delta/v_* = (1/\varkappa) \ln \delta + C, \tag{4.67}$$

где δ — толщина этого подслоя.

Отсюда находим

$$C = v_\delta/v_* - (1/\varkappa) \ln \delta$$

и, следовательно,

$$v/v_* = (1/\varkappa) \ln a + v_\delta/v_* - (1/\varkappa) \ln \delta. \tag{4.68}$$

* Рассматривается течение в трубе круглого сечения радиусом r.

В ламинарном подслое (по Прандтлю) турбулентное перемешивание полностью отсутствует. Поэтому здесь для определения напряжения следует исходить из выражения (1.12) и в пределах этого подслоя принимать $\tau = \tau_r = \mu v / a$.

Тогда для напряжения на границе ламинарного подслоя с турбулентным ядром будем иметь $\tau_r = \mu v_\delta / \delta$. Это выражение можно представить также в виде

$$\tau_r / \rho = (\mu/\rho)(v_\delta/\delta) = \nu\, v_\delta/\delta = v_*^2$$

и определить отсюда толщину подслоя

$$\delta = \nu\, v_\delta / v_*^2. \tag{4.69}$$

Подставив это значение в уравнение (4.68), получим окончательно:

$$v/v_* = (1/\varkappa)\ln a + v_\delta/v_* - (1/\varkappa)\ln(\nu\, v_\delta/v_*^2)$$

или

$$v/v_* = (1/\varkappa)\ln(v_* a/\nu) + C_1, \tag{4.70}$$

где $C_1 = v_\delta/v_* - 1/\varkappa \ln v_\delta/v_*$.

Сотрудник Прандтля И. Никурадзе путем обработки полученных им опытных данных* установил следующие значения коэффициентов $\varkappa$ и C_1: для гладких труб $\varkappa = 0{,}4$; $C_1 = 5{,}5$; для шероховатых труб $\varkappa = 0{,}4$; $C_1 = 8{,}48$.

Внеся эти значения в уравнение (4.70) и перейдя одновременно от натуральных логарифмов к десятичным ($\ln x = 2{,}3 \lg x$), получим следующие, удобные для практического использования формулы для распределения скоростей в круглой трубе при турбулентном режиме:

в случае гладких труб

$$v = v_* (5{,}75 \lg v_* a/\nu + 5{,}5); \tag{4.71}$$

в случае шероховатых труб

$$v = v_* (5{,}75 \lg a/k + 8{,}5). \tag{4.72}$$

Приближенно распределение скоростей при турбулентном режиме можно получить также из уравнения

$$v/v_0 = (a/r)^m, \tag{4.73}$$

где (по Прандтлю) показатель степени $m = f(\mathrm{Re}, \varepsilon)$. А. Д. Альтшуль показал, что $m = 0{,}9\sqrt{\lambda}$ и изменяется от 0,25 для шероховатых труб до 0,1 для гладких.

Принимая в среднем $m = 1/7$, получаем:

$$v/v_0 = (a/r)^{1/7}. \tag{4.74}$$

* Более подробно результаты этих опытов рассматриваются в § 44.

Это так называемый *закон «одной седьмой» Кармана.*

Для того, чтобы в трубе установить распределение скоростей, соответствующее приведенным выше формулам, жидкость должна пройти от входного сечения трубы некоторый участок, называемый (по аналогии со случаем ламинарного потока) начальным участком турбулентного режима. Длина этого участка, где заканчивается формирование турбулентного потока, определяется по формуле Лацко

$$L'_{\text{нач}} / d = 0{,}693\, \mathrm{Re}^{0{,}25}. \tag{4.75}$$

Для этой цели может быть использована также зависимость, полученная Г. В. Филипповым:

$$L_{\text{нач}} / d = 2{,}45 \Big/ \sqrt{\lambda}, \tag{4.76}$$

косвенно учитывающая как число Рейнольдса, так и влияние шероховатости стенок.

Высказанные выше соображения о механизме движения и установленные закономерности распределения скоростей в турбулентном потоке подтверждается большим числом опытных данных. При турбулентном режиме, как и нужно было ожидать, скорости распределяются по сечению значительно более равномерно, чем при ламинарном.

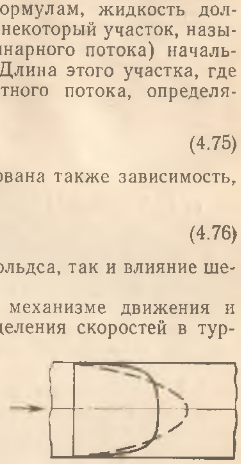


Рис. 4.21

Для иллюстрации этого положения на рис. 4.21 показаны кривые распределения скоростей для потока жидкости в круглой цилиндрической трубе при турбулентном режиме (сплошная линия) и при ламинарном (пунктирная линия) при одном и том же расходе (при турбулентном режиме $v_{\text{ср}}/v_0$ равно $0{,}75 \div 0{,}9$, а при ламинарном 0,5).

При этом следует иметь в виду, что чем больше число Рейнольдса, т. е. чем интенсивнее происходит процесс перемешивания, тем, естественно, больше это отношение и в пределе при бесконечно больших числах Re оно стремится к единице.

Законы распределения скоростей имеют большое теоретическое и практическое значение, позволяют установить весьма важную для практических целей роль связи между распределением скоростей и коэффициентом гидравлического сопротивления λ.

Рассмотрим, например, случай гидравлически гладких труб. Будем исходить из выражения (4.71). Запишем его для средней скорости потока. Заменив отношение v/v_* его значением из формулы (4.17′). Заменим также $v_* = v\sqrt{\lambda/8}$

Тогда будем иметь

$$\sqrt{8/\lambda} = 5{,}75 \lg a_{\text{ср}} v \sqrt{\lambda/8} \Big/ \nu + 5{,}5. \tag{4.77}$$

Учтем, что расстояние от стенки трубы до слоя, движущегося со средней скоростью («ордината точки средней скорости»), полученное расчетным путем, затем подтвержденное экспериментально, для гидравлически гладких труб

$$a_{ср} = 0{,}223\, r. \tag{4.78}$$

Таким образом, после ряда несложных преобразований уравнения (4.77) можно получить следующую теоретическую формулу для определения коэффициента гидравлического сопротивления:

$$1 / \sqrt{\lambda} = 2 \lg \mathrm{Re} \sqrt{\lambda} - 0{,}8. \tag{4.79}$$

Теория Прандтля сыграла большую роль в развитии учения о турбулентности. И в настоящее время она может рассматриваться как основополагающая.

Вместе с тем, однако, более поздние исследования не подтвердили (и это естественно) некоторых положений, из которых исходил Прандтль при построении своей модели турбулентного потока, в частности положения о наличии у стенок подслоя со строго ламинарным течением. Исследования показали, что в действительности турбулентные пульсации в какой-то мере существуют и в непосредственной близости от стенок, поэтому находящаяся в этой области жидкость периодически также обменивается и смешивается с жидкостью других областей турбулентного потока.

Это явилось основанием для внесения некоторых уточнений в модель Прандтля и позволило советскому исследователю А. Д. Альтшулю разработать новую полуэмпирическую теорию турбулентности, рассматривающую турбулентный поток как единое целое, без его разделения на ядро и ламинарный подслой.

Для распределения скоростей в поперечном сечении трубы Альтшуль получил следующую формулу:

$$v = v_* \left[7{,}8 + 5{,}75 \lg \frac{1 + 0{,}4\,(v_* a/\nu)}{1 + 0{,}4\,(v_* k/\nu)} \right]. \tag{4.80}$$

При больших числах Рейнольдса она упрощается и принимает вид

$$v = v_* \{7{,}8 - 5{,}75 \lg [(2{,}5\,\nu/v_* a) + (k/a)]\}. \tag{4.81}$$

Формула (4.80) учитывает влияние на профиль скоростей одновременно и вязкости жидкости, и шероховатости стенок и, как показывают результаты экспериментов, справедлива для всей области турбулентного режима как в гидравлически гладких, так и в шероховатых трубах.

§ 44. ВЛИЯНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФАКТОРОВ НА КОЭФФИЦИЕНТ λ

Вопросу влияния различных факторов на значение коэффициента гидравлического трения λ посвящено большое число экспериментальных и теоретических работ. Не останавливаясь на истории вопроса, обратимся к опытам по изучению гидравлических сопротивлений в шероховатых трубах, произведенным Никурадзе в 1932 г.

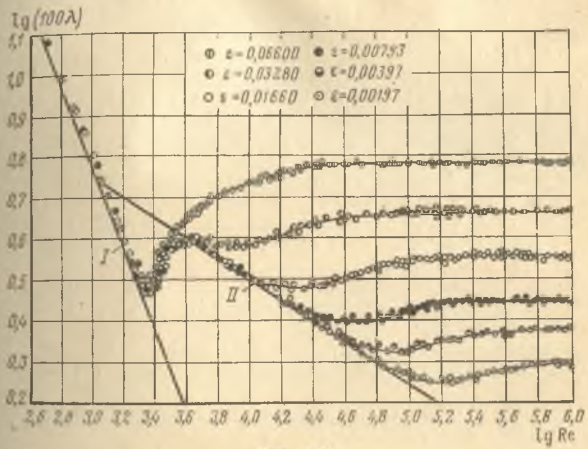


Рис. 4.22

Указанные опыты были поставлены весьма тщательно и проводились в трубах с искусственной однородной шероховатостью, которая создавалась наклеиванием зерен песка определенного размера на внутреннюю поверхность труб. В трубах с такой шероховатостью при различных расходах определялась потеря напора, и по формуле (4.14) вычислялся коэффициент λ, значения которого наносились на график в функции числа Рейнольдса.

Результаты опытов Никурадзе представлены на графике рис. 4.22. Рассматривая указанный график, можно сделать следующие важные выводы.

В области ламинарного режима (т. е. при $\mathrm{Re} < 2300$, чему соответствует $\lg \mathrm{Re} = 3{,}36$) все опытные точки независимо от шероховатости стенок уложились на одну прямую I в левой части графика. Следовательно, здесь λ зависит только от числа Рейнольдса и не зависит от шероховатости.

5 Заказ № 1363

При значениях числа Рейнольдса от 2300 до 3000 (переходная область от ламинарного режима к турбулентному) коэффициент λ быстро возрастает с увеличением числа Re, оставаясь по-прежнему одинаковым для различных шероховатостей.

В области турбулентного режима (т. е. при $\mathrm{Re} > 3000$, чему соответствует $\lg \mathrm{Re} > 3{,}48$) начинает сказываться влияние шероховатости стенок. При этом чем больше шероховатость, тем выше значение λ для одних и тех же чисел Рейнольдса.

Для труб с большой относительной шероховатостью λ постепенно возрастает с увеличением Re, достигая некоторого значения, сохраняющегося потом постоянным.

Для труб с малой шероховатостью опытные точки в некотором интервале значений числа Рейнольдса располагаются вдоль наклонной прямой *II*, известной под названием *прямой Блазиуса для «гладких труб»*. Отклонение от этой прямой наступает тем раньше, чем больше шероховатость стенок. При этом коэффициент λ тоже стремится к некоторому определенному пределу, разному для труб с различной шероховатостью, затем при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса также сохраняет свое значение постоянным. Это так называемая *область «вполне шероховатых труб»*, отвечающая квадратичному закону сопротивлений.

Подытоживая, приходим к выводу, что всю область чисел Рейнольдса на рассмотренном графике Никурадзе можно разделить на пять зон:

1-я зона — ламинарный режим $[\lambda = f(\mathrm{Re})]$;

2-я зона — переходная из ламинарного режима в турбулентный;

3-я зона — область «гидравлически гладких» труб при турбулентном режиме $[\lambda = f(\mathrm{Re})]$;

4-я зона — область шероховатых труб (доквадратичная область «смешанного трения») при турбулентном режиме $[\lambda = f(\varepsilon, \mathrm{Re})]$;

5-я зона — область «вполне шероховатых труб» (квадратичная или автомодельная область) при турбулентном режиме $[\lambda = f(\varepsilon)]$.

Примерные границы отдельных зон турбулентного режима определяются следующими соотношениями:

3-я зона $400 < \mathrm{Re} < 80\, r/k$;

4-я зона $80\, r/k < \mathrm{Re} < 1000\, r/k$;

5-я зона $\mathrm{Re} > 1000\, r/k$.

Полученным результатам можно дать следующее истолкование, находящееся в полном соответствии с установленной выше схемой турбулентного режима. До тех пор пока выступы шероховатости полностью погружены в ламинарный пограничный слой, т. е. когда $k < \delta_{\text{л. п}}$, они не создают различий в шероховатости, понимаемой в гидравлическом смысле. В этом случае для структуры потока нет разницы между гладкими и шероховатыми поверхностями стенок и коэффициент λ зависит только от числа Рейнольдса и определяется как для гладких труб (1—3-я зоны).

Если выступы шероховатости выходят за пределы пограничного слоя ($k > \delta_{\text{л. п}}$), ламинарное течение нарушается и выступы шероховатости приводят к отрыву жидкости от стенок и образованию в ней вихрей.

Как указывалось выше, толщина пограничного слоя уменьшается с увеличением числа Рейнольдса. Поэтому в случае относительно небольших значений этого числа, когда k имеет тот же порядок, что и $\delta_{\text{л. п}}$, коэффициент λ должен зависеть не только от шероховатости стенок, но и от числа Рейнольдса (4-я зона). Если число Рейнольдса весьма велико и k значительно превышает $\delta_{\text{л. п}}$, λ зависит только от шероховатости (5-я зона).

Основные закономерности, установленные Никурадзе, были в дальнейшем подтверждены рядом исследователей для различных случаев однородной шероховатости.

А. П. Зегжда установил, что данные, полученные Никурадзе для круглых труб, оказываются справедливыми и для открытых безнапорных потоков.

Е. З. Рабинович показал, что выводы Никурадзе подтверждаются при изотермическом течении в песчаных цилиндрических каналах литниковых систем таких необычных жидкостей, как расплавленные металлы (сталь, чугун).

Как уже указывалось, опыты Никурадзе проводились в трубах с однородной искусственной шероховатостью. Трубы же, применяемые на практике, имеют шероховатость неоднородную и неравномерную. Поэтому долгое время оставалось неясным, насколько правильными будут выводы, сделанные Никурадзе для труб с искусственной шероховатостью, в применении к обычным промышленным трубам с естественной шероховатостью и каковы численные значения шероховатости для подобных труб.

Выяснению этих вопросов были посвящены проведенные в дальнейшем фундаментальные экспериментальные исследования (работы Кольбрука, И. А. Исаева, Г. А. Мурина, Ф. А. Шевелева). Из них наибольший интерес представляют весьма обстоятельные опыты Г. А. Мурина по исследованию гидравлических сопротивлений в обычных промышленных стальных трубах. Результаты этих опытов представлены на графике рис. 4.23.

Подтвердив основные закономерности, установленные Никурадзе, эти опыты позволили сделать ряд важных, существенно новых выводов. Они показали, что для труб с естественной шероховатостью коэффициент λ в переходной области оказывается всегда больше, чем в квадратичной (а не меньше, как у Никурадзе для искусственной шероховатости), и при переходе из первой области во вторую непрерывно снижается. Поэтому кривые, полученные Г. А. Муриным, не имеют впадины, характерной для кривых Никурадзе.

Аналогичные результаты были получены и другими исследователями.

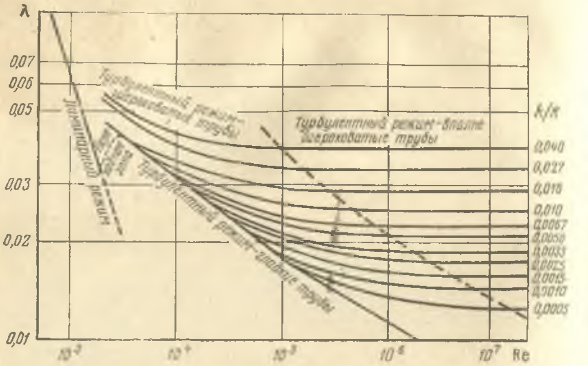


Рис. 4.23

§ 45. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА λ

Выводы, сделанные в § 44, позволяют критически оценить формулы для определения коэффициента λ и являются основанием для рассмотрения лишь тех из них, которые, с одной стороны, достаточно хорошо обоснованы теоретически, с другой — подтверждены экспериментально. Формулы, применяемые в настоящее время в практических расчетах, рассматриваются ниже.

При ламинарном режиме в круглых трубах для определения коэффициента λ применяют формулу Пуазейля (4.41), полученную ранее (см. стр. 110) из сопоставления формулы Дарси — Вейсбаха (4.14) с выражением (4.40) для потери напора при ламинарном режиме; на графике Никурадзе (см. рис. 4.22) она соответствует прямой *I*.

Справедливость формулы Паузейля хорошо подтверждается многочисленными опытами, проводившимися с целью изучения движения различных жидкостей в трубах разных диаметров при ламинарном режиме. Из ее рассмотрения следует, что коэффициент λ (следовательно, и потери напора) при ламинарном режиме не зависит от состояния внутренней поверхности стенок труб, характеризуемого их шероховатостью. По-видимому, это объясняется наличием у стенок пристенного «прилипшего» слоя жидкости, по которому скользит жидкость, движущаяся в трубе.

При турбулентном режиме для определения коэффициента λ в разное время было предложено большое число расчетных формул.

Первоначально этот коэффициент принимался постоянным (например, по Дюпюи, $\lambda = 0{,}03$). В дальнейшем для определения λ был предложен ряд формул, полученных на основании обработки опытных данных, учитывающих зависимость λ от ряда факторов: средней скорости (формулы Прони, Этельвейна), размеров поперечного сечения (формула Дарси), размеров и формы поперечного сечения, а также шероховатости стенок (формулы Куттера, Базена, Маннинга).

Недостатки этих чисто эмпирических формул, заключающиеся в ограниченной возможности их применения (лишь в условиях, сходных с условиями эксперимента), в дальнейшем были в значительной мере устранены благодаря применению теории подобия.

Теория подобия и метод анализа размерностей (см. гл. 8) на основе большого экспериментального материала позволили получить ряд обобщенных зависимостей, достаточно полно отражающих действительные условия в трубах и каналах при движении жидкостей. Таковы, например, формулы Блазиуса, Мизеса, Ланга, в которых λ — функция числа Рейнольдса. Еще более совершенными являются формулы, предложенные в более позднее время (Прандтлем и Никурадзе, Кольбруком и Уайтом, Альтшулем). Они основаны на существенно важных результатах, полученных гидродинамикой в области исследования турбулентного режима.

Однако некоторые из этих формул (например, Прандтля — Никурадзе) имеют ограниченную область применения и пригодны лишь для отдельных зон турбулентного режима. В связи с этим возникла задача об установлении единой универсальной формулы, справедливой для всей области турбулентного режима. На возможность получения такой формулы указывал еще Д. И. Менделеев. В 1883 г. он писал: «Должно думать, что все дело трения в трубах сведется к одному общему закону, в котором при больших скоростях окажут влияние те члены, которые почти исчезают при малых, и обратно».

Из таких универсальных формул прежде всего следует назвать формулу Кольбрука и Уайта, применимую для всей области турбулентного течения в шероховатых трубах с естественной шероховатостью *:

$$1 / \sqrt{\lambda} = -2 \lg\left(k_1/3{,}7\,d + 2{,}51 / \mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\right). \tag{4.82}$$

* Впервые она была получена в 1939 г. как эмпирическая интерполяционная зависимость и лишь значительно позже в 1970 г. была теоретически обоснована, исходя из формулы (4.81) для распределения скоростей, установленной А. Д. Альтшулем.

Из этой формулы как частные случаи легко получаются формулы Прандтля — Никурадзе:

для гладких труб (при $k_1/d=0$)

$$1/\sqrt{\lambda}=2\lg\left(\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}/2{,}51\right); \tag{4.83}$$

для вполне шероховатых труб (при $\mathrm{Re}=\infty$)

$$\lambda=\frac{1}{[1{,}74+2\lg(1/e)]^2}. \tag{4.84}$$

Формула Кольбрука и Уайта принята в настоящее время за рубежом в качестве основной для гидравлического расчета трубопроводов. В ней и в формулах (4.83) и (4.84) k_1 — эквивалентная шероховатость (см. § 42).

Эквивалентная шероховатость труб, мм

Стальных цельнотянутых, новых	0,02—0,07
То же, находившихся в эксплуатации	0,20—0,50
» после продолжительной эксплуатации, сильно заржавленных	До 1,00
Железных оцинкованных	0,15—0,18
Чугунных новых	0,25
То же, находившихся в эксплуатации	1,40
» асфальтированных новых	0,13

Для облегчения расчетов на рис. 4.24 приведена номограмма, соответствующая формуле (4.82). Для определения λ по номограмме следует отметить на левой шкале значение Re, а на правой d/k_1 и соединить полученные точки прямой. Точка пересечения этой прямой и средней шкалы определяет искомое значение коэффициента λ.

Приведем формулу А. Д. Альтшуля

$$1/\sqrt{\lambda}=1{,}8\lg\frac{\mathrm{Re}}{\mathrm{Re}(k_1/10d)+7} \tag{4.85}$$

и предложенную им же более простую по своей конструкции приближенную формулу

$$\lambda=0{,}11\,[k_1/d+68/\mathrm{Re}]^{0{,}25}. \tag{4.86}$$

Указанные формулы наиболее полно и правильно учитывают влияние различных факторов на гидравлические сопротивления и в настоящее время получили широкое применение в практике гидравлических расчетов. Известными недостатками их являются некоторая громоздкость, осложняющая вычисления и отсутствие полных данных об эквивалентной шероховатости.

Для отдельных зон турбулентного режима применимы следующие формулы:

— в области «гидравлически гладких труб» (3-я зона на графике Никурадзе) — формула Блазиуса, устанавливающая зависимость коэффициента λ только от числа Рейнольдса:

$$\lambda=0{,}3165/\sqrt[4]{\mathrm{Re}}=0{,}3165\,\mathrm{Re}^{-0{,}25}; \tag{4.87}$$

Рис. 4.24

она может быть легко получена как частный случай (при $k_1/d=0$) из формулы (4.86); значения λ, вычисленные по формуле, хорошо отвечают действительности для области «гладких труб» (прямая *II* на графике Никурадзе), т. е. практически при небольшой относительной шероховатости стенок и малых числах Рейнольдса (до 100 000); при $Re > 100\,000$ формула Блазиуса оказывается неверной, дает преуменьшенные значения λ; на практике формула Блазиуса получила широкое применение при расчетах трубопроводов для вязких жидкостей (нефтепроводов), где ввиду большой вязкости движение обычно характеризуется относительно небольшими значениями числа Рейнольдса; для этой области может быть также рекомендована приведенная выше формула Прандтля — Никурадзе (4.83);

— в доквадратичной области шероховатых труб — универсальные формулы;

— в квадратичной области вполне шероховатых труб — формула Б. Л. Шифринсона

$$\lambda = 0{,}11\,(k_1/d)^{0{,}25}. \tag{4.88}$$

Специальные формулы используют для определения потерь напора в трубопроводах специального назначения, изготовляемых из особых материалов (деревянные и асбоцементные трубы, гибкие рукава, прорезиненные шланги и др.). Эти формулы установлены на основании обработки опытных данных и могут быть использованы для расчетов лишь в условиях, близких к опытным.

Деревянные трубы обычно собирают на месте сооружения трубопровода из отдельных досок небольшой ширины — клепок, стягиваемых железной проволокой или хомутами из круглого железа.

Коэффициент сопротивления для воды при ее движении в деревянных трубопроводах определяется по формуле

$$\lambda = 0{,}264\,Re^{-0{,}2}.$$

Для случаев резко выраженной шероховатости труб коэффициент λ, вычисленный по этой формуле, рекомендуется увеличивать на 20%.

Асбоцементные трубы изготовляют из массы, в которую входят быстросхватывающийся цемент, чистый, тщательно разделенный на волокна асбест и значительное количество воды.

При расчетах асбоцементных трубопроводов принимают

$$\lambda = 0{,}206\,Re^{-0{,}21}.$$

Для пожарных рукавов и в ряде других случаев широкое применение нашли гибкие шланги. Для них

$$\lambda = 0{,}01113 + 0{,}9170\,Re^{-0{,}41}.$$

Коэффициент сопротивления гибких рукавов можно определить и по формуле

$$\lambda = 19{,}62\,K,$$

где K — коэффициент, зависящий от материала рукава.

Коэффициент K, принимаемый для гибких рукавов

Очень гладких резиновых	0,00086
Обыкновенных резиновых	0,000899
Очень гладких прорезиненных	0,000884
Очень шероховатых, внутри прорезиненных	0,00163
Обыкновенных пеньковых, непрорезиненных	0,00213
Кожаных лучшего качества	0,00137

Прорезиненные шланги, армированные внутри проволокой, рассчитывают по формуле В. И. Черникина:

$$\lambda = \lambda_0\,16\,\delta^2/dl, \tag{4.89}$$

где λ_0 — коэффициент сопротивления, вычисляемый по обычным формулам; δ — высота выступов проволочной спирали над внутренней поверхностью шланга; d — диаметр шланга; l — шаг проволочной спирали.

§ 46. ПОТЕРИ НАПОРА В НЕКРУГЛЫХ ТРУБАХ

Для определения потерь напора в некруглых трубах также применяют формулу Дарси — Вейсбаха, но расчет здесь ведут не по диаметру трубы, а по гидравлическому радиусу сечения. Заменив диаметр трубы его значением, выраженным через гидравлический радиус ($d = 4R$), эту формулу можно привести к виду (4.13), в котором она и применяется при расчете некруглых труб.

Характер режима движения жидкости в некруглых трубах определяется по числу Рейнольдса, выраженному также через гидравлический радиус:

$$Re = 4\,Rv/\nu$$

или, как примем далее (что, по существу, одно и то же), по числу

$$Re' = Re/4 = vR/\nu,$$

критическое значение которого

$$Re'_{кр} = Re_{кр}/4 = 575.$$

Ламинарное течение в трубах прямоугольного и квадратного сечения было исследовано Сен-Венаном, а в трубах, поперечное сечение которых представляет собой эллипс, равносторонний треугольник и кольцевое пространство между двумя

Основные формулы для ламинарного режима в некруглых трубах

Таблица 4.1

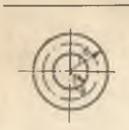
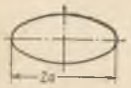
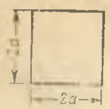
Схема	Форма поперечного сечения	Площадь сечения	Гидравлический радиус	Число Рейнольдса	Коэффициент сопротивления	Средняя скорость	Расход жидкости	Потеря напора
	Кольцевое пространство (труба в трубе)	$F=\pi(a^2-b^2)$	$R=\frac{a-b}{2}$	$\mathrm{Re}'=\frac{v(a-b)}{2\nu}$	$\lambda=\frac{16}{\mathrm{Re}'}\times\frac{\left(1-\frac{b}{a}\right)^2}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2+\frac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}{\ln\frac{b}{a}}}$	$v=\frac{p_1-p_2}{8L\mu}\times\left[a^2+b^2+\frac{(a^2-b^2)^2}{\ln\frac{b}{a}}\right]$	$Q=\frac{p_1-p_2}{8L\mu}\pi\times\left[a^4-b^4+\frac{(a^2-b^2)^2}{\ln\frac{b}{a}}\right]$	$h_{\text{тр}}=\frac{8L\nu v\times 1}{g\left[a^2+b^2+\frac{a^2-b^2}{\ln\frac{b}{a}}\right]}$
	Эллипс	$F=\pi ab$	$R=\frac{ab}{\frac{3}{2}(a+b)-\sqrt{ab}}$	$\mathrm{Re}'=\frac{vb}{2\nu\Delta}$, где $\Delta=\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^2e^2-\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^2\cdot\frac{e^4}{3}-\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^2\times\frac{e^6}{5}\cdots\right]$, $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$\lambda=\frac{16}{\mathrm{Re}'}\times\frac{a^2+b^2}{3a^2-b^2}$, где $\mathrm{Re}'=\frac{vb}{4\nu}$ отнесено к малой оси эллипса	$v=\frac{p_1-p_2}{4L\mu}\times\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$	$Q=\frac{p_1-p_2}{4L\mu}\times\frac{\pi a^3b^3}{a^2+b^2}$	$h_{\text{тр}}=\frac{4L\nu v}{ga^2}\times\frac{a^2+b^2}{b^2}$
	Равносторонний треугольник	$F=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$R=\frac{a}{4\sqrt{3}}$	$\mathrm{Re}'=\frac{va}{4\sqrt{3}\,\nu}$	$\lambda=\frac{40}{3\mathrm{Re}'}$	$v=\frac{p_1-p_2}{8L\mu}a^2$	$Q=\frac{p_1-p_2}{320L\mu}\times a^4\sqrt{3}$	$h_{\text{тр}}=\frac{80L\nu v}{ga}$

Схема	Форма поперечного сечения	Площадь сечения	Гидравлический радиус	Число Рейнольдса
	Квадрат	$F=4a^2$	$R=\frac{a}{2}$	$\mathrm{Re}'=\frac{va}{2\nu}$
	Прямоугольник	$F=4ab$	$R=\frac{ab}{a+b}$	$\mathrm{Re}'=\frac{vab}{(a+b)\,\nu}$

Примечание. Для прямоугольника k зависит от отношения a/b и имеет

k	a/b
2,249	1,00
2,198	1,25
1,830	2,00

концентрическими окружностями — Буссинеском. В табл. 4.1 приведены результаты этих исследований.

Приближенное решение для ламинарного течения в призматических трубах произвольного сечения с достаточной для практических расчетов точностью можно получить на основании рассматриваемой в теории упругости так называемой гидродинамической аналогии при кручении. Эта аналогия впервые была установлена Буссинеском, показавшим, что дифференциальные уравнения, а также условия на контуре, служащие для определения функции напряжений φ при кручении призматических стержней, и уравнения для определения скоростей различных слоев вязкой жидкости при ее движении по трубе того же поперечного сечения, что и скручиваемый стержень, тождественны.

Поэтому, если, по Сен-Венану, для жесткости при кручении принять приближенно $C=GF^4/40I_0$, где G — модуль сдвига; I_0 — полярный момент инерции поперечного сечения, F — площадь поперечного сечения, и вследствие указанной выше аналогии положить $C=\Delta p/4\mu$, где $\Delta p=(p_1-p_2)/L$ — падение давления на единицу длины, то жесткость будет соответствовать расходу жидкости. При этом для расхода получим

$$Q=\Delta\, pF^4/160\,\mu\, I_0.$$

Коэффициент сопротивления	Средняя скорость	Расход жидкости	Потеря напора
$\lambda=\frac{14{,}225}{\mathrm{Re}'}$	$v=\frac{0{,}562\,(p_1-p_2)}{4L\mu}a^2$	$Q=0{,}562\times\frac{p_1-p_2}{\mu L}\,a^4$	$h_{\text{тр}}=\frac{4Lvv}{0{,}562ga^2}$
$\lambda=\frac{16}{\mathrm{Re}'}\times\frac{8\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(1+\frac{a}{b}\right)^2 k}$	$v=\frac{p_1-p_2}{64L\mu}\,k$	$Q=\frac{p_1-p_2}{16L\mu}\,abk$	$h_{\text{тр}}=\frac{64Lvv}{gk}$

следующие значения:

k	a/b
1,123	4,00
0,500	10,00
0	∞

Средняя скорость, как обычно,

$$v=Q/F=\Delta\, pF^3/160\,\mu\, I_0=A\,\Delta\, pF/\mu;$$

здесь $A=F^2/160I_0$ — некоторый коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения (коэффициент формы сечения).

В качестве примера исследуем ламинарное течение жидкости в трубе, сечение которой представляет равносторонний треугольник со сторонами a. В этом случае

$$F=(a^2/4)\sqrt{3};\qquad I_0=(a^4/48)\sqrt{3};$$

$$A=9/160\sqrt{3}.$$

Тогда, имея в виду, что $\Delta p=(p_1-p_2)/L$, приходим к следующим значениям:

для средней скорости $v=[(p_1-p_2)/71\mu L]a^2$;

для расхода жидкости $Q=[(p_1-p_2)/283\,\mu\, L]\,a^4\sqrt{3}$.

Сопоставляя полученные результаты с данными точного решения, приведенными в табл. 4.1, видим, что погрешности приближенного решения составляют примерно 10—11%.

При турбулентном режиме в некруглых трубах коэффициент гидравлического сопротивления λ определяют по обычным формулам, рассмотренным в § 46. При этом в формулы для коэффициента λ для круглых труб вместо Re вводят равное ему значение 4Re′, а вместо относительной шероховатости $\varepsilon = k/r$ — ее значение, выраженное через гидравлический радиус сечения $\varepsilon = k/2R$.

Необходимо, однако, отметить, что подобный метод расчета следует рассматривать как приближенный, так как для некоторых форм поперечных сечений (например, прямоугольного) вычисленные таким образом значения λ существенно (в отдельных случаях до 20%) отличаются от истинных. Повидимому, это объясняется возникновением в трубах, в плоскости их поперечного сечения, так называемых вторичных течений, идущих в направлении от центральной части трубы к периферии и требующих дополнительных затрат энергии.

§ 47. О НЕКОТОРЫХ СПОСОБАХ СНИЖЕНИЯ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СОПРОТИВЛЕНИЙ ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМЕ

Установлено, что небольшие количества таких веществ, как, например, высокомолекулярные полимеры (полиокс, полиакриламид — ПАА), гуаровая смола, поливиниловый спирт — ПВС, будучи растворенными в жидкости, обладают способностью значительно снижать гидравлические сопротивления при турбулентном режиме.

Механизм происходящих при этом явлений полностью пока не выяснен, но есть основания полагать, что частицы этих веществ (их длинные и гибкие молекулы), внесенные в поток жидкости, тесно взаимодействуют с ее пульсирующими частицами, существенно изменяя характер турбулентного течения.

Указанные изменения проявляются прежде всего в близкой к стенкам, ограничивающим поток, весьма малой по толщине области пограничного слоя. Здесь снижаются пристеночные поперечные пульсации скоростей и давлений, и это оказывает решающее влияние на общий уровень турбулентности и поведение всего потока в целом. Причем достаточно нескольких миллионных долей полимера по отношению к растворителю, чтобы достигалось значительное уменьшение гидравлического сопротивления.

Отмеченное явление, известное под названием *эффекта Томса,* оказывается необычно большим и легко осуществимым. Его можно использовать в практике для снижения потерь напора при движении жидкости в трубопроводах.

При движении в трубопроводах воды с добавками полимеров, по данным Ю. А. Войтинской, коэффициент гидравлического сопротивления может быть получен по формуле

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\lg\left[\left(\frac{2{,}8\,v^*_{\text{пор}}}{\nu\sqrt{\lambda}}\right)^{\beta/5{,}75}\left(\frac{2{,}51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}} + \frac{k_1}{3{,}7\,d}\right)\right], \qquad (4.90)$$

где $v^*_{\text{пор}}$ — так называемая «пороговая» динамическая скорость (зависящая от вида полимера), при достижении которой начинается снижение потерь напора; β — коэффициент, также зависящий от вида полимера и его концентрации. Например, для полиакриламида принимают $v^*_{\text{пор}} = 0{,}05$ м/с, а β находят по эмпирической формуле (при $0{,}005\% < C < 0{,}012\%$), $\beta = 1000C$, где C — объемная концентрация полимера.

Отметим, что в некоторых случаях при концентрациях полиакриламида порядка 0,01% потери напора могут быть снижены почти на 70%.

При нулевой концентрации полимера ($C = 0$, $\beta = 0$) выражение (4.90) переходит в формулу Кольбрука и Уайта (4.82).

В магистральных нефтепроводах снижение потерь напора с помощью полимерных добавок ограничивается трудностью производства большого количества искусственных нефтерастворимых полимеров и их быстрой деградацией в потоке.

А. Х. Мирзаджанзаде и другие ученые в лабораторных условиях доказали возможность применения для этой цели добавок асфальтенов и смол — продуктов, содержащихся в нефтяных остатках после переработки нефти.

Хорошие результаты были получены также и при добавках гудрона, представляющего собой естественную смесь названных выше веществ.

Заслуживает также внимания явление (так называемый *парадокс Грея*), установленное в результате наблюдений за движением некоторых морских животных (в основном дельфинов). Изучение гидродинамики этих животных показало, что специфические особенности строения их кожи оказывают существенное влияние на возникающие при движении гидравлические сопротивления.

Практическая значимость парадокса Грея заключается в возможности снижения потерь напора в реальных гидравлических системах путем использования в них искусственных демпфирующих покрытий, моделирующих кожу дельфина. В применении к трубопроводам такое покрытие может быть выполнено, например, в виде специальной резиновой «подкладки», зазор между которой и внутренней поверхностью трубопровода заполняется воздухом, различными маловязкими жидкостями (спирт, вода) или мягкой пористой резиной.

§ 48. МЕСТНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

При движении реальной жидкости, как было указано в § 26, помимо потерь на трение по длине потока могут возникать и так называемые *местные потери напора*. Причиной последних, например в трубопроводах, являются разного рода конструктивные вставки (колена, тройники, сужения и расширения трубопровода, задвижки, вентили и др.), необходимость которых вызывается условиями сооружения и эксплуатации трубопровода.

Местные сопротивления вызывают изменение скорости движения жидкости по значению (сужение и расширение), направлению (колено) или значению и направлению одновременно (тройник).

