

**Министерство Высшего и Среднего Специального
Образования Республики Узбекистан**

**Ташкентский Государственный Технический
Университет им. А.Б.Беруни.**

Ф. С. Абдуллаев.

**Основы теории обработки металлов
давлением.**

Часть I.

Ташкент 1999 г.

УДК. 621. 73. 073

Фагхулла Сагдуллаевич Абдуллаев

Ташкент, ТашТТУ, 1999 г. 239 стр.

В учебном пособии, состоящем из двух частей, изложены основы теории обработки металлов давлением в объёме программы для бакалавров В-520600.

Рецензент: доцент Заиров И. У.

Утверждено к печати Учёным советом Ташкентского Государственного Технического Университета им. А. Р. Беруни.

Ташкентский Государственный
Технический Университет
имени А. Р. Беруни 1999 г.

ВВЕДЕНИЕ

Теория обработки металлов давлением представляет собой прикладную инженерную дисциплину, задачей которой является разработка общих принципиальных основ рационального построения и анализа процессов обработки металлов давлением, с учетом, что последняя не только обеспечивает получение заготовок, а часто и готовых деталей требуемой формы, но и вызывает качественные изменения в металле.

Теория обработки металлов давлением должна являться научной базой технологии этой обработки.

Теория обработки металлов давлением рассматривает и изучает:

1. Условия, при которых обеспечивается возможность наибольшего формоизменения металла при различных операциях с целью создания технологических процессов с минимальным количеством операций, т. е. наиболее производительных.

2. Влияние обработки давлением на механические и физические свойства металлов в целях получения наилучших эксплуатационных характеристик заготовок и деталей.

3. Характер формоизменения заготовок при различных операциях в целях отыскания наиболее благоприятных соотношений между размерами и конфигурацией исходных заготовок и заготовок или деталей, получаемых после обработки давлением, в частности соотношений, ведущих к улучшению качества изделий и сокращению расхода металла.

4. Сопротивление металла пластическим деформациям при операциях обработки давлением, т. е. распределение напряжений, необходимых усилий и работ для осуществления этих операций в целях пра-

вильного выбора оборудования и прочностного расчета рабочего инструмента.

Основной базой для теории обработки металлов давлением является наука о пластической деформации металлов, представляющая раздел реологии, т. е. науку о течении вещества.

Наука о пластических деформациях металла развивается совокупно в следующих трех взаимно связанных основных направлениях, имеющих одинаково важное значение для теории обработки металлов давлением:

1. Физика процесса пластической деформации металла. Это направление изучает экспериментально и теоретически механизм пластического формоизменения металла, устанавливает влияние различных факторов на этот процесс, в основном температуры, скорости деформации и вида напряженного состояния, а равно устанавливает условия, при которых металл переходит из состояния упругого в состояние пластическое.

2. Физико-химия процесса деформации, рассматривающая связь пластической деформации с химическим составом и фазовым состоянием металла.

3. Механика пластической деформации, математически разрабатывающая вопросы напряженного и деформированного состояния, величины и распределения напряжений в пластически деформируемом теле, анализирующая условия перехода тела в пластическое состояние.

Теория пластических деформаций является наукой сравнительно молодой. Начало ее интенсивного развития относится к текущему столетию. Еще более новой является теория обработки металлов давлением, разработка которой началась лишь в 30-х годах

нашего века в связи с резким ростом значения этой обработки в промышленности.

Теория обработки металлов давлением создана трудами многих современных ученых. Среди них в первую очередь надо упомянуть С. И. Губкина, Е. П. Унксова, Г. А. Смирнова-Аляева, Н. И. Корнеева, И. М. Павлова, а также многих других, разработавших отдельные разделы и вопросы этой теории: Л. А. Шофмана, А. Д. Томленова, К. Н. Шевченко, И. А. Норицына, М. В. Сторожева, Е. А. Попова и А. Г. Овчинникова.

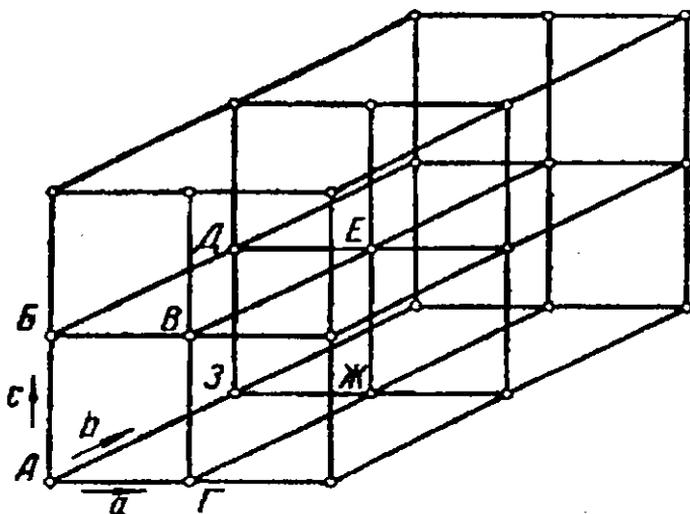
Значение этих работ нельзя переоценить. Они обеспечили создание научной базы технологии обработки металлов давлением как инженерной дисциплины, позволяющей творчески и осмысленно совершенствовать технологические процессы, поднимать на более высокую ступень технику нашей промышленности.

По теории обработки металлов давлением имеется обширная литература, в которой отражены многочисленные теоретические и экспериментальные работы, выполненные как отдельными учеными, так и мощными коллективами научно-исследовательских институтов (ЦНИИТМАШ, ВИАМ и др.) и кафедрами технических учебных заведений.

Роль теории обработки металлов давлением в отечественной промышленности будет неуклонно возрастать, учитывая непрерывно растущее значение кузнечно-прессового производства.

ПРИРОДА ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ СТРОЕНИЕ МЕТАЛЛОВ

Все металлы и сплавы имеют кристаллическое строение. Последнее характеризуется в целом закономерным и периодичным расположением атомов в пространстве, при котором каждый атом находится в идентичном окружении соседних. Рентгенограммы



Фиг. 1.

кристаллов показывают, что атомы в них располагаются по прямым линиям и плоскостям, и позволяют не только выявить взаимное расположение атомов в пространстве, но и определить расстояния между ними, которые измеряются в ангстремах ($1\text{Å} = 1 \cdot 10^{-8}$ см).

Вследствие закономерного расположения атомов, по плоскостям и по прямым линиям, строение кристалла можно представить в виде трехмерной сетки из прямых линий, в точках пересечения (узлах) которых размещены атомы. Схематично это представлено на фиг. 1. Такую сетку можно считать состоящей из геометрических многогранников (параллелепипедов, призм и т. п.) одинаковой величины с общими соприкасающимися гранями. Нетрудно заметить, что любой многогранник этой сетки, например параллелепипед АБВГДЕЖЗ (если сетка состоит из параллелепипедов), путем переноса в любом из трех направлений (a ; b ; c ;) на определенное расстояние может быть полностью совмещен с любым другим параллелепипедом данной сетки.

Наименьший многогранник, путем непрерывных переносов которого в трех кристаллографических направлениях можно построить всю пространственную сетку, называют элементарной ячейкой кристаллической решетки.

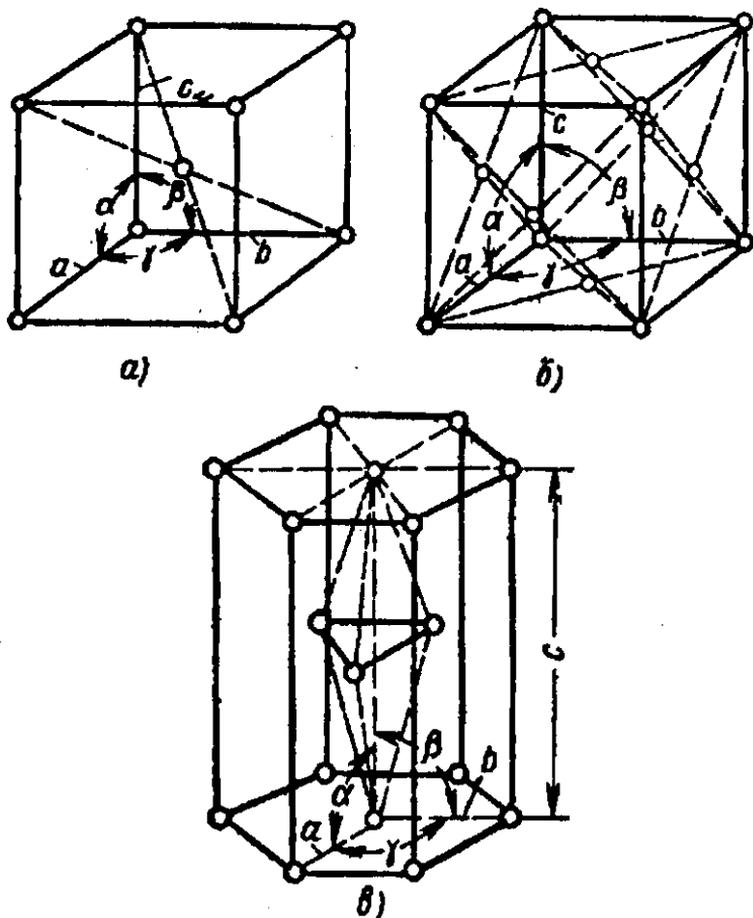
Совокупность соприкасающихся гранями элементарных ячеек, расположенных в трехмерном пространстве, называется пространственной решеткой. Длины отрезков (a , b , c), определяющие минимальную величину смещения элементарной ячейки, необходимого для полного совмещения атомов данной ячейки с атомами соседней ячейки, называют параметрами решетки или периодами повторяемости.

Взаимное расположение атомов в ячейке полностью определяет расположение атомов в данной пространственной решетке.

Различают простые пространственные решетки кристаллов, в которых атомы размещаются только в узлах решетки (только в вершинах основной элементарной ячейки), и сложные пространственные решетки.

ки, у которых внутри основных элементарных ячеек в одних и тех же местах также размещены атомы.

Для описания строения кристаллов или же пространственной решетки кристаллов обычно выбирается система координат, осями которой служат три прямые, проведенные из одной точки (узла решетки), совпадающие с основными узловыми прямыми кристалла



Фиг. 2.

(например, прямые, совпадающие по направлению с векторами a , b , c , на фиг. 1), причем кристаллографическую систему осей выбирают в соответствии с симметрией кристалла. В системе кристаллографических осей форма элементарной ячейки пространственной решетки может быть описана с помощью трех координатных углов α , β , γ между кристаллографическими осями и трех параметров решетки a , b , c .

Типовые формы основных элементарных ячеек пространственных кристаллических решеток металлов приведены на фиг. 2.

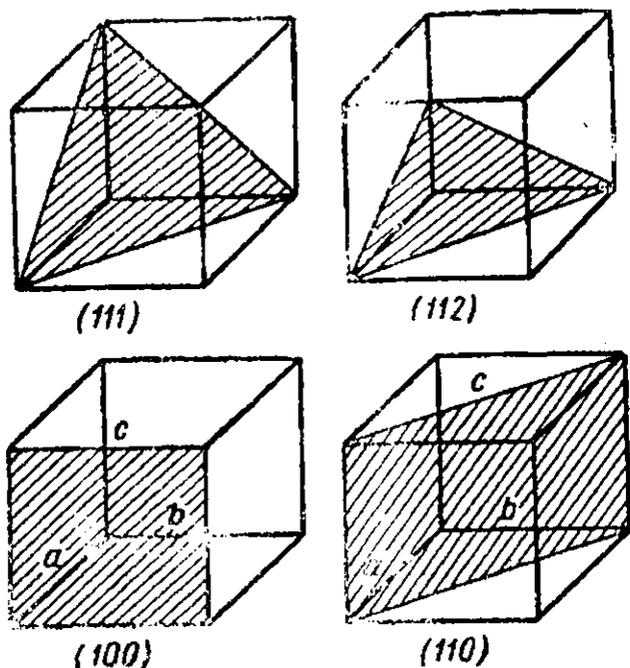
Для кубических решеток (фиг. 2, а и б) характерно равенство углов $\alpha = \beta = \gamma$ и равенство между собой параметров решетки $a = b = c$. Если в кубической решетке, кроме атомов, расположенных в вершинах куба элементарной ячейки, имеется атом, расположенный в центре куба, то такая решетка называется кубической объемноцентрированной. Кубическая решетка, имеющая атомы, расположенные в центрах граней куба, называется кубической гранецентрированной. Для элементарной ячейки гексагональной решетки (фиг. 2, в) характерно значение углов $\alpha = \beta = 90^\circ$ и $\gamma = 120^\circ$ и равенство между собой только двух параметров решетки $a = b \neq c$.

Приведенные три типа решеток свойственны большинству металлов.

Решетку с объемноцентрированными кубическими ячейками имеют, например, металлы: α - и β -железо, литий, ванадий, вольфрам, молибден, хром, тантал; решетку с гранецентрированными кубическими ячейками имеют металлы: алюминий, γ -железо, золото, медь, никель, платина, свинец, серебро; решетку с гексагональными плотно упакованными ячейками (т. е.

имеющими три атома внутри призмы, фиг. 2, в) имеют металлы: магний, цинк, бериллий, кадмий, кобальт, α -титан.

Для определения плоскостей, которые можно провести в элементарных ячейках пространственных решеток (следовательно, и в самих пространственных решетках), а также для определения кристаллографических направлений в кристаллографии принята систе-



Фиг. 3.

ма индексации. По этой системе для кубической решетки индексация плоскостей осуществляется тремя цифрами, заключенными в круглые скобки. Эти цифры представляют собой три взаимно простых целых числа, пропорциональных обратной величине отрезков,

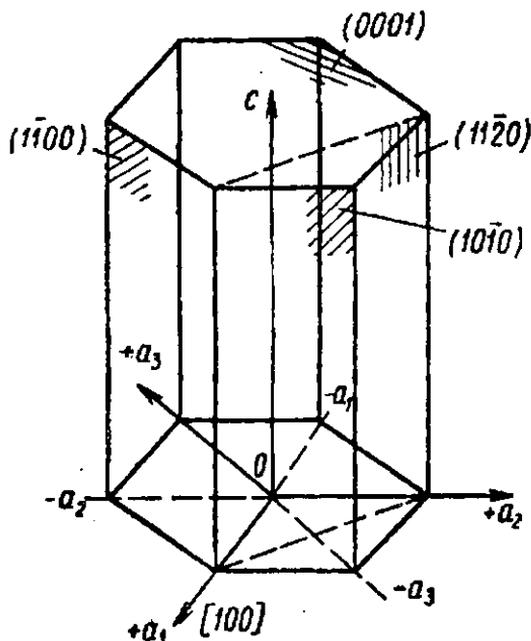
отсекаемых плоскостью на координатных осях, причем за единицу измерения отрезков принимается параметр решетки.

На фиг. 3 представлены некоторые плоскости, проведенные в кубической элементарной ячейке с указанием обозначения этих плоскостей.

В гексагональной элементарной ячейке индексация идет по обратным величинам отрезков, отсекаемых рассматриваемой плоскостью на четырех кристаллографических осях, три из которых лежат в плоскости основания шестигранной призмы (в так называемой плоскости базиса), а четвертая совпадает с осью призмы. Направления выбранной системы кристаллографических осей, а также обозначение некоторых плоскостей в гексагональной ячейке приведено на фиг. 4 (знак минус над цифрой показывает, что плоскость отсекает отрезок на отрицательном направлении оси). Заметим, что обозначение отдельных плоскостей в элементарных ячейках кристаллографической решетки сохраняется одинаковым для всех плоскостей, проведенных в пространственной решетке, параллельных данной рассматриваемой плоскости.

Кроме плоскостей, в пространственной решетке рассматривают кристаллографические направления. В качестве прямой, определяющей направление какого-либо семейства параллельных прямых, обычно выбирается прямая, проходящая через начало координат. Вдоль этой прямой будет расположен ряд атомов, отстоящих друг от друга на определенных расстояниях. Положение этой прямой в пространстве определится координатами любого атома, на ней расположенного. Поэтому в качестве индексов направления берут три взаимно простых целых числа, пропорциональных координатам любого атома, лежащего на рассматриваемом направлении, причем за единицу

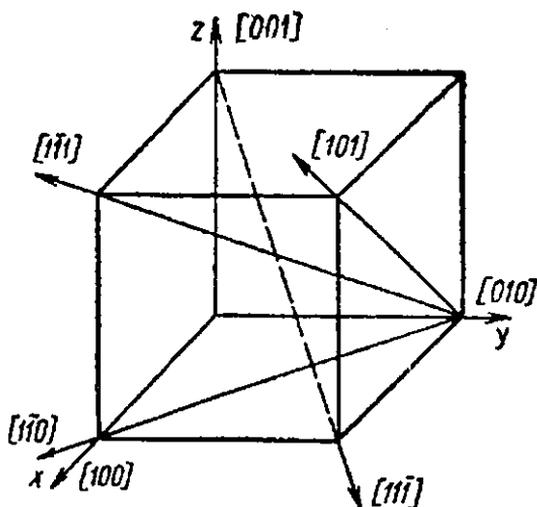
измерения принимается параметр решетки (индексы направлений заключаются в квадратные скобки). На фиг. 5 дано схематическое изображение основных направлений в кубической элементарной ячейке и их обозначение.



Фиг. 4.

Рассматривая строение кристаллов, можно установить, что взаимное расположение атомов на различных кристаллографических плоскостях различно, а также различна и величина межатомных расстояний по разным кристаллографическим направлениям. Так как свойства вещества (физические, химические и механические) зависят от взаимодействия атомов между собой, то вследствие различия в расстояниях между атомами и их взаимном расположении свойства крис-

таллов неодинаковы по разным кристаллографическим направлениям. Различие свойств по разным направлениям называется анизотропией, которая характерна для кристаллического строения.



Фиг. 5.

В силу того, что процесс кристаллизации при затвердевании жидкого (расплавленного) металла идет одновременно в очень большом количестве центров кристаллизации, обычный металл представляет собой не единый кристалл, а конгломерат зерен (кристаллитов), форма, размеры и направление кристаллографических осей которых зависят от условий кристаллизации и последующей обработки. Такое строение называется поликристаллическим. В каждом зерне наблюдается упорядоченное расположение атомов, соответствующее пространственной решетке данного металла, однако направление определенных кристаллографических плоскостей в различных зернах может

быть различно. Металлы и сплавы представляют собой, как правило, поликристаллы.

В каждом зерне поликристаллического металла наблюдается анизотропия. Однако вследствие разнообразной, беспорядочной ориентировки различных зерен литой недеформированный металл может иметь одинаковые свойства по разным направлениям и не обнаруживать анизотропии (когда размеры зерен значительно меньше размеров поликристалла и количество их весьма велико). Это обстоятельство во многих случаях позволяет рассматривать поликристаллическое тело как подобное изотропному, несмотря на анизотропию свойств отдельных составляющих его зерен (квазиизотропное тело).

В отличие от поликристалла, тела, для всего объема которых характерно постоянство направления определенных кристаллографических плоскостей в пространстве (вне зависимости от внешней формы этого тела), называют монокристаллами.

В настоящее время имеются способы искусственного получения монокристаллов некоторых металлов настолько больших размеров, что из них можно изготовлять образцы для механических испытаний, что в значительной степени облегчает изучение процесса пластической деформации.

Зерна (кристаллиты) нельзя смешивать с кристаллами, наружные поверхности которых не произвольны, а оформлены в виде плоских граней, пересекающихся под определенными углами.

Неправильность внешней формы зерен металла, а также различие в направлениях определенных кристаллографических плоскостей в смежных зернах приводит к тому, что пограничный слой на стыке между зернами имеет нарушения правильности взаимного расположения атомов. Особенностью строения погра-

ничного слоя между зернами является также и то, что этот слой обычно насыщен примесями и неметаллическими включениями вследствие того, что в первую очередь кристаллизуются частицы металла, содержащие наименьшее количество примесей.

ПОНЯТИЕ О ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Система внешних сил приложенная к некоторому объему металла, вызывает его деформацию. Различают деформацию упругую и пластическую. Если после снятия внешних сил деформированное тело полностью восстанавливает свои исходные форму и размеры, то такую деформацию называют упругой. Если же изменения формы и размеров тела, вызванные внешними силами, остаются после снятия этих сил, то такую деформацию называют пластической или остаточной (необратимой). Получение деталей путем обработки металлов давлением основано на пластическом деформировании исходной заготовки. Пластическая деформация не только позволяет получать заданную форму детали путем относительного смещения отдельных объемов заготовки без ее разрушения, но и оказывает влияние на механические и физико-химические свойства материала заготовки.

Упругая деформация происходит в металле за счет отклонения атомов из положений устойчивого равновесия, характеризующихся минимумом потенциальной энергии. Величина этого отклонения не превышает расстояния между соседними атомами. Вследствие изменения межуатомных расстояний упругая деформация вызывает обратимое изменение объема. Обратимое изменение объема составляет, например,

при всестороннем сжатии давлением 100 кг/мм^2 для стали $\sim 0,6\%$, для меди $1,3\%$.

Отклонение атомов от положения устойчивого равновесия увеличивает потенциальную энергию накопленную в теле, и до определенных пределов величина смещений возрастает пропорционально увеличению деформирующих сил. В любых условиях действие внешних сил на тело уравнивается противодействием межуатомных сил, стремящихся вернуть атомы в положение с минимумом потенциальной энергии.

Пластическая деформация осуществляется за счет относительного смещения атомов в новые положения устойчивого равновесия на расстояния, значительно превышающие расстояния между атомами в кристаллической решетке.

При пластическом деформировании общая деформация, вызванная приложенными к телу силами, содержит как пластическую составляющую, так и упругую, исчезающую после снятия деформирующих сил.

МЕХАНИЗМ ХОЛОДНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ МОНОКРИСТАЛЛА

Пластическая деформация монокристалла может происходить в основном двумя путями: скольжением и двойникованием.

