

В. А. АРУТЮНОВ, В. И. МИТКАЛИННЫЙ, С. Б. СТАРК

МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ ТЕПЛОТЕХНИКА

Т о м

1

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ.
ТОПЛИВО И ОГНЕУПОРЫ

Под редакцией
засл. деятеля науки и техники РСФСР,
докт. техн. наук, проф. М. А. Г л и н к о в а

Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования СССР в качестве учебника
для студентов металлургических специальностей вузов



МОСКВА, «МЕТАЛЛУРГИЯ» 1974

УДК 669.019.02/09.041

АННОТАЦИЯ

В книге освещены вопросы теории подобия и моделирования. Описаны теоретические основы металлургической теплотехники, термодинамика газов и паров, аэрогидромеханика, тепло- и массообмен. Показаны свойства и применение различных видов топлива, описаны современные методы расчета процессов горения. Изложены основы теплогенерации за счет электрической энергии. Рассмотрены свойства и служба огнеупоров.

Книга является учебником для студентов металлургических, машиностроительных вузов и может быть полезна для широкого круга инженеров-технологов и теплотехников предприятий черной металлургии. Ил. 192. Табл. 21. Список лит.: 27 назв.

© Издательство «Металлургия», 1974.

А $\frac{31011-158}{040(01)-74}$ 138—74

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие научного редактора	12
Введение	14
Раздел первый	
ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ	
Глава I. Основные понятия и законы термодинамики	
1. Термодинамическая система и ее взаимодей-	
ствие с окружающей средой	18
1. Первый закон термодинамики	24
3. Второй закон термодинамики	27
4. Изменение энтропии в обратимых и необра-	
тимых процессах	30
5. Основы термодинамики необратимых процес-	
сов	34
Глава II. Термодинамика рабочего тела	
1. Газы и газовые смеси	39
2. Термодинамические процессы изменения со-	
стояния газа	41
3. Водяной пар	45
4. Влажный воздух	54
Глава III. Термодинамика газового потока	
1. Первый закон термодинамики для потока газа	59
2. Истечение газа из цилиндрического или су-	
жающегося сопла	63
3. Влияние профиля сопла на процесс истечения.	
Сопло Лаваля	68
4. Дросселирование газов и паров	71
5. Сжатие газа в компрессоре	73
Глава IV. Термодинамика тепловых двигателей	
1. Круговые процессы	80
2. Цикл Карно	83
3. Теоретические циклы поршневых газовых дви-	
гателей	85
4. Циклы газотурбинных установок	90
5. Циклы паросиловых установок	94
6. Циклы атомных и магнитогидродинамических	
установок	99
7. Эксергетический метод оценки работы тепло-	
вых устройств	102
Список литературы	104
Раздел второй	
ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ	
Глава V. Основы теории подобия	
1. Общие понятия	105
2. Подобие физических явлений	109
3. Первая теорема подобия	113
4. Вторая теорема подобия	116
5. Третья теорема подобия	120

	Стр.
Глава VI. Моделирование	
1. Определение	122
2. Правила моделирования	123
3. Критерии гидродинамического подобия	128
4. Методы аналогий	132
Список литературы	136
Раздел третий	
МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ	
Глава VII. Основные свойства газов и жидкостей, характеристика действующих сил	
1. Общие сведения	137
2. Вязкость (внутреннее трение) в жидкостях и газах	142
3. Силы, действующие в жидкости	143
4. Независимость давления от ориентировки площадки	148
Глава VIII. Кинематика газов и жидкостей	
1. Методы описания движения газа и жидкости	151
2. Установившееся движение газа и жидкости	154
3. Линия тока и трубка тока	155
4. Относительное перемещение жидких частиц	159
5. Вращение жидкой частицы	160
6. Вихревая линия и трубка и циркуляция скорости	162
7. О скорости, вызываемой вихревыми шнурами	165
Глава IX. Основные уравнения кинематики и динамики газов и жидкостей	
1. Уравнение неразрывности	169
2. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера)	172
3. Уравнение Бернулли	175
4. Дифференциальные уравнения движения жидкости с учетом внутреннего трения (уравнения Навье-Стокса)	178
5. Теорема Эйлера	180
6. Теорема Борда	183
7. Уравнение Бернулли для печных газов	185
Глава X. Статика газов и жидкостей	
1. Статика однородного газа	188
2. Статика двух однородных газов	191
3. Статика дымовой трубы	194
4. Уравнение равновесия жидкости	196
5. Распределение давления в капельной жидкости	198
Глава XI. Движение вязкой жидкости, режимы течения, пристеночный пограничный слой	
1. Возникновение пристеночного пограничного слоя и его характеристика	198

	Стр.
2. Переход ламинарного течения в турбулентное и распределение скорости	202
3. Дифференциальное уравнение движения жидкости в пограничном слое	209
4. Полуэмпирическая теория турбулентности Прандтля	215
5. Применение закона количества движения к расчету пристеночного пограничного слоя	217
6. Расчет плоского пристеночного ламинарного и турбулентного пограничного слоя	219
Глава XII. Применение уравнения Бернулли в аэрогидродинамических расчетах	
1. Потери энергии при течении жидкости и газа по каналам	221
2. Скорость истечения жидкости из отверстия в резервуаре	231
3. Свободная поверхность жидкости в канале переменной ширины	232
4. Давление в точке торможения потока	234
5. Соотношение между статическим и динамическим давлением в струйке	235
6. Предельная скорость. Кавитация	237
7. Распределение потоков по параллельным каналам	238
8. Газослив в печах	240
Глава XIII. Свободные и полуограниченные турбулентные струйные течения	
1. Основные определения и свойства	241
2. Расширение границ и изменение осевой скорости	249
3. Соударение двух струй в неограниченном постоянстве	253
4. Струя, вытекающая параллельно и под углом к гладкой стенке	256
Глава XIV. Ограниченные турбулентные струйные течения и движение газов в рабочих камерах печей	
1. Общая характеристика ограниченных струй	264
2. Распределение скорости, расширение и затухание ограниченной струи	269
3. Течение в зоне обратных токов	273
4. Аэродинамические и энергетические характеристики ограниченной струи	277
5. Движение газов в рабочих камерах печей	280
Список литературы	284
Раздел четвертый	
ТЕПЛО- И МАССООБМЕН	
Глава XV. Общие сведения	285
1. Молекулярная теплопроводность и молекулярная диффузия	287
2. Тройная аналогия	290

	Стр.
Глава XVI. Теплопроводность в твердых телах	292
1. Дифференциальное уравнение теплопроводности	293
2. Общая постановка задачи теплопроводности	297
3. Теплопроводность при стационарном режиме	300
4. Теплопроводность при нестационарном режиме	311
5. Применение метода аналогий и метода конечных разностей для решения задач теплопроводности	334
Глава XVII. Теплопроводность при затвердевании и плавлении	339
1. Нестационарное температурное поле в случае полуграниченного тела при граничных условиях первого рода	340
2. Нестационарное температурное поле в случае затвердевания полуграниченного объема жидкости при граничных условиях первого рода	344
3. Нестационарное температурное поле в случае плавления полуграниченного тела при граничных условиях первого рода	349
Глава XVIII. Конвективный тепло- и массообмен	352
1. Дифференциальные уравнения конвективного тепло- и массообмена	335
2. Тепловой и диффузионный пограничные слои	362
3. Уравнения теплового и диффузионного пограничных слоев	365
4. Полуэмпирическая теория турбулентности Прандтля для переноса тепла и массы	370
5. Уравнения теплового потока и потока массы для пограничного слоя (метод Г. Н. Кружилина)	375
6. Расчет теплоотдачи и массоотдачи в случае ламинарного пограничного слоя на плоской поверхности при вынужденном движении	381
7. Расчет теплоотдачи и массоотдачи в случае ламинарного пограничного слоя на плоской поверхности при вынужденном движении	491
8. Теплоотдача и массоотдача в условиях свободной (естественной) конвекции	399
Глава XIX. Движение и теплообмен в разреженных газах	405
1. Внутреннее трение и теплопроводность в плотном газе на основе кинетической теории	407

	Стр.
2. Молекулярно-кинетический смысл критериев Рейнольдса и Маха и их связь с критерием Кнудсена	410
3. Четыре режима движения газа	411
4. Режим скользящего потока. Скачки скорости и температуры	412
5. Свободно-молекулярное истечение газа через отверстие (молекулярная эффузия)	418
6. Теплоотдача в ультраразреженном газе	420
Глава XX. Теплообмен излучением	
1. Общие сведения и основные понятия	422
2. Основные законы излучения абсолютно черного тела	426
3. Излучение серых тел. Закон Кирхгофа	429
4. Закон Ламберта	431
5. Геометрические свойства лучистых потоков. Угловые коэффициенты	435
6. Лучистый теплообмен в замкнутой системе из двух серых поверхностей, разделенных лучепрозрачной средой	442
7. Теплообмен излучением в замкнутой системе, состоящей из произвольного числа серых поверхностей	445
8. Излучение через отверстие в стенке печи	337
9. Действие экранной теплоизоляции	450
10. Излучение и поглощение лучистой энергии в газовой среде	453
11. Лучистый теплообмен между газом и окружающей его замкнутой серой оболочкой	464
12. Лучистый теплообмен в замкнутой системе, включающей две поверхности, из которых одна адиабатная, разделенные серым газом	464
13. Коэффициент теплоотдачи лучеиспусканием	468
Глава XXI. Исследование процессов тепло- и массообмена с помощью теории подобия	470
1. Нестационарное температурное поле в твердом теле произвольной формы без внутренних источников тепла при граничных условиях третьего рода	471
2. Конвективный тепло- и массообмен при вынужденном движении несжимаемой жидкости вдоль твердой поверхности	474
Список литературы	378

Раздел шестой ТОПЛИВО И ЕГО ГОРЕНИЕ

Глава XXII. Характеристика топлива	
1. Общие сведения о топливе	479
2. Химический состав топлива	481
3. Теплота сгорания топлива	485

	Стр.
4. Условное топливо	487
5. Отношение топлива к нагреванию	488
Глава XXIII. Виды топлив	
1. Твердое топливо	489
2. Искусственное твердое топливо	496
3. Жидкое топливо	502
4. Газообразное топливо	507
Глава XXIV. Основы теории горения	
1. Химические процессы в пламени	514
2. Цепные реакции	518
3. Тепловое воспламенение	522
4. Массообмен и теплообмен пламени	528
5. Структура и длина пламени	532
6. Стабилизация пламени	535
Глава XXV. Горение различных видов топлива	
1. Горение газообразного топлива	537
2. Горение жидкого топлива	542
3. Горение пылевидного топлива	545
Глава XXVI. Расчеты горения топлива	548
1. Определение расхода воздуха	549
2. Определение количества и состава продуктов сгорания	552
3. Определение температуры горения	554
4. К расчету горения газа	560
Список литературы	560

Раздел шестой ТЕПЛОГЕНЕРАЦИЯ ЗА СЧЕТ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ

Глава XXVII. Теплогенерация в рабочем теле при приложении к нему разности потенциалов	563
1. Теплогенерация при приложении разности потенциалов к твердому телу	563
2. Теплогенерация при приложении разности потенциалов к жидкому телу	565
3. Теплогенерация при приложении разности потенциалов к газообразному телу	566
А. Электрическая дуга	567
Б. Поток плазмы	572
В. Наложение электрического поля на пламя	575
Г. Поток электронов	577
Глава XXVIII. Теплогенерация в рабочем теле, находящемся в переменном электромагнитном поле	580
1. Индукционный нагрев	581
А. Особенности теплогенерации в твердом проводнике, находящемся в переменном электромагнитном поле	583
Б. Теплогенерация в газе, находящемся в переменном электромагнитном поле	586

	Стр.
2. Диэлектрический нагрев	586
Список литературы	588
Раздел седьмой	
ОГНЕУПОРНЫЕ МАТЕРИАЛЫ. В МЕТАЛЛУРГИИ	
Глава XXIX. Свойства огнеупоров и их служба	589
1. Огнеупоры, их определение и назначение	589
2. Физико-химическая характеристика огнеупоров	590
3. Классификация и применение огнеупорных материалов	591
4. Физические и химические свойства огнеупоров	593
5. Рабочие свойства огнеупоров и их контроль	599
6. Условия работы огнеупоров	604
7. Физико-химические свойства системы $\text{SiO}_2\text{—Al}_2\text{O}_3$	607
8. Свойства огнеупорных глин и производство шамотных изделий	609
9. Высокоглиноземистые огнеупорные изделия	614
10. Физические свойства кремнезема	616
11. Производство диоксидных изделий	617
12. Производство магнезиальных огнеупоров	619
13. Производство термостойкого магнезитового кирпича	620
14. Доломитовые огнеупоры	622
15. Форстеритовые огнеупоры	625
16. Шпинельные огнеупоры	626
17. Производство хромомагнезитовых огнеупоров	627
18. Огнеупорные растворы, массы, бетоны и теплоизоляционные материалы	629
19. Выбор огнеупоров для промышленных печей и служба их в кладке печей	638
Глава XXX. Высокоогнеупорные изделия из чистых соединений	645
1. Подготовка сырья	646
2. Изделия из окиси алюминия	649
3. Изделия из окиси циркония	652
4. Изделия из окиси магния	655
5. Изделия из окиси бериллия	656
Глава XXXI. Изделия из углерода	657
1. Виды угольных и графитированных изделий	658
2. Свойства углеродистых и графитированных изделий	659
3. Исходное сырье и его свойства	660
4. Производство углеродистых изделий	661
5. Производство графитированных изделий	666
Список литературы	672

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- a — скорость звука, м/с;
 c ; c_v ; c_p — соответственно теплоемкость, изохорная и изобарная теплоемкости, Дж/(кг·К);
 C — концентрация;
 E — лучеиспускательная способность, Вт/м²;
 e — эксергия;
 M — расход жидкости, газа, кг/с;
 g — ускорение силы тяжести, м/с²;
 P — сила, Н;
 F , f — площадь поперечного сечения, м²;
 i — энтальпия, Дж/кг;
 I — спектральная интенсивность излучения, Вт/м³;
 i_x , i_y , i_z — проекции ускорения на оси прямоугольных декартовых координат, м/с²;
 J — количество движения струн, Н;
 k — показатель адиабаты;
 l — удельная работа, Дж/кг;
 L — полная работа, Дж;
 M — масса, кг;
 n — показатель политроны;
 p — удельное давление, Н/м²;
 q — удельное количество тепла, Дж/кг;
 Q — количество тепла, Дж;
 Q_v , Q_n — соответственно высшая и низшая теплота сгорания топлива, кДж/кг, кДж/м³;
 R — газовая постоянная, Дж/(кг·К);
 T — температура, К;
 t — время, с;
 s — энтропия, Дж/(кг·К);
 U — внутренняя энергия системы, Дж;
 u — удельная внутренняя энергия системы, Дж/с;
 u_n — нормальная скорость распространения пламени, см/с;
 u_t — скорость турбулентного распространения пламени, см/м;

V — объем, м³;
 $v=1/\rho$ — удельный объем, м³/кг;
 v^* — динамическая скорость, м/с;
 w — полная скорость, м/с;
 w_x, w_y, w_z — проекции скорости на оси прямоугольных декартовых координат, м/с;
 Γ — циркуляция скорости, м²/с;
 β — температурный коэффициент объемного расширения, 1/К, 1/°С;
 γ — удельный вес, Н/м³;
 δ — толщина пристеночного пограничного слоя, м;
 ε — степень сжатия;
 ε_c — коэффициент турбулентной диффузии;
 ε_t — коэффициент турбулентной температуропроводности;
 ε_u — кинематический коэффициент турбулентной вязкости, м²/с;
 ν — кинематический коэффициент вязкости, м²/с;
 φ — относительная влажность газа;
 μ — динамический коэффициент вязкости, Н·с/м²;
 η — коэффициент полезного действия;
 ρ — плотность, кг/м³;
 τ_n — касательное напряжение трения, Н/м²;
 ω — полная угловая скорость, рад/с.

ПРЕДИСЛОВИЕ НАУЧНОГО РЕДАКТОРА

Курс «Металлургическая теплотехника» представляет собой единственную дисциплину в учебном плане инженеров-металлургов, которая обеспечивает теплотехническую подготовку инженеров данного профиля. В прошлом в учебном плане были представлены самостоятельные дисциплины: гидравлика, общая теплотехника, топливо и его горение, огнеупорные материалы и металлургические печи, в задачу которых и входило обеспечить теплотехническое образование инженера. Развитие теории, сокращение в программах эмпирического материала и усовершенствование методики преподавания позволили объединить наиболее существенные вопросы указанных выше курсов в единую дисциплину широкого профиля. В современной теории металлургических процессов проблемы химической кинетики нельзя рассматривать без должного учета явления тепло- и массопереноса. Это привело к необходимости усилить теоретическую часть курса металлургической теплотехники в той мере, в какой это необходимо для понимания сложных процессов тепло- и массообмена, которые могут протекать в различных процессах металлургической технологии. В условиях современного металлургического завода вопросы технологии топлива, технологии огнеупорных материалов решаются специалистами особого профиля и к компетенции инженеров-металлургов не относятся. Еще в большей мере это относится к энергетическому хозяйству завода. Вследствие сказанного в курсе «Металлургическая теплотехника» данные вопросы затронуты только в объеме, необходимом с точки зрения успешной производственной деятельности инженера-металлурга. При создании данного курса главным недостатком могло стать механическое сочетание глав, принадлежащих по сути дела к различным дисциплинам. Авторы стремились избежать этого, используя классифи-

кацию, специально разработанную для данного курса, идеи которой изложены во введении.

Курс «Металлургическая теплотехника» излагается в течение двух семестров. В соответствии с этим в I том включены: термодинамика, техническая физика, свойства топлив и огнеупоров; во II и III тома — теория печей, конструкции печей, и некоторого теплоэнергетического оборудования, а также механооборудование, входящее в состав печных агрегатов. Во II томе изложены вопросы, относящиеся к черной металлургии, в III — к цветной металлургии. Авторы понимают, что создание новой дисциплины и написание учебника дело очень трудное и ответственное и поэтому примут с благодарностью все советы и замечания коллег по специальности.

В I томе введение написано докт. техн. наук проф. М. А. Глинковым; разделы: первый — канд. техн. наук проф. С. Б. Старком; второй и третий — докт. техн. наук проф. В. И. Миткалинным (ответственный за том); четвертый — канд. техн. наук доц. В. А. Арутюновым; пятый — канд. техн. наук доц. И. Н. Неведомской; шестой — канд. техн. наук доц. Б. С. Мастрюковым и седьмой — канд. техн. наук доц. Я. К. Берентом.

Авторы выражают глубокую благодарность И. Н. Неведомской, Б. С. Мастрюкову и Я. К. Беренту за написанные ими разделы, включенные в настоящий учебник.

ВВЕДЕНИЕ

Все процессы в природе имеют энергетическую сущность, т. е. связаны с поглощением или выделением энергии. Поэтому всякий технологический процесс можно представить как определенную совокупность элементарных процессов, протеканию которых препятствуют определенные силы, например силы химического сродства, сцепления между частицами, трения и т. д. Таким образом, технологический процесс с энергетической точки зрения работа по преодолению сил, препятствующих протеканию технологического процесса с помощью энергии, которую условимся называть рабочей.

В качестве рабочих видов энергии в технологии используют тепло, механическую и электрическую энергии. Как известно, энергия представляет собой количественное выражение той или иной формы движения материи. Разделение энергии на отдельные виды с точки зрения технической классификации удобно, однако условно. Большинство основных видов естественной энергии поступает в распоряжение человека в результате первоначального превращения в тепло.

Особенно велико значение тепла для металлургического производства, поскольку большинство процессов металлургической технологии совершается в условиях высоких температур. С энергетической точки зрения все промышленное оборудование может быть разделено на три группы: энергетическое, технологическое и вспомогательное.

Энергетическое оборудование предназначено для получения рабочего вида энергии из другого вида энергии (энергогенераторы) или для изменения параметров энергии или энергоносителя (энергопреобразователи). Так, теплогенератором является резистор печи сопротивления, функции теплогенератора выполняют: пламя, слой горящего топлива, поток плазмы, электрическая дуга;

примерами механических генераторов являются электродвигатель, гидравлическая турбина и двигатель внутреннего сгорания, в то время как динамомашинa, фото- и термоэлементы — примеры электрогенераторов.

Коэффициент полезного действия (к. п. д.) энергогенераторов характеризует совершенство процесса генерации энергии. Вследствие неизбежных потерь тепла в окружающую среду все генераторы, предназначенные для получения тепла из другого вида энергии или, наоборот, использования тепла для получения какого-нибудь вида энергии, имеют меньший к. п. д., чем энергогенераторы других видов.

Энергопреобразователи — в принципе более простой вид энергооборудования. Наиболее употребительные в металлургии теплопреобразователи это — регенераторы и рекуператоры для нагрева воздуха и газа, а также экономайзеры для нагрева воды и холодильники, применяемые в печных конструкциях. Редукторы всех типов типичные представители механических преобразователей, тогда как трансформаторы и выпрямители представляют собой типичные электропреобразователи. По указанной причине к. п. д. теплопреобразователей также ниже, чем к. п. д. энергопреобразователей других видов.

Конструкции и расчет различных видов энергетического оборудования существенно отличаются друг от друга, но энергетическая природа их едина, а идеальным энергетическим оборудованием является такое, которое, генерируя или преобразуя энергию, не требует энергетических затрат на эти процессы.

Технологическое оборудование предназначено для использования с максимально возможным к. п. д. рабочего вида энергии для осуществления данного технологического процесса. К технологическому оборудованию относят станки, прокатные станы, грузоподъемные машины и печи.

Что касается печей, то оборудованию этого вида наиболее правильно дать следующее определение: печь есть технологическое оборудование, в котором рабочим видом энергии является тепло и рабочее пространство которого ограждено от окружающей среды.

Вспомогательное оборудование. Все виды оборудования, работа которого прямо не связана с получением, преобразованием или использованием энергии, относятся к категории вспомогательного оборудо-

вания. Примером такого оборудования печей служат всевозможные отсекающие устройства (заслонки, шиберы, клапаны и т. д.), строительные конструкции и т. д.

Динамическое и статическое давление, действующее непрерывно на клапан или шибер, вызывает возникновение напряжений в материале. Это естественно, связано с энергетическими затратами, однако распределенными на большие промежутки времени.

Развитие технических наук и, в частности, металлургической теплотехники связано с внедрением аналитических методов исследования в результате создания математических моделей технологических процессов. В науке об управлении — кибернетике широко применяют модели, использующие связи между характерными входными величинами для того или иного процесса, полученными обработкой многочисленных опытных данных. Область применения подобных моделей, естественно, ограничена данными опыта и подобные модели исключают экстраполяцию за границы, охваченные экспериментом. Более широкое значение имеют модели, полученные описанием технологических процессов на основе фундаментальных законов физики и химии (законы сохранения энергии и массы или в более общей формулировке называемые законом сохранения субстанции).

Для получения системы уравнений, описывающей тот или иной технологический процесс, используют также закономерности переноса субстанции. Систему уравнений чаще всего формулируют в дифференциальной форме, т. е. для элементарного объема пространства и для элемента времени. Подобная система уравнений, написанная для какого-нибудь одного класса явлений (теплопроводность, диффузия и т. д.), получила название характеристической. Присоединение к характеристическим уравнениям уравнений для краевых условий позволяет получить связь между параметрами для конкретного единичного явления.

Системы уравнений для технологических процессов, представляющих собой совокупность взаимосвязанных явлений различных классов, нередко крайне сложны и не поддаются аналитическому решению.

Однако применение вычислительных машин позволяет решать практически любые системы уравнений. Последнее и привело к широкому использованию математического моделирования.

Раздел первый
ОСНОВЫ
ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

Термодинамика, как наука, возникла на основе изучения явлений, происходящих при преобразовании тепла в работу.

В основу термодинамики положены два главных экспериментально установленных закона, получивших название первого и второго законов термодинамики.

Метод термодинамики состоит в том, что из этих законов на основе строго логических выводов устанавливают частные закономерности, позволяющие точно предугадать ход различных процессов и свойства участвующих в этих процессах веществ.

Термодинамика подходит ко всем вопросам феноменологически, т. е. без учета внутримолекулярных сил и микрофизической структуры веществ, участвующих в процессе. Она устанавливает количественные соотношения, имеющие место при прохождении различных процессов, не вскрывая внутреннего механизма и причин, обуславливающих протекание этих процессов. В настоящее время термодинамический метод нашел широкое применение в различных отраслях науки и техники.

Техническая термодинамика занимается применением термодинамических методов в теплотехнике и изучает процессы взаимных преобразований тепла и работы, термодинамические законы движения газовых потоков, а также термодинамические свойства различных веществ.

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ТЕРМОДИНАМИКИ

1. Термодинамическая система и ее взаимодействие с окружающей средой

Под термодинамической системой понимают совокупность материальных тел, находящихся в тепловом и механическом взаимодействии и являющихся объектом термодинамического исследования. Все остальные тела, находящиеся вне рассматриваемой системы, объединяют в понятие окружающей среды и рассматривают лишь постольку, поскольку они взаимодействуют с системой и влияют на ее свойства. В том случае, если возможность какого бы то ни было воздействия на систему со стороны окружающей среды исключена, систему называют замкнутой. Вещество, находящееся внутри однородной гомогенной термодинамической системы, за счет изменения состояния которого получают работу, называется рабочим телом.

Величины, характеризующие состояние такой термодинамической системы, называют ее термодинамическими параметрами. К числу основных параметров состояния относят температуру, давление и удельный объем.

Температура определяет тепловое состояние тела. Из кинетической теории материи известно, что абсолютная температура тела T непосредственно связана со средней кинетической энергией движения его молекул и атомов $m\bar{\omega}^2/2$:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{m\bar{\omega}^2}{2} = kT, \quad (I-1)$$

где k — константа Больцмана.

Из приведенного выражения следует, что при $T=0$ тепловое движение молекул прекращается.

Температуру T , измеряемую на практике в различных системах шкал различными приборами, называют эмпирической.

Давление представляет собой результат ударов о стенки движущихся частиц вещества, заключенного внутри термодинамической системы, отнесенный к единице ограничивающей ее поверхности. Кинетическая теория материи доказывает, что давление пропорционально средней кинетической энергии движущихся частиц вещества $m\bar{\omega}^2/2$ и числу их n , заключенному в единице объема:

$$p = \alpha n \frac{2}{3} \cdot \frac{m \bar{\omega}^2}{2} \quad (1-2)$$

где α — коэффициент сжимаемости вещества.

Как это следует из сопоставления выражений (1-1) и (1-2), абсолютное давление функционально связано с абсолютной температурой:

$$\bar{p} = \alpha n k T. \quad (1-3)$$

Избыточное давление $\bar{p}_{изб}$ представляет собой разность между абсолютным давлением в системе $\bar{p}_{абс}$ и атмосферным давлением $\bar{p}_{ат}$ (рис. 1):

$$p_{изб} = p_{абс} - p_{ат}. \quad (1-4)$$

Если давление в системе меньше атмосферного, то приборы обычно показывают величину разрежения или вакуума $\bar{p}_{вак}$, являющуюся разностью между атмосферным и абсолютным давлением в системе (см. рис. 1):

$$p_{вак} = p_{ат} - p_{абс}. \quad (1-5)$$

В международной системе единиц СИ за единицу давления принимают 1 Н/м^2 . Для измерения значительных давлений удобнее применять $1 \text{ бар} = 1 \times 10^5 \text{ Н/м}^2$. На практике малые давления часто выражают в миллиметрах водяного или ртутного столба, а большие давления — в технических атмосферах.

Удельный объем v представляет собой объем единицы массы вещества и измеряется в $\text{м}^3/\text{кг}$ и, следовательно, есть величина обратная плотности ρ : $v = \frac{1}{\rho} \text{ м}^3/\text{кг}$.

Для однородной сплошной среды удельный объем может быть определен отношением общего объема V , занимаемого веществом, к его массе M : $v = \frac{V}{M} \text{ м}^3/\text{кг}$.

Всякая термодинамическая система обладает определенным запасом энергии, обусловленным различными формами движения и силами взаимодействия элементарных частиц заключенного в ней вещества. Эту энергию называют внутренней энергией системы u и измеряют в

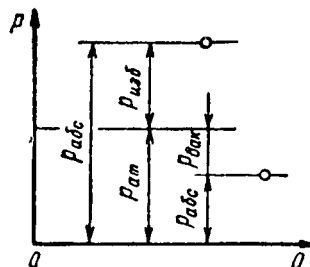


Рис. 1. Абсолютное избыточное и вакуумметрическое давление

джоулях. Внутренняя энергия системы зависит от основных термодинамических параметров $u = f(T, p, v)$. Так как указанные параметры связаны между собой функциональной зависимостью, два заданных параметра полностью определяют состояние термодинамической системы и величину ее внутренней энергии:

$$u = f(T, p); u = f_1(T, v); u = f_2(p, v). \quad (1-6)$$

Таким образом, внутренняя энергия является также термодинамическим параметром состояния. В общем случае определенным значениям параметров T , p и v всегда соответствует вполне определенное и единственное значение внутренней энергии u . Это значит, что дифференциал внутренней энергии du есть полный дифференциал и, следовательно:

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_T dp; \quad (1-7a)$$

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v dT + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T dv; \quad (1-7б)$$

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_v dp + \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_p dv. \quad (1-7в)$$

Изменение внутренней энергии не зависит от того, каким путем меняется состояние системы, а зависит только от ее начального и конечного состояния и может быть выражено следующим образом:

$$\int_1^2 du = u_2 - u_1. \quad (1-8)$$

При взаимодействии системы с окружающей средой внутренняя энергия ее, как правило, увеличивается или уменьшается. Только для полностью изолированной системы, не взаимодействующей с окружающей средой, внутренняя энергия системы остается неизменной при любых изменениях параметров состояния, происходящих внутри такой системы.

Для термодинамических расчетов достаточно знать изменение внутренней энергии, которое можно найти учетом взаимодействия системы с окружающей средой. Это взаимодействие может быть механическим, тепловым, химическим, электрическим и т. п. В технической термодинамике изучают закономерности механического и теплового взаимодействия.

Механическое взаимодействие термодинамической системы с окружающей средой происходит вследствие изменения объема рабочего тела (рис. 2).

При расширении тела от объема V_1 до объема V_2 производится работа против сил давления окружающей среды p . Элементарная работа dL , которую нужно затратить для смещения площадки F на бесконечно малое расстояние dx , равна:

$$dL = pFdx.$$

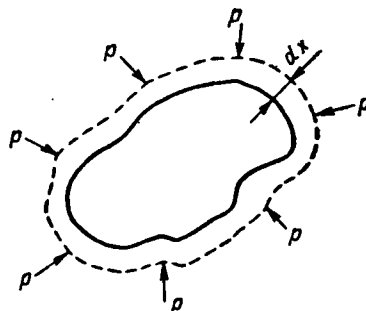


Рис. 2. Изменение объема рабочего тела

Учитывая, что произведение $F dx$ представляет собой элементарное приращение объема dV , получим:

$$dL = p dV \text{ Дж.} \quad (\text{I-9a})$$

Поэтому выражение для полной работы расширения будет иметь вид:

$$L = \int_{V_1}^{V_2} p dV \text{ Дж.} \quad (\text{I-9б})$$

Относя работу расширения к 1 кг массы рабочего тела будем иметь:

$$l = \int_{V_1}^{V_2} p dv \text{ Дж/кг,} \quad (\text{I-9в})$$

где v — удельный объем, $\text{м}^3/\text{кг}$.

При расширении рабочего тела оно производит работу, которую принято считать положительной. При сжатии рабочего тела над ним совершается работа, которую принято считать отрицательной.

Работа зависит от вида функции $p = f(v)$, т. е. от характера процесса изменения объема рабочего тела. Поэтому работа является не функцией состояния, а функцией процесса, происходящего при изменении состояния термодинамической системы.

Тепловое взаимодействие термодинамической системы с окружающей средой заключается в подводе (или

отводе) тепла к рабочему телу от окружающей среды. Количество тепла, полученное рабочим телом от окружающей среды, зависит от теплоемкости тела c , его массы M и изменения средней по массе температуры тела. При бесконечно малом изменении температуры количество тепла, получаемое рабочим телом, равно:

$$dQ = McdT \text{ Дж.} \quad (\text{I-10a})$$

Полное количество получаемого тепла при изменении температуры от T_1 до T_2 будет:

$$Q = M \int_{T_1}^{T_2} cdT \text{ Дж.} \quad (\text{I-10б})$$

Отнеся получаемое тепло к единице массы рабочего тела (1 кг), будем иметь:

$$q = \int_{T_1}^{T_2} cdT \text{ Дж/кг.} \quad (\text{I-10в})$$

Тепло, получаемое системой от внешней среды, принято считать положительным, а отданное во внешнюю среду — отрицательным.

Ввиду того, что теплоемкость рабочего тела зависит от условий протекания термодинамического процесса, полученное тепло не является функцией состояния. При одинаковых начальных и конечных состояниях системы количества тепла, подведенного к ней (или отведенного от нее) в процессе изменения состояния рабочего тела, могут быть различны.

Таким образом, при изменении состояния термодинамической системы изменение ее внутренней энергии можно определить по количеству произведенной (или затраченной) работы и по количеству полученного (или отданного) тепла.

Если с течением времени состояние замкнутой термодинамической системы не меняется и ее термодинамические параметры сохраняют постоянное значение, говорят, что система находится в термодинамическом равновесии.

Всякое изменение состояния системы, сопровождающееся изменением ее термодинамических параметров, называют термодинамическим процессом. Процесс, в результате проведения которого система возвращается в свое первоначальное состояние, называют круговым процессом или циклом.

Термодинамика изучает равновесные или квазистатические процессы, при которых изменение термодинамических параметров происходит одновременно во всех точках термодинамической системы. В этом случае в любой момент времени система находится в термодинамическом равновесии и, следовательно, равновесный процесс можно рассматривать как совокупность бесконечно большого числа равновесных состояний.

Если в результате проведения равновесного процесса в прямом и обратном направлениях система приходит в первоначальное состояние и в окружающей среде не происходит изменений, процесс называется обратимым. Непременными условиями обратимости равновесного процесса являются

отсутствие трения и подвод тепла к рабочему телу при бесконечно малой разности температур. В случае невыполнения последнего условия процесс будет необратимым, так как тепло, полученное из источника с более высокой температурой, не может быть передано обратно против направления температурного градиента.

Термодинамические процессы удобно изображать графически в системе координат $v-p$ (рис. 3). Преимущество этой системы координат состоит в том, что площадь F , расположенная под кривой процесса, выражает графически работу l , получаемую или затрачиваемую в результате проведения этого процесса:

$$F = \int_{v_1}^{v_2} p dv = l.$$

Круговые процессы изображаются в системе координат $v-p$ замкнутой кривой. Площадь, заключенная внутри замкнутой кривой, показывает, какую полезную работу можно получить в результате проведения кругового процесса по направлению часовой стрелки.

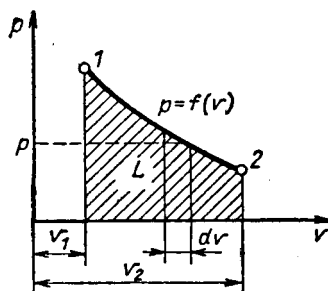


Рис. 3. Графическое изображение термодинамических процессов в координатах $v-p$

2. Первый закон термодинамики

Закон сохранения и превращения энергии является основным законом природы. Глубокий философский смысл его заключается в том, что он выражает факт неуничтожаемости движения материального мира. Механическая энергия движущего тела может превратиться во внутреннюю, определяемую молекулярным и внутримолекулярным движением, в электроэнергию, определяемую движением электрических зарядов и т. п. Движение может принимать качественно различные формы, переходить из одной формы в другую, однако уничтожено быть не может.

Физической мерой движения материи является энергия. Различие отдельных видов энергии определяется различной формой движения материальных тел. При переходе движения из одной формы в другую изменяется и вид энергии, которой обладает рассматриваемая система материальных тел. В случае полностью изолированной системы при любых происходящих в ней процессах общая энергия системы не изменяется, так как энергия не уничтожается и не создается вновь. В случае отдачи системой части энергии в окружающую среду на такую же величину уменьшается и ее общая энергия.

Первый закон термодинамики является применением закона сохранения и превращения энергии к тепловым процессам. При тепловом и механическом взаимодействиях неподвижной термодинамической системы с окружающей средой изменение внутренней энергии системы может происходить либо получением (отдачей) системой некоторого количества тепла, либо совершением некоторой механической работы.

В первом случае, т. е. при получении количества тепла Q , внутренняя энергия системы увеличивается от величины U_1 до величины U_2 , таким образом:

$$U_2 - U_1 = Q.$$

При совершении системой полезной работы L внутренняя энергия системы уменьшится от величины U_1 до величины U_2 , т. е.:

$$U_1 - U_2 = L.$$

В общем случае при одновременном тепловом и механическом взаимодействиях термодинамической системы с окружающей средой изменение внутренней энергии

системы будет определяться полученным системой количеством тепла Q и произведенной полезной работой L :

$$U_2 - U_1 = Q - L.$$

Более удобно математическую формулировку первого закона термодинамики применять в следующем виде:

$$Q = \Delta U + L, \quad (I-11a)$$

где $\Delta U = U_2 - U_1$ — изменение внутренней энергии термодинамической системы.

Наиболее распространенная формулировка первого закона термодинамики говорит, что количество тепла Q , подведенное к термодинамической системе, расходуется на изменение внутренней энергии системы ΔU и на совершение ею внешней работы L .

Все величины, входящие в уравнение первого закона термодинамики, измеряются в джоулях.

Следует отметить, что в случае, если система взаимодействует с окружающей средой не механически, а химически, электрически, магнитно и т. п., вместо механической работы $L = \int_{V_1}^{V_2} p dv$ в уравнении первого закона

термодинамики должны войти выражения для работы химических, электрических, магнитных и других сил. Изучение этих взаимодействий выходит, однако, за рамки курса технической термодинамики.

Отнесенное к единице массы (1 кг) уравнение первого закона термодинамики примет следующий вид:

$$q = u_2 - u_1 + l, \quad (I-11б)$$

где q , l , u_1 , u_2 — удельные количества соответственно тепла, работы и величины изменения внутренней энергии.

В дифференциальной форме это уравнение имеет вид:

$$dq = du + dl = du + p dv. \quad (I-11в)$$

Следует отметить, что du является полным дифференциалом, так как внутренняя энергия u является функцией состояния и не зависит от пути протекания процесса. В отличие от этого dq и dl не будут полными дифференциалами, а выражают только бесконечно малые приращения тепла и работы, так как q и l не являются параметрами состояния, а зависят от характера процесса.

Подставляя вместо du его развернутое значение из выражения (1-7), будем иметь:

$$dq = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + p \right] dv + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT \quad (1-12a)$$

или

$$dq = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_p + p \right] dv + \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right)_v dp. \quad (1-12b)$$

Уравнение первого закона термодинамики можно преобразовать и написать в следующем виде:

$$dq = du + pdv = du + pdv + vdp - vdp = d(u + pv) - vdp.$$

Величина $u + pv$, которая состоит из параметров состояния, сама является параметром состояния. Ее обозначают через i и называют энтальпией:

$$i = u + pv \text{ Дж/кг.} \quad (1-13)$$

Энтальпия является одной из важнейших функций термодинамики. Она выражает полную энергию рабочего тела, состоящую из внутренней энергии и потенциальной энергии, которую может выделить рабочее тело в виде работы в процессе расширения. Поскольку энтальпия является функцией состояния, величина di является полным дифференциалом и может быть выражена следующим образом:

$$di = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T dp; \quad (1-14a)$$

$$di = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial i}{\partial v} \right)_T dv; \quad (1-14b)$$

$$di = \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_v dp + \left(\frac{\partial i}{\partial v} \right)_p dv. \quad (1-14c)$$

С применением понятия энтальпии выражение первого закона термодинамики может быть представлено следующим образом:

$$dq = di - vdp. \quad (1-15)$$

Приложение первого закона термодинамики к понятию о теплоемкостях позволяет получить важные выводы.

Подставив в формулу теплоемкости $c = dq/dT$ вместо dq его развернутое выражение и используя понятие энтальпии, можно получить формулы для определения теп-

лостности при любом термодинамическом процессе изменения состояния газа:

$$c = c_v + \left[p + \left(\frac{\partial u}{\partial v} \right)_T \right] \frac{dv}{dT} \quad (I-16a)$$

или

$$c = c_p - \left[v - \left(\frac{\partial i}{\partial p} \right)_T \right] \frac{dp}{dT}, \quad (I-16b)$$

где $c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v$ и $c_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T} \right)_p$ — теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении газа.

3. Второй закон термодинамики

Первый закон термодинамики устанавливает количественную зависимость между теплом, внутренней энергией и работой, но не указывает направления, по которому идет термодинамический процесс, и условия, при которых этот процесс может протекать. Ответ на вопрос о направлении и возможных условиях протекания термодинамического процесса дает второй закон термодинамики. Исторически этот закон возник в результате наблюдения и обобщения опыта работы тепловых двигателей, преобразующих тепло в работу. Однако в настоящее время он получил значительно более широкое толкование. Второй закон термодинамики обобщает опытные факты, относящиеся к состояниям равновесия термодинамических систем и к происходящим в этих системах процессам.

Наблюдения и факты показывают, что процессы происходящие в природе, имеют определенную направленность. В противоположном направлении эти процессы самопроизвольно идти не могут, хотя это не противоречило бы первому закону термодинамики и энергетическому балансу. Рано или поздно все реально протекающие в замкнутой системе процессы достигают равновесного состояния, при достижении которого процесс прекращается. Равновесие может быть механическим, тепловым, химическим и т. п. Самопроизвольно вернуться из состояния равновесия в какое-либо из предыдущих промежуточных состояний система уже не может.

Наиболее простая формулировка второго закона термодинамики принадлежит Клаузиусу. Она гласит, что теплота самопроизвольно не может переходить от тела,

имеющего более низкую температуру, к телу, имеющему более высокую температуру.

В приложении к вопросам преобразования энергии второй закон термодинамики говорит, что нельзя создавать вечный двигатель второго рода, т. е. такую машину, в которой все подводимое при постоянной температуре тепло превращалось бы в работу. Преобразование тепла в работу требует соблюдения особых условий, которые и формулируют второй закон термодинамики.

Процессы преобразования тепла в работу, происходящие при осуществлении круговых процессов, проводимых по часовой стрелке в тепловых двигателях, подробно изучаются в технической термодинамике. Применительно к этим процессам второй закон термодинамики может быть сформулирован следующим образом: для работы периодически действующего теплового двигателя необходимо наличие двух источников тепла различной температуры. При этом все количество тепла Q_1 , взятое из горячего источника, никогда не может быть полностью превращено в работу. Часть этого тепла Q_2 должна быть обязательно отведена в холодный источник, т. е. потеряна в смысле возможности превращения его в работу.

Чрезвычайно важно подчеркнуть, что, помимо источника тепла с высокой температурой необходимо иметь и холодильник с более низкой температурой. Только при условии обязательного отвода части тепла Q_2 в холодильник можно оставшуюся часть тепла $Q_1 - Q_2$ превратить в работу.

Второй закон термодинамики может успешно применяться не только в теплотехнике, но в других отраслях науки и техники.

Математически второй закон термодинамики может быть выведен из первого закона с помощью еще одного параметра состояния термодинамической системы — энтропии. Из математики известно, что дифференциальный двучлен всегда можно превратить в полный дифференциал, умножив его на интегрирующий множитель или разделив на интегрирующий делитель. Доказано, что таким интегрирующим делителем для двучлена $du + dl$ является абсолютная температура T .

Таким образом, выражение

$$\frac{dq}{T} = \frac{du + dl}{T} = ds \quad (1-17)$$

является полным дифференциалом ds некоторой функции s , названной энтропией, которая, подобно внутренней энергии u и энтальпии i , является параметром состояния. Аналогично другим параметрам состояния величина ds может быть вычислена с помощью уравнений:

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_v dp + \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_p dv; \quad (I-18a)$$

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT; \quad (I-18б)$$

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial v} \right)_T dv + \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_v dT. \quad (I-18в)$$

Изменение энтропии не зависит от пути, по которому идет процесс, а зависит только от начального и конечного состояний рабочего тела:

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{dq}{T}. \quad (I-19)$$

Называя величину dq/T приведенным теплом, можно сказать, что энтропия представляет собой сумму приведенных теплот, взятых на бесконечно малых участках термодинамического процесса.

Очевидно, что в результате проведения кругового обратимого процесса, когда система возвращается в свое первоначальное состояние, изменение энтропии будет равно нулю, т. е.

$$\oint \frac{dq}{T} = 0. \quad (I-20)$$

Приведенное выражение является математическим выражением второго закона термодинамики. Из него следует, что сумма приведенных теплот обратимого кругового процесса равна нулю. Это значит, что в этой сумме имеются как положительные, так и отрицательные члены. Учитывая, что абсолютная температура всегда положительна, можно сделать вывод, что в круговом об-

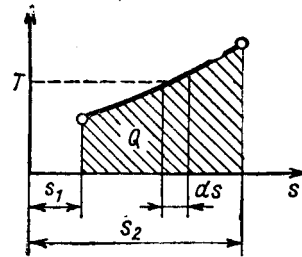


Рис. 4. Графическое изображение термодинамических процессов в координатах $s-T$

ратимом процессе наряду с подводом тепла ($+dq_1$) должен существовать и отвод тепла ($-dq_2$), т. е. все подводимое тепло превратить в работу нельзя, что и следует из второго закона термодинамики.

Введение понятия энтропии открывает новый путь проведения тепловых расчетов. Количество затраченного или полученного тепла в результате проведения термодинамического процесса можно определять из выражения:

$$q = \int_{s_1}^{s_2} T ds. \quad (1-21)$$

Это количество тепла можно выразить графически, применяя систему координат $s-T$. В самом деле, при изображении термодинамического процесса в этой системе координат площадь F под кривой процесса будет выражать количество тепла q , полученное или затраченное в результате проведения этого процесса:

$$F = \int_{s_1}^{s_2} T ds = q.$$

Круговые процессы изображаются в системе координат $s-T$ замкнутой кривой. Площадь внутри этой кривой показывает количество тепла, превращенного в работу, в результате проведения данного кругового процесса по часовой стрелке. Площади, расположенные под кривыми, соответствующими процессам подвода и отвода тепла, выражают количества подведенного и отведенного тепла.

Сопоставляя уравнения первого и второго законов термодинамики, можно получить выражения, объединяющие оба закона термодинамики:

$$T ds = du + p dv \quad (1-22a)$$

или

$$T ds = di - v dp. \quad (1-22b)$$

4. Изменение энтропии в обратимых и необратимых процессах

Абсолютное значение энтропии методами термодинамики определить нельзя. Однако для термодинамических расчетов достаточно знать изменение энтропии,

происходящее при проведении данного термодинамического процесса.

Из уравнения $dq = Tds$ следует, что при $dq > 0$ $ds > 0$, а при $dq < 0$ $ds < 0$. Из этого можно сделать вывод, что в обратимых термодинамических процессах, протекающих с подводом тепла, энтропия системы растет, а в обратимых процессах, сопровождающихся отводом тепла, уменьшается.

Поскольку энтропия является функцией состояния, ее изменение можно определить исходя из начальных и конечных параметров термодинамического процесса.

Из уравнений (I-22 а) и (I-22 б) после интегрирования в пределах от состояния 1 до состояния 2 следует:

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{du}{T} + \int_1^2 \frac{pdv}{T} \quad (\text{I-23a})$$

или

$$s_2 - s_1 = \int_1^2 \frac{di}{T} - \int_1^2 \frac{vdp}{T} \quad (\text{I-23б})$$

По приводимым уравнениям можно определить изменение энтропии в зависимости от изменения других параметров и свойств рабочего тела как для обратимых, так и для необратимых процессов.

Как было показано выше, при проведении круговых обратимых процессов изменения энтропии не происходит и, следовательно:

$$s_2 - s_1 = \oint_{\text{обр}} \frac{dq}{T} = 0.$$

При проведении круговых необратимых процессов дело обстоит иначе. По второму закону термодинамики отводимое тепло равно:

$$dq_2 = dq_1 - dl. \quad (\text{I-24})$$

Вследствие потерь на трение и отдачи тепла в окружающую среду полезная работа dl при проведении кругового необратимого процесса при том же подводимом тепле dq_1 будет всегда меньше, чем в случае обратимого процесса, протекающего без потерь, и следовательно:

$$dq_2^{\text{необр}} > dq_2^{\text{обр}}.$$

Исходя из этого, можно доказать, что увеличение энтропии холодильника $ds_2 = \frac{dq_2}{T_2}$ больше уменьшения энтропии горячего источника $ds_1 = \frac{dq_1}{T_1}$ и, следовательно, $\oint \frac{dq}{T} < 0$. Так как при любом круговом процессе энтропия рабочего тела не изменяется, то энтропия системы состоящей из двух источников тепла и рабочего тела при проведении круговых процессов будет возрастать.

Возрастание энтропии изолированной системы наблюдается и при прохождении в ней процессов непосредственного теплообмена, при которых тепло переходит только от тела с большей температурой T_1 к телу с меньшей температурой T_2 , но не наоборот.

В этом случае уменьшение энтропии более нагретого тела $ds_1 = \frac{dq}{T_1}$ будет меньше, чем увеличение энтропии более холодного тела $ds_2 = \frac{dq}{T_2}$, а значит, суммарная энтропия системы возрастет.

Следовательно, при прохождении в изолированной термодинамической системе любых необратимых процессов ее энтропия будет возрастать.

Возрастание энтропии непосредственно связано с работоспособностью системы.

Для осуществления работы системой необходимо, чтобы давления или температуры входящих в нее тел не были одинаковы. При наличии разности давлений работа может быть произведена за счет расширения рабочего тела, происходящего при выравнивании давлений. При разности температур работа может быть получена в результате проведения кругового процесса в соответствии со вторым законом термодинамики. И в том, и в другом случаях по мере производства работы система будет приближаться к равновесному состоянию, по достижении которого работоспособность изолированной системы окажется полностью исчерпанной. При этом энтропия изолированной системы достигнет своего возможного максимума.

Изолированная термодинамическая система может прийти в равновесие и при протекании в ней полностью обратимых процессов. В этом случае изменения энтро-

лин системы не произойдет ($ds=0$), а работа, которая может быть получена от системы, в результате таких процессов будет максимальна.

Таким образом, величина изменения энтропии может служить мерой необратимости происходящих в изолированной системе процессов.

С другой стороны, энтропия может служить мерой вероятности состояния термодинамической системы.

Как показал Л. Больцман равновесное состояние системы является наиболее вероятным. Всякое неравновесное состояние в результате самопроизвольного протекания необратимых процессов стремится перейти в равновесное, по достижении которого протекание всех самопроизвольных процессов прекращается. Этот процесс сопровождается увеличением энтропии системы, которая к моменту достижения равновесного состояния достигает возможного максимума. Таким образом по величине энтропии можно судить о вероятности данного состояния термодинамической системы.

Второй закон термодинамики определяющий наиболее вероятное направление термодинамических процессов, установлен на основе наблюдений и большого числа экспериментальных данных и имеет статистический характер. Он не исключает возможности протекания процессов и в противоположном направлении. Однако вероятность этого в том случае, если в процессе участвует большое число частиц, невелика, и второй закон термодинамики приближается к абсолютному.

В тех же случаях, когда в процессе участвует небольшое число частиц, колебания физических параметров становятся столь значительными, что характеризовать состояние и процесс средними величинами становится невозможно.

В этих системах, как показал Смолуховский, могут происходить такие флуктуации, при которых второй закон термодинамики может и не выполняться. Вероятность таких случаев тем меньше, чем больше количество частиц содержится в термодинамической системе.

Статистический характер второго закона термодинамики отличает его от закона сохранения энергии, имеющего абсолютный универсальный характер и действующего независимо от масштабов физического явления.

Рассматривая вселенную как изолированную систему, немецкий ученый Клаузиус пришел к выводу, что в

результате протекающих в ней необратимых процессов энтропия вселенной все время растет, а энергия обесценивается. По достижении состояния равновесия, при котором энтропия достигнет максимума, все процессы прекратятся и наступит «тепловая смерть» вселенной.

Теория «тепловой смерти» противоречит основным принципам материалистического понимания природы и является полностью ошибочной. Ошибка Клаузиуса заключается в неправомерности распространения выводов, справедливых для изолированной системы, на вселенную, которая не замкнута в пространстве и времени и не имеет ни начала ни конца.

Разоблачая теорию «тепловой смерти», Энгельс предсказал, что излученная звездами в мировое пространство энергия должна вновь концентрироваться и дать начало новому круговороту материи.

Научное предвидение Энгельса оправдалось. И теоретически, и экспериментально доказано, что во вселенной происходят не только процессы рассеяния, но также процессы концентрации энергии, примером которых служит образование новых звезд.

5. Основы термодинамики необратимых процессов

Классическая термодинамика изучает равновесные, обратимые процессы, протекающие под действием бесконечно малой разности потенциалов и представляющие собой совокупность бесконечно большого числа равновесных состояний. Между тем действительные процессы, происходящие в природе и в технике, идут всегда под действием конечной разности потенциалов и потому являются необратимыми. Изучением закономерностей, по которым протекают эти процессы, и занимается термодинамика необратимых процессов. Эта новая, быстро развивающаяся наука, одним из основателей которой следует считать Л. Онзагера, изучает не законы равновесных состояний, а законы движения различного вида потоков, происходящего под действием соответствующей разности потенциалов.

В основе теории Онзагера лежат два принципа — принцип линейности и принцип взаимности.

Принцип линейности получен в результате обобщения большого экспериментального материала, накопленного в процессе изучения явлений теплопроводности,

электропроводности, диффузии, движения вязкой жидкости и т. п. Он состоит в том, что движение потока прямо пропорционально силе, вызывающей это движение, определяемой градиентом соответствующего потенциала.

Иллюстрацией принципа линейной связи движения с вызывающей это движение силой являются:

а) закон переноса тепла Фурье:

$$q = -\lambda \operatorname{grad} T,$$

где q — плотность теплового потока, Вт/м²;
 T — температура, К;
 λ — коэффициент теплопроводности;

б) закон переноса электричества Ома:

$$i = -\rho \operatorname{grad} U,$$

где i — плотность тока, А/м² или Кл/(м²·с);
 U — напряжение, В;
 ρ — коэффициент электропроводности;

в) закон переноса вещества Фика

$$m = -D \operatorname{grad} C,$$

где m — плотность потока вещества, кг/(м²·с);
 C — концентрация, кг/м³;
 D — коэффициент диффузии;

г) закон переноса количества движения Ньютона

$$I = -\mu \operatorname{grad} \omega,$$

где I — плотность потока количества движения, Н/(м²·с);
 ω — скорость движения, м/с;
 μ — коэффициент динамической вязкости;
 t — время, с.

В обобщенном виде принцип линейности, следовательно, может быть представлен выражением:

$$j = LX, \quad (I-25)$$

где j — величина обобщенного потока, отнесенного к единице площади поперечного сечения в единицу времени;
 X — величина градиента соответствующего потенциала;
 L — кинетический коэффициент, характеризующий собой проводимость системы по отношению к данному виду потока.

В частных случаях обобщенный поток и потенциал принимают конкретное выражение. В явлениях теплопроводности это поток тепла и температура, в явлениях электропроводности это количество электричества и напряжение тока, в явлениях диффузии это поток вещества и его концентрация, в явлениях гидродинамики это количество движения и скорость.

Кинетический коэффициент L превращается в явлениях электропроводности в коэффициент электропроводности ρ , в явлениях диффузии — в коэффициент диффузии D , в явлениях гидродинамики — в коэффициент динамической вязкости μ .

В том случае, если в рассматриваемой системе протекают два разнородных процесса, например перенос массы и перенос тепла, перенос массы j_1 по-прежнему остается пропорциональным градиенту концентрации X_1 , а перенос тепла j_2 — градиенту температуры X_2 . Однако перенос массы будет зависеть и от градиента температуры, а перенос тепла — от градиента концентрации. В этих условиях процессы переноса определяются уже не простыми уравнениями типа (I-25), а системой линейных уравнений следующего вида, называемых кинетическими уравнениями переноса:

$$j_1 = L_{11}X_1 + L_{12}X_2; \quad (I-26a)$$

$$j_2 = L_{22}X_2 + L_{21}X_1. \quad (I-26b)$$

Кинетический коэффициент L_{12} учитывает изменение потока массы от градиента температуры, а коэффициент L_{21} — изменение потока тепла за счет градиента концентрации.

Справедливость кинетических уравнений полностью подтверждается опытом.

Принцип взаимности, полученный методом статистической механики, устанавливает, что для линейных кинетических уравнений типов (I-26a) и (I-26b):

$$L_{12} = L_{21}. \quad (I-27)$$

Продифференцировав уравнение (I-26a) по X_2 при $X_1 = \text{const}$, а уравнение (I-26b) по X_1 при $X_2 = \text{const}$, получим:

$$\left(\frac{\partial j_1}{\partial X_2}\right)_{X_1} = L_{12}; \quad \left(\frac{\partial j_2}{\partial X_1}\right)_{X_2} = L_{21}.$$

На основе принципа взаимности получим:

$$\left(\frac{\partial j_1}{\partial X_2}\right)_{X_1} = \left(\frac{\partial j_2}{\partial X_1}\right)_{X_2}. \quad (I-28)$$

Увеличение потока массы dj_1 , отнесенное к единице приращения градиента температуры dX_2 , равно возрастанию потока тепла dj_2 , отнесенного к единице приращения градиента концентрации dX_1 .

Это означает, что поток необратимого процесса j_1 испытывает влияние градиента потенциала X_1 в той же мере, в какой поток необратимого процесса j_2 испытывает влияние градиента потенциала X_2 .

При протекании в системе нескольких разнородных процессов кинетических уравнений переноса будет также несколько. Например, для трех разнородных процессов кинетические уравнения переноса будут иметь вид:

$$j_1 = L_{11}X_1 + L_{12}X_2 + L_{13}X_3; \quad (I-29a)$$

$$j_2 = L_{21}X_1 + L_{22}X_2 + L_{23}X_3; \quad (I-29б)$$

$$j_3 = L_{31}X_1 + L_{32}X_2 + L_{33}X_3. \quad (I-29в)$$

Соотношение взаимности в этом случае будут выражаться следующим образом:

$$L_{12} = L_{21}; L_{13} = L_{31}; L_{23} = L_{32}. \quad (I-30)$$

Кинетические уравнения переноса совместно с отношениями взаимности составляют математический аппарат термодинамики стационарных необратимых процессов. С помощью этих уравнений можно исследовать вопросы кинетики различных физических и химических процессов, без учета механизма их протекания.

При движении по проводнику любого типа потока любого вида на преодоление сопротивления проводника затрачивается некоторое количество энергии. Элемент потока dx , обладающий потенциалом $p+dp$, при входе в канал требует затраты работы, равной $(p+dp)dx$, а при выходе из канала с потенциалом p совершает работу pdx . Разность этих работ:

$$dQ_k = pdx - (p + dp)dx = -dpdx, \quad (I-31)$$

идущая на преодоление сопротивления канала, пропорциональна разности потенциалов dp и величине проходящего потока.

При прохождении потока любого вида (вещества, электричества, и т. д.) через проводник часть энергии всегда теряется, переходя в тепло, в результате чего воз-

растает энтропия и энергия обесценивается. Это явление получило название диссипации.

При рассмотрении теплового потока в отличие от других явлений теплота диссипации непосредственно не может быть обнаружена вследствие того, что процессы движения и диссипации принадлежат к явлениям одного класса. Однако она имеет место и в этом случае и может быть выражена следующей формулой:

$$Qd_d = Tds_d. \quad (I-32)$$

Таким образом, выделяющееся тепло диссипации увеличивает энтропию потока.

Наличие энтропии диссипации является основным признаком необратимости процесса. В качестве критерия необратимости принимают отношение работы диссипации к полной энергии потока:

$$\frac{dQ_d}{dQ_1} = \frac{dpdx}{p_1 dx} = \frac{dp}{p_1} \approx \frac{\Delta p}{p_1}. \quad (I-33)$$

С увеличением Δp степень необратимости увеличивается, а с уменьшением Δp уменьшается. В пределе, когда $\Delta p \rightarrow 0$, процесс становится обратимым.

Как следует из выражений (I-31) и (I-32), тепло диссипации может быть выражено двумя способами:

$$dQ_d = Tds_d = dpdx.$$

Относя это тепло к единице объема проводника длиной dy и к единице времени, будем иметь:

$$\frac{dQ_d}{Fdydt} = \frac{Tds_d}{Fdydt} = - \frac{dx}{Fdt} \frac{dp}{dy}. \quad (I-34)$$

Учитывая, что

$$\frac{dx}{Fdt} = j; \quad - \frac{\partial p}{\partial y} = X,$$

полученное выражение можно представить в следующем виде:

$$\sigma T = jX. \quad (I-35)$$

Величина $\sigma = \frac{ds_d}{Fdydt}$ называется изменением энтропии диссипации и является одной из важнейших величин термодинамики необратимых процессов.

При исследовании необратимого процесса определяют σ , а затем с помощью принципа линейности и принципа взаимности проводят дальнейшее исследование процесса.

Глава II

ТЕРМОДИНАМИКА РАБОЧЕГО ТЕЛА

Обычно в технике в качестве рабочего тела используют газы или смеси газов, а также пары различных веществ и в первую очередь воды. В некоторых случаях рабочим телом может служить смесь, состоящая из газов и паров. Свойства рабочего тела играют большую роль при термодинамических исследованиях.

1. Газы и газовые смеси

В целях некоторого упрощения основных закономерностей в термодинамике широко используют понятие идеального газа, т. е. такого абстрактного газа, в котором силы межмолекулярного взаимодействия полностью отсутствуют, а сами молекулы рассматриваются как упругие материальные точки, объем которых равен нулю.

Для идеального газа полностью справедливы известные законы Бойля—Мариотта ($pV = \text{const}$ при $T = \text{const}$), Гей-Люссака ($V/T = \text{const}$ при $p = \text{const}$) и Фика ($p/T = \text{const}$ при $V = \text{const}$), которые устанавливают связи между основными параметрами состояния газа — удельным объемом v , давлением p и абсолютной температурой T .

Связь между всеми тремя основными параметрами выражается уравнением состояния, называемым также уравнением Клапейрона — Менделеева:

$$pv = RT \text{ или } pV = MRT, \quad (\text{I-1})$$

где R — газовая постоянная, Дж/(кг·град);

V — полный объем, занимаемый M кг газа, м³.

Газовая постоянная R , как следует из ее размерности, численно равна работе, совершаемой 1 кг газа при изменении его температуры на 1 град.

Газовую постоянную любого газа можно определять по численному значению его молекулярной массы μ из выражения:

$$R = 8314/\mu. \quad (\text{II-2})$$

В случае смеси нескольких идеальных газов физические свойства этой смеси зависят от свойств компонентов составляющих смесь.

Если состав газовой смеси задан в массовых долях, то

$$m_1 + m_2 + \dots + m_n = 1, \quad (\text{II-3})$$

где $m_i = M_i / M_{\text{см}}$ — массовая доля каждого компонента в смеси.

Если считать, что все компоненты смеси находятся под одинаковым давлением, равным давлению смеси, то общий объем, занимаемый смесью газов $V_{\text{см}}$, можно условно считать равным сумме парциальных объемов газов, входящих в смесь:

$$V_{\text{см}} = V_1 + V_2 + \dots + V_n. \quad (\text{II-4})$$

В инженерной практике состав газовой смеси часто задается в объемных долях:

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = 1, \quad (\text{II-5})$$

где $r_i = (V_i / V_{\text{см}})$ — условная объемная доля данного компонента в смеси при давлении, равном давлению смеси $p_{\text{см}}$ (V_i — парциальный объем данного компонента).

По заданному объемному составу нетрудно найти парциальные давления отдельных компонентов:

$$p_i = \frac{V_i}{V_{\text{см}}} p_{\text{см}} = r_i p_{\text{см}}. \quad (\text{II-6})$$

Пользуясь данными по объемному составу смеси, можно непосредственно найти плотность $\rho_{\text{см}}$ и кажущуюся молекулярную массу смеси $\mu_{\text{см}}$:

$$\rho_{\text{см}} = r_1 \rho_1 + r_2 \rho_2 + \dots + r_n \rho_n; \quad (\text{II-7})$$

$$\mu_{\text{см}} = r_1 \mu_1 + r_2 \mu_2 + \dots + r_n \mu_n. \quad (\text{II-8})$$

По известной кажущейся молекулярной массе можно найти газовую постоянную смеси:

$$R_{\text{см}} = \frac{8314}{\mu_{\text{см}}}. \quad (\text{II-9})$$

Между массовыми и объемными долями содержания газов и смеси существует следующая простая взаимосвязь:

$$m_i = \frac{M_i}{M_{\text{см}}} = \frac{\rho_i V_i}{\rho_{\text{см}} V_{\text{см}}} = \frac{\rho_i}{\rho_{\text{см}}} r_i. \quad (\text{II-10})$$

Большинство применяемых в технике газов — азот, кислород, водород, воздух, продукты сгорания и т. п. при давлениях выше атмосферного и при температурах выше $^{\circ}\text{C}$ по своим свойствам мало отличается от идеального газа. Это позволяет осуществлять расчеты для них по формулам и закономерностям, справедливым для идеального газа.

2. Термодинамические процессы изменения состояния газа

В соответствии с первым законом термодинамики подводимое к газу тепло расходуется частью на изменение внутренней энергии, частью на совершение работы:

$$dq = cdT = c_v dT + p dv. \quad (\text{II-11})$$

При этом в общем случае изменяется состояние газа, а следовательно, и все его параметры. Дифференцируя известное уравнение состояния газа $pv = RT$ по трем переменным, получим:

$$p dv + v dp = R dT. \quad (\text{II-12})$$

Преобразуя уравнение (II-11) и подставляя в него развернутое значение dT из уравнения (II-12), получим:

$$(c_v - c) p dv + (c_v - c) v dp + R p dv = 0$$

или

$$(c_v - c + R) p dv + (c_v - c) v dp = 0.$$

С учетом того, что $c_v + R = c_p$, находим:

$$(c_p - c) p dv + (c_v - c) v dp = 0.$$

Разделив все члены уравнения на величину $(c_v - c) pv$ и введя величину $n = \frac{c_p - c}{c_v - c}$, получим:

$$n \cdot \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0.$$

После интегрирования

$$\ln v^n + \ln p = \text{const}$$

и, следовательно:

$$pv^n = \text{const}. \quad (\text{II-13})$$

Полученное уравнение называется уравнением политропы, а величина n — показателем политропы. От численного значения n зависят условия протекания процесса. Вследствие этого политропный процесс является обобщающим процессом; другие термодинамические процессы можно рассматривать как частные случаи политропного процесса при определенных значениях n .

С помощью первого закона термодинамики и уравнения состояния можно детально исследовать протекание политропного процесса, установить зависимость между изменяющимися параметрами состояния, определить ра-

боту процесса, а также подводимое или отводимое тепло. Соотношение параметров в политропном процессе определяется на основании уравнения политропы и уравнения состояния. Из уравнения политропы $p_1 v_1^n = p_2 v_2^n$ следует, что

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^n \text{ или } \frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{n}}. \quad (\text{II-14})$$

Из уравнения состояния $pv = RT$, записанного для начального и конечного состояний, вытекает, что

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2 v_2}{p_1 v_1}.$$

Исключая из этого уравнения с помощью уравнения (II-14) сначала отношение давлений, а потом отношение объемов, получим:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{n-1}; \quad (\text{II-15})$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}. \quad (\text{II-16})$$

Для идеального газа изменение внутренней энергии Δu энтальпии Δi и энтропии Δs , являющихся параметрами состояния, не зависит от характера протекания процесса, т. е. от численного значения показателя политропы n .

В идеальном газе отсутствуют силы взаимодействия между молекулами, поэтому внутренняя энергия его не зависит от объема и давления $\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = 0$ и $\left(\frac{\partial u}{\partial p}\right)_T = 0$ и является функцией только температуры.

Изменение внутренней энергии определяется на основании выражений (I-7 б) и (I-8) и равно

$$du = c_v dT \text{ или } u_2 - u_1 = c_{vm} (T_2 - T_1) \text{ Дж/кг, } (\text{II-17})$$

где c_{vm} — средняя теплоемкость при $v = \text{const}$ в интервале температур T_1 и T_2 .

Энтальпия идеального газа, как это видно из выражения $i = u + pv = u + RT$, также является функцией температуры и не зависит от изменения объема и давления, т. е. $\left(\frac{\partial i}{\partial v}\right)_T = 0$ и $\left(\frac{\partial i}{\partial p}\right)_T = 0$.

Изменение энтальпии определяется на основании выражения (I-14 а) и равно

$$di = c_p dT \text{ или } i_2 - i_1 = c_{pm} (T_2 - T_1) \text{ Дж/кг,} \quad (\text{II-18})$$

где c_{pm} — средняя теплоемкость при $p = \text{const}$ в интервале температур T_1 и T_2 .

Изменение энтропии определяется из выражения

$$ds = \frac{dq}{T} = \frac{du + pdv}{T}. \quad (\text{II-19})$$

Учитывая, что для идеального газа $du = c_v dT$ и $pv = RT$, после интегрирования в пределах от состояния 1 до состояния 2 будем иметь:

$$s_2 - s_1 = c_{vm} \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{v_2}{v_1} \text{ Дж/(кг·К).} \quad (\text{II-20})$$

Работа политропного процесса определяется интегрированием общего выражения работы применительно к условиям политропного процесса:

$$l = \int_{v_1}^{v_2} p dv = \text{const} \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{v^n} = \text{const} \left| \frac{v^{-n+1}}{-n+1} \right|_{v_1}^{v_2}.$$

Подставляя развернутое значение $\text{const} = p_2 v_2^n = p_1 v_1^n$, получаем выражение для работы в виде

$$l = \frac{1}{n-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) \text{ Дж/кг} \quad (\text{II-21})$$

или, используя уравнение состояния $pv = RT$:

$$l = \frac{R}{n-1} (T_1 - T_2) \text{ Дж/кг.} \quad (\text{II-22})$$

При условии участия в процессе массы газа M полная работа будет равна $L = Ml$ Дж.

Тепло политропного процесса может быть определено с помощью первого закона термодинамики: $q = \Delta u + l$.

Подставляя вместо внутренней энергии и работы их значения из выражений (II-17) и (II-22), получим

$$q = c_{vm} (T_2 - T_1) + \frac{R}{n-1} (T_1 - T_2) \text{ Дж/кг.} \quad (\text{II-23})$$

В результате простых преобразований найдем:

$$q = c_{vm} \frac{n-k}{n-1} (T_2 - T_1) = c_n (T_2 - T_1) \text{ Дж/кг,} \quad (\text{II-24})$$

где $k = c_{pm}/c_{vm}$ — показатель адиабаты.

Для массы газа M полное тепло будет равно $Q = Mq$ Дж.

Величина $c_n = c_{vm} \frac{n-k}{n-1}$ называется теплоемкостью

политропного процесса. В зависимости от численного значения n она может изменять свою величину в широких пределах: от $-\infty$ до $+\infty$.

Энергетическая характеристика процесса показывает, как распределяется подводимое к газу тепло q .

Доля тепла, идущая на изменение внутренней энергии согласно выражениям (II-17) и (II-24), равна

$$\frac{\Delta u}{q} = \frac{n-1}{n-k} \quad (\text{II-25})$$

Доля тепла, идущая на совершение работы:

$$\frac{l}{q} = 1 - \frac{\Delta u}{q} = \frac{k-1}{k-n} \quad (\text{II-26})$$

Каждый политропный процесс, имеющий любое, но постоянное значение n и одну заданную точку, может быть изображен графически (рис. 5), построением кривой по точкам на основании уравнения политропы:

$$p_2 = p_1 \left(\frac{v_1}{v_2} \right)^n$$

Наоборот, если дано графическое изображение политропы, ее показатель n может быть определен по координатам двух любых точек:

$$\begin{aligned} n_1 v_1^n &= p_2 v_2^n; \\ \lg p_1 + n \lg v_1 &= \lg p_2 + n \lg v_2; \\ n &= \frac{\lg p_1 - \lg p_2}{\lg v_2 - \lg v_1} \end{aligned} \quad (\text{II-27})$$

Частными случаями политропного являются процессы: изобарный ($n=0$), изотермический ($n=1$), адиабатный ($n=k$), изохорный ($n=\infty$). Подставляя соответствующие значения n , можно получить рабочие формулы

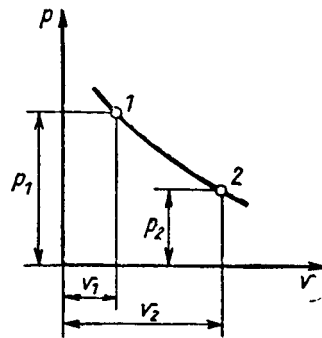


Рис. 5. Построение политропы в координатах $v-p$

для определения соотношения параметров, работы, тепла и другие характеристики соответствующего процесса.

Можно построить объединенную диаграмму политропных процессов, выходящих из начальной точки I для различных значений показателя политропы n в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ (рис. 6).

Изохора ($n=\pm\infty$) делит всю диаграмму на две части (рис. 6): правее лежат процессы расширения, левее процессы сжатия.

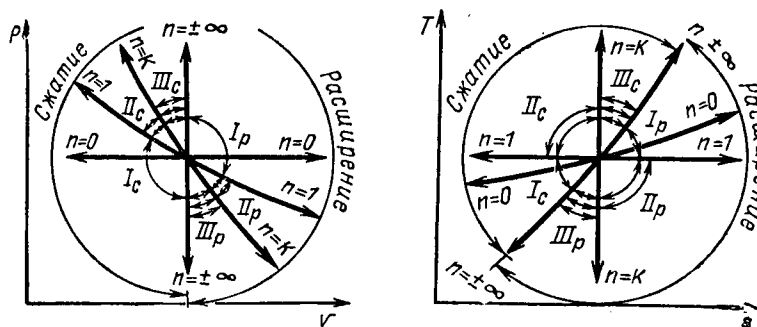


Рис. 6. Объединенная диаграмма политропных процессов:
а — в координатах v — p ; б — в координатах s — T

Адиабата ($n=k$) также делит диаграмму на две части: правее характеристики процессов, протекающих с подводом тепла, левее — процессов с отводом тепла.

В области I ($n=-\infty \div 1$) подводимое в процессах расширения тепло идет на увеличение внутренней энергии газа и на работу расширения.

В области II ($n=1 \div k$) работа расширения совершается как за счет подводимого тепла, так и за счет внутренней энергии.

В области III ($n=k \div \infty$) внутренняя энергия газа расходуется не только на совершение работы расширения, но и на отдачу тепла в окружающую среду.

Процессы сжатия, протекающие в тех же областях (I_c, II_c, III_c , идут с противоположными знаками тепла и работы.

3. Водяной пар

Наряду с различными газами широкое распространение в качестве рабочего тела получил водяной пар; иног-

да применяют и пары других веществ — ртути, масла, аммиака и т. п.

В технике водяной пар получают испарением воды при постоянном давлении в результате непрерывного подвода тепла.

Важнейшее свойство этого процесса заключается в том, что для каждого давления, при котором происхо-

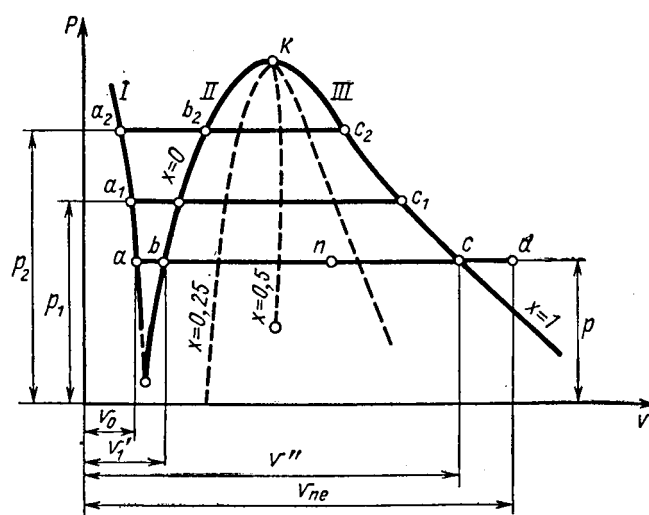


Рис. 7. Диаграмма парообразования в координатах $v-p$

дит получение пара, существует своя температура кипения, остающаяся постоянной в течение всего периода парообразования. С увеличением давления температура кипения возрастает.

Диаграмма парообразования (рис. 7) показывает, что процесс получения пара состоит из трех этапов: подогрева воды до температуры кипения (участок $a-b$), превращения воды в пар (участок $b-c$) и перегрева пара сверх температуры кипения (участок $c-d$).

Вследствие повышения температуры кипения с ростом давления разность удельных объемов кипящей и холодной воды увеличивается и точка b на диаграмме парообразования для более высоких давлений сдвигается вправо. Наоборот, вследствие уменьшения удельных объемов сухого насыщенного пара с ростом давления, не-

смотря на увеличение температуры, точка c на диаграмме парообразования для более высоких давлений сдвигается влево.

При критической температуре точки b и c совпадают, образуя точку k , характеризующую критическое состояние с параметрами $p_k=225,4$ ат и $T_k=374$ К.

Линию bk , являющуюся геометрическим местом точек b , отделяющую область воды от области паро-водяной смеси, называют нижней пограничной кривой. Линию ck , представляющую геометрическое место точек c , отделяющую область паро-водяной смеси от области перегретого пара, называют верхней пограничной кривой. Точки, лежащие на нижней пограничной кривой bk , соответствуют состоянию кипящей воды, на верхней пограничной кривой ck — сухого насыщенного пара.

Внутри кривой bkc находится область влажного пара, т. е. смеси сухого насыщенного пара с взвешенными капельками воды. Состояние пара в этой области характеризуют степенью сухости x , выражающей собой количество сухого насыщенного пара, содержащегося в 1 кг паро-водяной смеси. Величину $1-x$, выражающую количество воды в 1 кг паро-водяной смеси, называют влажностью пара. Графически степень сухости пара в какой-нибудь точке n может быть определена как отношение отрезков nb/bc . Для облегчения пользования диаграммой на ней наносят линии постоянной сухости $x=0,25$; $x=0,5$; $x=0,75$ и т. д.

Удельный объем влажного пара v_x находят суммированием объема сухого насыщенного пара v'' и объема воды v' :

$$v_x = xv'' + (1 - x)v' \text{ м}^3/\text{кг}. \quad (\text{II-28})$$

При невысоких давлениях [до 300 Н/см^2 (30 ат)] и умеренной влажности (до 20%) можно пользоваться приближенной формулой, пренебрегая незначительным объемом воды:

$$v_x \approx xv'' \text{ м}^3/\text{кг}. \quad (\text{II-29})$$

Плотность влажного пара есть величина обратная удельному объему:

$$\rho_x = \frac{1}{v_x} = \frac{1}{xv'' + (1 - x)v'} \approx \frac{\rho''}{x} \text{ кг/м}^3, \quad (\text{II-30})$$

где ρ'' — плотность сухого насыщенного пара.

Полное количество тепла, затраченное на получение перегретого пара, складывается из количеств тепла, расходуемых на всех трех стадиях процесса.

Тепло, идущее на подогрев воды от 0°C до температуры кипения q' , равно разности энтальпий кипящей воды (i') и воды при 0°C (i'_0). Пренебрегая незначительным значением энтальпии i'_0 , в практических расчетах обычно принимают

$$q = i' - i'_0 \approx i' \text{ Дж/кг.} \quad (\text{II-31})$$

Количество тепла r , необходимое для превращения 1 кг кипящей жидкости в сухой насыщенный пар, при постоянном давлении называют теплотой парообразования. Тепло r расходуется на изменение внутренней энергии, связанное с преодолением сил сцепления между молекулами (f Дж/кг), и работу расширения l_p :

$$r = f + l_p = f + p(v'' - v') \text{ Дж/кг.} \quad (\text{II-32})$$

Энтальпия сухого насыщенного пара, численно равная теплу, необходимому для его изобарного получения из воды температурой 0°C , равна

$$i'' = i' + r. \quad (\text{II-33})$$

Очевидно, что количество тепла, необходимое для получения влажного пара будет, меньше i'' и равно

$$i_x = i' + rx. \quad (\text{II-34})$$

Тепло, расходуемое на перегрев пара сверх температуры насыщения, определяется как разность энтальпий перегретого и сухого насыщенного пара:

$$q_n = i - i'' \text{ Дж/кг.} \quad (\text{II-35})$$

Таким образом, энтальпия перегретого пара, численно равна теплу, необходимому для его получения из воды $t = 273^\circ\text{K}$ при постоянном давлении:

$$i = i' + r + q_n \text{ Дж/кг.} \quad (\text{II-36})$$

Энтропия воды и пара отсчитывается также от условного нуля, за который принимают энтропию воды при 273 K (0°C).

Энтропию воды при температуре кипения находят путем интегрирования выражения (I-17) в температурных пределах ее подогрева:

$$s' = \int \frac{dq}{T} = \int_{273}^{T'} \frac{cdT}{T} = c \ln \frac{T'}{273} \text{ Дж/(кг.К)}. \quad (\text{II-37})$$

где c — средняя теплоемкость воды в интервале $(273 + T)$ К.

Приращение энтропии в процессе парообразования может быть также найдено интегрированием выражения (I-17) в пределах процесса парообразования:

$$s'' - s' = \int_0^r \frac{dq}{T} = \frac{r}{T'} \text{ Дж/(кг·К)}. \quad (\text{II-38})$$

Таким образом, полная энтропия сухого насыщенного пара равна

$$s'' = c \ln \frac{T'}{273} + \frac{r}{T'} \text{ Дж/(кг·К)}. \quad (\text{II-39})$$

Энтропия влажного пара меньше энтропии сухого насыщенного пара и может быть найдена из выражения:

$$s_x = c \ln \frac{T'}{273} + \frac{rx}{T'} \text{ Дж/(кг·К)}. \quad (\text{II-40})$$

Энтропию перегретого пара находят по формуле:

$$s = c \ln \frac{T'}{273} + \frac{r}{T'} + \int_{T'}^T \frac{c_p dT}{T} \text{ Дж/(кг·К)}, \quad (\text{II-41})$$

где c_p — теплоемкость перегретого пара.

Приращение энтропии в процессе перегрева пара

$$s - s'' = \int_{T'}^T \frac{c_p dT}{T} \quad \text{от } T' \text{ до } T \text{ Дж/(кг·К) находят по таб-$$

лицам.

Теплота парообразования r , приращение удельного объема в процессе парообразования $v'' - v'$, давление p и температура насыщения T_n связаны между собой функциональной зависимостью, выраженной уравнением Клапейрона — Клаузиуса:

$$T_n \frac{dp}{dT_n} = \frac{r}{v'' - v'}. \quad (\text{II-42})$$

Это уравнение было получено экспериментальным путем, однако может быть выведено и теоретически. Оно справедливо для процессов, идущих по линии насыщения, т. е. в условиях равновесия жидкости со своим паром.

Уравнение Клапейрона — Клаузиуса широко используют главным образом при определении объемов пара

v'' , так как величины r , v' , $T_{\text{н}}$, а также первые производные функции $p=f(T_{\text{н}})$ могут быть найдены с большой точностью экспериментальным путем.

Следует отметить, что уравнение Клапейрона — Клаузиуса применимо не только к процессу парообразования, но и ко всяким другим изменениям агрегатного состояния химически однородных веществ.

Система координат $s-T$, в которой площадь выражает собой тепло, затраченное на проведение процесса, позволяет весьма наглядно изобразить процесс парообразования. Начальная точка a процесса (рис. 8), соответствующая состоянию воды при $T_0=0^\circ\text{C}$ и $s_0=0$, расположена на оси ординат. Процесс подогрева воды до температуры кипения, сопровождающийся увеличением температуры и энтропии, выражается логарифмической кривой $a-b$ ($s=\ln \frac{T}{273}$). Площадь, расположенная под кривой $a-b$, эквивалентна количеству тепла q' , затраченному на проведение этого процесса.

Процесс парообразования, протекающий при постоянной температуре, выражается горизонтальной прямой $b-c$, а расположенная под ней площадь эквивалентна теплоте парообразования r .

Наконец, процесс перегрева пара, при котором температура снова начинает расти, выражается логарифмической кривой $c-d$ ($\Delta s = \int_{T''}^T \frac{c_p dT}{T}$). Расположенная под

кривой cd площадь эквивалентна количеству тепла, затраченному на процесс перегрева пара.

Полное количество тепла, затрачиваемое на весь процесс получения перегретого пара, эквивалентно площади, расположенной над кривой $a-b-c-d$.

Как и в координатах $v-p$, на диаграмме $s-T$ точки, лежащие под кривой bkc , соответствуют состоянию влажного пара, а правее и выше кривой kc — состоянию перегретого пара.

Диаграмма $s-T$ чрезвычайно наглядна. Например, она ясно показывает, что с увеличением давления теплота парообразования r уменьшается, а количество тепла q' , затрачиваемое на подогрев воды до температуры кипения, возрастает. Поэтому диаграмму $s-T$ широко используют для графического изображения и анализа различных термодинамических процессов и циклов.

Вследствие этого все расчеты по водяному пару ведут при помощи таблиц, составленных на основе экспериментальных данных.

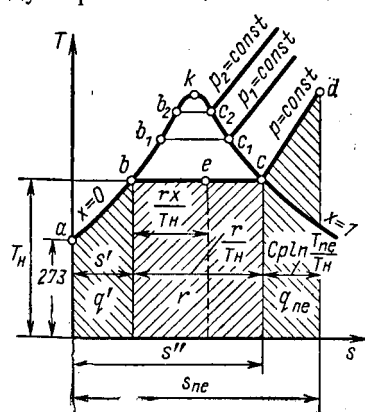


Рис. 8. Диаграмма парообразования в координатах $s-T$

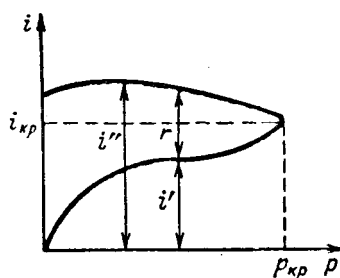


Рис. 9. Диаграмма парообразования в координатах $s-i$

Структура таблиц сухого насыщенного водяного пара имеет вид

←	p , ат
←	T' , °C
←	ν' , м²/кгс
→	ν'' , м²/кгс
←	γ'' , кгс/м³
←	i' , ккал/кгс
↕ 30 ат	i'' , ккал/кгс
↑	r , ккал/кгс
←	s' , ккал/кгс (·К)
↑	s'' , ккал/кгс (·К)

1) с ростом давления p повышается температура насыщения T' , удельный объем жидкости v' , удельный вес пара γ'' , энтальпия жидкости i' и энтропия жидкости s' ;

3) энтропия пара $i'' = i' + r$ сначала вследствие быстрого роста i' возрастает, а затем вследствие более быстрого убывания r уменьшается. Связь между энтальпи-

ей и давлением наглядно изображают в системе координат $p-i$ (рис. 9).

Из диаграммы $p-i$ видно, что вследствие снижения энтальпии i'' для получения пара высокого давления нужно затратить меньше тепла, чем для получения пара низкого давления. С другой стороны, расширение пара высокого давления мы можем эффективнее использовать в паровом двигателе. Вследствие этого применение пара высокого давления в энергетике имеет значительные термодинамические преимущества.

Состояние сухого насыщенного пара определяется одним параметром, по которому можно узнать все остальные из таблиц. Состояние перегретого пара и воды определяется двумя параметрами. При определенном давлении как перегретый пар, так и вода могут иметь различные температуры. Поэтому таблицы для воды и перегретого пара построены иначе.

t	$P=$		
	v	i	s
↓	↓	↓	↓

Для воды и перегретого пара удельный объем v , энтальпия i и энтропия s находятся на пересечении строки, указывающей температуру, и столбца, указывающего давление.

Диаграмма $s-T$ изображает процессы нагляднее, однако для расчетов неудобна, так как для определения количества тепла требуется вычисление площадей.

Пользоваться для расчетов диаграммой $s-i$, при построении которой по оси ординат откладывают не температуру, а энтальпию, гораздо удобнее. В этой диаграмме количество тепла, сообщаемое пару в изобарном процессе, определяется не площадью, а отрезком, выражающем разность ординат конечной и начальной точек процесса, благодаря чему расчеты, проводимые с помощью $s-i$ -диаграммы, оказываются значительно проще.

Диаграмма $s-i$ строится для 1 кг водяного пара на основе таблиц (рис. 10). Верхняя пограничная кривая $k-c$ делит ее на две части: верхняя часть соответствует области перегретого пара, нижняя — области влажного пара.

В области влажного пара изобары и изотермы совпадают и представляют собой слегка расходящиеся прямые;

их пересекают кривые постоянной сухости пара, выходящие из критической точки.

В области перегретого пара изобары и изотермы расходятся, изобары принимают логарифмический характер, а изотермы имеют форму слегка выпуклых кривых постепенно приближающихся к горизонталям.

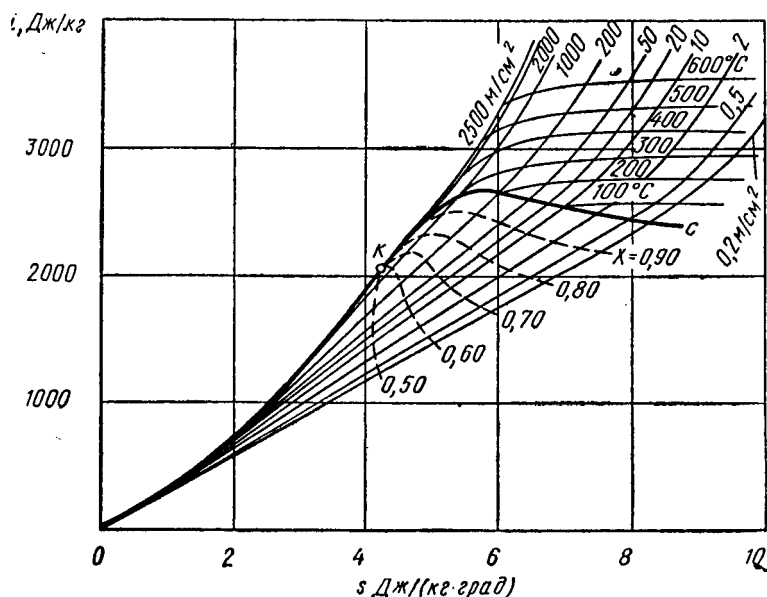


Рис. 10. Диаграмма парообразования в координатах $p-i$

В любой области диаграммы состояния пара определяют как точку пересечения двух кривых, характеризующих его параметры. Для сухого насыщенного пара одной из кривых является линия насыщения.

Для упрощения расчетов масштаб энтальпий в диаграмме $s-i$ принимают таким, что 1 мм соответствует 5 кДж/кг. В случае, если диаграмма $s-i$ построена в технической системе единиц при переходе от тепла, измеряемого в килокалориях, к работе, измеряемой в джоулях, необходимо учитывать величину соответствующего теплового эквивалента.

Изобарный процесс на диаграмме $s-i$ изображен линией $p=\text{const}$. Тепло, подводимое в этом процессе, определяют по диаграмме $s-i$ как разность энтальпий: $q=i_2-i_1$.

Работа изобарного процесса также может быть определена из диаграммы $s-i$: $l = p(v_2 - v_1)$.

Изохорный процесс располагается на диаграмме $s-i$ вдоль изохоры (линия $v = \text{const}$). Сообщаемое пару тепло определяют по разнице внутренних энергий. Ввиду того, что работа равна нулю:

$$q = u_2 - u_1 = (i_2 - p_2 v) - (i_1 - p_1 v),$$

все параметры могут быть найдены из диаграммы.

Изотермический процесс располагается вдоль изотермы ($T = \text{const}$). Тепло и работу определяют из выражения:

$$q = l = \int_1^2 T ds = T(s_2 - s_1);$$

все параметры находят из диаграммы.

Адиабатный процесс протекает при постоянной энтропии и потому изображается вертикальной прямой ($s = \text{const}$). Работу процесса определяют по разности внутренних энергий конечного и начального состояний:

$$l = u_1 - u_2 = (i_1 - p_1 v_1) - (i_2 - p_2 v_2);$$

все параметры могут быть взяты из диаграммы.

4. Влажный воздух

Влажный воздух представляет собой смесь сухого воздуха и водяного пара. Обычно парциальное давление водяного пара в воздухе не превышает 1 Н/см^2 ($0,1 \text{ ат}$) и, следовательно, он находится в перегретом состоянии. Поэтому без большой ошибки влажный воздух можно рассматривать как смесь идеальных газов.

По закону Дальтона давление влажного воздуха, измеряемого барометром, равно сумме парциальных давлений сухого воздуха p_v и водяного пара p_n :

$$p = p_v + p_n. \quad (\text{II-43})$$

При данной температуре наибольшим возможным давлением водяного пара является давление его насыщения p_n при $p_{\text{ат}} = 745 \text{ мм рт. ст.}$

$T, ^\circ\text{C}$	...	-20	0	20	40	60	80	100	120	140
$p_n,$ мм вод. ст.		13	65	238	752	2031	4829	10 128	10 128	10 128

Если парциальное давление пара в воздухе равно давлению насыщения p_n , влажный воздух называют насыщенным; он представляет собой смесь сухого воздуха с сухим насыщенным паром. Количество пара, содержащееся в 1 м^3 такого воздуха, равно плотности сухого насыщенного пара ρ'' .

При парциальных давлениях, меньших p_n , пар в воздухе находится в перегретом состоянии. Содержание его во влажном воздухе соответственно равно плотности перегретого пара ρ_n .

Количество пара, содержащегося в 1 м^3 влажного воздуха, называется абсолютной влажностью воздуха, а отношение этого количества к максимально возможному при данной температуре есть относительная влажность φ :

$$\varphi = \rho_n / \rho_n. \quad (\text{II-44})$$

Очевидно, что для сухого воздуха $\varphi=0$, а для насыщенного влагой $\varphi=1$. Из уравнений состояния $p_n v = RT$ и $\rho_n v'' = RT$ следует, что приближенно

$$\varphi = p_n / p_n. \quad (\text{II-45})$$

Давление перегретого пара p_n в воздухе всегда меньше давления насыщения p_n при той же температуре (рис. 11).

Охлаждая не насыщенный влагой воздух ($\varphi < 1$), при постоянном давлении можно довести его до состояния насыщения. Это произойдет в тот момент, когда температура воздуха станет равной температуре насыщения пара при данном его парциальном давлении. Такая температура называется температурой точки росы T_p , так как при дальнейшем охлаждении из воздуха начинают выделяться капельки влаги.

Уравнения состояния, написанные для сухого воздуха и пара, содержащихся во влажном воздухе, имеют вид:

$$\begin{aligned} p_v V &= p V_v = MRT; \\ p_n V &= p V_n = MRT, \end{aligned}$$

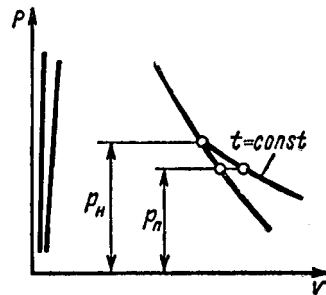


Рис. 11. Парциальное давление пара во влажном воздухе

где p_v и p_n — парциальные давления воздуха и пара;
 V_v и V_n — парциальные объемы воздуха и пара.

Из этих уравнений следует, что объемные доли сухого воздуха и пара во влажном воздухе соответственно равны

$$r_v = \frac{V_v}{V} = \frac{p_v}{p}; \quad r_n = \frac{V_n}{V} = \frac{p_n}{p}. \quad (\text{II-46})$$

Кажущуюся молекулярную массу влажного воздуха μ можно определить из выражения

$$\begin{aligned} \mu &= r_v \mu_v + r_n \mu_n = \mu_v \frac{p_v}{p} + \mu_n \frac{p_n}{p} = \mu_v \frac{p - \varphi p_n}{p} + \\ &+ \mu_n \frac{\varphi p_n}{p} = 28,95 - 10,95 \frac{\varphi p_n}{p}, \end{aligned} \quad (\text{II-47})$$

где μ_v — кажущаяся молекулярная масса сухого воздуха, равная 28,95;

μ_n — молекулярная масса водяного пара, равная 18.

Из полученного выражения следует, что влажный воздух всегда легче сухого.

По известной молекулярной массе нетрудно определить газовую постоянную влажного воздуха:

$$R = \frac{8314}{\mu} = \frac{8314}{28,95 - 10,95 \frac{\varphi p_n}{p}}. \quad (\text{II-48})$$

Плотность влажного воздуха определяется как сумма плотности сухого воздуха и водяного пара:

$$\rho = \rho_v + \rho_n.$$

Плотность пара определяется по относительной влажности φ :

$$\rho_n = \varphi \rho'',$$

где ρ'' — плотность сухого насыщенного пара при данном парциальном давлении, кг/м³.

Плотность сухого воздуха определяют по уравнению состояния

$$\rho_v = \frac{p_v}{RT} = \frac{p - p_n}{R_v T}, \quad (\text{II-49})$$

При измерении парциальных давлений в мм. рт. ст. и газовой постоянной воздуха $R = 288,5$ Дж/(кг·К) получим

$$\rho_v = \frac{10333 p_v}{760 \cdot 288,5 T} = 0,047 \frac{p - \varphi p_n}{T}, \quad (\text{II-50})$$

Следовательно, плотность влажного воздуха

$$\rho = 0,047 \frac{p - \varphi p_n}{T} + \varphi \rho'' \text{ кг/м}^3, \quad (\text{II-51})$$

где p_n — парциальное давление сухого насыщенного пара, Н/м².

В процессах сушки и испарения изменяется объем, температура, относительная влажность и другие параметры влажного воздуха, но количество сухого воздуха в нем остается неизменным. В связи с этим при расчетах широко применяют понятие влагосодержания d , представляющее собой количество водяного пара, приходящееся на 1 кг сухого воздуха или на $1+d$ кг влажного воздуха.

Влагосодержание и относительная влажность связаны между собой следующим образом:

$$d = \frac{M_n}{M_v} = \frac{\rho_n V}{\rho_v V} = \frac{\rho_n}{\rho_v},$$

но:

$$\rho_n = p_n / R_n T; \quad \rho_v = p_v / R_v T; \quad p_n = \varphi p_n;$$

следовательно:

$$d = \frac{\varphi p_n}{p - \varphi p_n} \cdot \frac{R_v}{R_n} = 0,622 \frac{\varphi p_n}{p - \varphi p_n}, \quad (\text{II-52})$$

где R_v — газовая постоянная воздуха, $R_v = 287,4 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$;

R_n — газовая постоянная водяного пара, $R_n = 461 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$.

Энтальпия влажного воздуха, отнесенная к 1 кг сухого воздуха или к $1+d$ кг влажного воздуха, равна

$$i = i_v + i_n d. \quad (\text{II-53})$$

Принимая массовую теплоемкость сухого воздуха $c_p = 1 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ и энтальпию пара $i_n = 2480 + 1,96 T_n$ (по эмпирической формуле), получим:

$$i = T_n + (2480 + 1,96 T_n) d \text{ Дж/кг}. \quad (\text{II-54})$$

При расчетах сушки и увлажнения широко используют $d-i$ диаграмму, предложенную Л. К. Рамзиным, построенную для удобства пользования в косоугольной системе координат с углом между осями 135° (рис. 12).

В диаграмме $d-i$ по вертикальной оси отложены энтальпии 1 кг сухого воздуха, т. е. энтальпии $1+d$ кг влажного воздуха, а по наклонной оси — влагосодержания d ,

снесенные на вспомогательную ось.

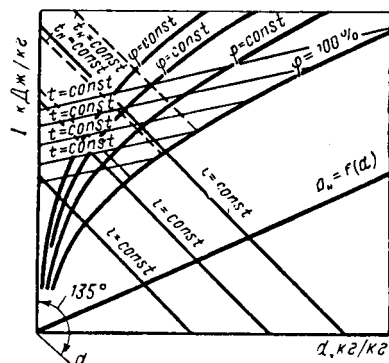


Рис. 12. $d-i$ диаграмма для влажного воздуха

Кроме линий постоянного влагосодержания $d = \text{const}$ (вертикали) и линий постоянной энтальпии $i = \text{const}$ (прямые линии, наклоненные под углом 45°), на диаграмме $d-i$ нанесены линии постоянной температуры $t = \text{const}$ (наклонные прямые) и линии постоянной относительной влажности $\phi = \text{const}$, представля-

ющие собой пучек расходящихся кривых. На диаграмме нанесена также линия $p_w = f(d)$.

Каждая точка на диаграмме соответствует определенному состоянию влажного воздуха, при барометрическом давлении $p_{\text{ат}} = 745$ мм рт. ст.

С помощью диаграммы $d-i$ для каждого состояния влажного воздуха можно определить точку росы, т. е. температуру, при которой воздух станет насыщенным. Для этого нужно из точки (см. рис. 12), соответствующей заданному состоянию, провести вертикаль до пересечения с кривой насыщения $\phi = 100\%$. Изотерма, проходящая в полученную точку пересечения, покажет искомую температуру точки росы. Продолжая вертикаль дальше, можно определить парциальное давление пара, соответствующее заданному влагосодержанию.

Процесс нагрева воздуха изображается в $d-i$ диаграмме вертикальной прямой $d = \text{const}$, так как при этом процесс влагосодержания воздуха не изменяется.

Количество тепла, сообщенного воздуху может быть определено как разность энтальпий конечного и начального состояния воздуха: $q = i_2 - i_1$.

Процесс контактной сушки материала горячим воздухом на диаграмме $d-i$ изображается наклонной прямой $i = \text{const}$. Это объясняется тем, что в процессе тепло- и

влагообмена тепло, отданное горячим воздухом материалу, возвращается воздуху обратно в виде испаренной влаги.

Количество влаги d , поглощенной воздухом в процессе сушки, определяют по увеличению влагосодержания воздуха:

$$d = d_2 - d_1 .$$

Процесс насыщения воздуха влагой целесообразно вести только для состояния его насыщения, так как при дальнейшем охлаждении воздуха влага будет выделяться и осаждаться на высушиваемом материале в виде росы.

Все необходимые данные для расчета процессов нагрева и сушки берут непосредственно из диаграммы $d-i$.

Г л а в а III

ТЕРМОДИНАМИКА ГАЗОВОГО ПОТОКА

В инженерной практике большое значение имеют процессы, связанные с движением рабочего тела. В этом случае в уравнение баланса энергии должна вводиться и кинетическая энергия потока, играющая иногда решающую роль.

1. Первый закон термодинамики для потока газа

Рассмотрим движение единицы массы газа (1 кг) через систему, состоящую из агрегата для получения работы, подводящего и отводящего трубопровода (рис. 13). В общем случае к агрегату подводится тепло q , частично превращающееся в работу.

Для рассматриваемой нами системы можно применить первый закон термодинамики в общем виде:

$$q = u_2 - u_1 + l.$$

В этом выражении $u_2 - u_1$ представляет собой изменение внутренней энергии газа при проходе через систему, которое полностью определяется состоянием газа на входе в систему и на выходе из нее.

Что касается работы l расширения газа, то она состоит из ряда слагаемых:

а) техническая работа l_t , т. е. работа, получаемая в агрегате, в результате движения поршня или вращения рабочего колеса, которую мы можем использовать по своему усмотрению. В случае, если агрегат представляет собой компрессор или насос, техническая работа отрицательна, так как затрачивается на их привод;

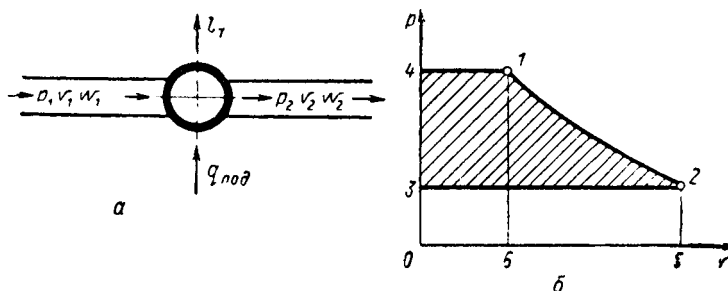


Рис. 13. Термодинамическая система с агрегатом для получения технической работы:

а — схема; б — изображение процесса в системе координат $v-p$

б) работа вытеснения, определяющаяся энергией, затрачиваемой на ввод рабочего тела в систему и выход из нее. При выходе газа из системы преодолевается давление выхода p_2 и, следовательно, работа, совершаемая газом, равна

$$l_2 = p_2 F_2 x_2 = p_2 v_2 \text{ Дж/кг,}$$

где F_2 — сечение выходного трубопровода, м^2 ;
 v_2 — удельный объем 1 кг газа при условиях выхода, $\text{м}^3/\text{кг}$;
 x_2 — путь, проходимый газом, м.

При входе газа в систему работа входа производится за счет внешнего источника (парового котла или компрессора) и поэтому является отрицательной:

$$l_1 = -p_1 F_1 x_1 = -p_1 v_1 \text{ Дж/кг,}$$

где F_1 — сечение входного трубопровода, м^2 ;
 v_1 — удельный объем 1 кг газа при входе, $\text{м}^3/\text{кг}$;
 x_1 — проходимый путь, м.

Таким образом, результирующая работа вытеснения равна

$$l_2 - l_1 = p_2 v_2 - p_1 v_1 \text{ Дж/кг;}$$

в) работа, затрачиваемая на увеличение кинетической энергии, зависит от скоростей входа газа в систему w_1 и выхода из нее w_2 :

$$l_{\text{кин}} = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \text{ Дж/кг};$$

г) работа $l_{\text{тр}}$, затрачиваемая на преодоление сил трения, превращающаяся вследствие диссипации в тепло. Таким образом, работа расширения равна

$$l = l_{\tau} + (p_2 v_2 - p_1 v_1) + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + l_{\text{тр}} \text{ Дж/кг} \quad (\text{III-1})$$

или в дифференциальном виде

$$p dv = dl_{\tau} + d(pv) + w dw + dl_{\text{тр}} \text{ Дж.} \quad (\text{III-2})$$

Количество тепла, подводимое к агрегату, складывается в общем случае из двух частей — тепла, подводимого извне, и тепла, подводимого изнутри $q_{\text{тр}}$, вследствие превращения в тепло работы трения.

В общем виде первый закон термодинамики для потока газа будет выражаться следующим образом:

$$q + q_{\text{тр}} = u_2 - u_1 + l_{\text{тр}} + (p_2 v_2 - p_1 v_1) + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + l_{\text{тр}} \text{ Дж/кг} \quad (\text{III-3})$$

или в дифференциальной форме

$$dq + dq_{\text{тр}} = du + dl_{\tau} + d(pv) + w dw + dl_{\text{тр}} \text{ Дж/кг.} \quad (\text{III-4})$$

Принимая во внимание $q_{\text{тр}} = l_{\text{тр}}$ и $u + pv = i$, будем иметь

$$q = i_2 - i_1 + l_{\tau} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \text{ Дж/кг} \quad (\text{III-5})$$

или в дифференциальной форме

$$dq = di + dl_{\tau} + w dw. \quad (\text{III-6})$$

Тепло, подводимое к потоку рабочего тела извне, расходуется на изменение энтальпии рабочего тела, производство технической работы и изменение кинетической энергии.

Следует подчеркнуть, что в выражение первого закона термодинамики не входит ни работа трения, ни тепло трения, что значительно упрощает расчеты, так как не требует их определения.

Кинетическую энергию в принципе можно полностью превратить в работу, поэтому величину

$$l_0 = l_{\tau} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \text{ Дж/кг} \quad (\text{III-7})$$

называют располагаемой работой.

Из выражения (III-3) следует, что

$$\begin{aligned} l_0 &= q - (u_2 - u_1) + p_1 v_1 - p_2 v_2 = \int_{v_1}^{v_2} p dv + p_1 v_1 - p_2 v_2 = \\ &= \int_{p_2}^{p_1} v dp \text{ Дж/кг.} \end{aligned} \quad (\text{III-8})$$

Изображая полученное выражение графически (рис. 13, б), можно видеть, что располагаемая работа выражается площадью 1—2—3—4—1, являющейся алгебраической суммой трех площадей: 1—2—5—6—1, выражающей полную работу расширения газа $\int_{v_1}^{v_2} p dv$; 1—6—0—4—1, выражающей работу входа $p_1 v_1$, и площади 2—5—0—3—2, выражающей работу выхода $p_2 v_2$.

В процессе, происходящем без теплообмена ($q=0$), располагаемая работа эквивалентна изменению энтальпии:

$$l_0 = -(i_2 - i_1) \text{ Дж/кг.} \quad (\text{III-9})$$

Если техническая работа не совершается и теплообмен отсутствует ($q=0$), то изменение кинетической энергии газа эквивалентно изменению энтальпии:

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = -(i_2 - i_1) \text{ Дж/кг.} \quad (\text{III-10})$$

Из уравнения (III-2) следует, что работа расширения равна

$$p dv = dl_{\tau} + p dv + v dp + w dw + dl_{\tau p},$$

откуда следует, что

$$w dw = -dl_{\tau} - v dp - dl_{\tau p}. \quad (\text{III-11})$$

Для случая, когда технической работы не совершается, т. е. $dl_{\tau}=0$, и работа трения не учитывается ($dl_{\tau p}=0$), будем иметь

$$w dw = -v dp. \quad (\text{III-12})$$

При интегрировании в пределах от состояния 1 до состояния 2 получим

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = - \int_{p_1}^{p_2} v dp \text{ Дж/кг,} \quad (\text{III-13})$$

Полученное уравнение (III-13) показывает, что в этом случае скорость газа увеличивается только при понижении давления.

При адиабатном течении газа ($q=0$) и отсутствии технической работы ($l_t=0$), как показывает выражение (III-5), сумма кинетической энергии и энтальпии газа не изменяется:

$$i + \frac{w^2}{2} = \text{const.} \quad (\text{III-14})$$

Если представить себе, что поток полностью заторможен, то его кинетическая энергия полностью перейдет в энтальпию, которая в этом случае достигнет своего максимума, называемого энтальпией торможения:

$$i_t = c_p T + \frac{w^2}{2}. \quad (\text{III-15})$$

Разделив все члены этого уравнения на c_p , получим

$$T_t = T + \frac{w^2}{2c_p} \quad (\text{III-16})$$

Величину T_t , являющуюся суммой термодинамической температуры газа и динамического повышения температуры $w^2/2c_p$, называют температурой торможения.

Это явление наблюдается в случае набегания потока на препятствие и может служить источником возможных ошибок при тепловых измерениях, особенно при высоких скоростях газового потока.

2. Истечение газа из цилиндрического или сужающегося сопла

Преобразование потенциальной энергии рабочего тела в кинетическую и получение потоков газа или пара движущихся с высокой скоростью, являются одной из актуальных задач современной техники.

Этот процесс осуществляется в соплах, представляющих собой короткие насадки постоянного или переменного сечения.

При движении рабочего тела по такому соплу не совершается никакой технической работы, теплообмен между газом и стенками также практически отсутствует и поэтому уравнение первого закона термодинамики пишется в форме (III-10), из которого нетрудно получить выражение для определения выходной скорости:

$$w_2 = w_1 + \sqrt{2(i_1 - i_2)}. \quad (\text{III-17})$$

Пренебрегая величиной скорости входа, обычно незначительной, получим

$$w_2 = 1,41 \sqrt{i_1 - i_2}, \quad (\text{III-18})$$

где i_1 и i_2 — энтальпия газа на входе и выходе из сопла, Дж/кг.

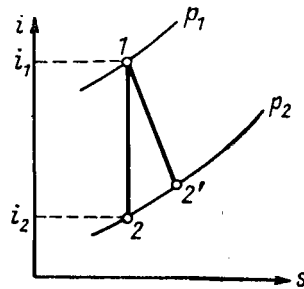


Рис. 14. Процесс истечения в координатах $s-i$

Перепад тепла $i_1 - i_2 = h$ может быть определен непосредственно из диаграммы $s-i$, на которой процесс обратимого адиабатного истечения будет изображаться линией $1-2$ (рис. 14).

Вследствие трения о стенки, завихрений в канале и других причин в действительности процесс будет идти не по адиабате $1-2$, а по политропе $1-2'$ с подводом тепла за счет тепла трения и соответствующим увеличением энтропии. В результате при той же разности давлений $p_1 - p_2$ фактический перепад тепла, а следовательно, и скорость истечения оказываются меньше.

Это учитывается введением в формулу коэффициента скорости φ , который обычно оказывается близким к 0,95:

$$w_2 = 1,41 \varphi \sqrt{i_1 - i_2}. \quad (\text{III-19})$$

При замере давлений p_1 и p_2 на входе и выходе из сопла оказывается более удобным определять скорость истечения непосредственно через эти давления. Заменяя в уравнении (III-3) изменение внутренней энергии $u_2 - u_1$ эквивалентной ей в условиях адиабатного процесса работой расширения l , при $q=0$, $l_T=0$ и $w_1 \approx 0$, получим

$$\frac{\omega_2^2}{2} = \frac{1}{k-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2) + (p_1 v_1 - p_2 v_2) = \frac{k}{k-1} (p_1 v_1 - p_2 v_2). \quad (\text{III-20})$$

После элементарных преобразований, учитывая, что в адиабатном процессе $\frac{v_2}{v_1} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}}$, получим

$$\frac{\omega_2^2}{2} = \frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right],$$

откуда скорость истечения

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{k-1} p_1 v_1 \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \right]} \text{ м/с.} \quad (\text{III-21})$$

Могут быть приняты следующие численные значения k : для одноатомного идеального газа 1,67; для двухатомного 1,4; для трех- и многоатомного 1,29.

Графически адиабатный процесс истечения газа или пара в системе координат v — p изображается линией 1—2 (см. рис. 13). Получаемая на выходе из сопла кинетическая энергия, в соответствии с выражением (III-13), будет эквивалентна заштрихованной площади.

Зная скорость истечения, нетрудно определить секундный массовый расход газа из выражения

$$M = f \omega_2 / v_2 \text{ кг/с,} \quad (\text{III-22})$$

где f_2 — площадь поперечного сечения сопла;

v_2 — удельный объем газа при условиях выхода,

$$v_2 = v_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Подставляя в выражение (III-22) развернутые значения скорости истечения ω_2 и удельного объема v_2 , получим

$$M = f_2 \sqrt{\frac{2k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{v_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k+1}{k}} \right]} \text{ кг/с.} \quad (\text{III-23})$$

Исследование выражения (III-23) показывает, что при изменении p_2/p_1 в интервале от 1 до 0 расход M сначала увеличивается, проходит через максимум, а потом начинает уменьшаться. В крайних точках при $\frac{p_2}{p_1} = 1$ и $\frac{p_2}{p_1} = 0$, как видно из выражения (III-23), величина расхода обращается в нуль (рис. 15).

Чтобы найти максимум расхода $M_{\max}$, необходимо найти максимум выражения, стоящего в квадратных скобках. Для этого следует взять первую производную от этого выражения по p_2/p_1 и приравнять ее нулю:

$$\frac{d \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}{d \left(\frac{p_2}{p_1} \right)} = \frac{2}{k} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}-1} - \frac{k+1}{k} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}-1} = 0;$$

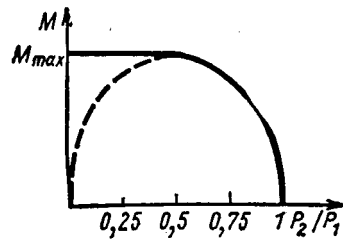


Рис. 15. Кривая изменения расхода газа с изменением давления окружающей среды

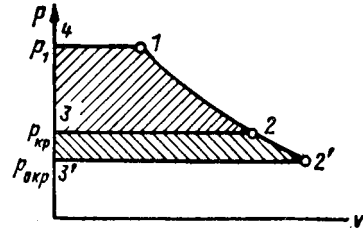


Рис. 16. Процесс истечения газа в окружающую среду при давлении $p_{\text{окр}} < p_{\text{кр}}$ в координатах $v-p$

отсюда следует:

$$\frac{2}{k} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{2}{k}-1} = \frac{k+1}{k} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{k}} \quad \text{или} \quad \frac{2}{k+1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Таким образом, $M = M_{\max}$ при

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)_{\text{кр}} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}}. \quad (\text{III-24})$$

Это отношение давлений принято называть критическим, а соответствующие ему давление и скорость истечения — критическим давлением $p_{\text{кр}}$ и критической скоростью $w_{\text{кр}}$.

Как видно из выражения (III-24), критическое отношение давлений зависит только от физических свойств рабочего тела и для двухатомных газов, перегретого водяного пара и сухого насыщенного водяного пара k и $\left(\frac{p_2}{p_1} \right)_{\text{кр}}$ соответственно равны: 1,4 и 0,528; 1,3 и 0,546 и 1,135 и 0,577.

Подставив в выражения (III-21) и (III-23) значение критического отношения давлений из выражения

(III-24), выполнив необходимые преобразования, можно получить формулы для вычисления критической скорости и максимального массового расхода:

$$w_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} p_1 u_1} \text{ м/с;} \quad (\text{III-25})$$

$$M_{\max} = f \sqrt{\frac{2k}{k+1} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}} \frac{p_1}{u_1}} \text{ кг/с,} \quad (\text{III-26})$$

Проведенные опыты однако показывают, что если для правой части кривой (рис. 15) теория подтверждается экспериментальными данными, то при уменьшении отношения давлений p_2/p_1 ниже критического значения расход не убывает, а остается постоянным, равным максимальному.

По гипотезе Сен-Венана, полностью подтверждающейся опытом, это объясняется тем, что при давлении окружающей среды $p_{окр}$ ниже критического в устье сопла устанавливается давление, равное критическому, которое остается постоянным при всех значениях $p_{окр} < p_{кр}$. Этому постоянному давлению соответствует постоянная критическая скорость $w_{кр}$ и постоянный, максимальный расход газа $M_{\max}$.

Таким образом, при истечении рабочего тела из цилиндрического или сужающегося сопла могут быть два случая:

1. Давление окружающей среды больше критического ($p_{окр} > p_{кр}$). При этом в сопле происходит полное расширение газа до давления $p_2 = p_{окр}$. Скорость истечения газа меньше критической, а расход газа меньше максимального. Численные значения их определяются по формулам (III-21) и (III-23), в которые подставляется давление $p_2 = p_{окр}$. Кинетическая энергия эквивалентна заштрихованной площади на рис. 13, б. Выходное сечение сопла определяют на основании заданного массового расхода по формуле (III-22).

2. Давление окружающей среды меньше критического ($p_{окр} < p_{кр}$). При этом расширение в сопле будет неполным, так как в устье сопла устанавливается критическое давление $p_{кр} > p_{окр}$. В этом случае скорость истечения будет равна критической скорости, а расход — максимальному расходу $M_{\max}$, численные значения которых могут быть определены из выражений (III-25)

и (III-26). Вследствие неполного расширения газа потенциальная энергия переходит в кинетическую не полностью, а только в пределах перепада давлений $p_1 - p_{кр}$ (см. рис. 16). Оставшаяся неиспользованной потенциальная энергия, соответствующая перепаду давления $p_{кр} - p_{окр}$, расходуется вне пределов сопла на перемешивание вещества вытекающей струи с веществом окружающей среды. Выходное сечение сопла определяют при заданном массовом расходе m по формуле

$$f_{вых} = \frac{Mv_{кр}}{w_{кр}} \text{ м}^2. \quad (\text{III-27})$$

Физический смысл критической скорости выявляется при выражении ее через критические параметры:

$$w_{кр} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} p_1 v_1} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_1} \text{ м/с}. \quad (\text{III-28})$$

Из условий адиабатного процесса и выражения (III-24) следует:

$$\frac{T_{кр}}{T_1} = \left(\frac{p_{кр}}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \frac{2}{k+1},$$

откуда

$$T_1 = T_{кр} \frac{k+1}{2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (III-28), получим хорошо известное в физике выражение для скорости звука a :

$$w_{кр} = \sqrt{kRT_{кр}} = a \text{ м/с}. \quad (\text{III-29})$$

Таким образом, критическая скорость истечения равна скорости распространения звука в данном рабочем теле.

3. Влияние профиля сопла на процесс истечения. Сопло Лаваля

Уравнение постоянства расхода по длине сопла любого профиля имеет вид

$$\frac{fw}{v} = \text{const}, \quad (\text{III-30})$$

После логарифмирования и дифференцирования этого выражения получим

$$\frac{df}{f} + \frac{d\omega}{\omega} - \frac{dv}{v} = 0. \quad (\text{III-31})$$

Для адиабатного процесса истечения связь между давлением и объемом описывается уравнением адиабаты

$$pv^k = \text{const.}$$

После дифференцирования уравнение принимает вид

$$kpv^{k-1} dv + v^k dp = 0.$$

Разделив все члены этого уравнения на kpv^k , получим

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{k} \cdot \frac{dp}{p}.$$

Подставляя вместо $\frac{dp}{p}$ его значение из выражения (III-12), найдем

$$\frac{dv}{v} = \frac{\omega d\omega}{kpv} = \frac{\omega d\omega}{a^2}.$$

где $a = \sqrt{k'RT} = \sqrt{kpv}$ — скорость звука в данной среде*. Заменяя в уравнении (III-31) dv/v полученным значением и проводя простые преобразования, получим

$$\frac{df}{f} = (Ma^2 - 1) \frac{d\omega}{\omega}, \quad (\text{III-32})$$

где $Ma\xi = \omega/a$ — число Маха, представляющее собой отношение скорости газа к скорости звука в данной среде.

Полученное выражение позволяет проанализировать влияние профиля канала на процесс истечения.

В дозвуковой области ($Ma < 1$) при сужении сопла ($df < 0$) скорость газа растет ($d\omega > 0$), а при расширении сопла ($df > 0$) уменьшается ($d\omega < 0$).

В сверхзвуковой области ($Ma > 1$), при расширении сопла ($df > 0$) скорость газа растет ($d\omega > 0$), а при сужении сопла ($df < 0$) уменьшается ($d\omega < 0$).

Таким образом, чтобы скорость газа в сопле непрерывно возрастала, в дозвуковой области необходим

* По формуле (III-29).

сужающийся профиль сопла, а в сверхзвуковой области — расширяющийся.

Сопло такой формы было впервые предложено шведским инженером Лавалем (рис. 17, а). Оно позволяет получить сверхкритическую (сверхзвуковую) скорость истечения и следовательно, полезно использовать для превращения в кинетическую всю потенциальную энергию, соответствующую полному перепаду давлений

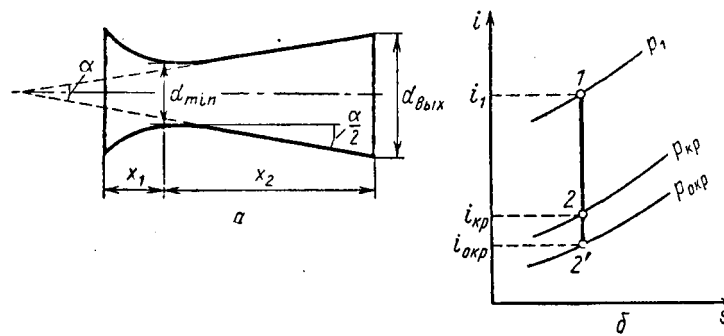


Рис. 17. Сопло Лавала

$p_1—p_{окр}$ и полному перепаду энтальпий $i_1—i_{окр}$ вместо перепада энтальпий $i_1—i_{кр}$ в цилиндрическом или сужающемся сопле (рис. 17, б). При определении действительной скорости истечения, как и в случае цилиндрического сопла, нужно учитывать потери в сопле введением скоростного коэффициента φ .

Расчет сопла Лавала сводится в основном к определению минимального сечения f_{min} , выходного сечения $f_{вых}$ и длины диффузора при заданном расходе газа M (по массе).

Минимальное сечение сопла f_{min} определяют, исходя из критической скорости $w_{кр}$ и удельного объема $v_{кр}$, соответствующего критическим условиям, которые находят по приведенным выше формулам:

$$f_{min} = \frac{M v_{кр}}{w_{кр}} \text{ м}^2. \quad (\text{III-33})$$

Выходное сечение диффузора определяется по выходной скорости $w_{вых}$ и удельному объему $v_{вых}$, соответствующему условиям выхода

$$f_{\text{вых}} = \frac{Mv_{\text{вых}}}{w_{\text{вых}}}, \quad (\text{III-34})$$

Длину расширяющейся части сопла (диффузора) определяют по геометрическим соотношениям:

$$x_2 = \frac{d_{\text{вых}} - d_{\text{min}}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \quad (\text{III-35})$$

где $d_{\text{вых}}$ и d_{min} — диаметры выходного и минимального сечений сопла.

Угол раскрытия диффузора α не должен превышать $10\text{--}12^\circ$. В противном случае наблюдается отрыв струи от стенок диффузора и нарушение нормальной работы диффузора. Сопло с углом раскрытия диффузора $>14^\circ$ начинает работать как обычное сужающееся.

Длину сужающейся части сопла x_1 обычно принимают небольшой, приблизительно равной диаметру выходного сечения сопла.

4. Дросселирование газов и паров

Дросселированием или мятием называется процесс, происходящий при прохождении газа или пара через местное сужение в трубопроводе (рис. 18, а), всегда сопровождаемый падением давления.

Вследствие отсутствия подвода тепла извне ($q=0$) и технической работы ($l_T=0$) уравнение первого закона термодинамики для потока (III-5) выражают в этом случае следующим образом:

$$i_1 - i_2 = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}.$$

Если скорости потока по обе стороны препятствия одинаковы или мало отличаются друг от друга ($w_2 \approx w_1$), то $i_1 \approx i_2$.

В результате дросселирования энтальпия рабочего тела не изменяется, хотя в ходе самого процесса, как показывают кривые рис. 18, а, как скорость, так и энтальпия претерпевают временные изменения.

Из равенства энтальпий непосредственно вытекает, что для идеального газа температура газа сохраняет постоянную величину: $T_1 = T_2$.

Несмотря на постоянство энтальпии и температуры, после прохождения местного сужения состояние газа меняется, так как часть энергии газа расходуется на вихреобразование и трение и превращается в тепло.

Процесс дросселирования является типичным необратимым процессом, протекая без подвода тепла извне, он, тем не менее, сопровождается увеличением энтропии в связи с возникновением тепла диссипации.

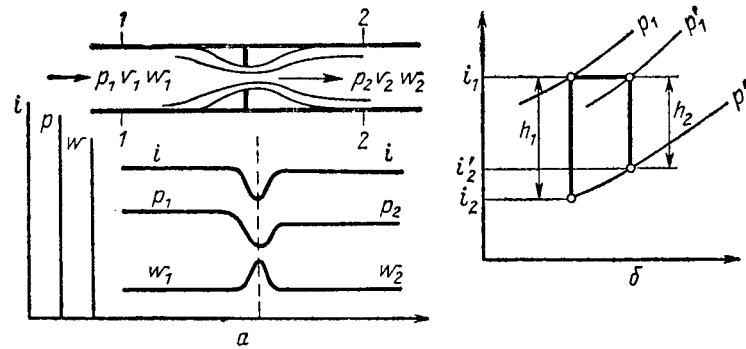


Рис. 18. Изменение параметров газа при дросселировании

Несмотря на постоянство энтальпии в процессе дросселирования, вследствие возрастания энтропии происходит снижение работоспособности рабочего тела, которая характеризуется величиной располагаемого перепада энтальпии $h = \Delta i$. Как следует из диаграммы $s-i$ (рис. 18, б), предварительное дросселирование водяного пара от давления p_1 до p'_1 значительно снижает располагаемый тепловой перепад ($h_2 < h_1$) при расширении до того же самого давления p_2 . В отличие от идеального газа в реальных газах и парах температура в результате процесса дросселирования не остается постоянной, а может уменьшаться или увеличиваться.

В результате преобразований дифференциальных уравнений, связывающих между собой величины i, s, p и T для реального газа, подчиняющегося уравнению Ван-дер-Ваальса, для процесса дросселирования получена следующая зависимость:

$$dT = \frac{\frac{2a}{RT} - b}{c_p} dp, \quad (\text{III-36})$$

где a и b — константы, известные для каждого газа.

Из выражения (III-36) следует, что температура газа при дросселировании будет оставаться постоянной ($dT=0$) в том случае, если

$$2a/RT = b \quad \text{или} \quad 2a/Rb = T.$$

Эта температура получила название температуры инверсии ($T_{\text{инв}}$).

Если температура газа $T > T_{\text{инв}}$ и, следовательно, $\frac{2a}{RT} < b$, то $dT > 0$, и температура газа при дросселировании возрастает, так как $dp < 0$.

Если температура газа $T < T_{\text{инв}}$ и, следовательно, $\frac{2a}{RT} > b$, то $dT < 0$ и температура газа при дросселировании снижается.

Для большинства газов температура инверсии довольно высока ($t_{\text{инв}} \approx 600^\circ \text{C}$ и более), и поэтому в технике, как правило, дросселирование сопровождается понижением температуры рабочего тела. Например, падение температуры ΔT для воздуха и углекислого газа составляет соответственно 0,27 и 1,35 град/ат.

Это явление, известное под названием эффекта Джоуля—Томпсона, широко используют в холодильной технике.

5. Сжатие газа в компрессоре

Исследование процессов, протекающих при прохождении газа через идеальный компрессор, может быть осуществлено на основе уравнения первого закона термодинамики для потока газа. При этом надо иметь в виду, что работа в компрессоре не совершается, а затрачивается, тепло не подводится, а отводится, а направление потока газа обратно по отношению к указанному на рис. 13 (см. рис. 19).

С учетом сказанного уравнение первого закона термодинамики для поток газа (III-5) в применении к компрессору имеет следующий вид:

$$i_2 = i_1 - i_1 + q + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \text{ Дж/кг.} \quad (\text{III-37})$$

В большинстве случаев скорости входа w_1 и выхода w_2 одинаковы или мало отличаются друг от друга,

и уравнение первого закона термодинамики еще более упрощается:

$$l_T = i_2 - i_1 + q \text{ Дж/кг.} \quad (\text{III-38})$$

Выражение (III-38) показывает, что часть затрачиваемой в компрессоре технической работы идет на повышение энтальпии газа, а часть отводится в виде тепла в окружающую среду.

Величина затрачиваемой работы, выраженная через основные параметры состояния p и v , может быть определена из выражения (III-1), после подстановки в него вместо работы расширения

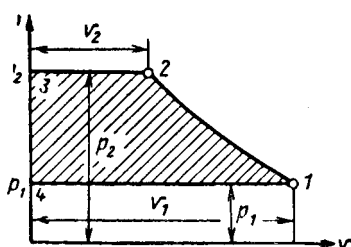


Рис. 19. Работа, затрачиваемая при сжатии газа в компрессоре

равновеликой ей работы сжатия $l_{\text{расш}} = -l_{\text{сж}}$:

$$l_T = -l_{\text{сж}} + p_1 v_1 - p_2 v_2 - \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2} - l_{\text{тр}} \text{ Дж/кг.} \quad (\text{III-39})$$

Пренебрегая разностью ω_1 и ω_2 и работой трения $l_{\text{тр}}$, получим

$$l_T = - \int_{v_1}^{v_2} p dv + p_1 v_1 - p_2 v_2 = - \int_{p_1}^{p_2} v dp \text{ Дж/кг.} \quad (\text{III-40})$$

Из выражения (III-40) вытекает, что затрачиваемая в идеальном компрессоре работа выражается графически площадью 1-2-3-4-1 (рис. 19).

В зависимости от характера процесса сжатия могут наблюдаться три различных случая.

Сжатие изотермическое $T = \text{const}$, $pv = p_1 v_1 = p_2 v_2 = \text{const}$. Удельная работа, затрачиваемая в компрессоре, по выражению (III-40) равна

$$\begin{aligned} l_{\text{из}} &= - \int_{p_1}^{p_2} v dp = - p_1 v_1 \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{p} dp = - p_1 v_1 \ln \frac{p_2}{p_1} = \\ &= - RT \ln \frac{v_1}{v_2} \text{ Дж/кг} \end{aligned} \quad (\text{III-41a})$$

Удельная работа, отнесенная к 1 м³ сжимаемого газа:

$$l'_{из} = \frac{l_{из}}{v_1} = -p_1 \ln \frac{p_2}{p_1} = -p_1 \ln \frac{v_1}{v_2} \text{ Дж/м}^3. \quad (\text{III-41б})$$

Отводимое тепло по формуле (III-38)

$$q = l_{из} - (i_2 - i_1) = l_{из} - [(u_2 + p_2 v_2) - (u_1 + p_1 v_1)] = l_{из}. \quad (\text{III-42})$$

Следовательно, для осуществления изотермического сжатия должно отводиться тепло, эквивалентное всей затраченной работе.

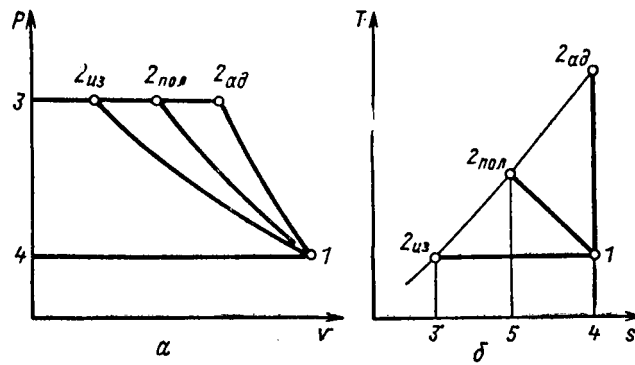


Рис. 20. Работа компрессора при различных процессах сжатия

Графически изотермическое сжатие изображается линией $1-2_{из}$ (рис. 20), затрачиваемая на сжатие работа — площадью $1-2_{из}-3-4-1$ в координатах $v-p$, а отводимое эквивалентное ей тепло — площадью $1-2_{из}-3-4-1$ в координатах $s-T$.

Сжатие адиабатное. Удельная работа, затрачиваемая в компрессоре по формулам (II-21) и (III-40), равна:

$$l_{ад} = -\frac{1}{k-1} (p_2 v_2 - p_1 v_1) - (p_2 v_2 - p_1 v_1) = -\frac{k}{k-1} (p_2 v_2 - p_1 v_1)$$

или

$$l_{ад} = -\frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left(\frac{p_2 v_2}{p_1 v_1} - 1 \right) = -\frac{k}{k-1} p_1 v_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \text{ Дж/кг}. \quad (\text{III-43a})$$

Удельная работа, отнесенная к 1 м³ сжимаемого газа:

$$l'_{ад} = -\frac{l_{ад}}{v_1} = -\frac{k}{k-1} p_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k-1}{k}} - 1 \right] \text{ Дж/м}^3. \quad (\text{III-43б})$$

По условиям адиабатного процесса, тепло, отводимое при сжатии, равно нулю и, следовательно, по формуле (III-38)

$$l_{ад} = i_2 - i_1 \text{ Дж/кг.} \quad (\text{III-44})$$

Графически адиабатный процесс сжатия изображается линией $1-2_{ад}$ (рис. 20), затрачиваемая на сжатие работа — площадью $1-2_{ад}-3-4-1$ в координатах $v-p$, а эквивалентное ей тепло — площадью $1-2_{ад}-2'_{из}-3-4-1$ в координатах $s-T$.

Сжатие политропное с отводом тепла. Из сравнения работы компрессора при изотермическом и адиабатном сжатии можно сделать вывод, что изотермическое сжатие наиболее выгодно, так как удельная работа, затрачиваемая в компрессоре, эквивалентная площади диаграммы, оказывается в этом случае наименьшей. Охлаждая цилиндр компрессора во время работы, мы приближаем процесс сжатия к изотермическому и тем самым способствуем повышению экономичности компрессора. Однако ограниченная поверхность охлаждения и невысокие значения коэффициентов теплопередачи не позволяют полностью отвести выделяющееся тепло, и процесс характеризуется политропой, расположенной между изотермой и адиабатой.

Удельная работа, затрачиваемая в компрессоре при политропном сжатии с отводом тепла, по аналогии с работой при адиабатном процессе сжатия равна

$$l_{пол} = -\frac{n}{n-1} p_1 v_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] \text{ Дж/кг.} \quad (\text{III-45a})$$

Удельная работа, отнесенная к 1 м³ сжимаемого газа:

$$l'_{пол} = -\frac{n}{n-1} p_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] \text{ Дж/м}^3, \quad (\text{III-45б})$$

где n — показатель политропы сжатия, численное значение которого для двухатомных газов лежит в пределах $1 \div 1,4$.

Величина отводимого тепла

$$q = l_{пол} - (i_2 - i_1) \text{ Дж/кг.} \quad (\text{III-46})$$

Чем больше отводится тепла, тем ближе процесс сжатия к изотермическому.

Графически политропный процесс сжатия изобража-

ется линией $1-2_{\text{пол}}$ (см. рис. 20), затрачиваемая на сжатие работа — площадью $1-2_{\text{пол}}-3-4-1$ в координатах $v-p$, а эквивалентное ей тепло — площадью $1-2_{\text{пол}}-2_{\text{из}}-3-4-1$ в координатах $s-T$, часть которого, эквивалентная площади $1-2_{\text{пол}}-5-4-1$, отводится.

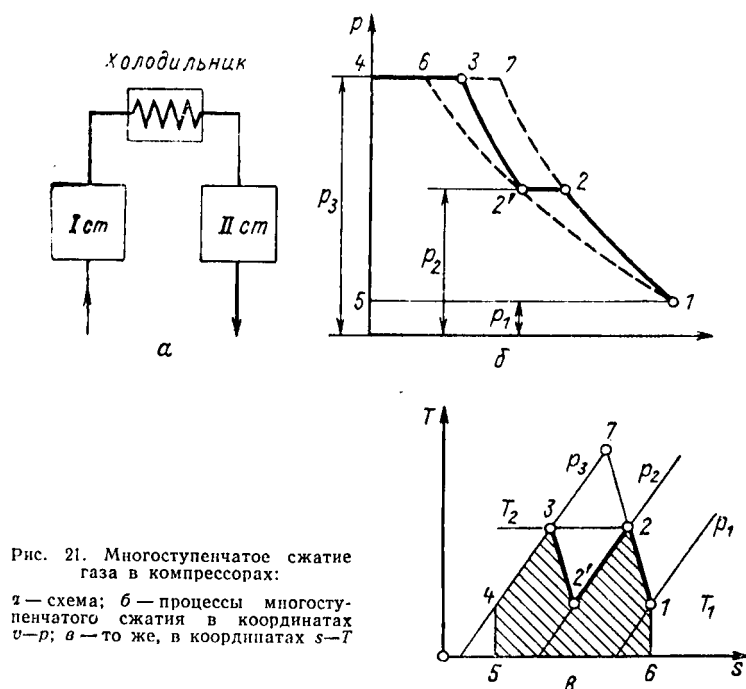


Рис. 21. Многоступенчатое сжатие газа в компрессорах:

а — схема; б — процессы многоступенчатого сжатия в координатах $v-p$; в — то же, в координатах $s-T$

Вследствие нагрева сжатие атмосферного воздуха в одной ступени ограничено степенью повышения давления p_2/p_1 , равной 6—7.

В случае необходимости получения более высоких давлений применяют многоступенчатое сжатие (рис. 21, а) с охлаждением газа в промежуточных холодильниках.

Газ сначала сжимают в первой ступени (рис. 21, б, в) до давления p_2 (процесс 1—2), затем охлаждают в промежуточном холодильнике при постоянном давлении (процесс 2—2'), после чего сжимают во второй ступени до давления p_3 (процесс 2'—3).

Графическое изображение процессов, происходящих при многоступенчатом сжатии, показывает, что наряду с ограничением нагрева воздуха многоступенчатое сжатие сопровождается уменьшением затраты работы. Получаемая экономия работы по сравнению с одноступенчатым сжатием до того же конечного давления p_3 эквивалентна площади 2—2'—3—7—2.

Это объясняется тем, что многоступенчатое сжатие приближает процесс к изотермическому, являющемуся наивыгоднейшим способом сжатия. Чем больше ступеней сжатия, тем ближе линия сжатия к изотерме, т. е. тем экономичнее работает компрессор. Однако значительное удорожание машины заставляет ограничивать число ступеней минимумом, определяемым допустимой температурой газа в конце сжатия.

Работа, затрачиваемая на сжатие газа в двухступенчатом компрессоре, является суммой работ, затрачиваемых в обеих ступенях:

$$l = l_1 + l_2 = \frac{n}{n-1} RT \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] + \frac{n}{n-1} RT \left[\left(\frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] \text{ Дж/кг.} \quad (\text{III-47})$$

Затрата работы в каждой из ступеней определяется величиной промежуточного давления между ступенями p_2 , которое может быть выбрано произвольно, так как оно не связано с требованиями потребителя. Очевидно, что промежуточное давление, т. е. распределение общего давления между ступенями, должно быть выбрано таким, чтобы работа, затрачиваемая на привод компрессора, была минимальной.

Для решения этого вопроса необходимо взять первую производную от выражения для работы (по p_2), приравнять ее нулю и полученное уравнение решить относительно p_2 .

Считая, что в промежуточном холодильнике газ охлаждается до начальной температуры T и что показатели политроп сжатия в обоих цилиндрах одинаковы, получим:

$$l = \frac{n}{n-1} RT \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} + \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 2 \right].$$

Дифференцируя выражение для работы, получим

$$\frac{dl}{dp_2} = \frac{n}{n-1} RT \left[\frac{n-1}{n} \frac{p_2^{\frac{n-1}{n}}}{p_2^{\frac{n-1}{n}}} - \frac{n-1}{n} \frac{p_2^{\frac{n-1}{n}}}{p_1^{\frac{n-1}{n}}} - \frac{n-1}{n} \frac{p_2^{\frac{n-1}{n}}}{p_3^{\frac{n-1}{n}}} \frac{p_2^{\frac{n-1}{n}}}{p_2^{\frac{n-1}{n}}} - 1 \right] = 0.$$

После элементарных преобразований найдем

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} = \left(\frac{p_3}{p_2} \right)^{\frac{n-1}{n}} \quad \text{или} \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_3}{p_2}. \quad (\text{III-48})$$

Таким образом, работа, затрачиваемая на привод компрессора, будет наименьшей при равенстве степеней повышения давления. Этот вывод справедлив и для компрессоров с любым количеством ступеней.

Из условий политропного процесса следует:

$$\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n}{n-1}} = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\frac{n}{n-1}} \quad \text{и} \quad \frac{p_3}{p_2} = \left(\frac{T_3}{T_2'} \right)^{\frac{n}{n-1}};$$

при этом если $T_2' = T_1$ и $\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_3}{p_2}$ [см. (III-48)], то $T_3 = T_2$.

Следовательно, наименьшая работа затрачивается в многоступенчатом компрессоре тогда, когда в диаграмме $s-T$ (рис. 21, в) точки 2 и 3 лежат на одной горизонтали, т. е. работы, затрачиваемые в обеих ступенях, одинаковы.

При всяком изменении давления p_2 на давление p_2' и p_2'' зубцы на диаграмме $s-T$ становятся неодинаковыми, так как $T_3 \neq T_2$.

Любой из этих вариантов увеличивает суммарную затрачиваемую работу, которая в пределе, как это видно из графика, будет стремиться к работе, затрачиваемой на привод одноступенчатого компрессора.

Общая степень повышения давления в многоступенчатом компрессоре равна произведению степеней повышения давления в отдельных ступенях компрессора: $p_2/p_1 \cdot p_3/p_2 \dots p_z/p_{z-1} = p_z/p_1$.

Обозначив степень повышения давления в ступени через λ , будем в оптимальном случае иметь

$$\lambda^z = \frac{p_z}{p_1}.$$

Следовательно, наивыгоднейшая степень повышения давления в ступени многоступенчатого компрессора с числом ступеней z сжимающего газ от p_1 до p_z равна

$$\lambda = \sqrt[z]{p_2/p_1}. \quad (\text{III-49})$$

Обратная задача определения необходимого числа ступеней многоступенчатого компрессора при заданной степени повышения давления в ступени решается логарифмированием выражения (III-49)

$$\lg \lambda = \frac{1}{z} (\lg p_2 - \lg p_1),$$

откуда

$$z = \frac{\lg p_2 - \lg p_1}{\lg \lambda}. \quad (\text{III-50})$$

Глава IV

ТЕРМОДИНАМИКА ТЕПЛОВЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Процессы, связанные с преобразованием тепла в работу, имеют огромное значение в технике, так как лежат в основе выработки механической энергии. Машины, применяемые для этой цели, называют тепловыми двигателями. Научным фундаментом для исследования процессов, происходящих в тепловых двигателях, является техническая термодинамика.

1. Круговые процессы

В большинстве рассмотренных выше процессов расширения происходило преобразование тепла в механическую работу. Однако ни один из этих процессов, отдельно взятый, недостаточен для машины, удовлетворяющей практическим требованиям, так как, однократно совершив процесс, такая машина остановилась бы.

В основе непрерывно действующей машины должен лежать круговой процесс, в результате проведения которого рабочее тело возвращалось бы в первоначальное состояние, чтобы преобразование тепла в работу происходило вновь и вновь сколько угодно долго.

Круговых процессов или циклов, состоящих из ряда последовательно проводимых процессов расширения и сжатия, может быть бесчисленное множество, однако во всех случаях начальная и конечная точки процесса дол-

жны совпадать, т. е. кривая процесса должна быть замкнутой.

Для получения работы имеет смысл только круговой процесс, проходящий по часовой стрелке (рис. 22, а). В этом случае работа L_1 , получаемая в процессе расширения $1m2$, эквивалентная площади $1m-2-3-4-1$, оказывается больше работы L_2 , затраченной в процессе сжатия $2n1$ (площадь $2n-1-4-3-2$). В результате

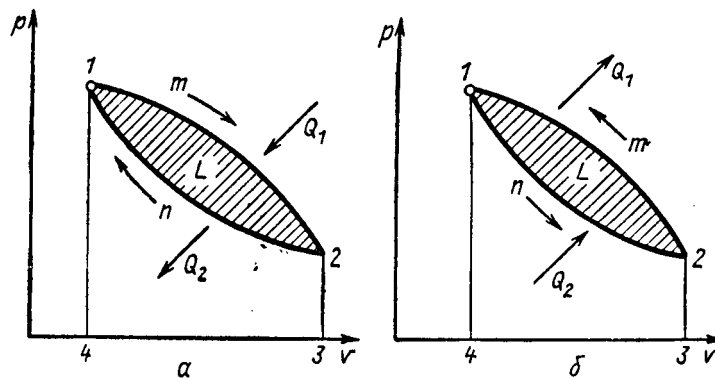


Рис. 22. Круговые процессы:
а — прямой; б — обратный

проведения такого цикла получается полезная работа L , эквивалентная площади, ограниченной замкнутой кривой цикла ($1-m-2-n-1$), которая может быть использована для различных целей.

Работа, получаемая в результате проведения кругового процесса, производится за счет затраты определенного количества тепла. Чтобы осуществить процесс расширения $1m2$ к рабочему телу, нужно подвести некоторое количество тепла Q_1 . Наоборот, при проведении процесса сжатия $2n1$ некоторое количество тепла Q_2 отводится. При проведении кругового процесса по часовой стрелке подводимое тепло Q_1 всегда оказывается больше отводимого тепла Q_2 .

В результате проведения кругового процесса рабочее тело вернулось в первоначальное состояние, и его внутренняя энергия осталась прежней. Следовательно, в соответствии с первым законом термодинамики, оставшееся в избытке тепло, называемое полезным теплом, пошло на совершение работы.

Машины, работающие по круговым процессам, протекающим по часовой стрелке, т. е. преобразующие тепло в механическую энергию, называют тепловыми двигателями. Термодинамическая степень совершенства работы теплового двигателя определяется величиной термодинамического к. п. д., представляющего собой отношение полезно использованного тепла $Q_1 - Q_2$ или полученной работы L к подведенному теплу Q_1 :

$$\eta_t = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{L}{Q_1}. \quad (IV-1)$$

Термодинамический к. п. д. характеризует работу идеальной машины, в которой отсутствует трение, потери на удар, излучение тепла в окружающую среду. При термодинамическом рассмотрении циклов предполагается, что они обратимы, т. е. протекают бесконечно медленно и являются совокупностью равновесных состояний, что масса и химический состав рабочего тела, участвующего в цикле, остаются все время неизменными, что на определенных участках цикла к рабочему телу обратимо подводится или отводится тепло. Так как в действительных условиях эти требования не соблюдаются, обратимые циклы являются упрощенной моделью действительных рабочих процессов тепловых машин, о чем следует всегда помнить.

В обратных круговых процессах, протекающих в направлении против часовой стрелки (см. рис. 22, б), затрачиваемая работа оказывается больше полученной, т. е. эксплуатация машины требует непрерывной затраты работы, которая переходит в тепло. При расширении рабочего тела по линии $1n2$ к нему подводится тепло Q_2 из более холодного источника, а при сжатии по линии $2m1$ отводится тепло $Q_1 > Q_2$ в более горячий источник. Учитывая, что в итоге проведения обратного цикла изменение внутренней энергии не происходит на основе первого закона термодинамики, можно сделать вывод, что работа переходит в тепло и, следовательно: $Q_1 = Q_2 + L$.

По обратному циклу работают холодильные машины и тепловые насосы, отнимающие тепло от холодного источника и переносящие его в горячий источник.

Холодильные машины служат для получения температур более низких, чем температура окружающего воздуха, который является горячим источником. Тепловые насосы обычно переносят тепло окружающего воздуха или воды на более высокий температурный уровень и могут быть использованы для отопления.

Степень совершенства обратного цикла оценивается холодильным коэффициентом, показывающим, какое количество тепла переносится из низшего температурного источника в высший на единицу затраченной работы:

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{L} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \quad (\text{IV-2})$$

Осуществление обратного цикла подтверждает известную формулировку второго закона термодинамики о том, что переход тепла от более холодного тела к более горячему возможен только при затрате работы.

2. Цикл Карно

Циклом Карно называют круговой процесс, состоящий из двух изотерм и двух адиабат (рис. 23, а). На участке 4—1 к рабочему телу при $T_1 = \text{const}$ подводится

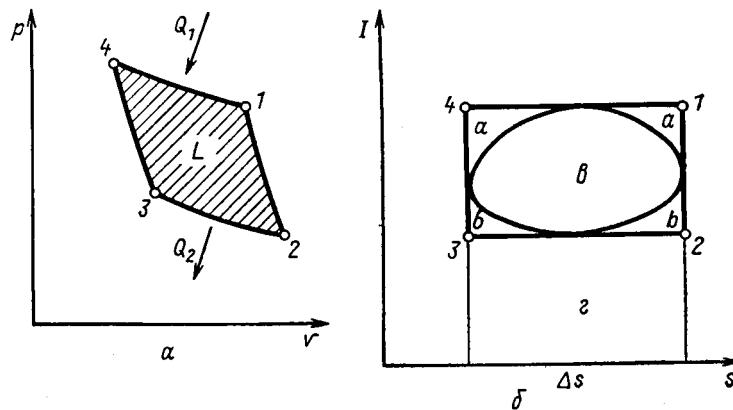


Рис. 23. Цикл Карно:
а — в координатах $v-p$; б — в координатах $s-T$

тепло $Q_1 = T_1 \Delta s$, за счет которого происходит изотермическое расширение. В точке 1 подвод тепла прекращается и на участке 1—2 расширение идет адиабатно. В точке 2 начинается изотермическое сжатие при $T_2 = \text{const}$ с отводом тепла $Q_2 = T_2 \Delta s$. В точке 1 отвод тепла прекращается и сжатие идет адиабатно до тех пор, пока рабочее тело не достигнет начального состояния.