Поэтому часто указывают на некоторую аналогию между явлениями, наблюдаемыми в местных сопротивлениях, и ударом в твердых телах, который с механической точки зрения также характеризуется внезапным изменением скорости.

В практических расчетах местные потери определяют по формуле, выражающей потерю пропорционально скоростному напору,

$$h_{м.\,п} = \zeta v^2/2g, \tag{4.91}$$

где v — средняя скорость движения жидкости в сечении потока за местным сопротивлением; ζ — безразмерный коэффициент, называемый *коэффициентом местного сопротивления*. Значение ζ устанавливают опытным путем.

Если по каким-либо соображениям потерю напора желательно выразить через скорость перед местным сопротивлением, необходимо выполнить пересчет коэффициента местного сопротивления. Для этой цели можно воспользоваться соотношением

$$\zeta_1/\zeta_2 = (F_1/F_2)^2, \tag{4.92}$$

где ζ_1, ζ_2 — коэффициенты местных сопротивлений, соответствующие сечениям F_1 и F_2.

В некоторых случаях оказывается удобным определять местные сопротивления по так называемой *эквивалентной длине* — такой длине прямого участка трубопровода данного диаметра, на которой потеря напора на трение по длине $h_{тр}$ равна (эквивалентна) потере напора $h_{м.\,п}$, вызываемой соответствующим местным сопротивлением. Эквивалентная длина $L_э$ может быть найдена из равенства потери напора по длине, определяемой по формуле Дарси — Вейсбаха $h_{тр} = \lambda (L_э/d)\ (v^2/2g)$, и местной потери напора, учитываемой формулой $h_{м.\,п} = \zeta v^2/2g$.

Приравнивая правые части этих формул, находим:

$$L_э = (\zeta/\lambda)\, d. \tag{4.93}$$

Если рассмотреть наиболее характерный случай местного сопротивления в виде внезапного расширения трубопровода, когда поперечное сечение резко увеличивается от F_1 до F_2 (рис. 4.25), можно наблюдать следующую картину. Частицы жидкости, пройдя сечение *1-1* с некоторой скоростью, стремятся двигаться дальше в том же направлении с той же скоростью.

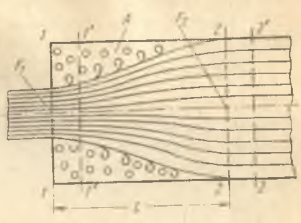


Рис. 4.25

Однако они задерживаются частицами, находящимися впереди и обладающими (ввиду увеличения сечения) меньшими скоростями, как бы наталкиваются и ударяются о них и поэтому получают смещения в поперечном направлении, что вызывает расширение струи. В некотором сечении *2-2*, отстоящем на небольшом расстоянии от первого, поток жидкости заполняет все сечение трубы. При этом в начале трубы большего диаметра, в углах образуется вихревая область, представляющая собой кольцевое пространство A, заполненное жидкостью не участвующей в основном поступательном движении в направлении оси трубопровода. Вследствие трения на граничных поверхностях эта жидкость находится здесь во вращательном, вихревом движении, вызывающем значительные потери энергии.

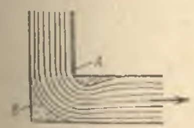


Рис. 4.26

Аналогичные явления имеют место при движении жидкости в колене, где также образуются вихревые области A и B (рис. 4.26), и во всех других случаях местных сопротивлений.

Теоретическое определение местных потерь напора представляет значительные трудности ввиду большой сложности происходящих при этом процессов и может быть выполнено лишь для немногих случаев, в частности для внезапного расширения трубопровода. Рассмотрим решение этой задачи. Для этого в горизонтальном потоке жидкости выделим объем между сечениями *1-1* и *2-2* (см. рис. 4.25) и применим к нему теорему о приращении количества движения, согласно которой приращение количества движения равняется импульсу проекций всех действующих сил на направление движения.

Указанный объем за некоторое время переместится в новое положение, ограниченное сечениями *1'-1'* и *2'-2'*. Чтобы определить приращение количества движения, достаточно рассмотреть массу жидкости m объемов между сечениями *1-1, 1'-1'* и *2-2, 2'-2'*, поскольку количество движения объема между сечениями *1-1* и *2-2* остается неизменным.

При этом для искомого приращения количества движения получим

$$m\left(\alpha_2' v_2 - \alpha_1' v_1\right) = \rho Q dt\,(v_2 - v_1), \qquad \text{(а)}$$

где Q — расход жидкости; ρ — ее плотность; α_1 и α_2 — коэффициенты Буссинеска, представляющие собой поправки к количествам движения за счет неравномерности распределения скоростей в поперечных сечениях потока; в дальнейшем будем считать, что эти коэффициенты в обоих сечениях одинаковы и равны единице.

При определении суммы проекций импульсов действующих сил следует учесть, что такими силами являются здесь лишь силы давления на концевые сечения, ограничивающие рассматриваемый объем.

Имея в виду, что гидродинамические давления p_1 и p_2 в указанных сечениях равномерно распределены по всей площади F_2, для этих сил получим:

$$P_1 = p_1 F_2; \qquad P_2 = p_2 F_2.$$

Силами трения ввиду малой длины участка растекания l можно пренебречь.

Таким образом, сумма проекций импульсов сил на направление движения (т. е. на ось потока) будет равна

$$(p_1 - p_2)\, F_2 dt. \qquad \text{(б)}$$

Приравняв затем выражения (а) и (б) на основании теоремы о приращении количества движения, получим $\rho Q dt(v_2 - v_1) = (p_1 - p_2) F_2 dt$. Последнее выражение после деления на ρg и замены $Q = v_2 F_2$ примет вид:

$$v_2 F_2 (v_2 - v_1)/g = F_2 (p_1 - p_2)/\rho g,$$

или

$$(p_1 - p_2)/\rho g = v_2^2/g - v_2 v_1/g. \qquad \text{(в)}$$

Составим далее для тех же двух сечений, имея в виду сделанные выше допущения, уравнение Бернулли в его обычной форме (3.25), из которого легко найдем следующее выражение для потери напора при внезапном расширении:

$$h_{\text{вн. р}} = \left(p_1/\rho g + v_1^2/2g\right) - \left(p_2/\rho g + v_2^2/2g\right) = (p_1 - p_2)/\rho g + \left(v_1^2 - v_2^2\right)/2g.$$

Преобразуем это выражение и подставим в него вместо $(p_1 - p_2)/\rho g$ установленное ранее его значение (в). Получим

$$h_{\text{вн. р}} = v_2^2/2g - v_2 v_1/g + v_1^2/2g - v_2^2/2g = v_1^2/2g - 2v_1 v_2/2g + v_2^2/2g$$

или окончательно

$$h_{\text{вн. р}} = (v_1 - v_2)^2/2g, \qquad (4.94)$$

т. е. потеря напора при внезапном расширении равна скоростному напору, соответствующему потерянной скорости $(v_1 - v_2)$. Этот результат известен под названием *теоремы*, или *формулы, Борда* и хорошо подтверждается опытными данными при турбулентном режиме.

§ 49. КОЭФФИЦИЕНТЫ МЕСТНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Исследованию местных сопротивлений посвящено большое число работ, в основном экспериментальных. Установлено, что коэффициент местного сопротивления ζ зависит не только от вида самого местного сопротивления, но и от характера режима движения жидкости, т. е. от числа Рейнольдса.

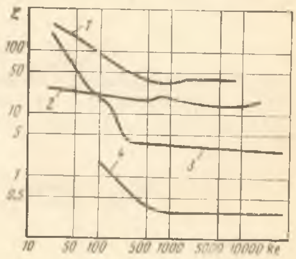


Рис. 4.27

Зависимость ζ от Re для некоторых местных сопротивлений показана на рис. 4.27 (*1* — шарового клапана, *2* — вентиля, *3* — задвижки, *4* — тройника).

Как показали работы А. Д. Альтшуля, В. Н. Карева, Н. В. Левкоевой, Н. З. Френкеля и других исследователей, наибольшие изменения в зависимости от Re коэффициент ζ претерпевает в области ламинарного режима. При весьма малых значениях числа Рейнольдса (Re<10) этот коэффициент обратно пропорционален Re:

$$\zeta = A/\text{Re}. \qquad (4.95)$$

При бо́льших значениях числа Рейнольдса в области ламинарного режима зависимость коэффициента местного сопротивления от числа Рейнольдса имеет вид:

$$\zeta = B/\text{Re}^n. \qquad (4.96)$$

В формулах (4.95), (4.96) A и B — числовые коэффициенты, зависящие от вида местного сопротивления.

А. Д. Альтшуль рекомендует определять ζ по следующей обобщенной формуле, применимой как при ламинарном, так и при турбулентном режиме:

$$\zeta = C/\mathrm{Re} + \zeta_к, \qquad (4.97)$$

где C — коэффициент, зависящий от вида местного сопротивления (табл. 4.2); $\zeta_к$ — коэффициент местного сопротивления в квадратичной области турбулентного режима.

Для арматуры, при полном открытии (в случае отсутствия необходимых данных) можно приближенно принимать $C = 500\zeta_к$.

До настоящего времени, однако, вопрос о местных сопротивлениях при ламинарном режиме исследован еще недостаточно полно. Имеющиеся данные, как и приведенные выше формулы, требуют проверки и дальнейшего уточнения.

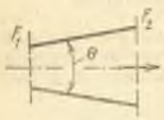


Рис. 4.28

Значительно более обстоятельно исследован вопрос о местных сопротивлениях при турбулентном режиме. Установлено, что в этом случае изменения коэффицента местного сопротивления ζ в зависимости от числа Рейнольдса настолько незначительны, что ими можно пренебречь, и при практических расчетах ζ считают зависимым только от характера и конструктивного оформления местного сопротивления.

Таблица 4.2

Значения коэффициента C в формуле (4.97) для некоторых местных сопротивлений

Вид сопротивления	C	Вид сопротивления	C
Внезапное расширение	30	Пробковый кран	150
Угольник, 90°	400	Обыкновенный вентиль	3000
Угольник, 135°	600	Угловой вентиль	400
Колено с углом 90°	130	Шаровой клапан	5000
Тройник	150	Задвижка (полное открытие)	75

Ниже приводятся значения коэффициентов ζ для некоторых основных видов местных сопротивлений. Все приведенные значения, за исключением особо оговариваемых случаев, относятся к турбулентному режиму (квадратичная зона), получены на основе опытов с водой и даны применительно к скорости потока за местным сопротивлением.

Внезапное расширение (см. рис. 4.25). В этом случае потеря напора может быть определена, как указывалось выше,

из формулы (4.94). Вынеся в ней за скобку величину v_2, получим

$$h_{в.р} = \left(\frac{F_2}{F_1} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \zeta \frac{v_2^2}{2g}, \qquad (4.98)$$

т. е.

$$\zeta = [F_2/F_1 - 1]^2. \qquad (4.99)$$

где F_1, F_2 — сечения трубы до и после расширения.

Таким образом, формула (4.94) приведена к общему виду для выражения потерь на местные сопротивления. Значения коэффициента ζ могут быть в этом случае легко вычислены исходя из размеров трубы.

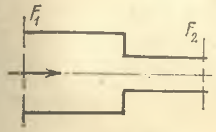


Рис. 4.29

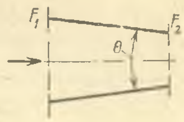


Рис. 4.30

Постепенное расширение (переходные расширяющиеся конусы, или диффузоры, рис. 4.28). Коэффициент сопротивления

$$\zeta = k[(F_2/F_1) - 1]^2, \qquad (4.100)$$

где k — зависит от угла конусности θ (см. табл. 4.3).

Таблица 4.3

Значение коэффициента k для переходных расширяющихся конусов

θ, градусы	k	θ, градусы	k	θ, градусы	k
5	0,13	40	0,90	90	1,07
10	0,17	50	1,03	100	1,06
15	0,26	60	1,12	120	1,05
20	0,41	70	1,13	160	1,02
30	0,71	80	1,10		

Коэффициент ζ для диффузоров может быть определен также по формуле

$$\zeta = \frac{\lambda}{8\sin(\theta/2)} \frac{n^2 - 1}{n^2} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \sin\theta, \qquad (4.101)$$

где λ — коэффициент, учитывающий потери напора по длине; $n = F_2/F_1$ — степень расширения диффузора.

В н е з а п н о е с у ж е н и е (рис. 4.29). Коэффициент сопротивления зависит от отношения F_2/F_1. Найденные опытным путем значения этого коэффициента приведены ниже.

Значения коэффициента сопротивления ζ при внезапном сужении

F_2/F_1	0,01	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1
ζ	0,45	0,39	0,35	0,28	0,20	0,09	0

П о с т е п е н н о е с у ж е н и е (конфузоры, рис. 4.30). Коэффициент сопротивления определяют по формуле

$$\zeta = \frac{\lambda}{8\sin(\theta/2)}\,\frac{n^2-1}{n^2}; \tag{4.102}$$

здесь $n = F_1/F_2$ — степень сужения конфузора.

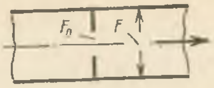


Рис. 4.31

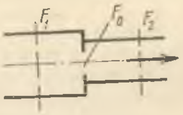


Рис. 4.32

Д и а ф р а г м а (рис. 4.31) — это пластинка с отверстием в центре, устанавливаемая в трубопроводе для измерения расхода жидкости. Коэффициент сопротивления диафрагмы зависит от отношения площади сечения ее отверстия F_0 к площади сечения трубы F и может быть определен по формуле И. Е. Идельчика:

$$\zeta = \left(1 + \frac{0{,}707}{\sqrt{1 - F_0/F}}\right)^2 \left(\frac{F}{F_0} - 1\right)^2. \tag{4.103}$$

Значения коэффициента сопротивления ζ для диафрагмы

F_0/F_2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
ζ	226	47,8	17,5	7,8	3,75	1,8	0,8	0,29	0,06	0

Если диафрагма установлена в трубе переменного сечения (рис. 4.32), следует различать «совершенное» сжатие при $F_1 > 20F_0$ и «несовершенное» при $F_1 < 20F_0$.

Значения коэффициента сопротивления ζ для диафрагмы в трубе переменного сечения при «совершенном» сжатии

F_0/F_2	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
ζ	232	51	19,8	9,61	5,26	3,08	1,88	1,17	0,73	0,48

С т ы к и т р у б (с подкладными кольцами, электродуговой и контактной сварки), подобно диафрагмам, можно рассматривать как местные сопротивления, уменьшающие проходное

сечение трубопровода. Поскольку этот вопрос имеет большое практическое значение и сравнительно мало освещен в литературе, рассмотрим его более подробно.

А. Д. Альтшуль и В. М. Калицун рекомендуют учитывать увеличение сопротивления, вызываемое стыками, путем введения в расчетные формулы для коэффициента гидравлического сопротивления трубопровода поправочного коэффициента K

$$\lambda_c = K\lambda, \tag{4.104}$$

где λ_c, λ — коэффициент сопротивления трубопровода, соответственно, со стыками и без стыков.

Для определения K предлагается следующая формула:

$$K = 1 + \zeta_c d/\lambda l. \tag{4.105}$$

Здесь ζ_c — коэффициент сопротивления стыков; l — расстояние между стыками (длина труб); d — диаметр труб.

Значения коэффициента ζ_c в этой формуле можно принимать в зависимости от технологии сварки по данным табл. 4.4.

Т а б л и ц а 4.4

Значения коэффициента сопротивления ζ_c сварных стыков

Вид стыка	Диаметр труб, мм							
	200	300	400	500	600	700	800	900
С подкладными кольцами ($\delta = 5$ мм)	0,060	0,0300	0,0180	0,013	0,009	0,0070	0,0060	0,005
Электродуговой и контактной сварки	0,026	0,0135	0,009	0,006	0,004	0,0028	0,0023	0,002

Влияние подкладных колец на гидравлические сопротивления в условиях действующих магистральных нефтепроводов исследовали Е. З. Рабинович и П. Б. Кузнецов. В результате обработки большого числа экспериментальных данных ими получена следующая формула для определения коэффициента K в уравнении (4.104):

$$K = 1 + 0{,}395\mathrm{Re}^{0{,}25}/d^{0{,}6}l. \tag{4.106}$$

Эта формула справедлива для всей области гидравлически гладких труб турбулентного режима. При пользовании ею расстояние между стыками l и диаметр труб d следует выражать в метрах.

Исследования показали также, что сварные стыки без подкладных колец в трубопроводах больших диаметров при современном уровне выполнения сварочных работ практически не

Таблица 4.5

Значения коэффициента сопротивления ζ для тройника

Коэффициент	Отношение расходов $Q_{отв}/Q_{сум}$					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Для входа в магистраль						
$\zeta_{отв}$	—1,20 *	—0,40 *	0,08	0,47	0,72	0,01
$\zeta_{м}$	0,04	0,17	0,30	0,41	0,51	0,60
Для выхода из магистрали						
$\zeta_{отв}$	0,95	0,83	0,89	0,95	1,10	1,28
$\zeta_{м}$	0,04	—0,08 *	—0,05 *	0,07	0,21	0,35

* Отрицательные значения объясняются увеличением напора в соответствующих направлениях вследствие всасывающего действия сходящихся или расходящихся потоков жидкости.

Заслонка (дисковый затвор) (рис. 4.42) и пробковый кран (рис. 4.43). Коэффициенты сопротивления ζ в этих случаях зависят от угла открытия α (табл. 4.6).

Задвижка (рис. 4.44). Коэффициент сопротивления ζ изменяется в зависимости от степени открытия задвижки h/d (табл. 4.7).

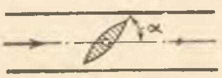


Рис. 4.42

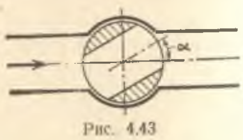


Рис. 4.43

Рис. 4.44

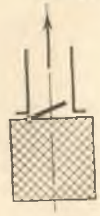


Рис. 4.45

Всасывающая коробка. Ее устанавливают в начале всасывающего трубопровода насосных установок.

Значения коэффициента сопротивления ζ для всасывающей коробки с обратным клапаном (рис. 4.45)

d, м	0,04	0,07	0,10	0,15	0,20	0,30	0,50	0,75
ζ	12	8,5	7	6	5,2	3,7	2,5	1,6

Таблица 4.6

Значения коэффициента сопротивления ζ для заслонки (дискового затвора) и пробкового крана

α, градусы	ζ		α, градусы	ζ	
	пробковый кран	заслонка		пробковый кран	заслонка
5	0,24	0,05	40	10,8	17,3
10	0,52	0,29	45	18,7	31,2
15	0,90	0,75	50	32,6	52,6
20	1,54	1,56	55	58,8	106,0
25	2,51	3,10	60	118,0	206,0
30	3,91	5,47	65	256,0	486,0
35	6,22	9,68	82,5	—	∞

Таблица 4.7

Значения коэффициента сопротивления ζ для задвижки

Степень открытия h/d	ζ для задвижки на трубах		Степень открытия h/d	ζ для задвижки на трубах	
	малых ($d<0,5$ м)	больших ($d>0,5$ м)		малых ($d<0,5$ м)	больших ($d>0,5$ м)
13/72	43,0	41,0	5/12	4,0	6,3
7/36	35,0	35,0	11/24	2,9	4,6
5/24	28,0	31,0	1/2	2,0	3,3
1/4	17,0	23,0	7/12	1,1	1,5
1/3	7,9	12,0	2/3	0,87	0,77
3/8	5,5	8,6	1	0,5	0,05

Если всасывающая коробка не имеет обратного клапана, коэффициент ζ определяют по формуле

$$\zeta = (0{,}675 \div 1{,}575)\,(F/F_c)^2, \tag{4.115}$$

где F — площадь сечения трубы; F_c — суммарная площадь сечений отверстий сетки.

При приближенных расчетах можно принимать как средние следующие значения ζ:

Вход в трубу без закругления входных кромок	0,5
То же, при хорошо закругленных кромках	0,1
Выход из трубы в сосуд больших размеров	1,0
Резкий поворот трубы без переходного закругления при угле поворота примерно 90°	1,25—1,5
Колено (плавное закругление) на трубе с углом $\delta = 90°$ при $R_з \geqslant 2d$	0,5
То же, при $R_з \approx (3 \div 7)\,d$	0,3
Задвижка, открытая наполовину	2,0
Задвижка полностью открытая	0,1
Кран	5—7
Вход во всасывающую коробку с обратным клапаном	5—10

Данные о коэффициентах местных сопротивлений для других случаев могут быть взяты из более подробных курсов гидравлики или специальных гидравлических справочников.

§ 50. СЛОЖЕНИЕ ПОТЕРЬ НАПОРА

Во многих случаях при движении жидкостей в различных гидравлических системах (например, трубопроводах) имеют место одновременно потери напора на трение по длине и местные потери. Полная потеря напора в подобных случаях определяется как арифметическая сумма потерь всех видов. Например, полная потеря напора в трубопроводе длиной L, диаметром d, имеющем n местных сопротивлений, будет составлять

$$h_{1-2} = h_{тр} + \sum h_{м.п} = \lambda \frac{Lv^2}{d2g} + \sum_{i=1}^{i=n} \zeta_i \frac{v^2}{2g},$$

т. е.

$$h_{1-2} = \left(\lambda \frac{L}{d} + \sum_{i=1}^{i=n} \zeta_i\right)\frac{v^2}{2g}.$$

Выражение, стоящее в скобках, называют коэффициентом сопротивления системы и обозначают $\zeta_{сист}$. Таким образом,

$$h_{1-2} = \zeta_{сист} v^2/2g. \qquad (4.116)$$

Можно также заменить местные сопротивления эквивалентными им длинами. В рассматриваемом случае эквивалентная длина, соответствующая всем n местным сопротивлениям, будет

$$L_{э\,п} = \frac{d}{\lambda} \sum_{i=1}^{i=n} \zeta_i. \qquad (4.117)$$

Тогда, обозначив $L + L_{эп} = L_п$, можно определить сумму потерь по формуле Дарси — Вейсбаха, вводя в нее вместо действительной длины трубопровода L так называемую приведенную длину $L_п$. Таким образом,

$$h_{1-2} = \lambda\,(L_п/d)\,(v^2/2g). \qquad (4.118)$$

Если трубопровод состоит из нескольких участков длиной $L_1, L_2, \dots, L_k$ различного диаметра $d_1, d_2, \dots, d_k$ с n местными сопротивлениями, полную потерю напора находят аналогично предыдущему:

$$h_{1-2} = \sum_{i=1}^{i=k} h_{тр\,i} + \sum_{i=1}^{i=n} h_{м.п\,i}. \qquad (а)$$

Здесь

$$\sum_{i=1}^{i=k} h_{тр\,i} = \lambda_1 \frac{L_1}{d_1}\frac{v_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L_2}{d_2}\frac{v_2^2}{2g} + \dots + \lambda_k \frac{L_k}{d_k}\frac{v_k^2}{2g}; \qquad (б)$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} h_{м.п\,i} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} + \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} + \dots + \zeta_n \frac{v_n^2}{2g}; \qquad (в)$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$; $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$; $v_1, v_2, \dots, v_n$ — коэффициенты сопротивлений и средние скорости для отдельных участков.

Для упрощения подсчетов часто оказывается целесообразным выразить все скорости через какую-либо одну скорость на некотором основном участке трубопровода, который выбирают произвольно в зависимости от удобства решений и условий задачи. Предположим, что таким участком является первый. Тогда из уравнения постоянства расхода $v_1F_1 = v_2F_2 = \dots = v_kF_k$ получаем

$$v_2 = v_1F_1/F_2; \ \dots; \qquad v_k = v_1F_1/F_k.$$

Подставляя эти значения в выражения (б) и (в), а последующие — в общее уравнение для полной потери напора (а), после преобразований находим

$$h_{1-2} = \left[\lambda_1 \frac{L_1}{d_1} + \lambda_2 \frac{L_2}{d_2}\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 + \dots + \lambda_k \frac{L_k}{d_k}\left(\frac{F_1}{F_k}\right)^2 + \zeta_1 + \zeta_2\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 + \dots + \zeta_n\left(\frac{F_1}{F_k}\right)^2\right]\frac{v_1^2}{2g}$$

или

$$h_{1-2} = \zeta_{сист} v_1^2/2g,$$

где $\zeta_{сист}$ (коэффициент сопротивления системы) — выражение, стоящее в квадратных скобках.

§ 51. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ МЕСТНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Необходимо иметь в виду, что рассмотренный в § 50 метод суммирования потерь напора (его обычно называют методом наложения потерь, или суперпозиции) имеет ограниченную область применения. Он дает правильные результаты лишь в тех случаях, когда длины прямолинейных участков трубопровода между отдельными местными сопротивлениями таковы, что в их пределах прекращается возмущающее влияние сопротивлений и поток жидкости стабилизируется.

Вместе с тем на практике часто встречаются такие гидравлические системы, которые включают большое число различных местных сопротивлений, устанавливаемых на весьма малых расстояниях друг от друга. Это наблюдается, например, в обвязках устьев нефтяных и газовых скважин, манифольдах нефтепроводных насосных станций и некоторых сложных фасонных частях трубопроводов.

При этом, как отмечалось, начинает сказываться влияние одного сопротивления на другое, нарушается режим течения потока с установившимся полем скоростей и изменяются условия подхода жидкости к каждому последующему местному сопротивлению. Суммарный коэффициент сопротивлений таких систем может существенно отличаться от арифметической суммы значений коэффициентов отдельных «изолированных» сопротивлений и в зависимости от расстояния между ними может быть значительно больше или меньше этой суммы.

В подобных случаях говорят об интерференции, т. е. взаимном влиянии местных сопротивлений.

Явление интерференции сопротивлений до сих пор исследовано недостаточно полно. По существу, лишь в последнее время появились работы, посвященные этому вопросу. Основные результаты некоторых из них приводятся ниже.

В качестве основной характеристики интерференции принимают так называемую *длину влияния,* под которой понимают длину прямого участка трубопровода после местного сопротивления, в пределах которого прекращается возмущающее влияние сопротивления на поток. Установлено, что в общем случае длина влияния зависит от вида (геометрии) местного сопротивления, числа Рейнольдса, диаметра и относительной шероховатости трубопровода.

По А. Д. Альтшулю, длина влияния для всей области турбулентного режима может быть определена по формуле

$$L_{вл} = 0{,}5d\zeta_к/\lambda, \qquad (4.119)$$

где d — диаметр трубопровода; $\zeta_к$ — коэффициент рассматриваемого местного сопротивления в квадратичной области; λ — коэффициент гидравлического сопротивления трубопровода.

При больших числах Рейнольдса для ориентировочной оценки длины влияния приближенно можно принимать

$$L_{вл} = (20 \div 50)\, d. \qquad (4.120)$$

В тех же случаях, когда расстояния между местными сопротивлениями меньше длины влияния, интерференция сопротивлений, как указывалось, может быть весьма значительной и существенно сказаться на точности гидравлических расчетов. Это обстоятельство необходимо учитывать, используя материалы соответствующих исследований.

Ю. А. Скобельцын и П. В. Хомутов изучали интерференцию различных видов запорных устройств (вентили, проходные пробковые краны, дроссельные и обратные клапаны). В результате обработки экспериментальных данных ими предложены следующие формулы для определения суммарного

коэффициента местных сопротивлений пары этих устройств при их взаимном влиянии:

при Re < 160

$$\zeta_{1+2} = \left(31{,}2/\mathrm{Re}^{0{,}785}\right)(\zeta_{1к} + \zeta_{2к})(2 - \beta); \qquad (4.121)$$

при $160 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 500$

$$\zeta_{1+2} = \left(1{,}31/\mathrm{Re}^{0{,}159}\right)(\zeta_{1\,к} + \zeta_{2\,к})(2 - \beta); \qquad (4.122)$$

при Re > 500*

$$\zeta_{1+2} = 0{,}5\,(\zeta_{1к} + \zeta_{2к})(2 - \beta), \qquad (4.123)$$

где $\zeta_{1к}$, $\zeta_{2к}$ — единичные коэффициенты сопротивлений запорных устройств, составляющих пару, в квадратичной области сопротивлений; β — коэффициент, зависящий от относительного расстояния между запорными устройствами;

для прямоточной запорной арматуры

$$\beta = 22{,}2 \cdot 10^{-5}\,(l/d)^2 - 26{,}7 \cdot 10^{-3}\,(l/d) + 0{,}8; \qquad (4.124)$$

для остальных видов запорных устройств

$$\beta = 4{,}17 \cdot 10^{-5}\,(l/d)^2 - 5 \cdot 10^{-3}\,(l/d) + 0{,}15. \qquad (4.125)$$

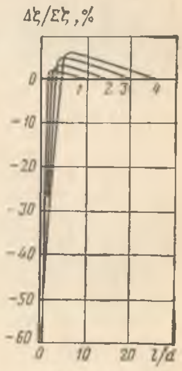


Рис. 4.46

Исследования интерференции диафрагм проводились Н. В. Левкоевой. Результаты исследований представлены на рис. 4.46, где изображены кривые изменения коэффициента интерференции, представляющего собой отношение приращения суммарного коэффициента сопротивления двух «интерферирующих» диафрагм к арифметической сумме коэффициентов сопротивления тех же, но «изолированных» диафрагм:

$$K = \frac{\Delta\zeta}{\Sigma\zeta} = \frac{\zeta_{1+2} - (\zeta_1 + \zeta_2)}{\zeta_1 + \zeta_2}$$

в зависимости от относительного расстояния l/d между диафрагмами при разных значениях числа Рейнольдса (*1* — при Re = 100, *2* — Re = 500, *3* — Re = 2000, *4* — Re = 8000).

Как видим, суммарный коэффициент сопротивления ζ_{1+2} при очень малом расстоянии между диафрагмами значительно

* Можно считать, что при Re > 500 суммарный коэффициент ζ_{1+2} практически не зависит от числа Рейнольдса.

меньше арифметической суммы единичных коэффициентов сопротивления обеих диафрагм $(\zeta_1+\zeta_2)$. При увеличении этого расстояния коэффициент интерференции резко возрастает и достигает наибольшего значения при $l=(5\div7)\ d$, когда суммарный коэффициент ζ_{1+2} на 3—7% превышает $(\zeta_1+\zeta_2)$. Затем кривые плавно снижаются, и коэффициент интерференции становится равным нулю. Суммарный коэффициент ζ_{1+2} при этом равен сумме единичных коэффициентов сопротивления диафрагм $(\zeta_1+\zeta_2)$.

На графике видно также, что коэффициент интерференции зависит от числа Рейнольдса. При малых значениях Re суммарный коэффициент сопротивления ζ_{1+2} меньше отличается от суммы единичных коэффициентов сопротивления, чем при больших. Одновременно с уменьшением Re сокращается и длина влияния.

Аналогичные результаты были получены И. А. Ждановым, изучавшим интерференцию стандартных фланцевых отводов. Анализ полученных им зависимостей коэффициента интерференции K от относительного расстояния между отводами l/d показывает, что во всех случаях (при $\mathrm{Re}=20\div5000$) минимальное значение K соответствует $l=0$, когда суммарный коэффициент сопротивления ζ_{1+2} значительно меньше суммы $(\zeta_1+\zeta_2)$, а максимальное — относительному расстоянию между отводами $l/d=5$, когда ζ_{1+2} существенно превышает сумму $(\zeta_1+\zeta_2)$. При дальнейшем увеличении l/d коэффициент K постепенно приближается к своему нулевому значению, соответствующему равенству $\zeta_{1+2}=\zeta_1+\zeta_2$.

Опытами Жданова также подтверждена определенная зависимость коэффициента интерференции K от числа Рейнольдса. Показано, что во всех случаях (при $\mathrm{Re}=2000$) коэффициент K достигает максимума. Затем с увеличением числа Re K уменьшается и принимает постоянное значение при $\mathrm{Re}=7000$.

§ 52. СОПРОТИВЛЕНИЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ ТЕЛ

Пусть некоторое тело движется в покоящейся жидкости в горизонтальной плоскости прямолинейно с постоянной скоростью v. Для осуществления подобного движения к телу необходимо приложить некоторую постоянную силу, так как жидкость оказывает сопротивление его движению. Такую же силу нужно приложить к телу и для того, чтобы оно осталось в покое, если будет помещено в поток той же жидкости, движущейся с такой скоростью v, с какой в первом случае перемещалось само тело. В первом случае названная сила представляет собой *сопротивление среды* (жидкости), во втором—*сопротивление тела*. Обобщая, можно назвать эту силу *сопротивлением при обтекании тела жидкостью.*

Согласно современным воззрениям, сопротивление при обтекании тела жидкостью обусловливается двумя причинами: разностью давлений на передней и задней поверхностях тела при обтекании *(сопротивление давления)* и трением между телом и жидкостью *(сопротивление трения)* *. Причем в общем случае преобладающее значение имеет первая из них. И основной причиной сопротивлений являются главным образом процессы, происходящие сзади движущегося тела, в кормовой его части. Сопротивление трения оказывается существенным лишь при обтекании тонких тел.

Рассмотрим некоторое неподвижное тело (например, цилиндр), симметрично обтекаемое потоком идеальной жидкости (рис. 4.47). В таком случае, как установлено в гидродинамике, скорости отдельных частиц жидкости, находящихся на горизонтальной оси xx и движущихся на значительном расстоянии от цилиндра с некоторой скоростью v_0, с приближением к цилиндру постепенно уменьшаются и в точке A оказываются равными нулю. Затем эти частицы продолжают свое движение по окружности цилиндра со все возрастающей скоростью, достигающей наибольшего значения в точках B и B_1. При дальнейшем движении частиц жидкости по поверхности цилиндра скорости убывают до нуля в точке A_1, после чего частицы продолжают свое движение в направлении оси xx с увеличивающейся до v_0 (в бесконечности) скоростью.

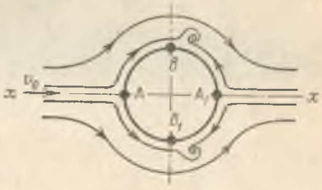


Рис. 4.47

Как следует из уравнения Бернулли, увеличению скорости соответствует понижение давления и наоборот. Поэтому давления в точках A и A_1 будут всегда больше, чем в точках B и B_1.

При этом распределение скоростей и давлений по поверхности цилиндра оказывается симметричным по отношению к его вертикальной оси, перпендикулярной к общему направлению движения потока. Давления в точках A и A_1 получаются равными между собой. Таким образом, наличие тела в потоке идеальной жидкости не ведет к появлению сопротивлений при движении.

Если то же тело поместить в поток реальной жидкости, то вследствие трения около тела образуется тонкий пограничный слой, в котором скорости жидкости быстро увеличиваются от

* При движении тела по свободной поверхности жидкости или движении тела, не вполне погруженного в жидкость, помимо этого возникает еще так называемое волновое сопротивление, причиной которого является образование волн, вызванных движением тела.

6 Заказ № 1363

нуля у стенок тела до общей скорости течения (пограничный слой является как бы некоторой прослойкой между телом и всей остальной частью потока). В этом случае наблюдается так называемое *отрывное обтекание* цилиндра жидкостью (рис. 4.48). Сущность его заключается в том, что набегающий поток, разветвившись в точке A (см. рис. 4.47), омывает цилиндр не полностью, а лишь до некоторых точек на его поверхности, которые могут находиться (в зависимости от разных причин) как перед сечением B—B_1, так и сзади него. После этого набегающая жидкость отрывается от цилиндра, уступая место жидкости, подсасываемой из области позади цилиндра. При этом давление в точке A_1 оказывается меньше, чем в точке A. Следует отметить, что аналогичный результат получится и в том случае, когда тело будет двигаться в неподвижной жидкости.

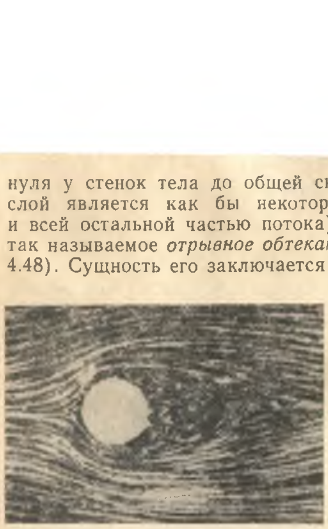


Рис. 4.48

Указанная разность давлений создает некоторую равнодействующую силу, препятствующую движению тела, и является основной составляющей силы сопротивления при обтекании тел.

На силу сопротивления очень большое влияние оказывает форма тела, особенно задней (кормовой) его части. Чтобы уменьшить эту силу, необходимо снизить вихреобразование потока около тела, что может быть достигнуто приданием ему соответствующей формы.

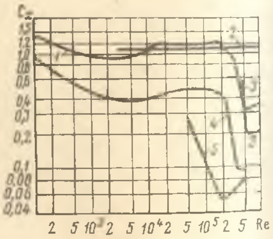


Рис. 4.49

Наибольшее значение для практики имеют такие формы тел, которые при прочих равных условиях имеют наименьшее сопротивление. Подобные тела называют *хорошо обтекаемыми*. Обтекаемую форму стараются придать кораблям, автомобилям, самолетам.

Сила сопротивления W при обтекании определяется формулой

$$W = C_x F \rho v^2/2, \tag{4.126}$$

где ρ — плотность жидкости; C_x — безразмерный коэффициент лобового сопротивления; F — площадь проекции тела на плоскость, нормальную к направлению движения; v — скорость жидкости относительно тела (или, что то же самое, тела относительно жидкости).