Скольжение представляет собой параллельное смещение тонких слоев кристалла относительно смежных. Движение охватывает ряд плоскостей или тончайших слоев (полосы скольжения), в промежутках между которыми элементы пластической деформации отсутствуют.

Экспериментально установлено, что полосы скольжения отстоят одна от другой в среднем на расстоянии около 1 мк, в то время как расстояния между соседними атомными плоскостями выражаются цифрами, порядка 10^{-4} мк.

Характер деформации монокристалла путем скольжения ясно виден из приведенной на фиг. 6 фотографии образца из монокристалла сплава меди и алюминия, подвергнутого растяжению.

Скольжение в монокристаллах происходит по определенным кристаллографическим плоскостям, которые называются плоскостями скольжения. Обычно плоскостями скольжения являются плоскости, имеющие наибольшую плотность размещения атомов, а направлениями скольжения являются те направления, по которым межатомные расстояния имеют минимальную величину. Например, в металлах с гранецентрированной кубической кристаллической решеткой плоскостями скольжения обычно являются плоскости октаэдра типа (111), а направлениями скольжения являются направления типа [101].



Фиг. 6.

В металлах с гексагональной кристаллической решеткой плоскостью скольжения обычно является плоскость базиса типа (0001), а направлениями сколь-

жения - направления, совпадающие с диагональю шестиугольника (основания этой ячейки) типа [100].

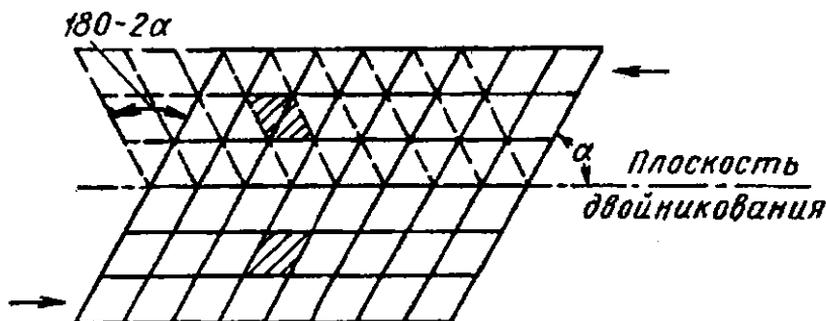
На возможность смещения атомов по каким-либо кристаллическим плоскостям значительное влияние оказывает температура. Повышение температуры в ряде случаев приводит к тому, что процесс скольжения может осуществляться по другим плоскостям, отличным от тех, по которым происходит скольжение при комнатной температуре. Например, в металлах с гексагональной плотно упакованной решеткой при комнатной температуре имеется одна плоскость скольжения - плоскость базиса (0001), а при температуре выше 200° дополнительно появляется возможность скольжения по плоскостям типа (1011) или (1012).

Двойникование представляет собой смещение атомов, расположенных в плоскостях, параллельных "плоскости двойникования" на расстояния, пропорциональные расстоянию этих плоскостей от плоскости двойникования (фиг. 7), пунктиром показан двойник, получившийся в результате деформации), причем ребра кристаллической решетки, первоначально наклоненные к плоскости двойникования под углом $\alpha < 90^\circ$, поворачиваются на угол, равный $180^\circ - 2\alpha$.

Решетка части кристалла, получившей деформацию двойникованием, является зеркальным изображением решетки недеформированной части кристалла относительно плоскости двойникования (двойником). Двойникование сравнительно редко наблюдается при статическом нагружении и значительно чаще при деформировании ударом. Двойникование может возникать не только в результате воздействия на деформируемое тело внешних сил, но и в результате отжига после пластической деформации. Такое явление наблюдается, в частности, в меди, латуни и некоторых других металлах, имеющих кубическую гранецентри-

рованную решетку. Двойникование может сопутствовать деформации скольжением. При деформации скольжением двойникование скачкообразно уменьшает усилие, потребное для деформирования.

У обрабатываемых металлов процесс пластической деформации в основном осуществляется за счет скольжения.



Фиг. 7.

Многочисленными исследованиями показано, что сдвигающее (касательное) напряжение, необходимое для начала пластической деформации скольжением данного металла, при данной температуре и скорости деформации есть величина постоянная, не зависящая от ориентировки плоскостей скольжения относительно действующих на тело сил. Если растягивать усилием P образец из монокристалла с площадью поперечного сечения F , у которого нормаль к плоскости скольжения наклонена к направлению действующей силы под углом φ , а направление скольжения - под углом λ (фиг. 8), то величина сдвигающего напряжения τ может быть найдена по формуле

$$\tau = (P/F) \cos \varphi \cos \lambda, \quad (1.1)$$

где $F/\cos \varphi$ - площадь образца по плоскости скольжения.

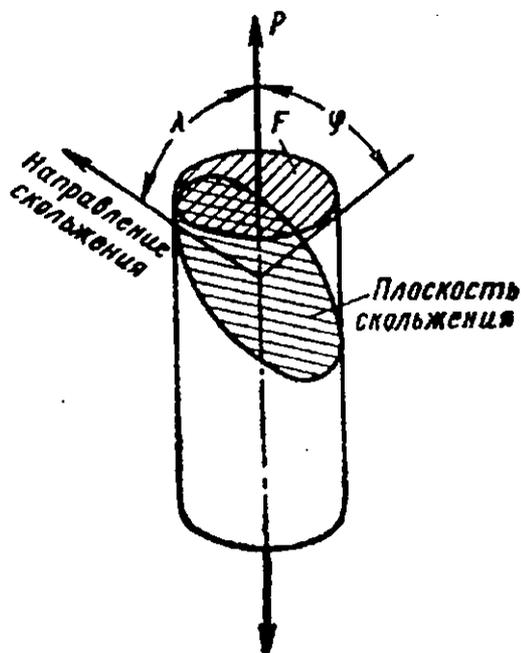
На фиг.9 приведена зависимость $P/F = f(\cos \varphi \cos \lambda)$, полученная расчетом по формуле (1.1), при $\tau = \text{const}$, и точками показаны результаты опытов. Приведенные данные подтверждают, что в пределах точности опытов величина сдвигающего напряжения, соответствующего началу скольжения для постоянных температуры и скорости деформации, постоянна и не зависит от угла наклона плоскости скольжения к направлению действия сил. Те же данные показывают, что величина предела текучести (нормального напряжения $\sigma = P/F$, соответствующего началу пластической деформации) для монокристалла каждого металла существенно зависит от ориентировки плоскостей скольжения относительно направления действия сил, имея минимум при углах $\varphi = \lambda = 45^\circ$.

Таковыми же опытами было показано, что по мере увеличения пластической деформации величина сдвигающего напряжения τ , потребного для дальнейшего деформирования образца, увеличивается.

Многочисленными исследованиями показано, что процесс скольжения не может рассматриваться как одновременное смещение всех атомов одной плоскости относительно атомов соседней.

По современным воззрениям процесс скольжения осуществляется путем последовательного смещения отдельных групп атомов. Возможность относительного смещения в процессе деформации лишь части атомов, расположенных в параллельных кристаллографических плоскостях, обуславливается наличием в металле нарушений правильного кристаллического строения. Экспериментально доказано, что реальные монокристаллы и зерна имеют мозаичное строение, т.

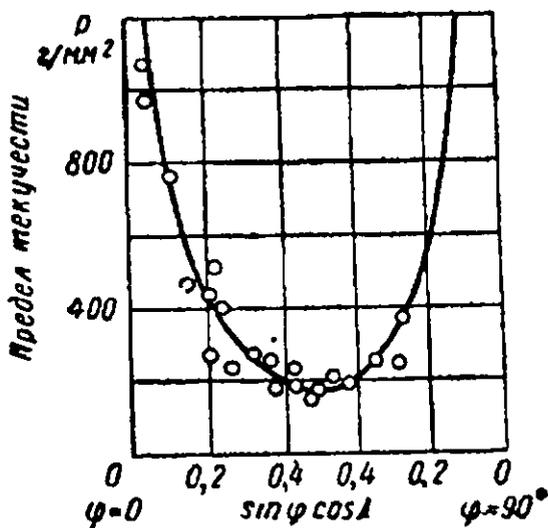
е. состоят из блоков размерами порядка 10^{-4} - 10^{-6} см, причем каждый блок является совершенным кристаллом (имеет правильное кристаллическое строение), а соседние блоки повернуты относительно друг друга на угол порядка $10'$ - $20'$. Такие блоки называют блоками мозаики. Кроме того, в реальных монокристаллах и зернах имеются местные нарушения правильности кристаллического строения, состоящие в том, что в отдельных узлах решетки атомы отсутствуют или же в



Фиг. 8.

некоторых участках решетки имеются "лишние" атомы. Такие нарушения правильности строения реальных кристаллов являются, очевидно, результатом несовершенства процесса кристаллизации.

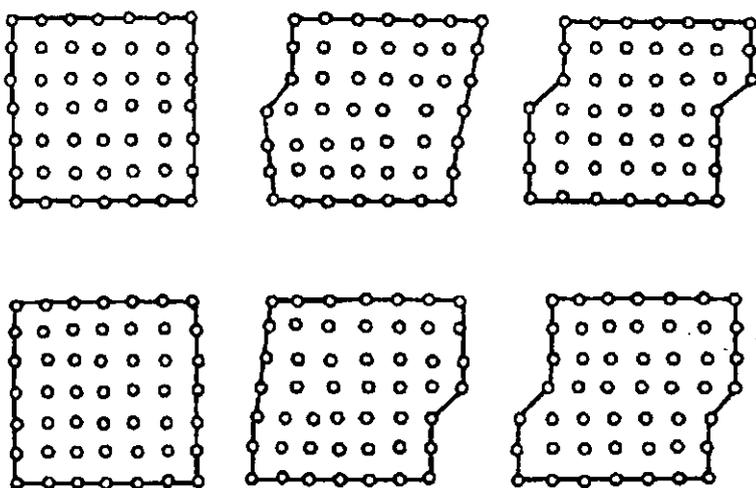
Нарушения правильности кристаллического строения приводят к тому что в отдельных участках кристаллической решетки атомы в недеформированном металле смещены из положений устойчивого равновесия с минимумом потенциальной энергии. Наличие таких смещений приводит к тому, что для перемещения отдельных групп атомов в новые положения равновесия могут потребоваться меньшие сдвигающие напряжения, чем при отсутствии таких смещений.



Фиг. 9.

В настоящее время значительное распространение получила гипотеза, объясняющая процесс скольжения перемещением в плоскости скольжения отдельных несовершенств пространственной решетки, так называемых дислокаций. Дислокацией называют местное искажение кристаллической решетки, при котором, вследствие различия числа атомов в смежных параллельных плоскостях часть атомов, расположен-

ных по одну сторону от плоскости скольжения, имеет уменьшенные межатомные расстояния (сжаты), а другая часть атомов, расположенных с противоположной стороны от плоскости скольжения, имеет увеличенные межатомные расстояния (растянуты). Условно различают положительные дислокации, у которых межатомные расстояния уменьшены в части кристалла, находящейся над плоскостью скольжения, и отрицательные, у которых межатомные расстояния уменьшены в части кристалла, находящейся ниже плоскости скольжения.



Фиг. 10.

На фиг. 10 схематично представлено скольжение на одно межатомное расстояние в кристаллической решетке в результате перемещения положительной и отрицательной дислокаций вдоль плоскости скольжения.

Величина сдвигающего напряжения, необходимая для смещения дислокации, во много раз меньше, чем

требуется для одновременного смещения всех атомов данной плоскости. Таким образом, под действием внешних сил скольжение возникает в первую очередь в плоскостях, имеющих первичные несовершенства кристаллического строения - дислокации. Предполагается, что количество дислокаций в процессе пластической деформации увеличивается.

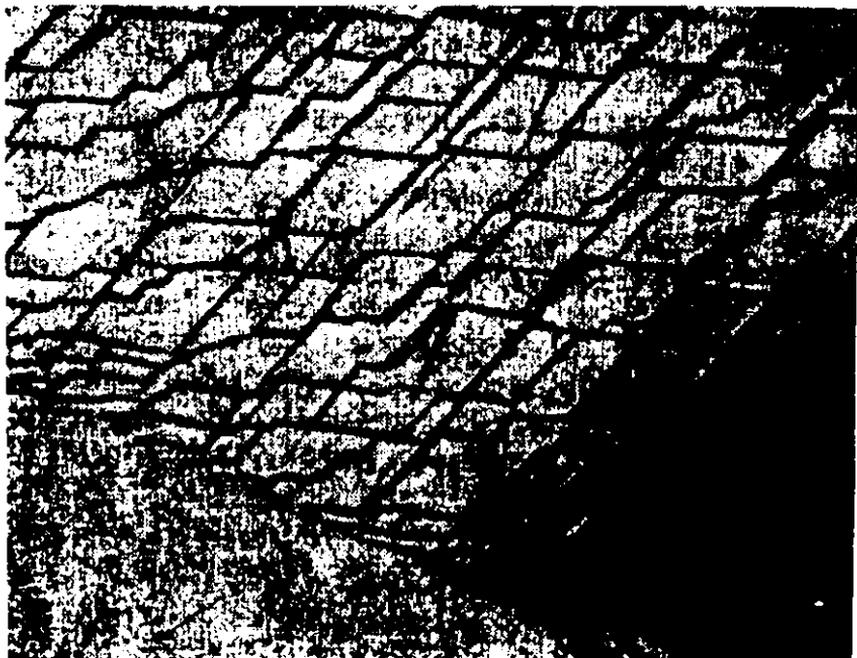
Вследствие нарушения правильности кристаллического строения вокруг дислокации имеется силовое поле. В тех случаях, когда расстояния между дислокациями относительно малы, силовые поля взаимодействуют. Дислокации одного знака отталкиваются, а разных знаков притягиваются. Возможно, что увеличение сдвигающего напряжения, в процессе пластической деформации до некоторой степени является следствием увеличения при деформации количества дислокаций одинакового знака.

Теория дислокаций объясняет многие явления, имеющие место при пластической деформации. Имеются и другие гипотезы, объясняющие механизм скольжения. Например, Я. И. Френкель и Т. А. Которова считают, что скольжение может осуществляться и при отсутствии местных нарушений правильности кристаллического строения путем постепенного перехода атомов кристаллической решетки из одних положений равновесия в другие.

Процесс скольжения в монокристаллах при пластической деформации сопровождается некоторыми дополнительными изменениями кристаллического строения.

Многими исследователями было замечено, что в процессе пластической деформации монокристалла наблюдается превращение плоскостей скольжения в пространственные периодические поверхности (изгиб плоскостей скольжения), а также относительный пово-

рот блоков мозаики. Одновременно наблюдается более ярко выраженное дробление монокристалла на отдельные блоки без нарушения сплошности металла и пространственной решетки внутри отдельных блоков (фиг. 11). Н. Ф. Лашко считает, что причиной образова-



Фиг. 11.

ния блоков в процессе пластической деформации является сложное смещение отдельных частей кристалла, основанное на скольжении с одновременным изгибом плоскостей скольжения.

В результате значительной пластической деформации монокристалл разбивается на отдельные блоки, имеющие правильное кристаллическое строение и ограниченные пачками плоскостей скольжения, в ко-

торых вследствие значительных смещений атомов правильность кристаллического строения нарушена. Таким образом, при значительных пластических деформациях монокристалл превращается в поликристалл, состоящий из определенного количества зерен.

ХОЛОДНАЯ ПЛАСТИЧЕСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПОЛИКРИСТАЛЛА

Общее остаточное формоизменение поликристаллического тела складывается из пластической деформации составляющих его зерен с измерением их формы и размеров и их относительного смещения. В соответствии с этим различают внутрикристаллитную и межкристаллитную деформации поликристалла. Деформация отдельных зерен поликристалла осуществляется скольжением или двойникованием, как и для монокристалла. Однако наличие значительного количества зерен в поликристалле приводит к некоторым особенностям процесса пластической деформации поликристалла. Плоскости скольжения в отдельных зернах поликристалла произвольно ориентированы в пространстве.

Разная ориентировка плоскостей скольжения отдельных зерен в пространстве приводит к тому, что при нагружении поликристаллического тела системой внешних сил пластическая деформация начинается не одновременно во всех зернах. В первую очередь пластическая деформация возникает в зернах, имеющих наиболее благоприятную ориентировку плоскостей скольжения, т. е. такую, при которой последние совпадают с площадками действия наибольших по величине касательных напряжений, вызываемых данной системой сил. Остальные зерна деформируются

упруго и могут получать лишь относительное смещение. При линейном растяжении и сжатии наиболее благоприятную для начала пластической деформации ориентировку имеют зерна, у которых плоскости скольжения расположены под углом 45° к направлению действия внешней силы. Внешним проявлением сдвигов в наиболее благоприятно ориентированных зернах являются линии скольжения, наблюдаемые часто на поверхности деформируемого тела и впервые обнаруженные Д. К. Черновым. На фиг. 12 представлены линии скольжения, образовавшиеся на покрытой пленкой окислов поверхности заготовки, полученной вырубкой толстого листового металла.



Фиг. 12.

Так как первые сдвиги в зернах происходят в направлениях, по которым в деформируемом теле действуют наибольшие касательные напряжения, то линии скольжения, выявляемые на поверхности поликрист-

таллического тела, позволяют судить о направлениях максимальных сдвигающих напряжений, вызываемых в теле приложенными к нему силами. По мере увеличения деформирующих сил касательные напряжения, действующие в менее благоприятно ориентированных плоскостях скольжения, достигают величины, необходимой для начала пластической деформации, причем последняя начинает охватывать все возрастающее количество зерен поликристалла. Нормальное напряжение при линейном растяжении или сжатии, соответствующее включению в пластическую деформацию преобладающего большинства зерен металла, является пределом текучести.

Дальнейшая деформация поликристаллического тела приводит к тому что зерна получают вытянутую форму в направлении наиболее интенсивного течения металла. Определенная ориентировка вытянутых в результате пластической деформации зерен называется полосчатостью микроструктуры.

Соотношение между средними величинами наибольших и наименьших размеров зерен указывает на величину деформации зерен.

Одновременно с изменением формы зерен в процессе деформации происходит поворот кристаллографических осей отдельных зерен в пространстве. По мере протекания пластической деформации разница в направлениях кристаллографических осей отдельных зерен уменьшается, а плоскости скольжения стремятся совместиться с направлением наиболее интенсивного течения металла. Это приводит к тому, что при значительной деформации возникает преимущественная ориентировка кристаллографических осей зерен поликристалла, называемая текстурой. Возникновение текстуры приводит к анизотропии свойств поликристалла.

Пластическая деформация металлов может сопровождаться явлениями диффузии. Вокруг атомов, размещающихся в кристаллической решетке зерен основного металла, возникает силовое поле, вызывающее смещение соседних атомов из положений с минимумом потенциальной энергии. Это силовое поле может взаимодействовать с силовыми полями дислокаций. В результате такого взаимодействия атомы растворенного элемента (примеси) накапливаются или вытесняются из области дислокации.

Таким образом создается направленное перемещение (диффузия) атомов примеси в деформируемых зернах в направлении градиента напряжений. Это явление, названное "диффузионной пластической деформацией", исследовалось Г. В. Курдюмовым, С. Т. Конобеевским, И. А. Одингом и др.

Явление диффузионной пластичности, так же как и скольжение, может приводить к остаточным изменениям размеров и формы зерен, которые получаются в результате смещения дислокации.

Механизм диффузионной пластичности наиболее сильно проявляется в периферийных слоях зерен и по границам блоков мозаики. Этот механизм сопутствует скольжению. Его роль увеличивается при деформации с нагревом.

Описанные выше процессы внутрикристаллитной деформации являются основными процессами, обуславливающими изменение формы поликристаллического металла. Межкристаллитная деформация в этом смысле играет значительно меньшую роль.

Межкристаллитная деформация, как сказано ранее, выражается в относительном смещении зерен относительно друг друга. При этом на соотношение между внутрикристаллитной и межкристаллитной деформациями поликристалла оказывает влияние раз-

личие свойств металла внутри зерен и по их границам. На границе зерен существует переходный слой, в котором закономерность расположения атомов резко нарушается. Отсутствие закономерного расположения атомов в пограничных слоях зерен является следствием взаимодействия атомов смежных зерен, неправильности их формы и взаимным "надавливанием" зерен при кристаллизации из расплава. Кроме того, при затвердевании расплава по границам зерен скапливаются нерастворимые примеси. Таким образом, пограничные слои зерен отличаются от внутренних слоев физико-химическими свойствами. Отсутствие правильности строения металла в пограничных межзеренных слоях приводит к тому, что атомы в этих слоях не находятся в положениях, соответствующих минимуму потенциальной энергии. Отсюда следует, что их подвижность может быть больше, чем во внутренних слоях зерен, а их относительное перемещение (происходящее не по каким-либо определенным плоскостям) может требовать относительно меньших касательных напряжений. Однако возможность относительного смещения атомов в пограничных слоях не всегда больше, чем для внутренних слоев, в которых скольжение осуществляется перемещением дислокации.

Смещение атомов в пограничных слоях зерен затрудняется наличием нерастворимых примесей и, неправильной формой поверхности зерен, приводящей к их зацеплениям и заклиниваниям а процессе деформации.

При межкристаллитной деформации возникают повреждения по границам зерен, ведущие при развитии межкристаллитной деформации к образованию микро-, а затем и макротрещин, что в конечном итоге может привести к разрушению поликристалла.

Значительная пластическая деформация может иметь место в случае достаточно прочных границ зерен, когда межкристаллитные перемещения незначительны и играют второстепенную роль.

Однако межзеренные перемещения могут играть и значительную роль в формоизменении тела, если возникающие повреждения границ зерен восстанавливаются полностью или в значительной степени в процессе деформации. Это явление наблюдается преимущественно при высоких температурах.