Как видно из графика, полезное тепло, эквивалентное полезной работе цикла, выражаемое площадью 1—2—3—4—1, равно

$$Q_1 - Q_2 = L = (T_1 - T_2) \Delta s.$$

Термодинамический к. п. д. обратимого цикла Карно:

$$\eta_t = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{(T_1 - T_2)\Delta s}{T_1 \Delta s} = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \quad (\text{IV-3})$$

Из полученного выражения видно, что термодинамический к. п. д. обратимого цикла Карно зависит только от разности температур источников тепла. Чем выше начальная температура цикла T_1 и чем ниже конечная температура T_2 , тем выше к. п. д., тем полнее превращение тепла в работу. При приближении T_1 к бесконечности или T_2 к абсолютному нулю термодинамический к. п. д. цикла Карно стремится к единице. Наоборот, при $T_1 = T_2$ значение $\eta_t = 0$ и никакого преобразования тепла в работу происходить не может, что полностью совпадает с положениями второго закона термодинамики.

Выражение (IV-3) также показывает, что термодинамический к. п. д. обратимого цикла Карно не зависит от свойств рабочего тела, что составляет содержание так называемой теоремы Карно.

Нетрудно доказать, что термодинамический к. п. д. обратимого цикла Карно будет всегда выше к. п. д. любого произвольного цикла, протекающего в тех же температурных пределах.

Термодинамический к. п. д. цикла Карно, выраженный через площади, указанные на рис. 23, б:

$$\eta_t^k = 1 - \frac{e}{a + b + e + g}.$$

Термодинамический к. п. д. любого произвольного цикла, приведенного на том же рисунке:

$$\eta_t^{np} = 1 - \frac{b + e}{b + e + g},$$

но $e < b + e$ и $a + b + e + g > b + e + g$.

Следовательно:

$$\eta_t^k > \eta_t^{np}.$$

Цикл Карно является наивыгоднейшим круговым процессом; величина его термодинамического к. п. д. $\eta_t = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ дает представление о степени максимально возможного использования тепла в круговом процессе в заданном интервале температур. Цикл Карно является своего рода идеальным эталоном, сравнение с которым

позволяет судить о степени совершенства реальных процессов тепловых двигателей. В этом и состоит его большое практическое значение, так как вследствие ряда практических недостатков и неудобств тепловые двигатели, работающие по циклу Карно, в современной технике не применяют.

Если в цикле Карно провести все процессы в обратном направлении, то получится обратным и внешний эффект цикла, т. е. тепло будет подводиться в цикл из холодного источника и отводиться из цикла в горячий источник. Как известно из второго закона термодинамики, такой перенос тепла возможен лишь при затрате работы. Величина работы, затрачиваемой на проведение цикла, как и ранее эквивалентна площади, ограниченной замкнутой кривой цикла.

В соответствии с первым законом термодинамики вследствие того, что внутренняя энергия рабочего тела в результате проведения цикла не изменяется, результирующее тепло $Q_2 - Q_1$ эквивалентно затраченной работе $-L$ и, следовательно:

$$Q_2 - Q_1 = -L = -(T_1 - T_2) \Delta S, \quad (IV-4)$$

откуда вытекает, что отводимое из цикла тепло равно подведенному теплу, сложенному с затраченной работой: $Q_1 = Q_2 + L$.

Холодильный коэффициент обратного цикла Карно определяется следующим образом:

$$\epsilon = \frac{Q_2}{L} = \frac{T_2 \Delta S}{(T_1 - T_2) \Delta S} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}. \quad (IV-5)$$

Как видно из полученного выражения, холодильный коэффициент обратного цикла Карно зависит только от интервала температур, в котором проводится цикл и не зависит от природы рабочего тела.

По сравнению с другими обратными циклами цикл Карно является наиболее совершенным. Перенос тепла Q_2 от холодного источника к горячему совершается в этом цикле с наименьшей затратой работы. Вследствие этого холодильный коэффициент обратного цикла Карно имеет наивысшее значение по сравнению с любыми другими обратными циклами, протекающими в том же интервале температур, и в этом смысле может быть использован для оценки степени совершенства работы тепловых насосов и холодильных установок.

3. Теоретические циклы поршневых газовых двигателей

Поршневые двигатели, рабочим телом в которых служат газообразные продукты сгорания топлива, называемые двигателями внутреннего сгорания, получили в технике исключительное широкое распространение.

Наивыгоднейшим теоретическим циклом для подобного типа двигателей является цикл Карно, однако на практике его не применяют по ряду причин. Малая разница в наклоне изотерм и адиабат дает сильно вытянутую диаграмму цикла, что приводит к необходимости применять большие объемы цилиндров и высокие давления газа (до 2500 бар и выше). Это обуславливает громоздкость конструкции

и большие потери на трение в механизмах. Кроме того, изотермический подвод и отвод тепла к рабочему телу в реальных условиях осуществить весьма затруднительно. Поэтому в двигателях внутреннего сгорания применяют изобарный и изохорный подвод и отвод тепла, что резко снижает необходимое давление, упрощает конструкцию двигателя и уменьшает потери на трение. В итоге двигатель получается более простым, компактным и экономичным.

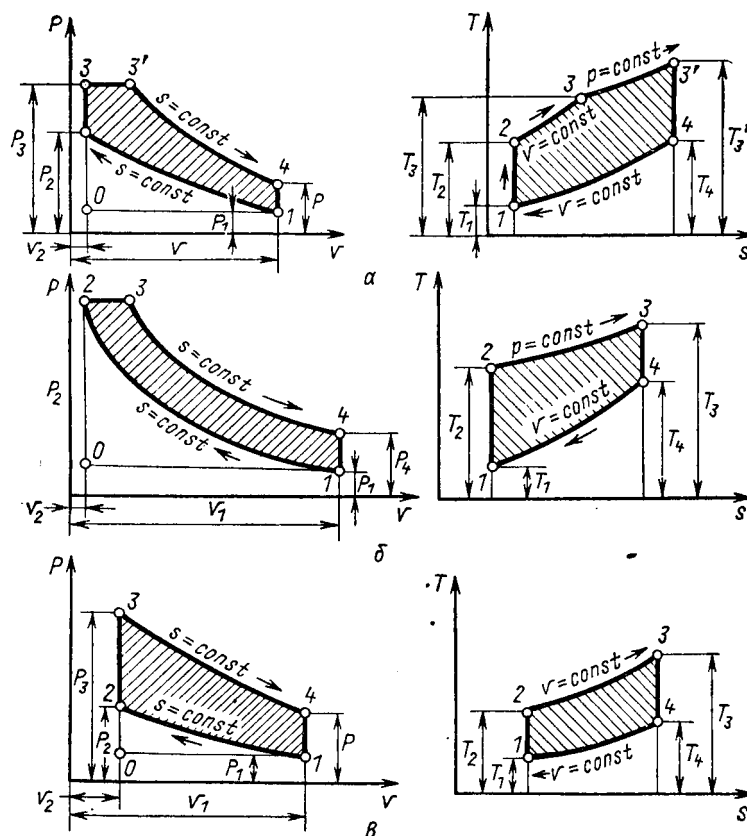


Рис. 24. Теоретические циклы поршневых газовых двигателей

В настоящее время применяют двигатели с изохорным (цикл Отто, рис. 24, а), изобарным (цикл Дизеля, рис. 24, б) и смешанным (цикл Тринклера, рис. 24, в) подводом тепла. Во всех циклах отвод тепла осуществляется изохорно.

При прямом ходе поршня (линия $0-1$) происходит всасывание в цилиндр горячей смеси (цикл Отто) или воздуха (цикл Дизеля и Тринклера). При обратном ходе поршня идет сжатие засосанного газа (линия $1-2$). На участке $2-3$ происходит «быстрое» сгорание поджигаемой горючей смеси (цикл Отто) или «медленное» горение впрыскиваемого в нагретый за счет сжатия воздух распыленного жидкого топлива, что соответствует процессу подвода тепла (линии $2-3$ и $2-3-3'$, циклы Дизеля и Тринклера). Расширение продуктов сгорания вызывает перемещение поршня или рабочий ход (линия $3-4$). В точке 4 открывается выпускной клапан, и основная масса продуктов сгорания вырывается наружу, что соответствует изохорному отводу тепла (линия $4-1$). После обратного хода поршня, очищающего цилиндр от остатков продуктов сгорания, цикл повторяется снова.

Работу цикла характеризуют три основных параметра:

а) степень сжатия ϵ , представляющая собой отношение начального объема газа v_1 к объему в конце процесса сжатия v_2 :

$$\epsilon = v_1/v_2;$$

б) степень повышения давления при подводе тепла, представляющая собой отношение давления в конце и в начале процесса подвода тепла:

$$\lambda = p_3/p_2;$$

в) степень предварительного расширения при подводе тепла, представляющая собой отношение конечного и начального объема газа в процессе подвода тепла:

$$\rho = v_3/v_2.$$

Из сравнения приводимых циклов видно, что цикл Тринклера со смешанным подводом тепла является обобщающим. Циклы Отто и Дизеля можно рассматривать как частные случаи цикла Тринклера соответственно при $\rho=1$ и $\lambda=1$.

Термодинамический к. п. д. цикла Тринклера может быть определен исходя из следующих соображений:

$$\eta_t = 1 - \frac{q_2}{q_1' + q_1''},$$

где $q_2 = c_v(T_4 - T_1)$ — отводимое тепло;
 $q'_1 = c_v(T_3 - T_2)$ — подводимое тепло;
 $q''_1 = c_p(T'_3 - T_3)$ — подводимое тепло.

Подставив вместо q_2 , q'_1 и q''_1 их развернутые значения и проведя несложные преобразования с учетом, что $c_p/c_v = k$, будем иметь:

$$\eta_t = 1 - \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right) + k\left(\frac{T'_3}{T_2} - \frac{T_3}{T_2}\right)}.$$

Используя основные закономерности входящих в цикл термодинамических процессов, получим

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{k-1} = \frac{1}{\epsilon^{k-1}}; \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{P_3}{P_2} = \lambda; \quad \frac{T'_3}{T_3} = \frac{v'_3}{v_3} = \rho;$$

$$\frac{T'_3}{T_2} = \frac{T'_3}{T_3} \cdot \frac{T_3}{T_2} = \rho\lambda; \quad \frac{T_4}{T_1} = \frac{p_4}{p_1}.$$

Из свойства адиабатных процессов 1—2 и 3—4 следует, что

$$p_4 v_4^k = p'_3 v'^k_3 \quad \text{и} \quad p_1 v_1^k = p_2 v_2^k$$

или

$$\frac{p_4}{p_1} = \frac{p'_3}{p_2} \left(\frac{v'_3}{v_2}\right)^k = \lambda \rho^k,$$

так как $v_4 = v_1$; $v_2 = v_3$; $p'_3 = p_3$.

После подстановки полученных соотношений выражение для термодинамического к. п. д. смешанного цикла примет вид:

$$\eta_t = 1 - \frac{1}{\epsilon^{k-1}} \cdot \frac{\lambda \rho^k - 1}{\lambda - 1 + k\lambda(\rho - 1)}. \quad (\text{IV-6})$$

Анализ полученного выражения показывает, что термодинамический к. п. д. цикла возрастает с увеличением степени сжатия ϵ и степени повышения давления λ и уменьшается с ростом степени предварительного расширения ρ . Присутствие в формуле показателя адиабаты $k = c_p/c_v$ говорит о том, что на величину к. п. д. влияют и свойства рабочего тела.

Выражение для термодинамического к. п. д. цикла Отто можно получить, полагая в формуле (IV-6) $\rho=1$:

$$\eta_t = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}. \quad (\text{IV-7})$$

При подстановке в формулу (IV-6) $\lambda=1$ получаем выражение для термодинамического к. п. д. цикла Дизеля:

$$\eta_t = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \cdot \frac{\rho^{k-1}}{k(\rho-1)}. \quad (\text{IV-8})$$

Сравнение циклов между собой нагляднее всего можно провести путем наложения их друг на друга в системе координат $s-T$.

Из выражения термодинамического к.п.д. цикла

$$\eta_t = 1 - \frac{q_2}{q_1}$$

следует, что при одинаковом отводимом тепле q_2 более высокий к.п.д. имеет цикл с большим подводом тепла, а при одинаковом подводимом тепле q_1 большим к.п.д. обладает цикл с меньшим отводом тепла q_2 .

При одинаковой степени сжатия ε , т. е. общем отрезке 1—2, и одинаковом отводе тепла q_2 подводимое тепло q_1 в цикле Отто больше, чем в цикле Дизеля q_1 . Следовательно:

$$\eta_t^{\text{Отто}} > \eta_t^{\text{Диз}}.$$

При одинаковой степени сжатия цикл Отто является более совершенным, чем цикл Дизеля.

Сравнивая эти же циклы при одинаковых максимальной температуре и давлении, в цилиндре получаем иные результаты. В этом случае при общей точке 3 (рис. 24) и одинаковом отводимом тепле q_2 подводимое тепло q_1 в цикле Дизеля больше подводимого тепла в цикле Отто. Следовательно:

$$\eta_t^{\text{Диз}} > \eta_t^{\text{Отто}}.$$

Повышенная экономичность цикла Дизеля в этом случае объясняется большей величиной степени сжатия ε .

Значения термодинамического к. п. д. цикла Тринклера со смешанным подводом тепла в обоих случаях имеют промежуточное значение и лежат в интервале между значениями η_t для циклов Отто и Дизеля.

Цикл Отто с изохорным подводом тепла является идеальным циклом двигателей низкого сжатия, главным образом бензиновых карбюраторных двигателей. Рабочим телом является горючая смесь, получаемая в карбюраторе. Вследствие опасности преждевременного воспламенения степень сжатия в них ограничена значениями ε , равными 5—7, и поэтому η_t составляет всего 40—50%. Вследствие мгновенного протекания процесса горения двигатели этого типа весьма быстроходны, компактны и их широко применяют в автомобильном транспорте и авиации.

В цикле Дизеля сжимается не горючая смесь, а воздух, вследствие чего степень сжатия не ограничена самовоспламенением и доводится до $\epsilon = 12 \div 16$, что существенно увеличивает термодинамический к. п. д. двигателя. Жидкое топливо с помощью насоса и компрессора в распыленном виде впрыскивается в сжатый воздух, где воспламеняется и сгорает, вследствие чего в двигателе отсутствуют системы карбюрации и зажигания.

В чистом виде цикл Дизеля осуществляется в компрессорных двигателях, производство которых из-за повышенной сложности и стоимости в СССР прекращено.

Механическое распыление топлива позволило отказаться от компрессора, что значительно упростило и удешевило двигатель, а также повысило его экономичность.

По циклу Тринклера, выгодно совмещающему преимущества циклов Отто и Дизеля, работают современные бескомпрессорные двигатели высокого сжатия ($\epsilon = 14 \div 18$), широко применяемые в крупных транспортных и стационарных установках.

4. Циклы газотурбинных установок

За последние годы все шире применяют газотурбинные установки, успешно конкурирующие в ряде отраслей народного хозяйства с двигателями внутреннего сгорания.

В поршневом двигателе процессы сжатия и горения происходят непосредственно в цилиндре двигателя, что нельзя осуществить в газовой турбине в силу особенностей ее конструкции.

Поэтому газотурбинная установка состоит из камеры сгорания (рис. 25, а); компрессора, сжимающего и нагнетающего в нее атмосферный воздух; насоса, подающего в камеру сгорания топливо, и газотурбинного двигателя, совершающего работу за счет расширения поступающих в него продуктов сгорания.

Процесс горения в камере сгорания может происходить как при постоянном давлении, так и при постоянном объеме (рис. 25, б), в зависимости от чего газотурбинные установки делят на два типа. Процессы сжатия рабочего тела в компрессоре (линия 1—2) и расширения его в газотурбинном двигателе (линия 3—4) в термодинамическом цикле в обоих случаях принимают адиабатными. Вследствие ряда конструктивных и экс-

платационных преимуществ в настоящее время большее распространение получил цикл с изобарным подводом тепла.

Главное отличие циклов газотурбинных установок от циклов двигателей внутреннего сгорания заключается в протекании процесса отвода тепла (линия 4—1),

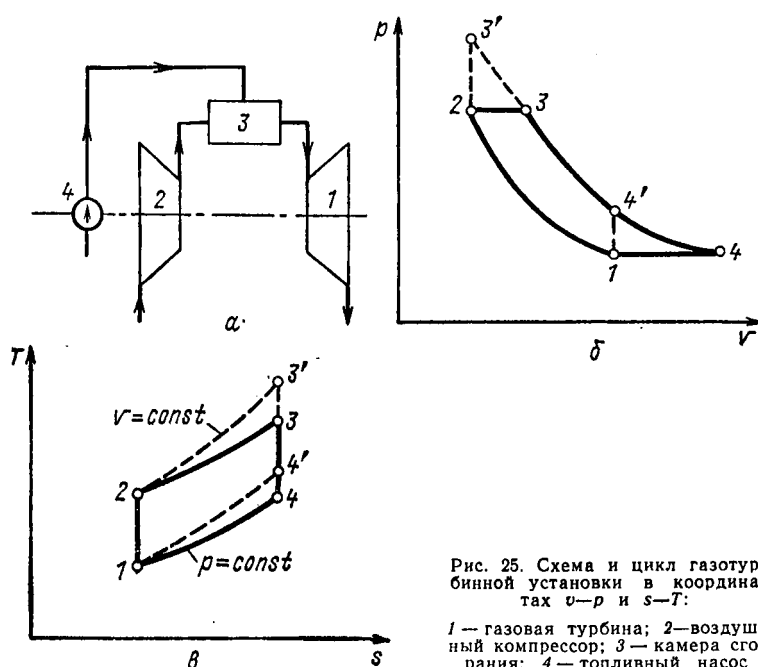


рис. 25, б, в. В поршневых двигателях расширение газов ограничено объемом цилиндра, вследствие чего тепло отводится от цикла по изохоре (линия 4'—1). В газотурбинных двигателях такого ограничения нет и расширение газов происходит до начального давления, т. е. отвод тепла проходит по изобаре (линия 4—1), чем обусловлено более полное использование энергии расширяющихся газов. Сравнивая цикл поршневого двигателя с циклом газотурбинной установки (см. рис. 25, в), можно видеть, что при прочих равных условиях термодинамический к. п. д. у газотурбинной установки будет всегда выше, чем у поршневого двигателя, вследствие того, что при одинаковом подведенном тепле q_1 отводи-

мое тепло q_2 при изобарном отводе меньше, чем при изохорном.

Как и ранее, работу циклов газотурбинных установок характеризуют степень сжатия $\varepsilon = v_1/v_2$, степень повышения давления при подводе тепла $\lambda = p_3/p_2$ и степень предварительного расширения при подводе тепла $\rho = v_3/v_2$.

Проведя термодинамическое исследование цикла с изобарным подводом тепла, можно судить о том, от каких факторов зависит его термодинамический к. п. д.:

$$\eta_t = 1 - \frac{q_2}{q_1}.$$

где $q_2 = c_p(T_4 - T_1)$ — отводимое тепло;
 $q_1 = c_p(T_3 - T_2)$ — подводимое тепло.

Подставляя вместо q_2 и q_1 их развернутые значения и проводя простые преобразования, получим

$$\eta_t = 1 - \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1}. \quad (\text{IV-9})$$

Для термодинамических процессов, входящих в цикл, справедливы следующие соотношения:

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{k-1} = \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}; \quad \frac{T_3}{T_2} = \frac{v_3}{v_2}, \quad \frac{T_4}{T_1} = \frac{v_4}{v_1}.$$

Из свойств адиабатных процессов 1—2 и 3—4, входящих в цикл, следует, что

$$p_4 v_4^k = p_3 v_3^k; \quad p_1 v_1^k = p_2 v_2^k,$$

$$\text{откуда } \frac{v_4}{v_1} = \frac{v_3}{v_2}.$$

$$\text{и, следовательно, } \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1}.$$

После подстановки выражение для термодинамического к. п. д. цикла газотурбинной установки с подводом тепла при $p = \text{const}$ принимает вид:

$$\eta_t^{p=\text{const}} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{k-1}}. \quad (\text{IV-10})$$

Из сопоставления выражений (IV-7) и (IV-10) вытекает, что термодинамический к. п. д. цикла газотур-

бинной установки с подводом тепла при $p = \text{const}$ равен термодинамическому к. п. д. поршневого двигателя с подводом тепла при $v = \text{const}$, проводимому при той же степени сжатия, но при значительно более высоких начальных давлениях и температурах.

Одним из способов повышения термодинамического к. п. д. газотурбинных установок является рекуперация тепла, т. е. использование части тепла уходящих газов турбины в специальном теплообменнике

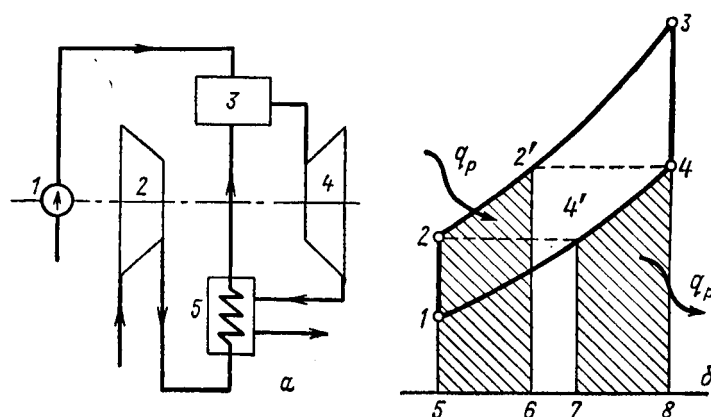


Рис. 26. Схема и цикл газотурбинной установки с рекуперацией тепла:
1 — топливный насос; 2 — воздушный компрессор; 3 — камера сгорания;
4 — газовая турбина; 5 — теплообменник

5 для подогрева сжатого воздуха, идущего в камеру сгорания (рис. 26, а). Площадь 4—4'—7—8—4, равная площади 2—2'—6—5—2 (рис. 26, б), выражает тепло q_p , отнимаемое от газов и передаваемое воздуху, линия 2—2' соответствует процессу подогрева воздуха, линия 4—4' — процессу охлаждения газов. В предельном случае, изображенном на диаграмме, уходящие газы можно охладить до начальной температуры сжатого воздуха T_2 , а сжатый воздух нагреть до начальной температуры уходящих газов T_4 .

Применение многоступенчатого сжатия воздуха и многоступенчатого сгорания позволяет еще более повысить термодинамический к. п. д. газотурбинных установок.

С другой стороны, как показывает выражение (IV-9), величина термодинамического к. п. д. газотурбинных установок зависит от температуры газов перед турбиной T_3 . Эта температура в стационарных установках ограничивается в настоящее время пределом $\sim 700^\circ\text{C}$ по условиям жаропрочности турбинных лопаток, что препятствует дальнейшему повышению экономичности газотурбинных установок.

В настоящее время газотурбинные установки широко применяют в авиации, энергетике и некоторых других отраслях промышленности.

5. Циклы паросиловых установок

Всякая паросиловая установка (рис. 27) включает в себя паровой котел, служащий для получения пара, и паровой двигатель (обычно паровая турбина), преобразующий энергию расширяющегося в нем пара в работу.

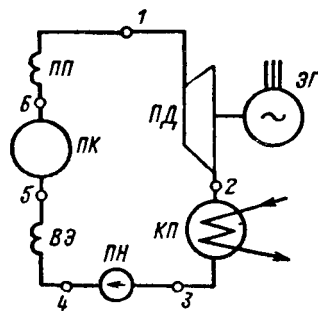


Рис. 27. Схема паросиловой установки

Питательный насос ПН подает воду через экономайзер ВЭ, где она подогревается теплом уходящих продуктов сгорания, в котел. ПК. Образовавшийся в котле пар перегревается в пароперегревателе ПП за счет тепла продуктов сгорания и поступает в паровой двигатель ПД, приводящий в движение электрический генератор ЭГ.

Отработавший в двигателе пар направляется в конденсатор КП, где конденсируется, превращаясь в воду, подаваемую насосом снова в котел. Образ-

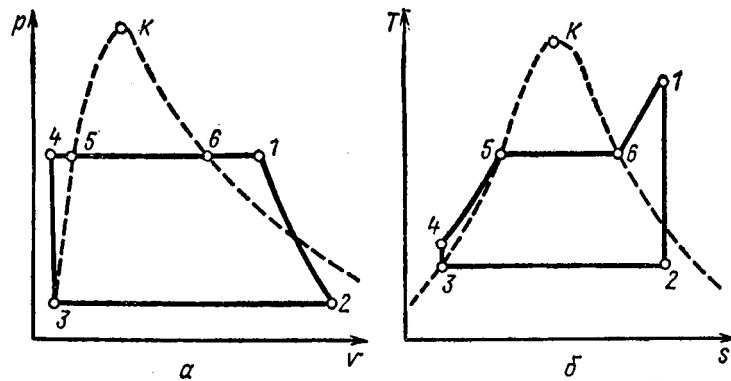


Рис. 28. Цикл паросиловой установки:

a — в координатах $v-p$; b — в координатах $s-T$; k — критическая точка

ющийся при конденсации вакуум обеспечивает более полное расширение пара и, следовательно, повышает экономичность цикла.

Происходящие на различных участках $1-2-3-4-5-6$ процессы могут быть изображены графически в системах координат $v-p$ и $s-T$ (рис. 28). Повышение давления воды в насосе в координатах $v-p$ выражается линией $3-4$, которая вследствие малых объемов воды по сравнению с объемом пара почти совпадает с осью ординат. Так как на этом участке температура и энтропия почти не изменяются, в системе координат $s-T$ процесс на участке $3-4$ изобразится очень коротким отрезком $3-4$. Процесс подогрева воды в экономайзере, происходящий при постоянном давлении, сопровождаемый увеличением объема, температуры и энтропии воды, изображается отрезком $4-5$. Испарение воды в котле (процесс $5-6$) происходит при постоянном давлении и температуре и характеризуется весьма значительным увеличением объема и энтропии. Перегрев пара в пароперегревателе идет при постоянном давлении. При этом объем, температура и энтропия пара возрастают (процесс $6-1$). Расширение пара в двигателе, при котором пар из перегретого становится влажным, сопровождается понижением давления и температуры и увеличением объема пара (процесс $1-2$). Конденсация пара в конденсаторе за счет непрерывного охлаждения его проточной водой вызывает резкое уменьшение объема и энтропии пара вследствие отвода тепла и происходит при постоянном давлении и температуре (процесс $2-3$), в результате чего цикл замыкается.

Пренебрегая ничтожным объемом воды по сравнению с объемом пара, а также подогревом воды в насосе и считая расширение пара в двигателе адиабатным, получают теоретический цикл паросиловой установки, называемой также циклом Ренкина (рис. 29).

Полезная работа, получаемая при проведении цикла, эквивалентна площади, ограниченной замкнутой кривой цикла $1-2-3-4-1$, которая может быть представлена в виде алгебраической суммы трех площадей: $1-2-3-4-1 = \text{пл. } 1-6-0-4-1 + \text{пл. } 1-2-5-6-1 - \text{пл. } 2-5-0-3-2$.

Выражая площади через термодинамические величины, получим

$$l = p_1 v_1 + (u_1 - u_2) - p_2 v_2 \quad (\text{IV-11})$$

или

$$l = (u_1 + p_1 v_1) - (u_2 + p_2 v_2), \quad (\text{IV-12})$$

т. е.

$$l = i_1 - i_2.$$

Таким образом, полезная работа 1 кг пара в теоретическом цикле паросиловой установки равна разности

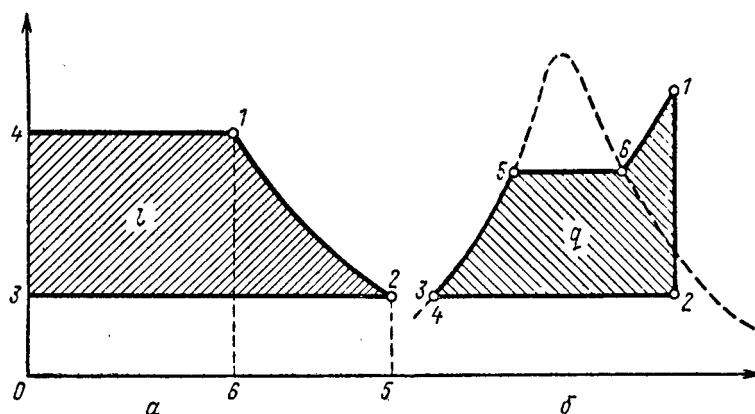


Рис. 29. Цикл Ренкина:

a — в координатах $v-p$; *б* — в координатах $s-T$

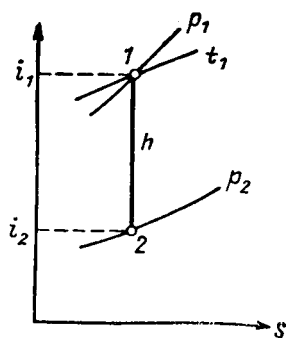


Рис. 30. Определение полезной работы 1 кг пара в цикле Ренкина в координатах $s-i$

энтальпий начального и конечного состояний в процессе адиабатного расширения пара в двигателе.

В системе координат $s-i$ величина полезной работы цикла Ренкина l определяется длиной вертикального отрезка h между точками, характеризующего начального и конечного состояния пара (рис. 30).

Термодинамический к. п. д. паросилового цикла равен

$$\eta_t = \frac{q_1 - q_2}{q_1}.$$

Тепло, подводимое на участке 4—1 и отводимое на участке 2—3, выражается следующим образом:

$$q_1 = i_1 - i'_2; \quad q_2 = i_2 - i'_2,$$

где i_1 — энтальпия пара перед двигателем;

i_2 — энтальпия пара после двигателя;
 i_2' — энтальпия конденсата после конденсатора.

Следовательно, термодинамический к. п. д. цикла Ренкина равен

$$\eta_t = \frac{(i_1 - i_2') - (i_2 - i_2')}{i_1 - i_2'}$$

или

$$\eta_t = \frac{i_1 - i_2}{i_1 - i_2'} \quad (\text{IV-13})$$

Следовательно, термодинамический к. п. д. паросилового цикла в первую очередь определяется разностью энтальпий начального и конечного состояний пара.

Экономичность паросилового цикла часто выражают также величиной удельного расхода пара, т. е. количества пара, необходимого для выработки 1 кДж электроэнергии.

Очевидно, что эта величина может быть вычислена из следующего простого соотношения:

$$d_0 = \frac{1}{i_1 - i_2} \text{ кг/кДж}, \quad (\text{IV-14})$$

где $i_1 - i_2$ — перепад тепла, эквивалентный работе 1 кг пара в цикле Ренкина, кДж.

Как видно из диаграммы $s-i$ для водяного пара, разность энтальпий $i_1 - i_2$, а следовательно, работа пара и термодинамический к. п. д. установки возрастают с увеличением начального давления p_1 и температуры пара t_1 (рис. 31, а, б), а также с уменьшением конечно-

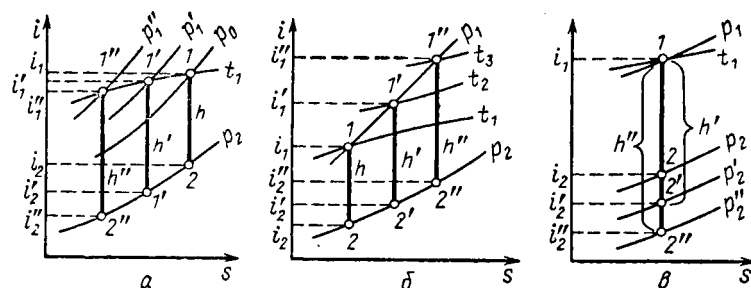


Рис. 31. Влияние параметров пара на термодинамический к. п. д. цикла Ренкина:

а — начального давления; б — начальной температуры; в — конечного давления

го давления p_2 (рис. 31, в). Этим и объясняется факт, что развитие теплоэнергетики идет в направлении применения пара все более высоких начальных параметров.

Помимо повышения начальных параметров, существует несколько способов повышения термодинамического к. п. д. паросилового цикла:

а) промежуточный перегрев пара, при котором паровая турбина выполняется двухцилиндровой, с тем чтобы перед поступлением во второй цилиндр пар вторично перегревался;

б) регенеративный подогрев питательной воды, при котором последняя подогревается отбираемым из турбины частично отработавшим паром;

в) применение бинарных циклов, использующих две жидкости с разными температурами кипения (например, вода и ртуть);

г) применение парогазовых циклов, при котором в цикле используют два рабочих тела: водяной пар и продукты сгорания топлива или подогретый ими воздух.

Значительное повышение экономичности паросиловых установок может быть достигнуто применением теплофикации. В этом случае паросиловая установка служит одновременно для выработки электроэнергии и тепла и называется теплоэлектроцентралю (ТЭЦ). В установках этого типа глубину расширения пара в тепловом двигателе уменьшают настолько, что получают после него пар производственных параметров, который можно использовать для производственно-технологических целей и отопления.

При этом выработка энергии (см. пл. 1—2—3—5—6—1 на рис. 32) и термодинамический к. п. д. паросилового цикла снижаются, однако общее использование тепла значительно увеличивается, так как тепло отработавшего в двигателе пара полезно используется на производстве (пл. 2—3—7—8—2), а не уносится водой, охлаждающей конденсатор.

Преимущества теплофикации особенно ясно видны из сравнения конденсационного и теплофикационного циклов в системе координат $s—T$ (рис. 32).

Общий коэффициент использования тепла на ТЭЦ

$$\eta_{\text{т}} = \frac{l + q_2}{q_1} 100\%,$$

где l — тепло, использованное для выработки электроэнергии;

q_2 — тепло, использованное для производства и отопления.

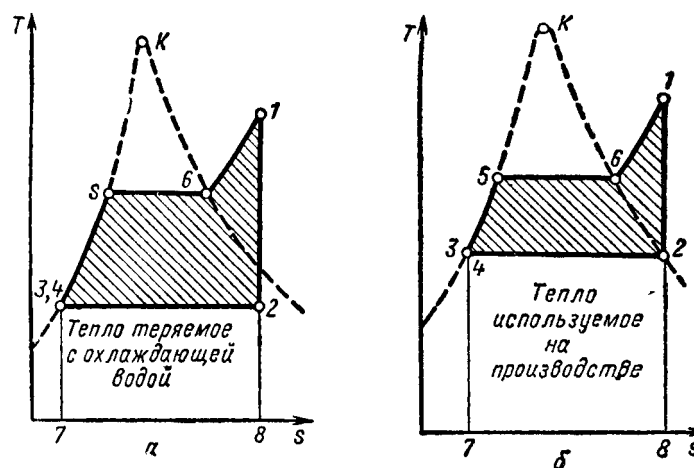


Рис. 32. Сравнение конденсационного и теплофикационного паросилового цикла;

а — конденсационный цикл; *б* — теплофикационный цикл

Теоретически η может достигать 100%, однако неизбежные потери тепла на практике снижают его до 60—80%, что, однако, примерно вдвое больше общего к. п. д. конденсационных электростанций.

6. Циклы атомных и магнитогидродинамических установок

При расщеплении ядер радиоактивных элементов освобождается огромное количество энергии, промышленное использование которой стало возможным после открытия методов искусственного регулирования процессов расщепления.

Первая в мире атомная электростанция мощностью 5000 кВт была пущена в СССР в 1954 г. В настоящее время в СССР и за рубежом работают и строятся мощные стационарные атомные электростанции, а также существует много атомных установок на подводных лодках и надводных судах.

Схема и цикл простейшей двухконтурной атомной установки приведены на рис. 33. Выделяемое в атомном реакторе *РР* за счет деления ядер тяжелых элементов тепло отводится специальным теплоносителем, в качестве которого может применяться вода, жидкие металлы, натрий, калий, органические соединения, газы — CO_2 , воздух, гелий и др. В парогенераторе *ПГ* радиоактивный теплоноситель отдает тепло рабочему телу второго контура — обычно воде, превращающейся в пар, после чего с помощью циркуляционного насоса *ЦН* возвращается снова в реактор. Ввиду того, что непосредственной связи между первым и вторым контурами нет, вода и пар второго контура

не радиоактивны. Первый радиоактивный контур отделен от основной электростанции биологической защитой. В основе работы второго контура лежит обычный паросиловой цикл $1-2-3-4-1$. На участке $3-4-1$ в цикл подводится тепло, получаемое от реактора, на участке $1-2$ происходит полезное расширение полученного сухого насыщенного пара, в турбине $ПТ$, на участке $2-3$, отвод тепла в конденсаторе $К$ за счет охлаждения последнего проточной водой.

Как и в обычном паросиловом цикле, экономичность установки возрастает с повышением начальных параметров пара. На сооружаемых

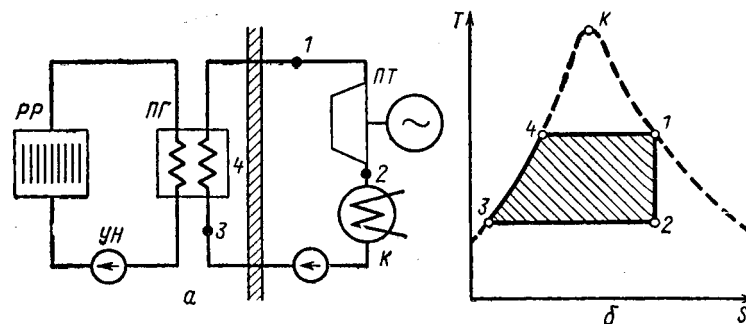


Рис. 33. Схема и цикл атомной двухконтурной установки

в последнее время атомных электростанциях применяют перегретый пар давлением 9 МН/м^2 , температурой 500°С . Перегрев пара осуществляется непосредственно в реакторе. Мощность реактора может меняться в широких пределах и ограничивается только условием отвода тепла от тепловыделяющих элементов, что существенно отличается условия работы атомных электростанций.

Экономическая эффективность атомных электростанций в основном определяется стоимостью расщепляющегося материала и в настоящее время еще уступает тепловым электростанциям, работающим на топливе.

Большие перспективы развития имеют установки с магнитогидродинамическими (МГД) генераторами, основанные на том, что при движении в магнитном поле ионизированного газа генерируется электрический ток.

В камеру сгорания МГД-генератора 2 (рис. 34, а) подается сжатый в компрессоре 1 до $500-800 \text{ кН/м}^2$ и нагретый до $1500-2000^\circ \text{С}$ атмосферный воздух. Продукты сгорания, подаваемого в камеру сгорания топлива при $2500-3000^\circ \text{С}$, представляющие собой ионизированный газ, проходят с высокой скоростью через канал 3 МГД-генератора, пересекая сильное магнитное поле. Генерируемый при этом электрический ток отводится через специальные шины.

Расширяющийся в канале до атмосферного давления газ со снизившейся до $2100-2200^\circ \text{С}$ температурой проходит последовательно через рекуперативный воздухоподогреватель 4 и парогенератор 5, в котором охлаждается до 150°С . Выработанный в парогенераторе пар

проходит через турбину 6, конденсируется в конденсаторе 7 и насосом 8 снова подается в парогенератор.

Цикл МГД-установки имеет, таким образом, газовую и паросиловую части. Отрезок 1—2 (см. рис. 34, б) выражает сжатие воздуха в компрессоре, а отрезок 2—3 — его подогрев в рекуперативном воздухоподогревателе. Дальнейший подогрев рабочего тела, происходящий за счет подвода тепла q_1 , получаемого при сгорании топлива, изображается линией 3—4, а расширение газа в канале МГД-генератора — отрезком 4—5. На участке 5—6 тепло продуктов сгорания

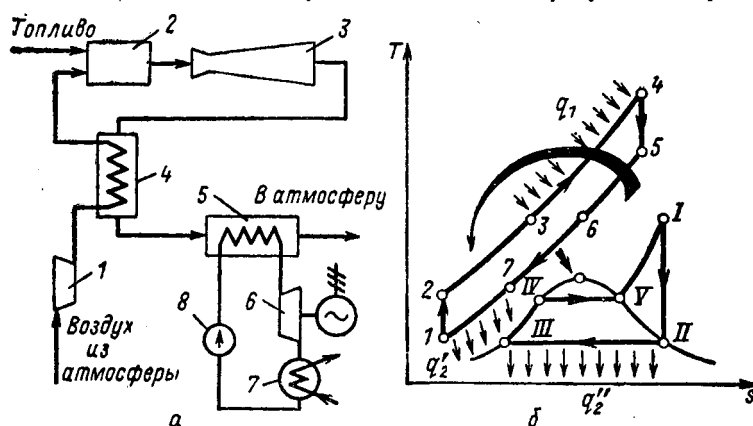


Рис. 34. Схема и цикл МГД-установки:

1 — компрессор; 2 — камера сгорания; 3 — канал МГД-генератора; 4 — рекуперативный воздухоподогреватель; 5 — парогенератор; 6 — паровая турбина; 7 — конденсатор; 8 — насос

отдается воздуху в рекуперативном воздухоподогревателе, а на участке 6—7 — воде и пару в парогенераторе. Линия 7—1 соответствует отводу тепла q_2' с газами, покидающими котел, в атмосферу. В паросиловой части цикла по линии III—IV—V—I происходит передача тепла от газов к воде и пару в парогенераторе (линия III—IV — подогрев воды, линия IV—V — парообразование, линия V—I — перегрев пара). Отрезок I—II соответствует адиабатному расширению пара в турбине, линия II—III — конденсации пара в конденсаторе с отдачей тепла q_2'' охлаждающей воде. Полный термодинамический к. п. д. цикла будет равен

$$\eta_t = 1 - \frac{q_2' + q_2''}{q_1}.$$

Численная величина его может достигать 0,7, т. е. быть значительно выше, чем у обычных паросиловых и газотурбинных установок.

МГД-установки могут работать и по замкнутой схеме, при которой внутри газового контура циркулирует все время одно и то же рабочее тело.

Высокие температуры газа, необходимые для получения плазмы, требуют применения в МГД-генераторах особо тугоплавких и жароупорных материалов. Исследовательские работы по МГД-установкам интенсивно ведутся в настоящее время во многих странах.

7. Эксергетический метод оценки работы тепловых устройств

При переходе рабочего тела из неравновесного состояния в равновесное, как указывалось выше, максимальная работа будет получена в том случае, если процесс идет обратимо. При необратимом переходе получаемая полезная работа будет всегда меньше, так как часть энергии вследствие потерь, обусловленных необратимостью процесса, будет теряться.

Представим себе, что рабочее тело из состояния 1 переходит в состояние 2 в результате обратимого адиабатного расширения от параметров $p_1 T_1$ до $p'_1 T_2$ с последующим обратимым изотермическим расширением до $p_2 T_2$. Ввиду того, что на адиабатном участке тепло не подводится и не отводится ($s'_1 = s_1$), тепло подводимое к рабочему телу равно

$$q = T_2(s_2 - s_1) \text{ Дж/кг.} \quad (\text{IV-15})$$

С другой стороны, из первого закона термодинамики следует, что при переходе рабочего тела из состояния 1 в состояние 2 и условии, что скорость газа $w_1 = w_2$, расходуемая техническая работа, называемая работоспособностью или эксергией рабочего тела, относительно состояния 2 равна

$$l_{\max} = e_{\max} = i_1 - i_2 + q = i_1 - i_2 + T_2(s_2 - s_1) \text{ Дж/кг.} \quad (\text{IV-16})$$

Для любого состояния рабочего тела по его параметрам может быть вычислена его эксергия относительно окружающей внешней среды с параметрами $p_0 T_0 s_0$:

$$l_{\max} = e_1 - e_2 = i_1 - i_0 + T_0(s_0 - s_1) \text{ Дж/кг.} \quad (\text{IV-17})$$

При проходе потока рабочего тела через любой тепловой аппарат по параметрам начального и конечного состояний можно вычислить величину максимально возможной полезной работы, равной разности эксергий начального и конечного состояний:

$$l_{\max} = e_1 - e_2 = i_1 - i_2 + T_0(s_2 - s_1) \text{ Дж/кг.} \quad (\text{IV-18})$$

Так как реальные процессы всегда проходят необратимо, в любом тепловом аппарате наблюдается некото-

рая потеря работоспособности, связанная с необратимостью процесса. Эта потеря работоспособности, очевидно, может быть вычислена из выражения

$$\Delta l_{\text{пот}} = (e_1 - e_2) - l_{\text{пол}} \text{ Дж/кг}, \quad (\text{IV-19})$$

где $l_{\text{пол}}$ — полученная фактически полезная работа.

Эксергетический метод весьма удобен для анализа степени термодинамического совершенства тепловых машин и аппаратов, о котором можно судить по величине эксергетического к. п. д.:

$$\eta_{\text{экс}} = \frac{l_{\text{пол}}}{e_1 - e_2}, \quad (\text{IV-20})$$

Если процессы в аппарате обратимы, то $l_{\text{пол}} = l_{\text{мах}} = e_1 - e_2$ и эксергетический к. п. д. $\eta_{\text{экс}} = 1$. Чем больше необратимость процессов внутри аппарата, тем ниже значение $\eta_{\text{экс}}$.

В тех случаях, когда в аппарат входит поток тепла от какого-либо внешнего источника при температуре T эксергия этого потока определяется из выражения

$$e_T = q \left(1 - \frac{T_0}{T} \right) \text{ Дж/кг}, \quad (\text{IV-21})$$

где T_0 — температура окружающей среды.

Эта эксергия, очевидно, соответствует максимально возможному использованию подводимого тепла для получения работы, определяющемуся термодинамическим к. п. д. обратного цикла Карно.

При одновременном вводе в аппарат рабочего тела и подводе дополнительного тепла суммарная начальная эксергия определяется как

$$e_{\text{нач}} = e_1 + e_T \text{ Дж/кг} \quad (\text{IV-22})$$

и, следовательно, эксергетический к. п. д. будет равен

$$\eta_{\text{экс}} = \frac{l_{\text{пол}}}{e_1 + e_T - e_2}. \quad (\text{IV-23})$$

Если в тепловом аппарате полезная работа не производится, потеря работоспособности потоков рабочего тела и тепла составляет

$$\Delta e = (e_1 + e_T) - e_2 \text{ Дж/кг}. \quad (\text{IV-24})$$

В этом случае понятие эксергетического к. п. д. теряет смысл и степень термодинамического совершенства можно определять просто отношением

$$\sigma = e_{\text{вых}}/e_{\text{нач}}, \quad (\text{IV-25})$$

которое показывает меру необратимости процессов, протекающих внутри аппарата.

Эксергетический метод, позволяющий судить о степени обратимости процессов внутри тепловых машин и аппаратов по внешним параметрам, получает все более широкое распространение в теплотехнике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вукалович М. П. и Новиков И. И. Термодинамика. М., «Машиностроение», 1972. 670 с. с ил.
2. Кириллин В. А. Техническая термодинамика. М., «Энергия», 1968. 470 с. с ил.
3. Чечеткин А. В. Техническая термодинамика. М., изд. МХТИ им. Менделеева, 1967. 122 с. с ил.
4. Теплотехника. Изд. 2-е М., «Металлургия», 1973. 479 с. с ил. Авт.: А. А. Щукин, И. Н. Сушкин, Р. Г. Зах и др.

Раздел второй

ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ

Глава V

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

1. Общие понятия

Теория подобия изучает свойства заведомо подобных систем и представляет собой учение о подобии явлений.

Применение математического анализа при исследовании физических явлений не всегда оказывается плодотворным. Большей частью удастся дать только математическую формулировку задачи, т. е. составить дифференциальные уравнения, описывающие рассматриваемое явление, и установить так называемые условия однозначности, которые из целого класса явлений, охватываемых дифференциальным уравнением, выделяют одно конкретное явление.

В таких сложных случаях приходится обращаться к эксперименту и находить связь между характеризующими явление величинами в форме эмпирического уравнения, составленного на основании данных единичного опыта.

Полученная в этом случае эмпирическая зависимость справедлива только для рассматриваемого конкретного случая и произвольное распространение ее на другие случаи, отличающиеся от изученного на опыте, незаконмерно.

Метод обработки данных опыта, делающий закономерным распространение единичного опыта на другие случаи, основан на учении о подобии явлений.

Учение о подобии делает возможным из дифференциальных уравнений и условий однозначности сформулировать некоторые выводы, не прибегая к интегриро-

ванию. На основе полученных выводов возможна и математическая обработка данных опыта, которая охватывает все подобные между собой явления. Так устанавливаются границы распространения единичного опыта.

Таким образом, под общей теорией подобия мы понимаем такой метод, который применяется при обра-

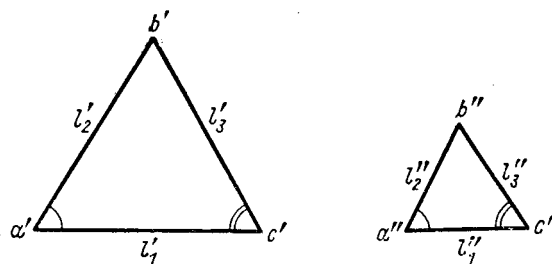


Рис. 35. К определению констант и инвариантов подобия

ботке результатов опыта и исследовании дифференциальных уравнений.

Общая теория подобия впервые была разработана русскими и советскими учеными В. Л. Кирпичевым, М. В. Кирпичевым, А. А. Гухманом, Л. С. Эйгенсоном, Г. П. Иванцовым и др.

Сам термин «подобие» заимствован из геометрии. Известно, что отношение сходственных размеров геометрически подобных фигур есть одно и то же число. Если линейные размеры таких фигур рассматривать не только как скалярные величины, но и как векторы, то подобные фигуры должны быть так ориентированы в пространстве, чтобы их сходственные стороны были параллельны между собой.

Так, два подобных треугольника (рис. 35) имеют все сходственные стороны параллельными друг другу. Сторона первого треугольника $a'b'$ параллельна сходственной стороне второго треугольника $a''b''$, а их отношение есть постоянное число, представляющее численное значение отношений любых сходственных линейных величин обеих фигур. Если l'_1 , l'_2 и l'_3 — линейные размеры сторон $a'c'$, $a'b'$ и $b'c'$ первого треугольника, а l''_1 , l''_2 , l''_3 — сторон $a''c''$, $a''b''$ и $b''c''$ второго треугольника, то из условия подобия следует, что

$$\frac{l_1''}{l_1'} = \frac{l_2''}{l_2'} = \frac{l_3''}{l_3'} = c. \quad (V-1)$$

Если бы рассматривали отношение не линейных величин, а величин других размерностей, например отношение площадей f' и f'' , то это постоянное число стало бы другим и для площадей $f'' : f' = c^2$. Таким образом, постоянство числа, представляющего отношение сходственных величин в подобных фигурах, ограничено только величинами определенной размерности. Эти числа называются константами подобия, а уравнение (V-1) представляет одну из форм математического определения подобия.

Если любой характерный размер модели $r_m = r''$ отличается от соответствующего характерного размера образца в $r_{об} = r'$ в c_b раз, то величина

$$\frac{r''}{r'} = c_b \quad (V-2)$$

есть линейный масштаб моделирования.

Определению подобия можно дать и другую математическую формулировку.

Равенство (V-1) может быть представлено в таком виде:

$$\frac{l_2'}{l_1'} = \frac{l_2''}{l_1''} = i_1; \quad \frac{l_3'}{l_1'} = \frac{l_3''}{l_1''} = i_2. \quad (V-3)$$

В уравнениях (V-3) величины, характеризующие первый и второй треугольники, отделены друг от друга: в левой части равенств (V-3) стоят величины, относящиеся к первому, а в правой части — ко второму треугольнику. В этом случае величины l_2 и l_3 выражены через l_1 , выбранную за единицу измерения.

Способ измерения длин, представленный равенствами (V-3), иллюстрирует изображение величины отрезков безразмерными числами. Измеренные таким способом величины отрезков называются величинами, выраженными в относительных единицах, или, если речь идет о координатной системе, — в относительных координатах.

Равенства (V-3) показывают, что в подобных фигурах все сходственные длины после деления их на характерный масштаб длины (в данном случае — величину l_1) будут одинаковыми. Благодаря свойству оставаться неизменными отношения i называются инвариантами подобия.

Отличие инвариантов подобия i от констант подобия c состоит в том, что при переходе от одного отрезка фигуры к другому кон-

станта подобия остается постоянной, а инвариант подобия меняется, тогда как, наоборот, при замене одной подобной фигуры другой, имеющей иные размеры, c меняется, а i остается неизменным. Поэтому для обозначения их свойств употребляют разные символы: $c = \text{const}$ (постоянно) и $i = \text{inv}$ (инвариантно, неизменно) или $i = \text{idem}$ (одно и то же, одинаково).

Уравнения (V-1) — (V-3) содержат безразмерные величины (безразмерные параметры или безразмерные комплексы), под которыми подразумеваются любые величины, физические постоянные или любые их комбинации или комплексы, образованные так, чтобы все размерности сократились.

У безразмерной величины сумма показателей степени равна нулю. Например, отношение удельных теплоемкостей k имеет следующую размерность:

$$k = c_p/c_v; \quad \frac{EM^{-1}T^{-1}}{EM^{-1}T^{-1}} = \frac{\text{кДж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{Т}^{-1}}{\text{кДж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{Т}^{-1}} = 1,$$

где E , M и T имеют размерность энергии, массы и температуры.

В теории подобия используют параметры для обозначения любой первичной или вторичной величин, а также для обозначения постоянной размерной или безразмерной величин или любой комбинации из них. В этом случае первичной называется любая величина, размерность которой пропорциональна первой степени единицы измерения. Если операция измерения основана на обычном масштабе длины, то длина стороны треугольника является первичной величиной, так как ее размерность есть только L . Однако площадь этого треугольника не первичная величина, так как она выражается квадратом длины. Вторичная величина является характеристикой системы с размерностью, выражаемой более чем одной первичной размерностью или одной размерностью в степени, большей единицы.

Для преобразования к безразмерным переменным используют операцию, называемую нормализацией. Будем подразумевать под этим термином операцию преобразования уравнений и граничных условий к безразмерному виду, содержащему безразмерные переменные.

Если каждый член уравнения поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

отнести к длине его большей полуоси a , принятой за ха-

ракторный масштаб, то это уравнение можно представить в виде

$$\left(\frac{x^2}{a}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 \left(\frac{z}{a}\right)^2 = 1, \quad (\text{V-4})$$

или если ввести обозначение отношений однородных величин через соответственные заглавные буквы $X = x/a$, $B = b/a$ и т. д., то в таком виде

$$X^2 + \frac{Y^2}{B^2} + \frac{Z^2}{C^2} = 1. \quad (\text{V-5})$$

Уравнение (V-5) представляет уравнение эллипсоида в безразмерных (относительных) координатах. При определенных значениях B и C оно является общим для всех подобных эллипсоидов. Каждый отдельный эллипсоид выделяется из группы подобных эллипсоидов посредством дополнительного задания определенного значения величины одной из полуосей. Уравнения, характеризующие свойства фигур, выраженные в безразмерных переменных, делаются инвариантными.

2. Подобие физических явлений

Установленное понятие подобия может быть распространено на любые физические явления. Можно говорить, например, о подобии движения двух потоков жидкости, т. е. кинематическом подобии, о подобии сил, вызывающих подобные между собой движения, — динамическом подобии, о подобии температур и тепловых потоков — тепловом подобии и т. д. Однако, чтобы использовать эти понятия, необходимо знать условия подобия рассматриваемых явлений. Прежде всего понятие подобия в отношении физических явлений применимо только к явлениям одной и той же природы, которые качественно одинаковы и аналитически описываются одинаковыми уравнениями как по форме, так и по содержанию.

Обязательной предпосылкой подобия физических явлений должно быть геометрическое подобие, так как подобные явления могут протекать в геометрически подобных системах.

Сопоставляются между собой при анализе подобных явлений только однородные величины, т. е. такие, которые имеют один и тот же физический смысл и одинаковую размерность и лишь в сходственных точках прост-

пространства и в сходственные моменты времени, имеющие общее начало отсчета.

Подобие двух физических явлений означает подобие всех величин, характеризующих рассматриваемые явления. Поэтому в сходственных точках пространства и в сходственные моменты времени любая величина φ' первого явления пропорциональна однородной с ней величине φ'' второго явления, т. е.

$$\varphi'' = c_{\varphi} \varphi' \quad (V-6)$$

Коэффициент пропорциональности c_{φ} является константой подобия или множителем подобного преобразования величины φ . Константа подобия c_{φ} не зависит ни от координат, ни от времени.

В общем случае такие параметры, как, например, скорость, температура, концентрация или плотность, коэффициент теплопроводности, коэффициент вязкости и др., в различных точках пространства имеют различные значения. Поэтому для подобия явлений необходимо подобие всех названных величин во всем объеме рассматриваемого пространства, т. е. подобие полей этих величин.

Математическим выражением условий подобия, полей плотности ρ , скорости ω , ускорения j и других для двух подобных систем являются следующие равенства:

$$\frac{\rho''}{\rho'} = c_{\rho}, \quad \frac{\omega''}{\omega'} = c_{\omega}, \quad \frac{j''}{j'} = c_j, \quad \frac{l''}{l'} = c_l \text{ и т. д.} \quad (V-7)$$

Кроме того, так как ω и j — векторы, то должно быть

$$\omega'' \parallel \omega' \text{ и } j'' \parallel j'. \quad (V-7a)$$

Отличие физического подобия от геометрического состоит в том, что каждая физическая величина имеет свою численно отличную от других константу подобия. Поэтому при каждой из них поставлен особый подстрочный индекс.

В сравниваемых подобных системах дифференциалы величин подобны самим величинам. Поэтому для них сохраняется постоянство констант подобия:

$$\frac{\rho''}{\rho'} = \frac{d\rho''}{d\rho'} = c_{\rho}; \quad \frac{\omega''}{\omega'} = \frac{d\omega''}{d\omega'} = c_{\omega}. \quad (V-8)$$

Подобие физических явлений может быть выражено и через константы подобия и посредством инвариантов подобия.

Применив равенства (V-7) к выбранным единицам измерения $\rho_0, \omega_0, j_0, l_0$ и т. д.

$$\frac{\rho''}{\rho'} = \frac{\rho_0''}{\rho_0'} = c_\rho, \quad \frac{\omega''}{\omega'} = \frac{\omega_0''}{\omega_0'} = c_\omega, \quad \frac{j''}{j'} = \frac{j_0''}{j_0'} = c_j, \quad \frac{l''}{l'} = \frac{l_0''}{l_0'} = c_l,$$

получим следующие равенства:

$$\frac{\rho''}{\rho_0''} = \frac{\rho'}{\rho_0'}, \quad \frac{\omega''}{\omega_0''} = \frac{\omega'}{\omega_0'}, \quad \frac{j''}{j_0''} = \frac{j'}{j_0'}, \quad \frac{l''}{l_0''} = \frac{l'}{l_0'} \quad (V-9)$$

или

$$\rho'' = \rho', \quad \omega'' = \omega', \quad j'' = j', \quad l'' = l'. \quad (V-9a)$$

Последние равенства означают, что если физические величины измерять в относительных единицах, то в подобных системах сходственные величины получают одинаковые численные значения. Они являются, таким образом, инвариантами подобия и штрихи при них могут быть опущены.

Инварианты $\frac{\rho}{\rho_0} = P, \quad \frac{\omega}{\omega_0} = W, \quad \frac{j}{j_0} = J, \quad \frac{l}{l_0} = L$ и т. д. в теории подобия называются симплексами.

Для сложных процессов, которые определяются многими физическими величинами, константы подобия этих величин находятся между собой в определенном соотношении и их нельзя выбирать произвольно. При более глубоком изучении оказывается, что при подобии сложных процессов, кроме постоянства отношений однородных величин, имеются еще дополнительные условия. Выявим эти условия на частных примерах.

Рассмотрим общий случай движения жидкости. По определению скорость w есть отношение пути l , пройденного частицей за промежуток времени t , к этому промежутку времени, т. е.

$$w = l/t. \quad (V-10)$$

Применив эту формулу к сходственным частицам двух подобных между собой потоков жидкости, прошедших подобные пути, будем иметь для первой системы $w' = l'/t'$; для второй системы $w'' = l''/t''$.

Деля почленно эти равенства друг на друга, получим

$$\frac{w''}{w'} = \frac{l''}{l'} : \frac{t''}{t'}. \quad (V-11)$$

На основании определения подобия [см. уравнение (V-6)] для рассматриваемого случая имеем следующие соотношения:

$$\frac{\omega''}{\omega'} = c_\omega, \quad \frac{l''}{l'} = c_l, \quad \frac{t''}{t'} = c_t. \quad (V-12)$$

Подставляя в уравнение (V-11) вместо отношения их константы подобия из уравнения (V-12), получим

$$c_\omega = \frac{c_l}{c_t} \text{ или } \frac{c_\omega c_t}{c_l} = 1. \quad (V-13)$$

Это и есть то искомое условие подобия, которым ограничивается произвольный выбор констант подобия c_ω , c_l и c_t .

Выражение (V-13) называется индикатором подобия.

Последнее условие можно представить в более наглядном виде.

Если в уравнение (V-13) вместо констант c_ω подставить их значения из соотношений (V-12) и все величины с одним штрихом сгруппировать в левой части уравнения, а с двумя штрихами в правой, то получим

$$\frac{\omega' t'}{l'} = \frac{\omega'' t''}{l''} \text{ или } \frac{\omega t}{l} = \text{idem}. \quad (V-14)$$

Уравнение (V-14) иллюстрирует основное свойство подобных между собой систем — существование особых величин, называемых критериями подобия, которые для всех подобных между собой явлений сохраняют одно и то же числовое значение. Критерии подобия являются безразмерными комплексами, составленными из величин, характеризующих явление. Нулевая размерность является основным свойством критериев подобия и служит проверкой правильности их составления.

Критерии подобия принято называть именами ученых, работавших в соответствующей области науки, и обозначать двумя начальными буквами их фамилий, например *Ne* (Ньютон), *Re* (Рейнольдс), *Eu* (Эйлер), *Nu* (Нуссельт), или просто большими буквами *K*.

Полученный выше критерий [см. уравнение (V-14)] называют критерием гомохронности и обозначают

$$Ho = \omega t / l. \quad (V-15)$$

Он характеризует временное подобие явлений, их однородность во времени или, иначе, связывает два мо-

мента времени, когда существует подобие. Если, например, $c_t = 1$, то процессы протекают синхронно.

Критерий подобия можно получить для любого физического явления. Для этого необходимо только иметь аналитическую зависимость между переменными рассматриваемого явления. Описание процесса в виде аналитической зависимости хотя бы в виде неинтегрируемых дифференциальных уравнений является необходимой предпосылкой теории подобия. Без этого все учение о подобии свелось бы лишь к простому определению подобия.

Критерии же подобия, полученные из дифференциальных и проинтегрированных уравнений, одни и те же. Это положение лежит в основе практического применения теории подобия.

Основные положения теории подобия обычно формулируются в виде трех теорем.

3. Первая теорема подобия

В общей форме теорема формулируется так: подобные между собой явления имеют одинаковые критерии подобия. Теорема устанавливает связь между константами подобия и позволяет выявить критерии подобия. Впервые это свойство подобных явлений установил Ньютон для случая механического подобия. Рассмотрим его вывод на примере второго закона Ньютона, когда

$$P_r = \frac{d(m\omega)}{dt}, \quad (V-16)$$

Если P_r есть равнодействующая внешних сил, действующих на элементарный объем несжимаемой жидкости, $\rho dV = m$ — масса, заключенная в этом объеме, и $\partial\omega/\partial t$ — ускорение ее, то уравнение (V-16) можно переписать в виде

$$P_r = m \frac{d\omega}{dt}. \quad (V-17)$$

Преобразуем уравнение (V-17) к безразмерному виду. Для этого возьмем в произвольной точке частицу массой m_0 и под действием силы P_0 она движется со скоростью ω_0 . Примем эти величины за масштабы P_r , m и ω . Для преобразования уравнения (V-17) к безразмер-

ному виду помножим левую его часть на P_r/P_0 , а правую — на $\frac{m_0/\omega_0}{t_0} \bigg/ \frac{m_0/\omega_0}{t_0}$ и введем обозначения

$$\frac{P_r}{P_0} = P; \quad \frac{m}{m_0} = M; \quad \frac{\omega}{\omega_0} = W; \quad \frac{t}{t_0} = T. \quad (\text{V-18})$$

После подстановки (V-18) в (V-17) оно преобразуется:

$$P_0 P = \frac{m_0 \omega_0}{t_0} M \frac{dW}{dt}$$

или после переноса всех множителей, принятых за масштабы, — в левую часть — в следующее:

$$\left(\frac{P_0 t_0}{m_0 \omega_0} \right) P = M \frac{dW}{dT}, \quad (\text{V-19})$$

Применим (V-19) к двум подобным между собой течениям жидкости. Для того чтобы отличить их друг от друга, величины, относящиеся к первой жидкости, обозначим одним штрихом, а ко второй — двумя.

Для первой жидкости

$$\left(\frac{P'_0 t'_0}{m'_0 \omega'_0} \right) P' = M' \frac{dM'}{dT'}, \quad (\text{V-19a})$$

а для второй

$$\left(\frac{P''_0 t''_0}{m''_0 \omega''_0} \right) P'' = M'' \frac{dW''}{dT''}. \quad (\text{V-19b})$$

Масштабы измерения обеих систем избраны подобными, массы частиц m'_0 и m''_0 избраны в геометрически сходственных точках, за промежутки времени t'_0 и t''_0 частицы проходят подобные отрезки траекторий и объемы их dV' и dV'' соответствуют требованию, выраженному в равенствах (V-8), т. е. отношение $dV' : dV''$ равно отношению подобных конечных объемов первой и второй системы. При исполнении этих требований величины, P , M , W и T в уравнениях (V-19a) и (V-19b) станут, как показано ранее, согласно равенствам (V-9) и (V-9a), инвариантами, т. е. их численные значения в обоих уравнениях будут одинаковы:

$$P' = P'', \quad M' = M'', \quad W' = W'', \quad T' = T''. \quad (\text{V-20})$$

Тогда в уравнениях (V-19a) и (V-19б) при P, M, W и T можно отбросить штрихи и написать их в виде

$$\left(\frac{P'_0 t'_0}{m'_0 \omega'_0} \right) P = M \frac{dW}{dt}; \quad (V-21)$$

$$\left(\frac{P''_0 t''_0}{m''_0 \omega''_0} \right) P = M \frac{dW}{dT}. \quad (V-22)$$

Из (V-21) и (V-22) следует, что множители $\frac{P'_0 t'_0}{m'_0 \omega'_0}$ и $\frac{P''_0 t''_0}{m''_0 \omega''_0}$ равны между собой, т. е.

$$\frac{P'_0 t'_0}{m'_0 \omega'_0} = \frac{P''_0 t''_0}{m''_0 \omega''_0}. \quad (V-23)$$

Таким образом, уравнения, выражающие связь между физическими величинами, представленные в безразмерных единицах, оказались одинаковыми для обоих подобных явлений.

Это утверждение и составляет содержание первой теоремы подобия.

Формула (V-23) относится к величинам, принятым в качестве масштабов. Но так как этот выбор сделан произвольно, то равенство (V-23) относится к любой паре сходственных точек обеих жидкостей. Поэтому индекс 0 можно опустить и написать

$$\frac{P' t'}{m' \omega'} = \frac{P'' t''}{m'' \omega''}. \quad (V-23a)$$

Вывод, сделанный для двух подобных явлений, можно распространить на любое их число. Для всех подобных явлений комплекс $Pt/m\omega$ имеет одно и то же значение, т. е. он есть инвариант подобия, что можно обозначить так:

$$Pt/m\omega = \text{idem}. \quad (V-24)$$

В отличие от инвариантов-симклесов, представляющих отношение двух однородных величин, здесь мы встречаемся с комплексом — выражением, составленным из разнородных величин.

Выше такие инварианты-комплексы и были названы критериями подобия.

Выражение (V-23) является критерием механического подобия и было впервые выведено Ньютоном (Newton) и потому названо его именем:

$$\frac{Pt}{m\omega} = Ne, \quad (V-25)$$

Критерии можно комбинировать между собой. Произведение или частное двух инвариантов есть тоже инвариант. Таким путем можно получить новые критерии, заменяющие первоначальные. Например, $Ne:Ho = \frac{Pt}{m\omega^2} = Ne'$. Преобразованный так критерий Ньютона удобнее применять для случая стационарных процессов, в уравнения которых время явно не входит.

Критерии можно преобразовать в комплексы, содержащие константы подобия. Покажем это на примере равенства (V-23а), которое можно представить в таком виде:

$$\frac{\frac{P'' t''}{m'' \omega''}}{\frac{P' t'}{m' \omega'}} = 1 \quad (V-236)$$

или

$$\frac{\frac{P'' t''}{P' t'}}{\frac{m'' \omega''}{m' \omega'}} = 1.$$

Заменяя отношения величин через их константы подобия c_p , c_m , c_ω и c_t , получим

$$c = \frac{c_p c_t}{c_m c_\omega} = 1. \quad (V-26)$$

Величина c была выше названа индикатором подобия. Первая теорема подобия на основании последнего равенства может быть сформулирована так: у подобных явлений индикаторы подобия равны единице.

Первая теорема подобия показывает, что в опыте надо измерять все те величины, которые содержатся в критериях подобия изучаемого процесса.

4. Вторая теорема подобия

Для многих научно-технических задач нельзя найти полное аналитическое решение. В этом случае приходится удовлетворяться частичным анализом. Это метод нахождения некоторой информации о решении; обычно она беднее, чем содержащаяся в полном решении.

Так, например, вследствие ограниченности возможностей аналитического решения дифференциальных уравнений движения жидкости или теплопроводности большое значение приобретает метод установления вида интегральных функций без решения дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения и принадлежащие к ним краевые условия, устанавливающие однозначную зависимость между параметрами, т. е. любой первичной или вторичной величиной или размерной постоянной, в ряде случаев могут быть преобразованы так, что эти параметры будут сгруппированы в критерии и последние войдут в интеграл в качестве безразмерных параметров или любой комбинации из них. Уравнение, представляющее зависимость между безразмерными параметрами (критериями — симлексами и комплексами), называется критериальным уравнением.

Возможность представления интеграла как функции от критериев дифференциального уравнения и составляет содержание второй теоремы подобия. Эту теорему называют II-теоремой Бэкингема, хотя в действительности она является результатом работы многих исследователей. Бэкингом она была выведена в 1914 г. для случая, когда физическое уравнение не содержит дифференциальных параметров, т. е. для частной задачи.

Другими словами, II-теорема устанавливает связь между функцией, выраженной через размерные параметры, и функцией в безразмерной форме.

Использование соответственно выбранных безразмерных параметров дает возможность составить и обобщить результаты, а также позволяет рассматривать в совокупности группу явлений, каждое из которых описывается различными уравнениями в размерной форме. Таким образом, можно предсказать протекание еще не исследованных явлений данной группы, что нельзя сделать с помощью уравнений в размерной форме.

Применение безразмерных параметров уменьшает число независимых координат.

В любой физической задаче мы имеем один или более зависимых параметров, каждый из которых является функцией некоторых независимых параметров. Обозначим зависимый параметр через q_1 . Пусть число независимых параметров равно $m - 1$. Обозначим их через $q_2, q_3, \dots, q_m$. Тогда

$$q_1 = f_1(q_2, q_3, \dots, q_m), \quad (V-27)$$

где f_1 — неизвестная функция. Уравнение (V-27) эквивалентно соотношению

$$f_2(q_1, q_2, q_3, \dots, q_m) = 0, \quad (V-27a)$$

где f_2 — другая неизвестная функция.

Теперь сформулируем П-теорему.

Если имеется соотношение между m параметрами в виде

$$f_2(q_1, q_2, q_3, \dots, q_m) = 0, \quad (V-27b)$$

то можно найти эквивалентное соотношение между m безразмерными параметрами:

$$f_3(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n) = 0, \quad (V-28)$$

где число n определяется как

$$n = m - k. \quad (V-29)$$

Здесь m — число параметров q в уравнении (V-27a) и k — наибольшее число параметров, содержащихся в первоначальном списке $q_1, q_2, q_3, \dots, q_m$, которые не могут быть объединены в какой-либо безразмерный комплекс.

Следуя общепринятой практике, обратимся к безразмерным комплексам $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$, называемым комплексами П.

В своей первоначальной формулировке П-теоремы Бэкингом установлен, что k равно минимальному числу независимых размерностей, необходимых для образования размерностей всех параметров $q_1, q_2, \dots, q_m$. Обозначим это минимальное число через r .

Позднее (1946 г.) Ван Драйст показал, что хотя обычно k равно r , имеются исключения, и более общее правило записывается как

$$k \leq r. \quad (V-30)$$

Рассмотрим пример использования этой теоремы.

Предположим, что мы изучаем установившееся, стабилизированное ламинарное течение пьютоновской жидкости в круглой трубе. Допустим, что нам неизвестно уравнение для перепада давления. Чтобы определить вид уравнения, применим анализ размерностей. Если считать, что перепад давления Δp является функцией скорости w , длины трубы L , диаметра d , плотности ρ и вязкости μ , то можно написать

$$f_2(\Delta p, L, d, w, \mu, \rho) = 0. \quad (V-31)$$

Из рассмотрения размерностей всех шести параметров уравнения (V-31) следует, что минимальное число независимых размерностей, из которых могут быть образованы размерности этих параметров, равно трем, т. е. например, размерности силы, длины и времени.

Следовательно, имеем $r=3$. Теперь найдем три из шести размерных параметров, которые не образуют безразмерного комплекса. Комбинация только плотности, диаметра и скорости не может быть безразмерной, поскольку из трех этих параметров только плотность имеет размерность массы. Поэтому заключаем, что в данном конкретном случае $k=3=r$.

Согласно П-теореме, число необходимых безразмерных параметров равно $6-3=3$.

Если невозможно найти какой-либо комплекс из трех параметров, который не может быть безразмерным, то следует постараться найти комплекс из двух параметров и т. д. до тех пор, пока число k не будет определено.

В нашем примере после исследования можно найти, что одной из безразмерных зависимостей является

$$f_3\left(\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho\omega^2}, \frac{L}{d}, \frac{\rho\omega d}{\mu}\right) = 0. \quad (V-32)$$

На основании рассмотренного примера приведем условия, которые должны быть выполнены при использовании П-теоремы:

1) в систему безразмерных параметров должны входить все параметры, имеющие физический смысл, включая все независимые параметры и один зависимый;

2) каждый параметр, содержащийся в первоначальном списке, должен входить в безразмерные комплексы П, по крайней мере, один раз;

3) размерности, используемые для образования размерностей физических параметров, должны быть независимыми или же лишние размерности должны быть скомпенсированы.

Такой процесс компенсации осуществляется следующим образом. Для каждой лишней размерности, например для размерности массы, в рассматриваемой задаче вводим в список параметров размерную постоянную, показывающую, что размерность массы является лишней.

В нашем примере к параметрам, содержащимся в уравнении (V-31), следует добавить g (размерную постоянную).

5. Третья теорема подобия

Первые две теоремы исходят из существования подобия как факта. Третья теорема, наоборот, ищет те условия, которые необходимы и достаточны для того, чтобы между явлениями установилось подобие.

Третья теорема подобия была сформулирована в 1930 г. М. В. Кирпичевым.

Третья теорема, как и первые две, исходит из предположения, что для рассматриваемого физического явления можно составить дифференциальные уравнения и для него сформулированы краевые условия и что установлено существование и единственность решения уравнения при заданных краевых условиях. Если, кроме того, для коэффициентов и физических параметров, входящих в дифференциальное уравнение, будут известны численные их значения, то все эти данные выделяют одно единственное явление, происходящее в определенных геометрических контурах.

Совокупность всех перечисленных условий называется условиями однозначности явления, выделяющими из всей совокупности явлений, описываемых дифференциальным уравнением, одно единственное конкретное явление.

Первая и вторая теоремы позволяют установить для него число и вид критериев подобия и существование зависимости между ними. Это относится, конечно, только к тому случаю, когда подобие может существовать, т. е. когда число безразмерных параметров (критериев) n меньше числа параметров $* m$, содержащихся в дифференциальном уравнении.

В этом случае существует неограниченное число подобных явлений или, как принято говорить, группа подобных явлений.

Представим себе какое-нибудь единичное явление, например явление, которое исследуется на какой-нибудь

* В этой главе слово «параметр» использовано для обозначения любой первичной или вторичной величины, размерной постоянной и безразмерной величины или любой комбинации из них (прим. авт.).

экспериментальной установке. Оно является как бы образцом, представителем целой группы подобных ему явлений. Содержание третьей теоремы подобия заключается в установлении условий, необходимых и достаточных для того, чтобы другое явление входило в состав этой группы и было подобно первому.

Подобие условий однозначности необходимо для существования подобия явлений. Например, в условия однозначности входят граничные условия. Если они не подобны, то это значит, что уже в некоторой части системы, именно на ее границах, подобие не имеет места.

Для ответа на вопрос, достаточно ли создать подобие условий однозначности для того, чтобы получилось подобие во всем объеме первого и второго явлений, необходимо выяснить, являются ли константы подобия посредством которых делается переход от параметров образца φ' к сходственному параметру подобного ему явления $\varphi'' = \varphi' c_\varphi$, произвольными. Вспомним, что в подобных системах множители преобразования c_φ не вполне произвольны. Выбор их ограничивается условием равенства критериев подобия у подобных систем. Может оказаться, что из различных величин, входящих в условия однозначности, могут быть составлены некоторые из критериев образца. Тем самым выбор констант подобия ограничен. Он ограничивается требованием, чтобы эти критерии были одинаковы для первого и второго явлений или, что то же, соответствующие индикаторы подобия равнялись единице. В противном случае сравниваемые явления не будут подобными.

Таким образом, дополнительным условием подобия является равенство критериев, составленных из одних только параметров, входящих в условия однозначности. Такие критерии называются определяющими.

Таким образом, третья теорема подобия формулируется так: подобны образцу те явления, которые имеют с ним подобные условия однозначности и одинаковые определяющие критерии.

Одинаковость же критериев, составленных из других параметров, не входящих в условия однозначности, так называемых неопределяющих критериев, получается сама собой как следствие установившегося подобия.

Третью теорему иногда называют обратной теоремой. В отличие от первой, прямой, теоремы она не может быть формулирована общим образом, так как для каж-

дого частного случая условия однозначности могут быть сформулированы несколькими различными способами. При перемене их формулировки определяющими становятся другие критерии. Поэтому понятие «определяющий» не является свойством, присущим определенным критериям.

Глава VI

МОДЕЛИРОВАНИЕ

1. Определение

Результаты единичного эксперимента не могут быть непосредственно распространены на случаи, для которых начальные и краевые условия и значения физических параметров полностью не совпадают с теми, которые имели место при экспериментальном исследовании. Ограниченность области применения результатов экспериментального исследования выдвигает вопрос о возможности обобщения опытных данных.

Эту возможность открывает метод моделирования, позволяющий распространить результаты единичного опыта по изучению какого-либо явления на целую группу явлений, подобных исследованному.

Этот метод указывает на то, как должно быть поставлено экспериментальное исследование и как нужно обрабатывать данные, чтобы распространение результатов опытов на группу подобных явлений было обоснованным.

Физическое явление, являющееся объектом экспериментального исследования, можно рассматривать как модель целой группы подобных явлений. Поэтому моделирование какого-либо физического явления является осуществлением явления, подобного «образцу» (моделируемому явлению).

Более полное определение моделирования подразумевает осуществление такого явления, в котором поля всех физических переменных подобны полям соответствующих переменных в моделируемом явлении.

Моделирование, во-первых, имеет целью воспроизведение на модели явления, подобного явлению в существующем образце, и, во-вторых, когда образец еще не существует, и модель, исследуемая ранее сооружения об-

разца, являются «прообразом» будущих подобных ей (в геометрическом и физическом смысле) образцов.

В первом случае мы имеем дело с исследованием труднодоступных или совсем недоступных промышленных объектов, во втором случае — с изучением свойств вновь запроектированных устройств на моделях.

Оба случая исследования заключаются в возможности обобщения экспериментальных результатов и распространения их на все явления, подобные данному.

2. Правила моделирования

В задачу экспериментального исследования входит изучение полей всех существенных для изучаемого процесса параметров (физических переменных). В ряде случаев вполне достаточно установления закономерностей, характерных для средних (по поверхности или по объему) значений соответствующих параметров. При этом объем экспериментов сокращается.

Для моделирования необходимо описание физического явления в образце в виде системы уравнений, характеризующих природу явления, а также начальные и граничные условия в безразмерном виде.

Как следует из теории подобия, такая система уравнений характеризует целую группу подобных явлений.

Если два явления протекают в геометрически подобных условиях и при этом безразмерные уравнения, описывающие оба явления, тождественно одинаковы, то рассматриваемые явления подобны. Отсюда определим правила моделирования:

1) модель должна быть геометрически подобна образцу;

2) явления в модели и образце должны принадлежать к одному и тому же классу, т. е. описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями;

3) начальные и граничные условия в модели должны быть в безразмерном виде реализованы таким образом, чтобы они тождественно совпадали с такими же условиями для образца;

4) одноименные безразмерные параметры, входящие в дифференциальные уравнения, начальные и краевые условия в модели и образце должны быть соответственно равны.

При аналитическом решении задачи все краевые ус-

ловия равноценны, так как они являются теми дополнительными требованиями, которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений.

Иначе обстоит дело при экспериментальном исследовании физического явления на основе метода моделирования, когда возникает необходимость практической реализации краевых условий. В данном случае обнаруживается целесообразность классификации краевых условий по признаку их реализуемости. Анализ ряда физических явлений приводит к выводу, о том, что краевые условия полезно разделить на две категории: неуправляемые и управляемые.

Первые из них реализуются независимо от желания исследователя в силу самой природы физического явления. Вторые же могут быть реализованы по усмотрению экспериментатора. Рассмотрим, например, стационарный процесс течения жидкости внутри трубы.

Граничные условия для рассматриваемого явления могут быть сформулированы следующим образом:

- 1) во входном сечении трубы имеется вполне определенное распределение скоростей жидкости;
- 2) в каждой точке потока имеется определенное давление;
- 3) на границе раздела потока и трубы скорость жидкости равна нулю.

Из перечисленных граничных условий условия 1 и 2 являются управляемыми, а условие 3 наблюдается всегда независимо от воли исследователя и относится к числу неуправляемых.

Начальные условия всегда управляемые.

Чтобы задача была сформулирована однозначно, управляемые граничные условия должны быть заданы на протяжении всех пространственных границ исследуемого явления, иными словами, границы исследуемой области должны быть проведены там, где они достоверно известны.

Задача облегчается тем, что условием моделирования является геометрическое подобие модели и образца.

Для реализации моделирования безразмерные неуправляемые граничные условия (п. 3) в модели и образце должны быть тождественны. Для этой цели достаточно осуществить равенство одноименных безразмерных параметров, входящих в соответствующие безразмерные граничные условия модели и образца.

Например, используя закон переноса Фурье (см. гл. I), неуправляемые краевые условия, наблюдаемые на границе раздела двух тел при прохождении тепла через их границу, можно записать в виде

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_0'} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_0''} = \text{inv}; \quad (\text{VI-1})$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0'} \text{grad} \frac{\vartheta_1}{\vartheta_0'} = \frac{\lambda_2}{\lambda_0''} \text{grad} \frac{\vartheta_2}{\vartheta_0''} = \text{inv}, \quad (\text{VI-2})$$

где ϑ — избыточная температура, отсчитанная от температуры среды в месте соприкосновения с другой средой, как от нуля (при $t=0$ $\vartheta=\vartheta^*=\text{const}$);

t — время;

ϑ^* — начальная температура среды;

λ — коэффициент теплопроводности среды.

Величины $\frac{\vartheta_1}{\vartheta_0'} = \theta_1$ и $\frac{\vartheta_2}{\vartheta_0''} = \theta_2$, а также $\frac{\lambda_1}{\lambda_0'} \text{grad} \frac{\vartheta_1}{\vartheta_0'}$

и $\frac{\lambda_2}{\lambda_0''} \text{grad} \frac{\vartheta_2}{\vartheta_0''}$ в (VI-1) и (VI-2) стали инвариантами, так как масштабы ϑ_0 и λ_0 были выбраны подобными.

Обозначая $\frac{\lambda}{\lambda_0} = \Lambda$, получим

$$\theta_1' = \theta_2'; \quad (\text{VI-1a})$$

$$\Lambda_1' \text{grad} \theta_1' = \Lambda_2' \text{grad} \theta_2'. \quad (\text{VI-2a})$$

Индексы 1 и 2 относятся соответственно к первой и второй среде.

Равенство (VI-2a) означает, что безразмерный тепловой поток, выходящий из одного тела, равен безразмерному тепловому потоку, входящему в другое.

Тождественная одинаковость условий (VI-1a) в модели и образце соблюдается автоматически. Для осуществления же тождественной одинаковости условия (VI-2a) в модели и образце* достаточно, чтобы безразмерные параметры Λ_1 и Λ_2 в модели были равны соответствующим параметрам в образце, т. е. чтобы $\Lambda_1' = \Lambda_1$ и $\Lambda_2' = \Lambda_2$.

* Индексы: два штриха и один штрих относятся соответственно к модели и образцу. (Прим. авт.).

В случае гидродинамического моделирования, когда невозможно получить точное решение уравнений Навье-Стокса (см. гл. IX), прибегают к экспериментам на моделях.

Первым условием в этом случае является геометрическое подобие, которое выполняется, если размеры всех сходственных элементов модели и образца отличаются в одно и то же число раз и, кроме того, если сходственные элементы расположены под одинаковыми углами к вектору скорости набегающего потока.

Условия геометрического подобия и линейный масштаб моделирования определяются равенством (V-2).

Кинематическое подобие течения около модели и образца выполняется, если в сходственных точках, координаты которых пропорциональны

$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'} = \frac{r''}{r'} = c_l, \quad (\text{VI-3})$$

компоненты векторов скорости удовлетворяют условию

$$\frac{w_x''}{w_x'} = \frac{w_y''}{w_y'} = \frac{w_z''}{w_z'} = \frac{w_\infty''}{w_\infty'} = c_w, \quad (\text{VI-4})$$

где w_∞'' и w_∞' скорости невозмущенного набегающего потока соответственно у модели и у натуре на большом расстоянии («на бесконечности») от тела. Величина c_w называется кинематическим масштабом моделирования.

Из условия (VI-3) вытекает, что сходственные точки двух течений можно определить следующим образом:

$$\frac{x''}{r''} = \frac{x'}{r'}; \quad \frac{y''}{r''} = \frac{y'}{r'}; \quad \frac{z''}{r''} = \frac{z'}{r'}, \quad (\text{VI-5})$$

т. е. как точки с одинаковыми относительными значениями координат.

Точно так же из условия (VI-4) получаем, что в сходственных точках двух кинематически подобных течений независимо от кинематического масштаба моделирования безразмерные значения соответствующих составляющих скорости одинаковы:

$$\frac{w_x''}{w_\infty''} = \frac{w_x'}{w_\infty'}; \quad \frac{w_y''}{w_\infty''} = \frac{w_y'}{w_\infty'}; \quad \frac{w_z''}{w_\infty''} = \frac{w_z'}{w_\infty'}. \quad (\text{VI-6})$$

Условие динамического подобия двух течений, очевидно, выполняется в том случае, когда значения соот-

ветственных сил, приложенных к модели и образцу, отличаются в одно и то же число раз:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho'' \frac{dw_x''}{dt}}{\rho' \frac{dw_x'}{dt}} &= \frac{\rho'' \frac{dw_y''}{dt}}{\rho' \frac{dw_y'}{dt}} = \frac{\rho'' \frac{dw_z''}{dt}}{\rho' \frac{dw_z'}{dt}} = c_R; \\ \frac{X''}{X'} &= \frac{Y''}{Y'} = \frac{Z''}{Z'} = c_R; \\ \frac{P_x''}{P_x'} &= \frac{P_y''}{P_y'} = \frac{P_z''}{P_z'} = c_R; \\ \frac{R_x''}{R_x'} &= \frac{R_y''}{R_y'} = \frac{R_z''}{R_z'} = c_R. \end{aligned} \right\} \quad (VI-7)$$

Первое из приведенных равенств содержит проекции сил инерции, стоящие в левой части уравнений Навье-Стокса (см. гл. IX), второе — сил объемных, третье — сил гидродинамического давления и четвертое — сил трения, сгруппированных в правой части уравнений Навье — Стокса.

Коэффициент c_R характеризует динамический масштаб моделирования. Из равенства (VI-7) видно, что вне зависимости от величины масштаба c_R динамическое подобие имеет место в случае, если безразмерные значения соответствующих сил, приложенных к модели и образцу, одинаковы:

$$\begin{aligned} \frac{X''}{\rho'' \frac{dw_x''}{dt}} &= \frac{X'}{\rho' \frac{dw_x'}{dt}}, \quad \frac{Y''}{\rho'' \frac{dw_y''}{dt}} = \frac{Y'}{\rho' \frac{dw_y'}{dt}} \text{ и т. д.}; \\ \frac{P_x''}{\rho'' \frac{dw_x''}{dt}} &= \frac{P_x'}{\rho' \frac{dw_x'}{dt}} \text{ и т. д.}; \\ \frac{R_x''}{\rho'' \frac{dw_x''}{dt}} &= \frac{R_x'}{\rho' \frac{dw_x'}{dt}} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Гидродинамически подобными являются течения, в которых выполняются одновременно условия геометрического, кинематического и динамического подобия.

3. Критерии гидродинамического подобия

Третья теорема подобия (см. гл. V) требует равенства определяющих критериев в сходственных точках образа и модели. Рассмотрим на примере двух гидродинамически подобных течений вывод критериев подобия.

Если записать уравнение Навье—Стокса в безразмерном виде, то для таких течений эти уравнения окажутся совершенно идентичными.

Приведем к безразмерному виду уравнение Навье—Стокса, записанное для одномерного потока в виде

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho \left(w \frac{\partial w}{\partial x} \right) = X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{1}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (\text{VI-8})$$

Для этой цели сначала все величины, входящие в уравнение, выразим в долях соответствующих величин для невозмущенного течения вдали от тела (w_∞ ; ρ_∞ ; μ_∞ ; p_∞) и также характерных значений времени (t_0) и размера (l):

$$\begin{aligned} \frac{w_\infty}{t_0} \cdot \frac{\partial \frac{w}{w_\infty}}{\partial \frac{t}{t_0}} + \frac{w_\infty^2}{l} \left(\frac{w \partial \frac{w}{w_\infty}}{w_\infty \partial \frac{x}{l}} \right) &= \frac{X}{\rho} - \frac{p_\infty \rho_\infty}{l \rho_\infty \rho} \cdot \frac{\partial \frac{p}{p_\infty}}{\partial \frac{x}{l}} + \frac{\mu_\infty w_\infty}{\rho_\infty l^2} \times \\ &\times \frac{\rho_\infty \mu}{\rho \mu_\infty} \left\{ \left[\frac{\partial^2 \frac{w}{w_\infty}}{\partial \left(\frac{x}{l} \right)^2} \right] + \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial}{\partial \frac{x}{l}} \left(\frac{\partial \frac{w}{w_\infty}}{\partial \frac{x}{l}} \right) \right\} \quad (\text{VI-9}) \end{aligned}$$

а затем разделим на величину $\frac{w_\infty^2}{l}$, пропорциональную силе инерции для единицы массы:

$$\frac{l}{t_0 w_\infty} \cdot \frac{\partial \frac{w}{w_\infty}}{\partial \frac{t}{t_0}} + \frac{w}{w_\infty} \cdot \frac{\partial \frac{w}{w_\infty}}{\partial \frac{x}{l}} = \frac{gl}{w_\infty^2} - \frac{p_\infty}{\rho_\infty w_\infty^2} \cdot \frac{\rho_\infty}{\rho} \cdot \frac{\partial \frac{p}{p_\infty}}{\partial \frac{x}{l}} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu_{\infty}}{\rho_{\infty} l w_{\infty}} \cdot \frac{\rho_{\infty}}{\rho} \cdot \frac{\mu}{\mu_{\infty}} \left\{ \left[\frac{\partial^2 \frac{w}{w_{\infty}}}{\partial \left(\frac{x}{l} \right)^2} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \frac{x}{l}} \left(\frac{\partial \frac{w}{w_{\infty}}}{\partial \frac{x}{l}} \right) \right\}. \quad (VI-10)
\end{aligned}$$

Здесь принято, что массовая сила X представляет собой силу земного тяготения, т. е. $X/\rho = g$.

Безразмерное уравнение Навье — Стокса (VI-10) содержит следующие безразмерные комплексы: $\frac{l}{t_0 w_{\infty}}$,

$$\frac{gl}{w_{\infty}^2}, \frac{\rho_{\infty}}{\rho_{\infty} w_{\infty}^2}, \frac{\mu_{\infty}}{\rho_{\infty} l w_{\infty}}.$$

Очевидно, что для геометрически и кинематически подобных течений безразмерные уравнения движения (VI-10) будут одинаковыми в том случае, если каждый из этих комплексов имеет одно и то же значение для образца и модели и если в сходственных точках этих потоков относительные значения плотности и вязкости одинаковы ($\rho/\rho_{\infty} = \text{idem}$; $\mu/\mu_{\infty} = \text{idem}$):

$$\left. \begin{aligned}
\frac{l''}{t_0'' w_{\infty}''} &= \frac{l'}{t_0' w_{\infty}'} = \frac{1}{Ho} = Sh; & \frac{gl''}{w_{\infty}''^2} &= \frac{gl'}{w_{\infty}'^2} = \frac{1}{Fr}; \\
\frac{\rho_{\infty}''}{\rho_{\infty}'' w_{\infty}''^2} &= \frac{\rho'}{\rho_{\infty}' w_{\infty}'^2} = Eu; \\
\frac{\mu_{\infty}''}{\rho_{\infty}'' l'' w_{\infty}''} &= \frac{\mu'}{\rho_{\infty}' l' w_{\infty}'} = \frac{1}{Re}.
\end{aligned} \right\} \quad (VI-11)$$

Безразмерные комплексы (VI-11) являются, таким образом, критериями динамического подобия для геометрически и кинематически подобных систем.

Этим критериям подобия присвоены следующие обозначения и названия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{\omega t} &= Sh — \text{число Струхали}; \\ \frac{\omega^2}{gl} &= Fr — \text{число Фруда}; \\ \frac{p}{\rho \omega^2} &= Eu — \text{число Эйлера}; \\ \frac{\rho l \omega}{\mu} &= Re — \text{число Рейнольдса}. \end{aligned} \right\} \quad (VI-12)$$

В последних выражениях индексы опущены, так как в них следует подставлять некоторые характерные значения параметров, которые не обязательно соответствуют их значениям на «бесконечности».

Каждый из критериев динамического подобия был образован делением соответствующей силы на величину, пропорциональную силе инерции, поэтому число Фруда определяет отношение силы веса (объемной силы) к силе инерции, число Рейнольдса — отношение силы вязкости к силе инерции, число Струхали — отношение дополнительной (локальной) силы, вызванной неустановившимся характером движения, к силе инерции, число Эйлера — отношение силы гидродинамического давления к силе инерции.

В несжимаемой жидкости критерий Эйлера не является определяющим, так как в качестве характерного давления p можно взять динамическое давление $\rho \omega^2/2$, и тогда Eu — есть постоянное число.

Для среды переменной плотности в уравнение Навье — Стокса следует включить объемные силы Архимеда. Безразмерный множитель в идеальном газе

$$Ar = \frac{\Delta T_0}{T_\infty} \cdot \frac{1}{Fr}, \quad (VI-13)$$

где $\Delta T_0 = T_\infty - T_{ст}$, а T_∞ и $T_{ст}$ — температура набегающего потока (вдали от тела) и стенки, называют числом Архимеда, оно имеет значение для гидродинамического подобия в том случае, когда перепады температур в газовом потоке велики, а скорости малы.

Как видим, критерий Архимеда получается от деления относительного перепада температур на число Фруда.

В общем случае ($\beta \neq 1/T_\infty$, где β — коэффициент объемного расширения)

$$Ar = \frac{gl}{\omega^2} \beta \Delta T_0 = \frac{g \beta \Delta T_0 l^3}{\nu^2} \cdot \frac{\nu_{21}^2}{\omega_{\infty}^2 l^2} = \frac{Gr}{Re^2} . \quad (VI.14)$$

Безразмерную величину

$$Gr = \frac{g l^3 \beta \Delta T_0}{\nu^2} , \quad (VI.15)$$

выражающую отношение силы Архимеда к силе вязкости, называют числом Грасгофа.

Итак, для выполнения условий гидродинамического подобия нужно, чтобы в модели значения критериев подобия:

$$\left. \begin{array}{l} \text{числа Рейнольдса } Re = \omega l / \nu \\ \text{и числа Грасгофа } Gr = g \beta \Delta T_0 l^3 / \nu^2 \end{array} \right\} \quad (VI.16)$$

были такими же, как и в образце.

Для газовых течений (в сжимаемой среде) должно соблюдаться также равенство числа Маха $M = \omega / a$ и отношения теплоемкостей $k = c_p / c_v$, где $a = \sqrt{k p / \rho}$ — скорость звука.

Точная реализация условия (VI-16) обычно бывает затруднительна. Выполнение его облегчается благодаря удачно отмеченной М. В. Кирпичевым стабильности некоторых турбулентных потоков. Сущность стабильности заключается в том, что на некотором расстоянии от входа в канал или вообще в какой-либо аппарат влияние распределения скоростей во входном сечении становится исчезающе малым и устанавливается распределение скоростей, характерное для геометрической конфигурации рассматриваемого аппарата. Расстояние или путь, который должен пройти поток от входного сечения до места, где течение можно считать стабилизированным, зависит от геометрической конфигурации аппарата. Чем она сложнее, чем больше поворотов, внезапных расширений и т. п. местных сопротивлений, тем скорее наступает стабилизация течения, характеризуемая вполне определенным распределением скоростей. Определенному же распределению скоростей соответствуют вполне определенные средние значения скорости в любом сечении потока. При этом, разумеется, нет нужды измерять поля скоростей в указанных сечениях. Достаточно измерить расход жидкости до входа в модель и затем определить среднюю скорость по формуле $\omega = \frac{V}{F}$, в которой V

и F — объемный расход жидкости и площадь соответствующего сечения.

Условия моделирования еще более упрощаются для автомодельного режима течения. Этот режим характеризуется малым влиянием сил трения по сравнению с силами давления и инерции. Прямым признаком автомодельности является подобие полей скорости и давлений в одной и той же модели при различных значениях Re .

Иными словами, подобие вязкостного, а также инерционного течения обеспечиваются одним лишь подобием распределения скоростей и давлений. Это свойство инерционного и вязкостного режимов, по предложению М. В. Кирпичева и А. А. Гухмана, и принято называть автомодельностью. О наступлении автомодельности судят по опытам, когда начиная с некоторого значения Re критерий Eu не зависит от Re .

Автомодельность представляет исследователю неоспоримые удобства, позволяя проводить эксперименты на модели любых размеров и с любой рабочей жидкостью при значениях Re'' , отличных от Re' . Важно только, чтобы модель и образец работали в автомодельной области (приближенное моделирование).

4. Методы аналогий

Можно изучать явления одной физической природы при помощи явлений другой природы. Такой метод исследования получил наименование метода аналогий.

Как показывает теоретический анализ, уравнения, из которых выводят критерии подобия, не обязательно должны выражать процессы одной и той же физической природы. Единственным обязательным условием остается лишь одинаковая математическая структура этих уравнений. Таким образом, метод аналогий является отвлеченным обобщением метода моделирования.

В качестве примера можно привести метод гидродинамической аналогии, разработанный В. С. Лукьяновым и Д. В. Будриным.

В этом методе сочетаются принцип гидравлической аналогии и способ конечных разностей, заменяющий для некоторых параметров исчисление в дифференциальных величинах.

Пусть, например, в плоской стенке замечена в данный

момент некоторая закономерность в распределении температур, представленная на рис. 36 кривой $MN = f(x)$.

Мысленно разобьем эту стенку на равновеликие слои конечной толщины Δx . Положение каждого слоя стенки будем отмечать соответствующим индексом. Например, слой Δx_n , слева от него слой Δx_{n-1} , справа слой Δx_{n+1} . Также будем записывать и температуры в центре каж-

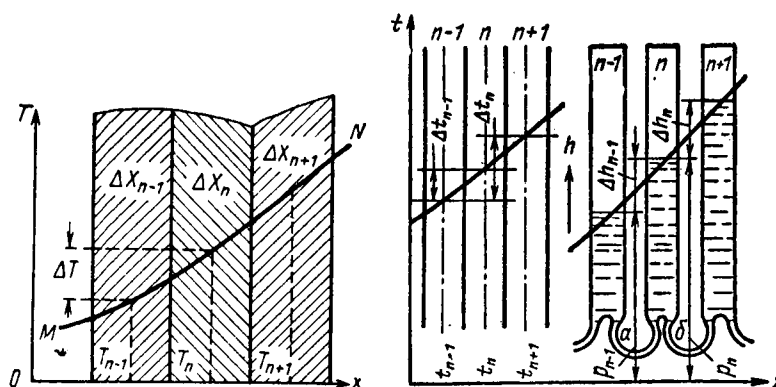


Рис. 36. Распределение температур в стенке

Рис. 37. Схема действия гидроинтегратора Будрина — Лукьянова

дого слоя: слой $\Delta x_{n-1} - T_{n-1}$, слой $\Delta x_n - T_n$, слой $\Delta x_{n+1} - T_{n+1}$.

Тогда движение тепла q от слоя к слою в каждый данный момент можно будет выразить простым уравнением переноса тепла (см. гл. I):

$$q = -\lambda \operatorname{grad} T = \frac{\lambda}{\Delta x} (T_n - T_{n-1}) = K (T_n - T_{n-1}) \text{ Вт/м}^2,$$

а накопление или убывание энтальпии в слое — уравнением

$$i = \Delta q = C \Delta T.$$

Постоянные K и C , входящие множителями в уравнения, характеризуют физические свойства стенки. Если знать закон изменения q и Δq во времени, т. е. для каждого промежутка времени иметь возможность численно определить обе эти величины, то можно получить исчерпывающее представление о ходе развития данного процесса.

Ответ на этот вопрос как раз и дает прибор, принцип действия которого основан на методе гидродинамической аналогии. Поясним кратко идею прибора на только что рассмотренном примере.

Открытые сверху стеклянные сосуды n и $n-1$ (рис. 37) моделируют аналогичные слои тела. По аналогии для локального движения воды из сосуда в сосуд через капиллярные трубки a и b можно составить уравнения, которые однотипны с написанными ранее для количества тепла q , переходящего от слоя к слою, и для изменения теплосодержания Δq :

$$q = v(p_n - p_{n-1}); \Delta q = f\Delta i,$$

где v — количество жидкости, протекающей из сосуда в сосуд в единицу времени при разности высот в 1 см;

f — площадь сечения сосуда.

Если выбирать v и f пропорционально величинам K и C , можно, наблюдая на приборе Будрина — Лукьянова величины p и Δi , судить об изменении температур в испытываемой стенке за тот же промежуток времени.

В качестве электрической аналогии различных физических процессов давно применяют и явления, происходящие в электрических цепях.

Принцип математической аналогии позволяет экспериментально найти решение дифференциального уравнения на модели, построенной на явлениях такой природы, где эксперимент наиболее легок и точен. Наиболее подходящие для этого области — электротехника и электроника.

Все необходимые при осуществлении электрических цепей и схем элементы портативны и могут быть выполнены с большой точностью. Отсюда сравнительная легкость решения задачи из любой области физики или техники, коль скоро удастся связать ее на основе аналогии с задачей из области электротехники, построив электрическую модель исследуемого явления.

Одним из примеров электрической модели может служить простейшее счетно-решающее устройство — электроинтегратор.

Приборы этого типа представляют собой специальные аппараты (совокупность различных готовых электрических схем — панелей), соответствующие определенным типам математических уравнений, и электрические из-

мерительные приборы, учитывающие все многообразие эффектов электрического тока. По существу метод электро моделирования — это метод решения какой-либо задачи искусственным созданием электроанalogии рассматриваемого явления, т. е. своеобразной модели, подобной натуре.

Из тождественных уравнений основного процесса (натуры) и электрической модели по правилам теории подобия выбирают критерии подобия, устанавливают подобие граничных условий и т. д. Например, процесс, математически выражаемый уравнением типа

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{c_p \gamma}{\lambda} \cdot \frac{\partial T}{\partial t},$$

может быть смоделирован явлениями, происходящими в электрической схеме с постоянными r и c , изменение напряжения в которой выражается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = rc \frac{\partial u}{\partial t}.$$

При тождественности двух уравнений после их выражения в относительных величинах можно получить инварианты или критерии подобия, которые по правилам теории подобия должны быть численно одинаковыми для подобных явлений. Например, в рассматриваемом случае получится ограничительное равенство

$$\frac{c_p 9,81 \gamma_0 l_0'^2}{\lambda_0 t_0'} = \frac{c_0 r_0 l_0''}{t_0''},$$

где c_p ; γ_0 ; λ_0 — теплотехнические константы;
 c_0 , r_0 — электрические константы, которые характерны для электросхемы, моделирующей данное явление;
 t_0' , t_0'' , l_0' , l_0'' — сходственные промежутки времени и линейные размеры.

Для изучения какого-либо процесса на электрической модели необходимо лишь выбрать и создать определенную электрическую схему. В этой схеме происходили бы электрические явления, математически выражаемые вполне тождественно тому уравнению, которое представляет сущность изучаемого процесса. Электрическое моделирование уже широко распространено, и ему принадлежит большое будущее.

Область применения теории подобия расширена в сторону моделирования химических процессов. Таким образом, создана основа для развития метода химической аналогии, позволяющего изучать тепловые химические процессы на явлениях, которые происходят в холодных химических системах, например изучение процесса горения на более доступных для исследования, но аналогичных по своему развитию химических реакциях и т. д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г у х м а н А. А. Введение в теорию подобия. М., «Высшая школа», 1973. 140 с. с ил.
2. Г у х м а н А. А. Применение теории подобия к исследованию процессов тепло-массообмена. М., «Высшая школа», 1967. 86 с. с ил.

Раздел третий

МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

Глава VII

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ГАЗОВ И ЖИДКОСТЕЙ, ХАРАКТЕРИСТИКА ДЕЙСТВУЮЩИХ СИЛ

1. Общие сведения

Аэромеханика — одно из наиболее мощных средств управления процессами горения и теплообмена в рабочих камерах печей.

Аэродинамическая обстановка в рабочей камере печи совместно с условиями воспламенения горючей смеси и теплообмена продуктов сгорания определяет, в конечном счете, место расположения зоны горения, состав среды и температурное поле в потоке.

Изменяя условия и характер движения газов вдоль тепловоспринимающей поверхности материала, изделий, расплавленной ванны металла, можно в самых широких пределах регулировать количество передаваемого тепла и его распределение по указанной поверхности.

Таким образом, передача тепла на поверхность нагреваемого металла, т. е. полезная работа печи в большой степени, определяется движением газов в рабочем пространстве печи.

Одним из первых, кто обратил внимание на влияние и поведение газов в печах, был русский ученый В. Е. Грум-Гржимайло. В созданной им в 1905—1911 гг. гидравлической теории печей систематизированы и описаны с применением законов гидромеханики сложившиеся на основе его большого практического опыта представления о движении газов.

В гидравлической теории печей были даны правила конструирования печей, в которых преобладало естественное движение газов, возникшее вследствие разности

удельных весов газов в различных частях объема из-за неравномерного распределения температур.

Эта теория объясняла принципы действия и правила конструирования печей, работавших на твердом топливе или неочищенном газе.

В таких печах продукты сгорания, попадая в зону технологических процессов (в рабочее пространство печи) из зоны теплогенерации (топок) с относительно малыми скоростями, в очень малой степени возмущали движение газов в зоне технологических процессов, и последнее в большинстве случаев было сравнительно мало завихренным, т. е. характеризовалось низким уровнем турбулентности.

Внедрение отопления жидким и газообразным топливом, подаваемым под давлением, внесло новый элемент в движение газов в рабочем пространстве—динамику турбулентной струи (факела), фактор, оказывающий существенное влияние на движение газов в зоне технологических процессов. Кроме того, развитие печей пошло по пути увеличения абсолютных и удельных производительностей. Все эти факторы увеличивали значение принудительного движения газов в печах, уменьшая значение естественного движения.

Повышение производительности печи требует увеличения ее пропускной способности по газу, воздуху и продуктам сгорания при соблюдении требований в отношении нагрева. Успешное разрешение этой задачи возможно лишь при наличии основательных знаний по аэрогидромеханике.

Изучение движения газов и жидкостей и их взаимодействия с твердыми телами и составляет предмет аэрогидромеханики. Механику жидкого тела (капельной жидкости) называют гидромеханикой, механику газообразного тела — аэромеханикой.

Подобно тому, как механика твердого тела делится на три части — статику, кинематику и динамику, можно также разделить и гидромеханику, и аэромеханику.

С точки зрения общей механики жидкое тело отличается от газообразного только тем, что жидкие тела (например, вода, масло) являются практически несжимаемыми, в то время как газообразные тела (воздух, углекислый газ и другие) могут сравнительно легко изменить свой объем под действием внешних сил. В некоторых случаях капельные жидкости обладают способностью

сжиматься и, наоборот, газы, как увидим ниже, очень часто можно рассматривать как тела несжимаемые.

Вопросов сжимаемости среды мы почти не будем касаться, т. е. будем рассматривать только такие явления, для которых сжимаемость почти не играет никакой роли, с этой точки зрения различие между жидкостью и газом исчезает, и найденные законы будут применимы в одинаковой степени как к жидкости, так и к газу. Поэтому газ принято называть также жидкостью.

Особенность газов и жидкостей состоит в том, что они оказывают весьма малое сопротивление изменению формы объема, который заполняют. Величина этого сопротивления определяется вязкостью данного газа или жидкости. В некоторых случаях можно пренебречь вязкостью газа и считать, что он не оказывает никакого сопротивления изменению своей формы; такой газ (или жидкость) называется идеальным и играет большую роль в теоретической аэродинамике.

Движение жидкости и газа, исключая вопросы, связанные с течением разреженных газов, будем рассматривать как движение сплошной среды. Рассмотрение движения жидкости (газа) как сплошной среды предполагает, что характерный размер всякого малого объема жидкости считается большим по сравнению с длиной свободного пробега молекул и межмолекулярными расстояниями. Известно, что число молекул в 1 см^3 при атмосферном давлении равно $2,7 \cdot 10^{19}$, а длина свободного пробега молекул, представляющая собой статистическое среднее расстояние, проходимое молекулами между столкновениями, будет порядка 10^{-5} см .

Введение понятия сплошной или непрерывной среды позволяет в качестве объекта изучения рассматривать не реально существующую жидкую или газообразную среду, состоящую из отдельных молекул, а фиктивную среду, сплошь заполняющую все пространство без образования пустот. Такая замена чрезвычайно плодотворна уже по одному тому, что можно в полной мере использовать имеющийся в нашем распоряжении математический аппарат, который в основном приспособлен именно к непрерывным функциям.

При изучении движения газа (жидкости) в качестве критерия, позволяющего судить о возможности рассмотрения течения газа как сплошной среды, служит число Кнудсена, равное отношению длины свободного пробега

молекул Λ к характерному размеру тела L ($Kn = \Lambda/L$). Как показывают проведенные исследования, в том случае, когда $Kn < 0,1$, газ можно рассматривать как сплошную среду, при $Kn > 1$ газ следует рассматривать как свободно-молекулярный поток.

При изучении движения газа, когда $Kn > 0,1$, следует основываться на представлениях кинетической теории газов.

В соответствии со сказанным под жидкой частицей в гидроаэродинамике понимают не отдельную молекулу, а малый по сравнению с характерными размерами потока или тела элемент объема содержащий много молекул. Например, если взять куб со стороной в 0,001 мм как частицу жидкости, то в этом кубе при атмосферном давлении будет содержаться $2,7 \cdot 10^7$ молекул.

Основные свойства газов и жидкостей, рассматриваемые в аэро-гидромеханике, характеризуются: плотностью ρ , удельным весом γ , динамическим коэффициентом вязкости μ и кинематическим коэффициентом вязкости ν .

Размерности величин ρ и γ , принятые в третьем разделе данного учебника, следующие:

$$[\rho] = [ML^{-3}] \text{ или } [FT^2 L^{-4}], \quad [\gamma] = [ML^{-2} T^{-2}] \text{ или } [FL^{-3}],$$

где L, T, M, F — основные единицы (L — длина, T — время, M — масса, F — сила).

В Международной системе единиц, рекомендуемой для введения с 1963 г., основными единицами служат: масса (кг), длина (м), время (с); в системе МКГСС — сила (кгс), длина (м), время (с). Единицей силы в системе СИ является ньютон (Н) — сила, сообщаящая массе в 1 кг ускорение 1 м/с².

Размерности динамического коэффициента вязкости μ и кинематического коэффициента вязкости ν следующие:

$$[\mu] = [MT^{-1} L^{-1}] \text{ или } [FTL^{-2}];$$

$$[\nu] = [L^{-2} T^{-1}].$$

Размерность напряжения массовых сил совпадает с размерностью ускорения:

$$[F_m] = [LT^2],$$

а размерность напряжения поверхностных сил следующая:

$$[ML^{-1} T^{-2}] \text{ или } [P] = [FL^{-2}].$$

На основании закона гидростатики давления можно измерять высотой столба жидкости (мм вод. ст., м вод. ст., мм рт. ст.).

Единица давления 1 кгс/м² = 1 мм вод. ст. наименования не имеет, в технике широко используют смешанную единицу 1 кгс/см², называемую технической атмосферой. При этом 1,02 ат соответствует давлению 10⁵ Н/м².

2. Вязкость (внутреннее трение) в жидкостях и газах

Вязкость обусловлена молекулярной структурой жидкости и газа. Основная закономерность, связывающая напряжение трения с распределением скоростей строго, может быть выведена из кинетической теории жидкости или газа. С макроскопической точки зрения эта закономерность должна быть задана наперед как некоторый дополнительный физический закон.

Ньютон сформулировал общеизвестный закон, согласно которому касательное напряжение трения между двумя слоями прямолинейно движущейся вязкой жидкости (газа) пропорционально отнесенному к единице длины изменению скорости по нормали к направлению движения.

В случае плоского движения параллельно плоскости $хоу$ со скоростями, параллельными оси $ох$, касательное напряжение трения τ_{xy} будет равно

$$\tau_{xy} = \tau_n = \mu \frac{dw_x}{dy}, \quad (\text{VII-1})$$

причем коэффициент молекулярной вязкости μ не зависит от характера движения, а определяется лишь физическими свойствами жидкости и ее температурой (влияние давления практически ничтожно).

Кроме динамического коэффициента молекулярной вязкости, приходится иметь дело с кинематическим коэффициентом молекулярной вязкости ν , равным отношению динамического коэффициента молекулярной вязкости к плотности жидкости (газа)

$$\nu = \mu/\rho. \quad (\text{VII-2})$$

Динамический и кинематический коэффициенты молекулярной вязкости жидкостей и газов значительно зависят от температуры, причем оба коэффициента вязкости воды убывают с возрастанием температуры, коэффициент вязкости воздуха при этом, наоборот, возрастает.

Зависимость коэффициента вязкости газа от температуры представляется формулой Сатерленда:

$$\mu = \frac{\text{const } T^{3/2}}{T + C}, \quad (\text{VII-3})$$

где $C \approx 144$ К, а постоянная для воздуха равна 143,72, если μ $\frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}$ (14,65, если μ кгс·с/м²).

На практике часто пользуются приближенной степенной формулой

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^n, \quad (\text{VII-4})$$

где показатель степени различен для разных газов и, кроме того, зависит от температуры (убывает с возрастанием температуры). Для приближенных оценок принимают $n=1$ для сравнительно малых и $n=1/2$ для больших температур.

Величина ν не характеризует вязкости газа (жидкости), вязкость проявляется в касательных напряжениях и, следовательно, характеризуется коэффициентом μ [(см. формулу (VII-1)]. Кинематический коэффициент вязкости характеризует ускорение частиц, вызванное силами вязкости. В выражение для размерности ν не входит масса, поэтому коэффициент вязкости ν и назван кинематическим.

Реальным жидкостям свойствен механизм, обуславливающий процесс внутреннего обмена количеством движения (импульса), в то время как идеальная жидкость лишена такого механизма. В реальной жидкости этот механизм обеспечивает не только обмен количеством движения и проявляется не только в возникновении сил трения. Он лежит в основе всех эффектов переноса и, в конечном счете, его действие является причиной непрерывности пространственного распределения физических величин, характеризующих процесс с количественной стороны.

При взаимодействии реальной движущейся жидкости с твердым телом или с другой жидкостью, имеющей иную скорость или направление движения, непрерывное распределение, например, скорости сохраняется вплоть до поверхности раздела. На поверхности твердого тела обращается в нуль как нормальная, так и тангенциальная составляющие скорости (условие прилипания). В случае движения идеальной жидкости на поверхности твердого тела обращается в нуль только нормальная составляющая скорости (явление непроницаемости), но не тангенциальная (явление скольжения вдоль поверхности и соответственно скачка скорости).

3. Силы, действующие в жидкости

Рассмотрим подробнее, какие силы действуют в жидкой среде. Вследствие большой подвижности частиц и слабости связей между ними действующие силы являются непрерывно распределенными.

Для количественной характеристики непрерывно распределенных сил необходимо ввести понятие о напряжении силы. Это понятие вводится различным образом для каждого вида сил, действующих в жидкости.

Рассмотрим некоторый объем жидкости, условно выделенный в жидкой среде.

Все силы, действующие на изолированный от окружающей среды жидкий объем, можно по характеру их действия условно разделить на силы объемные (или иначе массовые) и силы поверхностные.

Под объемной силой понимают такую силу, которая приложена ко всякой материальной частице рассматриваемого объема и пропорциональна массе этой частицы (независимо от действительного ее ускорения). К объемным силам относятся силы всемирного тяготения и, в частности, сила тяжести, силы магнитного и электрического взаимодействия.

Поверхностные силы — это такие силы, действие которых распределено по поверхности рассматриваемого объема жидкости, например на свободной поверхности уровня жидкости, находящейся в сосуде, или на поверхности раздела, мысленно проводимой в жидкой среде. С точки зрения этого определения, силы, которыми мы заменяем действие окружающей среды на выделенный из нее жидкий объем, суть силы поверхностные, ибо воздействие среды естественно представлять себе непосредственно приложенным лишь по ограничивающей объем поверхности.

Следует отметить, что такого рода разграничение действующих в жидкости сил на силы объемные и силы поверхностные не вполне строго и в известном смысле условно: ведь в действительности в поверхностные силы, к которым мы отнесли воздействие окружающей среды на выделенный объем, входят также силы сцепления между частицами жидкости, а эти силы по самой своей природе — объемные.

Введем понятие о напряжении непрерывно распределенной силы сначала для сил объемных, затем для сил

поверхностных. Сама по себе величина объемной силы действующей на выделенный в среде жидкий объем, нехарактерна для данной жидкости и той обстановки, в которой жидкость находится, так как, кроме свойств жидкости и окружающих условий, она зависит еще от величины выделенного объема, величина же этого объема в разных случаях может быть разной и вообще по сути дела есть величина произвольная. Следует поэтому для количественной характеристики объемной силы вывести величину, не зависящую от произвольно выбранного объема. Если считать массу равномерно распределенной по выделенному малому объему, то объемная сила будет пропорциональна объему и отношение этой силы к объему является, очевидно, искомой характеристикой силы. Однако в реальных жидкостях и главным образом в газах масса распределена неравномерно, и количественная характеристика объемной силы должна быть различна в разных точках. Чтобы получить характеристику объемной силы в некоторой внутренней точке выделенного объема, будем стягивать объем к этой точке, устремив его к нулю, и вычислим предел

$$\gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta V} = \frac{dG}{dV}, \quad (\text{VII-5})$$

где ΔG — объемная сила, действующая на объем ΔV . Величину γ назовем напряжением объемной силы в данной точке среды.

В частном случае, когда рассматриваемая сила есть сила тяжести, напряжение γ называется удельным весом в данной точке. Плотность ρ среды в той же точке

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{dM}{dV}, \quad (\text{VII-6})$$

где ΔM — масса жидкости в объеме ΔV . Если ΔG — вес объема ΔV , то $\Delta G = g\Delta M$ и после деления на ΔV и перехода к пределу получается

$$\gamma = \rho g, \quad (\text{VII-7})$$

где g — ускорение силы тяжести, абсолютное значение которого на уровне моря (в средних географических широтах) равно $9,81 \text{ м/с}^2$.

Среднее значение плотности среды в некотором объеме определяется как отношение массы ΔM , заключенной в этом объеме, к самому объему:

$$\rho_{\text{ср}} = \Delta M / \Delta V. \quad (\text{VIII-8})$$

Так как величина ускорения силы тяжести g зависит от координат точки, в которой производится измерение, то объемный вес не может являться постоянной величиной.

Приведенная выше величина плотности по массе зависит от природы жидкости и условий, в которых находится жидкость.

Плотность жидкости или газа в какой-нибудь точке зависит от давления, под которым находится жидкость или газ в этой точке, и температуры. Если давление обозначить через p , а абсолютную температуру через T , то можно написать:

$$\rho = f(p, T). \quad (\text{VII-8a})$$

Зависимость плотности от давления весьма различна для жидкостей и для газов. В очень широких пределах изменения давления можно считать, что плотность жидкости практически не зависит от давления, под которым она находится. Поэтому воду и другие капельные жидкости обычно считают несжимаемыми в отличие от газов, плотность которых под действием давления может изменяться в весьма широких пределах, как это следует из закона Бойля — Мариотта.

Для несжимаемых жидкостей можно приближенно считать, что плотность зависит только от температуры в данной точке:

$$\rho = f(T), \quad (\text{VII-9})$$

если вспомнить, что изменение объема при изменении температуры происходит приблизительно по линейному закону:

$$\Delta V_T = \Delta V_{T_0} [1 + \beta_T (T - T_0)], \quad (\text{VII-10})$$

где β_T — коэффициент объемного теплового расширения жидкости в пределах температур от T_0 до T .

Перейдем к характеристике поверхностных сил. Выделим на поверхности S рассматриваемого объема жидкости элементарную площадку ΔS , пусть действующая на эту площадку поверхностная сила будет $\Delta \Sigma$. Величина этой силы зависит от величины площадки ΔS . Чтобы определить интенсивность поверхностной силы в некоторой внутренней точке площадки ΔS , будем стягивать площадку ΔS к этой точке, уменьшая ее до нуля, и вычислим предел

$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \Sigma}{\Delta S} = \frac{d\Sigma}{dS}. \quad (\text{VII-11})$$

Этот предел называется напряжением поверхностной силы в данной точке среды. Он зависит, вообще говоря, не только от времени и координат данной точки (и, конечно, природы среды и ее движения), но также и от

ориентировки в пространстве площадки ΔS . Для площадок ΔS , проведенных через одну и ту же точку среды, но по-разному ориентированных, σ , вообще говоря, будет разным. Величина σ измеряется в Н/м².

Понятие о напряжении поверхностной силы является основным при определении силового воздействия среды на тело. В самом деле, силы воздействия жидкой среды на твердое тело суть силы поверхностные и подобно силам, действующим на жидкий объем, могут быть характеризованы своими напряжениями. Разница здесь состоит лишь в том, что, кроме факторов, от которых зависит напряжение поверхностной силы для площадки ΔS , проведенной внутри жидкости, напряжение поверхностной силы для площадки, выделенной на поверхности твердого тела, зависит еще от характера поверхности тела (от материала его, от того, гладкая ли поверхность или шероховатая и т. д.). Основная задача определения силового взаимодействия между средой и находящимся в ней телом приводится, таким образом, к определению напряжений поверхностной аэродинамической силы.

В технических расчетах обычно фигурируют составляющие напряжения поверхностной силы σ . В точке, где определено σ , проводят нормаль к площадке ΔS и рассматривают обычно отдельно нормальную и касательную к площадке ΔS , составляющие напряжения σ (рис. 38). Нормальную составляющую напряжения поверхностной силы называют аэродинамическим давлением (или также статическим или пьезометрическим давлением) в данной точке и обозначают буквой p . Касательную составляющую напряжения поверхностной силы называют иначе напряжением трения в данной точке и обозначают обычно буквой τ .

Смысл раздельного изучения нормальных и касательных напряжений в жидкости заключается главным образом в том, что роли этих составляющих в расчетах сопротивления при внутреннем или внешнем обтекании твердых тел жидкой средой совершенно различны.

Если, например, жидкости обтекает тонкую пластину, установленную вдоль его движения (рис. 39), то сила взаимодействия потока на пластину направлена, очевидно, вдоль потока (она называется в этом случае лобовым сопротивлением) и происходит исключительно от касательных напряжений, приложенных к поверхности пластинки. Нормальные напряжения здесь взаимно унич-

тожаются и не дают результирующей силы. Пренебрегая в этом случае касательными напряжениями, мы получили бы, что лобовое сопротивление пластинки равно нулю. Однако это не соответствует действительности.

Если рассматривать течение маловязких жидкостей (например, сильно разреженных газов), касательные напряжения в которых в сотни и тысячи раз меньше нор-

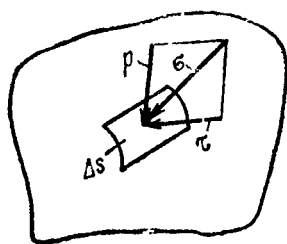


Рис. 38. Определение напряжения поверхностной силы

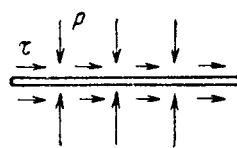


Рис. 39. Касательные напряжения на пластине

мальных, когда уже нельзя применять гипотезу о непрерывности среды, то при определении местных аэродинамических нагрузок, действующих на поверхности твердых тел, можно с достаточной для технических расчетов степенью точности считать, что напряжения аэродинамической силы нормальны к поверхности в каждой рассматриваемой точке и равны p , иными словами, можно при этом пренебрегать касательными напряжениями.

Дополним теперь гипотезу о непрерывности или сплошности среды, которая впервые была введена в науку Даламбером в 1744 г. и затем Эйлером в 1753 г.; в противоположность представлению Ньютона о том, что жидкость состоит из отдельных частиц, из материала, приведенного на с. 139—140 следует, что гипотеза непрерывности жидкой среды позволяет рассматривать все механические характеристики среды, каковыми являются скорость, плотность, давление и т. д., как функции координат точки и времени, причем в большинстве случаев эти функции предполагаются непрерывными и дифференцируемыми.

Наблюдения показывают, что струйки несжимаемой жидкости, подходя к препятствию, еще на значительном расстоянии от него изменяют свое направление, деформируются и плавно обходят (обтекают) препятствие. От-

сюда следует, что давление в жидкости передается непрерывно от одной струйки к другой так, как если бы жидкость была сплошной, деформируемой средой.

В жидкости могут возникать еще инерционные силы, которые можно выразить произведением массы частицы жидкости на ее ускорение. Проекция их на координатные оси выражаются просто:

$$-\rho\delta V \frac{dw_x}{dt}; \quad -\rho\delta V \frac{dw_y}{dt}; \quad -\rho\delta V \frac{dw_z}{dt}. \quad (\text{VII-12})$$

Инерционные силы так же, как сила тяжести, зависят от массы жидкой частицы и поэтому являются массовыми (объемными) силами.

4. Независимость давления от ориентировки площадки

Установив понятие о давлении в жидкости, докажем весьма важное его свойство: независимость давления от ориентировки площадки.

Представим себе движущуюся жидкость, причем относительно характера движения не будем делать никаких предположений, кроме того, что движение неразрывно и жидкость идеальная.

Внутри пространства, занятого жидкостью, построим произвольно ориентированную прямоугольную координатную систему xuz . Вдоль оси координат от начала отложим три произвольных бесконечно малых отрезка δx , δy и δz и через концы их проведем плоскость ds . Эта плоскость вместе с координатными плоскостями выделит из всей массы жидкости бесконечно малый объем δV в виде тетраэдра (рис. 40). Напишем теперь условия равновесия этого жидкого элемента.

По принципу Даламбера, тело находится в состоянии равновесия, если сумма проекции на координатные оси всех сил, включая и силы инерции, равна нулю. Поэтому составим сумму всех сил в проекции, например, на ось x . Сила тяжести в проекции на ось x дает величину

$$\rho\delta V X, \quad (\text{VII-13})$$

где произведение $\rho\delta V$ представляет собою массу тетраэдра жидкости, а X — проекцию на ось x силы тяжести отнесенной к единице массы.

Подсчитаем теперь проекции сил, называемых давлением. Если давление на левую грань тетраэдра обо-

значим через p_x , а величину самой грани — через ds_x , то сила, приходящаяся на всю грань, будет равна

$$p_x ds_x, \quad (\text{VII-14})$$

при этом она направлена в положительную сторону оси x и, кроме того, ей параллельна.

Силы, вызванные давлением на площадке ds_y и ds_z , будут перпендикулярны к оси x и проекции их будут

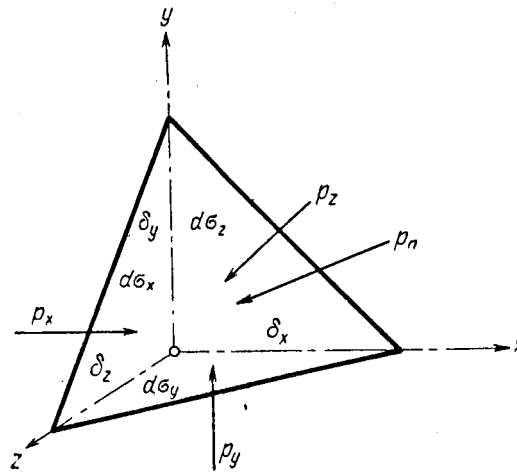


Рис. 40. К определению независимости давления от напряжения

равны нулю. Остается вычислить проекцию силы давления на наклонную площадку ds .

Если давление на площадку обозначить через p_n , то сила, возникающая на этой грани, будет равна $-p_n ds$, а для того, чтобы найти проекцию этой силы на ось x , нужно это произведение умножить на косинус угла α между нормалью к площадке ds и осью x :

$$-p_n ds \cos \alpha. \quad (\text{VII-15})$$

Знак «минус» в выражении (VII-15) указывает на то, что проекция этой силы направлена в отрицательную сторону оси x . Наконец, напишем выражение силы инерции в проекции на ту же ось. Предполагая в самом общем случае, что жидкий тетраэдр, участвуя в общем течении жидкости, движется с ускорением вдоль оси x , равным $d\omega_x/dt$, и принимая во внимание, что силы инерции вы-

ражаются произведением массы на ускорение, взятым с обратным знаком, на основании равенства (VII-12) получим выражение

$$-\rho \delta V \frac{dw_x}{dt} . \quad (\text{VII-16})$$

На основании принципа Даламбера можно теперь сумму всех вычисленных сил приравнять нулю:

$$X\rho\delta V + p_x ds_x - p_n ds \cos \alpha - \rho\delta V \frac{dw_x}{dt} = 0. \quad (\text{VII-17})$$

Мы получили довольно сложное уравнение, но его можно упростить, если рассмотреть порядок малости входящих в него членов. В самом деле, первый и четвертый члены являются величинами третьего порядка малости, в то время как второй и третий являются величинами второго порядка. Если заставить грани δx , δy и δz стремиться к нулю, переходя от объема к точке, то величины третьего порядка малости можно отбросить, не нарушая точности окончательного результата, и уравнение примет более простой вид:

$$p_x ds_x - p_n ds \cos \alpha = 0. \quad (\text{VII-18})$$

Учитывая, кроме того, что $ds_x = ds \cos \alpha$, получим после простых преобразований

$$p_x = p_n. \quad (\text{VII-19})$$

Рассматривая равновесие тетраэдра в направлении других осей, получим аналогичные равенства, которые можно написать в одну строчку:

$$p_x = p_y = p_z = p_n. \quad (\text{VII-20})$$

Исходя из этого, можно сделать весьма важный вывод: давление в данной точке не зависит от ориентировки площадки в пространстве. Оно остается постоянным для всех площадок, проходящих через эту точку.

Это свойство очень ценно, так как оно позволяет определить сразу направление силы, возникающей вследствие давления. Если мы рассматриваем, например, обтекание потоком продуктов сгорания топлива отдельных элементов кладки, то на каждом участке поверхности элемента кладки действующая на него сила со стороны окружающей среды будет нормальна к поверхности. Если бы величина давления в каждой точке была известна,

то, складывая геометрически векторы сил, мы получим полное решение основной задачи гидродинамики.

Таким образом, в случае идеальной жидкости вся задача об определении сил и моментов, действующих на обтекаемое тело, сводится только к определению величины давления на его поверхности.

Глава VIII

КИНЕМАТИКА ГАЗОВ И ЖИДКОСТЕЙ

1. Методы описания движения газа и жидкости

Характеризовать течение жидкости, т. е. выразить его математически, можно либо методом Эйлера, либо методом Лагранжа. Первый является более распространенным. Сущность метода Эйлера состоит в том, что проекции скорости частиц жидкости выражаются функциями четырех независимых переменных x , y , z и t .

Представляя себе частицу жидкости исчезающе малого объема, мы можем говорить, что она находится в той или иной точке пространства. С течением времени она проходит непрерывный ряд точек, совокупность которых называется траекторией данной частицы жидкости.

В каждой точке пространства можно провести вектор, изображающий собой скорость частиц жидкости в данный момент времени (рис. 41). Если бы векторы, изображающие собой скорость, были определены для каждой точки пространства, занятого жидкостью, то мы составили бы себе совершенно отчетливое и наглядное представление о характере течения жидкости в данный момент времени.

Поскольку в данный момент времени скорость движения жидких частиц зависит от положения частиц

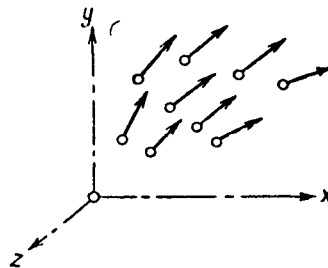


Рис. 41. Поле скорости при $t = \text{const}$

в пространстве, т. е. является функцией координат, можно написать $\omega = f(x, y, z)$ для данного момента времени. Обозначая проекции скорости через ω_x , ω_y и ω_z можем записать

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \varphi_1(x, y, z); \\ \omega_y &= \varphi_2(x, y, z); \\ \omega_z &= \varphi_3(x, y, z) \end{aligned} \right\}$$

для данного момента времени.

В любой точке пространства скорость может изменяться во времени, а это означает, что ее проекции на координатные оси зависят не только от координат x , y и z , но и от времени t . В самой общей форме это может быть записано так:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= f_1(x, y, z, t); \\ \omega_y &= f_2(x, y, z, t); \\ \omega_z &= f_3(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-1})$$

Здесь x , y , z и t являются независимыми переменными.

Чтобы характеризовать то или иное течение жидкости, нужно найти вид этих трех функций f_1 , f_2 и f_3 . Эта задача, как мы увидим в дальнейшем, является в большинстве случаев очень сложной.

Состояние движущейся жидкости характеризуется не только скоростью каждой частицы жидкости, но и другими физическими величинами, как например плотностью жидкости ρ или удельным весом γ , ускорением движения j и т. д. Поэтому при изучении движения жидкости необходимо выяснить взаимную связь этих физических величин для различных точек пространства.

Траектории отдельных малых частиц жидкости являются очень сложными кривыми. При криволинейном движении всегда возникают ускорения.

Проекции ускорения на координатные оси выражаются производными от проекций скорости по времени:

$$j_x = d\omega_x/dt; \quad j_y = d\omega_y/dt; \quad j_z = d\omega_z/dt.$$

Рассмотрим бесконечно малую частицу жидкости и допустим, что в некоторый момент времени t она находилась в точке с координатами x , y , z и имела проекции скорости ω_x , ω_y и ω_z .

По прошествии бесконечно малого промежутка времени dt эта частица переместится и займет новое положение с другими координатами $x+dx$; $y+dy$; $z+dz$. Значение времени стало иным: $t+dt$. Следовательно, и проекции скорости изменились и имеют уже новые значения w'_x , w'_y , w'_z . Пользуясь методом Эйлера, можно написать согласно формуле (VIII-1):

$$\begin{aligned}w'_x &= f_1(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt); \\w'_y &= f_2(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt). \\w'_z &= f_3(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt).\end{aligned}$$

Приращение скорости частицы жидкости вдоль какой-либо оси, например вдоль оси x за время dt , выразится как разность значений проекции скорости:

$$dw_x = w'_x - w_x = f_1(x+dx, y+dy, z+dz, t+dt) - f_1(x, y, z, t).$$

Правая часть этого равенства представляет собой полный дифференциал и выражается суммой частных дифференциалов.

Ограничиваясь бесконечно малыми величинами первого порядка, можно написать

$$dw_x = \frac{\partial w_x}{\partial x} dx + \frac{\partial w_x}{\partial y} dy + \frac{\partial w_x}{\partial z} dz + \frac{\partial w_x}{\partial t} dt.$$

Так выражается приращение скорости частицы вдоль оси x за бесконечно малый промежуток времени.

Ускорение жидкой частицы получим, разделив приращение скорости на соответствующий промежуток времени:

$$\frac{dw_x}{dt} = \frac{\partial w_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} + \frac{\partial w_x}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt}.$$

Приращения координат dx , dy и dz не являются произвольными величинами, а зависят от dt . Поэтому мы их определили как пройденный частицей жидкий путь за бесконечно малый (произвольный) промежуток времени dt , на этом основании можно написать:

$$\frac{dx}{dt} = w_x; \quad \frac{dy}{dt} = w_y; \quad \frac{dz}{dt} = w_z,$$

Проекция ускорения жидкой частицы вдоль оси x может быть теперь представлена в следующем окончательном виде:

$$\left. \begin{aligned} i_x &= \frac{dw_x}{dt} = \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}; \\ i_y &= \frac{dw_y}{dt} = \frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z}; \\ i_z &= \frac{dw_z}{dt} = \frac{\partial w_z}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-2})$$

Последние две формулы написаны по аналогии.

Полную производную по времени от некоторой функции f , которая зависит от четырех переменных x, y, z, t , — причем первые три переменные, в свою очередь зависящие от времени t , называют субстанциональной производной.

2. Установившееся движение газа и жидкости

Мы установили, что скорость частицы жидкости в самом общем случае зависит от четырех переменных величин: от трех координат пространства и от времени. Упростим постановку задачи и будем рассматривать движение более простого типа.

К числу сильно упрощающих ограничений принадлежит условие стационарности движения. Представим себе, что скорость частиц жидкости, проходящих через данную точку пространства, не будет меняться ни по величине, ни по направлению, т. е. она не будет зависеть от времени. В таком случае говорят, что движение жидкости в данной точке пространства установилось.

Если окажется, что в любой точке пространства, занятого жидкостью, скорость не будет меняться с течением времени, то такое движение называют установившимся или стационарным.

Строго говоря, под установившимся подразумевают такое движение, при котором не только скорость, но и все другие физические характеристики жидкости (плотность, давление, силы) не зависят от времени и остаются постоянными для каждой точки пространства.

Чтобы характеризовать установившееся движение математически, нужно выразить мысль, что скорость, давление, плотность и другие величины не изменяются по времени, если только мы их рассматриваем в одной и той же точке пространства.

Эту мысль можно выразить с помощью частных производных следующим образом:

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \omega_y}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial t} = 0.$$

Эти равенства, с одной стороны, означают, что проекции скорости ω_x , ω_y и ω_z не зависят от времени (т. е. не изменяются), так как производные по времени равны нулю, с другой стороны, то, что здесь написаны частные производные по времени, указывает нам, что при дифференцировании координаты x , y , z оставались постоянными, т. е. мы наблюдаем за одной и той же точкой пространства.

Иногда ошибочно думают, что для характеристики установившегося движения достаточно написать производную от полной скорости, т. е. $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$. Однако это условие означает только то, что численная величина скорости неизменна, но направление ее может меняться.

3. Линия тока и трубка тока

Представление о течении жидкости как о векторном поле является довольно сложным для восприятия, поэтому вводится новое понятие о линии тока, помогающее наглядно представить себе процесс течения жидкости.

Пусть в некоторой точке a в момент времени t частица жидкости имеет скорость $\vec{\omega}$. Эту скорость изобразим в виде вектора $\vec{\omega}_1$, исходящего из точки a (рис. 42). Другая точка пространства b лежит на векторе скорости $\vec{\omega}_1$ и находится на бесконечно близком расстоянии от a . В этой точке находится другая частица жидкости. Скорость в точке b несколько отличается от скорости в точке a как по величине, так и по направлению (на рис. 42 изображена вектором $\vec{\omega}_2$).

Продолжая процесс перехода от одной точки пространства к другой, мы получим ряд точек $a, b, c, d, e, \dots$, которые лежат друг от друга на бесконечно близких расстояниях; кроме того, они выбраны так, что каждая из них лежит на векторе скорости предыдущей. Если расстояния между точками a, b, c, d будут стремиться к нулю, то ломаная линия $abcde$ обратится в кривую линию. Эта линия называется линией тока,

Она обладает тем замечательным свойством, что каждая частица жидкости, находящаяся на ней в данный момент времени, имеет скорость, совпадающую по направлению с касательной к этой кривой.

Для какой-либо другой точки a_1 можно было бы построить свою линию тока. Таким образом, все пространство, занятое движущейся жидкостью, можно заполнить непрерывным рядом линий, которые дадут нам совершенно ясную картину течения жидкости. Не следует

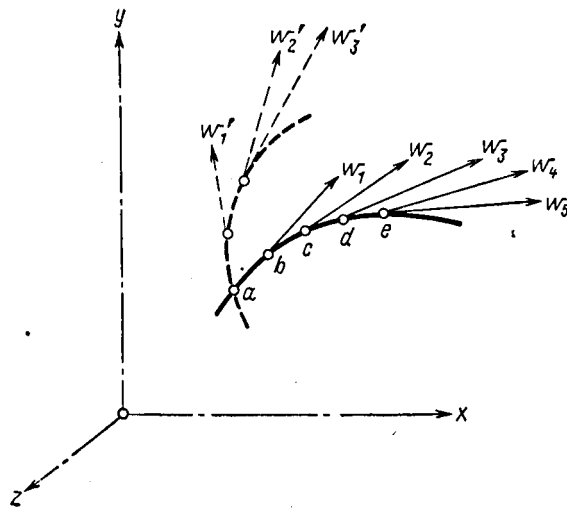


Рис. 42. Линия тока

только забывать, что наше рассуждение относилось к определенному моменту времени.

Если движение неустановившееся, то в другой момент времени t' скорость в точке a , принятой нами за исходную, будет изображаться некоторым иным вектором $\vec{w}_1'$. Чтобы перейти к соседней, бесконечно близкой точке, движение должно идти по новому направлению, изображенному на рис. 42 пунктирным вектором. Для этого нового момента времени линия тока будет отличаться от первой, т. е. не будет совпадать с ней. Отсюда следует, что в случае неустановившегося движения жидкости каждому моменту времени будет соответствовать своя совокупность линий токов.

В случае установившегося течения жидкости, в какой бы момент времени мы ни обращались к исходной точке a , всегда будет наблюдаться в ней та же скорость w_1 , а поэтому, следуя движению вдоль вектора, частица жидкости всегда возвратится в точку b , где скорость w_2 опять-таки сохранит свое прежнее направление.

В установившемся движении жидкости линии тока совпадают с траекториями движущихся частиц. Для доказательства этого представим себе, что в какой-либо момент времени частица жидкости оказалась в точке a . За бесконечно малый промежуток времени dt она пройдет путь, совпадающий с направлением скорости w_1 . Оказавшись в точке b , частица жидкости изменит направление своей скорости и станет двигаться вдоль вектора w_2 . Рассматривая последовательно перемещение частицы, которое всегда будет совпадать с направлением скорости, мы увидим, что она последовательно пройдет весь ряд точек $abcde \dots$, следовательно, эта линия будет являться одновременно траекторией частицы жидкости.

Теперь течение жидкости мы можем представить себе не только как случайную совокупность векторов, а как геометрический образ в виде семейства линий тока, заполняющих все пространство, занятое движущейся жидкостью.

Составим дифференциальные уравнения линии тока.

На бесконечно малом отрезке линии тока ds , который мы можем считать прямолинейным, вектор скорости $\vec{w}$ будет совпадать по направлению с этим отрезком, это следует из определения линии тока. Следовательно, косинусы углов α , β и γ , которые образует вектор скорости $\vec{w}$ с координатными осями, будут равны косинусам углов, образуемых бесконечно малым отрезком ds линии тока (рис. 43).

Обозначая проекции на координатные оси вектора скорости $\vec{w}$ через w_x , w_y , w_z , а проекции бесконечно малого участка ds соответственно через dx , dy , dz , мы можем написать:

$$\cos \alpha = \frac{w_x}{w} = \frac{dx}{ds}; \quad \cos \beta = \frac{w_y}{w} = \frac{dy}{ds}; \quad \cos \gamma = \frac{w_z}{w} = \frac{dz}{ds}$$

или

$$\frac{dx}{w_x} = \frac{ds}{w}; \quad \frac{dy}{w_y} = \frac{ds}{w}; \quad \frac{dz}{w_z} = \frac{ds}{w}.$$

Отсюда находим

$$\frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y} = \frac{dz}{w_z} = \frac{ds}{w}.$$

Мы получили здесь три уравнения (по числу знаков равенств), с другой стороны, мы знаем, что уравнение кривой в пространстве

трех измерений определяется только двумя уравнениями. Но нетрудно видеть, что одно из трех уравнений (например, последнее равенство) является следствием двух других, а поэтому оно не имеет самостоятельного значения.

Таким образом, дифференциальные уравнения линии тока как для установившегося, так и для неустановившегося движения имеют следующий вид (совокупность двух уравнений):

$$\frac{dx}{w_x} = \frac{dy}{w_y} = \frac{dz}{w_z}. \quad (\text{VIII-3})$$

Линии тока не могут между собой пересекаться.

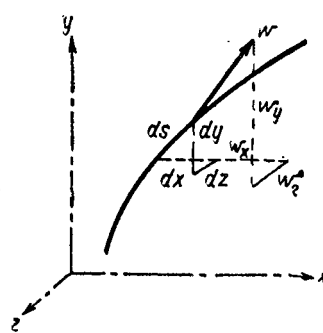


Рис. 43. К определению уравнения линии тока

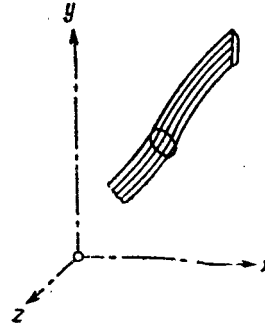


Рис. 44. Трубка тока

Допустим, что две линии тока пересекаются в какой-либо точке a . На основании свойства линии тока скорость частицы жидкости, находящейся в точке пересечения, должна быть одновременно направлена по касательным к этим линиям, но равнодействующая двух скоростей уже не будет касательной ни к той, ни к другой линии, а поэтому они не являются линиями токов.

Вид линий токов зависит исключительно от характера течения жидкости, для различных потоков они будут иметь различный вид.

Введем понятие о трубке тока (элементарной струйке жидкости). Для этого вообразим внутри жидкости произвольный замкнутый контур и предположим, что по своим размерам он бесконечно мал (рис. 44). Через каждую точку этого контура можно провести линию тока, соответствующую данному моменту времени. В результате такого построения получим замкнутую цилиндрическую поверхность, состоящую из непрерывного ряда линий тока, эта поверхность называется трубкой тока или элементарной стружкой жидкости.

Форма трубки тока, очевидно, зависит не только от характера течения жидкости в данный момент времени,

но и от того контура, который послужил основой для построения трубки.

За исходный контур можно взять контур конечных размеров, в таком случае и поверхность трубки тока была бы конечной величиной.

Характерной особенностью трубки тока является то, что жидкость, находящаяся внутри нее, никогда не может вытекать или втекать через ее боковую поверхность; это следует из условия, что скорость на поверхности трубки будет всегда направлена только по касательной к этой поверхности.

Рассмотрим объем жидкости, ограниченный поверхностью трубки тока и двумя ортогональными к трубке сечениями a и b (рис. 45). Через некоторый промежуток времени этот объем переместится вдоль трубки и займет новое положение $a'b'$. При этом форма первоначального объема изменится в зависимости от формы трубки тока. Таким образом, характерной особенностью жидкого объема является изменение его формы. Это свойство в значительной степени усложняет исследование движения жидкости.

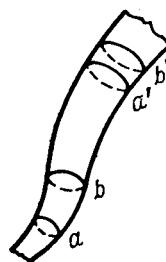


Рис. 45. Изменение формы трубки тока

4. Относительное перемещение жидких частиц

Из общего курса механики известно, что всякое движение твердого тела можно представить как сумму поступательного и вращательного движений. В случае движения жидкости приходится рассматривать еще и новый вид движения, связанный с изменением формы тела и называемый деформацией.

Анализируя относительное перемещение частиц жидкости и определяя приращения скорости для любой точки b , лежащей в окрестности точки a на бесконечно близких от нее расстояниях dx , dy и dz , в курсах гидромеханики доказывается, что эти приращения скорости зависят от 9-ти производных $\partial w_x/\partial x$, $\partial w_x/\partial y$, $\partial w_x/\partial z$, ..., входящих в систему уравнений (VIII-2). Эти производные не являются произвольными величинами, они за-

висят от характера течения жидкости, т. е. от кинематического состояния среды в данной точке.

Выясняя физический смысл частных производных $\partial w_x/\partial x$, $\partial w_x/\partial y$ и т. п., можно показать, что производные $\partial w_x/\partial x$, $\partial w_x/\partial y$, $\partial w_z/\partial z$ выражают скорость относительного удлинения для отрезка единичной длины, т. е. характеризуют собою удлинение или укорочение расстояний между двумя частицами жидкости вдоль осей x , y и z .

5. Вращение жидкой частицы

Рассмотрим остальные шесть производных типа $\partial w_x/\partial y$, $\partial w_y/\partial x$ и т. д. в формуле (VIII-2).