Коэффициент лобового сопротивления C_x зависит от структуры потока, обтекающего тело, т. е. от числа Рейнольдса, формы тела и его положения в потоке (этот коэффициент часто называют также *аэродинамической характеристикой тела*). Его определяют в каждом отдельном случае опытным путем. Значения этого коэффициента для некоторых тел приведены в табл. 4.8.

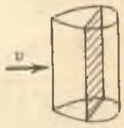


Рис. 4.50

На рис. 4.49 представлены кривые изменения коэффициента сопротивления в зависимости от числа Рейнольдса для различных случаев обтекания: *1* — цилиндра; *2* — пластинки; *3* — сплюснутого эллипсоида; *4* — шара; *5* — удлиненного эллипсоида.

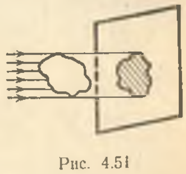


Рис. 4.51

Под площадью F, характеризующей размеры тел в случае их симметричности, обычно понимают так называемую площадь миделевого сечения (или площадь миделя), т. е. наибольшую площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к направлению течения жидкости. Миделевое сечение цилиндрического тела показано, например, на рис. 4.50. Если тело имеет сложную форму, вместо миделевого сечения (которое в этих случаях определить трудно) вводят так называемую *лобовую проектированную площадь*, равную проекции тела на плоскость, перпендикулярную к направлению

Таблица 4.8

Значения коэффициента лобового сопротивления C_x при обтекании

Форма тела	Re	C_x
Шар	$4 \cdot 10^6$ $1 \cdot 10^6$	0,09 0,13
Эллипсоид с большой осью, направленной перпендикулярно к потоку (отношение осей 1,35)	$>5{,}5 \cdot 10^6$ $<4{,}5 \cdot 10^5$	0,2 0,6
То же, направленной по потоку (отношение осей 1,8)	$1 \cdot 10^6$	0,05—0,1
Плоская квадратная пластинка, поставленная перпендикулярно к потоку	—	1,28
Плоская круглая пластинка, поставленная так же	—	1,12
Круговой цилиндр с осью, направленной перпендикулярно к потоку	$8{,}8 \cdot 10^4$	0,63—1,20

движения. Ее можно определить так же, как площадь тени, отбрасываемой на экран, установленный перпендикулярно к освещающему тело параллельному пучку лучей (рис. 4.51).

§ 53. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ В ВОСХОДЯЩЕМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

Задача о движении тел в восходящем потоке жидкости представляет значительный практический интерес и возникает, например, при бурении нефтяных и газовых скважин, при выносе разбуренной породы на поверхность земли.

Подчеркнем, что все современные промышленные способы бурения как одну из обязательных технологических операций предусматривают промывку забоя. На практике для этой цели применяют специальные промывочные жидкости (обычно глинистые растворы), которые подают буровыми насосами в циркуляционную систему буровой скважины. Жидкости проходят по колонне бурильных труб (вращая вал турбобура при турбинном способе бурения), выходят через промывочные отверстия долот к забою и поднимаются далее по кольцевому межтрубному пространству к устью скважины. При этом поток промывочной жидкости подхватывает с забоя разбуренную породу, увлекает с собой твердые частицы и перемещает их в том же направлении — по вертикали снизу вверх.

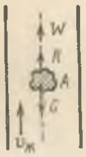


Рис. 4.52

Основной величиной, подлежащей при этом определению, обычно является критическая *скорость восходящего потока* (или так называемая *скорость витания)* — скорость течения жидкости, при которой твердые частицы остаются во взвешенном состоянии, т. е. не увлекаются вверх и не падают вниз.

Определим эту скорость. Для этого рассмотрим твердое тело A объемом V, которое находится в потоке жидкости, поднимающейся вертикально вверх (рис. 4.52). Пусть плотность тела будет $\rho_т$, плотность жидкости $\rho_ж$, средняя скорость ее течения $v_ж$. На рассматриваемое тело действуют следующие силы: сила тяжести (вес) $G=\rho_т gV$, подъемная «архимедова» сила $R=\rho_ж gV$, направленная по вертикали снизу вверх, и сила сопротивления, определяемая по общей формуле сопротивления при обтекании тел $W=C_x F\rho_ж v_ж^2/2$, и направленная вертикально вверх.

Так как тело по условию задачи должно находиться в покое, приравняем к нулю проекции действующих на него сил на направление движения жидкости:

$$R-G+W=0$$

или

$$Vg(\rho_т-\rho_ж)-C_x F\rho_ж v_ж^2/2=0,$$

откуда

$$v_ж=\sqrt{\frac{2Vg(\rho_т-\rho_ж)}{C_x\rho_ж F}}. \qquad (4.127)$$

Эта скорость и будет критической.

Анализ формулы (4.139) показывает, что с уменьшением разности плотностей тела и жидкости (например, при утяжелении глинистого раствора) критическая скорость будет меньше и, следовательно, при одном и том же значении критической скорости во взвешенном состоянии будут удерживаться тела большего «критического» размера.

В действительности выносимые жидкостью тела (например, частицы разбуренной породы) имеют неправильную форму, что делает невозможным точное решение задачи. Поэтому при практических расчетах тело обычно заменяют некоторым «эквивалентным» шаром, имеющим одинаковый с ним объем. При этом следует учесть, что из всех тел, за исключением удлиненного эллипсоида, шар обладает наименьшим коэффициентом сопротивления (см. табл. 4.8), ввиду чего вычисленная указанным методом критическая скорость будет больше, а критические размеры тела меньше действительных.

В рассматриваемом частном случае обтекания шара критическая скорость может быть представлена формулой

$$v_ж=\sqrt{\frac{4g}{3}}\sqrt{\frac{d(\rho_т-\rho_ж)}{C_x\rho_ж}}, \qquad (4.128)$$

которая легко получается из общего выражения (4.127) после замены в нем объема V и площади миделевого сечения F их значениями для шара: $V=\pi d^3/6$ и $F=\pi d^2/4$, где d — диаметр шара.

Необходимо подчеркнуть, что на процесс выноса разбуренной породы определенным образом влияет неравномерность распределения скоростей по сечению потока. Основная масса частиц обычно выносится центральными струями потока, имеющими наибольшие скорости. Часть частиц, попавших в зону малых скоростей (у стенок), может вообще не выноситься. Поэтому наиболее совершенная промывка скважины происходит при турбулентном режиме, когда вследствие турбулентного перемешивания неравномерность распределения скоростей существенно сглаживается.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ИСТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ИЗ ОТВЕРСТИЙ И НАСАДКОВ

§ 54. ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ ДОННОГО ОТВЕРСТИЯ В ТОНКОЙ СТЕНКЕ

Истечение жидкости из отверстий — одна из основных задач гидравлики, отправная точка ее научного развития. Над решением этой задачи издавна, с XVII в., работали выдающиеся ученые и инженеры. Следует отметить, что основное уравнение гидравлики — уравнение Бернулли — было получено именно в результате одного из подобных решений.

Задача об истечении сводится к определению скорости истечения и расхода вытекающей жидкости. Наиболее просто и точно она решается в случае, когда напор одинаков по всему поперечному сечению отверстия.

Рассмотрим удовлетворяющий этому требованию случай истечения жидкости из горизонтального отверстия в дне сосуда (так называемое *донное отверстие*, рис. 5.1). Пусть в общем случае давление на свободной поверхности жидкости в сосуде и давление в среде, в которую происходит истечение, отличны от атмосферного и равны p_1 и p. Будем считать также, что в сосуд все время поступает такое количество жидкости, какое из него вытекает через отверстие, т. е. примем, что уровень жидкости в сосуде поддерживается постоянным и, следовательно, движение жидкости будет установившимся. Одновременно сделаем предположение, что отверстие достаточно глубоко погружено под свободной поверхностью, которая вследствие этого может считаться горизонтальной, и значительно удалено от боковых стенок, не оказывающих ввиду этого никакого влияния на условия истечения.

Рассматривая сначала истечение идеальной жидкости, составим уравнение Бернулли для двух сечений: сечения *1-1* на свободной поверхности жидкости в сосуде и сечения *2-2* по отверстию. Площади сечений соответственно обозначим F и f. Имеем

$$H + p_1/\rho g + v_1^2/2g = p/\rho g + v_2^2/2g,$$

где v_1 и v_2 — средние скорости движения жидкости в указанных сечениях. Уравнение постоянства расхода для тех же сечений дает

$$Q = v_1 F = v_2 f,$$

откуда

$$v_1 = v_2 f/F.$$

Подставив это значение в предыдущее уравнение, получим:

$$H + p_1/\rho g + (v_2^2/2g)\,(f/F)^2 = p/\rho g + v_2^2/2g$$

или

$$H + p_1/\rho g - p/\rho g = (v_2^2/2g)\,[1 - (f/F)^2].$$

Отсюда

$$v_{т} = v_2 = \sqrt{\frac{2g\,[H + (p_1/\rho g) - (p/\rho g)]}{1 - (f/F)^2}}. \qquad (5.1)$$

Здесь и далее v_2 обозначена $v_{т}$ — скорость теоретическая. Практически площадь F бывает значительно больше площади f, поэтому в большинстве случаев величиной $(f/F)^2$ можно пренебречь (что равносильно пренебрежению скоростью v_1 — так называемой скоростью подхода, меньшей по сравнению со скоростью истечения $v_{т}$). Тогда

$$v_{т} = \sqrt{2g(H + p_1/\rho g - p/\rho g)}. \qquad (5.2)$$

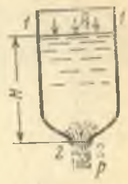


Рис. 5.1

В частном случае, когда $p_1 = p = p_{атм}$ (сосуд открыт и истечение происходит в атмосферу),

$$v_{т} = \sqrt{2gH}. \qquad (5.3)$$

Выражение (5.3) носит название *формулы Торичелли* по имени выдающегося итальянского физика, установившего эту зависимость. Формула Торичелли и известная из теоретической механики формула для определения скорости падения тела в пустоте с высоты H тождественны.

Таким образом, при истечении идеальной жидкости в атмосферу из отверстия в сосуде с постоянным уровнем и атмосферным давлением на свободной поверхности скорость истечения равна скорости падения твердого тела в пустоте при начальной скорости, равной нулю, с высоты, соответствующей напору жидкости над отверстием.

Зная скорость истечения, легко определить расход жидкости:

$$Q_{т} = v_{т} f. \qquad (5.4)$$

Действительные явления, наблюдаемые при истечении жидкости из отверстия, однако, существенным образом отличаются от рассмотренной здесь упрощенной схемы как вследствие неизбежных потерь напора на преодоление сопротивлений, возникающих при движении реальной жидкости, так и в результате явления сжатия струи (см. § 55). Поэтому формулы (5.1) — (5.4) могут быть использованы только для определения теоретической скорости истечения и теоретического расхода жидкости. Для решения практических задач требуется введение соответствующих корректирующих коэффициентов.

§ 55. КОЭФФИЦИЕНТЫ СКОРОСТИ, СЖАТИЯ И РАСХОДА

В обычных условиях истечения при большой площади поперечного сечения сосуда и малом отверстии скорости движения жидкости в самом сосуде, по сравнению со скоростью истечения из отверстия, будут весьма малы. Поэтому при истечении реальной (вязкой) жидкости будут незначительными и потери напора при ее движении по сосуду. Эти потери напора будут возрастать лишь с приближением к отверстию, в непосредственной близости от него и, особенно, в самом отверстии. Значит, в рассматриваемом случае потери напора могут быть отнесены к категории местных потерь.

Особенностью этих потерь является то, что они обусловливаются торможением скорости вследствие трения жидкости о стенки и образованием пограничного слоя на поверхности струи, что в действительности приводит к неравномерности распределения скоростей.

Имея это в виду, примем $\alpha_1=\alpha_2=1$ и составим аналогично указанному выше уравнение Бернулли для тех же сечений *1-1* и *2-2* (см. рис. 5.1). Получим

$$H+p_1/\rho g+v_1^2/2g=p/\rho g+v_д^2/2g+\zeta v_д^2/2g,$$

где $v_д$ действительная скорость истечения; ζ — коэффициент сопротивления при истечении. Отсюда находим

$$v_д=\sqrt{\frac{2g\,(H+p_1/\rho g-q/\rho g)}{1+\zeta-(f/F)^2}} \qquad (5.5)$$

или, если по-прежнему пренебречь величиной $(f/F)^2$,

$$v_д=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}\sqrt{2g\,(H+p_1/\rho g-p/\rho g)}. \qquad (5.6)$$

В частном случае, когда $p_1=p=p_{атм}$,

$$v_д=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta}}\sqrt{2gH}. \qquad (5.7)$$

Формулы (5.6), (5.7) для действительной скорости истечения показывают, что эта скорость, как и следовало ожидать, оказывается всегда несколько меньше теоретической, определяемой по одной из формул, полученных в § 54. Объясняется это тем, что, как указывалось, некоторая часть энергии, которой обладает находящаяся в сосуде жидкость, затрачивается на преодоление возникающих при ее движении гидравлических сопротивлений и на создание скорости идет меньший напор, чем это было принято ранее.

Отношение действительной скорости истечения к теоретической называется *коэффициентом скорости* и обозначается буквой φ. Следовательно,

$$\varphi=v_д/v_т=1/\sqrt{1+\zeta}, \qquad (5.8)$$

откуда коэффициент сопротивления ζ выражается через коэффициент скорости $\zeta=1/\varphi^2-1$.

До сих пор мы считали, что при истечении жидкость вытекает полным сечением, т. е. поперечное сечение струи по выходе из отверстия равно сечению самого отверстия, а скорости

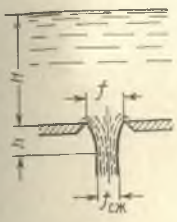


Рис. 5.2

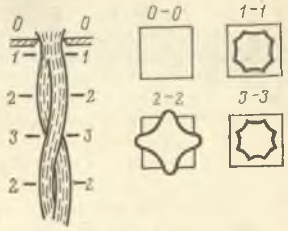


Рис. 5.3

отдельных элементарных струек в плоскости отверстия параллельны между собой. В действительности, однако, это наблюдается лишь тогда, когда стенки сосуда имеют при подходе к отверстию плавные очертания.

Во всех других случаях струя жидкости при истечении претерпевает значительные изменения. Частицы жидкости в плоскости отверстия движутся по непараллельным траекториям, что обусловливает уменьшение площади поперечного сечения струи по выходе из отверстия.

Поэтому, например, при истечении из отверстия в тонкой стенке с острыми кромками (рис. 5.2) струя жидкости испытывает сжатие и площадь ее сечения на некотором небольшом расстоянии от отверстия оказывается меньше площади отверстия. При этом в случае истечения через некруглые отверстия наблюдается также изменение формы струи (явление *инверсии струи)*, вызываемое в основном действием сил поверхностного натяжения. Так, если струя вытекает из квадратного отверстия (рис. 5.3), то в сечении *1-1* она принимает форму восьмиугольника, затем в сечении *2-2* получает крестообразную форму и т. д. В случае круглого отверстия, расположенного в дне сосуда симметрично по отношению к его стенкам, струя жидкости со всех сторон подвергается одинаковому сжатию и в сжатом сечении также имеет форму круга. Опыт показывает, что в таком случае длина участка, на котором происходит сжатие струи, равна примерно 0,5 диаметра отверстия.

Указанное явление характеризуется коэффициентом сжатия ε, представляющим собой отношение площади сжатого сечения струи $f_{сж}$ к площади сечения отверстия f.

Таким образом,

$$\varepsilon = f_{сж}/f. \tag{5.9}$$

Необходимо учесть, что ввиду непараллельности траекторий и кривизны элементарных струек жидкости для участка струи между отверстием и сжатым сечением уравнение Бернулли в его обычной форме применять нельзя. Поэтому при выводе формул для определения скорости истечения это уравнение следует составлять не для сечения в самом отверстии, как это было сделано в § 54, а для сжатого сечения, находящегося на некотором расстоянии h от отверстия, где имеет место медленно изменяющееся движение жидкости. Траектории струек можно считать здесь параллельными, а давление — постоянным по всему сечению.

Поступая таким образом, вместо формулы (5.3) для действительной скорости истечения мы получим выражение

$$v_д = \varphi \sqrt{2g(H+h)}.$$

Однако величиной h, как весьма малой по сравнению с H, обычно пренебрегают, считая, что ее влияние учитывается коэффициентом скорости.

Переходя к определению расхода жидкости с учетом сжатия струи, в уравнение (5.4) вместо теоретической скорости $v_т$ следует подставить действительную $v_д = \varphi v_т$, а вместо площади отверстия f — площадь сжатого сечения струи $f_{сж} = \varepsilon f$. При этом расход

$$Q_д = \varepsilon\varphi f v_т = \mu f v_т = \mu Q_т \tag{5.10}$$

или с учетом формулы (5.3)

$$Q_д = \mu f \sqrt{2gH}, \tag{5.11}$$

где

$$\mu = \varepsilon\varphi = Q_д/Q_т \tag{5.12}$$

есть *коэффициент расхода*; он показывает, насколько действительный расход жидкости при истечении из отверстия уменьшается по сравнению с теоретическим в идеальном случае, т. е. при истечении идеальной жидкости без сжатия струи.

Обычно коэффициенты μ и ε определяют опытным путем, а φ находят путем вычислений. Средние значения этих коэффициентов при истечении воды из донных отверстий в тонкой стенке следующие:

$$\mu = 0{,}62; \qquad \varepsilon = 0{,}64; \qquad \varphi = 0{,}97.$$

Сжатие струи оказывается различным в зависимости от расположения отверстия, из которого происходит истечение жидкости, относительно боковых стенок сосуда.

Сжатие называется *совершенным*, если отверстие находится на значительном расстоянии от стенок и последние не оказывают влияния на характер истечения *. Опытами установлено, что совершенное сжатие наблюдается лишь в тех случаях, когда расстояние от стенок до отверстия не меньше утроенной длины соответствующего размера отверстия.

Для круглого отверстия это расстояние должно быть не менее трех диаметров отверстия; для прямоугольного, показанного на рис. 5.4, условиями совершенного сжатия будут

$$m \geqslant 3a; \; n \geqslant 3b. \tag{5.13}$$

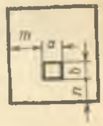


Рис. 5.4

Совершенное сжатие характеризуется наименьшими значениями коэффициентов сжатия и расхода. На основании опытов коэффициент совершенного сжатия ε для круглых и прямоугольных отверстий составляет 0,60—0,64 (меньшим отверстиям соответствуют большие значения, а бо́льшим — меньшие значения этого коэффициента). При практических расчетах для малых отверстий в тонкой стенке наиболее часто применяют значение $\varepsilon = 0{,}64$.

Если установленные выше условия не соблюдаются и отверстие находится на более близком расстоянии от боковых стенок, сжатие называют *несовершенным*. В этом случае коэффициент сжатия оказывается несколько выше, чем при совершенном сжатии. При расчетах указанное обстоятельство учитывают путем увеличения коэффициента расхода. Если стенки сосуда расположены симметрично по отношению к отверстию, могут быть использованы следующие формулы:

для круглых отверстий

$$\mu = \mu_0 (1 + l); \tag{5.14}$$

для прямоугольных отверстий

$$\mu = \mu_0 (1 + l_1). \tag{5.15}$$

* Приведенные выше значения коэффициентов истечения даны именно для этого случая.

В этих формулах μ_0 — коэффициент расхода для того же отверстия при совершенном сжатии; l, l_1 — поправочные коэффициенты, значения которых зависят от отношения площади поперечного сечения отверстия к площади сечения сосуда (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Значения коэффициентов l и l_1 при совершенном сжатии

f/F	l	l_1	f/F	l	l_1
0,1	0,014	0,019	0,6	0,189	0,208
0,2	0,034	0,042	0,7	0,260	0,278
0,3	0,059	0,071	0,8	0,351	0,365
0,4	0,092	0,107	0,9	0,471	0,473
0,5	0,134	0,152	1,0	0,631	0,608

Встречаются случаи, когда отверстие какой-либо частью своего периметра непосредственно примыкает к стенкам сосуда и сжатие на этой части периметра вообще устраняется. Такое сжатие называют *неполным*.

Из сказанного выше следует, что неполное сжатие не может быть совершенным, оно всегда несовершенное. Коэффициент расхода при неполном сжатии определяется по формулам:

для круглых отверстий

$$\mu = \mu_0 \left(1 + 0{,}152 \frac{n}{p}\right); \tag{5.16}$$

для прямоугольных отверстий

$$\mu = \mu_0 \left(1 + 0{,}128 \frac{n}{p}\right). \tag{5.16'}$$

Здесь μ_0 — коэффициент расхода для аналогичного отверстия при полном сжатии; n — часть периметра отверстия, где устранено сжатие, т. е. где отверстие соприкасается со стенкой; p — полный периметр отверстия.

§ 56. ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ ОТВЕРСТИИ В БОКОВОЙ СТЕНКЕ

Если отверстие сделано не в дне, а в боковой стенке сосуда (вертикальной или наклонной), приведенные выше формулы для скорости истечения и расхода жидкости, строго говоря, неприменимы. При истечении из подобного отверстия (рис. 5.5) напор H не будет одинаковым во всем сечении отверстия. Для точек, расположенных в нижней части сечения, он будет больше, а для точек в верхней части сечения — меньше. В то же время давление во всех точках вытекающей струи будет одним и тем же (например, при истечении в атмосферу будет равным атмосферному давлению), что не соответствует распределению давления по гидростатическому закону. Поэтому здесь уравнение Бернулли можно применить не ко всей струе в целом, как было сделано ранее, а лишь к отдельным элементарным струйкам. Для определения средней скорости истечения и расхода жидкости площадь поперечного сечения отверстия необходимо разделить на элементарные площадки и для каждой из них установить элементарный расход. Полный расход находят суммированием (интегрированием) элементарных расходов по всему сечению.

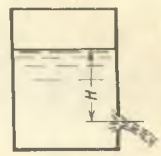


Рис. 5.5

В качестве примера рассмотрим случай истечения жидкости в атмосферу из большого прямоугольного отверстия шириной b и высотой a в тонкой стенке (рис. 5.6). Выделим в этом отверстии элементарную площадку высотой dH и шириной b.

Расход жидкости через элементарное сечение $df = bdH$ будет

$$dQ = \mu f v = \mu b \sqrt{2gH}\, dH,$$

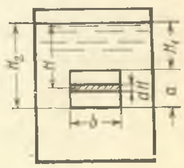


Рис. 5.6

где H — глубина погружения центра тяжести рассматриваемого элементарного сечения под свободной поверхностью жидкости. Полный расход через все отверстие определится интегрированием этого выражения:

$$Q = \int_{H_1}^{H_2} \mu b \sqrt{2gH} dH .$$

Здесь пределами интегрирования являются значения глубины погружения H_1 и H_2 верхней и нижней кромок отверстия под свободной поверхностью жидкости. Произведя интегрирование, получим выражение для расхода:

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left(H_2^{3/2} - H_1^{3/2}\right). \tag{5.17}$$

Необходимо отметить, что коэффициенты расхода для каждой элементарной струйки имеют различное значение. При интегрировании было принято $\mu = \text{const}$, т. е. введен коэффициент расхода всего отверстия, представляющий собой какое-то среднее значение коэффициентов расхода отдельных элементарных струек.

Если учесть, кроме того, влияние скорости на свободной поверхности жидкости v_0, для определения расхода будем иметь

$$Q=\int\limits_{H_1+v_0^2/2g}^{H_2+v_0^2/2g}\mu b\sqrt{2g\left(H+v_0^2/2g\right)}\,dH.$$

При этом формула расхода примет вид

$$Q=\frac{2}{3}\,\mu b\sqrt{2g}\left[\left(H_2+\frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2}-\left(H_1+\frac{v_0^2}{2g}\right)^{3/2}\right]. \tag{5.18}$$

Полученные в результате такого решения формулы для определения расхода также могут быть приведены к виду (5.11).

На самом деле, подставив в формулу (5.17) вместо H_2 и H_1 их значения $H_2=H_c+a/2$ и $H_1=H_c-a/2$, где H_c — глубина погружения центра тяжести отверстия под свободной поверхностью, получим

$$Q=\frac{2}{3}\,\mu b\sqrt{2g}\left[(H_c+a/2)^{3/2}-(H_c-a/2)^{3/2}\right].$$

Разложим далее выражения в квадратных скобках по формуле бинома Ньютона, ограничиваясь первыми четырьмя членами разложения

$$\left(H_c+\frac{a}{2}\right)^{3/2}=H_c^{3/2}+\frac{3}{2}\,H_c^{1/2}\,\frac{a}{2}+\frac{3}{8}\,H_c^{-1/2}\,\frac{a^2}{4}-\frac{3}{48}\,H_c^{-3/2}\,\frac{a^3}{8};$$

$$\left(H_c-\frac{a}{2}\right)^{3/2}=H_c^{3/2}-\frac{3}{2}\,H_c^{1/2}\,\frac{a}{2}+\frac{3}{8}\,H_c^{-1/2}\,\frac{a^2}{4}+\frac{3}{48}\,H_c^{-3/2}\,\frac{a^3}{8}.$$

Тогда выражение, заключенное в квадратные скобки, будет

$$\left[\left(H_c+\frac{a}{2}\right)^{3/2}-\left(H_c-\frac{a}{2}\right)^{3/2}\right]=\frac{3}{2}\,H_c^{1/2}a\left(1-\frac{1}{96}\,\frac{a^2}{H_c^2}\right).$$

Второй член в скобке обычно мал по сравнению с единицей. Пренебрегая им, можно с достаточной степенью точности принять:

$$\left[\left(H_c+\frac{a}{2}\right)^{3/2}-\left(H_c-\frac{a}{2}\right)^{3/2}\right]=\frac{3}{2}\,H_c^{1/2}a$$

и, следовательно,

$$Q=\frac{2}{3}\,\mu ba\,\frac{3}{2}\sqrt{2g}\,H_c^{1/2}$$

или

$$Q=\mu F\sqrt{2gH_c}, \tag{5.19}$$

где F — площадь сечения отверстия.

Таким образом, формула для определения расхода жидкости при истечении из отверстия в боковой стенке получает тот же вид, что и для донного отверстия. Допущенные при выводе этой формулы неточности исправляются уточнением коэффициента расхода μ.

Как показывают опыты, этот коэффициент непостоянен: он существенным образом изменяется в зависимости от формы, размеров отверстия и от напора. При этом необходимо иметь в виду, что с увеличением размеров отверстия уменьшается коэффициент расхода и с увеличением напора уменьшается влияние размеров отверстия на коэффициент расхода.

Если сжатие струи несовершенное или неполное, коэффициент расхода определяется с поправками по формулам, рассмотренным в § 55.

Отметим, что Н. Е. Жуковский теоретическим путем получил следующее уравнение для определения коэффициента сжатия при несовершенном сжатии:

$$\varepsilon=\frac{\pi}{(\pi+2)\,(2\theta/\operatorname{tg}2\theta)}, \tag{5.20}$$

где θ — угол, определяемый из выражения

$$\frac{a}{H}=\operatorname{tg}\theta\left(1+\frac{2}{\pi}\,\frac{2\theta}{\operatorname{tg}2\theta}\right);$$

здесь H — глубина погружения нижней кромки отверстия; a — высота отверстия.

В частном случае совершенного сжатия из уравнения (5.20) легко получить простую формулу

$$\varepsilon=\pi/(\pi+2)\approx 0{,}611,$$

весьма хорошо согласующуюся с опытными данными.

§ 57. ИСТЕЧЕНИЕ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ НАПОРЕ

Задача об истечении жидкости при переменном напоре обычно сводится к определению времени опорожнения или наполнения всего или некоторой части сосуда в зависимости от начального наполнения, формы и размеров сосуда и отверстия. Подобные задачи встречаются при расчетах наполнения и опорожнения резервуаров, цистерн, водохранилищ, бассейнов, шлюзовых камер и др.

Необходимо иметь в виду, что в отличие от рассмотренных ранее задач во всех указанных случаях вследствие непрерывного изменения напора и, следовательно, непрерывного изменения скоростей и давлений всегда имеет место неустановившееся движение жидкости, что делает неприемлемым обычное уравнение Бернулли. Поэтому при решении таких задач полное время истечения разделяют на бесконечно малые промежутки, в течение каждого из которых напор считают постоянным, а движение жидкости — независимым от времени, т. е. установившимся. Это позволяет использовать для решения полученные выше зависимости и приводит к достаточно точным результатам.

Рассмотрим простейший пример истечения жидкости в атмосферу через донное отверстие площадью f из открытого вертикального цилиндрического сосуда одинакового по всей высоте поперечного сечения F (рис. 5.7).

Элементарный объем жидкости dQ, прошедшей через отверстие за бесконечно малый промежуток времени dt, будет составлять

$$dQ = \mu f v dt = \mu f \sqrt{2gH}\, dt,$$

где H — глубина жидкости в сосуде для некоторого положения ее уровня, который приближенно можно полагать постоянным; μ — коэффициент расхода (изменяющийся в зависимости от напора, формы и размеров отверстия).

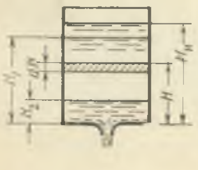


Рис. 5.7

В действительности, однако, за это время уровень жидкости в сосуде опустится на dH и объем жидкости в нем изменится на $dV = -FdH$.

Вследствие неразрывности движения $dQ = -FdH$* или

$$\mu f \sqrt{2gH}\, dt = -FdH,$$

откуда

$$dt = -FdH/\mu f \sqrt{2gH}. \tag{5.21}$$

Полное время опорожнения сосуда определяется в результате интегрирования последнего уравнения

$$\int_0^t dt = -\int_{H_н}^{0} \frac{FdH}{\mu f \sqrt{2gH}},$$

где $H_н$ — глубина жидкости в сосуде до начала истечения. Меняя пределы интегрирования в правой части уравнения, принимая $\mu = \text{const}$ и вынося постоянные за знак интеграла, будем иметь:

$$t = \frac{F}{\mu f \sqrt{2g}} \int_0^{H_н} \frac{dH}{H^{1/2}},$$

* Знак «минус» здесь взят потому, что с течением времени H уменьшается и, следовательно, dH будет отрицательно.

что после интегрирования приведет к следующему окончательному выражению:

$$t = 2F\sqrt{H_н}/\mu f \sqrt{2g}. \tag{5.22}$$

Попутно отметим, что при сохранении постоянного уровня в сосуде тот же объем жидкости пройдет через отверстие за время t', вдвое меньшее t. На самом деле, поскольку полный объем жидкости в сосуде $V = FH_н$, а секундный расход при $H_н = \text{const}$ $Q = \mu f \sqrt{2gH_н}$, то, очевидно,

$$t' = (V/Q)\,(F\sqrt{H_н}/\mu f \sqrt{2g}), \tag{5.23}$$

и, следовательно, $t = 2t'$.

Формула (5.22) применима также к случаю истечения из отверстия в боковой стенке сосуда. В этом случае напор $H_н$ отсчитывается от центра тяжести отверстия.

Если нужно определить время, необходимое для понижения уровня жидкости в сосуде на некоторую величину от H_1 до H_2, исходят из того же уравнения (5.21), интегрируя его в пределах от H_1 до H_2. При этом

$$t = 2F(\sqrt{H_1} - \sqrt{H_2})/\mu f \sqrt{2g}, \tag{5.24}$$

Рис. 5.8

В общем случае, когда поперечное сечение сосуда изменяется по высоте (рис. 5.8), выведенные выше формулы неприменимы, так как в исходном уравнении (5.21) F не постоянная, а переменная величина. Тогда надо знать закон $F = \varphi(H)$ изменения площади поперечного сечения сосуда в зависимости от величины H. Уравнение (5.21) при этом приводится к виду

$$dt = -\varphi(H)\, dH/\mu f \sqrt{2gH}. \tag{5.25}$$

В простейших случаях для сосудов геометрически правильной формы (шар, горизонтальный цилиндр) интегрирование уравнения (5.25) выполняется без особых затруднений. Если сосуд имеет неправильную форму, интегрирование производится численными или графическими методами.

В качестве примера определим время опорожнения железнодорожной цистерны, имеющей сливное отверстие A сечением f. Приняв указанное на рис. 5.9 расположение координатных осей, получим:

$$dt = -Fdz/\mu f \sqrt{2g\, z}. \tag{5.25'}$$

Площадь поперечного сечения сосуда F представляет собой горизонтальную площадь свободной поверхности жидкости, находящейся в цистерне, соответствующую некоторому уровню z:

$$F=2Lx,$$

где L — длина цистерны, ее мы будем полагать постоянной; x — переменная, зависящая от ординаты z уровня жидкости в цистерне.

Установим эту зависимость.

Вертикальное поперечное сечение цистерны представляет собой окружность. Ее уравнение, отнесенное к началу координат, будет $x^2+(z-r)^2=r^2$; отсюда $x=\sqrt{2rz-z^2}$ и, следовательно,

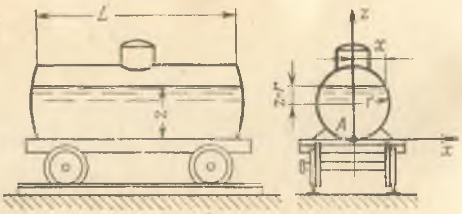


Рис. 5.9

$$F=2L\sqrt{2rz-z^2}.$$

Подставив полученное значение F в уравнение (5.25′) и проинтегрировав, найдем:

$$t=-\int\limits_{2r}^{0}\frac{2L}{\mu f\sqrt{2g}}\cdot\frac{\sqrt{2rz-z^2}\,dz}{\sqrt{z}}.$$

Вынесем далее постоянные за знак интеграла, переменим пределы:

$$t=\frac{2L}{\mu f\sqrt{2g}}\int\limits_{0}^{2r}\frac{\sqrt{(2r-z)z}\,dz}{\sqrt{z}}$$

и, сделав подстановку $2r-z=y$; $-dz=dy$, после ряда несложных преобразований в результате интегрирования получим окончательное выражение для определения времени опорожнения:

$$t=\frac{8}{3}\,\frac{Lr^2}{\mu f\sqrt{r}\sqrt{g}}.$$

§ 58. ИСТЕЧЕНИЕ ИЗ ЗАТОПЛЕННОГО ОТВЕРСТИЯ

На практике иногда сталкиваются с истечением жидкости не только в газообразную среду, как это рассматривалось выше, но и в жидкость, уровень которой расположен выше отверстия (при этом оно может быть как в дне, так и в боковой стенке сосуда). Такой случай носит название *истечение жидкости под уровень*, или из *затопленного отверстия*, и встречается, например, при спуске воды через щитовые окна и придонные отверстия в воротах шлюзов.

Предположим (рис. 5.10), имеется открытый сосуд, разделенный перегородкой на два отделения A и B, причем уровни жидкости в этих отделениях разные. Пусть в перегородке сделано отверстие C, через которое жидкость из отделения A с более высоким уровнем перетекает в отделение B с низким уровнем.

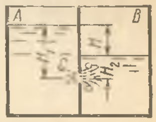


Рис. 5.10

Примем, что оба уровня неизменны во времени и площадь сечения отверстия f мала по сравнению с площадью сечения самого сосуда. Тогда для определения скорости истечения можно воспользоваться установленными ранее зависимостями. Причем ввиду того, что в данном случае истечение происходит в среду с давлением, отличным от атмосферного на свободной поверхности, для определения теоретической скорости истечения следует применить формулу (5.2).

$$v_т=\sqrt{2g\,(H_1+p_1/\rho g-p_2/\rho g)},$$

где H_1 — глубина погружения центра тяжести отверстия под свободной поверхностью жидкости в той части сосуда, из которой происходит истечение; p_1 — давление на свободной поверхности жидкости, равное здесь атмосферному; p_2 — давление в центре тяжести отверстия со стороны жидкости, в которую происходит истечение; ρ — плотность жидкости.

Так как по условию задачи (сосуд открыт) $p_1=p_{атм}$, а по основному уравнению гидростатики $p_2=p_{атм}+\rho gH_2$ (здесь H_2 — глубина погружения центра тяжести отверстия под свободной поверхностью жидкости в той части сосуда, куда происходит истечение), то исходная формула принимает вид

$$v_т=\sqrt{2g\,(H_1-H_2)}=\sqrt{2g\Delta H}, \tag{5.26}$$

где $\Delta H=H_1-H_2$.

Таким образом, при истечении жидкости из затопленного отверстия скорость истечения не зависит от глубины погружения отверстия под свободной поверхностью, а определяется разностью двух уровней жидкости.

Действительный расход жидкости при этом

$$Q_д = \mu f \sqrt{2g\Delta H}. \tag{5.27}$$

Опыты показывают, что коэффициент расхода при истечении из затопленного отверстия получается несколько меньшим, чем при истечении в атмосферу. Но разница настолько незначительна, что при расчетах ею обычно пренебрегают и принимают те же значения коэффициента расхода, что и для незатопленных отверстий.

Если истечение жидкости из затопленного отверстия происходит при переменном уровне, время, необходимое для полного выравнивания уровней, может быть определено методами, аналогичными рассмотренным выше. При неизменяющихся по высоте поперечных сечениях сосудов это время

$$t = \frac{2F_1F_2\sqrt{\Delta H}}{(F_1 + F_2)\,\mu f\sqrt{2g}}, \tag{5.28}$$

где F_1, F_2 — площади поперечных сечений сосудов; $\Delta H = H_1 - H_2$ — разность уровней жидкости в них в начальный момент времени.