УПРОЧНЕНИЕ ПРИ ХОЛОДНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Пластическая деформация поликристалла приводит к значительному изменению механических, физических и химических свойств металла. С увеличением степени деформации увеличиваются все показатели сопротивления деформированию: пределы упругости, пропорциональности, текучести и прочности. Увеличивается также твердость металла. Одновременно с этим наблюдается уменьшение показателей пластичности (относительное удлинение, относительное сужение, ударная вязкость); увеличивается электрическое сопротивление, уменьшается сопротивление коррозии, теплопроводность, изменяются магнитные свойства ферромагнитных металлов и т. п. Совокупность явлений, связанных с изменением механических и физико-химических свойств металлов в процессе пластической деформации, называется упрочнением (наклепом). До настоящего времени физическая природа упрочнения полностью не выяснена.

Изменение механических свойств металлов и, в частности увеличение их прочностных характеристик, в значительной степени объясняется искажениями

пространственной атомной решетки при взаимодействии одинаковых по знаку дислокаций, искажением плоскостей скольжения, блокообразованием концентрацией обломков зерен на поверхностях скольжения. Кроме того, рядом исследований показано, что на изменение прочностных свойств в процессе деформирования сплавов, имеющих метастабильные структуры некоторых составляющих, оказывает влияние изменение структурного состояния этих фаз.

По представлениям С. Т. Кишкина, в процессе пластической деформации стали по плоскостям скольжения выделяются субмикроскопические частицы (карбиды), блокирующие сдвиги и способствующие упрочнению металла.

С. Т. Конобеевский и М. А. Захарова рентгенографическим методом обнаружили, что в процессе деформации твердого раствора меди в алюминии происходит распад этого раствора с выделением дисперсных частиц по плоскостям скольжения.

С. С. Носырева и М. В. Буракова наблюдали превращение переохлажденного аустенита в мартенсит по плоскостям скольжения в процессе пластической деформации.

Выделение субмикроскопических частиц по плоскостям скольжения, очевидно, является следствием значительного увеличения температуры на плоскостях скольжения и в малых объемах, прилегающих к этим плоскостям.

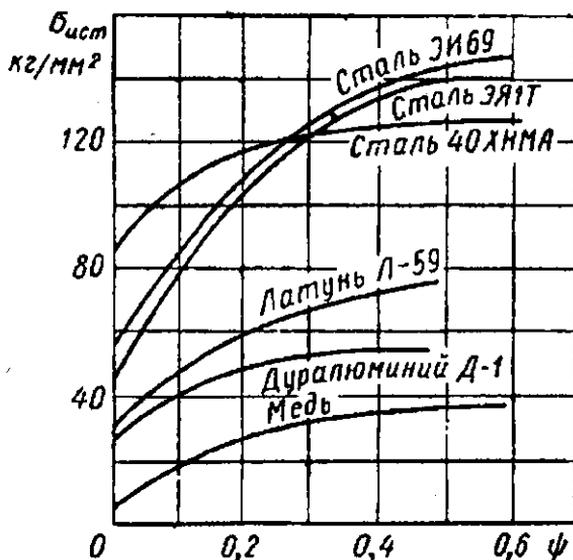
Повышение температуры является дополнительным источником энергии, необходимой для протекания диффузионных процессов, и, в частности, для коагуляции и выпадения карбидов на плоскостях скольжения.

Изменениями в строении металла и взаимном расположении атомов решетки объясняют и другие

изменения свойств металлов в результате пластической деформации.

КРИВЫЕ УПРОЧНЕНИЯ

Для характеристики изменения сопротивления деформированию в процессе пластической деформации в качестве показателя сопротивления деформированию обычно принимают так называемое истинное напряжение, представляющее частное от деления дейст-



Фиг. 13.

вующего усилия при линейном растяжении образца на площадь его поперечного сечения в каждый данный момент деформирования (значение истинного напряжения, как показал Л. А. Шофман, может быть найдено

также по данным испытаний на сжатие). Истинное напряжение по существу является пределом текучести материала, получающего упрочнение при деформации. Показателями формоизменения образца, оценивающими степень деформации, являются относительное удлинение образца при растяжении $\epsilon = (l - l_0) / l_0$ или относительное уменьшение площади поперечного сечения $\psi = (F_0 - F) / F_0$, где l_0 и F_0 исходные значения расчетной длины образца и площади его поперечного сечения, а l и F - текущие значения длины и площади поперечного сечения образца в данный момент деформирования.

Графики зависимости истинного напряжения от степени деформации называют кривыми упрочнения. Характер кривых упрочнения для некоторых металлов и сплавов показан на фиг. 13.

Как видно из приведенных кривых упрочнения, наиболее интенсивное увеличение истинного напряжения имеет место в начальной стадии деформации, а при некоторых значениях степени деформации (порог упрочнения) дальнейшая деформация не вызывает значительного изменения величины истинного напряжения.

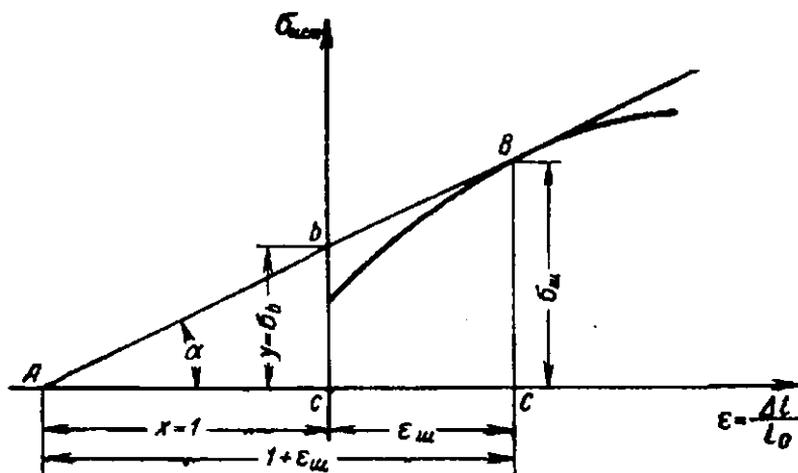
В зависимости от принятого показателя степени деформации различают кривые упрочнения первого и второго родов. В кривых упрочнения первого рода истинное напряжение дается в зависимости от относительного удлинения, а в кривых второго рода - от относительного сужения.

Кривые упрочнения первого и второго родов имеют некоторые характерные свойства, дающие возможность приближенного их построения по данным стандартного испытания на растяжение.

Рассмотрим кривую упрочнения первого рода (фиг. 14). Истинное напряжение для любого момента деформации до начала образования шейки может быть определено из соотношения (1.2), по текущим значениям условного напряжения $\sigma_{усл}$ и площади поперечного сечения F :

$$\sigma_{ист} = \sigma_{усл} F_0/F, \quad (1.2)$$

где $\sigma_{усл} = P/F_0$ - частное от деления действующего в данный момент усилия на исходную площадь поперечного сечения образца.



Фиг. 14.

В момент, соответствующий началу образования шейки в образце при испытании на растяжение, условное напряжение равно пределу прочности σ_B (усилие растяжения имеет максимальную величину).

Истинное напряжение $\sigma_{ш}$, соответствующее этому моменту, определится выражением

$$\sigma_{ш} = \sigma_b F_0 / F_{ш}, \quad (1.3)$$

где $F_{ш}$ - площадь поперечного сечения образца в момент начала образования шейки при его растяжении.

Из условия постоянства объема при равномерном удлинении образца можно установить:

$$F = F_0 l_0 / l = F_0 l_0 / (l_0 + \Delta l) = F_0 l_0 / l_0 (1 + \epsilon) = F_0 / (1 + \epsilon), \quad (1.4)$$

где $\epsilon = (l - l_0) / l_0$ - относительное удлинение образца.

Соотношения (1.2) - (1.4) справедливы до момента начала образования шейки включительно.

Усилие в любой момент деформации определяется соотношением

$$P = \sigma_{ист} F. \quad (1.5)$$

Дифференцируя уравнение (1.5), находим

$$dP = \sigma_{ист} dF + F d\sigma_{ист}. \quad (1.6)$$

Подставляя значение F из (1.4) в (1.6) и определяя величину dF дифференцированием выражения (1.4), после несложных преобразований получим

$$dP = (d\sigma_{ист} - \sigma_{ист} d\epsilon / (1 + \epsilon)) F_0 / (1 + \epsilon). \quad (1.7)$$

В момент начала образования шейки $\sigma_{ист} = \sigma_{ш}$,

$\varepsilon = \varepsilon_{ш}$, а $dP = 0$, так как в этот момент прекращается увеличение усилия растяжения. Отсюда следует, что

$$d\sigma_{ш} / d\varepsilon_{ш} = \sigma_{ш} / (1 + \varepsilon_{ш}). \quad (1.8)$$

Но $d\sigma_{ш} / d\varepsilon_{ш} = \operatorname{tg} \alpha$, где α - угол наклона касательной, проведенной к кривой упрочнения в точке, соответствующей началу образования шейки. Найдем величины отрезков, отсекаемых этой касательной на оси абсцисс x и на оси ординат y .

Из треугольника ABC находим, что $x + \varepsilon_{ш} = \sigma_{ш} / \operatorname{tg} \alpha = 1 + \varepsilon_{ш}$, откуда следует, что $x = 1$.

Из подобия треугольников ABC и Abc следует, что $y / \sigma_{ш} = 1 / (1 + \varepsilon_{ш})$, а величина $y = \sigma_{ш} / (1 + \varepsilon_{ш})$. Используя соотношения (1.3) и (1.4) находим, что $y = \sigma_b$.

Таким образом касательная, проведенная к кривой упрочнения в точке, соответствующей началу образования шейки, отсекает на отрицательной части оси деформаций отрезок, численно равный единице, а на оси истинных напряжений - отрезок, численно равный пределу прочности.

Рассмотрим свойства кривых упрочнения второго рода (фиг. 15). Относительное уменьшение площади поперечного сечения образца при растяжении определяется выражением $\psi = (F_0 - F) / F_0$, откуда следует, что

$$F = F_0(1 - \psi) \quad (1.9)$$

Усилие P в любой момент деформации до начала образования шейки включительно может быть найдено по выражению

$$P = \sigma_{ист} F = \sigma_{ист} F_0(1 - \psi) \quad (1.10)$$

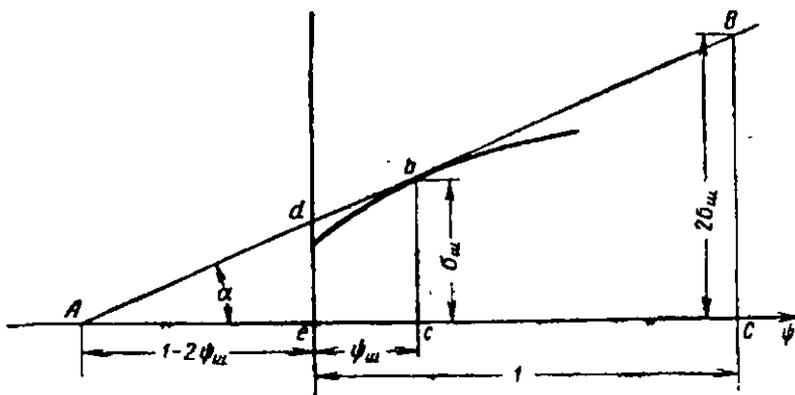
Дифференцируя (1.10), находим

$$dP = F_0(1 - \psi)d\sigma_{\text{ист}} - \sigma_{\text{ист}}F_0d\psi. \quad (1.11)$$

Для момента, соответствующего началу образования шейки $\psi = \psi_{\text{ш}}$, $\sigma_{\text{ист}} = \sigma_{\text{ш}}$, $dP = 0$, аналогично предыдущему.

Поэтому из выражения (1.11) для момента, соответствующего началу образования шейки, может быть получено соотношение

$$d\sigma_{\text{ш}} / d\psi_{\text{ш}} = \sigma_{\text{ш}} / (1 - \psi_{\text{ш}}). \quad (1.12)$$



Фиг. 15.

Отношение $d\sigma_{\text{ш}} / d\psi_{\text{ш}}$ является тангенсом угла α наклона касательной, проведенной к кривой упрочнения второго рода в точке, соответствующей началу образования шейки. Отсюда следует, что $\text{tg}\alpha = \sigma_{\text{ш}} / (1 - \psi_{\text{ш}})$, а из треугольников ABC и Abs находим, что на отрицательной части оси абсцисс касательная отсека-

ет отрезок, численно равный $1 - 2\psi_{ш}$, а на перпендикуляре к оси абсцисс в точке $\psi = 1$ - отрезок, численно равный $2\sigma_{ш}$.

Таким образом, касательная, проведенная к кривой упрочнения второго рода в точке, соответствующей началу образования шейки, отсекает на перпендикулярен к оси абсцисс в точке $\psi = 1$ отрезок, численно равный удвоенному значению истинного напряжения в момент начала образования шейки.

Кривые упрочнения могут быть использованы для анализа характера и степени влияния упрочнения на величину потребных для деформирования усилий при обработке металлов давлением. Для облегчения аналитического решения задачи по установлению влияния упрочнения на величину усилия деформирования и на распределение напряжений в деформируемом теле необходимо кривую упрочнения представить в виде уравнения, связывающего истинное напряжение со степенью деформации. С целью упрощения функциональной зависимости истинного напряжения от степени деформации кривую упрочнения заменяют прямой линией или степенной кривой.

В качестве прямой линии, приближенно характеризующей влияние упрочнения на величину истинного напряжения, обычно принимают касательную, проведенную к кривой упрочнения в точке, соответствующей началу образования шейки. Уравнение этой прямой в координатах $\sigma_{ист} - \psi$ может быть записано в виде

$$\sigma_{ист} = \sigma_{т0} + B\psi, \quad (1.13)$$

где $\sigma_{т0}$ - экстраполированный предел текучести (отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат при $\psi = 0$);

B - модуль упрочнения, являющийся тангенсом угла α наклона прямой к оси абсцисс.

Используя соотношения (1.12) и (1.9), а также учитывая, что $\sigma_w = \sigma_b F_0/F_w$ можно получить

$$B = \sigma_b / (1 - \psi_w)^2. \quad (1.14)$$

Величина σ_{m0} может быть найдена из треугольника Ade (фиг. 15), и формула для определения σ_{m0} с использованием выражения (1.14) для определения $\tan \alpha = B$ получит вид

$$\sigma_{m0} = \sigma_b (1 - 2\psi_w) / (1 - \psi_w)^2 \quad (1.15)$$

Величины $\sigma_{ист}$, определенные расчетом по формуле (1.13), при всех значениях ψ , за исключением $\psi = \psi_w$, будут несколько больше значений $\sigma_{ист}$, определяемых по кривой истинных напряжений, причем особенно заметной будет разница между этими величинами при малых степенях деформации ($\psi \ll \psi_w$).

Более точно отражает действительную зависимость истинного напряжения от величины ψ степенная функция вида

$$\sigma_{ист} = C\psi^n \quad (1.16)$$

Значения C и n могут быть определены следующим образом: при $\psi = \psi_w$ $\sigma_{ист} = \sigma_w$, следовательно, $C = \sigma_w / \psi_w^n$. Подставляя найденное значение C в уравнение (1.16), получаем

$$\sigma_{ист} = \sigma_w \psi^n / \psi_w^n \quad (1.17)$$

Из уравнений (1.10) и (1.17) может быть найдена формула для определения усилия P в любой момент растяжения (до начала образования шейки)

$$P = \sigma_{\psi} \psi^n F_0 (1 - \psi) / \psi^n_{\psi} \quad (1.18)$$

Дифференцируя выражение (1.18) и приравнявая (для момента начала образования шейки) $dP = 0$, находим, что

$$n = \psi_{\psi} / (1 - \psi_{\psi}).$$

Подставляя найденное значение n в уравнение (1.17) и заменяя в последнем σ_{ψ} через σ_b по соотношению $\sigma_{\psi} = \sigma_b F_0 / F_{\psi} = \sigma_b / (1 - \psi_{\psi})$, окончательно получаем

$$\sigma_{ист} = (\sigma_b / (1 - \psi_{\psi})) (\psi / \psi_{\psi})^{\psi_{\psi} / (1 - \psi_{\psi})} \quad (1.19)$$

Формула (1.19), предложенная С. И. Губкиным, как показало сопоставление расчетных значений $\sigma_{ист}$ с фактическими, достаточно правильно отражает характер и степень влияния упрочнения на величину истинного напряжения.

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ НА ПРОЦЕСС ДЕФОРМИРОВАНИЯ

ДЕФОРМАЦИЯ ПРИ ПОВЫШЕННЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ; ВОЗВРАТ И РЕКРИСТАЛЛИЗАЦИЯ

В предыдущей главе был описан механизм холодной деформации, сопровождающейся упрочнением.

При повышении температуры деформируемого металла в последнем возникают новые процессы, противоположные упрочнению, а именно возврат и рекристаллизация. Таким образом, при повышенных температурах в процессе деформации протекают одновременно как упрочняющие, так и разупрочняющие процессы.

При холодной деформации вследствие различного направления плоскостей скольжения в отдельных зернах, неравномерного распределения деформаций в объеме заготовки, различия в форме, размерах и свойствах зерен последние получают различную по величине упругую деформацию. Вместе с тем при холодной деформации возрастают искажения кристаллической решетки. В результате после снятия внешних усилий в холоднодеформированном металле возникают остаточные напряжения.

При деформации с нагревом до определенных температур амплитуда тепловых колебаний атомов увеличивается настолько, что облегчает переход атомов в положение равновесия. В связи с этим возникающие при деформации указанные выше упругие деформации в значительной мере выравниваются, а равно и уменьшаются образующиеся искажения кристаллической решетки, что обеспечивает резкое снижение остаточных напряжений после снятия внешних усилий (если не учитывать термических напряжений, которые могут возникнуть при неравномерном охлаждении заготовки после деформирования). Это явление называется возвратом (отдыхом).

Для чистых металлов возврат проявляется при абсолютных температурах выше $(0,25 - 0,30) T_{пл}$, где $T_{пл}$ - абсолютная температура плавления. Наличие

растворимых примесей в металле приводит к увеличению температуры возврата.

Возврат в процессе обработки приводит к некоторому уменьшению сопротивления деформированию и к увеличению пластичности. Тем не менее деформирование при температурах возврата сопровождается упрочнением, хотя интенсивность его несколько меньше.

Возврат не оказывает влияния на размеры и форму зерен, которые при деформации с наличием возврата, так же как и при его отсутствии, вытягиваются в направлении более интенсивного течения металла. Возврат также не препятствует образованию текстуры при деформации.

Возврат протекает во времени; с увеличением температуры скорость возврата увеличивается. В связи с этим эффект возврата зависит от соотношения между температурой и скоростью деформации. Повышение скорости деформации при данной температуре может снизить эффект возврата.

Возврат происходит также при нагреве (отпуске) металла после его холодного деформирования.

Нагрев холоднодеформированного металла до температуры возврата не оказывает значительного влияния на показатели его механических свойств (показатели прочности незначительно уменьшаются, а показатели пластичности несколько увеличиваются).

Следует отметить, что возврат (отпуск) повышает сопротивление холоднодеформированного металла коррозии и резко уменьшает возможность самопроизвольного растрескивания. Последнее явление наблюдается в деталях, полученных холодной штамповкой, особенно из латуни, и происходит под действием остаточных напряжений при уменьшении сопротивления разрушению за счет межкристаллитной коррозии.

Необходимо отметить, что у некоторых металлов и сплавов, например углеродистой стали, при температурах возврата может возникать явление старения, оказывающее противоположное возврату влияние на механические свойства. Старение приводит к увеличению показателей прочности при одновременном уменьшении показателей пластичности. Физическая природа старения окончательно еще не выяснена. Предполагается, что изменение механических свойств в процессе старения происходит вследствие выпадения мелкодисперсных частиц примесей по плоскостям скольжения.

Дальнейшее увеличение температуры деформируемого металла сверх температуры возврата ведет к возникновению процесса рекристаллизации. Рекристаллизация при пластическом деформировании заключается в появлении зародышей, возникновении и росте новых зерен, взамен деформированных.

Возможность рекристаллизации обуславливается тем, что увеличение температуры деформируемого металла поднимает энергетический потенциал атомов настолько, что последние получают возможность перегруппировок и интенсивного обмена местами.

Зародышами новых зерен становятся имеющиеся в деформируемом металле ячейки с относительно правильной, неискаженной в процессе деформации решеткой (отдельные блоки мозаики, обломки зерен на плоскостях скольжения или в пограничных, межзеренных слоях). К этим зародышам в соответствии с параметрами решетки пристраиваются атомы смежных с зародышами зерен и начинают расти новые зерна. Последние увеличиваются в размерах и с течением времени могут полностью поглотить атомы деформированных зерен. Вследствие одинаковой возможности роста новых зерен вокруг зародышей по всем

направлениям новые образующиеся из зародышей зерна равноосны, т. е. имеют в среднем одинаковые размеры по всем направлениям.

Таким образом, деформация металла при температурах выше температуры рекристаллизации сопровождается двумя противоположно и одновременно действующими процессами: деформацией зерен (упрочнением) и их рекристаллизацией.

Процесс рекристаллизации происходит во времени с некоторой скоростью, величина которой зависит от температуры и степени деформации. Чем выше температура и степень деформации, которую получает деформируемое тело, тем выше скорость рекристаллизации. Конечный результат будет зависеть от соотношения между скоростью деформации и скоростью рекристаллизации. Если последняя больше скорости деформации, то в результате все зерна деформированного металла получают равноосную форму, а кристаллическое строение их будет соответствовать строению недеформированных зерен и изменения свойств металла, вызываемого упрочнением, не произойдет.

Для чистых металлов, по данным А. А. Бочвара, температура начала рекристаллизации определяется из соотношения

$$T_{\text{рекр}} \geq 0,4T_{\text{пл}}$$

где $T_{\text{рекр}}$ - абсолютная температура рекристаллизации;
 $T_{\text{пл}}$ - абсолютная температура плавления.

Наличие растворимых примесей несколько повышает температуру рекристаллизации.