Для этой цели поместим начало координат в исследуемой точке o и координатную систему ориентируем в пространстве произвольным образом (рис. 46). Рассмотрим одновременно скорости двух точек o и a , лежащих на оси x на бесконечно близком расстоянии друг от друга, равном dx . Если в точке o проекция скорости на ось y равна w_y , то в точке a ей будет соответствовать скорость w'_y , отличающаяся от скорости w_y на бесконечно малую величину вследствие того, что она имеет другие координаты

$$w'_y = w_y + \frac{\partial w_y}{\partial x} dx.$$

За бесконечно малый промежуток времени частица жидкости, находящаяся в точке o , пройдет путь в направлении оси y , равный $w_y dt$, частица жидкости a пройдет путь, равный $w'_y dt$, и займет положение a' . Вследствие этого прямая линия oa , соединяющая две частицы жидкости, переместится в пространстве и, кроме того, еще повернется на некоторый бесконечно малый угол $d\alpha$. Величину этого угла можно определить из прямоугольного треугольника.

$$\operatorname{tg} d\alpha = \frac{w'_y dt - w_y dt}{dx} = \frac{\frac{\partial w_y}{\partial x} dx dt}{dx} = \frac{\partial w_y}{\partial x} dt.$$

Вследствие малости угла $d\alpha$ тангенс его можно заменить просто углом, поэтому

$$d\alpha = \frac{\partial w_y}{\partial x} dt$$

или

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial w_y}{\partial x}.$$

Отсюда мы видим, что частная производная $\partial w_y/\partial x$ представляет собой угловую скорость вращения беско-

нечно малого отрезка прямой, совпадающей с осью абсцисс, направление вращения будет зависеть от знака производной $\partial w_y / \partial x$

Точно таким же образом можно установить, что производная $\partial w_x / \partial y$ представляет собой угловую скорость вращения бесконечно малой прямой ob , совпадающей с осью y (рис. 47).

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial w_x}{\partial y}.$$

Наконец, если рассмотреть перемещение отдельных частиц жидкости в плоскостях yoz и xoz , то таким же способом найдем, что производные $\partial w_y / \partial z$, $\partial w_z / \partial y$, $\partial w_z / \partial x$ и $\partial w_x / \partial z$ также характеризуют

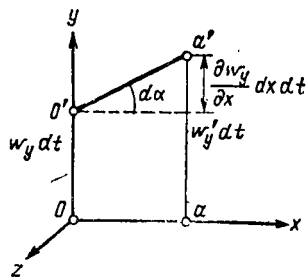


Рис. 46. К определению вращения жидкой частицы

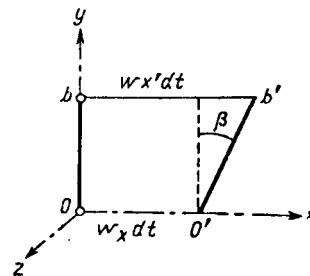


Рис. 47. К определению угловой скорости жидкой частицы

собой вращение прямых, соединяющих две бесконечно близкие точки, лежащие на осях координат.

В этом исследовании мы ограничились рассмотрением только тех частиц жидкости, которые лежат на координатных осях, при этом выяснили, что отрезки, соединяющие эти частицы с частицей жидкости, находящейся в начале координат, за бесконечно малый промежуток времени перемещаются в пространстве вместе со всей массой жидкости. Расстояния между частицами (отрезки) изменяются — удлиняются или укорачиваются в зависимости от того, какой знак имеют производные $\partial w_x / \partial x$, $\partial w_y / \partial y$ и $\partial w_z / \partial z$, кроме того, эти отрезки поворачиваются с угловыми скоростями, численно равными производным $\partial w_x / \partial y$, $\partial w_y / \partial x$, $\partial w_y / \partial z$, $\partial w_z / \partial y$, $\partial w_z / \partial x$, $\partial w_x / \partial z$.

Рассматривая теперь скорости двух частиц жидкости, из которых одна опять находится в начале координат, а другая частица расположена произвольно в плоскости xoy , но на бесконечно близком расстоянии от первой и, опуская вывод, получим

$$\left(\frac{\partial w_y}{\partial x} \right)_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right). \quad (\text{VIII-4})$$

Последнее выражение называется средней угловой скоростью вращения жидкой частицы и обозначается через ω_z , где индекс z указывает, что вращение происходит вокруг оси z или ей параллельной. Оно имеет инвариантный характер, т. е. оно не изменяет своего

численного значения, если повернуть координатную систему вокруг z на какой-либо угол α .

Подобно тому, как мы выделили вращательную часть движения в плоскости xoy , можно таким же путем выделить ее и для движения жидкости в других плоскостях и получить скорости вращения осей y и x .

В конечном результате мы получим выражения:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_z}{\partial y} - \frac{\partial w_y}{\partial z} \right); \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial x} \right); \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} - \frac{\partial w_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{VIII-5})$$

Полная угловая скорость жидкой частицы может быть получена геометрическим суммированием векторов ω_x , ω_y и ω_z . Ее численная величина будет

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}.$$

Та часть движения, которая выражает собой вращение жидкой частицы, носит название вихревого движения, поэтому проекции угловых скоростей вращения ω_x , ω_y и ω_z называются компонентами вихря.

Для того чтобы определить величину вектора угловой скорости и его направление в пространстве для какого-либо частного случая течения жидкости, нужно взять частные производные от проекций скорости по координатам и подставить их в выражение (VIII-5). При этом может оказаться, что компоненты вихря ω_x , ω_y и ω_z обратятся в нуль, а поэтому полная угловая скорость ω также будет равна нулю. Это означает, что в таком движении частицы жидкости перемещаются в пространстве поступательно, деформируются, но не вращаются вокруг своих осей, т. е. средняя скорость вращения всех бесконечно малых радиусов, проведенных внутри частицы, обращается в нуль. Движения такого типа называются безвихревыми. В природе они встречаются значительно реже, чем вихревые.

Подводя итог, мы можем теперь сказать, что движение жидкости, например, в плоскости xoy можно всегда представить как сумму различных видов движения: поступательного, вращательного и деформации. Эта теорема была сформулирована впервые Гельмгольцем.

Отметим в заключение, что удлинение или укорачивание бесконечно малых радиусов частиц жидкости, вызывающие деформацию и характеризующие изменение их формы, играют очень большую роль при изучении движения вязкой жидкости.

6. Вихревая линия и трубка и циркуляция скорости

Представление о вращательном движении жидкости позволяет объединить непрерывную последовательность частиц в виде геометрического образа, называемого вихревой линией.

Это понятие вполне аналогично понятию о линии тока. Различие состоит только в том, что вместо векторов линейной скорости здесь рассмотрены векторы угловой скорости.

Вихревая линия обладает тем замечательным свойством, что касательная к ней к какой-либо точке совпадает с вектором угловой скорости частицы жидкости.

По аналогии с линией тока дифференциальное уравнение вихревой линии можно написать в следующем виде:

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} \quad (\text{VIII-6})$$

Представление об элементарной вихревой трубке получим, если вообразим в жидкости бесконечно малый замкнутый контур, через каждую точку которого проведем свою вихревую линию.

Непрерывная совокупность вихревых линий, образующих замкнутую цилиндрическую поверхность, называется вихревой трубкой. Поперечные размеры вихревой трубки, очевидно, зависят от контура, через точки которого проводим вихревые линии, поэтому можно представить себе вихревую трубку не только бесконечно тонкую, но и любой конечной величины. Вихревые трубки, которые по своему сечению бесконечно малы в пределе, обращаются в вихревые линии. В этом предположении угловую скорость вращения ω можем считать постоянной в пределах одного сечения.

С геометрической точки зрения, бесконечно тонкая вихревая трубка характеризуется с одной стороны, видом вихревой линии, ее образующей, а с другой стороны — величиной поперечного сечения. Но, с точки зрения механической, она характеризуется угловой скоростью вращения жидких частиц, заполняющих внутренность вихревой трубки. Между этими двумя характеристиками можно установить взаимную связь, если ввести понятие о напряженности вихревой трубки или о потоке вектора угловой скорости.

Под напряженностью вихря подразумевают произведение площади сечения, ортогонального к оси вихря, на полную угловую скорость. Однако не следует думать, что это понятие каким-либо образом связано с представлением о напряжениях или силах, возникающих в жидкости. Это название является условным и иногда заменяется названием интенсивности вихря.

Рассмотрим какое-нибудь течение жидкости. В некоторый момент времени t проведем внутри жидкости произвольный контур AB (рис. 48). Положим, что частица жидкости, находящаяся на кривой AB в точке a , имеет скорость w . Проведем в этой точке касательную к кривой и затем спроектируем на нее вектор скорости w . Если угол между вектором w и направлением касательной обозначим через α и проекцию вектора на касательную через w_s , то $w_s = w \cos \alpha$.

Составим теперь произведение $w_s ds$, где ds — бесконечно малый элемент кривой, совпадающий по направлению с касательной. Это произведение называется элементарной циркуляцией скорости на участке контура ds и обозначается обычно через $w_s ds = w \cos \alpha ds = d\Gamma$.

Перейдем затем к соседнему бесконечно малому участку ds_1 , которому будет соответствовать свой вектор скорости w_1 и свое направление касательной, составим для него аналогичное произведение

$$w_1 \cos \alpha_1 ds_1 = d\Gamma_1.$$

Переходя последовательно от одного участка кривой к другому, получим значения элементарных циркуляций на всех участках. Алгебраическая сумма элементарных циркуляций вдоль всей кривой

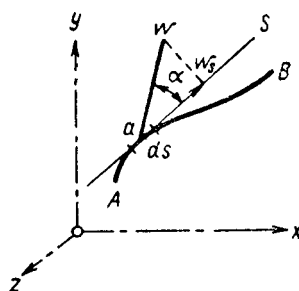


Рис. 48. К определению циркуляции скорости

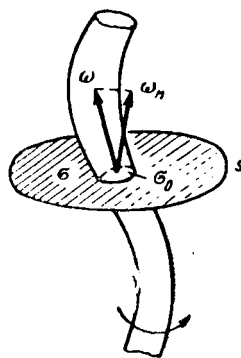


Рис. 49. Вихревая трубка

называется циркуляцией скорости по контуру AB . Ее можно выразить в виде криволинейного интеграла

$$\Gamma = \int_A^B w_s ds = \int_A^B w \cos \alpha ds. \quad (\text{VIII-7})$$

Численное значение циркуляции Γ зависит не только от характера течения жидкости, но и от формы и величины того контура, вдоль которого определяем циркуляцию.

Понятие о циркуляции скорости аналогично понятию о работе силы на криволинейном пути. С математической точки зрения различие между циркуляцией скорости и работой силы состоит лишь в том, что в первом случае рассматривается вектор скорости w , а во втором — вектор силы P . Это обстоятельство дает повод иногда называть циркуляцию скорости работой вектора скорости. Однако размерности этих двух величин различны: работа, как известно, имеет размерность Нм , а циркуляция — $\text{м}^2/\text{с}$.

Связь между напряжением вихревой трубки и циркуляцией скорости по такому замкнутому контуру, который охватывает эту вихревую трубку, устанавливается теоремой Стокса.

Для замкнутого контура S окончательное выражение теоремы Стокса имеет следующий вид:

$$\Gamma_S = \int_S w \cos \alpha ds = 2 \iint_{\sigma} \omega_n d\sigma, \quad (\text{VIII-8})$$

где $d\sigma$ — площадь, ограниченная бесконечно малым замкнутым контуром;

ω_n — проекция вектора полной угловой скорости на нормаль к сечению $d\sigma$.

Произведение $\omega_n d\sigma$, как было указано выше, носит название напряженности вихря, поэтому теорему Стокса кратко можно формулировать следующим образом: циркуляция скорости по замкнутому контуру равна удвоенной алгебраической сумме напряжений вихревых шнуров, проходящих внутри этого контура. Ее можно выразить еще иначе: циркуляция скорости по замкнутому контуру равна удвоенному потоку вектора угловой скорости через поверхность, опирающуюся на этот контур.

В виде простейшего примера рассмотрим такой случай движения, когда внутри жидкости имеется только одна вихревая трубка (рис. 49). Возьмем в жидкости произвольный замкнутый контур S так, чтобы он охватывал собой вихревую трубку, и вычислим циркуляцию скорости по этому контуру.

Проведем через контур S произвольную поверхность σ , которая пересечет вихревую трубку, образуя сечение ее σ_0 .

Интеграл (VIII-8) нужно распространить на всю поверхность σ . Для тех участков поверхности σ , где она не пересекается вихревой трубкой, будет $\omega = 0$ и $\omega_n = 0$, поэтому подынтегральная функция обращается в нуль. Таким образом, интеграл дает значения, отличные от нуля, только для участков площади σ_0 , поэтому

$$\Gamma_S = 2 \iint_{\sigma_0} \omega_n d\sigma.$$

Отсюда следует, что для вычисления циркуляции интеграл нужно распространить только по поверхности сечения вихревого шнура.

Поверхность σ , которую мы проводим через заданный контур S , совершенно произвольна по своему виду, в частности она может быть плоскостью, сферой, поверхностью эллипсоида и т. д.; важно только, чтобы она проходила через контур S , т. е. опиралась на него.

7. О скорости, вызываемой вихревыми шнурами

С кинематической точки зрения, вихревую трубку можно рассматривать как жидкий цилиндр (простейший случай), вращающийся, подобно твердому телу, с угловой скоростью ω .

Как будет реагировать окружающая трубку масса жидкости: останется ли она в состоянии покоя или придет в движение под влиянием вихревой трубки?

Если жидкость идеальная и силы внутреннего трения в жидкости отсутствуют, то, очевидно, жидкий цилиндр может вращаться независимо от окружающей его среды, и поэтому жидкость будет находиться в прежнем состоянии покоя.

Однако всякая реальная жидкость в той или иной степени обладает внутренним трением или, иначе говоря, вязкостью. В силу этого свойства жидкости вихре-

вая трубка при своем вращении будет увлекать за собой окружающую ее среду и вызовет в ней движение.

Остается решить вопрос о том, каким же образом будет двигаться окружающая вихревую трубку жидкость.

Для этой цели применим теорему Стокса (VIII-8), связывающую циркуляцию скорости по замкнутому контуру с напряженностью вихревых трубок, проходящих внутри этого контура. Проведем в плоскости *хоу* замкнутый контур *S* так, чтобы он охватывал собой вихревую область и, кроме того, совпадал с одной из линий тока, другими словами, возьмем одну из линий тока в качестве того контура, вдоль которого будем вычислять циркуляцию скорости. Общее выражение циркуляции представится интегралом (VIII-7):

$$\Gamma = \int_S \omega \cos \alpha ds.$$

В данном случае угол α между направлением касательной к контуру и скоростью потока ω равен нулю, поэтому циркуляция скорости будет равна

$$\Gamma = \int_S \omega ds.$$

Но мы уже выясняли, что для всех точек окружности скорость ω постоянна, поэтому ее можно вынести из-под интеграла и написать

$$\Gamma = \omega \int_S ds.$$

Последний интеграл представляет собой длину окружности, поэтому

$$\Gamma = \omega 2\pi r.$$

Величина циркуляции остается неизменной для малого замкнутого контура, полностью охватывающего вихревой шнур; это следует из теоремы Стокса. Поэтому для какой-либо другой линии тока, радиус которой есть r_1 и скорость на которой равна ω_1 , мы можем написать

$$\Gamma = \omega_1 2\pi r_1,$$

а также

$$\Gamma = 2\pi r \omega = \text{const}$$

или

$$\omega r = \text{const},$$

т. е. произведение скорости на радиус есть величина постоянная для всех точек потока.

Из предыдущего равенства мы можем определить скорость

$$\omega = \Gamma / 2\pi r. \quad (\text{VIII-9})$$

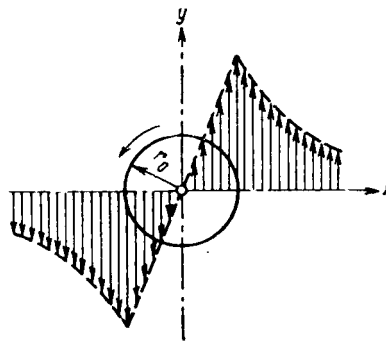
Эта формула представляет собой выражение закона Гельмгольца для простейшего случая.

С увеличением радиуса r скорость убывает и в пределе стремится к нулю. Максимальную скорость будут иметь точки, лежащие на поверхности вихревой трубки. Для точек, лежащих внутри вихревой трубки, этот закон изменения скоростей распространить нельзя, так

как циркуляция скорости по контуру, проведенному внутри вихревого шнура, будет иметь другое значение. Закон распределения скорости для такого потока показан на рис. 50. За пределами вихревой области распределение скорости имеет гиперболический характер, в пределах вихревой области скорость меняется пропорционально радиусу r .

Из сказанного выше можно сделать следующий вывод: если в покоящейся безграничной жидкости возникло вихревое движение в виде бесконечно длинного вихревого шнура, то вся окружающая шнур жидкость тоже должна прийти в движение. Это движение будет также круговым, но оно обладает потенциалом скорости.

Рис. 50. Распределение скорости в вихревой трубке



Эту мысль обычно принято выражать короче: вихрь, возникающий в жидкости, вызывает в окружающей среде скорости. Заметим, что при такой формулировке мы как будто предполагаем, что первопричиной указанного движения является именно вихревой шнур. В действительности характер такого течения жидкости в значительной степени определяется также и потоком, окружающим вихрь, и мы рассматриваем здесь не причину данного вида движения, а просто кинематическую связь между движением двух областей жидкости — внутри и вне вихревой трубки. Движение вне вихревой трубки обладает потенциалом скорости.

Напомним, что понятие о потенциале скорости имеет полную аналогию с понятием о потенциале сил, с которыми приходится встречаться при изучении механики твердого тела.

Можно представить себе такую функцию координат, частные производные которой по какому-нибудь направлению равны проекции скорости в этом направлении.

Если эту функцию обозначить $\varphi(x, y, z)$, то на основании ее определения можно написать

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = w_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = w_y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w_z. \quad (\text{VIII-10})$$

Течение жидкости, удовлетворяющее такому условию, носит название движения с потенциалом скоростей или сокращенно — потенциального движения, а сама функция φ называется потенциалом скорости.

Можно доказать, что в случае движения жидкости с потенциалом скорости угловые скорости вращения жидких частиц должны отсутствовать, т. е. они обращаются в нуль.

Поэтому возможные движения жидкости делят на два вида: движения безвихревые, обладающие потенциалом скоростей, и движения вихревые, для которых функции φ найти нельзя.

Следует заметить, что функция φ должна быть непрерывной и допускать возможность дифференцирования. Кроме того, мы рассматриваем только такие течения жидкости, в которых скорости являются непрерывными функциями координат, поэтому первые производные от функции φ , представляющие собой проекции скорости, также должны быть непрерывными и дифференцируемыми функциями. Однако этого мало. В дальнейшем (см. с. 171) мы выясним, что для жидкости несжимаемой между производными от скорости по координатам должно существовать соотношение в виде уравнения неразрывности (IX-5)

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0.$$

Выражая проекции скорости в этом равенстве через производные от функции φ , можно его написать в таком виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta^2 \varphi = 0. \quad (\text{VIII-11})$$

Функция, удовлетворяющая этому условию, называется гармонической. Поэтому мы можем сказать, что только гармонические функции могут определять собой потенциальное течение несжимаемой жидкости.

Левая часть уравнения (VIII-11) сокращенно обозначается символом $\nabla^2 \varphi$, который называют оператором Лапласа.

Наконец, существует еще одно очень большое ограничение для функции φ , которое выражается в выполнении так называемых граничных условий.

Всякий поток жидкости имеет свои границы. Жидкость, текущая по трубе, имеет границы в виде стенок трубки, направляющих ее движение, поток газов в печи, нагревающий или охлаждающий поверхность изделий, ограничен с наружной стороны стенками камеры печи, а с внутренней — поверхностью изделий. Характер потока именно и определяется его границами, поэтому функция φ должна быть выбрана так, чтобы были соблюдены условия на границе его.

Всякая непроницаемая для жидкости граница допускает существование на ней только скоростей, направленных по касательной к этой границе, другими словами, проекции полной скорости

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}$$

на нормали к поверхности границы w_n должны обращаться в нуль.

Если бы это условие не выполнялось и проекция w_n на границе не обращалась в нуль, то это означало бы, что жидкость протекает через твердую стенку.

Принимая во внимание, что проекция скорости на нормаль может быть выражена через производную $\partial \varphi / \partial n$, мы можем теперь граничные условия выразить условием равенства нулю этой производной для любой точки, лежащей на границе потока. Главная трудность при определении функции φ состоит как раз в выполнении этих граничных условий.

Глава IX

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ КИНЕМАТИКИ И ДИНАМИКИ ГАЗОВ И ЖИДКОСТЕЙ

1. Уравнение неразрывности*

Идея, лежащая в основе уравнения неразрывности, выражает собой закон сохранения массы.

Выделим в момент времени t в движущейся жидкости бесконечно малый объем ее δV . При перемещении он может менять свою форму и величину, но масса, заключенная внутри его, остается постоянной, потому что материя не может исчезать и возникать.

Обозначим массу бесконечно малого объема через dM и запишем:

$$dM/dt = 0. \quad (IX-1)$$

Ввиду того, что рассматривается объем движущийся в жидкости, координаты которого x , y и z с течением времени меняются, выражение (IX-1) следует считать субстанциальной производной.

В случае объема среды в виде прямоугольного параллелепипеда с бесконечно малыми ребрами δx , δy и δz , параллельными координатами осей, масса такого параллелепипеда выразится простой формулой:

$$dM = \rho \delta V = \rho \delta x \delta y \delta z,$$

если в пределах бесконечно малого объема δV считать, что $\rho = \text{const}$.

Закон сохранения массы можно представить теперь в таком виде:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} (\rho \delta V) = 0 \quad (IX-2)$$

или, выполнив дифференцирование:

$$\delta V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d}{dt} (\delta V) = 0. \quad (IX-3)$$

Рассмотрим более подробно производную $\frac{d}{dt} (\delta V)$, которую напомним так: $d(\delta V)/dt$.

* Применение закона сохранения массы к движению элементарной струйки жидкости.

Вычислим сначала приращение объема параллелепипеда за бесконечно малый промежуток времени dt (рис. 51). Изменение длины ребра δx за время dt равно

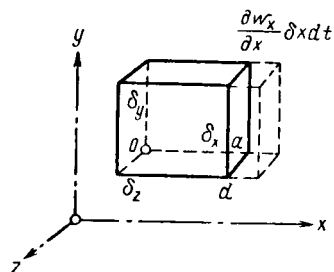


Рис. 51. К выводу уравнения неразрывности

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} \delta x dt.$$

При условии изменения длины других ребер, параллельных оси x , на такую же величину первоначальный объем параллелепипеда получит приращение в виде дополнительного параллелепипеда с площадью основания

$\delta y \delta z$ и высотой $\frac{\partial w_x}{\partial x} \cdot \delta x dt$ (см. рис. 51).

Рассматривая приращение объема параллелепипеда за счет изменения ребер, параллельных оси y , а затем оси z , получим аналогичные выражения:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} \delta x dt \delta y \delta z;$$

$$\frac{\partial w_y}{\partial y} \delta y dt \delta z \delta x;$$

$$\frac{\partial w_z}{\partial z} \delta z dt \delta x \delta y.$$

Полное приращение объема δV за время dt будет равно сумме отдельных приращений вдоль координатных осей, т. е.

$$\begin{aligned} d(\delta V) &= \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \delta x \delta y \delta z dt = \\ &= \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) \delta V dt. \end{aligned}$$

Заметим, кстати, что отношение приращения объема к его первоначальному значению $d(\delta V)/\delta V$ называется коэффициентом кубического расширения. Так как все изменения относятся к единице времени, то отношение

$d(\delta V)/\delta V dt$ можно назвать скоростью объемного расширения.

Для окончания вычисления производной выражение приращения объема разделим на элемент времени dt :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\delta V) &= \frac{\left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) \delta V dt}{dt} = \\ &= \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) \delta V.\end{aligned}$$

Уравнение (IX-3) теперь примет такой вид:

$$\delta V \frac{d\rho}{dt} + \rho \delta V \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) = 0.$$

Сокращая уравнение на δV , т. е. относя все члены равенства к единице объема, получим

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}\right) = 0. \quad (\text{IX-4})$$

Это окончательный вид уравнения неразрывности, оно устанавливает зависимость между скоростью изменения объема жидкости и изменением плотности. Выражение, стоящее в скобках, представляет собой скорость объемного расширения, производная $d\rho/dt$ характеризует скорость изменения плотности частицы жидкости. Здесь написана полная производная, так как мы следим за частицей жидкости, перемещающейся в пространстве и, следовательно, имеющей переменные координаты.

В частном случае, когда мы рассматриваем несжимаемую жидкость, плотность ρ является постоянной величиной, поэтому ее производная по времени обращается в нуль, и уравнение неразрывности принимает более простой вид:

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = \theta = 0, \quad (\text{IX-5})$$

или

$$\text{div } w = 0, \quad (\text{IX-6})$$

т. е. скорость объемного расширения жидкости θ равна нулю, это и соответствует представлению о несжимаемой жидкости.

Уравнение неразрывности, как уже было отмечено, выражает собой закон сохранения материи, поэтому

оно должно выполняться всегда. Однако можно себе представить такие случаи движения жидкости, когда с течением времени внутри выделенного объема возникают пустоты, т. е. пространства, не заполненные жидкостью (кавитация). В этом случае изменение объема уже не будет соответствовать изменению плотности, и уравнение неразрывности не будет выполняться.

2. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости (уравнения Эйлера)

Связь между силами, действующими в жидкости, устанавливается в форме уравнения движения жидкости.

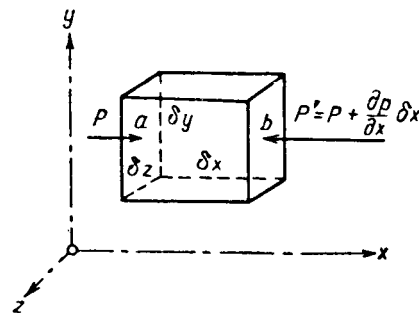


Рис. 52. К выводу уравнения движения Эйлера

Сначала установим эту связь для жидкости, движущейся без трения (идеальная жидкость), находящейся под действием сил тяжести и сил давления. Для вывода уравнения применим основной принцип механики, согласно которому тело находится в состоянии движения, если сумма проекций всех сил, действующих на

тело, равна произведению массы движущегося тела на его ускорение.

В пространстве, занятом движущейся жидкостью, расположим произвольным образом прямоугольную координатную систему xuz и в момент времени t выделим в жидкости частицу в виде прямоугольного параллелепипеда с ребрами, параллельными осям координат (рис. 52). Будем предполагать, что ребра параллелепипеда δx , δy и δz бесконечно малы.

Рассмотрим проекции на ось x всех сил, действующих на параллелепипед. Сила тяжести дает проекцию, равную произведению проекций ускорения сил тяжести x на массу параллелепипеда.

$$\rho \delta x \delta y \delta z,$$

где $\delta x \delta y \delta z$ — объем параллелепипеда.

Силы инерции выражаются произведением массы на проекцию ускорения частицы жидкости вдоль оси x , взятую с обратным знаком:

$$- \rho \delta x \delta y \delta z \frac{dw_x}{dt}.$$

Определим проекцию сил, возникающих вследствие давлений на гранях. Если на левой грани параллелепипеда в точке a возникло давление p , то соответствующая ему сила равна

$$p \delta y \delta z;$$

она проектируется на ось x в натуральную величину и имеет положительный знак.

На правой грани давление p' отличается от давления p в силу того, что координата точки b разнится от координаты точки a на величину δx . Полагая, что давление p является непрерывной функцией координат, мы можем написать, пользуясь разложением p в ряд Тейлора и ограничиваясь первым числом разложения:

$$p' = p + \frac{\partial p}{\partial x} \delta x.$$

Поэтому сила, возникающая на правой грани, будет равна

$$- p' \delta y \delta z = - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z;$$

она тоже проектируется в натуральную величину, но имеет отрицательное направление.

Равнодействующая этих двух сил будет равна

$$- \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z.$$

Все остальные силы, возникающие вследствие давлений на других гранях, будут перпендикулярны к оси x , поэтому их проекции обращаются в нуль.

Применяя принцип Даламбера, т. е. приравнивая нулю сумму проекций всех сил, включая и силы инерции, получим

$$X \rho \delta x \delta y \delta z - \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z - \frac{dw_x}{dt} \rho \delta x \delta y \delta z = 0.$$

Разделив обе части уравнения на произведение $\rho dx dy dz$, т. е. отнеся его к единице массы, окончательно запишем

$$X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dw_x}{dt}.$$

Уравнения равновесия вдоль других осей координат можно получить методом круговой подстановки. В результате этого составим следующую систему дифференциальных уравнений движения жидкости, называемых уравнениями Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{dw_x}{dt}; \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{dw_y}{dt}; \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{dw_z}{dt}, \end{aligned} \right\} \quad (IX-7)$$

или в векторной форме записи:

$$\vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \frac{d\vec{w}}{dt}. \quad (IX-8)$$

В последних уровнях $\frac{dw_x}{dt}$, $\frac{dw_y}{dt}$, $\frac{dw_z}{dt}$ — субстанционные производные.

Когда жидкость находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, ускорения равны нулю и система (IX-7) принимает более простой вид:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}; \\ Y &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}; \\ Z &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (IX-9)$$

Выражения (IX-9) называются основными дифференциальными уравнениями гидростатики.

Рассматривая систему уравнений Эйлера в общей форме, мы видим, что, кроме независимых переменных x , y , z и t , сюда входят переменные величины:

$$X, Y, Z, \rho, w_x, w_y, w_z.$$

Проекции внешних массовых сил X , Y , Z являются известными величинами, так как в большинстве рассматриваемых задач они представляют собою проекции силы тяжести; поэтому в уравнения Эйлера входит пять неизвестных величин, в то время как число уравнений равно только трем.

В качестве четвертого уравнения можно принять уравнение неразрывности (IX-4).

Пятое уравнение мы заимствуем из физики, оно устанавливает связь между давлением газа и его плотностью и носит название характеристического уравнения:

$$\frac{p}{\rho} = gRT, \quad (\text{IX-10})$$

где p , ρ , g , R и T — соответственно давление, плотность, ускорение силы тяжести, газовая константа и абсолютная температура.

3. Уравнение Бернулли*

Для установившегося движения трубки (элементарной струйки) тока при условии, что компоненты скорости изменяются только в направлении соответствующих осей, уравнения (IX-7) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= w_x \frac{\partial w_x}{\partial x}; \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= w_y \frac{\partial w_y}{\partial y}; \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= w_z \frac{\partial w_z}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX-11})$$

Составим одно уравнение, эквивалентное (IX-11):

$$\begin{aligned} Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = \\ = \left(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} dx + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} dy + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} dz \right). \end{aligned} \quad (\text{IX-12})$$

Для случая, когда из массовых сил действует только сила тяжести и $X=Y=0$ и $Z=-g$, выражение (IX-12) примет вид:

* Уравнение живых сил в применении к движению элементарной струйки жидкости.

$$g dz + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) + \left(w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} dx + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} dy + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z} dz \right) = 0. \quad (\text{IX-13})$$

Выражения, стоящие в скобках, представляют полные дифференциалы давления dp и квадрата скорости, так как в последнем случае любое слагаемое можно представить как

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} dx = d \left(\frac{w_x^2}{2} \right).$$

Вследствие этого уравнение (IX-13) можно представить в форме полных дифференциалов:

$$\rho g dz + dp + \rho d \left(\frac{w^2}{2} \right) = 0. \quad (\text{IX-14})$$

Интегралом (IX-14) соответственно будет

$$\rho g z + p + \rho \frac{w^2}{2} = \text{const} \quad (\text{IX-15})$$

или, принимая $\rho g = \gamma$

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{w^2}{2g} = \text{const}. \quad (\text{IX-16})$$

Последние уравнения и являются уравнениями Бернулли, полученными в результате применения к движению элементарной струйки идеальной жидкости уравнения живых сил.

Уравнение (IX-16) записано в приложении к капельной жидкости, все его члены имеют линейную размерность и их принято называть высотами или напорами. Первый член характеризует собою нивелирную «высоту» или высоту положения точки над некоторой произвольно выбранной горизонтальной плоскостью; второй член носит название статической или пьезометрической «высоты» и представляет собой высоту столба жидкости, уравновешивающего давление в данной точке; третий член называется динамической «высотой» или динамическим напором, так как он выражает собою высоту с ко-

торой свободно падающее в пустоте тело достигает скорости w .

В этом уравнении баланс энергии жидкости отнесен к 1 кгс. Покажем это на размерности уравнения:

$$\frac{\text{кгс} \cdot \text{м}}{\text{м}^3} : \frac{\text{кгс}}{\text{м}^3} = \frac{\text{кгс} \cdot \text{м}}{\text{кгс}} = \text{м}.$$

Уравнение (IX-15) является уравнением баланса энергии 1 м³ движущегося газа (получено Бернулли в 1738 г.). Входящие в уравнение величины означают:

$\rho g z$ — энергию положения газа, называемую весовым (геометрическим) «давлением»;

p — энергию давления, называемую статическим давлением;

$p + \rho g z$ — потенциальную энергию газа;

$\rho \frac{w^2}{2}$ — кинетическую энергию 1 м³ движущегося газа, называемую скоростным (динамическим) «давлением».

Уравнение (IX-15) показывает, что при отсутствии потерь сумма энергии движущегося газа в сечении I—I равна сумме энергии движущегося газа в сечении II—II и может быть переписано в виде

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \rho \frac{w_2^2}{2} \quad (\text{IX-17})$$

и выражает собой закон сохранения энергии. Оно показывает также, что отдельные члены, выражающие энергию газа, могут меняться, но сумма их остается постоянной.

Так как уравнение (IX-17) было выведено в предположении отсутствия потерь, то оно относится к идеальной струйке газа. Для реальной струйки газа уравнение следует переписать так:

$$\rho g z_1 + p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \rho \frac{w_2^2}{2} + \Delta p_{\text{пот}}, \quad (\text{IX-18})$$

где $\Delta p_{\text{пот}}$ — потеря энергии на участке I—II, перешедшая в тепло. Повышение температуры газа вследствие перехода механической энергии в тепловую бывает при этом настолько незначительным, что его можно не учитывать при расчетах.

В самом деле, на любую площадку ΔS , находящуюся на поверхности выделенного в жидкости объема, дей-

ствует, как мы знаем, поверхностная сила $\Delta\Sigma$, характеризующая своим нормальным напряжением p и касательным τ . Никаких других сил, с которыми среда воздействовала бы на площадку ΔS , очевидно, не существует. Следует помнить, что ни $\rho \frac{w^2}{2}$, ни $\rho g z$ не представляют, собой реально действующие силы давления, и эти выражения лишь условно можно назвать «давлениями».

Если воспользоваться названием отдельных слагаемых уравнения Бернулли, то закон, выражаемый уравнением (IX-15), можно сформулировать так: при установившемся движении идеальной несжимаемой жидкости сумма весового, статического и динамического давлений есть величина постоянная во всех сечениях одной и той же струйки.

Уравнение Бернулли в его записи (IX-16) можно сформулировать так: полный напор при установившемся движении идеальной несжимаемой жидкости есть величина постоянная во всех сечениях одной и той же струйки.

С энергетической точки зрения полный напор можно рассматривать как величину внешней механической энергии единицы веса жидкости, а слагаемые в уравнении (IX-16) — как величину соответственно кинетической или потенциальной энергии, которой обладает единица веса жидкости.

В случае несжимаемой жидкости как вес, так и объем ее сохраняется во все время движения и уравнения (IX-15) и (IX-16) совершенно эквивалентны друг другу. Но в сжимаемой среде объем не сохраняется, тогда как масса (или вес) есть величина постоянная во все время движения. Поэтому для сжимаемой среды уравнение энергии должно быть написано для единицы массы или веса.

4. Дифференциальные уравнения движения жидкости с учетом внутреннего трения (уравнения Навье—Стокса)

При учете сил трения в дифференциальные уравнения движения жидкости Эйлера (IX-7) необходимо ввести дополнительные слагаемые, которые можно найти, используя уравнение Ньютона (VII-1):

$$\tau_{ij} = \mu \frac{dw_x}{dy_j},$$

Равнодействующую силу внутреннего трения можно определить из следующих соображений. Если в случае плоской задачи скорость изменяется только в направлении оси y (рис. 53), то сила трения возникает только на боковых гранях элемента жидкости. Около нижней грани скорость движения частиц жидкости меньше, чем в самом элементе, поэтому здесь в сечении y сила трения направлена против движения и равна $\tau_n \delta x \delta z$. Около верхней грани, наоборот, скорость движения частиц жидкости больше, чем в самом элементе, поэтому здесь в сечении $y + \delta y$ сила трения направлена в сторону движения и равна

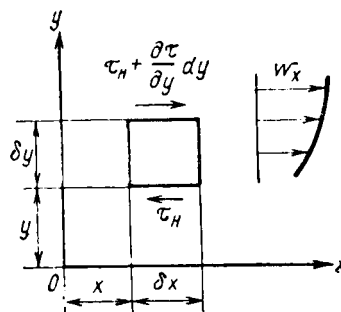


Рис. 53. К выводу уравнения движения Навье-Стокса

$$\left(\tau_n + \frac{\partial \tau_n}{\partial y} \delta y \right) \delta x \delta z.$$

Равнодействующая этих сил равна их алгебраической сумме:

$$\left(\tau_n + \frac{\partial \tau_n}{\partial y} \delta y \right) \delta x \delta z - \tau_n \delta x \delta z = \frac{\partial \tau_n}{\partial y} \delta x \delta y \delta z.$$

Подставив значение касательного напряжения из (VII-1) и разделив величину на $\rho \delta x \delta y \delta z$, т.е. отнеся ее к единице массы, получим

$$\frac{\nu \partial^2 w_x}{\partial y^2}.$$

В общем случае трехмерного движения несжимаемой жидкости скоростное поле описывается, как и в случае идеальной жидкости, тремя уравнениями движения, каждое соответственно в проекциях сил на оси x , y и z .

В этом случае вместо уравнений Эйлера (IX-7) получим:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right) &= \frac{dw_x}{dt}; \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial z^2} \right) &= \frac{dw_y}{dt}; \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_z}{\partial z^2} \right) &= \frac{dw_z}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX-19})$$

Система дифференциальных уравнений (IX-19) называется уравнениями Навье—Стокса.

Используя векторную формулу записи, (IX-19) можно написать в следующем виде

$$\vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{w} = \frac{d\vec{w}}{dt}, \quad (\text{IX-20})$$

$$\text{где } \nabla^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2}.$$

5. Теорема Эйлера*

Согласно второму закону Ньютона, элементарное количество движения равно элементарному импульсу силы:

$$d(mw) = P dt, \quad (\text{IX-21})$$

где P — сумма проекций на какую-либо ось всех сил, приложенных к телу массы m ;
 w — проекция скорости на ту же ось;
 dt — время действия силы P .

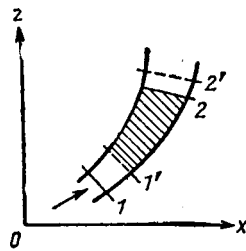


Рис. 54. К выводу закона количества движения Эйлера

В таком виде закон Ньютона используют в механике твердого тела.

Применительно к потокам жидкостей и газов удобнее применять несколько иную (гидродинамическую) форму уравнения для количества движения, которую впервые получил Эйлер.

Для этого выделим элементарную струйку (рис. 54) и проведем два нормальных к ее оси сечения 1 и 2. Разделим всю массу жидкости, заключенную в объеме 1—2, на большое число частей так, чтобы в пределах каждой из них имеющей массу m , скорость движения w можно было считать постоянной, и установим связь между проекциями сил и количества движения на ось x . Согласно (IX-21), сумма проекций импульсов всех сил,

* Закон количества движения в приложении к движущемуся газу.

приложенных к массе жидкости $1-2$, равняется изменению проекций суммарного количества движения:

$$P_x dt = d\Sigma m w_x. \quad (\text{IX-22})$$

Рассмотрим изменение суммарного количества движения $d\Sigma m w_x$ за время dt , в течение которого выделенная масса жидкости переместится из положения $1-2$ в положение $1'-2'$. Будем считать, что жидкость находится в установившемся движении, тогда количество движения $1'-2$, входящее как в начальное, так и в конечное значение суммарного количества движения, остается неизменным и при вычитании сокращается. Иначе говоря, прирост суммарного количества движения должен быть равен разности количества движения, взятого соответственно для масс $2-2'$ и $1-1'$, которые в установившемся движении одинаковы:

$$d\Sigma m w_x = (w_{x_2} - w_{x_1}) dM,$$

где dM — масса жидкости элемента $1-1'$ (или $2-2'$);
 w_{x_1}, w_{x_2} — проекции на ось x скорости потока в сечениях 2 и 1 .

Элементарная масса dM равна произведению секундного весового расхода жидкости на промежуток времени dt , поделенному на ускорение силы тяжести:

$$dM = \frac{G}{g} dt.$$

Отсюда

$$d\Sigma m w_x = (w_{x_2} - w_{x_1}) \frac{G}{g} dt.$$

Величина Gw/g называется секундным количеством движения.

Подставляя полученное выражение в исходное равенство (IX-22), приходим к уравнению количества движения в гидродинамической форме (первому уравнению Эйлера), согласно которому сумма проекций всех сил, приложенных к струе жидкости на любом ее участке, равна приращению проекции секундного количества движения на этом участке или, что то же, произведению секундной массы на приращение проекции скорости:

$$P_x = \frac{G}{g} (m_{x_2} - w_{x_1}). \quad (\text{IX-23})$$

Важная особенность уравнения количества движения состоит в том, что с его помощью расчет действующих сил ведется только по состоянию потока на контрольной поверхности без проникновения в сущность процессов, происходящих внутри этой контрольной поверхности. Поэтому уравнение количества движения позволяет во многих случаях достаточно точно рассчитать гидродинамический процесс, не вникая в его детали.

Следует отметить, что эффективность использования уравнения количества движения зависит в основном от того, насколько удачно выбрана в потоке контрольная поверхность (контур).

Величины $\frac{G}{g} w_{x_1}$ и $\frac{G}{g} w_{x_2}$ являются проекциями на ось x количеств движения всего потока жидкости, втекающего в контур и вытекающего из него.

Заменяя их через J_{x_1} и J_{x_2} , получим

$$J_{x_2} = J_{x_1} + P_x. \quad (IX-24)$$

Это уравнение читается так: проекция на некоторую ось (в данном случае на ось x) количества движения жидкости (газа), вытекающего из контура, равна сумме проекций на ту же ось количества движения жидкости (газа), втекающего в контур, и всех внешних сил, действующих на жидкость (газ), заключенный в контуре.

Остановимся на величине P_x .

Небольшая часть жидкости a , выделенная внутри контура, испытывает давление со всех сторон (рис. 55). Давления p_a и p_b

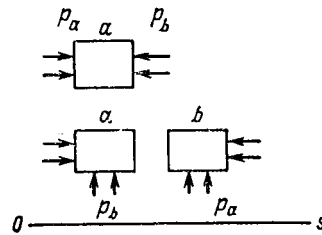


Рис. 55. К выводу закона количества движения Эйлера

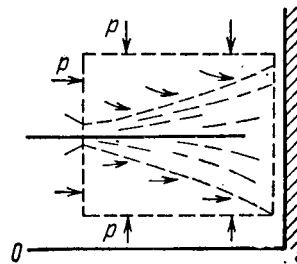


Рис. 56. Определение давления струи газа на стенку

в общем случае не равны между собой и проекция их на ось s дает какую-то разность. Но если рассматривать совокупность частей a и b , то давление p_b , испытываемое ими в плоскости соприкосновения при проектировании на ось x , сократится, останутся лишь давления p_a и p_b .

Если же взять большое количество таких частей, то горизонтальные внутренние силы сократятся и останется только внешнее давление на контур, которое дает некоторую проекцию на ось x .

Следовательно, из анализа сил, действующих на отдельные части, видно, что проекция на ось x внутренних сил равна нулю и остаются только внешние силы, действующие на контур.

Поскольку при выводе теоремы Эйлера было предположено установившееся движение и применен закон сохранения массы, то, следовательно, никаких других ограничений в применении теоремы Эйлера не существует: она может быть применена к анализу движения как идеального, так и реального газа, сжимаемого газа, нагревавшегося или охлаждающегося газа, а также претерпевающего химические превращения (горение).

Разберем пример применения теоремы Эйлера.

На рис. 56 изображено сопло, из которого со скоростью w_x вытекает газ, и стенка, о которую ударяется газ (струя).

Требуется определить давление газа на стенку.

Выделим контур газа. Подсасываемый струей окружающий воздух не учитываем (из-за малой его скорости). Так как скорости газа вдоль стены неизвестны, то возьмем ось x параллельно оси струи, тогда проекция этих скоростей на ось s будет равна нулю (рис. 56).

Разберем величины, входящие в (IX-24).
 $J_{x_2} = 0$, так как направление движения вдоль стены перпендикулярно оси x :

$$J_{x_1} = + \frac{G}{g} w_{x_1}.$$

Контур испытывает давление p со стороны атмосферы. Со стороны стенки газ испытывает давление атмосферы плюс избыточное давление

$$P_x = pF - pF + R,$$

где R — сила реакции струи;

F — площадь поперечного сечения контура, перпендикулярная оси x .

Из последнего уравнения видно, что сумма проекций всех сил, действующих на контур, равна силе реакции струи. Подставим все эти величины в (IX-24):

$$0 = \frac{G}{g} w_{x_1} + R,$$

откуда $R = - \frac{G}{g} w_{x_1}$ Н (кгс), т. е. реакция струи, ударяющейся о стенку, равна количеству движения струи в начальном ее сечении (здесь $w_{x_1} = w_0$); она имеет знак «минус», так как направлена справа налево (давление стенки на газ, заключенный в контуре).

6. Теорема Борда

Теорема Борда выясняет вопрос о потерях энергии при движении газа по горизонтальному каналу, имеющему внезапное расширение сечения (рис. 57).

Напишем уравнение Бернулли для данного случая:

$$p_1 + \rho \frac{w_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{w_2^2}{2} + \Delta p_{\text{пот.}}$$

$$\Delta p_{\text{пот.}} = (p_1 - p_2) + \left(\rho \frac{w_1^2}{2} - \rho \frac{w_2^2}{2} \right). \quad (\text{IX-25})$$

В этом уравнении неизвестны потеря полного давления $\Delta p_{\text{пот.}}$ и статическое давление p_2 , т. е. мы имеем одно уравнение с двумя неизвестными.

Для определения p_2 обратимся к теореме Эйлера (IX-24). Выберем контур, указанный штрихами на рис. 57 и совпадающий в некоторых своих частях со стенками канала. Ось x выбираем параллельно оси канала.

Количество движения газа, вытекающего из контура, $J_{x_2} = \frac{G}{g} w_{x_2}$ и втекающего в контур $J_{x_1} = \frac{G}{g} w_{x_1}$.

На основании теоретических соображений и опыта можно принять, что на газ, заключенный в контуре, слева по всей плоскости контура действует давление

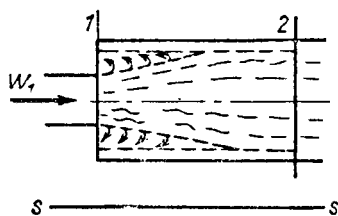


Рис. 57. К определению потерь при внезапном расширении канала

плюс p_1 , следовательно, сила, действующая на контур слева, равна плюс $F_2 p_1$, справа действует сила — $F_2 p_2$ (знак «минус» указывает направление силы, а F_2 — площадь поперечного сечения канала после расширения). Кроме того, по боковым стенкам контура действуют силы трения о стенки $R_{тр}$, возникающие при движении газа. Они на-

правлены справа налево и имеют знак минус.

Сумма сил, действующих на газ, заключенный в контуре,

$$P_x = +F_2 p_1 - F_2 p_2 - R_{тр} = F_2 (p_1 - p_2) - R_{тр}.$$

Величиной сил трения $R_{тр}$ пренебрегаем по малости.

Подставим найденные выражения в уравнение Эйлера:

$$\frac{G}{g} w_{x_2} = \frac{G}{g} w_{x_1} + F_2 (p_1 - p_2). \quad (\text{IX-26})$$

В данном случае заданы расход газа и сечения каналов, а следовательно, и скорости $w_1 = w_{x_1}$ и $w_2 = w_{x_2}$.

Неизвестной будет разность статических давлений $(p_1 - p_2)$. Определим ее из (IX-26) и сделаем замену:

$$G = w_{x_2} F_2 \gamma.$$

Тогда

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \frac{G}{F_2 g} w_2 - \frac{G}{F_2 g} w_1 = \frac{G}{F_2 g} (w_2 - w_1) = \\ &= \frac{w_2 F_2 \gamma}{F_2 g} (w_2 - w_1) = \rho w_2^2 - \rho w_1 w_2, \end{aligned} \quad (\text{IX-27})$$

где $\gamma/g = \rho$.

Так как $w_1 > w_2$, то из (IX-27) следует, что $p_2 > p_1$

Подставим найденное значение для $p_1 - p_2$ в выражение (IX-25):

$$\Delta p_{\text{пот}} = 2\rho \frac{w_2^2}{2} - 2\rho \frac{w_1 w_2}{2} + \rho \frac{w_1^2}{2} - \rho \frac{w_2^2}{2}$$

или окончательно

$$\Delta p_{\text{пот}} = \rho \frac{(w_1 - w_2)^2}{2} . \quad (\text{IX-27a})$$

Это есть выражение потерь при движении жидкости (газа) по каналу с внезапным расширением канала. Уравнение (IX-27, а) читается так: потеря энергии при движении по внезапно расширяющемуся каналу равна динамическому давлению потерянной скорости.

7. Уравнение Бернулли для печных газов

В уравнение Бернулли (IX-18) входит величина абсолютного давления p . В печах же обычно измеряют относительное давление, т. е. разность давлений печных газов и окружающей атмосферы. Поэтому уравнение Бернулли для печных газов целесообразно преобразовать так, чтобы в него входили разности давлений.

Для этой цели напишем уравнение Бернулли для газов, двигающихся по каналу (рис. 58), и для покоящегося атмосферного воздуха, окружающего канал, и вычтем их почленно одно из другого:

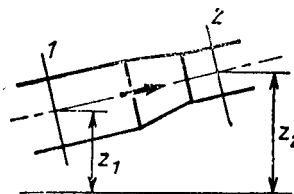


Рис. 58. К выводу уравнения Бернулли для печных газов

$$\gamma_g z_1 + p_{g_1} + \rho \frac{w_{g_1}^2}{2} = \gamma_g z_2 + p_{g_2} + \rho \frac{w_{g_2}^2}{2} + \Delta p_{\text{пот}} \text{—газы в канале,}$$

$$\gamma_v z_1 + p_{v_1} = \gamma_v z_2 + p_{v_2} \text{—атмосферный воздух}$$

$$z_1 (\gamma_g - \gamma_v) + (p_{g_1} - p_{v_1}) + \rho \frac{w_{g_1}^2}{2} = z_2 (\gamma_g - \gamma_v) + (p_{g_2} - p_{v_2}) + \rho \frac{w_{g_2}^2}{2} + \Delta p_{\text{пот}}.$$

Обозначая в последнем уравнении $\rho w_{\Gamma}^2/2$ через h_d , разность давлений $(p_{\Gamma}-p_B)$ через $h_{ст}$ и $\Delta p_{пот}=h_{пот}$, получим основное уравнение Бернулли для печных газов:

$$z_1 (\gamma_{\Gamma} - \gamma_B) + h_{ст_1} + h_{д_1} = z_2 (\gamma_{\Gamma} - \gamma_B) + h_{ст_2} + h_{д_2} + h_{пот}. \quad (IX-28)$$

В последнем уравнении в выражение скоростного (динамического) давления $h_d = \rho \frac{w_{\Gamma}^2}{2}$ входят плотность газа по массе $\rho_{\Gamma t}$ и его средняя по сечению скорость $w_{\Gamma t}$ при температуре потока. Целесообразно выразить их через величины ρ_{Γ_0} и w_{Γ_0} , приведенные к 0°C , используя равенства

$$\rho_{\Gamma t} = \frac{\rho_{\Gamma_0}}{1 + \beta t} \text{ и } w_{\Gamma t} = w_{\Gamma_0} (1 + \beta t).$$

Подставляя эти значения в выражение h_d , получим

$$h_d = (1 + \beta t) \rho_{\Gamma_0} \frac{w_{\Gamma_0}^2}{2}.$$

В этом уравнении влияние температуры учитывается множителем расширения $(1 + \beta t)$, выражение же $\rho_{\Gamma_0} \frac{w_{\Gamma_0}^2}{2}$ не зависит от температуры, что представляет удобство при практических расчетах.

С точки зрения энергии каждую часть (IX-28) можно рассматривать как энергию 1 м^3 газа относительно 1 м^3 окружающего воздуха.

Уравнение (IX-28) для практических расчетов может быть переписано в следующем виде:

$$(z_2 - z_1) (\gamma_B - \gamma_{\Gamma}) + h_{ст_1} + h_{д_1} = h_{ст_2} + h_{д_2} + h_{пот}. \quad (IX-29)$$

Величины $z (\gamma_{\Gamma} - \gamma_B)$, а также $(z_2 - z_1) \cdot (\gamma_B - \gamma_{\Gamma})$ называют геометрическими давлениями.

Проанализируем это уравнение на следующих примерах.

На рис. 59 имеем поднимающийся канал постоянного сечения, т.е. $F_1 = F_2$ и $h_{д_1} = h_{д_2}$, так как $z_2 > z_1$, то произведение $(z_2 - z_1) \cdot (\gamma_B - \gamma_{\Gamma}) > 0$.

Из уравнения (IX-29) видно, что раз $h_{д_1} = h_{д_2}$, то при наличии небольших потерь (потерь трения о стенку) $h_{ст_2} > h_{ст_1}$.

Отложим на ординате в масштабе для сечения 1 величины $h_{ст1}$, $h_{д1}$ и $(z_2 - z_1) \cdot (\gamma_B - \gamma_r)$. Проводим горизонтальную линию. Отложив величину $h_{пот}$, получим отрезок, выражающий собой энергию в сечении 2. Далее отложим величину $h_{д2} = h_{д1}$, величина $h_{ст2}$ определится как разность.

Из рис. 59 видно, что на пути от сечения 1 к сечению 2 давление $h_{ст}$ будет возрастать за счет энергии поло-

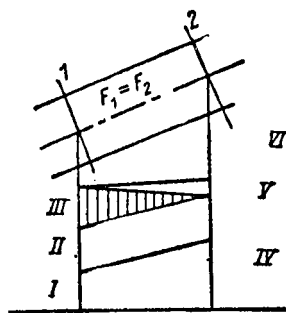


Рис. 59. Графическая интерпретация уравнения Бернулли:

I — $h_{ст1}$; II — $h_{д1}$; III — $(z_2 - z_1) \times (\gamma_B - \gamma_r)$; IV — $h_{ст2}$; V — $h_{д2}$; VI — $h_{пот}$; $h_{д1} = h_{д2}$.

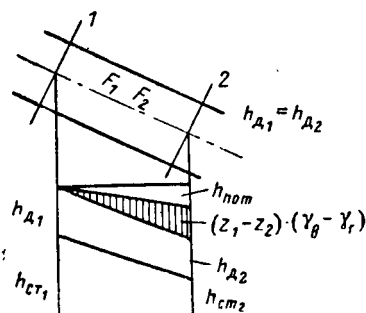


Рис. 60. Графическая интерпретация уравнения Бернулли

жения, так как часть энергии положения переходит в энергию давления.

Таким же образом определим баланс энергии газа, движущегося по опускающемуся каналу (рис. 60).

Поскольку в этом случае $(z_2 - z_1) \cdot (\gamma_B - \gamma_r) < 0$, то для наглядности графического построения переносим эту величину в правую часть (IX-29).

Для сечения 1 отложим на ординате в масштабе $h_{ст1}$ и $h_{д1}$, проводим горизонтальную линию. От нее для сечения 2 отложим величину $h_{пот}$, $(z_1 - z_2) \cdot (\gamma_B - \gamma_r)$ и $h_{д2} = h_{д1}$.

Величина $h_{ст2}$ определяется по разности.

Из рис. 60 видно, что за счет изменения $h_{ст}$ энергия положения возрастает.

Выведенные выше уравнения Бернулли (IX-15), (IX-18), (IX-28) и (IX-29) относились к бесконечно малой струйке жидкости, где скорости по сечению последней были равны. В потоке газа конечного поперечного сечения, как известно, наблюдается неравномерное рас-

пределение скорости. Скорости в пристеночном пограничном слое и в приосевой области (ядре) потока различны (рис. 61). Подберем некоторую среднюю скорость в сечении, при которой расход газа будет таким же, как и при неравномерном распределении скоростей по сечению.

Уравнение Бернулли (IX-29) для данного случая напишем так:

$$\begin{aligned} (z_2 - z_1)(\gamma_b - \gamma_r) + (p_{r_1} - p_{b_1}) + \alpha \rho \frac{w_{cp_1}^2}{2} = \\ = (p_{r_2} - p_{b_2}) + \alpha \rho \frac{w_{cp_2}^2}{2} + h_{\text{пот}}. \end{aligned} \quad (\text{IX-30})$$

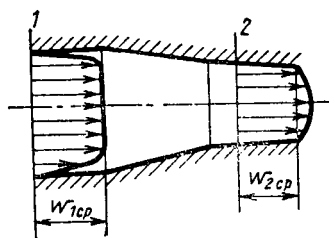


Рис. 61. К определению коэффициента Кориолиса

Вычисления показывают, что во всех случаях неравномерного распределения скорости величина α , называемая коэффициентом Кориолиса или поправкой на неравномерное распределение скорости по сечению, больше единицы; так, α для турбулентного потока равно $1,07 \div 1,1$, а для ламинарного потока 2,0.

Глава X

СТАТИКА ГАЗОВ И ЖИДКОСТЕЙ

1. Статика однородного газа

Уравнение статики однородного, покоящегося газа может быть получено из уравнения (IX-15), если принять, что скорость газа $w=0$.

Тогда

$$\rho g z + p = \text{const}. \quad (\text{X-1})$$

Рассмотрим изменение давления в покоящемся атмосферном воздухе над поверхностью земли (рис. 62).

Ось отчета высот совмещаем с уровнем земли. Пусть в горизонтальной плоскости на расстоянии z_1 от поверх-

ности земли имеется давление p_1 . Найдем давление p_0 на поверхности земли.

Каждый квадратный метр поверхности земли испытывает, согласно закону Паскаля, давление p_1 плюс вес столба газа высотой z_1 :

$$p_0 = p_1 + z_1 \rho g. \quad (X-2)$$

Если предположить, что величина $\rho g = \gamma$ (удельный вес воздуха, Н/м³) имеет постоянное значение по высоте столба z_1 , то изменение атмосферного давления с высотой будет происходить по закону прямой линии, что показано на рис. 62. В действительности объемный вес воздуха на поверхности земли будет несколько больше за счет того, что $\rho_0 > \rho_1$.

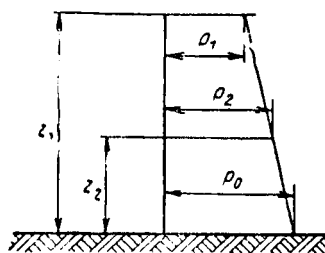


Рис. 62. К выводу уравнения статики газов

Проверим, как велика погрешность в предположении, что γ не меняется по высоте. В практике печестроения приходится иметь дело с высотами 100—200 м при сооружении дымовых труб.

Определим давление на поверхности земли, если, например, на высоте $z_1 = 100$ м имеем

$$p_1 = 100\,000 \text{ Н/м}^2 = 10\,000 \text{ кгс/м}^2 = 736 \text{ мм рт. ст.} = 10\,000 \text{ мм вод. ст.}$$

Задаем $\gamma = 12,9 \text{ Н/м}^3$. Получим абсолютное давление на поверхности земли:

$$p_0 = 100\,000 + 100 \cdot 12,9 = 101\,290 \text{ Н/м}^2, \text{ или } 10\,129 \text{ кгс/м}^2,$$

т. е. на поверхности земли давление на $\sim 1,3\%$ больше, чем на высоте 100 м.

Величина эта столь незначительна, что ею можно пренебречь и считать, что в условиях металлургических агрегатов покоящийся газ постоянной температуры имеет одинаковый удельный вес $\gamma \text{ Н/м}^3$ (или плотность, кг/м^3) по высоте.

Сделаем обобщение полученного уравнения (X-2).

Для другого уровня z_2 напомним аналогичное уравнение:

$$p_0 = p_2 + z_2 \rho g.$$

Правые части последних уравнений равны: $p_1 + z_1 \rho g = p_2 + z_2 \rho g$.

Поскольку z_1 и z_2 были взяты произвольно, можно написать в общем виде

$$p + z \rho g = \text{const.} \quad (X-3)$$

Простое логическое рассуждение привело нас к уравнению (X-1), полученному аналитическим путем. Кроме того, сравнение уравнений (X-1) и (X-2) показывает, что в рассматриваемом случае $p_0 = \text{const}$.

Уравнение статики газов (X-3) гласит, что сумма абсолютного давления и веса столба газа есть величина постоянная для каждого элемента покоящегося газа, заполняющего данный объем.

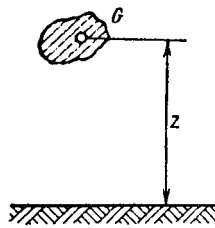


Рис. 63. К анализу уравнения (X-3)

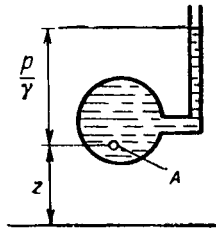


Рис. 64. К анализу уравнения (X-6)

Проанализируем выражение (X-3) с точки зрения закона энергии покоящегося газа или жидкости. Запас энергии твердого тела (рис. 63) по закону механики равен Gz Н·м. Энергия единицы объема твердого тела:

$$E = \frac{Gz}{v} = \rho g \text{ Н} \cdot \text{м} / \text{м}^3, \quad (\text{X-4})$$

где v — объем тела, м^3 .

Из последнего уравнения видно, что запас энергии тела пропорционален высоте z и что перемещение тела в горизонтальной плоскости не вызывает изменения запаса энергии тела.

Размерность выражения (X-3) можно представить в виде $\text{Н} \cdot \text{м} / \text{м}^3$ и рассматривать каждый член уравнения как запас энергии, причем p — есть энергия давления, $\rho g = \gamma$ — энергия положения 1 м^3 газа.

Таким образом, энергия любой частицы покоящегося газа, заполняющего некоторый объем, одна и та же и определяется уравнением

$$E = p + \rho g = \text{const}. \quad (\text{X-5})$$

В частности, перемещение частицы газа как по горизонтали, так и по вертикали не вызывает изменения запаса энергии и поэтому не требует затраты энергии.

Применим уравнение (X-5) к капельным жидкостям.
 При анализе запаса энергии жидкостей принято относить запас энергии к 1 кгс. Если каждый член выражения (X-5) разделить на величину ρg , то получим следующее уравнение:

$$E = \frac{p}{\rho g} + z = \text{const.} \quad (\text{X-6})$$

Как уже указывалось по поводу уравнения (IX-16), каждый член формулы (X-6) может быть выражен отрезком, измеряемым в метрах. В уравнении (X-6) величина z называется геометрическим напором и выражает собой энергию положения любой частицы жидкости; величина $p/\rho g$, являющаяся давлением, выраженным в метрах столба данной жидкости, называется пьезометрическим напором и выражает собой энергию давления.

Поясним вышесказанное на примере рис. 64.

Имеем сосуд, наполненный жидкостью. Энергия частицы A состоит из энергии положения данной частицы или геометрического напора, равного z , и энергии давления — пьезометрического напора, равного $p/\rho g = p/\rho g$ м.

2. Статика двух однородных газов

В печах приходится сталкиваться с фактом взаимодействия газов, заполняющих печь, и окружающей атмосферой. Плотность продуктов сгорания может отличаться от плотности воздуха как в ту, так и в другую сторону в зависимости от содержания CO_2 и H_2O , но отклонения эти невелики и в расчетах можно принимать, что плотность ρ печных газов при 0°C , как и воздуха, равна $1,29 \text{ кг/м}^3$.

Тогда плотность газов при $T^\circ \text{C}$ равна:

$$\rho_t = \frac{1,29}{1 + \beta t} = 1,29 \frac{273}{273 + t}. \quad (\text{X-7})$$

Приведем значения плотностей печных газов при некоторых температурах:

$T, ^\circ \text{C} \dots$	0	500	1000	1500	2000
$\rho_t, \text{кг/м}^3 \dots$	1,29	0,456	0,276	0,199	0,155

Приведенные цифры показывают, что плотность газов в печах при высоких температурах в несколько раз меньше, чем у окружающего воздуха.

Основные положения статики двух однородных газов найдем из рассмотрения следующего случая.

На рис. 65 представлена схема печи с дымовым болом. Печь заполнена горячими газами, шибер закрыт,

заслонка на рабочем окне несколько приоткрыта, все отверстия в печи закрыты, газовая горелка отключена. В этих условиях наблюдается равновесие газов и окружающей атмосферы, вследствие чего не будет ни выбивания газов, ни засасывания воздуха в печь через приоткрытое рабочее окно.

Проводим линию абсолютного барометрического давления атмосферы, окружающей печь. Уклон прямой,

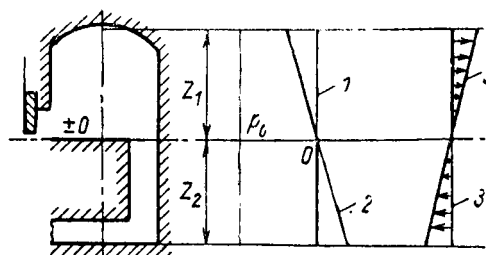


Рис. 65. Статика двух однородных газов

1 — абсолютное давление газов в печи; 2 — то же, атмосферы; 3 — относительное давление

изображающей изменение абсолютного давления по высоте, зависит от плотности газа. Отметим, что чем больше плотность газа, тем более полого пойдет прямая.

Абсолютное давление печных газов, заполняющих печное пространство, нам известно лишь на уровне печного окна, где оно равно давлению окружающего воздуха. Следовательно, прямая, изображающая абсолютное давление печных газов, пройдет через точку О (принято, что температура печных газов по высоте печи постоянна).

Абсолютное давление легких печных газов будет в меньшей степени меняться по высоте, чем абсолютное давление окружающего воздуха — прямая пойдет круче.

Выше нейтральной плоскости*, в которой давление равно нулю, печные газы имеют избыточное давление против атмосферного воздуха. Это давление печных газов показывается V-образным дифференциальным манометром, поставленным под сводом.

Ниже плоскости ± 0 отмечено давление, пониженное против атмосферного, т. е. разрежение или вакуум.

Рассмотрим количественную сторону вопроса. На основании выражения (X-3) для печных газов и воздуха можно соответственно написать:

* Условное название плоскости, в которой давление печных газов и атмосферного воздуха одинаковы.

$$p_r + z\rho_r g = \text{const} \quad (\text{X-8})$$

И

$$p_b + z\rho_b g = \text{const}. \quad (\text{X-9})$$

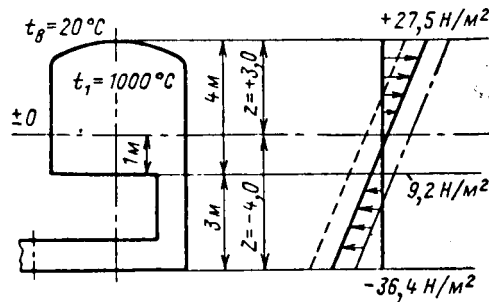
Чтобы получить относительное давление, вычтем почленно (X-9) из (X-8).

$$p_r - p_b = z(\rho_b g - \rho_r g);$$

обозначая $p_r - p_b = h_{ст}$, получим

$$h_{ст} = z(\rho_b g - \rho_r g) \text{ или } h_{ст} = z(\gamma_b - \gamma_r). \quad (\text{X-10})$$

Рис. 66. Распределение статического давления по высоте печи



Это уравнение было выведено в предположении, что ось отсчета высоты совмещена с нейтральной плоскостью ± 0 .

При $z > 0$ имеем соответственно $h_{ст} > 0$ при $z < 0$, $h_{ст} < 0$. Рассмотрим пример, иллюстрирующий распределение давления в печи.

Требуется найти распределение статического (относительного) давления по высоте рабочего пространства печи (при выключенном отоплении и отключенной тяге) и построить это графически. Нейтральная плоскость ± 0 находится на уровне 1 м от пода. Схема печи и график относительных давлений даны на рис.66.

Вычисляем плотность газа и воздуха:

$$\rho_b = \frac{\gamma_0}{1 + \beta t} = \frac{1,29}{1 + 20/273} = 1,20 \text{ кг/м}^3; \rho_r = \frac{1,29}{1 + 1000/273} = 0,276 \text{ кг/м}^3,$$

т. е. плотность газа в 4,5 раза меньше плотности воздуха.

Определим давление газа под сводом и на поду борова.

Избыточное давление под сводом равно ($z = +3,0$); $h_{ст} = +3,0 (1,2 - 0,276) = 2,75 \text{ мм вод. ст.}$

Давление на поду борова при $z = -4,0$ $h_{ст} = -4,0 (1,2 - 0,276) = -3,64 \text{ мм вод. ст.}$

На поду рабочей камеры печи при $z = -1,0$ $h_{ст} = -1,0 (1,20 - 0,276) = -0,92 \text{ мм вод. ст.}$

Строим график относительных давлений (см. рис. 66).

Уровень нейтральной плоскости ± 0 может быть изменен открытием шиберов в борове. Если приоткрыть шибер, то давление в печи уменьшится, нейтральная плоскость переместится вверх и распределение давления изобразится пунктирной прямой. Если шибер закрыть и включить газовую горелку, то давление в печи повысится, распределение давления представится штрихпунктирной прямой. Но во всех случаях уклоны прямых будут одинаковы (если температура газов во всех случаях одна и та же, в данном случае 1000°C). В рассмотренном примере изменение давления на 1 м высоты составляет 0,92 мм вод. ст. Если температура в печи 1000°C , то для грубых подсчетов можно принимать прирост давления в 1 мм вод. ст. на 1 м высоты при условиях, близких к равновесию.

Для уменьшения вредного выбивания газов из печи, а также засасывания воздуха желательно поддерживать давление ± 0 на уровне рабочих окон. Давление или разрежение в печи у рабочих окон порядка $\pm 2 \div \pm 5$ мм вод. ст. считается уже большим и недопустимым.

Из сказанного можно сделать следующие выводы:

- 1) в печах с высокой температурой можно для грубой оценки изменения давления считать, что изменение высоты на 1 м дает изменение давления на 1 мм вод. ст.;
- 2) уклон линий на графике относительных давлений зависит от разности плотностей воздуха и печных газов;
- 3) положение уровня ± 0 по высоте печи можно регулировать шибером. Закрывая шибер, будем опускать линию нулевого давления к поду и, наоборот, открывая шибер, будем поднимать линию нулевого давления вверх (к своду), что показано пунктирными линиями на графике относительного давления.

3. Статика дымовой трубы

Рассмотрим, как распределяется давление в дымовой трубе.

Опыт показывает, что давление в плоскости выходного сечения работающей дымовой трубы практически равно давлению окружающей атмосферы (это относится к любому каналу, выдающему газы в некоторый объем).

Предположим, что шибер опущен и движение газов в трубе прекратилось. В плоскости устья трубы давле-

ния печных газов и атмосферы по-прежнему будут равны (рис. 67).

Из графика абсолютных давлений видно, что абсолютное давление внутри трубы меньше давления окружающего воздуха, так как газы в трубе легче воздуха. График относительного давления показывает измене-

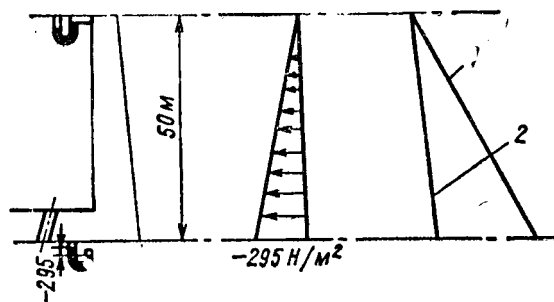


Рис. 67. Распределение статического давления по высоте дымовой трубы:

1 — абсолютное давление атмосферы; 2 — то же, газов в трубе

ние давления по высоте дымовой трубы. Чем выше дымовая труба, тем больше разрежение будет у основания трубы.

Разрежение у основания трубы равно

$$h_{ст.д.тр} = z_{д.тр}(\rho_{вг} - \rho_{гг}). \quad (X-11)$$

Ниже рассмотрен пример, иллюстрирующий это положение. Требуется выяснить, каково распределение давления по высоте дымовой трубы, составляющей 50 м. Температура окружающего воздуха $+20,0$ и -20°C . Средняя по высоте трубы температура газов $t_g = 300^\circ\text{C}$.

На основании предыдущего считаем, что линия нулевого давления будет в плоскости выходного сечения трубы.

Для дымовой трубы по формуле (X-11) при $z = -50$ м, $\rho_{в20^\circ} = 1,20$ кг/м³, $\rho_{в0^\circ} = 1,29$ кг/м³; $\rho_{в-20^\circ} = 1,39$ кг/м³; $\rho_{г300^\circ} = 0,61$ кг/м³ найдем при $t_b = 20,0^\circ\text{C}$ разрежение у основания дымовой трубы

$$h_{ст} = -50(1,20 - 0,61) = -29,5 \text{ мм вод.ст.}$$

Разрежение, создаваемое трубой при других температурах, составит

$$\text{при } t_b = 0^\circ\text{C } h_{ст} = -50(1,29 - 0,61) = -34 \text{ мм вод.ст.,}$$

$$\text{при } t_b = -20^\circ\text{C } h_{ст} = -50(1,39 - 0,61) = -39 \text{ мм вод.ст.}$$

Из примера видно, что дымовая труба высотой 50 м летом создает разрежение, равное ~ 30 мм вод.ст., а зимой ~ 40 мм вод.ст., таким образом, работу дымовой трубы надо рассчитывать на летние условия.

4. Уравнение равновесия жидкости

Общее уравнение равновесия жидкости (IX-9) можно переписать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ Y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (X-12)$$

или, умножая (X-12) соответственно на dx , dy , dz и складывая их, получим

$$Xdx + Ydy + Zdz = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right).$$

Наконец, умножив обе части последнего уравнения на ρ и замечая, что трехчлен правой части представляет собой полный дифференциал функции давления p , получим

$$dp = \rho(Xdx + Ydy + Zdz). \quad (X-13)$$

Уравнение (X-13) называется основным уравнением гидростатики.

Так как левая часть этого уравнения есть полный дифференциал, то и трехчлен правой части $Xdx + Ydy + Zdz$ также должен быть полным дифференциалом, что возможно только тогда, когда ускорения внешних объемных сил по осям координат x , y , z сами будут равны частным производным по координатам одной и той же функции $U(x, y, z)$, т. е. когда

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Функция U называется функцией потенциала сил, а выражение (X-13) показывает, что силами, способными удерживать жидкость в равновесии, могут быть только силы, имеющие потенциал.

Введя в уравнение (X-13) функцию потенциала внешних объемных сил $U(x, y, z)$, получим

$$dp = -\rho \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz \right) = -\rho dU$$

или

$$dp + \rho dU = 0. \quad (X-14)$$

Сила тяжести, ньютоновское напряжение, центробежная сила имеют потенциал и относятся к так называемым консервативным силам.

Все эти силы способны удерживать жидкость в равновесии.

В простейшем случае равновесия неподвижной массы жидкости, находящейся под воздействием одного ускорения силы тяжести, направленного вертикально вниз, получим

$$X = Y = 0 \quad \text{и} \quad Z = -g;$$

поэтому

$$dp = -\rho g dz = -\gamma dz, \quad (X-15)$$

где γ — удельный вес (вес единицы объема) жидкости.

Интегрируя уравнение (X-15), получим

$$\frac{p}{\gamma} + z = H = \text{const}, \quad (X-16)$$

т.е. основное уравнение равновесия неподвижной массы жидкости.

Из сказанного следует, что все учение о равновесии жидкости является частным случаем учения о ее движении.

Полагая в (X-13) $dp=0$, получаем уравнение поверхностей равного давления ($p=\text{const}$), часто называемых поверхностями уровня:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Интегрируя уравнение (X-14), получим

$$p = \rho U + C.$$

Значение постоянной C определяется из условия, что на свободной поверхности $p=p_0$ и $U=U_0$. Тогда

$$C = p_0 - \rho U_0$$

и, следовательно:

$$p = p_0 + \rho(U - U_0). \quad (X-16a)$$

Выражение (X-16a) является математической формулировкой известного закона Паскаля, говорящего о том, что всякое изменение давления в любой точке на поверхности жидкости, замкнутой в сосуде, передается всем точкам жидкости по всем направлениям одинаково.

На законе Паскаля основан принцип работы широко распространенной гидравлической машины — гидравлического пресса.

5. Распределение давления в капельной жидкости*

Постоянная интегрирования H в уравнении (X-16) определяется из условия, что на свободной поверхности жидкости, т. е. при $z=z_0$, давление равно $p=p_0$:

$$H = p_0 + \gamma z_0.$$

Окончательно закон распределения давления получим после подстановки вместо H найденного значения его:

$$p = p_0 + \gamma(z_0 - z)$$

или

$$p = p_0 + \gamma h, \quad (X-17)$$

где h — глубина погружения данной точки.

Интегрирование уравнения поверхностей равного давления для этих же условий показывает, что уравнение поверхности уровня $z=\text{const}$.

Поверхности равного давления в этом случае представляют собой горизонтальные плоскости, а свободная поверхность жидкости является одной из поверхностей уровня и характеризуется выражением $z=z_0$.

Глава XI

ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЯ, ПРИСТЕНОЧНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

1. Возникновение пристеночного пограничного слоя и его характеристика

В случае реальной жидкости при удалении от поверхности скорость непрерывно возрастает от значения, равного нулю, до своего конечного значения. Обычно такое возрастание скорости происходит на весьма небольшом расстоянии от поверхности.

* Гидравлическое давление в капельной покоящейся жидкости.

Из уравнения (VII-1) следует, что в очень узкой зоне, непосредственно прилегающей к поверхности раздела между жидкостью и граничащими с ней телами, где dw_x/dy велико, осуществлены силы внутреннего трения.

Эта узкая зона, образующаяся у поверхности раздела и характеризующаяся высокой степенью неоднородности поля скорости, называется пристеночным пограничным слоем.

Как в случае задачи внутреннего слоя, так и внешнего обтекания твердых тел (например, течение по трубам или обтекание пластины) вся область течения рассматривается как совокупность пристеночного пограничного слоя и внешнего потока. При течении по трубам или каналам внешний по отношению к пристеночному пограничному слою поток располагается в приосевой области трубы, при обтекании пластины под внешним подразумевается набегающий на пластину поток жидкости.

Внешний поток — это такая область течения, в которой можно пренебречь действием сил трения. В пределах пограничного слоя по мере удаления от поверхности влияние сил внутреннего трения постепенно ослабевает, соответственно изменяется распределение скорости и совершается плавный переход к условиям, характерным для внешнего потока.

При приближенной оценке толщины пристеночного пограничного слоя можно исходить из определения этого слоя как такой области течения, в пределах которой силы внутреннего трения являются величинами того же порядка, что и инерционные силы.

Для движения, происходящего в направлении оси x , сила инерции, отнесенная к единице объема в случае установившегося движения ($\frac{dw_x}{dt} = 0$), равна

$$\rho \frac{dw_x}{dt} = \rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x}, \quad (\text{XI-1})$$

где w_x — скорость жидкости в направлении x ;
 t — время;

$\frac{\partial w_x}{\partial x}$ — изменение скорости при переходе от одной точки к другой;

$\frac{dw_x}{dt} = w_x \frac{dw_x}{dx}$ — субстанциональная производ-

ная, выражающая ускорение жидкой частицы в направлении x .

Для пластины длиной l величина $\partial w_x / \partial x$ пропорциональна w_∞ / l , где w_∞ — скорость внешнего течения. Следовательно, сила инерции имеет величину порядка $\rho w_\infty^2 / l$.

Выражение для силы трения легко составить на основании закона трения Ньютона [см. формулу (VII-1)]. Для элемента объема с ребром dx , параллельным на-

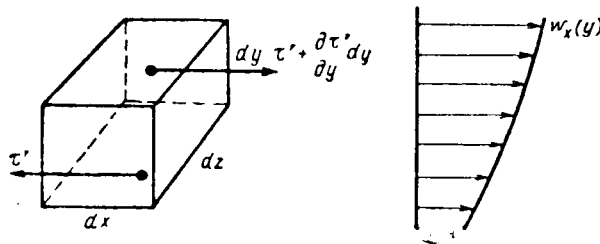


Рис. 68. К оценке толщины пристеночного пограничного слоя

правлению движения, равнодействующая сил сдвига, как легко видеть из рис. 68, равна

$$\left(\tau' + \frac{\partial \tau'}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau' dx dz = \frac{\partial \tau'}{\partial y} dx dy dz. \quad (\text{XI-2})$$

Следовательно, сила трения, отнесенная к единице объема, равна $\partial \tau' / \partial y$ или на основании выражения (VII-1), т. е. при условии, что течение ламинарное, равна $\mu \partial^2 w_x / \partial y^2$. Градиент скорости в направлении, перпендикулярном к стенке, т. е. величина $\partial w_x / \partial y$, имеет величину порядка w_∞ / δ , где δ толщина пристеночного пограничного слоя, поэтому сила трения, отнесенная к единице объема, пропорциональна $\mu w_\infty / \delta^2$. Приравняв силу инерции силе трения, мы получим соотношение

$$\frac{\rho w_\infty^2}{l} \sim \frac{\mu w_\infty}{\delta^2}, \quad (\text{XI-3})$$

решив которое относительно толщины δ найдем

$$\delta \sim \sqrt{\mu l / \rho w_\infty} = \sqrt{\nu l / w_\infty}. \quad (\text{XI-4})$$

На основании точного решения Г. Блазиуса множитель, переводящий пропорциональность (XI-4) в равенство, равен приближенно пяти. Следовательно, для ла-

минарного пристеночного пограничного слоя толщина его равна

$$\delta = 5 \sqrt{\nu l / w_{\infty}}. \quad (\text{XI-5})$$

Безразмерная толщина пристеночного пограничного слоя

$$\delta/l = 5 \sqrt{\nu / w_{\infty} l} = 5 \sqrt{Re_l}, \quad (\text{XI-6})$$

где $Re_l = w_{\infty} l / \nu$ — число Рейнольдса, составленное для длины пластины.

Соотношение (XI-4) показывает, что толщина пристеночного пограничного слоя пропорциональна $\sqrt{\nu}$ и $\sqrt{l}$. Из выражения (XI-6) видно, что относительная толщина пристеночного пограничного слоя δ/l уменьшается при увеличении числа Re_l пропорционально $1/\sqrt{Re_l}$, следовательно, при переходе к жидкости, лишенной трения, т.е. при переходе к $Re_l \rightarrow \infty$ толщина пограничного слоя становится равной нулю.

Касательное напряжение τ_0 на стенке на основании закона (VII-1):

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_0, \quad (\text{XI-7})$$

где индексом 0 отмечено, что берется значение на стенке, на которой $y=0$. На основании сказанного выше

$$\left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_0 \sim \frac{w_{\infty}}{\delta},$$

поэтому

$$\tau_0 \sim \mu w_{\infty} / \delta;$$

подставив вместо δ его значение (XI-4), мы получим

$$\tau_0 \sim \mu w_{\infty} \sqrt{\rho w_{\infty} / \mu l} = \sqrt{\mu \rho w_{\infty}^3 / l}. \quad (\text{XI-8})$$

Безразмерное касательное напряжение на стенке

$$\frac{\tau_0}{\rho w_{\infty}^2} \sim \sqrt{\frac{\mu}{l \rho w_{\infty}}} = \frac{1}{\sqrt{Re_l}}, \quad (\text{XI-9})$$

т.е. зависит только от числа Рейнольдса.

Полное сопротивление трения $P_{\text{тр}}$ пластины, очевидно, равно

$$P_{\text{тр}} = b l \tau_0 \sim b \sqrt{\mu \rho w_{\infty}^3 l}. \quad (\text{XI-10})$$

Таким образом, сопротивление трения при ламинарном течении пропорционально $w_{\infty}^{3/2}$ и $l^{1/2}$.

Безразмерный коэффициент сопротивления для одной стороны пластины, когда площадь $F=bl$:

$$c_w = \frac{P_{\text{тр}}}{\rho \frac{w_\infty^2}{2} F} \sim \sqrt{\frac{\mu}{\rho w_\infty l}} = \frac{1}{\sqrt{Re_l}}. \quad (\text{XI-11})$$

Численный множитель, переводящий пропорциональность (XI-11) в равенство, согласно решению Г. Блазиуса, равен 1,328; следовательно, закон сопротивления для пластины, обтекаемой в продольном направлении, выражается при ламинарном течении формулой

$$c_w = 1,328 / \sqrt{Re_l}. \quad (\text{XI-12})$$

2. Переход ламинарного течения в турбулентное и распределение скорости

В пристеночном пограничном слое может развиваться турбулентный режим течения, следующий за областью перехода от начального ламинарного режима (рис. 69).

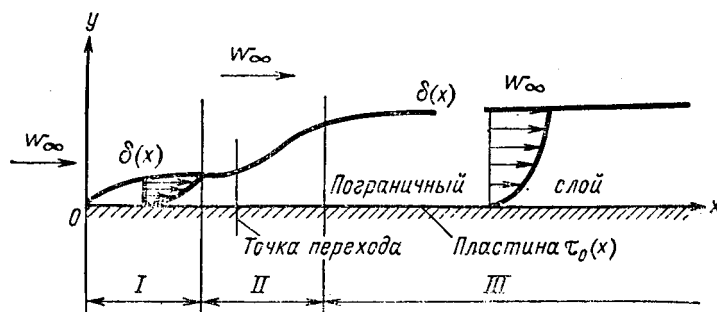


Рис. 69. Переход ламинарного пристеночного пограничного слоя в турбулентный:

I — ламинарное течение; II — переходная область; III — турбулентное течение

Переход ламинарного течения в пограничном слое в турбулентное может быть вызван искусственно препятствием или может быть следствием неустойчивости потока. Около аэродинамически гладкой поверхности, т.е. такой поверхности, когда безразмерный параметр $u_* k / \nu$, где $u_* = (\tau_0 / \rho)^{1/2}$ — динамическая скорость и k — средняя высота элемента шероховатости, достаточно мал, т.е. справедливо неравенство $0 < u_* k / \nu < 4$, существует вязкий подслой толщиной порядка $0,001 \delta$ — $0,01 \delta$, где δ — сум-

марная толщина пристеночного пограничного слоя. Этот подслой, как и в случае потока в трубе или в канале, является частью внутренней области пограничного слоя, в которой касательные напряжения приблизительно постоянны и которая включает переходную область, а вслед за ней расположен полностью турбулентный поток. Толщина слоя постоянного напряжения равна $0,1 \delta$ и $0,2 \delta$. Важным экспериментальным фактом является неламинарный характер течения в вязком подслое, хотя в этой области вязкость играет преобладающую роль.

При течении в канале толщина вязкого подслоя δ_v (называвшегося в ранее вышедших учебниках ламинарным) определяется приблизительно следующим выражением:

$$u_* \delta_v / \nu \approx 6 \div 7. \quad (XI-13)$$

Переходная область, за которой поток полностью турбулентный, заключена приблизительно в пределах

$$6 < u_* y / \nu < 30. \quad (XI-14)$$

В пределах области, состоящей из вязкого подслоя, переходной области и части области полностью турбулентного течения, осредненная скорость потока w_x зависит только от напряжения трения на стенке τ_0 , расстояния от стенки y и кинематического коэффициента вязкости ν , а распределение скорости в первом приближении определяется уравнением

$$\mu \frac{\partial w_x}{\partial y} \approx \tau_0.$$

откуда следует, что это распределение описывается линейной зависимостью от расстояния до стенки

$$w_x = \frac{\tau_0}{\mu} y$$

или

$$\frac{w_x}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu}. \quad (XI-15)$$

Для турбулентной области пограничного слоя, т. е. вне области, где течение не является ни полностью вязким, ни полностью турбулентным, т. е. на расстоянии $y > \delta_t$ от стенки, где δ_t — среднее расстояние от стенки, вне которого течение является полностью турбулентным, можно предположить, что кинематический коэффициент

турбулентной вязкости изменяется пропорционально расстоянию от стенки

$$\varepsilon_u = \kappa u_* y. \quad (\text{XI-16})$$

Тогда, учитывая, что

$$\tau_0 = \rho u_*^2 = \rho \varepsilon_u \frac{\partial w_x}{\partial y},$$

уравнение для распределения скорости запишется так:

$$\kappa u_* y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{\tau_0}{\rho} = u_*^2. \quad (\text{XI-17})$$

Решение дифференциального уравнения (XI-17) имеет вид:

$$\frac{w_x}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* y}{\nu} + \text{const}. \quad (\text{XI-18})$$

Рассмотрим поток, расположенный вне слоя постоянного напряжения. Внешняя по отношению к этому слою область состоит из центральной части или турбулентного ядра потока в канале или трубе. Течение в ядре потока отличается большой сложностью структуры турбулентности, вызванной множеством пульсаций различных периодов и амплитуд таких гидродинамических величин, как скорость, давление, температура и др. Эти пульсации беспорядочны, крайне нерегулярны в пространстве и во времени. Такая структура влияет на многие свойства течения, оказывающиеся весьма различными в ламинарном и турбулентном случаях. Так, турбулентные течения обладают большой способностью к передаче импульса, что приводит к возникновению так называемой кажущейся турбулентной вязкости, во много раз превышающей молекулярную вязкость при течении вдали от стенки. По той же причине турбулентные потоки обладают повышенной способностью к передаче тепла и пассивных примесей, к переносу взвешенных частиц и распространению химических реакций (например, горения).

Возникшие в турбулентном течении возмущения характеризуются, например, пульсациями скорости и оцениваются параметром w'_x/w_x , где w'_x — типичная величина пульсации x -компоненты скорости, называемым уровнем турбулентности.

Усредненная скорость потока w_x должна быть связана со скоростью в центре $w_{\max}$ функцией, зависящей от напряжения на стенке τ_0 , и расстояния, на которое это влияние должно распро-

страняться. Разность скоростей $w_{\max} - w_x$ не зависит от причины, вызывающей напряжение на стенке τ_0 , а следовательно, и от вязкости ν .

В безразмерных величинах зависимость

$$\frac{w_{\max} - w_x}{u_*} = \psi\left(\frac{y}{r}\right) \quad (\text{XI-19})$$

(где r — радиус трубы или полуширина канала; y — расстояние от стенки) называется законом дефекта скорости.

Уравнение (XI-15) в общем виде (согласно теории размерности) перепишем так:

$$\frac{w_x}{u_*} = f\left(\frac{u_* y}{\nu}\right). \quad (\text{XI-20})$$

Распределение скорости (XI-20) принято называть законом стенки.

Найдено, что области, в которых справедливы уравнения (XI-20) и (XI-19), частично перекрываются; так как такое перекрытие существует, то в этой области

$$\frac{w_x}{u_*} = f\left[\left(\frac{y}{r}\right)\left(\frac{u_* r}{\nu}\right)\right] = \frac{w_{\max}}{u_*} - \psi\left(\frac{y}{r}\right).$$

Это выражение может быть справедливо только в том случае, если f и ψ будут логарифмическими функциями. Уравнение (XI-20) тогда принимает следующий вид:

$$\frac{w_x}{u_*} = A \ln\left(\frac{u_* y}{\nu}\right) + B, \quad (\text{XI-21})$$

а уравнение (XI-19)

$$\frac{w_{\max} - w_x}{u_*} = -A \ln\left(\frac{y}{r}\right) + C. \quad (\text{XI-22})$$

Уравнение (XI-21) удовлетворительно согласуется с измерениями скорости за пределами вязкого подслоя, но в пределах переходной области и части области полностью турбулентного течения в пределах пограничного слоя в канале и трубе, а также в турбулентных пограничных слоях на пластине на расстояниях до $u_* y/\nu \approx 750$. Эту величину рассматривают как внешний предел области постоянного напряжения. Значения констант можно принимать равными $A=2,44$; $B \approx 5,9$, где B в некоторой степени зависит от величины δ_v . Внешняя по отношению к пограничному слою область или ядро потока, в котором принимается закон дефекта скорости, состоит в основном из больших вихрей размерами порядка $1/4 r$ или $1/2 r$, причем подобная структура зависит от градиента давления и числа Рейнольдса. Не считая небольших отклонений в центре, уравнение (XI-22) дает хорошее приближение с константой $C \approx 0,8$. Вообще вместо формулы (XI-22) достаточное соответствие с результатами измерений осредненной скорости в центральной области потоков в трубе и канале обеспечивает симметричный параболический профиль

$$\frac{w_x}{w_{\max}} = \left(\frac{y}{r}\right)^{1/n}, \quad (\text{XI-23})$$

где показатель степени $1/n$ мало зависит от числа Рейнольдса (при изменении Re от $4 \cdot 10^3$ до $3,2 \cdot 10^6$ показатель степени изменяется от $1/n = 1/6$ до $1/10$). На границе области постоянного напряжения с каждой стороны этот профиль сопрягается с логарифмической зависимостью (XI-18) или (XI-21).

Для полностью турбулентного потока, когда напряжения касательного трения намного превышают напряжения, обусловленные вязкостью при ламинарном течении, выражение полного касательного напряжения трения формально можно записать в виде

$$\tau_u = (\mu + A_u) \frac{dw_x}{dy}, \quad (XI-24)$$

где A_u — коэффициент турбулентного обмена при переносе импульса или динамический коэффициент турбулентной вязкости, связанный с коэффициентом ϵ_u выражением

$$\epsilon_u = \frac{A_u}{\rho}, \quad (XI-25)$$

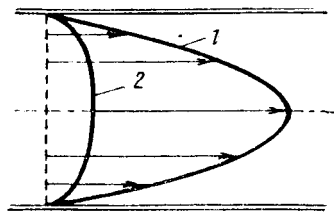


Рис. 70. Профили скорости ламинарного (1) и турбулентного потока (2) в трубе

Измерения показывают, что величины A_u и ϵ_u в отличие от μ и ν не являются постоянными, характерными для жидкости или ее турбулентного движения. Для газов при нормальном давлении коэффициент ν при молекулярном переносе имеет порядок $10^{-1} \text{ см}^2/\text{с}$, а коэффициент турбулентного обмена ϵ_u , зависящий от режим-

ных параметров, $40\text{—}300 \text{ см}^2/\text{с}$.

В результате интенсивного обмена в центральной турбулентной области потока в трубе или канале профиль осредненной скорости должен быть значительно более плоским для данного τ_0 , чем соответствующее параболическое распределение скорости ламинарного потока, при этом предполагается, что оба эти режима течения возможны при данном значении числа Рейнольдса. На рис. 70 приведены профили скорости ламинарного потока и осредненной скорости турбулентного потока при одинаковом касательном напряжении на стенке. Такое одновременное существование двух режимов течения (в различных каналах) возможно только при $Re_d \lesssim 2000$, так

как опытами установлено, что при значении Re_d , приблизительно равном 2000, движение в трубе или канале остается ламинарным, каковы бы ни были введенные в течение возмущения. Поэтому $Re_d=2000$ называют нижним критическим значением числа Рейнольдса и обозначают через $Re_{dкр}$. Удаляя возмущения на входе в трубу или уменьшая начальную их интенсивность, удастся искусственно затянуть ламинарное течение в область значительно больших значений чисел Рейнольдса. Определенного значения для верхней границы критического числа Re_d получить не удалось. Можно отметить, что она была доведена чуть ли не до числа $Re_d=50\,000$.

При течении в трубах и каналах коэффициент ϵ_u резко меняется по сечению трубы от очень малых значений вблизи стенки трубы до некоторого максимума примерно на расстоянии $y/r=0,3$ от стенки (r — радиус поперечного сечения трубы), а после этого несколько убывает и при $y/r=0,5$ достигает приблизительно постоянного значения. Подобное распределение коэффициента турбулентной вязкости ϵ_u наблюдается для внешней области течения в пристеночном пограничном слое на обтекаемом теле.

Переход ламинарной формы течения в турбулентную при течении реальной жидкости (газа) как в трубах и каналах, так и в пристеночном пограничном слое на обтекаемом теле имеет перемежающийся характер. В этом случае турбулентные возмущения время от времени появляются на некоторой длине и затем уносятся течением.

Смена ламинарных и турбулентных состояний происходит через неравномерные промежутки времени и продолжается до окончательного перехода в турбулентное состояние.

Физический характер такого перемежающегося течения можно характеризовать коэффициентом перемежаемости Π , указывающим, какую долю некоторого промежутка времени в определенном месте трубы составляет турбулентное течение. Следовательно, коэффициент $\Pi=1$ означает, что течение все время турбулентное, а коэффициент $\Pi=0$ показывает, что течение все время ламинарное.

При $Re_d = w_{ср} d / \nu$ (где $w_{ср}$ — средняя по расходу скорость и d — диаметр трубы), равных от 2000 до 3000, т. е. в той области значений Re_d , где происходит переход ламинарной формы течения в турбулентную, при одном и том же относительном расстоянии x/d от входа в трубу коэффициент перемежаемости $\Pi = f(Re_d)$. При постоянном значении Re коэффициент перемежаемости возрастает с увеличением расстояния от входа в трубу.

На величину критического числа сильно влияет всякое отклонение трубы от цилиндричности, т. е. диффузорность или конфузорность трубы. В конфузорных участках трубы $Re_{dкр}$ значительно превышает соответствующее число для цилиндрической трубы, и, наоборот, в диффузорных участках $Re_{dкр}$ сравнительно мало. Объяснение данного явления следует искать в появлении точки перегиба на профиле скоростей.

Теория устойчивости ламинарного течения рассматривает роль точки перегиба на профиле скоростей как условие, необходимое для

возникновения неустойчивых колебаний, их нарастания и существования.

Наличие точки перегиба у профиля скорости непосредственно связано с градиентом давления течения. При течении в сужающемся канале (рис. 71, а), когда происходит падение давления в направлении течения, получается целиком выпуклый профиль скоростей без точек перегиба. Наоборот, при течении в расширяющемся

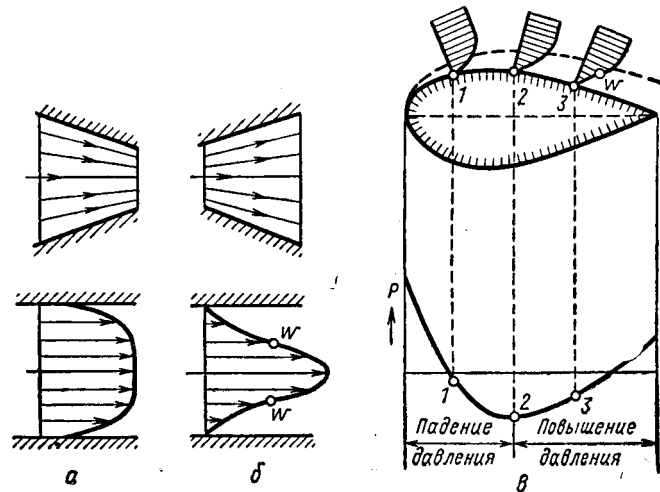


Рис. 71. Точки перегиба у профиля скорости пристеночного пограничного слоя.

канале (рис. 71, б), когда давление повышается в направлении течения, получается заостренный профиль скоростей с точками перегиба.

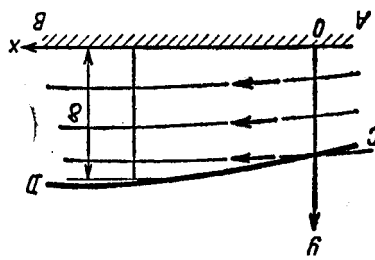
Такая же разница в форме профиля скоростей наблюдается и в ламинарном пограничном слое на обтекаемом теле (рис. 71, в). Согласно теории пограничного слоя, профили скоростей в области падения давления не имеют точки перегиба, наоборот, в области повышения давления они всегда имеют точку перегиба. Следовательно, падение давления благоприятствует устойчивости течения, повышение же давления, наоборот, способствует неустойчивости.

Поэтому при обтекании тела пристеночный пограничный слой в области повышения давления (замедленное течение) значительно больше стремится к турбулентности, чем в области падения давления (ускоренное течение). Отсюда следует, что при обтекании тела положение точки минимума давления оказывает решающее влияние на положение точки перехода. В первом, грубом, приближении можно считать, что точка перехода лежит немного ниже по течению точки минимума давления (рис. 71, в).

При обтекании, например, произвольного цилиндрического тела градиент давления вдоль стенки изменяется от точки к точке, и поэтому профили скоростей в пограничном слое в различных точках стенки уже не являются аффинно-подобными один другому. Этим

брежимо малых касательных напряжений можно ус-
 определенной степенью точности, то область прене-
 а плавно переходят одна в другую. Но если задаться
 кости не отделены друг от друга какой-либо границей,

рис. 72. К выводу уравнения движения
 в пристеночном порраничном слое.



и окружающей его жид-
 ласти порраничного слоя
 тока. На самом деле об-
 мысленно проводим в по-
 поверхность, которую мы
 нина есть лишь условная
 вспомнить, что эта гра-
 ничного слоя. Следует
 внешняя граница порра-
 текаемого тела, а CD —
 есть отрезок контура об-

$$(XI-27) \quad \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0.$$

смагиваемом случае имеет вид
 нить уравнение неразрывности движения, которое в рас-

$$(XI-26) \quad \begin{cases} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right); \\ w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \right); \end{cases}$$

Рассмотрим для простоты плоский установившийся
 поток несжимаемой жидкости, движущейся параллельно
 плоскости xy . Будем предполагать, кроме того, что вяз-
 ние внешних объемных сил на движение в порраничном
 слое пренебрежимо мало. Тогда уравнение движения вяз-

кой жидкости можно написать в следующем виде:

3. Дифференциальное уравнение движения жидкости в порраничном слое

отличается порраничный слой на стенке с градиентом давления от
 порраничного слоя без градиента давления $\left(\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \right)$, когда про-
 ли скорости в различных точках, например вдоль пластинки, афинно-
 подобны друг другу, т.е. они совпадают друг с другом, если ско-
 рость откладывать не для значений y , а для значений $y/\delta(x)$, где
 $\delta(x)$ — толщина порраничного слоя.

$$w_y = \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^{cd} \int_y^0 dy = \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} \right)^{cd} y \sim \frac{1}{w} \delta.$$

По теореме о среднем значении получаем

$$w_y = \int_y^0 \frac{\partial w_y}{\partial y} dy.$$

с помощью соотношения

$$\frac{\partial w_y}{\partial y} \sim \frac{1}{w}. \text{ Величину } w_y \text{ теперь можно выразить через } \partial w_y / \partial y$$

следовательно, и величина второго слагаемого должна иметь такой же порядок, ибо иначе сумма этих слагаемых не будет равна нулю.

Первое слагаемое в его левой части есть величина порядка w/l , жения (XI-27).

ли к поверхности тела, рассмотрим уравнение неразрывности дви-
Чтобы судить о величине составляющей скорости w_y по норма-
величина первого слагаемого в левой части имеет порядок w^2/l .

$\partial w_x / \partial x$ представляет собой величину порядка w/l и, следовательно,
Рассмотрим первое из уравнений (XI-26). Производная

в (XI-26) и (XI-27), могут быть выражены через эти величины.

поток w_∞ на бесконечности. Остальные величины, входящие
то тела будем считать величиной того же порядка, что и скорость

в пределах от 0 до δ . Составляющую скорости w_x вдоль отбегавше-
ка, что и толщина порраничного слоя δ , так как они не изменяются

длины тела. Орднаты y будем считать величинами того же поряд-
личинами того же порядка, что и характерный размер l (например,

(XI-27). Абсциссы x , как было принято в (XI-3), будем считать ве-
Оценим порядок величин отдельных слагаемых в (XI-26) и

тела в пределах от 0 до δ .

дет изменяться в порраничном слое на всем протяжении
в каждой данной точке. Таким образом, ордината y бу-

вать от точки O , а ординаты y по нормали к поверхности
мем за начало координат, абсциссы x будем отсчиты-

вольную точку O на поверхности тела (пластинки) возъ-
ла по сравнению с характерным размером тела l . Произ-

Предположим, что толщина порраничного слоя δ ма-
ка пересекают ее, входя внутрь порраничного слоя.

ца порраничного слоя не является линией тока, линии то-

большее количество частиц. Отсюда следует, что грани-

от входа струи на поверхность тела затормаживается все

порраничного слоя нарастает, так как по мере удаления

данной точке контура. В направлении потока толщина

нормали к AB и будет толщиной δ порраничного слоя в

CD . Расстояние от контура тела AB до этой линии по

ловно отделить от области порраничного слоя линией

Так как

$$\frac{\partial w_x}{\partial y} \sim \frac{w}{\delta},$$

то второе слагаемое в левой части первого уравнения (XI-26) есть величина порядка w^2/l :

$$w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} \sim \frac{w\delta}{l} \cdot \frac{w}{\delta} = \frac{w^2}{l}.$$

Таким образом, в левой части уравнения (XI-26) оба слагаемых имеют один и тот же порядок величины.

Рассмотрим правую часть первого уравнения системы (XI-26) и выражение в скобках. Здесь первое слагаемое можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} = \frac{\partial \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} \right)}{\partial x}.$$

Так как $\frac{\partial w_x}{\partial x} \sim \frac{w}{l}$, то $\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} \sim \frac{w}{l^2}$. Аналогично находим порядок величины второго слагаемого:

$$\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \sim \frac{w}{\delta^2}.$$

Как видно, слагаемые здесь имеют разный порядок величины: первое — величина конечная, а второе — величина большая, порядка $1/\delta^2$.

Поэтому первым слагаемым по сравнению со вторым можно пренебречь. Ускорение, происходящее от вязкости, выражается только одним слагаемым $\nu(\partial^2 w_x/\partial y^2)$, которое пропорционально $\nu w/\delta^2$.

Что касается слагаемого $\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$, то оно не содержит ни кинематического коэффициента вязкости ν , ни толщины пограничного слоя δ и представляет собой конечную величину.

Итак, в первом уравнении (XI-26) можно пренебречь лишь одним слагаемым. Это уравнение примет тогда следующий вид:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}.$$

Рассмотрим теперь второе уравнение системы (XI-26). Так как

$$w_y \sim \frac{w}{l} \delta; \quad w_x \sim w; \quad \frac{\partial w_y}{\partial x} \sim \frac{w}{l^2} \delta; \quad \frac{\partial w_y}{\partial y} \sim \frac{w}{l},$$

то

$$w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} \sim \frac{w^2}{l^2} \delta; \quad w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} \sim \frac{w^2}{l^2} \delta.$$

Таким образом, левая часть этого уравнения представляет собой величину, пропорциональную δ . Рассмотрим выражение в скобках правой части уравнения:

$$\frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w_y}{\partial x} \right) \sim \frac{w}{l^2} \delta; \quad \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w_y}{\partial y} \right) \sim \frac{w}{l} \cdot \frac{1}{\delta},$$

и поэтому первым из этих слагаемых можно пренебречь по сравнению со вторым. Ускорение, происходящее от сил вязкости, составит $\nu(\partial^2 w_y)/\partial y^2$. Для оценки порядка величины этого выражения, учитывая (XI-4), найдем, что

$$\nu \sim \frac{w}{l} \delta^2,$$

поэтому ускорение от сил вязкости

$$\nu \frac{\partial^2 w_y}{\partial y^2} \sim \frac{w^2}{l^2} \delta,$$

т. е. представляет собой величину такого же порядка, как и выражение в левой части уравнения.

Такое рассмотрение второго уравнения системы (XI-26) позволяет сделать вывод о порядке величины $\partial p/\partial y$. Так как ускорения от сил инерции и от сил вязкости пропорциональны $\frac{w^2}{l^2} \delta$, то и

$$\frac{\partial p}{\partial y} \sim \frac{w^2}{l^2} \delta.$$

Взяв на нормали к поверхности тела две точки — одну на поверхности тела, другую — на расстоянии y от поверхности, найдем, что разность давлений в этих точках $p_2 - p_1$ на основании последнего соотношения равна

$$p_2 - p_1 = \int_0^y \frac{\partial p}{\partial y} dy = \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{\text{ср}} \int_0^y dy = \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{\text{ср}} y \sim \frac{w^2}{l^2} \delta^2.$$

Следовательно, изменение давления по нормали к поверхности тела в пределах пограничного слоя представляет собой величину порядка $(\delta/l)^2$, т. е. малую. Этой величиной вследствие малости δ по сравнению с l можно пренебречь и, следовательно, считать, что $p_2 - p_1 = 0$, т. е. что в пограничном слое p от y не зависит.

Второе уравнение системы (XI-26) теперь может быть проинтегрировано для пограничного слоя в общем виде. Равенство $p = \text{const}$ во всех точках одной и той же нормали к поверхности тела и есть общий интеграл этого уравнения, определяющий одно из неизвестных (давление p). Давление как функция x этим интегралом не определяется.

Из двух уравнений системы (XI-26) остается теперь лишь первое, в котором можно еще заменить $\partial p/\partial x$ на dp/dx , так как в пограничном слое p от y не зависит. К этому уравнению следует присоединить уравнение неразрывности (XI-27). Полученная система двух дифференциальных уравнений для двух неизвестных w_x и w_y :

$$\left. \begin{aligned} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI-28})$$

называется системой уравнений Прандтля для плоского пристеночного пограничного слоя при установившемся движении несжимаемой жидкости.

Эти уравнения выведены из уравнений Навье — Стокса (IX-19), в которые не входят в явном виде составляющие пульсационной скорости, и поэтому они пригодны только для ламинарного движения в пограничном слое.

Для турбулентного движения несжимаемой жидкости уравнения, аналогичные уравнениям Прандтля, могут быть выведены из уравнений (XI-28) заменой актуальных величин соответствующими суммами усредненных и пульсационных величин:

$$w_x = \bar{w}_x + w'_x; w_y = \bar{w}_y + w'_y$$

и последующего усреднения этих уравнений. В результате для турбулентного пограничного слоя (внешнего по отношению к вязкому подслою) получаются в случае плоского, установившегося движения следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\bar{p}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 \bar{w}_x}{\partial y^2} + \\ &+ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \overline{(-\rho w'_x w'_y)}; \\ \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI-29})$$

Объединяя первые уравнения в системах (XI-28) и (XI-29) в одной, более общей форме, пригодной как для ламинарного, так и для турбулентного движения в пограничном слое, обозначив касательные напряжения через $\tau_n = \tau$ получим дифференциальное уравнение

$$\bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\bar{p}}{dx} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (\text{XI-30})$$

В последнем уравнении в случае ламинарного движения $\tau = \mu \frac{\partial w}{\partial y}$, а в случае турбулентного $\tau = \mu \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} + \rho \overline{(-w'_x w'_y)}$.

Уравнения (XI-28) и (XI-29) значительно проще для интегрирования, чем исходные уравнения Навье — Стокса, и вместе с тем они с достаточной точностью соответствуют действительности. Восполним дальнейшее упрощение полученных уравнений.

В уравнениях (XI-28) неизвестными функциями являются $w_x(x, y)$ и $w_y(x, y)$. Давление поперек пристеночного пограничного слоя, как установлено выше, постоянно. Распределение давления

вдоль оси x такое же, как и в невозмущенном набегающем потоке за пределами пограничного слоя, где давление подчиняется закономерностям движения идеальной жидкости. В этом случае (стационарное движение вдоль плоской поверхности) распределение давления $p(x)$ можно найти с помощью уравнения Эйлера

$$w_{\infty} \frac{dw_{\infty}}{dx} = - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y}$$

и так как $\frac{dw_{\infty}}{dx} = 0$, то и $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

Следовательно, и в пристеночном пограничном слое на плоской поверхности $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, и в этом случае уравнения (XI-28) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI-31})$$

Используя формулу Ньютона (VII-1) для касательного напряжения трения, получим

$$\left. \begin{aligned} w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial y}; \\ \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI-32})$$

Для решения полученных уравнений граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0 \quad w_x &= 0, \quad w_y = 0; \\ \text{при } y = \infty \quad w_x &\rightarrow w_{\infty}, \quad \frac{\partial w_x}{\partial y} \rightarrow 0, \quad w_y \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Разработаны различные методы решения уравнений пристеночного пограничного слоя с указанными граничными условиями. Используют и упрощенные методы решения некоторых задач теории пристеночного пограничного слоя, в которых применяют уравнения (XI-32).

Аналогично для пристеночного турбулентного пограничного слоя из уравнений (XI-29) и (XI-30) получим:

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial y}; \\ \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}_y}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XI-33})$$

Второе слагаемое касательного напряжения трения τ , т. е. величина $-\rho \overline{w'_x w'_y}$, представляет собой усредненную плотность потока

количества движения, переносимого в поперечном направлении благодаря наличию пульсации скорости w_y' , и называется турбулентным касательным напряжением трения.

Число неизвестных в системе уравнений (XI-33), которыми являются компоненты усредненной скорости $\bar{w}_x$ и $\bar{w}_y$, а также турбулентное касательное напряжение τ_t ($\tau = \tau + \tau_t$) больше числа уравнений, поэтому она не является замкнутой.

Чтобы замкнуть указанную систему, т. е. сделать в данной постановке расчет турбулентного пограничного слоя возможным, используют полуэмпирические теории турбулентности. Существо последних заключается в том, чтобы на основе некоторых гипотез о механизме турбулентного переноса они позволяют получить связь между осредненными характеристиками турбулентного потока и турбулентным касательным напряжением трения. Наиболее распространена полуэмпирическая теория турбулентности Л. Прандтля.

4. Полуэмпирическая теория турбулентности Прандтля

В теории Прандтля вводится понятие пути смещения, т. е. такого расстояния, на протяжении которого элементарный объем жидкости, или турбулентный моль, сохраняет постоянным свое усредненное количество движения. Пройдя это расстояние и попав в соседний слой жидкости, имеющий другую осредненную скорость, элементарный объем жидкости скачком, пульсацией изменяет свое количество движения, мешиваясь с жидкостью соседнего слоя.

В этой теории проводится некоторая аналогия с молекулярно-кинетической теорией газов, в которой используют понятие средней длины свободного пробега молекул между столкновениями.

Представим себе двумерный турбулентный поток жидкости, направленный по оси x и имеющий неравномерное распределение осредненной скорости $\bar{w}_x$ вдоль оси y (рис. 73).

Выделим в потоке два слоя $I-I$ и $II-II$, разделенных поверхностью S , и предположим, что усредненная скорость вдоль оси первого слоя ($I-I$), расположенной на расстоянии y от начала координат, равна $\bar{w}_x(y)$, а на оси второго слоя ($II-II$), находящейся на расстоянии l от оси первого слоя, $\bar{w}_x(y+l)$, где l — путь смещения. Переходя из слоя $I-I$ в слой $II-II$ за счет поперечной пульсации скорости, элементарный объем жидкости (или как его еще называют индкий комок) на протяжении расстояния l сохраняет свое усредненное количество движения $\rho \bar{w}_x(y)$, где ρ — масса элементарного бьема, $\bar{w}_x(y)$ — его скорость в слое $I-I$. Попав в слой $II-II$, этот элементарный объем скачком изменяет свое количество движения а величину $\rho \bar{w}_x$ и приобретает количество движения, соответствующее осредненной скорости слоя $II-II$, т. е. $\bar{w}_x(y+l)$, т. е.

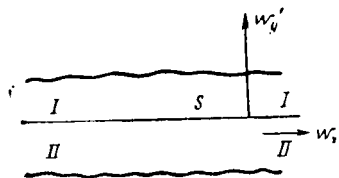


Рис. 73. К выводу формулы Л. Прандтля

$$\rho \bar{w}_x(y) + \rho w'_x = \rho \bar{w}_x(y+l).$$

После сокращения на величину $\rho = \text{const}$ получим

$$\bar{w}_x(y) + w'_x = \bar{w}_x(y+l).$$

Продольная пульсация скорости будет равна

$$w'_x = \bar{w}_x(y+l) - \bar{w}_x(y). \quad (\text{XI-34})$$

Разлагая величину $\bar{w}_x(y+l)$ в ряд Тейлора и ограничиваясь вследствие малости l двумя первыми членами разложения, получим

$$\bar{w}_x(y+l) = \bar{w}_x(y) + l \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}. \quad (\text{XI-35})$$

Совместное решение (XI-34) и (XI-35) позволяет найти формулу для продольной пульсации скорости:

$$w'_x = l \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}, \quad (\text{XI-36})$$

Если предположить, что и поперечная пульсация скорости $\bar{w}_x$ имеет тот же порядок, что и продольная, т. е.

$$w'_y \approx l \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}, \quad (\text{XI-37})$$

то подстановка (XI-36) и (XI-37) в уравнение для турбулентного касательного напряжения трения

$$\tau_t = -\rho \overline{w'_x w'_y} \quad (\text{XI-38})$$

позволяет получить известную формулу Л. Прандтля, когда

$$\tau_t = \rho l^2 \left(\frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \right)^2, \quad (\text{XI-39})$$

Так как градиент скорости в последней формуле стоит в квадрате, то знак перед величиной τ_t всегда положительный.

Формула Л. Прандтля (XI-39) замыкает систему уравнений турбулентного пограничного слоя, так как в ней неизвестная величина τ_t выражается через другую неизвестную — $\bar{w}_x$.

Задача расчета пристеночного турбулентного пограничного слоя сводится к решению уравнений (XI-33) и (XI-39). Граничные условия принимаются такими же, как и для пристеночного ламинарного пограничного слоя.

Вызывает трудности определение пути смещения l в формуле (XI-39).

Для пристеночного пограничного слоя принимают $l = ky$, где y — расстояние по нормали от стенки, а k — эмпирическая константа в этой теории.

Для решения задачи о пристеночном пограничном слое (как турбулентном, так и ламинарном) можно воспользоваться и более простыми приближенными методами (так называемыми интеграль-

ыми методами теории пограничного слоя). При решении гидродинамических задач в основе этих методов лежит уравнение потока количества движения.

5. Применение закона количества движения к расчету пристеночного пограничного слоя

Вывод уравнения потока количества движения для пристеночного пограничного слоя впервые был выполнен Л. Карманом (1921 г.) и Э. Польгаузен (1921 г.), поэтому данное уравнение называют уравнением Кармана — Польгаузена.

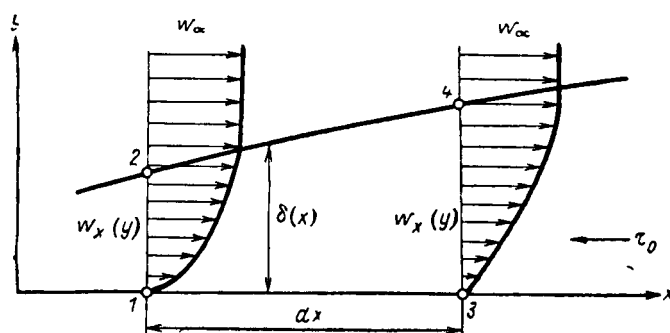


Рис. 74. Применение закона количества движения к расчету пристеночного пограничного слоя.

Определение некоторых характеристик пограничного слоя (толщины, касательного напряжения трения на стенке) использованием уравнений Кармана — Польгаузена так же, как и при помощи решения уравнений Прандтля (XI-32) или (XI-33), имеет допущения эмпирического происхождения, но является более простым и имеет практическое значение для задач, где точное решение еще неизвестно.

Для вывода этого уравнения воспользуемся теоремой Эйлера (IX-24) для плоской пластины (рис. 74).

Плоскости 1—2 и 3—4 перпендикулярны оси x и находятся одна от другой на расстоянии dx . Плоскость 1—3 совпадает с поверхностью пластины (пластина единичной ширины). Поверхность 2—4 совпадает с внешней границей пристеночного пограничного слоя конечной толщины $\delta(x)$. При всех значениях $y \geq \delta$ $w_x = w_\infty$.

Согласно теореме Эйлера (IX-24), изменение количества движения (импульса) жидкости, протекающей через контрольную поверхность в единицу времени, должно равняться сумме всех внешних сил, приложенных к контрольной поверхности.

Через плоскость 1—2 поступает масса жидкости (отнесенная к единице ширины пластины) $\rho \int_0^\delta w_x dy$ и вносится количество движения $\rho \int_0^\delta w_x^2 dy$.

Изменение импульса на пути dx составляет

$$\rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} w_x^2 dy \right) dx.$$

Через поверхность 2—4 втекает масса жидкости в размере

$$\rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} w_x dy \right) dx.$$

Это количество равно разности расхода через сечения 3—4 и 1—2.

При $y \geq \delta$ — $w_x = w_{\infty}$, поэтому количество движения, проходящее через поверхность 2—4, равно

$$\rho w_{\infty} \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} w_x dy \right) dx.$$

В качестве внешней силы остается только сила, обусловленная действием касательного напряжения трения на стенке τ_0 .

Воспользовавшись теоремой Эйлера (IX-24), можно записать, что

$$\begin{aligned} \rho \int_0^{\delta} w_x^2 dy + \rho w_{\infty} \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} w_x dy \right) dx - \left[\rho \int_0^{\delta} w_x^2 dy + \right. \\ \left. + \rho \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} w_x^2 dy \right) dx \right] = \tau_0 dx. \end{aligned}$$

После очевидного сокращения и объединения однородных членов получим искомое уравнение в виде

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (w_{\infty} - w_x) w_x dy = \tau_0, \quad (\text{XI-40})$$

которое называют интегральным соотношением Кармана — Польгаузена.

Последнее уравнение справедливо как для ламинарного, так и для турбулентного пограничных слоев, но для первого с помощью формулы Ньютона (VII-1) может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta} (w_{\infty} - w_x) w_x dy = \nu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (\text{XI-41})$$

6. Расчет плоского пристеночного ламинарного и турбулентного пограничного слоя

Используя уравнение (XI-41) в случае ламинарного пограничного слоя или уравнение (XI-40) в случае турбулентного пограничного слоя, можно определить, как меняется вниз по потоку толщина пограничного слоя δ и касательное напряжение трения τ_0 на поверхности.

Для решения этой задачи надо знать распределение скорости $w_x(y)$ по толщине пограничного слоя. Подходящий закон такого распределения выбирается из физического опыта.

Для аппроксимации поперечного профиля скорости в ламинарном пограничном слое обычно принимают полином третьей степени

$$w_x(y) = a + by + cy^2 + dy^3, \quad (\text{XI-42})$$

в случае турбулентного пограничного слоя — формулу типа (XI-23)

$$w_x = w_\infty \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}. \quad (\text{XI-43})$$

которая, как указывалось выше, строго говоря, удовлетворительно согласуется с измерениями скорости за внешним пределом области устойчивого напряжения, т. е. при $\frac{u_* y}{\nu} \gtrsim 750$.

Связь между касательным напряжением трения на твердой поверхности τ_0 и толщиной пограничного слоя аппроксимируется эмпирической формулой Блазиуса

$$\tau_0 = 0,0228 \frac{\rho w_\infty^2}{Re_\delta^{0,25}}, \quad (\text{XI-44})$$

где Re_δ — число Рейнольдса, в котором в качестве определяющего размера принята толщина турбулентного пограничного слоя $Re_\delta = \frac{w_\infty \delta}{\nu}$.

Преимуществом интегрального метода теории пограничного слоя является тот факт, что не обязательно знать точную форму поперечного профиля скорости, а достаточно приближенно описать функцию $w_x(y)$ так, чтобы она отвечала граничным условиям профиля скорости.

Этими граничными условиями в случае ламинарного пограничного слоя являются следующие:

$$\text{при } y = 0 \quad w_x = 0; \quad \text{при } y = \delta \quad w_x = w_\infty;$$

$$\text{при } y = 0 \quad \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} = 0; \quad \text{при } y = \delta \quad \frac{\partial w_x}{\partial y} = 0.$$

Первое условие выражает свойство прилипания жидкости. Второе условие является следствием уравнения (XI-31), когда на поверхности пластины $w_x = 0$ и $w_y = 0$ (свойство непроницаемости)

$$\left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} \right)_{y=0} = 0.$$

Следовательно, мы косвенно используем уравнения (XI-31) для приближенного решения, выполняемого с помощью интегрального метода. Третье условие вытекает из определения толщины пограничного слоя, как такого расстояния, где $w_x = w_\infty$, а четвертое выражает плавный переход переменной скорости w_x в постоянную скорость невозмущенного потока w_∞ .

Используя граничные условия, найдем, что $a=0$; $c=0$, $b=1,5w_\infty \frac{y}{\delta}$ и $d=-0,5w_\infty \left(\frac{y}{\delta}\right)^3$.

Подставив полученные значения коэффициентов в уравнение (XI-42), получим приближенную формулу для профиля скорости в следующем виде:

$$\frac{w_x}{w_\infty} = 1,5 \left(\frac{y}{\delta}\right) - 0,5 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3, \quad (\text{XI-45})$$

Подставляя значение w_x в уравнение (XI-41) и выполняя интегрирование в левой его части и дифференцирование в правой, после разделения переменных в полученном дифференциальном уравнении, интегрирования последнего и определения постоянной интегрирования окончательно получим:

$$\delta = 4,64 \sqrt{\frac{\nu x}{w_\infty}} \quad (\text{XI-46})$$

или в безразмерной форме

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4,64}{\sqrt{Re_x}}, \quad (\text{XI-47})$$

где $Re_x = w_\infty x / \nu$.

Таким образом, безразмерная толщина пристеночного ламинарного пограничного слоя выражается соотношением, аналогичным (IX-6), полученном на с. 201, в котором множитель, по данным Блазиуса, был принят равным пяти (точное решение).

Касательное напряжение трения на поверхности пластины можно определить, используя формулу (VII-1) и соотношение (XI-45) для поперечного распределения скорости.

В этом случае получим

$$\tau_v = \mu \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)_{y=0} = 1,5\mu \frac{w_\infty}{\delta},$$

откуда с помощью формулы (XI-46) для толщины пограничного слоя найдем

$$\frac{\tau_0}{\rho w_\infty^2} = \frac{0,323}{\sqrt{Re_x}}. \quad (\text{XI-48})$$

Последняя формула имеет тот же вид, что и выражение (XI-9) а множитель, переводящий пропорциональность (XI-9) в равенство отличается от точного решения, полученного путем интегрирования уравнения (XI-31), на 3% (точное решение содержит множитель 0,332).

В случае турбулентного пограничного слоя в результате подстановки выражений (XI-43) и (XI-44) в уравнение (XI-40) и интегрирования полученного при этом дифференциального уравнения выражение, характеризующее изменения безразмерной толщины турбулентного пограничного слоя на пластине, имеет следующий вид:

$$\frac{\delta}{x} = \frac{0,376}{Re_x^{0,2}} \quad (XI-49)$$

Таким образом, по мере удаления от передней кромки пластины толщина турбулентного пограничного слоя растет быстрее, чем ламинарного, что объясняется большей интенсивностью турбулентного переноса количества движения по сравнению с интенсивностью молекулярного переноса.

Подставляя последнее уравнение в формулу Блазиуса (XI-44), найдем уравнение, определяющее изменение по длине пластины касательного напряжения трения на поверхности ее:

$$\frac{\tau_0}{\rho w_\infty^2} = \frac{0,0296}{Re_x^{0,2}} \quad (XI-50)$$

Следовательно, и в случае турбулентного пограничного слоя касательное напряжение трения на поверхности уменьшается по длине пластины, что объясняется увеличением толщины пограничного слоя.

Среднее по длине l неограниченной плоской пластины значение касательного напряжения трения на поверхности пластины

$$\tau_{0l} = \frac{1}{l} \int_0^l \tau_0 dx.$$

Используя уравнение (XI-50), получим

$$\frac{\tau_{0l}}{\rho w_\infty^2} = \frac{0,037}{Re_l^{0,2}}, \quad (XI-51)$$

где $Re = w_\infty l / \nu$.

Полученные выше некоторые характеристики гидродинамического пристеночного пограничного слоя используются, кроме того, в расчетах конвективного тепло- и массообмена.

Глава XII

ПРИМЕНЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БЕРНУЛЛИ В АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ

1. Потери энергии при течении жидкости и газа по каналам

Задачи некоторых течений, т. е. таких, в которых давление вдоль потока непостоянно, решают с помощью двух основных формул — уравнения неразрывности и уравне-

ния Бернулли. Для потока несжимаемой жидкости они могут быть записаны в следующем виде:

а) уравнение неразрывности для потока без разветвлений (простого трубопровода)

$$w_{1\text{cp}} F_1 = w_{2\text{cp}} F_2 = \dots = w_{i\text{cp}} F_i = V = \text{const}; \quad (\text{XII-1})$$

б) уравнение неразрывности для узлов разветвлений сложного трубопровода

$$\Sigma V_i = 0; \quad (\text{XII-2})$$

в) уравнение Бернулли для плавно изменяющегося установившегося потока несжимаемой, например каплевой, жидкости

$$\frac{\alpha_1 w_{1\text{cp}}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_2 w_{2\text{cp}}^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \Delta p_{\text{пот}}; \quad (\text{XII-3})$$

г) уравнение Бернулли для плавно изменяющегося неустановившегося потока несжимаемой жидкости

$$\frac{\alpha_1 w_{1\text{cp}}^2}{2g} + \frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{\alpha_2 w_{2\text{cp}}^2}{2g} + \frac{p_2}{\gamma} + z_2 + \Delta p_{\text{пот}} + p_i. \quad (\text{XII-4})$$

В выражениях (XII-1) — (XII-4):

$$w_{\text{cp}} = \frac{1}{F} \int_F w dF \text{ — средняя скорость в сечении потока;}$$

F — площадь сечения потока;

V — объемный расход;

$$\alpha = \frac{1}{w_{\text{cp}}^3 F} \int_F w^3 dF \text{ — коэффициент неравномерности кинети-}$$

ческой энергии;

p — абсолютное давление;

z — высота над принятой горизонтальной плоскостью отсчета (плоскостью сравнения) до точек, в которых давление равно p ;

$\Delta p_{\text{пот}}$ — потеря напора (энергии);

p_i — инерционный напор;

γ — удельный вес движущейся жидкости.

Все слагаемые в (XII-3) и (XII-4) имеют размерность длины и именуются высотами (напорами).

Для напорных трубопроводов, работающих в обычных условиях и транспортирующих несжимаемые жидкости, вместо абсолютного давления p в (XII-3) и (XII-4) вво-

дают избыточное давление $p - p_0$; величину $(p - p_0)$ называют пьезометрической высотой.

Если полный гидродинамический напор для капельной жидкости

$$H = \frac{\alpha \omega_{\text{ср}}^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z,$$

то мощность N , необходимая для изменения гидродинамического напора на величину H при расходе V , равна $N = \gamma V H$.

Все источники потерь напора в трубопроводах подразделяют на два вида — потери напора (энергии) на трение $\Delta p_{\text{тр}}$ и местные потери напора (энергии) $\Delta p_{\text{м.с.}}$. Потери напора на трение происходят вдоль всего потока реальной (вязкой) жидкости, местные потери локализуются на ограниченных по длине участках при изменении сечения потока, его направления, делении и слиянии.

Пренебрегая взаимным влиянием гидравлических сопротивлений, потерю напора $\Delta p_{\text{пот}}$ представляют в виде арифметической суммы потерь на трение $\Delta p_{\text{тр}}$ и местных $\Delta p_{\text{м.с.}}$ вдоль потока (принцип наложения потерь напора):

$$\Delta p_{\text{пот}} = \Sigma \Delta p_{\text{тр}} + \Sigma \Delta p_{\text{м.с.}} \quad (\text{XII-5})$$

Согласно теории гидродинамического подобия, все виды потерь выражают через безразмерные гидродинамические коэффициенты в долях от скоростного напора потока. Потеря напора на трение на участках равномерного течения

$$\Delta p_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d_r} \cdot \frac{\omega_{\text{ср}}^2}{2g}, \quad (\text{XII-6})$$

потеря напора в местных сопротивлениях

$$\Delta p_{\text{м.с.}} = \zeta \frac{\omega_{\text{ср}}^2}{2g}, \quad (\text{XII-7})$$

где λ — коэффициент сопротивления трения;
 l — длина участка трубопровода;
 $d_r = \frac{4F}{\kappa}$ — гидравлический диаметр, для круглой трубы равный ее диаметру;
 κ — смоченный периметр сечения;
 ζ — коэффициент местного сопротивления ($\zeta = k_{\text{м.с.}}$).

Для случая движения по трубопроводам газа, когда уравнение Бернулли записывается в виде

$$\alpha_1 \rho \frac{w_{1cp}^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 = \alpha_2 \rho \frac{w_{2cp}^2}{2} + p_2 + \rho g z_2 + \Delta p_{пот}, \quad (XII-3a)$$

потеря энергии на трение

$$\Delta p_{тр} = \lambda \frac{l}{d_r} \rho \frac{w_{cp}^2}{2}, \quad (XII-6a)$$

а потеря энергии в местных сопротивлениях

$$\Delta p_{м.с} = \xi \rho \frac{w_{cp}^2}{2}. \quad (XII-7a)$$

Численные значения коэффициентов λ и ξ зависят от критериев геометрического и гидродинамического подобия. Для установившихся течений несжимаемой жидкости в напорных трубопроводах критерием гидродинамического подобия служит критерий Рейнольдса, подсчитываемый по средней скорости и диаметру:

$$Re = w_{cp} d / \nu.$$

Коэффициент сопротивления трения в общем случае зависит от Re , относительной шероховатости $\varepsilon = k/d$ (k — абсолютная шероховатость) и параметра, характеризующего форму сечения канала.

Для круглых трубопроводов при ламинарном течении, т. е. при $Re < 2000$, справедлива формула Пуайзеля

$$\lambda = 64/Re. \quad (XII-8)$$

При турбулентном режиме течения в гладких трубопроводах могут использоваться полуэмпирические формулы, которые в зависимости от принятых допущений имеют несколько различных вид, но дают практически близкие результаты:

формула Блазиуса (для $Re < 10^5$)

$$\lambda = 0,3164 Re^{-1/4}, \quad (XII-9)$$

формула Прандтля — Никурадзе (для $Re > 10^5$)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg (Re \sqrt{\lambda}) - 0,8 \quad (XII-10)$$

или

$$\lambda = 0,0032 + 0,221 Re^{-0,237}. \quad (XII-11)$$

В последние 15—20 лет советскими учеными предложены упрощенные универсальные формулы для вычисления λ гладких круглых труб, которые дают практически одинаковые результаты, хорошо совпадающие с опытом:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,82 \lg \frac{Re}{100} + 2 \text{ — по данным Альтшуля; } \quad (\text{XII-12})$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \lg Re - 1,5 \text{ — по данным Конакова; } \quad (\text{XII-13})$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \lg Re - 1,64 \text{ — по данным Филоненко. } \quad (\text{XII-14})$$

Для области квадратического сопротивления (для сильно шероховатых труб при высоких числах Re) $\lambda = f(\epsilon)$. В случае зернистой шероховатости справедлива формула Никурадзе

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2 \lg \frac{r_0}{k} + 1,74; \quad (\text{XII-15})$$

при бугристой шероховатости — формула Теплова

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \lg \frac{r_0}{k} + 2,19, \quad (\text{XII-16})$$

где r_0 — радиус трубы.

Упрощенная формула Альтшуля, пригодная для гидравлически гладких труб, области квадратического сопротивления и переходной области при турбулентном течении, имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,8 \lg \frac{Re}{Re \frac{k_1}{d} + 7}, \quad (\text{XII-17})$$

где k_1 — приведенная линейная характеристика шероховатости (мм), которая ориентировочно может приниматься следующей для труб:

Новые чистые стальные	$6,0 \cdot 10^{-3}$
Стальные, подверженные коррозии	$50 \cdot 10^{-3}$
Стальные, сильно заржавевшие	$200 \cdot 10^{-3}$

Между величиной k_1 и эквивалентной зернистой шероховатостью k существует приближенная связь $k \approx 10k_1$.

Для труб с некруговыми сечениями в первом приближении могут использоваться те же формулы, но с введением гидравлического диаметра $d_r = \frac{4F}{\pi}$.

Коэффициенты местных сопротивлений ζ принимают главным образом по результатам экспериментальных исследований.

Коэффициент местного сопротивления при внезапном расширении, отнесенный к скорости w_{1cp} ; с учетом действительного профиля скорости до и после расширения

$$\zeta_{в.р} = \alpha_1 - \frac{2\beta_1}{n} + \frac{2\beta_2 - \alpha_2}{n^2}, \quad (\text{XII-18})$$

где β — коэффициент неравномерности количества движения;

$$\beta = \frac{1}{w_{\text{ср}}^2 F} \int_F w^2 dF;$$

n — степень расширения; $n = F_2/F_1$.

Коэффициент местного сопротивления при внезапном сужении потока $\zeta_{\text{в.с.}}$, отнесенный к скорости $w_{2\text{ср}}$:

$$\zeta_{\text{в.с.}} = 0,5 \left[(\alpha_1 - 1) \left(\frac{F_2}{F_1} \right)^2 - (2\beta_1 - 1) \frac{F_2}{F_1} + (2\beta_2 - \alpha_2) \right]. \quad (\text{XII-19})$$

Без учета действительного характера профилей скорости в (XII-18) и (XII-19) надо положить $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 1$.

Инерционный напор в первом приближении может вычисляться по изменению средней скорости во времени:

$$p_i = \frac{1}{g} \int_1^2 \frac{\partial w_{\text{ср}}}{\partial t} dl. \quad (\text{XII-20})$$

Потери напора при неустановившихся течениях с небольшими ускорениями приближенно можно вычислять по (XII-6) и (XII-7) или по (XII-6 а) и (XII-7 а), в которых λ и ζ принимают для мгновенных значений средней скорости по данным для установившегося течения.

Такой подход является приближенным и его используют с указанными ограничениями.

Подставив (XII-8) в (XII-6 а) и выполнив преобразования, получим выражение потери энергии на трение при ламинарном движении в следующем виде:

$$h_{\text{тр}} = \Delta p_{\text{тр}} = \frac{64}{Re_d} \cdot \frac{l}{d} \rho \frac{w_{\text{ср}}^2}{2} = 32 \frac{\mu l w_{\text{ср}}}{d^2}. \quad (\text{XII-21})$$

Последнее выражение называется уравнением Пуазейля. Оно выводится из рассмотрения сил вязкости, действующих в ламинарном потоке.

Выше отмечалось, что потеря энергии в ламинарном потоке пропорциональна скорости в первой степени, это характерно для всех случаев, когда поток определяется силами вязкости (когда силы инерции относительно малы).

При переходе к турбулентному режиму коэффициент трения резко возрастает, а потом медленно снижается, что показано на рис. 75.

Для шереховатых труб и каналов при относительно небольших значениях Re коэффициент трения тот же, что и для гладких труб при условии, что неровности стенки

меньше толщины вязкого (ламинарного) пристеночного пограничного подслоя и поэтому не выступают из него.

При увеличении значений Re толщина вязкого подслоя уменьшается, неровности начинают выступать из него, вязкий пристеночный пограничный слой разрушается, это сопровождается усиленным вихреобразованием и повышением коэффициента трения (см. рис. 75). При

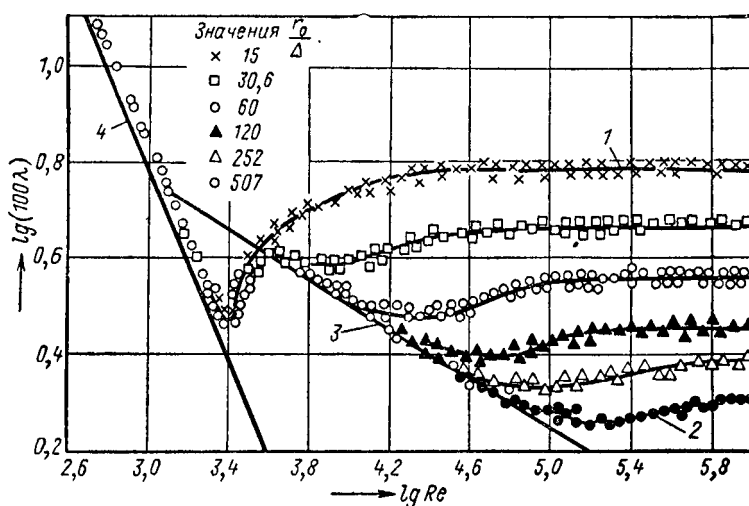


Рис. 75. Изменение коэффициента трения в зависимости от числа Re :
1 — весьма шероховатые трубы; 2 — умеренно шероховатые трубы; 3 — гладкие трубы; 4 — ламинарное течение (r_0 — радиус трубы; Δ — высота выступов, абсолютная шероховатость стенки)

дальнейшем повышении числа Рейнольдса коэффициент трения приобретает постоянное значение, которое с последующим повышением скорости уже не меняется.

Если $\lambda = \text{const}$, то, следовательно, потеря напора на трение в шероховатых трубах пропорциональна квадрату скорости потока, т. е. в этом случае движение определяется силами инерции.

В гладких трубах, где наблюдается и действие сил инерции (в ядре потока), и сил вязкости (в пристеночном пограничном слое), потеря энергии пропорциональна скорости в степени 1,75. Эта степень получается, если (XII-9) подставить в (XII-6а) и раскрыть выражение Re .

На практике для расчета шероховатых металличе-

ких каналов принимают $\lambda = 0,030 \div 0,035$, для кирпичных каналов и борцов $\lambda = 0,05$.

Следует отметить, что приведенный выше расчет потери энергии на преодоление трения о стенки каналов справедлив для стабилизированных ламинарных или турбулентных потоков, когда профили скоростей в поперечных сечениях становятся подобными друг другу.

Например, параболическое распределение скоростей в трубе, наблюдаемое при ламинарном движении, устанавливается не сразу, а на определенном расстоянии от входного сечения трубы. Если при входе в трубу наблюдается равномерное распределение скорости по сечению, то на начальной длине трубы (на участке так называемой гидродинамической стабилизации) происходит постепенная перестройка равномерного профиля скорости в параболический. Относительная длина этого участка равна

$$\frac{l_{ст}}{d} = 0,028 Re_d. \quad (XII-22)$$

При турбулентном движении также имеется начальный участок трубы, на котором равномерное распределение скорости во входном сечении трубы перестраивается в распределение, типичное для турбулентного потока. Относительная длина этого участка

$$\frac{l_{ст}}{d} \approx 0,639 \sqrt[4]{Re_d}. \quad (XII-23)$$

Необходимо поэтому иметь в виду, что пользоваться формулами (XII-8), (XII-9) и др. можно только для участков трубы, расположенных за участком гидродинамической стабилизации, т. е. при $l > l_{ст}$.

Определим потерю энергии, связанную с преодолением местных сопротивлений при движении газов по трубам или каналам.

Измеряя давление в сечениях 1 и 2 канала, который расположен в горизонтальной плоскости (рис. 76), констатируем падение давления. Поскольку скоростной напор в сечениях 1 и 2 одинаков, то, следовательно, потеря давления в данном случае характеризует потерю энергии, которая тратится на трение и на преодоление местного сопротивления, возникающего при повороте канала:

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \Delta p_{тр} + \Delta p_{м.с} = \Delta p_{пот}. \quad (XII-5a)$$

На рис. 77 представлено типичное изменение ζ в зависимости от значений Re : при небольших его значениях имеем слабо снижающиеся значения коэффициента местного сопротивления.

При $Re > 5000 \div 10\,000$ коэффициент местного сопротивления приобретает постоянное значение и, следовательно, потеря энергии в этом случае прямо пропорциональна квадрату скорости потока. Так как на практике по преимуществу имеют дело с большими значениями

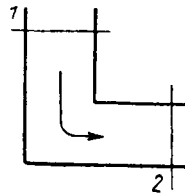


Рис. 76. К определению потери энергии потока при повороте канала

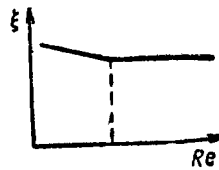


Рис. 77. Зависимость коэффициента местного сопротивления от числа Re

Re , то в справочниках обычно приводятся соответствующие им постоянные значения коэффициентов местных сопротивлений.

Существует связь между коэффициентом местного сопротивления $\zeta = \frac{2\Delta p}{\rho w_{ср}^2}$ и числом Эйлера $Eu = \frac{\Delta p}{\rho w_{ср}^2}$, когда $\zeta = 2 Eu$. Если на оси ординат вместо ζ отложить значение величины Eu , то условие $Eu = \text{const}$ при $Re = \text{var}$ будет означать факт существования автомодельного течения, когда безразмерные профили скоростей в различных поперечных сечениях будут подобны друг другу.

В тех случаях, когда местное сопротивление возникает при повороте канала и одновременном изменении сечения канала (пример такого канала на рис. 78), изменение давления между сечениями 1 и 2 определяется не только потерей энергии, но и изменением скоростных давлений.

Напишем уравнение Бернулли

$$p_1 + \alpha_1 \rho \frac{w_1^2}{2} = p_2 + \alpha_2 \rho \frac{w_2^2}{2} + \Delta p_{тр} + \Delta p_{м.с.},$$

откуда

$$p_1 - p_2 = \alpha_2 \rho \frac{w_2^2}{2} - \alpha_1 \rho \frac{w_1^2}{2} + \Delta p_{тр} + \Delta p_{м.с.} \quad (\text{XII-24})$$

Потерю на местное сопротивление в этом случае можно выразить в долях скоростного давления как в первом сечении, так и во втором:

$$\Delta p_{м.с.} = \zeta_1 \alpha_1 \rho \frac{w_1^2}{2} = \zeta_2 \alpha_2 \rho \frac{w_2^2}{2}, \quad (\text{XII-25})$$

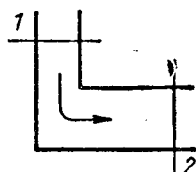


Рис. 78. К определению потерь энергии потока при повороте канала изменяющегося поперечного сечения

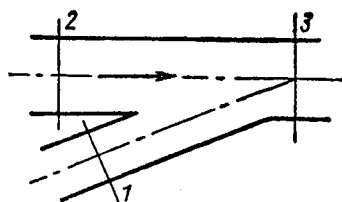


Рис. 79. К определению потери энергии потока при соединении и разьединении каналов

поэтому в таких случаях всегда ограничивают, к какому скоростному давлению отнесен коэффициент местного сопротивления.

При расчете потерь энергии при соединении и разьединении каналов (например, тройников) уравнение Бернулли относят к струйке, двигающейся по прямому или боковому направлению (рис. 79). Так, если ведется расчет магистрального боровы, то уравнение Бернулли принято писать так:

$$p_2 + \alpha_2 \rho \frac{w_2^2}{2} = p_3 + \alpha_3 \rho \frac{w_3^2}{2} + \Delta p_{тр} + \zeta \alpha_2 \rho \frac{w_2^2}{2}, \quad (\text{XII-26})$$

здесь ζ относят к скоростному давлению в сечении 2.

Аналогично для бокового направления

$$p_1 + \alpha_1 \rho \frac{w_1^2}{2} = p_3 + \alpha_3 \rho \frac{w_3^2}{2} + \Delta p_{тр} + \zeta \alpha_1 \rho \frac{w_1^2}{2}, \quad (\text{XII-27})$$

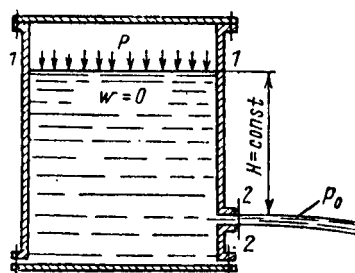
где ζ отнесен к скоростному давлению в сечении 1.

При движении газов в обратном направлении (случай «нагнетания») коэффициенты местных сопротивлений относят также к скоростным давлениям в сечениях 1 и 2.

2. Скорость истечения жидкости из отверстия в резервуаре

Представим себе резервуар, заполненный несжимаемой жидкостью. В стенке резервуара предусмотрено небольшое отверстие с острыми кромками, расположенное на глубине H под свободной поверхностью жидкости (рис. 80). Через отверстие струя жидкости

Рис. 80. Истечение жидкости из отверстия в резервуаре



вытекает из резервуара наружу. Необходимо определить скорость истечения струи. Обозначим давление над свободной поверхностью жидкости в резервуаре через p , а давление в окружающей резервуар атмосфере через p_0 . Уровень жидкости в резервуаре поддерживается на одной высоте ($H = \text{const}$).

Если $H = \text{const}$ и $p = \text{const}$, то движение будет установившимся.

Проведем в струйке сечения: 1—1 — на свободной поверхности жидкости, 2—2 на некотором расстоянии от выхода из отверстия. В струе, вытекающей из отверстия, устанавливается на некотором расстоянии от выхода давление, приблизительно равное давлению в окружающей атмосфере. В первом сечении давление равно p , скорость можно считать равной нулю (так как $H = \text{const}$), высота z над плоскостью отсчета, за которую мы примем горизонтальную плоскость, проходящую через ось отверстия, равна H ; во втором сечении $z=0$, $p=p_0$, а скорость — искомая величина. Запишем уравнение Бернулли для этих сечений:

$$p + \gamma H = p_0 + \rho \frac{w^2}{2}.$$

Отсюда

$$w = \sqrt{2g \left(H + \frac{p - p_0}{\gamma} \right)}. \quad (\text{XII-28})$$

В частном случае, когда $p = p_0$, формула для скорости истечения жидкости принимает вид

$$w = \sqrt{2gH}. \quad (\text{XII-28a})$$

Эта формула выражает так называемую теорему Торичелли, установленную им в 1643 г., т. е. еще до того, как Бернулли вывел свое уравнение. Скорость истечения зависит лишь от высоты, с которой жидкость опустилась, одинакова для всех жидкостей и равна скорости свободного падения тела с этой же высоты.

Действительная скорость истечения из отверстия с острыми кромками несколько меньше, чем получается по этой формуле. Дело в том, что как бы мало не было отверстие, скорости в струе по сечению 2—2 распределены неравномерно. Действительная скорость истечения представляет собой некоторую среднюю скорость в сечении 2—2, она меньше, нежели максимальная, определяемая предыдущей формулой. Кроме того, реальная жидкость обладает вязкостью, это обстоятельство также приводит к тому, что действительная скорость меньше скорости, определяемой последней формулой.

Чтобы учесть все это, вводят в формулу для w поправочный множитель φ , меньший единицы. Таким образом, действительная скорость истечения равна

$$w = \varphi \sqrt{2g \left(H + \frac{p - p_0}{\gamma} \right)}. \quad (\text{XII-28б})$$

Коэффициент φ называется коэффициентом скорости при истечении и определяется экспериментальным путем, его численное значение для круглого отверстия 0,95—0,99.