Время, необходимое для изменения разности уровней от ΔH до $\Delta H'$, определяется по уравнению

$$t = \frac{2F_1F_2(\sqrt{\Delta H} - \sqrt{\Delta H'})}{(F_1 + F_2)\,\mu f\sqrt{2g}}. \tag{5.29}$$

В частном случае, когда F_1 — величина весьма большая (например, наполнение сосуда происходит из большого водоема),

$$t = \frac{2F_2(\sqrt{\Delta H} - \sqrt{\Delta H'})}{\mu f\sqrt{2g}}. \tag{5.30}$$

§ 59. ИСТЕЧЕНИЕ ЧЕРЕЗ НАСАДКИ

Выше были рассмотрены случаи истечения жидкости из отверстий в тонкой стенке (стенка считается тонкой, если ее толщина $\delta < 0{,}2\,d$, где d — диаметр отверстия).

При значительной толщине стенки характер явлений, наблюдаемых при истечении, существенно меняется вследствие влияния, оказываемого на струю толстой стенкой. Те же явления будут наблюдаться и при истечении из отверстия в тонкой стенке, снабженной короткой трубкой такого же диаметра, что и отверстие, и имеющей длину, равную толщине стенки в первом случае. Такие трубки называют насадками, они имеют весьма широкое применение.

Наиболее распространенными типами насадков являются:

1) цилиндрические — внешний (рис. 5.11, *а*) и внутренний (рис. 5.11, *б*);

2) конические — сходящийся (рис. 5.11, *в*) и расходящийся (рис. 5.11, *г*);

3) коноидальные криволинейного очертания, имеющие форму сжатой струи (рис. 5.11, *д*).

Рассмотрим истечение жидкости через внешний **цилиндрический насадок** (рис. 5.12), представляющий собой

Рис. 5.11

короткую ($l = (3 \div 4)\,d$) цилиндрическую трубку, приставленную к отверстию в стенке сосуда. Струя жидкости после выхода из сосуда и входа в такой насадок подвергается некоторому сжатию ($d_{сж} \approx 0{,}8\ d$), затем постепенно расширяется и заполняет все поперечное сечение насадка. Сжатие струи происходит только внутри насадка (внутреннее сжатие), выходное же сечение насадка работает полностью, поэтому коэффициент сжатия, отнесенный к выходному сечению, $\varepsilon = 1$.

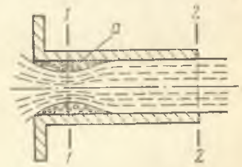


Рис. 5.12

Многочисленными опытами, проведенными над истечением жидкости через внешний цилиндрический насадок, установлено значение коэффициента расхода $\mu = 0{,}82$*. Сопоставляя это значение со значением коэффициента расхода при истечении из отверстия в тонкой стенке, получаем:

$$\mu_{нас}/\mu_{отв} = 0{,}82/0{,}62 \approx 4/3.$$

Следовательно, расход жидкости при истечении через насадок будет примерно в 4/3 раза больше, чем при истечении из отверстия в тонкой стенке. А так как в этом случае $\varepsilon = 1$, то коэффициент скорости $\varphi = \mu = 0{,}82$, т. е. оказывается значительно меньше, чем при истечении из отверстия. Таким образом,

* В действительности этот коэффициент зависит от отношения l/d.

внешний цилиндрический насадок, увеличивая расход жидкости, значительно снижает скорость истечения. Объясняется это тем, что в месте сжатого сечения струи образуется кольцевая вихревая область a (см. рис. 5.12), заполненная жидкостью, находящейся в вихреобразном, круговоротном движении. Наличие вихревой области в сочетании с явлениями сжатия и последующего расширения струи является основной причиной увеличения потерь напора и, следовательно, уменьшения скорости истечения.

Если истечение происходит в атмосферу, то вследствие сжатия струи в начале насадка давление в вихревой области оказывается меньше атмосферного и в ней создается разрежение (вакуум), способствующее выделению из жидкости растворенного в ней воздуха. Этот воздух затем захватывается протекающей по насадку жидкостью и увлекается ею, понижая прозрачность струи.

В том, что в вихревой области образуется вакуум, легко убедиться, применяя уравнение Бернулли для двух сечений: сжатого *1-1* и выходного *2-2* в конце насадка. Имеем $p_1/\rho g + v_1^2/2g = p_2/\rho g + v_2^2/2g + \sum h_{1\text{-}2}$, где индексы 1 относятся к первому, а 2 — ко второму сечению.

Поскольку в рассматриваемом случае из-за незначительной длины насадка потери на трение по длине между сечениями будут ничтожно малы, их можно не учитывать и определять потери напора только как местные на внезапное расширение струи. Для этого воспользуемся формулой (4.98) $\varepsilon h_{\text{м. п}} = (F_2/F_1 - 1)^2 v_2^2/2g$, из которой, имея в виду, что $F_2/F_1 = 1/\varepsilon'$, где ε' — коэффициент внутреннего сжатия (для цилиндрического насадка его можно принять равным 0,64), получаем

$$h_{\text{м. п}} = (1/\varepsilon' - 1)^2 v_2^2/2g = 0{,}31 v_2^2/2g.$$

Далее по уравнению постоянства расхода $F_1 v_1 = F_2 v_2$ находим

$$v_1 = v_2 F_2/F_1 = v_2/\varepsilon' = v_2/0{,}64.$$

Таким образом, получаем

$$p_1/\rho g = p_2/\rho g + v_2^2/2g\,(1 + 0{,}31 - 1/0{,}64^2) = p_2/\rho g - 1{,}12 v_2^2/2g.$$

При истечении в атмосферу $p_2 = p_{\text{атм}}$, а p_1, как это видно из последнего уравнения, всегда меньше p_2.

Следовательно, во внешнем цилиндрическом насадке действительно имеется вакуум, значение которого определяется уравнением

$$p_{\text{вак}}/\rho g = p_{\text{атм}}/\rho g - p_1/\rho g = 1{,}12 v_2^2/2g.$$

Но скорость истечения $v_2 = \varphi\sqrt{2gH}$, поэтому

$$p_{\text{вак}}/\rho g = 1{,}12\varphi^2 H.$$

Подставляя сюда вместо φ его значение, равное 0,82, находим окончательное выражение для определения вакуума:

$$p_{\text{вак}}/\rho g \approx 0{,}75H.$$

Из этого равенства видно, что в конечном счете вакуум зависит от напора над центром тяжести поперечного сечения насадка.

В частном случае при истечении воды предельное значение вакуума

$$p_{\text{вак}}/\rho g = 10{,}33 \text{ м вод. ст.},$$

что соответствует наибольшему возможному напору $H \approx 13{,}7$ м.

При больших напорах в насадке возможен разрыв струи и насадок перестает работать полным сечением.

Рассмотренное явление может быть проиллюстрировано весьма простым опытом.

К насадку в месте предполагаемого наибольшего сжатия струи присоединяют изогнутую стеклянную трубку, опущенную другим концом в открытый сосуд с жидкостью (рис. 5.13). Наблюдая за трубкой, можно увидеть, как по ней в насадок непрерывно засасывается жидкость, что возможно только при наличии разности давлений, т. е. вакуума в насадке. Наличием вакуума в насадке можно объяснить также непонятное на первый взгляд увеличение расхода при истечении через насадок по сравнению с истечением из отверстия в тонкой стенке. Благодаря вакууму насадок работает как насос, дополнительно подсасывая жидкость. Поэтому, несмотря на увеличение потерь напора, расход жидкости возрастает.

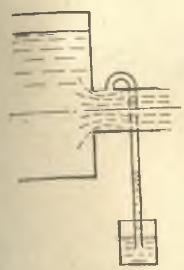


Рис. 5.13

Рис. 5.14

Внутренний цилиндрический насадок (рис. 5.14) выполняется в виде трубки, приставленной к отверстию сосуда изнутри.

В таком насадке по сравнению с внешним ухудшены условия для входа жидкости, вследствие чего увеличивается степень сжатия струи внутри насадка и, следовательно, уменьшается коэффициент сжатия и возрастают потери напора на вихреобразование.

Режим истечения через внутренний насадок определяется напором и отношением длины насадка l к диаметру отверстия d. При длине насадка $l>2{,}5\,d$ жидкость заполняет все его выходное сечение; коэффициент сжатия в этом сечении $\varepsilon=1$, коэффициент скорости $\varphi=0{,}71$. При $l\leqslant 1{,}5\,d$ насадок работает неполным сечением и жидкость вытекает из отверстия, не касаясь стенок насадка, что приводит к значительному уменьшению расхода ($\mu=0{,}5$).

В коническом сходящемся насадке (рис. 5.15) кроме явления внутреннего сжатия струи, которое здесь сказывается меньше, чем в цилиндрическом насадке, при выходе жидкости из насадка происходит второе (внешнее) сжатие, после чего она течет параллельными струйками. Благодаря незначи-

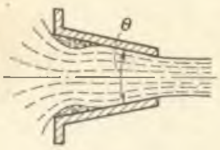


Рис. 5.15

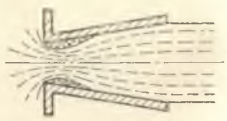


Рис. 5.16

тельности внутреннего сжатия потери напора в этом насадке оказываются меньшими, чем в цилиндрическом, коэффициент φ — бо́льшим, а ε вследствие дополнительного сжатия в выходном сечении — меньшим.

Все коэффициенты истечения (ε, φ, μ) для конических насадков зависят от угла конусности θ. Опыт показывает, что в коническом сходящемся насадке коэффициент скорости φ возрастает с увеличением θ, а коэффициент расхода сначала увеличивается, достигая наибольшего значения $\mu=0{,}946$ при $\theta=13°$, затем начинает убывать.

Следует иметь в виду, что при рассмотрении истечения жидкости через насадки все коэффициенты относятся к их выходному сечению. Если коэффициент расхода отнести к сечению отверстия в стенке, то вследствие конусности самого насадка он окажется значительно меньше, поэтому конические сходящиеся насадки по сравнению с цилиндрическими при больших выходных скоростях характеризуются меньшими расходами жидкости.

В конических расходящихся насадках (рис. 5.16) струя жидкости при входе в насадок испытывает значительное сжатие, затем быстро расширяется и заполняет все сечение. Внешнего сжатия при выходе из насадка здесь нет, и, следовательно, коэффициент сжатия $\varepsilon=1$. Однако при угле конусности $\theta>8°$ этот насадок перестает работать полным сечением. Струя вытекает, не касаясь стенок, и истечение происхо-

дит так же, как из отверстия в тонкой стенке. Коэффициенты истечения в расходящихся насадках, как и в сходящихся, зависят от угла конусности. В среднем (при $\theta<8°$) $\varphi=\mu=0{,}45$.

Таким образом, в конических расходящихся насадках скорость в выходном сечении оказывается значительно меньшей, чем во всех рассмотренных выше случаях. Причина этого — большие потери напора при резком сжатии и расширении струи в самом насадке. Расход же жидкости здесь увеличивается. На первый взгляд ввиду незначительности коэффициента расхода это может показаться несколько странным. Но необходимо учесть, что этот коэффициент относится к большому выходному сечению насадка. Если его отнести к малому выходному сечению, т. е. к сечению отверстия в стенке, он окажется много больше и достигнет значения 2—3.

В конических расходящихся насадках в месте сжатия струи создается значительный вакуум, поэтому они обладают свойством всасывания даже в большей степени, чем цилиндрические.

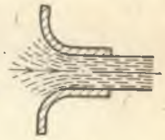


Рис. 5.17

Коноидальные насадки (рис. 5.17) имеют форму, близкую к форме струи жидкости, которая вытекает из отверстия в тонкой стенке. Естественно, что в этих насадках внутреннее сжатие оказывается наименьшим, внешнее сжатие отсутствует ($\varepsilon=1$) и коэффициенты скорости и расхода больше, чем во всех рассмотренных случаях. Опыты показывают, что среднее значение $\varphi=\mu=0{,}97$, а при особой тщательности выполнения и гладких стенках — до 0,995.

Несмотря на то что коноидальные насадки дают наибольшие выходные скорости и расходы, их сравнительно редко применяют, главным образом из-за сложности изготовления.

В табл. 5.2 приведены данные о средних значениях коэффициентов истечения воды.

Таблица 5.2

Средние значения коэффициентов истечения воды для различных случаев

Тип отверстия и насадка	ε	φ	μ
Отверстие в тонкой стенке	0,64	0,97	0,62
Цилиндрический насадок внешний	1,00	0,82	0,82
То же, внутренний	1,00	0,71	0,71
Конический насадок сходящийся ($\theta=13°$)	0,98	0,96	0,94
То же, расходящийся ($\theta=8°$)	1,00	0,45	0,45
Коноидальный насадок	1,00	0,97	0,97

Примерами цилиндрических насадков служат трубы для выпуска жидкости из резервуаров и водоемов, а также всевозможные краны. Конические сходящиеся насадки (ими часто заменяют насадки коноидальные) применяют для получения больших выходных скоростей, увеличения силы и дальности полета струи жидкости в пожарных брандспойтах, в форсунках для подачи топлива, гидромониторах для размыва грунта, фонтанных соплах, соплах активных гидравлических турбин. Конические расходящиеся насадки используют для замедления течения жидкости и соответственно для повышения давления — во всасывающих трубах гидравлических турбин, трубах под насыпями, для замедления подачи смазочных масел и др. Весьма широко применяются насадки в разнообразных приборах и устройствах для подъема жидкости (эжектор и инжектор), разбрызгивания и распыления ее (в брызгальных градирнях и бассейнах), а также в химической технологии.

§ 60. ВЛИЯНИЕ ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА НА ИСТЕЧЕНИЕ

В предыдущих параграфах значения коэффициентов истечения — расхода μ, сжатия струи ε и скорости φ — установлены для случаев истечения из отверстий и через насадки воды, т. е. жидкости относительно небольшой вязкости. Вместе с тем на практике (особенно в нефтяном деле) приходится иметь дело с истечением из отверстий других жидкостей, физические свойства которых отличаются от физических свойств воды, и часто жидкостей с повышенной вязкостью. Как показывают исследования, вязкость оказывает значительное влияние на коэффициенты истечения и их значения существенно зависят от числа Рейнольдса. Характер изменения коэффициентов истечения виден при рассмотрении кривых (рис. 5.18), полученных А. Д. Альтшулем для истечения жидкости из круглого отверстия с острыми кромками. Им же предложены следующие эмпирические формулы для определения коэффициента расхода:

при $Re_0<25$ $\mu=Re_0/48$;

при $25<Re_0<300$ $\mu=Re_0/(1{,}5+1{,}4\,Re_0)$;

при $300<Re_0<10\,000$ $\mu=0{,}592+0{,}27/Re_0^{1/6}$;

при $Re_0>10\,000$ $\mu=0{,}592+5{,}5/\sqrt{Re_0}$.

При $Re_0>300\,000$ (область, наиболее характерная для истечения из отверстий воды) μ практически становится постоянным.

В приведенных формулах Re_0 — число Рейнольдса для отверстия, определяемое выражением $Re_0=\sqrt{2gH}\,d/\nu$, где H — напор над центром тяжести отверстия.

Формулы действительны для истечения из отверстий при

Fr (число Фруда) $= v^2/gL = 2H/d > 10$;

We (число Вебера) $= \rho v^2 L/\sigma = (2Hd\gamma/\sigma) > 200$,

т. е. тогда, когда влияние сил тяжести и поверхностного натяжения проявляется в незначительной степени, что обычно имеет место на практике *. Установлено также, что коэффициент истечения зависит от Re при истечении воды и других маловязких жидкостей из отверстий малого диаметра.

Изменение коэффициента расхода μ от числа Рейнольдса необходимо учитывать и при определении времени опорожнения сосудов. При малых значениях $Re_0(<10)$ время опорожнения

$$t=29F\nu\lg(H_1/H_2)/gfd,$$

что хорошо подтверждается опытными данными.

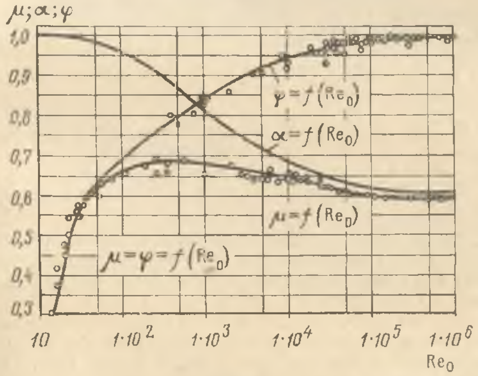


Рис. 5.18

Исследованию влияния вязкости на истечение через насадки посвящен ряд работ. По данным З. И. Геллера и Ю. А. Скобельцына, для внешнего цилиндрического насадка коэффициент расхода μ непрерывно возрастает с увеличением числа Рейнольдса насадка ($Re_н$). Причем при больших значениях $Re_н$ (в связи с уменьшением сил вязкости) темп его роста замедляется и при $Re_н=10\,000\div100\,000$ μ становится постоянным. Для определения значений μ при $Re_н=100\div100\,000$ (при $l/d=2\div5$) ими предложена следующая эмпирическая формула:

$$\mu=[1{,}23+58l/Re_н d]^{-1},$$

* О числах Фруда и Вебера см. § 84.

откуда при $\mathrm{Re}_н \to \infty$ получается максимальное значение $\mu = 0{,}813$, достаточно близкое к указанному ранее $\mu = 0{,}82$.

Приведем (рис. 5.19) кривые зависимости $\mu = f(\mathrm{Re})_н$ для истечения из отверстия в тонкой стенке (кривая *1*) и из цилиндрического насадка при $l/d = 3$ (кривая *2*). Последняя построена по данным тех же авторов.

Как видно, при $\mathrm{Re}_н < 1000$ применение насадка не только не увеличивает коэффициент расхода, но даже уменьшает его по сравнению с истечением из отверстия.

Конические сходящиеся насадки исследовались А. Ш. Асатуряном, В. П. Свиридовым, Н. Г. Болдовым. Они установили, что влияние угла конусности на коэффициент расхода μ начинает ощутимо проявляться лишь при $\mathrm{Re}_н > 3000$, причем максимальное значение μ соответствует $\alpha = 14°$.

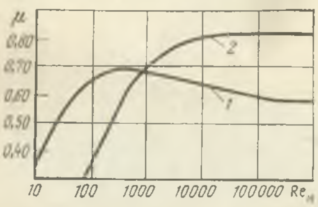


Рис. 5.19

§ 61. ДАВЛЕНИЕ СТРУИ ЖИДКОСТИ

Если струя жидкости (например, вытекающей из отверстия или через насадок) встречает на своем пути твердую преграду, она оказывает на нее давление, силу которого обычно называют силой воздействия струи на преграду или силой удара струи. Значение этой силы зависит от средней скорости и размеров поперечного сечения струи жидкости, формы и размеров преграды и ее расположения по отношению к струе.

Указанное явление наблюдается на практике довольно часто, например при ударе струи жидкости о лопатки активных гидравлических турбин и водяных колес, ударе струи, вытекающей из брандспойта, ударе волны о стенку набережной, в процессе бурения нефтяных скважин и др. Определение силы давления струи весьма важная практическая задача.

Рассмотрим общий случай удара струи жидкости о симметричную по отношению к струе неподвижную преграду, имеющую вид цилиндрической криволинейной поверхности (рис. 5.20).

После удара струя растекается в противоположные стороны под углами α к оси x, причем вследствие симметрии скорости и расходы в обоих направлениях можно считать одинаковыми. Выделим в струе некоторый объем жидкости, ограниченный сечениями *1-1*, *2-2* и *3-3*. Пусть через весьма малый промежуток времени этот объем переместится в некоторое новое положение с граничными сечениями *1'-1'*, *2'-2'* и *3'-3'*.

Для определения силы давления воспользуемся известной теоремой теоретической механики о проекции количества движения, в соответствии с которой изменение за время Δt проекции количества движения движущегося тела на ось s равно сумме проекций импульсов действующих на него сил P_i за тот же промежуток времени:

$$\Delta (mv)_s = \sum (P_i \Delta t)_s.$$

Поскольку количество движения средней части рассматриваемых объемов жидкости, ограниченной сечениями *1'-1'*, *2-2*, *3-3*, при установившемся движении остается неизменным, его искомое изменение можно найти как разность количеств движений объемов, ограниченных сечениями *2-2* и *2'-2'*, *3-3* и *3'-3'*, и объема *1-1*, *1'-1'*. Обозначим массы жидкости в этих объемах m_1, m_2, m_3, средние скорости в сечениях *1-1*, *2-2* и *3-3* соответственно v_1, v_2, v_3 и примем за ось проекций горизонтальную ось x, совпадающую с осью симметрии.

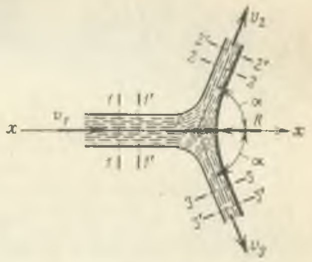


Рис. 5.20

Для нахождения проекции изменения количества движения на эту ось достаточно спроектировать на нее векторы количеств движения объемов, ограниченных сечениями *1-1* и *1'-1'*, *2-2* и *2'-2'*, *3-3* и *3'-3'*. Получим

$$\Delta (mv)_x = m_2 v_2 \cos\alpha + m_3 v_3 \cos\alpha - m_1 v_1.$$

Ввиду того, что в рассматриваемом случае $m_2 = m_3$ и $v_2 = v_3$, полученное выражение можно переписать следующим образом:

$$\Delta (mv)_x = 2 m_2 v_2 \cos\alpha - m_1 v_1.$$

Перейдем теперь к определению суммы проекций импульсов сил, действующих на струю за тот же промежуток времени. В выражение для этой суммы войдет проекция импульса только одной силы — силы реакции поверхности* R. Она равна искомой силе давления P струи на поверхность и как реактивная сила направлена в обратную сторону, т. е. по горизонтали справа налево. Импульс указанной силы проектируется на ось x в натуральную величину со знаком минус. Поэтому $\sum (P_i \Delta t)_x = -R\Delta t$ и, следовательно,

$$2 m_2 v_2 \cos\alpha - m_1 v_1 = -R\Delta t.$$

---

* Остальные силы либо взаимно уравновешиваются и не дают составляющей на ось проектирования (силы гидродинамического давления, атмосферное давление), либо настолько малы по сравнению с кинетической энергией струи, что ими можно пренебречь (силы тяжести).

Имея в виду постоянство расхода жидкости и пренебрегая гидравлическими сопротивлениями, что в данном случае вполне допустимо, можно принять $m_1=2m_2$ и $v_1=v_2$. Тогда вместо полученного выше уравнения имеем

$$R\Delta t = m_1 v_1 (1-\cos\alpha).$$

Выразим далее массу жидкости через расход $m_1=\rho Q\Delta t$. При этом $R\Delta t=\rho Q v_1 (1-\cos\alpha)\Delta t$ и $R=\rho Q v_1(1-\cos\alpha)$.

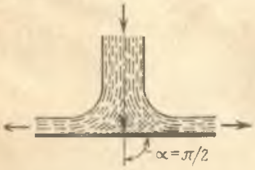


Рис. 5.21

Отсюда, вследствие того, что $Q=v_1 f_1$, где f_1 — площадь сечения струи, окончательно получаем общее выражение для определения силы реакции поверхности или равной ей и противоположно направленной силы давления струи жидкости

$$P=\rho v_1^2 f_1 (1-\cos\alpha). \qquad (5.31)$$

Если преградой является пластинка, расположенная нормально к оси струи (рис. 5.21), то $\alpha=90°$, $\cos\alpha=0$ и сила давления струи

$$P=\rho v_1^2 f_1. \qquad (5.32)$$

В случае, когда преграда расположена в непосредственной близости к отверстию, в формулу (5.31) удобно подставить вы-

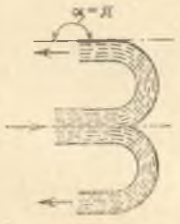


Рис. 5.22

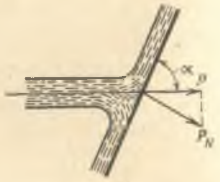


Рис. 5.23

ражение для скорости истечения $v_1=\varphi\sqrt{2gH}$, где φ — коэффициент скорости, который в ряде случаев приближенно можно принять равным единице. Тогда для силы давления получаем

$$P=2\rho g f_1 H. \qquad (5.33)$$

Отсюда видно, что сила давления струи жидкости сечением f_1, вытекающей из отверстия под напором H на расположенную нормально к ней пластинку, оказывается в 2 раза больше гидро-

статического давления жидкости $\rho g f_1 H$ на ту же площадь f_1 при той же глубине ее погружения H под свободной поверхностью.

Если преграда (рис. 5.22) представляет собой криволинейную поверхность, отклоняющую набегающую струю жидкости на 180° (такую форму имеют лопатки активных гидравлических турбин), то сила давления струи

$$P=2\rho v_1^2 f_1 \qquad (5.34)$$

превышает гидростатическое давление в 4 раза.

Рассмотрим также препятствие в виде пластинки, установленной под углом α к оси струи (рис. 5.23). В этом случае, обычно называемом косым ударом, сила давления струи на пластинку в направлении действия струи

$$P=\rho v_1^2 f_1 \sin^2\alpha. \qquad (5.35)$$

Нормальное же давление

$$P_N=\rho v_1^2 f_1 \sin\alpha. \qquad (5.36)$$

§ 62. ГИДРОМОНИТОРНЫЕ ДОЛОТА

Явление ударного воздействия струи жидкости на преграду используется в нефтяном деле при бурении нефтяных и газовых скважин. Как указывалось выше, промывочная жидкость, поступающая в скважину по колонне бурильных труб, выходит на забое из промывочных отверстий долота. Поскольку размеры этих отверстий весьма малы, струи вытекающей жидкости приобретают здесь значительную скорость, смывают с поверхности забоя обломки разбуренной породы, а при бурении в мягких породах и породах средней крепости могут также разрушать их.

Эффективность динамического воздействия струи на породу может быть значительно повышена, если снабдить промывочные отверстия насадками. Применение наиболее совершенных с гидравлической точки зрения насадков с закругленными входными кромками, конических сходящихся, коноидальных позволяет получать весьма высокие значения коэффициента расхода $\mu=0{,}94$—$0{,}95$ (в отдельных случаях до 0,98), хорошую компактную струю и, как следствие этого, существенно увеличивает силу ее ударного воздействия. Так как в подобных долотах используется гидромониторный эффект (разрушение породы струей жидкости), их обычно называют гидромониторными.

При истечении жидкости из насадков гидромониторных долот наблюдаются следующие явления. Струя жидкости вытекает из насадка параллельными струйками и с большой скоростью входит в массу промывочной жидкости, находящейся на забое и заполняющей все межтрубное пространство. При этом струя увлекает с собой окружающие частицы жидкости и, претерпевая существенные изменения, принимает коническую форму, постерогеологических и гидрометрических изысканиях. Известное применение имеют водосливы в нефтяной промышленности, подобные им устройства встречаются, например, в некоторых установках для переработки нефти.

Водосливы классифицируют по ряду признаков. В зависимости от формы сливного порога, называемого гребнем водослива, различают следующие основные типы водосливов:

1) с тонкой стенкой или острой кромкой (рис. 5.27);

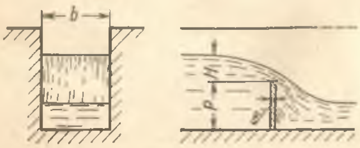


Рис. 5.27

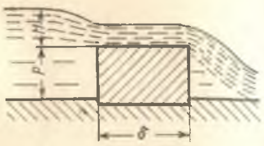


Рис. 5.28

2) с широким порогом (рис. 5.28); на таком пороге устанавливается почти параллельноструйное течение жидкости;

3) практического профиля (рис. 5.29), имеющий криволинейные очертания, соответствующие нижней поверхности струи жидкости при переливе через острый порог.

Области потока перед водосливом и после него называют соответственно *верхним* и *нижним бьефами*.

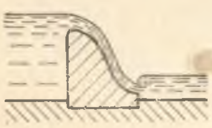


Рис. 5.29

По типу сопряжения струи с нижним бьефом водосливы разделяют на незатопленные (см. рис. 5.27), когда уровень потока в нижнем бьефе непосредственно за водосливом не превышает гребня порога водослива, и затопленные (рис. 5.30), когда этот уровень выше гребня порога и его положение в нижнем бьефе существенным образом влияет на расход, пропускаемый через водослив.

Если длина гребня водослива меньше ширины преграждаемого потока, то в зависимости от формы выреза в преграждающей стенке водослив может быть *прямоугольным*, *треугольным*, *трапецеидальным*, *параболическим*. Наконец, в зависимости от соотношения между длиной водослива и шириной потока перед ним различают водосливы *без бокового сжатия* и *со сжатием*. Боковое сжатие отсутствует, если длина гребня водослива совпадает с шириной потока.

Основной задачей при гидравлическом расчете водослива является определение расхода жидкости, протекающей через него. Рассмотрим под этим углом зрения прямоугольный водослив

с тонкой стенкой без бокового сжатия (рис. 5.31). По мере приближения к водосливу уровень свободной поверхности перед ним постепенно снижается и принимает форму кривой спада. Снижение уровня перестает быть практически заметным на расстоянии от водослива (отсчитываемом против течения), равном примерно $3H$, где H — глубина погружения гребня водослива под неискаженным уровнем в верхнем бьефе. Эту величину называют *напором* на водосливе.

При исследовании работы водослива обычно исходят из аналогии между явлениями, наблюдаемыми при движении жидкости через водослив и ее истечением из большого прямоугольного отверстия в тонкой боковой стенке с отсутствующим верхним

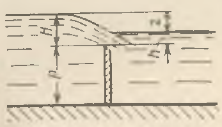


Рис. 5.30

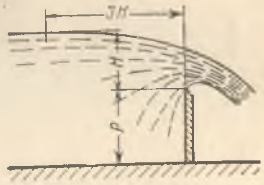


Рис. 5.31

ребром, т. е. в условиях, когда переливающаяся струя не касается верхней кромки отверстия. Подобная задача уже была решена в § 56. Там же для определения расхода была выведена формула (5.17).

Если при выводе указанной формулы принять $H_1=0$, а H_2 заменить H, что соответствует случаю водослива, то пределы интегрирования при учете скорости подхода будут равны: верхний предел — $H+v_0^2/2g$, нижний $v_0^2/2g$ и формула (5.17) примет вид

$$Q=\frac{2}{3}\mu b\sqrt{2g}\left[\left(H+v_0^2/2g\right)^{3/2}-\left(v_0^2/2g\right)^{3/2}\right], \tag{5.39}$$

где b — ширина порога водослива (ширина отверстия); H — напор над порогом водослива (высота отверстия); v_0 — скорость подхода к гребню водослива.

Пренебрегая здесь вторым слагаемым в квадратных скобках ввиду его относительной малости, вводя коэффициент α, учитывающий неравномерность распределения скоростей, и выражая $^2/_3\ \mu$ через m (коэффициент расхода водослива), вместо формулы (5.39) получаем:

$$Q=mb\sqrt{2g}\left(H+\alpha v_0^2/2g\right)^{3/2}. \tag{5.40}$$

Если не учитывать скорость подхода ($v_0=0$), будем иметь

$$Q=mb\sqrt{2g}\,H^{3/2}. \tag{5.40'}$$

Коэффициент расхода водослива m определяется опытным путем и для рассматриваемого водослива зависит от напора H и высоты водосливного порога P.

Для незатопленных водосливов различных типов этот коэффициент имеет следующие средние значения:

Водослив с тонкой стенкой	0,42
Водослив с широким порогом:	
со срезанной входной гранью	0,37
с закругленным входным ребром	0,35
с острым входным ребром	0,32
Водослив практического профиля:	
плавного очертания	0,45
неплавного очертания	0,40

Для других водосливов коэффициент расхода зависит также от формы порога, бокового сжатия и характера сопряжения струи с нижним бьефом. Для его определения имеются специальные формулы.

Рис. 5.32

Рис. 5.33

Для измерения расхода жидкости часто используют трапецеидальный и треугольный водосливы с тонкой стенкой. Расход жидкости в трапецеидальном водосливе (рис. 5.32) определяется по формуле

$$Q=m\,(b+0{,}8\,\mathrm{tg}\,\theta H)\,H^{3/2}\sqrt{2g}\,, \tag{5.41}$$

где θ — угол наклона боковой стенки; b — ширина водослива понизу; m — коэффициент расхода, определяемый опытным путем.

При значении $\mathrm{tg}\,\theta=0{,}25$ (уклон боковой стенки) трапецеидальный водослив обладает свойством постоянства коэффициента расхода ($m=0{,}42$) при изменении напора H. В таком виде его обычно применяют для измерения расхода. В этом случае

$$Q=1{,}86bH^{3/2}. \tag{5.42}$$

Для водослива треугольной формы (рис. 5.33)

$$Q=mH^{5/2}\,\mathrm{tg}\,\theta\sqrt{2g}\,. \tag{5.43}$$

Наибольшее применение имеет треугольный водослив с вырезом в форме прямоугольного треугольника ($2\theta=90°$). Обычно его используют для измерения сравнительно небольших расходов жидкости. Для такого водослива

$$Q=1{,}343H^{2{,}47}. \tag{5.44}$$

Следует иметь в виду, что все приведенные в настоящем параграфе данные относятся к случаям перелива через водослив воды, характеризующимся обычно весьма большими значениями числа Рейнольдса. При малых значениях Re (например, при перетекании через водослив жидкостей повышенной вязкости) коэффициент расхода водослива m оказывается зависимым не только от типа водослива и условий его работы, но и от числа Рейнольдса. Имеющиеся по этому вопросу сведения весьма скудны и здесь не рассматриваются.

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБОПРОВОДАХ

§ 64. НАЗНАЧЕНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ ТРУБОПРОВОДОВ

В современной технике применяются трубопроводы для перемещения разнообразных жидкостей (воды, нефти, глинистых растворов и др.), изготовляемые из различных материалов (металл, бетон, дерево). Наряду с трубопроводами самых незначительных размеров (капилляры), используемыми в лабораторной технике и контрольно-измерительной аппаратуре, имеются магистральные трубопроводы протяженностью в сотни километров и диаметром в несколько метров.

Рис. 6.1

В зависимости от геометрической конфигурации и способов гидравлического расчета различают простые и сложные трубопроводы.

П р о с т ы м называют трубопровод, состоящий из одной линии труб, не имеющий боковых ответвлений, т. е. трубопровод с одинаковым расходом на всем пути движения жидкости от места ее забора A до пункта потребления B. Такой трубопровод может быть выполнен из труб одного диаметра по всей длине (рис. 6.1, *а*) или из участков труб различных длины и диаметра (рис. 6.1, *б*). Последний случай является примером последовательного соединения.

С л о ж н ы м называют трубопровод, состоящий из основной магистрали и ряда отходящих от нее ответвлений. Сложные трубопроводы подразделяются на следующие основные виды:

а) параллельные, когда к основной магистрали M параллельно подключены одна или несколько труб (рис. 6.2);

б) разветвленные, в которых жидкость из магистрали M подается в боковые ответвления; обратно в магистраль она не поступает (рис. 6.3);

в) кольцевые, представляющие собой замкнутую сеть (кольцо), питаемую от основной магистрали M (рис. 6.4).

В сложных трубопроводах различают транзитный расход, передаваемый по магистрали, и путевой (или попутный), отбираемый из магистрали в ряде промежуточных точек по пути движения жидкости.

Расход называется *сосредоточенным*, если точки отбора находятся на значительном расстоянии одна от другой, и *непрерывным*, если эти точки расположены очень близко одна от другой.

Будем также различать трубопроводы напорные и безнапорные. В напорных жидкость находится под избыточным давлением и полностью заполняет все поперечное сечение. Безнапорные трубопроводы работают неполным сечением и характеризуются наличием свободной поверхности, обычно подверженной атмосферному давлению.

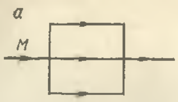


Рис. 6.2

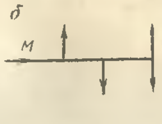


Рис. 6.3

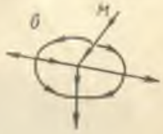


Рис. 6.4

§ 65. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ТРУБОПРОВОДОВ

Для расчета трубопроводов исходным является уравнение Бернулли (см. § 26), из которого следует, что разность значений напора H_1 в сечении *1-1* и H_2 в сечении *2-2* затрачивается на преодоление гидравлических сопротивлений при движении жидкости на участке между этими сечениями. Таким образом,

$$\Delta H = H_1 - H_2 = \sum h_{1\text{-}2},$$

где

$$\sum h_{1\text{-}2} = \sum h_{\text{тр}} + \sum h_{\text{м.п}}.$$

При этом потери напора на трение по длине определяются по формуле Дарси — Вейсбаха (4.14) или (главным образом, при расчетах некруглых труб) по выражению (4.10).

Местные потери напора учитывают по формуле (4.100).

Значения коэффициента λ находят по соответствующим формулам, приведенным в § 45. Коэффициенты местных сопротивлений ζ устанавливают на основании данных, приведенных в § 49; они могут быть также заменены эквивалентными длинами.

В дальнейшем мы встретимся с различными видоизменениями расчетных формул.