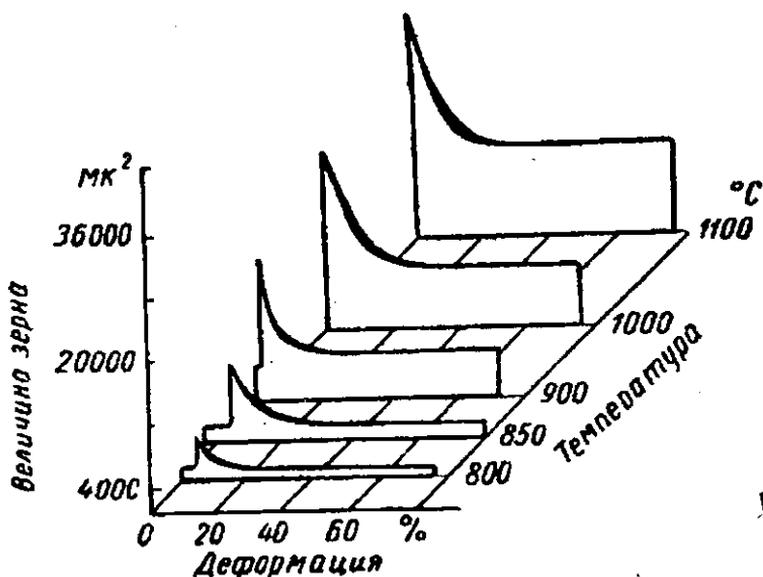
В процессе рекристаллизации усиливается диффузия атомов как внутри кристаллитов, так и по грани-

цам зерен, что способствует выравниваю химической неоднородности зерен и снятию повреждений, возникающих по границам зерен в результате межкристаллитной деформации.

Размеры равноосных зерен в металле, деформированном при наличии рекристаллизации, зависят от температуры, при которой происходит рекристаллизация, от степени деформации, а также от скорости деформации. Связь между величиной зерна после деформации с рекристаллизацией, температурой и степенью деформации обычно представляется объемными диаграммами рекристаллизации (второго рода), которые строятся по результатам специально проводимых экспериментов и являются характерными для каждого металла и сплава. На фиг. 16 представлена объемная диаграмма рекристаллизации низкоуглеродистой стали. Аналогичный характер имеют диаграммы рекристаллизации и для других металлов и сплавов. Особенностью зависимости величины зерен после деформации с рекристаллизацией от степени деформации является наличие так называемых критических степеней деформации, при которых наблюдается резкое увеличение размеров рекристаллизованных зерен. Величина критической степени деформации при температурах, близких к температуре начала рекристаллизации, обычно не превышает 8 - 10% и уменьшается при увеличении температуры (зона критических степеней деформации смещается к началу координат).

Наличие критических степеней деформации можно объяснить следующим образом. В начальной стадии деформация происходит в основном за счет внутрикристаллитных процессов, без нарушения межкристаллического вещества, обволакивающего зерна. Вследствие этого увеличение размеров зерен при ре-

кристаллизации путем их объединения затруднено. Кроме того, при относительно малой величине деформаций количество образовавшихся блоков-обломков кристаллитов невелико, а следовательно, невелико и число возможных центров рекристаллизации. При критических степенях число центров рекристаллизации остается небольшим (несколько увеличивается), однако межкристаллическое вещество частично разрушается, что приводит к непосредственному соприкосновению кристаллитов. Это обстоятельство в процессе рекристаллизации облегчает присоединение атомов соседних зерен к новому зерну, растущему из центра рекристаллизации, что в конечном итоге приводит к объединению нескольких деформируемых зерен в одно, т. е. к увеличению размеров рекристаллизованных зерен.



Фиг. 16.

Дальнейшее увеличение степени деформации приводит к увеличению числа центров рекристаллизации, а следовательно, и числа рекристаллизованных зерен, что при данном объеме тела дает уменьшение их размеров.

С увеличением температуры прочность межкристаллического вещества уменьшается, непосредственное соприкосновение кристаллитов происходит при меньших степенях деформации, что и вызывает смещение критических степеней деформации к началу координат. С увеличением температуры, кроме того, увеличивается подвижность атомов, облегчающая объединение соседних зерен в процессе рекристаллизации, что приводит к относительному увеличению размеров рекристаллизованных зерен при всех степенях деформации.

В работах ряда отечественных ученых, было показано, что у некоторых сортов стали при весьма высоких степенях деформации наблюдается появление второго максимума на кривых рекристаллизации (фиг. 17).

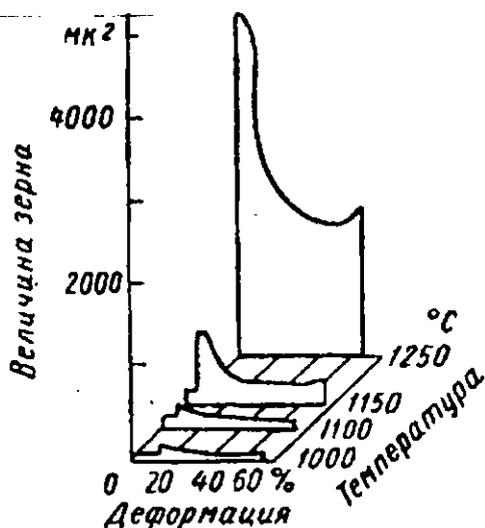
Величина зерна после рекристаллизации зависит еще и от длительности выдержки нагретого металла при температурах, превышающих температуру рекристаллизации. При длительной выдержке в отличие от ранее описанной рекристаллизации обработки наблюдается так называемая собирательная рекристаллизация, сущность которой состоит в том, что размеры равноосных зерен, получившихся в результате рекристаллизации обработки, увеличиваются за счет их объединения.

Собирательная или поверхностная рекристаллизация протекает медленнее, чем рекристаллизация обработки. Возможность роста зерен при собирательной рекристаллизации обусловлена стремлением

атомов в процессе перестройки занять положения, отвечающие минимуму потенциальной энергии. Искажения правильности взаимного расположения атомов, имеющиеся в поверхностных слоях зерен, увеличивают потенциальную энергию, накопленную в поликристалле. При увеличении размеров зерен суммарная поверхность их уменьшается, а следовательно, уменьшается и накопленная в теле потенциальная энергия. Особенно интенсивно собирательная рекристаллизация происходит при температурах, значительно превышающих температуру начала рекристаллизации.

Рекристаллизация происходит также и при нагреве холоднореформированного металла до температуры, несколько превышающей температуру начала рекристаллизации (низкий или рекристаллизационный отжиг).

Величина зерен, получившихся в результате рекристаллизации холоднореформированного металла



Фиг. 17.

зависит от степени деформации, которую получила заготовка или отдельные ее участки, от температуры рекристаллизации и от времени выдержки при этой температуре. Характер зависимости величины зерна от этих факторов аналогичен рассмотренному ранее. В этом случае также имеются критические степени деформации, при которых наблюдается значительное увеличение размеров рекристаллизованных зерен, причем увеличение размеров зерен тем больше, чем выше температура нагрева.

Рекристаллизация холоднодеформированного металла, получившего весьма большую степень деформации и имеющего текстуру деформации, может привести к устранению текстуры. Однако рекристаллизация не всегда приводит к ее устранению.

В результате рекристаллизационного отжига металла, имеющего текстуру деформации, может получиться так называемая тексрекристаллизации, характеризующаяся тем, что кристаллографические оси рекристаллизованных равноосных зерен имеют преимущественную ориентировку в пространстве (большинство зерен имеет одинаковое направление кристаллографических осей в пространстве). Текстура рекристаллизации может быть идентична текстуре деформации, но может и отличаться от нее, т. е. направления преимущественной ориентировки кристаллографических осей в теле после рекристаллизации изменяются.

Возникновение текстуры рекристаллизации объясняется, очевидно, тем, что зародыши новых зерен, имеющиеся в деформированном металле, имеют преимущественную ориентировку кристаллографических осей в пространстве. Текстуры рекристаллизации могут быть идентичны исходным текстурам деформации, но могут также значительно отличаться от них. Тексту-

ра рекристаллизации, а также возможность устранения текстуры деформации без образования новой текстуры после отжига зависит от состава сплава и содержания примесей, от степени деформации, полученной при холодном деформировании, от характера текстуры деформации, от температуры отжига и его продолжительности. Наличие текстуры рекристаллизации приводит к анизотропии механических свойств в отожженном металле, что может сказаться на служебных свойствах полученной обработкой давлением детали или на поведении отожженной заготовки при последующей пластической деформации. Так, например, образование фестонов (ушей) при вытяжке стакана из плоской круглой заготовки является следствием наличия в прокатанном (и отожженном) металле (листе) текстуры рекристаллизации.

ВИДЫ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ОБРАБОТКЕ МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

Из ранее изложенного видно, что при обработке давлением, в металле, в общем случае, одновременно могут протекать взаимно противоположные процессы: процесс упрочнения и процессы разупрочняющие (возврат и рекристаллизация). И те и другие протекают во времени с определенными скоростями, обусловленными условиями деформации (температура, скорость и степень деформации) и природой деформируемого металла.

В зависимости от того, какой из процессов будет преобладающим, результаты деформации будут различны.

По С. И. Губкину различают горячую, неполную горячую, неполную холодную и холодную деформации.

Горячей деформацией называют такую, в процессе которой рекристаллизация успевает произойти полностью. В результате горячей деформации металл получает полностью рекристаллизованную равноосную микроструктуру при отсутствии каких-либо следов упрочнения. Горячая деформация осуществляется при температурах, превышающих температуру начала рекристаллизации, в тем большей степени, чем выше скорость деформации.

При *неполной горячей деформации* рекристаллизация протекает не полностью. При неполной горячей деформации в металле при его деформировании, а также после окончания деформации одновременно будут иметь место два разных типа микроструктур: рекристаллизованная (с равноосными зернами) и нерекристаллизованная (с вытянутыми зернами). Наличие рекристаллизованных зерен наряду с деформированными приводит к увеличению неравномерности деформации, которая способствует уменьшению пластичности металла и увеличению вероятности разрушения. Деформированный металл, полученный при неполной горячей деформации, имеет значительные по величине остаточные напряжения, могущие при недостаточной пластичности вызвать разрушение металла.

Неполная горячая деформация может иметь место при температурах деформации, мало превышающих температуру начала рекристаллизации, причем вероятность ее возникновения увеличивается с возрастанием скорости деформации.

Неполной горячей деформации на практике следует всемерно избегать, так как она обуславливает низкое качество поковки. Этот вид деформации легко возникает у сплавов, имеющих малую скорость рекристаллизации (например, некоторые алюминиевые и

магниевого сплавы, представляющие многофазные, метастабильные системы). Поэтому деформирование их производят с малыми скоростями.

Неполной холодной деформацией называют такую, при которой рекристаллизация отсутствует, но процесс возврата успевает протекать. В результате неполной холодной деформации металл получает полосчатую микроструктуру без следов рекристаллизации, а при значительной деформации - текстуру деформации. Пластические свойства его выше, чем у металла деформированного при отсутствии возврата, а прочностные свойства несколько ниже.

Неполная холодная деформация может иметь место при температуре деформации большей, чем температура начала возврата; при этом скорость деформации должна быть такой, чтобы возврат успевал полностью произойти.

При *холодной деформации* рекристаллизация и возврат полностью отсутствуют и деформированный металл имеет все признаки упрочнения. Холодная деформация протекает при температурах меньших температуры начала возврата.

Таким образом, температурно-скоростные условия оказывают существенное влияние на строение деформированного металла.

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЮ И ПЛАСТИЧНОСТЬ

Повышение температуры металла, кроме того, оказывает существенное влияние на его механические характеристики. О ходе изменения показателей пластичности и уменьшает сопротивление деформированию. Дальнейшее увеличение температуры при-

мерно до 300° дает значительное уменьшение показателей пластичности и увеличение показателей прочности (зона синеломкости). Это предположительно объясняется выпадением мельчайших частиц карбидов по плоскостям скольжения, аналогично процессу старения. Дальнейшее увеличение температуры приводит к постепенному, но значительному уменьшению показателей прочности. При температурах порядка 1000° предел прочности уменьшается более чем в 10 раз.

В отношении показателей пластичности характерно их некоторое уменьшение в области температур, при которых возможна неполная горячая деформация, и в области температур фазовых превращений (часто эти оба явления происходят при почти одинаковых температурах).

Снижение пластичности в области температур фазовых превращений объясняется наличием в деформируемом теле одновременно двух фаз с различными свойствами, что приводит к увеличению неравномерности напряженного состояния.

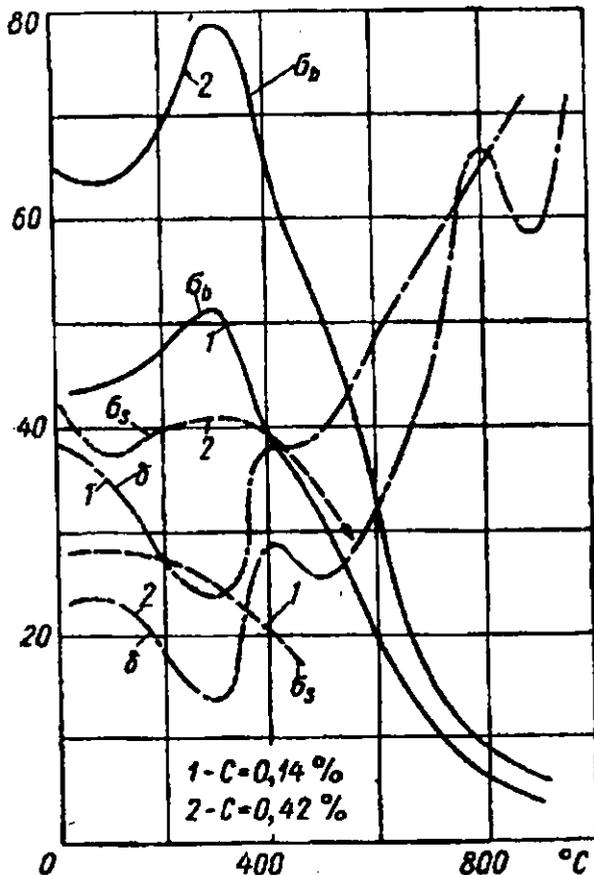
Следует отметить, что при температурах, несколько меньших температуры плавления, наблюдается резкое снижение показателей пластичности, являющееся результатом значительного роста зерна с последующим пережогом металла (окисление границ зерен). Аналогичный характер имеют графики зависимости показателей прочности и пластичности для других металлов и сплавов.

Общим положением для всех металлов и сплавов является то, что наибольшую пластичность они имеют при температурах рекристаллизации, т. е. условиях горячего деформирования, которым одновременно соответствуют и малые значения показателей проч-

ности, а следовательно, и сопротивления деформированию.

Опасными зонами температур, при которых наблюдается уменьшение пластичности, являются зоны, в области которых возможны фазовые превращения, неполная горячая деформация или явления старения и синеломкости.

Увеличение пластичности при нагреве до температур горячей деформации является следствием уве-



Фиг. 18.

личения подвижности атомов, но, кроме того, увеличению пластичности способствуют еще некоторые явления. Так, например, в условиях горячего деформирования обычно значительно возрастает пластичность межкристаллических прослоек, содержащих повышенное количество примесей. Это объясняется тем, что пограничные слои с повышенным содержанием примесей обладают меньшей термодинамической устойчивостью и имеют температуру плавления меньшую, чем температура плавления зерен основного металла. С нагревом до температур горячего деформирования прочность межзеренных прослоек уменьшается более интенсивно, чем прочность зерен, и доля межкристаллитной деформации в общей деформации металла увеличивается. Одновременно хрупкость этих прослоек уменьшается, а следовательно, уменьшается и образование в них микротрещин.

Уменьшение опасности образования микротрещин объясняется также возможностью их "залечивания" в процессе деформирования. В объяснении возможности "залечивания" микротрещин в процессе деформирования двухфазных сплавов существенное значение имеет установленное А. А. Бочваром явление скачкообразного переноса атомов кристаллитов одной фазы на кристаллиты другой фазы. Явление это А. А. Бочвар назвал растворно-осадительным типом пластической деформации. При межфазовом перемещении атомов происходит "залечивание" микроскопических трещин, так как осаждение металла легче происходит в микропустотах.

Так как подвижность атомов увеличивается с ростом температуры, то и "залечивание" микротрещин легче осуществляется при температурах горячей деформации.

ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ НА ПЛАСТИЧНОСТЬ И СОПРОТИВЛЕНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЮ

Обычные определения механических свойств металлов производятся на испытательных машинах со скоростями деформирования, не превышающими 10 мм/сек. Обработка давлением на прессах и ковочных машинах ведется при средней скорости движения рабочего органа машины в пределах примерно от 0,1 до 0,5 м/сек. При обработке на молоте воздействие на металл носит уже динамический характер: скорости бабы молота в момент удара составляют 5 - 10 м/сек, а весь процесс деформации за один удар длится лишь сотые доли секунды. Поэтому весьма важно знать, можно ли при анализе и проектировании процессов обработки давлением пользоваться данными о механических свойствах металлов, полученными путем обычных испытаний. Иначе говоря, очень важно знать, как влияет скорость деформации на пластичность и сопротивление деформированию.

В первом приближении можно сказать, что при увеличении скорости деформации сопротивление деформированию возрастает, а пластичность падает.

С увеличением скорости деформации особенно резко падает пластичность некоторых магниевых сплавов, высоколегированной стали и медных сплавов. Значительно менее чувствительны к скорости деформации алюминиевые сплавы, низколегированная и углеродистая конструкционная сталь. Последние обладают при горячей обработке вполне достаточной пластичностью при любых практически применяемых скоростях деформирования.

Влияние скорости деформации при холодной обработке давлением значительно меньше, чем при горячей. Интенсивность роста этого влияния больше в диапазоне малых скоростей (мм/мин) и весьма мала в диапазоне больших скоростей.

Однако приведенные данные требуют уточнения. Надо учитывать прежде всего два существенных обстоятельства: наличие при горячем пластическом деформировании двух противоположных процессов: упрочняющего и разупрочняющего (возврат и рекристаллизация) и тепловой эффект пластической деформации. О возврате и рекристаллизации говорилось ранее. Тепловой эффект выражается в том, что энергия, расходуемая на пластическую деформацию, превращается в теплоту. Тепловой эффект при прочих равных условиях уменьшается с увеличением температуры деформации, так как с повышением температуры падает сопротивление деформации и поэтому снижается энергия, потребляемая для деформации. Поэтому при одной и той же степени деформации данного образца в холодном и горячем состоянии тепла в последнем случае выделится меньше. Если скорость деформации малая, то тепло будет рассеиваться и процесс будет протекать почти изотермически. Наоборот, при больших скоростях деформации выделяющееся тепло будет повышать температуру тела, иначе говоря, будет наблюдаться температурный эффект.

При холодной обработке давлением разупрочняющие процессы не протекают. Сопротивление деформированию растет со степенью деформации в результате упрочнения, изменение скорости в некоторых пределах мало влияет на ход процесса. В отдельных же случаях холодной обработки давлением при высоких скоростях деформирования в результате температурного эффекта может возникнуть явление возврата;

сопротивление деформированию станет меньше, а пластичность больше, чем это было при более низкой скорости.

При горячей деформации идет процесс рекристаллизации. Чем выше скорость деформации и чем меньше скорость рекристаллизации, тем больше будет сопротивление деформации и тем меньше пластичность. Затрудняя процесс рекристаллизации, повышение скорости деформации при горячей обработке будет резко влиять на сопротивление деформации и пластичность при горячей обработке, как это было сказано ранее.

Сталь при низких температурах нагрева и магниевые сплавы при нормальном температурном интервалековки имеют очень малую скорость рекристаллизации. Поэтому повышение скорости деформации может изменить характер обработки: из горячей она обратится в неполную горячую, что и вызовет резкое уменьшение пластичности при одновременном росте сопротивления деформации.

Особый эффект может дать изменение скорости деформации, если обработка производится при температурах, близких к зонам хрупкости. Например, технически чистое железо (армко-железо) имеет зону хрупкости в температурном интервале 825 - 1100°. Если его ковать, например, при температуре, близкой к 825°, с большой скоростью деформации, то вследствие температурного эффекта деформации металл окажется в зоне хрупкости. Тот же температурный эффект при температуре, близкой к 1100°, может вывести металл из зоны хрупкости.

Таким образом, в одних случаях повышение скорости ведет к увеличению сопротивления деформированию и снижению пластичности, а в других - в связи с

температурным эффектом может привести к обратным результатам.

На практике влияние скорости деформации учитывают обычно в зависимости от скорости движения рабочего органа машины так называемым скоростным коэффициентом (табл. 1). Последний указывает, во сколько раз при обработке на данной машине сопротивление деформации будет больше, чем определенное на испытательной машине.

Под действием длительных нагрузок пластическая деформация может происходить при напряжениях, меньших предела текучести.

Это связано с явлением релаксации, определение которого дано Максвеллом:

"Всякое тело, независимо от его природы, с течением времени теряет способность сопротивляться действующим на него силам".

Длительная нагрузка, вызывающая напряжение меньше предела текучести, даже при нормальной температуре может вызвать постепенное увеличение

Таблица 1

Значение скоростного коэффициента W
(по С. И. Губкину)

Скорость рабочего органа машины в см/сек	Температура обработки в °С		
	Ниже 0,5 Т*	Выше 0,5 Т при неполной горячей деформации	Выше 0,5 Т при горячей деформации
10 - 25	1,1	1,4 - 2,4	1,2 - 1,6
25 - 75	1,15	2,4 - 3,0	1,6 - 2,0
Больше 100	1,25	3,5	2,5
Ударное воздействие	1,5 - 2,0	5,0	4,0

* Т - абсолютная температура плавления

Таблица 2

Эффект длительной нагрузки
 (Материал - латунь, $\sigma_b = 51,5 \text{ кг/мм}^2$, $\sigma_s = 36,5 \text{ кг/мм}^2$,
 $\sigma_{уп} = 16,5 \text{ кг/мм}^2$, $\delta = 14\%$)

Напряжение заданное при испытании в кг/мм^2	40	30 - 25	25	20	16
Время, протекшее до разрыва образца в днях	1	25	45	42	110

Таблица 3

Ползучесть углеродистой стали

Температура испытания в °С					Скорость ползучести в % в час
400	450	500	550	600	
Предел текучести при t испытания в кг/мм^2					
42,5	36,2	30	23,2	16,2	
Напряжение, заданное при испытании в кг/мм^2					
4	2,5	1,4	0,8	0,5	10^{-6}
7,3	4,6	2,5	1,4	0,8	10^{-5}
11	6,6	3,8	2,2	1,3	10^{-4}
15,2	9,8	5,5	2,8	1,6	10^{-3}

деформации вплоть до последующего разрушения. Это явление особенно резко выражается у некоторых цветных металлов, например у латуни, как можно видеть из табл. 2.