3. Свободная поверхность жидкости в канале переменной ширины

Рассмотрим жидкость, протекающую по каналу, который имеет в каком-либо месте сужения (рис. 81, а). Определим высоту уровня жидкости в сжатом сечении.

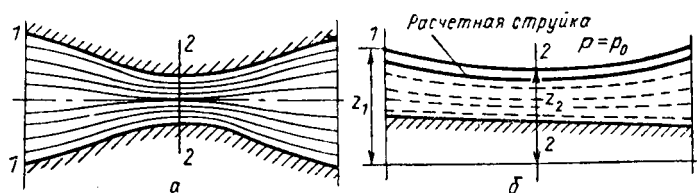


Рис. 81. К определению свободной поверхности жидкости в канале переменной ширины

Движение жидкости в канале и вообще в любом открытом русле обладает тем свойством, что на свободной поверхности вдоль всего потока давление во всех точках постоянно и равно атмосферному давлению ($p = p_0$). Такое движение жидкости называется безнапорным.

Чтобы вычислить высоту свободной поверхности в сжатом сечении, выделим на поверхности элементарную струйку (рис. 81, б), проведем в ней два поперечных сечения — одно до сжатия в канале, другое — в сжатом месте, и запишем для этой струйки уравнение Бернулли.

Так как $p = \text{const}$, то это уравнение имеет вид

$$z_1 + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{w_2^2}{2g}.$$

По уравнению расхода жидкости

$$w_1 F_1' = w_2 F_2',$$

где F_1' и F_2' — суть площади соответствующих сечений струйки. Представим теперь, что эти площади находятся в таком же соотношении, как площади F_1 и F_2 соответствующих сечений всего потока

$$\frac{F_1'}{F_2'} = \frac{F_1}{F_2},$$

тогда из уравнений расхода получается

$$w_2 = w_1 \frac{F_1}{F_2}.$$

После подстановки в уравнение Бернулли находим

$$z_2 = z_1 - \frac{w_1^2}{2g} \left(\frac{F_1^2}{F_2^2} - 1 \right).$$

Чтобы вычислить z_2 , следует выразить F_1 и F_2 через размеры, характеризующие поперечное сечение канала, например в случае прямоугольного поперечного сечения через ширину b и высоту z , отсчитываемую от дна канала:

$$F_1 = b_1 z_1; \quad F_2 = b_2 z_2.$$

Для z_2 тогда получится следующее кубическое уравнение:

$$z_2^3 - \left(z_1 + \frac{w_1^2}{2g} \right) z_2^2 + \frac{w_1^2}{2g} \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^2 z_1^2 = 0.$$

Для удобства анализа приведем это уравнение к безразмерному виду, разделив его почленно на z_1^3 . Отношение $\frac{z_2}{z_1}$ обозначим через $\bar{z}_2$, а безразмерный параметр w_1^2/gz_1 — через $\bar{F}_1$ (эта величина представляет число, обратное критерию Фруда). В результате уравнение примет вид

$$\bar{z}_2^3 (1 - \bar{z}_2) + \bar{z}_2^2 \frac{\bar{F}_1}{2} = \left(\frac{b_1}{b_2} \right)^2 \frac{\bar{F}_1}{2}.$$

Корни этого уравнения являются функцией двух параметров: b_1/b_2 и $\bar{F}_1$

г2

Нетрудно убедиться, что при $\bar{z}_2 = 1$ $b_1/b_2 = 1$. Посмотрим, как изменится отношение b_1/b_2 при малом изменении $\bar{z}_2$. Полагая $\bar{z}_2 = 1 + \delta$, где δ — малая величина и оставляя в уравнении для $\bar{z}_2$ лишь слагаемые, содержащие δ в степени не выше первой, находим

$$\delta = \frac{\bar{F}_1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^2 - 1}{\bar{F}_1 - 1}.$$

Отсюда следует, что если канал сужается, т. е. $\frac{b_1}{b_2} > 1$, то при $\bar{F}_1 > 1$ величина δ будет положительна по знаку, что означает повышение уровня воды в узком сечении, и, наоборот, при $\bar{F}_1 < 1$ уровень воды в узком сечении понижается. При расширении канала будет наблюдаться обратное явление.

Полученные в данном примере выводы полезно учитывать при расчетах движения жидкого металла по желобам и движении жидкой ванны в сталеплавильных печах непрерывного действия, имеющих пережимы между отдельными камерами.

4. Давление в точке торможения потока

Представим себе твердое тело, обтекаемое потоком жидкости (например, элемент рекуператора обтекаемой формы). На передней стороне тела всегда находится точка A , в которой струйка набегаю-

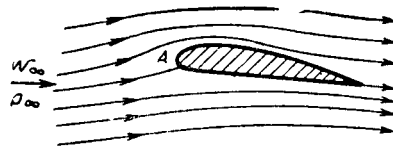


Рис. 82. К определению давления в точке торможения потока

щая на тело, разветвляется. Такая точка разветвления струй называется критической или точкой торможения потока (рис. 82). Скорость в критической точке равна нулю. Вычислим давление в этой точке. Выделим для этого в потоке струйку, которая подходит к критической точке, и проведем два сечения: одно перед телом на большом расстоянии от него (теоретически говоря, в бесконечности), другое — в том месте, где находится критическая точка. Движение будем предполагать горизонтальным, т. е. $z = \text{const}$. Обозначим давление в первом сечении (на бесконечности) через p_∞ и скорости потока через w_∞ , давление во втором сечении (где $w=0$) — через p_0 . По уравнению Бернулли получаем

$$p_0 = p_\infty + \rho \frac{w_\infty^2}{2}.$$

Давление в точке торможения потока несжимаемой жидкости равно сумме статического и динамического давлений в потоке. Эту сумму называют полным давлением.

Следует отметить, что в точке торможения давление достигает максимального значения, так как по уравнению Бернулли в случае горизонтального движения $p + \rho \frac{w^2}{2} = \text{const}$ и, следовательно, давление будет наибольшим в той точке, где скорость наименьшая, т. е. в точке торможения, ибо в ней $w = 0$.

Для расчетов пользуются обычно не абсолютным значением давления в данной точке, а разностью между давлением в данной точке и статическим давлением в потоке. Эту разность называют избыточным давлением в данной точке. В точке торможения избыточное давление равно динамическому давлению в потоке:

$$p_0 - p_\infty = \rho \frac{w_\infty^2}{2}.$$

Если взять для численного примера скорость потока воздуха $w_\infty = 10$ м/с, плотность $\rho = 1,25$ кг/м³, то избыточное давление на поверхность тела в точке торможения получается равным $\sim 62,5$ Н/м² (6,25 кгс/м²).

Для элементов металлических рекуператоров, обтекаемых газовым потоком, давление такого порядка можно не учитывать, но для керамических трубчатых рекуператоров, работающих на изгиб, это давление полезно принимать во внимание.

5. Соотношение между статическим и динамическим давлением в струйке

Остановимся на случае, когда движение жидкости горизонтальное (т. е. для всех сечений струйки $z = \text{const}$) или, во всяком случае, такое, что изменениями слагаемого γz в уравнении Бернулли можно пренебречь по сравнению с изменениями других слагаемых. Это весьма важный частный случай. Всегда, когда поток движется горизонтально, принимают, что и частицы среды движутся приблизительно горизонтально. Уравнение Бернулли при этом принимает вид

$$p + \rho \frac{w^2}{2} = \text{const}$$

для всех сечений одной и той же струйки. Это уравнение является основным, с помощью которого вычисляют давления в несжимаемой жидкости, если известны скорости, или вычисляют скорости, если известны давления.

Последнее уравнение связывает статическое и динамическое давления для всех точек одной и той же струйки: сумма этих давлений должна быть вдоль всей струйки величиной постоянной, иными словами, увеличение или уменьшение скорости, следовательно, динамического давления в одном сечении струйки по сравнению с другим сопровождается соответственно уменьшением или увеличением статического давления. Если, например, жидкость движется по горизонтальной трубе, имеющей местное сужение, как показано на рис. 83, то по уравнению расхода жидкости скорость в суженном сечении

$II-II$ больше, чем в сечении $I-I$ до сужения, следовательно, статическое давление в сечении $II-II$ должно быть меньше, нежели в сечении $I-I$ ($h_{II} = \frac{p_2}{\gamma} < h_I = \frac{p_1}{\gamma}$). Поставив в каждом из этих сечений по пьезометру, можно убедиться на опыте в том, что уро-

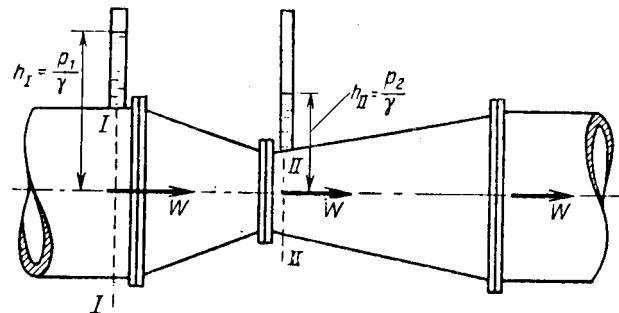


Рис. 83. Изменение статического давления при сужении канала

вень жидкости во втором пьезометре будет ниже уровня жидкости в первом, в полном согласии с последним уравнением.

С точки зрения механики нетрудно понять, если обратить внимание на то, что, переходя от широкого сечения к узкому, частицы

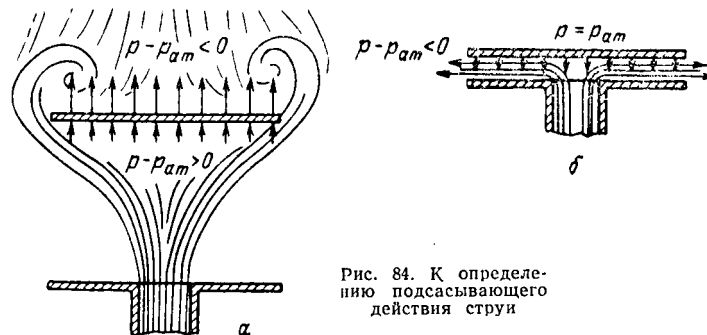


Рис. 84. К определению подсасывающего действия струи

жидкости испытывают ускорение, направленное вдоль потока, и, следовательно, согласно закону Ньютона, разность давлений должна быть направлена вдоль потока, т. е. давление в первом сечении должно быть больше, чем во втором.

Рассмотрим теперь подсасывающее действие струи. Для этого возьмем насадок с плоской шайбой (фланцем) на конце (рис. 84). Если в струю, вытекающую из насадка, поместить плоскую пластину перпендикулярно к струе, то оказывается, что действие струи на пластину будет различным в зависимости от того, находится ли пластинка на значительном расстоянии от шайбы (рис. 84, а) или в

непосредственной близости к ней (рис. 84, б). В первом случае струя обтекает пластину, на передней стороне пластины в результате торможения струи создаются давления больше атмосферных, на задней в связи с отрывом потока и вихреобразованиями давления — меньше атмосферных, результирующая всех давлений представляет собой силу сопротивления пластины и направлена, очевидно, по потоку. Во втором случае при малом зазоре между пластинкой и шайбой струя движется вдоль передней стороны пластины с большой скоростью. Следовательно, давления на этой стороне, согласно уравнению Бернулли, малы, во всяком случае меньше атмосферных. На другую же сторону пластинки действует атмосферное давление. В результате сила сопротивления пластинки, как ни парадоксально на первый взгляд, направлена против скорости струи, иными словами, пластинка стремится «присосаться» к шайбе.

На использовании подсосывающего действия струи основаны многие устройства, широко применяемые в технике (эжекторы, струйные насосы, с помощью которых достигаются, как известно, наиболее высокие степени разрежения — вакуума и др.).

6. Предельная скорость. Кавитация

Применяя уравнение Бернулли, необходимо помнить, что оно пригодно лишь для ограниченного диапазона скоростей. Условия, накладываемые на давление в жидкости, приводят к ограничениям и для скорости.

Поясним это на простейшем примере. Представим себе резервуар с жидкостью и присоединенный к нему трубопровод, имеющий в каком-либо месте сужения (рис. 85). Обозначим через p_0 давление в том месте резервуара, где скорость можно считать равной нулю (на большем расстоянии от входа в трубопровод), и через p и w соответственно давление и скорость в сжатом сечении трубопровода. Из уравнения Бернулли

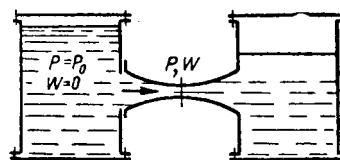


Рис. 85. К определению предельной скорости

$$p + \rho \frac{w^2}{2} = p_0$$

видно, что если при данном значении p_0 увеличить скорость в сжатом сечении (уменьшая его площадь), то давление в этом сечении будет уменьшаться. Скорость может достигнуть при своем возрастании такой величины, что давление p , уменьшаясь, получится из последнего уравнения отрицательным. Однако при выводе уравнения Бернулли предполагают, что выделенный в жидкости элемент под действием давлений, приложенных к нему, может находиться только в сжатом состоянии и не выдерживает растягивающих усилий, т. е. что в жидкости не может быть $p < 0$. Поэтому уравнение Бернулли можно использовать только в тех случаях, когда давление нигде в струйке не достигает минимального значения. Отсюда за-

ключаем, что существует максимальная скорость, при которой еще возможно применение уравнения Бернулли; при скоростях $w > w_{\max}$ его применять нельзя, так как давление $p < 0$ может привести к разрыву струйки в жидкости. Полагая в последнем равенстве $p_{\min} = 0$, находим

$$w_{\max} = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}.$$

Если, например, $p_0 \approx 2 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ (20000 кгс/м²), то для воды, у которой $\rho = 102 \text{ кгс} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4$, получается

$$w_{\max} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20000}{102}} \approx 19,8 \text{ м/с}.$$

Опыты со стеклянными трубками, испытывающими местное сжатие, показывают, что, когда скорость протекающей в них жидкости, возрастая, приближается к максимальной, в потоке происходят новые явления, которые не наблюдаются при малых скоростях. Эти явления заключаются в том, что сначала в области пониженного давления происходит выделение из воды мельчайших пузырьков растворенного в ней воздуха. При дальнейшем понижении давления эти пузырьки скапливаются, занимаемая ими область увеличивается по длине, затем появляются более крупные пузыри, наконец, вся жидкость в области пониженного давления и непосредственно за ней приходит в состояние бурного кипения. Следует вспомнить из физики, что при понижении давления температура кипения жидкости также понижается. В области пониженного давления жидкость может закипеть при нормальной температуре. Выделение пузырьков растворенного воздуха сопровождается характерными вибрациями и потрескиванием, которое затем сменяется глухим шумом. Описанное явление называется кавитацией, оно возникает не только при течении жидкости в трубе с местным сжатием, а везде, где давление жидкости близко к минимальному: в гидравлических турбинах, быстроходных насосах, при обтекании лопастей гребных винтов и т. д.

Кавитация при движении в трубе влечет за собой значительные потери энергии потока; при обтекании тел кавитация сопровождается резким увеличением их лобового сопротивления и уменьшением подъемной силы, гидравлические машины и гребные винты при наличии кавитации работают с малым к. п. д.

Необходимо иметь в виду, что минимальное давление в жидкости, а следовательно, и начало кавитации зависят от температуры. Минимальное давление определяется упругостью насыщенных паров данной жидкости; чем больше температура жидкости, тем больше давление ее насыщенных паров, а следовательно, и давление $p_{\min}$, при котором начинается ее кипение. Так, например для воды при 15°С $p_{\min} = 1800 \text{ Н/м}^2$ (180 кгс/м²), а при температуре 80°С $p_{\min} = 48280 \text{ Н/м}^2$ (4828 кгс/м²).

7. Распределение потоков по параллельным каналам

Пусть имеется горизонтально расположенная система каналов (рис. 86), по которым изотермически движется газ.

Составив уравнение Бернулли для сечений I—I и II—II ($F_1 = F_2$), получим

$$p_1 + \frac{w^2}{2g} \gamma + z\gamma = p_2 + \frac{w^2}{2g} \gamma + z\gamma + \Delta p_{\text{пот}}, \quad (\text{XII-29})$$

откуда

$$p_1 - p_2 = \Delta p_{\text{пот}}.$$

Таким образом, распределение потоков по каналам произойдет так, что $(\Delta p_{\text{пот}})_a = (\Delta p_{\text{пот}})_b$, иными словами, прямо пропорционально площадям эквивалентных отверстий, т. е.

$$V_a : V_b = (F_{\text{экв}})_a : (F_{\text{экв}})_b; \quad V_a + V_b = V.$$

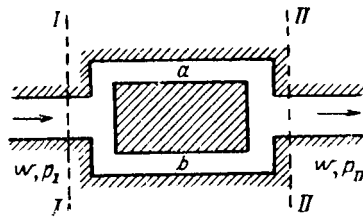


Рис. 86. Схема разделения горизонтального потока

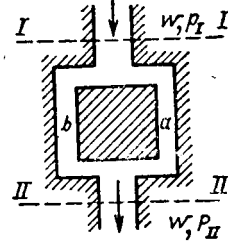


Рис. 87. Схема разделения вертикального потока

Если

$$(F_{\text{экв}})_a = (F_{\text{экв}})_b,$$

то

$$V_a = V_b = 0,5 V.$$

Иная картина будет при вертикальном расположении той же системы каналов (рис. 87).

В этом случае уравнение Бернулли для сечений I—I и II—II будет иметь вид:

$$p_1 + \frac{w^2}{2g} \gamma = p_2 + \frac{w^2}{2g} \gamma + z\gamma + \Delta p_{\text{пот}}, \quad (\text{XII-30})$$

откуда

$$p_1 - p_2 = \Delta p_{\text{пот}} + z\gamma. \quad (\text{XII-31})$$

Аналогично для движения газа в противоположном направлении (снизу вверх) можно легко получить

$$p_2 - p_1 = \Delta p_{\text{пот}} - z\gamma. \quad (\text{XII-32})$$

В отличие от горизонтального расположения системы каналов при вертикальном расположении существенную роль играет геометрическое давление, причем его влияние различно при нисходящем и восходящем движениях газа. Если по системе каналов движется газ меньшей плотности, чем у окружающей среды, то $z\gamma$ — величина положительная. Поэтому при восходящем движении газа геометрическое давление будет способствовать движению [см. (XII-32)], а при нисходящем — препятствовать ему [см. (XII-31)].

Для равномерного распределения газа между каналами a и b необходимо соблюдать условия

$$\begin{aligned}(\Delta p_{\text{пот}})_a + (z\gamma)_a &= (\Delta p_{\text{пот}})_b + (z\gamma)_b; \\ (\Delta p_{\text{пот}})_a - (z\gamma)_a &= (\Delta p_{\text{пот}})_b - (z\gamma)_b.\end{aligned}$$

В том случае, когда величина $z\gamma$ настолько мала по сравнению с $\Delta p_{\text{пот}}$, что ею можно пренебречь, распределение потоков по каналам будет прямо пропорционально площадям эквивалентных отверстий, как и для случая горизонтального расположения системы каналов. Наоборот, если $\Delta p_{\text{пот}}$ настолько мала по сравнению с $z\gamma$, что ею можно пренебречь, распределение потока по каналам a и b будет определяться только величинами геометрического давления: $(z\gamma)_a$ и $(z\gamma)_b$, а равномерность распределения будет при соблюдении условия $(z\gamma)_a = (z\gamma)_b$.

Легко уяснить, следовательно, сущность правила Лукашевича—Грум-Гржимайло для деления потоков, согласно которому рекомендуется для равномерности распределения газа по каналам направлять остывающие газы сверху вниз, а нагревающиеся — снизу вверх. Действительно, если остывающие газы направить снизу вверх, то при случайном увеличении количества газов, поступающих по каналу a (см. рис. 87), температура в этом канале повысится, геометрическое давление $(z\gamma)_a$ возрастет, а $(z\gamma)_b$ уменьшится вследствие понижения температуры в канале b . Явление это будет прогрессировать, так как геометрический напор при движении газа снизу вверх способствует движению.

Исходя из тех же соображений, легко показать, что при движении остывающих газов сверху вниз случайное возрастание геометрического напора, например, в канале a поведет к сокращению расхода газа через этот канал, так как при движении остывающего газа сверху вниз геометрический напор препятствует движению газа и т. д. Правило Лукашевича — Грум-Гржимайло применимо в ограниченных случаях, когда можно пренебречь влиянием потерь напора. Оно в какой-то мере приложимо к движению газов в регенеративной насадке, но совсем непригодно для движения газов в шахтных печах.

8. Газослив в печах

Для решения некоторых задач представляет интерес явление газослива. Легкий газ, находящийся в некотором сосуде, будет сливаться через стенку, отделяющую его от окружающего более тяжелого воздуха, если уровень газа в сосуде будет ниже, чем уровень

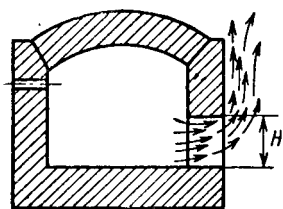


Рис. 88. Схема вытекания газа из рабочего окна печи

края стенки. Картина течения при газосливе такая же, как при водосливе, если последний повернуть в вертикальной плоскости на 180° .

В зависимости от уровня воды за порогом различают водослив затопленный и незатопленный, газослив также может быть затопленным и незатопленным.

Рассмотрим незатопленный газослив через рабочее окно печи (рис. 88). Решение этой задачи было дано И. Г. Есьманом на основе уравнения Бернулли.

Если обозначить через B ширину газослива, H — погружение зеркала потока по сравнению с порогом, t_r — температуру газов в печи, t_b — температуру окружающего воздуха, то для определения высоты газослива h и расхода газа через газослив V_t могут служить формулы

$$h = 0,667H; \quad V_t = 2,52B \sqrt{h^3 \frac{(t_r - t_b)}{(t_b + 273)}} \text{ м}^3/\text{с}.$$

Если давление на поду равно нулю, то H будет, очевидно, равна высоте окна. Приведенные формулы нельзя применять для определения высоты рабочего пространства или боровов, так как в этих случаях газы движутся, заполняя все сечение со скоростями, значительно большими, чем это обеспечивает газослив.

Глава XIII

СВОБОДНЫЕ И ПОЛУОГРАНИЧЕННЫЕ ТУРБУЛЕНТНЫЕ СТРУЙНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

1. Основные определения и свойства

На рис. 89 схематически изображен случай истечения газа в неограниченное пространство, также заполненное газом. Это явление называется свободной струей.

Если физические свойства неподвижной окружающей среды и струи одинаковы, то такая струя называется затопленной (или изотермической, если среды струи и окружающего пространства одинаковы, и их температуры равны). Когда физические свойства струи отличаются от физических свойств среды неограниченного пространства, то такая струя называется незатопленной (неизотермической).

В случае движущейся среды различают две задачи: струя, распространяющаяся в спутном потоке, и струя — во встречном потоке.

К более сложным относятся задачи о распространении в неподвижной среде параллельных и соударяющихся под углом струй.

Рассмотрим распространение одиночной свободной струи в неподвижной среде.

Предположим сначала, что процесс происходит ламинарно и вихреобразование отсутствует. Струя газа, выходящая из сопла, вступает в соприкосновение с окружающим неподвижным газом. В этом случае процессы

поперечного переноса, в частности перенос количества движения, на границе струи осуществляются преимущественно за счет молекулярного механизма, т. е. вследствие теплового движения молекул. Между движущейся струей, на периферии ее, и неподвижными окружающими слоями газа возникает сила трения, которая замед-

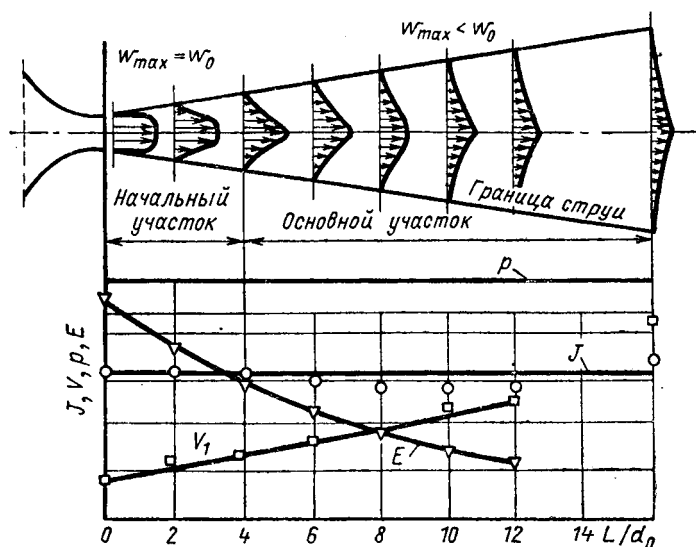


Рис. 89. Схема распределения скоростей в различных сечениях свободной турбулентной струи и график изменения некоторых характеристик по ее длине:

J — количество движения; V — расход воздуха; p — давление; E — кинетическая энергия

ляет движение наружных слоев струи и сообщает ускорение неподвижным слоям окружающего струю газа. Приходящие в движение слои газа увлекают с собой прилегающие к ним слои неподвижного газа и т. д. Таким образом, приводятся в движение все большие массы газа, окружающие струю, за счет непрерывного уменьшения скорости ядра струи.

Образовавшаяся при этом струя при истечении, например, из цилиндрического сопла имеет прямолинейные границы, расширяется в направлении течения и осесимметрична (имеет форму конуса).

В периферийной части струи возникают сравнительно большие градиенты скорости, так как имеется сущест-

венное различие скорости в вытекающей струе и окружающей среде.

Принято говорить, что в этом случае возникает свободный (струйный) пограничный слой.

Обычно в практике с ламинарным движением не приходится встречаться, оно наблюдается при ничтожных скоростях, так как при обычных скоростях явление протекает с ускоренным вихреобразованием.

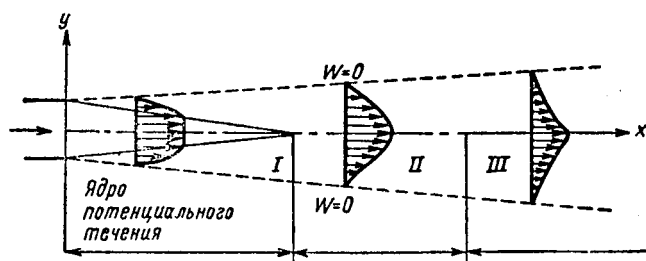


Рис. 90. Начальный, переходный и основной участки свободной турбулентной струи

При турбулентном режиме процессы переноса обусловлены уже пульсационным характером турбулентного движения. Перенос количества движения (и других субстанций) осуществляется за счет поперечного перемещения элементарных объемов газа, называемых иногда турбулентными молями (почему и сам процесс турбулентного переноса называют молярным переносом). Интенсивность молярного переноса существенно превышает интенсивность молекулярного переноса. Поэтому утолщение свободного турбулентного пограничного слоя, как и турбулентное трение на периферии струи, оказывается больше, чем при молекулярном переносе.

Таким образом, по мере продвижения потока в него включаются все новые и новые, ранее неподвижные слои газа, одновременно с этим уменьшается скорость в струе.

Опыты показывают, что в действительности при истечении из сопла турбулентного потока течение на периферии струи в начальном ее участке (на протяжении примерно пяти диаметров сопла) остается ламинарным и только при $x \lesssim 5 d_0$, где d_0 — начальный диаметр струи (диаметр выходного сечения сопла), течение становится турбулентным и в периферийной области струи. В начальном участке струи (при $x \lesssim 5 d_0$) в приосевой области сохраняется так называемое потенциальное (рис. 90)

течение, соприкасающееся с внутренней границей свободного турбулентного пограничного слоя. В конце начального участка (I) струи свободный турбулентный пограничный слой достигает оси струи. Далее следует переходный участок (II) струи, в начале которого скорость начинает уменьшаться и на оси струи, а также основной участок (III).

Для выражения связи между расходом и скоростью струи применим теорему Эйлера. Выделим контур и спроектируем величины на ось струи. Применение теоремы Эйлера [см. (IX-24)] приводит к выражению (пренебрегаем скоростями входа воздуха как очень малыми):

$$J_2 = J_1, \quad (\text{XIII-1})$$

так как давление в свободной струе принимается равным давлению в окружающей атмосфере, хотя, строго говоря, в свободной струе имеются относительно незначительные продольный $\partial p / \partial x$ и поперечный $\partial p / \partial y$ градиенты статического давления.

Окончательно для свободной струи имеем

$$J = \frac{G}{g} \bar{w}_x = \text{const.} \quad (\text{XIII-2})$$

Здесь G означает весовой расход в единицу времени и $\bar{w}_x$ — среднюю скорость струи.

Оказалось, что в основном участке струи профили скорости в поперечных сечениях подобны, тогда как в переходном участке, находящемся между начальным и основным участками, профили скорости постепенно изменяются и становятся подобными у его конца (на расстояниях порядка восьми диаметров сопла от начала потока).

Скорость на оси струи уменьшается, приблизительно следуя гиперболическому закону на отрезке 8—30 диаметров от сопла, а затем на больших расстояниях заметно отклоняется от него.

Как указывалось выше, струя расширяется конически. На расстояниях от сопла более восьми диаметров радиус окружности, на которой скорость равна половине осевой, приближенно равен радиусу конуса с полууглом при вершине 5° , причем вершина этого конуса лежит в центре среза сопла. Полуугол конуса, определяющего внешнюю границу струи, найти труднее, и он определя-

ется начальными условиями истечения и меняется примерно от 9 до 13°.

Примечателен экспериментальный факт, заключающийся в том, что в осесимметричной струе с полностью развитой турбулентностью полностью турбулентное течение наблюдается только в области ядра вплоть до радиуса, на котором скорость равна примерно половине максимального ее значения для данного поперечного сечения. Вне этого ядра лежит довольно широкая кольцевая переходная область, а за ней до границы струи течение носит характер ламинарной оболочки. Эту переходную область можно охарактеризовать коэффициентом перемежаемости, который в свою очередь можно определить как часть полного времени, когда течение является на самом деле турбулентным. Коэффициент перемежаемости в центре струи равен единице и уменьшается до нуля на ее границе.

Существующие методы описания свободной турбулентности (например, свободного струйного течения) базируются, во-первых, на некоторых гипотезах автомодельности тех или иных течений и, во-вторых, на использовании полуэмпирических теорий турбулентности, в которых наряду со строгими уравнениями гидромеханики применяют также некоторые дополнительные связи, найденные чисто эмпирически или выведенные с помощью качественных рассуждений, проверенных на опыте.

Общая идея об автомодельности свободной турбулентности основана на том, что свойства гидродинамических полей в данном сечении, например, трехмерной, турбулентной струи будут в какой-то мере повторять соответствующие свойства в сечениях вверх по потоку. Поэтому можно ожидать, что статистические характеристики гидродинамических полей струи в различных ее сечениях (при различных значениях x) будут подобны между собой. В таком случае в каждом сечении $x = \text{const}$ можно ввести такие характерные масштабы длины $L(x)$ и скорости $U(x)$, что безразмерные статистические характеристики, полученные при использовании этих масштабов, будут одинаковыми, во всех сечениях струи, отстоящих на достаточно больших (по сравнению с диаметром d_0) расстояниях от выходного сечения сопла. Для такого подобия требуется, чтобы и числа Рейнольдса $Re = \frac{U(x)L(x)}{\nu}$ в рассматриваемых сечениях струи были

достаточно большими, т. е. обеспечивали бы наличие полностью развитой турбулентности (напомним, что для свободной струи $Re_{кр} = \frac{\bar{w}_0 d_0}{\nu} = 1,1 \cdot 10^4 \div 1,2 \cdot 10^4$).

Для трехмерной свободной струи течение зависит от диаметра d_0 выходного отверстия сопла, начальной скорости истечения $\bar{w}_0$, вязкости ν и плотности ρ жидкости.

Такая статистическая характеристика течения как средняя скорость $\bar{w}_x$ в силу соображений размерности определяется из формулы

$$\bar{w}_x = \bar{w}_0 f_1 \left(\frac{x}{d_0}, \frac{r}{d_0}, \Phi, Re_{d_0} \right)^*, \quad (\text{XIII-3})$$

где $Re_{d_0} = \frac{\bar{w}_0 d_0}{\nu}$ (принята цилиндрическая система координат (r, Φ, x) с осью Ox).

На достаточно большом расстоянии от выходного отверстия сопла правая часть выражения (XIII-3) стремится в пределу при $\frac{x}{d_0} \rightarrow \infty$, начальные условия $\bar{w}_0$ и d_0 будут сказываться лишь через значение начального количества движения струи, определяющего медленно изменяющиеся с ростом x такие интегральные характеристики течения в сечении $x = \text{const}$, как скорость $\bar{w}_{\max} = U(x)$ на оси, полуширину $y_c = L(x)$, равную тому значению r , при котором $\bar{w}_x(r, 0, x) = 0,5 \bar{w}_{\max}(x)$. Следовательно, при больших значениях x/d_0 струю можно считать осесимметричной (так как зависимость от Φ может определяться только формой выходного отверстия), и формула (XIII-3) будет представлена в виде

$$\bar{w}_x = U(x) f_2 \left(\frac{r}{L(x)}, Re_x \right), \quad (\text{XIII-4})$$

где $Re_x = \frac{U(x) L(x)}{\nu}$.

При достаточно большом Re_x (при $Re \gg Re_{кр}$) можно считать $Re_x = \infty$, так как при развитом турбулентном режиме турбулентная (вихревая) вязкость всегда намного превосходит молекулярную (например, для газов при нормальном давлении коэффициент диффузии при молекулярном переносе имеет порядок $10^{-1} \text{ см}^2/\text{с}$, а коэффи-

* Здесь $\bar{w}$ — усредненная по времени скорость.

циент турбулентного, вихревого, обмена, зависящий от режимных параметров $40\text{--}320\text{ см}^2/\text{с}^*$), и параметр ν здесь не играют роли. В этом и состоит принцип подобия по числу Рейнольдса. Следовательно, при достаточно больших значениях x/d_0 и Re_x .

$$\bar{w}_x = U(x) f\left(\frac{r}{L(x)}\right), \quad (\text{XIII-5})$$

где $f(r)$ — некоторая универсальная функция.

Последнее соотношение и выражает гипотезу об автомодельности течения в свободной струе. Автомодельность здесь имеет место для всей области турбулентного течения, но касается только статистических характеристик крупномасштабных компонент движения, не связанных с диссипацией энергии под действием вязкости.

Связи между функциями $L(x)$, $U(x)$ и $f(r)$ находят подстановкой последней формулы в дифференциальные уравнения движения жидкости в пограничном слое [см., например, уравнение (XI-33)]. В случае стационарного движения осесимметричной струи в пренебрежении слагаемыми, содержащими вязкость, получается уравнение

$$\bar{w}_x \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r \bar{w}_x' \bar{w}_y'), \quad (\text{XIII-6})$$

являющееся аналогом первого уравнения системы (XI-33) и служащего основой многих теоретических исследований турбулентных струй.

Наличие автомодельности окончательно может быть установлено только на основе анализа эмпирических данных, т. е. формула (XIII-5) должна быть проверена экспериментально. Такая проверка показала, что, как это было указано выше, уже на небольших расстояниях от выходного сечения сопла (при $x \lesssim 8d_0$) профиль средней продольной скорости $\bar{w}_x(x, r)$ хорошо описывается формулой (XIII-5), так как профили скорости в различных сечениях струи, нормированные делением на $w_{\max} = U$ и отнесенные к расстояниям r , измеренным масштабом L , таким, что $\bar{w}_x(L) = 0,5 w_{\max}$, становятся подобными. Полная же автомодельность течения, проявляющаяся и в профилях осредненной скорости, и во вторых моментах пульсации скорости $\bar{w}_x' \bar{w}_y'$ оконча-

* По опытам В. И. Миткалинного.

тельно устанавливается лишь в более дальних сечениях струи (при $x > 50d_0$). Наблюдается также некоторая зависимость профиля нормированной скорости от числа Рейнольдса $Re_{d_0} = \frac{\bar{w}_0 d_0}{\nu}$, которая ослабевает с ростом Re_{d_0} и при $Re_{d_0} \gtrsim 10^5$ уже перестает быть заметной.

Для описания универсальных (автомоделных) профилей скорости в основном участке осесимметричной

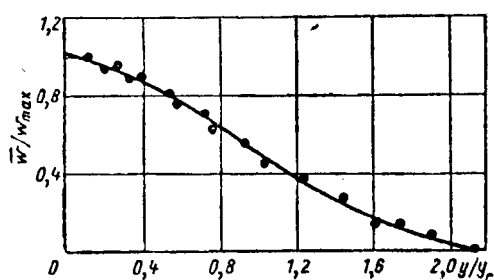


Рис. 91. Распределение безразмерной (нормированной) скорости в поперечных сечениях основного участка свободной струи

или плоской струи воздуха, вытекающего в пространство, заполненное воздухом той же температуры, могут быть подобраны приближенные аналитические зависимости. Например, можно пользоваться функцией $f(\eta)$, которую теоретически впервые получил Шлихтинг:

$$\frac{\bar{w}_x}{w_{\max}} = f(\eta) = (1 - \eta^{3/2})^2. \quad (\text{XIII-7})$$

Здесь $\eta = y/r$ — расстояние от точки со скоростью $\bar{w}_x$ до оси струи, выраженное (нормированное) в долях от радиуса (или полутолщины) данного сечения струи.

Относительное (нормированное) расстояние до точки в которой скорость вдвое меньше, чем на оси струи ($\bar{w}_c = \bar{w}_x(L) = 0,5w_{\max}$), легко определяется из предыдущей зависимости

$$\eta_c = \frac{L(x)}{r} = \frac{y_c}{r} = 0,441. \quad (\text{XIII-8})$$

Профили скорости, рассчитанные по формуле (XIII-7), хорошо согласуются с экспериментальными профилями скорости (рис. 91).

2. Расширение границ и изменение осевой скорости

При рассмотрении вопроса о расширении границ турбулентной струи предполагают, что скорость нарастания толщины пограничного слоя пропорциональна градиенту продольной (главной) скорости потока

$$\frac{dr}{dt} \sim w'_y,$$

которая в свою очередь пропорциональна поперечному градиенту продольной (главной) скорости потока

$$w'_y \sim l \frac{d\bar{w}_x}{dy}.$$

Здесь l — путь турбулентного смешения, а $w'_y = \sqrt{\overline{w_y'^2}}$, т. е. равна среднеквадратичному значению пульсационной составляющей поперечной скорости.

Подобие профилей скорости в различных сечениях струйного пограничного слоя позволяет принять поперечный градиент продольной скорости пропорциональным разности скоростей на границах:

$$\frac{d\bar{w}_x}{dy} \sim \frac{\bar{w}_{x_1} - \bar{w}_{x_2}}{r}.$$

Вследствие этого имеем

$$w'_y \sim \frac{l}{r} (\bar{w}_{x_1} - \bar{w}_{x_2}).$$

Из подобия профилей следует также, что отношение характерных линейных размеров есть величина постоянная:

$$\frac{l}{r} = \text{const},$$

поэтому пульсационная составляющая поперечной скорости пропорциональна разности скоростей на границах слоя:

$$w'_y \sim (\bar{w}_{x_1} - \bar{w}_{x_2}).$$

Так как по предположению

$$w'_y \sim \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dx} \bar{w}_x,$$

то закон нарастания толщины струйного пограничного

слоя по длине струи можно представить в следующем виде:

$$\frac{dr}{dx} \sim \frac{|w'_y|}{\bar{w}_x} \sim \frac{|\bar{w}_{x_1} - \bar{w}_{x_2}|}{|\bar{w}_x|}. \quad (\text{XIII-9})$$

Величина $\epsilon_u = \frac{|w'_y|}{|\bar{w}_x|}$, названная выше уровнем турбулентности потока, всегда положительна, так как вычисляется по средним абсолютным значениям поперечной пульсационной скорости (w'_y) и продольной скорости потока ($\bar{w}_x$), в связи с чем во всех случаях $\frac{dr}{dx} > 0$.

В качестве поступательной скорости в знаменателе предыдущего выражения, судя по опытным данным, целесообразно подставить значение средней массовой скорости

$$\bar{w}_x = \frac{\int_1^2 \rho \bar{w}_x dy}{\int_1^2 \rho dy}, \quad (\text{XIII-10})$$

как для осесимметричной, так и плоской струи. Здесь усреднение ведется по толщине, а не по площади поперечного сечения струи, так как законы нарастания толщины плоской и осесимметричной струй приблизительно одинаковы.

В случае несжимаемой жидкости средняя массовая скорость (XIII-10) близка к средней арифметической (для профиля скорости (XIII-7) из ее абсолютных величин на границах струйного пограничного слоя:

$$\bar{w}_x \frac{\int_1^2 \bar{w}_x dy}{r} \approx 0,5 [|\bar{w}_{x_1}| + |\bar{w}_{x_2}|]. \quad (\text{XIII-11})$$

В этом случае закон увеличения толщины струйного пограничного слоя принимает следующий вид:

$$\frac{dr}{dx} \sim \frac{|\bar{w}_{x_1} - \bar{w}_{x_2}|}{|\bar{w}_{x_1}| + |\bar{w}_{x_2}|}, \quad (\text{XIII-12})$$

- Из последнего выражения следует, что в струйном пограничном слое, возникающем на границе двух бес-
предельных струй ($\bar{w}_{x_1} = \text{const}$, $\bar{w}_{x_2} = \text{const}$), толщина
пропорциональна удалению от начала струи:

$$\frac{dr}{dx} = \text{const} \text{ или } r = \text{const } x,$$

где

$$\text{const} = c \frac{|\bar{w}_{x_1} - \bar{w}_{x_2}|}{|\bar{w}_{x_1}| + |\bar{w}_{x_2}|}.$$

Значение коэффициента c должно быть определено экспериментально. Например, по результатам исследования струи, распространяющейся в неподвижной среде ($w_{x2} = 0$), имеет место равенство

$$r = cx. \quad (\text{XIII-13})$$

На основании опытных данных можно принимать значения коэффициента c для начального участка $c = 0,27$ и для основного участка $c = 0,22$.

Закон изменения скорости по оси струи $w_{\max}(x)$ может быть найден с помощью уравнения сохранения количества движения. Для изобарной струи это уравнение имеет следующий вид:

$$\int_0^M \bar{w}_x dM = \int_0^{M_0} \bar{w}_0 dM, \quad (\text{XIII-14})$$

если (XIII-1) и (XIII-2) представить несколько иначе.

Здесь M — масса газа, протекающая в 1 с через произвольное поперечное сечение струи;

M_0 — то же, в начальном сечении струи;

dM — масса элементарной струйки в произвольном сечении за 1 с; $dM = \rho \bar{w}_x dF$.

Решая уравнение (XIII-14) для затопленной осесимметричной струи с начальным равномерным профилем скорости, когда коэффициент поля

$$n = \int_0^1 \frac{\rho_0 \bar{w}_0^2 dF_0}{\rho_{0\max} \bar{w}_{0\max}^2 F_0} = 1,$$

при $c = 0,22$ и расположении полюса основного участка

в начальном сечении струи Г. Н. Абрамович нашел, что для основного участка струи

$$\frac{\bar{w}_{\max}}{\bar{w}_0} = \frac{12,4}{x/r_0}, \quad (\text{XIII-15})$$

где $\bar{w}_{\max}$ — скорость на оси струи на расстоянии x от среза сопла;
 $\bar{w}_0$ — скорость в начальном сечении;
 r_0 — радиус начального сечения струи (рис. 92).

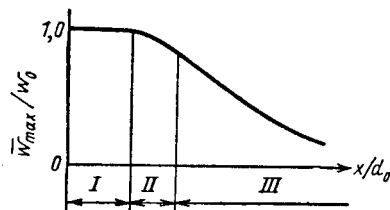


Рис. 92. Изменение осевой скорости вдоль свободной турбулентной струи:

I — начальный участок; II — переходный участок; III — основной участок

Для струи с неравномерным профилем скорости в начальном сечении из уравнения постоянства количества движения, записанного в виде

$$2\pi\rho \int_0^r \bar{w}_x^2 y dy = 2\pi\rho \int_0^{r_0} \bar{w}_0^2 r dr = \text{const} \quad (\text{XIII-16})$$

с использованием формулы для начального профиля скорости

$$\frac{\bar{w}_0}{\bar{w}_{0\max}} = \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{1/n}, \quad (\text{XIII-17})$$

где $\bar{w}_0$ — скорость в начальном сечении на расстоянии r от центра, окончательно получим уравнения для определения осевой скорости $\bar{w}_{\max}$ в основном участке струи:

$$\frac{\bar{w}_{\max}}{\bar{w}_{0\max}} = \frac{0,96}{\frac{1}{k} \left(\frac{ax}{r_0} + 0,29 \right)}. \quad (\text{XIII-18})$$

Здесь k — коэффициент неравномерности профиля скорости в начальном сечении; $k = \sqrt{2 \int_0^1 (1 - \bar{r}_0)^{2/n} \bar{r}_0 d\bar{r}_0}$;

r_0 — радиус выходного сечения сопла; $\bar{r}_0 = \frac{r}{r_0}$; a — опыт-

ная константа, названная коэффициентом турбулентной структуры струи; $\bar{w}_{0\max}$ — скорость в центре начального сечения струи.

Для равномерного профиля скорости в начальном сечении струи ($\bar{w}_{0\text{ср}} = \bar{w}_{0\max}$) показатель степени $\frac{2}{n} = 0$, $k=1$, и формула (XIII-18) преобразуется в известную формулу Г. Н. Абрамовича:

$$\frac{\bar{w}_{\max}}{\bar{w}_{0\max}} = \frac{0,96}{\frac{ax}{r_0} + 0,29}, \quad (\text{XIII-19})$$

где в (XIII-18) и (XIII-19) x — расстояние вдоль оси от среза сопла.

В пределах начального участка струи скорость на оси струи постоянна и $\frac{\bar{w}_{\max}}{\bar{w}_{0\max}} = 1$.

Относительная длина начального участка струи.

$$\frac{ax}{r_0} = 0,96k - 0,29^*.$$

Согласно опытным данным, коэффициент турбулентной структуры a для струи, когда $\bar{w}_{0\max} = \bar{w}_{0\text{ср}}$, $a = 0,060$ а для струн, когда $\bar{w}_{0\text{ср}} = 0,82 \bar{w}_{0\max}$, $a = 0,053$ (здесь $\bar{w}_{0\text{ср}}$ — средняя массовая скорость истечения из сопла).

Таким образом, затухание скорости вдоль оси основного участка струн зависит, кроме того, от начальной турбулентной структуры струи и от ее начального количества движения.

3. Соударение двух струй в неограниченном постоянстве

При истечении в неограниченное пространство двух соударяющихся струй вследствие изменения угла встречи удается изменить форму, затухание скорости вниз по потоку и направление движения образовавшейся при соударении слившейся струи.

Осуществляя отопление посредством двух топливовоздушных, направленных под углом друг к другу факелов, возможно по сравнению с отоплением при помо-

* $ax_0/r_0 = 0,29$ — безразмерное расстояние от начала струи до полюса ее основного участка.

щи одной горелки изменять форму и длину как аэродинамического, так и факела горения.

Аналитическое решение задачи о соударении струй возможно только для двумерного пространства. Это решение не может быть распространено на задачи о соударении струй, вытекающих из сопел, имеющих конечные размеры. При решении задач о соударении струй круглого, прямоугольного или сложной формы начального сечения приходится прибегать к эксперименту.

Рассмотрим наиболее простой случай соударения двух осесимметричных струй, вытекающих из сопел одинакового диаметра ($d_{0_1} = d_{0_2} = 24,1$ мм; $Re_{d_1} = Re_{d_2} = 60 \cdot 10^3$), начальный профиль усредненных скоростей

которых характеризовался отношением $\frac{\bar{w}_{0_{\text{ср}}}}{\bar{w}_{0_{\text{мах}}}} = 0,84$,

где $\bar{w}_{0_{\text{ср}}}$ и $\bar{w}_{0_{\text{мах}}}$ — усредненная во времени средняя и максимальная скорости в начальном сечении струи.

Струя, образовавшаяся в результате соударения двух осесимметричных струй (рис. 93), может быть

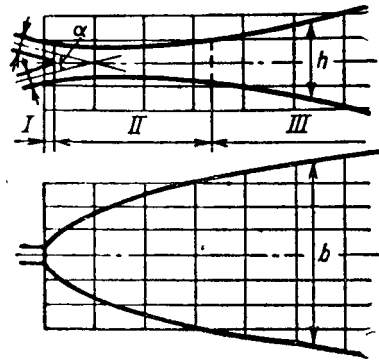


Рис. 93. Изменение формы слившейся струи, полученной при соударении двух круглых струй (I—III то же, что на рис. 92)

представлена состоящей из трех участков; начального, переходного и основного. Начальный

участок начинается от среза сопел и кончается в месте соприкосновения внешних границ соударяющихся струй. Длина этого участка определяется геометрическим построением и зависит от расстояния между соплами и угла встречи соударяющихся струй. Переходной участок, расположенный между начальным и основным участками

начинается от места соприкосновения внешних границ соударяющихся струй и кончается на таком расстоянии, начиная с которого величина нормированной главной деформации

$$\varphi = \frac{b - d_r}{d_0}, \quad (\text{XIII-20})$$

где b — ширина слившейся струи в плоскости, перпендикулярной углу встречи, в плоскости $хоу$;
 d_r — диаметр одной из соударяющихся струй в одинаково удаленном поперечном сечении в случае отсутствия второй струи;
 d_0 — начальный диаметр одной из соударяющихся струй, определяемый уравнением

$$\varphi = \varphi_{\max} \left(1 - e^{-k \frac{x}{d_0}} \right) \quad (\text{XIII-21})$$

принимается практически постоянной.

Для случая соударения двух осесимметричных струй $d_{01} = d_{02}$ и углов встречи $\alpha = 10, 20, 30$ и 40° определены значения $\varphi_{\max}$ и k , равные соответственно:

$\varphi_{\max}$	0,62	2,80	5,70	9,10
k	0,20	0,25	0,296	0,244

Обработка опытных данных показала, что величина нормированной главной деформации в плоскости, перпендикулярной плоскости угла встречи, т. е. в плоскости $хоу$

$$\varphi_{\max} = k_1 \alpha^n,$$

и опытные константы n и k_1 равны соответственно 2,0 и 0,0062.

Подставляя значение $\varphi_{\max}$ в уравнение (XIII-21), получим

$$\varphi = 0,006\alpha^2 \left(1 - e^{-k \frac{x}{d_0}} \right). \quad (\text{XIII-22})$$

В конце переходного участка ширина слившейся струи будет равна

$$b = d_r + k_1 \alpha^n d_0. \quad (\text{XIII-23})$$

Основной участок слившейся струи, следующий за переходным, представляет собой свободную одиночную струю. Он начинается, таким образом, с такого поперечного сечения, в котором перестают действовать силы, вызывающие деформацию (сплющивание) слившейся струи, т. е. с поперечного сечения, начиная от которого вниз по течению принимается

$$\varphi = \varphi_{\max} \approx \text{const.}$$

Опыты показали, что угол раскрытия внешней границы основного участка слившейся струи в этой же плоскости составляет $19-20^\circ$ при угле расширения внешней границы каждой из соударяющихся струй $18,2^\circ$.

О толщине слившейся струи можно судить и по угловому коэффициенту луча $\overline{w}_x = 0,5 \overline{w}_{\max}$:

$$\xi_{1/2} = \frac{y_c}{x}, \quad (\text{XIII-24})$$

где y_c — расстояние от оси, при котором $\overline{w}_x = 0,5 \overline{w}_{\max}$.

Такое определение интенсивности нарастания толщины слившейся струи (как и любой другой струи) точнее, чем определение толщины по внешней границе, на которой $\bar{w}_x=0$. В рассматриваемом примере для каждой из соударяющихся струй $d_{01}=d_{02}=24,1$ мм

$$\xi_{1/2} = 0,087,$$

т. е. радиус окружности, на которой скорость равнялась половине осевой, был примерно равен конусу с полууглом при вершине 5° , причем вершина этого конуса лежала в центре среза сопла.

4. Струя, вытекающая параллельно и под углом к гладкой стенке

Струя, имеющая конечные размеры начального сечения и направленная вдоль твердой стенки, растекается по плоскости и обладает большей дальностью по сравнению со свободной затопленной струей. Увеличение дальности такой полуограниченной струи объясняется тем, что вследствие уменьшения поверхности соприкосновения струи с окружающей газообразной средой уменьшается так называемая сила трения «воздух о воздух», вызванная обменом количествами движения (импульсами), что приводит, в конечном счете, к увеличению дальности струи по сравнению со свободным истечением.

Это явление, описанное впервые В. Е. Грум-Гржимайло, называется настильностью.

Как и в случае свободного истечения, на процесс перемешивания полуограниченной струи с окружающей средой влияет и форма выходного отверстия сопла. Подобно свободной затопленной струе, вытекающей из сопел некруглой формы, в полуограниченной струе форма поперечного сечения ее непрерывно изменяется.

Особенностью такой деформации поперечного сечения полуограниченной струи является, с одной стороны, стремление струи принять круглую форму, т. е. такую форму, при которой отношение периметра к поперечному сечению, а следовательно, и тормозящее действие неподвижной среды становятся минимальными, а с другой стороны, соприкосновение струи с плоской стенкой вызывает растекание струи, приводящее к тому, что поперечное сечение струи вытягивается в направлении, перпендикулярном основному направлению течения.

Отношение размеров поперечного сечения струи в направлении главных осей, т. е. b/h (где b и h — соответ-

ственно ширина струи у плоскости и толщина ее над плоскостью), вниз по течению увеличивается.

Закономерности подобного рода течения удастся установить только экспериментальным путем.

Аналитические исследования полуограниченных струй рассматривают течения, образованные у стенки или плоской струей, или струей, вытекающей из кольцевой щели вдоль цилиндрической стенки.

Экспериментальное изучение подобного рода течений показало следующее: 1) профиль скорости в пристеночном пограничном слое настильной струи «полнее», чем профиль усредненной скорости в пристеночном пограничном слое, образующемся при обтекании пластины безграничным потенциальным потоком; 2) принимая распределение усредненной скорости по толщине пристеночного пограничного слоя, подчиняющимся закону

$$\frac{\bar{w}_x}{\bar{w}_{\max}} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/n}, \quad (\text{XIII-25})$$

где $\bar{w}_{\max}$ — скорость на внешней границе пристеночного пограничного слоя, было определено, что показатель степени в последней формуле в случае настильной струи равен $\frac{1}{n} = \frac{1}{10} \div \frac{1}{14}$, а не $\frac{1}{7}$, как это принимается в случае обтекания безграничным потоком (закон сопротивления Блазиуса).

Профили скоростей в поперечных сечениях основного участка таких струй можно принимать практически подобными.

Распределение скорости, характеризуемое (XIII-25), имеет место в пределах $0,15 < \frac{y}{\delta} < 1,0$.

При $\frac{y}{\delta} \gtrsim 0,15$ распределение скорости в пристеночном пограничном слое подчиняется уже другой зависимости.

Об изменении формы осесимметричной струи, вытекающей параллельно плоской гладкой стенке, дает представление рис. 94. На уровне оси струи (на расстоянии от плоскости до центра начального сечения $y_{\bar{w}_{0\max}}$) в горизонтальной плоскости (рис. 94, б) внешняя граница оставалась практически прямолинейной на участке, длина которого составляла около 11 d_0 от начального

сечения. При этом угол раскрытия внешней границы струи (рис. 94, а) на этом участке составил 15° , тогда как для свободной струи он был равен 20° . Угол расте-

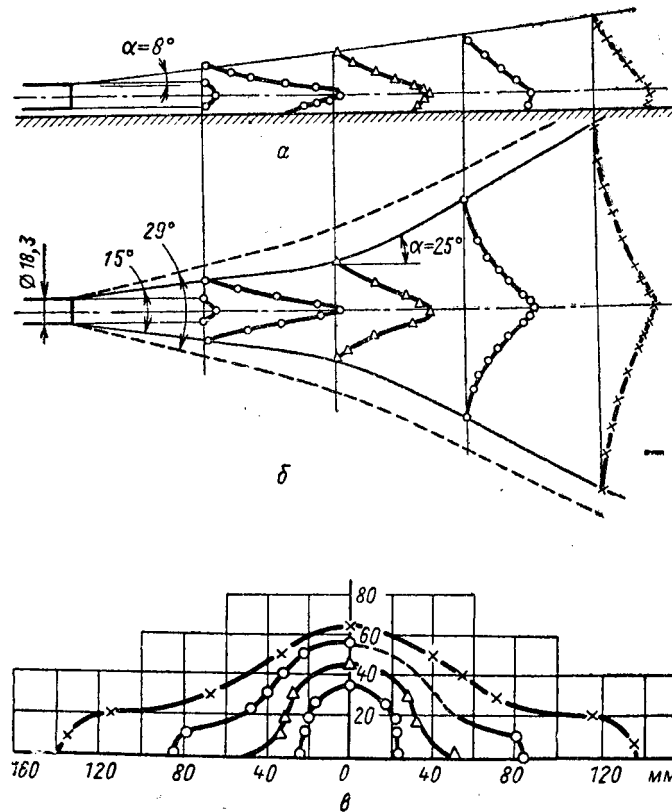


Рис. 94. Изменение формы «настильной струи»

кания струн непосредственно у плоскости составил $\alpha_{пл} \approx 30^\circ$. После поперечного сечения, отстоящего от начального на расстоянии $\frac{x}{d_0} = 11,0$, внешняя граница полуограниченной струи искривлялась. Форма поперечного сечения начальной струи показана на рис. 94, в.

Профили нормированных скоростей в поперечных сечениях полуограниченной струи, распространяющейся вдоль гладкой стенки в горизонтальной плоскости, не

подобны профилю нормированной скорости свободной затопленной струи (рис. 95), так как при $y/y_c \gg 1,5$ опытные точки настильной струи располагались выше, чем свободной. Во внешней области струи (в вертикальной плоскости) профили нормированных скоростей в поперечных сечениях струи, распространяющейся вдоль

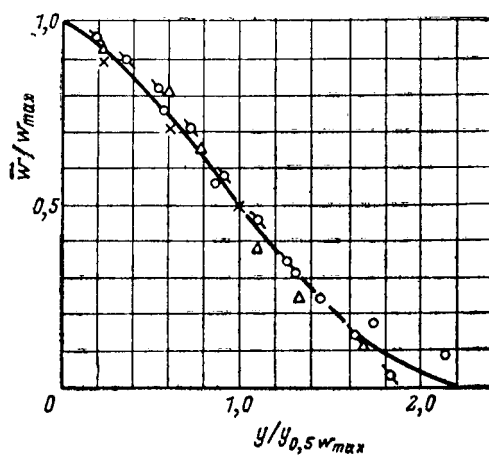


Рис. 95. Профили безразмерных (нормированных) скоростей в поперечных сечениях «настильной струи» (значения точек см. на рис. 94)

гладкой плоскости, совпадают с профилем нормированной скорости свободной затопленной струи.

Если струя направлена на стенку под углом α (рис. 96), то при набегаии на стенку наблюдается растекание ее и тем больше, чем больше угол атаки α . При этом происходит непрерывная деформация полей скоростей в поперечных сечениях струи, так что максимум скоростей приближается к стенке. Угол растекания струи на поверхности гладкой стенки β связан с углом атаки α следующей зависимостью:

$$\beta = 30 + 3\alpha, \quad (\text{XIII-26})$$

полученной экспериментально и которую следует рассматривать как приближенную. Здесь угол $30^\circ = \alpha_{\text{пл}}$.

Давление струи на стенку зависит от угла атаки α . Удельное давление p_α , оказываемое струей на стенку:

$$p_\alpha = \frac{m\bar{w}}{F} \sin^2 \alpha = \rho \bar{w}^2 \sin^2 \alpha H/m^2, \quad (\text{XIII-27})$$

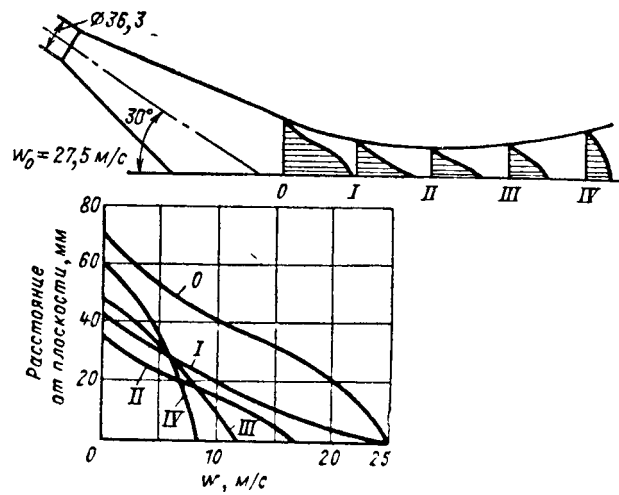


Рис. 96. Профили скорости в поперечных сечениях струи, направленной на стенку под углом α (I—IV — сечения)

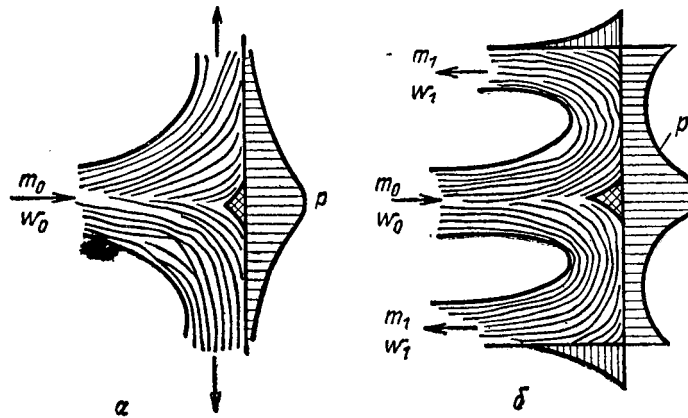


Рис. 97. Схемы струи, ударяющейся о стенку под углом $\alpha = 90^\circ$ в тупик

где $\overline{F}$ — поперечное сечение струи;
 $m\overline{w}$ — количество движения до растекания по стенке;
 ρ — массовая плотность.

По опытным данным В. И. Миткалинного, это удельное давление для $\alpha = 10\text{—}40^\circ$ может быть найдено по формуле

$$p_{\alpha} = 0,111 \rho \bar{w}_{\max}^2 (\sin \alpha)^{1,86} \text{ Н/м}^2, \quad (\text{XIII-28})$$

где $\bar{w}_{\max}$ — скорость на оси струи.

Постоянный коэффициент 0,111 в последней формуле получен в предположении, что скорость в поперечном сечении струи распределяется по закону треугольника.

Вследствие расплющивания струи, атакующей стенку под углом α , и увеличения относительной поверхности контакта с окружающей средой дальнобойность

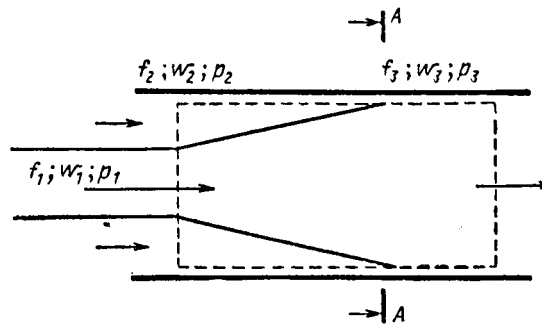


Рис. 98. Схема газового эжектора

струи после места удара уменьшается с возрастанием угла атаки.

Для струи, атакующей струю под углом $\alpha = 90^\circ$ ($\sin \alpha = 1$):

$$p_{\alpha} = \frac{m \bar{w}}{F} = \rho \bar{w}^2 = 2\rho \frac{\bar{w}^2}{2} \text{ Н/м}^2, \quad (\text{XIII-29})$$

т. е. удельное давление равно удвоенному динамическому давлению (рис. 97, а).

На основании теоремы Эйлера [см. формулу (IX-24)] можно показать, что при ударе струи о стенку (рис. 97, б) удельное давление на стенку, расположенную перпендикулярно оси струи, теоретически (без учета потерь на поворот потока на 180°) возрастает до величины

$$p_{\alpha} = 4\rho \frac{\bar{w}^2}{2} \text{ Н/м}^2. \quad (\text{XIII-30})$$

Представим себе струю, вытекающую в открытую с обеих концов камеру цилиндрического или квадратного сечения (рис. 98). Схематизируя явление, можно счи-

тать, что до соприкосновения со стенками камеры струя течет как свободная и вовлекает в движение окружающую атмосферу.

На участке струйного течения (до сечения $A-A$) происходит обычная для свободной струи перестройка профилей скоростей, обусловленная утолщением вниз по потоку струйного пограничного слоя.

Вовлеченная в движение окружающая среда движется в том же направлении, что и сама струя, и только в области касания внешней границей струи стенок камеры (около сечения $A-A$) образуются локальные циркуляционные зоны.

Это типичная схема газового эжектора, в котором струя является высоконапорным газом, а вовлекаемая в движение атмосфера — низконапорным газом. Назначение самой камеры заключается в том, чтобы за счет поперечного переноса выровнялись по сечению камеры все параметры потока (полей скоростей, температуры и концентрации). Этот процесс происходит главным образом на участке от переходного сечения $A-A$ до конца камеры. Поэтому и длину камеры выбирают такой, чтобы обеспечить необходимое перемешивание.

Стенки камеры препятствуют вовлечению в движение окружающей атмосферы, и поэтому кинетическая энергия струи не может быть полностью израсходована на это втягивание атмосферы и частично превращается в потенциальную, т. е. в данном случае частично ограниченная струя способна совершать работу противодавления. В начале камеры создается пониженное по сравнению с атмосферой давление, за счет которого и обеспечивается втягивание атмосферы.

Уравнение, характеризующее работу такого струйного притока (газового эжектора), можно получить, используя теорему Эйлера. Проводя контрольную поверхность так, как показано на рис. 98, можно написать

$$\rho_3 F_3 \bar{w}_3^2 - \rho_1 F_1 \bar{w}_1^2 - \rho_2 F_2 \bar{w}_2^2 = F_3 (p_2 - p_3),$$

Принимая во внимание, что

$$\rho_3 F_3 \bar{w}_3 = m_1 + m_2; \quad \rho_1 F_1 \bar{w}_1 = m_1; \quad \rho_2 F_2 \bar{w}_2 = m_2 \text{ и } F_3 = \frac{V_1 + V_2}{\bar{w}_3},$$

после подстановки в предыдущее уравнение получим

$$(m_1 + m_2) \bar{w}_3^2 - m_1 \bar{w}_1 \bar{w}_3 - m_2 \bar{w}_2 \bar{w}_3 = (V_1 + V_2) (p_2 - p_3).$$

Прибавляя в обеих частях этого равенства по величине

$$m_1 \frac{\bar{w}_1^2}{2} + m_2 \frac{\bar{w}_2^2}{2},$$

и принимая во внимание, что

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_1} \text{ и } V_2 = \frac{m_2}{\rho_2},$$

после преобразования окончательно получим

$$\begin{aligned} m_1 \frac{\bar{w}_1^2}{2} + m_2 \frac{\bar{w}_2^2}{2} = (m_1 + m_2) \frac{\bar{w}_3^2}{2} + \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) (p_3 - p_2) + \\ + m_1 \frac{(\bar{w}_1 - \bar{w}_3)^2}{2} + m_2 \frac{(\bar{w}_2 - \bar{w}_3)^2}{2}. \end{aligned} \quad (\text{XIII-31})$$

Последнее равенство представляет собой энергетический баланс газового эжектора. Левая часть уравнения есть сумма кинетической энергии высоконапорной (эжектирующей) и низконапорной (эжектируемой) сред. В правой части уравнения суммируется кинетическая энергия смеси $(m_1 + m_2) \frac{\bar{w}_3^2}{2}$, работа противодавления $\left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) (p_3 - p_2)$ и потеря энергии на удар при турбулентном переносе (последние два члена правой части).

Основными показателями, характеризующими работу газового эжектора, являются коэффициент эжекции $K_{\text{эж}} = \frac{m_1 + m_2}{m_1}$ и $K_F = \frac{F_1}{F_1 + F_2} = \frac{F_1}{F_3}$, показывающий высоконапорным или низконапорным является эжектор.

Если к выходному сечению F_3 присоединяют диффузор с углом раскрытия, равным $6-7^\circ$, и площадью поперечного сечения в устье диффузора F_4 , то добавляется третий коэффициент, характеризующий степень расширения диффузора $K_d = F_4/F_3$.

Уравнение энергетического баланса для эжектора, снабженного диффузором, имеет следующий вид:

$$m_1 \frac{\bar{w}_1^2}{2} + m_2 \frac{\bar{w}_2^2}{2} = (m_1 + m_2) \frac{\bar{w}_4^2}{2} + \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right) (p_4 - p_2) +$$

$$\begin{aligned}
& + m_1 \frac{(\bar{w}_1 - \bar{w}_3)^2}{2} + m_2 \frac{(\bar{w}_2 - \bar{w}_3)^2}{2} + \\
& + (m_1 + m_2) \frac{\bar{w}_3^2 - \bar{w}_4^2}{2} (1 - \eta), \quad (\text{XIII-32})
\end{aligned}$$

где η — к. п. д. диффузора, обычно равный $0,8 \div 0,85$.

Расчет газового эжектора состоит в определении $\bar{w}_1$, $(p_3 - p_2)$ или $(p_4 - p_2)$, все прочие величины задаются или их выбирают. Геометрические размеры эжектора выбирают так, чтобы потери были минимальными.

Коэффициент полезного действия эжектора невелик и зависит от коэффициентов $K_{эж}$, K_F и K_d .

Глава XIV

ОГРАНИЧЕННЫЕ ТУРБУЛЕНТНЫЕ СТРУЙНЫЕ ТЕЧЕНИЯ И ДВИЖЕНИЯ ГАЗОВ В РАБОЧИХ КАМЕРАХ ПЕЧЕЙ

1. Общая характеристика ограниченных струй

Под ограниченным струйным течением (ограниченной струей) понимают такое течение, которое возможно в пространстве, ограниченном твердыми поверхностями таким образом, что внутри этого пространства возникают области обратных токов, а в направлении течения струи (вдоль прямого потока) и поперек его наблюдается градиент статического давления.

При этом подразумевается такое стеснение струи ограничивающими твердыми поверхностями, когда вдоль течения прямого потока меняются условия, влияющие на втягивание жидкости из окружающего обратного потока. Закон нарастания толщины такой ограниченной струи по ее длине изменяется. Профили усредненной продольной скорости $\bar{w}_x$ в этом случае изменяются от сечения к сечению и уже не описываются формулами (XIII-5) и (XIII-7).

Гипотезы об автомодельности, подобные тем, которые были сформулированы для неограниченного турбулентного струйного течения, в этом случае теряют смысл, так как статистические характеристики гидродинамических полей, как и полей температуры и концент-

раций в различных сечениях ограниченной струи, не подобны между собой.

Закон сохранения количества движения

$$\int_0^{\infty} \bar{w}_x^2 r dr = J_0 = \text{const}, \quad (\text{XIV-1})$$

т. е. равенство потоков импульса, протекающих через любое поперечное сечение прямого потока (ограниченной струи), становится несправедливым, так как для ограниченной струи поток импульса вдоль по течению будет уменьшаться.

В случае ограниченной струи в каждом поперечном сечении $x = \text{const}$ камеры в предположении малости силы, обусловленной трением о стенки, остается постоянным полный импульс:

$$J + \bar{\Delta p}_{\text{ст}} F_k = J_0, \quad (\text{XIV-2})$$

где J_0 — поток импульса в сечении ограниченной струи;

$\bar{\Delta p}_{\text{ст}} F_k$ — перепад силы давления на участке между сечениями $x=0$ и $x=\text{const}$ камеры;

$\Delta p_{\text{ст}}$ — разность средних статических давлений между сечениями $x=0$ и $x=\text{const}$ камеры;

F_k — площадь поперечного сечения камеры.

Анализ результатов исследования струи, распространяющейся во встречном неограниченном потоке, показывает, что в настоящее время не удастся еще создать такой аналитический метод расчета, который позволил бы получить количественные характеристики течения. В данном случае можно говорить только об экспериментальном изучении вопроса, накоплении опытных данных, обобщении опытного материала и систематизации полученных результатов.

В большей степени указанный порядок изучения струйного течения относится к ограниченной струе, представляющей собой более сложную задачу, чем струя во встречном неограниченном потоке.

Ниже речь пойдет о струях динамического происхождения; течение струй термического происхождения, возникающих благодаря действию архимедовых сил, мы не рассматриваем.

При истечении осесимметричных или плоских турбулентных струй в ограниченное пространство (камеру

круглого, квадратного или прямоугольного поперечного сечения), имеющее глухую торцовую стенку со стороны подачи газа и отверстие для выхода газа в противоположной торцовой стенке, и некотором значении нормированной ширины камеры H_k/d_0 или $B_k/2b_0$ (где H_k и B_k — размеры, характеризующие ширину камеры, d_0 — начальный диаметр осесимметричной струи и $2b_0$ — толщина начального сечения плоской струи) течение перестает подчиняться закономерностям, характеризующим свободные турбулентные струи, так как статистические характеристики гидродинамических полей в различных сечениях ограниченной струи не остаются подобными между собой. При симметричном расположении круглой турбулентной струи в камере этот факт наблюдается при $\frac{H_k}{d_0} \gtrsim 10$, а для плоской турбулентной струи — при $\frac{B_k}{2b_0} \gtrsim 16$.

В менее стесненной камере, т. е. при $\frac{H_k}{d_0} \lesssim 10$, на участке длиной $x_{\text{стр}} \leq 30 d_0$ для круглой турбулентной струи и при $\frac{B_k}{2b_0} \lesssim 16$ на участке длиной $x_{\text{стр}} \leq 80 b_0$ для плоской турбулентной струи и симметричном расположении струи в камере течение можно считать автомодельным ($x_{\text{стр}}$ — участок струйного течения в камере).

Таким образом, можно представить два случая струйного течения в ограниченном твердыми поверхностями (камере):

- 1) течение ограниченной струи, в поперечных сечениях которой статистические характеристики гидродинамических полей не остаются подобными;
- 2) течение струи в ограниченном пространстве, когда нормированные осредненные характеристики гидродинамических полей во всех сечениях такой струи остаются одинаковыми.

В первом случае имеет место распространение собственно ограниченной турбулентной струи, для описания течения которой нельзя использовать закономерности свободного течения; во втором случае наблюдается распространение турбулентной струи в ограниченном пространстве (но не ограниченной струи), течение которой подчиняется закономерностям свободного турбулентного течения. Если во втором случае струя будет,

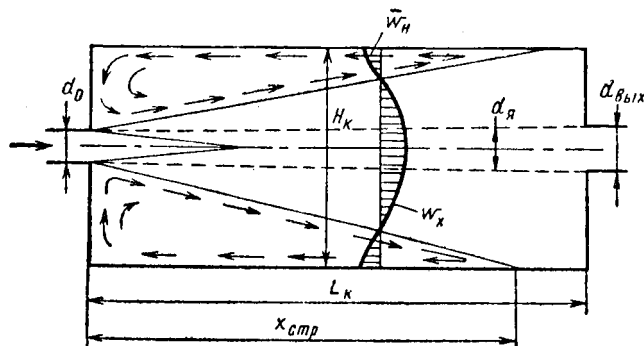


Рис. 99. Схема распространения ограниченной турбулентной струи: L_k — длина камеры; H_k — ширина камеры; w_H — скорость обратного потока; d_0 , $d_я$ и $d_{вых}$ — диаметры начального сечения, ядра постоянной массы и выходного сечения; $w_x = \bar{w}_x$

например, иметь направление непосредственно у одной из стенок, параллельно стенке камеры, то такая струя подчиняется закономерностям распространения полуограниченной (настильной) струи и не отличается от полуограниченной струи, текущей вдоль твердой стенки.

Ограниченная турбулентная струя может располагаться в камере симметрично, асимметрично, быть направленной под углом к одной из стенок камеры — во всех случаях течение в такой струе не будет автомодельным, так как в условиях автомодельности

$$L(x) \sim x^m; U(x) \sim x^{-n}, \quad (\text{XIV-3})$$

где $L(x)$ и $U(x)$ — масштабы длины и скорости, показатели m и n не будут постоянными по длине (напомним, что для свободной осесимметричной турбулентной струи $m=n=1$, для свободной плоской турбулентной струи $m=1$; $n=0,5$).

На участке струйного течения $x_{стр}$ (рис. 99) ограниченная струя имеет общую, «свободную» границу с областью обратных токов. Область, занятая ограниченной струей, заполнена завихренным турбулентным течением и в каждый момент времени имеет четкую, но очень неправильную по форме границу (строго говоря, представляющую собой не поверхность, а очень тонкую зону). Вне струи в отличие от свободного турбулентного течения, когда движение вокруг является потенциальным, т. е. в области обратных токов, движение также турбулентно, завихренно. В область обратного потока

из струи, видимо, проникают только крупномасштабные турбулентные пульсации скорости. В свою очередь из области обратных токов в струю проникают как крупномасштабные турбулентные пульсации скорости, так и линии тока, осуществляющие втекание жидкости извне в область, занятую ограниченной струей. Плотность кинетической энергии пульсационного движения ограниченной струи вдоль по потоку на участке струйного течения ($0 < x < x_{стр}$) будет увеличиваться не только за счет энергии усредненного движения работы пульсаций внешних сил, но и за счет переноса турбулентной энергии от частей жидкости обратного потока. В этом состоит еще одно отличие ограниченного турбулентного течения от свободного.

На участке течения ограниченной струи, характеризуемом неравенством $x > x_{стр}$, происходит диссипация турбулентной энергии под действием вязкости, и уровень турбулентности $\sqrt{\overline{w_x'^2}/\overline{w_x}}$ в ограниченной струе уменьшается.

В большинстве реальных турбулентных течений параметр $\sqrt{\overline{w_x'^2}/\overline{w_x}}$ принимает значения порядка 10^{-2} — 10^{-1} , в свободных турбулентных струях $(2,0 \div 2,5) 10^{-1}$, а в ограниченных турбулентных струях достигает величины порядка $5,0 \cdot 10^{-1}$ [при значении $\sqrt{\overline{w_x'^2}/\overline{w_x}}$ в начальном сечении струи $(1,5 \div 3,0) 10^{-2}$].

Течение ограниченной струи в первом приближении можно рассматривать как распространение струи во встречном потоке, так как поле скорости в поперечном сечении имеет участки, где $\overline{w_x} > 0$ и $\overline{w_x} < 0$. Внутренней границей зоны обратных токов будет поверхность, где $\overline{w_x} = 0$. Эта поверхность является внешней поверхностью струи. Внешняя поверхность зоны обратных токов (циркуляционной зоны) обозначается поверхностью стен камеры. При этом должно соблюдаться условие равенства нулю интегрального расхода жидкости в усредненном турбулентном движении по направлению струи и встречного потока как следствие решения уравнения сохранения расхода в любом поперечном сечении камеры

$$\frac{d}{dx} \left(\int_0^F \rho \overline{w_x} dF \right) = 0, \quad (\text{XIV-4})$$

2. Распределение скорости, расширение и затухание ограниченной струи

При течении ограниченной струи в камере простой формы (например, в камере квадратного поперечного сечения) профили усредненной скорости $\bar{w}_x$ в разных сечениях такой струи, нормированные делением на $\bar{w}_{\max}$ и отнесенные к расстояниям y , измеренным масштабом y_c , таким, что $\bar{w}_x(y_c) = 0,5 \bar{w}_{\max}$, не являются подобными (рис. 100 и 101). На рис. 100 и 101 показаны относительные скорости в различных сечениях камеры.

Отсутствие автомодельного течения подтверждается также профилями избыточной осредненной продольной скорости $\bar{w}_x - \bar{w}_n$, где $\bar{w}_n$ — средняя по сечению скорость обратного потока ($\bar{w}_n < 0$), нормированной делением на $\bar{w}_{\max} - \bar{w}_n$ и отнесенной к тому же расстоянию y/y_c .

Отсутствие автомодельного течения в ограниченной струе приводит к тому, что по длине такой струи средняя скорость по площади (среднемассовая или средняя арифметическая скорость) $\bar{w}_{cp1}$ и средняя скорость по расходу (средняя квадратичная скорость) $\bar{w}_{cp2}$, определенные как

$$\bar{w}_{cp1} = \frac{V}{F} \text{ и } \bar{w}_{cp2} = \frac{J}{m}, \quad (\text{XIV-5})$$

где V , m и J — расход, масса и количество движения в поперечном сечении F , а следовательно, и коэффициент неравномерности поля скорости

$$n = \frac{\bar{w}_{cp2}}{\bar{w}_{cp1}}, \quad (\text{XIV-6})$$

непрерывно изменяются.

Напомним, что для равномерного потока $\bar{w}_{cp1} = \bar{w}_{cp2}$, для неравномерных потоков, вообще говоря, $\bar{w}_{cp1} \neq \bar{w}_{cp2}$, и, например, для свободной осесимметричной турбулентной струи $n = 2,02$.

Интенсификация поперечного переноса количества движения в струе проявляется как увеличение турбулентного трения (касательного напряжения) и сопровождается интенсификацией утолщения зоны смешения (толщины струи).

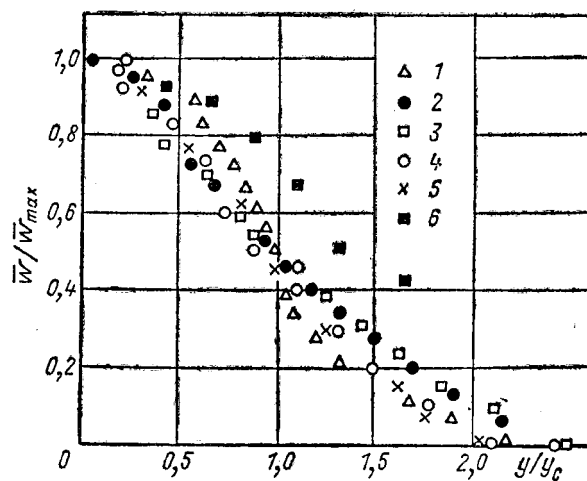


Рис. 100. Профили безразмерных (нормированных) скоростей в поперечных сечениях ограниченной осесимметричной турбулентной струи при $H_k/d_0=6,0$ (1-6 — сечения камеры)

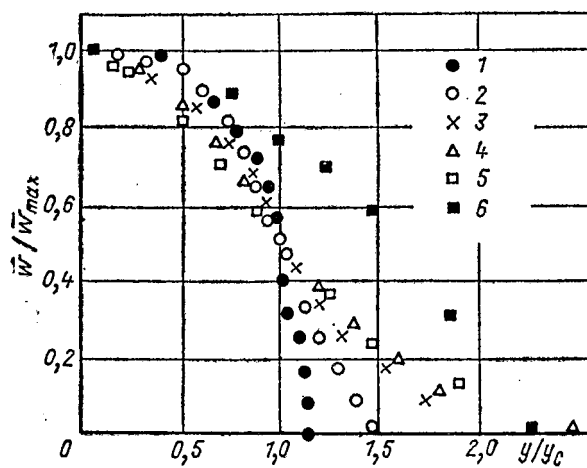


Рис. 101. Профили безразмерных (нормированных) скоростей в поперечных сечениях ограниченной осесимметричной турбулентной струи при $H_k/d_0=3,0$ (1-6 — сечения камеры)

Так как толщина струн пропорциональна расстоянию от начального сечения ее, т. е.

$$b \sim cx, \quad (\text{XIV-7})$$

где c — опытная константа, то из закона изменения скорости вдоль осесимметричной ограниченной струи, записанного в виде

$$\frac{\bar{\omega}_{\max}}{\bar{\omega}_{0\max}} = \frac{0,75}{(x/x_c)^n}, \quad (\text{XIV-8})$$

где x_c — масштаб расстояния x вдоль оси струи, при котором $\bar{\omega}_{\max}(x_c) = 0,75 \bar{\omega}_{0\max}$;
 n — опытная константа, близкая к единице.

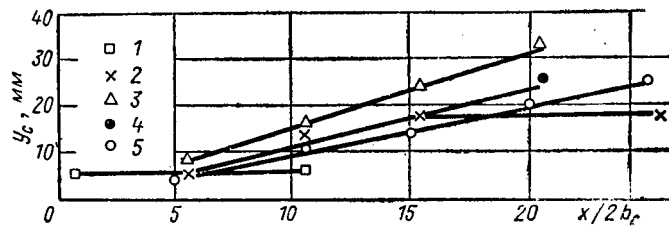


Рис. 102. Изменение масштаба y_c по длине ограниченной плоской струи (1-5 — различные камеры)

Из приведенных формул следует, что чем интенсивнее будет увеличиваться толщина струн, тем быстрее должна затухать скорость вниз по течению.

Об интенсивности утолщения db/dx струн, как это было указано в гл. XIII, можно судить по изменению углового коэффициента

$$\xi_{1/2} = y_c/x \quad (\text{XIV-9})$$

луча $\bar{\omega}_x = 0,5 \bar{\omega}_{\max}$, который эмпирически определяется проще, чем угловой коэффициент c в выражении (XIV-7) для внешней границы струи, который, кроме того, в случае ограниченной струи не остается постоянным вниз по течению.

Оказалось, что зависимость углового коэффициента $\xi_{1/2}$ луча $\bar{\omega}_x = 0,5 \bar{\omega}_{\max}$ от параметра $B_k/2b_0$ (плоская струя), где B_k — ширина камеры и $2b_0$ — толщина начального сечения струи, имеет экстремальный характер (рис. 102).

Наиболее интенсивно расширяется ограниченная плоская струя, когда стесненность камеры характеризуется параметром $\frac{B_k}{2b_0} \approx 10$, в этом случае $\xi_{1/2} = 0,160$.

При уменьшении параметра $B_k/2b_0$ до 2,5 угловой коэффициент уменьшается до $\xi_{1/2} = 0,065$ (приближение к случаю течения в полностью заполненном канале). Увеличение параметра $B_k/2b_0$ до 16 приводит также к уменьшению углового коэффициента, но уже до значения, характерного для свободной плоской струи ($\xi_{1/2} = 0,1$). В последнем случае профили усредненной скорости становятся подобными во всех поперечных сечениях основного участка струи и, как у свободной струи, могут быть аппроксимированы, например, формулой (XIII-7).

Сравнение масштаба x_c , определяющего расстояние от начального сечения струи до точки на оси, в которой $\overline{w}_{\max} = 0,75 \overline{w}_{0\max}$ с коэффициентом $\xi_{1/2}$, показывает, что при увеличении скорости нарастания толщины ограниченной струи дальнобойность ее, определяемая масштабом x_c , уменьшается.

Следовательно, при распространении ограниченной плоской турбулентной струи имеется некоторое значение параметра $B_k/2b_0$, при котором наблюдается наиболее интенсивное затухание скорости вниз по потоку (в рассмотренном случае при $\frac{B_k}{2b_0} \approx 10$). При $\frac{B_k}{2b_0} \lesssim 10$ величины $B_k/2b_0$ и $x_c/2b_0$ ковариантны, при $\frac{B_k}{2b_0} \gtrsim 10$ — контрвариантны. Последний факт иллюстрируется рис. 103.

В камере, параметр $B_k/2b_0$ которой равен приблизительно 16,0, плоская турбулентная струя ведет себя как свободная, дальнобойность ее определяемая масштабом x_c , становится равной дальнобойности свободной струи (точке A на рис. 103 соответствуют координаты $\frac{x_c}{2b_0} = 10,7$ и $\frac{B_k}{2b_0} = 16,0$).

Возвращаясь к вопросу об отсутствии подобия профилей усредненной скорости в поперечных сечениях ограниченной плоской турбулентной струи, отметим, что различие угловых коэффициентов луча $\overline{w}_x = 0,5 \overline{w}_{\max}$ струи согласуется с отсутствием подобия в профилях

нормированной средней скорости $\bar{w}_x/\bar{w}_{\max}$ в различных сечениях каждой струи и в сходственных поперечных сечениях различных струй.

Если ограниченную струю расположить в камере асимметрично таким образом, чтобы она распространялась в ней вдоль одной из стенок настильно, то дальность x_c/d_0 такой ограниченной настильной струи будет больше, чем дальность ограниченной струи

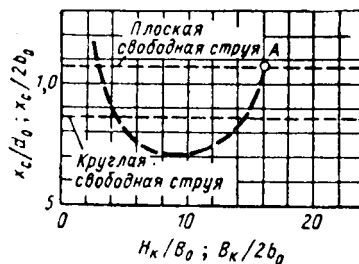


Рис. 103. Зависимость нормированного масштаба x_c/d_0 или $x_c/2b_0$ от параметра H_K/B_0 или $B_K/2b_0$

при симметричном расположении в камере. Дальность ограниченной настильной струи может быть больше дальности свободной струи.

3. Течение в зоне обратных токов

Поток массы по длине ограниченной струи изменяется и в любом поперечном сечении ее может быть определен из уравнения

$$m = \int_0^{F_{\text{гр}}} \rho \bar{w}_{\text{ср}_2} dF, \quad (\text{XIV-10})$$

где $\bar{w}_{\text{ср}_2}$ — средняя по расходу скорость в элементарной площадке dF ;

$F_{\text{гр}}$ — полная площадь поперечного сечения струи.

Отношение потока массы, проходящего через поперечное сечение струи, к начальному потоку массы (первоначальной массе) m_0 , характеризующее кратность эжекции ядра первоначальной массы (или кратность циркуляции), уменьшается с увеличением стесненности камеры, т. е. при уменьшении параметра $B_K/2b_0$ (или H_K/d_0).

Отношение потока массы, проходящего через поперечное сечение струи, к начальному потоку массы на-

зовем коэффициентом расхода K_p , определяемым отношением

$$K_p = \frac{1}{m'} = \frac{m}{m_{\pi}}, \quad (\text{XIV-11})$$

где $m' = \frac{m_{\pi}}{m}$ — номированный начальный поток массы.

Поток массы ограниченной струи увеличивается вниз по течению до определенного сечения, в котором он достигает максимального значения. Это увеличение происходит в результате массообмена между ограниченной струей и обратным потоком (циркуляционными зонами). Вдоль потока от сечения, где K_p достигает максимальной величины, поток массы ограниченной струи уменьшается, приближаясь у выходного сечения камеры к начальному потоку массы m_{π} . Сечение, где $K_p = \max$, условно называют критическим.

Среднюю скорость $\bar{w}_{\text{н.ср}}$ обратного потока можно определить, если для замкнутого контура, ограниченного стенками камеры и двумя перпендикулярными продольной оси камеры сечениями 1 и 2, составить уравнение для потока массы и из него определить поток массы, проходящий через поверхность зоны обратных потоков:

$$\left(\int_b^{R_k} \rho \bar{w}_{\text{н.2}} y dy \right)_2 - \left(\int_b^{R_k} \rho \bar{w}_{\text{н.1}} y dy \right)_1 = \left(\int_0^b \rho \bar{w}_x y dy \right)_2 - \left(\int_0^b \rho \bar{w}_x y dy \right)_1. \quad (\text{XIV-12})$$

Поток массы через поперечное сечение зоны обратных потоков можно выразить уравнением

$$\begin{aligned} \left(\int_b^{R_k} \rho \bar{w}_{\text{н}} y dy \right) &= \left(\int_0^b \rho \bar{w}_x y dy \right) - \left(\int_0^{b_{\pi}} \rho \bar{w}_x y dy \right) = \\ &= \left(\int_{b_{\pi}}^b \rho \bar{w}_x y dy \right), \end{aligned} \quad (\text{XIV-13})$$

где R_k , b и b_{π} — границы соответственно камеры, струи и ядра первоначальной массы.

Уравнения (XIV-12) и (XIV-13) показывают, что в обратном потоке мы выделяем условно две группы жидких частиц (молей):

1) частицы, которые циркулируют в объеме зоны обратных токов и выходят из нее через поверхность, разделяющую обратные и прямой потоки;

2) частицы, которые двигаются в направлении обратного потока без циркуляции и проходят расстояние от сечения 2 до сечения 1 по прямой линии.

Опыты показывают, что в конце циркуляционной зоны (считая по ходу течения ограниченной струи) средняя скорость обратного потока $\omega_{нсп}$ больше в менее стесненной камере (при большем значении параметра $B_k/2b_0$). На одинаковом нормированном расстоянии $x_{стр}/\sqrt{F_k}$ где $x_{стр}$ и F_k — соответственно длина участка струйного течения и площадь поперечного сечения камеры, от начального сечения скорость обратного потока $\omega_{нсп}$ больше в более стесненной камере (при меньшем $B_k/2b_0$).

Нормированная средняя скорость обратного потока $m = \frac{\omega_{нсп}}{\omega_{max}}$ в сходственных поперечных сечениях камеры

на всем участке $x_{стр}$ струйного течения имеет большую абсолютную величину в более стесненной камере.

Возникновение циркуляционного движения связано с образованием в начале камеры пониженного давления с продольным и поперечным градиентом. Под действием продольного градиента статического давления в циркуляционной зоне возникает течение, направленное в сторону передней торцевой стенки камеры, под действием поперечного градиента статического давления струйки тока обратного потока отклоняются к оси ограниченной струи (прямого потока). На границе между прямым и обратным потоками возникают вихри, закручивающиеся в сторону циркуляционной зоны, которые пополняют массу жидкости, эжектируемую из циркуляционной зоны. В возникшей зоне циркуляции внешняя (по отношению к продольной оси камеры) часть представляет зону обратных токов, ограниченную поверхностью нулевых скоростей прямого потока и стенками камеры, устанавливается динамическое равновесие, при котором происходит непрерывный обмен жидкостью между прямым и обратным потоками.

При прочих равных условиях (одинаковой скорости истечения, параметре H_k/d_0 и пр.) величина разрежения

у передней торцевой стенки камеры зависит от частоты срыва вихрей в зоне циркуляции. Уменьшение разрежения и, следовательно, увеличение длины зоны обратных токов наблюдается при уменьшении частоты срыва вихрей и в случае теплового расширения в зоне циркуляции в зависимости от количества выделившегося тепла. Поэтому при горении нормированное статическое давление $\frac{P_{ст}}{\rho \omega_0^2/2}$ у корня факела будет больше, чем в на-

чале холодной струи, а при движении в камере горящего факела коэффициента расхода K_p , определяемый по (XIV-11), будет меньше, чем в случае холодного факела.

Увеличение скорости истечения свежей смеси $\bar{\omega}_0$ приводит к увеличению разрежения в начале камеры, которое увеличивается пропорционально увеличению скоростного давления $\rho \bar{\omega}_0^2/2$. В этом случае размеры зоны обратных токов (величина $x_{стр}$) уменьшается.

Массо- и теплообмен между зоной обратных токов и ограниченным факелом оказывает большое влияние на стабилизацию пламени.

Зная среднее время циркуляции $t_{ц}$ частиц жидкости в зоне обратных токов

$$t_{ц} = \frac{V_{ц.з}}{S \bar{\omega}_{вых}} \quad (XIV-14)$$

и объем зоны обратных токов $V_{ц.з}$, можно рассчитать массообмен между зоной обратных токов и ограниченным факелом (струей):

$$G_{обм} = \bar{\omega}_{вых} S \rho = \frac{V_{ц.з}}{t_{ц}} \rho \text{ кг/с}, \quad (XIV-15)$$

где S — поверхность зоны обратных токов;

$\bar{\omega}_{вых}$ — средняя скорость выхода жидкости через поверхность зоны обратных токов;

$G_{обм}$ и ρ — переносимая масса и ее плотность.

Среднее время пребывания частиц жидкости в зоне обратных токов пропорционально характерному размеру (например, толщине) зоны и обратно пропорционально скорости ($\bar{\omega}_{ср}$ или ω_{max}) прямого потока:

$$t_{ц} = K \frac{H_{обп}}{\bar{\omega}_{ср}}, \quad (XIV-16)$$

где $H_{обп}$ — характерный размер зоны обратных токов (толщина);

$\bar{w}_{\max}$ — скорость на оси ограниченной струи;

K — коэффициент пропорциональности, зависящий от параметра H_K/d_0 .

Функция $K=f(H_K/d_0)$ определяется из опыта и, например, для осесимметричной струи, распространяющейся в камере квадратного поперечного сечения при $\frac{H_K}{d_0} = 6,0 \div 3,0$

$$K = 13,5 \frac{(H_K)^{1,12}}{d_0}, \quad (\text{XIV-17})$$

откуда

$$t_{\text{ц}} = 13,5 \left(\frac{H_{\text{обр}}}{\bar{w}_{\max}} \right) \cdot \frac{(H_K)^{1,12}}{d_0}. \quad (\text{XIV-18})$$

Расчеты по (XIV-18) показывают, что время пребывания $t_{\text{ц}}$ частиц циркулирующей жидкости в зоне обратных токов в камерах, характеризуемых параметром $H_K/d_0 = (6,0 \div 3,0)$, в 4,1—2,4 раза больше времени $t_{\text{пр}}$, которые затрачивают частицы прямого потока, движущегося со скоростью $\bar{w}_{\max}$ (холодная продувка).

4. Аэродинамические и энергетические характеристики ограниченной струи

Баланс энергии ограниченной струи можно характеризовать следующим уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{m_0 \bar{w}_0^2}{2} &= \frac{m \bar{w}^2}{2} + \frac{m}{\rho} (p_{\text{ст}} - p_{0\text{ст}}) + \\ &+ m \frac{(\bar{w}_0 - \bar{w})^2}{2} + R_{\text{трст}} + R_{\text{м.с}}, \end{aligned} \quad (\text{XIV-19})$$

где $\bar{w}_0$ — средняя начальная скорость струи;
 $\bar{w}$ — средняя скорость струи на расстоянии L_K от начального сечения;
 $p_{0\text{ст}}$ — статическое давление в начальном сечении;
 $p_{\text{ст}}$ — давление в сечении, отстоящем от начального расстояния L_K ;
 m_0 — первоначальная масса струи;
 m — масса струи на расстоянии L_K от начального сечения;
 $R_{\text{трст}}$ — энергия струи, затраченная на преодоление трения о стенки;

$R_{м.с}$ — энергия, затраченная при входе в выходное сечение;

L_k — длина камеры.

Это уравнение аналогично уравнению энергетического баланса газового эжектора.

Ограничиваясь только формулировкой теоремы Эйлера и не производя преобразований, выполненных при получении (XIV-19), мы получим более простое уравнение

$$J_0 = J + (p_{ст} - p_{0ст}) F_k + P_{трст} + P_{м.с}, \quad (XIV-20)$$

где J_0 — начальное количество движения струи;
 J — количество движения на расстоянии L_k от начального сечения;

F_k — площадь поперечного сечения камеры;

$P_{трст}$ — сила, затраченная на преодоление трения о стенки;

$P_{м.с}$ — то же, при входе в выходное сечение.

Для ядра первоначальной массы ограниченной струи, считая, что ядро имеет цилиндрическую форму, последнее уравнение можно переписать в виде

$$J_0 = J_{яx} + (p_{ст} - p_{0ст}) F_{я} + P_{тря}, \quad (XIV-21)$$

если не учитывать местное сопротивление при выходе из камеры.

Здесь $F_{я}$ — площадь поперечного сечения ядра первоначальной массы;

$J_{яx}$ — количество движения ядра первоначальной массы на расстоянии x ;

$P_{тря}$ — сила, расходуемая на преодоление турбулентного трения, учитывающая импульсы сил, сообщаемые присоединенной массе.

Иными словами, как и при свободном течении, мы полагаем, что ядро первоначальной массы, перемещаясь относительно окружающей присоединенной жидкости, осуществляет работу трения «воздух о воздух».

Использование физической модели ядра первоначальной массы наглядно показывает, что

$$J_0 - J_{яx} = (p_{ст} - p_{0ст}) F_{я} + P_{тря}, \quad (XIV-22)$$

т. е. уменьшение количества движения ядра первоначальной массы связано с преодолением увеличивающегося в направлении течения струи статического давле-

ния и турбулентного трения на границе ядра первоначальной массы.

Влияние параметра H_k/d_0 , характеризующего стесненность камеры, на уменьшение количества движения $J_0 \rightarrow J_{яx}$ и соотношение между слагаемыми правой части уравнения (XIV-22) $(\rho_{ст} - \rho_{0ст})F_{я}$ и $P_{тря}$ можно определить опытным путем.

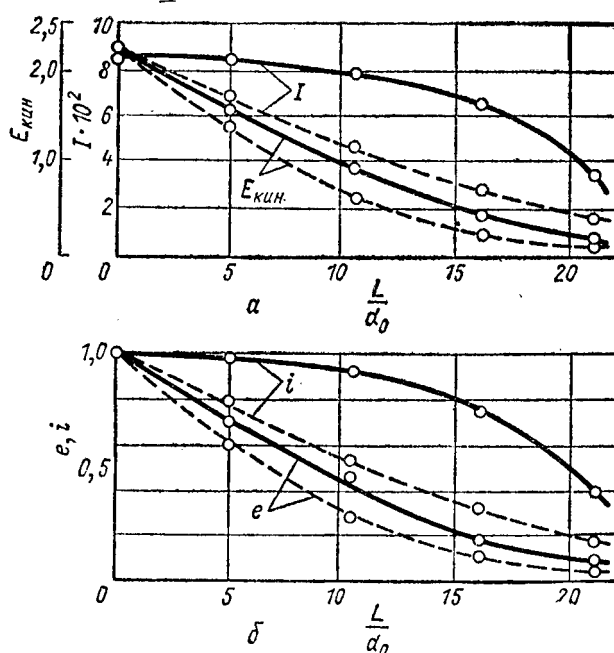


Рис. 104. Изменение количества движения и кинетической энергии по длине ограниченной струи

Абсолютная величина количества движения J (рис. 104, а) и нормированное значение $i = J/J_0$ ограниченной струи (рис. 104, б) в первой половине камеры изменяются незначительно¹. Уменьшение их происходит в основном во второй половине камеры, что можно объяснить указанным выше изменением массы ограниченной струи (с. 274), когда в первой половине эта масса возрастает, а во второй уменьшается.

Нормированное количество движения ядра первоначальной массы $i = J_{я}/J_0$ (рис. 104, б, пунктирная линия) уменьшается как в пер-

¹ На рис. 104 сплошными линиями обозначены характеристики ограниченной струи, пунктирными — ядра первоначальной массы.

вой, так и во второй половинах камеры практически одинаково. Этот факт свидетельствует о том, что процесс массообмена между ядром первоначальной массы и присоединенными массами происходит по всей длине камеры и возникающее на внешней границе ядра турбулентное трение, характеризуемое напряжением трения $\rho \omega_x \omega_y$, практически одинаково на этой длине. Поэтому кинетическая энергия ограниченной струи $\left(E_{кин} \text{ и } e = \frac{E_{кин}}{E_0} \right)$ и ядра первоначальной массы $(E_{кин_я} \text{ и } e_я = E_{кин_я}/E_0)$ уменьшается на всем протяжении ограниченной струи начиная сразу же от начального сечения струи.

Характер течения ограниченной струи и расположения в камере циркуляционных зон не меняется при изменении величины площади отверстия для выхода газов из камеры, т. е. при изменении отношения $F_{вых}/F_k$, где $F_{вых}$ — площадь отверстия для выхода газов из камеры.

Несколько изменяется только картина течения перед выходным отверстием.

Не изменяется при различных значениях отношения $F_{вых}/F_k$ распределение статического давления по длине камеры. При уменьшении площади выходного отверстия (или отношения $F_{вых}/F_k$) повышается уровень статического давления на стене, в циркуляционной зоне и в самой ограниченной струе, но распределение давления по длине камеры остается неизменным.

Другими словами, линия, показывающая распределение давления по длине камеры, перемещается при этом параллельно сама себе.

При одном и том же отношении $F_{вых}/F_k$ продольный градиент статического давления $\partial p/\partial x$ несколько меньше в циркуляционной зоне (в обратном потоке), чем на оси ограниченной струи (прямом потоке). В одном и том же поперечном сечении камеры статическое давление в циркуляционной зоне больше, чем на оси струи.

Другими словами, при течении ограниченной струи возникают положительные продольные $\partial p/\partial x$ и поперечный $\partial p/\partial y$ градиенты статического давления.

5. Движение газов в рабочих камерах печей

Организация движения газов в рабочих камерах печей имеет особое значение, так как от нее зависит протекание процессов горения и теплообмена.

В гл. VII было отмечено, что в современных печах это принудительное движение, так как естественное дви-

жение газов теперь встречается редко, главным образом, в сушильных печах.

Характер движения газов связан с видом теплообменного процесса, протекающего в рабочей камере.

Движение газов в печах зависит и от того, совмещены или разобщены зоны теплогенерации (топки) и теплообмена (рабочие камеры).

В каждом из указанных выше случаев движение газов выполняет определенные функции и должно быть по-своему организовано.

Наиболее распространенными видами движения газов в печах являются струйное, циклонное и фильтрационное.

Струйное движение совершается под динамическим воздействием струй-факелов, создаваемых горелочными устройствами. В этом случае в рабочей камере или топке находятся одна или несколько проточных зон и циркуляционные зоны.

Следовательно, в современных печах струи-факелы имеют динамическое происхождение; термическое происхождение, т. е. возникновение их в результате действия архимедовых сил, при анализе характера струйного движения, как правило, не учитывают.

Струи либо непосредственно направляются на поверхность изделия, либо при их помощи организуется рециркуляционное движение, обеспечивающее выравнивание температур в рабочей камере.

Рециркуляционное движение заключается в том, что к потоку продуктов сгорания, поступающего из топки или к струе-факелу, распространяющемуся в самой камере, примешиваются отработавшие в рабочей камере газы. Чем больше к горячим газам подмешивается газов, отходящих из рабочей камеры, тем при прочих одинаковых условиях более равномернее температура в камере. Количество подсасываемого струей газа и, таким образом, кратность рециркуляции (эжекции) $K_{эж} = \frac{m_1 + m_2}{m_1}$ зависит от скорости эжектирующей струи и сопротивления движению газов на пути их циркуляции. Чем больше сопротивление, тем при прочих равных условиях меньше подсасывается свежей струей отработавших газов и тем больше неравномерность температуры в объеме рабочей камеры.

Пример рециркуляции газов показан на рис. 105, где

изображен поперечный разрез нагревательной печи. Горелка 3 установлена с боковой стороны ниже уровня пода 1, так что факел размещается в топке 2. К основанию факела через пламенное окно подсасываются отработавшие газы рабочей камеры 5. Горение растягивается и частично переносится в рабочую камеру, где за счет циркуляционного движения газов температура их становится практически одинаковой. Газы, имеющие одина-

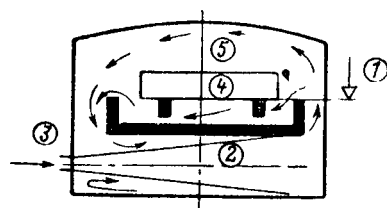


Рис. 105. Рециркуляция газов в рабочем пространстве печи

ковую температуру, омывают металл 4, передавая ему тепло.

С распределением скорости газа и направлением движения его в рабочей камере связано и распределение аэродинамического давления, оказываемого газом на стенки рабочей камеры.

Статическое давление газов в различных местах объема камеры также различно и складывается из трех составляющих:

$$p(x, y, z) = p_y + p_r + p_c, \quad (\text{XIV-23})$$

где p_y — давление, создаваемое внешними факторами, например устройствами для удаления продуктов сгорания (дымовая труба, дымосос), наружной атмосферой и т. п. (по закону Паскаля p_y одинаково распространяется на все точки объема рабочего пространства печи и поэтому называется уровнем давления);

p_r — давление, создаваемое геометрическим напором и зависящее в основном от температуры, а также от физических свойств газов; $p_r = f(x, y, z, T)$. Если температура и физические свойства газов, заполняющих рабочее пространство печи, не отличаются от атмосферных, то $p_r = 0$;

p_c — давление, возникающее вследствие динамики газов и зависящее в основном от режима скоростей газов в рабочем пространстве, $p_c = f(x, y, z, w)$.

Вследствие указанных причин на статическое давление в рабочем пространстве печи влияют величина печи, степень открытия рабочих окон, наличие отверстий в кладке, а также расположение струй-факелов. Нулевой называется поверхность, разделяющая области положительных и отрицательных давлений.

Чтобы предупредить попадание атмосферного воздуха в большинстве пламенных печей, давление p регулируют так, чтобы нулевая поверхность проходила на уровне пода печи (или было бы небольшое положительное давление 0,3—0,5 мм вод. ст.).

В этом случае давление на стены будет положительным, а его величина в различных местах стен определится расположением струй-факелов.

Пример, показывающий распределение давления на стенках печи для случая, когда струя движется парал-

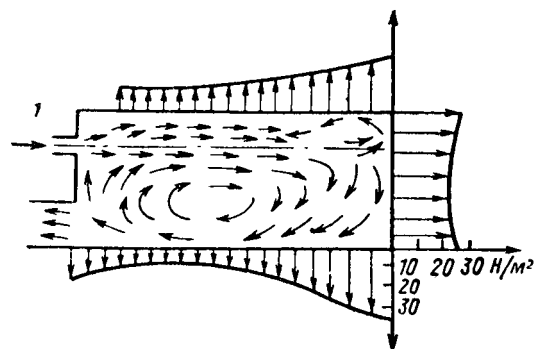


Рис. 106. Распределение давления на стенках рабочего пространства печи

ельно своду и бьет в торцовую стенку, показан на рис. 106. Наибольшим давление на стенке становится в месте лобового удара струи и при поворотах ее.

Циклонное движение газов применяют при тепловой обработке пылевидных материалов во взвешенном состоянии и в топочных камерах. В этом случае струя-факел подводится в камеру тангенциально стенкам. Под действием центробежной силы струя прижимается к стенкам и движется вдоль них по спирали. Вследствие вращательного движения потока давление по сечению камеры неодинаково. Оно возрастает от оси к периферии. Возникающая разность давлений зависит от скорости вращения потока.

Отличительной особенностью движения этого вида является интенсивность перемешивания газов и полнота использования объема рабочего пространства. Применение циклонного движения газов позволяет создать компактные высокопроизводительные агрегаты.

Фильтрационное движение газов образуется в так называемых слоевых или шахтных печах. Газы проходят через относительно неподвижный слой кускового или зернистого сыпучего материала, отдавая ему тепло или нагреваясь. Равномерность сопротивления на пути газов по слою зависит от сопротивления отдельных его участков и тем лучше, чем равномернее по размерам куски или зерна сыпучего материала.

При увеличении скорости газов в слое сверх определенной наступает состояние, при котором все частицы слоя теряют устойчивость, расстояние между частицами возрастает, слой в целом увеличивается в объеме, а частицы в нем энергично перемешиваются.

По некоторым своим свойствам такой слой напоминает жидкость, перемешиваемую продуваемым газом. Отсюда возникло и название такого состояния слоя — псевдооживленный или «кипящий» слой.

При дальнейшем увеличении скорости все частицы слоя переходят во взвешенное состояние, и движение газов будет происходить по законам движения двухфазной среды. Таким образом, «кипящий» слой — переходное состояние от плотного слоя ко взвешенному, а движение газов в нем — переходное от фильтрационного к обычному движению двухфазной среды.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глинка М. А. Основы общей теории печей. М., Металлургия, издат, 1962. 576 с. с ил.
2. Гидродинамика и теория горения потока топлива. М., «Металлургия», 1971. 488 с. с ил. Авт.: Б. В. Канторович, В. И. Миткалинский, Г. Н. Десягин, В. М. Иванов.

Раздел четвертый

ТЕПЛО- И МАССООБМЕН

Глава XV

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

При наличии в некоторой среде неоднородного поля температур $T(x, y, z, t)$ в этой среде неизбежно происходит процесс переноса тепла. В соответствии со вторым началом термодинамики этот перенос осуществляется в направлении уменьшения температуры, т. е. из области с большей температурой в область с меньшей. Для характеристики этого процесса используется понятие вектора плотности теплового потока q , проекция которого на нормаль к некоторой поверхности представляет собой количество тепла, проходящее через единицу этой поверхности в единицу времени (Вт/м^2).

Точно так же при наличии в среде неоднородного поля концентраций некоторого i -того компонента смеси $c_i(x, y, z, t)$ происходит процесс переноса массы этой примеси. Этот перенос также происходит в направлении уменьшения концентрации примеси и характеризуется вектором плотности потока массы примеси $\vec{m}_i$, проекция которого на нормаль к некоторой поверхности равна количеству примеси, проходящему через единицу этой поверхности в единицу времени ($\text{кг/м}^2 \cdot \text{с}$).

Перенос тепла осуществляется различными путями. Если перенос тепла происходит за счет хаотического теплового движения или за счет тепловых колебаний микрочастиц (молекул, атомов, ионов), то такой перенос называют теплопроводностью. Если перенос тепла осуществляется в движущейся жидкости или газе за

счет перемещения объемов среды из области с одной температурой в область с другой, то такой процесс называют конвективным теплообменом или конвекцией тепла.

Процессы переноса массы аналогичны. Если перенос массы примеси происходит за счет теплового движения молекул (атомов, ионов), то он называется диффузией. Если перенос обусловлен движением жидкости или газа, то говорят о конвективном массообмене или о конвективной диффузии. Совершенно ясно, что процессы конвективного переноса тепла или массы всегда сочетаются с процессами молекулярного переноса (теплопроводностью и диффузией).

При турбулентном движении жидкости или газа процессы конвективного переноса тепла и массы приобретают настолько специфический характер, что их можно выделить в самостоятельный вид переноса. Это перенос, обусловленный пульсационным характером турбулентного движения, осуществляющийся за счет поперечного перемещения турбулентных молей и называемый турбулентной или молярной теплопроводностью (диффузией).

Кроме того, имеется еще один вид теплопереноса, не наблюдающийся в процессах массообмена. Речь идет о переносе тепла излучением, который осуществляется за счет распространения электромагнитных волн в определенном диапазоне частот.

Процессы тепло- и массообмена, протекающие в двухфазной системе на границе раздела фаз, например между жидкостью (газом) и твердой поверхностью, называются соответственно теплоотдачей и массоотдачей.

Если рассматривается процесс теплообмена между двумя средами (жидкими или газообразными), разделенными твердой перегородкой, то такой процесс называется теплопередачей.

В практике встречаются случаи, когда процессы тепло- и массообмена происходят одновременно. Например, испарение вещества с поверхности при одновременной теплоотдаче к этой поверхности или от нее. В этих случаях отмечается взаимное влияние процессов тепло- и массообмена. При наличии в смеси градиента температуры происходит разделение компонентов по молекулярной массе (термодиффузия или эффект Соре). В то же время при наличии массообмена вследствие различия теплоемкостей компонентов смеси возникает диффузи-

онный тепловой поток (эффект Дюфо). Кроме того, наличие массоотдачи на поверхности изменяет граничные условия процесса теплоотдачи. Однако в условиях, обычно встречающихся на практике, роль взаимного влияния процессов тепло- и массообмена невелика, и в дальнейшем это влияние не учитывается.

Как показано ниже, если считать, что процессы конвективного переноса тепла и массы протекают независимо один от другого, то описание их оказывается аналогичным. Поэтому эти процессы рассматриваются параллельно.

Если процессы тепло- или массообмена протекают в двухфазной среде, то их условно можно разделить на процессы внутреннего переноса и процессы внешнего переноса. Например, при нагреве или охлаждении твердого тела в жидкой или газообразной среде процессы переноса тепла в этой среде являются процессами внешнего теплообмена, а распространение тепла внутри тела представляет собой внутренний теплообмен. В этой связи говорят о внешней и внутренней задачах тепло- и массообмена.

В связи с тем, что обе эти задачи чаще всего так или иначе связаны с молекулярной теплопроводностью либо диффузией, остановимся несколько подробнее на некоторых общих закономерностях указанных процессов.

1. Молекулярная теплопроводность и молекулярная диффузия

Процессы переноса тепла и массы, обусловленные микроскопическими механизмами, могут протекать в любой материальной среде: как в жидкости или газе, так и в твердых телах. В первом случае эти процессы, как правило, сопровождаются конвективным переносом. В твердых непрозрачных телах единственным механизмом переноса тепла является теплопроводность, а переноса массы — диффузия. Заметим, что термин «молекулярная теплопроводность» (диффузия) является условным, так как материальными носителями могут являться не только молекулы, но и атомы, ионы, а в случае теплопроводности — свободные электроны (в металлах).

Однако независимо от вида носителя, т. е. от детального механизма переноса, удастся дать единое описание всем этим процессам.

Логично предположить, что процесс переноса тепла теплопроводностью происходит тем интенсивнее, чем резче меняется температура по координате, т. е. чем больше величина градиента температуры. На этом предположении основан постулат (закон) Фурье, который удовлетворительно, как показывает эксперимент, описывает различные процессы теплопроводности:

$$\vec{q} = -\lambda \text{ grad } T \text{ Вт/м}^2. \quad (\text{XV-1})$$

В соответствии с этим постулатом вектор плотности теплового потока пропорционален по модулю градиенту температуры и направлен в сторону убывания температуры (на это указывает знак минус). Коэффициент пропорциональности λ Вт/(м·град) в этом выражении называется коэффициентом теплопроводности. Этот коэффициент является физическим параметром вещества, характеризует его способность проводить тепло и зависит от температуры. Коэффициент теплопроводности газов (кроме инертных) зависит также от давления. Коэффициенты теплопроводности для различных веществ приведены в литературе.

Если ввести обозначение $a = \frac{\lambda}{\rho} c_p$, где ρ — плотность, кг/м³, а c_p — изобарная теплоемкость вещества, Дж/(кг·К), и считать, что плотность и теплоемкость постоянные величины, то закон Фурье можно представить в виде

$$\vec{q} = -a \text{ grad } i, \quad (\text{XV-1a})$$

где $i = \rho c_p T$ Дж/м³ — удельное теплосодержание (энтальпия), т. е. количество тепла, содержащееся в единице объема веществ с температурой T .

В такой формулировке закон Фурье означает, что плотность теплового потока пропорциональна градиенту удельного теплосодержания. Коэффициент пропорциональности в этом выражении $a = \frac{\lambda}{\rho} c_p$ носит название коэффициента температуропроводности и является характеристикой интенсивности процессов молекулярного переноса тепла. Как и другие характеристики переноса, например коэффициент кинематической вязкости ν , коэффициент температуропроводности имеет размерность м²/с. Величины, являющиеся, подобно коэффициентам

кинематической вязкости и температуропроводности, характеристиками переноса, часто называют коэффициентами переноса. Но если кинематическая вязкость ν является коэффициентом переноса количества движения, то температуропроводность представляет собой коэффициент переноса тепла.

Заметим, что в постулате Фурье (XV-1) заключено одно противоречие, состоящее в том, что в соответствии с математической формулировкой этого постулата скорость распространения тепла равна бесконечности. Действительно, представим себе, что на поверхность некоторого полугограниченного тела в момент времени $t=0$ подается конечный тепловой поток q . Тогда, в соответствии с формулой (XV-1), по всему объему (бесконечному) этого тела мгновенно установится некоторое распределение градиента температуры, а следовательно, в любой точке этого тела в тот же самый момент $t=0$ возникнет тепловой поток, что и свидетельствует о бесконечной скорости распространения тепла. Этот вывод противоречит одному из основных постулатов теории относительности, в соответствии с которым скорость света является предельной скоростью распространения любого сигнала. Указанное противоречие, придающее постулату Фурье приближенный характер, сказывается на результатах расчетов лишь при чрезвычайно высоких интенсивностях переноса тепла, практически не встречающихся в металлургической технике.

Для процесса молекулярной диффузии аналогом постулата Фурье является постулат (закон) Фика, определяющий диффузионный поток массы i -того компонента смеси в пренебрежении термодиффузией:

$$\vec{m}_i = -D_i \text{grad } \rho_i, \quad (\text{XV-2a})$$

где ρ_i — парциальная плотность i -того компонента, кг/м³, т. е. количество массы этого компонента, кг, содержащееся в единице объема смеси. Коэффициент пропорциональности в этом выражении D_i носит название коэффициента диффузии i -того компонента. Отметим еще раз, что постулат Фика полностью аналогичен постулату Фурье в форме (XV-1a). Действительно, как следует из выражения (XV-2a), плотность диффузионного потока массы пропорциональна по модулю удельному массосодержанию (т. е. парциальной плотности), а направление этого потока противоположно направлению градиен-

та парциальной плотности, что также соответствует второму началу термодинамики. Естественно, что коэффициент диффузии D_i имеет ту же размерность ($\text{м}^2/\text{с}$) и тот же смысл, что и коэффициент температуропроводности a (а также кинематический коэффициент вязкости ν), т. е. он характеризует интенсивность процесса молекулярной диффузии и является поэтому коэффициентом молекулярного переноса массы.

В случае, если плотность смеси ρ есть величина приблизительно постоянная (что возможно, например, для бинарной смеси при малых концентрациях примеси либо при близости молекулярных масс примеси и основного вещества), и учитывая, что парциальная плотность ρ_i выражается через концентрацию (массовую долю) i -того компонента как $\rho_i = \rho c_i$, получим постулат Фика в виде

$$\vec{m}_i = -\rho D_i \text{grad } c_i. \quad (\text{XV-2})$$

Эта формулировка постулата Фика аналогична постулату Фурье в форме (XV-1).

Коэффициент диффузии D зависит от природы веществ, составляющих смесь, от температуры и от давления (для газов). Слабой зависимостью коэффициента диффузии от концентрации компонентов смеси в инженерных расчетах, как правило, пренебрегают.

Заметим, что постулат Фика, который обеспечивает обычно удовлетворительное совпадение расчетов с экспериментом, содержит то же противоречие, что и постулат Фурье: скорость распространения массы примеси оказывается в соответствии с этим постулатом бесконечной.

2. Тройная аналогия

Теперь, после знакомства с тремя видами процессов молекулярного переноса: с молекулярным переносом импульса (т. е. трением в ламинарном потоке в разделе втором), молекулярным переносом тепла (теплопроводностью) и с молекулярным переносом массы примеси (диффузией), нетрудно отметить имеющую фундаментальное значение аналогию между этими процессами.

Действительно, формулу Ньютона для вязкого трения в плоскопараллельном ламинарном потоке, постулаты Фурье и Фика для одномерных процессов теплопроводности и диффузии в случае постоянной плотности и теплоемкости среды можно записать соответственно следующим образом:

$$\tau = v \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial y}; \quad (\text{XV-3})$$

$$q = -a \frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial y}; \quad (\text{XV-4})$$

$$m_i = -D_i \frac{\partial \rho_i}{\partial y}, \quad (\text{XV-5})$$

где y — координата, в направлении которой происходит перенос импульса, тепла и вещества. Как видно из выражений (XV-3) — (XV-5), плотность потока каждой из субстанций, т. е. импульса τ , тепла q и вещества m_i , пропорциональна объемной плотности соответственно импульса (ρw_x), теплосодержания ($\rho c_p T$) и вещества (ρ_i).

Таким образом, закономерности всех этих трех процессов переноса могут быть обобщены в одной формулировке: поток субстанции пропорционален движущей силе, а коэффициентом пропорциональности является коэффициент переноса. Движущей силой в каждом случае является градиент объемной плотности соответствующей субстанции¹.

В этой формулировке отражено существо известного в термодинамике необратимых процессов принципа линейности Онзагера, являющегося одним из общих принципов процесса переноса (см. Глава I).

Аналогия процессов молекулярного переноса импульса, тепла и массы при определенных условиях приводит, как показано ниже, к тождественности соответствующих дифференциальных уравнений и позволяет создать общую теорию процессов переноса. В дальнейшем будет показано, что и между процессами турбулентного переноса импульса, тепла и массы также существует достаточно глубокая аналогия.

Заметим в заключение, что процессы переноса тепла и массы оказываются аналогичными только при отсутствии тех вторичных эффектов, обусловленных их взаимным влиянием, о которых мы говорили выше, т. е. термодиффузии и диффузионного переноса тепла. Практически это означает, что для получения указанной аналогии роль вторичных эффектов тепло- и массообмена должна быть невелика.

¹ Строго говоря, движущей силой в процессах массообмена является не градиент парциальной плотности, а градиент химического потенциала; закон Фика (XV-5) является частным случаем этой закономерности.

Глава XVI

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

В этой главе рассмотрены процессы распространения тепла внутри твердого тела, находящегося в тепловом взаимодействии с окружающей средой. Процессы переноса массы, т. е. диффузии, в твердых телах не рассматриваются, так как они изучаются в курсе физической химии. Заметим, однако, что математический аппарат теории диффузии в твердых телах практически не отличается от аппарата теории теплопроводности.

Теория теплопроводности, изучающая процессы внутреннего теплообмена, является феноменологической теорией. Это означает, что она не рассматривает детально механизм процесса распространения тепла, а ограничивается лишь описанием этого процесса, основываясь на феноменологическом постулате Фурье (XV-1).

Процессы переноса тепла в твердом теле могут протекать таким образом, что температура в каждой точке тела, а следовательно и тепловой поток, однозначно связаны с градиентом температуры, остаются постоянными во времени, т. е. температура является функцией лишь пространственных координат $T = T(x, y, z)$. Такое температурное поле и соответствующий процесс теплопроводности называются стационарными. Если же температура является функцией не только координат, но и времени $T = T(x, y, z, t)$, то мы имеем дело с нестационарным температурным полем и с нестационарным процессом теплопроводности.

Коэффициент теплопроводности λ зависит, вообще говоря, от температуры. Однако учет этой зависимости приводит, как это показано ниже, к нелинейным дифференциальным уравнениям теплопроводности, которые в нестационарном случае не имеют точных решений. Поэтому в дальнейшем (за исключением специально оговоренных случаев) коэффициент теплопроводности принимаем величиной постоянной, т. е. будем рассматривать лишь линеаризованную теорию теплопроводности. Практически это означает, что в каждом конкретном случае следует пользоваться средним для данного температурного интервала значением λ .

В связи с тем, что, как показывает постулат Фурье, величина и направление вектора плотности теплового потока в каждой точке тела полностью определяются распределением температуры в объеме тела, основной задачей теории теплопроводности является отыскание температурного поля в теле, т. е. нахождение функции $T(x, y, z, t)$. Эту задачу можно выполнить путем решения дифференциального уравнения теплопроводности.

1. Дифференциальное уравнение теплопроводности

Все дифференциальные уравнения процессов переноса, в том числе уравнение теплопроводности, выводятся на основании двух постулатов: феноменологического постулата, описывающего соответствующий процесс переноса, и закона сохранения (импульса, энергии, массы). Применительно к процессу теплопроводности роль феноменологического постулата играет постулат Фурье (XV-1), а роль закона сохранения — закон сохранения энергии.

Рассмотрим изотропное твердое тело, в объеме которого некоторым произвольным, но известным образом распределены внутренние источники (или стоки) тепла. Роль внутренних источников тепла может играть, например, джоулево тепло, выделяющееся при пропускании через тело электрического тока. Действие внутренних источников характеризуется их мощностью q_V , Вт/м³, т. е. количеством тепла, которое выделяется в единице объема тела за единицу времени; в общем случае мощность внутренних источников тепла является известной функцией координат и времени: $q_V = q_V(x, y, z, t)$.

Для элементарного объема тела dV на основании закона сохранения энергии справедливо равенство

$$dQ = dQ_1 + dQ_2, \quad (\text{XVI-1})$$

где dQ — изменение теплосодержания (энтальпии) вещества в объеме dV за элементарный интервал времени dt^* .

dQ_1 — разность между количеством тепла, которое подводится к объему dV , и

* В связи с тем, что рассматривается абсолютно твердое, т. е. недеформируемое тело, изменение энтальпии равно изменению внутренней энергии.

количеством тепла, которое отводится от него за время dt путем теплопроводности;

$dQ_2 = q_v dV dt$ — количество тепла, выделившееся в объеме dV за счет внутренних источников.

Поскольку уравнение теплопроводности должно служить для отыскания температурного поля, задача теперь заключается в том, чтобы выразить левую часть уравнения (XVI-1) и первый член правой части через температуру.

Изменение теплосодержания объема dV , масса которого равна ρdV , при изменении его температуры на величину dT выразится как

$$dQ = \rho dV c dT,$$

где c — теплоемкость вещества, Дж/(кг·К).

Отсюда с учетом того, что $dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt$, получаем

$$dQ = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dV dt. \quad (a)$$

Для того чтобы выразить через температуру величину dQ_1 , считаем, что объем dV представляет собой прямоугольный параллелепипед с ребрами dx , dy и dz (рис. 107), т. е. $dV = dx dy dz$. Тогда количество тепла,

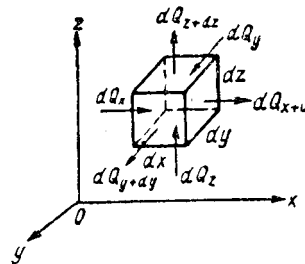


Рис. 107. К выводу дифференциального уравнения теплопроводности

которое поступает в параллелепипед через грань $dy dz$ за время dt , выразится как

$$dQ_x = q_x dy dz dt,$$

где q_x — проекция вектора плотности теплового потока на ось x . Количество тепла, уходящее из параллелепипеда, через противоположную грань, составит, очевидно:

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dy dz dt.$$

Величину плотности теплового потока в этой грани найдем с помощью разложения в ряд Тейлора, ограничившись вследствие малости dx первыми двумя членами разложения:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx.$$

Тогда разность между поступающим и уходящим количествами тепла, обусловленная теплопроводностью, в направлении x составит

$$dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dV dt.$$

Аналогичным путем получают соответствующие величины для осей y и z :

$$dQ_{y1} = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dV dt;$$

$$dQ_{z1} = -\frac{\partial q_z}{\partial z} dV dt,$$

где q_y и q_z — проекции вектора плотности теплового потока соответственно на осях y и z .

Таким образом, количество тепла, оставшееся в параллелепипеде вследствие переноса тепла путем теплопроводности, составит

$$dQ_1 = dQ_{x1} + dQ_{y1} + dQ_{z1} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dV dt. \quad (6)$$

Подставляя в уравнение (XVI-1) равенства (а) и (б), а также полученное ранее выражение для dQ_2 , получим после сокращений

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + q_v. \quad (в)$$

На основании постулата Фурье (XV-1) имеем:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x};$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}.$$

$$q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Подставив в уравнение (в) вместо q_x , q_y и q_z последние выражения, получим

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v. \quad (\text{г})$$

Если считать, что коэффициент теплопроводности зависит от температуры, то уравнение (г) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение, которое в терминах векторного анализа имеет вид

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) + q_v. \quad (\text{д})$$

Как указано выше, коэффициент теплопроводности — величина постоянная. Это позволяет вынести его за знак производной в уравнениях (г) и (д). Тогда, разделив обе части любого из этих уравнений на ρc , получим уравнение теплопроводности в его линейной форме:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho c}, \quad (\text{XVI-2})$$

где ∇^2 — оператор Лапласа;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

a — коэффициент температуропроводности (коэффициент переноса тепла).

Уравнение (XVI-2) позволяет уточнить смысл этой величины применительно к нестационарным задачам теплопроводности: чем больше величина a , тем быстрее происходит перестройка температурного поля в теле, например, тем быстрее происходит выравнивание температурного поля. Таким образом, коэффициент температуропроводности характеризует термодинамические свойства материала, что и естественно, так как эта величина обратно пропорциональна произведению ρc , т. е. объемной теплоемкости материала $\left(a = \frac{\lambda}{\rho c} \right)$.

В случае, если в объеме тела отсутствуют внутренние источники тепла, $q_v = 0$, уравнение теплопроводности (XVI-2) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T, \quad (\text{XVI-3})$$

В цилиндрических координатах $x-r-\varphi$ уравнение (XVI-3) имеет форму

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} \right). \quad (\text{XVI-3a})$$

Если температура по угловой координате φ не меняется ($\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$), т. е. если задача осесимметричная, последнее уравнение упрощается и имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (\text{XVI-3б})$$

С математической точки зрения уравнение теплопроводности (XVI-2, XVI-3) представляет собой линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка параболического типа, которое может быть либо однородным (XVI-3), либо неоднородным (XVI-2).

2. Общая постановка задачи теплопроводности

Для того чтобы решить основную задачу теории теплопроводности, т. е. найти распределение температуры в теле и его изменение во времени $T(x, y, z, t)$, необходимо прежде всего знать конкретную форму уравнения теплопроводности для данного случая (линейное или нелинейное; однородное или неоднородное; одномерное, двумерное или трехмерное). В случае нелинейного уравнения необходимо также знать конкретный вид зависимости $\lambda(T)$, а в случае неоднородного уравнения — функцию распределения источников $q_v(x, y, z, t)$. При этом уравнение теплопроводности будет иметь бесчисленное множество решений, соответствующих бесчисленному множеству, т. е. классу, явлений теплопроводности. Чтобы из этого множества решений выделить одно решение, соответствующее единичному явлению данного класса, необходимо задать условия однозначности. В условия однозначности входят геометрические условия, определяющие форму и размеры тела; физические параметры материала (λ, ρ, c); начальные условия, т. е. распределение температуры в объеме тела в некоторый момент времени $t=0$, принимаемый за начало отсчета; граничные условия, характеризующие тепловое взаимодействие окружающей среды с поверхностью тела.

Начальные и граничные условия объединяются термином «краевые условия».

Граничные условия могут быть заданы тремя различными способами¹:

А. Граничные условия первого рода (первая краевая задача). В этом случае задается распределение температуры по всей поверхности тела и изменение этого распределения во времени, т. е. задается функция

$$T_w = T_w(x, y, z, t). \quad (\text{XVI-4})$$

В частном случае эта температура может быть постоянной во времени, а кроме того, и неизменной по всей поверхности тела.

Б. Граничные условия второго рода (вторая краевая задача). В этом случае задается распределение плотности теплового потока по всей поверхности тела и изменение этого распределения во времени. С учетом постулата Фурье (XV—1) граничные условия второго рода можно записать следующим образом:

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w = q_w(x, y, z, t), \quad (\text{XVI-5})$$

где n — координата, направленная по нормали к поверхности тела.

Таким образом, задание граничных условий второго рода означает, по существу, задание величины градиента температуры на поверхности тела.

В частном случае плотность теплового потока на поверхности может быть постоянной во времени, а кроме того, и неизменной по всей поверхности тела.

В. Граничные условия третьего рода (смешанная краевая задача). В этом случае задаются температура окружающей среды или внешнего источника (стока) тепла T_0 и закон теплообмена между средой и поверхностью тела. Граничные условия третьего рода, как будет показано ниже, являются наиболее общими и наиболее часто встречающимися на практике. По существу

¹ Кроме рассмотренных ниже трех видов граничных условий, в литературе можно встретить и четвертый — граничные условия четвертого рода, когда на поверхности рассматриваемого тела имеет место идеальный контакт с другим твердым телом. Этот случай, однако, можно рассматривать как единый процесс теплопроводности в твердом теле, состоящем из двух (или более) слоев, т. е. как частный случай линейной задачи теплопроводности, когда λ является кусочно-постоянной функцией координат.

в этом случае задается некоторая связь между известной температурой окружающей среды и неизвестными температурой поверхности тела и градиентом температуры на поверхности. Например, если внешний теплообмен между окружающей средой, имеющей температуру T_0 , и поверхностью тела с температурой T_w осуществляется путем конвективной теплоотдачи, плотность теплового потока, подводимого к поверхности тела (или отводимого от нее) принято выражать с помощью формулы Ньютона как величину, пропорциональную разности первых степеней температур среды и поверхности тела, т. е.

$$q_w = \alpha(T_0 - T_w), \quad (\text{XVI-6})$$

где коэффициент пропорциональности α , Вт/(м²·К), носит название коэффициента теплоотдачи (подробнее см. гл. XVII).

С другой стороны, плотность теплового потока на поверхности тела может быть выражена на основе постулата Фурье (XV-1):

$$q_w = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w, \quad (\text{XVI-7})$$

где λ — коэффициент теплопроводности материала тела.

Приравнявая на основании закона сохранения энергии правые части выражений (XVI-6) и (XVI-7), получим математическую формулировку граничных условий третьего рода для случая конвективной теплоотдачи на поверхности тела:

$$\alpha(T_0 - T_w) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w. \quad (\text{XVI-8})$$

Таким образом, граничные условия третьего рода формулируются в виде уравнения, в котором известными величинами являются коэффициент теплоотдачи α , температура окружающей среды T_0 и коэффициент теплопроводности тела λ . Незвестными функциями времени и координат на поверхности тела являются температура и ее градиент. Заметим, что в общем случае коэффициент теплоотдачи α и температура T_0 могут быть переменными, но обязательно заданными функциями времени и координат.

В случае, когда теплообмен между поверхностью тела и средой либо внешним источником (стоком) тепла

осуществляется за счет излучения, задача теплопроводности с граничными условиями третьего рода существенно усложняется. Действительно, в этом случае плотность теплового потока на поверхности тела пропорциональна, как показано ниже, разности четвертых, а не первых, как в уравнении (XVI-8), степеней температур среды и поверхности (это является следствием закона Стефана—Больцмана). Таким образом, неизвестная температура поверхности тела стоит в уравнении граничных условий в четвертой степени, т. е. задача оказывается нелинейной.

Ниже показан один из методов приближенного решения нестационарных задач теплопроводности с нелинейными граничными условиями. Однако в связи с тем, что эти задачи не имеют, как правило, точных аналитических решений, в этой главе рассмотрены лишь задачи, в которых теплообмен на поверхности представляет собой конвективную теплоотдачу, т. е. когда справедливо уравнение (XVI-8).

3. Теплопроводность при стационарном режиме

В случае, когда температура в любой точке тела не изменена во времени, и при отсутствии внутренних источников тепла уравнение теплопроводности (XVI-3) вследствие того, что $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, сводится к следующему:

$$\nabla^2 T = 0. \quad (\text{XVI-9})$$

Уравнение (XVI-9) широко известно в математической физике, носит название уравнения Лапласа и является общим уравнением теории потенциальных полей (температурных, электрических, гидродинамических, фильтрационных и др.).

В случае, когда коэффициент теплопроводности является функцией температуры, уравнение стационарного температурного поля имеет вид

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = 0. \quad (\text{XVI-10})$$

Ниже мы рассмотрим несколько задач стационарной теплопроводности без внутренних источников тепла для двух тел простейшей формы: неограниченной пластины конечной толщины и бесконечно длинного цилиндра.

Заметим, хотя это и очевидно, что для задач стационарной теплопроводности должны задаваться лишь граничные условия, так как начальные условия не имеют смысла.

*Стационарное температурное поле в случае
неограниченной пластины без внутренних источников
тепла*

Для пластины, неограниченно простирающейся в направлении осей y и z , но имеющей конечную толщину δ в направлении оси x (практически это означает, что высота и ширина пластины велики по сравнению с ее толщиной), уравнение (XVI-9) принимает вид

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0, \quad (\text{XVI-11})$$

так как $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$.

Интегрируя это уравнение, получим

$$\frac{dT}{dx} = C_1, \quad (\text{a})$$

где C_1 — произвольная постоянная интегрирования.

Из выражения (a) следует, что плотность теплового потока есть величина, постоянная по толщине пластины (так как $q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$). Этот результат непосредственно вытекает из закона сохранения энергии для рассматриваемого случая. Действительно, для сохранения стационарного режима необходимо, чтобы количества тепла, проходящие через единицу поверхности плоскостей, параллельных плоскости yoz , в единицу времени, были равны, так как в противном случае температура пластины должна была бы изменяться во времени.

Вторично интегрируя уравнение (XVI-11), получим

$$T(x) = C_1x + C_2, \quad (\text{XVI-12})$$

где C_2 — вторая произвольная постоянная.

Заметим, что, как это следует из полученного решения (XVI-12), распределение температуры по толщине пластины является линейным. Этот результат, однако, получается только при условии постоянства коэффициента теплопроводности. Действительно, из условия по-

стоянства плотности теплового потока по толщине имеем

$$\lambda \frac{dT}{dx} = \text{const.}$$

Отсюда ясно, что линейный характер распределения температуры, т. е. полученный нами результат

$$\frac{dT}{dx} = \text{const.},$$

может иметь место только при условии $\lambda = \text{const.}$ В противном случае распределение температуры по толщине

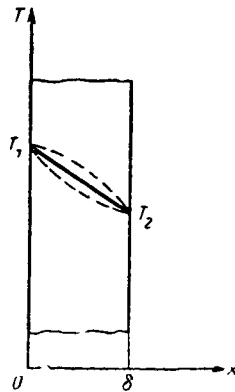


Рис. 108. Распределение температуры по толщине пластины

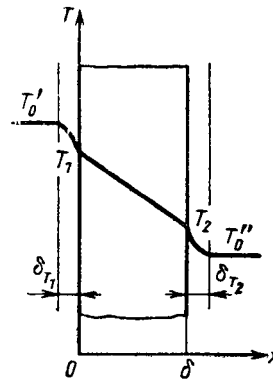


Рис. 109. Стационарное температурное поле пластины при граничных условиях третьего рода

нелинейно, как это показано пунктирными кривыми на рис. 108.

Значения произвольных констант C_1 и C_2 следует найти из граничных условий:

а. Граничные условия первого рода. В рассматриваемом нами случае граничные условия первого рода заключаются в том, что заданы температуры T_1 и T_2 на поверхностях пластины (см. рис. 108), т. е. $T(0) = T_1$, $T(\delta) = T_2$.

Используя первое из этих условий, получаем

$$C_2 = T_1;$$

второе граничное условие дает

$$C_1 = \frac{T_2 - T_1}{\delta} = - \frac{T_1 - T_2}{\delta}.$$

Таким образом, искомое распределение температуры по толщине пластины имеет вид

$$T(x) = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\delta} x. \quad (\text{XVI-13})$$

Зная распределение температуры, легко определить плотность теплового потока, проходящего через пластину. Действительно:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx},$$

откуда, используя выражение (XVI-13), получаем

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (T_1 - T_2). \quad (\text{XVI-14})$$

Записав формулу (XVI-14) в виде

$$q = \frac{T_1 - T_2}{\delta/\lambda},$$

обнаруживаем, что она аналогична по форме и по смыслу закону Ома для проводника единичного сечения с током. При этом разность температур $T_1 - T_2$ аналогична разности потенциалов на концах проводника, плотность теплового потока q — току, проходящему через проводник, а величина δ/λ — сопротивлению проводника. В связи с этим отношение δ/λ назовем внутренним тепловым сопротивлением

$$R_{\text{вн}} = \frac{\delta}{\lambda} \quad (\text{XVI-15})$$

б. Граничные условия второго рода. При этом задано значение плотности теплового потока на граничных поверхностях пластины ($x=0$ и $x=\delta$), а значит, и при любом значении x , так как $q = \text{const}$.

В связи с тем, что $q = -\lambda \frac{dT}{dx}$, задание величины q означает задание тангенса угла наклона температурной прямой (см. рис. 108), т. е. величины dT/dx . Действительно, первая произвольная константа в формуле (XVI-12) оказывается равной

$$C_1 = -\frac{q}{\lambda}.$$

Что же касается второй константы C_2 , то для ее определения условий уже не остается, т. е. она может принимать любое значение.

Это означает, что при граничных условиях второго рода единственного решения задачи стационарной теплопроводности не существует. Заданному значению плотности теплового потока удовлетворяет бесчисленное множество прямых с угловым коэффициентом $-q/\lambda$. Для того, чтобы существовало единственное решение, т. е. чтобы было возможным определить вторую константу C_2 в решении уравнения (XVI-12), необходимо задать какое-либо дополнительное условие, например температуру на одной из поверхностей пластины или температуру среды и коэффициент теплоотдачи с любой стороны.

в. Граничные условия третьего рода. Теплопередача через плоскую стенку. В этом случае задаются температура среды и коэффициенты теплоотдачи слева и справа от пластины (рассматривается случай, когда теплообмен между поверхностями пластины и окружающей средой осуществляется конвективной теплоотдачей).

На рис. 109 показано распределение температуры по толщине пластины и в среде (жидкости или газе) по обе стороны от пластины. Как ясно из предыдущего, распределение температуры по толщине пластины имеет линейный характер, однако значения температур на поверхностях T_1 и T_2 не заданы. В жидкости или газе по обе стороны от пластины происходит плавное изменение температуры от ее значения на поверхности (T_1 или T_2) до некоторой постоянной температуры (T_{o1} или T_{o2}), величина которой известна по условию задачи. Это изменение происходит на протяжении толщины некоторого слоя жидкости или газа ($\delta_{т1}$ или $\delta_{т2}$), который называется тепловым пограничным слоем (этот вопрос подробно рассматривается в гл. XVII). Заданные по условию коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 представляют собой коэффициенты пропорциональности между плотностью теплового потока (от среды к поверхности слева и от поверхности к среде справа) и соответствующей разностью температур ($T_{o1}-T_1$ или T_2-T_{o2}).

Рассматриваемый процесс переноса тепла от одной среды (жидкой или газообразной) к другой через твердую стенку носит название теплопередачи. Он вклю-

чает в себя три процесса: конвективную теплоотдачу от среды к поверхности пластины слева от последней, перенос тепла теплопроводностью через толщину пластины и конвективную теплоотдачу от поверхности пластины к среде справа.

Запишем выражения плотности теплового потока для каждого из указанных процессов:

$$q_1 = \alpha_1 (T_{o1} - T_1); \quad (a)$$

$$q_2 = \frac{\lambda}{\delta} (T_1 - T_2); \quad (б)$$

$$q_3 = \alpha_2 (T_2 - T_{o2}). \quad (в)$$

В связи с тем, что процесс стационарный, все эти три величины равны между собой, т. е. $q_1 = q_2 = q_3 = q$. Учитывая это обстоятельство, выразим соответствующие разности температур в формулах (а), (б) и (в) через плотность теплового потока q :

$$T_{o1} - T_1 = \frac{1}{\alpha_1} q; \quad (г)$$

$$T_1 - T_2 = \frac{\delta}{\lambda} q; \quad (д)$$

$$T_2 - T_{o2} = \frac{1}{\alpha_2} q. \quad (е)$$

Суммируя эти три равенства, после сокращений получим

$$T_{o1} - T_{o2} = q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right),$$

откуда

$$q = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} (T_{o1} - T_{o2}). \quad (XVI-16)$$

Таким образом, и в случае теплопередачи плотность теплового потока пропорциональна разности температур сред, расположенных по обе стороны от разделяющей их стенки. Коэффициент пропорциональности в выражении (XVI-16) носит название коэффициента теплопередачи

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (XVI-17)$$

Величина, обратная коэффициенту теплопередачи и представляющая собой суммарное тепловое сопротивление, имеет, следовательно, вид

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (\text{XVI-17a})$$

В связи с тем, что одно из слагаемых в этом выражении δ/λ названо внутренним тепловым сопротивлением (XVI-15), логично считать, что величина, обратная коэффициенту теплоотдачи, представляет собой внешнее, или наружное, тепловое сопротивление

$$R_n = \frac{1}{\alpha}. \quad (\text{XVI-18})$$

Легко показать, что в случае многослойной стенки, состоящей из n слоев с толщинами δ_i и коэффициентами теплопроводности λ_i , формула для коэффициента теплопередачи имеет тот же вид, что и (XVI-17), однако вместо внутреннего теплового сопротивления должна при этом фигурировать сумма тепловых сопротивлений всех слоев:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_2}}. \quad (\text{XVI-17б})$$

Таким образом, в любом случае теплопередачи плотность теплового потока определяется выражением

$$q = k(T_{01} - T_{02}). \quad (\text{XVI-19})$$

Итак, по формуле (XVI-19) можно определить плотность теплового потока, проходящего через пластину в случае граничных условий третьего рода, что позволяет найти все другие неизвестные величины и найти распределение температуры по толщине пластины, используя формулы (а), (б), (в).

Стационарное температурное поле в случае цилиндрической стенки без внутренних источников тепла

Для цилиндрической стенки, неограниченно простирающейся в направлении оси x , в осесимметричном случае (т.е. при неизменных по граничным поверхностям стенки условиях) уравнение (XVI-9) принимает вид

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dT}{dr} = 0. \quad (\text{XVI-20})$$

Используя подстановку

$$\frac{dT}{dr} = u,$$

получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = 0,$$

которое легко интегрируется

$$\ln u + \ln r = \ln C_1.$$

Отсюда после потенцирования получаем

$$ur = C_1,$$

или, переходя к переменной T и выполняя разделение переменных, получим уравнение

$$dT = C_1 \frac{dr}{r},$$

интегрирование которого дает искомое решение

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2. \quad (\text{XVI-21})$$

Легко видеть, что плотность теплового потока не постоянна по толщине цилиндрической стенки. Действительно:

$$q = -\lambda \frac{dT}{dr} = -\frac{\lambda C_1}{r}, \quad (\text{a})$$

т.е. плотность теплового потока уменьшается по мере удаления от оси обратно пропорционально радиусу, что и естественно, так как при этом поверхность F , через которую проходит тепловой поток, растет пропорционально радиусу, в то время как этот поток $Q = qF$ остается постоянным.

Константы C_1 и C_2 в решении (XVI-21) находятся из граничных условий:

а. Граничные условия первого рода. Заданы температура внутренней поверхности стенки T_1 и температура наружной поверхности T_2 (рис. 110), т.е. $T(r_1) = T_1$; $T(r_2) = T_2$.

Применяя эти граничные условия к решению (XVI-21), получаем

$$\begin{cases} T_1 = C_1 \ln r_1 + C_2; \\ T_2 = C_1 \ln r_2 + C_2. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно C_1 и C_2 , находим

$$C_1 = (T_1 - T_2) \frac{1}{\ln \frac{r_1}{r_2}} ;$$

$$C_2 = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{\ln r_1}{\ln \frac{r_1}{r_2}} .$$

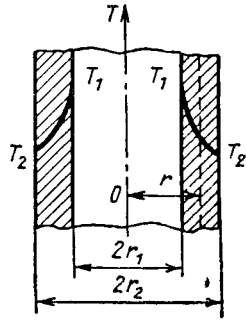


Рис. 110. Распределение температуры по толщине цилиндрической стенки

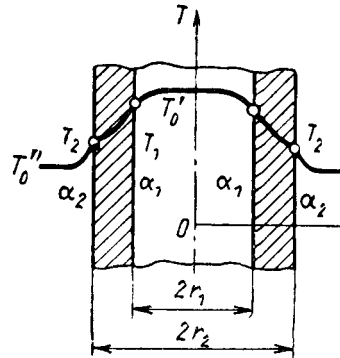


Рис. 111. Стационарное температурное поле цилиндрической стенки при граничных условиях третьего рода

Таким образом, искомое распределение температуры имеет вид

$$T(r) = T_1 - (T_1 - T_2) \frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} , \quad (\text{XVI-22})$$

т.е. температура меняется по толщине стенки по логарифмической кривой.