Вспомним выражения для коэффициента λ, данные в § 45. Их можно представить, как будет показано дальше, в общем виде единой формулой, что весьма удобно для инженерных расчетов:

При ламинарном режиме

$$\lambda = 64/\text{Re} = a_1/\text{Re}. \qquad (6.1)$$

Особенно опасен гидравлический удар в длинных трубопроводах, в которых движутся значительные массы жидкости с большими скоростями. В таких случаях, если не принять предупредительных мер, гидравлический удар может привести к повреждению мест соединения отдельных труб (стыки, фланцы, раструбы), разрыву стенок трубопровода, поломке насосов.

Чтобы выяснить явления, происходящие при гидравлическом ударе, рассмотрим горизонтальный трубопровод постоянного диаметра, по которому со средней скоростью v движется жидкость. Если быстро закрыть установленную на таком трубопроводе задвижку, то слой жидкости, находящийся непосредственно у задвижки, должен будет остановиться, а давление — увеличиться (вследствие перехода кинетической энергии в потенциальную энергию давления). Так как жидкость сжимаема, то остановка всей ее массы в трубопроводе не происходит мгновенно. Граница объема, включающего в себя остановившуюся жидкость, перемещается вдоль трубопровода с некоторой скоростью c, называемой скоростью распространения волны давления.

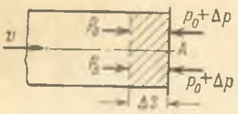


Рис. 6.24

Рассмотрим (рис. 6.24) прилежащую к задвижке часть объема жидкости $Fcdt=Fds$ (где F — площадь сечения трубы). За время dt этот объем, остановившись, потеряет количество движения $\rho Fdsv$.

Обозначим давление у задвижки до ее закрытия p_0, а давление, возникшее после остановки,— $p_0+\Delta p$ и, пользуясь теоремой количества движения, найдем разность давления Δp. Импульс силы, действовавшей в течение времени dt, равен $\Delta pFdt$. Приравнивая его к изменению количества движения за это же время, получаем:

$$\Delta pFdt=\rho Edsv,$$

откуда с учетом того, что $ds/dt=c$, после сокращения на F, получаем известную формулу Н. Е. Жуковского:

$$\Delta p=\rho cv, \tag{6.37}$$

по которой определяется повышение давления при гидравлическом ударе.

Затем останавливается ближайший к первому — второй слой жидкости, на который давят следующие слои, и т. д. Таким образом, постепенно повышенное давление, возникшее первоначально непосредственно у задвижки, распространяется по всему трубопроводу против течения жидкости со скоростью c.

Если давление в начале трубопровода сохраняется неизменным (как например, в случае, когда трубопроводом забирается вода из открытого бассейна с большой площадью поверхности),

то после достижения ударной волной начального сечения трубы начнется обратное перемещение ее с той же скоростью c. Причем это будет волна понижения давления. Одновременно в трубе возникает движение жидкости по направлению к начальному сечению. По достижении ударной волной сечения у задвижки давление здесь падает и становится ниже первоначального давления до удара. После этого начинается перемещение ударной волны, но уже волны понижения давления в направлении к началу трубопровода. Циклы повышения и понижения давления будут чередоваться через промежутки времени, равные времени двойного пробега ударной волной участка трубопровода от задвижки до начала трубопровода.

Таким образом, при гидравлическом ударе жидкость, находящаяся в трубопроводе, будет совершать колебательные движения, которые из-за гидравлических сопротивлений, поглощающих первоначальную энергию жидкости на преодоление трения, будут затухающими. Скорость распространения ударной волны зависит от рода жидкости, материала трубы, ее диаметра, толщины стенок и определяется следующим выражением, получаемым из условия равенства между кинетической энергией жидкости, движущейся в трубопроводе, и суммой работ — сжатия жидкости и растяжения трубы:

$$c=\sqrt{K/\rho}\left(\sqrt{1+\frac{Kd}{E\delta}}\right)^{-1}. \tag{6.38}$$

Здесь K — модуль упругости жидкости, т. е. величина, обратная коэффициенту сжимаемости; ρ — плотность жидкости; E — модуль упругости материала трубы; d, δ — внутренний диаметр и толщина стенки трубы.

Если считать материал трубы абсолютно неупругим ($E=\infty$), выражение (6.38) примет вид

$$c=\sqrt{k/\rho}$$

и скорость распространения ударной волны будет равна скорости распространения звука в жидкости.

Значения модуля упругости E, Па

Сталь	$2\cdot10^{11}$
Чугун	$1\cdot10^{11}$
Бетон	$2\cdot10^{10}$
Дерево	$1\cdot10^{10}$
Свинец	$2\cdot10^{7}$—$5\cdot10^{9}$

Для воды скорость (в м/с) распространения ударной волны может быть подсчитана по формуле

$$c=9900/\sqrt{48{,}3+ad/\delta}, \tag{6.39}$$

где a — безразмерный коэффициент (для стали и железа $a=0{,}5$, для чугуна и меди $a=1$, для свинца $a=5$).

Заказ № 1363

§ 70. ЗАДАЧА О ТРЕХ РЕЗЕРВУАРАХ

Рассматриваемая задача часто встречается в инженерной практике и с гидравлической точки зрения представляется весьма интересной. Заключается она в определении направления течения и расходов жидкости в системе, состоящей из трех резервуаров, которые расположены на разных высотах и соединены трубопроводами, сходящимися в одной общей точке (рис. 6.18—6.20).

Для решения задачи используем графоаналитический метод, основанный на применении гидравлических характеристик. В данном случае этот метод оказывается наиболее простым и наглядным и вместе с тем дает достаточно точное решение. Будем считать известными высотные отметки уровней жидкости в резервуарах *A*, *B* и *C* (геометрические напоры z_A, z_B, z_C), отметку точки *E* (напор z_E), диаметры (d_1, d_2, d_3) и длины (L_1, L_2, L_3) отдельных участков трубопроводов.

Анализ показывает, что в зависимости от соотношений между напорами, диаметрами и длинами участков, возможны следующие основные схемы работы такой гидравлической системы:

1 схема — резервуар *A* питает резервуары *B* и *C*;

2 схема — резервуары *A* и *B* питают резервуар *C*;

3 схема — резервуар *A* питает резервуар *C*, резервуар *B* не работает.

1 схема (см. **рис.** 6.18). Решение выполняется в следующем порядке. Строятся (с учетом высотных отметок) гидравлические характеристики участков *2* и *3**. Поскольку эти участки работают параллельно, их суммарная характеристика (кривая *2+3*) находится сложением абсцисс этих кривых при постоянных ординатах.

Затем строится характеристика участка *1*. Здесь следует принять во внимание, что резервуар *A* — питающий и создаваемый им в системе активный напор с увеличением расхода уменьшается. Поэтому для построения этой кривой вычисленные потери напора на участке *1* следует вычитать из значения начального напора в резервуаре *A*.

Точка пересечения построенных таким образом характеристик *2+3* и *1* (точка *a*) определяет суммарный расход жидкости Q_B+Q_C, поступающий из резервуара *A* в резервуары *B* и *C*. Если провести затем через эту точку горизонтальную прямую до пересечения с характеристиками *2* и *3* (точки *b* и *c*), можно найти раздельно расходы Q_B и Q_C.

2 схема (см. рис. 6.19). При работе по этой схеме следует учесть, что резервуары *A* и *B*, питающие и участки *1* и *2*, работают параллельно. Соответственно строятся характеристики

* Точнее, кривые зависимости напора в узловой точке *E* от расходов.

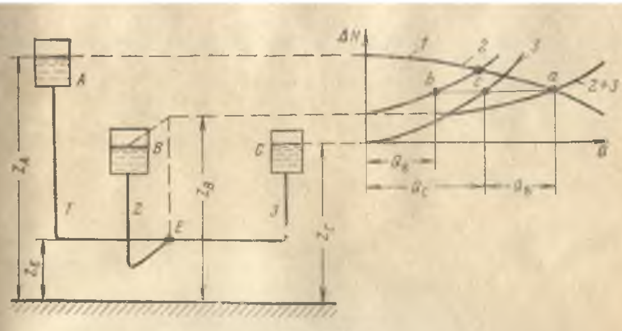


Рис. 6.18

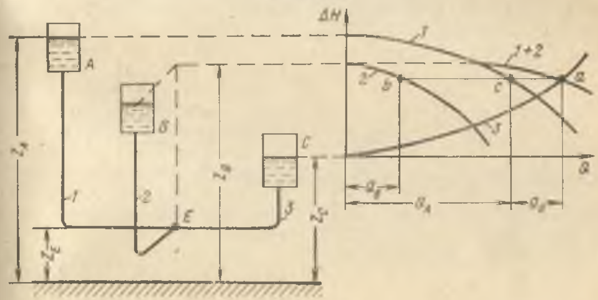


Рис. 6.19

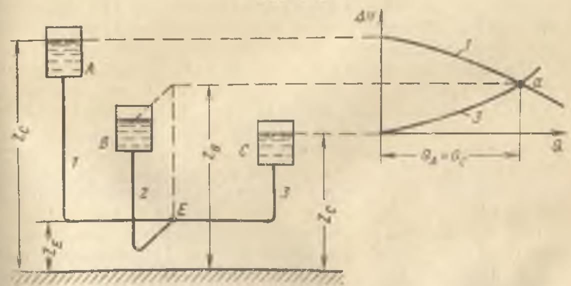


Рис. 6.20

этих участков — кривые *1* и *2* и их суммарная характеристика *1+2*.

Точка пересечения кривой *1+2* с характеристикой участка *3* (точка *a*) аналогично предыдущему дает суммарный расход Q_A+Q_B, поступающий в данном случае в резервуар *C* из резервуаров *A* и *B*. Точки *b* и *c* — пересечения горизонтальной прямой, проведенной через точку *c*, с характеристиками *1* и *2* определяют по-прежнему расходы на участках *1* и *2*, т. е. Q_A и Q_B.

3 схема (см. рис. 6.20). В этом случае точка *a* (пересечения характеристик участков *1* и *3*) располагается на уровне свободной поверхности жидкости в резервуаре *B*. Это значит, расход на участке *2* равен нулю и вся жидкость из резервуара *A* подается только в резервуар *C*: $Q_A=Q_C$.

§ 71. СИФОННЫЕ ТРУБОПРОВОДЫ

Сифонным называют такой самотечный трубопровод, часть которого располагается выше уровня жидкости в сосуде (резервуаре), из которого происходит подача жидкости. Простейшая схема сифонного трубопровода (сифона) может быть представлена в виде изогнутой, опрокинутой *U*-образной трубы, соединяющей сосуды *A* и *B* (рис. 6.21). Движение жидкости в трубе из верхнего сосуда в нижний осуществляется за счет разности уровней Δz.

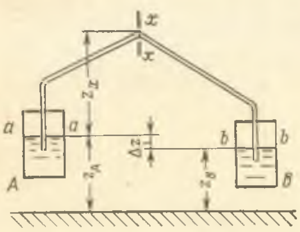


Рис. 6.21

Сифонные трубопроводы имеют весьма широкое применение на практике. Их используют, например, в качестве водосбросов гидротехнических сооружений, для слива нефтепродуктов из цистерн, опорожнения водоемов, применяют при прокладке водоводов через возвышенности и др.

Для приведения сифона в действие из него необходимо предварительно удалить воздух и создать в нем первоначальное разрежение. Обычно это достигается путем отсасывания воздуха воздушным насосом из верхней части сифона. Благодаря создаваемому разрежению жидкость из сосуда *A* поднимается по левой всасывающей ветви сифона и перетекает в расположенный ниже сосуд *B*. В других случаях пуск осуществляется заполнением сифона жидкостью извне, например водой из водопровода, включением в сифонный трубопровод самоизливающейся фонтанирующей скважины и т. д. Приведенный таким образом в действие сифон при надлежащей плотности стыков труб продолжает работать как трубопровод и обеспечивает бесперебойное перетекание жидкости из одного сосуда в другой.

Из сказанного следует, что сифонный трубопровод представляет собой трубопровод, работающий под разрежением (вакуумом). Разрежение вызывает выделение из движущейся жидкости растворенного в ней воздуха. При значительном разрежении может происходить испарение самой жидкости. Поэтому для нормальной работы сифонного трубопровода необходимо, чтобы минимальное давление в нем, соответствующее наибольшему разрежению, не снижалось до такого давления, при котором начинается выделение паров жидкости, ибо их наличие неизбежно повлечет за собой разрыв столба жидкости и, следовательно, срыв работы всего сифонного устройства (выполнение этого условия является обязательным вообще для всех трубопроводов, находящихся под вакуумом, в частности для всасывающих трубопроводов насосных установок).

Гидравлический расчет сифонных трубопроводов принципиально ничем не отличается от расчета обычных трубопроводов. Так, для сифонного трубопровода, работающего по схеме, изображенной на рис. 6.21, как и в задаче о простом трубопроводе, составляется уравнение Бернулли для сечений *a-a* и *b-b*, совпадающих со свободными поверхностями жидкости в сосудах *A* и *B*:

$$z_A+\frac{p_A}{\rho g}+\frac{v_A^2}{2g}=z_B+\frac{p_B}{\rho g}+\frac{v_B^2}{2g}+\sum h_{A\text{-}B}.$$

Если пренебречь скоростными напорами, это уравнение примет вид

$$\Delta H=\Delta z=z_A-z_B=\sum h_{A\text{-}B}.$$

Расход определяется по уравнению

$$Q=\mu_c f\sqrt{2g\Delta H},$$

а в случае, когда местными потерями можно пренебречь,

$$Q=K\sqrt{\Delta H/L}.$$

Если сифонный трубопровод является разветвленным, питаемым от нескольких источников, гидравлический расчет производят как для обычного разветвленного трубопровода и особых трудностей здесь не возникает.

Следует иметь в виду, что вследствие влияния воздуха, выделяющегося из жидкости и движущегося вместе с ней по сифону в виде мелких пузырьков, потери напора, вычисленные по обычным формулам гидравлики, всегда оказываются несколько меньше действительных. Поэтому при значительной длине сифонного трубопровода потери напора рекомендуется определять по специальным формулам, как для двухфазной жидкости (смесь жидкости и пузырьков воздуха) или увеличивать потери напора, вычисленные обычным путем, примерно на 15—20%.

Давление в сифонных трубопроводах проверяют также по обычным уравнениям гидравлики. Давление в любом сечении, например в сечении x-x (см. рис. 6.21), можно определить путем составления уравнения Бернулли для этого сечения и сечения, совпадающего со свободной поверхностью жидкости в сосуде A. Имеем

$$\frac{p_A}{\rho g}+\frac{v_A^2}{2g}=z_x+\frac{p_x}{\rho g}+\frac{v_x^2}{2g}+\sum h_{a\text{-}x}.$$

Отсюда находим

$$p_x/\rho g=p_A/\rho g+v_A^2/2g-z_x-v_x^2/2g-\sum h_{a\text{-}x},$$

или, пренебрегая скоростными напорами ввиду их малости по сравнению с другими величинами, получаем

$$p_x/\rho g=p_A/\rho g-z_x-\sum h_{a\text{-}x}. \tag{6.33}$$

Обязательным является определение давления в наиболее высоко расположенной части сифонного трубопровода, где, как правило, разрежение наибольшее. Для уменьшения разрежения в указанных сечениях может оказаться целесообразным увеличить сопротивление в нисходящей части сифона, например, путем установки задвижки за этими сечениями. При этом следует иметь в виду, что введение задвижки одновременно вызовет некоторое снижение расхода жидкости.

Для определения минимально допустимого давления в каждом отдельном случае необходимо учитывать максимально возможную температуру жидкости, минимальное барометрическое давление в месте сооружения сифона и упругость паров движущейся по сифону жидкости в зависимости от температуры.

Теоретически для нормальной работы сифонного трубопровода (как и всасывающих трубопроводов насосных установок) необходимо, чтобы минимальное давление в нем было всегда выше давления насыщенных паров жидкости при данной температуре:

$$p_{\min}/\rho g\geqslant A_t, \tag{6.34}$$

где $p_{\min}$ — минимальное давление в сифоне; ρ — плотность жидкости; A_t — давление насыщенных паров жидкости ($A_t=p_y/\rho g$).

Практически при расчетах рекомендуется назначать значение минимального давления значительно больше, во всяком случае для воды не менее 0,02—0,03 МПа при нормальных условиях. Указанному значению, как это следует из уравнения (6.33), отвечает наибольшая возможная высота расположения наивысшей точки сифона над свободной поверхностью жидкости в верхнем сосуде (так называемая высота всасывания), равная примерно 7 м.

Весьма наглядным и удобным для проверки давления в сифоне является графический прием, заключающийся в построении пьезометрической линии. Пусть дан продольный профиль сифонного трубопровода одного диаметра по всей длине без местных сопротивлений (рис. 6.22). На свободной поверхности жидкости в водоемах давление известно, оно равно атмосферному. Изобразим соответствующие этому давлению пьезометрические напоры $p_a/\rho g$ вертикальными отрезками Aa в начале сифона и Bb — в конце.

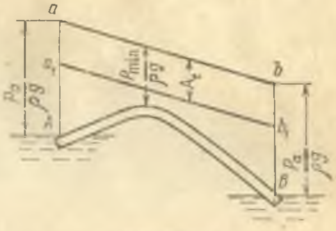


Рис. 6.22

Так как падение напора вдоль трубопровода происходит по прямой линии ($i=\text{const}$), соединим концы этих отрезков прямой ab, которая представляет собой пьезометрическую линию. Отложим затем в начальном сечении сифона отрезок aa_1, соответствующий упругости паров жидкости A_t, и проведем на этом расстоянии от пьезометрической линии прямую a_1b_1, параллельную линии ab. Из изложенного очевидно, что условие (6.34), необходимое для нормальной работы сифонного трубопровода, будет удовлетворяться только в том случае, если прямая a_1b_1 не пересечет профиль трубопровода.

§ 72. КАВИТАЦИЯ

Кавитацией (от латинского слова «кавитас» — полость) называется образование в движущейся жидкости полостей, заполненных паром или воздухом (газом). Кавитация возникает в тех случаях, когда давление в каких-либо местах потока падает настолько, что становится ниже давления насыщения, т. е. давления, соответствующего кипению жидкости при данной температуре.

Явление кавитации можно наблюдать, например, во всасывающих линиях насосных установок и сифонных трубопроводах, где ее появление обусловливается геометрической конфигурацией и принципом действия самого трубопровода, основная часть которого находится под давлением ниже атмосферного. Кавитация может возникать также при работе быстроходных гидравлических турбин, центробежных насосов и гребных винтов. В таких случаях ее причиной является возникновение больших местных скоростей, ведущих к снижению давления. Если при этом давление оказывается ниже давления насыщенных паров, в соответствующих местах потока начинается бурное испарение жидкости; последняя начинает кипеть, и в ней образуются кавитационные полости, состоящие из пузырьков пара. Если при дальнейшем движении потока давление в нем повышается, происходит конденсация пара, обычно сопровождаемая резким треском, и кавитационные полости смыкаются. Возникновению кавитации значительно способствует наличие в жидкости пузырьков воздуха или растворенных газов.

Во многих местных сопротивлениях в результате значительного увеличения скорости при сужении потока и последующем его расширении также могут возникать кавитационные явления. Рассмотрим с этой точки зрения условия протекания жидкости через короткий патрубок переменного сечения с горизонтальной осью (рис. 6.23). Как следует из уравнения Бернулли, составленного без учета сопротивлений для двух крайних сечений суживающейся части такого трубопровода, $p_1/\rho g + v_1^2/2g = p_2/\rho g + v_2^2/2g$, давление в наиболее сжатой его части

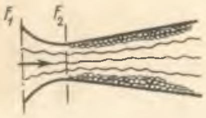


Рис. 6.23

$$p_2 = p_1 - \rho \frac{v_1^2}{2g}\left[\left(\frac{F_1}{F_2}\right)^2 - 1\right],$$

где v_1, v_2 — средние скорости в начальном F_1 и конечном F_2 сечениях.

В том случае, когда F_1 значительно больше F_2, а p_1 незначительно, давление p_2 в суженном сечении может оказаться ниже давления насыщения. Как показывает опыт, за этим сечением основная масса жидкости движется в виде свободной струи, сопровождаемой по бокам пенообразной смесью, состоящей из пузырьков пара и жидкости. Дальше в каком-то сечении происходит внезапное замедление движения и жидкость полностью заполняет все сечение. Здесь давление повышается, образовавшиеся ранее пузырьки пара сталкиваются и конденсируются.

Кавитационные явления приводят к заметному увеличению коэффициентов местных сопротивлений и, следовательно, местных потерь напора. Кавитационные свойства местных сопротивлений определяют по так называемому числу кавитации:

$$\varkappa = 2(p_1 - p_{кр})/\rho v_1^2, \tag{6.35}$$

где p_1, v_1 — давление и скорость перед местным сопротивлением; $p_{кр}$ — минимальное давление, при котором возникает кавитация (обычно оно равно давлению насыщения).

Бескавитационные условия работы местного сопротивления в этом случае обеспечиваются тогда, когда подсчитанные по выражению (6.35) числа кавитации оказываются меньше критического значения: $\varkappa < \varkappa_{кр}$, определяемого опытным путем.

Для местных сопротивлений, вызывающих изменение скорости движения жидкости (сужение и расширение потока), кри-

тическое значение числа кавитации можно приближенно найти по формуле

$$\varkappa_{кр} = \zeta + 2\sqrt{\zeta}, \tag{6.36}$$

где ζ — коэффициент местного сопротивления в бескавитационном режиме.

В современных гидравлических турбинах, центробежных насосах, гребных винтах, обычно работающих при большой частоте вращения вала, в отдельных местах рабочих лопаток и лопастей создаются значительные скорости движения жидкости, также способствующие возникновению кавитации.

Кавитация оказывает очень вредное действие на работу этих установок, вызывает недопустимо большие их колебания, увеличивает потери энергии на трение, т. е. снижает коэффициент полезного действия и, что наиболее опасно, приводит к разъеданию металла.

Разъедание металла вследствие кавитации (кавитационная эрозия) обычно наблюдается в тех местах потока, где происходит повышение давления, сопровождающееся столкновением пузырьков пара и его конденсацией. При этом вследствие мгновенных, быстро чередующихся процессов сжатия отдельных пузырьков возникают большие местные импульсивные давления (в несколько сот и даже тысяч атмосфер), приводящие к весьма коротким и интенсивным ударам, разрушающим металл (сначала выкрашиваются его зерна с поверхности, затем процесс разрушения быстро распространяется вглубь). К этим чисто механическим ударным действиям часто присоединяются химические воздействия на металл выделяющегося из жидкости воздуха, обогащенного кислородом, а в отдельных случаях и электролитические воздействия. В результате всех этих явлений, особенно если кавитация длится продолжительное время, происходит разъедание металла: он на большую глубину принимает губчатую структуру.

Чтобы предотвратить появление кавитации, лопатки и лопасти проектируют в форме слабо изогнутых профилей со скругленными входными и заостренными выходными кромками, применяют для их изготовления особые стойкие против коррозии материалы (например, стали с добавкой хрома и никеля), тщательно обрабатывают их поверхности.

§ 73. ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ УДАР В ТРУБАХ

Под гидравлическим ударом понимают резкое повышение давления в трубопроводах при внезапной остановке движущейся в них жидкости. Гидравлический удар происходит, например, при быстром закрытии различных запорных приспособлений, устанавливаемых на трубопроводах (задвижка, кран), внезапной остановке насосов, перекачивающих жидкость, и др.

Особенно опасен гидравлический удар в длинных трубопроводах, в которых движутся значительные массы жидкости с большими скоростями. В таких случаях, если не принять предупредительных мер, гидравлический удар может привести к повреждению мест соединения отдельных труб (стыки, фланцы, раструбы), разрыву стенок трубопровода, поломке насосов.

Чтобы выяснить явления, происходящие при гидравлическом ударе, рассмотрим горизонтальный трубопровод постоянного диаметра, по которому со средней скоростью v движется жидкость. Если быстро закрыть установленную на таком трубопроводе задвижку, то слой жидкости, находящийся непосредственно у задвижки, должен будет остановиться, а давление — увеличиться (вследствие перехода кинетической энергии в потенциальную энергию давления). Так как жидкость сжимаема, то остановка всей ее массы в трубопроводе не происходит мгновенно. Граница объема, включающего в себя остановившуюся жидкость, перемещается вдоль трубопровода с некоторой скоростью c, называемой скоростью распространения волны давления.

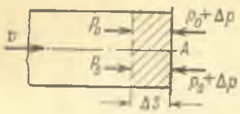


Рис. 6.24

Рассмотрим (рис. 6.24) прилежащую к задвижке часть объема жидкости $Fcdt=Fds$ (где F — площадь сечения трубы). За время dt этот объем, остановившись, потеряет количество движения $\rho Fdsv$.

Обозначим давление у задвижки до ее закрытия p_0, а давление, возникшее после остановки,— $p_0+\Delta p$ и, пользуясь теоремой количества движения, найдем разность давления Δp. Импульс силы, действовавшей в течение времени dt, равен $\Delta pFdt$. Приравнивая его к изменению количества движения за это же время, получаем:

$$\Delta pFdt=\rho Edsv,$$

откуда с учетом того, что $ds/dt=c$, после сокращения на F, получаем известную формулу Н. Е. Жуковского:

$$\Delta p=\rho cv, \tag{6.37}$$

по которой определяется повышение давления при гидравлическом ударе.

Затем останавливается ближайший к первому — второй слой жидкости, на который давят следующие слои, и т. д. Таким образом, постепенно повышенное давление, возникшее первоначально непосредственно у задвижки, распространяется по всему трубопроводу против течения жидкости со скоростью c.

Если давление в начале трубопровода сохраняется неизменным (как например, в случае, когда трубопроводом забирается вода из открытого бассейна с большой площадью поверхности),

то после достижения ударной волной начального сечения трубы начнется обратное перемещение ее с той же скоростью c. Причем это будет волна понижения давления. Одновременно в трубе возникает движение жидкости по направлению к начальному сечению. По достижении ударной волной сечения у задвижки давление здесь падает и становится ниже первоначального давления до удара. После этого начинается перемещение ударной волны, но уже волны понижения давления в направлении к началу трубопровода. Циклы повышения и понижения давления будут чередоваться через промежутки времени, равные времени двойного пробега ударной волной участка трубопровода от задвижки до начала трубопровода.

Таким образом, при гидравлическом ударе жидкость, находящаяся в трубопроводе, будет совершать колебательные движения, которые из-за гидравлических сопротивлений, поглощающих первоначальную энергию жидкости на преодоление трения, будут затухающими. Скорость распространения ударной волны зависит от рода жидкости, материала трубы, ее диаметра, толщины стенок и определяется следующим выражением, получаемым из условия равенства между кинетической энергией жидкости, движущейся в трубопроводе, и суммой работ — сжатия жидкости и растяжения трубы:

$$c=\sqrt{K/\rho}\left(\sqrt{1+\frac{Kd}{E\delta}}\right)^{-1}. \tag{6.38}$$

Здесь K — модуль упругости жидкости, т. е. величина, обратная коэффициенту сжимаемости; ρ — плотность жидкости; E — модуль упругости материала трубы; d, δ — внутренний диаметр и толщина стенки трубы.

Если считать материал трубы абсолютно неупругим ($E=\infty$), выражение (6.38) примет вид

$$c=\sqrt{k/\rho}$$

и скорость распространения ударной волны будет равна скорости распространения звука в жидкости.

Значения модуля упругости E, Па

Сталь	$2\cdot10^{11}$
Чугун	$1\cdot10^{11}$
Бетон	$2\cdot10^{10}$
Дерево	$1\cdot10^{10}$
Свинец	$2\cdot10^{7}$—$5\cdot10^{9}$

Для воды скорость (в м/с) распространения ударной волны может быть подсчитана по формуле

$$c=9900/\sqrt{48{,}3+ad/\delta}, \tag{6.39}$$

где a — безразмерный коэффициент (для стали и железа $a=0{,}5$, для чугуна и меди $a=1$, для свинца $a=5$).

В частном случае для обычных чугунных водопроводных труб приближенно можно принять $\Delta p = (1 \div 1,4)\ v$, где при v, выраженном в м/с, p получается в МПа.

Для борьбы с гидравлическим ударом на трубопроводах устанавливают разного рода устройства, увеличивающие время закрытия задвижек и кранов и тем самым смягчающие действие удара. Безопасное время закрытия определяется по формуле $t_з > 2L/c$, где L — длина трубопровода.

На магистральных трубопроводах устанавливают также автоматически действующие предохранительные клапаны и воздушные колпаки. Они располагаются перед задвижками и играют роль своеобразных воздушных буферов, воспринимающих повышенное давление.

§ 74. МАГИСТРАЛЬНЫЕ НЕФТЕПРОВОДЫ

Современные магистральные нефтепроводы представляют собой весьма сложные инженерные сооружения. Они являются связующим звеном между районами добычи и пунктом переработки и потребления нефти. В тех случаях, когда по трубопроводам перекачиваются продукты переработки нефти (бензин, керосин и др.), их принято называть нефтепродуктопроводами.

Нефтепроводы обычно работают в следующих режимах течения:

ламинарном при перекачке очень вязких нефтей;

турбулентном в области «гидравлически гладких» труб при перекачке нефтей средней вязкости;

турбулентном в доквадратичной области смешанного трения при перекачке маловязких нефтей и светлых нефтепродуктов.

Автомодельная область турбулентного режима (квадратичный закон сопротивления) в нефтепроводах обычно не наблюдается. В отдельных случаях приближенно считают, что при этом режиме могут перекачиваться светлые нефтепродукты. В действительности, как указывалось ранее, в автомодельной области работают водопроводы. Квадратичный закон используется также при расчете газопроводов.

Протяженность магистральных нефтепроводов определяется десятками и сотнями, а в отдельных случаях тысячами километров. Диаметры труб достигают 1200 мм и более, а объемы перекачки нередко составляют десятки тысяч тонн в сутки.

Магистральные нефтепроводы состоят из следующих основных объектов: насосных станций, резервуарных парков и линейной части — собственно трубопровода.

Рассмотрим некоторые специфические особенности работы и гидравлического расчета магистральных нефтепроводов *.

* Особые случаи расчета нефтепроводов при перекачке по ним высокопарафинистых нефтей рассматриваются в гл. 7.

Гидравлический расчет начинают обычно с определения оптимального диаметра трубопровода, обеспечивающего заданный объем перекачки. Общие указания о решении этой задачи на основе технико-экономических соображений рассмотрены в § 66. Полученное значение диаметра округляют до ближайшего стандартного значения. При этом устанавливают также материал трубы и толщину ее стенки.

После этого, исходя из условий прочности, определяют предельно допустимое для выбранной трубы давление:

$$p_{max} = 2\delta\,[\sigma_р]/d.$$

Здесь δ — толщина стенки трубы; d — ее диаметр; $[\sigma_р]$ — допускаемое напряжение на растяжение.

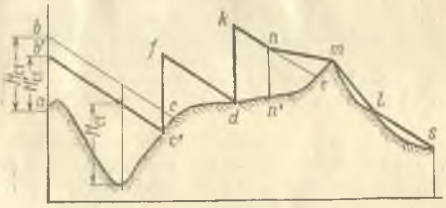


Рис. 6.25

Затем переходят к определению необходимого числа насосных станций и к их расстановке по трассе. Для этого строят продольный профиль трассы трубопровода (рис. 6.25) и по известному диаметру d, кинематической вязкости перекачиваемой жидкости ν и заданному расходу Q находят суммарные потери напора по всей длине трубопровода. Это позволяет определить необходимое число насосных станций

$$n = H/H_{ст},$$

где H — суммарная потеря напора по всей трассе; $H_{ст}$ — напор, развиваемый одной насосной станцией, соответствующий в первом приближении предельно допустимому давлению жидкости в трубе,

$$H_{ст} = p_{max}/\rho g.$$

После этого из точки a (место расположения головной насосной станции на профиле) по вертикали вверх откладывают отрезок, изображающий в определенном масштабе напор станции $H_{ст}$. Из конца этого отрезка b проводят линию гидравлического уклона. Точка пересечения ее с профилем является местом расположения второй насосной станции. При этом необходимо, чтобы давление в любой точке рассматриваемого участка трассы не превышало p_{max}, т. е. чтобы отрезок между линией гидравлического уклона и профилем нигде не был больше $H_{ст}$. Если это условие не выполняется, следует снизить напор на головной станции до $H'_{ст}$, при котором давление во всех точках трассы не будет превышать p_{max} (рассматривается именно такой случай). Линия гидравлического уклона, соответствующая этому случаю, обозначена $b'c'$, где точка c' соответствует исправленному положению второй насосной станции.

Для определения местоположения остальных насосных станций производят аналогичные построения: точка d определяет местоположение третьей насосной станции, e — четвертой.

Однако сооружение четвертой станции следует признать нецелесообразным, поскольку развиваемый ею напор не может быть полностью использован из-за близости перевальной точки. От сооружения этой станции следует отказаться, а необходимый напор можно получить за счет прокладки параллельного трубопровода на третьем участке. Параллельно прокладываемые трубопроводы в нефтепроводной практике называют лупингами.

Гидравлический расчет этого участка может быть выполнен на основании данных, изложенных в § 68. Так, если принять диаметр лупинга равным диаметру основной трубы, будем иметь $h=h_0+h_л$ и $Q_0=2Q_л$, где h_0, $h_л$ и Q_0, $Q_л$ — соответственно потери напора и расходы на участках трубопровода без лупинга и с лупингом.

Тогда полная потеря напора на третьем участке

$$h=h_0+h_л=A\frac{Q_0^m\nu^n}{d^k}L_0+A\frac{Q_л^m\nu^n}{d^k}L_л=A\frac{Q_0^m\nu^n}{d^k}\left[L_0+\left(\frac{1}{2}\right)^m L_л\right];$$

гидравлический уклон на участке без лупинга

$$i_0=h_0/L_0=AQ_0^m\nu^n/d^k;$$

гидравлический уклон на участке с лупингом

$$i_л=h_л/L_л=AQ_0^m\nu^n/d^k\,(1/2)^m.$$

Отсюда

$$i_0/i_л=2^m.$$

Если при этом жидкость в трубопроводе движется при турбулентном режиме в области гидравлически гладких труб и потери напора подсчитываются по формуле Блазиуса (4.87), то $m=1{,}75$, и $i_0/i_л=2^{1,75}\approx3{,}36$, откуда $i_л=0{,}298i_0$.

Для определения длины лупинга из перевальной точки трассы m проводим линию гидравлического уклона до пересечения с линией ke. Расстояние между точками n' (проекция точки n на профиль трассы) и m есть искомая длина лупинга *.

Рассмотрим теперь работу участка трубопровода за перевальной точкой. Этот участок представляет собой самотечный трубопровод **, для которого выполняется условие

$$h_{1-2}\leq z_1-z_2.$$

В той части этого участка (ml), где $h<z_1-z_2$, жидкость будет заполнять только часть сечения трубопровода; там же, где $h=z_1-z_2$, трубопровод работает полным сечением (участок ls).

Во всех рассмотренных выше случаях движение жидкости в трубопроводах предполагалось изотермическим, т. е. происходящим при постоянной температуре. В действительности же перекачиваемые нефти и нефтепродукты имеют температуру, отличную от температуры окружающей среды (грунта на глубине укладки трубопровода), а при перекачке высоковязких и быстрозастывающих нефтей и нефтепродуктов часто прибегают даже к специальному их подогреву перед перекачкой.

Ввиду разности температур перекачиваемой жидкости и грунта наблюдается процесс теплообмена — температура жидкости изменяется вдоль трассы трубопровода и ее движение носит неизотермический характер.

Изменение температуры приводит к изменению вязкости и, следовательно, гидравлических потерь. В связи с большой протяженностью магистральных нефтепроводов такие изменения могут быть весьма значительными. Это обстоятельство надо учитывать при проведении гидравлических расчетов.

Пусть в трубопровод поступает жидкость с температурой $t_н$. Тогда на некотором расстоянии l от начала трубопровода вследствие теплообмена температура жидкости изменится до значения t. Изменение температуры жидкости вдоль трубопровода может быть определено по формуле В. Г. Шухова:

$$t=t_0+(t_н-t_0)\,e^{-\alpha l}, \tag{6.40}$$

где t_0 — температура грунта по оси трубопровода; α — коэффициент, характеризующий интенсивность теплообмена, $\alpha=K\pi d/c\rho gQ$. Здесь K — так называемый полный коэффициент теплопередачи от жидкости в окружающую среду, численно равный количеству тепла, проходящего через единицу поверхности трубопровода в единицу времени при перепаде температур 1° С; c — теплоемкость жидкости, т. е. количество тепла, необходимое для нагрева единицы массы жидкости на 1° С; Q — объемный расход.

---

* Более подробно расчет лупингов для различных случаев рассматривается в курсах проектирования и сооружения нефтепроводов.

** См. § 76, формула (6.50).

При этом температура в конце трубопровода

$$t_к = t_0 + (t_н - t_0)\, e^{-\alpha L},$$

где L — полная длина трубопровода; $e = 2{,}71$.

Примерный вид кривой изменения температуры вдоль трассы трубопровода показан на рис. 6.26.

Составим выражение для потери напора на бесконечно малом участке трубопровода длиной dL, где изменением кинематической вязкости можно пренебречь:

$$dH = A\,\frac{Q^m \nu^n}{d^k}\, dL.$$

Потеря напора на участке конечной длины может быть определена интегрированием этого выражения. Причем в подынтегральное выражение следует подставить функциональную зависимость изменения вязкости от температуры [см. § 4, формула (1.16)].