В случае повышенных температур развитие пластической деформации имеет место при напряжениях,

значительно меньших предела текучести (табл. 3). Это явление носит название ползучести.

Глава 2

НАПРЯЖЕННОЕ И ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

Тело, подвергающееся действию сил, находится в напряженном состоянии.

Внешние силы, действующие на тело, бывают двух основных видов: поверхностные и объемные или массовые.

К *поверхностным* силам относятся силы, которые прикладываются к поверхности данного тела. Они могут быть сосредоточенными и распределенными.

К *объемным* силам относятся силы, действующие на все, в том числе и внутренние точки тела. Эти силы пропорциональны элементам массы тела (сила тяжести, силы инерции и др.). В дальнейшем действие объемных сил рассматриваться не будет.

При рассмотрении напряженного состояния будет приниматься, что тело является *однородным* и *изотропным* и представляет собой систему непрерывных точек. Если система точек находится в равновесии, то принимается, что внешние силы уравниваются так, как если бы система отвердела. Это так называемый *принцип отвердения*.

При упругом состоянии равновесие может существовать при любом соотношении внешних сил.

При пластическом равновесии соотношения и величины сил должны быть вполне определены, как это будет выяснено в дальнейшем.

Под действием внешних сил в теле возникают внутренние усилия. Интенсивность внутренних усилий, отнесенная к единице площади, называется *напряжением*. Любая точка в напряженном теле находится под воздействием всех прочих, а потому в любой плоскости, проведенной через любую данную точку, на нее будет действовать напряжение, определенное по величине и направлению.

Полное напряжение по правилу параллелепипеда всегда может быть разложено на три: одно нормальное и два касательных. В равной мере полное напряжение можно разложить на три по направлению осей координат.

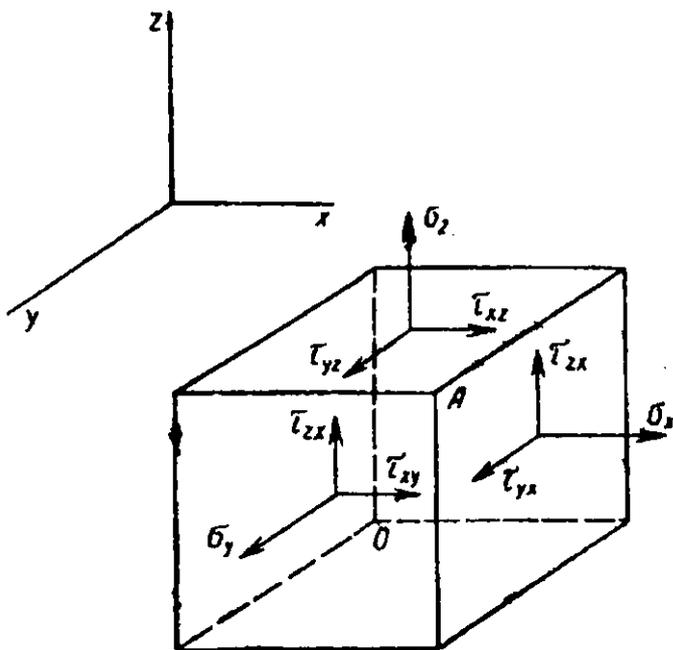
НАПРЯЖЕНИЯ В КООРДИНАТНЫХ ПЛОСКОСТЯХ

Проведем через напряженную точку A (фиг. 19) три плоскости, параллельные осям координат. Для того чтобы иметь возможность обозначить на чертеже напряжения, действующие на точку в этих плоскостях, построим параллелепипед, изображенный на фиг. 19. Ребра этого параллелепипеда будут считаться бесконечно малыми, неограниченно приближающимися к точке. Тогда на гранях параллелепипеда можно будет изобразить напряжения, действующие на точку в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, через нее проходящих. Напряжение в каждой площадке разложим на три: одно нормальное и два касательных, которые направим параллельно осям координат. Таким образом, всего будет три нормальных и шесть касательных напряжений.

Нормальные напряжения в координатных площадках будем обозначать σ , касательные τ . Примем индексы из двух букв. Первая буква будет указывать ту

координатную ось, по направлению которой действует напряжение, а вторая - ту координатную ось, которая нормальна (перпендикулярна) той площадке, к которой напряжение приложено (адрес напряжения). Например, τ_{xy} - касательное напряжение, действующее параллельно оси x на площадку, перпендикулярную к оси y , т. е. на площадку, параллельную плоскости xz . Поскольку для нормальных напряжений направление и адрес совпадают, обозначения этих напряжений будут даваться с индексом из одной буквы, например σ_x вместо σ_{yx} .

Геометрически напряжения, действующие в точке по площадкам, параллельным осям координат, изображены на фиг. 19 стрелками.



Фиг. 19.

Нормальные напряжения считаются положительными, если они стремятся вызвать растяжение.

Касательные напряжения положительны, когда они направлены в положительном направлении осей координат, если при этом растягивающее нормальное напряжение в данной площадке также направлено по положительному направлению оси. Когда нормальное растягивающее напряжение направлено в отрицательном направлении координатной оси, то касательные напряжения будут положительными, если они направлены по отрицательным направлениям соответствующих осей.

Запишем напряжения в точке по трем взаимно перпендикулярным площадкам, параллельным осям координат в форме таблицы (матрицы):

$$\begin{array}{ccc}
 \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \text{- направление } x \\
 \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} & \text{- направление } y \quad (2.1) \\
 \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z & \text{- направление } z \\
 \text{адрес } x & | & | & \\
 \text{адрес } y & | & & \\
 \text{адрес } z & & &
 \end{array}$$

В каждой горизонтальной строчке записаны напряжения одного направления в последовательности осей x , y и z .

В каждом вертикальном столбике записаны напряжения одного адреса в той же последовательности.

• Таким образом, в трех взаимно перпендикулярных площадках имеется девять напряжений: три нормальных и шесть касательных.

Однако вследствие известного положения о парности касательных напряжений, различные значения

могут иметь только шесть напряжений: три нормальных и три касательных, так как

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad (2.2)$$

т. е. касательные напряжения с индексами из двух одинаковых букв равны между собой вне зависимости от порядка расположения букв в индексе.

Если учесть равенства (2.2), то легко видеть, что касательные напряжения, расположенные в таблице (матрице) симметрично относительно главной диагонали, попарно равны между собой. Учитывая это, таблицу (матрицу) можно переписать упрощенно:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \cdot & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \cdot & \cdot & \sigma_z \end{array} \right\} \quad (2.1a)$$

НАПРЯЖЕНИЯ В НАКЛОННОЙ ПЛОЩАДКЕ

Докажем, что если заданы напряжения в трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через данную точку, то ее напряженное состояние вполне определено.

Проведем через данную точку O плоскость, наклонную к осям координат. В результате геометрически получим фигуру тетраэдра $Oabc$, сливающегося с данной точкой при бесконечном убывании величины его граней (фиг. 20). Пусть N - нормаль к наклонной грани тетраэдра. Тогда положение ее определится направляющими косинусами;

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \cos (N, x) = a_x ; \cos \beta = \cos (N, y) = a_y ; \\ \cos \gamma &= \cos (N, z) = a_z.\end{aligned}$$

Пусть площадь наклонной грани будет ΔF , остальных граней соответственно их положению ΔF_x , ΔF_y и ΔF_z . Считаем, что на наклонной грани действует какое-то напряжение S (полное).

Напряжения по координатным площадкам даны.

Проекции напряжения S на направления осей координат, или, что то же, компоненты напряжения S по осям координат, обозначаем S_x , S_y и S_z .

Тетраэдр должен находиться в равновесии. Пишем условия равновесия, проектируя все действующие силы на оси координат:

$$\sum_{\text{пр}x} = S_x \Delta F - \sigma_x \Delta F_x - \tau_{xy} \Delta F_y - \tau_{xz} \Delta F_z = 0;$$

$$\sum_{\text{пр}y} = S_y \Delta F - \tau_{yx} \Delta F_x - \sigma_y \Delta F_y - \tau_{yz} \Delta F_z = 0;$$

$$\sum_{\text{пр}z} = S_z \Delta F - \tau_{zx} \Delta F_x - \tau_{zy} \Delta F_y - \sigma_z \Delta F_z = 0;$$

Но

$$\Delta F_x = \Delta F a_x ; \Delta F_y = \Delta F a_y ; \Delta F_z = \Delta F a_z ;$$

тогда

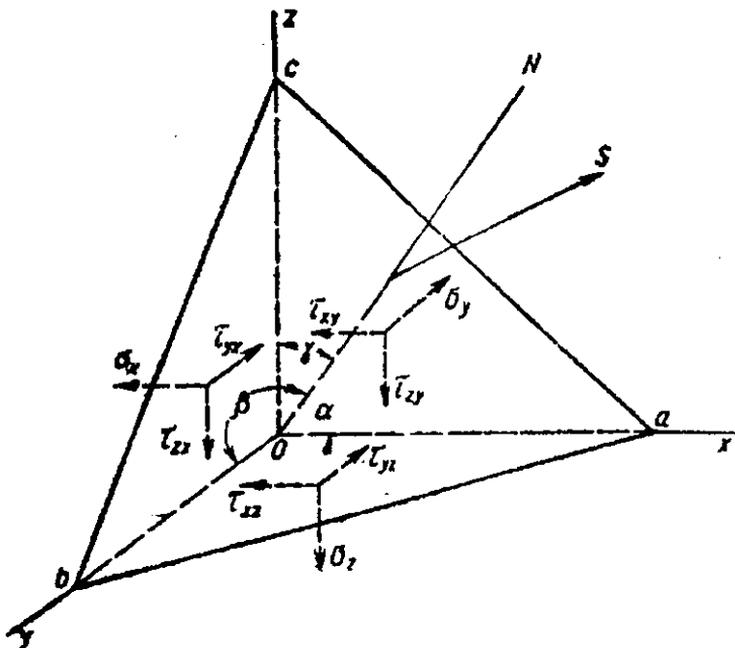
$$\begin{aligned}S_x &= \sigma_x a_x + \tau_{xy} a_y + \tau_{xz} a_z ; \\ S_y &= \tau_{yx} a_x + \sigma_y a_y + \tau_{yz} a_z ; \\ S_z &= \tau_{zx} a_x + \tau_{zy} a_y + \sigma_z a_z.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Суммируя компоненты напряжения S по правилу параллелепипеда, легко получить и само полное напряжение S :

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2. \quad (2.4)$$

Нормальное напряжение в наклонной площадке σ_n определится как сумма проекций компонент S_x , S_y , S_z на нормаль к площадке:

$$\sigma_n = S_x a_x + S_y a_y + S_z a_z, \quad (2.5)$$



Фиг. 20.

а подставляя значения из уравнения (2.3), получим

$$\sigma_n = \sigma_x a_x^2 + \sigma_y a_y^2 + \sigma_z a_z^2 + 2\tau_{xy} a_x a_y + 2\tau_{yz} a_y a_z + 2\tau_{zx} a_z a_x. \quad (2.5a)$$

Полное касательное напряжение в наклонной площадке τ получим по правилу параллелограмма:

$$\tau^2 = S^2 - \sigma_n^2. \quad (2.6)$$

Из полученных формул следует, что если даны напряжения по координатным площадкам, то всегда можно определить напряжение в любой наклонной площадке, иначе говоря, напряженное состояние точки вполне определено, если даны шесть напряжений, действующих по трем взаимно перпендикулярным плоскостям.

ГЛАВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Исследуем полученное выражение (2.5а) для σ_n . Возьмем вектор r по направлению нормали N (фиг. 20) к какой-нибудь наклонной площадке:

$$r = A / \sqrt{|\sigma_n|}$$

т. е. примем

$$\sigma_n = \pm A^2 / r^2,$$

где A - некоторая произвольная постоянная, определяющая масштаб.

Координатами конца вектора будут

$$x = r a_x; \quad y = r a_y; \quad z = r a_z,$$

а следовательно,

$$a_x = x/r; \quad a_y = y/r; \quad a_z = z/r.$$

Подставляя эти значения a в выражение (2.5) для σ_n и сокращая на l , получим

$$A^2 = \sigma_x x^2 + \sigma_y y^2 + \sigma_z z^2 + 2\tau_{xy}xy + 2\tau_{yz}yz + 2\tau_{zx}zx. \quad (2.7)$$

Из аналитической геометрии известно, что полученное уравнение представляет собой поверхность второго порядка, отнесенную к центру (отсутствуют x , y , z в первой степени).

При изменении положения наклонной площадки будут изменяться направление и координаты x , y , z конца вектора l , но конец его всегда будет лежать на поверхности, определяемой уравнением (2.7). Отсюда следует, что эта поверхность полностью определяется напряженным состоянием точки. Она носит название поверхности напряжений Коши.

При изменении положения координатных осей, т. е. при отнесении указанной поверхности к другим координатным осям, сама поверхность остается неизменной, а изменятся лишь коэффициенты уравнения, т. е. величины напряжений в координатных площадках, поскольку эти площадки будут другие.

Из аналитической геометрии известно, что если поверхность второго порядка отнести не только к центру, но и к сопряженным диаметрам, т. е. к осям, то коэффициенты при произведениях координат обратятся в нуль. Также можно поступить и с поверхностью, определяемой уравнением (2.7). А это значит, что через точку, находящуюся в напряженном состоянии, всегда можно провести такие три взаимно перпендикулярные плоскости, в которых касательных напряжений не будет, и останутся только три нормальных напряжения. Эти три напряжения называются

ся главными нормальными напряжениями, их направления - главными и плоскости, на которые они действуют, - главными плоскостями. Таким образом, если оси координат выбрать параллельными главным направлениям (главные оси), то в соответствующих координатных плоскостях (главных) будут действовать только нормальные напряжения - главные. Отсюда следует, что напряженное состояние точки вполне определяется, если даны направления трех главных осей и величины трех главных напряжений, которые будем обозначать индексами 1, 2, 3 вместо x, y, z :

$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3.$$

Теми же индексами 1, 2, 3 будем обозначать и главные оси, а также направляющие косинусы площадок, наклонных к этим осям.

Если напряженное состояние точки задано главными напряжениями, то напряжения в наклонных площадках выразятся на основании формул (2.3), (2.4), (2.5) и (2.6) весьма просто. Компоненты по осям координат

$$S_1 = \sigma_1 a_1; S_2 = \sigma_2 a_2; S_3 = \sigma_3 a_3. \quad (2.8)$$

Полное напряжение

$$S^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2. \quad (2.9)$$

Нормальное напряжение

$$\sigma_n = \sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2. \quad (2.10)$$

Касательное напряжение

$$\tau^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2 - (\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2)^2. \quad (2.11)$$

ПОНЯТИЕ О ТЕНЗОРЕ НАПРЯЖЕНИЙ

Ранее было установлено, что напряженное состояние точки определяется поверхностью (2.7). Это значит, что напряженное состояние есть величина тензорная в отличие от скалярной (определяемой числом) и векторной (определяемой числом и направлением). Поскольку же эта поверхность, а вместе с ней и напряженное состояние определяется девятью напряжениями в координатных площадках, можно дать особый смысл той матрице (2.1), которой были представлены напряжения, действующие в координатных плоскостях, а именно записать:

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

Правая часть равенства представляет собой с точки зрения тензорного анализа *симметричный тензор 2-го ранга*. Эту запись можно понимать так: напряженное состояние данной точки равно тензору напряжений с такими-то компонентами (σ и τ являются компонентами тензора напряжений). Так как касательные напряжения попарно равны между собой и равные касательные напряжения располагаются в матрице симметрично относительно главной диагонали ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$), то возможна сокращенная запись:

$$T_{\sigma} = \left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \cdot & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \cdot & \cdot & \sigma_z \end{array} \right\} \quad (2.12a)$$

Если даны главные напряжения, то тензор напряжений запишется так:

$$T_{\sigma} = \left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_x & 0 & 0 \\ \cdot & \sigma_y & 0 \\ \cdot & \cdot & \sigma_z \end{array} \right\} \quad (2.12b)$$

С тензорами можно производить различные математические действия, изучаемые в тензорном анализе, в частности, тензоры можно вычитать и складывать, с чем мы встретимся дальше.

Выясним теперь, можно ли определить величину главных напряжений и положение главных плоскостей по тензору напряжений, данному для произвольных координатных осей.

Пусть в какой-то, пока неизвестной, наклонной площадке действует только нормальное напряжение σ , т. е. эта площадка является главной. Пусть положение этой площадки определяется направляющими косинусами a_x, a_y, a_z по отношению к взятой системе координат. Тогда компоненты напряжения σ по координатным осям будут

$$\sigma a_x; \sigma a_y; \sigma a_z,$$

так как направление σ совпадает с нормалью к площадке. Но из предыдущих формул (2.3) известны вы-

ражения для этих компонент через компоненты тензора напряжений, а следовательно,

$$\begin{aligned}\sigma a_x &= \sigma_x a_x + \tau_{xy} a_y + \tau_{xz} a_z; \\ \sigma a_y &= \tau_{yx} a_x + \sigma_y a_y + \tau_{yz} a_z; \\ \sigma a_z &= \tau_{zx} a_x + \tau_{zy} a_y + \sigma_z a_z.\end{aligned}$$

Преобразуем написанные уравнения так:

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \sigma) a_x + \tau_{xy} a_y + \tau_{xz} a_z &= 0; \\ \tau_{yx} a_x + (\sigma_y - \sigma) a_y + \tau_{yz} a_z &= 0; \\ \tau_{zx} a_x + \tau_{zy} a_y + (\sigma_z - \sigma) a_z &= 0.\end{aligned}$$

Полученная система уравнений относительно a является линейной и однородной (свободные члены равны нулю). Так как a_x , a_y и a_z не могут быть все три одновременно равны нулю, то, как известно из теории уравнений, определитель этой системы должен быть равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.13)$$

Развертывая определитель и производя преобразования, получим кубическое уравнение относительно σ :

$$\begin{aligned}\sigma^3 - \sigma^2(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + \sigma(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \\ - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2) - (\sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \\ - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2) = 0.\end{aligned} \quad (2.13a)$$

Решив это уравнение, мы получим три его корня, т. е. значения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, которые по характеру уравнения всегда будут действительными.

Написав дополнительно известное из аналитической геометрии условие, что

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1,$$

можно определить и значения направляющих косинусов.

При выводе уравнения (2.13) для определения величины главных напряжений оси координат, были выбраны произвольно. Главные же напряжения при данном напряженном состоянии имеют единственные значения. Отсюда следует, что коэффициенты кубического уравнения (2.13) имеют одни и те же значения независимо от того, как были выбраны оси координат. Они не изменяют своей величины при изменении положения координатных осей. Иначе говоря, эти коэффициенты инвариантны к преобразованию координат. А так как эти коэффициенты составлены из компонент тензора напряжений, то они являются и его инвариантами при преобразовании координат.

Первый инвариант i_1 тензора напряжений - линейный:

$$i_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{const.} \quad (2.14)$$

Второй инвариант i_2 - квадратичный:

$$i_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \text{const.} \quad (2.15)$$

Третий инвариант i_3 - кубический:

$$i_1 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \text{const.} \quad (2.16)$$

Третий инвариант является развернутым в строку определителем, составленным из компонентов тензора напряжений:

$$i_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (2.12)$$

Второй инвариант является суммой миноров этого определителя при разложении его по главной диагонали:

$$i_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (2.15a)$$

Инварианты тензора напряжений имеют весьма важное значение, так как они отражают механические закономерности напряженного состояния.

Так, например если написаны два тензора, то, пользуясь инвариантами, мы сразу можем определить, выражают ли они разные напряженные состояния или представляют собой одно и то же напряженное состояние в разных системах координат.

ЭЛЛИПСОИД НАПРЯЖЕНИЙ

Компоненты напряжений в наклонной площадке по осям координат выражаем через главные напряжения формулами (2.8):

$$S_1 = \sigma_1 a_1; S_2 = \sigma_2 a_2; S_3 = \sigma_3 a_3.$$

Следовательно,

$$a_1^2 = S_1^2 / \sigma_1^2; a_2^2 = S_2^2 / \sigma_2^2; a_3^2 = S_3^2 / \sigma_3^2,$$

но

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1.$$

Подставляя в последнее уравнение значение a из предыдущих выражений, имеем

$$S_1^2 / \sigma_1^2 + S_2^2 / \sigma_2^2 + S_3^2 / \sigma_3^2 = 1; \quad (2.17)$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ для каждого данного напряженного состояния являются постоянными. Следовательно, уравнение (2.17) дает все возможные значения напряжений во всех наклонных площадках.

Уравнение представляет собой трехосный эллипсоид, полуоси которого представляют собой главные напряжения в данной точке, а координаты точек поверхности - проекции полных напряжений S в различных наклонных площадках. Следовательно, длина любого отрезка от центра до пересечения с поверхностью эллипсоида будет представлять собой полное напряжение S в какой-то наклонной площадке. Эллипсоид этот называется эллипсоидом напряжений и как бы отражает геометрически тензор напряжений. Поскольку ни одна из хорд эллипсоида не может быть больше его большей оси, постольку наибольшим по абсолютной величине напряжением в любой точке будет наибольшее из трех главных нормальных напряжений в этой точке.