Используя распределение (XVI-22), легко найти плотность теплового потока, проходящего через любую цилиндрическую поверхность внутри стенки с текущим радиусом r :

$$q = -\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{\lambda (T_1 - T_2)}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} ,$$

откуда тепловой поток, проходящий через трубу длиной L , получается постоянным по толщине и равным

$$Q = 2\pi r L q = \frac{2\pi \lambda L (T_1 - T_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \text{ Вт.} \quad (\text{XVI-23})$$

Тепловой поток, проходящий через цилиндрическую стенку единичной длины, называется линейной плотностью теплового потока и выражается следующим образом:

$$Q_L = \frac{2\pi \lambda (T_1 - T_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{\pi (T_1 - T_2)}{R_{L \text{ вн}}} \text{ Вт/м,} \quad (\text{XVI-23a})$$

где $R_{L \text{ вн}} = \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}$ — внутреннее линейное тепловое сопротивление цилиндрической стенки.

б. Граничные условия второго рода. В этом случае, как и для плоской пластины, задача не имеет единственного решения. Предоставляем читателю доказать этот факт.

в. Граничные условия третьего рода (рис. 111). Теплопередача через цилиндрическую стенку. Заданы температуры окружающей среды внутри трубы T_{01} и снаружи T_{02} , а также коэффициенты конвективной теплоотдачи к внутренней поверхности трубы α_1 и от наружной α_2 .

Запишем выражения для линейной плотности теплового потока, подводимого к внутренней поверхности стенки (а), проходящего через стенку (б) и отводимого от ее наружной поверхности (в):

$$Q_{L1} = \alpha_1 (T_{01} - T_1) 2\pi r_1; \quad (\text{а})$$

$$Q_{L2} = \frac{2\pi \lambda (T_1 - T_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}}; \quad (\text{б})$$

$$Q_{L3} = \alpha_2 (T_2 - T_{02}) 2\pi r_2. \quad (\text{в})$$

Очевидно, что для сохранения стационарного режима эти три величины должны быть равны между собой $Q_{L1} = Q_{L2} = Q_{L3} = Q_L$. Напомним, что температуры на поверхностях стенки T_1 и T_2 неизвестны. Из формул (а), (б), (в) выражаем разности температур:

$$T_{01} - T_1 = \frac{1}{2\pi r_1 \alpha_1} Q_L; \quad (\text{г})$$

$$T_1 - T_2 = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1}}{2\pi\lambda} Q_L; \quad (\text{д})$$

$$T_2 - T_{o2} = \frac{1}{2\pi r_2 \alpha_2} Q_L, \quad (\text{е})$$

откуда, суммируя, получаем

$$T_{o1} - T_{o2} = \frac{Q_L}{\pi} \left(\frac{1}{2r_1\alpha_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2r_2\alpha_2} \right).$$

Таким образом, выражение для линейной плотности теплового потока имеет вид

$$Q_L = \frac{1}{\frac{1}{2r_1\alpha_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2r_2\alpha_2}} \pi (T_{o1} - T_{o2}), \quad (\text{XVI-24})$$

или

$$Q_L = k_L \pi (T_{o1} - T_{o2}), \quad (\text{XVI-24a})$$

где величина

$$k_L = \frac{1}{\frac{1}{2r_1\alpha_1} + \frac{1}{2\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2r_2\alpha_2}} \quad (\text{XVI-25})$$

называется линейным коэффициентом теплопередачи, а величина

$$R_{Lн} = \frac{1}{2r\alpha}$$

— внешним (наружным) линейным тепловым сопротивлением.

Определив по формуле (XVI-24) линейную плотность теплового потока и зная температуры среды, легко найти распределение температуры по толщине цилиндрической стенки при этих граничных условиях.

В случае теплопередачи через многослойную цилиндрическую стенку линейная плотность теплового потока определяется по формуле (XVI-24 а), а в выражении для линейного коэффициента теплопередачи суммируются внутренние линейные тепловые сопротивления слоев

$$k_L = \frac{1}{\frac{1}{2r_1\alpha_1} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{1}{2r_2\alpha_2}}. \quad (\text{XVI-26})$$

4. Теплопроводность при нестационарном режиме

Рассматривая нестационарные процессы теплопроводности, ограничимся, по необходимости, простейшими задачами. Более подробно этот вопрос рассмотрен в специальной литературе.

В частности, получим решения лишь для тела наиболее простой геометрической формы — неограниченной пластины конечной толщины. Однако эти результаты с принципиальной стороны оказываются применимыми и к любой другой конфигурации.

Далее, рассмотрим лишь симметричные задачи нестационарной теплопроводности, т. е. такие, когда граничные условия на обеих поверхностях пластины одинаковы. Поэтому начало координат расположим в осевой плоскости пластины, толщина которой равна 2δ .

Во всех случаях в качестве начальных условий принимаем равномерное распределение температуры по толщине пластины в начальный момент времени $t=0$.

При изучении задач нестационарной теплопроводности рассмотрим сначала задачу с граничными условиями третьего рода, как наиболее общий и наиболее часто встречающийся на практике случай. Действительно, в практике работы печей, например, чаще всего известны температура теплоносителя или внешнего источника тепла, а также закон теплообмена между этой средой или источником и поверхностью нагреваемого (или охлаждаемого) материала. С другой стороны, как показано ниже, решение для граничных условий первого рода может быть получено как частный случай из решения для граничных условий третьего рода. Что же касается задачи с граничными условиями второго рода, то ее решение может быть сведено к задаче с граничными условиями первого рода.

В случае нагрева и охлаждения пластины, размеры которой в направлении осей y и z неограничены, а толщина в направлении оси x конечна, температура изменяется только по толщине, так как $\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$, и уравнение теплопроводности без внутренних источников тепла (XVI-3) принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{XVI-27})$$

Имеются различные методы решения уравнений теплопроводности, т.е. отыскания функции $T(x, t)$. В частности, среди аналитических методов широко распространены метод разделения переменных (метод Фурье), различные операционные методы, использующие те или иные интегральные преобразования, а также различные конечно-разностные методы, позволяющие осуществлять численное решение данных уравнений, используя цифровые вычислительные машины. Кроме того, эти уравнения могут решаться путем использования математической аналогии между процессами теплопроводности и процессами другой физической природы, описываемыми теми же по форме дифференциальными уравнениями. Эти решения получают с помощью различных аналоговых устройств.

Прежде всего воспользуемся аналитическими методами, которые позволяют вскрыть и исследовать основные физические особенности рассматриваемых процессов при наименьшей затрате времени, но с получением наибольшей общности.

Используем простой и достаточно универсальный метод разделения переменных.

В соответствии с этим методом решение уравнения (XVI-27) находится в виде произведения двух функций

$$T(x, t) = \Phi(x)\Pi(t), \quad (\text{XVI-28})$$

одна из которых Φ , зависит только от пространственной координаты x , а другая, Π , — только от времени t .

Подставляя выражение (XVI-28) в уравнение (XVI-27) и разделяя переменные, получим

$$\frac{1}{a\Pi} \cdot \frac{d\Pi}{dt} = \frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d^2\Phi}{dx^2}.$$

В левой части этого равенства стоит выражение, зависящее только от t , а в правой — только от x . Известно, что две функции от двух разных и не зависящих друг от друга аргументов могут быть равны при любых значениях последних только в том случае, если они постоянны. Обозначим эту постоянную величину ($-k^2$). Тогда получаем вместо одного дифференциального уравнения в частных производных (XVI-27) два обыкновенных дифференциальных уравнения для определения функций $\Phi(x)$ и $\Pi(t)$ (в этом и заключается метод разделения переменных):

$$\frac{1}{\Pi} \cdot \frac{d\Pi}{dt} = -ak^2;$$

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + k^2\Phi = 0.$$

Решения этих уравнений весьма просты и имеют соответственно следующий вид:

$$\Pi(t) = C_1 e^{-ak^2 t}, \quad (a)$$

$$\Phi(x) = C_2 \cos(kx) + C_3 \sin(kx), \quad (б)$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Подставляя выражения (а) и (б) в (XVI-28), получим

$$T(x, t) = C_1 e^{-ak^2 t} [C_2 \cos(kx) + C_3 \sin(kx)],$$

или, обозначая $C_1 C_2 = C$ и $C_1 C_3 = D$:

$$T(x, t) = e^{-ak^2 t} [C \cos(kx) + D \sin(kx)]. \quad (XVI-29)$$

В таком виде надо искать решение уравнения (XVI-27). Термин «искать решение» означает необходимость определения произвольных констант, C, D и k из краевых (начальных и граничных) условий.

Одна из этих констант, а именно D , определяется сразу из следующих простых соображений. Так как рассматриваем лишь симметричные задачи (т.е. задачи с симметричными граничными условиями), распределение температуры по толщине пластины в любой момент времени должно быть симметричным относительно плоскости yOz (рис. 112). Это означает, что искомая функция $T(x, t)$ должна быть четной функцией координаты x . Однако входящая в решение (XVI-29) функция $\sin(kx)$ является нечетной, следовательно, $D=0$ для любой симметричной задачи.

Таким образом, решение уравнения (XVI-27) найдем в виде

$$T(x, t) = C e^{-k^2 a t} \cos(kx). \quad (XVI-30)$$

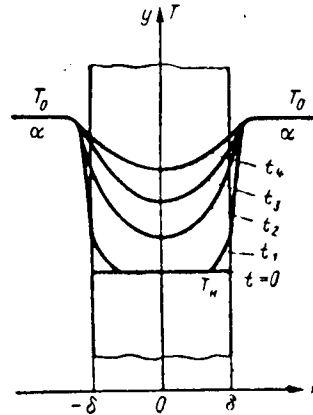


Рис. 112. Температурное поле в пластине при граничных условиях третьего рода

Произвольные константы k и C , входящие в это выражение, определяются из граничных и начальных условий задачи.

А. Граничные условия третьего рода при постоянной температуре окружающей среды. Имеем неограниченную плоскую пластину толщиной 2δ , которая нагревается (либо охлаждается) за счет конвективной теплоотдачи от окружающей среды, имеющей постоянную температуру T_0 , к ее поверхностям (см. рис. 112). В начальный момент времени ($t=0$) температура пластины, постоянная по ее толщине, равна T_n .

Процесс нагрева пластины протекает таким образом, что температура в любой ее точке возрастает, стремясь к температуре среды T_0 . При этом распределение температуры по сечению выравнивается, как это показано на рис. 112.

Запишем математическую формулировку задачи. Для определения зависимости температуры от координаты x и от времени t , т. е. функции $T(x, t)$, мы имеем уравнение теплопроводности (XVI-27):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

краевыми условиями для которого являются

$$T(x, 0) = T_n \quad (XVI-31)$$

в качестве начального условия и, в соответствии с выражением (XVI-8), уравнение

$$\pm \alpha [T_0 - T(\pm \delta, t)] = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\mp \delta} \quad (XVI-32)$$

в качестве граничного условия. Знак «плюс» перед левой частью соответствует условию на левой поверхности пластины ($x=-\delta$), когда направление теплового потока совпадает с положительным направлением оси x , знак «минус» — условию на правой поверхности ($x=+\delta$), когда тепловой поток направлен в отрицательную сторону оси x .

Введем избыточную температуру ϑ , выразив ее следующим образом:

$$\vartheta(x, t) = T_0 - T(x, t). \quad (XVI-33)$$

Для этой новой переменной математическая формулировка задачи имеет вид

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}; \quad (\text{XVI-27a})$$

$$\vartheta(x, 0) = T_0 - T_n = \vartheta_n; \quad (\text{XVI-31a})$$

$$\mp \alpha \vartheta(\mp \delta, t) = -\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=\mp \delta}. \quad (\text{XVI-32a})$$

Знаки в уравнении граничного условия (в левой части) изменились на обратные в связи с тем, что в соответствии с формулой (XVI-33)

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = - \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Так как уравнение (XVI-27 а) для избыточной температуры ϑ имеет тот же вид, что и уравнение (XVI-27) для абсолютной температуры T , решение будем искать в виде (XVI-30), т. е.

$$\vartheta(x, t) = C e^{-k^2 a t} \cos(kx), \quad (\text{XVI-30a})$$

где константы C и k определяются из краевых условий (XVI-31 а) и (XVI-32 а).

Вначале используем граничное условие (XVI-32 а), например на левой поверхности пластины $x = -\delta$. Подставляем решение (XVI-30 а) в уравнение (XVI-32 а):

$$\alpha C e^{-k^2 a t} \cos(k\delta) = \lambda C k e^{-k^2 a t} \sin k\delta;$$

отсюда после сокращений получаем

$$\operatorname{ctg}(k\delta) = \frac{k\lambda}{\alpha},$$

или, умножив числитель и знаменатель в правой части на δ :

$$\operatorname{ctg}(k\delta) = \frac{k\delta}{\frac{\alpha\delta}{\lambda}}. \quad (\text{XVI-34})$$

Таким образом, получили уравнение, из которого можно найти одну из определяемых констант, а именно k . Однако из этого уравнения удобно находить не саму эту величину, а ее произведение на полутолщину пластины, которое мы обозначим $\mu = k\delta$ и назовем характеристическим числом. Безразмерный комплекс $\alpha\delta/\lambda$ в знаменателе правой части уравнения (XVI-34) обозначим

$$Bi = \frac{\alpha\delta}{\lambda} \quad (\text{XVI-35})$$

и назовем критерием Био. Физический смысл этой величины рассмотрим ниже, а сейчас заметим, что критерий Био является постоянной величиной и включает в себя важнейшие параметры задачи: коэффициент теплоотдачи, характерный геометрический размер тела и коэффициент теплопроводности материала тела.

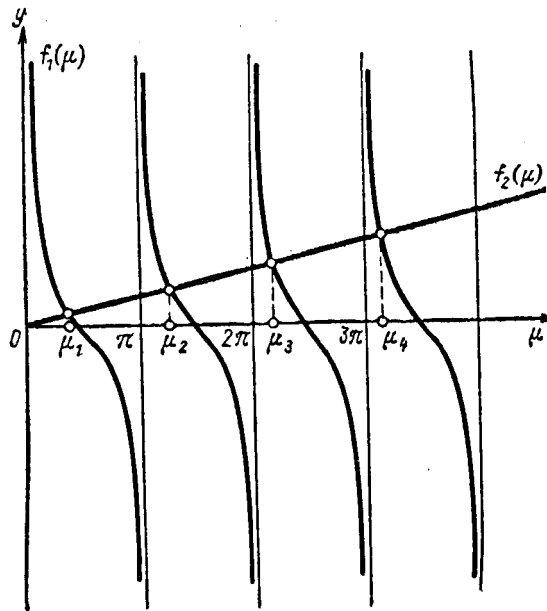


Рис. 113. Графическое решение характеристического уравнения

Итак, уравнение, служащее для отыскания одной из констант (характеристического числа μ) и называемое характеристическим уравнением, имеет с учетом введенных обозначений следующий вид:

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{\mu}{Bi}. \quad (\text{XVI-34a})$$

Это уравнение является трансцендентным, а потому требует графического решения для определения характеристического числа μ . Обозначим левую часть уравнения (XVI-34 а) $f_1(\mu)$, а правую $f_2(\mu)$, и построим графики этих функций (рис. 113). Первый из этих гра-

фигов представляет собой котангенсоиду, являющуюся периодической функцией аргумента μ с периодом π , а второй — прямую с угловым коэффициентом $1/Bi$. Абсциссы точек пересечения этих графиков дают корни характеристического уравнения.

Как видно из рис. 113, уравнение (XVI-34 а) имеет бесчисленное множество таких корней, т.е. имеется бесконечное множество значений характеристического числа μ_n (или константы k_n), удовлетворяющих уравнению (XVI-27 а) и граничному условию (XVI-32 а). Это означает, что имеется бесконечное множество частных решений уравнения (XVI-27 а) с граничным условием (XVI-32 а), сумма которых в связи с линейностью уравнения (XVI-27 а) является его общим решением:

$$\vartheta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\mu_n^2 \frac{at}{\delta^2}} \cos\left(\mu_n \frac{x}{\delta}\right). \quad (\text{XVI-36})$$

Заметим, что все характеристические числа μ_n в этом решении известны как корни характеристического уравнения (XVI-34 а), причем каждое из них определяется только величиной критерия Био:

$$\mu_n = \mu_n(Bi).$$

Заметим также, что безразмерная величина at/δ^2 , стоящая в показателе экспоненты, является величиной переменной (так как содержит одну из независимых переменных t), представляет собой по существу безразмерное время, называется числом Фурье и обозначается

$$Fo = \frac{at}{\delta^2}. \quad (\text{XVI-37})$$

Таким образом, решение (XVI-36) можно записать в виде

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\mu_n^2 Fo} \cos(\mu_n X), \quad (\text{XVI-36a})$$

где $X = \frac{x}{\delta}$ — безразмерная координата.

В решении (XVI-36) или (XVI-36 а) неизвестными остаются лишь все значения константы C_n . В связи с тем, что это решение должно удовлетворять не только граничному условию (XVI-32 а), но и начальному

(XVI-31 а), определим C_n из этого начального условия. Для этого полагаем в выражении (XVI-36а) $F_0=0$ (что означает $t=0$) и получаем выражение

$$\vartheta_n = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\mu_n X), \quad (\text{XVI-38})$$

которое представляет собой разложение величины ϑ_n в ряд с заданными значениями μ_n , определяемыми уравнением (XVI-34 а). Используя это уравнение, можно показать, что $\cos(\mu_n X)$ и $\cos(\mu_m X)$ (μ_m — любое характеристическое число, выбранное из бесконечного множества μ_n) являются ортогональными функциями, т. е.

$$\int_{-\delta}^{\delta} \cos(\mu_n X) \cos(\mu_m X) dx = 0$$

при любом $n \neq m$, и лишь при $n=m$ этот интеграл является конечной величиной.

Это обстоятельство позволяет определить значения C_n , для чего умножим обе части выражения (XVI-38) на $\cos(\mu_m X)$ и проинтегрируем по x в пределах толщины пластины. В результате, меняя порядок суммирования и интегрирования (обе операции являются линейными), получим выражение

$$\vartheta_n \int_{-\delta}^{\delta} \cos(\mu_m X) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_{-\delta}^{\delta} \cos(\mu_m X) \cos(\mu_n X) dx,$$

в правой части которого все интегралы равны нулю, кроме одного, соответствующего случаю $n=m$. В результате этого последнее выражение сводится к следующему:

$$\vartheta_n \int_{-\delta}^{\delta} \cos(\mu_n X) dx = C_n \int_{-\delta}^{\delta} \cos^2(\mu_n X) dx.$$

Отсюда легко определить C_n . Действительно, помня о том, что $X = \frac{x}{\delta}$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} \cos(\mu_n X) dx &= 2 \int_0^{\delta} \cos(\mu_n X) dx = \frac{2\delta}{\mu_n} \sin \mu_n; \\ \int_{-\delta}^{\delta} \cos^2(\mu_n X) dx &= \int_0^{\delta} 2 \cos^2(\mu_n X) dx = \frac{\delta}{\mu_n} (\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n). \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$C_n = 2\vartheta_n \frac{\sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}, \quad (\text{XVI-39})$$

и решение (XVI-36) принимает окончательно вид

$$\vartheta = \vartheta_n \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos(\mu_n X) e^{-\mu_n^2 Fo}. \quad (\text{XVI-40})$$

Тем самым задача решена, т.е. можно найти значение избыточной, а значит, и абсолютной температуры в любой точке пластины в любой момент времени.

Заметим, что в полученном решении (XVI-40) независимые переменные фигурируют в безразмерном виде, т.е. роль координаты играет безразмерная величина $X = \frac{x}{\delta}$, а роль времени — число Фурье $Fo = \frac{at}{\delta^2}$. В связи с этим логично и искомую функцию, т.е. избыточную температуру, представить также в безразмерном виде. Для этого достаточно разделить обе части выражения (XVI-40) на начальную избыточную температуру ϑ_n , которая известна из условий задачи. В результате получаем решение в безразмерном виде:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos(\mu_n X) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (\text{XVI-41})$$

где $\theta = \frac{T_o - T}{T_o - T_n}$ — относительная (безразмерная) избыточная температура.

Таким образом, полученный результат (XVI-41) означает, что безразмерная избыточная температура θ является функцией критерия Био (так как $\mu_n = \mu_n(Bi)$, числа Фурье (т.е. безразмерного времени) и безразмерной координаты:

$$\theta = \theta(Bi, Fo, X), \quad (\text{XVI-42})$$

где Bi — параметр задачи, а Fo и X — безразмерные независимые переменные. Термин «безразмерное время», относящийся к числу Фурье, означает, что для пластин различной толщины и с различными коэффициентами температуропроводности (но при одинаковых значениях критерия Био) температурные кривые, построенные в координатах θ — X , будут совпадать при равенстве чисел Фурье, т.е. не в одни и те же моменты времени, а в сход-

ственные моменты времени, определяемые из условия равенства чисел Фурье.

Конкретный вид решения (XVI-41) получен для неограниченной плоской пластины, однако принципиально в таком же виде, т.е. в виде (XVI-42), получаются решения и для тел любой другой геометрической формы. Изменяется лишь смысл, вкладываемый в понятие «характерный размер тела». Например, если в случае плоской пластины и для симметричной задачи роль характерного размера у нас играла полутолщина пластины, то в случае цилиндра и шара роль характерного размера играет радиус R . При этом числа Био и Фурье имеют вид:

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda};$$

$$Fo = \frac{at}{R^2}.$$

Заметим, что найти принципиальный вид (XVI-42) решения нестационарной задачи теплопроводности при граничных условиях третьего рода можно и не выполняя аналитического решения, а путем анализа уравнения и краевых условий методами теории подобия.

Решение задачи в виде (XVI-42), т.е. в виде зависимости от одного параметра и двух независимых переменных, дает возможность представить большое разнообразие решений в графическом виде. Действительно, было бы совершенно невозможно изобразить графически зависимость температуры от шести параметров и двух независимых переменных:

$$T = T(T_0, T_\infty, \alpha, \lambda, a, \delta, x, t).$$

Графики, построенные по аналитическим решениям задач нестационарной теплопроводности и существенно облегчающие расчеты, приведены в справочниках в виде зависимости относительной избыточной температуры (ось ординат) от числа Фурье (ось абсцисс). Для каждой кривой из семейства, представленного на таком графике, параметром является критерий Био. Графики построены отдельно для трех геометрических форм — пластины, бесконечно длинного цилиндра и шара, а также для двух значений безразмерной координаты $X=0$ (центр пластины, цилиндра, шара) и $X=1$ (поверхность пластины, цилиндра и шара).

Прежде чем перейти к исследованию полученного решения (XVI-41), рассмотрим физический смысл критерия Био в задачах нестационарной теплопроводности. Для этого представим критерий Био, определяемый формулой (XVI-35), в виде

$$Bi = \frac{\alpha}{\lambda/\delta}.$$

В числителе этого выражения стоит коэффициент теплоотдачи α , который характеризует интенсивность внешнего теплообмена, т.е. теплоотдачи от среды к поверхности тела (или наоборот). В знаменателе стоит величина отношения коэффициента теплопроводности к характерному размеру тела. Эта величина, как о том свидетельствует, например, формула (XVI-14) характеризует интенсивность внутреннего теплообмена между поверхностью тела и внутренними его слоями.

Таким образом, критерий Био представляет собой отношение параметров, характеризующих интенсивность процессов внешнего и внутреннего теплообмена.

С другой стороны, выражение (XVI-35) для критерия Био может быть представлено в виде

$$Bi = \frac{\frac{\delta}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha}}.$$

Из этого выражения следует, что, в соответствии с формулами (XVI-15) и (XVI-18), критерий Био представляет собой отношение внутреннего теплового сопротивления к наружному.

Обе эти формулировки позволяют заключить, что характер распределения температуры в объеме нагреваемого (или охлаждаемого) тела определяется величиной критерия Био. Чем больше эта величина, тем больше интенсивность внешнего теплообмена по сравнению с интенсивностью внутреннего, или, что то же, тем больше внутреннее тепловое сопротивление по сравнению с наружным. В связи с этим большим значениям критерия Био должна соответствовать меньшая равномерность распределения температуры в объеме тела. И наоборот, чем меньше величина критерия Био, тем равномернее распределена температура в объеме тела на протяжении всего периода нагрева (охлаждения),

так как, например, подводимый к поверхности тепловой поток в этом случае весьма интенсивно отводится к внутренним слоям тела.

Исследование решения. Для того чтобы доказать справедливость только что высказанных заключений о влиянии критерия Био на процесс нагрева или охлаждения тела при граничных условиях третьего рода, необходимо проанализировать полученное нами для случая плоской пластины решение, т. е. рассмотреть, к чему сводится это решение при очень малых значениях критерия Био ($Bi \rightarrow 0$) и при очень больших его значениях ($Bi \rightarrow \infty$).

1. $Bi \rightarrow \infty$. Тонкое в тепловом отношении тело.

При этом угловой коэффициент $1/Bi$ в правой части характеристического уравнения (XVI-34 а) стремится к бесконечности, следовательно, прямая на графике (см. рис. 113) совпадает с осью ординат. Поэтому корни характеристического уравнения (характеристические числа) принимают следующий ряд значений:

$$0; \pi; 2\pi; 3\pi; \dots (n-1)\pi; \dots$$

Легко видеть из формулы (XVI-39), что при таких значениях характеристического числа все коэффициенты C_n , кроме первого, обращаются в нуль, а для первого получается неопределенность (типа нуль, деленный на нуль), которую необходимо раскрыть.

Обозначим коэффициент, стоящий в решении (XVI-41) под знаком суммы, через D_n :

$$D_n = \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n}. \quad (\text{XVI-43})$$

Эта величина, очевидно, пропорциональна коэффициенту C_n , что следует из формул (XVI-39) и (XVI-42). Раскроем с помощью предельного перехода неопределенность для D_1 при $\mu_1 = 0$:

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow 0} D_1 = \lim_{\mu_1 \rightarrow 0} \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} = \lim_{\mu_1 \rightarrow 0} \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_1^3} = 1.$$

В связи с этим решение для рассматриваемого случая сводится к следующему:

$$\theta = \cos(\mu_1 X) e^{-\mu_1^2 Fo}, \quad (\text{XVI-44})$$

где осталось определить конкретный вид связи между первым характеристическим числом и критерием Био.

Так как при малых значениях $\mu_1 \sin \mu_1 \approx \mu_1$ и $\operatorname{tg} \mu_1 \approx \mu_1$, характеристическое уравнение (XVI-34 а) принимает вид

$$\frac{1}{\mu_1} = \frac{\mu_1}{Bi},$$

откуда получаем

$$\mu_1 = \sqrt{Bi},$$

и решение (XVI-44) выразится следующим образом:

$$\theta = \cos(\sqrt{Bi} X) e^{-BiFo},$$

или, поскольку $\lim_{Bi \rightarrow 0} [\cos(\sqrt{Bi} X)] = 1$, так как $0 \leq X \leq 1$, получаем окончательно

$$\theta = e^{-BiFo}. \quad (XVI-45)$$

Таким образом, для случая $Bi \rightarrow 0$ получается, как и предполагали, равномерное распределение температуры по объему тела на протяжении всего периода нагрева (охлаждения), так как θ в решении (XVI-45) не зависит от X . Кроме того, температура во всех точках тела растет (падает) во времени по экспоненциальному закону.

Тела, для которых выполняется условие малости критерия Бю (практически $Bi \leq 0,25$) и которые, следовательно, нагреваются (охлаждаются) равномерно по всему объему, называют тонкими телами. В этом случае лимитирующим звеном в процессе нагрева (охлаждения) тела является внешний теплообмен.

2. $Bi \rightarrow \infty$. Граничные условия первого рода при постоянной температуре поверхности.

Случай бесконечно большого значения критерия Бю означает, что интенсивность внешнего теплообмена бесконечно велика по сравнению с интенсивностью внутреннего.

Для тела конечного размера, т.е. для пластины конечной толщины, и при конечной величине коэффициента теплопроводности случай $Bi \rightarrow \infty$ означает $\alpha \rightarrow \infty$, а это приводит к тому, что температура поверхности тела становится равной температуре окружающей среды (которая задана по условиям задачи и постоянна). Действительно, в соответствии с формулой Ньютона (XVI-6), разность температур между средой и поверхностью тела выражается как

$$T_o - T_w = \frac{q}{\alpha},$$

откуда следует, что при $\alpha \rightarrow \infty$

$$T_o - T_w \rightarrow 0,$$

так как плотность теплового потока есть величина конечная. Следовательно, при $Bi \rightarrow \infty$ (практически при $Bi \geq 100$) интенсивность внешнего теплообмена настолько велика (т. е. наружное тепловое сопротивление настолько мало), что поверхность тела мгновенно принимает температуру окружающей среды. В результате заданной величиной оказывается уже температура поверхности тела, т. е. получаем задачу с граничными условиями первого рода. Это означает в рассматриваемом случае, что в момент времени $t=0$ температура поверхности пластины мгновенно достигает заданного значения T_w и в дальнейшем остается постоянной (рис. 114).

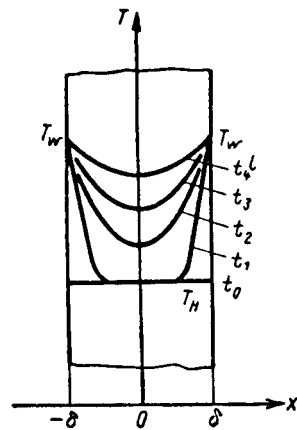


Рис. 114. Температурное поле в пластине при граничных условиях первого рода

Математическая формулировка этой задачи выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}; \vartheta(x, 0) = \vartheta_n; \vartheta(\pm \delta, t) = 0,$$

где избыточная температура $\vartheta = T_w - T$ и $\vartheta_n = T_w - T_o$.

Решение этой задачи получим как частный случай решения задачи с граничными условиями третьего рода (XVI-41) при $Bi \rightarrow \infty$. С этой целью найдем характеристические числа.

Характеристическое уравнение (XVI-34a) при $Bi \rightarrow \infty$ принимает вид

$$\operatorname{ctg} \mu_n = 0,$$

т. е. прямая на рис. 113 совпадает с осью абсцисс. Отсюда получаем

$$\mu_n = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots, (2n-1)\frac{\pi}{2}, \dots \quad (\text{XVI-46})$$

При этом

$$\sin \mu_n = +1 \text{ при нечетных } n$$

и

$$\sin \mu_n = -1 \text{ при четных } n,$$

т. е.

$$\sin \mu_n = (-1)^{n+1}.$$

В связи с тем, что $\cos \mu_n = 0$,

$$D_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{\mu_n},$$

и искомое решение принимает вид

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\mu_n} \cos(\mu_n X) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (\text{XVI-47})$$

где $\theta = \frac{T_w - T}{T_w - T_n}$, а μ_n определяется последовательностью (XVI-46).

Таким образом, в случае граничных условий первого рода относительная избыточная температура θ определяется как функция числа Фурье и безразмерной координаты:

$$\theta = \theta(Fo, X). \quad (\text{XVI-48})$$

В этом случае критерий Био не является параметром задачи, и лимитирующим звеном в процессе нагрева (или охлаждения тела) является внутренний теплообмен.

Граничные условия первого рода осуществляются на практике при очень высокой интенсивности внешнего теплообмена. Так например, при закалке изделий в жидкостях, температура кипения которых ниже температуры нагрева изделия под закалку, коэффициент теплоотдачи от поверхности изделия к кипящей жидкости имеет порядок $10^3 - 10^4 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$. В этих условиях чаще всего величина критерия Био получается очень большой, что приводит к практически мгновенному выравниванию температуры поверхности изделия и температуры жидкости. При этом температура поверхности остается постоянной и равной температуре кипения жидкости.

Б. Граничные условия второго рода при постоянной плотности теплового потока на поверхности.

Эти граничные условия довольно редко встречаются на практике. Одним из немногих случаев практической реализации гранич-

ных условий второго рода с постоянной плотностью теплового потока на поверхности является начальный период работы высокотемпературных нагревательных печей. Действительно, поскольку в этом случае имеет место теплообмен излучением, плотность теплового потока на поверхности нагреваемого тела пропорциональна разности четвертых степеней температур источника излучения и поверхности

$$q_w \sim (T_o^4 - T_w^4).$$

Однако на протяжении начального периода после помещения в печь холодного нагреваемого тела температура его поверхности T_w настолько мала по сравнению с температурой печи T_o , что ею можно пренебречь, тем более, что в последнем выражении фигурируют четвертые степени этих температур. При этом приближенно получаем, что

$$q_w \sim T_o^4,$$

и, если температура печи T_o постоянна, то на поверхность нагреваемого тела поступает постоянный во времени тепловой поток.

Итак, имеем неограниченную плоскую пластину с толщиной 2δ , температура которой в момент времени $t=0$ постоянна по толщине и равна T_n . В момент времени $t=0$ на обе поверхности пластины начинает поступать одинаковый и постоянный в дальнейшем тепловой поток с плотностью q_w (рис. 115).

Математическая формулировка задачи имеет следующий вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad (\text{XVI-49})$$

$$T(x, 0) = T_n; \quad (\text{XVI-49a})$$

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=\pm\delta} = \mp q_w. \quad (\text{XVI-49б})$$

Верхний знак в правой части граничного условия (XVI-49, б) относится к правой поверхности пластины, где тепловой поток направлен в отрицательную сторону оси x , нижний — к левой поверхности, где тепловой поток положителен (см. рис. 115).

Рассматриваемый случай нагрева тела постоянным тепловым потоком существенно отличается от предыдущих. Можно сказать, что при граничных условиях первого и третьего рода температурное поле с течением времени стремится к равновесию, т. е. температура в любой точке тела стремится либо к температуре окружающей среды T_o (при граничных условиях третьего рода), либо к температуре поверхности T_w (при граничных условиях первого рода). В случае же

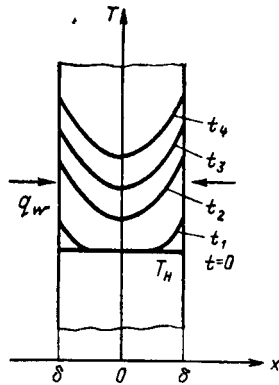


Рис. 115. Температурное поле в пластине при граничных условиях второго рода

нагрева постоянным тепловым потоком температура в любой точке тела неограниченно возрастает во времени.

Для решения этой задачи введем вместо температуры новую переменную — плотность теплового потока $q(x, t)$, связанную с температурой формулой постулата Фурье:

$$q(x, t) = -\lambda \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}.$$

Продифференцируем по x обе части уравнения (XVI-49):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right),$$

или, меняя порядок дифференцирования:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right).$$

Подставляя вместо $\partial T / \partial x$ его выражение через новую переменную

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{q}{\lambda},$$

после сокращений получим уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \quad (\text{XVI-50})$$

являющееся обычным уравнением теплопроводности (XVI-27), в котором, однако, роль искомой функции играет уже не температура $T(x, t)$, а плотность теплового потока $q(x, t)$.

Сформулируем краевые условия для этого уравнения:

$$q(x, 0) = 0; \quad (\text{XVI-50a})$$

$$q(\pm \delta, t) = \mp q_w. \quad (\text{XVI-50b})$$

Таким образом, получили для новой переменной $q(x, t)$ задачу теплопроводности с граничными условиями первого рода. Действительно, граничным условием (XVI-50 б) задаются значения искомой функции на поверхностях пластины.

Эта задача отличается от рассмотренной выше лишь тем, что она является антисимметричной, так как на поверхностях пластины значения искомой функции равны по величине и противоположны по знаку. Поэтому решение в этом случае следует искать в отличие от (XVI-30) в виде

$$q(x, t) = C e^{-k^2 a t} \sin(kx),$$

Указанное обстоятельство, однако, не меняет принципиальных основ решения задачи. Поэтому не будем останавливаться на математических подробностях решения, в результате которого определяется функция $q(x, t)$. Зная эту функцию, нетрудно определить распределение температуры по толщине пластины и его изменение во

времени $T(x, t)$. Действительно, используя формулу постулата Фурье, получаем

$$T(x, t) = -\frac{1}{\lambda} \int q(x, t) dx + \varphi(t) + C, \quad (\text{XVI-51})$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция времени, которая появляется в выражении (XVI-51) в связи с тем, что функцию двух переменных $q(x, t)$ интегрируем лишь по одной x ;

C — произвольная константа интегрирования.

Выполняя интегрирование уравнения (XVI-51) и определяя $\varphi(t)$ и C из краевых условий задачи (XVI-50 а) и (XVI-50 б), получим искомое решение

$$\vartheta = \frac{q_w \delta}{2\lambda} \left[2Fo + X^2 - \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\mu_n^2} \cos(\mu_n X) e^{-\mu_n^2 Fo} \right], \quad (\text{XVI-52})$$

где $\vartheta(x, t) = T(x, t) - T_n$.

Разделив обе части выражения (XVI-52) на постоянную величину $q_w \delta / 2\lambda$, имеющую размерность температуры, получим

$$\vartheta = 2Fo + X^2 - \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\mu_n^2} \cos(\mu_n X) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (\text{XVI-52a}) \quad \vartheta F^0$$

где безразмерная избыточная температура ϑ выражается как

$$\vartheta = (T - T_n) \frac{2\lambda}{q_w \delta}.$$

Таким образом, в случае граничных условий второго рода безразмерная избыточная температура также является функцией числа Фурье и безразмерной координаты

$$\vartheta = \vartheta(Fo, X).$$

Регулярный тепловой режим

Физическая природа процессов нестационарной теплопроводности такова, что в случае неизменного теплового воздействия на поверхность тела ($T_0 = \text{const}$, либо $T_w = \text{const}$, либо $q_w = \text{const}$) по истечении некоторого времени с начала процесса появляется некоторая, сохраняющаяся в дальнейшем регулярность в распределении температуры по объему тела и в изменении температуры в каждой точке тела во времени; при этом процесс теплопроводности перестает зависеть от начальных условий. Наступает так называемый регулярный тепловой режим.

Это свойство рассматриваемых процессов, естественно, должно найти отражение в полученных решениях

(XVI-41), (XVI-47) и (XVI-52), которые исследуем с точки зрения изменения их структуры во времени.

При этом, как показано ниже, много общих черт имеет регулярный тепловой режим при граничных условиях третьего и первого рода, т. е. когда температурное поле стремится к равновесию. Существенные отличия от этих двух случаев характерны для регулярного теплового режима при граничных условиях второго рода. Поэтому рассмотрим отдельно регулярный режим при граничных условиях третьего (наиболее общий случай) и первого (частный случай предыдущего) рода и регулярный режим при граничных условиях второго рода.

а. Регулярный тепловой режим при граничных условиях третьего и первого рода.

Напомним, что при граничных условиях третьего рода полученное решение для плоской пластины имеет вид (XVI-41)

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \mu_n}{\mu_n + \sin \mu_n \cos \mu_n} \cos(\mu_n X) e^{-\mu_n^2 Fo}.$$

В связи с тем, что каждое следующее характеристическое число больше предыдущего, $\mu_{n+1} > \mu_n$ (см. рис. 113), и так как μ_n стоит в квадрате в отрицательном показателе экспоненты, ряд в правой части (XVI-41) быстро сходится. Поскольку безразмерное время, т. е. число Фурье, также фигурирует в отрицательном показателе экспоненты, ясно, что этот ряд сходится тем быстрее, чем больше величина Fo , т. е. чем больше времени прошло с начала процесса. Практически уже при $Fo \geq 0,3$ сумма ряда равна его первому члену, и решение (XVI-41) принимает вид

$$\theta = \frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \cos(\mu_1 X) e^{-\mu_1^2 Fo}, \quad (\text{XVI-53})$$

где μ_1 определяется величиной критерия Био, т. е. $\mu_1 = \mu_1(Bi)$, и, как было показано выше, при изменении Bi от нуля до бесконечности возрастает от нуля до $\pi/2$ ($0 \leq \mu_1 \leq \pi/2$).

Таким образом, при $Fo \geq 0,3$ наступает регулярный тепловой режим, который характеризуется тем, что температура в любой точке тела изменяется по закону простой экспоненты, а распределение температуры по

объему тела и изменение его во времени не зависят от начальных условий.

Так как $Fo = \frac{at}{\delta^2}$, возьмем логарифм от выражения (XVI-53):

$$\ln \theta = \ln \left[\frac{2 \sin \mu_1}{\mu_1 + \sin \mu_1 \cos \mu_1} \cos(\mu_1 X) \right] - \mu_1^2 \frac{a}{\delta^2} t, \quad (\text{XVI-54})$$

т. е. на протяжении регулярного теплового режима логарифм относительной избыточной температуры в любой точке тела линейно меняется со временем. Постоянную скорость этого изменения обозначим m ; очевидно:

$$m = \mu_1^2 \frac{a}{\delta^2}. \quad (\text{XVI-55})$$

Кроме того, дифференцируя выражение (XVI-54) по времени, получим

$$\frac{\partial \ln \theta}{\partial t} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -m. \quad (\text{XVI-56})$$

Таким образом, величина m представляет собой скорость изменения логарифма температуры во времени, или относительную скорость изменения температуры, и имеет размерность $1/\text{с}$. Эта величина называется темпом нагрева (охлаждения), она постоянна для всех точек тела и не изменяется во времени. Конкретный вид зависимости (XVI-55) получен для случая неограниченной плоской пластины, однако и во всех других случаях темп нагрева (охлаждения) тела зависит от первого характеристического числа, коэффициента температуропроводности, формы и характерного размера тела. Поскольку характеристическое число при граничных условиях третьего рода является функцией только критерия Био, следовательно, и темп нагрева (охлаждения) тела зависит от критерия Био:

$$m = m(Bi).$$

Понятно, что конкретный вид этой зависимости определяется геометрической формой тела и что с ростом критерия Био m возрастает. Математически это следует из того факта, что с возрастанием критерия Био возрастает μ_1 (см. рис. 113), а m , как это следует, например, из формулы (XVI-55), пропорционально μ_1^2 . Физически это также является очевидным, так как возрастание критерия Био означает возрастание относительной ин-

тенсивности внешнего теплообмена, что должно привести к увеличению скорости нагрева (охлаждения) тела, т. е. к увеличению темпа нагрева (охлаждения).

Итак, к перечисленным выше свойствам регулярного теплового режима при граничных условиях третьего рода можно теперь добавить еще одно: темп нагрева (охлаждения) в этом случае является функцией критерия Био.

Как указано ранее, граничные условия первого рода представляют собой предельный случай граничных условий третьего рода при $Bi \rightarrow \infty$, и решение в этом случае имеет вид (XVI-47)

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\mu_n} \cos(\mu_n X) e^{-\mu_n^2 Fo}, \quad (\text{XVI-47})$$

где $\mu_n = (2n-1) \frac{\pi}{2}$.

Здесь также $\mu_{k+1} > \mu_k$, а потому ряд быстро сходится. Причем сходимость осуществляется тем быстрее, чем больше критерий Фурье. Так что при $Fo \geq 0,3$ сумма ряда практически равна первому его члену, наступает регулярный режим, и решение принимает вид

$$\theta = \frac{2}{\mu_1} \cos(\mu_1 X) e^{-\mu_1^2 Fo},$$

а поскольку $\mu_1 = \pi/2$,

$$\theta = \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} X\right) e^{-\frac{\pi^2}{4} Fo}. \quad (\text{XVI-57})$$

Логарифмируя это выражение, получаем

$$\ln \theta = \ln \left[\frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} X\right) \right] - \frac{\pi^2}{4} \frac{a}{\delta^2} t, \quad (\text{XVI-58})$$

т. е. температура в каждой точке тела меняется по экспоненциальному закону, а логарифм температуры — линейно. Эта постоянная скорость изменения логарифма температуры, или относительная скорость изменения температуры, которую мы обозначим m_{∞} (так как при этом $Bi \rightarrow \infty$), как и ранее получаемая путем дифференцирования по времени решения (XVI-58)

$$\frac{\partial \ln \theta}{\partial t} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -m_{\infty},$$

выражается в случае плоской пластины следующим образом:

$$m_{\infty} = \frac{\pi^2}{4\delta^2} a \quad (\text{XVI-59})$$

и называется темпом нагрева (охлаждения) при граничных условиях первого рода.

Таким образом, в этом случае темп нагрева (охлаждения) пропорционален коэффициенту температуропроводности, а коэффициент пропорциональности определяется формой и размерами тела и называется коэффициентом формы k :

$$m_{\infty} = ka. \quad (\text{XVI-60})$$

В случае плоской пластины коэффициент формы, как это видно из (XVI-59), выражается как

$$k = \frac{\pi^2}{4\delta^2};$$

в случае шара с радиусом R

$$k = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{R}\right)^2};$$

в случае параллелепипеда с ребрами l_1, l_2, l_3 .

$$k = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l_2}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l_3}\right)^2}$$

и, наконец, в случае цилиндра с радиусом R и длиной l

$$k = \frac{1}{\left(\frac{2,405}{R}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}.$$

Таким образом, регулярный тепловой режим при граничных условиях первого рода ($Bi \rightarrow \infty$, практически $Bi \geq 100$) принципиально отличается от предыдущего случая только тем, что темп нагрева (охлаждения) не зависит от критерия Био, а определяется только формой, размерами тела и его коэффициентом температуропроводности. Это и естественно, так как задача в этом случае является чисто внутренней, т. е. нагрев (охлаждение) тела лимитируется только внутренним теплообменом.

Рассмотренное свойство стремящихся к равновесию процессов нестационарной теплопроводности, которое заключается в наступлении на определенной стадии

($Fo \geq 0,3$) регулярного теплового режима, имеет большое значение как с точки зрения расчетов этих процессов, так и с точки зрения возможностей экспериментального определения различных теплофизических параметров.

Действительно, расчеты по формулам регулярного режима (XVI-53) и (XVI-57) неизмеримо проще расчетов по полным формулам (XVI-41) и (XVI-47).

С другой стороны, темп нагрева (охлаждения) весьма просто определяется экспериментально: для этого достаточно снять кривую изменения температуры в любой точке тела, представить ее в координатах $\ln \theta - t$ и найти угол наклона соответствующей прямой к оси времени. Зная темп нагрева (охлаждения) при граничных условиях первого рода, легко определить с помощью формул типа (XVI-60) коэффициент температуропроводности. Если определен темп нагрева (охлаждения) при граничных условиях третьего рода и известен коэффициент температуропроводности, можно найти с помощью формул типа (XVI-55) критерий Био, а значит — коэффициент теплопроводности λ (при известном коэффициенте теплоотдачи α) либо коэффициент теплоотдачи (при известном коэффициенте теплопроводности), так как $Bi = \alpha \delta / \lambda$.

б. Регулярный тепловой режим при граничных условиях второго рода.

Для случая граничных условий второго рода при $q_w = \text{const}$ полученное решение имеет вид

$$\theta = 2Fo + X^2 - \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{\mu_n^2} \cos(\mu_n X) e^{-\mu_n^2 Fo}. \quad (\text{XVI-52a})$$

В связи с тем, что ряд в этом выражении быстро сходится и при $Fo \geq 0,3$ сумма его практически равна нулю, решение для регулярного теплового режима при этих граничных условиях имеет простой вид:

$$\theta = 2Fo + X^2 - \frac{1}{3}. \quad (\text{XVI-61})$$

Выражение (XVI-61) означает, что температура в любой точке тела меняется во времени линейно, а распределение температуры по сечению на протяжении всего периода регулярного режима не меняется и имеет вид квадратичной параболы (см. рис. 115).

5. Применение метода аналогий и метода конечных разностей для решения задач теплопроводности

До сих пор процессы стационарной и нестационарной теплопроводности исследовались аналитическими методами. Однако отнюдь не всегда эти методы оказываются эффективными. В ряде случаев, например при сложной геометрической конфигурации, при сложных краевых условиях (начальных и граничных), аналитическое решение получить невозможно. В этих случаях используют методы аналогий или различные разновидности метода конечных разностей.

Широко используется, например, моделирование двумерных стационарных температурных полей на электропроводной бумаге с помощью метода ЭГДА (электрогидродинамическая аналогия¹). Этот метод может применяться и для моделирования трехмерных стационарных полей, но тогда вместо электропроводной бумаги используют раствор электролита.

Идея метода заключается в том, что, так как уравнение двумерного стационарного температурного поля при $\lambda = \text{const}$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

и уравнение поля электрического потенциала $U(x, y)$ при постоянной проводимости

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

полностью идентичны, распределение температуры $T(x, y)$ и распределение потенциала $U(x, y)$, представленные в безразмерном виде, при одинаковых граничных условиях также оказываются идентичными. Таким образом, достаточно вырезать из электропроводной бумаги фигуру, соответствующую поперечному сечению тела, создать на ее контурах соответствующие граничные условия и измерить, например, с помощью мостовой схемы распределение электрического потенциала $U(x, y)$. Это распределение, представленное в безразмерном виде, после пересчета (если он необходим, т. е. если модель выполнена в

¹ Это название связано с тем, что исторически метод возник как средство моделирования потенциальных течений идеальной жидкости.

некотором масштабе) дает искомое распределение температур также в безразмерном виде. Граничные условия при этом моделируются без труда: граничным условиям первого рода соответствует задание на контуре некоторого потенциала, граничным условиям второго рода — некоторой плотности тока (так как аналогом плотности теплового потока является плотность электрического тока), граничным условиям третьего рода — некоторого потенциала, соответствующего заданной температуре окружающей среды, и электрического сопротивления, соответствующего внешнему тепловому сопротивлению $1/\alpha$.

Аналогия процессов теплопроводности с электрическими процессами применяется и для моделирования нестационарных температурных полей с помощью так называемых электроинтеграторов R — C . Идея этого метода заключается в том, что весь объем исследуемого тела разбивается на конечные элементарные объемы, и собирается электрическая схема, состоящая из конденсаторов (число которых равно числу элементарных объемов) и сопротивлений. При этом теплостойкость каждого элементарного объема соответствует емкости конденсатора, а тепловым сопротивлениям между объемами — электрические сопротивления. Аналогом температуры в этом случае также является электрическое напряжение.

Подобный принцип используется для моделирования нестационарных температурных полей с помощью гидравлических интеграторов системы В. С. Лукьянова. В этом случае теплостойкостям элементарных слоев тела соответствуют площади поперечного сечения сообщающихся сосудов, соединенных капиллярами. Тепловым сопротивлениям соответствуют гидравлические сопротивления капилляров, а температуру показывает высота столба жидкости в каждом из сообщающихся сосудов.

Этими примерами отнюдь не исчерпывается перечень аналоговых устройств, используемых для решения задач теплопроводности. Методы аналогий находят широкое применение и непрерывно совершенствуются, позволяя решать все более сложные задачи. Этими методами, в частности, удается решить и ряд нелинейных задач нестационарной теплопроводности.

В связи с интенсивным развитием вычислительной техники большое распространение за последнее время получили различные конечно-разностные методы решения нестационарных задач теплопроводности. Сущность всех

этих методов состоит в том, что непрерывное изменение всех величин (т. е. независимых переменных и температуры), фигурирующих в уравнении теплопроводности, заменяется ступенчатым. Это означает, что бесконечно малые приращения переменных, т. е. дифференциалы, заменяются конечными приращениями, или конечными разностями. В результате такой замены решение уравнения сводится к повторению большого количества простых арифметических операций, что вполне доступно для цифровой вычислительной машины, а иногда — и для ручного счета.

В настоящее время известно большое количество различных конечно-разностных схем, позволяющих решать разнообразные, в том числе весьма сложные, задачи теплопроводности.

Покажем на простейшем примере одномерной задачи нестационарной теплопроводности принцип, лежащий в основе одной наиболее распространенной группы конечно-разностных методов (так называемая явная схема).

Имеем неограниченную плоскую пластину толщиной δ , нестационарное температурное поле которой описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (\text{XVI-27})$$

Разобьем всю толщину пластины на n конечных элементарных слоев, толщина каждого из которых равна Δx , т. е.

$$\delta = n\Delta x.$$

Отсчет времени также будем вести конечными интервалами Δt .

Тогда производную температуры по времени в левой части уравнения можно приближенно выразить через конечные приращения температуры и времени следующим образом:

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_{i+1,k} - T_{i,k}}{\Delta t}, \quad (\text{a})$$

где $T_{i+1,k}$ — температура некоторого k -того элементарного слоя в момент времени $i+1$, т. е. по прошествии времени $t = (i+1) \Delta t$ с начала процесса;

$T_{i,k}$ — температура того же k -того слоя в предыдущий, т. е. в i -тый момент времени.

Точно так же первую производную температуры по координате x можно представить как

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1 \approx \frac{T_{i,k} - T_{i,k-1}}{\Delta x},$$

т. е. как приращение температуры по координате, отнесенное к приращению координаты. Здесь $T_{i,k}$ — температура k -того элементарного слоя в i -тый момент времени, а $T_{i,k-1}$ — температура предыдущего $(k-1)$ -го слоя в тот же момент времени.

Очевидно, что соседнее, т. е. взятое через отрезок Δx , значение этой производной будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_2 \approx \frac{T_{i,k+1} - T_{i,k}}{\Delta x}.$$

Разность между этими двумя величинами, отнесенная к отрезку Δx , даст, очевидно, конечно-разностное выражение для второй производной температуры по координате

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_2 - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_1}{\Delta x},$$

или

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i,k+1} - 2T_{i,k} + T_{i,k-1}}{\Delta x^2}. \quad (6)$$

Подставляя выражения (а) и (б) вместо соответствующих производных в исходное дифференциальное уравнение (XVI-27), получим это уравнение в конечно-разностном виде:

$$\frac{T_{i+1,k} - T_{i,k}}{\Delta t} = a \frac{T_{i,k+1} - 2T_{i,k} + T_{i,k-1}}{\Delta x^2}. \quad (в)$$

Так как в задачах нестационарной теплопроводности всегда известно начальное распределение температуры, цель расчетов методом конечных разностей заключается в том, чтобы зная распределение температуры в данный, например i -тый, момент времени, найти это распределение в последующий, т. е. в $(i+1)$ -й момент. Таким образом, искомой величиной в уравнении (в) является температура k -того элементарного слоя в $(i+1)$ -й момент времени, которую мы должны выразить через температуры любых слоев, но обязательно в предыдущий (т. е. в

i -тый) момент времени. Из уравнения (в) получаем выражение

$$T_{i+1,k} = \frac{a\Delta t}{\Delta x^2} (T_{i,k+1} - 2T_{i,k} + T_{i,k-1}) + T_{i,k}, \quad (\text{XVI-62})$$

которое является основной расчетной формулой любого метода конечных разностей (в случае одномерной задачи и при использовании явной схемы).

Действительно, зная начальное распределение температуры, легко с помощью формулы (XVI-62) определить распределение температуры в следующий момент времени, т. е. по истечении времени Δt . Имея это распределение, по формуле (XVI-62) легко определяется распределение температуры в момент времени $2\Delta t$ и т. д. Таким образом, рекуррентная формула (XVI-62) позволяет определить значение температуры для любого элементарного слоя в любой момент времени.

Весьма существенным здесь является то обстоятельство, что безразмерный коэффициент, стоящий перед скобками в формуле (XVI-62), т. е. величина $a\Delta t/\Delta x^2$, может принимать любые значения, так как приращение времени Δt и координаты Δx можно выбирать произвольно и независимо одно от другого. Однако, как показывает анализ, значение этого коэффициента ограничено условием

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

При нарушении этого условия решение становится неустойчивым, т. е. в процессе счета по рекуррентной формуле (XVI-62) неизбежные ошибки (например, ошибки округления) накапливаются, что приводит к неверным результатам.

Именно величиной этого коэффициента и отличаются различные варианты метода конечных разностей. Например, метод Шмидта соответствует случаю $a\Delta t/\Delta x^2 = 1/2$, метод Несси и Нисолли — случаю $a\Delta t/\Delta x^2 = 1/4$ и т. д.

Итак, в методе конечных разностей Шмидта принимается, что коэффициент перед скобками в выражении (XVI-62) равен $1/2$. Тогда это выражение принимает вид

$$T_{i+1,k} = \frac{T_{i,k+1} + T_{i,k-1}}{2},$$

т. е. в соответствии с этим методом температура данно-

го элементарного слоя в данный момент времени определяется как среднеарифметическое из температур соседних слоев в предыдущий момент времени.

Метод Несси и Нисолли ($a \Delta t / \Delta x^2 = 1/4$) дает формулу

$$T_{i+1, k} = \frac{1}{4} T_{i, k+1} + \frac{1}{2} T_{i, k} + \frac{1}{4} T_{i, k-1}.$$

или

$$T_{i+1, k} = \frac{\frac{T_{i, k+1} + T_{i, k}}{2} + \frac{T_{i, k} + T_{i, k-1}}{2}}{2}.$$

Таким образом, в соответствии с этим методом, температура данного элементарного слоя находится путем двукратного применения операции определения среднеарифметического: вначале усредняются температуры данного слоя и двух соседних (предыдущего и последующего), а затем находится среднеарифметическое из полученных значений. Именно этот принцип лежит в основе работы гидростатического интегратора Д. В. Будрина. Гидростатический интегратор в отличие от гидравлического интегратора В. С. Лукьянова не является аналоговым устройством. Он представляет собой счетный прибор, выполняющий операции, указанные в последней формуле, путем последовательного соединения сообщающихся сосудов, что приводит к усреднению уровней жидкости в них. Причем высота столба жидкости в каждой паре сосудов соответствует (в произвольном масштабе) температуре в данном элементарном слое.

Глава XVII

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПРИ ЗАТВЕРДЕВАНИИ И ПЛАВЛЕНИИ

Процессы переноса тепла теплопроводностью, протекающие при изменении агрегатного состояния, т. е. при затвердевании (кристаллизации) или при плавлении материала, имеют очень большое значение и широко распространены в технике и особенно в металлургии. Существенно новой чертой этих процессов по сравнению с рассмотренными выше является наличие поверхности раздела твердой и жидкой фаз. Эта поверхность, на которой происходит превращение вещества (затвердевание или плавление) и которую назовем фронтом превращения, не является неподвижной, а перемещается по мере про-

текания процесса затвердевания или плавления. Температура на этой поверхности остается постоянной и равной температуре превращения (считаем, что превращение происходит в точке) и именно на этой поверхности выделяется (при затвердевании) или поглощается (при плавлении) скрытая теплота превращения.

При решении задач такого типа необходимо определить закон движения фронта превращения, так как ряд граничных условий задается на этой поверхности, и именно движением фронта превращения определяется процесс перестройки температурного поля в обеих фазах.

В связи с тем, что при изменении агрегатного состояния вещества изменяются и его теплофизические свойства, очевидно, что по обе стороны от фронта превращения эти свойства различны.

Из сказанного ясно, что задачи теплопроводности с изменением агрегатного состояния вещества являются весьма сложными, нелинейными задачами. Поэтому точные решения задач такого типа получены лишь для немногих наиболее простых частных случаев.

Рассмотрим задачи затвердевания и плавления для полуограниченного тела при граничных условиях первого рода. Это как раз те случаи, когда можно получить точное решение задачи теплопроводности с изменением агрегатного состояния. Однако эти решения имеют и практическое значение для тел конечных размеров, например для плоской стенки, если можно пренебречь влиянием теплообмена на одной из граничных поверхностей.

1. Нестационарное температурное поле в случае полуограниченного тела при граничных условиях первого рода

Вначале получим решение обычной (без фазовых превращений) нестационарной задачи теплопроводности для полуограниченного тела, поверхностью которого является плоскость $x=0$. В направлении

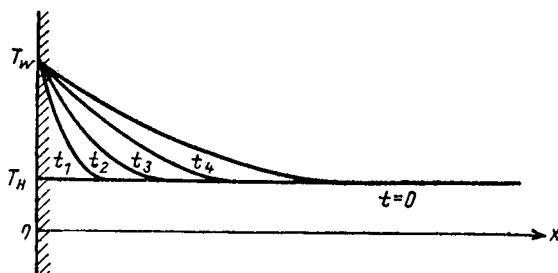


Рис. 116. Температурное поле в полуограниченном теле при граничных условиях первого рода

осей y и z тело неограничено (рис. 116). Начальное распределение температуры — однородное, т. е. температура всюду равна T_n .

В момент времени $t=0$ температура на поверхности мгновенно изменяется, становится равной T_w и в дальнейшем остается постоян-

ной. На рис. 116 схематично показано, как с течением времени перестраивается температурное поле в полугограниченном теле.

Запишем математическую формулировку задачи. Уравнение теплопроводности имеет для рассматриваемого случая вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; \quad (\text{XVII-1})$$

начальное условие

$$T(x, 0) = T_n; \quad (\text{XVII-2})$$

граничное условие

$$T(0, t) = T_w, \quad (\text{XVII-3})$$

как и ранее требуется найти функцию $T(x, t)$, т. е. распределение температуры в объеме тела и его изменение во времени.

Введем новую переменную — избыточную температуру ϑ , определив ее следующим образом:

$$\vartheta(x, t) = T(x, t) - T_w.$$

Для этой новой переменной математическая формулировка задачи имеет вид:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}; \quad (\text{XVII-4})$$

$$\vartheta(x, 0) = T_n - T_w = \vartheta_n; \quad (\text{XVII-5})$$

$$\vartheta(0, t) = 0. \quad (\text{XVII-6})$$

Как и ранее, решение задачи будем искать в виде

$$\vartheta = e^{-k^2 a t} [C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx)],$$

где постоянные коэффициенты C_1 , C_2 и k должны быть найдены из краевых условий задачи (XVII-5), (XVII-6).

Воспользовавшись граничным условием (XVII-6), получим $C_1 = 0$, следовательно, решение необходимо искать в виде

$$\vartheta = C e^{-k^2 a t} \sin(kx). \quad (\text{XVII-7})$$

Как и в § 4 главы XVI, коэффициент C найдем из начального условия (XVII-5), а для коэффициента k условий уже не осталось, поскольку граничное условие (XVII-6) мы уже использовали для определения C_1 . Отсюда следует, что величина k может принимать любые (в том числе и нецелые) значения от 0 до ∞ , и при этом все частные решения вида (XVII-7) будут удовлетворять уравнению (XVII-4) и краевым условиям (XVII-5), (XVII-6). Поэтому общее решение задачи, которое в § 4 главы XVI представляли в виде суммы частных решений, в рассматриваемом случае выразится как интеграл от (XVII-7) по k , т. е. в этом случае сумма ряда переходит в интеграл

$$\vartheta = \int_0^{\infty} C e^{-k^2 a t} \sin(kx) dk, \quad (\text{XVII-8})$$

где остается определить коэффициент C , т. е. найти его связь с переменной интегрирования k . С этой целью воспользуемся начальным

условием (XVII-5). Полагая в решении (XVII-8) $t=0$, получаем выражение

$$\vartheta_H = \int_0^{\infty} C \sin(kx) dk, \quad (\text{XVII-9})$$

которое представляет собой интеграл Фурье, т. е. предельный случай ряда Фурье для функции $\vartheta_H(x)$ (в данном случае это постоянная величина). Действительно, интеграл Фурье для функции $\vartheta_H(x)$ имеет, как известно, следующий вид:

$$\vartheta_H(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \vartheta_H(x') dx' \int_0^{\infty} \sin(kx) \sin(kx') dk,$$

где x' — переменная интегрирования, или иначе

$$\vartheta_H(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \vartheta_H(x') \sin(kx') dx' \right] \sin(kx) dk. \quad (\text{XVII-10})$$

Сравнивая выражения (XVII-9) и (XVII-10), находим

$$C = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \vartheta_H(x') \sin(kx') dx',$$

или учитывая, что $\vartheta_H(x') = \text{const}$,

$$C = \frac{2}{\pi} \vartheta_H \int_0^{\infty} \sin(kx') dx'. \quad (\text{XVII-11})$$

Подставляя полученное выражение для C (XVII-11) в решение (XVII-8), имеем

$$\vartheta = \int_0^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \vartheta_H \int_0^{\infty} \sin(kx') dx' \right] e^{-k^2 at} \sin(kx) dk,$$

или, что то же:

$$\vartheta = \frac{2}{\pi} \vartheta_H \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-k^2 at} \sin(kx') \sin(kx) dk \right] dx'. \quad (\text{XVII-12})$$

Найдем стоящий в квадратных скобках интеграл по k :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-k^2 at} \sin(kx') \sin(kx) dk &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-k^2 at} \cos[k(x' - x)] dk - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-k^2 at} \cos[k(x' + x)] dk = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{at}} \left[e^{-(x'-x)^2/4at} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-(x'+x)^2/4at} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя этот результат в решение (XVII-12), получим

$$\vartheta = \frac{\vartheta_n}{2\sqrt{\pi at}} \int_0^\infty [e^{-(x'-x)^2/4at} - e^{-(x'+x)^2/4at}] dx'. \quad (\text{XVII-13})$$

Введем новую переменную

$$u = \frac{(x' \mp x)}{2\sqrt{at}},$$

тогда

$$x' = 2\sqrt{at}u \pm x; dx' = 2\sqrt{at}du.$$

При $x'=0$, т. е. на нижнем пределе интегрирования в решении (XVII-13), $u = \mp \frac{x}{2\sqrt{at}}$, а при $x'=\infty$, т. е. на верхнем пределе, $u=\infty$. Таким образом, вместо выражения (XVII-13) получаем

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{\vartheta_n}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{-x/2\sqrt{at}}^\infty e^{-u^2} du - \int_{x/2\sqrt{at}}^\infty e^{-u^2} du \right) = \\ &= \frac{\vartheta_n}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/2\sqrt{at}}^{x/2\sqrt{at}} e^{-u^2} du, \end{aligned}$$

или, поскольку подынтегральное выражение — четная функция:

$$\vartheta(x, t) = \frac{2\vartheta_n}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{at}} e^{-u^2} du. \quad (\text{XVII-14})$$

Это выражение представляет собой решение данной задачи, которое легко представить в безразмерном виде, если разделить обе части на ϑ_n :

$$\theta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{at}} e^{-u^2} du, \quad (\text{XVII-15})$$

где $\theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_n} = \frac{T - T_w}{T_n - T_w}$ — безразмерная избыточная температура.

Правая часть этого выражения является табулированной функцией, называется функцией (или интегралом) ошибок и обозначается

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du.$$

Таким образом, решение нестационарной задачи теплопроводности для полуограниченного тела при граничных условиях первого рода выражается функцией ошибок

$$\theta = \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right), \quad (\text{XVII-16})$$

или, обозначая безразмерную переменную $\frac{x}{2\sqrt{at}} = X$, получим

$$\theta = \operatorname{erf}(X). \quad (\text{XVII-17})$$

Функция ошибок является нечетной, т. е. $\operatorname{erf}(-z) = -\operatorname{erf}(z)$; при возрастании аргумента от 0 до ∞ она увеличивается от 0 до 1.

2. Нестационарное температурное поле в случае затвердевания полуограниченного объема жидкости при граничных условиях первого рода

Рассмотрим объем жидкости, ограниченный поверхностью $x=0$ (рис. 117). До начала процесса затвердевания температура жидкости постоянна и равна T_n . В момент времени $t=0$ температура на

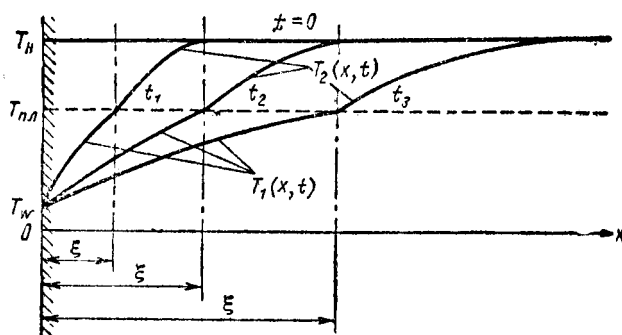


Рис. 117. Температурное поле при затвердевании полуограниченного объема жидкости

поверхности $x=0$ мгновенно падает до величины T_w , меньшей температуры плавления (или затвердевания) $T_{пл}$, а затем все время остается постоянной.

Очевидно, что в момент времени $t=0$ образуется плоский фронт затвердевания, первоначально расположенный в плоскости $x=0$, а затем продвигающийся по мере затвердевания жидкости в положительном направлении оси x , так что его положение ξ является функцией времени $\xi = \xi(t)$. Таким образом, координата $\xi(t)$ представляет собой границу раздела двух фаз: при $x < \xi$ располагается твердая фаза с температурой $T_1(x, t)$, теплоемкостью c_1 , коэффициентом теплопроводности λ_1 и коэффициентом температуропроводности a_1 ; при $x > \xi$ — жидкая фаза с температурой $T_2(x, t)$ и теплофизическими константами c_2 , λ_2 и a_2 . Будем считать, что плотности твердой и

жидкой фаз одинаковы и равны ρ , что теплофизические параметры не зависят от температуры и жидкость неподвижна.

На движущейся поверхности фронта превращения можно сформулировать два граничных условия. Первое условие заключается в том, что на этой поверхности температура равна постоянной температуре превращения, т. е. при $x = \xi(t)$

$$T_1(\xi) = T_2(\xi) = T_{пл}.$$

Второе условие представляет собой баланс тепла на фронте превращения. При перемещении фронта на $d\xi$ в элементе объема с толщиной $d\xi$ и с площадью грани, параллельной плоскости yOz , равной 1, выделяется количество тепла $\rho L d\xi$, где L — скрытая теплота затвердевания, Дж/кг. Таким образом, разность между количеством тепла, подводимым к фронту со стороны жидкости и отводимым от него со стороны твердой фазы за время dt в расчете на единицу поверхности фронта, равна этой величине, т. е.

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{x=\xi} dt - \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)_{x=\xi} dt = \rho L d\xi,$$

или

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial T_1}{\partial x} \right)_{x=\xi} - \lambda_2 \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} \right)_{x=\xi} = \rho L \frac{d\xi}{dt}.$$

Распределение температуры в областях твердой и жидкой фаз должно описываться уравнением теплопроводности для каждой из этих областей:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2};$$

Как и ранее, будем пользоваться избыточными температурами, определив их следующим образом:

$$\vartheta_1(x, t) = T_1(x, t) - T_w; \quad \vartheta_2(x, t) = T_2(x, t) - T_w;$$

$$\vartheta_{пл} = T_{пл} - T_w; \quad \vartheta_n = T_n - T_w.$$

Запишем математическую формулировку задачи в терминах избыточных температур. Уравнения теплопроводности для твердой и жидкой фаз

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2}; \quad (\text{XVII-18})$$

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x^2}; \quad (\text{XVII-19})$$

Начальное условие

$$\vartheta_2(x, 0) = \vartheta_n. \quad (\text{XVII-20})$$

Граничные условия на фронте затвердевания:

$$\vartheta_1(\xi) = \vartheta_2(\xi) = \vartheta_{пл}; \quad (\text{XVII-21})$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} \right)_{x=\xi} - \lambda_2 \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \right)_{x=\xi} = \rho L \frac{d\xi}{dt}, \quad (\text{XVII-22})$$

Граничное условие в плоскости $x=0$

$$\vartheta_1(0, t) = 0. \quad (\text{XVII-23})$$

Очевидно, что на большом расстоянии от фронта превращения температура жидкости остается постоянной и равной ее начальной температуре, т. е. при $x \rightarrow \infty$ имеем

$$\vartheta_2(\infty, t) = \vartheta_n. \quad (\text{XVII-24})$$

Выражения (XVII-18) — (XVII-24) составляют математическую формулировку задачи затвердевания полубесконечного объема жидкости при сформулированных выше допущениях.

Как было показано в предыдущем параграфе, функция ошибок $\text{erf}(x/2\sqrt{at})$ является решением задачи теплопроводности для полубограниченного тела при граничных условиях первого рода. Поэтому решение для каждой из двух областей будем искать в виде

$$\vartheta_1 = A_1 + B_1 \text{erf}(x/2\sqrt{a_1 t}); \quad (\text{XVII-25})$$

$$\vartheta_2 = A_2 + B_2 \text{erf}(x/2\sqrt{a_2 t}), \quad (\text{XVII-26})$$

где A_1 , B_1 и A_2 , B_2 — постоянные коэффициенты, которые следует определить из краевых условий задачи (XVII-20) — (XVII-24).

Используя условие (XVII-23), находим $A_1=0$, так как $\text{erf}(0)=0$. Таким образом, вместо выражения (XVII-25) получаем

$$\vartheta_1 = B_1 \text{erf}(x/2\sqrt{a_1 t}). \quad (\text{XVII-27})$$

Воспользовавшись условием (XVII-24), получаем $A_2+B_2=\vartheta_n$, так как $\text{erf}(\infty)=1$, откуда $A_2=\vartheta_n-B_2$, и вместо выражения (XVII-26) имеем

$$\vartheta_2 = \vartheta_n - B_2 \text{erfc}(x/2\sqrt{a_2 t}), \quad (\text{XVII-28})$$

где

$$\text{erfc}(x/2\sqrt{a_2 t}) = 1 - \text{erf}(x/2\sqrt{a_2 t}).$$

Подставив выражения (XVII-27) и (XVII-28) в условие (XVII-21) на фронте затвердевания, получим

$$B_1 \text{erf}(\xi/2\sqrt{a_1 t}) = \vartheta_n - B_2 \text{erfc}(\xi/2\sqrt{a_2 t}) = \vartheta_{\text{пл}}. \quad (\text{XVII-29})$$

Так как B_1 , B_2 и ϑ_n — величины постоянные, это равенство может выполняться только при постоянстве аргументов $\xi/2\sqrt{a_1 t}$ и $\xi/2\sqrt{a_2 t}$, т. е. только в том случае, когда координата фронта ξ пропорциональна $\sqrt{t}$. Положим, например,

$$\xi = 2\mu\sqrt{a_1 t}, \quad (\text{XVII-30})$$

где μ — некоторый постоянный безразмерный множитель, значение которого найдем ниже, а пока определим коэффициенты B_1 и B_2 из уравнения (XVII-29):

$$B_1 = \frac{\vartheta_{\text{пл}}}{\text{erf}(\xi/2\sqrt{a_1 t})},$$

или с учетом равенства (XVII-30)

$$B_1 = \frac{\vartheta_{пл}}{\operatorname{erf}(\mu)} ;$$

$$B_2 = \frac{\vartheta_n - \vartheta_{пл}}{\operatorname{erfc}(\xi/2 \sqrt{a_2 t})} ,$$

или с учетом равенства (XVII-30)

$$B_2 = \frac{\vartheta_n - \vartheta_{пл}}{\operatorname{erfc}(\mu \sqrt{a_1/a_2})} .$$

Подставляя эти результаты в выражения (XVII-27) и (XVII-28) для ϑ_1 и ϑ_2 , получаем

$$\vartheta_1 = \frac{\vartheta_{пл}}{\operatorname{erf}(\mu)} \operatorname{erf}(x/2 \sqrt{a_1 t}) ; \quad (\text{XVII-31})$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_n - \frac{\vartheta_n - \vartheta_{пл}}{\operatorname{erfc}(\mu \sqrt{a_1/a_2})} \operatorname{erfc}(x/2 \sqrt{a_2 t}) . \quad (\text{XVII-32})$$

Полученные выражения (XVII-31) и (XVII-32) представляют собой решение задачи, если известна величина коэффициента μ . Для его определения используем условие (XVII-22) на фронте затвердевания. Подставляя в уравнение (XVII-22) равенства (XVII-30) — (XVII-32), получаем

$$\vartheta_{пл} \lambda_1 \frac{e^{-\mu^2}}{\operatorname{erf}(\mu)} - \frac{\lambda_2 (\vartheta_n - \vartheta_{пл}) \sqrt{a_1} e^{-\mu^2 a_1/a^2}}{\sqrt{a_2} \operatorname{erfc}(\mu \sqrt{a_1/a_2})} = \sqrt{\pi} \rho L a_1 \mu ,$$

так как $\operatorname{erf}'(z) = (2/\sqrt{\pi}) e^{-z^2}$.

Разделив обе части этого уравнения на λ_1 и на $\vartheta_{пл}$, найдем безразмерную форму его

$$\frac{e^{-\mu^2}}{\operatorname{erf}(\mu)} - \frac{K_\lambda}{K_a} (\theta_n - 1) \frac{e^{-\mu^2/K_a}}{\operatorname{erfc}(\mu/\sqrt{K_a})} = \sqrt{\pi} Ko \mu , \quad (\text{XVII-33})$$

где $K_\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ — безразмерный критерий, представляющий собой отношение коэффициентов теплопроводности жидкой и твердой фаз;

$K_a = \frac{a_2}{a_1}$ — то же, но для коэффициентов температуропроводности;

$\theta_n = \frac{\vartheta_n}{\vartheta_{пл}} = \frac{T_n - T_w}{T_{пл} - T_w}$ — безразмерная избыточная температура жид-

кости в начальный момент времени; $Ko = \frac{L}{c_1 \vartheta_{пл}}$ — безразмерный

критерий, представляющий собой отношение скрытой теплоты затвердевания к количеству тепла, выделяющемуся при охлаждении единицы массы вещества от температуры затвердевания до заданной температуры поверхности T_w ; эту величину называют иногда критерием Коссовича.

Выражение (XVII-33) представляет собой уравнение, называемое характеристическим и служащее для нахождения коэффициента μ , который, в соответствии с равенством (XVII-30), определяет скорость продвижения фронта затвердевания. Это уравнение является трансцендентным, а потому требует графического либо численного реше-

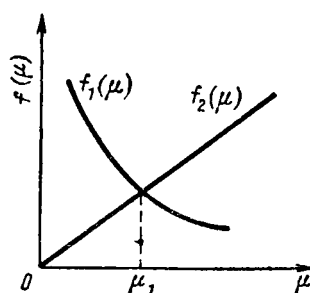


Рис. 118. Графический метод решения характеристического уравнения (XVII-33):
 $f_1(\mu)$ — левая часть уравнения,
 $f_2(\mu)$ — правая часть

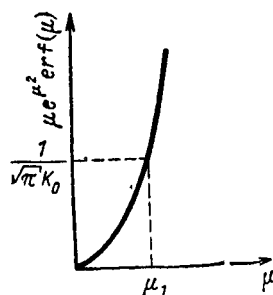


Рис. 119. Графический метод решения характеристического уравнения (XVII-37)

ния с использованием таблиц функции ошибок. Графический способ нахождения μ приведен на рис. 118.

Как это следует из характеристического уравнения (XVII-33), коэффициент μ , а следовательно, и скорость продвижения фронта затвердевания зависят от следующих безразмерных параметров: K_λ , K_a , K_0 , θ_n , т. е.

$$\mu = \mu(K_\lambda, K_a, K_0, \theta_n). \quad (\text{XVII-34})$$

Решения (XVII-31) и (XVII-32) также могут быть представлены таким образом, чтобы в них фигурировали лишь безразмерные переменные и параметры. Разделив обе части каждого из этих выражений на $\theta_{пл}$ и обозначив безразмерную независимую переменную

$$\frac{x}{2\sqrt{a_1 t}} = X,$$

получим

$$\theta_1 = \frac{\operatorname{erf}(X)}{\operatorname{erf}(\mu)}; \quad (\text{XVII-35})$$

$$\theta_2 = \theta_n - (\theta_n - 1) \frac{\operatorname{erfc}(X/\sqrt{K_a})}{\operatorname{erfc}(\mu/\sqrt{K_a})}, \quad (\text{XVII-36})$$

где $\theta_1 = \frac{T_1 - T_w}{T_{пл} - T_w}$ — безразмерная избыточная температура твердой фазы и $\theta_2 = \frac{T_2 - T_w}{T_{пл} - T_w}$ — безразмерная избыточная температура жид-

кой фазы. Выражения (XVII-35), (XVII-36) и характеристическое уравнение (XVII-33) полностью определяют решение поставленной задачи. В соответствии с этим решением температура каждой из фаз зависит от четырех безразмерных параметров и одной безразмерной переменной:

$$\theta_1 = \theta_1(K_\lambda, K_a, Ko, \theta_n, X);$$

$$\theta_2 = \theta_2(K_\lambda, K_a, Ko, \theta_n, X).$$

Полученное решение существенно упрощается в случае, если начальная температура жидкости равна температуре затвердевания, т. е. когда отсутствует начальный перегрев расплава. В этом случае $T_n = T_{пл}$; $\theta_n = \frac{T_n - T_w}{T_{пл} - T_w} = 1$, и характеристическое уравнение для определения μ (XVII-33) принимает следующий простой вид:

$$\mu e^{\mu^2} \operatorname{erf}(\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi Ko}}. \quad (\text{XVII-37})$$

На рис. 119 показан график зависимости левой части уравнения (XVII-37) от μ .

Из характеристического уравнения (XVII-37) следует, что в этом частном случае коэффициенты μ , а следовательно, и скорость перемещения фронта затвердевания зависят только от критерия Коссовича, т. е.

$$\mu = \mu(Ko).$$

Выражение для безразмерной избыточной температуры твердой фазы при этом имеет вид (XVII-35), однако эта температура не зависит уже от критериев K_λ и K_a , поскольку от них не зависит μ , т. е.

$$\theta = \theta(Ko, X).$$

Что же касается температуры жидкой фазы, то она, понятно, не меняется и остается равной температуре плавления, т. е. $\theta_2 \equiv 1$.

Заметим, что полученное для этого случая решение не зависит от коэффициентов теплопроводности и температуропроводности жидкости λ_2 и a_2 , что и понятно, так как температурное поле в жидкой фазе однородное, и переноса тепла не происходит.

3. Нестационарное температурное поле в случае плавления полуограниченного тела при граничных условиях первого рода

Пусть в начальный момент времени полуограниченное тело, т. е. область $x \geq 0$, является твердым телом, имеющим постоянную температуру T_n . В момент времени $t=0$ температура в плоскости $x=0$ мгновенно возрастает до величины $T_w > T_{пл}$, а затем остается постоянной. При этом образуется фронт плавления, перемещающийся в положительном направлении оси x (рис. 120), т. е. координата его $\xi = \xi(t)$.

Сформулируем задачу расчета плавления тела, пользуясь теми же обозначениями, что и в предыдущем параграфе, и лишь избыточную температуру определим иначе:

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &= T_1 - T_n; & \vartheta_2 &= T_2 - T_n; \\ \vartheta_w &= T_w - T_n; & \vartheta_{пл} &= T_{пл} - T_n.\end{aligned}$$

Уравнения теплопроводности для твердой и жидкой фаз:

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial x^2} \quad (\text{XVII-38})$$

$$\frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial x^2} \quad (\text{XVII-39})$$

Начальное условие

$$\vartheta_1(x, 0) = 0. \quad (\text{XVII-40})$$

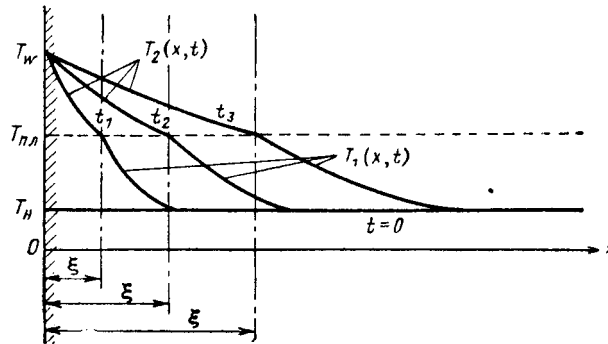


Рис. 120. Температурное поле при плавлении полугограниченного твердого тела

Граничные условия на фронте превращения (плавления) имеют, очевидно, такую же форму, как и в предыдущем параграфе:

$$\vartheta_1(\xi) = \vartheta_2(\xi) = \vartheta_{пл}; \quad (\text{XVII-41})$$

$$\lambda_1 \left(\frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} \right)_{x=\xi} - \lambda_2 \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} \right)_{x=\xi} = \rho L \frac{d\xi}{dt}. \quad (\text{XVII-42})$$

Граничное условие в плоскости $x=0$

$$\vartheta_2(0, t) = \vartheta_w. \quad (\text{XVII-43})$$

Как и ранее, решения для твердой и жидкой фаз ищем в виде

$$\vartheta_1 = A_1 + B_1 \operatorname{erf} \left(x/2 \sqrt{a_1 t} \right); \quad (\text{XVII-44})$$

$$\vartheta_2 = A_2 + B_2 \operatorname{erf} \left(x/2 \sqrt{a_2 t} \right), \quad (\text{XVII-45})$$

где постоянные A_1 , B_1 , A_2 и B_2 должны быть найдены из краевых условий (XVII-40)–(XVII-43).

Используя начальное условие (XVII-40), получаем $0 = A_1 + B_1 \cdot 1$, т. е. $A_1 = -B_1$, и решение (XVII-44) принимает вид

$$\vartheta_1 = B_1 \operatorname{erfc} \left(x/2 \sqrt{a_1 t} \right), \quad (\text{XVII-46})$$

Подставляя выражение (XVII-45) в граничное условие (XVII-43), получаем $A_2 = \vartheta_w$, что дает

$$\vartheta_2 = \vartheta_w + B_2 \operatorname{erf} \left(x/2 \sqrt{a_2 t} \right). \quad (\text{XVII-47})$$

Подставив теперь выражения (XVII-46), (XVII-47) в граничное условие на фронте плавления (XVII-41), получим уравнение

$$B_1 \operatorname{erfc} \left(\xi/2 \sqrt{a_1 t} \right) = \vartheta_w + B_2 \operatorname{erf} \left(\xi/2 \sqrt{a_2 t} \right) = \vartheta_{\text{пл}}, \quad (\text{XVII-48})$$

из которого в связи с постоянством B_1 , ϑ_w и B_2 следует, что и в этом случае координата фронта превращения пропорциональна $\sqrt{t}$, например

$$\xi = 2\mu \sqrt{a_2 t}, \quad (\text{XVII-49})$$

где μ — постоянный коэффициент, определяющий скорость продвижения фронта плавления.

Кроме того, из уравнения (XVII-48) с учетом равенства (XVII-49) следует, что

$$B_1 = \frac{\vartheta_{\text{пл}}}{\operatorname{erfc} \left(\mu \sqrt{a_2/a_1} \right)};$$

$$B_2 = \frac{\vartheta_{\text{пл}} - \vartheta_w}{\operatorname{erf} (\mu)};$$

при этом решения (XVII-46, XVII-47) принимают вид

$$\vartheta_1 = \vartheta_{\text{пл}} \frac{\operatorname{erfc} \left(x/2 \sqrt{a_1 t} \right)}{\operatorname{erfc} \left(\mu \sqrt{a_2/a_1} \right)}; \quad (\text{XVII-50})$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_w + (\vartheta_{\text{пл}} - \vartheta_w) \frac{\operatorname{erf} \left(x/2 \sqrt{a_2 t} \right)}{\operatorname{erf} (\mu)}. \quad (\text{XVII-51})$$

Подставляя выражения (XVII-49)—(XVII-51) в граничное условие на фронте плавления (XVII-42), получим характеристическое уравнение для определения μ , которое в безразмерной форме имеет вид

$$(\vartheta_w - 1) \frac{e^{-\mu^2}}{\operatorname{erf} (\mu)} - \frac{K_a}{K_\lambda} \frac{e^{-\mu^2 K_a}}{\operatorname{erfc} \left(\mu \sqrt{K_a} \right)} = \sqrt{\pi} K_0 \mu, \quad (\text{XVII-52})$$

где $\vartheta_w = \frac{\vartheta_w - T_n}{T_{\text{пл}} - T_n}$ — безразмерная избыточная температура в плоскости $x=0$.

Это уравнение, так же как и (XVII-33), должно решаться графически или численно.

Решения (XVII-50), (XVII-51) также можно представить в безразмерном виде, разделив обе части каждого из них на $\vartheta_{\text{пл}}$:

$$\theta_1 = \frac{\operatorname{erfc} \left(X \sqrt{K_a} \right)}{\operatorname{erfc} \left(\mu \sqrt{K_a} \right)}; \quad (\text{XVII-53})$$

$$\theta_2 = \vartheta_w + (1 - \vartheta_w) \frac{\operatorname{erf} (X)}{\operatorname{erf} (\mu)}, \quad (\text{XVII-54})$$

где $\theta_1 = \frac{T_1 - T_n}{T_{пл} - T_n}$ — безразмерная избыточная температура твердой фазы;

$\theta_2 = \frac{T_2 - T_n}{T_{пл} - T_n}$ — безразмерная избыточная температура жидкой фазы;

$X = \frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}$ — безразмерная независимая переменная.

В соответствии с характеристическим уравнением (XVII-52) коэффициент μ , т. е. скорость перемещения фронта плавления, зависит от следующих безразмерных параметров:

$$\mu = \mu(K_\lambda, K_a, Ko, \theta_w),$$

а безразмерные избыточные температуры твердой и жидкой фаз определяются как функции вида

$$\theta_1 = \theta_1(K_\lambda, K_a, Ko, \theta_w, X);$$

$$\theta_2 = \theta_2(K_\lambda, K_a, Ko, \theta_w, X).$$

Рассмотренные две задачи относятся к числу немногих задач теплопроводности с фазовыми превращениями, имеющих точные аналитические решения. Большинство же встречающихся на практике задач такого типа, в частности задачи для тел конечных размеров, невозможно решить такими методами. В связи с этим разработаны различные приближенные способы решения, в которых, например, часто используют предположение о том, что в области вновь образовавшейся фазы, т. е. в области $0 \leq x \leq \xi$, температура изменяется линейно, т. е. реализуется стационарный режим.

Задачи теплопроводности с изменением агрегатного состояния, кроме того, часто решают при помощи различных аналоговых устройств, а также численными методами с использованием цифровых вычислительных машин.

Глава XVIII

КОНВЕКТИВНЫЙ ТЕПЛО- И МАССОБМЕН

Процессы конвективного тепло- и массообмена происходят, как было сказано выше, в результате движения жидкости (или газа) и всегда тесно связаны с соответствующими процессами молекулярного переноса (теплопроводностью и диффузией).

В зависимости от причины, которой обусловлено движение жидкости, различают вынужденную конвекцию и свободную, или естественную. В первом случае движение

жидкости обусловлено внешними по отношению к рассматриваемому процессу тепло- или массообмена причинами, например действием насоса, вентилятора, компрессора и т. п. Во втором случае движение жидкости обусловлено самим процессом тепло- или массообмена, а именно силами возникающими вследствие неоднородности поля плотности, что в свою очередь связано с неоднородностью поля температур (при теплообмене) или концентраций (при массообмене).

Рассмотрим наиболее подробно процессы тепло- и массообмена при вынужденной конвекции как чаще всего встречающийся на практике случай.

Очевидно, что в любом случае характеристики процессов тепло- и массообмена тесно связаны с параметрами, характеризующими движение жидкости, и обусловлены этими параметрами.

Например, в случае конвективной теплоотдачи между движущейся жидкостью и поверхностью твердого тела плотность теплового потока весьма существенно зависит от скорости и направления движения жидкости, а также от режима движения. Кроме того, эта величина зависит от температур поверхности и жидкости, от физических свойств жидкости (прежде всего — от коэффициента теплопроводности λ), от формы и качества поверхности твердого тела.

Процесс конвективной массоотдачи определяется всеми указанными факторами, а кроме того, концентрациями (или парциальными плотностями) переносимой примеси на поверхности и в жидкости.

Таким образом, процессы конвективной теплоотдачи и массоотдачи являются весьма сложными процессами, зависящими от большого количества параметров и переменных. В то же время для описания этих процессов используются весьма простые выражения: формула Ньютона для теплоотдачи

$$q_w = \alpha(T_0 - T_w) \quad (\text{XVIII-1})$$

и соответствующее выражение для процесса массоотдачи

$$m_{iw} = \beta(\rho_{i0} - \rho_{iw}). \quad (\text{XVIII-2})$$

В этих выражениях α — коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К); β — коэффициент массоотдачи, м/с; T_0 и T_w — температуры жидкости и поверхности соответственно; ρ_{i0} и ρ_{iw} — парциальные плотности i -того компонента смеси в жидкости и на поверхности соответственно.

Формулу Ньютона для теплоотдачи записывают также в виде

$$q = \alpha \Delta T, \quad (\text{XVIII-1a})$$

где величина $\Delta T = T_0 - T_w$ называется температурным напором.

При постоянной плотности жидкости формулу для массоотдачи можно записать в виде

$$m_{iw} = \rho \beta (c_{i0} - c_{iw}), \quad (\text{XVIII-2a})$$

где c_{i0} и c_{iw} — соответственно концентрации i -того компонента в жидкости и на поверхности.

Очевидно, что тепловой поток всегда направлен в сторону меньшей температуры, а поток массы — в сторону меньшей концентрации.

Вся сложность конвективных процессов теплоотдачи и массоотдачи заключена в коэффициентах теплоотдачи α и массоотдачи β . Эти величины зависят от всех тех факторов, которые влияют на сами процессы тепло- и массоотдачи.

Основная трудность расчета процессов конвективной теплоотдачи и массоотдачи состоит, следовательно, в нахождении коэффициентов тепло- и массоотдачи. Зная эти величины, легко определить тепловой поток и поток массы — основные величины, интересующие нас при рассмотрении этих процессов, связанные очевидными соотношениями с плотностью теплового потока и с плотностью потока массы:

$$Q_w = \int_F q_w dF,$$

или, если $q_w = \text{const}$,

$$Q_w = q_w F;$$

$$M_{iw} = \int_F m_{iw} dF,$$

или, если $m_{iw} = \text{const}$,

$$M_{iw} = m_{iw} F,$$

где Q — поток тепла, Вт;
 M_{iw} — поток массы, кг/с;
 F — поверхность тела, м².

В большинстве практически важных случаев значения коэффициентов теплоотдачи и массоотдачи определяют с помощью эмпирических формул, полученных пу-

тем обработки экспериментальных данных и приводимых ранее в справочниках. Это объясняется либо большими математическими трудностями, связанными с решением соответствующих задач при сложной форме поверхности теплообмена (массообмена) и при сложной картине движения жидкости, либо недостаточным познанием самого механизма процесса переноса (при турбулентном режиме движения).

Однако наибольший интерес представляют аналитические (хотя и приближенные) методы определения указанных величин, которые позволяют вскрыть физические особенности соответствующих процессов и характеризуют современное состояние науки в рассматриваемой области. Эти методы, позволяющие решать лишь наиболее простые задачи тепло- и массообмена, дают результаты, которые оказываются принципиально справедливыми и для других, более сложных случаев.

1. Дифференциальные уравнения конвективного тепло- и массообмена

Дифференциальные уравнения конвективной теплоотдачи и массоотдачи

Предположим, что вблизи поверхности некоторого тела произвольной формы движется жидкость (газ), имеющая характерную температуру T_0 . Температура поверхности тела T_w .

Как известно, скорость жидкости на поверхности тела всегда равна нулю. Очевидно, что перенос тепла через этот бесконечно тонкий неподвижный слой жидкости может осуществляться лишь за счет молекулярной теплопроводности, т. е. этот перенос описывается постулатом Фурье (XV-1):

$$q_w = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0}, \quad (a)$$

где n — координата, направленная по нормали к поверхности тела; $n=0$ соответствует точке на поверхности; λ — коэффициент теплопроводности жидкости.

С другой стороны, в соответствии с формулой Ньютона (XVIII-1), для конвективной теплоотдачи плотность теплового потока на поверхности выражается как

$$q_w = \alpha(T_0 - T_w),$$

или

$$q_w = \alpha \Delta T. \quad (6)$$

Приравнивая на основании закона сохранения энергии правые части выражений (а) и (б), получим уравнение

$$\alpha \Delta T = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0}, \quad (\text{XVIII-3})$$

которое называется дифференциальным уравнением конвективной теплоотдачи.

Это уравнение позволяет получить формулу для коэффициента теплоотдачи, которая дает возможность найти эту величину, если известно распределение температуры вблизи поверхности тела (температурный напор ΔT и коэффициент теплопроводности жидкости λ должны быть заданы):

$$\alpha = \frac{\lambda}{\Delta T} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0}, \quad (\text{XVIII-4})$$

Знаком пренебрегаем, так как коэффициент теплоотдачи принято считать величиной положительной.

Те же самые рассуждения позволяют, исходя из постулата Фика (XV-2) и формулы (XVIII-2а) для конвективной массоотдачи, получить дифференциальное уравнение конвективной массоотдачи

$$\beta \Delta c = -D \left(\frac{\partial c}{\partial n} \right)_{n=0}, \quad (\text{XVIII-5})$$

где $\Delta c = c_0 - c_w$; здесь и далее индекс i опускаем для сокращения записи, хотя всюду речь идет о переносе одного (i -того) компонента смеси.

Из уравнения (XVIII-5) легко получить формулу для коэффициента массоотдачи, аналогичную (XVIII-4):

$$\beta = \frac{D}{\Delta c} \left(\frac{\partial c}{\partial n} \right)_{n=0}, \quad (\text{XVIII-6})$$

которая позволяет найти коэффициент массоотдачи, если известно распределение концентрации примеси вблизи поверхности тела (β — также всегда положительная величина).

Дифференциальные уравнения энергии и конвективной диффузии

Выведем теперь дифференциальные уравнения, которые в общем виде описывают процессы переноса тепла (уравнение энергии) и массы (уравнение конвективной диффузии) в движущейся однофазной жидкой (или газообразной) среде. Это означает, что путем решения указанных уравнений можно получить распределение температур и концентраций в потоке жидкости.

Заметим, что в связи с отмеченной аналогией процессов переноса тепла и массы вывод этих уравнений и их форма также аналогичны. Поэтому подробно рассмотрим вывод уравнения энергии, а затем конспективно повторим его применительно к процессу конвективного переноса массы.

Итак, имеем поток жидкости с некоторым произвольным распределением температуры $T(x, y, z, t)$ и скорости $\vec{W}(x, y, z, t)$. Считаем, что жидкость несжимаема ($\rho = \text{const}$), т. е. работой расширения можно пренебречь; скорость движения не слишком велика, что позволяет не учитывать выделение тепла вследствие вязкого трения; внутренние источники тепла отсутствуют; теплофизические свойства жидкости постоянны.

Рассмотрим элементарный объем dV , представляющий собой прямоугольный параллелепипед с ребрами dx , dy и dz ($dV = dx dy dz$) и связанный с неподвижной системой координат xyz (рис. 121). Так же, как и при выводе уравнения теплопроводности, составим баланс тепла для этого элементарного объема, т. е. на основании закона сохранения энергии приравняем разность между поступившим и вышедшим из параллелепипеда количествами тепла изменению теплосодержания жидкости в объеме этого параллелепипеда.

В направлении оси x в параллелепипед за время dt поступает следующее количество тепла:

$$dQ_x = q_x dy dz dt,$$

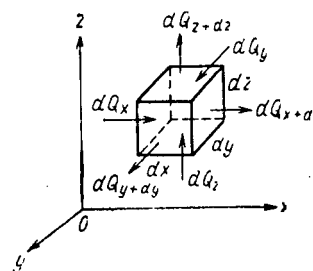


Рис. 121. К выводу дифференциального уравнения энергии

через противоположную грань выходит

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} dy dz dt,$$

где плотность теплового потока в этой грани (точнее, проекция вектора плотности теплового потока на ось x) находится путем разложения в ряд Тейлора:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx,$$

откуда разность между количеством тепла, поступившим в параллелепипед и вышедшим из него в направлении оси x , составит

$$dQ_x - dQ_{x+dx} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dV dt. \quad (a)$$

Повторяя эти рассуждения для осей y и z , получим соответственно

$$dQ_y - dQ_{y+dy} = -\frac{\partial q_y}{\partial y} dV dt; \quad (б)$$

$$dQ_z - dQ_{z+dz} = -\frac{\partial q_z}{\partial z} dV dt. \quad (в)$$

В формулах (а), (б), (в) q_x , q_y и q_z — проекции вектора плотности теплового потока на оси координат.

Суммируя эти выражения, найдем результирующее количество тепла, оставшееся в параллелепипеде в результате переноса тепла через его объем, т. е. разность между поступившим и вышедшим из параллелепипеда количествами тепла:

$$dQ = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dV dt. \quad (г)$$

С другой стороны, изменение теплосодержания жидкости в объеме dV за время dt составляет

$$dQ = \rho c_p dV \frac{\partial T}{\partial t} dt, \quad (д)$$

где c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Приравнявая на основании закона сохранения энергии правые части выражений (г) и (д), получим после сокращений

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right). \quad (е)$$

Процесс переноса тепла через объем параллелепипеда обусловлен переносом за счет молекулярной теплопроводности, который описывается постулатом Фурье

$$\vec{q}_{\text{тепл}} = -\lambda \text{grad } T,$$

и чисто конвективным переносом, обусловленным перемещением тепла вместе с движущейся жидкостью:

$$\vec{q}_{\text{конв}} = \rho c_p \vec{W} T.$$

Таким образом, для каждой точки в потоке жидкости плотность теплового потока равна сумме этих двух величин:

$$\vec{q} = \rho c_p \vec{W} T - \lambda \text{grad } T,$$

или для компонент вектора плотности теплового потока

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \rho c_p w_x T - \lambda \frac{\partial T}{\partial x}; \\ q_y &= \rho c_p w_y T - \lambda \frac{\partial T}{\partial y}; \\ q_z &= \rho c_p w_z T - \lambda \frac{\partial T}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{ж})$$

Подставляя выражения (ж) в уравнение (е), дифференцируя и собирая однородные члены, получим

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda \nabla^2 T - \rho c_p \left(w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \\ &- \rho c_p T \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

Последний член в правой части этого уравнения содержит дивергенцию вектора скорости

$$\text{div } \vec{W} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z}.$$

Но, в соответствии с уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости (IX-6):

$$\text{div } \vec{W} = 0,$$

т. е.

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0.$$

Следовательно, этот последний член обращается в нуль.

Разделив обе части уравнения (3) на ρc_p , после преобразований получаем

$$\frac{\partial T}{\partial t} + w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \nabla^2 T, \quad (\text{XVIII-7})$$

где a — коэффициент температуропроводности, $a = \lambda / \rho c_p$.

Уравнение (XVIII-7) представляет собой уравнение энергии (уравнение переноса тепла в движущейся среде) для несжимаемой жидкости. В литературе можно встретить и другие названия этого уравнения: уравнение Фурье — Кирхгофа, уравнение теплопроводности для движущейся жидкости.

Таким образом, уравнение энергии получено на основании закона сохранения энергии, закона сохранения массы (в виде уравнения неразрывности) и постулата Фурье.

Выражение, стоящее в левой части уравнения энергии (XVIII-7), также встречалось раньше. Оно представляет собой полную производную температуры по времени и включает в себя изменение температуры в данной точке во времени (локальная производная $\partial T / \partial t$), а также изменение температуры, обусловленное перемещением этой точки в поле переменной температуры вместе с движущейся жидкостью (конвективная производная $w_x \partial T / \partial x + w_y \partial T / \partial y + w_z \partial T / \partial z$). Эта величина называется субстанциональной производной температуры по времени и обозначается DT/dt .

С учетом этого обозначения уравнение энергии (XVIII-7) принимает вид

$$\frac{DT}{dt} = a \nabla^2 T. \quad (\text{XVIII-7a})$$

Легко видеть, что полученное ранее уравнение теплопроводности без внутренних источников тепла (XVI-3) представляет собой частный случай уравнения энергии. Действительно, в случае твердого тела конвективная производная равна нулю, так как $w_x = w_y = w_z = 0$, и уравнение энергии (XVIII-7) сводится к уравнению теплопроводности (XVI-3).

Уравнение энергии позволяет при использовании соответствующих краевых условий и при известном распределении вектора скорости $\vec{W}(x, y, z, t)$ рассчитать распределение температуры в потоке жидкости и, в частности, вблизи поверхности твердого тела, что дает возможность определить с помощью формулы (XVIII-5) коэффициент теплоотдачи и, следовательно, рассчитать процесс конвективной теплоотдачи. Однако практически в подавляющем большинстве случаев такое решение оказывается связанным с весьма большими математическими трудностями либо вообще невозможным. В связи с этим приходится использовать упрощенный вид уравнения энергии, о чем пойдет речь ниже.

Совершенно так же, как и уравнение энергии, выводится уравнение конвективной диффузии, т. е. уравнение переноса массы примеси в движущейся жидкости. При этом жидкость считается несжимаемой ($\rho = \text{const}$), коэффициент диффузии постоянным, а влиянием теплообмена на перенос массы пренебрегают (точно так же, как пренебрегают влиянием массообмена на перенос тепла).

Рассматривая процесс переноса массы примеси через элементарный параллелепипед с объемом dV за время dt , получим выражение для разности между количеством примеси, поступившим в параллелепипед и вышедшим из него:

$$dM = - \left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_z}{\partial z} \right) dV dt,$$

где m_x, m_y, m_z — проекции вектора плотности потока массы на оси координат.

С другой стороны, изменение количества примеси в объеме dV за время dt есть

$$dM = \rho dV \frac{\partial c}{\partial t} dt.$$

Приравнявая на основе закона сохранения массы правые части этих выражений и учитывая, что перенос массы происходит за счет молекулярной диффузии и за счет чисто конвективного механизма, т. е. что

$$\vec{m} = -\rho D \text{grad } c + \rho \vec{W} c,$$

получаем после преобразований

$$\frac{\partial c}{\partial t} + w_x \frac{\partial c}{\partial x} + w_y \frac{\partial c}{\partial y} + w_z \frac{\partial c}{\partial z} = D \nabla^2 c. \quad (\text{XVIII-8})$$

Это уравнение, которое получено на основании постулата Фика (XV-2) и закона сохранения массы, носит название уравнения конвективной диффузии. Легко видеть, что оно аналогично уравнению энергии (XVIII-7). Выражение, стоящее в левой части уравнения (XVIII-8), представляет собой субстанциальную производную концентрации примеси по времени, поэтому уравнение (XVIII-8) можно записать в виде, аналогичном (XVIII-7 а):

$$\frac{Dc}{dt} = D\nabla^2 c. \quad (\text{XVIII-8a})$$

Решая уравнение диффузии, можно в принципе найти распределение концентрации в потоке жидкости, а следовательно, с помощью формулы (XVIII-6) и коэффициент массоотдачи. Однако трудности, которые при этом возникают, носят тот же характер, что и в случае уравнения энергии, и заставляют обратиться к приближенным методам.

Приближенные методы, о которых вторично здесь упоминается, уже встречались в разделе «Механика жидкости и газа». Это методы теории пограничного слоя. Поскольку в данном случае пойдет речь о применении этих методов к задачам переноса тепла и массы, следует определить понятия теплового и диффузионного пограничных слоев.

2. Тепловой и диффузионный пограничные слои

Понятия теплового и диффузионного пограничных слоев по существу аналогичны понятию гидродинамического пограничного слоя.

Рассмотрим неограниченный стационарный ламинарный поток жидкости, направленный вдоль плоской поверхности (рис. 122). Температура жидкости до передней кромки пластины (точка 0) постоянна по координате y и равна T_0 (температура невозмущенного потока). Температура на поверхности пластины постоянна по ее длине и равна T_w . Температурное поле является стационарным.

Вследствие теплообмена между слоями жидкости, расположенными вблизи поверхности пластины, и этой поверхностью температура указанных слоев изменяется. Жидкость на поверхности пластины имеет температуру, равную температуре поверхности T_w (это условие ана-

логично условию прилипания в механике вязкой жидкости). На расстоянии δ_T температура жидкости изменяется от T_w на поверхности до температуры невозмущенного потока T_0 . Расстояние δ_T представляет собой толщину теплового пограничного слоя.

Понятно, что по мере удаления от передней кромки пластины толщина теплового пограничного слоя растет,

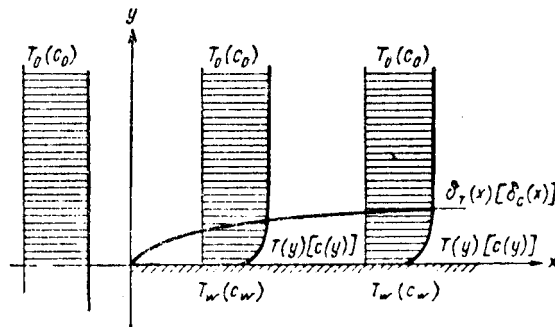


Рис. 122. Тепловой (диффузионный) пограничный слой на плоской пластине

так как охлаждающее (или нагревающее) влияние поверхности пластины распространяется вследствие теплопроводности на все новые и новые слои жидкости.

Таким образом, тепловой пограничный слой характеризуется тем, что в пределах его толщины имеет место градиент температуры и, следовательно, перенос тепла поперек потока (в направлении оси y) путем молекулярной теплопроводности. За пределами теплового пограничного слоя ($y \geq \delta_T$) поперечного переноса тепла нет. Толщина теплового пограничного слоя является функцией продольной координаты x , возрастающая по мере удаления от передней кромки пластины.

Аналогичный смысл имеет понятие диффузионного пограничного слоя (см. рис. 122, обозначения в скобках). В пределах его толщины δ_c происходит изменение концентрации примеси от значения c_w на поверхности до c_0 на внешней границе пограничного слоя. Толщина диффузионного пограничного слоя также возрастает по длине пластины вследствие массообмена с поверхностью. В пределах диффузионного пограничного слоя имеет место градиент концентрации и, следовательно, происходит поперечный перенос массы примеси путем молекулярной

диффузии. За пределами диффузионного пограничного слоя (в невозмущенном потоке) концентрация c_0 постоянна, а потому отсутствует и перенос массы.

Заметим, что все эти рассуждения не зависят, конечно, от того, превышает ли температура невозмущенного потока T_0 (и концентрация примеси в нем c_0) температуру T_w (и концентрацию c_w) на поверхности (как это показано на рис. 117) или является меньшей величиной. Это обстоятельство определяет лишь направление теплового потока (и потока массы).

Понятие теплового и диффузионного пограничных слоев из соображений простоты и наглядности рассмотрены для случая плоской поверхности. Однако эти понятия равным образом применимы и для поверхности любой другой формы.

Большой интерес представляет вопрос о соотношении толщин гидродинамического δ , теплового δ_t и диффузионного δ_c пограничных слоев при ламинарном движении жидкости. Представляется очевидным, что так как само возникновение пограничного слоя обусловлено молекулярным переносом соответствующей субстанции (количества движения, тепла, вещества) поперек потока, толщина его должна определяться интенсивностью процесса переноса. Известно, что характеристиками интенсивности соответствующих процессов переноса являются коэффициенты переноса, т. е. кинематический коэффициент вязкости ν (перенос импульса), коэффициент температуропроводности a (перенос тепла) и коэффициент диффузии D (перенос массы).

Следовательно, соотношение толщин гидродинамического пограничного слоя и теплового пограничного слоя должно зависеть от соотношения соответствующих коэффициентов переноса, т. е. кинематического коэффициента вязкости ν и коэффициента температуропроводности a . Безразмерная величина, равная отношению этих коэффициентов, носит название критерия Прандтля и обозначается Pr :

$$Pr = \frac{\nu}{a} . \quad (\text{XVIII-9})$$

Очевидно, что чем больше величина критерия Прандтля, тем интенсивнее происходит поперечный перенос импульса по сравнению с поперечным переносом тепла и тем, следовательно, больше толщина гидродинамичес-

кого пограничного слоя по сравнению с толщиной теплового.

Критерий Прандтля, составленный из физических параметров среды, сам является физическим параметром данной жидкости или газа. В связи с этим величину, определяемую формулой (XVIII-9), называют физическим критерием Прандтля. В случае капельных жидкостей эта величина довольно существенно зависит от температуры. Критерий Прандтля для газов практически не зависит ни от температуры, ни от давления.

Совершенно так же соотношение толщин гидродинамического и диффузионного пограничных слоев должно зависеть от соотношения кинематического коэффициента вязкости ν и коэффициента диффузии D . Соответствующая безразмерная величина носит название критерия Шмидта и обозначается Sc :

$$Sc = \frac{\nu}{D} . \quad (XVIII-10)$$

Чем больше величина критерия Шмидта, тем толще гидродинамический пограничный слой по сравнению с диффузионным. Критерий Шмидта также является физическим параметром для данной смеси.

Ниже, при количественном описании теплового и диффузионного пограничных слоев, справедливость приведенных здесь рассуждений будет подтверждена.

3. Уравнения теплового и диффузионного пограничных слоев

Основное значение понятий теплового и диффузионного пограничных слоев (как и гидродинамического пограничного слоя) заключается в том, что эти понятия позволяют упростить и, следовательно, решить исходные уравнения (уравнение энергии и уравнение конвективной диффузии). Убедимся в этом на примере теплового и диффузионного пограничных слоев, образующихся на плоской поверхности (см. рис. 122).

Исходное уравнение энергии, описывающее случай, представленный на рис. 122, т. е. стационарное двумерное температурное поле в движущейся несжимаемой жидкости, получается как частный случай из уравнения энергии (XVIII-7) при $\partial T / \partial t = 0$ и $\partial T / \partial z = 0$ (пластина беско-

печна в направлении z и никаких изменений вдоль оси z не происходит) и имеет вид

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (\text{XVIII-11})$$

Очевидно, что в связи с малой толщиной теплового пограничного слоя, все величины в нем (как и в гидродинамическом пограничном слое) изменяются по его толщине значительно быстрее, чем по его длине, т. е.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

а потому первой из этих величин в уравнении (XVIII-11) можно пренебречь по сравнению со второй.

Таким образом, вместо уравнения (XVIII-11) получаем более простое уравнение энергии для ламинарного пограничного слоя

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \quad (\text{XVIII-12})$$

известное под названием уравнения Польгаузена.

Если учесть, что, в соответствии с постулатом Фурье (XV-1), плотность поперечного теплового потока в рассматриваемом случае выражается как

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y},$$

уравнение (XVIII-12) можно представить в виде

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial q}{\partial y}, \quad (\text{XVIII-12a})$$

так как $a = \lambda / \rho c_p$.

Решая уравнение (XVIII-12) при известном заранее распределении скоростей в пограничном слое и при очевидных граничных условиях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y = 0 \quad T = T_w \\ \text{при } y = \delta_T \quad T = T_0 \end{array} \right\} \quad (\text{XVIII-13})$$

можно получить распределение температур в пограничном слое, а следовательно, найти плотность теплового потока на поверхности, т. е. рассчитать теплоотдачу.

Точно так же можно из уравнения конвективной диффузии (XVIII-8), которое в рассматриваемом стационарном двумерном случае имеет вид:

$$w_x \frac{\partial c}{\partial x} + w_y \frac{\partial c}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right), \quad (\text{XVIII-14})$$

получить соответствующее уравнение для пограничного слоя

$$w_x \frac{\partial c}{\partial x} + w_y \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}. \quad (\text{XVIII-15})$$

С учетом постулата Фика (XV-2) уравнение конвективной диффузии для пограничного слоя (XVIII-15) можно представить в виде

$$w_x \frac{\partial c}{\partial x} + w_y \frac{\partial c}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial m}{\partial y}. \quad (\text{XVIII-15a})$$

Граничные условия для уравнения (XVIII-15), очевидно, могут быть записаны следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } y = 0 \quad c = c_w, \\ \text{при } y = \delta_c \quad c = c_0. \end{array} \right\} \quad (\text{XVIII-16})$$

Решая уравнение (XVIII-15) с граничными условиями (XVIII-16), можно найти распределение концентрации примеси в пограничном слое и, следовательно, рассчитать процесс массоотдачи.

Однако с целью математического описания процессов теплоотдачи и массоотдачи в ламинарном пограничном слое не будем решать уравнения (XVIII-12) и (XVIII-15), а воспользуемся более простыми приближенными методами теории пограничного слоя, о которых пойдет речь ниже. Заметим, что применение указанных простых методов невозможно без использования уравнений теплового (XVIII-12) и диффузионного (XVIII-15) пограничных слоев.

Получим теперь уравнения теплового и диффузионного пограничных слоев для случая турбулентного движения жидкости вдоль плоской поверхности.

Как известно, при турбулентном режиме движения компоненты скорости, температура и концентрация примеси являются сложными пульсирующими функциями времени, которые могут быть представлены в виде суммы осредненных по времени и пульсационных значений соответствующих величин:

$$\left. \begin{aligned} w_x &= \bar{w}_x + w'_x; \\ w_y &= \bar{w}_y + w'_y; \\ T &= \bar{T} + T'; \\ c &= \bar{c} + c'. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XVIII-17})$$

В левой части этих выражений стоят актуальные, т. е. мгновенные значения соответствующих величин, в правой — осредненные по времени значения (отмеченные крышкой) и пульсационные значения (отмеченные штрихом).

В дальнейшем будем рассматривать лишь квазистационарный турбулентный режим, т. е. такой, когда все осредненные величины не меняются во времени. В этом случае осредненные значения пульсаций равны нулю:

$$\bar{w}'_x = \bar{w}'_y = \bar{T}' = \bar{c}' = 0.$$

Для получения из уравнений (XVIII-12) и (XVIII-15) уравнений энергии и диффузии, относящихся к турбулентному потоку и включающих осредненные величины, поступаем следующим образом. Считаем, что эти уравнения, если в левой части их фигурирует соответствующая локальная производная (т. е. $\partial T/\partial t$ и $\partial c/\partial t$, поскольку актуальные величины суть функции времени), справедливы для актуальных значений характеристик турбулентного потока. Затем подставляем вместо актуальных значений всех входящих в эти уравнения величин их выражения (XVIII-17) через осредненные и пульсационные значения и производим осреднение этих уравнений по времени. В результате с учетом того, что локальные производные от осредненных величин равны нулю (режим квазистационарный), а кроме того, равны нулю осредненные пульсации, после простых преобразований получаем уравнение энергии

$$\bar{w}_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial y} (q + \rho c_p \overline{w'_y T'}) \quad (\text{XVIII-18})$$

и уравнение конвективной диффузии

$$\bar{w}_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (m + \rho \overline{w'_y c'}) \quad (\text{XVIII-19})$$

для турбулентного пограничного слоя.

В этих уравнениях q и m представляют собой соответственно плотность теплового потока и плотность потока массы, обусловленные молекулярным переносом тепла и вещества, т. е. уже знакомые нам величины:

$$q = -\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}; \quad (\text{XVIII-20})$$

$$m = -\rho D \frac{\partial \bar{c}}{\partial y}. \quad (\text{XVIII-21})$$

Сопоставляя уравнения (XVIII-18) и (XVIII-19) с соответствующими уравнениями для ламинарного пограничного слоя (XVIII-12) и (XVIII-15a), замечаем, что, несмотря на сходство этих уравнений, между ними имеется и существенное различие, заключающееся в том, что в правой части уравнений (XVIII-18) и (XVIII-19) появляются новые величины $\rho c_p \overline{w_y' T'}$ и $\rho \overline{w_y' c'}$. Этот факт отражает принципиальное отличие турбулентного движения от ламинарного, которое состоит в том, что в случае турбулентного движения, помимо молекулярного переноса (в частности, переноса тепла и массы), имеет место и молярный, турбулентный перенос, обусловленный пульсационным поперечным движением турбулентных молей.

Действительно, величина $\rho c_p \overline{w_y' T'}$ имеет размерность плотности теплового потока и по физическому смыслу представляет собой количество тепла, переносимое через единицу поверхности в единицу времени в направлении, перпендикулярном к потоку. Причем этот перенос осуществляется в результате турбулентного характера движения, т. е. вследствие поперечной пульсации скорости w_y' . Назовем эту величину плотностью турбулентного теплового потока и обозначим q_T :

$$q_T = \rho c_p \overline{w_y' T'}. \quad (\text{XVIII-22})$$

Точно так же величина $\rho \overline{w_y' c'}$ представляет собой плотность турбулентного потока вещества, обусловленного молярным переносом примеси, в направлении, перпендикулярном к потоку:

$$m_T = \rho \overline{w_y' c'}. \quad (\text{XVIII-23})$$

С учетом этих обозначений уравнения энергии и диф-

фузии для турбулентного пограничного слоя принимают вид:

$$\bar{w}_x \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} = - \frac{1}{\rho c_p} \frac{\partial}{\partial y} (q + q_t); \quad (\text{XVIII-24})$$

$$\bar{w}_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + \bar{w}_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (m + m_t). \quad (\text{XVIII-25})$$

В связи с тем, что турбулентный молярный перенос осуществляется более интенсивно, чем молекулярный, в турбулентной зоне турбулентного пограничного слоя $q_t \gg q$ и $m_t \gg m$. Поперечный перенос тепла и массы в вязком (ламинарном) подслое осуществляется главным образом за счет молекулярных механизмов, поэтому в вязком подслое $q_t \ll q$ и $m_t \ll m$.

Появление в уравнениях энергии (XVIII-24) и диффузии (XVIII-25) для турбулентного пограничного слоя дополнительных неизвестных в виде плотности турбулентного потока тепла q_t и массы m_t делает неразрешимыми тепловую и диффузионную задачи, так как в каждом из этих уравнений имеются две неизвестных функции: осредненная температура $\bar{T}$ и плотность турбулентного теплового потока q_t в уравнении энергии (XVIII-24), осредненная концентрация $\bar{c}$ и плотность турбулентного потока массы m_t в уравнении диффузии (XVIII-25).

Таким образом, для решения каждой из этих задач необходимы дополнительные соотношения, которые можно получить с помощью полуэмпирической теории турбулентности Прандтля.

4. Полуэмпирическая теория турбулентности Прандтля для переноса тепла и массы

Задача полуэмпирической теории применительно к процессам турбулентного переноса тепла и вещества заключается в том, чтобы найти связь между величинами плотности турбулентных потоков тепла и массы и соответствующими осредненными характеристиками. Это означает, что необходимо найти связь между плотностью турбулентного теплового потока q_t и осредненной температурой $\bar{T}$, а также между плотностью турбулентного потока массы примеси m_t и осредненной концентрацией $\bar{c}$.

Рассмотрим схематично эту теорию вначале применительно к турбулентному переносу тепла. Предполагаем, что в турбулентном потоке имеется такое расстояние l_t , называемое путем смешения для переноса тепла (аналогичное по смыслу средней длине свободного пробега молекул в кинетической теории газов), на протяжении ко-

того в среднем сохраняется постоянным теплосодержание турбулентного моля. Пройдя это расстояние, турбулентный моль скачком (пульсацией) изменяет свое теплосодержание, смешиваясь с окружающей жидкостью.

Пусть в плоскопараллельном турбулентном потоке, направленном вдоль оси x , имеется некоторое распределение осредненной температуры по оси y $[\bar{T}(y)]$, представленное кривой на рис. 123. В некоторой плоскости 1—1, находящейся на расстоянии y от плоскости отсчета, осредненная температура равна $\bar{T}(y)$. Из этой плоскости выходит единичный турбулентный моль жидкости, имеющий массу ρ и теплосодержание $\rho c_p \bar{T}(y)$, и движется за счет поперечной пульсации скорости в положительном направлении оси y .

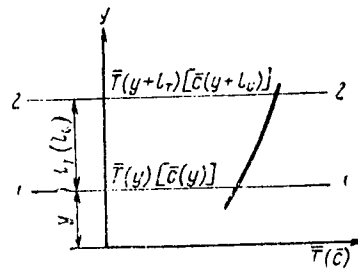


Рис. 123. К выводу соотношений полуэмпирической теории турбулентности Прандтля для переноса тепла (вещества)

В соответствии с нашим предположением этот моль будет сохранять постоянным свое осредненное теплосодержание $\rho c_p \bar{T}(y)$ на протяжении пути смещения l_t , а пройдя этот путь, скачком изменит теплосодержание на величину, соответствующую пульсации температуры, т. е. на величину $\rho c_p T'$. В результате моль будет иметь теплосодержание, соответствующее осредненной температуре в плоскости 2—2, т. е. $\rho c_p \bar{T}(y + l_t)$.

Таким образом, получаем

$$\rho c_p \bar{T}(y + l_t) = \rho c_p \bar{T}(y) + \rho c_p T',$$

или, разделив обе части этого выражения на постоянные величины плотности и теплоемкости:

$$\bar{T}(y + l_t) = \bar{T}(y) + T',$$

откуда

$$T' = \bar{T}(y + l_t) - \bar{T}(y). \quad (a)$$

Считая, что путь смещения для переноса тепла l_t величина малая, разложим функцию $\bar{T}(y + l_t)$ в ряд Тейлора и ограничимся (вследствие малости l_t) первыми двумя членами разложения:

$$\bar{T}(y + l_t) = \bar{T}(y) + l_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}. \quad (б)$$

Подставив формулу (б) в равенство (а), получим выражение для пульсации температуры:

$$T' = l_{\tau} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}. \quad (\text{XVIII-26})$$

Ранее, рассматривая полуэмпирическую теорию Прандтля для турбулентного переноса количества движения, было получено аналогичное выражение для поперечной пульсации скорости (XI-37):

$$w'_y \approx l \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y},$$

где l — путь смешения для переноса импульса. Заметим, что эта величина отличается от пути смешения для переноса тепла l_{τ} , о чем подробнее будет сказано ниже.

Подставляя выражения (XVIII-26) и (XI-37) в равенство (XVIII-22), получим формулу Прандтля для плотности турбулентного теплового потока:

$$q_{\tau} = -\rho c_p l l_{\tau} \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad (\text{XVIII-27})$$

Аналогичные рассуждения позволяют получить соответствующую формулу для плотности турбулентного потока массы. Рассматривая перенос вещества единичным турбулентным молекул жидкости (рис. 123, обозначения в скобках) и считая, что на протяжении пути смешения для переноса вещества l_c сохраняется постоянным количество примеси, содержащееся в этом моле ρc , получим выражение для пульсации концентрации:

$$c' = l_c \frac{\partial \bar{c}}{\partial y}. \quad (\text{XVIII-28})$$

Подставляя выражения (XVIII-28) и (XI-37) в равенство (XVIII-23), получаем формулу Прандтля для турбулентного потока массы:

$$m_{\tau} = -\rho l l_c \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y}. \quad (\text{XVIII-29})$$

Рассмотрим теперь вопрос о соотношении величин пути смешения для переноса количества движения l , тепла l_{τ} и вещества l_c .

Как показано выше (см. с. 216), формула Прандтля для турбулентного касательного напряжения трения (XI-39), т. е. для плотности турбулентного потока количества движения, может быть представлена в том же виде, что и формула Ньютона для трения в ламинарном потоке:

$$\tau_{\tau} = \rho \epsilon_u \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}, \quad (\text{в})$$

где ϵ_u — кинематический коэффициент турбулентной вязкости,

$$\epsilon_u = l^2 \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}. \quad (\text{г})$$

Аналогичным путем можно получить соответствующие формулы для турбулентного переноса тепла и вещества.

Сопоставляя выражение постулата Фурье для переноса тепла в ламинарном потоке

$$q = -\rho c_p \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{д})$$

с формулой Прандтля (XVIII-27) для турбулентного переноса тепла, легко видеть, что последняя может быть записана в виде, аналогичном (д):

$$q_T = -\rho c_p \epsilon_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad (\text{XVIII-30})$$

где ϵ_T — коэффициент турбулентной температуропроводности,

$$\epsilon_T = l_T \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}. \quad (\text{XVIII-31})$$

Точно так же, сопоставляя выражение закона Фика для переноса вещества в ламинарном потоке

$$m = -\rho D \frac{\partial c}{\partial y}$$

с формулой Прандтля (XVIII-29) для турбулентного переноса вещества, получим

$$m_T = -\rho \epsilon_c \frac{\partial \bar{c}}{\partial y}, \quad (\text{XVIII-32})$$

где ϵ_c — коэффициент турбулентной диффузии,

$$\epsilon_c = l_c \frac{\partial \bar{w}_x}{\partial y}. \quad (\text{XVIII-33})$$

Таким образом, имеем выражения для трех коэффициентов турбулентного переноса, т. е. для величин, характеризующих интенсивность процессов турбулентного переноса импульса (ϵ_u), тепла (ϵ_T) и вещества (ϵ_c). Понятно, что эти величины имеют ту же размерность, что и соответствующие коэффициенты молекулярного переноса (ν , α и D). Однако между этими двумя группами величин имеется глубоко принципиальное различие. Если коэффициенты молекулярного переноса (ν , α и D) являются физическими параметрами вещества, т. е. определяются физической природой жидкости (или газа), то коэффициенты турбулентного переноса (ϵ_u , ϵ_T и ϵ_c), как это видно из формул (г), (XVIII-31) и (XVIII-33), являются параметрами движения, зависящими от распределения осредненной скорости в потоке, от пути смешения, но не зависящими от природы вещества.

Так же, как и в случае процессов молекулярного переноса, можно ввести величины, характеризующие соотношения интенсивностей соответствующих процессов турбулентного переноса (т. е. коэффициентов турбулентного переноса).

$$Pr_T = \frac{\epsilon_u}{\epsilon_T},$$

$$Sc_T = \frac{\epsilon_u}{\epsilon_c},$$

где величину Pr_T называют турбулентным критерием Прандтля, а величину Sc_T — турбулентным критерием Шмидта.

Если в эти выражения подставить формулы (г), (XVIII-31) и (XVIII-33) для соответствующих коэффициентов переноса, то мы получим

$$Pr_T = \frac{l}{l_T}, \quad (XVIII-34)$$

$$Sc_T = \frac{l}{l_c}. \quad (XVIII-34a)$$

Понятно, что турбулентные критерии Прандтля и Шмидта в отличие от соответствующих молекулярных характеристик не являются физическими параметрами вещества, но представляют собой параметры движения.

Экспериментальные исследования показывают, что тепло и вещество переносятся в турбулентном потоке с большей интенсивностью, чем количество движения, т. е. $\epsilon_T > \epsilon_u$ и $\epsilon_c > \epsilon_u$ ($Pr_T < 1$, $Sc_T < 1$). Что же касается процессов турбулентного переноса тепла и вещества, то оказывается, что интенсивности этих процессов совпадают, т. е. $\epsilon_T = \epsilon_c$ и $Pr_T = Sc_T$. Этот результат является вполне естественным, так как механизм турбулентного переноса тепла и вещества один и тот же.

Из этих результатов, учитывая выражения (XVIII-34) и (XVIII-34a) следует, что путь смешения для переноса тепла и путь смешения для переноса вещества равны, $l_T = l_c$, но $l_T > l$.

Более того, эксперименты показывают, что отношение интенсивностей процессов турбулентного переноса импульса и тепла (вещества), т. е. турбулентное число Прандтля (Шмидта), является величиной практически постоянной независимо от конкретных особенностей турбулентного потока и равной 0,75*):

$$Pr_T = \frac{l}{l_T} = 0,75. \quad (XVIII-35)$$

Таким образом, если известна эмпирическая константа, связывающая путь смешения для переноса импульса l с координатой, то искать соответствующую константу с целью определения пути смешения для переноса тепла (вещества) l_T (l_c) нет необходимости. Достаточно воспользоваться соотношением (XVIII-35).

Итак, расчет процессов теплоотдачи и массоотдачи в турбулентном пограничном слое можно выполнять путем решения уравнений энергии (XVIII-24) и конвективной диффузии (XVIII-25) с учетом формул Прандтля для турбулентного потока тепла

* В работах различных исследователей получены значения Pr_T (Sc_T), изменяющиеся от 0,5 до 0,8. Однако наиболее часто в литературе встречается значение 0,75.

(XVIII-27) и вещества (XVIII-29) и с соответствующими граничными условиями, которые не отличаются от граничных условий (XVIII-13), (XVIII-16) для ламинарного случая.

Однако для аналитического исследования этих процессов воспользуемся более простыми приближенными методами, в которых используем полученные здесь результаты.

5. Уравнения теплового потока и потока массы для пограничного слоя [метод Г. Н. Кружилина]

Идея интегральных методов теории пограничного слоя заключается в том, что с помощью приближенного описания распределения температуры или концент-

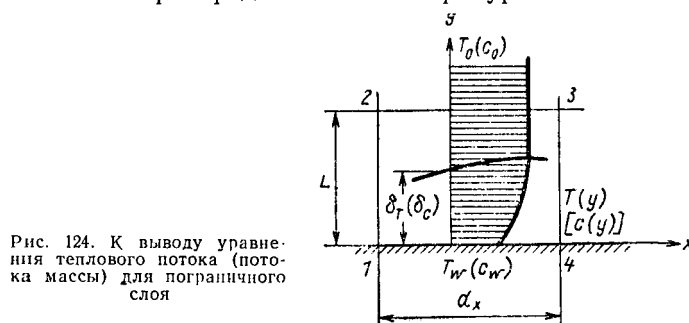


Рис. 124. К выводу уравнения теплового потока (потока массы) для пограничного слоя

рации по толщине пограничного слоя, используя некоторые простые интегральные соотношения, находят толщину соответствующего пограничного слоя (теплового или диффузионного), а зная эту величину, нетрудно определить коэффициенты теплоотдачи и массоотдачи.

Уравнения теплового потока и потока массы для пограничного слоя, которые здесь выводятся, являются интегральными соотношениями, позволяющими при известном распределении температуры или концентрации найти толщину теплового или диффузионного пограничного слоя.

Получим вначале уравнение теплового потока для пограничного слоя, рассмотрев баланс тепла для некоторого объема, выделенного в пределах пограничного слоя. Этот объем ограничен плоскостями 1—2 и 3—4 (рис. 124), перпендикулярными оси x и отстоящими одна от другой на расстоянии dx , а также поверхностью пластины и параллельной ей плоскостью 2—3, расположенной на расстоянии L от поверхности. При этом $L > \delta_t$,

т. е. плоскость 2—3 расположена за пределами теплового пограничного слоя. В направлении оси z , перпендикулярном к плоскости чертежа (см. рис. 124), размер выделенного параллелепипеда принимаем равным единице (размер пластины и потока в этом направлении неограничен).

Рассмотрим стационарное движение жидкости в положительном направлении оси x и стационарное температурное поле. Жидкость несжимаема ($\rho = \text{const}$), теплофизические параметры постоянны.

На основании закона сохранения энергии получаем, что при стационарном тепловом режиме алгебраическая сумма тепловых потоков, проходящих через все плоскости, ограничивающие параллелепипед, равна нулю:

$$Q_{1-2} + Q_{3-4} + Q_{2-3} + Q_{1-4} = 0, \quad (\text{а})$$

где Q_{1-2} , Q_{3-4} , Q_{2-3} и Q_{1-4} — тепловые потоки, проходящие соответственно через плоскости 1—2, 3—4, 2—3 и 1—4.

Потоки тепла, поступающие в параллелепипед, будем считать положительными, уходящие — отрицательными.

Через элемент dy поверхности 1—2 за единицу времени в параллелепипед поступает количество тепла, равное $\rho w_x c_p T dy$. Так как $T = T(y)$ и $w_x = w_x(y)$, то тепловой поток, проходящий через всю плоскость 1—2, составит

$$Q_{1-2} = \int_0^L \rho c_p w_x T dy. \quad (\text{б})$$

На протяжении расстояния dx между плоскостями 1—2 и 3—4 этот тепловой поток изменяется на величину

$$dx \frac{d}{dx} \int_0^L \rho c_p w_x T dy,$$

а потому тепловой поток через плоскость 3—4 выражается как

$$Q_{3-4} = - \left(\int_0^L \rho c_p w_x T dy + dx \frac{d}{dx} \int_0^L \rho c_p w_x T dy \right). \quad (\text{в})$$

Знак «минус» отражает тот факт, что через плоскость

3—4 тепло вместе с движущейся жидкостью уходит из параллелепипеда.

Так как температура жидкости в плоскости 2—3 есть температура невозмущенного потока T_0 , следовательно, поток тепла через эту плоскость можно представить в виде

$$Q_{2-3} = M_{2-3} c_p T_0,$$

где M_{2-3} — поток массы жидкости через плоскость 2—3.

Последнюю величину легко найти, рассмотрев количества жидкости, проходящие через плоскости 1—2 и 3—4. Действительно, поток массы через плоскость 1—2 составляет

$$M_{1-2} = \int_0^L \rho w_x dy.$$

Этот поток на протяжении расстояния dx изменяется на величину

$$dx \frac{d}{dx} \int_0^L \rho w_x dy,$$

т. е. поток массы жидкости через плоскость 3—4 равен

$$M_{3-4} = \int_0^L \rho w_x dy + dx \frac{d}{dx} \int_0^L \rho w_x dy.$$

Разность между потоками M_{3-4} и M_{1-2} как раз и составит поток массы через плоскость 2—3, так как жидкость несжимаема:

$$M_{2-3} = dx \frac{d}{dx} \int_0^L \rho w_x dy.$$

Таким образом, поток тепла через плоскость 2—3 выражается следующим образом:

$$Q_{2-3} = c_p T_0 dx \frac{d}{dx} \int_0^L \rho w_x dy,$$

или, учитывая, что $T_0 = \text{const}$ и $c_p = \text{const}$,

$$Q_{2-3} = dx \frac{d}{dx} \int_0^L \rho c_p T_0 w_x dy. \quad (r)$$

Поток тепла, проходящий через плоскость 1—4, т. е. передаваемый пластине (или от пластины), определяется следующим образом:

$$Q_{1-4} = q_w dx, \quad (д)$$

где q_w — как и ранее, плотность теплового потока на поверхности.

Подставляя выражения (б), (в), (г) и (д) в уравнение баланса тепла (а), получаем

$$dx \frac{d}{dx} \int_0^L \rho c_p w_x T_0 dy - dx \frac{d}{dx} \int_0^L \rho c_p w_x T dy + q_w dx = 0,$$

или, объединяя интегралы и разделив обе части уравнения на ρc_p (учитывая их постоянство) и на dx и перенося последний член левой части в правую, получим

$$\frac{d}{dx} \int_0^L w_x (T_0 - T) dy = -\frac{q_w}{\rho c_p}.$$

В связи с тем, что при $y \geq \delta_T$ температура постоянна и равна температуре невозмущенного потока T_0 , т. е. стоящая в подынтегральном выражении разность температур при $y \geq \delta_T$ обращается в нуль, верхний предел интегрирования заменяем на δ_T и окончательно получаем уравнение

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} w_x (T_0 - T) dy = -\frac{q_w}{\rho c_p}, \quad (\text{XVIII-36})$$

которое и является уравнением теплового потока для пограничного слоя.

Смысл этого уравнения ясен: изменение теплового потока, переносимого конвекцией в пограничном слое, обусловлено теплоотдачей, т. е. теплообменом с поверхностью тела.

Уравнение теплового потока в форме (XVIII-36) справедливо как для ламинарного, так и для турбулентного пограничного слоя, поскольку нигде в выводе этого уравнения мы не обусловили механизм поперечного переноса тепла. Понятно, что в случае турбулентного режима все величины, входящие в уравнение, являются осредненными по времени.

Учитывая, что в случае ламинарного движения в пограничном слое плотность теплового потока на поверхности может быть выражена в соответствии с постулатом Фурье (XV-1)

$$q_w = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0},$$

представим уравнение (XVIII-36) в форме, справедливой лишь для ламинарного пограничного слоя:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} w_x (T_0 - T) dy = a \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (\text{XVIII-36a})$$

Заметим, что это уравнение можно получить путем интегрирования уравнения энергии (XVIII-12) поперек теплового пограничного слоя.

Совершенно аналогично выводится уравнение потока массы для пограничного слоя в случае постоянной плотности жидкости. Поэтому лишь кратко повторим приведенный выше вывод применительно к диффузионному пограничному слою (см. рис. 124, обозначения в скобках).

Закон сохранения массы i -того компонента смеси для выделенного параллелепипеда дает

$$M_{1-2}^i + M_{3-4}^i + M_{2-3}^i + M_{1-4}^i = 0, \quad (\text{e})$$

где $M_{1-2}^i, M_{3-4}^i, M_{2-3}^i, M_{1-4}^i$ — потоки массы примеси, проходящие через соответствующие грани параллелепипеда и выражающиеся следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{1-2}^i &= \int_0^L \rho w_x c dy; \\ M_{3-4}^i &= - \left(\int_0^L \rho w_x c dy + dx \frac{d}{dx} \int_0^L \rho w_x c dy \right); \\ M_{2-3}^i &= dx \frac{d}{dx} \int_0^L \rho w_x c_0 dy; \\ M_{1-4}^i &= m_w^i dx, \end{aligned}$$

где m_w^i — плотность потока массы примеси на поверхности пластины.

Подставляя эти выражения в исходное уравнение баланса массы примеси (е), после простых преобразований получаем уравнение

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_c} w_x (c_0 - c) dy = - \frac{m_w^i}{\rho}, \quad (\text{XVIII-37})$$

аналогичное (XVIII-36) и называемое уравнением потока массы для пограничного слоя. Физический смысл этого уравнения также очевиден. Оно показывает, что изменение потока массы примеси, переносимого конвекцией в пограничном слое, обусловлено массообменом с поверхностью тела, т. е. массоотдачей.

Уравнение потока массы для пограничного слоя в форме (XVIII-37) справедливо как для ламинарного, так и для турбулентного режима движения. В последнем случае все входящие в уравнение (XVIII-37) величины являются осредненными по времени.

Так как при ламинарном движении поперечный перенос вещества обусловлен молекулярной диффузией, плотность потока массы примеси на поверхности можно выразить с помощью постулата Фика (XV-2)

$$m_w = - \rho D \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_{y=0},$$

Подставляя это выражение в уравнение (XVIII-37), получим уравнение потока массы для ламинарного пограничного слоя:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_c} w_x (c_0 - c) dy = D \left(- \frac{\partial c}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (\text{XVIII-37a})$$

Это уравнение также можно получить путем интегрирования уравнения конвективной диффузии (XVIII-15) поперек диффузионного пограничного слоя.

Заметим, что, в соответствии с принятыми в начале этого раздела допущениями, и уравнение теплового потока (XVIII-36), (XVIII-36a) и уравнение потока массы для пограничного слоя (XVIII-37), (XVIII-37a) получены, пренебрегая взаимным влиянием процессов теплообмена и массообмена, если они протекают одновременно. В уравнении теплового потока не учтен диффузионный поток тепла, а в уравнении потока массы — термодиффузионный поток вещества.

Значение полученных уравнений (XVIII-36), (XVIII-36a), (XVIII-37), (XVIII-37a) состоит в том, что они позволяют, приблизительно описав распределение температуры или концентрации поперек пограничного слоя, найти толщину теплового или диффузионного пограничного слоя, что в свою очередь дает возможность определить коэффициенты теплоотдачи и массоотдачи. Покажем это на примере ламинарного пограничного слоя на плоской пластине.

6. Расчет теплоотдачи и массоотдачи в случае ламинарного пограничного слоя на плоской поверхности при вынужденном движении

Вначале рассмотрим процесс теплоотдачи в ламинарном пограничном слое на плоской пластине. Необходимо найти связь коэффициента теплоотдачи α с основными параметрами процесса. Для решения этой задачи следует предварительно определить толщину теплового пограничного слоя δ_x путем решения уравнения (XVIII-36 а), что возможно, если известно, как распределены скорость $w_x(y)$ и температура $T(y)$ по толщине теплового пограничного слоя.

Распределение скорости приближенно описано с помощью полинома третьей степени при исследовании гидродинамического ламинарного пограничного слоя на плоской пластине (см. с. 219—220). Определив коэффициенты этого полинома из граничных условий, получим, что скорость распределена по толщине гидродинамического пограничного слоя следующим образом:

$$w_x = w_\infty \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \right],$$

или в безразмерном виде

$$\frac{w_x}{w_\infty} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta} \right)^3,$$

где δ — толщина гидродинамического пограничного слоя, известная нам из решения динамической задачи функция координаты x ;
 w_∞ — скорость за пределами гидродинамического пограничного слоя.

Таким образом, если толщина теплового пограничного слоя δ_T не превышает толщину гидродинамического слоя δ , т. е. если $\delta_T/\delta \leq 1$, мы можем использовать эти выражения в уравнении (XVIII-36а), так как интегрирование в левой части этого уравнения проводится в пределах толщины теплового пограничного слоя.

Прежде чем перейти к отысканию распределения температуры по толщине теплового пограничного слоя, для облегчения поставленной задачи введем новую переменную — избыточную температуру θ , определив ее как

$$\theta = T - T_w.$$

Тогда, очевидно, на поверхности пластины (при $y=0$) будем иметь $\vartheta(0)=0$, а на границе теплового пограничного слоя (при $y=\delta_T$) $\vartheta(\delta_T)=\vartheta_0=T_0-T_w=\Delta T$ (температурный напор).

Очевидно также, что форма уравнения теплового потока для этой новой переменной не изменится, т. е. это уравнение, записанное в терминах избыточной температуры, примет вид

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\delta_T} w_x (\vartheta_0 - \vartheta) dy = a \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (\text{XVIII-38})$$

Для отыскания распределения избыточной температуры ϑ по толщине теплового пограничного слоя воспользуемся тем же методом, который применен при исследовании гидродинамического пограничного слоя. Положим, что это распределение может быть приближенно описано (аппроксимировано) с помощью полинома третьей степени:

$$\vartheta = a + by + cy^2 + dy^3, \quad (a)$$

где постоянные коэффициенты a , b , c и d должны быть найдены из граничных условий для избыточной температуры.

Указанные граничные условия имеют следующий вид:

$$\left. \begin{array}{ll} 1) \text{ при } y=0 & \vartheta=0; \\ 2) \text{ при } y=0 & \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}=0; \\ 3) \text{ при } y=\delta_T & \vartheta=\vartheta_0; \\ 4) \text{ при } y=\delta_T & \frac{\partial \vartheta}{\partial y}=0. \end{array} \right\} \quad (б)$$

Из этих граничных условий первое и третье являются очевидными. Второе граничное условие вытекает из уравнения энергии для пограничного слоя (XVIII-12). Действительно, так как на поверхности пластины (при $y=0$) $w_x=0$ (условие прилипания) и $w_y=0$ (условие непроницаемости поверхности пластины¹), следова-

¹ Заметим, что равенство нулю поперечной компоненты скорости на поверхности пластины строго справедливо только при отсутствии массообмена на поверхности. Действительно, при наличии массообмена частицы вещества с поверхности переходят в жидкость

тельно величина:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0,$$

или, что то же:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = 0.$$

Четвертое граничное условие представляет собой условие плавного перехода от температуры, переменной в пределах пограничного слоя, к постоянной температуре невозмущенного потока.

Используя четыре граничных условия (б), легко получить значения четырех постоянных коэффициентов в выражении (а) (они имеют тот же вид, что и для профиля скорости в связи с идентичностью граничных условий для скорости и для избыточной температуры):

$$\begin{aligned} a &= 0; \\ b &= \frac{3}{2} \frac{\vartheta_0}{\delta_T}; \\ c &= 0; \\ d &= -\frac{1}{2} \frac{\vartheta_0}{\delta_T^3}. \end{aligned}$$

Таким образом, профиль избыточной температуры имеет приближенно следующий вид:

$$\vartheta = \vartheta_0 \left[\frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3 \right] \quad (\text{XVIII-39})$$

или в безразмерной форме

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{3}{2} \frac{y}{\delta_T} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\delta_T} \right)^3. \quad (\text{XVIII-39a})$$

Теперь нетрудно взять интеграл в левой части уравнения теплового потока (XVIII-38), который мы представим в следующем виде:

$$\int_0^{\delta_T} w_x (\vartheta_0 - \vartheta) dy = w_{x0} \vartheta_0 \delta \int_0^{\delta_T/\delta} \frac{w_x}{w_{x0}} \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_0} \right) d \left(\frac{y}{\delta} \right),$$

(либо из жидкости на поверхность), т. е. $w_y(0) \neq 0$. Таким образом, приведенные здесь выкладки справедливы либо при отсутствии массообмена, либо при небольшой его интенсивности.

где величины w_{x0} , ϑ_0 и δ (толщина гидродинамического пограничного слоя) вынесены за знак интеграла в связи с тем, что они не зависят от y . Подставляя в это уравнение выражения (XI-45) и (XVIII-39 а) для безразмерной скорости и безразмерной избыточной температуры, получим

$$\int_0^{\delta_T} w_x (\vartheta_0 - \vartheta) dy = w_{x0} \vartheta_0 \delta \left[\frac{3}{20} \left(\frac{\delta_T}{\delta} \right)^2 - \frac{3}{280} \left(\frac{\delta_T}{\delta} \right)^4 \right],$$

где вторым слагаемым в квадратных скобках можно пренебречь по сравнению с первым, так как по условию $\delta_T/\delta \leq 1$. Обозначив $\delta_T/\delta = \gamma$, получим

$$\int_0^{\delta_T} w_x (\vartheta_0 - \vartheta) dy = \frac{3}{20} w_{x0} \vartheta_0 \delta \gamma^2. \quad (в)$$

Величину, стоящую в правой части уравнения теплового потока (XVIII-38), легко найти, зная распределение избыточной температуры (XVIII-39):

$$a \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{a \vartheta_0}{\delta_T} = \frac{3}{2} \frac{a \vartheta_0}{\delta \gamma}. \quad (г)$$

Подставляя полученные результаты (в) и (г) в уравнение теплового потока (XVIII-38), получаем после сокращений

$$\frac{1}{10} w_{x0} \delta \gamma \frac{d(\delta \gamma^2)}{dx} = a.$$

Дифференцируя с учетом того, что δ и γ суть функции x (δ — известная функция, γ — неизвестная), получаем уравнение

$$\frac{1}{10} w_{x0} \left(2 \delta^2 \gamma^2 \frac{d\gamma}{dx} + \delta \frac{d\delta}{dx} \gamma^3 \right) = a.$$

Подставляя в это уравнение полученные при решении динамической задачи (см. раздел второй, глава XI) результаты:

$$\begin{aligned} \delta \frac{d\delta}{dx} &= \frac{140}{13} \frac{\nu}{w_{x0}}; \\ \delta^2 &= \frac{280}{13} \frac{\nu x}{w_{x0}}, \end{aligned}$$

получим дифференциальное уравнение, в котором неизвестной величиной является отношение толщин теплового и гидродинамического пограничных слоев γ :

$$\frac{4}{3} x \frac{d(\gamma^3)}{dx} + \gamma^3 = \frac{13}{14} \frac{1}{Pr}. \quad (д)$$

Решение этого уравнения находится весьма просто. На передней кромке пластины, т. е. при $x=0$, первый член в левой части уравнения также равен нулю, поскольку $d(\gamma^3)/dx$ может быть либо равной нулю (если в начале пластины имеется необогреваемый участок), либо конечной величине (если при $x=0$ начинаются и динамический и тепловой пограничные слои). Отсюда получаем

$$\gamma^3 = \frac{13}{14} \frac{1}{Pr}$$

или

$$\gamma = \frac{1}{1,026 \sqrt[3]{Pr}}.$$

С учетом точности приближенного расчета можно положить

$$\frac{\delta_T}{\delta} = \gamma \approx \frac{1}{\sqrt[3]{Pr}}, \quad (\text{XVIII-40})$$

что совпадает с точным решением уравнения энергии (XVIII-12).

Таким образом, полученный здесь результат подтверждает высказанное ранее предположение о том, что соотношение толщин теплового и гидродинамического пограничных слоев определяется величиной критерия Прандтля.

Решение (XVIII-40) позволяет выяснить, для каких случаев справедлив проведенный анализ. Действительно, все приведенные здесь выкладки справедливы при условии $\delta_T/\delta \leq 1$, что, в соответствии с формулой (XVIII-40), означает $Pr \geq 1$. Это условие удовлетворяется для капельных жидкостей (неэлектропроводных), для которых, следовательно, вполне справедливы эти и приводимые ниже результаты. Для газов число Прандтля заключено в пределах $0,6 \leq Pr \leq 1$, т. е., строго говоря, условие $\gamma \leq 1$ не выполняется. Однако даже при минимальном для газов значении числа Прандтля

ошибка, связанная с нарушением указанного условия невелика, и наши выводы можно считать справедливыми.