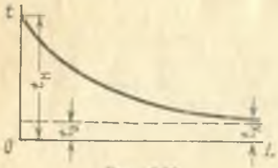


Рис. 6.26

$$H = A\,\frac{Q^m}{d^k}\int_0^L \nu_0^n e^{-nut}\, dL.$$

Учитывая при этом закон изменения температуры по длине трубопровода (6.40), окончательно получаем:

$$H = A\,\frac{Q^m}{d^k}\int_0^L \nu_0^n e^{-nu\,[t_0 + (t_н - t_0)\,e^{-\alpha L}]}\, dL.$$

В частном случае при турбулентном режиме в области гидравлически гладких труб (закон сопротивления Блазиуса) последнее выражение принимает вид

$$H = 0{,}00246\,\frac{Q^{1,75}}{d^{4,75}}\int_0^L \nu_0^{0,25} e^{-0,25u\,[t_0 + (t_н - t_0)\,e^{-\alpha L}]}\, dL.$$

Интегрирование этого выражения представляет известные трудности и здесь не рассматривается.

На практике при проведении гидравлических расчетов магистральных нефтепроводов при неизотермическом режиме часто используют приближенные методы. Один из них заключается в том, что потери напора определяют по обычной формуле изотермического режима, куда подставляют среднее значение вязкости, соответствующее средней температуре жидкости, определяемой по выражению

$$t_{ср} = \frac{1}{3}t_н + \frac{2}{3}t_к.$$

Указанный метод был предложен для ламинарного режима, но дает достаточную для практических целей точность и при гидравлических расчетах в области турбулентного режима при условии существования неизотермического режима на всем протяжении трубопровода.

§ 75. ДВИЖЕНИЕ ГАЗА ПО ТРУБАМ

Транспортировка газообразных жидкостей (в дальнейшем будем называть их просто газами) по трубопроводам по сравнению с движением обычных капельных жидкостей характеризуется существенными особенностями, в основном обусловленными различием их физических свойств.

Для иллюстрации методики расчета газопроводов рассмотрим часто встречающийся случай движения газа по трубопроводу постоянного поперечного сечения. При движении газа по такому трубопроводу вследствие неизбежных потерь напора давление газа, обычно превышающее атмосферное в начальном сечении, по длине трубопровода непрерывно снижается. При этом происходит расширение газа — удельный объем его увеличивается, а плотность, наоборот, уменьшается. Указанное изменение плотности газа оказывается весьма существенным и должно обязательно учитываться при расчете.

В случае установившегося движения массовое количество газа, проходящего через любое поперечное сечение трубопровода в единицу времени (массовый расход газа m), вследствие неразрывности движения остается неизменным. Объемный же расход газа $Q = m/\rho$ будет увеличиваться и, следовательно, будет возрастать по длине трубопровода средняя скорость течения газа $v = Q/F$.

В общем случае из-за расширения газа и вследствие теплообмена будет непрерывно изменяться и температура газа по длине трубопровода. Однако в ряде случаев с достаточной для практических расчетов точностью оказывается вполне возможным принять температуру постоянной, считая, что процесс расширения газа происходит изотермически.

При изотермическом процессе ввиду постоянства температуры будет сохранять постоянное значение по длине трубопровода и динамическая вязкость газа *. При этом, как нетрудно убедиться, останется постоянным и число Рейнольдса. В самом деле, $Re = vd/\nu$, но так как $\nu = \mu/\rho$, $v = 4Q/\pi d^2 = 4m/\rho\pi d^2$, то число Рейнольдса можно представить также в виде

$$Re = 4m/\pi d\mu.$$

В правую часть полученного выражения входят лишь такие величины, которые сохраняют постоянное значение по длине

* Изменение вязкости становится ощутимым лишь при весьма больших колебаниях давления, при расчетах для обычных условий оно не принимается во внимание.

трубопровода. Значит, постоянными по длине трубопровода будут число Рейнольдса и, следовательно, коэффициент гидравлического сопротивления λ, являющийся функцией этого числа.

Для определения падения давления и расхода газа в трубопроводе исходным является обычное уравнение Бернулли. Учитывая отмеченные выше особенности, наблюдаемые при движении газа по трубопроводу (изменение его плотности и средней скорости течения по длине трубопровода), это уравнение в рассматриваемом случае необходимо писать в дифференциальной форме:

$$dz + dp/\rho g + dv^2/2g = -\lambda\,(dL/d)\,(v^2/2g)$$

или

$$-dp/\rho g = \lambda\,(dL/d)\,(v^2/2g) + dz + dv^2/2g. \tag{6.41}$$

Второй и третий члены правой части уравнения (6.41) для обычных условий движения газов (при горизонтальном расположении трубопровода и малых, дозвуковых скоростях течения) оказываются малыми по сравнению с первым членом, учитывающим сопротивление движению, и поэтому ими можно пренебречь. Тогда вместо уравнения (6.41) будем иметь

$$-dp/\rho g = \lambda\,(dL/d)\,(v^2/2g).$$

Выражая далее среднюю скорость течения газа через массовый расход $v = m/\rho F$, получаем:

$$-dp/\rho g = \lambda\,(dL/d)\,(m^2/2g\rho^2 F^2)$$

или

$$-\rho g dp = \lambda\,(dL/d)\,(m^2 g/2F^2). \tag{6.42}$$

Для изотермического течения газа по закону Бойля $\rho = p\rho_1/p_1$, где p_1, ρ_1 — давление и плотность газа в начале трубопровода.

Подставим полученное значение ρ в уравнение (6.42) и проинтегрируем последнее в пределах от p_1 до p_2 — давления в конце трубопровода длиной L:

$$-\frac{\rho_1}{p_1}\int_{p_1}^{p_2} p\,dp = \frac{\lambda m^2}{d 2F^2}\int_0^L dL.$$

Отсюда получаем формулы, являющиеся основными для расчета трубопроводов при изотермическом течении газа:

для определения падения давления в газопроводе

$$\frac{\rho_1}{p_1}\left(\frac{p_1^2 - p_2^2}{2}\right) = \lambda \frac{L}{d}\frac{m^2}{2F^2}; \tag{6.43}$$

для определения массового расхода газа

$$m = F\sqrt{\frac{(p_1^2 - p_2^2)\,\rho_1 d}{p_1 \lambda L}}. \tag{6.44}$$

Коэффициент сопротивления λ в формулах (6.43), (6.44) определяется по обычным формулам гидравлики вида $\lambda = f(\mathrm{Re}, \varepsilon)$, подробно рассмотренным ранее (см. § 45). При практических расчетах магистральных газопроводов часто применяют также специальные «газопроводные» формулы, полученные в результате обработки опытных данных. Наиболее широко используются (справедливые для всех зон турбулентного режима) универсальные формулы Кольбрука и Уайта (4.82) и Альтшуля (4.85) и формула ВНИИгаза (для квадратичной области):

$$\lambda = 0{,}0555/d^{0,4}, \tag{6.45}$$

где d — диаметр трубопровода в см.

В последнее время все большее развитие получает транспортировка по трубопроводам сжиженных газов, используемых как ценное сырье во многих химических производствах и дешевое топливо в быту.

Сжиженные газы — это углеводороды, которые в чистом виде либо в виде смесей при сравнительно небольшом повышении давления и температуре окружающей среды могут быть переведены из газообразного состояния в жидкое.

Основное требование, предъявляемое к трубопроводам для перекачки сжиженных газов, сводится к тому, чтобы ни в одном сечении трубопровода давление не снижалось ниже давления насыщения газов (т. е. упругости их паров) при температуре перекачки. Если давление падает ниже этого значения, то как уже указывалось выше, жидкость закипит, в трубопроводе образуются паровые пробки и его пропускная способность резко снижается. Поэтому в целях обеспечения надежной работы таких трубопроводов минимальное давление в них принимают значительно выше давления насыщения. В остальном же их расчет ничем не отличается от расчета трубопроводов для обычных капельных жидкостей.

§ 76. БЕЗНАПОРНЫЕ ТРУБОПРОВОДЫ

Безнапорными называют трубопроводы, работающие неполным сечением и характеризующиеся наличием свободной поверхности жидкости, обычно подверженной атмосферному давлению. Они весьма широко применяются в народном хозяйстве, в частности в нефтяной промышленности. К ним относятся, например, самотечные участки нефтепроводов и водопроводов, канализационные трубы, а также различного рода открытые каналы — желоба, лотки, водосточные каналы, ливнеспуски, представляющие собой те же безнапорные трубопроводы, но незамкнутого сечения.

С гидравлической точки зрения безнапорные трубопроводы и открытые каналы принципиально тождественны и часто объединяются под общим названием — открытые русла. В большинстве случаев в них происходит равномерное движение жидкости.

Напомним, что при равномерном движении средние скорости во всех поперечных сечениях потока должны быть равны. Поэтому равномерное движение жидкости в открытых руслах оказывается возможным только в тех случаях, когда форма и размеры поперечного сечения, уклон дна и шероховатость стенок русла остаются постоянными на всем его протяжении. Очевидно, при этом кривая свободной поверхности жидкости в русле будет параллельна линии его дна и, следовательно, уклон этой поверхности $i_п$ будет равен уклону дна $i_д$.

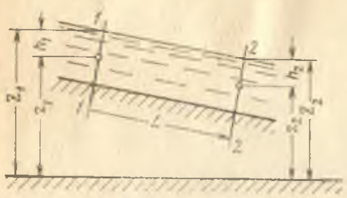


Рис. 6.27

Если указанные условия не соблюдаются, в русле будет неравномерное движение, при котором уклон свободной поверхности и уклон дна различны. Неравномерное движение обычно наблюдается как в естественных руслах (реки, ручьи), так и в некоторых искусственных, таких, например, как каналы гидротехнических сооружений, где на режим водных потоков большое влияние оказывают возводимые в них искусственные сооружения (плотины, перепады).

Ограничимся здесь рассмотрением случая равномерного движения.

Составим уравнение Бернулли для сечения *1-1* и *2-2* открытого потока жидкости (рис. 6.27). Это уравнение (см. § 26) имеет вид:

$$z_1 + p_1/\rho g + \alpha_1 v_1^2/2g = z_2 + p_2/\rho g + \alpha_2 v_2^2/2g + h_{1\text{-}2}. \qquad (6.46)$$

Здесь z_1, z_2 — расстояния до центров тяжести (вертикальные ординаты) сечений *1-1* и *2-2* от некоторой произвольной плоскости сравнения; p_1, p_2 — давления в центрах тяжести названных сечений; h_{1-2} — потеря напора на длине L участка потока между этими сечениями.

Так как в рассматриваемом случае движение равномерное, то

$$\alpha_1 v_1^2/2g = \alpha_2 v_2^2/2g.$$

Учтем также, что $p_1 = p_{атм} + \rho g h_1$ и $p_2 = p_{атм} + \rho g h_2$, где h_1, h_2 — глубины погружения центров тяжести сечений *1-1* и *2-2*

под поверхностью жидкости. Значит, уравнение (6.46) можно переписать следующим образом:

$$Z_1 + p_1/\rho g = Z_2 + p_2/\rho g + h_{1\text{-}2} \qquad (6.47)$$

или

$$Z_1 - Z_2 = h_{1\text{-}2}. \qquad (6.48)$$

Здесь Z_1, Z_2 — расстояния от плоскости сравнения до свободной поверхности жидкости соответственно в сечениях *1-1* и *2-2*.

Представляя потери напора на трение в виде $h_{1-2} = (v^2/C^2R)\,L$, вместо уравнения (6.48) получаем:

$$(Z_1 - Z_2)/L = v^2/C^2R.$$

Отсюда

$$v = C\sqrt{Ri}, \qquad (6.49)$$

где $i = (Z_1 - Z_2)/L$ — уклон свободной поверхности, равный при равномерном движении уклону дна потока.

Формула (6.49) есть формула Шези, рассмотренная нами выше (см. § 36). Ей часто придают другой вид, обозначая произведение $C\sqrt{R}$ через W (так называемый *модуль скорости*, или *приведенная скорость*). Тогда

$$v = W\sqrt{i}.$$

Расход жидкости при этом находят по обычному уравнению расхода $Q = vF$ или следующим образом:

$$Q = FC\sqrt{Ri}; \qquad (6.50)$$

$$Q = K\sqrt{i}, \qquad (6.51)$$

где коэффициент

$$K = FC\sqrt{R} \qquad (6.52)$$

по-прежнему носит название *модуля расхода* (или пропускной способности).

Модуль скорости W и модуль расхода K имеют соответственно те же размерности, что v и Q, т. е. измеряются в метрах в секунду и кубических метрах в секунду.

Для определения коэффициента C при турбулентном режиме с известным приближением могут быть использованы рассмотренные выше (см. § 45) формулы для коэффициента гидравлического трения λ после замены в них r или d гидравлическим радиусом сечения. При этом исходят из соотношения

$$C = \sqrt{8g/\lambda}.$$

Существует также ряд формул для непосредственного определения коэффициента C. Из их числа приведем простую формулу Маннинга:

$$C = R^{1/6}/n, \tag{6.53}$$

где R — гидравлический радиус сечения; n — коэффициент шероховатости.

Значения коэффициента шероховатости n в формулах Маннинга и Павловского *

Чистые (новые) трубы: гончарные, чугунные, железные хорошо уложенные; лучшая цементная штукатурка . . .	0,011
Водопроводные трубы в нормальных условиях; весьма чистые водоточные трубы; весьма хорошая бетонировка . .	0,012
Водосточные трубы в нормальных условиях; несколько загрязненные водопроводные трубы	0,013
«Грязные» трубы водопроводные и водосточные	0,014

Для обычных водопроводных труб в нормальном состоянии можно принимать $n = 0{,}0125$.

* При использовании этих данных для расчетов линейные размеры необходимо выражать в метрах.

Н. Н. Павловским было установлено, что в действительности показатель степени в формуле (6.53) не является постоянным, а изменяется в зависимости от значений n и R. В соответствии с этим им была предложена более общая формула:

$$C = R^{y}/n. \tag{6.54}$$

При расчетах можно принимать $y \approx 1{,}5\sqrt{n}$ при $R < 1$ м; $y \approx 1{,}3\sqrt{n}$ при $3 > R > 1$ м. При значениях $R > 3$ м формула Павловского неприменима.

Формулы Маннинга и Павловского установлены в результате наблюдений над движением воды в открытых руслах; они учитывают некоторые его особенности и справедливы лишь для квадратичной области турбулентного режима. Эти формулы и теперь применяют на практике, в основном в гидротехнике и водоснабжении.

Рассмотрим расчет безнапорных трубопроводов. Наиболее распространенными их сечениями являются: круглое (рис. 6.28, *а*), овоидальное (рис. 6.28, *б*) и лотковое (рис. 6.28, *в*). Эти сечения характеризуются следующей гидравлической особенностью: наибольшие расход и скорость в них имеют место не при полном, а при частичном заполнении. Объясняется это тем, что при заполнении верхней части подобных сечений смоченный периметр растет быстрее, чем площадь. Поэтому начинает уменьшаться гидравлический радиус, что приводит одновременно и к уменьшению скорости и расхода.

Для упрощения расчетов значения основных характеристик трубопроводов (площадь сечения F, гидравлический радиус R, модуль скорости W, модуль расхода K), зависящие от глубины наполнения h, могут быть вычислены для определенных форм сечения заранее.

Если обозначить W_0 и K_0 соответственно модуль скорости и модуль расхода трубопровода при полном его наполнении h_0, а W и K — их значения при некотором частичном наполнении h, можно найти отношения $W/W_0 = B$ и $K/K_0 = A$ в функции от h/h_0. Получающиеся при этом зависимости для трубопровода круглого сечения $A = f_1(h/h_0)$ и $B = f_2(h/h_0)$ представлены на рис. 6.29. Подобные графики могут быть построены и для трубопроводов других сечений.

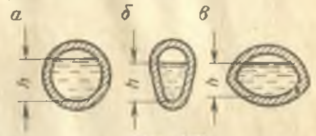


Рис. 6.28

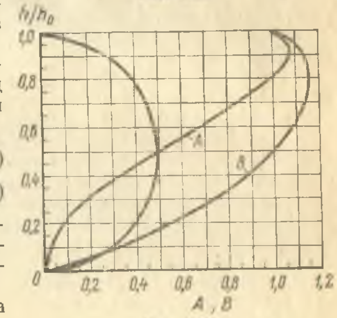


Рис. 6.29

Пользуясь указанными графиками, скорость v и расход Q при частичном наполнении можно найти по формулам:

$$v = BW_0\sqrt{i}; \tag{6.55}$$

$$Q = AK_0\sqrt{i}. \tag{6.56}$$

При гидравлическом расчете безнапорных трубопроводов встречаются задачи следующих основных типов:

1) определение расхода жидкости, пропускаемого данным трубопроводом;

2) определение уклона дна, необходимого для пропуска заданного расхода жидкости в трубопроводе заданного сечения с известной грубиной наполнения;

3) определение глубины наполнения трубопровода для пропуска данного расхода жидкости при известном уклоне дна.

Последовательность выполнения расчетов следующая.

Задачи первого типа. Последовательно вычисляют площадь сечения, смоченный периметр, гидравлический радиус, коэффициент Шези C_0, модуль расхода K_0 при полном наполнении h_0. Находят отношение h/h_0 и по графику (см. рис. 6.29) устанавливают соответствующий ему коэффициент A. По формуле (6.56) определяют искомый расход жидкости Q.

Задачи второго типа. Формуле (6.56) придают следующий вид:

$$i = Q^2/A^2K_0^2. \tag{6.57}$$

Все дальнейшие вычисления производят так же и в той же последовательности, что и в предыдущем случае. По формуле (6.57) определяют **уклон дна**.

Задачи третьего типа. Формулу (6.56) записывают в виде

$$A = Q/K_0\sqrt{i}\,. \tag{6.58}$$

Аналогично предыдущему определяют модуль расхода при полном наполнении K_0. По формуле (6.58) вычисляют коэффициент A, по графику устанавливают соответствующее ему значение отношения h/h_0, затем находят искомую глубину наполнения h.

Принципиально таким же образом и в той же последовательности выполняют гидравлические расчеты открытых каналов. Приступая к их расчету и выбирая форму сечения канала (если это не диктуется другими соображениями), следует учитывать, что при прочих равных условиях скорость течения жидкости в канале возрастает с увеличением его гидравлического радиуса.

Поэтому при одном и том же уклоне по каналу с заданной площадью живого сечения F будет проходить тем больший расход, чем большим будет гидравлический радиус сечения R. Для пропуска наиболее возможного при сечении F расхода форма сечения должна быть взята такой, чтобы смоченный периметр A оказался наименьшим (поскольку $R = F/A$).

Из геометрии известно, что при одной и той же площади меньшими периметрами обладают правильные многоугольники, причем их периметр будет тем меньше, чем больше число сторон. Наименьший периметр (из всех возможных) имеет круг, и для открытых каналов гидравлически наивыгоднейшим является сечение в форме полукруга. Затем идут сечения в форме половин правильных многоугольников, например половина шестиугольника, т. е. равнобочная трапеция с углом наклона боковых сторон $\alpha = 60°$. Из прямоугольных профилей наивыгоднейшим является сечение в виде половины квадрата.

Широкое распространение получили каналы трапецеидального сечения. Полукруглые или многогранные сечения применяются значительно реже из-за трудности их выполнения и значительной стоимости.

Следует учитывать, что при больших скоростях появляется опасность размыва стенок и дна каналов. При очень же малых скоростях взвешенные частицы (наносы), влекомые потоком (муть, мелкий песок и др.), могут выпадать и откладываться на дне. Поэтому при проектировании среднюю скорость движения жидкости в каналах следует ограничивать: наибольшую допускаемую скорость (исходя из требований прочности) — в зависимости от материала их стенок и дна, а наименьшую (для предотвращения возможного заиления) — в зависимости

от состава и характеристики наносов. Этой цели служат специальные формулы и таблицы.

На практике, например при сливе весьма вязких нефтей и нефтепродуктов и их течении в открытых лотках и безнапорных трубах, при решении некоторых задач в области химического и нефтезаводского аппаратостроения, приходится встречаться с ламинарным безнапорным движением жидкости. В этом случае оказывается возможным определить теоретическим путем потери напора (подобно тому, как при ламинарном движении в напорных трубах) и получить расчетные зависимости для расхода. Не приводя здесь соответствующих решений, математически весьма сложных и громоздких, ограничимся лишь сводкой формул для расчета каналов наиболее часто применяемых поперечных сечений.

По И. А. Чарному, для канала прямоугольного сечения при глубине потока h и ширине b расход жидкости может быть подсчитан по формуле

$$Q = 0{,}286\,\frac{gi}{\nu}\cdot\frac{b^3h^3}{b^2 + 4h_2}, \tag{6.59}$$

где i — уклон дна канала.

Если глубина потока весьма мала по сравнению с шириной,

$$Q = \frac{1}{3}\,\frac{gi}{\nu}\,h^4. \tag{6.60}$$

Для канала трапецеидальной формы гидравлически наивыгоднейшего сечения с углом $\alpha = 60°$

$$Q = 0{,}066\,\frac{gi}{\nu}\,b^4, \tag{6.61}$$

для полукруглого канала

$$Q = \frac{\pi}{16}\,\frac{gi}{\nu}\,r^4. \tag{6.62}$$

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

НЕНЬЮТОНОВСКИЕ ЖИДКОСТИ

§ 77. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Неньютоновскими, или аномальными, называют жидкости, которые не подчиняются основному закону внутреннего трения Ньютона.

Неньютоновские жидкости часто встречаются в природе и имеют весьма широкое применение в быту и технике. Следует особо подчеркнуть широкое использование неньютоновских жидкостей в нефтяной промышленности, где они применяются во многих производственных процессах, перемещаются по гидравлическим системам различного назначения и конструкции и характеризуются при этом большим разнообразием химического состава и физических свойств.

Основной характеристикой неньютоновских жидкостей являются так называемые *кривые течения*, или *реологические кривые* (*реограммы*), изображающие графически зависимость между градиентом скорости течения жидкости (или, что то же самое, скоростью сдвига) dv/dy (далее будем обозначать γ) и возникающим в ней касательным напряжением τ.

Кривые течения могут быть построены на основании обработки опытных данных, получаемых в результате проведения специальных исследований. Обычно для этой цели применяют ротационные или торсионные вискозиметры, принцип действия которых рассмотрен в § 39. Существуют различные методы проведения подобных исследований. Но все они имеют много общего и заключаются в следующем.

Один из цилиндров вискозиметра приводится во вращение и вызывает (благодаря вязкости) относительное движение (сдвиг) жидкости, находящейся в кольцевом межцилиндрическом пространстве. Вследствие этого на поверхности обоих цилиндров, как и в жидкости (между отдельными ее слоями), возникают касательные напряжения, приводящие к появлению крутящего момента, воспринимаемого вторым цилиндром.

В процессе опытов частоту вращения меняют (в современных конструкциях вискозиметров — в весьма широких пределах), одновременно меняются значения крутящего момента. Полученные данные фиксируют и по ним путем пересчета определяют относительные скорости сдвига, т. е. градиенты скорости, и касательные напряжения, необходимые для построения кривых течения.

Для ньютоновских жидкостей кривые течения носят линейный характер. Они описываются уравнением (1.13) и изображаются на графике прямыми линиями, проходящими через начало координат (рис. 7.1). Вязкость этих жидкостей определяется углом наклона соответствующей прямой реограммы к горизонтальной оси

$$\mu = \operatorname{ctg}\alpha = \tau/\gamma \tag{7.1}$$

и является единственной постоянной, полностью характеризующей реологические свойства жидкости при данных температуре и давлении независимо от градиента скорости. Подчеркнем, что именно об этой, ньютоновской вязкости шла речь в § 4 и именно она входит во все установленные выше расчетные зависимости и уравнения.

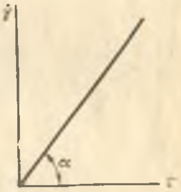


Рис. 7.1

Кривые течения неньютоновских жидкостей весьма многообразны и в общем случае не являются линейными. Расположение этих кривых на графике и их форма (рис. 7.2) определяют класс неньютоновской жидкости и характеризуют особенности ее течения. Кривая *1* на рис. 7.2 представляет дилатантные жидкости; *2* — обычную ньютоновскую жидкость; *3* — псевдопластичные жидкости; *4* — вязко-пластичные жидкости *.

Кривые течения псевдопластичных и дилатантных жидкостей хорошо описываются степенной зависимостью вида

$$\tau = k\gamma^n, \tag{7.2}$$

где k, n — постоянные для данной жидкости величины; k — мера консистенции жидкости (чем выше вязкость, тем больше значение k); n — характеристика степени неньютоновского поведения жидкости (чем больше значение n отличается от единицы — ньютоновская жидкость, тем сильнее проявляются ее неньютоновские свойства; для псевдопластичной жидкости $n<1$, для дилатантной $n>1$).

Для характеристики реологических свойств неньютоновских жидкостей часто вводится понятие *эффективной кажущейся вязкости*. Это некоторая условная характеристика, используемая при выполнении расчетов по обычным формулам гидравлики ньютоновских жидкостей. Она даже для данной жидкости не является постоянной величиной. Ее значения зависят от градиента скорости γ и напряжения сдвига τ и определяются

* Эти жидкости рассматриваются в § 78.

на реограмме углами β наклона прямых, соединяющих начало координат с точками кривой течения (рис. 7.3):

$$\mu_э = \mathrm{ctg}\,\beta = \tau/\gamma. \tag{7.3}$$

У псевдопластичных жидкостей эффективная вязкость $\mu_э$ с увеличением τ или γ уменьшается. Эти жидкости при течении как бы разжижаются. У дилатантных жидкостей, наоборот, при возрастании τ или γ вязкость $\mu_э$ увеличивается, жидкости при течении загустевают. Подчеркнем при этом, что значения вязкости определяются здесь только мгновенным состоянием сдвига.

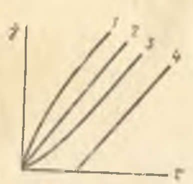


Рис. 7.2

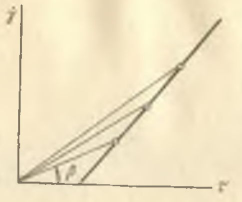


Рис. 7.3

Примерами псевдопластичных жидкостей являются расплавы полимеров, а дилатантных — различного рода лакокрасочные покрытия.

Для многих реальных жидкостей связь между напряжением и скоростью сдвига зависит также от времени действия напряжения и предыстории жидкости. Величина их эффективной вязкости определяется не только скоростью сдвига, но и его продолжительностью.

Различают два класса подобных жидкостей: тиксотропные и реопектические.

Тиксотропные жидкости при деформировании с постоянной скоростью сдвига достигают через некоторое время (обычно длительное) состояния стационарного течения, причем их эффективная вязкость при этом уменьшается. У жидкостей *реопектических* при таком деформировании, наоборот, наблюдается увеличение вязкости.

Тиксотропия является обратимым процессом, и после прекращения деформирования структура жидкости и ее реологические свойства постепенно восстанавливаются.

Существует также обширный класс жидкостей, проявляющих при деформировании одновременно как вязкие, так и упругие свойства. Таковы, например, смолы, битумы. Их обычно называют вязко-упругими.

§ 78. ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНЫЕ ЖИДКОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

Ограничимся рассмотрением лишь одного, наиболее важного и интересного для нефтяной промышленности класса неньютоновских жидкостей — вязко-пластичных.

Подобные жидкости известным образом совмещают в себе свойства как вязкой ньютоновской жидкости, так и твердого пластичного тела. К их числу, например, относятся различного рода суспензии и коллоидальные растворы, состоящие из двух фаз — твердой и жидкой, глинистые и цементные растворы, парафинистые нефти.

Свойства ньютоновской жидкости рассмотрены выше. Остановимся на понятии идеального пластичного тела. В таком пла-

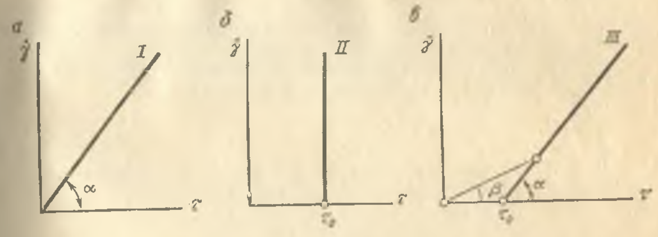


Рис. 7.4

стичном теле при малых действующих нагрузках и, следовательно, незначительных напряжениях возникают упругие деформации. После снятия нагрузки эти деформации исчезают и тело восстанавливает свою первоначальную форму. Когда напряжение достигает некоторого предельного значения τ_0, называемого *пределом текучести*, или *начальным напряжением сдвига*, пластичное тело начинает течь. В дальнейшем это напряжение сохраняется постоянным при любых значениях относительной скорости сдвига.

Кривая течения подобного идеального пластичного тела представляет прямую, параллельную оси ординат и отстоящую от нее на расстоянии τ_0 (кривая *II* на рис. 7.4, *б*). Ее уравнение

$$\tau = \tau_0. \tag{7.4}$$

Если теперь просуммировать абсциссы этой кривой и кривой *I* (рис. 7.4, *а*) течения ньютоновской жидкости, как это показано на рис. 7.4, *в*, получим кривую *III* течения вязко-пластичной жидкости. Течение вязко-пластичной жидкости, как и идеального пластичного тела, начинается при напряжении, равном начальному напряжению сдвига τ_0, и продолжается при напряжениях, изменяющихся по линейному закону, как у обычных ньютоновских жидкостей. Уравнение такой кривой представляет собой комбинацию выражений (1.13) и (7.4) и имеет следующий вид:

$$\tau = \tau_0 + \mu_{пл}\gamma. \qquad (7.5)$$

В честь американского ученого Бингама, установившего в 1916 г. эту зависимость и описавшего свойства вязко-пластичной жидкости, ее обычно называют *бингамовской жидкостью**.

Реологические свойства бингамовской жидкости характеризуются двумя основными параметрами:

начальным напряжением сдвига τ_0 (на реограмме — отрезок оси абсцисс, отсекаемый кривой течения от начала координат);

бингамовской, или пластической, вязкостью, определяемой по углу α наклона кривой течения к той же оси

$$\mu_{пл} = \operatorname{ctg}\alpha = (\tau - \tau_0)/\gamma. \qquad (7.6)$$

При гидравлических расчетах используется также установленное ранее понятие эффективной (кажущейся) вязкости, которая в этом случае определяется выражением

$$\mu_э = \operatorname{ctg}\beta = \mu_{пл} + \tau_0/\gamma. \qquad (7.7)$$

Механизм поведения бингамовских жидкостей можно объяснить образованием в покоящейся жидкости жесткой пространственной решетки (например, у парафинистых нефтей из кристаллов парафина), заполненной жидкой фазой (нефтью). Жесткость этой решетки (структуры) такова, что она приводит к полной потере подвижности и достаточна, чтобы сопротивляться любому напряжению, не превосходящему τ_0.

Если напряжение превышает τ_0, структура разрушается и система ведет себя как обычная ньютоновская жидкость при напряжениях сдвига $\tau - \tau_0$. Когда напряжение сдвига становится меньше τ_0, структура снова восстанавливается.

Естественно, что подобное представление о бингамовской жидкости является в известной степени условным и схематизированным. Однако оно оказывается весьма удобным для практических целей, так как многие реальные жидкости весьма близки к этой схеме, характеризуются теми же основными свойствами, что и бингамовская жидкость, и имеют однотипные с нею по своей форме кривые течения.

---

* Отметим, что значительно раньше, еще в 1885 г., это понятие было дано Ф. Н. Шведовым.

Многие вязко-пластичные жидкости являются жидкостями тиксотропными, их начальное напряжение сдвига в значительной степени зависит от времени нахождения жидкости в покое. Как правило, с течением времени консистенция этих жидкостей изменяется, они как бы «застудневают» и их начальное напряжение сдвига увеличивается. Поэтому в общем случае (рис. 7.5, *а*) необходимо различать статическое начальное напряжение сдвига $\tau_{0\,ст}$, характеризующее напряжение в начальный момент движения, когда жидкость выводится из состояния покоя, и динамическое начальное напряжение сдвига $\tau_{0\,д}$ — минимальное напряжение, необходимое для движения, если рассматривать жидкость как бингамовскую, т. е. если кривая течения будет полностью заменена прямой линией (показана пунктиром).

Следует иметь в виду, что в лабораторных условиях ввиду ограниченной чувствительности измерительных приборов начальный участок кривой течения (вблизи $\tau_{0\,ст}$), соответствующий весьма малым значениям градиентов скорости $\dot{\gamma}$, часто не

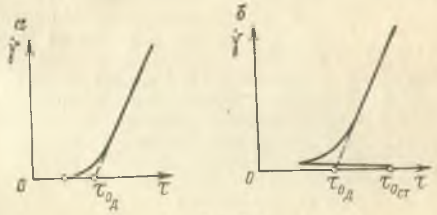


Рис. 7.5

удается получить и кривая течения представляется в виде, изображенном на рис. 7.5, *б*.

Статическое начальное напряжение сдвига необходимо для решения различных задач, в которых рассматриваются начальные (пусковые) стадии движения. Примером подобной задачи может служить расчет процесса выталкивания насосами застывшей парафинистой нефти из остановленного трубопровода.

Во всех остальных случаях при обычных расчетах, связанных с движением вязко-пластичных жидкостей в различных гидравлических системах, используют динамическое начальное напряжение сдвига и фактор тиксотропии не учитывают.

Отметим также, что, если подвергнуть вязко-пластичную жидкость вибрационному воздействию, ее начальное напряжение сдвига можно свести к нулю. Кривая течения при этом сдвинется влево и пройдет через начало координат, т. е. примет форму кривых течения ньютоновских жидкостей.

§ 79. СТАТИКА ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Из сказанного выше следует, что касательные напряжения (напряжения сдвига) существуют и в покоящейся вязко-пластичной жидкости, что приводит к ряду, на первый взгляд, несколько необычных явлений, отличающих статику этих жидкостей от статики жидкостей ньютоновских, основным условием равновесия которых, как известно (см. § 5), является обязательное равенство этих напряжений нулю.

В связи с этим представляется интересным рассмотреть некоторые задачи статики вязко-пластичных жидкостей, имеющие не только теоретическое, но и известное практическое значение.

Сообщающиеся сосуды. Предположим (рис. 7.6), что стеклянная U-образная трубка внутренним диаметром d заполняется через правое колено вязко-пластичной жидкостью, плотность которой ρ, а начальное напряжение сдвига τ_0. В некоторый момент времени в этой трубке установится равновесие, причем уровни жидкости в обоих ее коленах будут различными: высота стояния жидкости в правом колене будет больше, чем в левом, на некоторую величину H.

Рис. 7.6

Обозначим L длину столба жидкости в трубке и, пренебрегая ее кривизной, составим уравнение равновесия, считая, что вес столба жидкости высотой H уравновешивается касательной силой сдвига, возникающей на поверхности соприкосновения всего объема жидкости, заполняющей трубку, с ее стенками. Получим

$$H\frac{\pi d^2}{4}\rho g = \pi d L \tau_0,$$

откуда

$$H = 4\tau_0 L/d\rho g. \tag{7.8}$$

Таким образом, в отличие от ньютоновских жидкостей, для которых высоты стояния в обоих коленах были бы одинаковы, в жидкостях вязко-пластичных всегда будет существовать разность уровней в этих коленах, зависящая как от их формы и размеров, так и от физических свойств самой жидкости.

Уравнение (7.8) можно решить также относительно τ_0:

$$\tau_0 = Hd\rho g/4L, \tag{7.9}$$

и использовать рассмотренное устройство в качестве простейшего прибора для определения начального напряжения сдвига*.

Для этой цели был предложен прибор, также основанный на принципе сообщающихся сосудов, состоящий из двух концентрических цилиндров (рис. 7.7). В случае вязко-пластичной жидкости положение уровней в этих цилиндрах всегда будет различным, уровень во внутреннем цилиндре (если жидкость заливают в него) будет выше уровня в наружном цилиндре на некоторую величину H, представляющую собой, как и ранее, напор, уравновешивающий касательную силу, обусловливаемую начальным напряжением сдвига. Это напряжение, по А. Х. Мирзаджанзаде, определяется выражением

$$\tau_0 = \frac{\rho g H (D - d - 2\delta)}{4\,[(D - 2\delta)(L + H) - hd]}, \tag{7.10}$$

где δ — толщина стенки внутреннего цилиндра; остальные размеры см. на рис. 7.7. Расстояние l от нижней кромки внутреннего цилиндра до дна наружного цилиндра выбирают конструктивно.

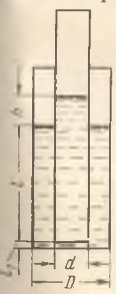


Рис. 7.7

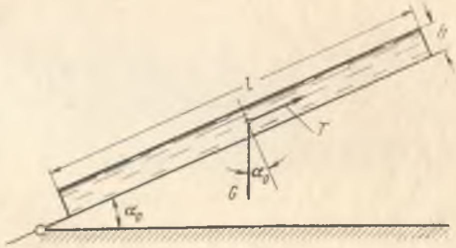


Рис. 7.8

Наклонная плоскость. Предположим, что на наклонной плоскости, шарнирно соединенной с неподвижной горизонтальной плоскостью, находится слой вязко-пластичной жидкости (рис. 7.8). Толщина этого слоя пусть будет h, плотность жидкости ρ.