Если два из трех главных нормальных напряжений равны между собой по абсолютной величине, то эллипсоид напряжений превращается в эллипсоид вращения.

Если при этом они имеют одинаковый знак, то по всем площадкам, параллельным третьей координатной оси, напряжения будут одинаковы и перпендикулярны площадкам, на которые они действуют. При этом любые два взаимно перпендикулярные направления в координатной плоскости, перпендикулярной к направлению третьего главного напряжения, являются главными.

Если все три главных нормальных напряжения равны между собой, то эллипсоид обращается в шар, и любые три взаимно перпендикулярные оси будут главными. Во всех наклонных к осям координат площадках будут действовать одинаковые равные между собой нормальные напряжения, а касательных не будет (поскольку любая плоскость - главная). Иначе говоря, точка будет находиться в состоянии равномерного всестороннего растяжения или сжатия. Тензор напряжений будет

$$T_{\sigma}^{\circ} = \left\{ \begin{array}{ccc} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{array} \right\} \quad (2.18)$$

Этот тензор напряжений носит название шарового тензора. Матрица его инвариантна к выбору системы координат.

Если одно из главных напряжений равно нулю, то эллипсоид превращается в *эллипс* и объемное напряженное состояние превращается в *плоское*. Наконец,

если два главных напряжения равны нулю, эллипсоид превращается в прямую линию, т. е. будет иметь место *линейное* напряженное состояние.

ГЛАВНЫЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Согласно уравнению (2.11), касательные напряжения в наклонных площадках, если тензор напряжений дан в главных напряжениях, выражаются уравнением

$$\tau^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 a_3^2 - (\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 a_3^2)^2.$$

Выясним, в каких площадках касательные напряжения получают максимальную величину.

Из условия

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1 \quad (a)$$

имеем, например,

$$a_3^2 = 1 - a_1^2 - a_2^2$$

Подставляя в выражение (2.11) для τ^2

$$\tau^2 = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_2^2 a_2^2 + \sigma_3^2 (1 - a_1^2 - a_2^2) - [\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 (1 - a_1^2 - a_2^2)]^2,$$

дифференцируем по a_1 и приравниваем частную производную нулю для нахождения экстремума:

$$\partial(\tau^2)/\partial a_1 = 2\sigma_1^2 a_1 - 2\sigma_3^2 a_1 - 2[\sigma_1 a_1^2 + \sigma_2 a_2^2 + \sigma_3 (1 - a_1^2 - a_2^2)](2\sigma_1 a_1 - 2\sigma_3 a_1) = 0.$$

Сокращаем на $2(\sigma_1 - \sigma_3)$ и выносим a_1 за скобки:

$$a_1(\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_1 a_1^2 - 2\sigma_2 a_2^2 - 2\sigma_3 + 2\sigma_3 a_1^2 + 2\sigma_3 a_2^2) = 0.$$

Меняем знак, выносим за скобки a_1^2 и a_2^2 и делим на 2:

$$a_1[(\sigma_1 - \sigma_3)a_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)a_2^2 - 1/2(\sigma_1 - \sigma_3)] = 0. \quad (b)$$

Аналогичным образом дифференцируя уравнение по a_2 и приравнивая частную производную нулю, получим:

$$a_2[(\sigma_1 - \sigma_3)a_1^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)a_2^2 - 1/2(\sigma_2 - \sigma_3)] = 0. \quad (c)$$

Из полученных уравнений прежде всего имеем решения:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, \\ a_2 &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя $a_1 = a_2 = 0$ в условие (а), найдем $a_3 = 1$ и таким образом получаем первую группу значений направляющих косинусов, при которых τ имеет экстремум:

$$a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1.$$

Далее, подставляя $a_1 = 0$ в уравнение (с), получим $a_2 = \pm \sqrt{1/2}$, а при этих значениях a_1 и a_2 из условия (а) определим соответствующее значение $a_3 =$

$= \pm \sqrt{1/2}$, следовательно, получим вторую группу значений a_1, a_2, a_3 , определяющую экстремум для τ :

$$a_1 = 0; a_2 = \pm \sqrt{1/2}; a_3 = \pm \sqrt{1/2}$$

Наконец, подставляя $a_2 = 0$ в уравнение (b), получим $a_1 = \pm \sqrt{1/2}$, а по этим значениям из условия (a)

определим $a_3 = \pm \sqrt{1/2}$ и в результате найдем третью группу значений a_1, a_2, a_3 , при которых τ имеет экстремум:

$$a_1 = \pm \sqrt{1/2}; a_2 = 0; a_3 = \pm \sqrt{1/2}$$

Далее из условия $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ выражаем a_2 и a_1 , подставляем их значения в формулу (2.11) и производим аналогичные выкладки.

В результате получим следующие шесть групп значений направляющих косинусов, при которых касательные напряжения имеют экстремальные значения:

Направляющие косинусов	1	2	3	4	5	6
a_1	0	0	± 1	0	$\pm \sqrt{1/2}$	$\pm \sqrt{1/2}$
a_2	0	± 1	0	$\pm \sqrt{1/2}$	0	$\pm \sqrt{1/2}$
a_3	± 1	0	0	$\pm \sqrt{1/2}$	$\pm \sqrt{1/2}$	0

(3.19)

Первые три группы значений направляющих косинусов определяют координатные плоскости, которые были при рассмотрении данного вопроса приняты за главные и в которых касательные напряжения равны нулю, т. е. имеют минимальное значение. Следовательно, вторые три группы значений направляющих косинусов определяют плоскости, в которых касательные напряжения достигают максимальных значений (абсолютных).

Легко видеть, что каждая из этих групп значений выражает плоскости, перпендикулярные к одной из координатных плоскостей и составляющие углы 45° с каждой из двух других, или, что то же самое, проходящие через одну координатную ось и делящие угол между двумя другими пополам, т. е. составляющие с ними углы по 45° .

Каждая группа значений направляющих косинусов определит четыре такие плоскости, по одной на каждые два смежных октанта, поскольку имеем четыре

комбинации знаков перед корнями ($\pm \sqrt{1/2}$).

Таким образом всего получим 12 плоскостей, в которых касательные напряжения достигают максимальных значений. Для одного октанта они могут быть представлены графически, как показано на фиг. 21. Совокупность всех этих плоскостей представляет собой фигуру ромбического додекаэдра (12-гранника) согласно фиг. 22.

Подставляя в уравнение (2.11) полученные значения направляющих косинусов, найдем значения максимальных касательных напряжений:

$$\tau_{12} = \pm 1/2 (\sigma_1 - \sigma_2) (a_1 = \pm \sqrt{1/2}; a_2 = \pm \sqrt{1/2}; a_3 = 0);$$

$$\tau_{23} = \pm 1/2 (\sigma_2 - \sigma_3) (a_1 = 0; a_2 = \pm \sqrt{1/2}; a_3 = \pm \sqrt{1/2});$$

$$\tau_{31} = \pm 1/2 (\sigma_3 - \sigma_1) (a_1 = \pm \sqrt{1/2}; a_2 = 0; a_3 = \pm \sqrt{1/2}). \quad (3.20)$$

Индексы при τ означают, полуразность каких главных напряжений равна данному τ и к каким осям плоскость действия τ наклонена под углом 45° . Эти касательные напряжения называют *главными касательными напряжениями*.

Таким образом, главные касательные напряжения равны полуразностям соответствующих главных нормальных напряжений.

Наибольшее касательное напряжение равно полуразности алгебраически наибольшего и наименьшего главных нормальных напряжений.

Если все три главных нормальных напряжения равны между собой, то их полуразности и, следовательно, касательные напряжения обращаются в нуль, т. е. будут отсутствовать. Этот результат мы получили и раньше, при рассмотрении эллипсоида напряжений и шарового тензора (2.18).

Как видно из уравнения (2.20), сумма трех главных касательных напряжений равна нулю:

$$\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = 0. \quad (2.21)$$

Определим значение нормальных напряжений в площадках, по которым действуют главные касательные напряжения, для чего подставляем значения нап-

равляющих косинусов из уравнения (2.19) в уравнение (2.10):

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= (1/2)(\sigma_1 + \sigma_2) ; \\ \sigma_{23} &= (1/2)(\sigma_2 + \sigma_3) ; \\ \sigma_{31} &= (1/2)(\sigma_3 + \sigma_1) ,\end{aligned}\tag{2.22}$$

т. е. нормальные напряжения, действующие в площадках главных касательных, равны полусуммам главных нормальных напряжений.

Из выражений (2.20) главных касательных напряжений также видно, что если увеличить или уменьшить главные нормальные напряжения на одну и ту же величину, то значения главных касательных напряжений не изменятся, т. е. добавление к напряженному состоянию равномерного растяжения или сжатия не изменяет величины касательных напряжений. Это дает возможность всегда представить тензор напряжений в виде суммы двух тензоров.

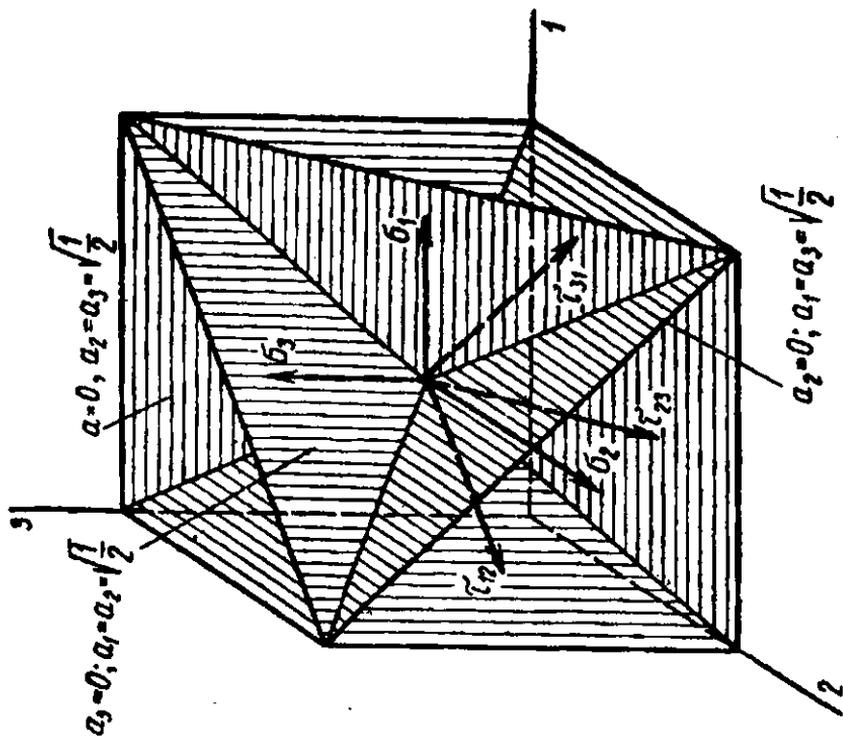
Обозначим среднее нормальное напряжение через $\sigma_{\text{ср}}$, тогда

$$\sigma_{\text{ср}} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 ,\tag{2.23}$$

т. е. среднее нормальное напряжение равно одной трети первого инварианта тензора напряжений (2.14).

Составим шаровой тензор (2.18):

$$T_{\sigma}^{\circ} = \left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_{\text{ср}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\text{ср}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\text{ср}} \end{array} \right\}$$



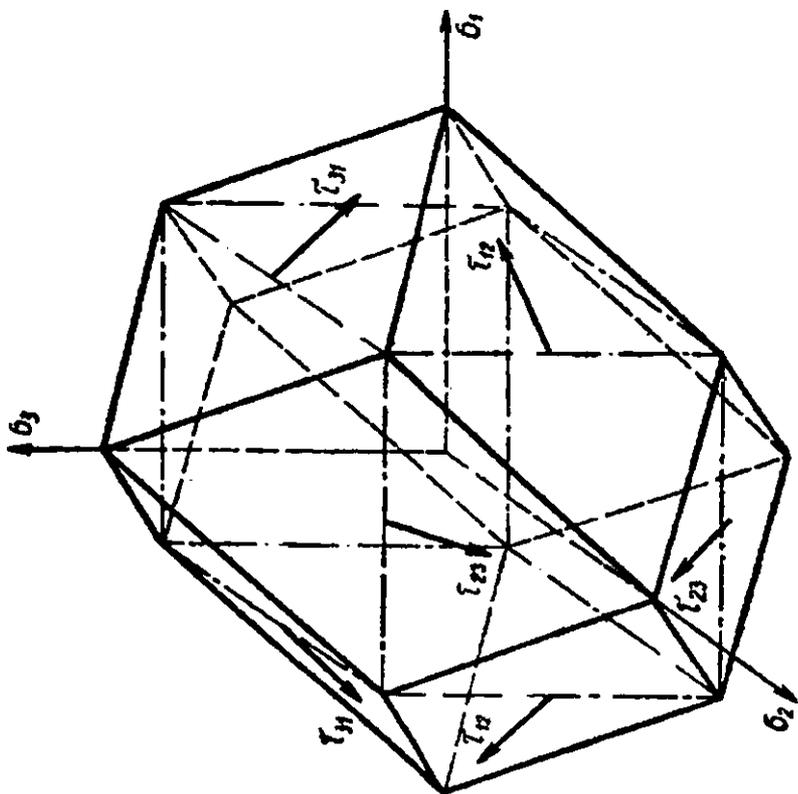
Фиг. 21.

Вычтем этот тензор из тензора напряженного состояния точки, что изобразится так:

$$\begin{aligned}
 T_{\sigma} - T_{\sigma}^{\circ} &= \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \sigma_{\text{ср}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\text{ср}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\text{ср}} \end{Bmatrix} = \\
 &= \begin{Bmatrix} \sigma_x - \sigma_{\text{ср}} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{\text{ср}} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{\text{ср}} \end{Bmatrix} = D_{\sigma} \quad (2.24)
 \end{aligned}$$

или

$$T_{\sigma} = T_{\sigma}^{\circ} + D_{\sigma}. \quad (2.25)$$



Фиг. 22.

Тензор D_{σ} называется *девиатором напряжений*. Таким образом, в общем случае напряженное состояние определяется суммой шарового тензора и девиатора напряжений.

Шаровой тензор не может вызывать деформации формы тела и дает лишь изменение объема - объемную деформацию (при упругой деформации). Наоборот, девиатор напряжений предопределяет формоизменение тела.

Легко видеть, что сумма компонентов девиатора напряжений по главной диагонали равна нулю:

$$(\sigma_x - \sigma_{cp}) + (\sigma_y - \sigma_{cp}) + (\sigma_z - \sigma_{cp}) = 0. \quad (2.26)$$

ОКТАЭДРИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Определим величину напряжений в площадках, одинаково наклоненных к главным осям.

В этом случае

$$a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 = 3a^2 = 1,$$

откуда

$$a = \pm 1/\sqrt{3}$$

Таких площадок будет восемь, по одной в каждом октанте. Они образуют фигуру октаэдра (фиг. 31). Поэтому их называют октаэдрическими, и так же называют напряжения, которые действуют в этих площадках.

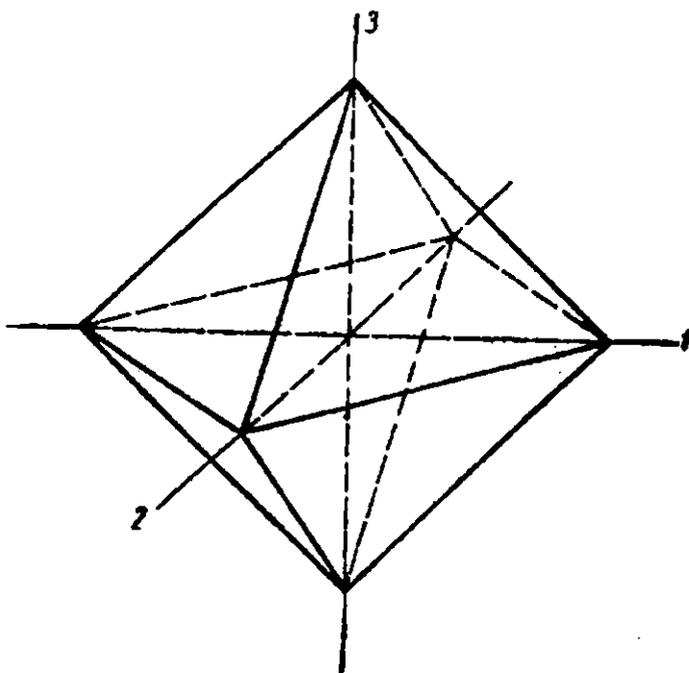
Полное октаэдрическое напряжение, согласно уравнению (2.9), будет

$$S_0 = \sqrt{(1/3)(\sigma^2_1 + \sigma^2_2 + \sigma^2_3)}, \quad (2.27)$$

т. е. квадрат полного октаэдрического напряжения равен одной трети суммы квадратов главных напряжений.

Нормальное октаэдрическое напряжение [см. (2.10)]

$$\sigma_0 = (1/3)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = (1/3)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \sigma_{cp}. \quad (2.28)$$



Фиг. 23.

Нормальное октаэдрическое напряжение равно среднему нормальному напряжению или одной трети первого инварианта тензора напряжений.

Касательное октаэдрическое напряжение определится из выражения (2.11):

$$\tau_0^2 = (1/3)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - (1/9)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2$$

или после раскрытия скобок

$$\tau_0^2 = (2/9)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1), \quad (2.29)$$

откуда

$$\tau_0 = \pm (1/3) \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad (2.30)$$

или, учитывая значения касательных напряжений (2.20),

$$\tau_0 = \pm (2/3) \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}. \quad (2.30a)$$

Таким образом, касательное октаэдрическое напряжение равно одной трети корня квадратного из суммы квадратов разностей главных нормальных напряжений, или двум третям корня квадратного из суммы квадратов главных касательных напряжений.

Возьмем квадрат первого инварианта (2.14) тензора напряжений, выраженного в главных нормальных напряжениях:

$$i_1^2 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + 2\sigma_2\sigma_3 + 2\sigma_3\sigma_1 \quad (2.31)$$

и второй инвариант (2.15) также в главных напряжениях:

$$i_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1. \quad (2.32)$$

Сравнивая уравнения (2.31) и (2.32) с уравнением (2.29), видим, что

$$\tau_0^2 = (2/9)(i_1^2 - 3i_2) \quad (2.29a)$$

откуда получаем возможность определить октаэдрическое касательное напряжение через компоненты напряжений, действующих по случайным (не главным) ортогональным площадкам, используя выражения для

первого и второго инвариантов тензора напряжений (2.14) и (2.15):

$$\tau_0^2 = (2/9)[(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 - 3(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)].$$

После преобразования получим

$$\tau_0 = \pm (1/3)\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (2.30б)$$

Возьмем второй инвариант i_2 девиатора напряжений (2.24) с учетом выражения (2.23):

$$\begin{aligned} i_2 &= (\sigma_x - \sigma_{cp})(\sigma_y - \sigma_{cp}) + (\sigma_y - \sigma_{cp})(\sigma_z - \sigma_{cp}) + \\ &+ (\sigma_z - \sigma_{cp})(\sigma_x - \sigma_{cp}) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \\ &= - (1/6)[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \\ &+ 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что квадрат октаэдрического касательного напряжения (2.30в) равен двум третям второго инварианта девиатора напряжений, взятого с обратным знаком:

$$\tau_0^2 = - (2/3) i_2 \quad (2.29б)$$

или

$$\tau_0 = \pm \sqrt{-(2/3) i_2}. \quad (2.30в)$$

Октаэдрическое касательное напряжение носит такое название интенсивности касательных напряжений.

От интенсивности касательных напряжений следует отличать интенсивность напряжений, или обобщенное напряжение σ_i которое выражается

$$\sigma_i = (1/\sqrt{2}) \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (2.33)$$

Ввиду особой важности этих понятий сравним еще раз значения приведенных величин. Для этого обозначим

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \\ & = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2} + \\ & \quad + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad \text{через } A. \end{aligned}$$

Тогда октаэдрическое касательное напряжение τ_0 или интенсивность касательных напряжений τ_i выразится

$$\tau_0 = \tau_i = (1/3) A.$$

Интенсивность напряжений

$$\sigma_i = (1/\sqrt{2}) A,$$

откуда

$$\tau_i = (\sqrt{2}/3) \sigma_i.$$

Рассматривая напряженное состояние точки, мы имеем следующие характерные площадки, проходящие через нее:

а) шесть главных площадок, на которые действуют главные нормальные напряжения, а касательные отсутствуют;

б) двенадцать площадок, по которым действуют главные касательные напряжения;

в) восемь площадок действия одинаковых по величине октаэдрических напряжений.

Таким образом, всего имеем 26 характерных площадок.

УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ

Величина напряжений в теле, нагруженном силами и находящемся в равновесии, непрерывно изменяется от точки к точке, т. е. напряжения являются непрерывными функциями координат. Выделим в напряженном теле элементарный параллелепипед (фиг. 24) с гранями, параллельными координатным плоскостям, и выясним, какие существуют условия, обеспечивающие его равновесие.

Пусть одна из напряженных точек a с координатами x, y, z отображается гранями параллелепипеда $abcd, adb'ac'$ и $ac'd'b$. Вторая точка a' отстоит от a на бесконечно малое расстояние и соответственно этому координаты ее будут $x + dx, y + dy$ и $z + dz$. Эта точка a' отображается гранями параллелепипеда $a'b'c'd', a'd'bc$ и $a'cdb'$. Понятно, что размеры ребер параллелепипеда будут dx, dy и dz .

Пусть напряженное состояние точки a определяется тензором напряжений

$$T_{\sigma a} = \left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{array} \right\}$$

Напряжения в точке a' будут отличаться от напряжений в точке a на бесконечно малые величины. Пренебрегая членами высших порядков, можно считать, что приращение каждого напряжения будет выражаться частным дифференциалом по той координате, по которой переместилась площадка действия данного напряжения, т. е. по координате, указываемой индексом адреса напряжения.