Эти выводы, однако, совершенно несправедливы для теплоотдачи при движении жидких металлов, которые в результате электронной проводимости имеют весьма высокий коэффициент теплопроводности (а следовательно, и температуропроводности). Для жидких металлов $Pr \ll 1$.

В связи с тем, что изменение толщины гидродинамического пограничного слоя по длине пластины известно из решения динамической задачи (XI-47):

$$\delta = \frac{4,64 x}{\sqrt{Re_x}},$$

формула (XVIII-40) позволяет найти выражение для толщины теплового пограничного слоя:

$$\delta_T = \frac{4,64 x}{\sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}}, \quad (XVIII-41)$$

где Re_x — число Рейнольдса, в котором роль характерного размера играет текущее расстояние от передней кромки пластины:

$$Re_x = \frac{w_{x0} x}{\nu}.$$

Теперь, зная толщину теплового пограничного слоя, нетрудно определить коэффициент теплоотдачи. Действительно, из формулы (XVIII-4), полученной на основании дифференциального уравнения конвективной теплоотдачи (XVIII-3), имеем

$$\alpha = \frac{\lambda}{\Delta T} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (XVIII-4a)$$

где величина градиента температуры на поверхности пластины уже известна (г):

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\vartheta_0}{\delta_T} = \frac{3}{2} \frac{\Delta T}{\delta_T}.$$

Подставляя это выражение в формулу (XVIII-4 a), получаем

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{\delta_T}. \quad (XVIII-42)$$

Следовательно, коэффициент теплоотдачи обратно пропорционален толщине теплового пограничного слоя, так как чем больше толщина теплового пограничного слоя, тем больше сопротивление переносу тепла через пограничный слой и тем меньше коэффициент теплоотдачи.

Подставив в формулу (XVIII-42) полученное решение для толщины теплового пограничного слоя (XVIII-41), найдем выражение, показывающее, как меняется коэффициент теплоотдачи по длине пластины:

$$\alpha = 0,332 \frac{\lambda}{x} \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Pr}. \quad (\text{XVIII-43})$$

Таким образом, коэффициент теплоотдачи уменьшается по длине пластины обратно пропорционально $x^{0,5}$:

$$\alpha = \frac{C}{\sqrt{x}}, \quad (\text{XVIII-43a})$$

где в коэффициент C включены все постоянные величины, фигурирующие в формуле (XVIII-43).

Такой характер изменения коэффициента теплоотдачи по длине пластины объясняется тем, что по мере удаления от переднего края пластины толщина теплового пограничного слоя увеличивается; в то же время разность температур (температурный напор) на толщине пограничного слоя $\Delta T = T_0 - T_w$ остается неизменной. Поэтому по мере удаления от передней кромки пластины поперечный градиент температуры в пограничном слое, а следовательно, и на поверхности уменьшается, что приводит к уменьшению коэффициента теплоотдачи в соответствии с формулой (XVIII-4a).

Выражение (XVIII-43) легко представить в безразмерном виде. Действительно, умножив обе части этого выражения на x и разделив на λ , получим в левой его части безразмерную величину

$$\frac{\alpha x}{\lambda} = Nu,$$

которая называется числом Нуссельта и представляет собой по существу безразмерный коэффициент теплоотдачи. Таким образом, формула для коэффициента теплоотдачи имеет в безразмерной форме следующий вид:

$$Nu = 0,332 Re_x^{0,5} Pr^{1/3}. \quad (\text{XVIII-44})$$

Совершенно аналогичным образом с помощью уравнений потока массы для пограничного слоя (XVIII-37a) можно рассчитать процесс массоотдачи при ламинарном движении жидкости вдоль плоской поверхности. При этом, однако, необходимо предположить, что интенсивность массоотдачи настолько мала, что поперечная компонента скорости на поверхности близка к нулю, $w_y(0) \approx 0$. В противном случае граничное условие $(\partial^2 c / \partial y^2)_{y=0} = 0$ не выполняется и решение задачи существенно усложняется.

Полагая, как и ранее, что толщина диффузионного пограничного слоя не превышает толщины гидродинамического, получим

$$\frac{\delta_c}{\delta} = \frac{1}{\sqrt[3]{Sc}}, \quad (\text{XVIII-45})$$

что соответствует высказанному ранее предположению о зависимости соотношения толщин диффузионного и гидродинамического пограничных слоев от критерия Шмидта.

Подставив в выражение (XVIII-45) формулу (XI-47) для толщин гидродинамического пограничного слоя, найдем закон изменения толщины диффузионного пограничного слоя по длине пластины:

$$\delta_c = \frac{4,64 x}{\sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Sc}}. \quad (\text{XVIII-46})$$

Используя формулу (XVIII-6), полученную из дифференциального уравнения конвективной массоотдачи (XVIII-5) и имеющую в рассматриваемом случае вид

$$\beta = \frac{D}{\Delta c} \left(\frac{\partial c}{\partial y} \right)_{y=0}, \quad (\text{XVIII-6a})$$

найдем связь между коэффициентом массоотдачи и толщиной диффузионного пограничного слоя:

$$\beta = \frac{3}{2} \frac{D}{\delta_c}. \quad (\text{XVIII-47})$$

Таким образом, коэффициент массоотдачи также обратно пропорционален толщине диффузионного пограничного слоя, что обусловлено возрастанием сопротивления поперечному переносу массы по мере увеличения толщины пограничного слоя.

Формулы (XVIII-46) и (XVIII-47) позволяют определить, как меняется коэффициент массоотдачи по длине пластины:

$$\beta = 0,332 \frac{D}{x} \sqrt{Re_x} \sqrt[3]{Sc}. \quad (\text{XVIII-48})$$

Уменьшение β по мере удаления от передней кромки пластины так же, как и в случае теплоотдачи, обусловлено нарастанием толщины диффузионного пограничного слоя.

Разделив обе части выражения (XVIII-48) на D и умножив на x , получим в левой его части безразмерную величину

$$\frac{\beta x}{D} = Sh,$$

аналогичную числу Нуссельта, представляющую собой безразмерный коэффициент массоотдачи и называемую числом Шервуда. В результате формула (XVIII-48) приобретает следующий вид:

$$Sh = 0,332 Re_x^{0,5} Sc^{1/3}, \quad (XVIII-49)$$

где все величины являются безразмерными.

Заметим, что все приведенные здесь результаты, полученные для процесса теплоотдачи, полностью аналогичны соответствующим результатам, относящимся к процессу массоотдачи. Этот факт является совершенно естественным, если учесть уже не раз отмечавшуюся аналогию между процессами переноса тепла и вещества при ламинарном движении. Подчеркнем еще раз, что столь полное сходство этих результатов получается только в том случае, когда можно пренебречь взаимным влиянием процессов переноса тепла и массы, а также влиянием процессов массообмена на граничные условия соответствующих задач. В противном случае указанная аналогия носит лишь приближенный характер.

Важно отметить, что принципиальный характер полученных результатов имеет не частное (для данной формы поверхности и для данной картины движения жидкости), а общее значение. Во всех случаях конвективная теплоотдача при вынужденном движении описывается зависимостями вида

$$Nu = Nu(Re, Pr),$$

а конвективная массоотдача — зависимостями вида

$$Sh = Sh(Re, Sc).$$

Именно такой вид имеют многочисленные эмпирические формулы, используемые для практических расчетов процессов тепло- и массоотдачи.

Более того, оказывается, что во всех случаях вынужденной конвекции при ламинарном режиме критерий Рейнольдса входит в формулы для теплоотдачи и для массоотдачи в степени 0,5, как и в том простом частном случае, который был рассмотрен с помощью приближенного аналитического метода.

Отмеченная идентичность расчетных формул для теплоотдачи и для массоотдачи является весьма ценной с практической точки зрения. Дело в том, что исследования процессов теплоотдачи начались значительно раньше, чем исследования массообменных процессов. Поэтому в различных справочных изданиях можно найти большое количество теоретических и эмпирических формул, охватывающих практически все встречающиеся в технике случаи конвективной теплоотдачи. В то же время процессы массоотдачи исследованы еще совершенно недостаточно. Однако аналогичный характер ко-

точных результатов для теплоотдачи и для массоотдачи позволяет использовать формулы, полученные для теплоотдачи в расчетах (по крайней мере приближенных) массообменных процессов.

Полученные формулы (XVIII-43), (XVIII-44), (XVIII-48), (XVIII-49) дают локальные значения коэффициентов теплоотдачи и массоотдачи, изменяющиеся от точки к точке по длине пластины, однако в практических инженерных расчетах удобнее иметь дело не с локальными, а со средними по поверхности значениями этих величин. Действительно, если $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ — соответственно средние по поверхности F значения коэффициентов теплоотдачи и массоотдачи, то суммарные потоки тепла и вещества на этой поверхности определяются по элементарным формулам:

$$Q = \bar{\alpha} \Delta T F;$$

$$M_i = \bar{\beta} \Delta c F.$$

Очевидно, что в случае безграничной в направлении z пластины среднее по поверхности значение любой величины определяется путем осреднения ее на некоторой длине L , например

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{L} \int_0^L \alpha(x) dx.$$

Подставляя вместо $\alpha(x)$ значение этой величины из формулы (XVIII-43 а) и выполняя интегрирование, найдем

$$\bar{\alpha} = \frac{2C}{\sqrt{L}} = 2\alpha(L),$$

т. е. среднее по длине L значение коэффициента теплоотдачи (а также коэффициента массоотдачи) равно удвоенному локальному значению его в конце этой длины.

Таким образом, критериальные (записанные в безразмерном виде) формулы для средних коэффициентов теплоотдачи и массоотдачи имеют в случае плоской поверхности следующий вид:

$$\overline{Nu} = 0,664 Re_L^{0,5} Pr^{1/3},$$

$$\overline{Sh} = 0,664 Re_L^{0,5} Sc^{1/3}.$$

где

$$\overline{Nu} = \overline{\alpha}L/\lambda; \quad \overline{Sh} = \overline{\beta}L/D;$$

$$Re_L = w_{x0}L/\nu.$$

Заметим, что если физические параметры, фигурирующие в этих и в полученных ранее формулах зависят от температуры либо от концентрации примеси, то этот факт можно приближенно учесть, взяв значения этих параметров при средней по толщине пограничного слоя температуре либо концентрации:

$$T_m = \frac{T_0 + T_w}{2};$$

$$c_m = \frac{c_0 + c_w}{2}.$$

7. Расчет теплоотдачи и массоотдачи в случае турбулентного пограничного слоя на плоской поверхности при вынужденном движении

При рассмотрении процессов теплоотдачи и массоотдачи в случае турбулентного движения будем пользоваться двухслойной схемой этого течения, в соответствии с которой турбулентный пограничный слой состоит из двух зон: собственно турбулентной зоны и вязкого (или ламинарного) подслоя, прилегающего к поверхности тела. Будем считать, следовательно, что процессы переноса тепла и массы в турбулентной зоне обусловлены чисто турбулентными механизмами (турбулентной теплопроводностью и диффузией), а в вязком подслое — молекулярными механизмами (молекулярной теплопроводностью и диффузией).

Физические особенности процессов переноса в турбулентном пограничном слое, а именно: весьма высокая интенсивность поперечного переноса тепла и массы в турбулентной зоне и низкая в ламинарном подслое, приводят к своеобразному, отличному от ламинарного случая, распределению осредненных значений температуры и концентрации примеси по толщине пограничного слоя (рис. 125). Благодаря выравнивающему действию интенсивного пульсационного переноса профиль температуры (и концентрации) в турбулентной зоне сравнительно ровный, без существенных градиентов. В области же ламинарного подслоя происходит весьма быст-

рое изменение температуры (и концентрации) вплоть до ее значения на поверхности.

Можно проанализировать эти процессы с помощью уравнений теплового потока и потока массы (XVIII-36), (XVIII-37). Однако лучшие результаты и более простым путем можно получить, используя так называемую

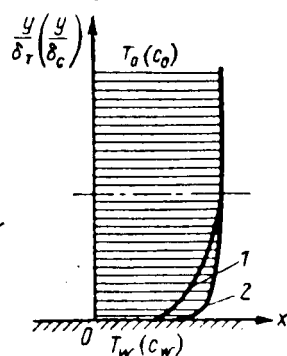


Рис. 125. Распределение температуры (концентрации смеси) по толщине ламинарного (1) и турбулентного (2) пограничных слоев

гидродинамическую теорию теплообмена и массообмена, которая основана на аналогии (впервые обнаруженной Рейнольдсом) между процессами турбулентного переноса количества движения и тепла (либо вещества).

Математически эта аналогия проявляется, например, в одинаковом виде уравнений движения (XI-33), энергии (XVIII-24) и диффузии (XVIII-25) для турбулентного пограничного слоя, а также в аналогичной структуре формул для турбулентного касательного напряжения трения (XI-39) и

турбулентных потоков тепла (XVIII-27) и массы (XVIII-29), полученных на основе полуэмпирической теории турбулентности Прандтля.

Итак, при рассмотрении процессов переноса тепла и массы в турбулентной зоне воспользуемся аналогией Рейнольдса. Что же касается ламинарного подслоя, то в связи с малой его толщиной можно предположить, что скорость, температура и концентрация меняются по толщине этой зоны линейно.

Рассмотрим вначале процесс теплоотдачи в случае турбулентного пограничного слоя.

Выделим в пределах ламинарного подслоя поверхность, параллельную поверхности тела. Процесс молекулярного переноса импульса через эту поверхность описывается формулой Ньютона для вязкого трения

$$\tau = \mu \frac{\partial w_x}{\partial y}.$$

Процесс молекулярного переноса тепла через выделенную поверхность подчиняется постулату Фурье

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Заметим, что и касательное напряжение трения τ и плотность теплового потока q постоянны по толщине ламинарного подслоя в соответствии с нашим предположением о линейном характере изменения скорости и температуры в пределах этой зоны.

Разделив второе из этих равенств на первое, получим после простых преобразований

$$dT = \frac{\mu}{\lambda} \frac{q}{\tau} d\omega_x.$$

Знаком «минус» пренебрегаем в связи с тем, что знаки приращения температуры dT и скорости $d\omega_x$ друг с другом не связаны. Помня, что плотность теплового потока и касательное напряжение трения постоянны по толщине подслоя, а потому их отношение равно отношению их значений на поверхности пластины:

$$\frac{q}{\tau} = \frac{q_w}{\tau_w},$$

и выражая отношение динамического коэффициента вязкости к коэффициенту теплопроводности через физический критерий Прандтля

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{Pr}{c_p},$$

получим

$$dT = \frac{Pr}{c_p} \frac{q_w}{\tau_w} d\omega_x.$$

Интегрируя это выражение по толщине ламинарного подслоя, найдем разность температур жидкости на этой толщине:

$$T_r - T_w = \frac{Pr}{c_p} \frac{q_w}{\tau_w} \omega_{xr}, \quad (a)$$

где T_r и ω_{xr} — соответственно значения температуры и скорости на границе между ламинарным подслоем и турбулентной зоной.

Теперь выделим поверхность, параллельную поверхности тела в пределах собственно турбулентной зоны пограничного слоя.

Перенос количества движения через эту поверхность описывается формулой Прандтля (XI-39) для турбулентного касательного напряжения трения¹:

$$\tau_t = \rho l^2 \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} \right)^2.$$

Перенос тепла через выделенную поверхность описывается полученной выше формулой (XVIII-27) для плотности турбулентного теплового потока:

$$q_t = -\rho c_p l l_t \frac{\partial w_x}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Разделив второе из этих равенств на первое и разделив переменные, получим после сокращений

$$dT = \frac{l}{c_p l_t} \frac{q_t}{\tau_t} dw_x,$$

где знаком «минус» пренебрегаем по той же причине, что и ранее.

На основе аналогии Рейнольдса предполагаем, что плотность турбулентного потока количества движения (турбулентное касательное напряжение трения) τ_t и плотность турбулентного потока тепла q_t изменяются по толщине турбулентной зоны пограничного слоя одинаковым образом, так что их соотношение остается постоянным на всем протяжении этой зоны, включая границу между ней и ламинарным подслоем. Но поскольку в пределах подслоя отношение этих величин также постоянно, получаем

$$\frac{q_t}{\tau_t} = \frac{q_w}{\tau_w}.$$

Кроме того, отношение величин пути смещения для переноса импульса и для переноса тепла, как показано ранее, является постоянной величиной, имеющей смысл турбулентного критерия Прандтля:

$$\frac{l}{l_t} = Pr_t.$$

Отсюда получаем

$$dT = \frac{Pr_t}{c_p} \frac{q_w}{\tau_w} dw_x.$$

¹ Здесь и далее знаки осреднения для сокращения записи опускаем.

Интегрируя это уравнение по толщине турбулентной зоны пограничного слоя, найдем разность температур на протяжении этой толщины:

$$T_0 - T_\Gamma = \frac{Pr_\tau}{c_p} \frac{q_w}{\tau_w} (\omega_{x0} - \omega_{x\Gamma}). \quad (6)$$

Суммируя равенства (а) и (б), получим выражение для разности температур на всей толщине турбулентного пограничного слоя, т. е. для температурного напора:

$$T_0 - T_w = \frac{q_w \omega_{x0} Pr}{\tau_w c_p} \left[\frac{Pr_\tau}{Pr} + \frac{\omega_{x\Gamma}}{\omega_{x0}} \left(1 - \frac{Pr_\tau}{Pr} \right) \right].$$

Так как температурный напор является величиной заданной, это соотношение выражает, по существу, связь между плотностью теплового потока q_w и касательным напряжением трения τ_w на поверхности, полученную на основе аналогии Рейнольдса

$$q_w = \frac{\tau_w c_p \Delta T}{\omega_{x0} Pr} \frac{1}{\frac{Pr_\tau}{Pr} + \frac{\omega_{x\Gamma}}{\omega_{x0}} \left(1 - \frac{Pr_\tau}{Pr} \right)}.$$

Таким образом, интенсивность теплообмена на поверхности тела пропорциональна сопротивлению трения, которое оказывает поверхность движению жидкости. Этот результат как раз и составляет сущность гидродинамической теории теплообмена.

Выражая в последнем равенстве плотность теплового потока на поверхности через температурный напор и коэффициент теплоотдачи в соответствии с формулой Ньютона

$$q_w = \alpha \Delta T$$

и разделив обе части этого равенства на ΔT , получаем окончательную формулу для коэффициента теплоотдачи в случае турбулентного пограничного слоя

$$\alpha = \frac{\tau_w c_p}{\omega_{x0} Pr} \frac{1}{\frac{Pr_\tau}{Pr} + \frac{\omega_{x\Gamma}}{\omega_{x0}} \left(1 - \frac{Pr_\tau}{Pr} \right)}. \quad (XVIII-50)$$

Соответствующая формула для коэффициента массоотдачи, которую можно получить на основе совершенно аналогичных рассуждений, будет, очевидно, иметь следующий вид:

$$\beta = \frac{\tau_w}{\rho \omega_{x0} Sc} \frac{1}{\frac{Sc_\tau}{Sc} + \frac{\omega_{x\Gamma}}{\omega_{x0}} \left(1 - \frac{Sc_\tau}{Sc} \right)}, \quad (XVIII-51)$$

где Sc_τ — турбулентный критерий Шмидта, который, как было показано ранее, равен турбулентному критерию Прандтля:

$$Sc_\tau = Pr_\tau = 0,75.$$

Как это следует из логики рассуждений, формулы гидродинамической теории тепло- и массообмена (XVIII-50), (XVIII-51) справедливы для турбулентного пограничного слоя, образующегося на поверхности любой формы. Специфический вид выражений для коэффициентов теплоотдачи и массоотдачи в случае тел различной формы получается в результате подстановки в формулы (XVIII-50), (XVIII-51) соответствующих выражений для касательного напряжения трения на поверхности тела. Последние находят с помощью экспериментов или из решения соответствующих гидродинамических задач.

Заметим, что формулы (XVIII-50), (XVIII-51) достаточно сложны, тем более, что скорость на границе между ламинарным подслоем и турбулентной зоной $w_{x\tau}$ неизвестна, а определение ее связано со значительными трудностями. Однако формула теплоотдачи (XVIII-50) существенно упрощается для газов, у которых физическое число Прандтля равно или близко к турбулентному числу Прандтля (0,75). В этом случае из выражения (XVIII-50) при $Pr = Pr_\tau$ получаем

$$\alpha = \frac{\tau_w c_p}{w_{x0} Pr}. \quad (\text{XVIII-52})$$

Формула массоотдачи (XVIII-51) также упрощается для тех смесей, у которых физическое число Шмидта близко к турбулентному, т. е. к 0,75. Действительно, при $Sc = Sc_\tau$ из выражения (XVIII-51) получаем

$$\beta = \frac{\tau_w}{\rho w_{x0} Sc}. \quad (\text{XVIII-53})$$

При рассмотрении гидродинамического турбулентного пограничного слоя на плоской поверхности (см. раздел второй, глава XI) было найдено выражение для локального, т. е. изменяющегося от точки к точке по длине пластины, и среднего на некоторой длине L касательных напряжений трения на поверхности. Эти выражения имеют соответственно следующий вид:

$$\tau_w = 0,0296 \frac{\rho w_{x0}^2}{Re_x^{0,2}};$$

$$\bar{\tau}_w = 0,037 \frac{\rho w_{x0}^2}{Re_L^{0,2}}.$$

Подставляя эти результаты в формулу (XVIII-52), получим выражение для локального значения коэффициента теплоотдачи

$$\alpha = 0,0296 Re_x^{0,8} \frac{\lambda}{x} \quad (\text{XVIII-54})$$

и для среднего на длине L его значения

$$\bar{\alpha} = 0,037 Re_L^{0,8} \frac{\lambda}{L} \quad (\text{XVIII-55})$$

в случае турбулентного движения вдоль плоской поверхности.

Умножив каждое из этих выражений на линейный размер (первое — на x , а второе — на L) и разделив на λ , получим соответствующие формулы в безразмерном виде:

$$Nu = 0,0296 Re_x^{0,8}; \quad (\text{XVIII-54a})$$

$$\bar{Nu} = 0,037 Re_L^{0,8}. \quad (\text{XVIII-55a})$$

Очевидно, что формулы массоотдачи для турбулентного пограничного слоя на плоской пластине будут иметь аналогичный вид: для локального коэффициента массоотдачи

$$\beta = 0,0296 Re_L^{0,8} \frac{D}{x}; \quad (\text{XVIII-56})$$

для среднего по длине L значения этой величины

$$\bar{\beta} = 0,037 Re_L^{0,8} \frac{D}{L} \quad (\text{XVIII-57})$$

или в безразмерной форме соответственно

$$Sh = 0,0296 Re_x^{0,8}; \quad (\text{XVIII-56a})$$

$$\bar{Sh} = 0,037 Re_L^{0,8}. \quad (\text{XVIII-57a})$$

Напомним, что формулы теплоотдачи (XVIII-54) и (XVIII-55a) справедливы для газов, а формулы массоотдачи (XVIII-56) и (XVIII-57a) — для таких смесей, которые характеризуются физическим числом Шмидта, близким к 0,75.

Как это видно из формул (XVIII-54) и (XVIII-56), локальные коэффициенты теплоотдачи и массоотдачи

уменьшаются по длине поверхности обратно пропорционально $x^{0,2}$. Аналогично случаю ламинарного пограничного слоя, это объясняется возрастанием толщины пограничного слоя, а следовательно, возрастанием теплового сопротивления и сопротивления переносу массы.

Полученные путем приближенного полуэмпирического анализа выражения хорошо описывают процессы теплоотдачи и массоотдачи в случае турбулентного движения при тех условиях, о которых сказано выше. Эти выражения весьма близки к эмпирическим формулам, полученным для других условий. Например, эмпирическая формула теплоотдачи для сред, у которых число Прандтля существенно отличается от единицы (для капельных жидкостей) имеет вид

$$\overline{Nu} = 0,037 Re_L^{0,8} Pr^{0,43} (Pr/Pr_w)^{0,25},$$

где все теплофизические параметры определяются при температуре жидкости за пределами пограничного слоя T_0 , а Pr_w — при температуре поверхности. Множитель $(Pr/Pr_w)^{0,25}$ учитывает в этой формуле зависимость теплофизических параметров от температуры.

Вообще в случае турбулентного движения, как и в случае ламинарного, формулы для теплоотдачи при вынужденном движении имеют вид

$$Nu = Nu(Re, Pr),$$

а для массоотдачи

$$Sh = Sh(Re, Sc).$$

Эти формулы для различных случаев движения жидкости и для поверхностей различных форм приводятся ранее в справочниках. Заметим, кстати, что при турбулентном движении, как показывают многочисленные экспериментальные исследования, в большинстве практически важных случаев, в частности при движении в трубах, число Нуссельта (или число Шервуда) оказывается пропорциональным числу Рейнольдса в степени 0,8, что совпадает с результатом, полученным для случая плоской пластины путем приближенного полуэмпирического анализа, основанного на гидродинамической теории тепло- и массообмена.

Остановимся в заключение на одном очень важном обстоятельстве. Тот факт, что теплоотдача при вынужденном движении определяется числами Рейнольдса и Прандтля, а массоотдача — числами Рейнольдса и

Шмидта, отнюдь не является случайным, но отражает глубокую физическую сущность этих процессов. Действительно, числа Прандтля и Шмидта, характеризующие соотношение интенсивностей переноса количества движения и тепла (либо массы), т. е. интенсивностей тесно связанных и влияющих друг на друга процессов, должны с неизбежностью влиять на процессы конвективной теплоотдачи и массоотдачи. С другой стороны, число Рейнольдса является, как известно из второго раздела, важнейшей характеристикой движения жидкости в условиях вынужденной конвекции. Очевидно, что процесс вынужденного движения жидкости определяется взаимодействием двух сил: силы инерции и силы внутреннего трения. Число Рейнольдса и характеризует соотношение этих двух сил, а так как процессы конвективной теплоотдачи и массоотдачи происходят только при движении жидкости и определяются характеристиками этого движения, следовательно, коэффициенты теплоотдачи и массоотдачи при вынужденном движении неизбежно должны существенно зависеть от числа Рейнольдса.

8. Теплоотдача и массоотдача в условиях свободной (естественной) конвекции

До сих пор изучались процессы конвективной теплоотдачи и массоотдачи, протекающие в условиях чисто вынужденного движения жидкости. Это означает, что движение рассматривалось как заданное, не зависящее от самого процесса теплообмена или массообмена.

Свободная, или естественная, конвекция тепла либо массы также обусловлена движением жидкости. Однако в этом случае движение жидкости возникает и поддерживается именно вследствие протекания процессов теплообмена или массообмена. Дело в том, что любые процессы переноса тепла и массы могут происходить только при наличии в среде неоднородного поля температур либо концентраций, а это, в свою очередь, приводит к возникновению неоднородного поля плотности среды. Если же жидкость находится в поле силы тяжести, то наличие неоднородного поля плотности влечет за собой появление неоднородного распределения гравитационных сил, действующих на различные объемы жидкости, т. е. возникают результирующие подъемные

силы, называемые архимедовыми силами, которые и приводят жидкость в движение.

Из сказанного ясно, что в условиях земного тяготения процессы переноса тепла или массы не могут происходить в неподвижной жидкости. Даже при отсутствии вынужденного движения эти процессы всегда сопровождаются (и обуславливаются) свободно-конвективным движением среды.

Следует отметить, что в современной технике и, в частности, в современных промышленных печах процессы

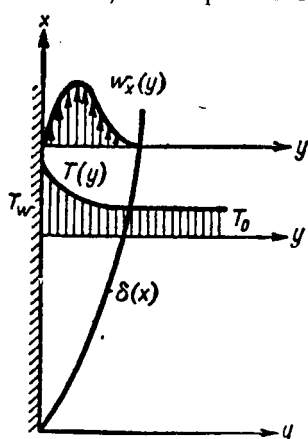


Рис. 126. Пограничный слой при свободном движении у нагретой вертикальной плоскости

конвективного переноса практически всегда осуществляются в условиях вынужденного движения и лишь в редких случаях — за счет свободной конвекции. Поэтому нет необходимости рассматривать свободную конвекцию так же подробно, как вынужденную.

Вообще говоря, для аналитического исследования процессов теплоотдачи и массоотдачи в условиях свободного движения можно воспользоваться теми же приближенными методами теории пограничного слоя, которые были применены при изучении вынужденной конвекции. Действительно, понятие пограничного

слоя может быть введено и для свободного движения жидкости. На рис. 126 показана в качестве примера схема пограничного слоя, образующегося при свободно-конвективном движении жидкости вблизи нагретой вертикальной плоской поверхности. Особенностью такого пограничного слоя является тот факт, что скорость на его внешней границе равна нулю. А так как на поверхности скорость также равна нулю, следовательно, в пределах пограничного слоя имеется некоторое максимальное значение скорости. Что же касается распределения температуры (и концентрации), то оно принципиально не отличается от случая вынужденного движения: на поверхности температура равна T_w , за пределами пограничного слоя T_0 .

Следовательно, используя уравнения потока количества движения (в специфической форме, учитывающей действие подъемной силы) и потока тепла (либо массы), можно рассчитать толщину пограничного слоя и найти коэффициент теплоотдачи (либо массоотдачи). Однако ограничимся качественным рассмотрением процессов теплоотдачи и массоотдачи при свободном движении, которое покажет, какой вид должны иметь соотношения, описывающие свободную конвекцию тепла (либо массы).

В результате изучения теплоотдачи и массоотдачи было установлено, что в условиях вынужденного движения безразмерные коэффициенты теплоотдачи и массоотдачи (числа Нуссельта и Шервуда) являются функциями критерия Рейнольдса, поскольку он характеризует соотношение сил инерции и внутреннего трения (определяющих характер движения жидкости в условиях вынужденной конвекции) и критериев Прандтля либо Шмидта, поскольку они характеризуют соотношение интенсивностей процессов молекулярного переноса импульса и тепла либо массы.

Очевидно, что в условиях свободной конвекции зависимость чисел Нуссельта и Шервуда от критериев Прандтля и Шмидта сохраняет свою силу, так как процессы молекулярного переноса импульса и тепла являются и в этом случае важнейшими процессами, определяющими, в конечном счете, интенсивность теплоотдачи и массоотдачи. Что же касается критерия Рейнольдса, то в случае свободной конвекции он не может характеризовать движение жидкости, так как, помимо сил инерции и внутреннего трения, весьма существенную роль играют подъемные силы.

Задача, таким образом, заключается в том, чтобы выяснить, какой вид должна иметь безразмерная величина (критерий), определяющая движение жидкости в условиях свободной конвекции. Эта величина, очевидно, должна характеризовать соотношение подъемной силы и силы инерции, с одной стороны, и силы внутреннего трения — с другой.

Пусть в жидкости имеется элементарный объем dV , в котором плотность среды меньше плотности окружающей жидкости на величину $\Delta\rho$. Эта разность плотностей в случае теплообмена может быть обусловлена тем, что температура жидкости в выделенном объеме выше тем-

пературы окружающей среды, а в случае массообмена — повышенным содержанием легкой примеси, либо пониженным содержанием тяжелой примеси. В любом случае на этот объем действует подъемная (архимедова) сила, которая, в соответствии с законом Архимеда, определяется выражением

$$dF_A = \Delta \rho g dV. \quad (a)$$

Очевидно, что в общем случае теплообмена или массообмена при свободной конвекции в потоке имеется некоторое непрерывное распределение плотности, обусловленное распределением температуры или концентрации примеси. В связи с этим в качестве разности плотностей в выражении (a) следует выбрать разность некоторых характерных и известных по условиям задачи значений плотности жидкости, например в среде за пределами пограничного слоя ρ_0 и на поверхности ρ_w , т. е. $\Delta \rho = \rho_0 - \rho_w$. При этом выражение (a) будет представлять собой некоторую приближенную характеристику (порядок) архимедовой силы.

Таким образом, порядок объемной плотности архимедовой силы (сила, отнесенная к единице объема жидкости) выразится следующим образом:

$$f_A = \frac{dF_A}{dV} \approx \Delta \rho g. \quad (б)$$

Как следует из уравнений Навье-Стокса, объемная плотность силы инерции в частном (и взятом для примера) случае одномерного стационарного движения жидкости выражается как

$$f_n = \frac{dF_n}{dV} = \rho w_x \frac{\partial w_x}{\partial x}.$$

Выбирая в качестве порядка скорости некоторую характерную величину w_{x0} , в качестве порядка плотности характерную величину ρ_0 , а в качестве порядка координаты некоторый характерный размер потока l_0 , найдем, что объемная плотность силы инерции приближенно характеризуется выражением¹

¹ Легко показать, что порядок первой производной есть отношение порядка функции к порядку аргумента, а порядок второй производной — отношение порядка функции к квадрату порядка аргумента.

$$f_{\text{н}} \approx \frac{\rho_0 \omega_{x0}^2}{l_0} . \quad (\text{в})$$

Объемная плотность силы внутреннего трения, например, в случае пограничного слоя выражается следующим образом:

$$f_{\text{тр}} = \mu \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} = \rho \nu \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial y^2} .$$

Считая, как и ранее, что порядок скорости есть ω_{x0} , порядок плотности ρ_0 , а порядок координаты l_0 , получим порядок объемной плотности силы внутреннего трения в виде

$$f_{\text{тр}} \approx \rho_0 \nu \frac{\omega_{x0}}{l_0^2} . \quad (\text{г})$$

Итак, найдены приближенные выражения, характеризующие порядок величин объемной плотности подъемной силы, силы инерции и силы внутреннего трения. Величина, которая характеризует соотношение этих сил, выразится с учетом требования безразмерности следующим образом:

$$Ar = \frac{f_A f_{\text{н}}}{f_{\text{тр}}^2} ,$$

Подставляя вместо объемных плотностей соответствующих сил их приближенные выражения (б), (в), (г) через параметры потока, получим после сокращений

$$Ar = \frac{q l_0^3}{\nu^2} \frac{\Delta \rho}{\rho_0} , \quad (\text{XVIII-58})$$

Эта безразмерная величина носит название критерия Архимеда и определяет движение жидкости в условиях свободной конвекции, поскольку, как мы в этом только что убедились, она характеризует соотношение подъемной и инерционной сил, с одной стороны, и силы внутреннего трения — с другой.

В случае свободно-конвективного теплообмена, когда изменение плотности жидкости (или газа) обусловлено термическим расширением, критерий Архимеда принимает специфическую форму, которую можно получить следующим образом. Термическое расширение среды характеризуется температурным коэффициентом

объемного расширения β , который по определению равен

$$\beta = \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial T}.$$

где v — удельный объем жидкости, т. е. величина, обратная плотности, $v = 1/\rho$ м³/кг. Температурный коэффициент объемного расширения представляет собой, таким образом, относительное изменение удельного объема при изменении температуры на один градус. Если выразить эту величину через плотность жидкости ρ , то получим

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}.$$

Для технических расчетов можно принять, что при изменении температуры жидкости от одного характерного значения (например, за пределами пограничного слоя T_0) до другого (например, на поверхности тела T_w) коэффициент остается постоянным. Тогда из последнего выражения получаем

$$\beta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_w - \rho_0}{T_w - T_0},$$

где ρ_0 — плотность жидкости при температуре T_0 ;
 ρ_w — при температуре T_w .

Отсюда получаем

$$\rho_w = \rho_0(1 - \beta \Delta T),$$

где $\Delta T = T_w - T_0$, или

$$\Delta \rho = \rho_0 - \rho_w = \rho_0 \beta \Delta T. \quad (\text{XVIII-59})$$

Подставляя формулу (XVIII-59) в выражение (XVIII-58) для критерия Архимеда, получим новую безразмерную величину

$$Gr = \frac{g \beta \Delta T l_0^3}{\nu^2}, \quad (\text{XVIII-60})$$

которая называется критерием Грасгофа и определяет движение жидкости при свободной конвекции в случае теплообмена.

Таким образом, в случае свободной конвекции формулы для определения величины коэффициента теплоотдачи (или числа Нуссельта) должны иметь вид зависимости от критериев Грасгофа и Прандтля:

$$Nu = Nu(Gr, Pr), \quad (\text{XVIII-61})$$

а формулы для определения коэффициента массоотдачи (или числа Шервуда) — вид зависимости от критериев Архимеда и Шмидта:

$$Sh = Sh(Ar, Sc). \quad (\text{XVIII-62})$$

При этом в качестве разности характерных плотностей в критерии Архимеда используется разность парциальных плотностей примеси на поверхности и за пределами пограничного слоя.

Соответствующие расчетные формулы для различных случаев теплообмена при свободной конвекции приведены в справочниках. Заметим, что в настоящее время практически отсутствуют надежные формулы для расчета процессов массообмена в условиях свободного движения. Поэтому, пользуясь аналогией процессов конвективного тепло- и массообмена, для ориентировочных расчетов массообмена можно пользоваться формулами, полученными для теплообменных процессов.

Глава XIX

ДВИЖЕНИЕ И ТЕПЛООБМЕН В РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗАХ

Вопросы движения разреженных газов, а также теплообмена в них имеют большое практическое значение в связи с широким внедрением вакуумной техники в производственные процессы металлургии и в технику металлургического эксперимента. Кроме того, движение газов по мелким порам и процессы теплообмена, происходящие при этом, также описываются закономерностями, характерными для разреженных газов. Поэтому, учитывая тот факт, что результаты, полученные выше, неприменимы к разреженным газам, необходимо отдельно рассмотреть особенности процессов движения и теплообмена в разреженных газах.

До сих пор предполагалось, что жидкость или газ представляют собой сплошную, непрерывную среду, континуум, т.е. не учитывался дискретный характер материальной среды и ее молекулярное строение. Эта абстракция оправдана в тех случаях, когда средняя длина свободного пробега молекул Λ мала по сравнению с характерным размером потока L (диаметр трубы, по которой движется газ, размер обтекаемого газом тела и т.п.).

Таким образом, газ ведет себя как сплошная среда, когда безразмерная величина, представляющая собой отношение средней длины свободного пробега молекул к характерному размеру потока и называемая критерием Кнудсена:

$$Kn = \frac{\Lambda}{L}$$

очень мала по сравнению с единицей:

$$Kn \ll 1. \quad (\text{XIX-1})$$

В противном случае, т.е. когда это соотношение не выполняется и средняя длина свободного пробега молекул становится соизмеримой с характерным размером потока, закономерности, характерные для сплошной среды, нарушаются, и газ ведет себя как разреженный. Отсюда ясно, что критерий Кнудсена представляет собой параметр, характеризующий степень разреженности газа.

Очевидно, что соотношение (XIX-1) нарушается в двух случаях: во-первых, при понижении давления, так как средняя длина свободного пробега молекул обратно пропорциональна давлению; во-вторых, в случае очень малого характерного размера потока, т.е. при движении газа по очень мелким порам, хотя и в условиях нормального давления. Например, при давлении порядка 10^{-6} мм рт.ст., которое легко может быть создано средствами современной вакуумной техники, средняя длина свободного пробега молекул имеет порядок десятков метров, тогда как при атмосферном давлении она имеет порядок 10^{-5} см. Отсюда ясно, что при движении по микроскопическим порам газ, находящийся под атмосферным давлением, ведет себя так же, как и в условиях вакуума.

Наиболее существенными особенностями, отличающими разреженный газ от плотного, являются два эффекта, возникающие при динамическом и тепловом взаимодействии разреженного газа с твердой поверхностью: скачок скорости (скольжение) и скачок температуры на поверхности. Эти эффекты заключаются в том, что в случае движения разреженного газа вблизи твердой поверхности скорость газа на поверхности не равна нулю, т.е. имеется скольжение газа вдоль поверхности, и условие прилипания не выполняется; если же между газом и поверхностью происходит теплообмен, то температура газа на поверхности не равна температуре этой поверхности.

Таким образом, фундаментальные граничные условия на поверхности, характерные для процессов движения и теплообмена в плотном газе, в случае разреженного газа не выполняются.

Возникновение скольжения и скачка температуры на поверхности в случае разреженного газа можно объяснить следующим образом. Во всех случаях обмен количеством движения (трение) и энергией (теплоотдача) между газом и твердой поверхностью осуществляется в результате столкновений молекул с поверхностью. В связи с тем, что время пребывания молекул на поверхности, т.е. время между столкновением и реэмиссией (испусканием) молекулы, может быть различным, полнота обмена импульсом и энергией также различна для различных молекул газа. В случае плотного газа вследствие малости средней длины свободного пробега молекул эта неполнота обмена благодаря усреднению скоростей и энергий молекул является ненаблюдаемой, т.е. практически скорость газа на поверхности равна нулю, а температура его равна температуре поверхности. В случае же разреженного газа, когда в связи с возрастанием средней длины свободного пробега частота взаимных столкновений молекул уменьшается, неполнота обмена импульсом

и энергией между молекулами и твердой поверхностью становится наблюдаемой и проявляется в виде скачка скорости на поверхности (скольжения) и скачка температуры.

Из рассуждений ясно, что рассматривать процессы переноса количества движения и тепла в разреженных газах можно только с учетом молекулярного строения газа и поведения отдельных молекул, т. е. на основе кинетической теории газов.

Кинетическая теория газов рассматривает среду как совокупность молекул, находящихся в состоянии непрерывного хаотического теплового движения и перемещающихся в промежутках между столкновениями по прямолинейным траекториям. Средняя кинетическая энергия теплового движения молекул определяет температуру газа. Большинство молекул имеет скорость, близкую к средней, которая в соответствии с максвелловским распределением скоростей определяется выражением

$$\bar{c} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu^*}}, \quad (\text{XIX-2})$$

где R — универсальная газовая постоянная;
 μ^* — молекулярная масса газа.

Эти элементарные представления кинетической теории газов позволяют связать коэффициенты молекулярного переноса количества движения и тепла с характеристиками теплового движения молекул, что в свою очередь, как будет показано ниже, дает возможность найти связь между степенью разреженности газа (характеризуемой критерием Кнудсена) и основными параметрами, определяющими движение газа.

1. Внутреннее трение и теплопроводность в плотном газе на основе кинетической теории

В соответствии с кинетической теорией внутреннее трение в ламинарном потоке газа обусловлено переносом количества движения поперек потока, причем этот перенос осуществляется вследствие теплового движения молекул. При переходе молекулы из слоя с одной скоростью направленного движения в слой с другой скоростью после нескольких столкновений она приобретает количество движения, характерное для данного слоя, т. е. отдает избыток количества движения окружающим молекулам, либо получает от них дополнительное количество движения. Таким образом, возникает поперечный (относительно направления движения газа) поток количества движения, результирующая величина которого, отнесенная к единице поверхности, перпендикулярной к направлению переноса, и представляет собой касательное напряжение трения. Аналогичным образом, т. е. вследствие перехода молекул из слоя

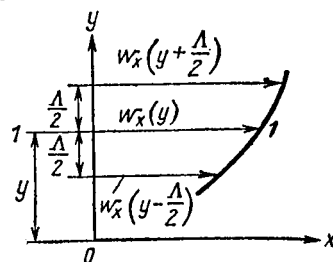


Рис. 127. К выводу формулы для коэффициента вязкости

в слой, и в результате обмена кинетической энергией между ними осуществляется перенос тепла, т.е. процесс теплопроводности.

Рассмотрим плоскопараллельное ламинарное движение плотного газа в направлении оси x (рис. 127). Внутреннее трение в таком потоке возникает вследствие переноса количества движения в направлении y . Рассчитаем обмен количеством движения между двумя слоями, отстоящими друг от друга на расстоянии средней длины свободного пробега молекул Λ и расположенными по обе стороны от плоскости $I-I$ на расстояниях $\Lambda/2$. Так как плоскость $I-I$ находится на расстоянии y от плоскости отсчета (например, от стенки), скорость направленного движения в верхней из рассматриваемых плоскостей равна $w_x \left(y + \frac{\Lambda}{2} \right)$, а в нижней $w_x \left(y - \frac{\Lambda}{2} \right)$, масса каждой молекулы m , а в единице объема газа содержится n молекул, причем величина i показывает, какая доля от общего числа молекул имеет составляющую скорости теплового движения, направленную вдоль оси y (только эти молекулы переносят импульс поперек потока), то результирующий поток количества движения через площадку $d\sigma$, равный силе трения, действующей на эту площадку, выразится следующим образом:

$$\tau d\sigma = inm\bar{c} w_x \left(y + \frac{\Lambda}{2} \right) d\sigma - inm\bar{c} w_x \left(y - \frac{\Lambda}{2} \right) d\sigma.$$

Разлагая $w_x \left(y + \frac{\Lambda}{2} \right)$ и $w_x \left(y - \frac{\Lambda}{2} \right)$ в ряд Тейлора и пренебрегая вследствие малости Λ всеми членами разложения кроме первых двух, получим

$$w_x \left(y + \frac{\Lambda}{2} \right) = w_x(y) + \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial w_x}{\partial y};$$

$$w_x \left(y - \frac{\Lambda}{2} \right) = w_x(y) - \frac{\Lambda}{2} \frac{\partial w_x}{\partial y}.$$

Отсюда находим выражение для касательного напряжения трения

$$\tau = inm\bar{c} \Lambda \frac{\partial w_x}{\partial y}.$$

Статистические расчеты показывают, что $i = 0,499 \approx 0,5$. Учитывая, что произведение числа молекул в единице объема n на массу одной молекулы m есть плотность газа ρ

$$\rho = nm,$$

получим

$$\tau = 0,5 \bar{c} \rho \Lambda \frac{\partial w_x}{\partial y}.$$

Сопоставляя последнее выражение с формулой Ньютона для касательного напряжения трения

$$\tau = \mu \frac{\partial w_x}{\partial y},$$

где μ — динамический коэффициент вязкости, находим выражение этой величины через параметры теплового движения молекул

$$\mu = 0,5 \rho \bar{c} \Lambda. \quad (\text{XIX-3})$$

Эта формула позволяет получить выражение для кинематического коэффициента вязкости ν , который является коэффициентом молекулярного переноса импульса:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = 0,5 \bar{c} \Lambda. \quad (\text{XIX-4})$$

Заметим, что, как это следует из формулы (XIX-3), динамическая вязкость не зависит от давления. Действительно, так как плотность газа пропорциональна давлению, а средняя длина свободного пробега обратно пропорциональна, их произведение, фигурирующее в выражении (XIX-3), от давления не зависит. Этот факт находит экспериментальное подтверждение в случае инертных газов, для которых приведенная элементарная теория является точной. В других случаях эта теория носит приближенный характер.

Если аналогичным образом рассмотреть процесс переноса тепла путем молекулярной теплопроводности, т.е. процесс переноса кинетической энергии молекул, обусловленный их тепловым движением, то легко получить выражение для плотности теплового потока, направленного вдоль оси y и проходящего через плоскость $I-I$ (рис. 122):

$$q_y = -0,5 \rho \bar{c} \Lambda_T \frac{\partial T}{\partial y},$$

где Λ_T — средняя длина свободного пробега молекул для переноса тепла, отличающаяся от соответствующей величины, характеризующей перенос импульса, Λ вследствие установленного различия интенсивностей этих процессов, и связанная с ней соотношением $\Lambda_T = \frac{\Lambda}{Pr}$.

Сопоставляя полученное выражение для плотности теплового потока с формулой постулата Фурье

$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y},$$

найдем выражение для коэффициента теплопроводности

$$\lambda = 0,5 \rho \bar{c} \Lambda_T. \quad (\text{XIX-5})$$

Отсюда находим, что коэффициент температуропроводности, т.е. коэффициент молекулярного переноса тепла выражается следующим образом:

$$a = 0,5 \bar{c} \Lambda_T. \quad (\text{XIX-6})$$

Заметим, что в соответствии с выражением (XIX-5) коэффициент теплопроводности газа, так же как и динамическая вязкость, не зависит от давления. Это обстоятельство, как и в случае вязкости, находит экспериментальное подтверждение для инертных газов.

2. Молекулярно-кинетический смысл критериев Рейнольдса и Маха и их связь с критерием Кнудсена

Полученная связь между вязкостью газа и характеристиками теплового движения молекул позволяет определить новый смысл критерия Рейнольдса, важнейшего параметра, определяющего движение газа. Подставляя в выражение критерия Рейнольдса

$$Re = \frac{wL}{\nu}$$

формулу (XIX—4) для кинематического коэффициента вязкости ν , получаем

$$Re = 2 \frac{w}{\bar{c}} \frac{L}{\Lambda}. \quad (\text{XIX-7})$$

Таким образом, с молекулярно-кинетической точки зрения критерий Рейнольдса представляет собой произведение масштаба скоростей, т.е. отношения скорости макроскопического движения w к скорости микроскопического движения $\bar{c}$, и масштаба размеров, т.е. отношения макроскопического размера (характерного размера потока) L к микроскопическому размеру (средней длине свободного пробега молекул) Λ .

Из выражения (XIX—7) следует, что критерий Кнудсена, представляющий собой отношение средней длины свободного пробега к характерному размеру потока, выражается через критерий Рейнольдса следующим образом

$$Kn = \frac{2}{Re} \frac{w}{\bar{c}}. \quad (\text{a})$$

Помимо критерия Рейнольдса важным параметром, характеризующим движение газа является критерий Маха, представляющий собой отношение характерной скорости потока w к скорости распространения звука в данном газе $\tilde{a}$

$$M = \frac{w}{\tilde{a}}. \quad (\text{б})$$

В связи с тем, что скорость звука представляет собой максимальную скорость распространения механических возмущений в среде, характер движения газа существенно зависит от соотношения скорости его движения и скорости звука, т.е. от критерия Маха. Например, если речь идет об истечении газа, при условии $M < 1$ газ ведет себя как несжимаемая жидкость, а при $M > 1$ в потоке появляются существенные градиенты давления, а, следовательно, и плотности (скачки уплотнения), т.е. явления, характерные для движения сжимаемой жидкости.

Нетрудно выяснить и молекулярно-кинетический смысл критерия Маха. Действительно, скорость звука в случае идеального газа выражается, как известно, следующим образом

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{kRT}{\mu^*}}, \quad (\text{в})$$

где k — показатель адиабаты, т. е. отношение удельных теплосмкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме, $k = c_p/c_v$. Сопоставляя это выражение с формулой (XIX—2) для средней по Максвеллу скорости теплового движения молекул, находим

$$\tilde{a} = \bar{c} \sqrt{k\pi/8}. \quad (\text{г})$$

Подставляя формулу (г) в выражение (б) для критерия Маха, получим новое выражение для него

$$M = \sqrt{8/k\pi} \frac{w}{\bar{c}}, \quad (\text{д})$$

которое показывает, что критерий Маха характеризует отношение характерной скорости движения газа к средней скорости теплового движения молекул. Выражая из формулы (д) это отношение через критерий Маха и подставляя в формулу (а), получаем выражение критерия Кнудсена через критерий Маха и Рейнольдса:

$$Kn = \sqrt{k\pi/2} \frac{M}{Re}, \quad (\text{XIX-8})$$

которое связывает степень разреженности газа, характеризующую критерием Кнудсена с двумя основными параметрами, определяющими характер движения газа.

3. Четыре режима движения газа

Как следует из выражения (XIX-8), каждой паре значений критериев Маха и Рейнольдса соответствует определенная величина критерия Кнудсена, т. е. определенная степень разреженности газа. На рис. 128 показан график, где по оси абсцисс отложены значения критерия Рейнольдса (в логарифмическом масштабе), а по оси ординат — значения критерия Маха. Следовательно, каждой точке на этом графике соответствует определенное значение критерия Кнудсена. Кривые, представляющие собой линии постоянных значений критерия Кнудсена, разделяют все поле графика на четыре области, каждая из которых соответствует определенному режиму движения газа с точки зрения его разреженности.

Область I соответствует весьма малым значениям критерия Кнудсена и, следовательно, пренебрежимо малым по сравнению с характерным размером потока значениям средней длины свободного пробега молекул. Поэтому газ, движущийся в режиме, соответствующем области I, ведет себя, как сплошная среда, континуум.

При тех значениях критерия Кнудсена, которые соответствуют области II, средняя длина свободного пробега молекул уже не является величиной пренебрежимо малой по сравнению с характерным размером потока. Поэтому область II соответствует режиму скользящего потока. Именно в этом режиме появляются те особенности разреженного газа, о которых говорилось в начале настоящей главы. Для теоретического описания движения газа и теплообмена в этом режиме используется следующая схема. Движение и теплообмен вдали от твердой поверхности (в ядре потока) рассчитываются на основе известных закономерностей, свойствен-

ных сплошной среде, т. е. на основе уравнений Навье-Стокса и энергии. В качестве граничных условий используются выражения, описывающие скольжение и скачок температуры на твердой поверхности. Эти выражения получим несколько ниже.

Область III соответствует так называемому переходному режиму, который характеризуется еще большими значениями средней длины свободного пробега молекул по сравнению с характерным размером потока. Это наименее изученный как в теоретическом, так и в экспериментальном плане режим движения разреженного газа.

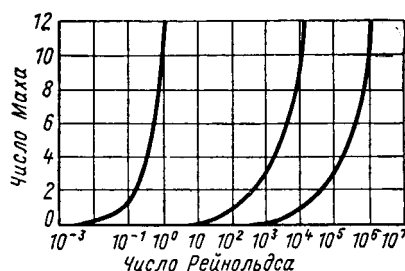


Рис. 128. Четыре режима движения газа

Значения критерия Кнудсена в области IV превышают единицу. Это означает, что средняя длина свободного пробега молекул в данном случае больше характерного размера потока, т. е. преобладают столкновения молекул со стенкой, взаимных же столкновений молекул практически не происходит. Таким образом, движение газа в области IV представляет собой по существу движение свободных, не взаимодействующих между собой молекул. Это режим свободно-молекулярного потока, или потока Кнудсена. Очевидно, что процессы переноса количества движения и тепла в этом случае осуществляются только при столкновении свободных молекул с твердой поверхностью и полностью описываются законами кинетической теории газов.

4. Режим скользящего потока. Скачки скорости и температуры

Чтобы найти выражения, описывающие скольжение разреженного газа вдоль твердой поверхности и скачок температуры, рассмотрим один из простейших случаев движения газа — течение между двумя параллельными бесконечными пластинами, из которых одна неподвижна, а другая движется с постоянной скоростью (течение Куэтта). Очевидно, что движение газа в этом случае обусловлено движением одной из пластин. Течение, которое будем рассматривать, является стационарным, т. е. параметры его не зависят от времени, и установившимся, т. е. скорость и ее распределение по толщине газового слоя не меняются по длине пластин, так как длина эта бесконечна.

Несмотря на видимую абстрактность этого случая течения, он довольно часто встречается на практике. Примером может служить подшипник скольжения. Действительно, если зазор между обклад-

кой и валом очень мал по сравнению с диаметром вала, обе эти поверхности можно рассматривать как бесконечные плоские пластины, одна из которых неподвижна (обкладка), а другая движется с постоянной скоростью (вал).

Режим скользящего потока для течения Куэтта рассмотрим как промежуточный случай между режимом сплошной среды и свободномолекулярного потока.

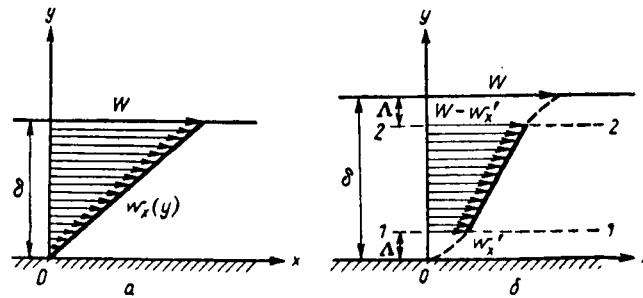


Рис. 129. Течение Куэтта в случае плотного газа (а) и скользящего потока (б)

А. Течение Куэтта в случае плотного газа $Kn \ll 1$. Последнее условие означает, что средняя длина свободного пробега молекул пренебрежимо мала по сравнению с расстоянием между пластинами δ (рис. 129, а), которое в данном случае играет роль характерного размера потока.

Пусть скорость движения верхней пластины W , а нижняя пластина неподвижна. Так как газ в случае $Kn \ll 1$ подчиняется закономерностям сплошной среды, на поверхностях обеих пластин выполняется условие прилипания, т. е.

$$\begin{aligned} w_x(0) &= 0, \\ w_x(\delta) &= W. \end{aligned}$$

В связи с тем, что движение газа в рассматриваемом случае обусловлено только движением верхней пластины, касательное напряжение трения, возникающее на нижней пластине, в соответствии с третьим законом Ньютона, равно по величине (и противоположно по знаку) касательному напряжению трения, возникающему на верхней пластине. Повторяя эти рассуждения для любой пары плоскостей, расположенных на произвольных расстояниях от поверхности нижней пластины убеждается в том, что касательное напряжение τ постоянно по толщине газового слоя δ , т. е.

$$\tau = \mu \frac{dw_x}{dy} = \text{const.}$$

Отсюда получаем, что

$$\frac{dw_x}{dy} = \frac{W}{\delta}, \quad (\text{XIX-9})$$

а распределение скорости по толщине слоя линейно и описывается выражением

$$w_x(y) = \frac{W}{\delta} y. \quad (\text{XIX-10})$$

Б. Свободно-молекулярный поток. $Kn \gg 1$. Газ настолько разрежен, что выполняется условие $\Lambda \gg \delta$. В этом случае молекулы газа проходят от одной пластины до другой, практически не испытывая взаимных столкновений. Таким образом, перенос количества движения между пластинами, приводящий к возникновению трения на поверхностях пластин, осуществляется только в результате столкновений свободных молекул с поверхностью.

Определим касательное напряжение трения на поверхности любой из пластин как плотность результирующего потока количества движения, переносимого молекулами в направлении оси y . Плотность потока молекул на поверхности, т. е. число молекул, сталкивающихся в единицу времени с единицей поверхности (и реэмитированных этой поверхностью), должна быть пропорциональна числу молекул в единице объема n и средней скорости теплового движения молекул $\bar{c}$. Расчеты показывают, что коэффициент пропорциональности в этой зависимости равен $1/4$, т. е.

$$N = \frac{1}{4} n \bar{c}.$$

Умножив эту величину на массу молекулы и скорость на соответствующей пластине, получим плотность потока количества движения. Таким образом, касательное напряжение трения на поверхности пластины выразится как

$$\tau = \frac{1}{4} n \bar{c} m W - \frac{1}{4} n \bar{c} m \cdot 0,$$

поскольку скорость верхней пластины W , а нижней 0.

Однако, записав в таком виде касательное напряжение трения, тем самым предполагалось, что при столкновении молекул с поверхностью между ними происходит полный обмен количеством движения, т. е. что молекула, реэмитированная поверхностью (отлетающая от нее после столкновения), имеет скорость направленного движения, равную скорости этой поверхности. Действительно, предполагалось, что все молекулы, реэмитированные верхней пластиной, приобретают скорость W , а нижней 0. В действительности же полного обмена количеством движения между молекулами и твердой поверхностью не происходит, и это обстоятельство можно учесть, если предположить, что некоторая доля f молекул, сталкивающихся со стенкой, полностью обменивается с ней своим количеством движения, а остальные молекулы вообще не участвуют в этом обмене, т. е. зеркально отражаются от поверхности. Величина f носит название коэффициента зеркального отражения, зависит от природы твердого тела и газа, а также от качества обработки поверхности. Определяется эта величина экспериментально и практически оказывается близкой к единице.

Итак, с учетом неполноты обмена импульсом между молекулами и стенкой формула для касательного напряжения трения в

случае течения Куэтта при свободно-молекулярном режиме имеет вид

$$\tau = \frac{1}{4} f \rho \bar{c} \bar{W}, \quad (\text{XIX-11})$$

где $\rho = \mu m$ — плотность газа.

В. *Режим скользящего потока.* $Kn < 1$. Теперь, пользуясь результатами, полученными для двух предыдущих режимов, можно рассмотреть промежуточный случай, режим скользящего потока, который характеризуется тем, что средняя длина свободного пробега молекул меньше характерного размера потока, но соизмерима с ним, т. е. $\Lambda < \delta$.

Основная идея, на которой основан анализ этого режима, заключается в том, что ядро потока рассматривается на основании закономерностей движения сплошной среды, а эффекты, связанные с разреженностью газа, учитываются лишь в областях потока, непосредственно прилегающих к твердым поверхностям.

С помощью плоскостей $1-1$ и $2-2$, параллельных пластинам (рис. 129, б) выделяем зоны толщиной, равной средней длине свободного пробега Λ , прилегающие к поверхностям пластин. Считаем, что в области между плоскостями $1-1$ и $2-2$ газ движется как сплошная среда.

Пусть скорость газа в плоскости $1-1$ равна w'_x , а в плоскости $2-2$ $W = w_x$. В связи с тем, что для каждой из двух зон, прилегающих к поверхности пластины, выполняется условие равенства средней длины свободного пробега и характерного размера (толщины зоны), движение газа в этих зонах можно рассматривать как свободно-молекулярный поток, поскольку столкновений молекул на протяжении их толщины практически не происходит. Поэтому на основании формулы (XIX-11) для касательного напряжения трения на поверхности нижней пластины можно записать выражение

$$\tau = \frac{1}{4} f \rho \bar{c} w'_x. \quad (\text{а})$$

В связи с тем, что касательное напряжение трения в случае течения Куэтта постоянно по толщине газового слоя между пластинами, та же самая величина τ может быть выражена с помощью формулы Ньютона, в применении к ядру потока, где газ ведет себя как сплошная среда

$$\tau = \mu \left(\frac{dw_x}{dy} \right)_{y > \Lambda}.$$

Отсюда, пользуясь формулой (XIX-3) для динамического коэффициента вязкости, получаем

$$\tau = 0,5 \rho \bar{c} \Lambda \left(\frac{dw_x}{dy} \right)_{y > \Lambda}. \quad (\text{б})$$

Приравняв правые части выражений (а) и (б), получаем равенство, связывающее значение скорости w_x на расстоянии Λ от

нижней пластины и градиент скорости в ядре потока $(dw_x/\partial y)y > \Lambda$, который постоянен по толщине этого ядра (см. пункт А):

$$\omega'_x = \frac{2\Lambda}{f} \left(\frac{dw_x}{dy} \right)_{y > \Lambda}. \quad (в)$$

Это выражение интересно тем, что оно свидетельствует о наличии скачка скорости (скольжения) на поверхности пластины. Действительно, если бы скольжения не было, и линейный профиль скорости в ядре продолжался до самой поверхности пластины, выражение для скорости ω'_x на расстоянии Λ от поверхности имело бы вид

$$\omega'_x = \Lambda \frac{dw_x}{dy}.$$

Следовательно, в пределах слоя толщиной Λ , прилегающего к стенке, скорость меняется значительно быстрее, чем в ядре потока, т. е. в этой зоне расположен скачок скорости.

В равенстве (в) две неизвестные величины: ω'_x и $(dw_x/\partial y)y > \Lambda$. Для того чтобы исключить одну из них, выразим градиент скорости в ядре потока через значения ее на границах ядра. В связи с тем, что изменение скорости по толщине ядра линейно, в соответствии с выражением (XIX-9) имеем

$$\left(\frac{dw_x}{dy} \right)_{y > \Lambda} = \frac{W - 2\omega'_x}{\delta - 2\Lambda},$$

откуда

$$\omega'_x = \frac{1}{2} \left[W - (\delta - 2\Lambda) \left(\frac{dw_x}{dy} \right)_{y > \Lambda} \right]. \quad (г)$$

Приравнявая правые части формул (в) и (г), находим выражение градиента скорости в ядре потока через известные величины

$$\left(\frac{dw_x}{dy} \right)_{y > \Lambda} = \frac{W}{\delta + 2\Lambda \frac{2-f}{f}}. \quad (XIX-12)$$

Сопоставляя полученный результат с выражением (XIX-9) для сплошной среды, замечаем, что в случае разреженного газа происходит кажущееся увеличение расстояния между пластинами на величину $2\Lambda(2-f)/f$. Так как касательное напряжение трения пропорционально градиенту скорости, этот факт можно представить себе следующим образом. В случае разреженного газа касательное напряжение трения уменьшается так, как если бы расстояние между пластинами увеличилось на величину $2\Lambda(2-f)/f$.

Средняя длина свободного пробега молекул обратно пропорциональна давлению. Попятно, что уменьшение касательного напряжения трения тем существенней, чем меньше давление газа. При нормальном давлении, когда средняя длина свободного пробега очень мала по сравнению с расстоянием между пластинами, можно считать, что $\Lambda \rightarrow 0$, и формула (XIX-12) сводится к выражению (XIX-9), полученному для сплошной среды.

Считая, что расстояние δ в выражении (XIX-12) есть переменная величина y и замена W на $w_x(y)$, получаем вместо (XIX-10)

$$w_x(y) = \left(y + 2\Lambda \frac{2-f}{f} \right) \frac{dw_x}{dy},$$

откуда, полагая $y=0$, находим выражение для скачка скорости на поверхности, т. е. для скольжения

$$w_x(0) = 2\Lambda \frac{2-f}{f} \left(\frac{dw_x}{dy} \right)_{y=0}. \quad (\text{XIX-13})$$

Величина $s = (2-f)/f$ носит название коэффициента скольжения и зависит от тех же параметров, которые влияют на величину коэффициента зеркального отражения f .

Рассуждения, аналогичные приведенным здесь, но применительно к переносу тепла в сплошной среде, в свободно-молекулярном режиме и в режиме скользящего потока позволяют получить выражение, аналогичное (XIX-13), для скачка температуры на твердой поверхности

$$T(0) - T_w = \frac{2-a}{a} \frac{2k}{k+1} \Lambda_T \left(\frac{dT}{dy} \right)_{y=0}, \quad (\text{XIX-14})$$

где $k=c_p/c_v$ — показатель адиабаты.

Очевидно, что фигурирующая в этом выражении величина a играет в процессе переноса тепла ту же роль, какую играет коэффициент зеркального отражения f в процессе переноса количества движения. Действительно, величина a , называемая коэффициентом аккомодации, характеризует полноту обмена кинетической энергией между молекулами и твердой поверхностью, с которой они сталкиваются. Поскольку средняя кинетическая энергия теплового движения молекул однозначно связана с температурой газа, коэффициент аккомодации может быть представлен следующим образом

$$a = \frac{T_0 - T_r}{T_0 - T_w}, \quad (\text{XIX-15})$$

где T_0 — температура газа в объеме, характеризующая кинетическую энергию молекул до столкновения с поверхностью;

T_r — температура, соответствующая средней кинетической энергии молекул, реэмитированных поверхностью.

Понятно, что если бы обмен энергией между молекулами и твердой поверхностью был полным, коэффициент аккомодации был бы равен единице, так как при этом $T_r = T_w$. Практически значения коэффициента аккомодации, определяемые экспериментальным путем, оказываются близкими к единице.

Таким образом, рассчитать движение разреженного газа в режиме скользящего потока и процесс теплообмена в нем можно путем решения уравнений Навье — Стокса и энергии, если в качестве граничных условий для этих уравнений используются, соответственно, выражения типа (XIX-13) и (XIX-14). В качестве частного случая из этих выражений получаются обычные граничные условия для плотного газа, т. е. для сплошной среды. Действительно, когда длина свободного пробега очень мала по сравнению с харак-

тёрным размером потока, т. е. при $\Lambda \rightarrow 0$ и $\Lambda_T \rightarrow 0$, получаем из (XIX-13)

$$w_x(0) = 0,$$

т. е. условие прилипания, а из (XIX-14) —

$$T(0) = T_w,$$

т. е. условие равенства температуры газа на поверхности температуры этой поверхности.

5. Свободно-молекулярное истечение газа через отверстие (молекулярная эффузия)

Движение разреженного газа через диафрагмы в условиях глубокого вакуума, а также натекание газа в вакуумную систему через микроскопические неплотности происходит как правило в

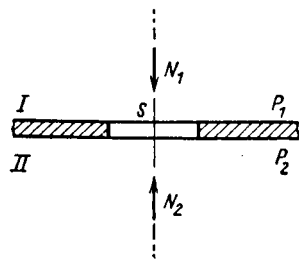


Рис. 130. К выводу соотношений для свободно-молекулярного течения газа через отверстие

режиме свободно-молекулярного потока (поток Кнудсена), т. е. при этом средняя длина свободного пробега молекул превосходит характерный размер отверстия. Свободно-молекулярное истечение газа через отверстие используется и в некоторых современных исследовательских приборах, например, в масс-спектрометрах.

Пусть две области газа I и II разделены перегородкой (см. рис. 130) с отверстием, размер которого меньше средней длины свободного пробега молекул. Давление в первой области P_1 , во второй P_2 . Предположим для определенности, что $P_1 > P_2$. Концентрация молекул, т. е. число

молекул в единице объема в первой области n_1 , во второй n_2 . Естественно, что $n_1 > n_2$. Площадь отверстия S .

Так как средняя длина свободного пробега молекул превышает размер отверстия, следовательно, при прохождении газа через это отверстие молекулы не испытывают взаимных столкновений.

Пусть N_1 есть плотность потока молекул на стенке в области I, т. е. число молекул, сталкивающихся с единицей поверхности стенки в единицу времени. Очевидно, что N_1 есть в то же время плотность потока молекул из области I в область II через отверстие в стенке, так как вследствие отсутствия взаимных столкновений все молекулы, попавшие на площадь отверстия, проходят через него. Но, как мы показали выше,

$$N_1 = \frac{1}{4} n_1 \bar{c}.$$

Плотность потока молекул через отверстие из области II в область I выразится совершенно аналогичным образом, так как движение одних молекул не оказывает никакого влияния на движение других, т. е.

$$N_2 = \frac{1}{4} n_2 \bar{c},$$

Очевидно, что результирующая величина плотности потока молекул из области I в область II выразится как разность полученных величин

$$N = N_1 - N_2$$

или

$$N = \frac{1}{4} \bar{c} (n_1 - n_2). \quad (a)$$

Концентрация молекул в объеме n легко выражается через давление. Действительно, из уравнения состояния для моля газа

$$PV_0 = RT$$

получим, учитывая, что $R = N_0 k$, (где N_0 — число молекул в моле, т. е. число Авогадро, а k — постоянная Больцмана).

$$n = \frac{N_0}{V_0} = \frac{P}{kT}.$$

Подставляя этот результат в выражение (a), находим

$$N = \frac{1}{4} \bar{c} \frac{P_1 - P_2}{kT},$$

или, обозначая разность давлений $\Delta P = P_1 - P_2$,

$$N = \frac{1}{4} \bar{c} \frac{\Delta P}{kT}.$$

Поток молекул, т. е. количество молекул, проходящих через всю площадь отверстия S в единицу времени, найдем, умножив плотность потока молекул N на S :

$$N' = NS = \frac{1}{4} \bar{c} \frac{\Delta P}{kT} S.$$

Умножив эту величину на массу одной молекулы m , получим поток массы, т. е. количество газа, проходящего через отверстие в единицу времени

$$G = mN' = \frac{1}{4} \bar{c} \frac{m}{kT} S \Delta P.$$

Подставляя сюда вместо массы молекулы ее выражение через молекулярную массу μ^* и число Авогадро N_0

$$m = \frac{\mu^*}{N_0},$$

а вместо средней скорости теплового движения молекул $\bar{c}$ выражение (XIX-2), получаем окончательно

$$G = \sqrt{\frac{\mu^*}{2\pi RT}} S \Delta P. \quad (XIX-16)$$

Таким образом, в соответствии с выражением (XIX-16) массовый расход газа через отверстие в режиме свободно-молекулярного потока пропорционален перепаду давления. В то же время, рассматривая во втором разделе истечение плотных газов, т. е. сплошных сред, было найдено, что скорость истечения, а, следовательно, и массовый расход, пропорциональны корню квадратному из перепада давления.

Таким образом, пришли к парадоксальному на первый взгляд выводу о том, что истечение через очень малое отверстие (меньшее средней длины свободного пробега) происходит «легче», чем через отверстие большого размера. Однако, на самом деле парадокса здесь нет. Причина этого эффекта как раз и состоит в том, что в случае свободно-молекулярного потока отсутствуют взаимные столкновения молекул на пути газа через отверстие, а потому все молекулы, подлетающие к отверстию, проходят через него беспрепятственно.

6. Теплоотдача в ультраразреженном газе

При высоких температурах основным механизмом переноса тепла в условиях глубокого вакуума является излучение. Однако при низких температурах существенную роль играет механизм переноса, связанный с тепловым движением молекул. При этом, если разрежение достаточно велико, процесс теплообмена протекает в свободно-молекулярном режиме, т. е. перенос тепла осуществляется за счет столкновения с поверхностью свободных, не взаимодействующих друг с другом молекул.

Рассмотрим процесс стационарного теплообмена между одноатомным ультраразреженным газом, молекулы которого имеют среднюю кинетическую энергию, соответствующую температуре T_0 , и твердой поверхностью, имеющей температуру T_w . Так как обмен энергией между поверхностью и сталкивающимися с нею молекулами не является полным, температура, соответствующая средней кинетической энергии реэмитированных стенкой молекул T_r , не равна температуре поверхности. В частности, при $T_0 > T_w$, т. е. когда результирующий тепловой поток направлен от газа к стенке, $T_0 > T_r > T_w$.

Плотность потока молекул на стенке, т. е. количество молекул, сталкивающихся с единицей поверхности в единицу времени, равно

$$N = \frac{1}{4} n \bar{c}.$$

Очевидно, что при стационарных условиях плотность потока молекул, отлетающих от стенки, т. е. реэмитированных ею, равна этой же величине.

Кинетическая теория газов показывает, что средняя энергия молекулы, находящейся на поверхности, выражается соотношением

$$E = 2kT.$$

Поэтому результирующая плотность теплового потока на поверхности, равная разности между потоками, переносимыми на поверхность падающими молекулами и от поверхности — реэмитированными, может быть записана следующим образом:

$$q = \frac{1}{4} n \bar{c} 2kT_0 - \frac{1}{4} n \bar{c} 2kT_r,$$

или

$$q_w = \frac{1}{2} n \bar{c} (T_0 - T_r).$$

Произведение концентрации молекул в объеме на постоянную Больцмана в соответствии с уравнением состояния газа выражается как

$$nk = \frac{N_0}{V_0} k = \frac{P}{T}.$$

Подставляя в предыдущее выражение это соотношение и учитывая, что в соответствии с определением коэффициента аккомодации (XIX-15)

$$T_0 - T_r = a(T_0 - T_w),$$

получаем окончательно

$$q_w = \frac{a}{2} \frac{P \bar{c}}{T_0} (T_0 - T_w). \quad (\text{XIX-17})$$

Таким образом, в случае газа, находящегося в условиях глубокого вакуума, плотность теплового потока, как и в случае плотного газа, пропорциональна разности температур газа и твердой поверхности. Существенное отличие заключается в том, что в случае плотного газа q_w практически не зависит от давления, тогда как в вакууме плотность теплового потока оказывается прямо пропорциональной давлению газа. Происходит это потому, что в ультра-разреженном газе перенос тепла осуществляется только путем столкновений свободных молекул с твердой поверхностью, а число этих столкновений прямо пропорционально давлению.

Если в вакуум поместить спираль, нагреваемую электрическим током, то при уменьшении давления в связи с тем, что плотность теплового потока пропорциональна давлению, температура спирали повысится, и это повышение может быть зарегистрировано с помощью термпары. На этом принципе основано действие термпарных вакуумметров, широко распространенных приборов для измерения вакуума.

Итак, в этой главе рассмотрены основные физические особенности и принципы расчета процессов движения разреженных газов и процессов теплообмена, протекающих в них, применительно к режимам скользящего и свободно-молекулярного потоков.

Наименее изученным, как уже было сказано ранее, является переходный режим движения разреженного газа. Для этого режима практически отсутствует достаточно разработанная теория движения и теплообмена. Имеющиеся (впрочем, немногочисленные) экспериментальные данные по теплоотдаче в переходном режиме представляются как правило в виде зависимости

$$Nu = Nu(Kn),$$

либо

$$Nu = Nu \left(\frac{M}{Re} \right).$$

Глава XX

ТЕПЛООБМЕН ИЗЛУЧЕНИЕМ

1. Общие сведения и основные понятия

Перенос тепла излучением осуществляется в результате распространения электромагнитных колебаний, энергия которых при взаимодействии с веществом переходит в тепло.

Любое тело, температура которого отличается от абсолютного нуля, излучает электромагнитные колебания с различными длинами волн, т. е. его излучение характеризуется определенным спектром длин волн или частот. Спектр излучения большинства жидких и твердых тел (диэлектриков, полупроводников, окисленных металлов) непрерывный, сплошной. Спектр излучения газов дискретный, т. е. газы излучают (и поглощают) энергию лишь в определенных интервалах длин волн, а потому обладают селективным излучением. Излучение чистых, неокисленных поверхностей металлов также является селективным.

Теория теплообмена излучением не рассматривает детальный механизм испускания и поглощения электромагнитного излучения веществом. Задача этой теории описать суммарные, результирующие, макроскопические эффекты этих процессов. Поэтому, например, в теории лучистого теплообмена принимается, что процессы взаимодействия излучения с твердым (или жидким) телом сосредоточены на поверхности последнего. Такое допущение, впрочем, оправдывается тем, что большинство материалов, используемых в технике, являются практически непрозрачными для теплового излучения, поэтому указанные процессы происходят в весьма тонких слоях, прилегающих к поверхности. Таким образом, излучение твердых и жидких тел является поверхностным. Исключение составляют газы, характеризующиеся высокой прозрачностью и обладающие поэтому объемным излучением.

Пусть на поверхность некоторого тела падает поток лучистой энергии $Q_{\text{пад}}$, Вт. Часть этого потока $Q_{\text{погл}}$ поглощается телом, часть $Q_{\text{отр}}$ отражается от поверхности и часть $Q_{\text{проп}}$ пропускается, если тело обладает некоторой прозрачностью. Таким образом, в соответствии с законом сохранения энергии, имеем:

$$Q_{\text{пад}} = Q_{\text{погл}} + Q_{\text{отр}} + Q_{\text{проп}}.$$

Поделив обе части этого равенства на $Q_{\text{пад}}$, получим

$$1 = A + R + D,$$

где $A = \frac{Q_{\text{погл}}}{Q_{\text{пад}}}$ — поглощательная способность тела;
 $R = \frac{Q_{\text{отр}}}{Q_{\text{пад}}}$ — отражательная способность;
 $D = \frac{Q_{\text{проп}}}{Q_{\text{пад}}}$ — пропускательная способность.

Если тело непрозрачно, т. е. его пропускательная способность равна нулю, то

$$A + R = 1.$$

Если, кроме того, $R=0$, т. е. тело поглощает всю падающую на его поверхность лучистую энергию, то $A=1$, и такое тело называется абсолютно черным.

Если поверхность тела отражает падающие лучи по законам геометрической оптики (угол отражения равен углу падения), то такое отражение называется зеркальным. Зеркальным отражением обладают блестящие, полированные поверхности. Если же отраженное излучение равномерно распределяется по различным направлениям, т. е. если поверхность тела является матовой, то такое отражение называется диффузным.

Известно, что всякое тело, температура которого отлична от абсолютного нуля, излучает энергию. Излучение поверхности тела, обусловленное его нагревом, называется собственным излучением. Если собственное излучение тела равномерно распределено по всем направлениям в пределах полусферы, то такое излучение также называется диффузным. Понятно, что абсолютно черное тело, не отражающее падающую на его поверхность энергию, обладает лишь собственным излучением.

Величина $E = \frac{dQ}{dF}$, Вт/м², называется плотностью лучистого потока энергии. Если при этом речь идет о собственном излучении тела, т. е. если $Q = Q_{\text{соб}}$, то величина $E = E_{\text{соб}}$ называется лучеиспускающей способностью тела¹. Поскольку в величину E входит все излучение, испускаемое единицей поверхности тела по всем направлениям в пределах полусферы, эту величину ча-

¹ В дальнейшем поток собственного излучения и его плотность обозначается соответственно буквами Q и E без индексов.

сто называют плотностью полусферического излучения. В величине лучеиспускательной способности тела учитывается энергия, излучаемая телом во всем диапазоне длин волн λ от нуля до бесконечности. Величина I_λ , представляющая собой энергию, излучаемую единицей поверхности тела в единицу времени при данной длине волны, т. е. в спектральном диапазоне от λ до $\lambda + d\lambda$, называется спектральной интенсивностью излучения (Вт/м^3). Очевидно, что $I_\lambda = \frac{dE}{d\lambda}$, а поскольку при

этом $E = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda$, величину E иногда называют интегральной интенсивностью излучения.

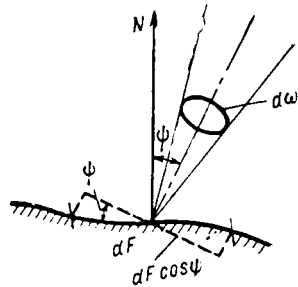


Рис. 131. К определению угловой плотности излучения

Элемент поверхности любого тела излучает энергию по всем направлениям в пределах полусферы, однако распределение энергии излучения по различным направлениям может быть различным. Для учета этого обстоятельства вводится величина, называемая угловой плотностью излучения. Угловая плотность излучения B_ψ представляет собой количество энергии, излучаемое единицей поверхности тела в единицу времени в пределах единичного телесного угла, ось которого составляет угол ψ с нормалью к данной поверхности. Единица измерения угловой плотности излучения $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{ср})$.

Величина B , равная отношению угловой плотности излучения B_ψ к проекции единичной площадки на плоскость, ортогональную к направлению излучения, носит название яркости излучения (рис. 131). Очевидно, что в соответствии с определением угловой плотности излучения

$$B_\psi = \frac{d^2Q}{dF d\omega} = \frac{dF}{d\omega}, \quad (\text{XX-1})$$

где ω — телесный угол, ср;

тогда

$$B = \frac{d^2Q}{dF \cos \psi d\omega} = \frac{dE}{\cos \psi d\omega}, \quad (\text{XX-2})$$

так как проекция площадки dF на плоскость, ортогональную к направлению ψ , равна $dF \cos \psi$.

Понятия угловой плотности и яркости излучения могут использоваться не только для интегрального, но и для спектрального излучения. При этом спектральная угловая плотность излучения определится, очевидно, выражением

$$B_{\lambda\psi} = \frac{dI_{\lambda}}{d\omega}, \quad (\text{XX-1a})$$

а спектральная яркость — выражением

$$B_{\lambda} = \frac{dI_{\lambda}}{\cos \psi d\omega}. \quad (\text{XX-2a})$$

Если между данным телом и другими, окружающими его телами происходит лучистый теплообмен, то поверхность тела испускает не только собственное излучение, но и ту часть падающего на поверхность тела излучения, которое отражается этой поверхностью. Сумма собственного излучения тела и излучения, отраженного его поверхностью, называется эффективным излучением. Таким образом, плотность потока эффективного излучения выражается как

$$E_{\text{эфф}} = E + E_{\text{отр}} = E + RE_{\text{пад}}. \quad (\text{XX-3})$$

В процессе теплообмена с окружающими телами на поверхность данного тела поступает падающее излучение. Часть этого излучения поглощается телом, однако в связи с тем, что часть своей энергии данное тело передает окружающим его телам в виде собственного излучения, результат теплообмена, т. е. количество тепла, получаемое (или отдаваемое) поверхностью данного тела в процессе лучистого теплообмена, должен быть выражен как разность между поглощенным и собственным излучением. Эта разность называется результирующим излучением. Итак, плотность результирующего потока тепла выражается следующим образом¹

$$q_w = E_{\text{полг}} - E = AE_{\text{пад}} - E. \quad (\text{XX-4})$$

Результирующее излучение может быть представле-

¹ В связи с тем, что в предыдущих главах этого раздела плотность теплового потока, получаемого или отдаваемого поверхностью тела, обозначена q_w , в данной главе для результирующего излучения это обозначение сохраняется.

но как разность между падающим и эффективным излучением, т. е. как разность суммарных количеств энергии, поступающих на поверхность тела и уходящих с нее. Действительно,

$$q_w = (E_{\text{погл}} + E_{\text{отр}}) - (E + E_{\text{отр}}),$$

т. е.

$$q_w = E_{\text{пад}} - E_{\text{эфф}}. \quad (\text{XX-5})$$

Для расчетов лучистого теплообмена необходимо найти связь между тремя видами лучистых потоков на поверхности тела: эффективным, результирующим и собственным. Эта связь легко устанавливается на основе приведенных выше определений лучистых потоков. Из формулы (XX-5) получаем

$$E_{\text{эфф}} = E_{\text{пад}} - q_w. \quad (\text{а})$$

С другой стороны, плотность падающего излучения можно выразить с помощью равенства (XX-4) через q_w и E :

$$E_{\text{пад}} = \frac{q_w + E}{A}. \quad (\text{б})$$

Подставляя выражение (б) в (а), находим связь между $E_{\text{эфф}}$, q_w и E :

$$E_{\text{эфф}} = \frac{1 - A}{A} q_w + \frac{E}{A}. \quad (\text{XX-6})$$

Проинтегрировав выражение (XX-6) по поверхности тела, получим аналогичную связь между потоками излучения

$$Q_{\text{эфф}} = \frac{1 - A}{A} Q_w + \frac{Q}{A}. \quad (\text{XX-6a})$$

Очевидно, что это выражение справедливо только в том случае, когда поглощательная способность A постоянна по всей поверхности тела.

2. Основные законы излучения абсолютно черного тела

Законы излучения абсолютно черного тела подробно рассматриваются в курсе общей физики. Поэтому здесь ограничимся лишь кратким напоминанием этих законов.

Закон Планка. Этот закон выражает зависимость спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела I_{λ_0} от длины волны и от температуры. Математическая формулировка закона Планка имеет вид

$$I_{\lambda_0} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{C_2/\lambda T} - 1}, \quad (\text{XX-7})$$

где C_1 и C_2 — константы; $C_1 = 0,374 \cdot 10^{-15}$ Вт/м³; $C_2 = 1,439 \cdot 10^{-2}$ м·К;
 λ — длина волны, м.

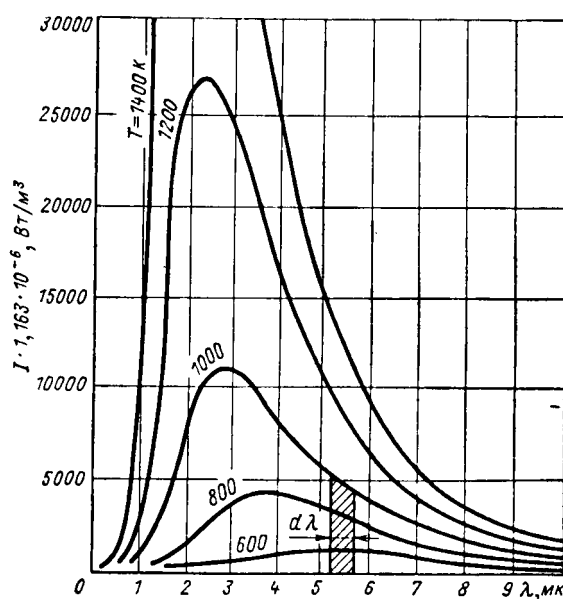


Рис. 132. Зависимость спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела от длины волны и температуры

На рис. 132 показана зависимость спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела от длины волны при различных значениях температуры. Как видно из этого графика, функция $I_{\lambda_0}(\lambda)$ носит экстремальный характер, причем для каждой температуры имеется определенное значение длины волны λ_{max} , при котором спектральная интенсивность излучения максимальна.

Закон смещения Вина. Этот закон устанавливает связь между длиной волны $\lambda_{\max}$, соответствующей максимуму спектральной интенсивности, и температурой абсолютно черного тела.

Очевидно, что величину $\lambda_{\max}$ можно найти, если выражение (XX-7) продифференцировать по λ и производную приравнять нулю. В результате получаем трансцендентное уравнение

$$e^{-C_2/\lambda_{\max}T} + \frac{C_2}{5\lambda_{\max}T} - 1 = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\frac{C_2}{\lambda_{\max}T} = 4,965.$$

Отсюда получаем

$$\lambda_{\max}T = \text{const} = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}. \quad (\text{XX-8})$$

Выражение (XX-8) представляет собой математическую формулировку закона смещения Вина. В соответствии с этим законом при повышении температуры тела максимум спектральной интенсивности излучения его смещается в сторону более коротких длин волн. Таким образом, закон Вина устанавливает определенную связь между спектральным составом излучения и температурой излучателя.

Закон Стефана-Больцмана. Этот закон имеет наибольшее значение для расчетов лучистого теплообмена, поскольку он устанавливает связь между лучеиспускательной способностью (интегральной плотностью полусферического излучения) абсолютно черного тела и его температурой.

Эту связь легко получить, проинтегрировав спектральную интенсивность излучения, определяемую выражением закона Планка (XX-7), по длине волны

$$E_0 = \int_0^{\infty} I_{\lambda_0} d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{C_2/\lambda T} - 1} d\lambda.$$

В результате получаем математическую формулировку закона Стефана-Больцмана

$$E_0 = \sigma_0 T^4,$$

в соответствии с которой лучеиспускательная способность абсолютно черного тела пропорциональна темпе-

ратуре этого тела в четвертой степени. Коэффициент пропорциональности в этом выражении σ_0 , являющийся постоянной величиной, носит название коэффициента лученспускания (или коэффициента излучения) абсолютно черного тела $\sigma_0 = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$.

В связи с тем, что коэффициент лученспускания — величина очень малая, а температура обычно имеет порядок $10^2 — 10^3$, в технических расчетах закон Стефана-Больцмана принято записывать в виде

$$E_e = c_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4, \quad (\text{XX-9})$$

Величина $c_0 = 5,67 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$ также называется коэффициентом лученспускания абсолютно черного тела.

3. Излучение серых тел. Закон Кирхгофа

Если спектральная интенсивность излучения диффузно излучающего тела для всех длин волн составляет одну и ту же долю ϵ от спектральной интенсивности излучения абсолютно черного тела при той же температуре, то такое тело называется серым.

Величина ϵ , равная отношению спектральной интенсивности излучения серого тела к соответствующей величине для черного тела, носит название степени черноты. В соответствии с приведенным определением серого тела степень черноты его не зависит от длины волны, а поскольку спектральный состав излучения зависит от температуры, следовательно ϵ не зависит и от температуры. Таким образом, излучение серого тела связано с излучением абсолютно черного тела соотношением

$$I_\lambda = \epsilon I_{\lambda_0}$$

и, следовательно, подчиняется закону Планка (XX-7).

Проинтегрировав последнее соотношение по длине волны от нуля до бесконечности, получим

$$E = \epsilon E_0, \quad (\text{XX-10})$$

так как степень черноты является постоянной величиной. Следовательно, для лученспускательной способности серого тела справедлив закон Стефана-Больцмана:

$$F = \epsilon c_0 \left(\frac{T}{100} \right)^4. \quad (\text{XX-11})$$

Величина $c = \varepsilon c_0$ называется коэффициентом лучеиспускания серого тела. Таким образом, закон Стефана-Больцмана для серого тела может быть записан в виде

$$E = c \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4. \quad (\text{XX-11a})$$

Понятие серого тела является абстракцией, в природе таких тел не существует. Даже твердые тела, характеризующиеся сплошным спектром излучения, имеют степень черноты, зависящую от длины волны и от температуры, т. е. их излучение не подчиняется закону Планка. Однако, в настоящее время все практические теплотехнические расчеты лучистого теплообмена основываются на предположении, что тела, участвующие в теплообмене, являются серыми. При этом для реальных тел вводится понятие интегральной, т. е. средней по всему спектру степени черноты, определяемой выражением

$$\varepsilon = \frac{\int_0^\infty \varepsilon_\lambda I_{\lambda_0} d\lambda}{E_0} = \frac{E}{E_0}, \quad (\text{XX-12})$$

где ε_λ — степень черноты монохроматического излучения, или спектральная степень черноты. Интегральная степень черноты реального тела обязательно является функцией температуры. Для всех реальных и серых тел значения степени черноты находятся в интервале от нуля до единицы. Для абсолютно черного тела, очевидно, $\varepsilon = 1$.

Таким образом, абсолютно черное тело не только идеально поглощает падающую на него энергию, но и является идеальным излучателем, т. е. при любой температуре излучение абсолютно черного тела является максимальным. Это обстоятельство наводит на мысль о том, что и для любого тела способность поглощать падающее излучение и способность излучать энергию связаны между собой. Указанная связь определяется законом Кирхгофа.

Рассмотрим две параллельные бесконечные плоские поверхности, изолированные от окружающей среды и находящиеся в состоянии термодинамического равновесия, т. е. имеющие одинаковые температуры. Одна из поверхностей абсолютно черная, другая серая. Количество энергии, излучаемое единицей поверхности абсо-

лотно черной пластины в единицу времени, есть E_0 . Поскольку рассматривается замкнутая система, состоящая из двух бесконечных параллельных пластин, вся эта энергия падает на поверхность серой пластины, которая поглощает количество энергии, равное AE_0 . Так как рассматривается равновесная система, температура серой поверхности должна в соответствии со вторым началом термодинамики оставаться неизменной. Следовательно, серая пластина излучает ровно столько же энергии, сколько поглощает, т. е.

$$AE_0 = E. \quad (\text{XX-13})$$

Отсюда получаем формулу закона Кирхгофа

$$\frac{E}{A} = E_0, \quad (\text{XX-14})$$

в соответствии с которой отношение лучеиспускательной способности серого тела к его поглощательной способности равно лучеиспускательной способности абсолютно черного тела при той же температуре.

Сопоставляя выражение (XX-13) и (XX-10), замечаем, что для серого тела степень черноты тождественно равна поглощательной способности, т. е.

$$\varepsilon \equiv A. \quad (\text{XX-15})$$

Очевидно, что закон Кирхгофа справедлив и для спектральных характеристик излучения, т. е.

$$\frac{I_\lambda}{A_\lambda} = I_{\lambda_0},$$

откуда получаем

$$\varepsilon_\lambda = A_\lambda.$$

4. Закон Ламберта

Так как поверхности, между которыми происходит процесс лучистого теплообмена, могут быть расположены в пространстве самым различным образом, большое практическое значение имеет распределение энергии излучения тела по различным направлениям в пределах полусферы.

Выше говорилось о том, что если излучение тела равномерно распределяется по всем направлениям, то такое излучение называется диффузным. Закон Лам-

берта, относящийся к диффузно излучающим телам, уточняет это определение.

В соответствии с законом Ламберта угловая плотность излучения пропорциональна косинусу угла ψ между рассматриваемым направлением излучения и на-

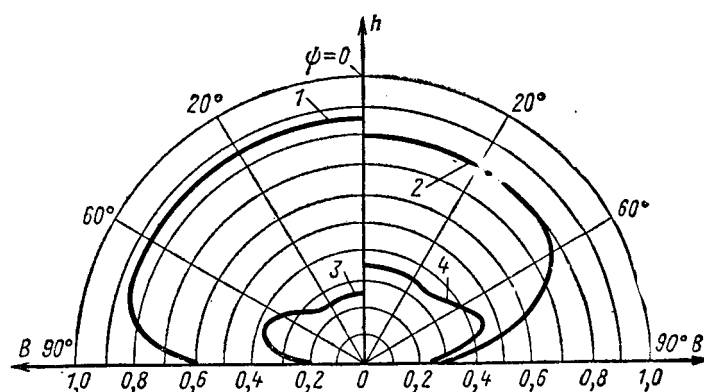


Рис. 133. Зависимость яркости от направления излучения для некоторых материалов:

1 — алюминиевая бронза; 2 — висмут; 3 — корунд; 4 — медь окисленная

правлением нормали к площадке. Таким образом, в соответствии с законом Ламберта и с определениями угловой плотности излучения (XX-1) и яркости (XX-2), из которых следует, что

$$B = \frac{B_{\psi}}{\cos \psi},$$

получаем

$$B_{\psi} = B \cos \psi, \quad (\text{XX-16})$$

причем $B = \text{const}$, т. е. яркость есть величина постоянная, не зависящая от направления излучения.

Итак, диффузно излучающими (или отражающими) являются такие тела, для которых справедлив закон Ламберта, т. е. тела яркость собственного (или отраженного) излучения которых не зависит от направления. Из выражения (XX-16) следует, что для диффузно излучающей поверхности угловая плотность излучения в направлении нормали к поверхности B_n ($\psi=0$, $\cos \psi=1$) численно равна яркости излучения.

Закону Ламберта подчиняется излучение абсолютно

черного и серого тела. Излучение реальных тел может описываться законом Ламберта лишь приближенно. Например, яркость излучения диэлектриков довольно быстро падает при значениях угла с нормалью ψ , близких к $\pi/2$. Напротив, яркость излучения чистых метал-

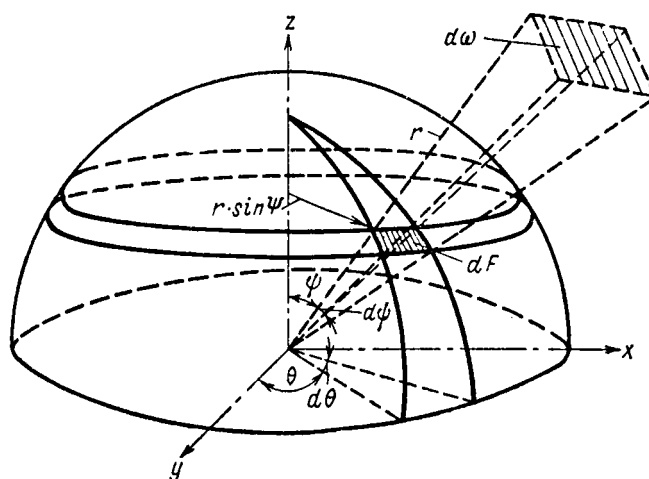


Рис. 134. К определению телесного угла в сферических координатах

лов при этих значениях угла ψ существенно возрастает (рис. 133).

Тем не менее в практике инженерных расчетов лучистого теплообмена принято считать, что все твердые тела являются серыми, а их излучение подчиняется закону Ламберта. Эти же допущения, придающие расчетам приближенный характер, используются и в дальнейших рассуждениях.

Закон Ламберта позволяет найти связь между яркостью излучения и лучеиспускательной способностью тела (абсолютно черного или серого).

В соответствии с определением яркости излучения (XX-2) имеем

$$dE = B \cos \psi d\omega. \quad (a)$$

Элементарный телесный угол $d\omega$ выражается через элемент сферической поверхности dF (рис. 134) следующим образом

$$d\omega = \frac{dF}{r^2},$$

где r — радиус сферы.

В свою очередь, как это следует из рис. 134,

$$dF = r d\psi \cdot r \sin \psi d\theta = r^2 d\theta \sin \psi d\psi,$$

откуда

$$d\omega = d\theta \sin \psi d\psi.$$

Подставляя это выражение в равенство (а), получаем

$$dE = B d\theta \sin \psi \cos \psi d\psi. \quad (б)$$

Очевидно, что лучеиспускательную способность можно найти путем интегрирования выражения (б) по полушере, т. е. по долготе θ и широте ψ , при этом яркость B как величина постоянная для диффузного излучения выносится за знак интеграла:

$$E = B \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin \psi \cos \psi d\psi = B\pi,$$

откуда получаем

$$B = \frac{E}{\pi}, \quad (XX-17)$$

т. е. яркость диффузно излучающего тела в π раз меньше его лучеиспускательной способности.

Теперь формулу закона Ламберта (XX-16) с учетом выражения (XX-17) мы можем записать в виде

$$B_\psi = \frac{E}{\pi} \cos \psi, \quad (XX-18)$$

что дает возможность получить окончательное выражение для энергии, излучаемой элементом dF поверхности абсолютно черного или серого тела в пределах телесного угла $d\omega$, ось которого составляет угол ψ с нормалью к элементу поверхности dF . Действительно, подставляя выражение (XX-18) в формулу (XX-1), получаем

$$d^2Q = \frac{1}{\pi} E \cos \psi d\omega dF. \quad (XX-19)$$

В связи с тем, что лучеиспускательная способность E выражается в соответствии с законом Стефана-Больцмана через температуру тела и коэффициент лучеиспускания его, формула (XX-19) имеет большое значение в теории лучистого теплообмена, так как позволяет свя-

затъ поток собственного излучения тела с его оптическими свойствами и температурой с одной стороны, и с геометрией системы тел — с другой.

5. Геометрические свойства лучистых потоков. Угловые коэффициенты

Рассмотрим лучистый теплообмен между двумя невогнутыми абсолютно черными поверхностями, произвольно ориентированными в пространстве (рис. 135). Будем считать, что поверхности разделены лучепрозрачной (диатермичной) средой. Теплообменом поверхностей с окружающей средой будем пренебрегать.

Теплообмен между бесконечно малыми площадками. Вначале рассмотрим теплообмен между элементом dF_1 поверхности I и элементом dF_2 поверхности II.

Пусть N_1 и N_2 — нормали к площадкам dF_1 и dF_2 ; ψ_1 и ψ_2 — углы между радиусом-вектором r , соединяющим центры площадок и нормалью к ним; $d\omega$ — телесный угол, под которым площадка dF_2 видна с площадки dF_1 .

В соответствии с формулой (XX-19) поток энергии, излучаемой поверхностью dF_1 , в направлении, составляющем угол ψ_1 с нормалью, и в пределах телесного угла $d\omega$, т. е. поток энергии, падающий на поверхность dF_2 и полностью поглощаемый ею (так как эта поверхность абсолютно черная), выразится следующим образом

$$d^2Q_{\text{пад2}} = \frac{1}{\pi} E_{01} \cos \psi_1 d\omega dF_1.$$

Учитывая, что на основании закона Стефана-Больцмана (XX-9)

$$E_{01} = c_0 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4,$$

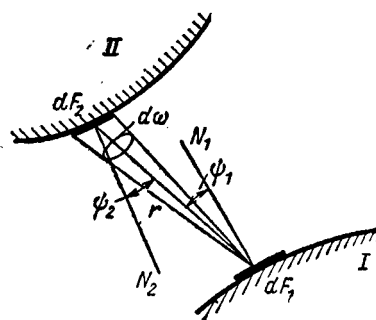


Рис. 135. К расчету лучистого теплообмена между двумя произвольно расположенными поверхностями

а элементарный телесный угол $d\omega$ может быть выражен через проекцию площадки dF_2 на плоскость, ортогональную к радиусу-вектору r , $dF_2 \cos \psi_2$ как

$$d\omega = \frac{dF_2 \cos \psi_2}{r^2},$$

получаем

$$d^2Q_{\text{пад}2} = c_0 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_2 dF_1. \quad (\text{XX-20})$$

Легко видеть, что фигурирующая в этом выражении безразмерная величина

$$d\varphi_{12} = \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_2 \quad (\text{XX-21})$$

показывает, какая часть полусферического излучения площадки dF_1 попадает на площадку dF_2 . Эта величина, значение которой определяется лишь взаимным расположением элементарных площадок dF_1 и dF_2 , называется элементарным угловым коэффициентом излучения с первой площадки на вторую.

Аналогично предыдущему поток тепла, излучаемый площадкой dF_2 и падающий на площадку dF_1 (и поглощаемый ею), выразится следующим образом

$$d^2Q_{\text{пад}1} = c_0 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2, \quad (\text{XX-22})$$

где величина

$$d\varphi_{21} = \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_1 \quad (\text{XX-23})$$

показывает, какая часть полусферического излучения площадки dF_2 попадает на площадку dF_1 и называется элементарным угловым коэффициентом излучения со второй площадки на первую.

Очевидно, что результирующий поток энергии, на площадке dF_2 , т. е. количество энергии, получаемое (или отдаваемое) в результате теплообмена этой площадкой в единицу времени, выразится как разность между величинами падающих (или поглощенных) потоков на площадках dF_2 и dF_1 :

$$d^2Q_{\omega 2} = d^2Q_{\text{пад}2} - d^2Q_{\text{пад}1},$$

откуда, учитывая выражения (XX-20) и (XX-22), получим

$$d^2Q_{w2} = c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_2 dF_1, \quad (XX-24)$$

или

$$d^2Q_{w2} = c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] dF_1 d\varphi_{12}. \quad (XX-24a)$$

Теплообмен между бесконечно малой площадкой и поверхностью конечного размера. Теперь рассмотрим теплообмен между элементом поверхности F_1 , т. е. площадкой dF_1 и поверхностью конечного размера F_2 . Очевидно, что для нахождения результирующего теплового потока на поверхности F_2 необходимо проинтегрировать выражение (XX-24), либо, что то же (XX-24, а) по поверхности F_2 ;

$$dQ_{w2} = c_0 dF_1 \int_{F_2} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_2. \quad (XX-25)$$

Если поверхность F_2 является изотермической, т. е. температура T_2 постоянна по всей этой поверхности, то выражение в квадратных скобках может быть вынесено из под знака интеграла:

$$dQ_{w2} = c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] dF_1 \int_{F_2} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_2. \quad (XX-25a)$$

Фигурирующая в этом выражении величина

$$\Phi'_{12} = \int_{F_2} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_2 = \int_{F_2} d\varphi_{12} \quad (XX-26)$$

показывает, какая доля полусферического излучения элемента первой поверхности попадает на всю вторую поверхность и называется локальным угловым коэффициентом излучения. Очевидно, что значение этого углового коэффициента изменяется от точки к точке на поверхности F_1 , поэтому он и называется локальным.

Аналогичная величина, характеризующая долю полусферического излучения элемента поверхности F_2 , попадающую на поверхность F_1 , определится, очевидно, следующим образом:

$$\Phi'_{21} = \int_{F_1} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_1 = \int_{F_1} d\varphi_{21}. \quad (XX-27)$$

Таким образом, с учетом выражения (XX-26) формула (XX-25 а) для потока результирующего излучения на поверхности F_2 примет вид

$$dQ_{w2} = c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] dF_1 \varphi'_{12}. \quad (\text{XX-25б})$$

Теплообмен между двумя поверхностями конечного размера. Выражения (XX-25), (XX-25 а) и (XX-25 б) определяют результирующий поток на поверхности F_2 , возникающий вследствие теплообмена с элементом поверхности F_1 . Для нахождения результирующего потока Q_{w2} на поверхности F_2 , обусловленного теплообменом с поверхностью F_1 , необходимо, очевидно, проинтегрировать величину, определяемую этими выражениями, по всей поверхности F_1 . Интегрируя выражение (XX-25), получаем

$$Q_{w2} = c_0 \iint_{F_1 F_2} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2. \quad (\text{XX-28})$$

Если обе поверхности F_1 и F_2 являются изотермическими, т. е. если температура T_1 постоянна по всей поверхности F_1 , а температура T_2 — по всей поверхности F_2 , то выражение в квадратных скобках выносится из-под знака интеграла, что дает

$$Q_{w2} = c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \iint_{F_1 F_2} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2. \quad (\text{XX-29})$$

Если ввести среднее по поверхности F_1 значение углового коэффициента излучения с поверхности F_1 на поверхность F_2 , определив его следующим образом:

$$\varphi_{12} = \frac{1}{F_1} \int_{F_1} \varphi'_{12} dF_1 = \frac{1}{F_1} \iint_{F_1 F_2} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2, \quad (\text{XX-30})$$

то выражение для результирующего потока Q_{w2} (XX-29) примет вид

$$Q_{w2} = c_0 \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \varphi_{12} F_1. \quad (\text{XX-31})$$

Таким образом, в случае теплообмена излучением тепловой поток на поверхности тела пропорционален разности четвертых степеней температур излучателя и приемника энергии, тогда как в случае конвективного

теплообмена он пропорционален разности первых степеней температур.

Имея выражение (XX-27) для локального углового коэффициента излучения с поверхности F_2 на поверхность F_1 , легко найти среднее по поверхности F_2 значение этой величины.

$$\varphi_{21} = \frac{1}{F_2} \int_{F_2} \varphi'_{21} dF_2 = \frac{1}{F_2} \iint_{F_1 F_2} \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2. \quad (\text{XX-32})$$

Средний угловой коэффициент (коэффициент облученности) показывает какая в среднем доля полусферического излучения одной из поверхностей попадает на другую.

Сопоставляя выражения (XX-30) и (XX-32), легко убедиться в том, что для средних угловых коэффициентов справедливо соотношение

$$\varphi_{12} F_1 = \varphi_{21} F_2, \quad (\text{XX-33})$$

которое выражает свойство взаимности угловых коэффициентов и в общем виде для любых двух поверхностей i и k , входящих в систему лучистого теплообмена, записывается следующим образом:

$$\varphi_{ik} F_i = \varphi_{ki} F_k. \quad (\text{XX-33a})$$

С учетом равенства (XX-33) величина результирующего потока Q_{w2} , определяемая формулой (XX-31), может быть выражена через собственное излучение поверхностей F_1 и F_2

$$Q_{w2} = E_{01} F_1 \varphi_{12} - E_{02} F_2 \varphi_{21},$$

или

$$Q_{w2} = Q_{01} \varphi_{12} - Q_{02} \varphi_{21}. \quad (\text{XX-34})$$

Очевидно, что, если рассматривается теплообмен между серыми поверхностями, величины потоков собственного излучения в выражении (XX-34) должны быть заменены потоками эффективного излучения, т. е.

$$Q_{w2} = Q_{\text{эфф}1} \varphi_{12} - Q_{\text{эфф}2} \varphi_{21}, \quad (\text{XX-34a})$$

откуда, учитывая, что в соответствии со смыслом углового коэффициента $Q_{\text{эфф}1} \varphi_{12} = Q_{\text{пад}2}$ и $Q_{\text{эфф}2} \varphi_{21} = Q_{\text{пад}1}$, получаем общее выражение

$$Q_{w2} = Q_{\text{пад}2} - Q_{\text{пад}1}, \quad (\text{XX-35})$$

справедливое для любых систем лучистого теплообмена, включающих два тела при отсутствии теплообмена с окружающей средой.

Определение угловых коэффициентов излучения представляет собой весьма трудную задачу. Во многих практически важных случаях решить эту задачу аналитическими методами не удастся. В таких случаях используют графоаналитические либо экспериментальные методы расчета. Наиболее распространенным из последних является метод светового моделирования. Этот метод основан на единстве законов распространения теплового излучения и светового, что позволяет с помощью простых измерений освещенности различных поверхностей в световой модели, геометрически подобной изучаемой системе, определить угловые коэффициенты излучения.

Значения угловых коэффициентов для некоторых систем приводятся в справочниках.

Задача определения угловых коэффициентов излучения облегчается благодаря тому, что они обладают некоторыми свойствами, устанавливающими определенные связи между различными угловыми коэффициентами в одной и той же системе лучистого теплообмена.

Первое свойство — свойство взаимности угловых коэффициентов (XX-33) уже рассмотрено.

Вторым свойством угловых коэффициентов является свойство замыкаемости, которое вытекает из закона сохранения энергии для замкнутой системы лучистого теплообмена, состоящей из n серых тел. Эффективный поток излучения какого-либо тела m , входящего в эту систему, $Q_{\text{эфф } m}$ полностью попадает на все тела, составляющие систему, в том числе и на само тело m , если поверхность его вогнутая, поэтому

$$\sum_{i=1}^n Q_{\text{пад } i} = Q_{\text{эфф } m}.$$

В соответствии с определением углового коэффициента

$$Q_{\text{пад } i} = F_{mi} Q_{\text{эфф } m},$$

откуда следует

$$\sum_{i=1}^n F_{mi} Q_{\text{эфф } m} = Q_{\text{эфф } m},$$

или

$$\sum_{i=1}^n \varphi_{mi} = 1, \quad (\text{XX-36})$$

т. е. сумма всех угловых коэффициентов для любой поверхности, входящей в замкнутую систему, равна единице, что и составляет свойство замыкаемости угловых коэффициентов.

Для некоторых замкнутых систем, включающих две поверхности, средние угловые коэффициенты излучения определяются весьма просто. Все эти системы характеризуются тем, что локальный угловой коэффициент излучения с одной поверхности на другую не зависит от положения точки на поверхности, т. е. является постоянной величиной. На рис. 136 показаны в качестве примера три таких системы — а, б, в.

а. Две бесконечные параллельные плоские поверхности. Очевидно, что все излучение каждой из поверхностей падает лишь на другую поверхность, т. е. $\varphi_{11} = \varphi_{22} = 0$, откуда на основании свойства замыкаемости ($\varphi_{11} + \varphi_{12} = 1$ и $\varphi_{22} + \varphi_{21} = 1$) получаем $\varphi_{12} = \varphi_{21} = 1$. Этот же результат приближенно справедлив для плоских поверхностей, размеры которых весьма велики по сравнению с расстоянием между ними.

б. Система из двух concentрических сфер или из двух коаксиальных бесконечных цилиндров. В этом случае все излучение внутренней поверхности 1 падает только на поверхность 2, т. е. $\varphi_{11} = 0$, а потому $\varphi_{12} = 1$. Отсюда в соответствии со свойством взаимности (XX-33) получаем $\varphi_{21} = \frac{F_1}{F_2}$. Этот результат приближенно справедлив для цилиндров конечной длины, если она велика по сравнению с зазором между цилиндрами.

в. Внутренняя поверхность сферического сегмента (F_2) и его основание (F_1), либо внутренняя поверхность цилиндра бесконечной длины (F_2) и продольно пересе-

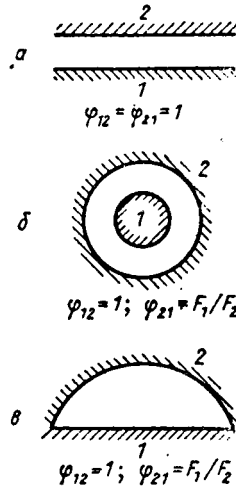


Рис. 136. Средние угловые коэффициенты излучения для некоторых замкнутых систем

кающая его плоская поверхность (F_1). Очевидно, что в этом случае $\varphi_{11}=0$, так как поверхность 1 невогнутая а потому в соответствии с свойством замкнутости $\varphi_{12}=1$, т. е. все излучение поверхности 1 попадает на поверхность 2. Отсюда на основании свойства взаимности $\varphi_{21}=\frac{F_1}{F_2}$. В случае, если длина цилиндра конечна, но велика по сравнению с его радиусом, этот результат также приближенно справедлив.

При инженерных расчетах лучистого теплообмена в замкнутых системах, состоящих из двух поверхностей, из которых одна невогнутая 1, а другая вогнутая 2, даже если условие постоянства локального углового коэффициента не выполняется, приближенно считают, что $\varphi_{12}=1$, $\varphi_{21}=\frac{F_1}{F_2}$.

6. Лучистый теплообмен в замкнутой системе из двух серых поверхностей, разделенных лучепрозрачной средой

Как правило, основная задача теории лучистого теплообмена заключается в определении величины результирующего теплового потока на данной поверхности (или поверхностях), если известны температуры и оптические константы всех поверхностей, составляющих данную систему.

Рассмотрим теплообмен излучением между двумя серыми поверхностями произвольной формы, образующими замкнутую систему. Последнее означает, что излучение из данной системы не уходит и не поступает в нее извне. Считаем, что обе поверхности являются изотермическими, т. е. температура первой поверхности T_1 постоянная по всей ее площади F_1 , а температура второй поверхности T_2 постоянна по всей площади F_2 . Как и ранее, рассматривается случай стационарного теплообмена, откуда с учетом замкнутой системы получаем

$$Q_{w1} + Q_{w2} = 0, \quad (a)$$

т. е. алгебраическая сумма результирующих потоков равна нулю. Это означает, что количество тепла, которое в единицу времени получает одна из поверхностей в результате теплообмена, равно тому количеству тепла, которое теряет другая поверхность.

В связи с тем, что рассматриваемая система не обменивается излучением с окружающей средой, для нее справедливо выражение (XX-35), т. е.

$$Q_{w2} = Q_{\text{пад } 2} - Q_{\text{пад } 1},$$

или, учитывая, что $Q_{\text{пад } 2} = Q_{\text{эфф } 1} \varphi_{12}$; $Q_{\text{пад } 1} = Q_{\text{эфф } 2} \varphi_{21}$,

$$Q_{w2} = Q_{\text{эфф } 1} \varphi_{12} - Q_{\text{эфф } 2} \varphi_{21}. \quad (б)$$

Исключим из последнего выражения эффективные потоки излучения, воспользовавшись формулой (XX-6 а), в которой поглощательную способность A заменим на основании закона Кирхгофа степенью черноты ϵ . В результате получим

$$Q_{w2} = \left(\frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1} Q_{w1} + \frac{Q_1}{\epsilon_1} \right) \varphi_{12} - \left(\frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} Q_{w2} + \frac{Q_2}{\epsilon_2} \right) \varphi_{21}. \quad (в)$$

В этом выражении величина Q_1/ϵ_1 , равная отношению потока собственного излучения поверхности 1 к ее степени черноты, представляет собой поток излучения абсолютно черного тела с поверхностью F_1 и температурой T_1 , а величина Q_2/ϵ_2 — поток излучения абсолютно черного тела с поверхностью F_2 и температурой T_2 . Действительно, на основании выражения (XX-10), вытекающего из определения серого тела, имеем

$$\frac{Q_1}{\epsilon_1} = Q_{01} = E_{01} F_1,$$

$$\frac{Q_2}{\epsilon_2} = Q_{02} = E_{02} F_2,$$

или, используя закон Стефана-Больцмана (XX-9);

$$\frac{Q_1}{\epsilon_1} = c_0 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 F_1,$$

$$\frac{Q_2}{\epsilon_2} = c_0 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 F_2.$$

Подставляя эти результаты в выражение (в) и учитывая, что на основании равенства (а) $Q_{w1} = -Q_{w2}$, находим результирующий тепловой поток на поверхности 2.

$$Q_{w2} = \frac{c_0 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 F_1 \varphi_{12} - c_0 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 F_2 \varphi_{21}}{1 + \left(\frac{1}{\epsilon_1} - 1 \right) \varphi_{12} + \left(\frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right) \varphi_{21}}.$$

Разделив числитель и знаменатель в правой части этого

выражения на коэффициент лучеиспускания абсолютно черного тела c_0 и принимая во внимание, что в соответствии со свойством взаимности средних угловых коэффициентов излучения (XX-33) $F_1\varphi_{12}=F_2\varphi_{21}$, получим окончательно

$$Q_{w2} = \frac{1}{\frac{1}{c_0} + \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0}\right)\varphi_{12} + \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0}\right)\varphi_{21}} \times \\ \times \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] F_2 \varphi_{21}, \quad (\text{XX-37})$$

где $c_1 = \varepsilon_1 c_0$ и $c_2 = \varepsilon_2 c_0$ являются коэффициентами лучеиспускания серых поверхностей 1 и 2.

Выражение (XX-37) для результирующего теплового потока записывают обычно в виде

$$Q_{w2} = c_{\text{пр}} \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] \varphi_{21} F_2. \quad (\text{XX-38})$$

Здесь $c_{\text{пр}}$ — приведенный коэффициент излучения, который в общем случае для замкнутой системы, состоящей из двух изотермических серых поверхностей, имеет вид

$$c_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{c_0} + \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_0}\right)\varphi_{12} + \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0}\right)\varphi_{21}}. \quad (\text{XX-39})$$

Как следует из формулы (XX-39), величина приведенного коэффициента излучения зависит от геометрической конфигурации системы, определяющей значения средних угловых коэффициентов излучения, и от оптических свойств поверхностей, определяющих значения коэффициентов лучеиспускания.

Таким образом, в случае теплообмена излучением между двумя серыми поверхностями, образующими замкнутую систему, результирующий тепловой поток на любой из этих поверхностей пропорционален разности четвертых степеней их температур.

Для замкнутых систем, показанных на рис. 136 и характеризующихся тем, что $\varphi_{12}=1$, выражение (XX-38) принимает вид

$$Q_{w2} = c_{\text{пр}} \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right] F_1. \quad (\text{XX-40})$$

При этом для случая, показанного на рис. 136, а ($\varphi_{12}=$

$=\varphi_{21}=1$), приведенный коэффициент излучения запишется в виде

$$c_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0}}, \quad (\text{XX-41})$$

а для случаев, показанных на рис. 136, б и в ($\varphi_{12}=1$, $\varphi_{21} = \frac{F_1}{F_2}$), — в виде

$$c_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0}\right) \frac{F_1}{F_2}}. \quad (\text{XX-42})$$

В инженерных расчетах, носящих приближенный характер, формулы (XX-40) и (XX-42) применяют для любых замкнутых систем, состоящих из вогнутой и невогнутой поверхностей, даже если правило $\varphi_{12}^1 = \text{const}$ не соблюдается.

7. Теплообмен излучением в замкнутой системе, состоящей из произвольного числа серых поверхностей

Рассмотрим лучистый теплообмен в замкнутой системе, состоящей из n серых изотермических поверхностей, температуры которых известны.

Если рассматривать теплообмен лишь между двумя поверхностями, составляющими систему, например, между поверхностями 2 и 1, не учитывая теплообмена с другими окружающими поверхностями, то результирующий поток на поверхности 1 Q_{w2-1} запишется на основании формулы (XX-34 а) в виде

$$Q_{w2-1} = Q_{\text{эфф}2}\varphi_{21} - Q_{\text{эфф}1}\varphi_{12}.$$

Аналогичным образом выразится результирующий поток Q_{w3-1} на поверхности 1, обусловленный теплообменом только с поверхностью 3:

$$Q_{w3-1} = Q_{\text{эфф}3}\varphi_{31} - Q_{\text{эфф}1}\varphi_{13}.$$

Вообще для теплообмена между любой i -той поверхностью и поверхностью 1 получаем

$$Q_{wi-1} = Q_{\text{эфф}i}\varphi_{i1} - Q_{\text{эфф}1}\varphi_{1i}. \quad (\text{а})$$

Очевидно, что реальный результирующий поток на поверхности 1, обусловленный теплообменом со всеми n

поверхностями, составляющими систему, можно найти, если просуммировать выражение (а) по индексу i от 1 до n , т. е.

$$Q_{w1} = \sum_{i=1}^n Q_{эфф i} \varphi_{i1} - \sum_{i=1}^n Q_{эфф 1} \varphi_{1i},$$

откуда, вынося $Q_{эфф 1}$ за знак суммы и учитывая, что на основании свойства замкнутости средних угловых коэффициентов излучения

$$\sum_{i=1}^n \varphi_{1i} = 1,$$

получаем

$$Q_{w1} = \sum_{i=1}^n Q_{эфф i} \varphi_{i1} - Q_{эфф 1},$$

или вообще для любой k -той поверхности, входящей в систему:

$$Q_{wk} = \sum_{i=1}^n Q_{эфф i} \varphi_{ik} - Q_{эфф k}. \quad (XX-43)$$

Эффективные потоки, фигурирующие в уравнении (XX-43), можно на основании формулы (XX-6 а) выразить через результирующие потоки и потоки излучения абсолютно черного тела, как это сделано в предыдущем параграфе:

$$Q_{эфф i} = \frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i} Q_{wi} + Q_{0i};$$

$$Q_{эфф k} = \frac{1 - \varepsilon_k}{\varepsilon_k} Q_{wk} + Q_{0k}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (XX-43), получаем

$$Q_{wk} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1 - \varepsilon_i}{\varepsilon_i} Q_{wi} + Q_{0i} \right) \varphi_{ik} - \frac{1 - \varepsilon_k}{\varepsilon_k} Q_{wk} - Q_{0k}. \quad (XX-44)$$

Очевидно, что уравнение (XX-44) справедливо для любой поверхности, входящей в данную систему. Таким образом, получаем систему алгебраических уравнений, в которых неизвестными величинами являются результирующие потоки излучения на каждой поверхности

Q_{wi} , причем на основании условия замкнутости системы лучистого теплообмена

$$\sum_{i=1}^n Q_{wi} = 0, \quad (\text{XX-45})$$

т. е. алгебраическая сумма результирующих потоков на всех поверхностях равна нулю.

Входящие в уравнение (XX-44) потоки излучения абсолютно черного тела известны, так как известны температуры всех n поверхностей.

$$Q_{oi} = c_0 \left(\frac{T_i}{100} \right)^4 F_i.$$

Таким образом, решая систему (XX-44), (XX-45) из n уравнений с n неизвестными, можно найти величины результирующих потоков на всех n поверхностях, образующих данную замкнутую систему лучистого теплообмена.

Полученные таким путем решения для различных случаев, в частности для системы из трех серых поверхностей произвольной формы, приводятся в специальной литературе.

8. Излучение через отверстие в стенке печи

Частным, но имеющим большое практическое значение случаем теплообмена в системе из трех тел является теплообмен излучением между двумя абсолютно черными поверхностями F_1 и F_2 , соединенными адиабатной, т. е. идеально теплоизолирующей поверхностью F_3 , которая является серой. Этот случай, изображенный на рис. 137, соответствует излучению через отверстие в стенке печи. Действительно, поверхности отверстия 1 и 2, обращенные в окружающую среду и в печь, могут считаться абсолютно черными, а цилиндрическая поверхность 3 — адиабатной.

Примем для упрощения, что температура T_3 постоянна по

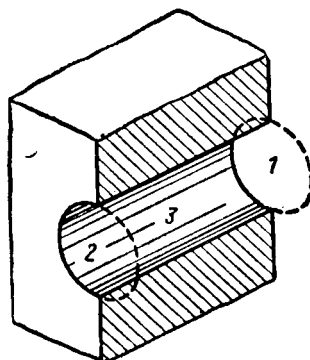


Рис. 137. К расчету излучения через отверстие в стенке печи

всей поверхности F_3 . Тогда, применяя выражение (XX-43), получим

$$Q_{w1} = Q_{эфф1}\varphi_{11} + Q_{эфф2}\varphi_{21} + Q_{эфф3}\varphi_{31} - Q_{эфф1}. \quad (a)$$

Так как поверхность 1 плоская, т. е. невогнутая, $\varphi_{11} = 0$, и первый член в правой части выражения (a) обращается в нуль. В связи с тем, что поверхности 1 и 2 являются абсолютно черными:

$$Q_{эфф1} = Q_{01} = c_0 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 F_1,$$

$$Q_{эфф2} = Q_{02} = c_0 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 F_2.$$

На основании формулы (XX-6 a) для серой поверхности 3 имеем

$$Q_{эфф3} = \frac{1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_3} Q_{w3} + Q_{03},$$

но эта поверхность адиабатная, поэтому результирующий поток на ней равен нулю $Q_{w3} = 0$, и ее эффективное излучение соответствует излучению абсолютно черного тела

$$Q_{эфф3} = Q_{03} = c_0 \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 F_3,$$

что и естественно, так как адиабатная поверхность отражает и переизлучает всю падающую на нее энергию, а потому эффективное излучение ее не зависит от оптических свойств этой поверхности.

С учетом этих результатов выражение (a) принимает вид

$$Q_{w1} = c_0 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 F_2 \varphi_{21} + c_0 \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 F_3 \varphi_{31} - c_0 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 F_1. \quad (6)$$

Неизвестную температуру поверхности 3 T_3 определим из следующих соображений. В связи с тем, что поверхность 3 адиабатная, результирующий поток на ней Q_{w23} , возникающий вследствие теплообмена с поверхностью 2, равен результирующему потоку Q_{w31} , возникающему в результате теплообмена с поверхностью 1, т. е. все количество тепла, которое поверхность 3 получает от поверхности 2, она передает на поверхность 1. Таким образом, имеем

$$Q_{w23} = Q_{w31},$$

а так как в соответствии с формулой (XX-34)

$$Q_{\omega 23} = c_0 \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 F_2 \varphi_{23} - c_0 \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 F_3 \varphi_{32},$$

$$Q_{\omega 31} = c_0 \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 F_3 \varphi_{31} - c_0 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 F_1 \varphi_{13},$$

получаем

$$c_0 \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 F_2 \varphi_{23} - c_0 \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 F_3 \varphi_{32} = c_0 \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 F_3 \varphi_{31} - c_0 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 F_1 \varphi_{13},$$

откуда

$$\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 = \frac{\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 F_1 \varphi_{13} + \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 F_2 \varphi_{23}}{F_3 \varphi_{32} + F_3 \varphi_{31}},$$

или, учитывая, что на основании свойства взаимности средних угловых коэффициентов излучения $F_3 \varphi_{32} = F_2 \varphi_{23}$ и $F_3 \varphi_{31} = F_1 \varphi_{13}$,

$$\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 = \frac{\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 F_1 \varphi_{13} + \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 F_2 \varphi_{23}}{F_2 \varphi_{23} + F_1 \varphi_{13}},$$

откуда, принимая во внимание, что $F_1 = F_2$ и, очевидно, $\varphi_{13} = \varphi_{23}$, получаем

$$\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 + \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right],$$

Подставляя этот результат в выражение (б) и используя свойство взаимности угловых коэффициентов, находим

$$Q_{\omega 1} = c_0 \left[\left(\frac{T_2}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \right] F_1 \left(\varphi_{12} + \frac{1}{2} \varphi_{13} \right),$$

где в соответствии со свойством замкнутости угловых коэффициентов (XX-36)

$$\varphi_{13} = 1 - \varphi_{12},$$

и выражение для излучения через отверстие принимает вид

$$Q_{\omega 1} = c_0 \left[\left(\frac{T_2}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \right] F_1 \frac{1 + \varphi_{12}}{2}. \quad (\text{XX-46})$$

Это выражение записывают обычно в форме

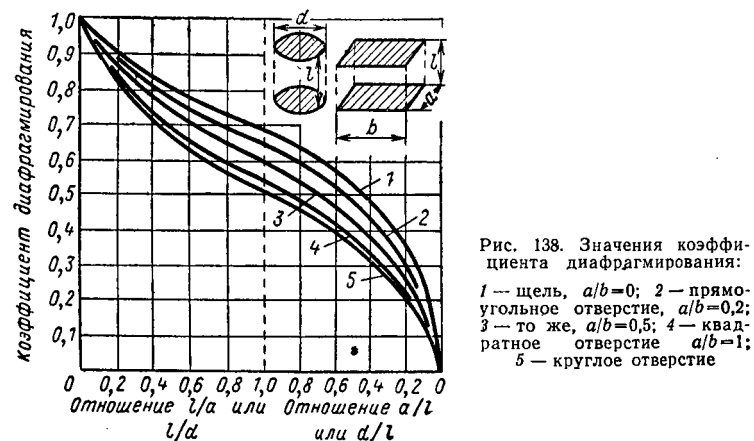
$$Q_{\omega 1} = c_0 \left[\left(\frac{T_2}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \right] F_1 \Phi, \quad (\text{XX-46a})$$

где величина

$$\Phi = \frac{1 + \varphi_{12}}{2} \quad (\text{XX-47})$$

называется коэффициентом диафрагмирования.

Как показывает выражение (XX-46), наличие отражающей (и переизлучающей) поверхности 3 увеличивает результирующий поток, проходящий через отверстие.



Расчетные значения коэффициента диафрагмирования для отверстий различной формы приводятся на рис. 138.

9. Действие экранной теплоизоляции

Наиболее эффективным способом теплоизоляции высокотемпературных печей (главным образом, электрических), в которых перенос тепла осуществляется практически только излучением, является установка экранов, ограждающих зону высоких температур. Использование экранной теплоизоляции позволяет существенно уменьшить результирующий тепловой поток, уходящий из печи в окружающую среду, т. е. потери тепла.

Проанализируем эффективность экранной теплоизоляции на простом примере, рассмотрев теплообмен излучением между двумя бесконечными плоскими серыми поверхностями 1 и 2, разделенными высокотеплопроводным и тонким экраном 3. Примем для простоты, что степени черноты обеих поверхностей 1 и 2, а, следовательно,

и их коэффициенты лучеиспускания одинаковы, $c_1 = c_2 = c$. В связи с тем, что внутреннее термическое сопротивление экрана δ/λ очень мало, температура на обеих его поверхностях одинакова и равна T_3 . Коэффициент лучеиспускания экрана равен c_3 .

В соответствии с формулой (XX-40), плотность результирующего теплового потока на поверхности 2 при отсутствии экрана выражается следующим образом:

$$q_{w2} = c_{\text{пр}} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (\text{XX-48})$$

где для рассматриваемого случая

$$c_{\text{пр}} = \frac{1}{\frac{2}{c} - \frac{1}{c_0}}, \quad (\text{XX-49})$$

Теперь предположим, что при тех же температурах обеих поверхностей между ними помещен экран. Плотность результирующего теплового потока на экране, обусловленного теплообменом с поверхностью 1, выразится, очевидно, как

$$q_{w1-3} = c_{\text{пр}}^{1-3} \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_3}{100} \right)^4 \right], \quad (a)$$

где $c_{\text{пр}}^{1-3} = \frac{1}{\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c} - \frac{1}{c_0}}$ — приведенный коэффициент из-

лучения для системы поверхность 1 — экран. Аналогичным образом можно записать плотность результирующего потока на поверхности 2, обусловленного теплообменом с экраном:

$$q_{w3-2} = c_{\text{пр}}^{3-2} \left[\left(\frac{T_3}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (6)$$

где $c_{\text{пр}}^{3-2} = \frac{1}{\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c} - \frac{1}{c_0}}$ — приведенный коэффициент излучения для системы экран — поверхность 2.

В связи с тем, что режим теплообмена стационарный, величина плотности результирующего теплового потока с поверхности 1 на экран q_{w1-3} и с экрана на поверхность 2 q_{w3-2} равны между собой и представляют собой плотность результирующего теплового потока между поверх-

ностями 1 и 2 при наличии экрана между ними, т. е. $q_{w1-3} = q_{w3-2} = q_{w2}^3$. Приравняв правые части выражений (а) и (б) и учитывая равенство приведенных коэффициентов излучения, $c_{пр}^{1-3} = c_{пр}^{3-2}$, найдем неизвестную температуру экрана

$$\left(\frac{T_3}{100}\right)^4 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 + \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right].$$

Подставляя этот результат в выражение (а) или (б), получим величину плотности результирующего теплового потока на поверхности 2 при наличии экрана:

$$q_{w2}^3 = \frac{1}{2} c_{пр}^3 \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right], \quad (XX-50)$$

где

$$c_{пр}^3 = c_{пр}^{1-3} = c_{пр}^{3-2} = \frac{1}{\frac{1}{c} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_0}}. \quad (XX-51)$$

Разделив величину q_{w2} (XX-48) на q_{w2}^3 (XX-50), определим, во сколько раз установка экрана ослабляет тепловой поток между пластинами при неизменных температурах последних:

$$\frac{q_{w2}}{q_{w2}^3} = 2 \frac{c_{пр}}{c_{пр}^3} = 2 \frac{\frac{1}{c} + \frac{1}{c_3} - \frac{1}{c_0}}{\frac{2}{c} - \frac{1}{c_0}}. \quad (XX-52)$$

Из выражения (XX-52) следует, что ослабление теплового потока тем больше, чем меньше коэффициент лучеиспускания экрана, т. е. чем меньше его степень черноты.

В частном случае, когда коэффициент лучеиспускания экрана равен коэффициенту лучеиспускания поверхностей 1 и 2, получаем

$$\frac{q_{w2}}{q_{w2}^3} = 2,$$

т. е. тепловой поток ослабляется в два раза. Легко показать, что при этих условиях установка n экранов ослабит тепловой поток в $(n+1)$ раз.

Очевидно, что столь эффективное теплоизолирующее действие экранной теплоизоляции обусловлено отражением части падающего потока поверхностью экрана.

10. Излучение и поглощение лучистой энергии в газовой среде

Как известно, характерной особенностью излучения и поглощения лучистой энергии в газах является селективный характер этих процессов. Это означает, что газы излучают и поглощают лучистую энергию лишь в некоторых интервалах длин волн. В других же областях

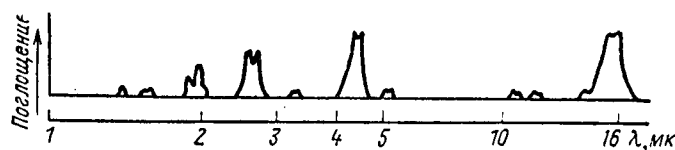


Рис. 139. Спектр поглощения газообразной двуокиси углерода

спектра газы не излучают и не поглощают энергию, т. е. ведут себя как диатермичная среда.

В частности, двухатомные газы с симметричными молекулами (H_2 , N_2 , O_2) не имеют полос поглощения (и излучения) в инфракрасной области спектра и, следовательно, представляют собой диатермичные среды по отношению к тепловому излучению.

Трехатомные газы (CO_2 , H_2O , SO_2) имеют достаточно широкие полосы поглощения в инфракрасной области (рис. 139, 140), а потому принимают участие в лучистом теплообмене, происходящем в камерах печей.

Ослабление лучистой энергии при прохождении через среду в общем случае может быть обусловлено не только поглощением, но и рассеянием. В чистых газах, благодаря малому размеру молекул по сравнению с длиной волны, рассеяние практически отсутствует. Однако оно играет существенную роль, если в газах находятся взвешенные твердые, либо жидкие частицы, что характерно для процесса сжигания пылевидного или жидкого топлива, а также для технологических процессов, использующих обработку дисперсного материала во взвешенном состоянии. Кроме того, конденсированная дисперсная фа-

за может возникать при определенных условиях и в процессе сжигания газообразного углеводородного топлива, например, природного газа (самокарбюрация пламени).

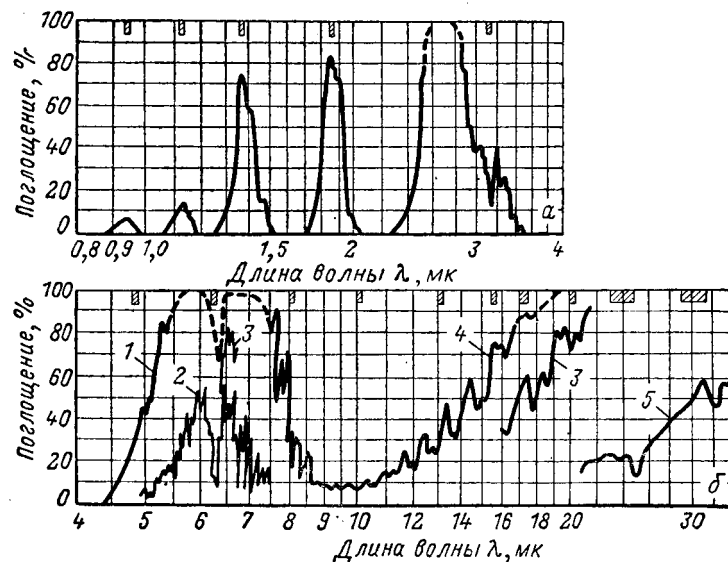


Рис. 140. Спектр поглощения водяного пара:

a — для коротковолнового участка ($\lambda=0,8-4$ мк), температура пара 400 К, толщина слоя 109 см; *б* — для длинноволнового участка ($\lambda=4-34$ мк): 1 — температура пара 400 К, толщина слоя 109 см; 2 — смесь 3,18% H_2O +воздух, $T=291$ К, $l=220$ см; 3 — $T=400$ К, $l=32,4$ см; 4 — $T=400$ К, $l=104$ см; 5 — смесь 12,35% H_2O +воздух, $T=354$ К, $l=32,4$ см

Перенос лучистой энергии в ослабляющей среде

В связи с селективным характером поглощения лучистой энергии газами этот процесс необходимо рассматривать в терминах спектральных характеристик. В качестве первого, но в большинстве случаев удовлетворительного приближения можно принять, что относительное бесконечно малое изменение (вследствие поглощения и рассеяния) спектральной интенсивности излучения на бесконечно малой толщине слоя dx пропорционально этой толщине, т. е.

$$\frac{dI_{\lambda}}{I_{\lambda}} = -k_{\lambda} dx. \quad (XX-5)$$

Это выражение является основным законом переноса лучистой энергии в ослабляющей среде и называется законом Бугера. Знак минус в правой части указывает, что интенсивность излучения при прохождении через ослабляющую среду уменьшается, т. е. dI_λ — всегда отрицательная величина. Коэффициент пропорциональности в уравнении (XX-53) k_λ носит название коэффициента ослабления.

Интегрируя уравнение (XX-53) для плоского слоя ослабляющей среды, получим, предполагая, что k_λ есть величина постоянная:

$$\ln [I_\lambda(x)] = -k_\lambda x + C.$$

Потенцируя это выражение и определяя константу C из условия, что при $x=0$ $I_\lambda = I_\lambda(0)$, т. е. считая, что граница слоя находится в начале координат, где спектральная интенсивность излучения равна своему начальному значению $I_\lambda(0)$, найдем окончательно

$$I_\lambda(x) = I_\lambda(0) e^{-k_\lambda x} \quad (\text{XX-54})$$

Таким образом, ослабление излучения по толщине слоя ослабляющей среды происходит по экспоненциальному закону.

В дальнейшем будем считать, что ослабление излучения происходит только вследствие поглощения энергии, рассеяние отсутствует, т. е. рассматриваются лишь гомогенные газовые среды.

Выражение (XX-54) позволяет найти формулу для спектральной поглощательной способности газового слоя заданной толщины. Действительно, спектральная интенсивность излучения на выходе из газового слоя толщиной l определится, в соответствии с выражением (XX-54), как

$$I_\lambda(l) = I_\lambda(0) e^{-k_\lambda l}.$$

Величина $I_\lambda(0)$ играет роль падающего на поверхность слоя излучения. Очевидно, что количество поглощенной в слое энергии будет равно $I_\lambda(0) - I_\lambda(l)$, а потому спектральная поглощательная способность выразится в виде

$$A_\lambda = \frac{I_\lambda(0) - I_\lambda(l)}{I_\lambda(0)} = 1 - e^{-k_\lambda l} \quad (\text{XX-55})$$

Очевидно, что если излучение проходит через слой, состоящий из смеси различных газов, из которых i -тый компонент смеси поглощает излучение с данной длиной волны, то это поглощение будет тем более интенсивным, чем больше молекул поглощающего газа луч встретит на своем пути через слой, т. е. чем большей будет концентрация или парциальное давление p_i поглощающего газа в смеси. Это обстоятельство находит отражение в законе Бера, в соответствии с которым коэффициент ослабления k_λ есть величина, пропорциональная парциальному давлению поглощающего i -того компонента газовой смеси:

$$k_\lambda = b_\lambda p_i, \quad (\text{XX-56})$$

где b_λ — коэффициент, зависящий от температуры газа.

Таким образом, выражение для спектральной поглощательной способности плоского слоя газа, в соответствии с законами Бугера и Бера, принимает вид

$$A_\lambda = 1 - e^{-b_\lambda p_i l}, \quad (\text{XX-57})$$

т. е. поглощательная способность зависит от температуры газа, парциального давления поглощающего компонента смеси и длины пути луча в газе. При этом, как показывает выражение (XX-57), поглощательная способность является функцией произведения двух последних величин, т. е. $p_i l$, что непосредственно следует из законов Бугера и Бера. Однако эта закономерность нарушается при больших концентрациях поглощающего компонента смеси, а для некоторых газов и при малых концентрациях. В этих случаях коэффициент b_λ также становится функцией парциального давления p_i , и, следовательно, поглощательная способность газа зависит не только от произведения $p_i l$, но и от величины p_i .

Перенос лучистой энергии в поглощающей и излучающей среде

Излучение элементарного газового слоя, имеющего спектральную поглощательную способность A_λ , равную на основании закона Кирхгофа его спектральной степени черноты, можно выразить величиной

$$dI_{\lambda \text{ изл}} = A_\lambda I_{\lambda 0 \text{ г}}.$$

где $I_{\lambda 0 \text{ г}}$ — спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре газа.

Учитывая, что в соответствии с выражением (XX-55) для слоя толщиной dx

$$A_\lambda = 1 - e^{-k_\lambda dx}$$

и разлагая величину $e^{-k_\lambda dx}$ в ряд, получим в пренебрежении малыми величинами второго порядка и выше

$$A_\lambda = k_\lambda dx.$$

Таким образом, собственное излучение элементарного газового слоя можно представить в виде

$$dI_{\lambda \text{ изл}} = k_\lambda I_{\lambda 0\Gamma} dx. \quad (a)$$

С другой стороны, поглощение энергии в этом слое в соответствии с законом Бугера (XX-53) выражается как

$$-dI_{\lambda \text{ погл}} = k_\lambda I_\lambda(x) dx. \quad (б)$$

Очевидно, что, вычитая из выражения (а) выражение (б), мы получим результирующее изменение спектральной интенсивности излучения на толщине dx :

$$dI_\lambda = [I_{\lambda 0\Gamma} - I_\lambda(x)] k_\lambda dx. \quad (XX-58)$$

Это выражение представляет собой дифференциальное уравнение переноса энергии в поглощающей и излучающей среде.

Разделяя переменные в уравнении (XX-58) и интегрируя в предположении, что k_λ есть величина постоянная (т. е. постоянны температура, давление и состав газа), получим выражение

$$\ln [I_{\lambda 0\Gamma} - I_\lambda(x)] = -k_\lambda x + C,$$

которое после потенцирования дает

$$I_{\lambda 0\Gamma} - I_\lambda(x) = Ce^{-k_\lambda x}.$$

Постоянная интегрирования C определяется из граничного условия при $x=0$ в виде

$$C = I_{\lambda 0\Gamma} - I_\lambda(0).$$

Таким образом, решение уравнения (XX-58) позволяет определить закон изменения спектральной интенсивности излучения по толщине слоя поглощающей и излучающей среды:

$$I_\lambda(x) = I_{\lambda 0\Gamma} (1 - e^{-k_\lambda x}) + I_\lambda(0) e^{-k_\lambda x}. \quad (XX-59)$$

В случае плоского газового слоя толщиной l выражение (XX-59) принимает вид

$$I_{\lambda}(l) = I_{\lambda 0г} (1 - e^{-k_{\lambda} l}) + I_{\lambda}(0) e^{-k_{\lambda} l} \quad (\text{XX-59a})$$

и определяет излучение, выходящее из слоя поглощающего и излучающего газа толщиной l .

Учитывая равенство (XX-55), выражение (XX-59 а) можно записать, используя спектральную поглощательную способность газового слоя:

$$I_{\lambda}(l) = I_{\lambda 0г} A_{\lambda} + I_{\lambda}(0) (1 - A_{\lambda}). \quad (\text{XX-60})$$

Пусть в точке $x=0$, т. е. на границе слоя располагается твердая стенка, спектральная степень черноты которой равна $\epsilon_{\lambda w}$, а отражательная способность $R_{\lambda w}$. Тогда величина $I_{\lambda}(0)$ представляет собой, очевидно, спектральную интенсивность эффективного излучения этой стенки, т. е.

$$I_{\lambda}(0) = \epsilon_{\lambda w} I_{\lambda 0w} + R_{\lambda w} I_{\lambda \text{пад}},$$

где первое слагаемое в правой части представляет собой собственное излучение стенки, а второе — отраженное излучение; $I_{\lambda 0w}$ — спектральная интенсивность излучения абсолютно черного тела при температуре стенки; $I_{\lambda \text{пад}}$ — спектральная интенсивность излучения, падающего на поверхность стенки.

Подставляя последнее выражение в равенство (XX-60) и интегрируя по всему спектру, т. е. от $\lambda=0$ до ∞ , получим с учетом постоянства $\epsilon_{\lambda w}$ и $R_{\lambda w}$ (так как стенка серая)

$$E(l) = \int_0^{\infty} I_{\lambda 0г} A_{\lambda} d\lambda + \epsilon_w \left[c_0 \left(\frac{T_w}{100} \right)^4 - \int_0^{\infty} I_{\lambda 0w} A_{\lambda} d\lambda \right] + R_w (E_{\text{пад}} - \int_0^{\infty} I_{\lambda \text{пад}} A_{\lambda} d\lambda). \quad (\text{XX-61})$$

Уравнение (XX-61) определяет величину плотности потока интегрального излучения, выходящего из газового слоя. Первое слагаемое в правой части представляет собой собственное излучение газа, второе — собственное излучение стенки, ослабленное в результате прохождения через газ, и третье — отраженное стенкой излучение также с учетом частичного поглощения его в слое

газа. Анализ величин, входящих в уравнение (XX-61), позволяет определить интегральные значения степени черноты газа и его поглощательной способности.

Действительно, если считать, как и ранее, что интегральная степень черноты газа ϵ_r определяется выражением $E_r = \epsilon_r E_0$ (E_r — собственное излучение газа), то, в соответствии с уравнением (XX-61), формула для ϵ_r примет вид

$$\epsilon_r = \frac{1}{c_0 \left(\frac{T_r}{100}\right)^4} \int_0^\infty I_{\lambda 0r} A_\lambda d\lambda. \quad (XX-62)$$

С другой стороны, разделив ту часть собственного излучения стенки, которая поглощена в слое газа, на это собственное излучение (второе слагаемое в правой части уравнения (XX-61), получим интегральную поглощательную способность газа

$$A_r = \frac{1}{c_0 \left(\frac{T_w}{100}\right)^4} \int_0^\infty I_{\lambda 0w} A_\lambda d\lambda. \quad (XX-63)$$

Формулы (XX-62) и (XX-63) показывают, что интегральные значения степени черноты газа и его поглощательной способности, вообще говоря, не совпадают, так как поглощательная способность определяется не только свойствами газа, но и свойствами падающего на поверхность газового слоя излучения. Этот факт не является неожиданным, так как газ представляет собой среду, излучающую и поглощающую селективно, а потому не может вести себя как серое тело.

С другой стороны, интегральная степень черноты газа однозначно определяется его температурой и спектральными коэффициентами поглощения (XX-62), и, следовательно, как и поглощательная способность, зависит от температуры и от произведения парциального давления поглощающего компонента (или компонентов) на длину хода луча.

Несмотря на очевидное различие степени черноты газа и его поглощательной способности, в современных инженерных расчетах обычно полагают эти величины совпадающими, т. е. одинаково зависящими от температуры и произведения парциального давления на длину хода луча.

Поглощение и излучение энергии в газовой смеси

Как было показано выше, коэффициент ослабления k_λ характеризует долю лучистой энергии, поглощенную (при отсутствии рассеяния) в элементарном слое dx . Очевидно, что если газовая смесь имеет несколько компонентов, поглощающих излучение при данной длине волны, то коэффициент ослабления смеси запишется как сумма коэффициентов ослабления всех этих компонентов. При этом спектральная поглощательная способность A_λ слоя газовой смеси толщиной l выразится в соответствии с формулой (XX-55) как

$$A_\lambda = 1 - e^{-\sum_{i=1}^n k_{\lambda i} l} = 1 - \prod_{i=1}^n e^{-k_{\lambda i} l}, \quad (a)$$

если смесь состоит из n поглощающих компонентов, и коэффициент ослабления i -того компонента $k_{\lambda i}$. Учитывая, что для каждого компонента на основании выражения (XX-55)

$$e^{-k_{\lambda i} l} = 1 - A_{\lambda i},$$

где $A_{\lambda i}$ — спектральная поглощательная способность i -того компонента, и подставляя последнее равенство в формулу (a), получим выражение спектральной поглощательной способности смеси через поглощательные способности ее компонентов в виде

$$A_\lambda = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - A_{\lambda i}). \quad (XX-64)$$

В случае смеси, содержащей два поглощающих компонента, получаем

$$A_\lambda = A_{\lambda_1} + A_{\lambda_2} - A_{\lambda_1} A_{\lambda_2}. \quad (XX-64a)$$

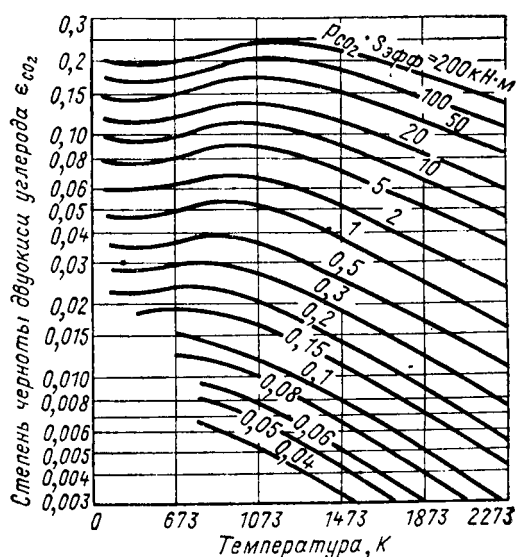
Очевидно, что если речь идет о «сером» газе, выражения (XX-64) и (XX-64 a) справедливы не только для спектральных, но и для интегральных значений поглощательной способности, а также для интегральных значений степени черноты. В современных инженерных расчетах обычно принимают, что эти формулы справедливы и для реальных газов.