При малых значениях угла наклона жидкость на плоскости будет находиться в покое. Изменяя этот угол, рассмотрим такое предельное положение плоскости, при котором жидкость начнет

* Необходимо подчеркнуть, что, если жидкость тиксотропная, показания прибора будут зависеть от времени нахождения в нем жидкости: с увеличением времени будет сказываться эффект загустевания и значение τ_0 будет расти.

двигаться, «поползет». Очевидно, это произойдет тогда, когда касательные напряжения в нижней части слоя станут равными (или превзойдут) начальное напряжение сдвига жидкости $\tau \geqslant \tau_0$.

Уравнение равновесия для этого случая будет иметь вид

$$\sum x = G \sin \alpha_0 - T = 0,$$

где $G = \rho glbh$ — вес слоя жидкости; l, b — длина и ширина слоя жидкости; α_0 — угол наклона плоскости, соответствующий началу движения; $T = \tau_0 bl$ — касательная сила сопротивления сдвигу; ось x параллельна жидкости.

Тогда $\rho glbh \sin \alpha_0 = \tau_0 bl$, откуда

$$\sin \alpha_0 = \tau_0 / \rho gh \tag{7.11}$$

и, следовательно,

$$\alpha_0 = \arcsin \tau_0 / \rho gh. \tag{7.12}$$

Из уравнения (7.11) можно также найти

$$\tau_0 = \rho gh \sin \alpha_0 \tag{7.13}$$

и, таким образом, применить рассматриваемое устройство для измерения начального (в данном случае статического) напряжения сдвига.

§ 80. ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНЫХ ЖИДКОСТЕЙ ПО ТРУБАМ

Движение неньютоновских жидкостей по трубам и лоткам характеризуется рядом особенностей по сравнению с движением обычных ньютоновских жидкостей. Как показывает опыт, для начала движения неньютоновской жидкости необходимо создать некоторую определенную разность напоров, соответствующую (см. § 79) равенству возникающего в жидкости касательного напряжения τ и ее начального напряжения сдвига τ_0. При этом вся масса жидкости отрывается от стенок трубы или лотка и движется первоначально как одно целое (как твердое тело) с одинаковыми скоростями для всех частиц.

Рассмотрим этот случай и определим разность напоров, необходимую для начала движения неньютоновской (бингамовской) жидкости, заполняющей горизонтальный цилиндрический трубопровод длиной l и диаметром d. Давление в концевых сечениях трубопровода обозначим p_1 и p_2, плотность и удельный вес жидкости ρ и γ, ее начальное напряжение сдвига τ_0.

Поскольку в рассматриваемом случае силы трения будут возникать только у стенок трубы на боковой поверхности выделенного объема жидкости и равнодействующая этих сил $T = \tau_0 \pi dl$,

то уравнение равновесия, составленное для системы сил, действующих на этот объем, по аналогии с выводом общего выражения для потерь напора при равномерном движении (см. § 36), будет иметь вид

$$p_1 \pi d^2/4 - p_2 \pi d^2/4 - \tau_0 \pi dl = 0.$$

Отсюда получим следующие выражения:

для разности давлений на концах трубопровода

$$\Delta p = p_1 - p_2 = 4\tau_0 l/d, \tag{а}$$

для разности напоров в тех же сечениях

$$\Delta H = H_1 - H_2 = 4\tau_0 l/\rho gd = 4\tau_0 l/\gamma d. \tag{б}$$

Таким образом, если

$$\Delta H = H_1 - H_2 \geqslant 4\tau_0 l/\rho gd, \tag{в}$$

жидкость в трубопроводе будет двигаться, причем в зависимости от приложенной разности напоров $H_1 - H_2$ здесь возможны три режима ее движения: структурный, ламинарный и турбулентный.

Выражение (*в*) является исходным при исследовании начальных стадий движения (например, для расчета процесса выталкивания застывшей высокопарафинистой нефти из остановленного трубопровода). При этом, как уже указывалось, под τ_0 следует понимать статическое начальное напряжение сдвига $\tau_{0\ \text{ст}}$. Во всех остальных случаях движения неньютоновских жидкостей по трубам $\tau_0 = \tau_{0\ \text{д}}$.

Поясним определение структурного режима.

Вначале при соблюдении равенств (а) и (б) весь поток жидкости движется целиком как твердое тело с одинаковой скоростью по всему поперечному сечению. По мере увеличения разности напоров ΔH возрастает и скорость движения жидкости. В ближайших к стенкам трубы частях потока развивается ламинарный режим, а в центральной части (так называемом центральном ядре) жидкость по-прежнему продолжает двигаться как твердое тело. Такой режим движения, характеризующийся наличием центрального ядра, называется *структурным.*

Радиус центрального ядра может быть найден путем рассуждений, аналогичных сделанным выше, и определяется выражением

$$r_0 = 2\tau_0 l/\Delta p = 2\tau_0 l/\rho g \Delta H. \tag{7.14}$$

При дальнейшем возрастании ΔH область ламинарного режима будет расширяться, размеры же центрального ядра — со-

9 Заказ № 1363

ответственно уменьшаться. Повышая ΔH, можно достичь того, что структурный режим полностью перейдет в ламинарный (что соответствует значению $r_0=0$).

В дальнейшем в трубопроводе начнет развиваться турбулентный режим, наиболее часто встречающийся на практике.

Следует отметить, однако, что в действительности турбулентность начинает зарождаться в потоке еще при наличии центрального ядра, поэтому полностью ламинарного режима обычно не существует и структурный режим переходит непосредственно в турбулентный.

Установим закон распределения скоростей в поперечном сечении трубы при структурном режиме. Для этого будем исходить из общего уравнения (4.24).

В рассматриваемом случае, как это следует из выражения (7.5), функция $f(\tau)$ имеет вид *

$$f(\tau)=\frac{\tau-\tau_0}{\mu_{пл}}=\frac{\tau-\tau_0}{\mu}. \tag{7.15}$$

Следовательно, указанное уравнение можно переписать следующим образом:

$$v_y=\frac{r}{\tau_r}\int_{\tau}^{\tau_r}\frac{\tau-\tau_0}{\mu}\,d\tau. \tag{7.16}$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$v_y=\frac{r}{\tau_r\mu}\left|\frac{\tau^2}{2}-\tau_0\tau\right|_{\tau}^{\tau_r}=\frac{r}{\mu}\frac{\tau_r^2}{\tau_r}\left|\frac{\tau^2}{2}-\tau_0\tau\right|_{\tau}^{\tau_r}=\frac{r\tau_r}{\mu}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\tau^2}{\tau_r^2}\right)-\frac{\tau_0}{\tau_r}\left(1-\frac{\tau}{\tau_r}\right)\right].$$

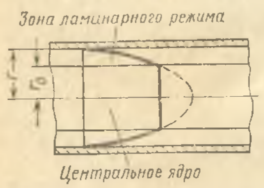


Рис. 7.9

Учитывая далее соотношения (4.9) и (4.21), после ряда несложных преобразований, получим формулу для распределения скоростей при структурном режиме:

$$v_y=\frac{\Delta p}{4\mu L}(r^2-y^2)-\frac{\tau_0}{\mu}(r-y). \tag{7.17}$$

Кривая скоростей, соответствующая этой формуле, представлена на рис. 7.9. Она состоит из двух частей: двух параболических ветвей у стенок в зоне ламинарного режима и прямолинейного участка в центральном ядре.

---

* Здесь и далее μ — пластическая вязкость жидкости.

Для определения скорости движения центрального ядра в формуле (7.17) необходимо принять $y=r_0$, при этом получаем

$$v_0=\frac{\Delta p}{4\mu L}(r^2-r_0^2)-\frac{\tau_0}{\mu}(r-r_0). \tag{7.18}$$

В частном случае, когда $\tau_0=0$, выражение (7.17) превращается в обычную формулу Стокса для ламинарного режима (ей соответствует пунктирная кривая на рис. 7.9).

Расход жидкости при структурном режиме может быть определен интегрированием уравнения (4.34). Введя сюда вместо $f(\tau)$ его значение из уравнения (7.15), будем иметь:

$$Q=\frac{\pi r^3}{\tau_r^3\mu}\int(\tau-\tau_0)\,\tau^2d\tau. \tag{7.19}$$

Интегрируя уравнение (7.19) в пределах от $\tau=\tau_r$ до $\tau=\tau_0$, получаем:

$$\frac{Q\tau_r^3}{\pi r^3}=\frac{1}{\mu}\left[\int_{\tau_0}^{\tau_r}\tau^3d\tau-\int_{\tau_0}^{\tau_r}\tau_0\tau^2d\tau\right]=\frac{1}{\mu}\left[\left|\frac{\tau^4}{4}\right|_{\tau_0}^{\tau_r}-\left|\frac{\tau_0\tau^3}{3}\right|_{\tau_0}^{\tau_r}\right]=$$
$$=\frac{1}{\mu}\left[\frac{\tau_r^4}{4}+\frac{\tau_0^4}{12}-\frac{\tau_0\tau_r^3}{4}\right],$$

откуда после замены τ_r его значением (4.9) найдем

$$\frac{Q}{\pi r^3}=\frac{\tau_r}{\mu}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\left(\frac{\tau_0}{\tau_r}\right)^4-\frac{1}{3}\frac{\tau_0}{\tau_r}\right]$$

или

$$Q=\frac{\pi d^4\Delta p}{128\mu L}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{4\tau_0L}{d\Delta p}\right)^4-\frac{4}{3}\left(\frac{4\tau_0L}{d\Delta p}\right)\right]. \tag{7.20}$$

Выражение (7.20) называют формулой Букингема. Представим его в более удобном для практического использования виде

$$Q=\frac{\pi r^4}{8\mu L}\left[\Delta p+\frac{1}{3}\frac{\Delta p_0^4}{\Delta p^3}-\frac{4}{3}\Delta p_0\right]. \tag{7.21}$$

Напомним, что здесь Δp — приложенная разность давлений; Δp_0 — разность давлений, соответствующая началу движения жидкости, вычисляемая по формуле (а). Подчеркнем также, что формула Букингема не может быть непосредственно разрешена относительно перепада давления Δp.

Практически при значительном перепаде давления, что часто наблюдается в реальных условиях, вторым членом в формуле (7.21) вследствие его малости можно пренебречь. При этом формула Букингема принимает более простой вид

$$Q=\frac{\pi r^4}{8\mu L}\left[\Delta p-\frac{4}{3}\Delta p_0\right]. \tag{7.22}$$

Из этой формулы легко получаем

$$\Delta p = 8\mu LQ/\pi r^4 + 4\Delta p_0/3. \tag{7.23}$$

После замены в выражении (7.23) Δp_0 его значением (а), ряда подстановок и несложных преобразований приходим к следующему выражению для определения потери напора:

$$h_{\text{тр}} = 32\nu Lv/gd^2 + 16\tau_0 L/3\rho gd. \tag{7.24}$$

Применим далее использовавшийся выше прием: сопоставим выражение (7.24) с общепринятым в гидравлике выражением для потери напора — формулой Дарси — Вейсбаха (4.14). Имеем

$$32\mu Lv/\rho gd^2 + 16\tau_0 L/3\rho gd = \lambda Lv^2/d2g.$$

Отсюда для коэффициента гидравлического сопротивления найдем

$$\lambda = 64\mu/\rho vd + 32\tau_0/3\rho v^2 = 64/\mathrm{Re}^*, \tag{7.25}$$

где Re^* — обобщенный критерий Рейнольдса. В рассматриваемом случае

$$\mathrm{Re}^* = \frac{\mathrm{Re}}{1 + (1/6)\,(\tau_0 d/\mu v)} = \frac{\mathrm{Re}}{1 + (1/6)\,\mathrm{Sen}}, \tag{7.26}$$

где $\mathrm{Sen} = \tau_0 d/\mu v$ — число (критерий) Сен-Венана (Ильюшина) — характеристика пластических свойств жидкости.

Таким образом, при течении по трубам вязко-пластичных жидкостей, при ламинарном и структурном режимах, потери напора на трение по длине потока можно определять по обычно применяемой для этой цели формуле Дарси — Вейсбаха (4.14). При этом коэффициент гидравлического сопротивления следует находить по формуле (7.25), в которой обычное число Рейнольдса заменено обобщенным числом (критерием) Рейнольдса Re^*, учитывающим одновременно как вязкие, так и пластические свойства жидкости.

Подобный метод весьма удобен, его широко применяют при практических расчетах ввиду простоты и наглядности.

Следует, однако, подчеркнуть, что выражение (7.26) для Re^* является приближенным, поскольку оно получено без учета третьего члена формулы Букингема (7.21), что отрицательно сказывается на точности получаемых результатов.

Существуют выражения для Re^*, дающие более точные результаты. Одно из них, установленное Е. З. Рабиновичем, имеет вид

$$\mathrm{Re}^* = \frac{\mathrm{Re}}{0,125\,\mathrm{Sen} + 1,5/a + \sqrt{(1,5/a)^2 + 0,375\,\mathrm{Sen}/a}}, \tag{7.27}$$

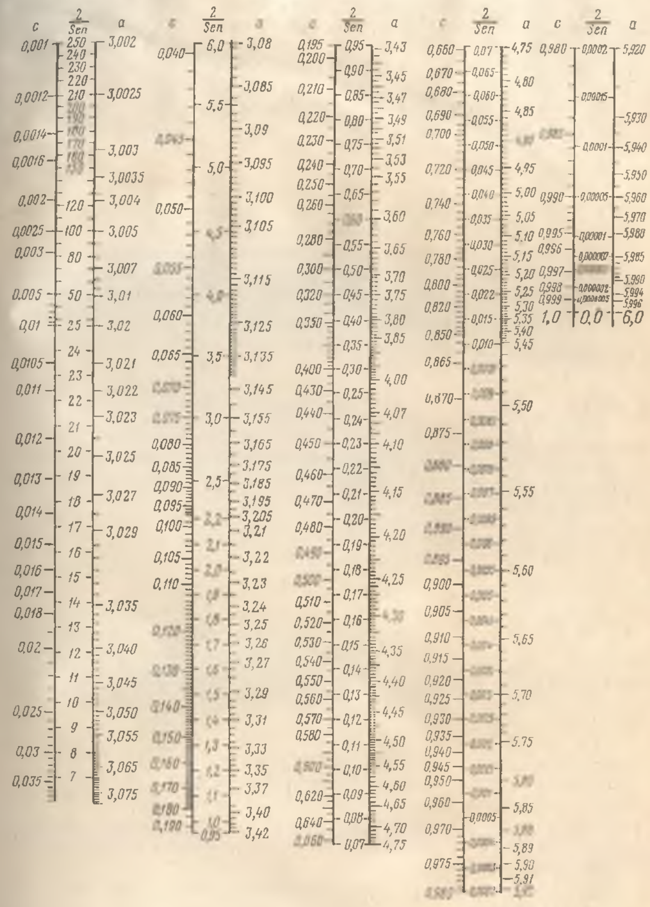


Рис. 7.10

где a — так называемая структурная характеристика потока, зависящая от отношения $r_0/r=c$ и изменяющаяся в пределах от 3 (при $c=0$) до 6 (при $c=1$); значения a находят по номограмме, приведенной на рис. 7.10. Для пользования этой номограммой необходимо определить Sen и по значению 2/Sen на правой стороне номографической шкалы найти соответствующее значение a.

При турбулентном режиме для определения коэффициента λ применяют формулы типа

$$\lambda = B/\mathrm{Re}^{*n}, \tag{7.28}$$

где коэффициент B и показатель степени n наиболее достоверно устанавливаются по опытным данным.

Так, по Б. С. Филатову, в среднем можно принимать для неутяжеленного глинистого раствора $B=0{,}1$, $n=0{,}15$; для утяжеленного глинистого раствора $B=0{,}0025$, $n=-0{,}2$. При этом формула (7.28) принимает вид

$$\lambda = 0{,}1\,\mathrm{Re}^{*\,-0{,}15} \tag{7.29}$$

и

$$\lambda = 0{,}0025\,\mathrm{Re}^{*0{,}2}. \tag{7.30}$$

Для расчета трубопроводов при движении по ним глинистых и цементных растворов широко используют также формулу Б. И. Мительмана:

$$\lambda = 0{,}08\,\mathrm{Re}^{*\,-\frac{1}{7}}. \tag{7.31}$$

Ее применяют при значениях $\mathrm{Re}^* = 2500 \div 40\,000$.

Коэффициент λ (как при структурном и ламинарном, так и при турбулентном режимах) можно определить по обычным формулам гидравлики ньютоновских жидкостей (4.41) и (4.87), вводя в них вместо Re так называемое эффективное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_э$, определяемое по эффективной (кажущейся) вязкости $\mu_э$ (см. § 77).

В заключение отметим, что режим течения неньютоновских жидкостей устанавливается по критическому значению обобщенного числа Рейнольдса. До сих пор, однако, этот вопрос не нашел своего окончательного решения. Одни исследователи считают, что для неньютоновских жидкостей $\mathrm{Re}^*_{кр}$ имеет бо́льшее значение, чем для ньютоновских, другие придерживаются противоположной точки зрения.

При практических расчетах часто поступают следующим образом. По формуле

$$v_{кр} = 0{,}25\sqrt{\tau_0/\rho g} \tag{7.32}$$

находят так называемую критическую скорость и, сравнивая ее со средней скоростью потока v, устанавливают характер режима: при $v<v_{кр}$ — режим структурный, при $v>v_{кр}$ — режим турбулентный.

§ 81. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ ГИДРАВЛИКИ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Движение вязко-пластических жидкостей в кольцевом пространстве

При бурении нефтяных и газовых скважин, как указывалось выше (см. § 53), промывочные жидкости (обычно глинистые растворы, представляющие собой вязко-пластичные жидкости) движутся в кольцевом, межтрубном пространстве.

Е. М. Соловьев предлагает при ламинарном режиме определять потери напора в кольцевом пространстве по формуле Дарси — Вейсбаха (4.14) с заменой в ней диаметра трубы d эквивалентным диаметром:

$$d_э = 2\sqrt{r_2^2 + r_1^2 + (r_2^2 - r_1^2)/\ln r_2/r_1}. \tag{7.33}$$

При структурном режиме для определения коэффициента гидравлического сопротивления им же рекомендуется формула (7.25), в которой

$$\mathrm{Re}^* = \frac{\rho v d_э}{\mu\left[1 + \psi\frac{\tau_0(r_2 - r_1)}{\mu v_{ср}}\right]}, \tag{7.34}$$

где

$$\Psi = \frac{r_2^2 + r_2 r_1 + r_1^2}{3(r_2^2 - r_1^2)} - \frac{1}{\ln r_2/r_1}. \tag{7.35}$$

В формулах (7.33) — (7.35) r_1, r_2 — радиусы (соответственно внутренний и внешний) кольцевого пространства.

Б. И. Мительман на основании большого числа экспериментальных исследований также для структурного режима получил формулу

$$\lambda = 80/\mathrm{Re}^*, \tag{7.36}$$

в которой

$$\mathrm{Re}^* = \frac{v_{ср}\rho(r_2 - r_1)}{\mu[1 + \tau_0(r_2 - r_1)/6\mu v]}. \tag{7.37}$$

Движение вязко-пластичных жидкостей в открытых каналах. Расход вязко-пластичной жидкости при ее течении в открытых каналах прямоугольного сечения при структурном режиме может быть найден по приближенной формуле Р. И. Шищенко:

$$Q = v_0 B h\left[1 - \frac{h}{2R}\left(1 - \frac{i_0}{i}\right)\right], \tag{7.38}$$

где v_0 — скорость течения ядра потока;

$$v_0 = \frac{i\rho g R h^2}{2\mu}\left(1 - \frac{i_0^2}{i^2}\right) - \frac{\tau_0 R}{\mu}\left(1 - \frac{i_0}{i}\right);$$

B — ширина канала; h — глубина его наполнения; R — гидравлический радиус сечения; i_0 — гидравлический уклон, соответствующий началу течения; $i_0 = \tau_0/\rho g h$; i — уклон дна канала.

Формула (7.38) установлена для течения в каналах глинистых растворов и может быть, в частности, использована для гидравлических расчетов желобной системы, применяемой в бурении для очистки этих растворов от выбуренной породы.

Если при расчете исходить из формулы Шези (4.11), значение коэффициента C для этого случая рекомендуется определять по выражению, полученному Ф. А. Шихалиевым:

$$C = 3{,}4\,\mathrm{Re}^{*0,362}, \tag{7.39}$$

где

$$\mathrm{Re}^* = \frac{4\rho g R v}{\mu g\,(1 + 4R\tau_0/2v\mu)}. \tag{7.40}$$

Истечение вязко-пластичных жидкостей из отверстий. Опыты проведенные Р. И. Шищенко показывают, что коэффициент расхода при истечении глинистых растворов из отверстий в тонкой стенке, как правило, оказывается больше, чем при истечении воды. Результаты этих экспериментов представлены на рис. 7.11. Кривая *1* изображает здесь зависимость коэффициента расхода μ от напора H для глинистого раствора; кривая *2* представляет аналогичную зависимость для воды.

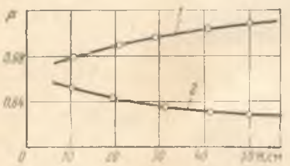


Рис. 7.11

Указанное явление (по Шищенко) объясняется тем, что в массе раствора, заполняющего сосуд, из которого происходит истечение, образуется две зоны: зона текущего раствора и ограничивающая ее зона неподвижного раствора. На границе этих зон устанавливается предельное равновесие — равенство касательных сдвиговых напряжений ($\tau = \tau_0$). При этом чем больше τ_0, тем более плавно осуществляется переход от широкого потока в сосуде к суженной струе в отверстии.

§ 82. ДВИЖЕНИЕ ПО ТРУБАМ НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ, ПОДЧИНЯЮЩИХСЯ СТЕПЕННОМУ РЕОЛОГИЧЕСКОМУ ЗАКОНУ

Для жидкостей, подчиняющихся степенному реологическому закону, функция напряжения сдвига (это следует из уравнения (7.2)) имеет вид

$$f(\tau) = (\tau/k)^{1/n}. \tag{7.41}$$

Подставим это значение в уравнение (4.24). Получим

$$v_y = \frac{r}{\tau_r}\int_{\tau}^{\tau_r}\left(\frac{\tau}{k}\right)^{1/n} d\tau. \tag{7.42}$$

Интегрируя последнее, находим:

$$v_y = \frac{r}{k^{1/n}\tau_r}\int_{\tau}^{\tau_r}\tau^{1/n} d\tau = \frac{n r \tau_r^{1/n}}{(n+1)\,k^{1/n}}\left[1 - \left(\frac{\tau}{\tau_r}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right],$$

что с учетом выражений (4.9) и (4.21) после ряда преобразований приводит к следующей формуле для распределения скоростей:

$$v_y = \frac{n}{n+1}\left(\frac{\Delta p}{2kL}\right)^{1/n}\left[r^{1/n+1} - y^{1/n+1}\right]. \tag{7.43}$$

Для определения расхода жидкости по-прежнему будем исходить из общего уравнения (4.34), которое после замены $f(\tau)$ его значением (7.41) получает вид

$$Q = \frac{\pi r^3}{\tau_r^3}\int\left(\frac{\tau}{k}\right)^{1/n}\tau^2 d\tau. \tag{7.44}$$

Интегрирование выражения (7.44) в пределах от $\tau = \tau_r$ до $\tau = 0$ дает

$$Q = \frac{\pi r^3}{\tau_r^3 k^{1/n}}\int_0^{\tau_r}\tau^{1/n}\tau^2 d\tau = \frac{n\pi r^3}{3n+1}\left(\frac{\tau_r}{k}\right)^{1/n} \tag{7.45}$$

или после замены τ_r его значением (4.9)

$$Q = \frac{n\pi r^{\frac{3n+1}{n}}}{3n+1}\left(\frac{\Delta p}{2Lk}\right)^{1/n}. \tag{7.46}$$

Отсюда

$$\Delta p = \frac{(3n+1)^n Q^n 2Lk}{(\pi n)^n\, r^{3n+1}} \tag{7.47}$$

и, следовательно, потеря напора на трение

$$h_{\text{тр}} = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{(3n+1)^n Q^n 2Lk}{\rho g\,(\pi n)^n r^{3n+1}}. \tag{7.48}$$

Сопоставим теперь, как и ранее, выражение (7.48) с формулой Дарси — Вейсбаха (4.14). Получим следующее выражение для коэффициента гидравлического сопротивления:

$$\lambda = \frac{(3n+1)^n\, 2^{n+3} k}{n^n \rho d^n v^{2-n}}, \tag{7.49}$$

или, представляя его в обычной, общепринятой в гидравлике форме (4.40), найдем, что

$$\mathrm{Re}^* = \frac{64 n^n \rho d^n v^{2-n}}{(3n+1)^n\, 2^{n+3} k}. \tag{7.50}$$

Легко убедиться, что при $k=\mu$, $n=1$ (случай ньютоновской жидкости) выражения (7.48) — (7.50) обращаются в обычные формулы ламинарного режима.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ

§ 83. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Решение дифференциальных уравнений гидродинамики связано со значительными трудностями и оказывается возможным лишь для отдельных частных случаев и при целом ряде упрощающих предпосылок и допущений.

В связи с этим в гидравлике аналитический метод исследования большого и решающего значения пока не получил и применение математического анализа ограничивается в основном формулировкой задачи, т. е. составлением уравнений, описывающих исследуемый процесс, и установлением так называемых красвых условий (или, иначе, условий однозначности). Последние конкретизируют рассматриваемую задачу и однозначно определяют ее, давая математическое описание частных особенностей процесса.

Вследствие ограниченных возможностей аналитического метода в настоящее время при изучении различных гидравлических процессов широкое применение нашли экспериментальные методы исследования. При этом ставится цель — изучить исследуемый процесс и получить данные, необходимые для расчета других процессов, родственных изучаемому. Исследования обычно проводятся в лабораторных условиях на специально создаваемых для этой цели установках, определенным образом моделирующих как исследуемые устройства, так и происходящие в них физические процессы.

Следует различать два метода моделирования: физическое и математическое. При физическом моделировании исследуемая модель обычно выполняется в меньшем масштабе, чем оригинал (натура), и воспроизводит изучаемое явление с сохранением его физической природы.

Математическое моделирование осуществляется путем изучения явлений, имеющих иное, чем исследуемый процесс, физическое содержание, но описываемых аналогичными математическими уравнениями.

§ 84. ЗАКОНЫ МЕХАНИЧЕСКОГО ПОДОБИЯ

Для того, чтобы результаты экспериментальных исследований, выполненных на моделях, можно было затем обобщить и перенести на натуру, необходимо знать законы, связывающие между собой величины, полученные при исследованиях на моделях и соответствующие им величины в натуре.

Эти законы называются *законами подобия.* Они устанавливают определенные соотношения между геометрическими размерами, кинематическими и динамическими характеристиками потоков в модели и натуре. Законы подобия подробно изучаются в специальных курсах теории подобия и моделирования. Здесь уместно подчеркнуть большое теоретическое и практическое значение этой теории, она нужна не только для моделирования различных явлений и процессов, но прежде всего и для научно обоснованного планирования экспериментальных исследований, обработки их результатов и построения на их основе рациональных эмпирических формул.

Основные положения теории подобия и моделирования рассматриваются ниже.

Следует иметь в виду, что динамическое или вообще физическое подобие является обобщением геометрического подобия. Как известно из геометрии, две фигуры подобны в том случае, когда отношения всех соответственных размеров этих фигур одинаковы, т. е. когда размеры одной фигуры могут быть получены простым умножением размеров другой фигуры на некоторый масштабный коэффициент. Точно так же динамически или физически подобными явления будут тогда, когда по заданным характеристикам одного из них можно получить соответствующие характеристики другого путем простого умножения этих характеристик на соответствующие масштабные коэффициенты.

Установим значения этих коэффициентов. Предположим, что в общем случае имеются два сопоставляемых между собой потока жидкости. Пусть жидкости будут различны по своим физическим свойствам, т. е. имеют разные плотности и вязкости. Условимся величины, относящиеся к двум рассматриваемым потокам, соответственно обозначить индексами 1 и 2.

Для *геометрического подобия* необходимо, чтобы отношение любых сопоставляемых линейных размеров рассматриваемых потоков было одним и тем же. Так, если какой-нибудь линейный размер первого потока, например глубина, будет L_1, а соответствующий размер второго потока — L_2, то отношение

$$L_1/L_2 = k_L \tag{8.1}$$

должно сохраняться одинаковым и для соотношения любых других линейных размеров. Коэффициент k_L выражает здесь пропорциональность между линейными размерами обоих потоков и носит название *линейного масштаба.* Очевидно, в этом случае для площадей и объемов будут существовать следующие соотношения: $F_1 = k_L^2 F_2$ и $V_1 = k_L^2 V_2$.

Для *кинематического подобия* потоков необходимо, чтобы траектории, описываемые соответственными частицами обоих потоков (натуры и модели), были подобны геометрически. Так, если некоторая частица жидкости в первом потоке за время t_1 проходит участок траектории L_1, то соответствующая ей частица второго потока за некоторое другое время t_2 должна пройти отрезок траектории L_2, геометрически подобный отрезку L_1 (т. е. отрезок L_1 так же ориентирован в пространстве, как и отрезок L_2 и $L_1 = k_L L_2$). При этом отношение t_1/t_2 (времени перемещения соответственных точек в натуре и на модели) должно иметь постоянное и одинаковое значение для любых соответственных точек обоих потоков. Это отношение представляет собой масштаб времени. Обозначим его k_t.

Для скоростей указанных частиц жидкости легко получаем следующие выражения: $v_1 = L_1/t_1$; $v_2 = L_2/t_2$; $v_1/v_2 = L_1 t_2/t_1 L_2$. Но $L_1 = k_L L_2$ и $t_1 = k_t t_2$. Поэтому $v_1/v_2 = k_L L_2 t_2 / k_t L_2 t_2$ и, следовательно, масштаб скорости

$$k_V = k_L/k_t. \tag{8.2}$$

Аналогично находим, что масштаб ускорений

$$k_a = k_L/k_t^2. \tag{8.3}$$

Таким образом, скорости и ускорения соответственных точек кинематически подобных систем будут связаны соотношениями $v_1 = k_v v_2$ и $a_1 = k_a a_2$.

Для *динамического подобия* сравниваемых потоков необходимо, чтобы в соответствующих местах потоков были подобны действующие в них одноименные силы. Такими силами могут быть: силы внутреннего трения жидкости, силы тяжести, силы поверхностного натяжения и др.

Предположим, что по-прежнему имеются два потока жидкости, для которых соблюдены условия геометрического и кинематического подобия. Обозначим действующие в соответственных точках этих потоков силы P_1 и P_2.

Как известно из теоретической механики, по основному уравнению динамики сила равна произведению массы на ускорение: $P = ma$, где масса m есть плотность жидкости ρ, умноженная на ее объем L^3 ($m = \rho L^3$), а ускорение определяется приращением скорости $v = L/t$ в единицу времени t ($a = L/t^2$). Следовательно,

$$P = \rho L^3 L/t^2 = \rho L^4/t^2 = \rho v^2 L^2.$$

Таким образом, для динамического подобия необходимо, чтобы силы находились в соотношении

$$P_1/P_2 = \rho_1 v_1^2 L_1^2 / \rho_2 v_2^2 L_2^2 = k_P, \tag{8.4}$$

которое является математическим выражением общего закона динамического подобия, впервые сформулированным Ньютоном (здесь k_P — масштаб сил).

Рассмотрим случай, когда из действующих сил решающее значение имеют силы внутреннего трения жидкости (например, при движении ньютоновской жидкости по горизонтальному трубопроводу). По основному закону внутреннего трения [см. § 4, уравнение (1.12)] эти силы могут быть выражены следующим образом:

$$P = \mu L^2 v/L = \mu v L. \tag{8.5}$$

При этом основное уравнение динамического подобия (8.4) принимает вид

$$\rho_1 v_1^2 L_1^2/\rho_2 v_2^2 L_2^2 = \mu_1 v_1 L_1/\mu_2 v_2 L_2.$$

Отсюда

$$\rho_1 v_1 L_1/\rho_2 v_2 L_2 = \mu_1/\mu_2 \quad \text{и}$$

$$\rho_1 v_1 L_1/\mu_1 = \rho_2 v_2 L_2/\mu_2.$$

Заменив затем отношение μ/ρ кинематической вязкостью ν, получим окончательно:

$$v_1 L_1/\nu_1 = v_2 L_2/\nu_2. \tag{8.6}$$

Уравнение (8.6) является условием динамического подобия при действии сил внутреннего трения жидкости.

Таким образом, если в рассматриваемом случае для двух потоков жидкости величина vL/ν имеет одно и то же значение, эти потоки будут подобны динамически, т. е. в них будут одинаковыми и механические процессы, и режимы движения. Этот закон подобия установлен Рейнольдсом.

Нетрудно видеть, что величина vL/ν есть не что иное, как уже известное нам число Рейнольдса. На самом деле, понимая для цилиндрической трубы под v среднюю скорость потока, а под L такой характерный линейный размер, как диаметр трубы d, этому выражению можно придать вид vd/ν, тождественный обычному выражению числа Рейнольдса (4.2). Следовательно, в рассматриваемом случае критерием динамического подобия потоков является число Рейнольдса и условие подобия (8.6), равносильно тому, что число Re одинаково для обоих потоков.

После этого становится понятным, почему число Re позволяет в такой определенной форме устанавливать в потоке наличие того или иного режима движения.

Если рассматривать движение по трубопроводу неньютоновской вязко-пластичной жидкости, при определении сил внутреннего трения, обусловливаемых здесь одновременно как вязкими, так и пластическими ее свойствами, следует исходить из выражения (7.5). Тогда вместо выражения (8.5) необходимо принять

$$P = (\tau_0 + \mu v/L)\, L^2 = \tau_0 L^2 + \mu v L. \tag{8.7}$$

При этом основное уравнение (8.4) можно записать в виде

$$\rho_1 v_1^2 L_1^2/\rho_2 v_2^2 L_2^2 = (\tau_{01} L_1^2 + \mu_1 v_1 L_1)/(\tau_{02} L_2^2 + \mu_2 v_2 L_2),$$

откуда после ряда несложных преобразований легко получим

$$\frac{\rho_1 v_1^2}{\tau_{01} + \mu_1 v_1 L_1} = \frac{\rho_2 v_2^2}{\tau_{02} + \mu_2 v_2 L_2}$$

и тогда

$$\frac{v_1 L_1 \rho_1/\mu_1}{1 + \tau_{01} L_1/v_1 \mu_1} = \frac{v_2 L_2 \rho_2/\mu_2}{1 + \tau_{02} L_2/v_2 \mu_2}. \tag{8.8}$$

Поскольку числители обеих частей выражения (8.8) представляют собой обычные числа Re, а вторые слагаемые в их знаменателях есть известные нам (§ 80) числа Sen, этому выражению можно придать вид

$$\mathrm{Re}_1/(1 + \mathrm{Sen}_1) = \mathrm{Re}_2/(1 + \mathrm{Sen}_2). \tag{8.9}$$

Обозначив далее $\mathrm{Re}/(1 + \mathrm{Sen})$ через Re^* — обобщенное число Рейнольдса, вместо выражения (8.9) можно записать:

$$\mathrm{Re}_1^* = \mathrm{Re}_2^*. \tag{8.10}$$

Выражения (8.9) и (8.10) и следует в данном случае рассматривать в качестве основных условий динамического подобия.

Если влияние вязкости незначительно и движение жидкости в основном обусловливается действием сил тяжести, условие динамического подобия потоков (8.6) не является решающим и не определяет характер движения. В этом случае в основное уравнение динамического подобия (8.4) вместо силы P надо подставить значение силы тяжести:

$$P = mg = \rho L^3 g. \tag{8.11}$$

При этом уравнение (8.4) принимает вид

$$\rho_1 v_1^2 L_1^2/\rho_2 v_2^2 L_2^2 = \rho_1 L_1^3 g_1/\rho_2 L_2^3 g_2$$

или после сокращений

$$v_1^2/g_1 L_1 = v_2^2/g_2 L_2. \tag{8.12}$$

Выражение (8.12) носит название *закона подобия Фруда*, а безразмерная величина v_2/gL называется *числом* (*критерием*) *Фруда* и обозначается Fr. Закон подобия Фруда применяют при моделировании потоков в тех случаях, когда из действующих сил решающими являются силы тяжести, например при моделировании большинства гидротехнических сооружений, истечении жидкости через водосливы, изучении волнового сопротивления, испытываемого движущимися кораблями.

Если преобладающее влияние имеет сила поверхностного натяжения (например, при истечении жидкости из капиллярных отверстий), в уравнение (8.4) вместо P следует подставить значение этой силы, определяемое по формуле (1.11):

$$P = pL^2 = \frac{\sigma}{L} L^2 = \sigma L. \tag{8.13}$$

Тогда будем иметь

$$\rho_1 v_1^2 L_1^2 / \rho_2 v_2^2 L_2^2 = \sigma_1 L_1 / \sigma_2 L_2,$$

откуда получим

$$\rho_1 v_1^2 L_1 / \sigma_1 = \rho_2 v_2^2 L_2 / \sigma_2. \tag{8.14}$$

— так называемый *закон подобия Вебера,* в котором безразмерная величина $\rho v^2 L/\sigma = \mathrm{We}$ носит название *числа* (*критерия*) *Вебера.*

Установленные в настоящем параграфе законы подобия, как и определяемые ими критерии подобия, могут быть получены иным образом — путем соответствующего анализа дифференциальных уравнений Навье — Стокса (3.35).