Тогда тензор напряжений для точки a' будет

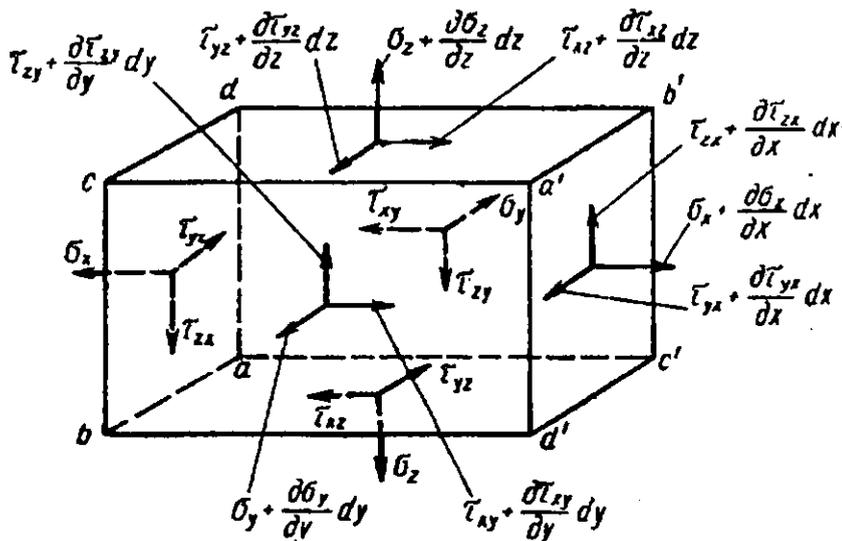
$$T_{\sigma a'} = \begin{pmatrix} (\sigma_x + (\partial\sigma_x/\partial x)dx)(\tau_{xy} + (\partial\tau_{xy}/\partial y)dy)(\tau_{xz} + (\partial\tau_{xz}/\partial z)dz) \\ (\tau_{yx} + (\partial\tau_{yx}/\partial x)dx)(\sigma_y + (\partial\sigma_y/\partial y)dy)(\tau_{yz} + (\partial\tau_{yz}/\partial z)dz) \\ (\tau_{zx} + (\partial\tau_{zx}/\partial x)dx)(\tau_{xy} + (\partial\tau_{xy}/\partial y)dy)(\sigma_z + (\partial\sigma_z/\partial z)dz) \end{pmatrix}$$

Усилия, действующие по граням параллелепипеда, будут равны напряжениям, помноженным на площади соответствующих граней, указываемых индексами адреса напряжения.

Составляем условия равновесия, беря суммы проекций всех сил на оси координат и приравнивая эти суммы нулю.

На ось x

$$\begin{aligned} & (\sigma_x + (\partial\sigma_x/\partial x)dx) dydz - \sigma_x dydz + \\ & + (\tau_{xy} + (\partial\tau_{xy}/\partial y)dy) dx dz - \tau_{xy} dx dz + \\ & + (\tau_{zx} + (\partial\tau_{zx}/\partial z)dz) dx dy - \tau_{zx} dx dy = 0. \end{aligned}$$



Фиг. 24.

Раскрывая скобки и сокращая на $dx dy dz$, получим

$$\partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y + \partial \tau_{xz} / \partial z = 0.$$

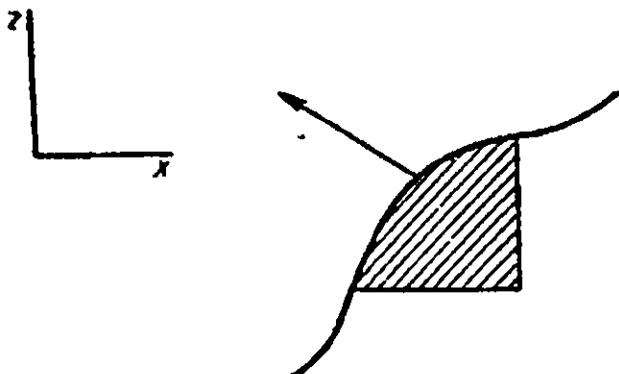
Суммы проекций на оси y и z можем написать по аналогии. В результате получим

$$\begin{aligned} \partial \sigma_x / \partial x + \partial \tau_{xy} / \partial y + \partial \tau_{xz} / \partial z &= 0; \\ \partial \tau_{yx} / \partial x + \partial \sigma_y / \partial y + \partial \tau_{yz} / \partial z &= 0; \\ \partial \tau_{zx} / \partial x + \partial \tau_{zy} / \partial y + \partial \sigma_z / \partial z &= 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Таким образом, мы получили дифференциальные уравнения равновесия для объемного напряженного состояния.

Эти уравнения должны быть удовлетворены для всех точек по объему тела. Напряжения меняются по объему тела, и на поверхности их величина должна

быть такая, чтобы уравнивать внешние силы, действующие на тело, т.е. удовлетворять поверхностным условиям или условиям на контуре.



Фиг. 25.

Связать напряжения в бесконечно малом элементе тела, выходящем на его поверхность, с внешними силами можно, используя уравнения (2.3). Действительно, в общем случае элементарный участок поверхности тела можно рассматривать (фиг. 25) как наклонную грань элементарного тетраэдра.

Три дифференциальных уравнения равновесия (2.34) содержат шесть неизвестных (учитывая, что касательные напряжения попарно равны между собой) и, следовательно, требуют для их решения наличия дополнительных уравнений. Таким образом, задача является статически неопределимой.

Недостающие уравнения будут получены из рассмотрения геометрических и физических условий деформации.

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ

Одним из частных случаев объемного напряженного состояния, весьма часто встречающимся при обработке металлов давлением, является осесимметричное напряженное состояние.

Под этим видом напряженного состояния подразумевается напряженное состояние тела вращения, к которому приложены силы, распределенные симметрично относительно его оси.

Примерами могут служить операции осадки цилиндрической заготовки, ее прошивки, выдавливания (прессования), волочения и др.

При рассмотрении осесимметричного напряженного состояния весьма удобно пользоваться взамен декартовых *цилиндрическими координатами* в которых положение любой точки a определяется радиусом-вектором ρ , полярным углом θ , отсчитываемым от оси $\rho(x)$, и аппликатой z , как представлено на фиг. 26.

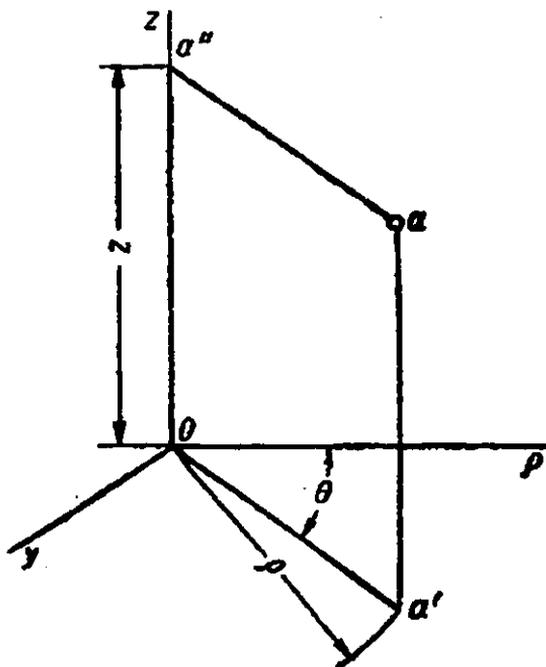
Обозначения напряжений в цилиндрических координатах показаны на фиг. 27.

Тензор напряжений в цилиндрических координатах запишется так:

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_{\rho} & T_{\rho\theta} & T_{\rho z} \\ T_{\theta\rho} & \sigma_{\theta} & T_{\theta z} \\ T_{z\rho} & T_{z\theta} & \sigma_z \end{Bmatrix} .$$

Вернемся теперь к дальнейшему рассмотрению осесимметричного напряженного состояния.

При осесимметричном напряженном состоянии (фиг. 28) компоненты напряжений не зависят от координаты θ и, следовательно, все производные по этой



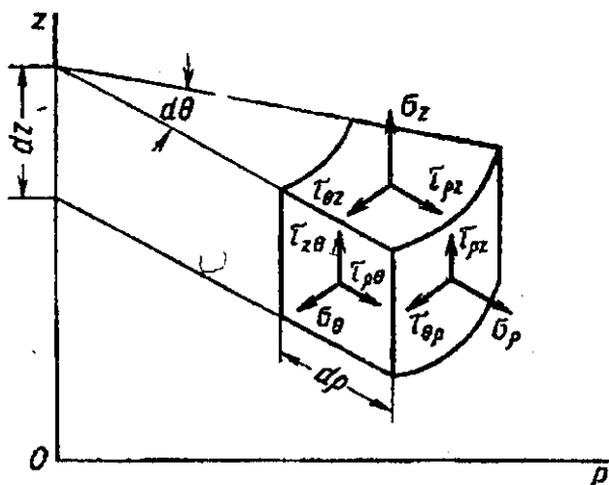
Фиг. 26.

координате в дифференциальных уравнениях равновесия обратятся в нуль. Кроме того, вследствие симметричности тела и симметрии внешней нагрузки в меридиональных плоскостях (плоскостях, проходящих через ось z , т. е. плоскостях θ), касательные напряжения не могут возникнуть, поэтому и по закону парности касательных напряжений $\tau_{\rho 0} = \tau_{z 0} = \tau_{\theta \rho} = \tau_{\theta z} = 0$.

Следовательно, напряжение σ_{θ} всегда будет главным, а ось ρ может иметь любое направление в плоскости z (т. е. нормальной к оси z).

Таким образом, компоненты напряжений при осесимметричном напряженном состоянии запишутся так:

$$\begin{array}{ccc} \sigma_r & 0 & \tau_{rz} \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ \tau_{zr} & 0 & \sigma_z \end{array}$$

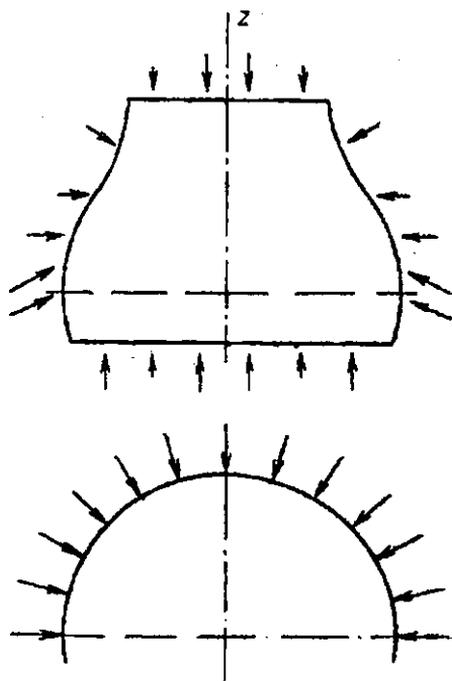


Фиг. 27.

Всего имеем три нормальных напряжения и два равных между собой касательных. При этом $\sigma_\theta = \sigma_z$, т. е. является всегда главным. Применяя тот же метод, который был использован при рассмотрении объемного напряженного состояния в декартовых координатах, выведем дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрических координатах для осесимметричного напряженного состояния.

Действующие напряжения показаны на фиг. 29. Ось r , как сказано ранее, может быть проведена в любом направлении. Для удобства вычисления на фиг. 29 эта ось проведена так, что плоскость rz является

плоскостью симметрии выделенного элементарного объема.



Фиг. 28.

Площади элементарных площадок будут следующие:

$$F_p = \text{пл. } abcd = \rho d\theta dz;$$

$$F(\rho + d\rho) = \text{пл. } a' d' c' b' = (\rho + d\rho) d\theta dz;$$

$$F_\theta = \text{пл. } a' d' bc = d\rho dz;$$

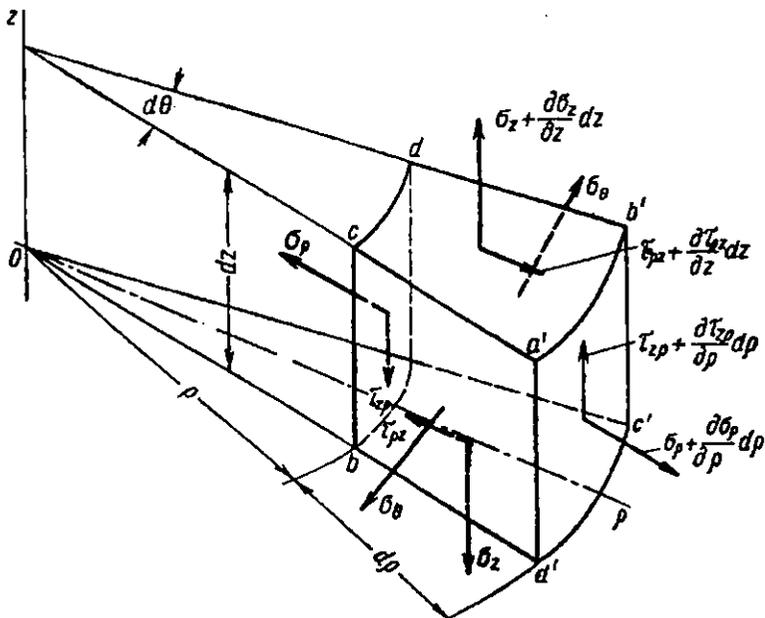
$$F_z = \text{пл. } a' cdb' = \text{пл. } ac' d' b = \rho d\theta d\rho.$$

Пишем условия равновесия, проектируя все действующие на элемент силы на оси ρ и z :

$$\begin{aligned}
 & -\sigma_p \rho d\theta dz + (\sigma_p + (\partial\sigma_p/\partial\rho) d\rho)(\rho + d\rho) d\theta dz - \sigma_\theta d\theta d\rho dz - \\
 & -\tau_{pz} \rho d\theta d\rho + (\tau_{pz} + (\partial\tau_{pz}/\partial z) dz) \rho d\theta d\rho = 0 \quad (a) \\
 & -\tau_{z\rho} \rho d\theta dz + (\tau_{z\rho} + (\partial\tau_{z\rho}/\partial\rho) d\rho)(\rho + d\rho) d\theta dz - \\
 & -\sigma_z \rho d\theta d\rho + (\sigma_z + (\partial\sigma_z/\partial z) dz) \rho d\theta d\rho = 0 \quad (б)
 \end{aligned}$$

После алгебраических преобразований и сокращения, пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, получим

$$\begin{aligned}
 \partial\sigma_p/\partial\rho + \partial\tau_{pz}/\partial z + (\sigma_p - \sigma_\theta)/\rho &= 0; \\
 \partial\tau_{z\rho}/\partial\rho + \partial\sigma_z/\partial z + \tau_{z\rho}/\rho &= 0.
 \end{aligned} \quad (2.35)$$



Фиг. 29.

При решении некоторых осесимметричных задач в дальнейшем придется встретиться, кроме цилинд-

рических координат, со сферическими координатами. В этой системе положение точки определяется (фиг. 30) радиусом-вектором ρ и двумя углами θ и φ , определяющими его положение в пространстве. Угол φ отсчитывается от оси z (аналогичен географической широте), а угол θ отсчитывается от некоторой оси в плоскости, нормальной к оси z и проходящей через центр системы O (аналогичен географической долготе).

Обозначения напряжений в сферических координатах получим, заменив индекс z в обозначениях, данных для цилиндрической системы, индексом φ .

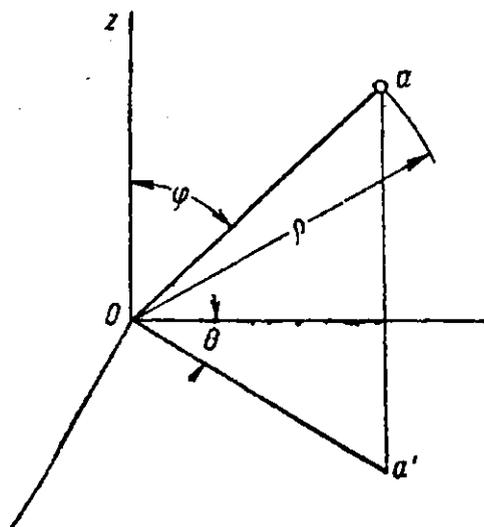
При осесимметричном напряженном состоянии напряжения не будут зависеть от координаты θ , а касательные напряжения, содержащие в индексе эту координату, т. е. $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{\varphi\theta}$ будут равны нулю.

Дифференциальные уравнения равновесия для осесимметричного напряженного состояния в сферических координатах приведем без вывода:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \rho} + (1/\rho)(\partial \tau_{r\varphi}/\partial \varphi) + (1/\rho) [2\sigma_r - \\ - (\sigma_\varphi + \sigma_\theta) + \tau_{r\varphi} \operatorname{ctg} \varphi] = 0 \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \rho} + (1/\rho)(\partial \sigma_\varphi/\partial \varphi) + (1/\rho) [3\tau_{r\varphi} + \\ + (\sigma_\varphi - \sigma_\theta) \operatorname{ctg} \varphi] = 0 \end{aligned} \quad (2.35a)$$

ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ И ПЛОСКОЕ ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЯ ("ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА")

Плоское напряженное и плоское деформированное состояния характеризуются следующими особенностями:



Фиг. 30.

1. Все компоненты напряжений не зависят от одной из координат, общей для всех, и остаются постоянными при изменении последней.

2. В плоскостях, нормальных к оси этой координате:

а) компоненты касательных напряжений равны нулю;

б) нормальное напряжение или равно нулю (плоское напряженное состояние), или постоянно по величине и равно полусумме двух других нормальных напряжений (плоское деформированное состояние).

Примем за ось, о которой говорилось выше, ось y . Из предыдущего ясно, что эта ось будет главной. Тогда σ_x , σ_z и $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ не зависят от y , τ_{xy} и τ_{zy} , а следовательно, и τ_{yx} и τ_{yz} равны нулю.

Для плоского напряженного состояния $\sigma_y = 0$.

Для плоского деформированного состояния $\sigma_y =$

$= (\sigma_x + \sigma_z)/2$ (эта особенность плоского деформированного состояния будет доказана далее).

Следовательно, имеем напряжения для плоского напряженного состояния:

$$\begin{array}{cc} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{array} \quad \text{и} \quad \sigma_y = 0.$$

Для плоского деформированного состояния

$$\begin{array}{cc} \sigma_x & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_z \end{array} \quad \text{и} \quad \sigma_y = (\sigma_x + \sigma_z)/2.$$

Следует всегда учитывать существенную разницу между плоским напряженным и плоским деформированным состоянием.

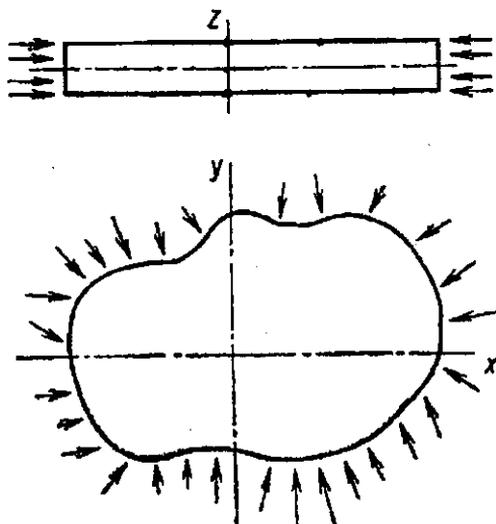
В первом, в направлении третьей оси, нет нормального напряжения, но есть деформация, во втором - есть нормальное напряжение, но нет деформации.

Плоское напряженное состояние будет иметь место, например, в пластине, подверженной действию сил, приложенных к ее контуру параллельно плоскости пластины и распределенных равномерно по ее высоте (толщине) (фиг. 31). Изменение высоты пластины в этом случае не имеет значения, и высота ее может быть принята за единицу. Плоским с достаточной точностью можно считать напряженное состояние фланца при вытяжке цилиндрической заготовки из листового материала.

Плоское деформированное состояние может быть принято для участков цилиндрического (в общем смысле этого термина) или призматического тела большой длины, отдаленных от его концов, если тело нагружено силами, не меняющимися по его длине и нап-

равленными перпендикулярно образующим. В плоском деформированном состоянии, например, можно считать брус, подвергающийся осадке в направлении его толщины, когда деформацией по длине можно пренебречь.

Все уравнения напряженного состояния для плоской задачи значительно упрощаются, равно и сокра-



Фиг. 31.

щается количество переменных.

Уравнения для плоского напряженного состояния будем выводить из полученных ранее для объемного напряженного состояния, учитывая, что $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$ и принимая $a_y = 0$, поскольку наклонные площадки можно рассматривать только параллельные оси y .

Заметим, что в рассматриваемом случае

$$a_x^2 + a_z^2 = 1,$$

т. е.

$$a_z^2 = 1 - a_x^2.$$

Обозначая угол (фиг. 32) между нормалью к наклонной площадке и осью x через φ , имеем

$$a_x = \cos \varphi; \quad a_z^2 = 1 - \cos^2 \varphi,$$

откуда

$$a_z = \sin \varphi.$$

Учитывая вышесказанное, путем непосредственных подстановок в соответствующие выражения для объемного напряженного состояния, получим (фиг. 33) компоненты напряжений в наклонной площадке по осям координат из уравнения (2.3)

$$\begin{aligned} S_x &= \sigma_x \cos \varphi + \tau_{xz} \sin \varphi, \\ S_z &= \tau_{zx} \cos \varphi + \sigma_z \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2.36)$$

а в главных осях

$$\begin{aligned} S_1 &= \sigma_1 \cos \varphi, \\ S_3 &= \sigma_3 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.36a)$$

Полное напряжение в наклонной площадке из уравнения (2.4)

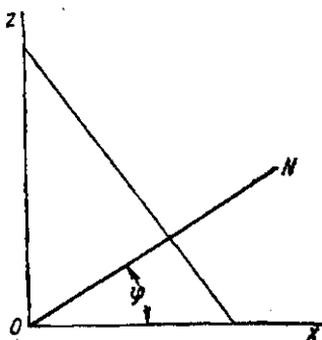
$$\begin{aligned} S_2 &= \sigma_x^2 \cos^2 \varphi + \sigma_z^2 \sin^2 \varphi + \\ &+ (\sigma_x + \sigma_z) \tau_{xz} \sin 2\varphi + \tau_{xz}^2, \end{aligned} \quad (2.37)$$

а в главных осях

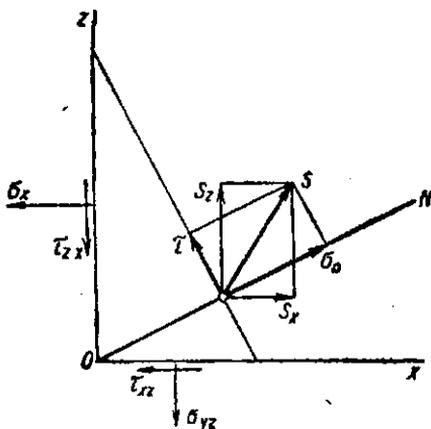
$$S_2 = \sigma_1^2 \cos^2 \varphi + \sigma_3^2 \sin^2 \varphi. \quad (2.37a)$$

Нормальное напряжение в наклонной площадке из уравнения (2.5a)

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_z \sin^2 \varphi + \tau_{xz} \sin 2\varphi, \quad (2.38)$$



Фиг. 32.