Как было указано выше, в практике работы металлургических печей наиболее распространенными трехатомными газами являются углекислый газ CO_2 и водя-

ной пар H_2O , а в печах цветной металлургии, кроме того, и сернистый ангидрид SO_2 .

Экспериментальные исследования показали, что излучение CO_2 и SO_2 подчиняется закону Бера, т. е. их степень черноты зависит от температуры и от произведения парциального давления на длину пути луча. Что же касается водяного пара, то его излучение не подчиняется

Рис. 141. Интегральная степень черноты газовой смеси двуокиси углерода



закону Бера — влияние парциального давления в этом случае сильнее, чем влияние длины пути луча.

На рис. 141 — 143 показана зависимость интегральной степени черноты соответственно CO_2 , SO_2 и H_2O от температуры и от произведения парциального давления на длину пути луча¹. При этом последний график дает условные значения степени черноты H_2O , которые необходимо умножить на поправку, учитывающую отклонения от закона Бера. Величина этой поправки показана на рис. 144.

Как видно из этих графиков, интегральная степень черноты любого из рассматриваемых газов при достаточно высоких температурах уменьшается по мере повышения

¹ В более подробном виде, удобном для расчетов, эти графики приведены в справочнике.

температуры газа. Это означает, что лучеиспускательная способность газа пропорциональна температуре не в четвертой степени, как для серого тела, а в степени, меньшей четырех.

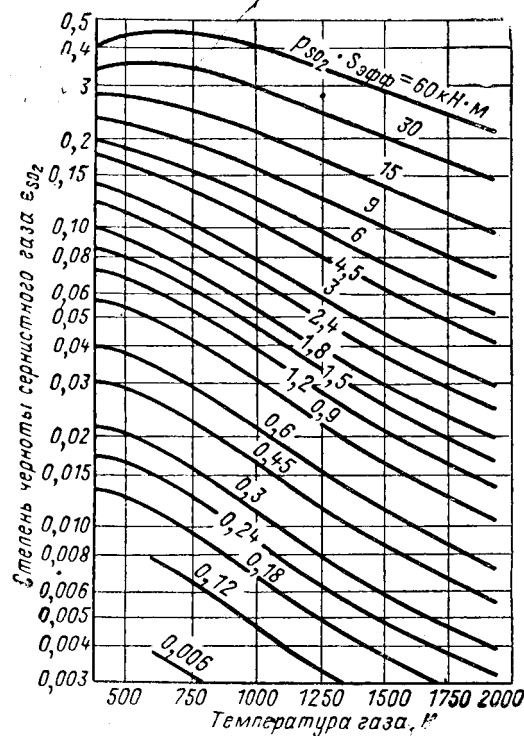


Рис. 142. Интегральная степень черноты сернистого газа

Интегральную степень черноты смеси этих газов определяют в соответствии с формулами (XX-64) и (XX-64 а); при этом произведениями значений степени черноты компонентов как величинами малыми обычно пренебрегают, т. е.

$$\epsilon_r \approx \epsilon_{CO_2} + \epsilon_{SO_2} + \xi \epsilon_{H_2O}^* \quad (XX-65)$$

Приведенная на графиках величина $S_{эфф}$ носит название эффективной длины пути луча и учитывает специфическую форму излучающего газового объема (все пре-

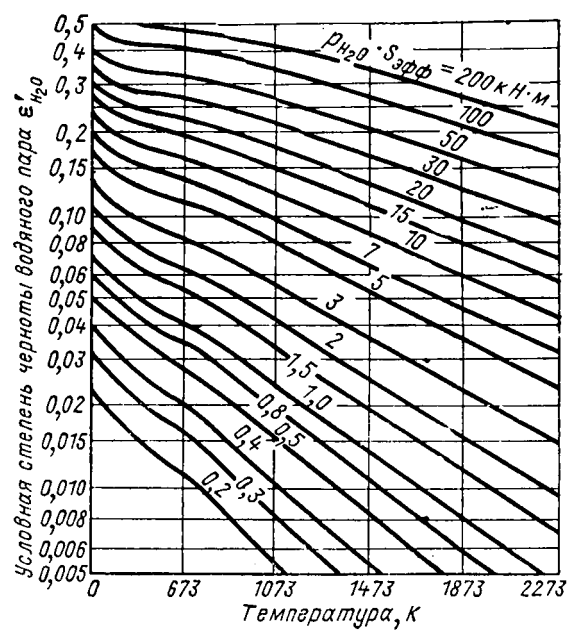


Рис. 143. Условная интегральная степень черноты водяного пара

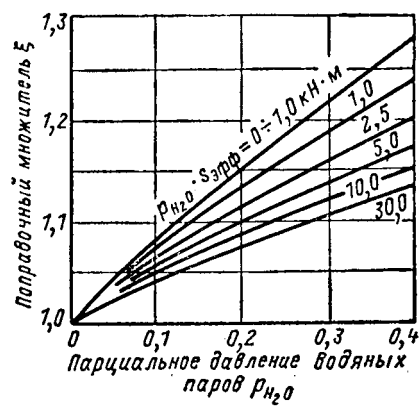


Рис. 144. Поправочный множитель для степени черноты водяного пара

дыдущие теоретические рассуждения относились к плоскому газовому слою). Нетрудно доказать, что в случае среды с малым значением произведения $k_\lambda l$ (называемого оптической плотностью среды) величина $S_{\text{эфф}}$, равная радиусу полусферы, которая при прочих равных условиях излучает на центр основания такое же количество энергии, какое излучает оболочка произвольной формы на заданный элемент поверхности, определяется простым соотношением

$$S_{\text{эфф}} = 4 \frac{V}{F}, \quad (\text{XX-66})$$

где V — объем газовой среды, а F — площадь ограничивающей его поверхности.

Это выражение, однако, справедливо лишь при весьма малых значениях $k_\lambda l$. В других случаях $S_{\text{эфф}}$ зависит не только от формы газового объема, но и от оптической плотности среды. Для учета этого обстоятельства в формулу (XX-66) вводят поправочный коэффициент, который для приближенных расчетов может быть принят равным 0,9. Таким образом, эффективная длина пути луча приближенно определяется выражением

$$S_{\text{эфф}} = 3,6 \frac{V}{F}. \quad (\text{XX-66 а})$$

11. Лучистый теплообмен между газом и окружающей его замкнутой серой оболочкой

Оценим приближенно результирующий тепловой поток, который получает замкнутая серая оболочка в результате теплообмена с заключенным в нее газом. Оболочка изотермическая, с температурой T_1 . Газ будем считать селективно-серой средой. Это означает, что газ излучает энергию лишь в нескольких спектральных полосах, суммарная ширина которых равна $\Delta\lambda$, при этом излучение газа в пределах каждой полосы является серым. Примем, хотя это и не может соответствовать действительности, что температура газа во всем объеме одинакова и равна T_r .

Селективный характер газового излучения приводит к тому, что теплообмен между оболочкой и газом происходит лишь в пределах спектральных полос $\Delta\lambda$, в других областях спектра происходит лучистый теплообмен между отдельными элементами поверхности оболочки. Однако, в связи с тем, что оболочка является изотермической, результирующий тепловой поток для этого теплообмена равен нулю.

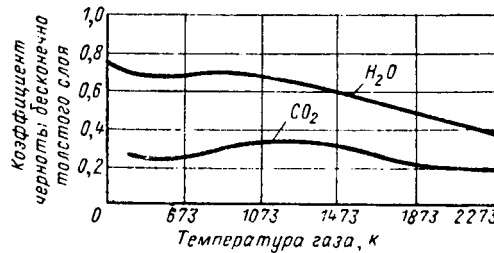
Пусть внутренняя поверхность оболочки, являющаяся одновременно и поверхностью газового объема, равна F_1 . Тогда в соответствии с выражением (XX-43) получаем величину результирующего теплового потока, получаемого оболочкой в виде

$$Q_{w1} = (E_{\text{эфф}г})_{\Delta\lambda} F_1 - (E_{\text{эфф}1})_{\Delta\lambda} F_1, \quad (a)$$

где $(E_{\text{эфф}г})_{\Delta\lambda}$ — поверхностная плотность эффективного излучения газа (газ излучает лишь в спектральном диапазоне $\Delta\lambda$);

$(E_{\text{эфф}1})_{\Delta\lambda}$ — часть поверхностной плотности эффективного излучения оболочки, которая соответствует спектральному диапазону $\Delta\lambda$.

Рис. 145. Предельные значения степени черноты углекислого газа и водяного пара в зависимости от температуры



По аналогии с формулой (XX-6), справедливой для серых тел, эффективное излучение газа в предположении, что поглощательная способность газа в спектральном диапазоне $\Delta\lambda$ равна его степени черноты, $A_{г\Delta\lambda} = \epsilon_{г\Delta\lambda}$, может быть выражено в виде

$$(E_{\text{эфф}г})_{\Delta\lambda} = \frac{1 - \epsilon_{г\Delta\lambda}}{\epsilon_{г\Delta\lambda}} q_{wг} + (E_{ог})_{\Delta\lambda}, \quad (б)$$

где $q_{wг}$ — плотность результирующего теплового потока для газа.

В связи с тем, что оболочка представляет собой серое тело, для нее $A_{1,\Delta\lambda} = \epsilon_{1,\Delta\lambda} = \epsilon_1$, и ее эффективное излучение представляется как

$$(E_{\text{эфф}1})_{\Delta\lambda} = \frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1} q_{w1} + (E_{о1})_{\Delta\lambda}. \quad (в)$$

В выражениях (б) и (в) $(E_{ог})_{\Delta\lambda}$ и $(E_{о1})_{\Delta\lambda}$ представляют собой ту часть лучеиспускательной способности абсолютно черного тела при температуре газа и оболочки, соответственно, которая заключена в спектральном диапазоне $\Delta\lambda$. Эти величины выражаются следующим образом:

$$(E_{ог})_{\Delta\lambda} = \bar{\epsilon}_г E_{ог}; \quad (E_{о1})_{\Delta\lambda} = \bar{\epsilon}_{г1} E_{о1}, \quad (г)$$

где $\bar{\epsilon}_г$ и $\bar{\epsilon}_{г1}$ — предельные, т. е. соответствующие бесконечной оптической плотности ($k_\lambda l$), значения степени черноты газа при температуре газа и при температуре оболочки. Эти величины для углекислого газа и водяного пара показаны в функции температуры на рис. 145.

Среднее значение степени черноты газа в спектральном диапазоне $\Delta\lambda$ определяется очевидным образом:

$$\varepsilon_{r\Delta\lambda} = \frac{E_r}{(E_{0r})_{\Delta\lambda}} = \frac{\varepsilon_r E_{0r}}{\varepsilon_r E_{0r}} = \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r} \quad (д)$$

Подставляя в выражение (а) формулы (б) и (в) с учетом равенств (г) и (д) и принимая во внимание, что вследствие стационарности задачи плотности результирующих потоков на оболочку и на газ равны и противоположны по знакам ($q_{w1} = -q_{wr}$), получаем

$$Q_{w1} = \frac{c_0 \left[\varepsilon_r \left(\frac{T_r}{100} \right)^4 - \varepsilon_{r1} \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \right]}{\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r} + \frac{1}{\varepsilon_1} - 1} F_1, \quad (XX-67)$$

Если принять, что газ является серым телом, то, очевидно, $\varepsilon_{r1} = 1$, $\varepsilon_r = 1$, и выражение (XX-67) сводится к известной формуле Нуссельта для теплообмена серого газа с серой оболочкой:

$$Q_{w1} = \frac{c_0 \left[\left(\frac{T_r}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \right]}{\frac{1}{\varepsilon_r} + \frac{1}{\varepsilon_1} - 1} F_1, \quad (XX-68)$$

Формулы (XX-67) и (XX-68) можно использовать для расчета лучистого теплообмена между газом и рекуперативными трубами, либо регенеративной насадкой.

12. Лучистый теплообмен в замкнутой системе, включающей две поверхности, из которых одна адиабатная, разделенные серым газом

Рассмотрим теплообмен излучением в замкнутой системе, изображенной на рис. 136, в (поверхность 1 — невогнутая), в случае, когда между поверхностями заключен серый газ, имеющий постоянную по всему объему температуру T_r . При этом поверхность 2 будем считать адиабатной, т. е. потери тепла через эту поверхность (результирующий тепловой поток Q_{w2}) равны нулю. Эта схема представляет собой известное приближение для случая нагрева материала в печи непрерывного действия. Поверхность 2 представляет собой кладку, потери через которую малы, а кроме того, частично компенсируются конвективной теплоотдачей от печных газов. Поверхность 1 есть поверхность нагреваемого материала.

Задача заключается в определении результирующего теплового потока на поверхности 1, т. е. величины Q_{w1} ,

если известна ее температура T_1 , постоянная по этой поверхности.

В соответствии с формулой (XX-43) результирующий тепловой поток на поверхности 1 может быть выражен через эффективное излучение газа и обеих поверхностей системы следующим образом

$$Q_{w1} = Q_{эффг} + Q_{эфф2} \varphi_{21} D_r - Q_{эфф1}. \quad (a)$$

Первое слагаемое в правой части, представляющее собой эффективное излучение газа, равно его собственному излучению, так как отражательная способность газа равна нулю. По той же причине пропускательная способность газа, фигурирующая во втором слагаемом выражается через его поглощательную способность как

$$D_r = 1 - A_r.$$

Так как газ серый, то

$$D_r = 1 - \varepsilon_r.$$

С учетом этих обстоятельств выражение (a) принимает вид

$$Q_{w1} = \varepsilon_r c_0 \left(\frac{T_r}{100} \right)^4 F_1 + Q_{эфф2} \varphi_{21} (1 - \varepsilon_r) - Q_{эфф1}. \quad (б)$$

На основании формулы (XX-6), учитывая, что $A_1 = \varepsilon_1$, представим эффективное излучение поверхности 1 в виде

$$Q_{эфф1} = \frac{1 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} Q_{w1} + c_0 \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 F_1. \quad (в)$$

Выразить таким же образом эффективное излучение поверхности 2 невозможно так как неизвестна ее температура. Однако $Q_{эфф2}$ можно найти, воспользовавшись тем обстоятельством, что поверхность 2 адиабатная, а потому результирующий поток на ней равен нулю. Действительно, по определению (XX-5)

$$Q_{w2} = Q_{пад2} - Q_{эфф2},$$

а так как $Q_{w2} = 0$, получаем

$$Q_{эфф2} = Q_{пад2}.$$

В свою очередь поток, падающий на поверхность 2, может быть выражен через излучение газа, эффективное излучение поверхности 1, ослабленное при прохождении через газ, и эффективное излучение самой вогнутой поверхности 2, также ослабленное в результате прохождения через газ:

$$Q_{\text{эфф2}} = Q_{\text{пад2}} = \varepsilon_r c_0 \left(\frac{T_r}{100} \right)^4 + Q_{\text{эфф1}} \varphi_{12} (1 - \varepsilon_r) + Q_{\text{эфф2}} \varphi_{22} (1 - \varepsilon_r),$$

откуда, учитывая, что для рассматриваемой системы $\varphi_{12} = 1$ и $\varphi_{22} = 1 - \varphi_{21}$, получаем

$$Q_{\text{эфф2}} = \frac{\varepsilon_r c_0 \left(\frac{T_r}{100} \right)^4 + Q_{\text{эфф1}} (1 - \varepsilon_r)}{1 - (1 - \varphi_{21}) (1 - \varepsilon_r)}. \quad (r)$$

Подставляя теперь выражения (в) и (г) в уравнение (б) и решив это уравнение относительно Q_{w1} , получим после ряда простых алгебраических преобразований (учитывая, что $\varphi_{21} = \frac{F_1}{F_2}$)

$$Q_{w1} = \varepsilon_1 \varepsilon_r c_0 \frac{\varphi_{21} (1 - \varepsilon_r) + 1}{\varphi_{21} (1 - \varepsilon_r) [1 - (1 - \varepsilon_1) (1 - \varepsilon_r)] + \varepsilon_r} \left[\left(\frac{T_r}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \right] F_1, \quad (XX-69)$$

или
$$Q_{w1} = c_{\text{пр}} \left[\left(\frac{T_r}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_1}{100} \right)^4 \right] F_1. \quad (XX-69 \text{ а})$$

Приведенный коэффициент излучения $c_{\text{пр}}$ для рассматриваемой системы выражается как

$$c_{\text{пр}} = \varepsilon_1 \varepsilon_r c_0 \frac{\varphi_{21} (1 - \varepsilon_r) + 1}{\varphi_{21} (1 - \varepsilon_r) [1 - (1 - \varepsilon_1) (1 - \varepsilon_r)] + \varepsilon_r}. \quad (XX-70)$$

Формула (XX-69), носящая имя В. Н. Тимофеева, широко используется для расчетов процесса теплообмена в металлургических печах.

Следует, однако, иметь в виду, что эта формула отнюдь не является точной, а расчеты, основанные на ней, носят характер первого приближения. Действительно формула В. Н. Тимофеева получена при таких грубых допущениях, как предположения об изотермичности газа и поверхности F_1 , о равенстве интегральных значений степени черноты и поглощательной способности газа и др. Кроме того, описанная выше методика нахождения степени черноты газа также является приближенной.

13. Коэффициент теплоотдачи лучеиспусканием

Во всех случаях теплообмена лучеиспусканием, результирующий поток тепла, получаемый поверхностью с температурой T_w в результате теплообмена с излуча-

телом (твердым или газообразным), имеющим температуру T_0 , может быть представлен в виде

$$Q_w = c_{\text{пр}} \left[\left(\frac{T_0}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_w}{100} \right)^4 \right] F. \quad (\text{а})$$

В ряде случаев (о которых речь пойдет ниже) удобно лучистый теплообмен описывать формально таким же образом, как и конвективную теплоотдачу, т. е. в виде формулы Ньютона (XVIII-1):

$$Q_w = \alpha_{\text{л}} (T_0 - T_w) F, \quad (\text{б})$$

где $\alpha_{\text{л}}$ — коэффициент теплоотдачи лучеиспусканием.

Сопоставляя выражения (а) и (б), найдем

$$\alpha_{\text{л}} = c_{\text{пр}} \frac{\left(\frac{T_0}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_w}{100} \right)^4}{T_0 - T_w}. \quad (\text{XX-71})$$

Введение понятия коэффициента теплоотдачи лучеиспусканием удобно для приближенного решения задач нестационарной теплопроводности в случае, когда теплообмен поверхности тела с окружающей средой является лучистым теплообменом. Действительно, при этом оказывается возможным формально записать граничные условия третьего рода так же, как это делается в случае конвективной теплоотдачи на поверхности т. е. в виде уравнения (XVI-8). Однако следует учесть, что такая замена является чисто формальной. В действительности результирующий лучистый тепловой поток на поверхности тела пропорционален разности четвертых степеней температур среды и поверхности, а не разности первых степеней, как в случае конвективной теплоотдачи. Таким образом, задача нестационарной теплопроводности и при описании внешнего лучистого теплообмена с помощью выражения (б) остается нелинейной, как это видно из формулы (XX-71) для коэффициента теплоотдачи лучеиспусканием, $\alpha_{\text{л}}$ зависит от температуры поверхности T_w (неизвестной величины в этих задачах) приблизительно в третьей степени, возрастая при увеличении этой температуры.

Понятие коэффициента теплоотдачи лучеиспусканием используется также для приближенного описания сложного теплообмена, т. е. совместного теплообмена лучеиспусканием и конвекцией. В этом случае тепловой поток на поверхности тела можно записать в виде

$$Q_{w\Sigma} = Q_{wk} + Q_{wl} = (\alpha_k + \alpha_l)(T_0 - T_w)F,$$

где Q_{wk} — конвективный тепловой поток на поверхности;

α_k — коэффициент конвективной теплоотдачи;
 Q_{wl} — лучистый тепловой поток на поверхности (результатирующий);

α_l — коэффициент теплоотдачи лучеиспусканием, определяемый выражением (XX-71).

Г л а в а XX I

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

До сих пор при рассмотрении различных процессов тепло- и массообмена, использовались, главным образом, аналитические (хотя часто и приближенные) методы. Однако, далеко не все задачи тепло- и массообмена могут быть решены с помощью этих методов. Более того, встречающиеся на практике процессы тепло- и массообмена протекают, как правило, в такой сложной обстановке, что во многих случаях их аналитическое (и даже численное, с помощью современной вычислительной техники) исследование представляется чрезвычайно сложным, либо в настоящее время вообще невозможным.

Единственным выходом в такой ситуации является экспериментальное исследование соответствующих процессов. Однако первичные результаты экспериментального исследования имеют ограниченную ценность, так как они, строго говоря, справедливы лишь для тех конкретных условий, в которых проводился данный эксперимент. Теория подобия позволяет обобщить результаты эксперимента, а также, что не менее важно, определить ту совокупность явлений, для которой это обобщение справедливо.

Что касается второй из указанных задач, то выше (см. разд. второй, гл. V) было показано, что результаты единичного эксперимента могут быть распространены на группу подобных явлений, т. е. явлений, характеризующихся геометрическим подобием, подобием условий однозначности и равенством одноименных кри-

териев (определяющих), составленных из величин, входящих в условия однозначности.

Теория подобия, кроме того, позволяет путем анализа системы уравнений, описывающих явление, получить безразмерные критерии, которые необходимо использовать при обработке результатов единичного эксперимента с целью их обобщения на всю группу подобных явлений.

Критерии из дифференциальных уравнений можно определить различными методами, наиболее распространенным из которых является метод масштабных преобразований (см. разд. второй гл. V). Именно этим методом воспользуемся ниже при рассмотрении некоторых процессов тепло- и массообмена средствами теории подобия.

Изучая в предыдущих главах этого раздела процессы переноса тепла в твердых телах и процессы конвективного тепло-и массообмена аналитическими методами, каждый раз были получены окончательные расчетные выражения в виде формул, содержащих лишь безразмерные величины, т. е. критерии. Покажем теперь, каким образом с помощью теории подобия можно, не решая исходных уравнений, найти принципиальный вид этих формул, т. е. набор критериев, который должен в них использоваться. С этой целью рассмотрим в качестве примеров процесс нестационарной теплопроводности для тела произвольной формы при граничных условиях третьего рода без внутренних источников тепла и процессы конвективного тепло-и массообмена при движении несжимаемой жидкости вдоль твердой поверхности произвольной формы.

1. Нестационарное температурное поле в твердом теле произвольной формы без внутренних источников тепла при граничных условиях третьего рода

Процесс переноса тепла в рассматриваемом случае описывается дифференциальным уравнением теплопроводности (XVI-3) в виде (считаем, что $\lambda = \text{const}$)

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T, \quad (a)$$

Для того чтобы это уравнение имело единственное решение, должны быть заданы условия однозначности,

которые включают в себя форму и размеры тела, краевые условия в виде

$$\left. \begin{aligned} T(x, y, z, 0) &= T_n \text{ (начальное условие)} \\ -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w &= \alpha (T_0 - T_w) \text{ (граничное условие),} \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

где n — координата, отсчитываемая по нормали и поверхности тела.

Индекс w означает, что данная величина берется на поверхности тела. Кроме этого в условия однозначности входят все параметры задачи, т. е. все постоянные величины, фигурирующие в уравнении (а) и в краевых условиях (б), а именно теплофизические параметры тела a и λ , коэффициент теплоотдачи α , начальная температура тела T_n и температура окружающей среды T_0 .

Таким образом, для тел одной и той же геометрической формы, которые можно характеризовать одним характерным размером l_0 , решение поставленной задачи, т. е. зависимость температуры от всех аргументов и параметров, должно иметь вид

$$T = T(x, y, z, t, l_0, a, \lambda, \beta, T_n, T_0).$$

Сопоставляя это выражение с решениями, которые получены ранее (XVI-42), легко заметить насколько облегчается описание процесса при использовании безразмерных величин (критериев).

Для упрощения последующих операций введем избыточную температуру Φ , определив ее, как и ранее, следующим образом:

$$\Phi = T_0 - T,$$

тогда математическая формулировка задачи (а), (б) примет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = a \nabla^2 \Phi; \quad (в)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, y, z, 0) &= T_0 - T_n = \Phi_n; \\ \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w &= \alpha \Phi_w, \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

где

$$\Phi_w = T_0 - T_w.$$

Воспользуемся теперь методом масштабных преобразований для приведения уравнения (в) и краевых условий (г) к безразмерному виду. В качестве масшта-

бов приведения используем следующие величины: масштаб избыточной температуры — начальное значение этой величины ϑ_n ; линейный масштаб — характерный размер тела l_0 ; в связи с тем, что в рассматриваемой задаче отсутствует характерное значение времени (время изменяется от 0 до ∞), в качестве масштаба выбираем величину $t_0 = \frac{l_0^2}{a}$, имеющую размерность времени.

Таким образом, безразмерные переменные принимают вид

$$X = \frac{x}{l_0}; Y = \frac{y}{l_0}; Z = \frac{z}{l_0}; N = \frac{n}{l_0};$$

$$T = \frac{t}{t_0} = \frac{at}{l_0^2} = Fo; \quad \theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_n}.$$

Как видно, полученное безразмерное время представляет собой критерий Фурье, который именно в таком качестве фигурировал в аналитических решениях задач нестационарной теплопроводности (см. гл XVI).

Выражая теперь размерные переменные через безразмерные и масштабы приведения

$$x = l_0 X; y = l_0 Y; z = l_0 Z; n = l_0 N;$$

$$t = \frac{l_0^2}{a} Fo; \quad \vartheta = \vartheta_n \theta,$$

и подставляя эти выражения в уравнение (в) и краевые условия (г), получим

$$\frac{a\vartheta_n}{l_0^2} \frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{a\vartheta_n}{l_0^2} \nabla^2 \theta;$$

$$\vartheta_n \theta(X, Y, Z, 0) = \vartheta_n;$$

$$\lambda \frac{\vartheta_n}{l_0} \left(\frac{\partial \theta}{\partial N} \right)_w = \alpha \vartheta_n \theta_w,$$

откуда после сокращений будем иметь

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \nabla^2 \theta; \quad (XXI-1)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta(X, Y, Z, 0) &= 1; \\ \left(\frac{\partial \theta}{\partial N} \right)_w &= Bi, \end{aligned} \right\} \quad (XXI-2)$$

Критерий Био ($Bi = \alpha l_0 / \lambda$) характеризует соотношение интенсивности процесса внешнего теплообмена окружающей среды с поверхностью тела и процесса переноса тепла внутри тела (см. гл. XVI).

Уравнение (XXI-1) и краевые условия (XXI-2) составляют математическую формулировку задачи в безразмерном виде. В соответствии с этой формулировкой решение задачи (как аналитическое, так и экспериментальное) в критериальной форме должно иметь вид зависимости безразмерной избыточной температуры θ , называемой иногда температурным критерием (определяемый критерий) от безразмерных переменных X, Y, Z, Fo и от безразмерного параметра Bi (определяющий критерий), т. е.

$$\theta = \theta(X, Y, Z, Fo, Bi).$$

Именно в таком виде было получено выше аналитическое решение задачи нестационарной теплопроводности с граничными условиями третьего рода.

Таким образом, процессы нестационарной теплопроводности при этих граничных условиях являются подобными, если они протекают в геометрически подобных телах при равенстве критериев Био. Это означает, что значения безразмерной температуры для всех таких тел будут одинаковыми в сходственных точках с равными значениями безразмерных координат X, Y, Z в сходственные моменты времени, определяемые равенством значений безразмерного времени, т. е. критерия Фурье Fo .

2. Конвективный тепло- и массообмен при вынужденном движении несжимаемой жидкости вдоль твердой поверхности

Рассмотрим теперь с помощью теории подобия процесс конвективной теплоотдачи, протекающий в стационарных условиях при вынужденном движении жидкости вблизи твердой поверхности произвольной формы. При этом будем считать, что динамическая задача (отыскание распределения скоростей и давлений в потоке) заранее решена. Это означает, что динамическая задача является независимой от тепловой; последнее для несжимаемой жидкости подразумевает постоянство вязкости среды, т. е. ее независимость от температуры.

Как и ранее, будем полагать, что выделение тепла за счет трения пренебрежимо мало, а все теплофизические параметры жидкости постоянны, т. е. не зависят от температуры.

Очевидно, что в результате решения этой задачи должно быть найдено распределение температуры в потоке жидкости $T(x, y, z)$ и значение коэффициента теплоотдачи α , которое в общем случае изменяется по поверхности, т. е. $\alpha = \alpha(x, y, z)$, где координаты относятся, разумеется, к поверхности тела.

Заданными величинами являются значения температуры на поверхности T_w и в жидкости вдали от поверхности T_0 , а также теплофизические параметры жидкости, т. е. коэффициенты теплопроводности λ и температуропроводности a . В связи с тем, что динамическая задача считается решенной, компоненты вектора скорости w_x, w_y, w_z также являются известными функциями координат.

В соответствии с принятыми допущениями математическая формулировка задачи включает уравнение энергии

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} + w_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \nabla^2 T, \quad (a)$$

уравнение теплоотдачи

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0} = \alpha (T_0 - T_w) \quad (б)$$

и граничные условия

$$\left. \begin{aligned} T(0) &= T_w, \\ T(\infty) &= T_0. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Заметим, что второе из граничных условий (в) может задаваться не только на бесконечном удалении от поверхности, но и на границе теплового пограничного слоя δ_t .

Как это следует из приведенной математической формулировки задачи, для поверхности с характерным геометрическим размером l_0 при заданном характере движения жидкости, т. е. при заданных распределениях компонент вектора скорости w_x, w_y и w_z , температура жидкости выражается как функция следующих независимых переменных и параметров задачи

$$T = T(x, y, z, w_x, w_y, w_z, l_0, T_0, T_w, a, \lambda).$$

От тех же параметров зависит и коэффициент теплоотдачи, однако в этом случае координаты берутся на поверхности твердого тела:

$$\alpha = \alpha(x, y, z, w_x, w_y, w_z, l_0, T_0, T_w, a, \lambda).$$

Так же, как и ранее, введем избыточную температуру ϑ , определив ее следующим образом:

$$\vartheta = T - T_w.$$

Тогда математическая формулировка задачи примет вид

$$w_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w_y \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + w_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = a \nabla^2 \vartheta; \quad (г)$$

$$-\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial n} \right)_{n=0} = \alpha \vartheta_0, \quad (д)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \vartheta_0 &= T_0 - T_w; \\ \vartheta(0) &= 0, \\ \vartheta(\infty) &= \vartheta_0. \end{aligned} \right\} \quad (е)$$

Для приведения этих выражений к безразмерному виду используем в качестве масштабов приведения величины, входящие в условия однозначности, а именно: в качестве линейного масштаба — характерный размер l_0 , в качестве масштаба скорости — ее значение вдали от поверхности (за пределами гидродинамического пограничного слоя) w_0 , в качестве масштаба температуры — температурный напор $\vartheta_0 = T_0 - T_w$.

При этом безразмерные переменные выразятся следующим образом:

$$W_x = \frac{w_x}{w_0}; \quad W_y = \frac{w_y}{w_0}; \quad W_z = \frac{w_z}{w_0};$$

$$X = \frac{x}{l_0}; \quad Y = \frac{y}{l_0}; \quad Z = \frac{z}{l_0}; \quad N = \frac{n}{l_0}; \quad \theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0}.$$

Выражая размерные переменные через безразмерные и масштабы приведения и подставляя их в уравнения (г) и (д), а также в граничные условия (е), получим после сокращений

$$\frac{w_0 l_0}{a} \left(W_x \frac{\partial \theta}{\partial X} + W_y \frac{\partial \theta}{\partial Y} + W_z \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right) = \nabla^2 \theta; \quad (XXI-3)$$

$$-\left(\frac{\partial \theta}{\partial N} \right)_{N=0} = \frac{\alpha l_0}{\lambda}; \quad (XXI-4)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta(0) &= 0; \\ \theta(\infty) &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (XXI-5)$$

В этих уравнениях безразмерная величина $\frac{w_0 l_0}{a} = Pe$ носит название критерия Пекле. Легко видеть, что критерий Пекле представляет собой произведение критериев Рейнольдса и Прандтля. Действительно:

$$Pe = \frac{w_0 l_0}{\nu} \frac{\nu}{a} = Re Pr.$$

Безразмерная величина в уравнении теплоотдачи

$$\frac{\alpha l_0}{\lambda} = Nu$$

представляет собой критерий Нуссельта, т. е. безразмерный коэффициент теплоотдачи.

Таким образом, в соответствии с математической формулировкой задачи в безразмерном виде решение ее должно иметь следующую форму

$$\theta = \theta(X, Y, Z, Re, Pr); \quad (XXI-6)$$

$$Nu = Nu(X, Y, Z, Re, Pr), \quad (XXI-7)$$

так как распределение скоростей в геометрически подобных потоках определяется величиной критерия Рейнольдса (см. разд. второй гл. V).

Если речь идет об определении среднего по поверхности коэффициента теплоотдачи, то безразмерные координаты X, Y, Z исключаются из формулы (XXI-7) и она принимает вид

$$Nu = Nu(Re, Pr).$$

Именно в таком виде были получены выше приближенные аналитические решения задач конвективной теплоотдачи. Такой же вид должны иметь эмпирические формулы для конвективной теплоотдачи, получаемые путем обработки экспериментальных данных.

Заметим, наконец, что, как это следует из полученных результатов, подобие процессов конвективного теплообмена, т. е. равенство значений безразмерной избыточной температуры θ в сходственных точках потока жидкости и значений безразмерного коэффициента теплоотдачи Nu в сходственных точках поверхности, осуществляется для геометрически подобных систем при выполнении условий

$$Re = \text{idem}; \quad Pr = \text{idem}.$$

Аналогичным образом можно рассмотреть с помощью теории подобия процессы конвективного массо-

обмена при движении несжимаемой жидкости вблизи твердой поверхности. В результате такого анализа легко показать, что подобие этих процессов для геометрически подобных систем осуществляется при выполнении условий

$$Re = \text{idem}; \quad Sc = \text{idem},$$

а формулы для безразмерного коэффициента теплоотдачи (критерия Шервуда Sh) должны иметь вид

$$Sh = Sh(Re, Sc),$$

т. е. такую же форму, какая была получена выше в результате аналитического исследования этих процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Казанцев Е. И. Промышленные печи. М., «Металлургия», 1964. 451 с. с ил.
2. Кутателадзе С. С., Боришанский В. М. Справочник по теплопередаче. Л.-М., Госэнергоиздат, 1958. 414 с. с ил.
3. Гухман А. А. Применение теории подобия к исследованию процессов тепло- и массообмена. М., «Высшая школа», 1967. 303 с. с ил.
4. Исаченко В. П., Осипова В. А., Сукомел А. С. Теплопередача. М., «Энергия», 1969. 439 с. с ил.

Раздел пятый

ТОПЛИВО И ЕГО ГОРЕНИЕ

Глава XXII

ХАРАКТЕРИСТИКА ТОПЛИВА

1. Общие сведения о топливе

Народное хозяйство использует энергию в огромном количестве. По потреблению энергии можно судить об уровне развития страны. Основным источником энергии для металлургической промышленности является топливо.

Под топливом понимают вещество, горение которого сопровождается выделением значительного количества тепла и которое отвечает следующим требованиям:

1. Запасы должны быть достаточными для того, чтобы их было экономически выгодно добывать и использовать.

2. Продукты сгорания должны легко удаляться из зоны горения. Лучшей является газообразная форма продуктов сгорания.

3. Продукты сгорания должны быть безвредны для окружающего органического мира и тепловых устройств, в которых происходит сжигание топлива.

4. Процесс горения должен быть легко управляем. Этим требованиям отвечают органические соединения, содержащие углерод, водород и их соединения. В природе они встречаются в виде: древесины, торфа, сланца, угля, нефти, горючих газов и пр.

Природные богатства СССР, в том числе энергетические, очень велики. За послевоенные годы значительно возросли разведанные запасы нефти. Открыты мощные месторождения природного газа. Директивами XXIV съезда КПСС предусматривается дальнейшее увеличе-

ние добычи нефти, угля и природного газа. В 1975 г. будет добыто угля 695 млн. т, нефти 496 млн. т, природного газа 320 млрд. м³. В табл. 1 приводится структура топливного баланса и ее изменение по годам (по данным добычи топлива).

Таблица 1

Структура топливного баланса СССР
(в пересчете на условное топливо)

Топливо	1913		1940		1960		1970	
	млн. т	%	млн. т	%	млн. т	%	млн. т	%
Уголь	23,1	48	140,5	59,1	373	53,9	451	36,1
Нефть	14,7	30,5	44,5	18,7	211	30,5	504	40,4
Природный газ	—	—	4,4	1,9	55	7,9	236	18,9
Прочие виды .	10,4	21,5	48,3	20,3	54	7,7	58	4,6

Как видно, за послевоенные годы значительно возросла роль газа и нефти. К 1975 г. предполагают поднять добычу нефти до 705 млн. т и газа до 380 млн. т условного топлива. К 1980 г. природный газ займет первое место в топливном балансе страны.

Таблица 2

Общая классификация топлива

Агрегатное состояние	Происхождение	
	Естественное	Искусственное
Твердое	Дрова, торф, бурый уголь, каменный уголь, антрациты, горючие сланцы	Древесный уголь, кокс, термоантрацит, брикеты, угольная пыль и др.
Жидкое	Нефть	Бензин, керосин, мазут, спирты, масла, коллоидное топливо, смолы и др. Жидкие продукты переработки нефти, твердых топлив и газообразных топлив
Газообразное	Природный газ	Коксовый, доменный, генераторный, водяной, подземной газификации и другие газы

Топливо в естественном виде не всегда удовлетворяет требованиям предъявляемым к нему различными отраслями техники. Поэтому топливо часто подвергают предварительной переработке, цель которой улучшение качества топлива и изменение его агрегатного состояния. Полученное в результате переработки топливо называется искусственным.

В табл. 2 приводится классификация топлив, в основу которой положено агрегатное состояние и происхождение топлив.

Качество топлива и поведение его при сжигании определяется: 1) химическим составом; 2) теплотой сгорания; 3) отношением к нагреванию.

Рассмотрим последовательно эти основные характеристики топлива.

2. Химический состав топлива

Основными составляющими топлива органического происхождения являются углерод и водород. Различные виды топлив содержат эти горючие в виде различных соединений. Кроме них в состав топлива входят кислород, азот, сера, зола и влага. Балластом в составе топлива являются: минеральные примеси в виде золы (А), влага топлива, азот, уголекислота и другие продукты полного окисления горючих элементов.

Полный химический анализ отвечает на вопрос, какие соединения и в каком количестве содержатся в данном топливе. Такой анализ, как правило, применяется только для определения состава газообразного топлива. Для этой цели широко применяются ручные газоанализаторы химического поглощения и электрические газоанализаторы. В последнее время получил распространение хроматографический метод анализа.

Принцип действия газоанализаторов химического поглощения заключается в последовательном поглощении отдельных компонентов газа различными поглотителями.

С помощью электрических газоанализаторов определяют содержание одного или двух компонентов газа (например, CO_2 или $\text{CO} + \text{H}_2$), используя различие в теплопроводности составных частей газа. Электрические газоанализаторы применяются чаще для непрерывного определения состава продуктов сгорания. Хроматогра-

фический метод основан на различной сорбируемости компонентов газа. В результате анализа можно с достаточной точностью определить состав сухого газа. Содержание влаги в газообразном топливе определяют отдельно и выражают отношением массы воды к единице объема газа (г/м^3). Для пересчета известного состава сухого газа на состав влажного газа достаточно произвести следующие вычисления:

Обозначим содержание влаги в 1 м^3 газа — $W \text{ г/м}^3$. Объем 1 кг водяного пара при температуре 273° К (0° С) и давлении 101 кН/м^2 (760 мм рт. ст.)

$$V = \frac{22,42}{18} = 1,242 \text{ м}^3/\text{кг},$$

где $22,42$ — объем 1 кмоль воды, м^3 ,

18 — масса 1 кмоль воды, кг .

Объем водяного пара в одном м^3 газа составит

$$\frac{1,242 W}{1000} \text{ м}^3/\text{м}^3.$$

Все расчеты по газообразному топливу для удобства проводятся на 100 м^3 газа. Объем водяного пара в 100 м^3 сухого газа будет равен

$$\frac{1,242 W \cdot 100}{1000} = 0,1242 W \text{ м}^3.$$

Таким образом, состав влажного газа определим из следующих выражений:

$$\text{CO}_2^{\text{вл}} = \text{CO}_2^{\text{с}} \frac{100}{100 + 0,1242 W} \cdot$$

$$\text{CO}^{\text{вл}} = \text{CO}^{\text{с}} \frac{100}{100 + 0,1242 W} \cdot$$

.....

$$\text{H}_2\text{O}^{\text{вл}} = \frac{0,1242 W \cdot 100}{100 + 0,1242 W} \cdot$$

Итого . . . 100% влажного газа.

Здесь $\text{CO}_2^{\text{с}}$, $\text{CO}^{\text{с}}$ — компоненты состава сухого газа, %, $\text{CO}_2^{\text{вл}}$, $\text{CO}^{\text{вл}}$, $\text{H}_2\text{O}^{\text{вл}}$ — компоненты состава влажного газа, %.

Определение химического состава жидких топлив сложно, поэтому ограничиваются нахождением их плотности, по которой судят о свойствах топлива.

При получении характеристики твердого топлива производят технический и элементарный анализы. Технический анализ дает возможность определить содержание в топливе летучих, влаги и золы. При элементарном анализе определяют содержание углерода, водорода, кислорода, азота и серы; дополнительно определяют содержание минеральных составляющих — золы A и влаги W в процентах по массе. Как первый, так и второй анализы не дают основания судить о том, в каких соединениях присутствуют найденные элементы и каковы свойства топлива, зависящие от этих соединений. Для целого ряда задач, например для суждения о поведении топлива в топке или газогенераторе, технический анализ необходим, в то время как элементарный анализ для такой характеристики топлива недостаточен.

Результаты элементарного анализа топлива для удобства представляют в виде следующей схемы (табл. 3).

Таблица 3

Схема элементарного анализа

Индекс	Состав						
	C	H	O	N	S	A	W
O	Органическая масса						
Г	Горючая масса						
A	Сухая масса						
P	Рабочее топливо						

Под серой здесь понимают только «горючую серу», т. е. ту серу, которая входит в органические соединения и сгорает в топке. Соединения серы типа сульфата являются «негорючими» и входят в состав золы. Как видно из приведенной схемы, в топливе различают органическую массу, горючую массу, сухую массу и рабочее топливо.

При записи результатов анализа пользуются указанными индексами (табл. 3), например C^o — содержание углерода в органической массе; C^r — содержание углерода в горючей массе; S^c — содержание серы в сухой

массе и W^p — содержание влаги в рабочем топливе. Естественно, что зола A может быть дана только в составе сухой массы или в рабочем топливе, а влага W — только в рабочем топливе.

Таким образом, состав рабочего топлива записывают так:

$$C^p + H^p + O^p + N^p + S^p + A^p + W^p = 100\%.$$

Пересчет состава топлива с любой массы на рабочее топливо выполняется по одному из следующих выражений:

$$X^p = X^c \frac{100 - W^p}{100};$$

$$X^p = X^r \frac{100 - (W^p + A^p)}{100};$$

$$X^p = X^o \frac{100 - (W^p + A^p + S^p)}{100},$$

где X^p — содержание какого-либо элемента в рабочем топливе, %;
 X^o , X^r , X^c — содержание того же элемента соответственно в органической, горючей и сухой массе, %.

Аналогичным образом производится пересчет из одной массы в другую.

Пример. Определить состав рабочего топлива по следующим данным, %: 85,0 C^o ; 4,8 H^o ; 7,0 O^o ; 3,2 N^o ; 5,0 S^r ; 10 A^c ; 2,5 W^p :

$$A^p = A^c \frac{100 - W^p}{100} = 10 \frac{100 - 2,5}{100} = 9,75\%;$$

$$S^p = S^r \frac{100 - (A^p + W^p)}{100} = 5,0 \frac{100 - (2,5 + 9,75)}{100} = 4,38\%;$$

$$N^p = N^o \frac{100 - (S^p + A^p + W^p)}{100} =$$

$$= 3,2 \frac{100 - (4,38 + 2,5 + 9,75)}{100} = 3,2 \cdot 0,8337 = 2,67\%;$$

$$O^p = 7,0 \cdot 0,8337 = 5,84\%;$$

$$H^p = 4,8 \cdot 0,8337 = 4,00\%;$$

$$C^p = 85,0 \cdot 0,8337 = 70,86\%;$$

$$W^p = 2,50\%.$$

Итого 100,00%.

Проделав все расчеты, можно получить данные по составу топлива, приведенные в табл. 4.

Таблица 4

Химический состав топлива								
Наименование массы	Составляющие, %							Всего
	С	Н	О	N	S	A	W	
Рабочее топливо	70,86	4,00	5,84	2,68	4,38	9,75	2,50	100,0
Сухая масса	73,15	4,13	6,02	2,76	3,94	10,0	—	100,0
Горючая масса	80,75	4,56	6,65	3,04	5,00	—	—	100,0
Органическая масса	85,00	4,80	7,0	3,20	—	—	—	100,0

3. Теплота сгорания топлива

В непосредственной связи с химическим составом топлива находится его теплота сгорания.

Теплотой сгорания называется то количество тепла, которое выделяется при сжигании единицы топлива (кг, м³, кмоль). Размерность теплоты сгорания — кДж/кг, кДж/м³, кДж/кмоль.

В технике различают высшую и низшую теплоту сгорания. Высшей теплотой сгорания (Q_v) называется то количество тепла, которое выделяется при сжигании единицы топлива до продуктов полного сгорания (CO_2 , H_2O , SO_2 и др.) при условии, что вся влага, образовавшаяся при горении, находится в жидком состоянии при 0°C. При конденсации и охлаждении паров воды в систему возвращается следующее количество тепла: скрытая теплота испарения 1 кг H_2O равна 2258,4 кДж; теплота охлаждения 1 кг H_2O от 100°C до 0 равна 418,68 кДж (100 ккал). Всего 2677,08 кДж.

В действительности пары воды конденсируются за пределами системы, поэтому понятие высшей теплоты сгорания имеет теоретическое значение. Для приближения к практике введено условное понятие низшей теплоты сгорания Q_n .

Под низшей теплотой сгорания понимают то количество тепла, которое выделяется при сгорании единицы топлива до продуктов полного сжигания при условии, что вода, содержащаяся в продуктах сгорания находит-

ся в виде пара, охлажденного до 20° С. В этом случае в систему возвращается количество тепла, равное

$$1,0 \cdot 2,0087 (373 - 293) = 160,7 \text{ кДж/кг},$$

где 2,0087 — теплоемкость пара, кДж/(кг·К).

Таким образом, разница между Q_v и Q_n на 1 кг воды, содержащейся в продуктах сгорания, равна

$$Q_v - Q_n = 2677,08 - 160,70 = 2516,39 \text{ кДж/кг}.$$

В продуктах сгорания содержится влага, поступившая из топлива W_1 , и вода, образовавшаяся при сгорании водорода:

$$W_2 = \frac{H_2O}{H_2} = \frac{18}{2} H = 9H.$$

Если W_1 и W_2 выразить в кг, то разность между высшей и низшей теплотой сгорания на 1 кг топлива составляет:

$$Q_v^p - Q_n^p = 2516,39 (W_1 + 9H) \text{ кДж/кг};$$

$$Q_v^p - Q_n^p = 600 (W_1 + 9H) \text{ ккал/кг}.$$

При W_1 и W_2 , выраженных в процентах (W^p , H^p):

$$Q_v^p - Q_n^p = 25,1639 (W^p + 9H^p) \approx 25 (W^p + 9H^p) \text{ кДж/кг};$$

$$Q_v^p - Q_n^p = 6 (W^p + 9H^p) \text{ ккал/кг}.$$

Теплота сгорания может быть определена двумя методами: экспериментальным или расчетным. Метод экспериментального определения теплоты сгорания заключается в непосредственном определении количества тепла, выделяющегося при сжигании определенного количества топлива.

Расчетный метод основан на суммировании теплот сгорания отдельных составляющих топлива, т. е. исходит из знания точного состава топлива и тепловых эффектов сгорания горючих составляющих топлива.

Экспериментальное определение теплоты сгорания производится в калориметрах. В качестве поглощающей тепло среды принимают воду, свойства которой хорошо изучены.

Известны два типа калориметров:

1) для твердого топлива и тяжелых сортов жидкого топлива;

2) для газообразного топлива и легких сортов жидкого топлива с температурой кипения выше 250° С.

Для определения теплоты сгорания твердого и жидкого топлива расчетным путем существует ряд эмпирических формул. Наиболее точные результаты дает формула Д. И. Менделеева:

$$Q_p^p = 0,34 C^p + 1,25 H^p + 0,11 (S^p - O^p) \text{ МДж/кг}$$

или

$$Q_p^p = 81 C^p + 300 H^p + 26 (S^p - O^p) \text{ ккал/кг.}$$

Для определения низшей теплоты сгорания формула имеет вид:

$$Q_{н}^p = 0,34 C^p + 1,03 H^p + 0,11 (S^p - O^p) - 0,025 W^p \text{ МДж/кг ;}$$

$$Q_{н}^p = 81 C^p + 246 H^p + 26 (S^p - O^p) - 6W^p \text{ ккал/кг,}$$

где C^p , H^p , S^p , O^p и W^p — данные элементарного анализа топлива, выраженные в процентах.

Теплота сгорания газообразного топлива определяется расчетным путем более точно, так как для газа известны соединения горючих элементов, входящих в состав топлива, и их теплоты сгорания.

4. Условное топливо

Каждое топливо характеризуется величиной теплоты сгорания. Для удобства планирования, учета и сравнения различных видов топлива введено понятие условного топлива.

Условным топливом называется такое топливо, теплота сгорания которого составляет 29,3 МДж/кг.

Для перевода твердого и жидкого топлива в условное используется калорийный эквивалент $\mathcal{E}_k$, равный

$$\mathcal{E}_k = \frac{Q_n}{29,3} \frac{\text{кг условного топлива}}{\text{кг рабочего топлива}},$$

где Q_n — теплота сгорания рабочего топлива, МДж/кг.

При пересчетах газообразного топлива в условное используют понятие коэффициента теплоплотности $\mathcal{E}_t$, определяемого из выражения

$$\mathcal{E}_t = \frac{Q_n}{29,3} \frac{\text{кг условного топлива}}{\text{м}^3 \text{ рабочего топлива}},$$

где Q_n — теплота сгорания рабочего (газообразного) топлива, МДж/м³.

Понятие теплоплотности может быть использовано для любого вида топлива, если теплоту сгорания от-

нести к 1 м³. Так, для дров с влажностью около 33% коэффициент теплоплотности

$$\mathcal{E}_T = 186 \frac{\text{кг условного топлива}}{\text{м}^3 \text{ рабочего топлива}}.$$

Понятие коэффициента теплоплотности имеет большое значение в определении запасов, хранения и перевозки топлив. Так, расчет $\mathcal{E}_T$ для торфа и угля показал, что при получении одного и того же количества тепла объем транспортируемого торфа должен быть почти в семь раз больше объема угля.

Чем меньше масса 1 м³ насыпного топлива, тем больше различия в величинах $\mathcal{E}_K$ и $\mathcal{E}_T$ и тем менее рентабельной является перевозка топлива. Это одна из причин, почему такие топлива, как торф и дрова, называются местными топливами. Такие топлива целесообразно использовать непосредственно вблизи мест добычи, например для производства электроэнергии, которую затем можно транспортировать на любые расстояния.

5. Отношение топлива к нагреванию

В процессе нагрева топливо претерпевает более или менее глубокие изменения. Те топлива, химический состав которых при повышении температуры не изменяется, называются теплоустойчивыми топливами (например, углерод, CO, H₂). Топлива, для которых нагрев сопровождается глубоким химическим изменением, связанным с образованием новых молекул, называются теплонеустойчивыми (топлива, содержащие высокий процент различных углеводородов).

Важнейшими факторами, влияющими на термическое разложение топлив, являются: природа углеводородов топлива, температура, давление, длительность нагревания, каталитическое действие поверхности нагрева.

На рис. 146 показано изменение свободной энергии образования углеводородов в зависимости от температуры. Кривые, представленные на рисунке, являются результатом термодинамического исследования разложения углеводородов, проведенного Френсисом и Клейшмидтом.

Из рис. 146 видно, что все углеводороды, за исключением этана и метана, при температурах выше 200°С термодинамически неустойчивы.

При повышении температуры скорость процесса разложения в большинстве случаев возрастает. При нагревании углей наблюдается следующее изменение их агрегатного состояния и состава: 1) при нагревании до

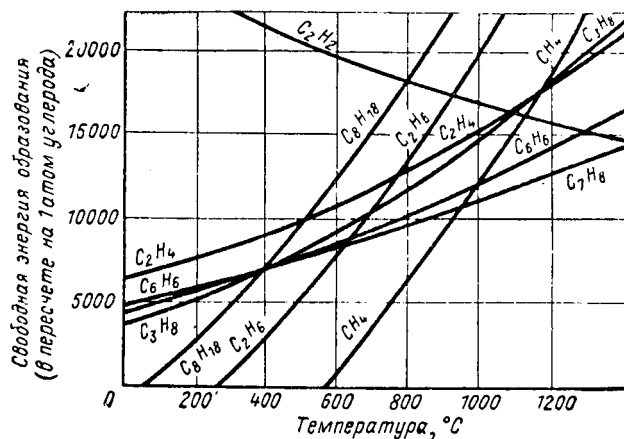


Рис. 146. Изменение свободной энергии образования углеводородов в зависимости от температуры

80—120°С удаляется влага; 2) от 200—500°С образуются продукты разложения органической массы угля: газы, смолы и полукоксы. Аналогичные изменения наблюдаются при нагревании без доступа воздуха торфа и древесины. Разложение всех топлив, содержащих углерод, водород и кислород, идет в направлении обогащения остатка (кокса) углеродом.

Таким образом, чем менее устойчиво топливо к нагреванию, тем труднее судить о нем по его первоначальному составу.

Глава XXIII ВИДЫ ТОПЛИВ

1. Твердое топливо

Все виды ископаемых твердых топлив образовались из продуктов разложения органических веществ — растений или животных. Растения при отмирании образо-

Таблица 5

Примерный состав и теплотехническая характеристика горючей массы твердого топлива

Топливо	Состав горючей массы, %					Выход летучих веществ V_f , %	Низшая теплота сгорания $Q_{н}^{МДж}$, $\frac{МДж}{кг}$	Калориметрическая температура горения $T_{кал}^{\circ K}$	$R_{атм}^{тов}$ $\frac{продуктов}{сгорания}$, %
	C^r	S^r	H^r	O^r	N^r				
Дрова	51	—	6,1	42,3	0,6	85	20,9	2250	20,5
Торф	58	0,3	6,0	33,2	2,5	70	21,9	2320	19,5
Горючий слабый	60—75	4,0—13,0	7,0—10,0	12,0—17,0	0,3—1,2	80—90	27,2—34,6	2390	16,7
Бурый уголь .	64—78	0,3—6,0	3,8—6,3	15,0—26,0	0,6—1,6	40—60	25,1—29,2	—	19,5
Каменный уголь	75—90	0,5—6,0	4,0—6,0	2,0—13,0	1,0—2,7	9—50	30,5—35,1	2400	18,7
Полумантрацит	90—94	0,5—3,0	3,0—4,0	2,0—5,0	1,0	6—9	33,4—34,3	2400	19,3
Антрацит . .	93—94	2,0—3,0	2,0	1,0—2,0	1,0	3—4	33,4	2420	20,2

вывали залежи, подвергавшиеся действию микроорганизмов. Со временем над ними нарастал слой минеральных отложений. В течение длительных геологических эпох в глубину слоев, состоявших из растений и белковых веществ погибших живых организмов, прекращалось проникновение воздуха, в них повышалось давление и температура. Начинался процесс минерализации органических соединений, сопровождавшийся глубокими химическими превращениями первоначальных соединений. Растительные вещества образовывали перегной (гумус), а вещества животного происхождения давали битумы. Постепенно удалялись летучие и одновременно в остатке повышалось содержание углерода. Этот процесс называют углефикацией или минерализацией.

Различные виды твердых топлив отличаются друг от друга по степени минерализации. Характеристика горючей массы основных видов твердого топлива приведена в табл. 5.

Влажность топлива является важной характеристикой, особенно для такого топлива, как торф, где содержание ее достигает 80%.

Наиболее простым является способ определения влажности путем высушивания навески топлива при температуре 102—105°С с последующим взвешиванием. Выход летучих определяют прокаливанием навески угля без доступа воздуха в течение определенного времени. Взвешивание навески до нагрева и после него позволяет определить количество выделившихся газообразных продуктов термического разложения. Оставшийся в тигле твердый остаток является коксом.

Каждое твердое топливо содержит то или иное количество негорючих веществ — золы. Чем ее больше, тем ниже теплота сгорания топлива. Температура плавления золы оказывает влияние на выбор устройств для сжигания топлива. Содержание золы определяется многократным прокаливанием навески топлива в открытом тигле до достижения постоянной массы (допустимое отклонение 0,001 г).

Для металлургического топлива особое значение имеет содержание серы. Образующийся при горении топлива окисел SO_2 способствует интенсивному окислению металла при его нагреве. При применении кокса в доменном производстве сера, содержащаяся в нем, переходит в состав чугуна. При нагревании металла сера

из продуктов сгорания переходит в поверхностный слой металла, значительно ухудшая его качество.

Определение теплоты сгорания топлива осуществляется экспериментально или расчетом по данным элементарного анализа.

Древесное топливо

Применение древесины в качестве топлива практически сведено к нулю. Это объясняется прежде всего ее ценностью как сырья для бумажной и химической промышленности, а также широким применением в качестве строительного материала.

Немалую роль играют и низкие теплотехнические свойства древесины: высокая влажность (для сплавных дров до 60%), значительная зольность (2%, а для сплавных дров до 6%), низкая теплота сгорания ($Q_p^p = 7100—9200$ кДж/кг).

Имеет место применение в качестве топлива древесных отходов — щепы, брикетов из опилок и т. п.

Торф

Торф — это ископаемое топливо, самое молодое по геологическому признаку. Торф можно рассматривать как продукт первой стадии разложения растительного материала. Содержание углерода в горючей массе торфа выше, чем в древесине, но ниже, чем в сланце и каменных углях.

Степень разложения торфа определяется глубиной его залегания. Различают: 1) волокнистый (в верхних горизонтах болот); 2) землистый; 3) слоистый — плотная темная масса без видимых остатков растений (низинный торф).

По способу добычи различают фрезерный торф и кусковой. Первый добывается путем измельчения верхнего слоя специальными машинами — фрезерными барабанами до размера мелкой крошки. Размельченный торф высушивается до влажности 50—55% и брикетируется. Кусковой торф добывается посредством вымывания его струей воды высокого давления. Полученная масса торфонасосом по трубам передается на поля сушки. Подсушенный торф на прессах формуется в кирпичи и дополнительно сушится до влажности, не превышающей 50%.

Стоимость добычи фрезерного торфа в 2—2,5 раза меньше добычи кускового.

Зольность торфа зависит от мест его залегания и колеблется в пределах 3—14%.

Торф используется главным образом как местное топливо на электростанциях, мелких промышленных предприятиях и для бытовых нужд, а также для получения газа в газогенераторах.

Ископаемые угли

Уголь является одним из главных видов энергетического топлива и имеет большое значение как технологическое топливо. В зависимости от стадии минерализации растительных остатков различают бурый уголь, каменный уголь и антрацит.

Бурый уголь — молодой, по внешнему виду очень похож на низинный торф, но в нем нет видимых остатков растений.

Характерными особенностями бурого угля являются: большая гигроскопичность и в связи с этим высокая влажность (до 60%), высокий выход летучих, отсутствие способности спекаться, возможность самовозгорания, низкая теплота сгорания.

Бурый уголь механически непрочен, при выветривании легко рассыпается. Бурый уголь обычно используется как местное топливо, особенно широко — в качестве энергетического топлива.

Каменный уголь — это следующая, после бурого угля, стадия превращения растительного материала. Каменный уголь характеризуется высоким содержанием углерода, пониженным содержанием водорода и кислорода, высокой прочностью и плотностью, небольшой влажностью ($W^p = 3—13\%$), пониженным по сравнению с бурым углем, выходом летучих веществ. Цвет каменного угля черный.

Каменные угли широко распространены по территории Советского Союза.

Угли классифицируются по содержанию углерода, выходу летучих и свойствам кокса.

В табл. 6 приведена классификация каменных углей Донецкого бассейна.

Выход летучих определяет характер пламени. Чем больше содержание летучих, тем длиннее пламя.

Классификация каменных углей Донецкого бассейна

Марка	Название угля	Содержание летучих, %	Теплота сгорания МДж/кг	Органическая масса, %				Характеристика коксового остатка
				С	Н	N	O	
Д	Длиннопламенный, сухой	42	31—33	76—84	4—6	1,8	10—17,5	Порошкообразный, неспекшийся
Г	Газовый	35—44	32—35	78—86	4,5—5,5	1,7	6,8—15,0	Спекшийся, сплавленный, вспученный
ПЖ	Паровичный жирный	26—35	33,5—36,5	84—90	4—5,4	1,7	4—10,0	Спекшийся, сплавленный, плотный, прочный
К	Коксовый	18—20	35—37	87—92	4,0—5,2	1,5	2,5—7,0	Спекшийся, сплавленный, очень прочный
ПС	Паровичный спекающийся	12—18	35,5—37,5	89—92	3,5—4,9	1,5	3—5	Спекшийся, умеренно плотный
Т	Тощий (короткопламенный)	17	35—36,5	90—93	3,4—4,4	1,2	1,6—4,5	Неспекшийся, порошкообразный или мало слипшийся
А	Антрацит	2—9	35—29,5	95—97	1,0—3	1	1—2	Неспекшийся

По размеру кусков каменные угли разделяются на шесть классов:

	Размер кусков, мм
Крупный (К)	50—100
Орех (О)	25—50
Мелкий (М)	13—25
Семечко (С)	6—13
Штыб (Ш)	<6
Рядовой (Р)	Неограниченный

Для металлургии большое значение имеет способность угля при нагревании без доступа воздуха образовывать пористый, но механически прочный продукт — кокс, т. е. способность спекаться. Такие угли называют коксующимися. Процент коксующихся углей не высок (для углей Донецкого бассейна он не превышает 15%), поэтому в последние годы применяют особые методы подбора шихты из коксующихся и некоксующихся углей, которые обеспечивают получение хорошего кокса при одновременном расширении гаммы применяемых для этого углей. Зольность углей зависит от условий их залегания и колеблется в очень широких пределах 5—25%, в среднем 10—12%. Содержание серы в большой мере определяется зольностью и колеблется от 0,6% (для углей Кузнецкого бассейна) до 1,5—3% (для донецких углей).

Антрациты являются высшей стадией перерождения гумусовых углей. Для них характерна высокая плотность, черная блестящая поверхность кусков. Содержание летучих меньше, чем в других каменных углях, поэтому воспламеняются антрациты трудно и горят коротким пламенем.

Основные месторождения антрацитов в СССР находятся в Донбассе.

Применяются антрациты в котельных установках и для газификации, а также в качестве металлургического топлива в шахтных печах цветной металлургии.

Горючие сланцы

Горючие сланцы представляют собой отложения, при образовании которых примешалось значительное количество минеральных веществ (свыше 50%). Строение сланцев слоистое, цвет желтовато-зеленый или зеленовато-серый в зависимости от характера примесей.

Для органической массы сланцев (керогена) характерно высокое содержание водорода (8—10%) при содержании углерода около 60—70%. Благодаря этому теплота сгорания горючей массы сланцев высокая — от 27650 до 33520 кДж/кг. Однако тепловые качества рабочей массы значительно снижены высоким содержанием золы ($A^c=40—70\%$) и влаги ($W^p=11—22\%$). Теплота сгорания рабочей массы составляет от 4400 до 12700 кДж/кг. Содержание серы в сланцах высокое составляет 4%. Выход летучих на горючую массу достигает до 80—83%. Общие запасы сланцев в СССР превышают 150 млрд. т. Значительное количество сланцев залегает в северо-восточных районах Сибири и Прибалтике. Применяются сланцы для получения высококалорийного газа и для производства электроэнергии. При термической обработке сланцев без доступа воздуха получают жидкие продукты — смолы и масла.

2. Искусственное твердое топливо

Все методы переработки топлив можно разделить на две большие группы: 1) физико-механические; 2) физико-химические.

К первой группе относятся методы переработки, не сопровождающиеся глубокими химическими превращениями органической массы топлива. Это различные способы обогащения топлива или приведение его к виду, более удобному для сжигания: обогащение, сортировка, брикетирование, измельчение и сушка.

Ко второй группе относятся виды переработки, сопровождающиеся глубоким химическим превращением составных элементов топлива. Это — углежжение, полукоксование, коксование, газификация, ожижение.

Физико-механические методы переработки твердых топлив

Обогащение представляет собой сложный процесс отделения угля от породы (сопутствующие ему минеральные примеси).

Существует ряд методов обогащения угля. Основным методом является мокрый, который основан на различии в плотности угля (1,2—1,6 г/см³) и породы (1,8—5,2 г/см³). Одновременно удаляется и значительная

часть серы, находящаяся в виде пирита FeS_2 (плотность $\sim 5,0 \text{ г/см}^3$) и в виде FeSO_4 , который растворяется в воде.

Более мелкий уголь (крупностью $< 0,5 \text{ мм}$) обогащают флотационным методом, при котором используется различная смачиваемость угля и породы. Обогащение угля сопровождается снижением его зольности, что особенно важно для углей, используемых для получения кокса, так как уменьшение зольности кокса ведет к увеличению производительности доменных печей. Углеобогащение позволяет расширить диапазон применяемых для коксования углей и сокращает затраты, связанные с их перевозкой.

Сортировка. Большую роль при газификации или сжигании угля имеет крупность его кусков. В связи с этим широко применяется углесортировка, где используются дробление и грохочение угля в специальных машинах с одновременным разделением его на фракции. Угли с малой механической прочностью (угли ПЖ, К, ПС, Т и бурые угли) обычно не рассеивают.

Брикетирование применяется для придания определенной формы топливу, содержащему большое количество мелочи — бурому углю, фрезерному торфу, опилкам и т. п. Брикетирование осуществляется с добавкой связующих веществ (смола, каменноугольного пека в количестве 5—7%) или без них. Последнее возможно, если топливо в своем составе имеет большой процент битумов. Подогретая до $100\text{—}120^\circ\text{C}$ (для лучшей пластичности) и хорошо перемешанная масса подается на прессы, где под давлением $10\text{—}30 \text{ МН/м}^2$ из нее формируются брикеты.

При брикетировании без связующих добавок давление поднимают до 100 МН/м^2 . Благодаря брикетированию получают топливо, однородное по размерам, более транспортабельное и обладающее повышенной теплотой сгорания. Последнее объясняется добавкой связующих веществ, имеющих высокую теплоту сгорания, и подсушкой (для фрезерного торфа влажность с 50% снижают до 10—15%).

Пылеприготовление. Измельчение топлива до пылевидного имеет своей целью приблизить условия сжигания твердого топлива к условиям сжигания газообразного топлива. Измельчению подвергают различные угли, причем чем меньше содержание летучих

топливе, тем тоньше должен быть помол. Помол осуществляется в две стадии. Сначала на дробилках получают куски размером 15—25 мм, которые затем передаются на шаровые мельницы для окончательного дробления. Тонкость помола определяется последовательным просеиванием через сита и характеризуется размерами частиц в пределах от 0—300 мкм с преобладающими фракциями 20—50 мкм.

Одновременно с дроблением уголь подсушивается воздухом, нагретым до температуры 300—350°С.

Система пылепроводов, бункеров и сепараторов должна исключать возможность накапливания пыли, так как пыль обладает свойством самовозгорания.

Сушка топлива имеет особое значение для топлив с высокой влажностью (торф — 90—95%).

Естественной сушкой на открытом воздухе понижают влажность торфа до 20—30%.

При хранении и сушке торфа в штабелях необходимо принимать меры к исключению возможности его самовозгорания. Высота штабеля не должна превышать 7 м для фрезерного и 8 м для кускового торфа. Температура в штабеле должна регулярно контролироваться и поддерживаться не выше 50°С.

Физико-химические методы переработки твердых топлив

Физико-химическими методами являются: углежжение, коксование, полукоксование, газификация и др. Одним из основных методов переработки топлив является процесс коксования, заключающийся в сухой перегонке топлива путем нагрева его без доступа воздуха. Первоначально он применялся только к древесине и был известен как процесс «углежжения» и велся с целью получения древесного угля. Процесс шел весьма primitively с полной потерей весьма ценных попутных продуктов разложения (смол, аммиака, газообразных продуктов).

В современных условиях древесный уголь получается в ретортах или печах. Получаемые наряду с ним продукты: смола, уксусная кислота, метиловый спирт и др. применяются в химической промышленности.

Коксование — процесс термической (химической) переработки топлив (углей, торфа) при нагревании до 900—1100°С без доступа воздуха.

Наиболее распространенным является процесс коксования каменных углей. Задачей процесса коксования является получение из сырого угля кокса, обладающего прочностью, пористостью и способностью противостоять быстрому истиранию. Для коксования используются угли различных марок: К, ПЖ, ПС, Г. Смесь различных углей, приготовленная для коксования, называется шихтой.

Для подбора шихты и установления ее пригодности для получения кокса применяют ряд методов: пластометрический метод Сапожникова Л. М. и Базилевича Л. П., метод Тайца Е. М. и др. Шихта измельчается до кусков размером не более 3 мм, хорошо перемешивается и увлажняется до 6—8%. Загрузка шихты осуществляется в заранее нагретые до температуры 900—1000°С камеры коксовой печи. Процесс термического разложения угля без доступа воздуха протекает послойно от греющих поверхностей к центру камеры в следующей последовательности:

1) при нагреве до 100—150°С выделяется гигроскопическая влага;

2) при 200°С выделяется углекислота, адсорбированная углем, и начинается первая стадия пирогенетических процессов (взаимодействие С, Н и О топлива), сопровождающаяся образованием H_2O и CO_2 ;

3) при последующем нагреве происходит заметное разложение органической массы топлива. Усиливается выделение CO_2 и появляется смола;

4) при температуре 400—500°С уголь размягчается, переходит в пластическое состояние. Резко увеличивается выход газа, в составе которого появляются H_2 , CH_4 и тяжелые углеводороды. Продолжается выделение смолы;

5) при нагреве выше 550°С пластическая масса (полукокс) переходит в непластическое состояние. Выделение смол прекращается. Газы содержат метан, водород, азот. К 1100°С полученный остаток практически лишен летучих. Получается спекшийся кокс, пористый, механически прочный, применяемый в металлургии.

По прочности и пористости кокс делится на доменный и литейный. К доменному относится кокс более прочный и имеющий пористость 45—55%. Кокс с пористостью до 45% называется литейным.

Процесс коксования продолжается 15—18 ч. Коксо-

вые печи (рис. 147) представляют собой узкие (0,4—0,45 м), длинные (13—15 м), высокие (4,3—5,5 м) футерованные динасом камеры, сгруппированные в батареи. Число камер в одной батарее может достигать до 45—69. Загрузка шихты осуществляется сверху через люки 1, расположенные равномерно по длине камеры. Коксовый газ и другие летучие продукты отводятся из камер через отверстия 2 и по общему газосборнику направляются на газоочистительную станцию. Обогрев каждой коксовой камеры производится через стенки отопительных каналов 3, расположенных между двумя соседними камерами. Воздух, подаваемый для сжигания газа, предварительно через подовый канал 4 поступает в регенераторы 5, расположенные под камерами. Из регенераторов нагретый воздух по косым каналам 6 подается в отопительные каналы.

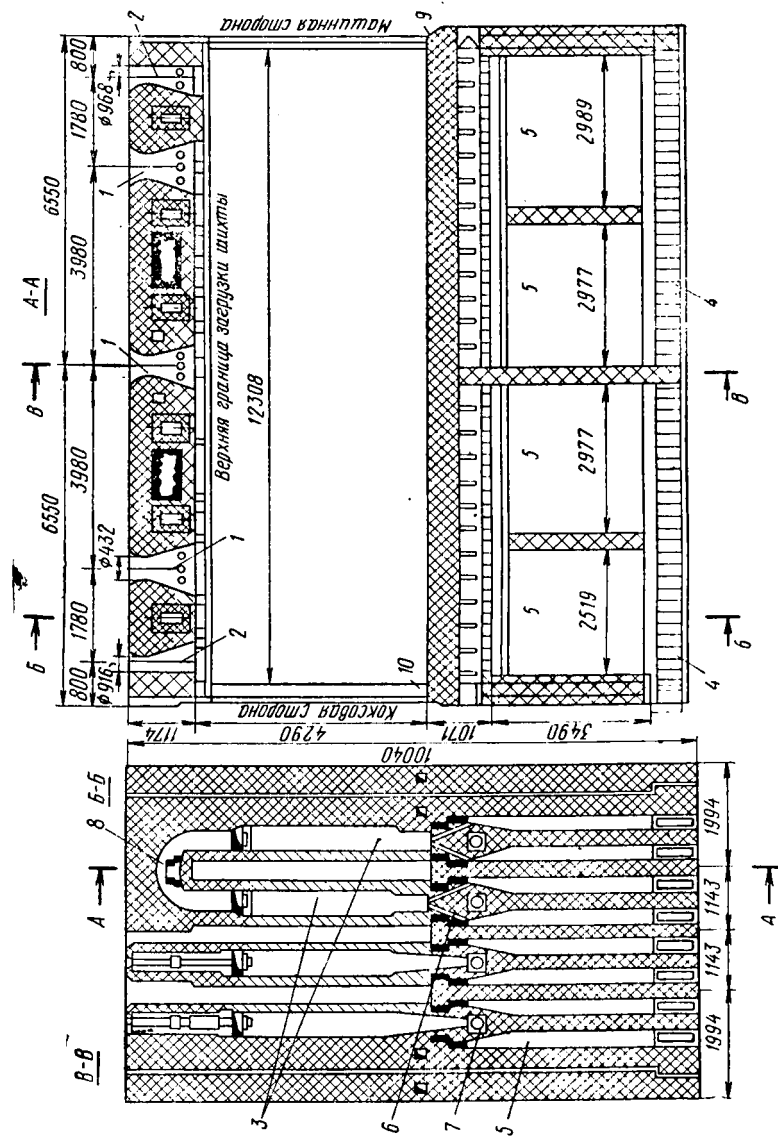
При отоплении коксовых печей газом с низкой теплотой сгорания (доменным, генераторным) газ также подогревается в газовых регенераторах. В отопительных каналах газ, смешиваясь с воздухом, сгорает, нагревая стенки каналов до 1300—1400° С. Часто для отопления коксовых камер используют коксовый газ, получающийся в этих же камерах. В этом случае его, не подогревая, направляют в горелки через каналы 7.

Дымовые газы из отопительных каналов через перекидные клапаны 8 и косые каналы 6 подаются вверх регенераторов для их обогрева, после чего они по бортовым направляются в дымовую трубу. Выгрузка кокса осуществляется через торцовые стенки камеры, снабженные специальными дверями 9 и 10. Полученный кокс при помощи коксовыталкивателя выгружается в тушильные вагоны, где он обрабатывается водой и направляется на сортировку.

Характеристика кокса: пористость 45—55%; $Q_{\text{н}}^{\text{p}} \approx 29,3$ МДж/кг; содержание углерода 75—85%; влаги 7—14%; летучих 0,6—1,7%; золы 8—10%. Содержание серы и фосфора зависит от состава угля и колеблется в следующих пределах: 0,5—2,0% S, 0,03—0,05% P.

Выход кокса составляет 70—80% от массы загружаемого в печь угля.

В зависимости от состава угля и хода процесса на 1 т сухого угля получают 700—800 кг кокса, 300—330 м³ коксового газа, 30—40 кг смолы, 10—12 кг бензола, 3—4 кг аммиака.



Полукоксование углей преследует цель получения жидкого топлива, в этом его первое отличие от рассмотренного процесса коксования.

Вторым отличием является температурный уровень процесса, который при полукоксовании достигает лишь 500—550° С.

Нагрев при этом, так же как и при коксовании, ведется без доступа воздуха. Органическая масса угля подвержена менее глубоким процессам термического разложения и продукты полукоксования: полукокс, смола, газ и подсмольная вода носят в связи с этим название первичных.

Полукокс содержит 10—15% летучих и применяется в газогенераторах автомобилей и судов, а также как сырье в химической промышленности.

Углеводороды смолы близки по составу к некоторым углеводородам сырой нефти. Полукоксованию подвергают торф, сланцы и бурые угли.

Термоантрацит это искусственное топливо, получаемое в результате медленного нагрева малозольного антрацита без доступа воздуха до температуры 1100—1300° С.

В результате термической обработки снижается сернистость антрацита, увеличивается пористость и термостойкость.

Реакционная способность термоантрацита ниже, чем кокса, но значительно выше, чем исходного антрацита. Термоантрацит применяется вместо кокса в литейном производстве и является хорошим сырьем для электродной промышленности.

3. Жидкое топливо

Естественное жидкое топливо

Нефть является единственным представителем естественных жидких топлив, однако в сыром виде она практически не применяется, так как переработка ее дает возможность получить ряд очень ценных продуктов и поэтому является более эффективной. По химическому составу нефть — это смесь углеводородов различных типов с небольшим количеством кислородных, сернистых и азотистых соединений.

Углеводороды в нефти представлены тремя группами:

Метанового ряда (парафинового)	C_nH_{2n+2}
Нафтенового ряда	C_nH_{2n}
Ароматического ряда (бензольного)	C_nH_{2n-6}

Элементарный состав горючей массы нефти колеблется в сравнительно узких пределах, %: 84—86 Сг; 12—14 Нг; 0,01—5 Sг, чаще $\sim 0,5$; 0,7—2,5 Ог+Нг. Содержание золы в нефти 0,1—0,3%; влажность тоже невелика 0,1—0,4%; плотность нефти 800—1000 кг/м³. «Легкие» нефти содержат преимущественно углеводороды метанового ряда.

По содержанию серы нефти классифицируют на малосернистые (до 0,5% S), сернистые (от 0,5% до 1,9% S) и высокосернистые (свыше 1,9% S). Теплота сгорания нефти Q_p 41—44 МДж/кг. Чем меньше плотность нефти, тем выше ее теплота сгорания.

Добыча нефти осуществляется через скважины механическим путем (компрессорами, насосами), фонтанным способом под естественным давлением пласта или фонтанным способом под давлением воды, нагнетаемой мощными насосами через скважины, опоясывающие нефтеносный контур (заводнение пласта).

Себестоимость добычи нефти ниже в 4,5 раза себестоимости добычи каменного угля.

Искусственное жидкое топливо

Ряд ценных искусственных топлив получают путем переработки сырой нефти.

Основные виды переработки следующие: а) фракционная перегонка (ректификация); б) крекинг-процессы; в) пиролиз; г) коксование; д) деструктивная гидрогенизация.

Фракционная перегонка нефти представляет собой процесс термического разделения нефти на составные части, без заметного изменения их химического состава.

Фракционную перегонку проводят в одну или в две ступени. Первоначально в трубчатой печи при атмосферном давлении постепенным нагревом получают:

1) бензин ($t=95—200^\circ\text{C}$); 2) лигроин ($t=200—250^\circ\text{C}$); 3) керосин ($t=240—310^\circ\text{C}$); 4) газойль ($t=310—360^\circ\text{C}$).

Остаток от перегонки — мазут используют как топливо в металлургической промышленности и энергетике или направляют в вакуумную ректификационную колонку, где нагревают при пониженном давлении до 400°C и получают ряд дистиллятов смазочных масел (солярового, веретенного, машинного, цилиндрического).

В результате отгонки получают гудрон, который на специальных асфальтовых установках перерабатывается в асфальт. Выход легких фракций при фракционной перегонке нефти составляет всего 10—12%. С целью повышения выхода легких продуктов ведут процессы крекинга и пиролиза. Сырьем для них является мазут.

Крекинг — это процесс термической обработки сопровождающийся расщеплением сложных углеводородов на более простые. В зависимости от условий переработки и фазового состояния получаемых продуктов различают: термический крекинг — парофазный и жидкофазный и каталитический крекинг.

Жидкофазный термический крекинг протекает при сравнительно невысоких температурах $450\text{—}550^{\circ}\text{C}$ и при высоких абсолютных давлениях $2\text{—}7\text{ МПа}$. При парофазном крекинге абсолютное давление значительно ниже $100\text{—}500\text{ Н/м}^2$, а температура повышается до $650\text{—}700^{\circ}\text{C}$. Выход бензина при жидкофазном термическом крекинге больше, чем при парофазном, так как первый сопровождается более глубокими изменениями углеводородов исходного сырья.

Каталитический крекинг характерен применением катализаторов процесса, в качестве которых применяют Co , Fe . Проводя фракционную перегонку сырой нефти и крекинг мазута, можно довести выход легких фракций до 40—70%. Одновременно получают крекинг-газы в количестве 25—27%, небольшое количество кокса (до 2—6%) и крекинг-мазут.

Пиролиз жидких нефтепродуктов осуществляется при температурах $650\text{—}750^{\circ}\text{C}$ при атмосферном давлении.

В процессе переработки исходное вещество подвергается более глубокому химическому изменению, чем при процессе крекинга. Продуктами пиролиза являются углеводороды ароматического ряда.

Деструктивная гидрогенизация это процесс воздействия водорода высокого давления на углеводороды исходного продукта. Процесс идет в присутст-

вин катализаторов Fe, Co. Путем гидрогенизации доводят выход легких фракций до 80—85%.

Из всех получаемых путем термической обработки нефти продуктов наиболее распространенным видом жидкого топлива для металлургических печей является мазут.

Мазут выпускается, в соответствии с ГОСТ 10585—63, шести марок: Ф5, Ф12 (флотский мазут), 40, 100 и 200 (топочный мазут) и МП (мазут для мартеновских печей). По мере увеличения номера марки возрастает вязкость, температуры застывания и вспышки.

По элементарному составу мазуты мало отличаются друг от друга. Состав горючей массы колеблется в пределах, %: 85—87 Cг; 11—13 Hг; 0—0,35 Oг; 0—0,5 Nг; 0,4—3,5 Sг. Зольность мазута $A^p=0,1—0,3\%$. Влажность колеблется в более широких пределах: $W^p=0,5—10\%$. Содержание серы зависит от состава исходного продукта. По содержанию серы мазуты, так же как и сырая нефть, подразделяются на три группы: малосернистые ($S_{\text{общ}}^p < 0,5\%$), сернистые ($S_{\text{общ}}^p = 0,5—1,0\%$) и высокосернистые ($S_{\text{общ}}^p \geq 1\%$). Применение мазутов, имеющих в своем составе $S_{\text{общ}}^p > 0,5\%$, нежелательно, так как сера переходит в металл и резко ухудшает его качество.

Для эксплуатации мазута очень важны также его характеристики, как вязкость, температура вспышки, температура воспламенения.

Вязкость зависит от состава мазута, в частности от содержания в мазуте парафина, и от температуры. Поэтому для обеспечения транспортировки мазута к форсунке и более тонкого распыления мазут нагревают до 70—80°С. При этом температура подогрева мазута всегда должна быть ниже температуры вспышки на 20—30°С.

Под температурой вспышки понимают температуру, при которой из мазута обильно выделяются пары, способные при контакте с пламенем вспыхивать. Температура вспышки мазутов в зависимости от марки колеблется от 80—140°С. Большое значение играет температура воспламенения, под которой понимают температуру самовоспламенения топлива. Эта температура близка в среднем к температуре 500°С.

Низшая теплота сгорания мазутов $Q_{\text{н}}^p$ в зависимости от его состава колеблется в пределах от 35,5 до

40 МДж/кг. Чем выше номер марки мазута, тем ниже его теплота сгорания.

В табл. 7 приведены теплотехнические характеристики некоторых жидких топлив.

Таблица 7

Состав и тепловая характеристика жидкого топлива

Топливо	Элементарный состав горючей массы, %				Содержание в рабочем топливе, %		Теплота сгорания $Q_{\text{н}}^{\text{р}}$, МДж/кг	t_{max} , °C
	C ^г	H ^г	S ^г	O ^г +N ^г	A ^р	W ^р		
Бензин . . .	85,0	14,9	0,05	0,05	—	—	43,7	2080
Керосин . . .	86,0	13,7	0,1	0,2	—	—	42,3	2090
Соляровое масло . . .	86,5	12,8	0,4	0,3	—	—	42,3	2100
Мазут малосернистый влажностью, %:								
0	87,8	10,7	0,7	0,8	0	0	40,5	2115
3	87,8	10,7	0,7	0,8	0,2	3	39,2	2100
6	87,8	10,7	0,7	0,8	0,2	6	37,8	2085
Мазут сернистый	84,0	11,5	4,0	0,5	0,3	3	39,2	2100

Высокая потребность в жидком топливе привела к необходимости получения его искусственным путем из твердого топлива. Одним из таких топлив является смола, получаемая в процессе полукоксования. Смолы получают и как отходы в процессе газификации твердого топлива. Состав и физические свойства смол зависят от исходного сырья и метода его переработки. Состав смол колеблется в следующих пределах, %: 80—90 C^г, 7—12 H^г, 2—15 O^г+N^г. Теплота сгорания смол высокая: $Q_{\text{н}}^{\text{р}} = 29,3—37,7$ МДж/кг.

Для получения моторных видов топлива смолу, как и сырую нефть, подвергают фракционной перегонке или крекингу.

Смолу используют в качестве карбюризатора при сжигании газов, пламя которых имеет слабую светимость (например, доменного газа). Смола в процессе сжигания значительно повышает светимость факела, так как имеет в своем составе сложные тяжелые углеводороды.

Одним из методов получения жидких горючих из твердого топлива является и процесс гидрогенизации. Этот метод заключается в обработке углей (или подобного материала) водородом под высоким давлением ($\approx 2000 \text{ Н/м}^2$) при температуре $300\text{—}500^\circ \text{С}$ в присутствии катализатора (Co, Fe). При этом 60—65% всей органической массы угля переходит в жидкое состояние.

Естественно, что стоимость такого топлива значительно выше стоимости топлив, получаемых в результате переработки нефти, поэтому применение их в металлургической промышленности нерентабельно.

4. Газообразное топливо

Газообразное топливо по сравнению с жидким и твердым топливом обладает следующими преимуществами: 1) возможностью лучшего смешения газа с воздухом и, следовательно, сжиганием с меньшим избытком воздуха; 2) легкостью подогрева перед сжиганием; 3) отсутствием золы в топливе; 4) транспортабельностью и удобством учета расхода газа; 5) простотой обслуживания горелочных устройств и т. д.

Одновременно с указанными преимуществами газообразное топливо имеет и ряд недостатков. К ним относятся прежде всего взрывоопасность и малая объемная масса, что создает дополнительные затруднения при хранении газа. В этом отношении газ уступает и твердому, и жидкому топливу.

Однако перечисленные преимущества и сравнительно низкая стоимость добычи способствуют широкому внедрению газа и постепенному вытеснению твердого и жидкого топлива в различных отраслях промышленности. Естественным газообразным топливом является природный газ, добыча и применение которого из года в год приобретают все большее значение.

Природный газ

Природный газ состоит главным образом из метана и некоторого количества тяжелых углеводородов. Балластом в газе являются азот, двуокись углерода и влага. Виды газа бывают различные как по месторождению, так и по составу.

Различают два основных вида:

1. Газы вулканического происхождения (чисто газовые месторождения). Эти газы в основном состоят из CH_4 (94% и более) и называются сухими газами.

2. Попутные газы, или фонтанные, где газ сопутствует нефтяным месторождениям. Основным углеводородом этих газов также является метан, но, кроме него, в состав горячей массы газов входят этан, пропан, бутан и другие тяжелые углеводороды. Попутные газы называют жирными.

Примерный состав газов приведен в табл. 8.

Таблица 8

Примерный состав природных и попутных газов различных месторождений СССР

Месторождения	Состав газа, % (объемн.)							Теплота сгорания МДж/м³
	CO ₂	CH ₄	C ₂ H ₆	C ₃ H ₈	C ₄ H ₁₀	C ₅ H ₁₂	N ₂	
Природный газ								
Дашавское . .	0,10	98,3	0,30	0,12	0,15	—	1,03	35,8
Шебелинское .	0,10	93,5	4,00	1,00	0,50	0,50	0,4	38,3
Краснооктябрь- ское, Осипов- ское (Куйбы- шевская и Оренбургская обл.)	0,70	78,3	6,40	1,80	—	—	12,8	34,0
Елшанское . .	0,30	92,2	2,80	0,70	0,5	—	3,5	36,0
Березовское .	0,40	95,1	1,10	0,30	0,08	—	3,0	35,1
Попутный газ								
Туймазинское .	0,4	39,5	20,0	18,5	7,7	4,2	10,0	59,4
Мухановское .	1,5	57,5	15,0	11,0	8,0	4,0	3,0	56,0
Ромашкинское	0,1	40,0	19,5	18,0	7,5	4,9	3,3	60,0

Одним из преимуществ природного газа является отсутствие в его составе сернистых соединений, что для металлургической промышленности имеет особое значение.

Исключением являются газы Куйбышевско-Бугурусланского района, Восточной Татарии, Западной Башкирии и оренбургский газ, в которых содержание сероводорода высокое (5—6%).

В СССР в настоящее время найдено более 400 месторождений газа. Добыча газа из года в год растет; так,

в 1955 г. было добыто всего около 9 млрд. м³, в 1965 128 млрд. м³, в 1970 г. 198 млрд. м³, а в 1975 г. намечено добыть 300—320 млрд. м³.

Для подачи газа от мест добычи к промышленным центрам протянуто около 65 тыс. км газопроводов. При передаче газа на большие расстояния его сжимают, сооружая специальные газоповысительные станции, поддерживающие давление газа в магистральном газопроводе 2—5 МН/м². Сжатый газ уменьшается в объеме ($\approx$ в 300 раз), благодаря чему уменьшается диаметр магистрали. При разводке газа к потребителям давление газа снижают.

Широко применяют также транспортировку газа в сжиженном состоянии в специальных цистернах. При этом объем газа уменьшается примерно в 600 раз. Сжижению подвергают главным образом попутные газы. На месте использования сжиженный газ превращают в газообразное состояние.

Газ, выходящий из скважин, содержит значительное количество минеральных примесей, нефти и влаги. Их влияние на магистральные газопроводы может привести к коррозии последних и их запосам. В связи с этим газ предварительно очищают от всех примесей.

Очищенный газ не имеет запаха, поэтому для обнаружения возможных утечек к нему добавляют сильно пахнущие вещества (одоранты) в количестве 1 кг на 150000 м³ газа.

Искусственные газы

К искусственным газам, применяемым в металлургии в качестве топлива, относят коксовый, доменный и генераторные газы.

Коксовый газ является продуктом коксования углей и представляет собой те летучие продукты, которые получаются при термическом разложении угля (сырой или прямой газ). Сырой коксовый газ содержит ряд ценных примесей и балласт: смолу, аммиак, воду, сероводород и т. д., которые конденсируют и улавливают при первичной очистке газа. Газ, прошедший первичную очистку, называется обратным. Обратный газ подвергают дополнительной очистке для извлечения из него циана, окислов азота и серы. Удаление серы необходимо, так как ее присутствие в газе значительно снижает качество газа и сужает область его применения. Полученный газ на-

зывают очищенным коксовым газом. Состав и выход коксового газа зависит от вида коксуемых углей и режима коксования.

Выход обратного коксового газа в среднем составляет 300—330 м³/т сухой шихты.

Состав очищенного газа колеблется в значительных пределах, %: 46—61 Н₂; 21—28 СН₄; 1,4—3,0 С_мН_п; 4,2—8,5 СО; 2,2—3,1 СО₂; 0,3—1,7 О₂; 3,7—14,0 N₂.

Содержание водяных паров определяется температурой газа и при $t_r=40^\circ\text{C}$ доходит до 50—55 г/м³.

Теплота сгорания сухого газа Q_p^p в среднем равна 16,95 МДж/м³. Факел, получаемый при сжигании коксового газа, обладает хорошей излучательной способностью, так как СН₄ и непредельные углеводороды газа при нагреве до 1000—1100°С разлагаются с образованием нефтяного кокса и сажи.

Высокая теплота сгорания и хорошая излучательная способность факела говорят о том, что коксовый газ является весьма ценным топливом металлургической промышленности.

Коксовый газ применяется в чистом виде или в смеси с доменным газом. Близким по составу коксовому газу является светильный газ.

Светильный газ получается при сухой перегонке газовых углей без доступа воздуха и при высокой температуре. Его состав отличается от состава коксового газа более высоким содержанием метана и меньшим содержанием водорода. Примерный состав светильного газа, %: 36,0 СН₄; 42,0 Н₂; 5,0 С_мН_п; 5,0 СО; 5,0 СО₂; 7,0 N₂.

Теплота сгорания $Q_p^p=20$ МДж/м³.

Доменный газ получается как побочный продукт доменного производства. Состав доменного газа зависит от температуры дутья, обогащения его кислородом, состава и расхода кокса, состава шихты, давления на колошнике, применения природного газа. Примерный состав доменного газа следующий, %: 29—30 СО; 0,1—0,4 С₂Н₄; 1,5—2,5 Н₂; 10—12 СО₂; 56—58 N₂.

Теплота сгорания газа $Q_p^p=3,7\text{—}4,0$ МДж/м³. Выход доменного газа обычно около 3800 м³/т кокса.

Доменный газ содержит значительное количество пыли (60—70 г/м³), поэтому его необходимо подвергать очистке. В зависимости от системы газоочистки содержание пыли может быть снижено до 1,0 г/м³ при грубой очистке или до 0,005 г/м³ при тонкой очистке.

Предельная норма содержания пыли в доменном газе, применяемом для отопления мартеновских и прокатных печей, составляет 20—50 г/м³.

Доменный газ применяется в воздухонагревателях доменных печей, в котельных установках, в печах с более высокой температурой (мартеновских и прокатных) доменный газ применяется в смеси с коксовым газом.

Генераторные газы

Генераторный газ — это продукт полного превращения твердого топлива в горючий газ под воздействием кислорода. Остатком при процессе газификации является только зола или шлак.

Генераторные газы могут быть получены в любом месте, где добывается или куда может быть завезено топливо. Процесс газификации проводится в специальных устройствах-газогенераторах. Схема газогенератора показана на рис. 148. Генератор представляет собой металлическую шахту 1 (круглую или прямоугольного сечения), футерованную огнеупорным кирпичом 2. Нижняя часть шахты 3 (фартук) погружена в воду, заполняющую металлическую вращающуюся чашу 4. Вода обеспечивает гидравлический затвор, препятствующий сообщению шахты с окружающей средой. Вместе с чашей вращается колосниковая решетка 5, расположенная по центру шахты. Под колосниковую решетку подается дутье (воздух, пар, смешанное дутье).

Дутье, выходя через щели колосниковой решетки, распределяется по сечению газогенератора. Зола и шлак, опускаясь вниз, попадают в воду, от резкого охлаждения размельчаются и автоматически удаляются из чаши шлаковым ножом 6. Загрузка топлива осуществляется сверху через загрузочную коробку 7, снабженную внизу специальным уплотнительным конусом. Получаемый газ удаляется через патрубок 8, расположенный в верхней части шахты. В своде шахты имеются два или три шуровочных отверстия 9, которыми пользуются для контроля за работой газогенератора и для разрыхления слоя топлива специальными штангами. В процессе газификации топливо движется навстречу дутью. Рассматривая характер протекающих процессов по направлению движения топлива, различают пять зон: I — подсушки, II — сухой перегонки; III — восстановления; IV — горения; V — золы и шлака.

В зоне I из топлива удаляется влага. Высота этой зоны определяется качеством исходного продукта. Чем выше влажность топлива, тем выше должна быть эта зона. В зоне II происходит отделение летучих и образуется полукокс, который по мере продвижения вниз прев-

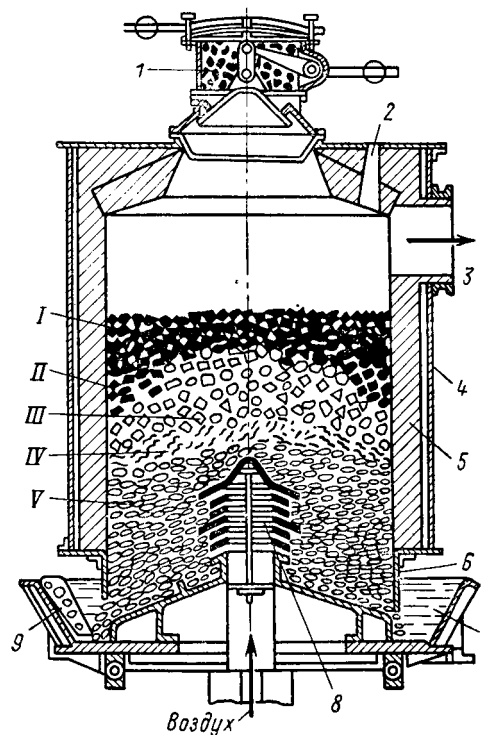
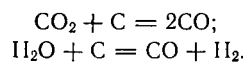
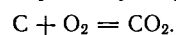


Рис. 148. Разрез газогенератора и схема газогенераторного процесса

ращается в кокс; зоны I и II называются зонами подготовки топлива. В зоне III идут реакции восстановления двуокиси углерода и водяного пара, полученных в зоне горения, углеродом кокса:



В зоне IV происходит горение углерода:



Эта зона наиболее высоких температур.

Зоны горения и восстановления являются зонами газификации. Зона V играет двойную роль. Во-первых, эта зона обеспечивает подогрев дутья поступающего затем в зону горения. Во-вторых, слой золы и шлака, имея температуру более низкую, чем температура горящего кокса, предохраняет колосники от прогара и этим увеличивает срок их службы.

В зависимости от характера применяемого дутья различают воздушный, водяной паровоздушный и парокислородный газ.

Воздушный газ (теоретический) содержит 34—35% CO и 65—66% N₂; теплота сгорания газа низкая: $Q_H^p \approx 4\text{—}4,5$ МДж/м³. Водяной газ состоит в основном из CO и H₂. Действительный состав его колеблется в пределах, %: 37—38 CO; 48—50 H₂; 6—6,50 CO₂; 0,4—0,6 CH₄; 0,3—0,5 O₂; 5,5—6,5 N₂. Теплота сгорания водяного газа $Q_H^p \approx 9,5\text{—}11,5$ МДж/м³. Применяется водяной газ в основном как сырье химической промышленности.

Т а б л и ц а 9

Составы смешанного сухого генераторного газа, % (объемн.)

Род топлива	CO ₂	H ₂ S	C _m H _n	CO	H ₂
Донецкий антрацит . . .	5,0	0,15	0,00	28,6	13,0
Коксовая мелочь	5,0	0,2	0,00	28,5	13,0
Подмосковный уголь	6,5	1,2	0,4	25,0	14,0
Гидроторф . . .	8,5	0,06	0,4	27,5	15,0
Щепа	6,5	0,00	0,4	29,0	14,0

Продолжение табл. 9

Род топлива	CH ₄	N ₂	O ₂	Q_H^p		Выход сухого газа, м ³ /кг
				кДж/м ³	ккал/м ³	
Донецкий антрацит	0,5	52,65	+0,2	5217	1245	4,4
Коксовая мелочь	0,7	52,4	+0,2	5257	1255	3,2
Подмосковный уголь	2,2	50,5	+0,2	5970	1425	1,4
Гидроторф	2,5	45,84	+0,2	6224	1495	1,5
Щепа	3,0	46,9	+0,2	6546	1560	1,3

Смешанный газ является основным видом генераторных газов. Примерный состав его приведен в табл. 9.

Парокислородный газ получается при дутье обогащенном кислородом с добавкой пара. Процесс ведется под давлением около 2 МН/м^2 . Газ содержит высокий процесс CH_4 и имеет теплоту сгорания $Q_{\text{н}}^{\text{р}} = 17,0—21 \text{ МДж/м}^3$.

Подземная газификация угля

При подземной газификации уголь превращается в горючий газ непосредственно в угольном пласте. Подземной газификации подвергают пласты, добыча которых не рентабельна.

Сущность метода заключается в использовании свойства газопроницаемости угля. Весь газифицируемый пласт представляет собой систему реакционных каналов, соединяющих дутьевые и газоотводящие скважины. Через дутьевые скважины подается под давлением воздух, поддерживающий горение в реакционной зоне.

Теплота сгорания подземного газа невысокая: $Q_{\text{н}}^{\text{р}} \approx 3350—5015 \text{ кДж/м}^3$. Применяется подземный газ как энергетическое топливо вблизи мест его получения, так как передача его на большие расстояния невыгодна.

Глава XXIV

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГОРЕНИЯ

1. Химические процессы в пламени

Горением называют химический процесс соединения топлива с окислителем, сопровождающийся интенсивным тепловыделением и быстрым подъемом температуры продуктов сгорания. Молекулярные связи исходных веществ — топлива и окислителя — нарушаются и образуются новые связи в молекулах продуктов сгорания. Объем движущихся газов, в котором совершаются процессы горения, называется пламенем. По своей структуре пламя бывает однородным или гетерогенным. Однородное пламя может быть получено только при сжигании газообразного топлива. Гетерогенное пламя чаще образуется при сжигании жидкого или пылевидного топ-

лива, но может иметь место и при сжигании газообразного топлива.

Интенсивность процесса горения определяется физическими и химическими процессами, связанными с этим явлением. В зависимости от того, какой из этих процессов является лимитирующим, различают кинетическую и диффузионную области сжигания.

Реакции горения, так же как и все другие химические реакции, подчиняются закону действующих масс. Огромное количество молекул, находясь непрерывно в тепловом движении, сталкивается между собой.

На основании закона Максвелла — Больцмана можно сказать, что если $e^{-\frac{E'}{RT}}$ и $e^{-\frac{E''}{RT}}$ — относительные числа молекул, обладающих соответственно энергией E' и E'' , то доля взаимных столкновений молекул, сопровождающихся реакцией, равна произведению этих чисел, т. е. если общее число столкновений x_0 , то число столкновений, в результате которых произойдет реакция, будет равно

$$x = x_0 e^{-\frac{E'}{RT}} e^{-\frac{E''}{RT}} = x_0 e^{-\frac{E}{RT}},$$

где

$$E = E' + E'' \text{ кДж/моль};$$

откуда

$$e^{-\frac{E}{RT}} = \frac{x}{x_0}.$$

Величина E называется энергией активации и представляет собой ту минимальную энергию, которой в сумме должны обладать молекулы для того, чтобы произошла реакция. Следовательно, величина $e^{-\frac{E}{RT}}$ есть доля молекул, обладающих при температуре $T(K)$ энергией, большей или равной E (кДж/моль).

Примем, что система находится на I энергетическом уровне (рис. 149). При переходе с уровня I на энергетический уровень II необходимо прежде всего затратить энергию для разрушения внутренних связей исходных веществ — энергию активации E_1 . Система перейдет в состояние I' , после чего реакция самопроизвольно приведет систему к уровню II . При переходе от энергетиче-

ского уровня I к уровню II выделится некоторое количество энергии, равное E_2 . Таким образом, тепловой эффект прямой экзотермической реакции может быть определен из выражения

$$Q = E_1 - E_2.$$

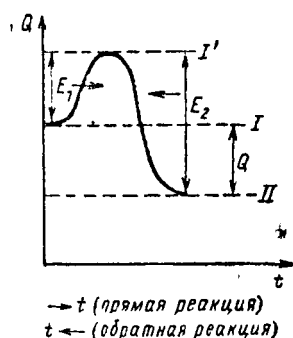


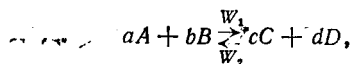
Рис. 149. Энергия активации прямой и обратной реакции

Обратный ход реакции требует предварительной затраты энергии E_2 , после чего возможна реакция и переход системы к уровню I . Количество затраченной энергии в этом случае больше количества выделенной энергии, поэтому обратная реакция является эндотермической; расход энергии равен

$$Q = E_2 - E_1.$$

Скорость химической реакции, согласно закону действующих масс, пропорциональна произведению концентраций реагирующих веществ.

Для бимолярной реакции при сохранении одного и того же фазового состояния можно написать



где a , b , c и d — соответственно числа молекул веществ A , B , C и D , участвующих в реакции;
 W_1 и W_2 — скорости прямой и обратной реакций, равные

$$W_1 = K_1 C_A^a C_B^b;$$

$$W_2 = K_2 C_C^c C_D^d,$$

здесь C_A , C_B , C_C и C_D — концентрации реагирующих веществ, моль/см³;

K_1 и K_2 — константы скорости прямой и обратной реакций.

При равновесии $W_1 = W_2$, т. е.

$$K_1 C_A^a C_B^b = K_2 C_C^c C_D^d,$$

отношение констант скоростей прямой и обратной реакций представляет собой константу равновесия:

$$K_c = \frac{K_1}{K_2} = \frac{C_C^c C_D^d}{C_A^a C_B^b}.$$

Константа равновесия зависит от температуры и типа химической реакции. Зависимость K_c от температуры устанавливается законом Вант-Гоффа:

$$\frac{d \ln K_c}{dT} = \frac{Q}{RT^2},$$

где Q — тепловой эффект реакции, кДж.

Из этой зависимости видно, что низкие температуры способствуют протеканию экзотермических реакций, а при высоких температурах создаются условия для развития эндотермических реакций.

При неизменной концентрации реагирующих веществ зависимость константы скорости реакции от температуры выражается законом Аррениуса:

$$K = K_0 e^{-\frac{E}{RT}},$$

где K_0 — предэкспоненциальный множитель, пропорционален скорости теплового движения молекул, см³/с;

R — газовая постоянная $\sim 8,3$ кДж/(моль·К);

T — абсолютная температура, К;

E — энергия активации, кДж/моль.

Для большинства реакций $E = 80000$ — 160000 кДж/моль.

Зависимость скорости реакции от температуры можно представить из следующего примера: при $E = 80000$ кДж/моль и при 1000 К доля молекул, способных вступать в реакцию, равна примерно 0,0045%, а при 2000 К она составляет 0,67%, т. е. в этом случае скорость химической реакции возрастает почти в 150 раз. В интервале температур от 500 до 1000 К скорость реакции возрастает почти в 20000 раз. Чем выше значение E , тем больше увеличивается скорость реакции с повышением температуры.

Величина $e^{-\frac{E}{RT}}$ меняется в пределах от 0 до 1. При $T = 0$ или при $E = \infty$ $e^{-\frac{E}{RT}} = 0$. При $T = \infty$ или при $E = 0$ $e^{-\frac{E}{RT}} = 1$. В последнем случае коэффициент K ста-

новится равным K_0 , что соответствует максимальному значению скорости реакции.

Таким образом, под K_0 понимают коэффициент, значение которого пропорционально полному числу столкновений, а под K — коэффициент, пропорциональный числу столкновений, которые заканчиваются реакцией. При росте температур число столкновений, сопровождающихся реакцией увеличивается и, следовательно, существенно увеличивается скорость химической реакции.

Для бимолекулярной реакции формула для определения скорости химической реакции может быть записана так:

$$W = K_0 C_1 C_2 e^{-\frac{E}{RT}} \text{ (молекулы исходных веществ)}^2 / \text{см}^3 \cdot \text{с} \text{ .}$$

2. Цепные реакции

Согласно законам классической кинетики, скорость химической реакции определяется концентрацией реагирующих веществ, температурой и давлением. Механизм протекания реакции длительное время рассматривали как чисто молекулярный, описываемый обычными стехиометрическими уравнениями. Однако наблюдения показали, что реакции часто носят более сложный характер. Объяснение особенностей этих процессов развито академиком Н. Н. Семеновым и его сотрудниками в теории цепных реакций. Согласно этой теории, в процессе столкновения молекул образуются атомы и радикалы, являющиеся активными центрами. Возникновение активных центров может произойти вследствие столкновения между неактивными молекулами и молекулами, обладающими энергией, при столкновении молекулы со стенкой сосуда или в результате термической диссоциации. Активными центрами могут служить как конечные продукты реакции, так и промежуточные.

Энергия активации при взаимодействии этих частиц со стабильными молекулами значительно меньше, поэтому их столкновения чаще сопровождаются реакцией. Это приводит к активизации процесса. Скорость цепных реакций по сравнению с ожидаемой скоростью молекулярных реакций в десятки и сотни тысяч раз больше.

Цепные реакции делятся на два типа — неразветвленные и разветвленные. Неразветвленной реакцией называется такая, при которой каждый активный центр

при взаимодействии порождает один новый активный центр, который в свою очередь дает начало новой цепи. Разветвленными реакциями называются такие, при которых один активный центр вызывает образование двух и более новых активных центров.

Скорость реакции неразветвленного типа показана на рис. 150.

Рост скорости до максимума в начале процесса связан с первичным ростом числа свободных атомов.

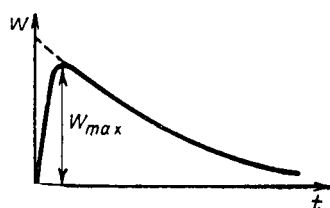


Рис. 150. Скорость неразветвленной цепной реакции

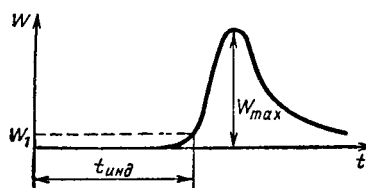
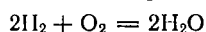


Рис. 151. Скорость разветвленной цепной реакции

Дальнейшее снижение скорости реакции при $T = \text{const}$ объясняется уменьшением концентрации реагентов.

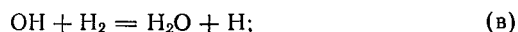
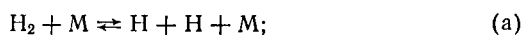
Примером разветвленной цепной реакции может служить реакция горения водорода, оксида углерода и др. Реакция соединения водорода с кислородом

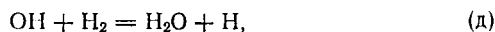


дает основание найти скорость процесса по уравнению

$$W = KC_{\text{H}_2}^2 C_{\text{O}_2}.$$

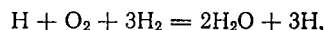
Однако действительный ход процесса не подчиняется этому условию и находится в прямом противоречии с ним, а именно: из указанного следует, что по мере расходования молекул H_2 скорость реакции должна падать, в то время как наблюдается ее рост. Исследования показали, что горение H_2 , как и горение других видов газообразного топлива, представляет собой разветвленную цепную реакцию, протекающую через промежуточное образование активных центров в виде атомов H , O и радикала OH :



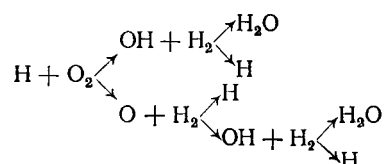


где М — любая молекула, обладающая энергией.

В итоге можно написать



т. е. один активный центр вызывает возникновение трех новых центров. Таким образом, весь процесс представляется следующей схемой



Если бы в процессе реакции не было гибели активных центров, то их нарастание привело бы систему к самовоспламенению и возникновению цепного взрыва.

Опытом найдено, что реакция (б) протекает медленнее других, так как энергия активации ее наибольшая $E \approx 75000$ кДж/кмоль. Для реакции (в) $E \approx 41870$ кДж/кмоль и для реакции (г) $E \approx 25122$ кДж/кмоль. Таким образом, реакция (б) является лимитирующей и ее скорость определяет скорость процесса в целом:

$$W = K C_{\text{H}} C_{\text{O}_2}.$$

График изменения скорости реакции W во времени t показан на рис. 151. В начале процесса реакция протекает незаметно с очень малой скоростью. Этот период получил название индукционного периода реакции $t_{\text{инд}}$. В течение этого периода происходит накопление активных центров. Выделяющаяся в процессе реакции энергия расходуется на химическую работу создания активных атомов и радикалов. Период индукции в значительной мере зависит от начальных условий реакции.

Когда количество атомарного водорода достигает предельно возможной концентрации, скорость реакции становится максимальной и вслед за этим начинает уменьшаться, так как вследствие реакции сокращается количество реагирующих веществ. Уменьшение скорости реакции протекает медленнее, чем шло ее нарастание от конца индукционного периода до максимального значения.

Ход процесса в этот период можно назвать установившимся, так как содержание активных центров находится в непрерывном соответствии с содержанием горючих элементов в реагирующей системе.

В случае, если в ходе реакции повышается температура, то картина процесса значительно усложняется.

Если в период индукции основную роль играет процесс термической активации, обуславливающей ускорение реакции и вызванный этим разогрев системы, то нарастающая скорость реакции называется тепловым воспламенением. В том случае, если ускорение реакции обеспечено накоплением активных центров в индукционный период, то в системе имеет место цепное воспламенение или цепной взрыв.

Франк-Каменецкий Д. А. определяет характер воспламенения по безразмерной величине:

$$\delta = \frac{Q}{4\lambda} \cdot \frac{E}{RT_0^2} d^2 W,$$

где Q — тепловой эффект реакции, Дж/моль;
 λ — теплопроводность смеси, Дж/(см·с·К);
 T_0 — температура стенок реакционного сосуда, К;
 W — скорость реакции в молях вещества, для которого рассчитан тепловой эффект, моль/(см³·с).

Если значение δ для сосуда диаметром d и длиной L достигает критического значения

$$\delta_{кр} = 2 + 0,843 \left(\frac{d}{L} \right)^2,$$

то воспламенение носит тепловой характер, если же $\delta < \delta_{кр}$, то воспламенение носит цепной характер. Анализ критического значения $\delta_{кр}$ говорит о том, что чем больше диаметр сосуда, тем при меньшей скорости реакции может иметь место тепловое воспламенение. Зависимость скорости разветвленных цепных реакций от давления и температуры очень сложна. Для этих реакций существуют два предела давлений — верхний и нижний, вне которых воспламенение не происходит.

Нижний предел слабо зависит от температуры и сильно зависит от состава смеси и формы сосуда. Низкое давление создает условие для обрыва цепей на стенках сосуда. При росте давления разветвления цепей развиваются, возникает саморазгон реакции, при-

водящий к цепному воспламенению. Верхний предел давления находится в большой зависимости от температуры и состава смеси, но практически не зависит от формы сосуда. При высоких давлениях обрыв цепей вызывается взаимным столкновением молекул, поэтому верхний предел в большой мере зависит от наличия в смеси инертных примесей. Зависимость указанных пределов от температуры образует так называемый «полуостров воспламенения». В пределах «полуострова воспламенения» происходит разветвленная реакция, приводящая к цепному самовоспламенению, а при высоких температурах — к взрыву. За пределами идет мед-

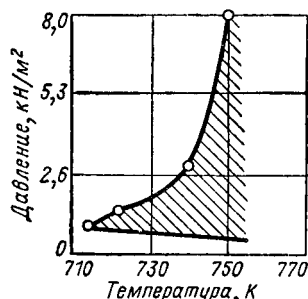


Рис. 152. Полуостров воспламенения

ленная реакция. «Полуостров воспламенения» для водородно-кислородной смеси показан на рис. 152.

3. Тепловое воспламенение

При воспламенении и горении, происходящем в каком-то объеме, всегда наблюдаются неравномерные поля температур и концентраций. В центре вследствие теплообмена на границе объема имеют место более высокие температуры и, следовательно, большая скорость реакции, а значит, и большая концентрация продуктов реакций. В связи с этим в системе неизбежно возникают процессы тепло- и массопереноса. Анализ этих явлений в простейшем случае связан с решением дифференциальных уравнений теплопроводности и диффузии, которые для неподвижной среды могут быть представлены в следующем виде:

$$C_p \rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) + q K_0 e^{-\frac{E}{RT}} f(C);$$

$$-\frac{\partial C}{\partial \tau} = \operatorname{div} \left(\frac{D}{T} \operatorname{grad} CT \right) - K_0 e^{-\frac{E}{RT}} f(C),$$

где D — коэффициент диффузии, $\text{м}^2/\text{с}$;
 λ — коэффициент теплопроводности, $\text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$;

C — концентрация реагирующих веществ, моль/м³;
 q — удельный тепловой поток, Вт.

Уравнение диффузии получено для неизотермического процесса, причем градиент относительной концентрации, равный $-D \frac{dN}{dX}$ см³/(см²·с), выражен через величину молярной концентрации

$$N = \frac{R}{P} CT.$$

Решение этой системы уравнений математически сложно и поэтому требует ряда упрощений.

Рассмотрим процесс самовоспламенения на простейшем физическом примере.

В сосуде объемом V находится горючая смесь. Температура стенок сосуда поддерживается равной T_0 . В результате химической реакции температура горючей смеси возросла до температуры T .

Условно принимаем, что весь объем газа реагирует и внутри объема не существует различия в концентрации и температуре. Тогда, по закону Аррениуса, скорость реакции равна

$$W = K_0 e^{-\frac{E}{RT}} f(C) \text{ моль/(с·см}^3\text{)}.$$

Если тепловой эффект реакции равен Q (кДж/кмоль), то тепло, выделенное в единицу времени в сосуде, содержащем объем газа, равный V , может быть определено из уравнения

$$q_{ТВ} = QWV.$$

Подставив выражение для скорости, получим

$$q_{ТВ} = QK_0 e^{-\frac{E}{RT}} f(C) \cdot V.$$

Из формулы видно, что зависимость тепловыделения от температуры горения носит экспоненциальный характер. Одновременно с выделением тепла при горении смеси имеют место и потери тепла через стенки сосуда. Количество потерянного тепла можно представить в виде

$$q_{отв} = \alpha S(T - T_0),$$

где α — коэффициент теплоотдачи от газа к стенке, Вт/(м²·К);

S — общая поверхность стенок сосуда, м².

Зависимость теплоотвода от температуры носит линейный характер.

Построим в координатах q — T графики, соответствующие $q_{\text{тв}}$ и $q_{\text{отв}}$ (рис. 153). По оси абсцисс отложена температура, по оси ординат — количество тепла, выделяющегося или отводимого от сосуда в единицу времени. Кривая I соответствует $q_{\text{тв}}$ и кривые II' и II'' — $q_{\text{отв}}$ при различных условиях. Кривая II''' соответствует слабому теплоотводу, при котором приход тепла всегда остается выше расхода. В этом случае реакция будет всегда идти в сторону повышения температуры системы,

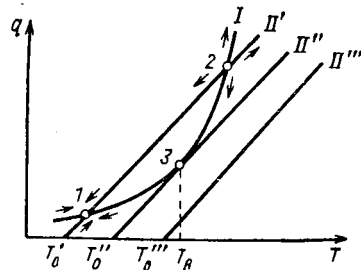


Рис. 153. Условия воспламенения при различных кривых теплоотвода

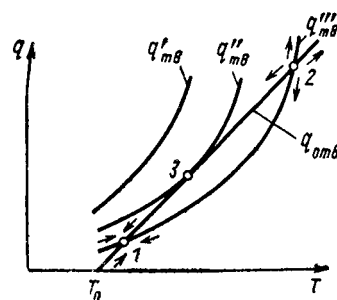


Рис. 154. Условия воспламенения при различных кривых выделения тепла

т. е. слева направо, вызывая саморазгон, приводящий к самовоспламенению или взрыву горючей смеси. Увеличивая интенсивность теплоотвода, можно получить кривую II'' , касательную к кривой I . В точке касания 3 тепловыделение равно теплоотводу. Температура смеси в точке 3 характеризует температуру воспламенения горючей смеси при данных условиях. Таким образом, $T_{\text{в}}$ зависит от условий проведения опыта и параметров смеси, а не является физико-химической константой, характеризующей данную горючую смесь. При увеличении теплоотвода, соответствующего кривой II' , самовоспламенение невозможно. Действительно, кривые I и II' имеют две характерные точки пересечения. Рассматривая их увидим, что точка 1 является точкой стабилизированного окисления в области низких температур. Любое отклонение от этой точки приведет систему в состояние, при котором она будет стремиться вернуться в точку 1 . Так при смещении процесса влево от точки 1

будем иметь превышение тепловыделения над теплоотводом ($q_{\text{ТВ}} > q_{\text{ОТВ}}$), что приведет к повышению температуры смеси, т. е. к движению в направлении точки 1. При искусственном смещении системы вправо от точки 1 получим $q_{\text{ОТВ}} > q_{\text{ТВ}}$, что обеспечит снижение температуры, т. е. приведет систему опять в точку 1 где $q_{\text{ОТВ}} = q_{\text{ТВ}}$. Аналогичным рассуждением можно убедиться, что вторая точка пересечения (точка 2) является точкой неустойчивого равновесия в области высоких температур. Малейшее отклонение от точки 2 влево или вправо приведет систему в состояние, при котором $q_{\text{ТВ}}$ будет больше или меньше $q_{\text{ОТВ}}$. Уход влево от точки 2 соответствует положению, для которого $q_{\text{ОТВ}} > q_{\text{ТВ}}$, что повлечет за собой снижение температуры, т. е. еще больший уход влево, вплоть до точки 1. При отклонении вправо от точки 2 имеем $q_{\text{ОТВ}} < q_{\text{ТВ}}$, при этом температура процесса будет возрастать, начнется саморазгон реакции горения.

На рис. 154 показан случай, при котором интенсивность теплоотвода сохраняется постоянной, а меняется состав горючей смеси, что соответствует различным кривым тепловыделения $q'_{\text{ТВ}}$, $q''_{\text{ТВ}}$ и q''' . При изменении $q_{\text{ТВ}}$ меняется и положение точки, характеризующей температуру воспламенения. Таким образом, необходимым минимальным условием возникновения самовоспламенения является наличие точки касания кривых $q_{\text{ТВ}}$ и $q_{\text{ОТВ}}$. В точке касания 3 имеет место равенство

$$q_{\text{ТВ}} = q_{\text{ОТВ}}$$

и равенство скорости изменения этих величин при изменении температуры

$$\frac{dq_{\text{ТВ}}}{dT} = \frac{dq_{\text{ОТВ}}}{dT}. \quad (\text{XXIV-1})$$

Подставив в уравнение (XXIV-1) полученные ранее выражения, имеем

$$QK_0 e^{-\frac{E}{RT}} f(C)V = \alpha S (T - T_0). \quad (\text{XXIV-2})$$

Разделив переменные и дифференцируя, получим

$$QK_0 e^{-\frac{E}{RT}} f(C)V \frac{E}{RT^2} = \alpha S. \quad (\text{XXIV-3})$$

Разделив (XXIV-2) на (XXIV-3) получаем выражение

$$T - T_0 = \frac{RT^2}{E}. \quad (\text{XXIV-4})$$

Решая квадратное уравнение находим из выражения (XXIV-4) значение для T_b (формула Семенова)

$$T_b = \frac{E}{2R} \pm \sqrt{\left(\frac{E}{2R}\right)^2 - \frac{T_0 E}{R}}. \quad (\text{XXIV-5})$$

Решение с положительным знаком дает нереальное значение T_b и его отбрасывают.

Тогда

$$T_b = \frac{E}{2R} - \sqrt{\left(\frac{E}{2R}\right)^2 - \frac{T_0 E}{R}}, \quad (\text{XXIV-6})$$

Разлагая подкоренное число в ряд, получим

$$T_b = \frac{E}{2R} - \frac{E}{2R} \left(1 - \frac{2RT_0}{E} - \frac{2R^2 T_0^2}{E^2}\right). \quad (\text{XXIV-7})$$

Отбрасывая члены со степенью выше второй, получим ошибку не более чем в 1%, так как $\frac{RT_0}{E} \ll 0,05$.

Тогда

$$T_b \approx T_0 + \frac{RT_0^2}{E} \quad (\text{XXIV-8})$$

или

$$\Delta T = T_b - T_0 \approx \frac{RT_0^2}{E}, \quad (\text{XXIV-9})$$

где ΔT — величина разогрева газовой смеси от начальной температуры равной температуре стен сосуда T_0 до T_b .

Таким образом, из последнего выражения следует, что при

$$\Delta T < \frac{RT_0^2}{E}$$

воспламенение невозможно.

Для часто встречающихся случаев, при $E = 125\,000 - 250\,000$ и при $T_0 = 700\text{ К}$ величина $\Delta T < 50$ град. Работы Семенова Н. Н. показали, что воспламенение горючей смеси может быть получено не

только повышением температуры, но и изменением давления при сохранении постоянной температуры.

При увеличении давления растет скорость реакции и вместе с ней увеличивается $q_{тв}$, при этом $q_{отв}$ тепла остается постоянным. Создаются благоприятные условия для воспламенения, обеспеченные тем, что

$$q_{тв} > q_{отв}.$$

Семенов Н. Н. дает приближенную формулу для опре-

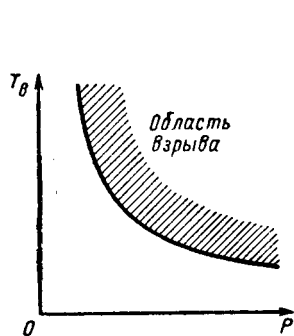


Рис. 155. Зависимость между температурой воспламенения T_v и давлением P при постоянном составе исходной смеси

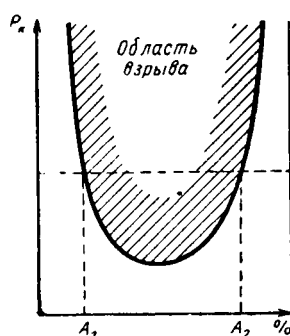


Рис. 156. Зависимость критического давления P_k от состава исходной смеси

деления зависимости T_v от давления, которая для бимолекулярной реакции равна:

$$\ln \frac{P_k}{T_v^2} = \frac{A}{T_0} + B,$$

где P_k — давление соответствующее T_v ;

$$A = \frac{E}{2R};$$

B — константа, зависящая от свойств газовой смеси и условий эксперимента.

Связь между давлением и температурой воспламенения горючей смеси представлена на рис. 155. Из рисунка видно, что для смеси данного состава существует минимальное значение давления, ниже которого смесь оказывается неспособной воспламеняться.

При постоянном значении температуры критическое давление зависит от состава горючей смеси. Эта зависимость представлена на рис. 156.

Из рисунка видно, что при заданном давлении воспламенение возможно только для горючей смеси, состав которой ограничен определенными концентрациями A_1 и A_2 , которые называются концентрационными границами (пределами) воспламенения. Эти границы являются функциями давления и при увеличении давления до $+\infty$ стремятся к нулю или к 100%. Из рисунка видно также, что существует минимальный предел давления, ниже которого невозможно воспламенение смеси любого состава.

4. Массообмен и теплообмен в пламени

Пламенем называют объем движущихся газов, в котором протекают процессы горения. Массообмен и теплообмен имеет место как внутри пламени так и между пламенем и окружающей его средой. Движущей силой этих процессов является наличие неравномерного поля концентраций и температур. При стационарном процессе горения различают три характерных режима распространения пламени: ламинарный (нормальный), турбулентно-мелкомасштабный и турбулентно-крупномасштабный. Под нормальным распространением пламени понимается режим, при котором горючая смесь нагревается за счет тепла, поступающего из зоны горения исключительно посредством теплопроводности. Нормальная скорость распространения пламени относится к зоне пламени, имеющей толщину 0,5—0,6 мм. В зоне пламени протекают реакции горения. Непосредственно к зоне пламени прилегает зона подогрева горючей смеси до T_v . Ее толщина колеблется от 0,1 до 0,5 мм. Зону пламени и зону подогрева называют фронтом горения.

Михельсон В. А. дает следующее определение скорости распространения пламени: нормальной скоростью перемещения фронта горения называется скорость, отнесенная к холодному и еще не воспламененному газу, с которой пламя перемещается по нормали к его поверхности и которая своим происхождением обязана процессу передачи тепла посредством молярной теплопроводности. Линейная скорость распространения пламени, при этом определяется выражением:

$$U_n = \frac{V_m}{\rho_0} \text{ см/с,}$$

где V_m — количество сгорающего газа в граммах на единицу поверхности фронта горения в секунду, г/(см²·с);

ρ_0 — плотность холодной горючей смеси, г/см³.

Одним из простейших определений U_n является соотношение, полученное для конуса фронта горения бунзеновской горелки и носящее название закона косинуса (закон Гун-Михельсона).

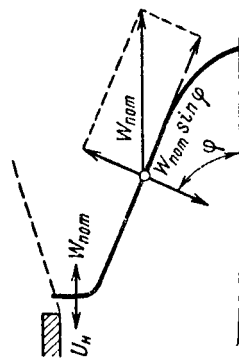


Рис. 157. Схема фронта горения в круглой горелке (ламинарный факел)

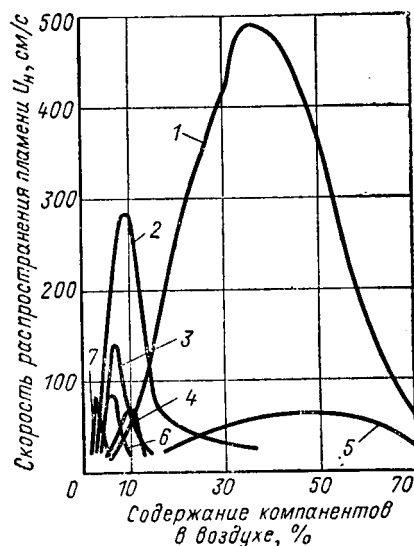


Рис. 158. Зависимость скорости распространения пламени от состава смеси:

1 — водород; 2 — ацетилен; 3 — этилен;
4 — метан; 5 — окись углерода; 6 — этан;
7 — пентан

Оно имеет вид:

$$W_{\text{норм}} = W_{\text{пот}} \cos \varphi = U_n.$$

На поверхности конуса горения имеет место равенство скоростей: проекции скорости потока на нормаль к образующей конуса $W_{\text{норм}}$ и нормальной скорости распространения фронта горения U_n (рис. 157). Зная, что при ламинарном движении потока эпюра скорости имеет вид параболы, можно для каждой точки конуса горения определить величину U_n . Нижний край фронта горения, прилегающий к краям горелки играет роль постоянного кольцевого зажигательного пояса, так как здесь $\cos \varphi = 1$ и следовательно $U_n = W_{\text{пот}}$, т. е. нижняя периферийная часть факела является наиболее устойчивой.

Нормальная скорость распространения пламени зависит от состава горючей смеси (наличия в газе инертных примесей), давления и от начальной температуры смеси. Как видно из рис. 158 зависимость от состава смеси носит экстремальный характер. Для любых смесей есть возможные пределы воспламенения.

Пределы воспламенения воздушных смесей в зависимости от содержания в них горючих, %:

	Нижний	Верхний
Метан	5,00	15,00
Этан	3,22	12,45
Пропан	2,37	9,50
Этилен	2,75	28,60
Бензол	1,41	6,75
Водород	4,00	74,20
Оксид углерода	12,50	74,20

При увеличении давления пределы воспламенения меняются, а значение скорости U_n снижается. Зависимость пределов воспламенения от давления дана в табл. 10.

Таблица 10

Пределы воспламенения воздушных смесей при различных давлениях

Горючий газ	Давление, P , Н/м ²	Пределы воспламенения, %	
		нижний	верхний
CH ₄	100	6,6	12,7
	2 100	7,5	12,0
	40 000	5,2	46,0
CO	100	14,2	71,0
	3 000	20,3	58,8
	12 500	20,7	51,6

При кислородных смесях возрастание скорости U_n с увеличением давления наблюдается только при малых давлениях. При больших давлениях скорость в широких пределах изменения давления практически остается постоянной. Влияние температуры подогрева смеси на U_n характеризуется данными Пассауэра (рис. 159). Как видно из рисунка увеличение начальной температуры смеси приводит к увеличению скорости горения. Эта зависимость носит следующий характер

$$U_n = aT_0^2,$$

где a — эмпирический коэффициент.

Переход от ламинарного потока горючей смеси к турбулентному сопровождается интенсификацией массо- и теплообменных процессов. Различают два случая турбулизации: 1) мелкомасштабная турбулентность, при которой масштаб турбулентности мал по сравнению с шириной зоны пламени ($l < \delta$); 2) крупномасштабная турбулентность, при которой масштаб турбулент-

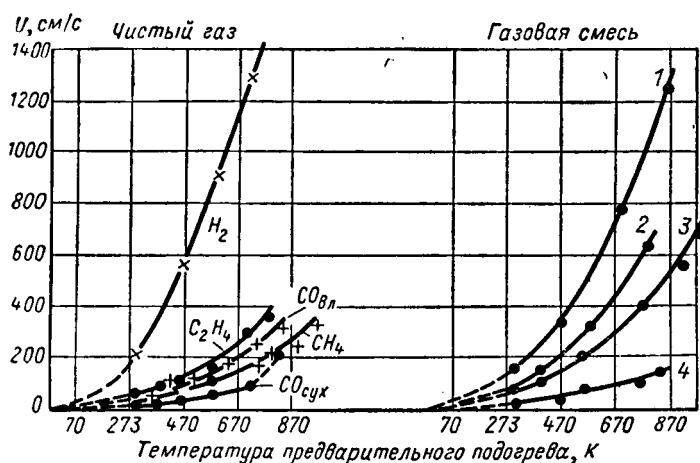


Рис. 159. Зависимость скорости распространения пламени от температуры предварительного подогрева:

1 — водяной газ; 2 — полуводяной газ; 3 — городской газ; 4 — воздушный газ

ности значительно превышает ширину зоны пламени ($l > \delta$). Во втором случае фронт пламени деформируется и при увеличении пульсационной составляющей W' разрывается, образуя ряд мелких очагов горения, распространенных в потоке горячей смеси. Таким образом вместо фронта горения наблюдается горение в объеме.

На рис. 160 представлены схемы фронта горения при ламинарном и турбулентном движении потока. Скорость турбулентного распространения пламени при $W' < U_n$ может быть определена из следующего выражения:

$$U_T = U_n A \sqrt{1 + B \left(\frac{W'}{U_n} \right)^2} \text{ см/с,}$$

где A и B — константы близкие к единице.

Из уравнения следует, что чем больше смесь отличается от стехиометрической, т. е. чем меньше величина U_n , тем большее значение приобретает турбулизация потока. В факеле наблюдается неравномерность полей давления и скорости, благодаря чему возникает дефор-

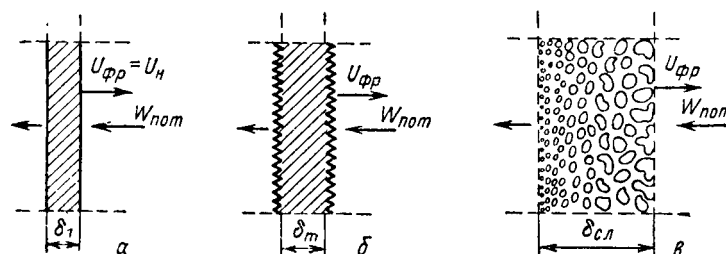


Рис. 160. Схемы фронта горения:

a — ламинарное движение, $l=0$; b — движение при мелкомасштабной турбулентности, $l < \delta$; v — движение при крупномасштабной турбулентности, $l > \delta$

мация фронта пламени, которая влечет за собой авто-турбулизацию потока. Последняя имеет место и при ламинарном режиме движения потока.

5. Структура и длина пламени

Под длиной факела понимают расстояние от кромки сопла до фронта горения, за пределами которого находятся только продукты сгорания.

Структурой факела называется характеристика его с точки зрения образования кинетического и диффузионного фронта горения.

Структура и длина открытого факела при прочих равных условиях определяется двумя параметрами: 1) характером движения потока и 2) количеством первичного воздуха в горючей смеси.

В пределах области диффузионного горения относительная длина факела (отношение длины факела l_f к его ширине b) определяется отношением скорости потока $W_{пот}$ к скорости диффузии $W_{диф}$. Массообмен с окружающим воздухом происходит только в периферийном слое путем молекулярной диффузии. Увеличение скорости вытекания газа приводит к удлинению факела.

В переходной области процесс диффузии ускоряется, что приводит к более интенсивному проникновению окислителя к центру факела. В верхней части факела наступает турбулентное состояние, охватывающее все сечение факела. По мере увеличения скорости вытека-

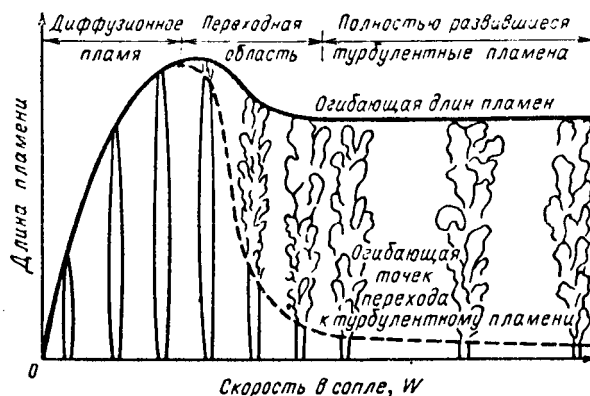


Рис. 161. Зависимость длины пламени от скорости движения горючей смеси

ния газа расстояние от кромки сопла до начала образования вихрей уменьшается.

Относительная длина диффузионного факела сокращается.

При турбулентном движении газового потока достигается прямая пропорциональность между турбулентной диффузией и скоростью потока. На рис. 161 показан характер изменения длины пламени и его структуры в зависимости от скорости выхода газа из сопла, полученный Хоттелем и Гаусорном.

Пламя газа, горящего в попутной параллельной струе воздуха, будет более коротким за счет образования турбулентной пульсации воздушной струи и возрастания в связи с этим скорости диффузии окислителя.

Зависимость структуры факела от количества первичного воздуха, подаваемого в смесь с горючим, показана на рис. 162. Пунктирные линии показывают границу факела. Область факела I представляет собой горючую смесь с различными содержаниями первичного воздуха. Область II образована смесью горючего газа

и продуктов сгорания (рис. 162, б) или чистым газом (рис. 162, в).

Область III состоит из продуктов сгорания и воздуха. Границы раздела указанных областей представляют собой фронты пламени:

F_{I-II} и F_{I-III} — кинетический фронт распространения пламени;

F_{II-III} — диффузионный фронт распространения пламени.

На рис. 162, а показан характер факела при коэффициенте расхода воздуха в горючей смеси равном единице ($n=1$). В этом случае кинетический фронт горения имеет минимальную поверхность, так как распространение пламени определяется только скоростью химической реакции.

При уменьшении количества первичного воздуха в смеси (рис. 162, б) при $n < 1$ поверхность кинетиче-

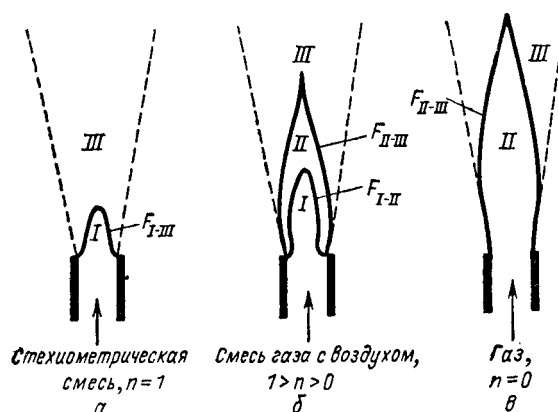


Рис. 162. Структура факела в зависимости от количества первичного воздуха в горючей смеси

ского фронта возрастает. Это объясняется тем, что недостающее количество воздуха поступает из окружающей среды путем диффузии, скорость которой лимитирует скорость распространения пламени.

С уменьшением коэффициента расхода воздуха снижается теплота сгорания смеси, что сопровождается спадом температурного уровня горения и следовательно ведет к снижению скорости распространения пламени.

Область II и ограничивающий ее диффузионный фронт горения F_{II-III} также зависят от количества первичного воздуха в горючей смеси.

Чем меньше коэффициент расхода воздуха, тем больше развивается область I и сокращается область II . Фронты F_{I-II} и F_{II-III} сближаются, окончательно сливаясь при $n=0$ (рис. 162, в).

При большом значении n кинетический фронт горения сокращается, а область II увеличивается, так как сжигание несгоревшего газа замедляется в связи с забалластиванием горючей смеси продуктами сгорания, поступающими из кинетического фронта горения. При $n>1$ кинетический фронт горения увеличивается, так как, избыточный воздух в горючей смеси играет роль балласта. Область II в этом случае будет отсутствовать. Исследования показали, что максимальная скорость распространения пламени соответствует горючей смеси с коэффициентом расхода воздуха несколько меньшим единицы, т. е. при горючей смеси обогащенной горючим.

Обогащение первичного воздуха кислородом уменьшит содержание балласта в горючей смеси, что приведет к сокращению кинетического фронта горения. К этому же приведет и предварительный подогрев горючей смеси.

6. Стабилизация пламени

Стабильный факел возможен только при правильной организации горения, исключающей явление отрыва факела от кромки сопла или проскока его внутрь горелки.

На стабильность факела влияет гидродинамика горючей смеси в выходном сечении сопла, тепловой режим у кромки сопла, количество первичного воздуха в смеси, состав горючего, его температура и т. д.

Свободный факел будет устойчивым при обеспечении динамического равновесия у кромки выходного сечения сопла между скоростью распространения фронта пламени U_n и скоростью движения горючей смеси $W_{пот}$, (см. рис. 157). Поток при выходе из сопла расширяется за счет наличия в нем некоторого избыточного давления и образует в нижней части факела горизонтальный участок, в котором скорость потока горючей смеси минимальна.

Здесь в первую очередь достигается равенство между скоростью горючей смеси $W_{\text{пот}} = W_{\text{норм}}$ и нормальной скоростью распространения пламени $U_{\text{н}}$. Это участок пламенного конуса (как говорилось выше) играет роль зажигательного пояса.

На остальном участке скорость распространения пламени компенсирует лишь нормальную составляющую скорости потока газовой смеси $U_{\text{н}} = W_{\text{пот}} \cos \varphi$, в то время как вторая составляющая $W_{\text{пот}} \sin \varphi$ остается неуравновешенной и сносит точку воспламенения по поверхности фронта пламени к его вершине. При достаточно большом значении составляющей $W_{\text{пот}} \sin \varphi$ возможен отрыв пламени от среза сопла. На вершине конуса пламени $W_{\text{пот}} = U_{\text{н}}$. Скорость потока при ламинарном факеле увеличивается в направлении к его оси, следовательно, и конус горения будет иметь в этом случае правильную форму с закругленной вершиной. При турбулентном движении «зажигательный пояс» сокращается в размерах или вообще исчезает. Устойчивость факела в этом случае достигается в более узких пределах изменения режима и обеспечивается возникающими внутри факела обратными вихрями, благодаря которым повышается температура у среза сопла горелки.

В большой мере устойчивость факела зависит от количества первичного воздуха, содержащегося в горючей смеси. Чем ближе смесь к стехиометрической, тем меньше устойчивость факела и наоборот при истечении из сопла горелки газа без примеси первичного воздуха стабильность факела при прочих равных условиях максимальна. Это явление объясняется тем, что при кинетическом сжигании подсос воздуха из окружающей среды балластирует горячую смесь в результате чего у кромки сопла создаются условия неблагоприятные для образования зажигательного кольца. Напротив, подсос воздуха к струе чистого газа или к горючей смеси с небольшим содержанием первичного воздуха способствует повышению температуры и образованию устойчивого зажигательного кольца.

Нарушение стабильности факела может быть связано и с явлением проскока пламени в сопло (явление обратного удара). Явление проскока возможно при нарушении равновесия $W_{\text{пот}} = U_{\text{н}}$ в сторону увеличения $U_{\text{н}}$. Этому способствует повышение температуры стенки сопла. Чем ближе горючая смесь к стехиометрической,

тем благоприятнее условия для проникновения фронта пламени внутрь горелки. Уменьшение диаметра сопла оказывает сопротивление проскоку вследствие увеличения тепловых потерь и уменьшения в связи с этим U_n . При критическом диаметре $d_{кр}$ величина U_n приближается к нулю, этим объясняется «тушащий» эффект стенки сопла. Естественно, что материал стенки или искусственное охлаждение ее играет очень важную роль.

Глава XXV

ГОРЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ТОПЛИВА

1. Горение газообразного топлива

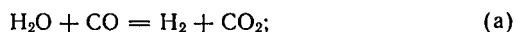
Газообразное топливо состоит из горючих и негорючих (CO_2 , H_2O и т. д.) элементов. Основными горючими компонентами большинства газов является водород, окись углерода, метан и др. углеводороды.

Горение окиси углерода

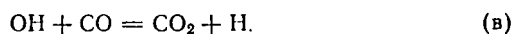
Сухая окись углерода до 700°C практически с кислородом не соединяется. Выше этой температуры идет медленная гетерогенная реакция окисления CO на поверхности твердых материалов. В присутствии паров воды и водорода реакция протекает как гомогенная цепная реакция.

На основе работ Зельдовича Я. Б., Семенова Н. Н., Кондратьева В. Н., механизм этой реакции может быть представлен следующими элементарными стадиями:

Зарождение цепей:



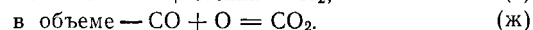
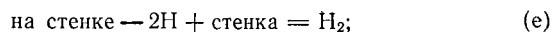
Продолжение цепей:



Разветвление цепей:



Обрыв цепей:



Лимитирующей скоростью процесса горения является наиболее медленная из реакций, а именно реакция взаимодействия СО с гидроксидом (в).

Роль водяного пара и водорода заключается в образовании начальной концентрации активных центров Н и ОН, необходимых для разветвления цепей. Таким образом, скорость реакции пропорциональна концентрации СО и начальной концентрации водяных паров в смеси

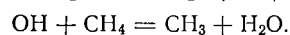
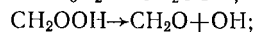
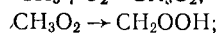
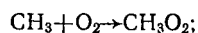
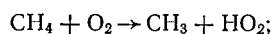
$$W = K C_{\text{CO}} \cdot C_{\text{H}_2\text{O}(\text{нач})}$$

Энергия активации процесса горения СО зависит от состава смеси и меняется в пределах от 88 до 205 МДж/моль.

Горение углеводов

Горение углеводов протекает по более сложному цепному механизму с образованием радикала и атома кислорода.

Горение метана можно представить следующими основными элементарными реакциями:



Для реакций горения углеводов характерен большой период индукции. Вызвано это тем, что наряду с образованием цепей имеет место их обрыв, что значительно замедляет реакцию.

Горение углеводов осложняется параллельно идущим процессом термического разложения, в результате которого образуются сажистый углерод, водород и метан.

В соответствии с существующими представлениями о процессе горения различают кинетическое и диффузионное горение газа.

Кинетическое горение

Под кинетическим горением понимают горение готовой смеси горючего и окислителя. В этом случае факторы, влияющие на процесс смесеобразования, практически

никакой роли не играют. Полное время процесса определяется только скоростью химической реакции. Если пламя распространяется в неподвижной смеси или смеси, движущейся ламинарно, то нагрев горючей смеси определяется молекулярной теплопроводностью, а скорость распространения пламени называется нормальной скоростью распространения пламени U_n .

При турбулентном движении горючей смеси передача тепла определяется турбулентной диффузией. При этом скорость распространения пламени называется турбулентной скоростью распространения пламени U_t .

Определение величин U_n и U_t и анализ факторов, влияющих на них, рассмотрены в гл. XXIV.

В особых условиях может возникнуть резкое возрастание скорости распространения пламени, носящее характер взрывной волны. Подобное распространение пламени носит название детонационного горения. Промежуточное горение между турбулентным и детонационным называется вибрационным горением.

Наиболее распространенным случаем горения в металлургических печах является горение смеси в турбулентном потоке. Скорость турбулентного горения в большей мере зависит от общего уровня турбулизации потока, т. е. от числа Re .

Такая зависимость, полученная Дамкеллером, представлена на рис. 163.

В пределах ламинарного течения горючей смеси величина U_n сохраняется постоянной. При появлении турбулизации потока отношение U_t/U_n быстро возрастает с увеличением числа Re . Пульсации температуры, имеющие место при турбулентном горении, оказывают дополнительное влияние на скорость реакции, вызывая ее увеличение.

Диффузионное горение

При диффузионном горении процессы смешения и горения происходят в одном объеме. Лимитирующим

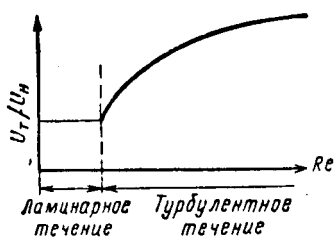


Рис. 163. Зависимость отношения U_t/U_n от величины критерия Re

процессом является процесс смешения — физический процесс, протекающий с меньшей скоростью, чем собственно процесс горения. В зависимости от характера движения смешение определяется молекулярной или турбулентной диффузией. Причем при турбулентной диффузии контакт окислителя с горючим осуществляется также в результате молекулярной диффузии. Диффузионные пламена, таким образом в зависимости от режима движения горючей смеси, носят ламинарный или турбулентный характер.

Ламинарное диффузионное пламя. Смешение горючего с окислителем при ламинарном движении подчиняется закону Фика.

Особенностью диффузионного пламени является крайне медленное смесеобразование и в связи с этим малая интенсивность процесса и следовательно растянутый факел. Длина диффузионного ламинарного факела пропорциональна скорости истечения газа из сопла горелки и обратно пропорциональна коэффициенту диффузии.

$$L_n = K \frac{W_0 d_0^2}{D},$$

где W_0 — скорость истечения газа из горелки, м/с;

d_0 — диаметр газового сопла, м;

D — коэффициент диффузии, м²/с;

K — опытный коэффициент пропорциональности.

Из этой зависимости следует, что замена одной горелки группой мелких горелок при сохранении скорости истечения приведет к сокращению длины пламени.