Покажем это на примере вывода закона подобия Рейнольдса, для чего составим указанные уравнения для двух потоков жидкости (например, в проекции на ось x): натурного и модельного. Все относящиеся к ним величины снабдим индексами соответственно 1 и 2. По-прежнему будем считать, что жидкость ньютоновская и ее движение происходит в горизонтальном трубопроводе, когда сила тяжести не играет роли, и поэтому из уравнений могут быть исключены члены, зависящие от внешних объемных сил X. Произведем также замену $dt = dx/v_x$ и для простоты записи опустим индекс x при скорости v.

Тогда вместо уравнений (3.35) получим

$$v_1 \frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \nu_1 \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_1^2} \right); \tag{8.15}$$

$$v_2 \frac{dv_2}{dx_2} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \nu_2 \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z_2^2} \right). \tag{8.16}$$

Естественно, в случае подобия рассматриваемых потоков описывающие их уравнения будут тождественны и могут переходить одно в другое, а все входящие в них соответственные величины должны находиться в определенных соотношениях между собой. Соотношения эти — уже известные нам масштабные коэффициенты. По-прежнему будем обозначать их k с соответствующими индексами ($k_L = x_1/x_2$ — масштаб длин, $k_v = v_1/v_2$ — масштаб скорости, $k_\rho = \rho_1/\rho_2$ — масштаб плотности и т. д.).

Тогда, например, уравнение для второго модельного потока можно переписать таким образом, чтобы в него входили только величины с индексом 1 (относящиеся к первому натурному потоку):

$$\frac{k_L}{k_v^2} v_1 \frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{k_\rho k_L}{k_p} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{k_L^2}{k_\nu k_v} \nu_2 \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_1^2} \right). \tag{8.17}$$

Уравнение (8.17) по-прежнему описывает модельный поток и переходит в уравнение (8.16) в случае равенства масштабных коэффициентов при всех членах этого уравнения. Исходя из этого условия приравняем друг к другу масштабные коэффициенты при члене, находящемся в левой части уравнения (8.17) и характеризующем инерционные силы, и при втором члене его правой части, определяющем вязкостные силы внутреннего трения:

$$k_L/k_v^2 = k_L^2/k_\nu k_v.$$

Отсюда найдем $k_L^2 k_v^2 = k_L k_v k_\nu$; $k_L k_v / k_\nu = 1$ или, что то же самое,

$$v_1 L_1/\nu_1 = v_2 L_2/\nu_2.$$

Последнее выражение является законом подобия Рейнольдса.

Принципиально подобным образом могут быть установлены законы подобия и для других случаев.

§ 85. ПРИМЕРЫ ФИЗИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Физическое моделирование в настоящее время получило весьма широкое применение в практике экспериментальных исследований в области гидравлики. Большим достоинством этого метода является возможность изготовления модели в любом произвольном масштабе (больше, меньше или одинаковых размеров с натурой) и применения на модели любой жидкости (той же, что и в натуре, или какой-либо иной). Их выбор определяется условиями подобия и чисто практическими соображениями. Обычно модель выполняется меньших размеров, чем в натуре, что существенно удешевляет и упрощает проведение экспериментов.

Непременное условие при физическом моделировании—строгое геометрическое подобие модели и натуры.

Для обеспечения полного динамического подобия необходимо обязательное выполнение законов подобия, отражающих исследуемое явление, что в свою очередь требует равенства соответствующих критериев подобия на модели и в натуре.

Рассмотрим пример физического моделирования.

Если преобладающее влияние имеет сила поверхностного натяжения (например, при истечении жидкости из капиллярных отверстий), в уравнение (8.4) вместо P следует подставить значение этой силы, определяемое по формуле (1.11):

$$P = pL^2 = \frac{\sigma}{L} L^2 = \sigma L. \tag{8.13}$$

Тогда будем иметь

$$\rho_1 v_1^2 L_1^2 / \rho_2 v_2^2 L_2^2 = \sigma_1 L_1 / \sigma_2 L_2,$$

откуда получим

$$\rho_1 v_1^2 L_1/\sigma_1 = \rho_2 v_2^2 L_2/\sigma_2. \tag{8.14}$$

— так называемый *закон подобия Вебера,* в котором безразмерная величина $\rho v^2 L/\sigma = \mathrm{We}$ носит название *числа* (*критерия*) *Вебера.*

Установленные в настоящем параграфе законы подобия, как и определяемые ими критерии подобия, могут быть получены иным образом — путем соответствующего анализа дифференциальных уравнений Навье — Стокса (3.35).

Покажем это на примере вывода закона подобия Рейнольдса, для чего составим указанные уравнения для двух потоков жидкости (например, в проекции на ось x): натурного и модельного. Все относящиеся к ним величины снабдим индексами соответственно 1 и 2. По-прежнему будем считать, что жидкость ньютоновская и ее движение происходит в горизонтальном трубопроводе, когда сила тяжести не играет роли, и поэтому из уравнений могут быть исключены члены, зависящие от внешних объемных сил X. Произведем также замену $dt = dx/v_x$ и для простоты записи опустим индекс x при скорости v.

Тогда вместо уравнений (3.35) получим

$$v_1 \frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \nu_1\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_1^2}\right); \tag{8.15}$$

$$v_2 \frac{dv_2}{dx_2} = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p_2}{\partial x_2} + \nu_2\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial z_2^2}\right). \tag{8.16}$$

Естественно, в случае подобия рассматриваемых потоков описывающие их уравнения будут тождественны и могут переходить одно в другое, а все входящие в них соответственные величины должны находиться в определенных соотношениях между собой. Соотношения эти — уже известные нам масштабные коэффициенты. По-прежнему будем обозначать их k с соответствующими индексами ($k_L = x_1/x_2$ — масштаб длин, $k_v = v_1/v_2$ — масштаб скорости, $k_\rho = \rho_1/\rho_2$ — масштаб плотности и т. д.).

Тогда, например, уравнение для второго модельного потока можно переписать таким образом, чтобы в него входили только величины с индексом 1 (относящиеся к первому натурному потоку):

$$\frac{k_L}{k_v^2} v_1 \frac{dv_1}{dx_1} = -\frac{k_\rho k_L}{k_p}\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} + \frac{k_L^2}{k_\nu k_v}\nu_2\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial z_1^2}\right). \tag{8.17}$$

Уравнение (8.17) по-прежнему описывает модельный поток и переходит в уравнение (8.16) в случае равенства масштабных коэффициентов при всех членах этого уравнения. Исходя из этого условия приравняем друг к другу масштабные коэффициенты при члене, находящемся в левой части уравнения (8.17) и характеризующем инерционные силы, и при втором члене его правой части, определяющем вязкостные силы внутреннего трения:

$$k_L/k_v^2 = k_L^2/k_\nu k_v.$$

Отсюда найдем $k_L^2 k_v^2 = k_L k_\nu k_v$; $k_L k_v/k_\nu = 1$ или, что то же самое,

$$v_1 L_1/\nu_1 = v_2 L_2/\nu_2.$$

Последнее выражение является законом подобия Рейнольдса.

Принципиально подобным образом могут быть установлены законы подобия и для других случаев.

§ 85. ПРИМЕРЫ ФИЗИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Физическое моделирование в настоящее время получило весьма широкое применение в практике экспериментальных исследований в области гидравлики. Большим достоинством этого метода является возможность изготовления модели в любом произвольном масштабе (больше, меньше или одинаковых размеров с натурой) и применения на модели любой жидкости (той же, что и в натуре, или какой-либо иной). Их выбор определяется условиями подобия и чисто практическими соображениями. Обычно модель выполняется меньших размеров, чем в натуре, что существенно удешевляет и упрощает проведение экспериментов.

Непременное условие при физическом моделировании—строгое геометрическое подобие модели и натуры.

Для обеспечения полного динамического подобия необходимо обязательное выполнение законов подобия, отражающих исследуемое явление, что в свою очередь требует равенства соответствующих критериев подобия на модели и в натуре.

Рассмотрим пример физического моделирования.

Предположим, исследуется движение вязкой жидкости в трубопроводе. В этом случае при моделировании следует учитывать как силы внутреннего трения жидкости, обусловленные ее вязкостью, так и массовые, гравитационные силы — силы тяжести. Поэтому исходя из условий динамического подобия необходимо, чтобы одновременно в натуре и на модели соблюдалось равенство чисел Рейнольдса $v_1L_1/\nu_1 = v_2L_2/\nu_2$ и чисел Фруда $v_1^2/g_1L_1 = v_2^2/g_2L_2$ (здесь, как и далее, все величины, относящиеся к натуре и модели, снабжены индексами соответственно 1 и 2).

Примем затем, что исследования на модели проводятся при одинаковых (земных) гравитационных условиях с натурой, т. е. $g_1 = g_2$. Тогда средние скорости течения жидкости в трубопроводах (модельном и натурном) должны удовлетворять следующим соотношениям:

при моделировании по Рейнольдсу

$$v_2/v_1 = L_1\nu_2/L_2\nu_1 = k_L\nu_2/\nu_1, \tag{8.18}$$

при моделировании по Фруду

$$v_2/v_1 = \sqrt{L_2/L_1} = k_L^{-0,5}. \tag{8.19}$$

Сопоставляя полученные выражения, находим $k_L\nu_2/\nu_1 = k_L^{-0,5}$ или $\nu_2/\nu_1 = k_L^{-1,5}$ и, следовательно,

$$\nu_2 = k_L^{-1,5}\nu_1 = \nu_1/k_L^{1,5}.$$

Это значит, что для соблюдения полного динамического подобия в качестве модельной нужно взять такую жидкость, кинематическая вязкость которой ν_2 будет в $k_L^{1,5}$ раз меньше кинематической вязкости ν_1 натурной жидкости.

Как правило, значения кинематической вязкости модельной жидкости оказываются весьма малыми. Так, например, если при моделировании принять линейный масштаб $k_L = 25$,

$$\nu_2 = \nu_1/25^{1,5} = \nu_1/125,$$

т. е. кинематическая вязкость модельной жидкости будет в 125 раз меньше вязкости натурной жидкости, а при $k_L = 50$

$$\nu_2 = \nu_1/50^{1,5} \approx \nu_1/353,$$

т. е. более чем в 350 раз меньше той же вязкости жидкости в натурных условиях. Практически найти жидкости со столь малой вязкостью невозможно. Отсюда со всей очевидностью следует (и это необходимо подчеркнуть), что при одновременном действии нескольких сил одновременное выполнение различных законов подобия, требуемое для полного соблюдения условий динамического подобия, оказывается не только весьма сложным, но в большинстве случаев и реально неосуществимым. Поэтому

при моделировании обычно учитывают только силы, оказывающие преобладающее влияние на исследуемый процесс, и исходят лишь из того закона подобия, который имеет решающее значение.

В рассматриваемом случае напорного трубопровода такими силами, как указывалось выше, являются силы внутреннего трения (силы тяжести имеют здесь второстепенное значение) и поэтому можно исходить только из одного закона подобия Рейнольдса. Если при этом принять, что в модельном трубопроводе используется та же жидкость, что и в натурном ($\nu_2 = \nu_1$), из выражения (8.18), получим

$$v_2 = k_Lv_1 \tag{8.20}$$

— основное соотношение, необходимое для выполнения условий динамического подобия.

Аналогичным образом могут быть получены соответствующие выражения и для тех случаев, когда решающее значение имеют силы тяжести и силы поверхностного натяжения и моделирование производится по законам Фруда и Вебера.

§ 86. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В основе метода математического моделирования (называемого также методом аналогии) лежит то обстоятельство, что многие физические явления, имеющие различную природу, описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями и имеют подобные граничные условия.

При решении задач в плоскопараллельных полях широкое распространение получил метод электрической аналогии, в котором математической моделью рассматриваемого поля служит стационарное электрическое поле в проводящей среде. По этому методу экспериментально исследуется движение постоянного электрического тока, а результаты исследования при помощи дифференциальных уравнений переносятся на моделируемое поле.

Метод электрической аналогии впервые был применен Г. Кирхгоффом в 1845 г. Во второй половине XIX в, Кирхгофф и Максвелл установили математические аналогии электрических магнитных, гидродинамических и тепловых полей.

Значительную роль в развитии метода электроаналогии сыграл Н. Н. Павловский, обосновавший в 1918—1922 гг. электрогидродинамическую аналогию и заложивший тем самым основы математического моделирования физических явлений в сплошных средах. Этот метод (сокращенно называемый ЭГДА) основан на математической аналогии, существующей между уравнениями, описывающими движение жидкости в некоторых гидравлических системах и течение электрического тока по проводникам. Указанная аналогия может быть легко установлена, если сопоставить закон Пуазейля для расхода жидкости при ламинарном режиме, представленный в форме уравнения

$$Q = kF\,\frac{H_1 - H_2}{L}, \qquad (8.21)$$

и закон Ома для электрического тока

$$I = cS\,\frac{U_1 - U_2}{L}. \qquad (8.22)$$

Аналогичными величинами при этом оказываются: расход жидкости Q и сила тока I, напор H и напряжение U, коэффициент пропорциональности k и удельная проводимость c.

Естественно, аналогия эта может быть непосредственно использована лишь в тех случаях, когда между расходом жидкости и напором существует линейная зависимость, что имеет место при ламинарном режиме.

Если, например, исследуется ламинарное движение жидкости по трубам, коэффициент пропорциональности в уравнении (8.21) $k = d^2g/32\nu$. Это выражение легко получается из сопоставления уравнений (8.21) и (4.37) и характеризует как гидравлические свойства системы (d), так и физические свойства жидкости (ν).

Широкое применение метод ЭГДА получил при решении различных задач, связанных с фильтрацией *. Примерами фильтрации являются движение нефти в нефтеносных пластах к нефтяным скважинам, движение грунтовых вод в водоносных пластах, движение воды под гидротехническими сооружениями (например, плотинами) и др. Во всех этих случаях жидкость просачивается через грунт, перемещаясь обычно с весьма малыми скоростями по мельчайшим каналам, образующимся между его частицами вследствие их неполного прилегания друг к другу. Поэтому в большинстве случаев фильтрацию можно рассматривать как ламинарное движение жидкости в тонких, неправильной формы капиллярных трубках.

Основным законом ламинарной фильтрации является закон Дарси, выражаемый формулой, принципиально тождественной приведенным выше формулам (8.21) и (8.22).

Все величины, входящие в формулу Дарси, имеют тот же физический смысл, что и величины в формуле (8.21). Коэффициент пропорциональности k в этом случае является *коэффициентом фильтрации,* характеризующим фильтрационные свойства пористой среды (грунта) и физические свойства фильтрующейся жидкости. Значения k определяются опытным путем или находятся по соответствующим эмпирическим формулам.

---

* Подробно эти вопросы изучаются в специальном курсе «Подземная гидравлика».

При моделировании поступают следующим образом. Изготовляют модель исследуемого фильтрационного потока из электропроводящего материала (обычно специальной электропроводящей бумаги промышленного производства), а непроницаемые контуры — из диэлектрика. При этом должны соблюдаться следующие условия: модель и натура должны быть геометрически подобны; удельная проводимость электропроводящего материала по всей длине должна быть пропорциональна коэффициенту фильтрации, а сила тока пропорциональна скорости фильтрации в каждой точке действительного фильтрационного потока.

Если через модель, в которой выполнены все указанные условия, пропустить электрический ток, то, как это следует из установленной выше аналогии, разность электрических потенциалов будет соответствовать разности действующих напоров и электрический ток будет протекать в модели по тем же законам, что и фильтрационный поток в натуре.

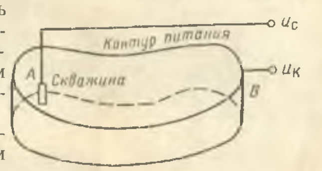


Рис. 8.1

В качестве наиболее простого примера рассмотрим электролитическую модель, воспроизводящую разработку нефтяного месторождения одиночной скважиной. Гидравлическое сопротивление нефтяного пласта в процессе фильтрации нефти моделируется в ней электрическим сопротивлением электролита в процессе электролиза.

Пусть (рис. 8.1) имеется сосуд, по форме подобный нефтяной залежи, заполненный электролитом (солевым раствором), который в данном случае играет роль электропроводящего материала. Установим в этом сосуде электроды: цилиндрический электрод A, подобный контуру скважины, и по внешнему контуру ванны электрод B, подобный контуру питания. Если создать на электродах потенциалы $u_с$ и $u_к$, пропорциональные давлению (напору) в скважине и на контуре питания, и измерить специальными приборами потенциалы в различных точках проводника, то на такой модели можно получить поля напряжения и тока, подобные полям давления и скорости фильтрации в нефтяном пласте.

Свое дальнейшее развитие метод ЭГДА получил в приборе, называемом электроинтегратором, состоящем из сетки переменных сопротивлений, самоиндукций и емкостей, при помощи которых можно моделировать многие весьма сложные явления фильтрации, с трудом поддающиеся математическому исследованию.

В заключение отметим, что метод ЭГДА может быть использован для моделирования трубопроводных сетей. В этом случае зависимость между Q и H обычно не является линейной (турбулентный режим!) и электрическая схема набирается из электрических сопротивлений, моделирующих нелинейные гидравлические сопротивления отдельных участков трубопровода. По распределению в схеме напряжения и тока судят о напоре и расходе на участках гидравлической сети.

§ 87. АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ. π-ТЕОРЕМА

При организации экспериментальных исследований очень важно с самого начала дать им правильное направление, установить наиболее целесообразную и обоснованную методику их проведения и порядок обработки получаемых данных.

Одним из методов, позволяющим решить указанные задачи и имеющим в настоящее время весьма широкое применение в практике гидравлических исследований, является *метод анализа размерностей*. Применение этого метода позволяет уже заранее определить основные критерии подобия, в которых следует обрабатывать данные экспериментов, а также обобщить их результаты и установить закономерности, отражающие исследуемое физическое явление.

Исходным для метода анализа размерностей является то, что любое математическое уравнение, описывающее какое-либо физическое явление, обязательно должно быть размерно однородным, т. е. все входящие в него члены, приведенные к основным размерностям длины L, времени t и массы m (или силы P), должны содержать одинаковую степень каждой из этих размерностей.

Подчеркнем, что при использовании этого метода, что является его достоинством, достаточно знать основные переменные величины, характеризующие исследуемое явление, само же уравнение, описывающее это явление, заранее может быть неизвестным.

В основе метода анализа размерностей лежит *π-теорема*, известная также под названием *теоремы Букингема*. Сущность ее заключается в следующем.

Предположим, что некоторая переменная величина A_1 зависит от ряда независимых переменных A_2, A_3, ..., A_n, участвующих в каком-либо физическом явлении, и ни от каких других переменных не зависит. Тогда общая функциональная зависимость между этими величинами может быть представлена в виде уравнения

$$A_1 = f(A_2, A_3, \ldots, A_n), \qquad (8.23)$$

или, что, по существу, то же самое:

$$\varphi(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n) = 0. \qquad (8.24)$$

Пусть число основных размерных единиц, через которые могут быть выражены все n переменных величин, будет равно m. π-теорема устанавливает, что если указанные n переменные выразить через эти основные единицы, то их можно затем сгруппировать в $n-m$ безразмерных членов π:

$$\Phi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{n-m}) = 0. \qquad (8.25)$$

Причем каждый такой π-член будет содержать $m+1$ переменную величину.

В рассматриваемых в гидромеханике задачах число таких переменных, входящих в π-члены, должно равняться четырем. Три из них, назовем их определяющими *, входят в каждый из π-членов и только одна (четвертая) заменяется другой при переходе от члена к члену.

Для удобства исследования показатели последних принимаются равными —1. Показатели степени остальных (определяющих) переменных неизвестны, обозначим их x, y, z с индексами, соответствующими индексам π-членов. Таким образом, будем иметь

$$\begin{aligned} \pi_1 &= A_1^{x_1} \cdot A_2^{y_1} \cdot A_3^{z_1} \cdot A_4^{-1}, \\ \pi_2 &= A_1^{x_2} \cdot A_2^{y_2} \cdot A_3^{z_2} \cdot A_5^{-1}, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (8.26) \\ \pi_{n-3} &= A_1^{x_{n-3}} \cdot A^{y_{n-3}} \cdot A_3^{z_{n-3}} \cdot A_n^{-1}. \end{aligned}$$

Если выразить затем входящие в π-члены переменные через основные независимые размерности, то, поскольку эти члены являются величинами безразмерными во всех полученных для них выражениях, показатели степени каждой из основных размерностей должны обязательно равняться нулю. Поэтому оказывается возможным для всех π-членов составить по три независимых уравнения (по одному для каждой размерности), связывающие показатели степени входящих в них переменных. Решение полученной таким образом системы уравнений позволяет найти численные значения неизвестных показателей x, y, z и, следовательно, конкретизировать и определить все π-члены и тем самым установить общую форму математических уравнений, которыми может быть описано исследуемое физическое явление.

В качестве примера практического использования метода анализа размерностей рассмотрим решение задачи об определении потери напора на трение по длине потока при равномерном напорном движении по трубам вязко-пластичной бингамовской жидкости (исследуется общий случай турбулентного режима).

---

* При решении гидромеханических задач это обычно какая-либо характерная длина, скорость течения жидкости и ее плотность (или вязкость).

Известно (об этом говорят результаты опытов), что потеря давления в трубопроводе Δp и, следовательно, соответствующая ей потеря напора на трение $h_{тр}$ зависят от следующих основных факторов:

геометрических характеристик трубопровода (диаметра d, длины l, шероховатости стенок k);

физических свойств жидкости (плотности ρ, абсолютной вязкости μ, начального напряжения сдвига τ_0);

средней скорости течения v.

Общую функциональную зависимость, связывающую все эти величины, представим уравнением

$$\Delta p = f(d,\ l,\ \rho,\ v,\ \mu,\ \tau_0,\ k), \qquad (8.27')$$

которое можно переписать следующим образом:

$$\varphi(\Delta p/l,\ d,\ \rho,\ v,\ \mu,\ \tau_0,\ k) = 0. \qquad (8.27')$$

Следуя затем π-теореме и имея в виду, что число основных размерных единиц $m=3$, вместо уравнения (8.27'), содержащего $n=7$ членов, получим уравнение, состоящее из $n-m=4$ безразмерных π-членов:

$$\Phi(\pi_1,\ \pi_2,\ \pi_3,\ \pi_4) = 0. \qquad (8.28)$$

Как было указано выше, каждый такой π-член должен содержать четыре переменные величины. Принимая в качестве определяющих переменных диаметр трубопровода d, среднюю скорость течения жидкости v и ее плотность ρ и комбинируя их поочередно с остальными переменными, входящими в уравнение (8.27'), находим:

$$\pi_1 = d^{x_1}\cdot v^{y_1}\cdot \rho^{z_1}\cdot \mu^{-1}; \qquad (8.29)$$

$$\pi_2 = d^{x_2}\cdot v^{y_2}\cdot \rho^{z_2}\cdot \tau_0^{-1}; \qquad (8.30)$$

$$\pi_3 = d^{x_3}\cdot v^{y_3}\cdot \rho^{z_3}\cdot k^{-1}; \qquad (8.31)$$

$$\pi_4 = d^{x_4}\cdot v^{y_4}\cdot \rho^{z_4}\cdot (\Delta p/l)^{-1}. \qquad (8.32)$$

Составим далее уравнения размерностей для каждого из этих π-членов, имея в виду обязательное условие их размерной однородности. Тогда, например, для первого π-члена будем иметь

$$\pi_1 = L^{x_1}\cdot (L/t)^{y_1}\cdot (m/L^3)^{z_1}\cdot (m/Lt)^{-1} = L^{x_1+y_1-3z_1+1}\cdot t^{-y_1+1}\cdot m^{z_1-1} = L^{\circ}\cdot T^{\circ}\cdot m^{\circ}.$$

Приравняв здесь показатели степени при одинаковых основаниях, получим систему из трех уравнений:

$$x_1 + y_1 - 3z_1 + 1 = 0; \quad -y_1 + 1 = 0; \quad z_1 - 1 = 0,$$

совместное решение которых дает

$$x_1 = 1; \quad y_1 = 1; \quad z_1 = 1.$$

Подставив затем эти значения показателей степени в выражение (8.29), для первого π-члена найдем:

$$\pi_1 = dv\rho/\mu. \qquad (8.33)$$

Подобным образом находят значения остальных π-членов:

$$\pi_2 = v^2\rho/\tau_0; \qquad (8.34)$$

$$\pi_3 = d/k; \qquad (8.35)$$

$$\pi_4 = v^2\rho l/d\Delta p. \qquad (8.36)$$

Подстановка их в общее выражение (8.28) приводит к уравнению

$$\Phi\left(\frac{dv\rho}{\mu},\ \frac{v^2\rho}{\tau_0},\ \frac{d}{k},\ \frac{v^2\rho l}{d\Delta p}\right) = 0, \qquad (8.37)$$

решение которого относительно π_4 дает

$$\frac{v^2\rho l}{d\Delta p} = F\left(\frac{dv\rho}{\mu},\ \frac{v^2\rho}{\tau_0},\ \frac{d}{k}\right).$$

Отсюда имеем

$$\Delta p = \frac{v^2\rho l}{d}\left[F\left(\frac{dv\rho}{\mu},\ \frac{v^2\rho}{\tau_0},\ \frac{d}{k}\right)\right]^{-1}$$

и, следовательно,

$$h_{тр} = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{lv^2}{dg}\left[F\left(\frac{dv\rho}{\mu},\ \frac{v^2\rho}{\tau_0},\ \frac{d}{k}\right)\right]^{-1}.$$

Если обозначить здесь

$$\left[F\left(\frac{dv\rho}{\mu},\ \frac{v^2\rho}{\tau_0},\ \frac{d}{k}\right)\right]^{-1} = \frac{\lambda}{2}, \qquad (8.38)$$

получим выражение для определения искомой потери напора: $h_{тр} = \lambda(l/d)(v^2/2g)$, тождественное хорошо нам известной формуле Дарси-Вейсбаха (4.14), обычно применяемой для этой цели при выполнении инженерных гидравлических расчетов.

При этом общее выражение для безразмерного коэффициента гидравлического сопротивления получает вид

$$\lambda = \frac{2}{F\left(\frac{dv\rho}{\mu},\ \frac{v^2\rho}{\tau_0},\ \frac{d}{k}\right)}. \qquad (8.39)$$

Подчеркнем, что первый член в знаменателе выражения (8.39) есть не что иное, как обычное число (критерий) Рейнольдса. Второй член также встречался ранее [см. формулу (7.26)] и как это нетрудно установить представляет собой отношение Re и Sen. Обозначим его $B = \mathrm{Re}/\mathrm{Sen} = v^2\rho/\tau_0$ и будем называть *критерием пластичности*. Третий член является характеристикой геометрического подобия и соответствует понятию относительной гладкости внутренней поверхности стенок трубопровода, т. е. это величина, обратная относительной шероховатости ε.

Учитывая это, выражение (8.39) для коэффициента гидравлического сопротивления можно переписать следующим образом:

$$\lambda = \frac{2}{F(\mathrm{Re},\ B,\ 1/\varepsilon)} = F'\left(\frac{\varepsilon}{\mathrm{Re},\ B}\right). \tag{8.40}$$

Рассмотрим частные случаи.

Вязко-пластичная бингамовская жидкость. Ламинарный режим. В этом случае шероховатость стенок не оказывает влияния на потери напора, ее можно не учитывать ($\varepsilon = 0$) и выражение (8.39) для коэффициента гидравлического сопротивления принимает вид:

$$\lambda = \frac{2}{F(\mathrm{Re},\ B)} = F'\left(\frac{1}{\mathrm{Re},\ B}\right). \tag{8.41}$$

Ньютоновская жидкость. Для данного случая начальное напряжение сдвига $\tau_0 = 0$. Поэтому выражения для коэффициента гидравлического сопротивления будут:

при турбулентном режиме

$$\lambda = \frac{2}{F(\mathrm{Re},\ 1/\varepsilon)} = F'(\varepsilon/\mathrm{Re}); \tag{8.42}$$

при ламинарном режиме (здесь также $\varepsilon = 0$)

$$\lambda = \frac{2}{F(\mathrm{Re})} = F'(\mathrm{Re}). \tag{8.43}$$

Как видим, применение метода анализа размерностей позволило выявить основные безразмерные параметры (критерии подобия), характеризующие искомые потери напора. В этих параметрах и следует производить обработку экспериментальных данных.

Одновременно был установлен общий вид зависимостей для определения коэффициента гидравлического сопротивления λ, принципиально тождественных [это легко показать, например, из сопоставления выражений (8.39) и (7.26), (8.42) и (4.87), (8.43) и (4.41)] обычно применяемым для этой цели расчетным формулам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агроскин И. И., Дмитриев Г. Т., Пикалов Ф. М.* Гидравлика. М., Госэнергоиздат, 1964.
2. *Альтшуль А. Д.* Гидравлические сопротивления. М., Недра, 1970.
3. *Альтшуль А. Д., Киселев П. Г.* Гидравлика и аэродинамика. М., Стройиздат, 1975.
4. *Богомолов А. И., Михайлов К. А.* Гидравлика. М., Стройиздат, 1972
5. *Вилькер Д. С.* Лабораторный практикум по гидромеханике. М., Физматгиз, 1959.
6. *Гидравлика* глинистых и цементных растворов/А. Х. Мирзаджанзаде А. А. Мирзоян, Г. М. Гевинян, М. К. Сеид-Рза. М.,: Недра, 1966.
7. *Есьман И. Г.* Гидравлика. Баку, Азнефтеиздат, 1952.
8. *Идельчик И. Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М., Госэнергоиздат, 1960.
9. *Избаш С. В.* Основы гидравлики. М., Госстройиздат, 1952.
10. *Некрасов Б. Б.* Гидравлика и ее применение на летательных аппаратах. М., Машиностроение, 1967.
11. *Прандтль Л.* Гидроаэродинамика. М., ИЛ, 1949.
12. *Рабинович Е. З.* Гидравлика. М., Недра, 1977.
13. *Смыслов В. В.* Гидравлика и аэродинамика. Киев, Высшая школа, 1979.
14. *Уилкинсон У. Д.* Неньютоновские жидкости. М., Мир, 1964.
15. *Френкель Н. З.* Гидравлика. М., Госэнергоиздат, 1956.
16. *Чугаев Р. Р.* Гидравлика. М., Энергия, 1970.
17. *Шищенко Р. И., Есьман Б. И., Кондратенко П. И.* Гидравлика промывочных жидкостей. М., Недра, 1976.
18. *Яблонский В. С.* Краткий курс технической гидромеханики. М., Физматгиз, 1961.
19. *Яблонский В. С., Исаев И. А.* Сборник задач и упражнений по технической гидромеханике. М., Физматгиз, 1961.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . 3

Глава первая. **Введение в гидравлику** . . . 4

§ 1. Определение и краткая история развития гидравлики . . . 4
§ 2. Основные понятия и определения . . . 6
§ 3. Физические свойства жидкостей . . . 8
§ 4. Вязкость жидкости и законы внутреннего трения . . . 16

Глава вторая. **Гидростатика** . . . 21

§ 5. Гидростатическое давление . . . 21
§ 6. Гидростатические машины . . . 24
§ 7. Дифференциальные уравнения равновесия жидкости . . . 27
§ 8. Основное уравнение гидростатики . . . 29
§ 9. Поверхности равного давления . . . 32
§ 10. Сообщающиеся сосуды . . . 34
§ 11. Приборы для измерения давления . . . 36
§ 12. Давление на плоские стенки . . . 40
§ 13. Центр давления . . . 43
§ 14. Давление на цилиндрические поверхности . . . 47
§ 15. Давление на криволинейные поверхности . . . 49
§ 16. Эпюры гидростатического давления . . . 50
§ 17. Равновесие тела в покоящейся жидкости . . . 52

Глава третья. **Основы гидродинамики** . . . 57

§ 18. Задачи и методы гидродинамики . . . 57
§ 19. Основные понятия и определения . . . 58
§ 20. Схема движения жидкости . . . 60
§ 21. Гидравлические элементы потока . . . 65
§ 22. Расход и средняя скорость . . . 66
§ 23. Уравнение Бернулли для элементарной струйки идеальной жидкости . . . 69
§ 24. Физическая сущность и графическое представление уравнения Бернулли . . . 72
§ 25. Уравнение Бернулли для элементарной струйки реальной жидкости 75
§ 26. Уравнение Бернулли для потока реальной жидкости . . . 77
§ 27. График уравнения Бернулли для потока реальной жидкости . . . 80
§ 28. Экспериментальная иллюстрация уравнения Бернулли . . . 82
§ 29. Измерение расходов и скоростей движения жидкости . . . 83
§ 30. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости . . . 90
§ 31. Дифференциальное уравнение неразрывности . . . 91
§ 32. Интеграл Бернулли . . . 93
§ 33. Дифференциальные уравнения движения реальной жидкости . . . 94

Глава четвертая. **Гидравлические сопротивления** . . . 97

§ 34. Режимы движения жидкости . . . 97
§ 35. Число Рейнольдса . . . 98
§ 36. Общие выражения для потери напора при равномерном движении 100
§ 37. Ламинарный режим в круглой цилиндрической трубе . . . 105
§ 38. Потери напора при ламинарном режиме . . . 108
§ 39. Приборы для измерения вязкости жидкости . . . 110
§ 40. Механизм турбулентного потока . . . 114
§ 41. Касательные напряжения в турбулентном потоке . . . 120
§ 42. Шероховатость стенок . . . 122
§ 43. Полуэмпирические теории турбулентности . . . 124
§ 44. Влияние различных факторов на коэффициент λ . . . 129
§ 45. Формулы для определения коэффицента λ . . . 132
§ 46. Потери напора в некруглых трубах . . . 137
§ 47. О некоторых способах снижения гидравлических сопротивлений при турбулентном режиме . . . 142
§ 48. Местные сопротивления . . . 144
§ 49. Коэффициенты местных сопротивлений . . . 147
§ 50. Сложение потерь напора . . . 156
§ 51. Интерференция местных сопротивлений . . . 157
§ 52. Сопротивления при обтекании тел . . . 160
§ 53. Движение тел в восходящем потоке жидкости . . . 164

Глава пятая. **Истечение жидкости из отверстий и насадков** . . . 166

§ 54. Истечение из донного отверстия в тонкой стенке . . . 166
§ 55. Коэффициенты скорости, сжатия и расхода . . . 168
§ 56. Истечение из отверстий в боковой стенке . . . 172
§ 57. Истечение при переменном напоре . . . 175
§ 58. Истечение из затопленного отверстия . . . 179
§ 59. Истечение через насадки . . . 180
§ 60. Влияние числа Рейнольдса на истечение . . . 186
§ 61. Давление струи жидкости . . . 188
§ 62. Гидромониторные долота . . . 191
§ 63. Водосливы . . . 193

Глава шестая. **Движение жидкости в трубопроводах** . . . 198

§ 64. Назначение и классификация трубопроводов . . . 198
§ 65. Основные формулы для расчета трубопроводов . . . 199
§ 66. Основные задачи при расчете и проектировании трубопроводов . . . 204
§ 67. Расчет простого трубопровода . . . 205
§ 68. Сложные трубопроводы . . . 208
§ 69. Гидравлические характеристики трубопроводов . . . 213
§ 70. Задача о трех резервуарах . . . 216
§ 71. Сифонные трубопроводы . . . 218
§ 72. Кавитация . . . 221
§ 73. Гидравлический удар в трубах . . . 223

§ 74. Магистральные нефтепроводы 226
§ 75. Движение газа по трубам 231
§ 76. Безнапорные трубопроводы . . : 233

Глава седьмая. **Неньютоновские жидкости** 240

§ 77. Общие понятия и классификация неньютоновских жидкостей . . 240
§ 78. Вязко-пластичные жидкости и их свойства 243
§ 79. Статика вязко-пластичных жидкостей 246
§ 80. Движение вязко-пластичных жидкостей по трубам 248
§ 81. Другие задачи гидравлики вязко-пластичных жидкостей 255
§ 82. Движение по трубам неньютоновских жидкостей, подчиняющихся степенному реологическому закону 257

Глава восьмая. **Основы теории подобия и моделирования** 259

§ 83. Общие положения 259
§ 84. Законы механического подобия 259
§ 85. Примеры физического моделирования 265
§ 86. Математическое моделирование 267
§ 87. Анализ размерностей. π-теорема 270

Список литературы 275

ЕФИМ ЗИНОВЬЕВИЧ РАБИНОВИЧ

ГИДРАВЛИКА

Редактор издательства *А. Ф. Ушакова.*
Переплет художника *В. В. Евдокимова*
Художественный редактор *В. В. Шутько*
Технический редактор *А. Г. Иванова.*
Корректор *Е. В. Мухина*
ИБ 3090

Сдано в набор 21.04.80. Подписано в печать 25.11.80. Т-20173. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага типографская № 2. Гарнитура «Литературная». Печать высокая. Усл. печ. л. 17,5. Уч.-изд. л. 16,76. Тираж 20 000 экз. Заказ 1363/7539—8. Цена 80 коп.

Издательство «Недра», 103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19

Ленинградская типография № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 191126, Ленинград, Социалистическая ул., 14.