Фиг. 33.

а в главных осях

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_3 \sin^2 \varphi. \quad (2.38a)$$

Касательное напряжение в наклонной площадке из уравнения (2.6)

$$\tau = \pm [(1/2)(\sigma_z - \sigma_x) \sin 2\varphi + \tau_{xz} \cos 2\varphi], \quad (3.39)$$

а в главных осях

$$\tau = \pm (1/2)(\sigma_3 - \sigma_1) \sin 2\varphi. \quad (2.39a)$$

Из выражения (2.39a) легко видеть, что максимум τ будет иметь при $\sin 2\varphi = 1$, т. е. при $\varphi = 45^\circ$

$$\tau_{31} = \pm (1/2)(\sigma_3 - \sigma_1). \quad (2.40)$$

Поэтому выражение (2.39a) можно переписать так:

$$\tau = \tau_{31} \sin 2\varphi. \quad (2.39b)$$

Зная компоненты напряжений при плоской задаче в произвольных осях, легко определить положение главных осей и главные нормальные напряжения.

Положение одной из главных осей получим, приравняв τ нулю в уравнении (2.39); поскольку в главной площадке касательное напряжение отсутствует, то:

$$(1/2)(\sigma_z - \sigma_x) \sin 2\varphi + \tau_{xz} \cos 2\varphi = 0,$$

откуда

$$\varphi = (1/2) \arctg (2\tau_{xz}/(\sigma_x - \sigma_z)). \quad (3.41)$$

Выразить величину главных напряжений через компоненты в произвольных осях можно, используя уравнение (2.13), из которого получим

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & \sigma_x - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (4.36)$$

откуда

$$\begin{aligned} \sigma^2 - (\sigma_x + \sigma_z)\sigma + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xz}^2 &= 0, \\ \sigma &= (\sigma_x + \sigma_z)/2 \pm (1/2)\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

т. е.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (\sigma_x + \sigma_z)/2 + (1/2)\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}, \\ \sigma_3 &= (\sigma_x + \sigma_z)/2 - (1/2)\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}. \end{aligned}$$

При этом для плоского напряженного состояния

$$\sigma_2 = 0,$$

для плоского деформированного состояния

$$\sigma_2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$$

Зная напряженное состояние в главных осях, легко перейти на любые произвольные координатные оси.

Пусть новая координатная ось x составляет угол φ с осью 1, тогда, рассматривая ее как нормаль к наклонной площадке, имеем для последней по уравнению (2.38а)

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_3 \sin^2 \varphi,$$

но для оси x напряжение σ_n является напряжением σ_x , т. е.

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_3 \sin^2 \varphi.$$

Выражение это можно преобразовать так:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_1 ((1 + \cos 2\varphi)/2) + \sigma_3 ((1 - \cos 2\varphi)/2), \\ \sigma_x &= ((\sigma_1 + \sigma_3)/2) + ((\sigma_1 - \sigma_3)/2) \cos 2\varphi.\end{aligned}$$

Обозначая среднее напряжение через σ_{cp} , т. е.

$$(\sigma_x + \sigma_z)/2 = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 = \sigma_{cp}$$

и учтя уравнение (2.40), имеем

$$\sigma_x = \sigma_{cp} + \tau_{31} \cos 2\varphi.$$

Новая ось z будет наклонена к оси 1 на угол $(\varphi + 90^\circ)$; следовательно, заменяя в предыдущем уравнении φ на $(\varphi + 90^\circ)$, получим

$$\sigma_z = ((\sigma_1 + \sigma_3)/2) - ((\sigma_1 - \sigma_3)/2) \cos 2\varphi.$$

или

$$\sigma_z = \sigma_{cp} - \tau_{31} \cos 2\varphi.$$

Напряжение τ_{xz} определится из выражения (2.39а)

$$\tau_{xz} = \pm (1/2)(\sigma_3 - \sigma_1) \sin 2\varphi.$$

В результате получим так называемые формулы преобразования, которые выражают компоненты напряжений в функции угла φ :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= ((\sigma_1 + \sigma_3)/2) + ((\sigma_1 - \sigma_3)/2) \cos 2\varphi; \\ \sigma_z &= ((\sigma_1 + \sigma_3)/2) - ((\sigma_1 - \sigma_3)/2) \cos 2\varphi; \\ \tau_{xz} &= \pm ((\sigma_1 - \sigma_3)/2) \sin 2\varphi\end{aligned}\quad (2.43)$$

или

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_{cp} + \tau_{31} \cos 2\varphi; \\ \sigma_z &= \sigma_{cp} - \tau_{31} \cos 2\varphi; \\ \tau_{xz} &= \tau_{31} \sin 2\varphi.\end{aligned}\quad (2.43a)$$

Дифференциальное уравнение равновесия для плоской задачи получим из уравнения (2.34), учитывая, что все производные по y равны нулю:

$$\begin{aligned}\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_{xz}/\partial z &= 0; \\ \partial\tau_{zx}/\partial x + \partial\sigma_z/\partial z &= 0.\end{aligned}\quad (2.44)$$

При решении различных задач, относящихся к плоскому напряженному состоянию, иногда бывает удобно пользоваться вместо прямоугольных координат полярными, определяя положение точки радиусом-вектором ρ и полярным углом θ , т. е. углом, который составляет радиус-вектор с осью ρ .

Условия равновесия в полярных координатах легко получить из тех же условий в цилиндрических координатах, приравняв $\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = \tau_{z\rho} = \tau_{\rho z} = 0$ и учтя, что производные по z равны нулю:

$$\begin{aligned}\partial\sigma_\rho/\partial\rho + (1/\rho)(\partial\tau_{\rho\theta}/\partial\theta) + (\sigma_\rho - \sigma)/\rho &= 0; \\ \partial\tau_{\theta\rho}/\partial\rho + (1/\rho)(\partial\sigma_\theta/\partial\theta) + 2\tau_{\rho\theta}/\rho &= 0.\end{aligned}\quad (2.45)$$

Частным случаем плоской задачи будет такой, когда напряжения ее зависят также и от координаты θ

(симметричное относительно оси распределение напряжений). В этом случае обратятся в нуль производные по θ и напряжения $\tau_{r\theta}$ и $\tau_{\theta r}$, а условия равновесия определяются одним дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r = 0. \quad (2.46)$$

Ясно, что напряжения σ_r и σ_θ здесь будут главными.

Такое напряженное состояние имеем во фланце при вытяжке без прижима цилиндрического тела.

ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И КОМПОНЕНТАМИ ДЕФОРМАЦИЙ

Ранее уже были даны предварительные понятия о деформации. Здесь эти понятия будут уточнены и дополнены. При этом следует заметить, что рассматриваться будут малые деформации с получением соответствующих дифференциальных зависимостей, которые, однако, будут полезны, поскольку всякий процесс пластической деформации можно и удобно рассматривать в каждый данный его момент.

Если тело деформируется, то каждая его точка смещается от своего первоначального положения. При этом подразумевается, что тело находится в равновесии и не имеет возможности перемещаться как целое. Таким образом, подразумевается, что смещение каждой точки происходит исключительно вследствие деформации (т. е. жесткое перемещение отсутствует).

Пусть координаты точки в начальный момент бы-

ли x, y, z , а в данный момент деформации (близкий к начальному) x', y', z' , тогда

$$\begin{aligned}x' - x &= u_x \\y' - y &= u_y \\z' - z &= u_z\end{aligned}\tag{2.47}$$

будут представлять собой проекции перемещения на координатные оси, т. е. будут компонентами перемещения точки.

Для различных точек тела компоненты перемещения будут различны, и они являются непрерывными функциями координат.

Отсюда вытекает, что элементарный параллелепипед, мысленно вырезанный в теле, при деформации последнего изменит не только свое положение, но и свою форму. В общем случае ребра параллелепипеда изменяют длину, а углы перестанут быть прямыми. Деформации будут двух видов: линейные (удлинения) и угловые (сдвиги). При этом, пренебрегая бесконечно малыми высших порядков, можно считать, что угловые деформации (сдвиги) не влияют на линейные размеры.

Относительные линейные деформации будем в дальнейшем обозначать через ε индексируя так же, как это было сделано в отношении напряжений σ . Заметим, что поскольку в этой главе рассматриваются малые деформации, то $\sigma = \delta$. Относительные сдвиги будем обозначать через γ ; с двумя индексами, как у напряжений τ , указывая этими индексами координатную плоскость, на которую проектируется искажаемый

деформацией угол. При этом относительные сдвиги считаются положительными, если им соответствует уменьшение угла со сторонами, направленными в положительном направлении координатных осей. Сказанное поясняется фиг. 34.

Из изложенного следует, что компонент деформаций будет шесть:

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} \end{array}$$

Выразим теперь компоненты деформации через компоненты смещения. Выделим для этого в деформируемом теле элементарный параллелепипед с бесконечно малыми ребрами dx , dy , dz , параллельными осям координат.

Пусть (фиг. 35) $abcd$ будет проекция этого параллелепипеда на плоскость xy до деформации, а $a'b'c'd'$ - после деформации, когда точки a , b , c , d получили смещения, указанные на фиг. 35. выразим смещение точек b и c через смещения точки a .

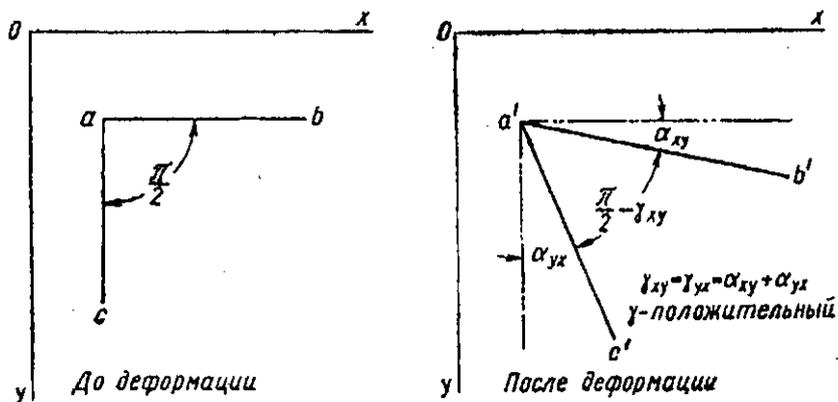
Смещения, как было сказано ранее, есть непрерывные функции координат. Точка b расположена на бесконечно малом расстоянии от точки a в направлении оси x . Пренебрегая членами высших порядков, можно считать, что перемещение точки b в направлении оси x будет отличаться от перемещения точки a на величину приращения функции u_x на длине dx по координате x . Тогда

$$u_{bx} = u_x + (\partial u_x / \partial x) dx.$$

Отсюда относительное удлинение ребра ab длиной dx , т. е. относительная деформация ε , в направ-

лении x , выразится так:

$$\varepsilon_x = (u_{bx} - u_x)dx = (u_x + (\partial u_x / \partial x)dx - u_x) / dx = \partial u_x / \partial x.$$



Фиг. 34.

Аналогично получим

$$u_{cy} = u_y + (\partial u_y / \partial y)dy.$$

и

$$\varepsilon_y = \partial u_y / \partial y,$$

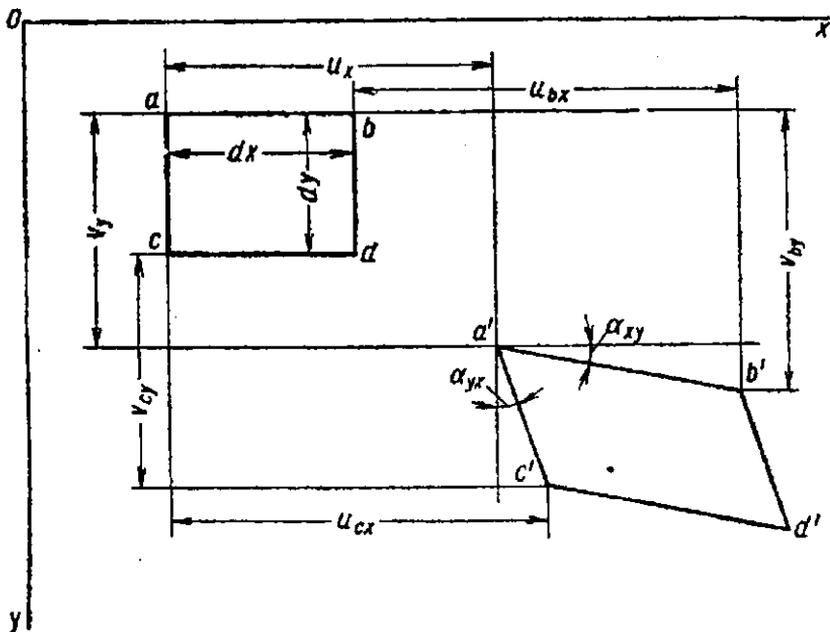
а также

$$u_{by} = u_y + (\partial u_y / \partial x)dx,$$

$$u_{cx} = u_x + (\partial u_x / \partial y)dy.$$

Так как изменения углов также бесконечно малы, то $\text{tg } \alpha_{xy} = \alpha_{xy}$ и $\text{tg } \alpha_{yx} = \alpha_{yx}$, поэтому (фиг. 35)

$$a_{xy} = (u_{by} - u_y) / (u_{bx} + dx - u_x)$$



Фиг. 35.

Подставляя полученные ранее значения u_{bx} и u_{by} , получим

$$\begin{aligned} \alpha_{xy} &= (u_y + (\partial u_y / \partial x) dx - u_y) / (u_x + (\partial u_x / \partial x) dx + dx u_x) = \\ &= (\partial u_y / \partial x) / (1 + \partial u_x / \partial x). \end{aligned}$$

Так как $\partial u_x / \partial x = \epsilon_x$ и значительно меньше единицы, то $\alpha_{xy} = \partial u_y / \partial x$.

Тем же способом получим

$$\alpha_{yx} = \partial u_x / \partial y$$

и, наконец,

$$\gamma_{xy} = \alpha_{xy} + \alpha_{yx} = \partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x.$$

Проектируя рассматриваемый параллелепипед на плоскости yz и zx , найдем выражения других компонент деформации.

В итоге получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \partial u_x / \partial x; \\ \varepsilon_y &= \partial u_y / \partial y; \\ \varepsilon_z &= \partial u_z / \partial z; \\ \gamma_{xy} &= \partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x; \\ \gamma_{yz} &= \partial u_y / \partial z + \partial u_z / \partial y; \\ \gamma_{zx} &= \partial u_z / \partial x + \partial u_x / \partial z. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Выражения относительных сдвигов γ ; мы получили как значения суммы двух углов. Например, для сдвига γ_{xy} (см. фиг. 34 и 35) как сумму угла поворота ребра ab , параллельного оси x в направлении оси y (α_{xy}), и угла поворота ребра ac , параллельного оси y в направлении оси x (α_{yx}).

В отношении результатов деформации (искажения) формы совершенно безразлично, какие будут относительные значения углов α_{xy} и α , лишь бы их сумма оставалась постоянной, равной γ_{xy} . Это дает нам возможность каждую компоненту сдвиговой деформации представить в виде двух, рассматривая половину значения γ и индексируя их аналогично, как это было сделано для углов α . Например, вместо относительного сдвига γ_{xy} взять $(1/2)\gamma_{xy}$ и $(1/2)\gamma_{yx}$, причем $(1/2)\gamma_{xy} = (1/2)\gamma_{yx}$. Индексация при этом, как легко видеть, будет совпадать с индексацией напряжений τ , и мы сможем записать деформации также, как записывали напряжения в уравнениях (2.12), (2.12а):

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_x & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_x \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

или, учитывая равенство компонент, расположенных симметрично относительно главной диагонали,

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ & \varepsilon_x & \gamma_{yz}/2 \\ & & \varepsilon_x \end{pmatrix} \quad (2.49a)$$

T_{ε} будет тензором деформаций, обладающим такими же свойствами, как и тензор напряжений (3.12). Он будет полностью определять деформированное состояние точки, иметь такие же инварианты, как тензор напряжений, и его также можно разложить на шаровой тензор деформаций и девиатор деформаций. Первый в общем случае упругой деформации будет выражать изменение объема (объемную деформацию), второй - изменение формы (девиаторную деформацию).

При пластической деформации, как было показано ранее, $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$, следовательно, и $\varepsilon_{cp} = 0$. Поэтому при пластической деформации шаровой тензор деформации равен нулю и тензор деформации является девиатором.

Для деформаций так же, как и для напряжений, всегда можно найти главные оси, в направлении которых будут иметь место главные линейные деформации (главные удлинения) ε_1 , ε_2 и ε_3 , а сдвиги γ будут отсутствовать. Вообще все необходимые формулы теории деформаций можно записать по анало-

гии с соответствующими формулами теории напряжений.

НЕРАЗРЫВНОСТЬ ДЕФОРМАЦИЙ

Компоненты деформации (2.48) определяются тремя компонентами перемещений u_x , u_y , u_z . Следовательно, они не могут быть выбраны произвольно, а между ними должны существовать определенные зависимости. Эти зависимости носят название условий (уравнений) совместности, или неразрывности деформаций. Зависимости имеются как между компонентами деформации в одной плоскости, так и между компонентами в разных плоскостях.

Выведем условия совместности для плоской и осесимметричной задачи.

Для плоского напряженного состояния

$$\varepsilon_y = \text{const.}$$

Для плоского деформированного состояния

$$\varepsilon_y = 0.$$

В обоих случаях деформации не зависят от координаты y , и u_y не зависит от координат x и z .

Учитывая сказанное, из выражений (2.48) получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \partial u_x / \partial x; \\ \varepsilon_z &= \partial u_z / \partial z; \\ \gamma_{xz} &= \partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x;\end{aligned}\tag{2.50}$$

Продифференцируем первое уравнение из выражения (2.48) дважды по z , а третье дважды по x :

$$\begin{aligned}\partial^2 \varepsilon_x / \partial z^2 &= \partial^3 u_x / \partial x \partial z^2; \\ \partial^2 \varepsilon_z / \partial x^2 &= \partial^3 u_z / \partial z \partial x^2.\end{aligned}$$

Сложим почленно и несколько преобразуем:

$$\begin{aligned}\partial^2 \varepsilon_x / \partial z^2 + \partial^2 \varepsilon_z / \partial x^2 &= \partial^3 u_x / \partial x \partial z^2 + \partial^3 u_z / \partial z \partial x^2 = \\ &= (\partial^2 / \partial x \partial z)(\partial u_x / \partial z + \partial u_z / \partial x).\end{aligned}$$

Замечая, что выражение в правой части в скобках представляет собой относительный сдвиг γ_{xz} , получим

$$\partial^2 \varepsilon_x / \partial z^2 + \partial^2 \varepsilon_z / \partial x^2 = \partial^2 \gamma_{xz} / \partial x \partial z. \quad (2.51)$$

Выражение (2.51) и будет условием совместности. Легко видеть, что при двух заданных деформациях третья получит вполне определенное и единственное значение.

Для осесимметричного напряженного состояния в цилиндрических координатах без вывода запишем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \partial u_r / \partial r; \\ \varepsilon_\theta &= u_r / \rho; \\ \varepsilon_z &= \partial u_z / \partial z; \\ \gamma_{rz} &= \partial u_z / \partial r + \partial u_r / \partial z.\end{aligned} \quad (2.52)$$

Это будут выражения деформаций. Условием совместности линейных деформаций ε_r и ε_θ будет следующее:

$$\partial \varepsilon_\theta / \partial r = (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) / \rho. \quad (2.53)$$

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Природа пластической деформации	6
Строение металлов	6
Понятие о пластической деформации	15
Механизм холодной пластической деформации монокристалла	16
Холодная пластическая деформация поликристалла	26
Упрочнение при холодной деформации	31
Кривые упрочнения	33
Влияние температуры и скорости деформации на процесс деформирования. Деформация при повышенных температурах; возврат и рекри- сталлизация	41
Виды деформации при обработке металлов давлением	51
Влияние температуры на сопротивление деформированию и пластичность	53
Влияние скорости деформации на пластичность и сопротивление деформированию	57
Глава 2. Напряженное и деформированное состояние	62
Напряжение в координатных плоскостях	63
Напряжение в наклонной площадке	66
Главные нормальные напряжения	69
Понятие о тензоре напряжений	72
Эллипсоид напряжений	76
Главные касательные напряжения	79
Октаэдрические напряжения	87
Условия равновесия	92
Оссимметричное напряженное состояние	96

Плоское напряжённое и плоское деформированное состояния («Плоская задача»)	101
Зависимость между компонентами перемещений и компонентами деформаций	111
Неразрывность деформаций	118

Подписано к печати 27.10.99 г. Формат бумаги 60x84 1/16.

Объём 7,75 п.л. Тираж 100 экз. Заказ №836.

Отпечатано в типографии ТашИТУ. г. Ташкент, ул. Талабалар, 54