Турбулентное диффузионное пламя. Переход от ламинарного пламени к турбулентному связан с увеличением скорости выхода газа из сопла и переходом вследствие этого от молекулярной диффузии к молярной. Молярная диффузия характеризуется двумя основными величинами: длиной пути перемешивания l и величиной средней пульсационной составляющей скорости W^1 . Изменение длины пламени в зависимости от скорости горючей смеси дано в гл. XXIV.

Важнейшим параметром турбулентности является степень или интенсивность турбулентности, выражающаяся отношением пульсационной скорости к средней скорости потока.

В большинстве случаев диффузионное горение носит

турбулентный характер, в связи с этим большое практическое значение имеет изучение закономерностей турбулентного затопленного факела.

В отличие от свободной струи, для которой характерно плавное изменение всех величин, по фронту горящего факела наблюдается резкое изменение полей концентрации и температуры. Это хорошо иллюстрирует рис. 164.

В связи с тем, что производные от температур и концентрации имеют разрыв по фронту пламени, расчет дол-

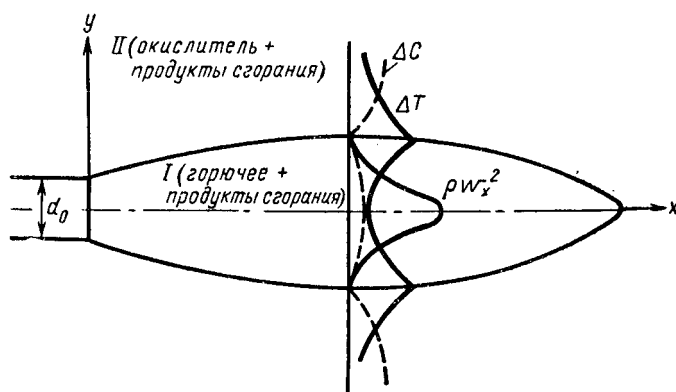


Рис. 164. Схема турбулентного диффузионного газового факела

жен производиться отдельно для собственно факела (область внутри фронта горения) и внешней области, состоящей из продуктов сгорания и окислителя.

Существуют различные методы расчета газового факела (Г. Н. Абрамовича, Л. А. Вулиса и др.). Применение этих методов позволило определить характер распределения температуры и концентрации по длине факела, рассчитать свободный диффузионный факел, рассмотреть общие закономерности диффузионного факела, полученного в попутном потоке.

Останавливаясь на выводах, полученных в результате этого анализа, можно сказать следующее: длина диффузионного факела пропорциональна диаметру сопла, начальной концентрации горючего и обратно пропорциональна корню квадратному из начальной температуры.

2. Горение жидкого топлива

Сжигание жидкого топлива возможно двумя различными методами:

1) сжигание в жидком состоянии, без предварительного испарения.

2) сжигание топлива предварительно переведенного в газообразное состояние.

Второй способ применим только для легко испаряющихся топлив (бензин и т. п.) и практически не отличается от сжигания газообразного топлива.

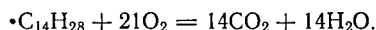
Основным жидким топливом металлургической промышленности является мазут, т. е. топливо трудноиспаряющееся, а поэтому сжигание его осуществляется без предварительного испарения.

Углеводороды мазута относятся к категории тепло-неустойчивых, т. е. при нагреве в среде с недостатком окислителя происходит их термическое разложение, в результате которого образуются легкие и тяжелые углеводороды.

Сгорание первых протекает при достаточном количестве окислителя без сажистых выделений и трудности не представляет.

Сжигание тяжелых углеводородов значительно сложнее, чем легких, так как с одной молекулой углеводорода необходимо смешать большое количество молекул O_2 .

Например:



Практически сжигание высокомолекулярных углеводородов сопровождается образованием в факеле компактных частиц нефтяного кокса, трудно сжигаемого и следовательно увеличивающего потери тепла вследствие химического недожога. Если процесс нагревания и испарения частиц протекает быстро и сопровождается окислением, то обеспечивается необходимая полнота сгорания.

Горение капли

Топливо, распыленное до мелких капель, попадая в пространство печи, нагретое выше температуры самовоспламенения, начинает испаряться.

Схему горения капли можно представить моделью, изображенной на рис. 165.

На внешней границе 1 состав смеси соответствует нижнему пределу воспламенения. Смеси с более низким содержанием горючего воспламеняться не могут.

Самовоспламенение происходит по внешней поверхности после чего горение распространяется от слоя к слою до поверхности 2. Если рассматривать отдельно взятую каплю, то горение дальше не пойдет из-за недостатка окислителя.

Температура пламени значительно выше начальной температуры среды, в связи с этим после воспламенения скорость испарения резко возрастает и раз возникшее пламя сохраняется до полного сгорания капли.

В стабильном пламени горение капли характеризуется двумя взаимосвязанными процессами: испарением горючего за счет тепла поступающего от фронта пламени и горением паровоздушной смеси у поверхности жидкости. При установившемся процессе скорость испарения и скорость сгорания должны быть равны.

Таким образом, определяющим при горении капли является процесс теплообмена между газовой средой и поверхностью капли, т. е. процесс протекающий между средами, находящимися в различных агрегатных состояниях. В силу этого закономерности сгорания жидкого топлива носят гетерогенный характер. Скорость горения определяется как скорость исчезновения жидкой фазы, так как лимитирующим процессом является не химический процесс горения, а более медленно протекающий процесс испарения.

Таким образом, расчет скорости горения капли жидкого топлива может быть сведен к расчету скорости испарения с поверхности капли, за счет тепла поступающего из зоны горения.

Если принять, что за время $d\tau$ капля уменьшается в объеме на величину dV , то на основе теплового баланса, пренебрегая процессом диффузии, можно написать:

$$qFdt = g\rho_{\text{ж}} [c_{\text{ж}} (T_{\text{к}} - T_0) + \varphi] dV, \quad (\text{XXV-1})$$

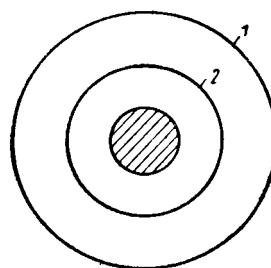


Рис. 165. Схема горения капли

заменяя

$$\frac{dV}{F} = dr,$$

получим

$$dt = \frac{g\rho_{\text{ж}} [c_{\text{ж}} (T_{\text{к}} - T_0) + \varphi]}{q} dr, \quad (\text{XXV-2})$$

где $\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкого топлива, кгс²/м⁴;
 $T_{\text{к}}$ — температура кипения топлива, К;
 T_0 — начальная температура топлива, К;
 q — удельное количество тепла, поступающее из зоны горения, Вт/м².
 F — поверхность капли, м²;
 $c_{\text{ж}}$ — средняя теплоемкость топлива, Дж/(кг·К);
 φ — скрытая теплота испарения, Дж/кг;
 r — радиус капли, м;
 g — гравитационная постоянная, м/с².

Интегрируя уравнение (XXV-2), получим время полного выгорания капли:

$$\begin{aligned} t &= \int_0^{r_0} \frac{g\rho_{\text{ж}} [c_{\text{ж}} (T_{\text{к}} - T_0) + \varphi]}{q} dr = \\ &= \frac{g\rho_{\text{ж}} [c_{\text{ж}} (T_{\text{к}} - T_0) + \varphi]}{q} r_0, \text{ с} \end{aligned} \quad (\text{XXV-3})$$

где r_0 — начальный радиус капли, м.

Сложность расчета заключается в определении величины q , зависящей от температуры подогрева воздуха и топлива, характера движения, размера капли и т. д.

Хитрин Л. Н. для упрощения расчета допустил, что теплообмен происходит только путем конвекции, тогда

$$q = \alpha (T_{\text{с}} - T_{\text{ж}}) \text{ Вт/м}^2, \quad (\text{XXV-4})$$

где α — коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К);

$T_{\text{с}}$ — температура газовой среды, К;

$T_{\text{ж}}$ — температура поверхности капли, К.

В этом случае критерий Нуссельта близок к двум, т. е.

$$Nu = \frac{\alpha 2r_0}{\lambda} = 2,$$

отсюда

$$\alpha = \frac{\lambda}{r_0}. \quad (\text{XXV-5})$$

Заменяя в уравнении (XXV-4) коэффициент теплоотдачи через полученное для него выражение (XXV-5), получим

$$q = \frac{\lambda}{r_0} (T_c - T_{ж}).$$

Приняв $T_{ж} = T_k$ можем написать

$$q = \frac{\lambda}{r_0} (T_c - T_k). \quad (XXV-6)$$

Подставив (XXV-6) в (XXV-3), получим следующее выражение для расчета времени выгорания капли:

$$t = \frac{g \rho_{ж} \varphi r_0^2}{2 (T_c - T_k) \lambda} \quad (XXV-7)$$

(Потерей тепла на нагревание от T_0 до T_k пренебрегаем).

Из полученного выражения видно, что время выгорания прямо пропорционально плотности, скрытой теплоте испарения, квадрату радиуса капли и обратно пропорционально теплопроводности капли и перепаду температур между газовой средой и поверхностью капли.

3. Горение пылевидного топлива

Горение пылевидного топлива представляет собой сложный гетерогенный процесс, который можно разделить на следующие стадии: подогрев и подсушка топлива; термическое разложение топлива, сопровождающееся выделением летучих и образованием коксового остатка; горение летучих; горение коксового остатка.

В зависимости от условий (наличия окислителя, крупности частиц топлива, температуры процесса и т. п.) стадии могут протекать параллельно и последовательно. Начиная с температуры 200°C идет процесс выделения летучих, в состав которых входят газы: H_2 , CO_2 , CO , CH_4 , C_nH_m и др. Количество их зависит от состава угля, температуры и давления. Смешиваясь с окислителем летучие образуют горючую смесь, способную при надлежащих температурных условиях воспламениться. При сжигании топлива в факеле при частицах, размер которых более 500 мкм , горение летучих начинается до горения самого углерода и составляет около 10% времени полного сгорания частицы. Таким образом при сжигании

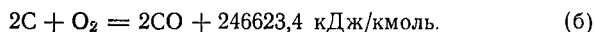
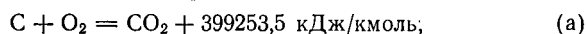
крупных частиц топлива определяющим процессом является процесс горения углерода.

При сжигании мелких частиц (до 200 мкм) воспламенение углерода начинается раньше, чем закончится выделение и сгорание летучих, поэтому эти процессы при пылевидном топливе идут параллельно.

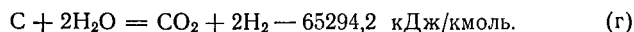
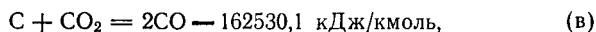
Горение углерода

Горение углерода определяется кинетикой горения на поверхности, диффузией кислорода к поверхности и встречной диффузией продуктов сгорания в окружающую среду.

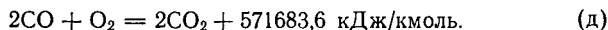
По современным воззрениям, реакция между углеродом и кислородом протекает в адсорбционном слое на углеродной поверхности. В общем виде горение можно представить следующими реакциями:



Одновременно идут вторичные реакции восстановления углекислоты и паров воды, получившихся при сгорании водорода, углеродом кокса:



Полученная окись углерода взаимодействует с кислородом



Часто определяющими реакциями являются вторичные реакции, а именно реакция (в).

У поверхности частиц, в газовой фазе протекает реакция горения окиси углерода



Некоторые исследователи высказывают предположение, что на поверхности угля идет реакция с образованием CO_2 и CO



Химический процесс горения сопровождается физическим процессом диффузии окислителя к поверхности частиц и продуктов сгорания от нее. Движущей силой диффузии является распределение концентраций O_2 , CO

и CO_2 около горячей поверхности. Схематически это распределение представлено на рис. 166. Рассматривая процесс горения сферической частицы углерода можно написать дифференциальное уравнение материального баланса

$$d\left(g\rho_c \frac{\pi d^3}{6}\right) = -K_S^C \pi d^2 dt, \quad (\text{XXV-8})$$

где d — диаметр частицы, м;
 ρ_c — плотность углерода, кг/м³;
 K_S^C — удельная поверхностная скорость выгорания углерода, равная количеству углерода, окисленному за единицу времени на единице поверхности частицы.

Преобразуя уравнение (XXV-8), получим

$$\frac{d(d)}{dt} = -\frac{2K_S^C}{g\rho_c}. \quad (\text{XXV-9})$$

Для решения уравнения надо определить величину K_S^C и выяснить главные закономерности ее изменения.

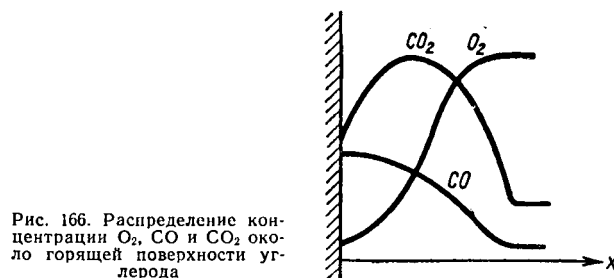


Рис. 166. Распределение концентраций O_2 , CO и CO_2 около горячей поверхности углерода

При пористой массе углерода процесс горения возможен на всех поверхностях пор, т. е. практически во всем объеме углерода. Как внутреннее, так и внешнее (поверхностное) горение протекает в кинетической или диффузионной области.

Под внутренней кинетической областью понимают область реагирования при низких температурах, когда скорость диффузии окислителя значительно превышает скорость химической реакции. Горение в этом случае протекает во всем объеме частицы углерода. По мере повышения температуры растет скорость реакции и наступает момент, когда она начнет превышать скорость внутренней

диффузии. Такая область называется внутренней диффузионной областью горения. По мере повышения температуры скорость химической реакции продолжает расти и скорость диффузии по сравнению с ней становится бесконечно малой. В результате внутреннее объемное горение практически прекращается. Процесс горения переходит во внешнюю кинетическую область. При дальнейшем увеличении скорости химической реакции внешняя диффузия кислорода к поверхности углеродной частицы начинает лимитировать процесс. Этот период называется внешней диффузионной областью горения. Принимая, что частица плотная и горение идет только на внешней поверхности, для высокотемпературного горения можем написать

$$W = K' \frac{C_n}{A + C_n}, \quad (\text{XXV-10})$$

где K' — константа скорости поверхностной реакции;
 C_n — концентрация окислителя (O_2 или CO_2) у поверхности;

A — опытная постоянная, зависящая от температуры и структуры поверхности частицы.

С увеличением температуры величина A растет. При $A \gg C_n$

$$W = \frac{K'}{A} C_n = KC_n, \quad (\text{XXV-11})$$

где K — видимая опытная константа скорости поверхностной реакции.

В факеле твердое топливо сжигается в виде пыли, которая из-за малого размера частиц обладает свойством парусности и движется вместе с газами. При этом скорость обтекания пылинок мала, но коэффициент теплового и диффузионного обмена велик благодаря малому размеру частиц.

Глава XXVI

РАСЧЕТЫ ГОРЕНИЯ ТОПЛИВА

Одним из главных элементов теплотехнических расчетов является расчет горения топлива. Несмотря на широкое применение графических способов расчета большое значение имеет аналитический метод, дающий

более точные результаты. Целью расчета является определение:

1. Количества необходимого для горения воздуха или дутья, обогащенного кислородом.

2. Количества, состава и плотности образующихся продуктов сгорания.

3. Температуры горения.

Для удобства расчет горения твердого и жидкого топлива ведется на 100 кг топлива, а расчет горения газообразного топлива на 100 м³.

При расчете делаются следующие допущения:

1. Смешение окислителя с горючим совершенное, поэтому процесс идет до получения продуктов полного сгорания (СО₂, Н₂О) имеющих газообразную форму. Окись углерода, водород и продукты механического недожога в виде сажи — отсутствуют.

2. В системе достигнуто термодинамическое равновесие.

3. Диссоциация продуктов сгорания и горючих принимается равной нулю.

Перед началом расчета любое топливо должно быть пересчитано на рабочую массу. Газообразное топливо также пересчитывается с сухого состава на влажный. Сущность методики расчета рассмотрим на конкретном примере.

Пример 1. Определить теоретический (при $n=1$) и практический (при $n=1,2$) расход воздуха, состав и объем продуктов сгорания мазута следующего состава, %: 85,3 СР; 10,0 НР; 0,6 ОР; 0,7 SP; 0,4 AP; 3,0 WP. Влажностью воздуха пренебрегаем, так как при $t=20^\circ\text{C}$ в воздухе содержится 18,5 г/м³, что составляет 2,3% (объемн.).

1. Определение расхода воздуха

Количество воздуха, необходимого для горения того или иного соединения или элемента, определяемое по стехиометрическим соотношениям, называется теоретически необходимым воздухом L^T . Действительный расход L^A для более полного сжигания обычно превышает теоретический. Отношение действительного расхода к теоретическому называется коэффициентом расхода воздуха n .

$$n = \frac{L^A}{L^T}.$$

На практике коэффициент расхода воздуха может быть определен по содержанию избыточного кислорода в продуктах сгорания

$$n = \frac{21}{21 - O_{2\text{изб}}},$$

где

$$O_{2\text{изб}} = O_2 - 0,5CO - 0,5H_2 - 2CH_4.$$

здесь O_2 , CO , H_2 и CH_4 — содержание соответствующих газов в продуктах сгорания, %.

Увеличение расхода воздуха сопровождается изменением состава продуктов сгорания и ростом их объема, что вызывает снижение температуры горения. Зависимость температуры горения от коэффициента расхода воздуха представлена на рис. 167.

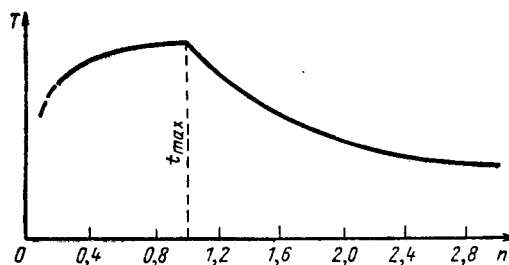
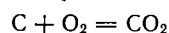


Рис. 167. Кривая зависимости температуры горения от коэффициента расхода воздуха

Для сжигания углерода по реакции

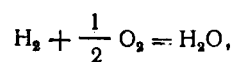


на каждый моль углерода затрачивается один моль кислорода. В 100 кг мазута содержится 85,3% углерода, что составляет 85,3 кг. Зная молекулярную массу углерода не трудно определить, что это соответствует

$$\frac{85,3}{12} = 7,1 \text{ молям углерода.}$$

Для сжигания 7,1 молей углерода затрачивается 7,1 молей кислорода.

Водород горит по реакции

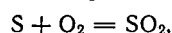


т. е. каждый моль водорода соединяется с $\frac{1}{2}$ моля кислорода.

В мазуте содержится 10% водорода, что составит $\frac{10}{2} = 5$ молей водорода.

Для горения 5 молей H_2 затрачивается 2,5 молей O_2 . Кислород, содержащийся в топливе, следует вычесть из общего, потребного для горения кислорода, так как он или находится в соединении с каким-либо из горючих элементов топлива или при нагревании примет участие в окислении топлива. Содержание кислорода в мазуте составляет $\frac{0,6}{32} = 0,02$ молей.

Сера горит с образованием SO_2



следовательно, для сжигания 1 моля серы требуется 1 моль O_2 .

В топливе содержится серы $\frac{0,7}{32} = 0,02$ моля, следовательно, для ее сгорания уйдет 0,02 молей O_2 . Зола в расчетах можно принимать полностью негорючей, хотя при точных расчетах требуется определить в золе содержание горючих элементов Fe, S и учесть расход кислорода на их окисление.

Таким образом, общее количество кислорода затрачиваемого на сжигание 100 кг мазута при $n=1$, равно

$$O_2^T = \frac{85,3}{12} + \frac{10}{2} \cdot 0,5 + \frac{0,7}{32} - 0,02 = 9,6 \text{ молей.}$$

Если воздух не обогащен кислородом, то соотношение $\frac{N_2}{O_2} = \frac{79}{21} = 3,76$, следовательно, с кислородом вносится азота

$$N_2^T = 9,6 \cdot 3,76 = 36,11 \text{ молей.}$$

Полное количество воздуха, таким образом, определяется как сумма кислорода и азота

$$L^T = 9,6 + 36,11 = 45,71 \text{ молей,}$$

что в кубических метрах составит

$$L^T = 45,71 \cdot 22,4 = 1023,9 \text{ м}^3/100 \text{ кг мазута}$$

или

$$l^T = \frac{1023,9}{100} \approx 10,24 \text{ м}^3/\text{кг мазута.}$$

При сжигании мазута с избытком воздуха в 20%, т. е. при $n=1,2$, расход воздуха возрастает и может быть определен простым умножением полученных величин на коэффициент расхода воздуха:

$$O_2^A = 9,6 \cdot 1,2 = 11,52 \text{ моля;}$$

$$N_2^A = 36,11 \cdot 1,2 = 43,33 \text{ моля.}$$

Всего воздуха

$$L^a = 11,52 + 43,33 = 54,85 \text{ моля}$$

или

$$L^a = 54,85 \cdot 22,4 = 1228 \text{ м}^3 \text{ на } 100 \text{ кг мазута.}$$

На 1 кг мазута

$$l^a = \frac{1228}{100} = 12,28 \text{ м}^3/\text{кг}.$$

2. Определение количества и состава продуктов сгорания

При определении количества и состава продуктов сгорания исходят из тех же уравнений горения. Так из уравнения $C + O_2 = CO_2$ видно, что при сгорании одного моля углерода образуется один моль CO_2 . Таким образом, количество CO_2 в продуктах сгорания будет равно 7,1 молей.

Вода в продуктах сгорания складывается из влаги, получающейся при сгорании водородсодержащих составных частей топлива и влажности рабочего топлива. Влажностью воздуха, как говорилось выше, в технических расчетах можно пренебречь.

Следовательно, общее количество влаги в продуктах сгорания равно

$$\frac{10}{2} + \frac{3}{18} = 5,17 \text{ молей } H_2O.$$

Кислород в продуктах сгорания при $n=1$, т. е. при теоретическом расходе воздуха, отсутствует. При сжигании серы образуется газ SO_2 в количестве, равном содержанию серы, т. е. 0,02 моля SO_2 . Содержание азота в продуктах сгорания равно сумме азота, содержащегося в топливе и азота поступившего из воздуха. В нашем примере топливо в своем составе азота не имеет и, следовательно, в продукты сгорания поступит только азот из воздуха в количестве 36,11 молей. Общее количество продуктов сгорания в молях равно

$$7,1 + 5,17 + 0,02 + 36,11 = 48,4 \text{ молей}$$

или

$$48,4 \cdot 22,4 = 1084,16 \text{ м}^3.$$

Принимая общее количество молей (48,4) за 100%, легко получить процентный состав продуктов сгорания, который для нашего примера при $n=1$ будет следующим:

$$CO_2 = \frac{7,1}{48,4} = 14,66\%;$$

$$H_2O = \frac{5,17}{48,4} 100 = 10,70\%;$$

$$SO_2 = \frac{0,04}{48,4} 100 = 0,04\%;$$

$$N_2 = \frac{36,11}{48,4} 100 = \frac{74,60\%}{100,00\%}.$$

При сжигании топлива с действительным расходом воздуха, т. е. при $n > 1$ (в нашем случае $n = 1,2$), состав продуктов сгорания получается иным, а именно — в продуктах сгорания появляется кислород и увеличивается содержание азота.

Содержание кислорода можно определить из разности $O_2^d - O_2^r = 11,52 - 9,6 = 1,92$ моля, что соответствует избыточному кислороду, не принявшему участие в горении. Содержание азота будет равно сумме азота топлива и азота воздуха при действительном расходе ($N_2^d = 43,33$ моля). Общее количество продуктов сгорания при $n = 1,2$ равно

$$7,1 + 5,17 + 0,02 + 1,92 + 43,33 = 57,54 \text{ молей}$$

или

$$57,54 \cdot 22,4 = 1288,9 \text{ м}^3.$$

Состав продуктов сгорания при этом будет следующим:

$$CO_2 = \frac{7,1}{57,54} 100 = 12,32\%;$$

$$H_2O = \frac{5,17}{57,54} 100 = 9,00\%;$$

$$SO_2 = \frac{0,02}{57,54} 100 = 0,03\%;$$

$$O_2 = \frac{1,92}{57,54} 100 = 3,34\%;$$

$$N_2 = \frac{43,33}{54,54} 100 = 75,31\%$$

В случае применения обогащенного дутья расход кислорода для горения определяется аналогичным образом, а при определении азота необходимо учесть отношение N_2/O_2 , которое будет зависеть от содержания кислорода в дутье. Увеличение содержания кислорода в дутье будет сопровождаться уменьшением отношения N_2/O_2 и, следовательно, снижением содержания азота в продуктах сгорания. Последнее приведет к значительному уменьшению общего объема продуктов сгорания, получающегося на единицу сжигаемого топлива.

Расчет процесса горения при недостатке окислителя ($n < 1$) значительно сложнее, так как в газах одновременно содержатся продукты полного (CO_2 , H_2O) и неполного (CO , H_2) сгорания.

Для этого случая за характерную величину принимают отношение действительного расхода кислорода L_0^d к теоретически необходимому L_0^r , т. е.

$$n = \frac{L_0^d}{L_0^r}.$$

Для определения содержания H_2 и CO в продуктах сгорания необходимо учесть закон действующих масс

$$\frac{\text{CO}_2 \cdot \text{H}_2}{\text{CO} \cdot \text{H}_2\text{O}} = K,$$

где K — константа равновесия, зависящая от температуры.

Ввиду сложности решения данной задачи используют диаграммы и таблицы, разработанные Я. Б. Зельдовичем и А. И. Полярным.

Правильность проведенного расчета проверяется путем составления материального баланса.

Для рассматриваемого примера при $n=1,2$ получим:

П р и х о д			
Мазут			100 кг
Воздух:			
	$\text{O}_2=11,52 \cdot 32$	=	368,64 кг
	$\text{N}_2=43,33 \cdot 28$	=	1213,24 кг
	В с е г о		1681,88 кг
Р а с х о д			
Продукты сгорания:			
	$\text{CO}_2=7,1 \cdot 44$	=	312,40
	$\text{H}_2\text{O}=5,17 \cdot 18$	=	93,06
	$\text{SO}_2=0,02 \cdot 32$	=	0,64
	$\text{O}_2=1,92 \cdot 32$	=	61,50
	$\text{N}_2=43,33 \cdot 28$	=	1210,24
			1680,84 кг
Зола			0,40 кг
	В с е г о		1681,24

Невязка баланса $1681,88 - 1681,24 = 0,64$ кг или в процентах к приходу $\frac{0,64}{1681,88} \cdot 100 = 0,03\%$ допустимой считается невязка до 0,5%). Расчет необходимого для горения воздуха и состава продуктов сгорания удобно вести в форме, приведенной ниже (табл. 11).

3. Определение температуры горения

Под температурой горения понимают ту температуру, которую имеют газообразные продукты сгорания за счет тепла выделенного при сгорании топлива.

Различают три температуры горения: действительную, теоретическую и калориметрическую.

Действительной температурой является та температура, которую имеют продукты сгорания в конкретных условиях процесса сжигания топлива.

Таблица II

Расчет горения мазута

Участвуют в горении						
топливо				воздух		
составляющие	содержание, %	масса, кг	молекулярная масса, кг	количество молей	O ₂ , кмоль	N ₂ , кмоль
C	85,3	85,3	12,0	7,10	7,10	
H	10,0	10,0	2,0	5,00	2,50	
O	0,6	0,6	32,0	0,02	-0,02	
S	0,7	0,7	32,0	0,02	0,02	
A	0,4	0,4	—	—	—	
W	3,0	3,0	18,0	0,17	—	
Σ	100,0	100,0	—	—	9,60	36,11
				При n=1,0	21,0	79,0
					45,71	1023,9
					100	—
					54,85	1228
				При n=1,2	21,0	79,0
					100	—

$$9,6 \cdot 3,762 = 36,11 \quad 36,11 + 9,60 = 45,71 \quad 45,71 \cdot 22,4 = 1023,9$$

Образуются при горении									
газообразные продукты									
составля- ющие	CO ₂	H ₂ O	SO ₂	O ₂	N ₂	всего			м ³
						кмоль			
C	7,1	—	—	—	Из воздуха 36,11				48,4·22,4=1084,16
H	—	5,0	—	—					
O	—	—	—	—					
S	—	—	0,02	—					
A	—	—	—	—					
W	—	0,17	—	—					
Σ	7,1 14,66	5,17 10,70	0,02 0,04	— —	36,11 74,60	48,4 100,0			1084,16 —
	7,1 12,32	5,17 9,0	0,02 0,03	1,92 3,34	43,33 75,31	57,54 100,0			1288,9

Величина этой температуры зависит от многих факторов: качества топлива, удельного расхода топлива, коэффициента расхода воздуха, физического тепла вносимого воздухом и топливом, условий теплообмена между продуктами сгорания и ограничивающими их поверхностями и т. д.

Меняя условия сжигания, можно влиять на величину действительной температуры.

Выражение для характеристики действительной температуры имеет следующий вид:

$$T_d = \frac{Q_n^p + Q_\phi^b + Q_\phi^r - q_{\text{дисс}} - q_{\text{пот}}}{V_{\text{п.сг}} c_{\text{п.сг}}} K, \quad (\text{XXVI-1})$$

где Q_n^p — теплота сгорания топлива, Дж/кг, Дж/м³;

Q_ϕ^b, Q_ϕ^r — соответственно физическое тепло, вносимое воздухом и топливом, Дж/кг, Дж/м³;

$q_{\text{пот}}$ — количество тепла, отдаваемое в процессе горения окружающей среде, отнесенное к единице топлива, Дж/кг, Дж/м³;

$q_{\text{дисс}}$ — количество тепла, затрачиваемое на реакции диссоциации продуктов сгорания, также отнесенное к единице топлива, Дж/кг, Дж/м³;

$V_{\text{п.сг}}$ — объем продуктов сгорания, образующихся при сгорании единицы топлива, м³/кг, м³/м³.

$c_{\text{п.сг}}$ — теплоемкость продуктов сгорания, Дж/(м³·К).

Однако определение T_d по приведенной формуле не представляется возможным, так как нельзя точно определить величину потерь тепла $q_{\text{пот}}$. Поэтому введено понятие теоретической температуры горения T_t в предположении, что процесс сгорания происходит в адиабатических условиях, т. е. $q_{\text{пот}} = 0$.

Тогда

$$T_t = \frac{Q_n^p + Q_\phi^b + Q_\phi^r - q_{\text{дисс}}}{V_{\text{п.сг}} c_{\text{п.сг}}} K \quad (\text{XXVI-2})$$

Величина T_t всегда выше T_d .

Рассматривая процесс сгорания топлива в адиабатических условиях и пренебрегая потерями тепла на диссо-

циацию продуктов сгорания, получают еще более высокую температуру, которую называют калориметрической температурой сгорания T_k :

$$T_k = \frac{Q_n^p + Q_{\phi}^b + Q_{\phi}^r}{V_{\text{п.сг}} c_{\text{п.сг}}} K. \quad (\text{XXVI-3})$$

Если воздух и топливо предварительно не подогреваются, т. е. если их температура близка к 273°K , то формула (XXVI-3) примет вид

$$T_k = \frac{Q_n^p}{V_{\text{п.сг}} c_{\text{п.сг}}} K. \quad (\text{XXVI-4})$$

Калориметрическая температура, выраженная формулой (XXVI-4), является физической характеристикой топлива, однако, определение ее непосредственно из этой зависимости невозможно, так как теплоемкость продуктов сгорания $c_{\text{п.сг}}$ является функцией температуры. В связи с этим определение T_k производят методом последовательного приближения.

Рассмотрим определение T_k на приведенном выше примере расчета горения.

Определим теплоту сгорания мазута

$$Q_{\text{п}} = 340 c^p + 1030 H^p - 109(O^p - S^p) - 25 W^p = \\ = 340 \cdot 85,3 + 1030 \cdot 10 - 109(0,6 - 0,7) - 25 \cdot 3,0 = 39\,237,9 \text{ кДж/кг.}$$

При $n=1,0$ на 1 м^3 продуктов сгорания выделяется тепла

$$i_0 = \frac{Q_{\text{п}}^p M}{V_{\text{п.сг}}} \text{ кДж/м}^3,$$

где M — масса сгоревшего топлива, кг;

i_0 — начальная энтальпия продуктов сгорания, кДж/м³,

$$i_0 = \frac{39237,9 \cdot 100}{1084,16} = 3620 \text{ кДж/м}^3.$$

Задаемся предполагаемой температурой и определяем энтальпию продуктов сгорания полученного состава при данной температуре:

$$\begin{aligned} T_1 &= 2373^\circ \text{K} \\ \text{CO}_2 &= 0,1466 \cdot 5115 = 750 \\ \text{H}_2\text{O} &= 0,107 \cdot 4163 = 445 \\ \text{N}_2 &= 0,7460 \cdot 3127 = 2233 \\ &\quad \quad \quad i_1 = 3428 \text{ кДж/м}^3 \\ T_2 &= 2473^\circ \text{K} \\ \text{CO}_2 &= 0,1466 \cdot 5386 = 790 \\ \text{H}_2\text{O} &= 0,107 \cdot 4400 = 471 \\ \text{N}_2 &= 0,7460 \cdot 3289 = 2454 \\ &\quad \quad \quad i_2 = 3715 \text{ кДж/м}^3. \end{aligned}$$

Начальная энтальпия лежит между полученными цифрами, следовательно, искомая температура может быть найдена интерполяцией по формуле

$$T_k = T_1 + \frac{i_0 - i_1}{i_2 - i_1} 100 = 2100 + \frac{3620 - 3428}{3715 - 3428} 100 = 2440 \text{ К.}$$

Аналогичным расчетом можно получить, что при $n=1,2$ $T_k=2144$ К.

Уменьшение температуры горения при увеличении расхода воздуха объясняется ростом объема продуктов горения на единицу топлива. Легко убедиться, что при обогащении воздуха кислородом объем продуктов сгорания уменьшится и соответственно возрастет их температура. Определив T_k , можно приблизительно установить величину T_d . Для этого используется понятие пирометрического коэффициента, равного отношению.

$$\frac{T_d}{T_k} = \eta_{\text{пир}}$$

Пирометрический коэффициент зависит от условий сжигания топлива и определяется экспериментально.

Зная $\eta_{\text{пир}}$ и рассчитав T_k , определяют T_d

$$T_d = \eta_{\text{пир}} T_k, \text{ К.}$$

Таким образом при сжигании мазута указанного состава получены продукты сгорания, характеристика которых приведена в табл. 12.

Т а б л и ц а 12

Характеристика продуктов сгорания

Коэффициент расхода воздуха	Состав, %					Объем, м³/кг	Масса, кг/кг	Плотность, кг/м³	T_k , К
	CO₂	H₂O	SO₂	O₂	N₂				
$n = 1,0$	14,66	10,7	0,04	—	74,6	10,84	14,17	1,31	2440
$n = 1,2$	12,32	9,0	0,03	3,34	75,31	12,89	16,81	1,30	2144

Из приведенной таблицы видно, что увеличение расхода воздуха при горении сопровождается увеличением объема продуктов сгорания на единицу топлива и снижением температуры горения.

4. К расчету горения газа

При расчете горения газообразного топлива нет необходимости в пересчете состава топлива, выраженного в процентах, на молярный, так как для газов объемные доли и проценты выражаются одними и теми же цифрами. В остальном расчет ведется аналогично расчету горения твердого и жидкого топлива. Часто для сжигания используется смесь двух различных газов с заданной теплотой сгорания $Q_{н.см}^p$. В этом случае прежде всего надо определить состав смеси газов. Для этой цели определяют рабочие составы исходных газов (с учетом их влажности) и их теплоты сгорания $Q_{н1}^p, Q_{н2}^p$. Если долю первого газа в смеси обозначить через x , то доля второго газа в смеси будет равна $(1-x)$. Тогда можем написать, что

$$Q_{н.см}^p = Q_{н1}^p x + Q_{н2}^p (1-x),$$

отсюда

$$x = \frac{Q_{н2}^p - Q_{н.см}^p}{Q_{н2}^p - Q_{н1}^p}.$$

Определив x , можно рассчитать состав смешанного газа:

$$\begin{aligned} CO_{2см} &= CO_2'x + CO_2''(1-x) \\ H_2O_{см} &= H_2O'x + H_2O''(1-x) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

В сумме получим 100% смешанного газа.

Здесь $CO_{2см}, H_2O_{см}$ — содержание составляющих в смешанном газе;

CO_2', H_2O' — содержание составляющих в первом газе;

CO_2'', H_2O'' — содержание составляющих во втором газе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Канторович Б. В. Введение в теорию горения и газификации твердого топлива, М., Металлургиздат, 1960. 355 с. с ил.
Теория топочных процессов. М. «Энергия», 1966. 491 с. с ил. Авт.: Кнорре Г. Ф., Арефьев К. М., Блох А. А. и др.
Равич М. Б. Топливо и эффективность его использования, М., «Наука», 1971. 358 с. с ил.
Семикин И. Д., Аверин С. И., Радченко И. И. Топливо и топливное хозяйство металлургических заводов. М., «Металлургия», 1965. 391 с. с ил.

Раздел шестой
ТЕПЛОГЕНЕРАЦИЯ
ЗА СЧЕТ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ

Общие положения

Современная техника характеризуется расширяющимся применением в промышленности электронагрева, т. е. устройств, в которых электрическая энергия превращается в тепловую. Область науки, рассматривающая вопросы преобразования электрической энергии в тепловую, называется электротермией. Широко известны примеры использования электротермических установок (ЭТУ) в черной и цветной металлургии, применение их для термообработки, пайки, резки, сварки металлов, сушки и клеекн дерева и пластмасс, для стерилизации пищевых продуктов, для получения особо чистых полупроводников и выращивания кристаллов и т. д. Все это свидетельствует о большом значении электротермических процессов в народном хозяйстве страны.

Однако электроэнергия — это один из дорогих видов энергии и поэтому ее применение должно быть обосновано как с технико-экономической точки зрения, так и исходя из других народнохозяйственных соображений.

Поскольку основным видом энергии, используемой для получения тепла, является химическая энергия топлива, то при выборе способа теплогенерации необходимо сопоставлять преимущества и недостатки применения топлива и электроэнергии.

Основными преимуществами электротермических методов нагрева являются:

1. Высокая концентрация тепловой энергии в рабочем пространстве установки в самом нагреваемом материале, а, следовательно и более высокие температуры.

2. Быстрый нагрев материала, а, следовательно, и высокая производительность ЭТУ.

3. Легкость регулирования и распределения выделяющегося тепла в рабочем объеме установки или в нагреваемом материале, высокая точность воспроизводства температурного режима.

4. Возможность полной автоматизации ЭТУ и их включения в автоматические поточные линии.

5. Возможность выделения тепла в самом нагреваемом теле, что повышает скорость нагрева и снижает тепловые потери.

6. Отсутствие влияния источника нагрева на атмосферу рабочего пространства, так как нагрев можно осуществлять в любой защитной среде или в вакууме.

7. Простота конструкции ЭТУ, так как отпадает необходимость в строительстве боровов, труб, трубопроводов и т. п.

8. Улучшение санитарно-гигиенических условий, вследствие повышения культуры производства.

Отмеченные преимущества электрических методов нагрева не означают, что электрификация термических процессов всегда является целесообразной.

В ряде процессов, когда применение электрической энергии не вызывается технологической необходимостью, не только энергетические, но и технико-экономические показатели оказываются лучшими при использовании топливных установок.

В основе практических методов получения тепла за счет электроэнергии лежат два основных принципа, которые используются в различных конструкциях, применяемых для промышленного электронагрева:

1. Генерация тепла в рабочем теле при приложении к нему разности потенциалов.

2. Генерация тепла в рабочем теле, находящемся в переменном электромагнитном поле.

В общем случае рабочее тело может быть твердым, жидким или газообразным (в некоторых случаях — под большим разрежением). Первый принцип лежит в основе работы печей сопротивления, ванн печей, дуговых печей и дуговых плазмотронов, электроннолучевых печей. Второй — в основе работы нагревательных и плавающих индукционных печей, индукционных плазмотронов, высокочастотного нагрева диэлектриков и полупроводников.

Глава XXVII

ТЕПЛОГЕНЕРАЦИЯ В РАБОЧЕМ ТЕЛЕ ПРИ ПРИЛОЖЕНИИ К НЕМУ РАЗНОСТИ ПОТЕНЦИАЛОВ

Этот принцип теплогенерации подразумевает наличие в рабочем теле свободных зарядов (ионов и электронов), обеспечивающих электропроводность рабочего тела. В случае газообразного тела, свободные заряды образуются в результате ионизации газовых молекул (атомов) или эмитируются электродами. Наложение электрического поля вызывает направленное движение свободных зарядов (возникает электрический ток). В процессе упругих столкновений электрическая энергия переходит в тепловую. Согласно закону Джоуля — Ленца

$$Q = UIt = \frac{U^2 t}{R} = I^2 R t \text{ Дж } (0,239 \cdot 10^{-3} I^2 R t \text{ ккал}),$$

где U — приложенная разность потенциалов, В;
 I — сила тока, А;
 R — сопротивление рабочего тела, Ом;
 t — время, с.

Поскольку агрегатное состояние рабочего тела определяет известную специфику процесса теплогенерации, рассмотрим их отдельно.

1. Теплогенерация при приложении разности потенциалов к твердому телу

Для получения тепла в твердом проводнике может быть использован как постоянный, так и переменный электрический ток. Применение постоянного тока практически затруднено и экономически невыгодно из-за отсутствия источников (генераторов) большой силы тока и низкого напряжения, которые необходимы для теплогенерации в твердом проводнике, обладающем высокой электропроводностью. Целесообразнее использование переменного тока, так как его способность к трансформации позволяет получать требуемые напряжения.

При переменном токе под сопротивлением проводника понимают активное сопротивление, которое больше сопротивления проводника пропусканию постоянного тока. Это объясняется наличием скин-эффекта и некоторых других явлений (например, гистерезиса). Резкость проявления скин-эффекта возрастает с увеличением час-

тоты f , диаметра проводника d , магнитной проницаемости μ и падает с ростом удельного электрического сопротивления ρ , т. е.

$$\xi = \varphi \left(d \sqrt{\frac{\mu f}{\rho}} \right), \quad (\text{XXVII-1})$$

где ξ — коэффициент, характеризующий скин-эффект. Активное сопротивление проводника можно выразить как

$$R = R_n \xi,$$

где R_n — сопротивление проводника при протекании постоянного тока (омическое сопротивление). Наличие скин-эффекта приводит к появлению индуктивного сопротивления проводника X , учитывающего действие электродвижущей силы (э. д. с.) самоиндукции, создаваемой переменным магнитным потоком. Полное сопротивление проводника переменному току Z определяется как

$$Z = \sqrt{X^2 + R^2} \text{ Ом},$$

а напряжение на зажимах проводника

$$U = IZ,$$

где I — величина переменного тока.

При нагреве проводника переменным током вследствие наличия индуктивного сопротивления ток и напряжение не совпадают по фазе и мощность, выделяемая в проводнике равна

$$P = UI \cos \varphi \text{ Вт.} \quad (\text{XXVII-2})$$

При этом коэффициент мощности $\cos \varphi$ равен

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{X^2 + R^2}}. \quad (\text{XXVII-3})$$

Рассматриваемый принцип теплогенерации находит широкое применение в печах сопротивления прямого (контактного) и косвенного нагрева.

В первом случае в качестве рабочего тела используется нагреваемое изделие и при расчете электротехнических параметров установок необходимо учитывать изменение в процессе нагрева электротехнических и теплофизических характеристик материала. В печах сопротивления косвенного нагрева в качестве рабочего

тела используются специальные нагреватели, выполненные из высокоомных материалов, а передача тепла нагревательному изделию осуществляется излучением (в некоторых случаях и конвекцией).

2. Теплогенерация при приложении разности потенциалов к жидкому телу

При теплогенерации в жидкой среде могут быть использованы как постоянный, так и переменный ток.

Источник постоянного напряжения обычно используется для теплогенерации в электролите. В раствор электролита помещают электроды, присоединенные к источнику постоянного напряжения. В результате электролиза на катоде интенсивно выделяется водород, образующий газовую пленку. При достаточно большом напряжении на электродах между катодом и электролитом возникает электрический разряд, приводящий к разогреву катода.

Наличие водородного газового слоя, окружающего катод, создает тепловую изоляцию и уменьшает теплоотдачу к электролиту. Используя в качестве катода нагреваемое изделие, легко осуществить его нагрев до определенной температуры.

Поскольку при нагреве в электролите выделение тепловой энергии происходит на поверхности нагреваемого изделия, характер нагрева зависит от мощности, выделяющейся на поверхности катода, и времени нагрева.

Источник переменного напряжения используется для теплогенерации в расплавленных солях. Подвод электрического тока в этом случае также осуществляется через погруженные в расплав металлические электроды. Протекание тока через столб расплавленной соли с большим электрическим сопротивлением вызывает его разогрев. Под действием электромагнитных сил и конвективных потоков в межэлектродном пространстве (где происходит основное тепловыделение) происходит интенсивный теплоперенос и температура выравнивается по всему рабочему пространству. Это справедливо в случае близко расположенных электродов. Ванны такого типа часто называют соляными ваннами с электромагнитной рециркуляцией. Электрический ток протекает только в небольшом приэлектродном про-

пространстве и не проходит через нагреваемое изделие, погруженное в соль. Это обеспечивает равномерность нагрева изделия независимо от его конфигурации.

В некоторых случаях электроды, введенные в рабочее пространство прямоугольной формы через противоположные стороны нижней части ванны, расположены достаточно далеко друг от друга. Распространение тепла по объему рабочего пространства достигается за счет конвективных потоков.

Как показывает практика, нормальный тепловой режим ванны наблюдается в том случае, когда длина рабочей части электродов равна глубине ванны, т. е. нижние концы электродов заделаны или упираются в кладку. В этом случае мощность, выделяемая в ванне, может быть определена по соотношению

$$P = IU = U^2 \sqrt{\frac{1}{R_э R_c}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{R_э}{R_c}} \operatorname{Вт}, \quad (\text{XXVII-4})$$

где I — сила тока, А;
 U — приложенное напряжение, В;
 $R_э$ — сопротивление электрода, Ом;
 R_c — сопротивление столба соли между электродами, Ом.

3. Теплогенерация при приложении разности потенциалов к газообразному телу

При обычных условиях газы не являются проводниками. При приложении достаточно большой разности потенциалов появляется возможность пропускать через газ значительные токи, вследствие нарушения их изолирующих свойств. Процесс ионизации газа приводит к появлению в нем свободных электронов и ионов, являющихся переносчиками зарядов. Наибольшую роль в переносе зарядов играют электроны, являющиеся менее массивными, и, следовательно, более подвижными. Прохождение тока через газ получило название «газового разряда», разновидностью которого является электрическая дуга.

Различные физические процессы, протекающие в дуге, послужили основанием для появления новых видов теплогенерации, таких как теплогенерация в потоке плазмы и в факеле при наложении электрического поля, или теплогенерация за счет электронов, ускоренных в ва-

кууме. Поскольку каждый тип теплогенерации имеет свои специфические особенности, мы будем рассматривать их отдельно.

А. Электрическая дуга

Электрической дугой принято считать конечную устойчивую форму разряда, при котором через газ проходит достаточно большой ток. Электрическую дугу, используемую в металлургии принято классифицировать

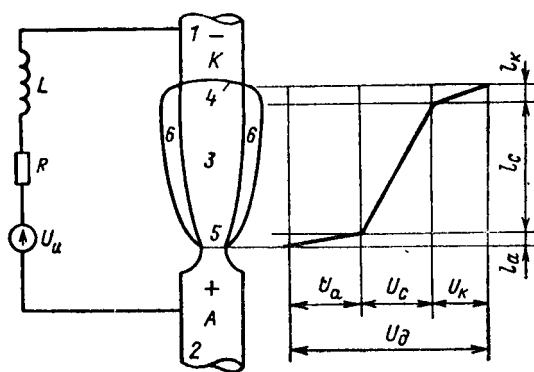


Рис. 168. Схема и распределение напряжения дуги:

1 — катод; 2 — анод; 3 — столб дуги; 4 — катодное пятно; 5 — анодное пятно; 6 — ореол

как самостоятельную, термическую дугу высокого давления в парах.

«Самостоятельная» означает, что существование дуги не обусловлено внешними ионизаторами газа. «Термическая» означает, что при разряде с горячим катодом дуга поддерживается термоэлектронной эмиссией. Дуга в парах характеризуется испарением электродов в процессе горения дуги и созданием атмосферы газового промежутка. В случае тугоплавких электродов разряд называется «дугой в газе».

Дуговой разряд происходит в газовом канале, замыкающем электрическую цепь, состоящую из источника напряжения U_n , балластного сопротивления, соединительных проводов и электродов (рис. 168).

Торцы канала упираются в электроды и в этих местах наблюдаются яркосветящиеся пятна, называемые анодным 5 и катодным 4. В середине канала виден яр-

косветящийся шнур, состоящий из ионизированного газа (столб дуги 3). Боковая поверхность столба дуги ограничена раскаленными газами или парами, не принимающими участие в прохождении тока (ореол 6).

Обычно газовый промежуток между электродами разделяют на три части — собственно столб дуги с длиной l_c и области катодного l_k и анодного l_a падения потенциала. Вблизи электродов располагаются нескомпенсированные заряды, обуславливающие высокие градиенты потенциала и скачки напряжений в катодной U_k и анодной U_a областях дуги. Величина анодного и катодного падения потенциала не зависит ни от длины дуги, ни от величины приложенного напряжения. Принято считать, что

$$U_a + U_k \approx U_i, \quad (\text{XXVII-5})$$

где U_i — потенциал ионизации газа или пара, В.

Область катодного падения потенциала имеет протяженность порядка 10^{-8} м, т.е. порядка длины свободного пробега электрона в газе у поверхности катода. Источником электронов является разогретый катод, обеспечивающий поступление электронов в результате термоэлектронной эмиссии.

При нагреве катода скорость теплового движения электронов становится такова, что кинетическая энергия электронов больше потенциального барьера на границе катода. Такая эмиссия называется термоэлектронной и плотность тока в этом случае определяется по формуле Ричардсона — Дэшмана:

$$j = A_0 T^2 e^{-\frac{e\phi}{kT}} \text{ А/м}^2, \quad (\text{XXVII-6})$$

где $e\phi$ — энергия связи электрона;

k — постоянная Больцмана;

T — температура, К;

A_0 — константа [для чистых металлов $A_0 = 1,2 \cdot 10^6 \text{ А/(м}^2 \cdot \text{К}^2)\text{]}$].

Напряженность электрического поля в области катодного падения потенциала имеет величину 10^{-4} В/м, что является достаточным для осуществления автоэлектронной эмиссии. Согласно формуле Фаулера-Нордгейма, плотность тока в этом случае равна

$$j = 1,6 \cdot 10^{-6} \frac{E^2}{\phi} e^{-\frac{B}{\phi^{0,5}}} \text{ А/м}^2, \quad (\text{XXVII-7})$$

где E — напряженность электрического поля у поверхности катода, В/м;

B — константа;

ϕ — энергия выхода электрона, В.

Электроны, эмитированные катодом, разгоняются в сильном электрическом поле области катодного падения потенциала и, когда их кинетическая энергия достигает величины потенциала ионизации газа или пара, начинается ионизация нейтральных молекул. Под действием поля электроны уходят в область столба дуги, а положительные ионы направляются к катоду. Ионы ударяются о поверхность катода, рекомбинируют на нем, причем энергия ионизации отдается катоду. В результате образуется яркосветящееся катодное пятно. Поскольку подвижность электронов выше, нежели у ионов, они быстрее покидают область катодного падения потенциала, в которой образуется нескомпенсированный положительный заряд, являющийся причиной катодного падения потенциала.

Столб дуги представляет собой яркосветящуюся смесь электронов, положительных ионов и нейтральных атомов и молекул, или иначе плазму. Свойства плазмы будут рассмотрены ниже. Отметим только, что в сильноточных дугах при высоком давлении ($p \geq 101,3$ кН/м²) плазма находится в термическом равновесии (термическая плазма). В термической плазме температура всех элементарных частиц предполагается одинаковой, а все характеристики плазмы и константы кинетических и химических равновесий являются однозначной функцией температуры.

Поскольку заряды положительных ионов и электронов компенсируют друг друга, в электрическом отношении плазма столба квазинейтральна.

В положительном столбе дуги падение напряжения пропорционально длине столба, а напряженность продольного электрического поля практически постоянна по всей длине столба. Зависимость напряженности поля E от силы тока I меняется в зависимости от способа охлаждения дуги. Это объясняется тем, что полное сопротивление дуги зависит не только от аксиального, но и радиального распределения заряженных частиц, а именно радиальное распределение, определяющее эффективный диаметр столба дуги, зависит от условий охлаждения. Чем интенсивнее охлаждение, тем больше радиаль-

ный градиент плотности и, следовательно, сильнее радиальная диффузия заряженных частиц. Это в свою очередь приводит к увеличению сопротивления столба дуги и при неизменной силе тока I к увеличению напряженности поля E . Средняя температура дуги, соответствующая минимальному продольному градиенту, может быть выражена как

$$T \approx 800 U_i \text{ К.} \quad (\text{XXVII-8})$$

Так как потенциал ионизации элементов находится в пределах 3,87—24,5 В, то температура дуги при атмосферном давлении колеблется от 3200 до 20000 К.

Область анодного падения потенциала — наименее изученная область дуги. Ее протяженность значительна по сравнению с катодной областью, но падение потенциала чаще всего имеет тот же порядок. При бомбардировке электронами анод разогревается, так как электроны отдают аноду свою кинетическую энергию и энергию, затраченную на эмиссию с поверхности катода. Поскольку анод получает тепла больше, чем катод, он испаряется особенно интенсивно и пары материала анода играют преобладающую роль в создании атмосферы газового промежутка.

В области анодного падения потенциала производится только 1% носителей зарядов — электронов, движущихся к аноду и ионов, перемещающихся в сторону столба дуги. Анод как правило не способен эмитировать положительные ионы и поэтому вблизи анода перенос зарядов осуществляется электронами. Таким образом вблизи анода образуется нескомпенсированный отрицательный заряд, обуславливающий анодное падение потенциала.

Электрическая дуга может быть получена как при использовании переменного, так и постоянного тока. Любая дуга характеризуется зависимостью напряжения дуги от силы тока (вольтамперная характеристика). Напряжение дуги U_d складывается из падения потенциала в столбе дуги El_d , анодного U_a и катодного U_k падений потенциала:

$$U_d = U_k + U_a + El_d \text{ В.} \quad (\text{XXVII-9})$$

Статические характеристики дуг постоянного тока (в состоянии устойчивого равновесия) выражаются эмпирическими зависимостями:

для слаботочных дуг (формула Ноттингейма)

$$U_d = a + bl + \frac{c + d}{I^n} B; \quad (\text{XXVII-10})$$

для сильноточных дуг (формула Фрелиха)

$$U_d = a + bl B, \quad (\text{XXVII-11})$$

где a , b , c и d — постоянные, численное значение которых есть функция материалов электродов, давления, рода газа в столбе и т. п.;

$$n = 2,62 \cdot 10^{-4} T_{\text{кип.}}$$

Здесь $T_{\text{кип}}$ — температура кипения материала анода, К. Таким образом напряжение сильноточных дуг не зависит от силы протекающего тока. Дуга переменного

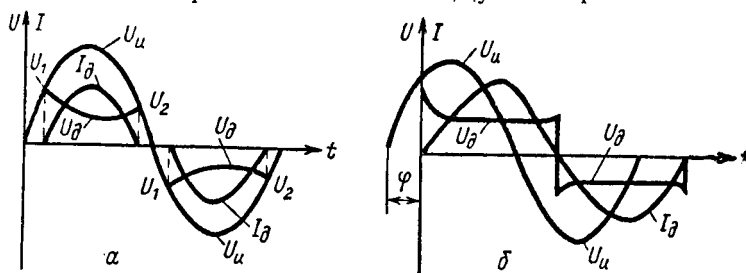


Рис. 169. Характер изменения напряжения и силы тока в электрической дуге переменного тока:

a — без индуктивности в цепи; b — с индуктивностью

тока может гореть непрерывно, но при определенных условиях она может гореть прерывисто, возникая и исчезая внутри каждого периода изменения напряжения.

Если термическая инерция и частота источника таковы, что в течение одного полупериода проводимость столба дуги остается практически неизменной, то дуга будет гореть устойчиво. В противном случае проводимость будет следовать за изменением напряжения и внутри каждого полупериода дуга будет возникать и исчезать (дуга горит прерывисто, но устойчиво).

Если цепь содержит только активное сопротивление, то характер изменения напряжения и силы тока аналогичен представленному на рис. 169, a . Когда напряжение U_u возрастает, а катод разогрет и способен эмитировать электроны, то дуга возникает только при достижении напряжения U_1 (напряжение зажигания).

С момента возникновения дуги сила тока растет, а напряжение в дуге падает. После прохождения максимума, сила тока в дуге уменьшается, а напряжение несколько возрастает и при напряжении погасания $\dot{U}_2$ дуга гаснет. С прекращением тока в столбе происходит процесс деионизации, температура электродов падает. После изменения полярности, если новый катод способен эмитировать электроны, процесс повторяется.

Для получения непрерывного горения дуги последовательно с дугой в цепь включают индуктивное сопротивление. Вследствие возникновения э. д. с. самоиндукции, ток в дуге сдвигается по фазе относительно напряжения источника питания на некоторый угол φ . Подбором индуктивности можно получить такой сдвиг, при котором в момент появления тока в дуге напряжение источника будет достаточно для зажигания дуги (рис. 169, б).

Для однофазной дуги активная мощность, выделяемая в дуге в режиме непрерывного горения, равна

$$P_a = 10^{-3} \frac{U_n^2}{\pi Z_k} \left[\frac{\pi}{2} \cos \varphi - 2\beta \cos (\psi + \varphi) \right] \text{ кВт, (XXVII-12)}$$

где Z_k — полное сопротивление цепи, Ом;
 φ — угол сдвига тока по фазе относительно источника питания;

$$\cos \varphi = \frac{R_k}{Z_k};$$

ψ — начальная фаза напряжения источника;

$$\sin \psi = \frac{U_d}{U_n} = \beta.$$

Формула XXVII-12 справедлива также для каждой фазы трехфазной цепи с нулевым проводом.

Б. Поток плазмы

Плазма — это газ, состоящий из положительно и отрицательно заряженных частиц в такой пропорции, что общий заряд равен нулю. Между плазмой и газом нет резкой границы. Плазма подчиняется газовым законам и во многих отношениях ведет себя как газ.

В то же время плазма обладает большой электропроводностью, достигающей величины электропроводности

металлов. Вследствие насыщенности заряженными частицами обладает магнитными свойствами.

Согласно определению плазмы, она обладает свойством квазинейтральности. Это означает, что ионизация не создает избытка в зарядах того или иного знака, и отрицательный заряд электронов компенсируется положительным зарядом ионов.

В термодинамическом отношении полностью ионизированная плазма, в которой энергия взаимодействия между частицами мала по сравнению с тепловой энергией, ведет себя как идеальный газ. Это справедливо для плазмы, находящейся в состоянии термического равновесия. При очень низких плотностях плазма не находится в состоянии термического равновесия и частицы в ней движутся с различными скоростями. В этом случае говорить о температуре плазмы бессмысленно.

При достаточно высокой плотности плазма быстро приходит в состояние полного термодинамического равновесия, при котором электронная и ионная температуры равны. Плазма с температурой, не превышающей 10000 К (используемая в настоящее время в промышленности), резко отстает от законов идеального газа и не может считаться таковым. При этих температурах плазма ведет себя как сжатый газ или жидкость, перегретая выше критической температуры.

В плазме одновременно протекают два встречных процесса — ионизация и рекомбинация.

Ионизации могут подвергаться как атомы, так и молекулы. Во втором случае образуются молекулярные ионы, которые затем диссоциируют на атомные ионы и нейтральные частицы.

Рекомбинация — это соединение иона и электрона с образованием нейтрального атома (или молекулы). Образовавшийся атом обладает избыточной энергией и по тому, куда направляется эта избыточная энергия различают рекомбинацию с излучением и рекомбинацию при тройных соударениях. Первая рекомбинация имеет основное значение в разреженной плазме, вторая — в плотной, холодной.

Качественно состояние ионизации характеризуется степенью ионизации α -долей ионизированных частиц по отношению к начальному числу их.

Для каждой плазмы (кроме водородной), процесс ионизации является ступенчатым. Сначала от атома от-

щепляется наиболее слабо связанный электрон, затем следующий и т. д.

Условие термодинамического равновесия для каждой ступени ионизации выражается уравнением Саха, пред-

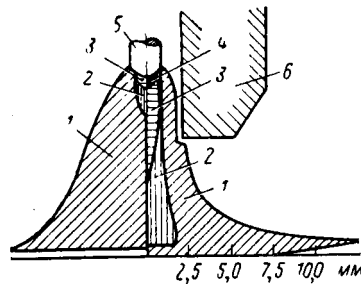


Рис. 170. Области распределения температур в открытой (слева) и сжатой (справа) дугах, горящих в атмосфере аргона:

1 — 10 000—14 000 К; 2 — 14 000—18 000 К; 3 — 18 000—24 000 К; 4 — 24 000 К и более; 5 — вольфрамовый катод; 6 — сопло

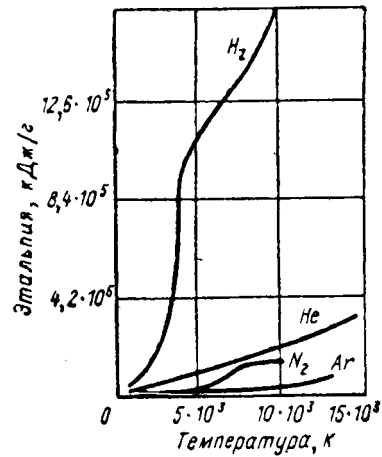


Рис. 171. Зависимость энтальпии газов от температуры

ставляющим собой частный вид закона химического равновесия:

$$\frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} p = 2,4 \cdot 10^{-4} T^{2,5} e^{-\frac{U_i}{kT}}, \quad (\text{XXVII-13})$$

где p — давление газа;
 U_i — потенциал ионизации газа.

Плазма возникает при всех электрических разрядах, как например в электрической дуге. Однако в отличие от обычной дуги, плазменная дуга подвергается принудительному сжатию холодными стенками или магнитным полем.

На рис. 170 сопоставлено распределение температур в открытой и сжатой дугах, горящих в атмосфере аргона между вольфрамовым катодом и медным водоохлаждаемым анодом.

Даже при небольшом сжатии, температура дуги повышается на 30, а напряжение на 100%. Сжатие столба дуги увеличивает плотность тока, повышает concentra-

цию энергии, поднимает напряжение дуги. Под действием собственного магнитного поля образуется плазменный шнур.

Все это резко повышает температуру плазменной дуги по сравнению с обычной (16000 К вместо 5500 К). Скорость истечения газа в зоне наибольшего сжатия достигает скорости звука.

Свойства и параметры плазменной струи сильно зависят от свойств плазмогенной среды. Наиболее часто для получения плазмы в промышленности используются Ar, He, H₂ и N₂. Решающее значение при выборе газа имеет его энтальпия.

Изменение энтальпии выше перечисленных газов от температуры и приведено на рис. 171. Газы H₂ и N₂ — самые дешевые и обладают достаточно высокой энтальпией, но для металлургических процессов с технологической точки зрения они менее пригодны, чем Ar и He.

Преимущество двухатомных газов (H₂ и N₂) перед одноатомными заключается также в том, что кроме энергии ионизации атомов, они несут также энергию диссоциации молекул. По этим причинам наиболее часто в качестве плазмогенной среды используется Ar с добавкой 10—15% H₂.

Обычно для получения плазменного потока используется дуга постоянного тока, которая горит между нерасходуемыми (водоохлаждаемыми) электродами. В дуговой промежуток подается газ, который, нагреваясь и ионизируясь, образует плазменный поток.

В. Наложение электрического поля на пламя

Максимально достижимая температура обычных пламен ограничена явлением диссоциации продуктов сгорания (H₂O, CO₂ и др.) и по сравнению с калориметрической температурой она ниже в 1,5—2 раза. Обычное топливо-кислородное пламя становится электропроводным при температуре >2000 К. Если на него наложить электрическое поле, то температура газа повышается до величины, определяемой потенциалом ионизации составных частей продуктов сгорания. Так для газовой смеси, содержащей CO, CO₂, N₂ и H₂O предельно возможная температура составляет уже 6000 К. При атмосферном давлении и температуре 4000 К такое пламя содержит $2 \cdot 10^{11}$ электронов и ионов в 1 см³, и при градиенте при-

ложенного напряжения 500 В/см достигается плотность тока 0,137 А/см² и концентрация мощности 68,5 Вт/см³.

В самом деле, уравнение Джоуля — Ленца может быть представлено в виде

$$P = jE = \sigma E^2 = (n_e e \mu_e) E^2 \text{ Вт}, \quad (\text{XXVII-14})$$

где j — плотность тока;
 E — напряженность электрического поля;
 σ — электропроводность;
 n_e — концентрация электронов;
 e — заряд электронов;
 μ_e — подвижность электронов.

Очевидно, что чем выше напряженность поля и больше концентрация электронов, тем выше величина выде-

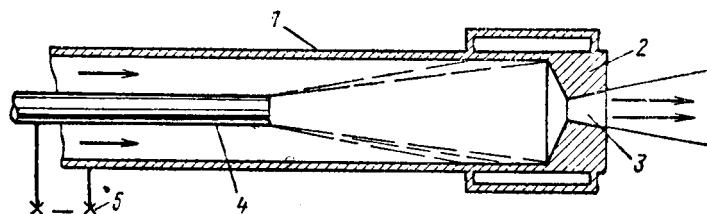


Рис. 172. Принципиальная схема электрохимической горелки:

1 — трубчатый электрод; 2 — водоохлаждаемое сопло; 3 — коническое отверстие сопла; 4 — центральный электрод; 5 — токоподвод

ляемой мощности. Согласно уравнению Саха [уравнение (XXVII-13)], количество свободных зарядов зависит от потенциала ионизации U_i . Для CO_2 и H_2O потенциал ионизации соответственно равен 13,7 и 12,6 эВ. Значительно меньшим потенциалом ионизации обладают щелочные металлы (Na — 5,138 эВ; K — 4,339 эВ). Следовательно, добавка в продукты сгорания небольшого количества щелочных металлов значительно увеличивает явление теплогенерации в пламени при наложении на него электрического поля.

Из вышеизложенного следует, что пламя в электрическом поле представляет собой промежуточный случай между газом и плазмой. Горелки, в которых осуществляется рассматриваемый тип теплогенерации, называются электрохимическими или топливоплазменными и их принципиальная схема представлена на рис. 172.

Г. Поток электронов

Как было описано выше, электроны, эмитируемые катодом, движутся к положительно заряженному аноду. Если разность потенциалов между катодом и анодом достаточно велика, то под действием поля электроны приобретают значительное ускорение и при достаточно глубоком вакууме и, следовательно, отсутствии столкновений с молекулами газа или паров разгоняются до скоростей, сопоставимых со скоростью света.

На основании закона сохранения энергии, кинетическая энергия электрона равна величине работы сил энергетического поля, совершенной при перенесении заряда:

$$\frac{mv^2}{2} = eU,$$

откуда

$$v = \sqrt{2 \frac{e}{m} U} = 5,93 \cdot 10^5 \sqrt{U} \text{ м/с.} \quad (\text{XXVII-15})$$

Из формулы XXVII-15 следует, что при ускоряющем напряжении $U=10$ кВ скорость электронов равна 60000 км/с, а при $U=40$ кВ достигает 120000 км/с.

При столкновении летящего электрона с какой-либо поверхностью (например, с нагреваемым металлом) происходит либо поглощение, либо отражение электрона. При поглощении электрона его энергия может быть трансформирована как в тепловую, так и в энергию рентгеновского излучения, может быть затрачена на выбивание из металла электронов (вторичная эмиссия) или вызвать другие эффекты, связанные с взаимодействием летящего электрона и атомов металла.

На образование рентгеновского излучения расходуется мощность

$$P = \alpha ZIU^2, \quad (\text{XXVII-16})$$

где α — коэффициент, $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-6}$ (при измерении напряжения в кВ);

Z — порядковый номер элемента в таблице Менделеева;

I — сила тока электронного пучка А;

U — разгоняющее напряжение, кВ.

Используя формулу XXVII-16, легко убедиться, что потери энергии электрона на рентгеновское излучение состав-

ляют менее 1% от мощности электронного пучка. Тем не менее, при $U \geq 40$ кВ, необходимо устанавливать специальную защиту от рентгеновского излучения. Потери энергии на образование вторичной электронной эмиссии могут иметь значительно большую величину. Наибольшее значение имеет вторичная эмиссия, возникающая под действием непрерывного потока электронов, обладающих относительно невысокой энергией. Вторичный эмиссионный ток образуется за счет связанных электронов и число эмитируемых вторичных электронов может быть даже больше числа первичных электронов. Их число зависит от скорости первичных электронов, угла падения электронного пучка, отталкивающего поля самого первичного пучка электронов, и т. д.

Если учесть, что около 90% всех вторичных электронов имеют скорость, соответствующую разгону в поле напряженностью 20 В, то потери энергии на вторичную эмиссию также много меньше мощности электронного пучка.

Таким образом из вышесказанного следует, что большая часть кинетической энергии поглощенных металлом электронов трансформируется в тепловую, вследствие чего металл разогревается.

Мощность электронного пучка зависит от плотности тока в пучке и величины разгоняющего напряжения. Поскольку основным поставщиком электронов является эмитирующий катод, то плотность эмиссионного тока может быть подсчитана по формуле Ричардсона — Дэшмана [формула (XXVII-6)]. Однако при наличии значительного внешнего электрического поля заметную роль начинает играть автоэлектронная эмиссия [формула (XXVII-7)], значительно увеличивающая суммарную плотность тока (так называемый эффект Шоттки). При наличии у поверхности катода напряженности электрического поля E суммарная плотность тока может быть рассчитана по формуле

$$j' = j_0 e^{4,39 \frac{\sqrt{E}}{T}} \text{ А/м}^2, \quad (\text{XXVII-17})$$

где j_0 — плотность тока, вычисленная по формуле Ричардсона — Дэшмана, А/м²;

T — температура катода, К;

E — напряженность электрического поля у поверхности катода, В/м.

В реальных случаях не все испускаемые катодом электроны достигают анода. При недостаточной величине напряженности электрического поля между катодом и анодом часть электронов, накапливаясь вблизи катода, образует электронное облако, препятствующее свободному прохождению электронов от катода к аноду (поскольку летящие электроны и пространственный заряд имеют отрицательный знак). Наличие пространственного заряда необходимо учитывать при рассмотрении зависимости между силой тока и напряжением, так как присутствие пространственного заряда существенно меняет форму распределения потенциала между электродами, принимающую нелинейный характер. В общем случае можно записать

$$I = \alpha U_{\text{эф}}^{3/2}, \quad (\text{XXVII-18})$$

где α — коэффициент, зависящий от формы и расположения электродов.

В настоящее время величина ускоряющего напряжения U приближенно определяется из энергетического баланса нагреваемого изделия. Мощность пучка находится как

$$P = IU = pU^{5/2} \text{ Вт}, \quad (\text{XXVII-19})$$

где $p = I/U^{3/2} \text{ А/В}^{3/2}$ — так называемый первеанс (функция, характеризующая электронно-оптическую систему с ограничением силы тока пространственным зарядом).

Для плавильных электроннолучевых установок $p = (0,5-1,5) \cdot 10^{-6} \text{ А/В}^{3/2}$.

В промышленных установках анод обычно выполняют в виде диафрагмы с отверстием (рис. 173). Анод A

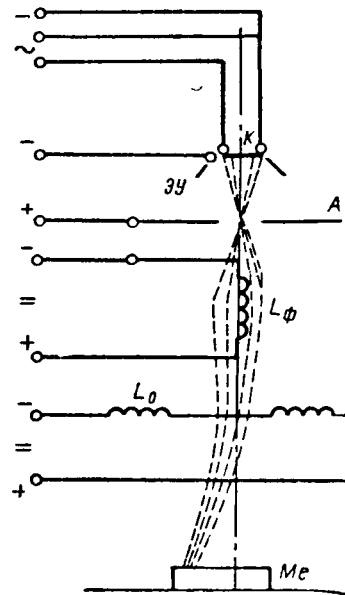


Рис. 173. Принципиальная схема электронно-лучевой установки

электрически связан с заземленным корпусом установки. Между основным катодом K и анодом A существует разгоняющее напряжение U . Управляющий катод $ЭУ$ служит для собирания электронов, эмитируемых катодом, в узкий пучок, который должен пройти через отверстие небольшого диаметра в диафрагме — аноде. На $ЭУ$ может подаваться различный потенциал относительно катода (от 0 до некоторого отрицательного U). Ниже анода располагают фокусирующую L_f и отклоняющую L_0 системы, предназначенные соответственно для собирания электронов, прошедших анод, в узкий пучок и отклонения его в требуемую точку поверхности нагреваемого изделия.

Устройство для получения электронов, сообщения им больших скоростей и собирания потока электронов в пучок с выводением его в рабочее пространство, где электрическое поле отсутствует, носит название электронной пушки.

Глава XXVIII

ТЕПЛОГЕНЕРАЦИЯ В РАБОЧЕМ ТЕЛЕ, НАХОДЯЩЕМСЯ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Любое тело, находящееся в переменном электромагнитном поле, взаимодействует с ним, в результате чего происходит поглощение телом энергии электромагнитного поля. В зависимости от того, является ли тело диэлектриком или проводником, физическая сущность происходящих процессов будет различной.

В результате взаимодействия свободных электронов проводника с переменным магнитным полем, проводник будет нагреваться за счет индуцированных в нем переменных токов.

Такой вид теплогенерации получил название индукционного нагрева.

В диэлектрике или полупроводнике, помещенном в высокочастотное электрическое поле, происходят процессы поляризации атомов и молекул, сопровождающиеся поглощением энергии переменного электрического поля. Этот вид теплогенерации получил название диэлектрического нагрева.

1. Индукционный нагрев

Представим себе, что мы имеем полугораниченную изотропную плоскую металлическую плиту. Оси координат OX и OY лежат в плоскости раздела металл-воздух, а ось OZ — перпендикулярна ей.

В воздухе существует электромагнитная плоская волна, распространяющаяся в направлении Z со скоростью c . Учитывая, что в металлах ток смещения исчезающе мал по сравнению с током проводимости, система уравнений Максвелла, описывающая распространение электромагнитной волны в металле может быть представлена в виде

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\vec{E}}{\rho}; & \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; & \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{XXVIII-1})$$

где H, E — напряженности магнитного и электрического полей в металле;

ρ — удельное сопротивление металла;

μ_a — абсолютная магнитная проницаемость металла.

Переходя к амплитудным величинам, решение системы (XXVIII-1) может быть представлено в виде

$$H = H_0 e^{-\frac{Z}{\Delta_3}} \sin \left(\omega t - \frac{Z}{\Delta_3} \right); \quad (\text{XXVIII-2})$$

$$E = H_0 \frac{\rho \sqrt{2} e^{-Z/\Delta_3}}{\Delta_3} \sin \left(\omega t - \frac{Z}{\Delta_3} + \frac{\pi}{4} \right), \quad (\text{XXVIII-3})$$

где H_0 — амплитудное значение напряженности магнитного поля в воздухе (на поверхности раздела металл — воздух);

$\omega = 2\pi f$ — круговая частота;

$\Delta_3 = 503 \sqrt{\frac{\rho}{\mu f}}$ — так называемая глубина проникновения тока, м;

μ — относительная магнитная проницаемость металла.

Первые сомножители этих уравнений показывают, как меняется амплитуда волн (электрической и магнит-

ной), продвигающихся в металле в направлении Z . Вторые — как меняются фазы. Из уравнений следует, что амплитуды магнитной и электрической волн сдвинуты по фазе на 45° .

По мере продвижения волн в глубь металла, амплитуды уменьшаются по экспоненте и на расстоянии $Z = \Delta_3$ амплитуды уменьшатся в $e = 2,718$ раз, т. е. упадут до 38% от значения амплитуды на границе металл — воздух.

Скорость затухания амплитуд зависит от глубины проникновения Δ_3 : чем Δ_3 меньше, тем сильнее затухание H и E . В этом заключается явление скин-эффекта.

Плотность тока в каждом участке металла пропорциональна амплитуде напряженности электрического поля: $j = E_{\text{амп}}/\rho$. Используя уравнение (XXVIII-3) получим распределение плотности тока по толщине тела

$$j = H_0 \frac{\sqrt{2} e^{-Z/\Delta_3}}{\Delta_3}. \quad (\text{XXVIII-4})$$

Легко убедиться, что плотность тока на поверхности тела ($Z=0$) равна

$$j_0 = \frac{H_0 \sqrt{2}}{\Delta_3}$$

или

$$j = j_0 e^{-Z/\Delta_3}. \quad (\text{XXVIII-5})$$

Поскольку скорость распространения электромагнитных волн в металле конечна и сравнительно невелика, то фазы напряженности магнитного (и электрического) поля в металле даже на сравнительно небольших расстояниях отличаются друг от друга. Поэтому в каждый момент времени в металле имеются участки, в пределах которых фаза меняется с 0 до π (напряженность электрического поля E и плотность тока j имеют положительный знак) и участки, где фаза меняется с π до 2π (E и j имеют отрицательный знак). Это означает, что направление тока на этих участках — противоположное.

Мощность электромагнитного поля, поглощенная телом, пропорциональна квадрату действующего значения плотности тока в данном участке тела (закон Джоуля — Ленца). Следовательно, кривая спада интенсивности выделяемой мощности является экспонентной, показатель которой равен удвоенному показателю экспоненты плотности тока (рис. 174). В слое толщиной равной глу-

бине проникновения тока Δ_3 , поглощается 86% всей поступающей через поверхность энергии. Полная мощность, поглощаемая единицей поверхности полубесконеч-

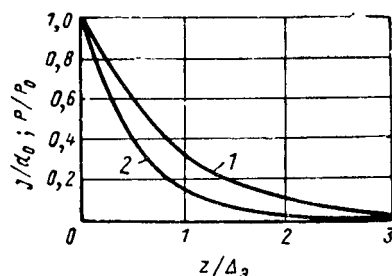


Рис. 174. Относительное изменение плотности тока j/j_0 (1) и удельной мощности p/p_0 (2) с удалением от поверхности

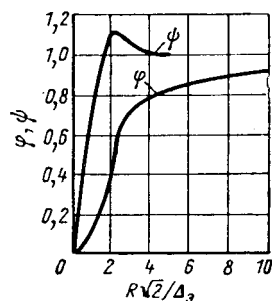


Рис. 175. Значения функций Φ и Ψ в зависимости от $R\sqrt{2}/\Delta_3$

ного плоского тела, может быть найдена из соотношения

$$P_a = \int_0^{\infty} \rho j^2 dZ.$$

Учитывая уравнение (XXVIII-4), подставляя значение в вышеприведенное соотношение и интегрируя, получим

$$P_a = 2 \cdot 10^{-4} H_0^2 \sqrt{\rho \mu f} \text{ Вт/см}^2. \quad (\text{XXVIII-6})$$

Напряженность магнитного поля без учета краевых эффектов и при бесконечной протяженности металла и индуктора можно принять равной произведению числа витков, приходящихся на 1 см длины индуктора, на величину силы тока, протекающего через индуктор

$$H_0 = I_n w_{1,0}.$$

Отсюда

$$P_a = 2 \cdot 10^{-4} (I w_{1,0})^2 \sqrt{\rho \mu f} \text{ Вт/см}^2. \quad (\text{XXVIII-7})$$

Величина, являющаяся характеристикой материала рабочего тела $\sqrt{\rho \mu f}$, носит название коэффициента поглощения мощности. Поскольку сдвиг фаз между электрической и магнитной составляющими электромагнитной волны в металле составляет 45° , индуктивное и активное сопротивления металла равны между собой и, следовательно, $p_{\text{реак}} = p_a$, т. е.

$$P_{\text{реак}} = 2 \cdot 10^{-4} (I w_{1,0})^2 \sqrt{\rho \mu f} \text{ ВА/см}^2 \quad (\text{XXVIII-8})$$

и

$$\cos \varphi = \frac{P_a}{\sqrt{P_a + P_{\text{реак}}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707. \quad (\text{XXVIII-9})$$

При определении мощности, поглощаемой телом цилиндрической формы, в уравнения (XXVIII-7) и (XXVIII-8) вводятся поправки, учитывающие кривизну поверхности нагреваемого тела:

$$P_a = 2 \cdot 10^{-4} (I \omega_{0,1}) \sqrt{\rho \mu f} \varphi \left(\frac{R \sqrt{2}}{\Delta_3} \right) \text{Вт/см}^2; \quad (\text{XXVIII-10})$$

$$P_{\text{реак}} = 2 \cdot 10^{-4} (I \omega_{1,0}) \sqrt{\rho \mu f} \psi \left(\frac{R \sqrt{2}}{\Delta_3} \right) \text{ВА/см}^2. \quad (\text{XXVIII-11})$$

Значения функций $\varphi \left(\frac{R \sqrt{2}}{\Delta_3} \right)$ и $\psi \left(\frac{R \sqrt{2}}{\Delta_3} \right)$ представлены на рис. 175.

Из анализа уравнения (XXVIII-6) следует, что существуют два способа увеличения величины мощности, выделяемой в нагреваемом теле.

Первый — это увеличение величины амплитуды магнитного поля на поверхности металла H_0 . Этого можно добиться, увеличивая магнитодвижущую силу индуктора $I \omega$, однако эту возможность можно использовать только в определенных пределах. Более рационально — уменьшить сопротивление магнитному потоку на тех участках пути, где он не проходит по нагреваемому материалу. Это достигается применением металлических магнитопроводов (сердечников). Магнитная проницаемость стали много больше, чем воздуха, поэтому при неизменной магнитодвижущей силе наличие стальной цепи позволяет увеличить магнитный поток в нагреваемом металле.

Второй способ — увеличение частоты. Это достигается при питании индуктора от источника повышенной или высокой частоты.

Эти два способа и предопределили появление индукционных ЭТУ с сердечником и высокочастотных ЭТУ без сердечника.

А. Особенности теплогенерации в твердом проводнике, находящемся в переменном электромагнитном поле

Полученные выше зависимости являются приближенными в связи с тем, что электротехнические параметры

проводника претерпевают значительные изменения в процессе нагрева. Так, в результате возрастания удельного сопротивления ρ , и некоторого уменьшения μ по ходу нагрева меняются глубина проникновения тока Δ_0 и поглощаемая мощность P . Для немагнитных материалов $\mu=1,0$ и не зависит от температуры, и поэтому изменение Δ_0 и P определяется лишь изменением ρ . Для ферромагнитных материалов при достижении точки Кюри, магнитная проницаемость резко уменьшается в 50—100 раз и становится равной единице. В соответствии с этим при прохождении точки Кюри наблюдается резкое увеличение Δ_0 и уменьшение P . Кроме этого, магнитная проницаемость ферромагнитных материалов зависит от напряженности магнитного поля. С увеличением напряженности H магнитная проницаемость μ вначале возрастает, а затем снижается. Так как напряженность магнитного поля имеет максимальное значение у поверхности ферромагнитного металла и снижается по его толщине, то с увеличением глубины μ вначале достигает некоторого максимума (в соответствии с химическим составом металла), а затем снижается.

Таким образом, при нагреве металла происходит непрерывное изменение ρ и μ как по глубине, так и во времени.

В результате кривая распределения плотности тока принимает форму, состоящую из двух экспонент. Первая соответствует распределению плотности тока при температуре выше точки Кюри, вторая — ниже. Если глубина требуемого прогрева металла X , то при $\Delta_0 > X$ мы имеем глубинный (сквозной) нагрев металла; если же $\Delta_0 < X$ — то поверхностный.

На рис. 176 представлено распределение плотности тока по толщине стального цилиндра в различные периоды нагрева. В холодном цилиндре (кривая 1) имеет место резко выраженный скинн-эффект. Магнитная проницаемость металла в радиальном направлении будет неодинаковой вследствие различной напряженности маг-

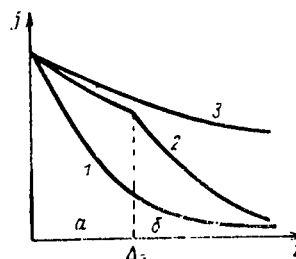


Рис. 176. Распределение плотности тока по толщине стального цилиндра в различные периоды нагрева

нитного поля. Кривая 2 характеризует распределение плотности тока в промежуточный период нагрева. Температура слоя a выше температуры магнитных превращений, и этот слой характерен тем, что $\mu=1,0$, а ρ мало меняется по сечению, но в 8—10 раз больше начального значения. Кривая 3 показывает распределение плотности тока в период, когда по всему сечению $T > T_{кр}$. В пределах слоя, нагретого выше температуры магнитных превращений, неравномерность распределения температуры невелика.

Б. Теплогенерация в газе, находящемся в переменном электромагнитном поле

После ионизации, в газе тепло может быть генерировано переменным магнитным полем также, как и в любом металлическом проводнике. Этот принцип используется в индукционных плазмотронах, где энергия высокочастотного электромагнитного поля используется для диссоциации и ионизации газа. Первоначальная ионизация газа вызывается вводимым в рабочую камеру тугоплавким электропроводящим стержнем, разогреваемым переменным магнитным полем. После этого стержень убирается и дальнейшая ионизация газа поддерживается электромагнитным полем индуктора. Достигаемые таким способом температуры в центре плазменного потока равны: для гелия ~ 20000 , для азота 18000, для аргона 15000 К. Отсутствие электродов позволяет использовать в качестве плазмогенной среды химически активные газы.

2. Диэлектрический нагрев

В отличие от проводников тока, имеющих свободные заряды, электрические заряды в диэлектрике связаны внутриатомными или внутримолекулярными силами. Под действием электрического поля возникает механическая сила, вызывающая поляризацию диэлектрика, т. е. перемещение зарядов в том или ином направлении в соответствии с их знаком. Если электрическое поле переменное, то под действием этого поля поляризация диэлектрика будет происходить то в одном, то в другом направлении. Это непрерывное перемещение заряженных частиц представляет собой ток, называемый током смещения.

При наличии свободных зарядов ток смещения (значительно меньший тока проводимости) опережает по фазе напряжение на 90° . В реальных диэлектриках смещение заряженных частиц происходит с некоторым «трением», требующим затраты определенной энергии, которая и вызывает нагрев диэлектрика. Вследствие «трения» поляризация несколько запаздывает во времени, и поэтому сдвиг по фазе тока относительно напряжения несколько меньше 90° (рис. 177). Это означает, что ток в диэлек-

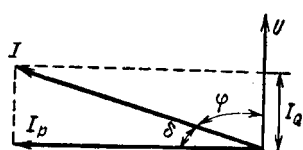


Рис. 177. Векторная диаграмма диэлектрического нагрева

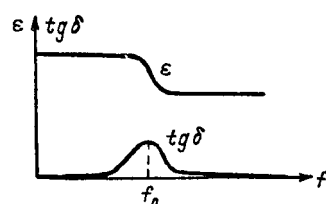


Рис. 178. Характер изменения ϵ и $\operatorname{tg} \delta$ в зависимости от частоты поля f

трике имеет как реактивную I_p , так и активную I_a составляющие.

Угол δ называют углом потерь, поскольку мощность, поглощаемая диэлектриком, зависит от его величины

$$P = IU \cos \varphi = UI \sin \delta.$$

После некоторых преобразований можно получить, что

$$P = 2\pi f \epsilon E^2 V \operatorname{tg} \delta, \quad (\text{XXVIII-12})$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость материала;
 E — напряженность электрического поля;
 V — объем диэлектрика;
 f — частота.

Таким образом, поглощаемая диэлектриком мощность зависит от параметров электрического поля E и f и от электрических свойств материала ϵ и $\operatorname{tg} \delta$.

Произведение диэлектрической проницаемости на тангенс угла потерь характеризует диэлектрик с точки зрения поглощения мощности, это произведение называется фактором потерь $k = \epsilon \operatorname{tg} \delta$. Удельную мощность, поглощаемую диэлектриком, можно теперь представить в виде

$$P_v = 0,555 k E^2 \cdot 10^{-6} \text{ Вт/см}^3, \quad (\text{XXVIII-13})$$

где E — напряженность, кВ/см.

Для данного материала диэлектрическая проницаемость и тангенс угла потерь зависят от частоты. При малых частотах потери на трение малы. С повышением частоты скорость смещения зарядов возрастает, трение увеличивается и при частоте f_0 достигает максимального значения (рис. 178). При более высоких частотах заряды не успевают смещаться вслед за полем, потери на трение падают, диэлектрическая проницаемость ϵ также падает.

В зависимости от структуры диэлектрика и характера поляризации возможно появление нескольких максимумов на кривой $\operatorname{tg} \delta = \varphi_1(f)$ и несколько спадов на кривой $\epsilon = \varphi_2(f)$.

В отличие от диэлектриков полупроводники, находящиеся в переменном электрическом поле, обладают как током проводимости, так и током смещения. Ток проводимости по фазе совпадает с напряжением и, следовательно, вызывает дополнительное поглощение мощности. Векторная диаграмма для полупроводников аналогична векторной диаграмме для диэлектриков, но угол потерь имеет несколько большее значение.

По типу подведения высокочастотного электрического поля диэлектрический нагрев подразделяется на нагрев между пластинами конденсатора и нагрев электромагнитной волной.

В обоих случаях используются электромагнитные волны метрового диапазона ($\lambda = 1-1000$ м). В зависимости от используемой длины волны (частоты поля) значительно меняются удельная мощность, поглощаемая нагреваемым материалом, время нагрева, к.п.д. установки и объем нагреваемого материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Башенко В. В., Донской А. В., Соломахи́н И. М. Электроплавильные печи цветной металлургии. М. «Металлургия», 1971. 320 с. с ил.
2. Свенчанский А. Д., Смелянский М. Я. Электрические промышленные печи, ч. 2, М., «Энергия», 1970. 260 с. с ил.

Раздел седьмой

ОГНЕУПОРНЫЕ МАТЕРИАЛЫ В МЕТАЛЛУРГИИ

Глава XXIX

СВОЙСТВА ОГНЕУПОРОВ И ИХ СЛУЖБА

1. Огнеупоры, их определение и назначение

Огнеупорами называют такие строительные материалы, которые согласно общесоюзному стандарту должны иметь температуру плавления не ниже 1580°C .

В промышленной практике для сооружения металлургических печей широко применяют материалы с температурой плавления, значительно более высокой чем 1580°C . В печах для плавки стали и других специальных сплавов железа, при выплавке никеля и кобальта используют материалы с огнеупорностью порядка $1700\text{—}2100^{\circ}\text{C}$. Таким образом огнеупорные материалы требуются для сооружения печей, в которых обработка материалов связана с высокими температурами. Иначе говоря из огнеупорных материалов сооружают различные нагревательные, сушильные, обжиговые и плавильные устройства, а также сталеразливочный припас и футеровку ковшей для разлива стали и других металлов.

Основными требованиями, предъявляемыми к футеровочным материалам являются сопротивление высоким температурам, термостойкость и стойкость против химического воздействия различных расплавленных сред. Современная огнеупорная промышленность производит изделия с огнеупорностью до 2100°C . Исключением является углерод и его модификация графит, которые могут выдерживать температуры до $2200\text{—}3000^{\circ}\text{C}$ и хорошо противостоят разъедающему действию большинства расплавов. Но редкие металлы очень активно взаимодействуют с углеродом, образуя с ним карбиды и полу-

чить эти металлы чистыми, т. е. свободными от углерода в печах с графитовой футеровкой не представляется возможным. В некоторых случаях, например, в производстве Al, Zr, Th, Be и других редких металлов, которые получают во фтористых средах, и вообще при электролизе фторидов, углерод и его модификация графит являются незаменимыми огнеупорами.

2. Физико-химическая характеристика огнеупоров

При сооружении печей для металлургических процессов огнеупорные материалы надо подбирать с учетом химических свойств перерабатываемых материалов. Плавка металлов, при которой шлаки получаются с высоким содержанием кремнезема (SiO_2), называется кислой. В этом случае футеровку печей тоже необходимо изготавливать из кислых огнеупоров, т. е. состоящих из SiO_2 . При выплавке металлов с основными шлаками, в которых преобладают окислы кальция, магния или железа, футеровка печи должна выполняться из огнеупоров, имеющих основные свойства, т. е. из магнезита, доломита или из хромомagneзита. Плавка алюминия и его сплавов с другими металлами, шлаки которых обладают нейтральными свойствами, относится к нейтральным плавкам, в таких случаях для футеровки печи используют нейтральные огнеупоры, т. е. шамот или высокоглиноземистые изделия.

Для специальных процессов, связанных с получением особо чистых металлов, например, при выплавке бериллия и урана плавильные сосуды соответственно могут изготавливаться из окиси бериллия и окиси урана.

При выплавке чистых металлов с высокой температурой плавления, порядка $1800\text{--}2500^\circ\text{C}$, широко применяются огнеупорные изделия из окислов Al_2O_3 , BeO , MgO , ZrO_2 , ThO_2 и CaO с температурой плавления от 2050 до 3300°C . При производстве легких и редких металлов: Al, Mg, Ca, Li, Ba, Be, Zr и др., получаемых электролизом фтористых солей, весьма агрессивных по отношению ко многим огнеупорам, футеровку электролизёров изготавливают из графита или углеродистых блоков.

При электролизе легкоплавких хлористых солей можно использовать сосуды из стали или чугуна для

температур 350—500°С или сосуды, футерованные шамотом, для температур 500—800°С. Выплавка таких благородных металлов как Ag и Au успешно проводится, без заметных потерь этих драгоценных элементов, в индукционных печах с графитовой футеровкой, выплавка металлов платиновой группы успешно выполняется в тиглях, изготовленных из окиси кальция.

3. Классификация и применение огнеупорных материалов

Все огнеупорные изделия могут быть разделены на три группы:

1. Огнеупорные, с температурой плавления 1580—1770°С.
2. Высокоогнеупорные, с температурой плавления 1770—2000°С.
3. Высшей огнеупорности, с температурой плавления выше 2000°С.

Классификация огнеупоров по химическому составу и технологии производств

Важнейшим фактором, определяющим свойства огнеупоров, является химический состав материала. В связи с этим огнеупоры могут быть разделены по составу и минералогическому происхождению на следующие группы и подгруппы:

I. Кремнекислые огнеупоры:

1. Динасовые на известковой связке, 5% CaO, 92—95% SiO₂.
2. Динасовые на глинистой связке, 5% Al₂O₃, 95% SiO₂.

II. Алюмосиликатные огнеупоры:

А. Полукислые:

1. Кварцево-глинистые 3. Шамотные-полукислые 3. Кварцево-шамотные	}	SiO ₂ до 70% и Al ₂ O ₃ до 30%.

Б. Нейтральные:

1. Шамотные, Al₂O₃ > 25 и < 40%.
2. Каолиновые, Al₂O₃ ≈ 40%.
3. Высокоглиноземистые, Al₂O₃ > 45%.
4. Корундовые, Al₂O₃ > 75%.

III. Огнеупоры с основными свойствами:

- А. Магнезиальные:
1. Магнезитовые, $Mg > 90\%$ и $FeO \approx 5-7\%$.
 2. Форстеритовые на основе $2 MgO \cdot SiO_2$.
 3. Шпинельные на основе $MgO \cdot Al_2O_3$.
 4. Доломитовые на основе $MgO \cdot CaO$.
 5. Тальковые на основе $3 MgO \cdot 4 SiO_2 \cdot H_2O$ с $MgO > 30\%$.
 6. Хромомагнезитовые, $55-65\%$ MgO , $15-20\%$ Cr_2O_3 и до 15% FeO .
- Б. Хромитовые, $Cr_2O_3 \geq 30\%$, $MgO \approx 16\%$, $FeO \approx 18\%$.
- IV. Углеродистые и углеродсодержащие огнеупоры:
- А. Углеродистые:
1. Углеродистые.
 2. Графитовые.
- Б. Углеродсодержащие:
1. Карбофраксовые — карборунд с глинистой связкой.
 2. Рефраксовые — карборунд с органической связкой или стекло.
- V. Цирконовые, $ZrO_2 \cdot SiO_2$.
- VI. Изделия из чистых тугоплавких окислов: TiO_2 , Al_2O_3 , MgO , BeO , ZrO_2 , ThO_2 , HfO_2 и др.

Классификация по области применения

В технике печестроения широкое распространение получила классификация, учитывающая конструктивные особенности печей и формовку огнеупорных изделий. Согласно этой классификации учитываются форма и условия службы огнеупоров. Называются такие изделия сводовым, арочным, пятовым, ковшевым и доменным кирпичем. Огнеупоры предназначенные для разлива стали называются сифонным или сталеразливочным припасом.

Классификация по сложности формы и размерам

Огнеупорной промышленностью выпускаются фасонные изделия различной сложности: простые, сложные и особо сложные, крупноблочные фасонные изделия и специальные изделия — тигли, трубы и т. п.

К огнеупорным изделиям, получившим широкое применение при кладке печей, относятся нормальный прямой, продольной клиновым и поперечный клиновым кирпич.

Классификация по огнеупорности

Согласно ГОСТ 4385—68, огнеупорные материалы делятся на следующие классы:

Класс	О	А	Б	В
Огнеупорность не менее:				
К	2023	2003	1943	1853
°С	1750	1730	1670	1580

Классификация огнеупоров по способу изготовления

1. Изделия, получаемые резанием горных пород (тальковые).
2. Изделия, получаемые формовкой из пластичных шихт (прессованием или ручной формовкой).
3. Изделия, получаемые прессованием полусухих шихт.
4. Изделия, получаемые трамбовкой.
5. Изделия литые из расплавов.

Классификация по термической обработке

1. Обжиговые, т. е. отформованные и обожженные в печах при определенной температуре.
2. Безобжиговые, отформовываются и не подвергаются обжигу.

4. Физические и химические свойства огнеупоров

Основные свойства огнеупорных изделий.

1. Прочность на сжатие при обычных температурах.
2. Стойкость в кладке печей против сжатий при высоких температурах процесса.
3. Огнеупорность изделий (материалов), т. е. их стойкость против высоких температур, при которых они не размягчаются (не переходят в жидкое состояние) и сохраняют свою форму.
4. Термическая устойчивость изделий, понимаемая как способность огнеупоров противостоять резким изменениям температур.
5. Химическая устойчивость по отношению к расплавленным массам, соприкасающимся с огнеупорной кладкой печей и по отношению к газам заполняющим печи.
6. Пористость и газопроницаемость.
7. Теплопроводность.

8. Электропроводность при высоких температурах.

Важнейшим свойством огнеупорных изделий является химическая стойкость их против агрессивного воздействия расплавленных солей, шлаков и металлов, так как наибольший процент огнеупоров, расходуемых в печах, разрушается химическим воздействием расплавов. При плавке стали в мартеновских печах и конвертерах, при температурах 1700—1750° С расплав обладает высокой химической активностью и его разъедающее воздействие на футеровку печей очень велико. В нагревательных печах огнеупоры интенсивно разъедаются плавящейся окалиной. Важное значение имеет это свойство огнеупоров в цветной металлургии и металлургии редких металлов.

Пористость огнеупоров

Огнеупорные изделия являются пористыми телами. Стойкость огнеупоров против шлакоразъедания зависит от пористости изделия. С увеличением пористости огнеупоров значительно возрастает поверхность их контакта с расплавом и резко падает стойкость огнеупоров против шлакоразъедания. В печах с контролируемой средой, где фильтрация газа через футеровку недопустима, используют огнеупоры с минимальной пористостью. Огнеупоры, используемые в вакуумных печах, тоже должны иметь минимальную пористость с тем, чтобы уменьшить непроизводительную работу вакуумных насосов по откачке газов из их пор.

Размер пор, их структура и количество в огнеупорных изделиях весьма разнообразны: в легковесных огнеупорах пористость достигает 60—75%, а для большинства огнеупорных изделий она находится в пределах 15—28%, уменьшаясь до 10% и даже до нуля у плавящихся изделий. Пористость обожженных изделий представляет собой комбинацию небольших объемов, связанных между собой капиллярами, или полностью изолированных друг от друга малых объемов, заполненных газом. Поэтому можно рассматривать:

1) общую, или истинную, пористость, под которой понимается сумма всех пор, содержащихся в изделии;

2) кажущуюся, или открытую, пористость, т. е. отношение объема, занятого в изделии порами, сообщающимися между собой, и окружающей средой, к общему объему огнеупора, выраженному в %;

3) закрытую пористость, которая представляет собой сумму пор, изолированных друг от друга и от окружающей огнеупор среды.

Величина пор в огнеупорных изделиях колеблется в весьма широких пределах, от нескольких миллиметров до молекулярных размеров. Поры, связанные между собой и с внешней средой капиллярами, обуславливают пропитывание огнеупорных изделий расплавами. Пористость огнеупоров тесно связана с водопоглощением и водопроницаемостью, шлакопроницаемостью и газопроницаемостью. Определение пористости огнеупоров довольно сложно, поэтому пористость их определяют через водопоглощение. Обычно водопоглощение огнеупоров начинается с определения их объемной массы. Объемной массой огнеупоров называется отношение первоначальной массы сухого образца к его объему

$$O_m = \frac{P_1}{V} \text{ кг/м}^3,$$

где P_1 — масса сухого образца, кг;
 V — объем образца, м³.

Водопоглощением называется отношение массы поглощенной воды после 3-ч кипячения огнеупорного образца к первоначальной массе образца:

$$B = \frac{P_2 - P_1}{P_1} \cdot 100\%,$$

где P_1 — масса сухого образца до кипячения, г;

P_2 — масса влажного образца после кипячения, г.

Кажущаяся пористость огнеупорных изделий определяется отношением прироста массы образца после водопоглощения кипячением к его объему, выраженному в см³:

$$\Pi_k = \frac{P_2 - P_1}{V} \cdot 100\%.$$

где V — объем образца, см³.

Кажущуюся пористость можно представить как произведение объемной массы изделия на горячее водопоглощение:

$$\Pi_k = BO_m = \frac{P_1}{V} \frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{P_2 - P_1}{v}.$$

Отношение объемной массы образца к его плотности ρ

представляет собой долю его объема, приходящегося на совершенно плотное тело, без пор:

$$\Delta = \frac{O_m}{\rho}.$$

Это равенство характеризует собой степень плотности изделия.

Истинная или общая пористость огнеупорных изделий представляет собой разность объемов пористого и сплошного тела, без пор:

$$P_n = (1 - \Delta) 100 = \left(1 - \frac{O_m}{\rho}\right) 100.$$

Закрытая пористость. Зная истинную и кажущуюся пористость можно определить закрытую пористость огнеупорного изделия: закрытая пористость определяется вычитанием из общей кажущейся пористости.

$$P_n - P_k = P_{закр.}$$

Газопроницаемость огнеупоров

Газопроницаемость огнеупорных изделий зависит от структуры огнеупора, от температуры и давления, при которых происходит действие газа, от величины и характера пор.

Газопроницаемость огнеупоров находится в прямой зависимости от количества и диаметра сквозных пор. Пористость и газопроницаемость огнеупорных изделий особо важное значение приобретает в металлургии цветных, редких и благородных металлов, где потеря каждого грамма ценного металла имеет очень большое значение.

С увеличением пористости огнеупорных изделий возрастает их способность впитывать металлы во время плавки, и, следовательно, увеличивать их потери, и как следствие значительно понижать извлечение полезных элементов из сырья. Поэтому, должно быть обращено особое внимание на это качество огнеупорных изделий при проектировании и сооружении металлургических печей.

Теплопроводность огнеупоров

Огнеупорные изделия используются при сооружении печей в качестве строительного материала. Кроме того,

во время плавки руд или металлов огнеупорная футеровка изолирует рабочий объем печей от окружающей среды и препятствует распространению тепла за пределы печи, так как, большинство огнеупоров обладает низкой теплопроводностью (табл. 13). В некоторых ме-

Таблица 13

Коэффициенты теплопроводности огнеупоров

Наименование огнеупоров	Температурный коэффициент теплопроводности λ_t , Вт/(м·К)	Коэффициент λ_t , Вт/(м·К) при рабочей температуре	Рабочая температура, К
<i>Кирпич</i>			
Шамотный	(0,72+0,0005 t) 1,16	1,65	1620—1720
Пеношамотный	(0,24+0,0002 t) 1,16	0,59	1620
Легковесный шамот	(0,09+0,000125 t) 1,16	0,29	1570
Динасовый	(0,8+0,0006 t) 1,16	2,11	1970
Магнезитовый	(4,0—0,0015 t) 1,16	0,75	1920—1970
Хромомагнезитовый	1,6—1,7 (0—600°С) 1,16		1970
Хромитовый	(1,1+0,00035 t) 1,16	1,966	1920—1970
Диатомитовый	(0,097+0,0002 t) 1,16	0,309	1120
<i>Изделия</i>			
Силлиманитовые (муллитовые)	(1,45—0,0002 t) 1,16	1,299	1920
Корундовые	(1,8+0,0016 t) 1,16	5,24	1920—1970
Циркониевые	(1,12+0,00055 t) 1,16	2,447	2020—2070
Карбофракс	(18—0,009 t) 1,16	15,66	1670—1770
Угольные	(20—0,030 t) 1,16	16,24	2270
Графитовые	(140—0,035 t) 1,16	81,20	2270
<i>Изоляционные материалы:</i>			
Асбест распушенный	(0,112+0,00016 t) 1,16	0,2598	700
Диатомит (вермикулит)	(0,062+0,000225 t) 1,16	0,280	900—1100
Шлаковая вата	(0,05+0,000125 t) 1,16	0,167	750

таллургических процессах огнеупоры должны являться посредниками при переносе тепла через стенку к нагреваемому материалу.

В первом случае, как например в плавильных или нагревательных печах, во вращающихся труб-

чатых, в индукционных или электродуговых печах с уменьшением теплопроводности огнеупоров, значительно понижаются потери тепла в окружающую среду. Во втором случае, например во всех муфельных печах, в ретортных при получении цинка или магния, при плавке алюминия и его сплавов в тигельных печах с уменьшением теплопроводности материала стенки, значительно ухудшаются условия нагрева металла и повышается расход тепловой энергии на единицу металла.

Следовательно, к теплопроводности огнеупоров, в зависимости от условий их службы, могут быть предъявлены разные требования.

В большинстве случаев огнеупоры служат в качестве изоляторов при движении тепла от рабочего объема печи во внешнюю среду, в этом случае огнеупоры должны обладать минимальной теплопроводностью. Теплопроводность огнеупоров определяется их химико-минералогическим составом и структурой. Большинство огнеупоров относится к плохим проводникам тепла. Исключения представляют углеродные изделия — угольные, графитовые и карборундовые и в некоторой степени магнезитовые.

Электропроводность огнеупоров

В современной металлургии черных металлов и особенно металлургии цветных и редких металлов очень широко применяется электрическая энергия. Поэтому важно знать электрические свойства огнеупоров и изменение их с повышением температуры. Большинство огнеупорных изделий при обычной температуре не проводят электрического тока и некоторые из них применяются в качестве электрических изоляторов. При нагревании огнеупорных изделий их электрическое сопротивление значительно уменьшается.

Теплоемкость огнеупоров

При определении требуемого количества тепла на нагревание огнеупорной кладки печи надо знать величину теплоемкости огнеупоров. Теплоемкость огнеупоров имеет большое значение при расчете насадки теплообменных аппаратов, типа регенераторов и кауперов, а также при определении расхода тепла периодически работающих печей. Теплоемкость различных огнеупоров определяется их природой и зависит от температуры.

Зависимость теплоемкости огнеупорных изделий от химического состава и температуры показана в табл. 15.

Таблица 14

Теплоемкость огнеупоров при различных температурах

Огнеупоры (кирпич)	Химический состав огне- упоров, %	Объемная масса кг/м ³	Теплоемкость $\frac{\text{кДж}}{(\text{кг} \cdot \text{К})}$ при температуре, К			
			473	873	1273	1473
Шамотный	40Al ₂ O ₃ , 57SiO ₂	1800	0,94	1,34	1,25	1,28
Полукислый шамот	30,0Al ₂ O ₃ , 63,0SiO ₂	1830	0,88	1,143	1,24	1,26
Динас	96SiO ₂	2040	0,99	1,18	1,21	1,22
Магнезитовый	88,85MgO 9,31Fe ₂ O ₃	2350	1,06	1,22	1,26	1,42
Угольные элект- роды	C	1480—1650	1,97	—	—	—
Графитирован- ные изделия	C	1500—1700	1,36	—	—	—

5. Рабочие свойства огнеупоров и их контроль

Самым важным свойством огнеупоров является их стойкость по отношению к высоким температурам процесса, которая определяется сохранением первоначального физического состояния и формы. Это свойство огнеупоров обуславливает устойчивость строительных элементов печных сооружений при высоких температурах. Пределом огнеупорности керамических изделий является переход изделия в размягченное состояние, когда оно начинает деформироваться. Большинство огнеупорных изделий не имеет резкой точки перехода из твердого состояния в жидкое, как это имеет место у металлов.

Особенностью огнеупорных изделий является наличие температурного интервала размягчения. Это свойство огнеупоров может быть показано на примере пластичной часов-ярской глины, у которой огнеупорность характеризуется температурным интервалом размягчения равным 130° С (от 1580 до 1710° С), рис. 179. При нижнем

пределе 1580°C для размягчения этой глины требуется значительное количество времени, но тот же результат достигается за более короткое время при верхнем пределе равном 1710°C .

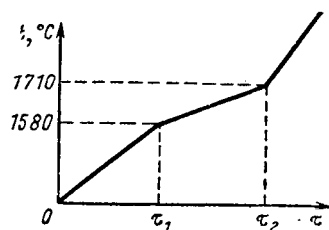


Рис. 179. Кривая перехода часов-ярской глины из твердого состояния в жидкое

Определение огнеупорности материалов

При определении огнеупорности материалов применяют керамические пироскопы (конуса Зегера). Керамические пироскопы изготавливают в виде трехгранных пирамидок высотой до 6 см и с основанием в виде равностороннего треугольника, у которого сторона равна 1 см. По стандарту огнеупорность принято сокращенно обозначать буквами ПК и проставлять температуру изгиба пироскопа, уменьшенную в десять раз. Например, ПК 188 означает, что огнеупорность равна 1880°C .

Для определения огнеупорности из испытуемого материала изготавливают пирамидку подобную стандартному конусу, затем в соответствии с предполагаемой огнеупорностью испытуемого материала (образца) подбирают стандартные пироскопы с известной огнеупорностью, близкой образцу, которые устанавливают с испытуемым образцом на керамическую площадку и помещают в печь для испытания. При этом отмечается время начала и конца испытания.

При испытании образец размягчается и изгибается до соприкосновения его вершины с площадкой. Если с ним, подобным образом, одновременно изгибается стандартный керамический конус с известной нам огнеупорностью, то огнеупорность испытуемого материала соответствует огнеупорности стандартного деформированного пироскопа.

Для ориентировочного представления о керамических пироскопах ниже приведены значения их огнеупорности по принятому в СССР обозначению и по Зегеру.

Номер пироскопа									
ЦК по принятому									
ГОСТу	60	83	96	128	148	161	188	200	
Температура из-									
гиба пироскопа, °С	600	830	960	1280	1480	1610	1880	2000	
Номер по Зегеру	022	013а	07а	9	17	27	39	42	

Этот способ определения огнеупорности материалов имеет важное практическое значение, так как он позволяет одновременно определить температурный предел огнеупорности материала и время его размягчения.

Термическая стойкость огнеупоров (термостойкость)

В кладке печей огнеупоры часто подвергаются действию переменных температур, особенно в печах с периодическим режимом работы, где изменение температуры часто достигает очень больших значений. Подобные колебания температур в печах вызывают изменения структуры огнеупоров, приводящие к разрушению футеровки печей.

Термостойкостью называется способность огнеупорных изделий выдерживать резкие колебания температур не растрескиваясь и не разрушаясь. Термическая стойкость огнеупоров зависит от их природы и определяется физико-механическими свойствами материалов: модулем упругости, теплопроводностью, теплоемкостью и плотностью.

Эти факторы определяют скорость распространения температуры и быстроту ее выравнивания в огнеупоре и следовательно величину межкристаллических напряжений.

При внезапном нагревании в огнеупоре появляются значительные напряжения. Это объясняется тем, что при плохой теплопроводности и значительной теплоемкости огнеупора его прогрев протекает весьма медленно. Поэтому напряжения, возникшие на границах двух разнотемпературных слоев, являются причиной механического разрушения огнеупора. Из рис. 180 видно, что нагреваемая сторона огнеупора расширяется, а холодная стремится сохранить свое первоначальное состояние.

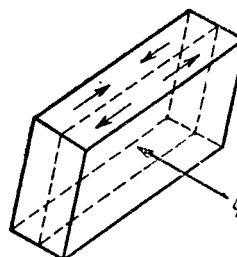


Рис. 180. Схема возникновения напряжений в огнеупоре при нагревании

Термостойкость огнеупорных изделий проверяют следующим способом. Испытуемые образцы огнеупоров предварительно взвешивают, а затем торцевыми концами помещают в печь на глубину 50 мм, остальная часть изделия находится вне печи; образцы нагревают до 850°С и выдерживают при данной температуре 40 мин. После этого их извлекают из печи и немедленно горячими концами ставят на торец в бак с проточной водой на глубину 50 мм. В воде образцы выдерживают 3 мин, затем извлекают и устанавливают на холодные противоположные торцы на стол для воздушной отпарки на 7 мин. Такой цикл, состоящий из трех операций, называется водяной теплосменой. После каждой теплосмены образец взвешивают. Испытания продолжают до потерь образцом 20% от первоначальной массы. После чего испытания заканчивают; число водяных теплосмен, вызвавших разрушение изделия и потерю массы, равную 20%, характеризует его термостойкость в водяных теплосменах.

Некоторые огнеупорные изделия, например, легковесные и магнезитовые подвергают испытаниям на термостойкость в воздушных теплосменах. В этом случае кирпичи, закладывая в подвижную раму и подвергают одностороннему нагреву в стене печи и искусственному охлаждению дутьем. Вначале рама с кирпичом служит стеной печи, нагреваемой до 1500—1600°С, а затем ее передвигают для охлаждения к вентилятору. После ряда таких повторных нагревов и охлаждений термическую стойкость испытанных изделий оценивают по суммарной потере их массы.

Ниже представлена термическая устойчивость огнеупорных изделий в водяных теплосменах.

Название огнеупора	Число водяных теплосмен
Динасовые	1—3
Полукислые	4—15
Шамотные	10—25
Многошамотные	40—70
Шамотный огнеупорный легковес	7—12
Хромитовые	3—5
Хромомагнезитовые	5—12
Термостойкий хромомагнезит	40—60
Высокоплотные магнезитовые	10—16
Магнезитовые	2—5
Карборундовые на глинистой связке	25—60
Цирконовые	10—17

*Испытание огнеупоров на сопротивление деформации
при высоких температурах*

Для данных испытаний готовят из огнеупора образец в форме цилиндра высотой 50 мм, диаметром 35,7 мм, с площадью основания 10 см². Этот образец помещают в печь и при нагревании подвергают испытанию давлением. Величина нагрузки должна составлять 0,19 МН/м² (2 кгс/см²) поперечного сечения для образца в первоначальном состоянии.

При испытании скорость подъема температуры до 800°С не должна превышать 10 град/мин, а свыше 800°С должна быть от 4 до 5 град/мин.

При испытаниях устанавливают температуру начала деформации образца и температуру, при которой сжатие огнеупора достигает 40% первоначальной высоты образца.

Таблица 15

Рабочие свойства огнеупоров

Огнеупоры	Объемная масса, кг/м ³	Кажущаяся пористость, %	Временное сопротивле- ние сжатию, МН/м ²	Температура начала де- формации под нагруз- кой 0,19 МН/м ² , °С	Огнеупор- ность, °С	Термостой- кость в во- дных тепло- сменах
Динас	2020	23—25	20,6— 22,07	1640	1710	1—3
Магнезит . .	2700— 3040	22—27	49,0— 137,1	1360— 1700	2000	2—3
Хромомагнезит термостойкий .	2900	18—24	39,24	1480	1800— 1950	40
Шамот	1800— 2000	15—32	9,81— 39,2	1175— 1425	1580— 1700	10—25
Муллитовый . Ереванского за- вода	3290	1,0	301,65— 465,97	1700	1850	—
Высокоглино- земистый, мул- лито-корундо- вый Подольско- го завода . .	2760	15,2	68,9	1520	1820— 1850	50

Испытанием огнеупоров на сопротивление сжатию при высоких температурах устанавливают механическую прочность огнеупоров, т. е. их рабочие свойства, табл. 15.

Временное сопротивление сжатию при обычной температуре считается одним из важных показателей качества огнеупоров.

Временное сопротивление сжатию

Временное сопротивление огнеупоров сжатию зависит от структуры изделия, однородности огнеупора, контакта между отошающим и связующим компонентами огнеупорной массы.

В печных устройствах огнеупоры подвергаются весьма малым сжимающим давлениям, которые значительно меньше давлений при испытании на прочность при обычной температуре. Например, стандарт на динасовые и шамотные изделия устанавливает нижний предел этой характеристики при нормальных условиях в 10—12 МН/м², но с повышением температуры предел прочности на сжатие уменьшается, табл. 16.

Таблица 16

Временное сопротивление огнеупоров сжатию при разных температурах

Вид огнеупоров	Временное сопротивление сжатию, МН/м ² , при температуре испытания, °С						
	150	500	1000	1300	1400	1500	1600
Динас	16,68	14,72	11,77	7,36	5,88	4,71	2,94
Шамот	18,64	17,66	20,60	8,83	1,18	0,589	0,049
Магнезит . .	41,20	37,29	31,39	26,49	23,54	18,15	0,785

6. Условия работы огнеупоров

Изменение объема огнеупоров

Во время работы при высоких температурах огнеупорные изделия в кладке печей изменяют объем. Изменение объема огнеупоров обусловливается следующими явлениями: 1) термическим расширением; 2) усадкой или ростом; 3) деформацией под нагрузкой.

Все огнеупорные изделия при нагревании расширяются. При нагревании огнеупоров до 1000°C их расширения очень малы и не превышают десятых долей процента. У шамотных изделий при нагревании наступает усадка, которая возрастает с повышением температуры обжига. При вторичном обжиге шамотных изделий усадка в них не появляется до тех пор пока температура нагрева не превысит температуру его предыдущего обжига и только с дальнейшим повышением температуры в шамотном изделии вновь появится дополнительная усадка. Устранение дополнительной усадки в шамотных изделиях может быть достигнуто обжигом при максимальной температуре, которая предполагается в рабочих условиях плавки или нагреве материалов в печах.

Дополнительная усадка огнеупоров в кладке печи сопровождается увеличением швов, при этом связь между изделиями нарушается, что приводит к разрушению всей кладки. Поэтому, для рабочих температур выше 1300°C не рекомендуется в печах делать своды из шамота.

Противоположное явление наблюдается у динасовых изделий, у которых с повышением температуры объем увеличивается под влиянием термического расширения и дополнительного роста.

Динасовые изделия мало изменяют объем в интервале температур, при которых происходит только термическое расширение и резко изменяют свой объем в пределах температур, при которых происходит превращение одних кристаллических форм кремнезема в другие. Поэтому целесообразно сооружение печных сводов из динаса, так как рост объема его до 1% способствует уплотнению швов и повышению прочности свода.

Шлакоустойчивость огнеупоров

Во время работы большинства печей их огнеупорная футеровка находится в непосредственном контакте с расплавленной, газообразной или твердой фазами. В мартеновских печах при температурах $1600\text{—}1700^{\circ}\text{C}$ она соприкасается с печными газами, с расплавами стали и шлака, в дуговых электропечах при температурах $1800\text{—}2500^{\circ}\text{C}$ огнеупоры соприкасаются с расплавленной средой выплавляемых ферросплавов и специальных сталей. В нагревательных печах при температурах $1200\text{—}1350^{\circ}\text{C}$ футеровка печи контактирует со слитками стали и окалиной железа.

Во вращающихся трубчатых печах при спекании нефелиновых или бокситовых шихт на футеровке постоянно находится в твердом состоянии спек, нагретый до 1300°C . В таких условиях огнеупор ошлаковывается интенсивным действием расплава, т. е. растворяется и кладка печи интенсивно размывается или истирается твердой шихтой.

В общем, шлакоустойчивость огнеупоров обуславливается их сопротивлением к разъедающему действию расплавленных масс. Важнейшие факторы, определяющие химическую активность шлаков и взаимодействие с огнеупорной кладкой печей: 1) температура процесса; 2) химический и минералогический состав огнеупоров и шлаков; 3) смачиваемость огнеупора расплавом (шлаком); 4) вязкость шлаков; 5) гранулометрический состав и структура огнеупорных изделий, характер и величина пор.

Температура процесса очень интенсивно влияет на активность шлаков, так как с повышением температуры значительно повышается их текучесть и смачиваемость. В этом случае шлак легко проникает во все поры и трещины огнеупорной футеровки, в результате чего значительно увеличивается поверхность контакта огнеупора со шлаком. Пропорционально увеличению поверхности контакта повышается скорость химических реакций взаимодействия шлака с огнеупором.

С повышением температуры шлакоразъедание огнеупоров интенсивно возрастает и при температурах порядка $1250\text{—}1500^{\circ}\text{C}$ оно является главной причиной, ускоренного износа печной футеровки. При этом необходимо помнить, что чем ближе химический состав шлака к химическому составу огнеупора, тем меньше взаимодействие между ними.

Точность размеров и формы огнеупорных изделий

При строительстве различного типа печей необходимо учитывать кроме химического состава и физических свойств огнеупорных изделий, их форму и точность размеров, играющих очень важную роль при кладке стен, сводов и других элементов печных устройств. От точности размеров и правильности формы огнеупорных изделий зависит устойчивость и прочность кладки печных элементов, а также плотность стен.

В основном огнеупорные изделия могут быть разделены на две основные группы: 1) нормальный кирпич; 2) фасонные изделия.

К нормальному кирпичу относится так называемый прямой кирпич, имеющий форму параллелепипеда, а также продольный и поперечный клин. Ниже приведены размеры и форма огнеупоров.

	Большой формат, мм	Малый формат, мм
Прямой кирпич:		
шамот, динас и полу- кислый	250×123×65	230×113×65
Клин продольный и по- перечный	250×123×65×55	230×113×65×45
Прямой магнезитовый и хромомагнезитовый .	—	230×115×65

Фасонные огнеупорные изделия, в зависимости от конструктивных особенностей печных элементов, могут иметь весьма разнообразные формы и размеры.

7. Физико-химические свойства системы $\text{SiO}_2\text{—Al}_2\text{O}_3$

В этой системе представлены свойства огнеупоров, получивших наибольшее применение в промышленности, изготавливаемых из очень распространенного в природе сырья — алюмосиликатов.

Алюмосиликатные огнеупоры широко используются для строительства печей в металлургической, химической и промышленности строительных материалов.

Все алюмосиликатные огнеупоры являются производными системы SiO_2 (кварц) и Al_2O_3 (корунд), рис. 181. Диаграмма состояния данной системы, при нагревании смеси $\text{SiO}_2\text{—Al}_2\text{O}_3$, характеризует тепловые свойства огнеупорных изделий в зависимости от процентного соотношения компонентов системы. Температура плавления кремнезема равна 1986K, на диаграмме она отмечена точкой *a*. Точка *a* совпадает с началом диаграммы и соответствует 100% SiO_2 . При расплавлении кремнезем образует вязкий расплав. Часть диаграммы с содержанием кремнезема от 100 до 97% соответствует составу кислых огнеупоров типа динас. Добавка глинозема Al_2O_3 до 5,5% уменьшает вязкость и снижает температуру плавления системы до 1818K с образованием эвтектики в точке *b*. При 54% SiO_2 и 46% Al_2O_3 , т. е. при соотношении компонентов, отвечающим ядру каолинита

$\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2$ со скрытым максимумом химического соединения, температура плавления системы повышается до ~ 2073 К. Минерал каолинит ($\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$) широко распространен в природе. В основном из каолинита состоит огнеупорный материал каолин, который в значительных количествах используется в производстве фар-

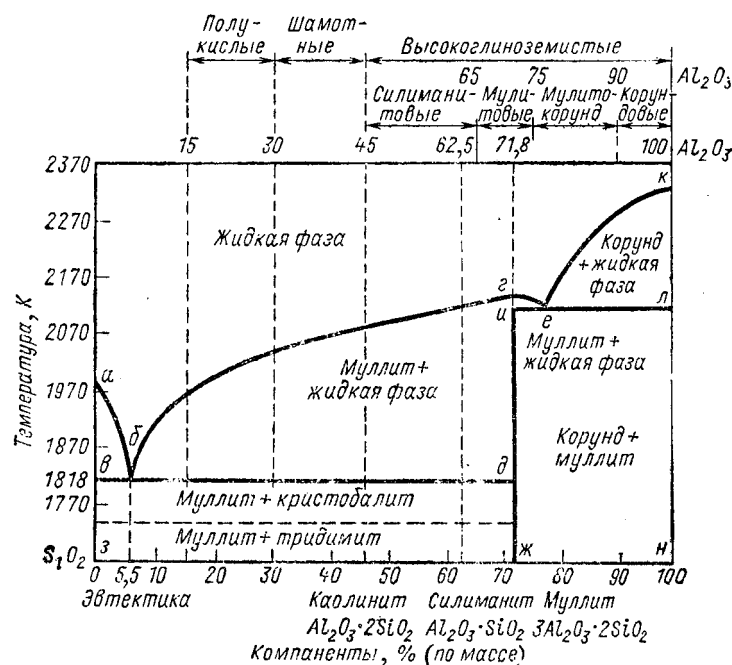


Рис. 181. Диаграмма состояния системы SiO_2 - Al_2O_3

фора и огнеупорных изделий. Каолинит входит также во все огнеупорные глины.

С увеличением содержания Al_2O_3 до 71,8% температура плавления системы повышается до 2143 К и образуется максимум, отвечающий химическому соединению муллиту $3\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2$. В области, ограниченной контуром $бгдб$, из жидкого расплава выделяются кристаллы муллита.

В прямоугольнике $вджз$ в диапазоне температур от 1818 до 1723—1743 К выделяются кристаллы кристобалита и муллита, а при более низких температурах выде-

ляются кристаллы тридимита и муллита. Тридимит является формой кремнезема, которая претерпевает наименьшие объемные изменения, поэтому в производстве динасовых огнеупоров обжиг изделий ведется при температурах, обеспечивающих преобладающую кристаллизацию тридимита в динасе.

В области, ограниченной *gei*, из расплава выделяется муллит. В контуре *елке* из жидкого расплава выделяется корунд. Ниже линии затвердевания *ел* в области *иелнжи* выделяются кристаллы муллита и корунда, а в точке *к* кристаллизуется корунд. Химическое соединение муллит является прочным и тугоплавким. Оно в основном определяет высокую огнеупорность, химическую стойкость и механическую прочность высокоглиноземистых изделий во время их службы в печах.

Точка *к* соответствует содержанию 100% корунда, имеющего температуру плавления 2323 К. Корундовые изделия обладают высокой огнеупорностью, химической стойкостью и механической прочностью. Из корунда изготавливают чехлы для термопар, измеряющих температуры расплавов до 1923—2073 К.

В природе распространен минерал силлиманит $\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2$, который в зависимости от кристаллической структуры (формы) называется также андалузитом или кианитом. В нем содержится около 63% Al_2O_3 и 37% SiO_2 . Данное химическое соединение $\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2$ в диаграмме состояния системы $\text{SiO}_2\text{—Al}_2\text{O}_3$ не отражено, но оно представляет значительный интерес как сырье для огнеупорной промышленности. При нагревании этот минерал разлагается необратимо по схеме



с образованием муллита и свободного кристобалита.

Следовательно, по этой схеме могут получаться огнеупоры муллитового типа.

8. Свойство огнеупорных глин и производство шамотных изделий

Одним из видов алюмосиликатного сырья широко используемого в производстве шамотных огнеупоров являются огнеупорные глины. Обычно огнеупорные глины содержат глинозема от 25 до 35% и кремнезема от 50 до 70%. Огнеупорность глин определяется процентным со-

держанием каолинита $\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$, с увеличением содержания последнего в глине ее огнеупорность повышается. Свойства этого вида сырья могут быть охарактеризованы правой частью диаграммы $\text{SiO}_2\text{—Al}_2\text{O}_3$, см. рис. 181 за эвтектикой.

В глине присутствуют различные примеси: кварц, глинозем, окислы щелочных и щелочноземельных металлов, окислы железа и титана, а также остатки органических примесей. Примеси в глинах ведут себя как плавни, понижающие огнеупорность глин. Глины состоят в основном из мельчайших частиц, величина которых близка к величине коллоидных частиц, обуславливающих пластичность и адсорбционную способность глин.

Содержание гигроскопической влаги в глинах в зависимости от их природы и атмосферных условий изменяется от 1—2 до 20%. С увеличением свободной воды в глинах до определенного предела пластичность их увеличивается, они свободно поддаются обработке, т. е. легко формуются, им легко придать любую форму, которую они сохраняют в дальнейшем при сушке. Но с увеличением добавки воды сверх определенной нормы, воды затворения, пластичность глин понижается, они становятся липкими и разжижаются настолько, что теряют свою способность сохранять приданную им форму, т. е. становятся пульпообразными. Водой затворения называется количество воды в глине, соответствующее их оптимальной пластичности.

При высушивании отформованных изделий из глин при 110°C до полной потери воды затворения они затвердевают, сохраняя форму, но теряют пластичность, приобретая некоторую хрупкость. Однако при добавке к ним воды утраченная пластичность вновь восстанавливается, так как при сушке с температурой 110°C не происходит структурных изменений в молекуле $\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ и в других подобных ему минералах, поэтому физические свойства глин остаются прежними. Только при прокаливании глин и каолинита до $500\text{—}800^\circ\text{C}$ структура минералов разрушается, глины полностью теряют пластичность, которая при последующем увлажнении уже не восстанавливается. Обожженный материал становится тощим и теряет его связующую способность.

Связующей способностью называется способность глин связывать непластичные тощие материалы в общую достаточно прочную однородную массу, годную для

последующей переработки путем формования и прессования огнеупорных изделий. Связующая способность глин в значительной мере зависит от их пластичности.

Обжиг и спекание глин. Получение шамота

При обжиге глин происходит разрушение гидротных форм минералов, т. е. удаляется кристаллизационная вода и совершаются процессы спекания частиц глины.

Спекание глин имеет большое практическое значение, так как оно определяет температуры, отвечающие окончанию огневой усадки и ряд рабочих свойств изделий: термостойкость, механическую прочность, шлакоразъедаемость и др.

По мере нагревания глин свыше 800°C , обычно до температуры $1360\text{—}1400^{\circ}\text{C}$, их обжиг сопровождается постепенным размягчением под влиянием плавления флюсующих примесей, которые с приближением к конечным температурам обжига переходят в капельно-жидкое состояние и служат связующим материалом, обволакивая частицы глины, уплотняют массу и цементируют ее в черепок.

Обожженная глина, утратившая пластичность и способность формоваться, представляет собой отошенную массу, которая называется шамотом.

Производство шамотных огнеупорных изделий

Производство шамотных изделий состоит из следующих последовательных стадий:

1. Подготовка глины к обжигу и получение при обжиге шамота.
2. Подготовка пластичной огнеупорной глины.
3. Смешение шамота с пластичной глиной для получения формовочной огнеупорной массы.
4. Формование или прессование огнеупорных изделий.
5. Сушка изготовленных изделий.
6. Обжиг высушенных изделий.

В стадии подготовки огнеупорной глины к обжигу и пластичной глины для смешения с шамотом, они освобождаются от посторонних камнеподобных включений, от органических примесей и от случайно попавших кусочков металла. Затем очищенную глину направляют на

измельчение в шаровых мельницах. После измельчения она используется для приготовления шамотной массы. Для получения шамота, глину предварительно брикетируют и в форме брикетов направляют на обжиг. Обожженные брикеты подвергают дроблению и измельчению в шаровых мельницах. Измельченный шамот классифицируют по гранулометрическому составу. Для составления огнеупорной массы, подбирают определенный зерновой состав шамота. То есть огнеупорная шихта составляется из пластичной глины и частиц шамота разного размера, например, мелких зерен порядка 0,1—0,2 мм, крупных от 1,0—3,0 до 4,0 мм и средних 0,2—1,0 мм. Средняя фракция зерен добавляется в шихту в малых количествах и в основном зерновой состав массы определяется процентным соотношением мелких и крупных зерен. Указанный зерновой состав способствует уплотнению изделий при их изготовлении. Пластичная глина является связующим звеном в составе шихты. Для составления огнеупорной шамотной массы берется 40—50% огнеупорной пластичной глины и 50—60% шамота.

Для пластичного формования изделий, шамот, определенного гранулометрического состава, смешивают с пластичной глиной в сухом смесителе, а затем сухая смесь поступает на мокрое смешение и массу увлажняют до 20—25%.

При полусухом прессовании изделий, из части пластичной глины и воды готовят жидкую массу — шликер. Шликер используют для предварительного смачивания зерен шамота, при этом зерна шамота обволакиваются глиной. Шамот увлажненный шликером и остальная часть пластичной глины поступают на смешение, т. е. на приготовление огнеупорной массы для прессования. Для полусухого прессования общее увлажнение шамотной массы доводят до 8—12%. Приготовленная шихта поступает соответственно либо на влажное формование, либо на полусухое прессование шамотных изделий.

Полусухое прессование получило широкое распространение, так как в изделиях, полученных полусухим прессованием, после сушки и обжига усадка мала и в связи с этим брак готовых изделий почти отсутствует. У изделий, отформованных из пластичных шамотных масс, во время сушки получается значительная усадка, растрескивание и коробление, в связи с этим брак дос-

тигает больших количеств. Отформованные или отпрессованные изделия направляют на сушку.

Сушка изделий должна проводиться с постепенным и равномерным нагревом, с тем, чтобы не вызывать коробление и устранить растрескивание огнеупоров. В процессе сушки удаляется вода затворения и гигроскопическая вода, сушку осуществляют в специальных сушилках при температуре 110—120° С.

Высушенные шамотные изделия до остаточного содержания влаги 3—4% направляют на обжиг. Обжиг огнеупоров является весьма важной и ответственной операцией производства. При несоблюдении необходимых условий обжига получают значительные количества брака, связанного с растрескиванием и короблением или огнеупор рассыпается. Поэтому обжиг делится на несколько стадий. В каждой стадии устанавливается температура, отвечающая физико-химическим процессам протекающим в обжигаемом огнеупоре.

На первой стадии обжига при температуре 120—200° С удаляются остатки гигроскопической воды.

На второй при температуре от 200 до 900° С происходит удаление воды, входящей в конституцию минералов, содержащихся в огнеупоре.

На третьей при температуре 900° С и выше окисляются органические включения и соединения железа, происходят разложения карбонатов и сульфатов.

На четвертой, завершающей стадии, при температурах 1300—1400° С развиваются пирохимические реакции с образованием устойчивых минеральных форм — черепка.

Подъем температуры обжига осуществляется по графику и достаточно медленно со скоростью 12—20 град/ч. Обычно на обжиг шамотных изделий требуется от 63 до 70 ч, а для многошамотных от 80 до 110 ч. При этом устанавливается выдержка для первых при температуре 1300—1350° С, равная 2—6 ч, а для вторых при температуре 1400—1430° С, 4—7 ч. После обжига понижение температуры (охлаждение) осуществляется тоже медленно и температура доводится до 40—50° С.

Многошамотные огнеупоры изготавливают с повышенным содержанием шамота от 65 до 90% и пластичной глины от 35 до 10%. У многошамотных огнеупоров выше термостойкость, огнеупорность и механическая прочность.

9. Высокоглиноземистые огнеупорные изделия

К высокоглиноземистым изделиям относятся огнеупоры, содержащие глинозема более 45%, т. е. больше того количества Al_2O_3 , которое находится в отмученном прокаленном каолине. Для производства данного вида огнеупоров используют как природное, так и искусственное с высоким содержанием Al_2O_3 сырье: минералы силлиманитовой группы ($\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{SiO}_2$) — кианит, андалузит и силлиманит; природные гидраты глинозема — гидраргиллит $\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 3\text{H}_2\text{O}$, диаспор $\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{H}_2\text{O}$, боксит и корунд Al_2O_3 ; искусственные — глинозем и электроплавленный алунд.

Изготовленные из данных материалов изделия отличаются высокой термостойкостью и огнеупорностью. С повышением содержания в изделиях Al_2O_3 в них при обжиге образуется химическое соединение муллит $3\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2$ и корунд Al_2O_3 . Эти компоненты огнеупорного черепка повышают его химическую стойкость по отношению к основным и особенно кислым шлакам, они же определяют высокие физические и механические свойства огнеупоров.

Особенность производства высокоглиноземистых изделий — это необходимость весьма тонкого измельчения технического глинозема до порошка от 0 до 60 мкм, что повышает активную поверхность частиц при спекании Al_2O_3 . Связующим материалом служит глина, которая тоже измельчается довольно тонко до частиц от 0 до 0,5 мм. Помолом повышается активность глинозема.

Высокоглиноземистые массы при обжиге дают значительную усадку, в связи с этим необходим предварительный обжиг брикетированного сырья с целью получения высокоглиноземистого шамота. Высокоглиноземистую массу, идущую на изготовление брикетов составляют из 80% Al_2O_3 и 20% огнеупорной глины. Эту смесь тщательно перемешивают всухую и затем увлажняют. Далее, брикетную массу пропускают через ленточный пресс и получают брикеты, которые после сушки направляют на обжиг. Обжиг осуществляют во вращающихся трубчатых печах при температуре 1680—1700°С. С целью понижения температуры спекания глинозема вводится добавка минерализаторов, одним из наиболее активных минерализаторов является TiO_2 , которая в количестве 2—3% обеспечивает спекание уже при температуре 1500°С.

Шамот, полученный после обжига брикетов подвергают измельчению до определенного зернового состава.

Для получения высококачественных изделий рекомендуется следующий зерновой состав измельченного высокоглиноземистого шамота:

Фракции, мм . . .	1,5	0,5—1,5	0,09—0,5	0,09
Количество, % . . .	1	17—21	20—21	58—62

Прессование изделий рекомендуют проводить под давлением 100 МН/м². Отпрессованный кирпич подвергают

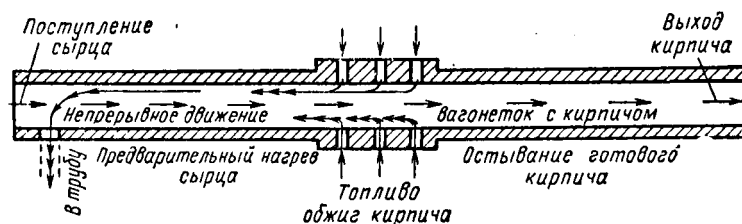


Рис. 182. Схема туннельной печи

ют сушке, а затем обжигают при температуре 1550—1600°С. После обжига, продолжающегося около 128 ч, с повышением температуры до 1520°С устанавливается выдержка при конечной температуре до 24 ч.

Изделия, содержащие 72,3—73,5% Al_2O_3 и 0,64—0,69% Fe_2O_3 , имеют следующие свойства:

Предел прочности при сжатии, МН/м ² . . .	90	120
Температура деформации под нагрузкой 0,196 МН/м ² , °С:		
начало	1540	1580
при 40% сжатия	1790	1800
Огнеупорность, °С	1840	
Термостойкость, водные теплосмены, свыше	25	
Кажущаяся пористость, %	16—18	

В настоящее время для производства огнеупоров широко используются туннельные печи, работающие по принципу противотока. Это позволяет организовать последовательно идущие процессы сушки и обжига изделий. Огнеупоры загружаются на вагонетки, которые непрерывно движутся по рельсам против потока горячих продуктов сгорания топлива, поступающих в трубу. С противоположного конца туннелей печи выходят вагонетки с обожженными огнеупорами. На рис. 182 показана схема печи.

10. Физические свойства кремнезема

Динасом называется огнеупорный кирпич, изготовленный способом формовки и обжига измельченных кварца, кварцитов или песчаников. В качестве связующего применяется известковое молоко и реже глинистая связка.

Физико-химические свойства динаса открыты только в начале XX в исследователями В. Е. Грум-Гржимайло, А. Ле-Шателье и др. Эти открытия позволили правильно организовать производство огнеупорных изделий из кремнезема, т. е. разработать температурный режим обжига динаса и установить условия его службы в печах.

При разработке данного процесса было использовано свойство кремнезема переходить под влиянием температуры из одной кристаллической модификации в другую с резким изменением своего объема. Установлено, что кремнезем, не изменяя своего химического состава, может существовать в семи разных кристаллических модификациях и одной аморфной. При этом разные кристаллические формы кремнезема значительно отличаются друг от друга плотностью, коэффициентами расширения, светопреломления и твердостью. Данные формы SiO_2 получили названия, соответствующие кристаллическим формам кремнезема, встречающимся в природе: кварца, тридимита и кристобалита.

Под влиянием температуры в кремнеземе происходят два вида структурных превращений. Первый вид изменений структуры SiO_2 происходит внутри главных форм: кварца, тридимита и кристобалита и протекают эти превращения с большой скоростью по следующим схемам:

1. $\beta\text{-кварц} \xrightleftharpoons[0-575^\circ\text{C}]{575-870^\circ\text{C}} \alpha\text{-кварц}$
2. $\gamma\text{-тридимит} \xrightleftharpoons[0-117^\circ\text{C}]{117-163^\circ\text{C}} \beta\text{-тридимит} \xrightleftharpoons[163-1470^\circ\text{C}]{117-163^\circ\text{C}} \alpha\text{-тридимит}$
3. $\beta\text{-кристобалит} \xrightleftharpoons[0-180^\circ\text{C}]{180-270^\circ\text{C и выше}} \alpha\text{-кристобалит}$

Второй вид структурных превращений кремнезема связан с переходом от одной главной формы к другой и протекает очень медленно по схемам:

1. $\alpha\text{-кварц} \xrightleftharpoons[1000-1420^\circ\text{C}]{>1420^\circ\text{C}} \alpha\text{-тридимит}$
2. $\alpha\text{-кварц} \xrightleftharpoons[1000-1470^\circ\text{C}]{>1470^\circ\text{C}} \alpha\text{-кристобалит}$
3. $\alpha\text{-тридимит} \xrightleftharpoons[1470-1600^\circ\text{C}]{>1600^\circ\text{C}} \alpha\text{-кристобалит}$

Обычно превращения начинаются внутри главных форм. Указанные температурные пределы соответствуют устойчивому существованию данных кристаллических форм.

В табл. 17 показаны температуры, при которых кремнезем переходит из одной кристаллической формы в другую и связанные с этим превращением изменения объема кристаллических модификаций.

Т а б л и ц а 17

Объемные изменения кремнезема при превращениях

Превращения кремнезема происходят быстро	Теоретические изменения объ- ема, %	Превращения кремнезема происходят медленно	Теоретические изменения объ- ема, %
β -кварц $\rightleftharpoons$ α -кварц 573 °С	+2,4	α -кварц $\rightleftharpoons$ α -тридимит 1000—1420° С	+12,7
β -кристобалит $\rightleftharpoons$ α -кри- стобалит 180—270° С	5,6	α -кварц $\rightleftharpoons$ α -кристоба- лит 1000—1470° С	+17,4
γ -тридимит $\rightleftharpoons$ β -тридимит 117° С	0,6	α -тридимит $\rightleftharpoons$ α -кристоба- лит 1470—1600° С	+4,7
β -тридимит $\rightleftharpoons$ α -тридимит 17—163° С	0,6	α -кристобалит $\rightarrow$ расплав 1710° С	+0,1

Превращение кристаллических форм кремнезема и связанные с этим изменения объема огнеупора, приводят к нарушению межкристаллических связей. Поэтому при резких колебаниях температур в динасовых изделиях появляются трещины и отколы кусков огнеупора, т.е. термостойкость динасовых изделий очень мала.

При плохой термостойкости динасовые изделия обладают другими положительными качествами, достаточно высокой огнеупорностью порядка 1710—1720° С и температура начала деформации у динаса выше чем у хромомгнезита на 150—160° С, а в сравнении с шамотом выше на 215—350°, см. табл. 15.

11. Производство динасовых изделий

В производстве динаса используются кварциты, представляющие собой минеральные образования из дисперсных зерен кварца, свя-

занных аморфным кремнеземом. В состав кварцитов, кроме кремнезема входят и другие примеси. Химический состав кварцитов следующий: 96—98,5% SiO_2 ; 0,5—1,9% Al_2O_3 ; 0,4—1,0% CaO ; 0,5—1% Fe_2O_3 ; следы MgO .

При изготовлении динаса важное значение придается зернистости огнеупорной массы. От гранулометрического состава массы зависит плотность динасового черпака, механическая прочность и тридимитизация огнеупора. Кроме того, зерновой состав динасовой шихты оказывает большое влияние на прессование сырца и его термостойкость при обжиге.

Примером гранулометрического состава динасовой шихты может быть следующий подбор зерен, применяемый в производстве:

Величина зерен, мм	5—3	3—0,54	0,54—0,088	0,088—0
Содержание, %	Не более 2	8—14	40—55	Не менее 35

Такой состав динасового огнеупора улучшает его физико-химические свойства, повышает механическую прочность и содействует термической устойчивости.

После обжига у динасового кирпича почти полностью устраняется выкрашивание зерен на ребрах, шероховатость граней, снижается брак по размерам и отбитости углов.

Для цементации динасовой массы при обжиге применяется известковое молоко. Известковое молоко готовится из качественной обожженной извести путем ее гашения. При мокром измельчении извести вводятся добавки клеящих веществ органического происхождения от 0,5 до 1%, обеспечивающих прочность изделий при прессовании и сушке. При этом также целесообразна добавка заранее измельченных минерализаторов, способствующих формовости изделий, модификационным превращениям кремнезема и спеканию массы.

Подготовка динасовой массы. Формование и прессование

Подготовка шихты производится смешением кварцита подобранного гранулометрического состава с известковым молоком. Вначале смешение шихты производят всухую в бегунах в течение 2—3 мин. Затем в шихту заливают ранее подготовленное известковое молоко и смешение продолжают дополнительно 10—15 мин. В последние годы бегуны стали заменять непрерывно действующими смесителями, обеспечивающими постоянство зернового состава шихты.

Задача прессования — получение динасовых изделий соответствующей формы и размеров. При прессовании достигается также уплотнение и упрочнение изделий, позволяющие транспортировать их на сушку.

После прессования в динасовых изделиях содержится до 8,5% влаги, для удаления воды и повышения прочности их подвергают сушке в туннельных сушилках. После сушки прочность изделий повышается настолько, что они выдерживают дальнейшую транспортировку и укладку в обжиговые печи.

При сушке изделий устанавливается температура от 150 до 300°С, которая зависит от размера и формы изделий, а также от качества исходного сырья. Продолжительность сушки от 4—6 до 12—18 ч. В высушенных изделиях содержание влаги не должно превышать 1,5—2%.

Обжиг

При транспортировке динаса из сушил на обжиг для сохранности каждый слой укладываемых изделий покрывают мягкой присыпкой. Обжиг является наиболее ответственной и дорогой стадией производства динасовых огнеупоров. При обжиге этих изделий происходят разнообразные физико-химические превращения, протекающие в твердой и жидкой фазах, с большими объемными изменениями.

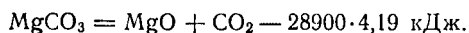
Сложность указанных процессов требует тщательной разработки температурного режима и организации обжига динаса. Но на каждом заводе температурный режим должен уточняться с учетом конкретных условий, т. е. типа печи, качества сырья и ассортимента изделий.

12. Производство магнезиальных огнеупоров

Сырьем для производства магнезиальных огнеупоров служит распространенный в природе минерал магнезит $MgCO_3$, в котором содержится 47,82% окиси магния.

Встречаются два вида карбоната магния: аморфный магнезит с малым количеством примесей и кристаллический, в котором содержатся примеси $CaCO_3$, $FeCO_3$, Al_2O_3 и SiO_2 и др. Обычно содержание $FeCO_3$ в магнезите доходит до 8%, при обжиге железо выполняет роль минерализатора и окрашивает изделие в бурый цвет. Цвет магнезита определяется количеством примесей и меняется от белого и серого до бурого.

В СССР месторождение магнезита расположено на Южном Урале в Сатке. Это месторождение является одним из величайших в мире по запасам и высокому качеству сырья. Магнезитовое сырье подвергается обжигу до полного разложения и удаления CO_2 по следующей схеме:



Присутствие остатков CO_2 в обожженном продукте нежелательно, так как CO_2 , выделяясь из отпрессованных кирпичей при обжиге, может быть причиной образования брака изделий. Термическая обработка магнезита делится на два обжига.

В первом обжиге при температурах 800—900°С магнезит разлагается до полного удаления CO_2 , но обожженный продукт, называемый каустическим магнезитом, сохраняет способность вновь поглощать CO_2 и H_2O . Каустический магнезит обладает связующей способностью, т. е. при смачивании водными растворами солей $MgCl_2$, $MgSO_4$ и $CaCl_2$ образует цементы, способные связывать тощие материалы.

Во втором обжиге магнезит обжигают намертво при температуре 1600°С, при этом он спекается, MgO кристаллизуется в форме периклаза и получается полная усадка клинкера. Эта модификация достаточно устойчива против CO_2 и H_2O . Поэтому задачей высокотемпературного обжига является получение спека (клинкера) с максимальным количеством периклаза. Для получения устойчивых и высокоогнеупорных изделий необходимо содержание в них периклаза от 80 до 90%. Далее, спек магнезита измельчается, после помола направляется на сита для классификации. При этом фракции с ве-

личиной зерен в 1—3 мм составляет металлургический порошок, используемый для наварки подин плавильных печей.

Химический состав металлургического порошка из саткинского магнезита характеризуется следующим процентным содержанием: 92—93,5 MgO; 1,5—3 Fe₂O₃; 0,9—3 Al₂O₃; 1—2,5 CaO; 2—2,5 SiO₂. Более мелкие фракции намертво обожженного магнезита с величиной зерен менее 1 мм направляются для составления массы, идущей на формование огнеупорных изделий. Для связывания обожженных частиц магнезита в кирпич в шихту добавляются связующие: сульфитно-спиртовая барда или измельченная глина не более 2% или каустический магнезит.

При этом увлажнение шихты до 2—3% целесообразно осуществлять водным раствором сульфитно-спиртовой барды. Тщательно перемешанную массу закладывают в специальные хранилища для вылеживания. Вылеживание массы продолжается 4—5 дней при температуре хранилища 10—20° С, максимальная температура массы не должна превышать 40—45° С. При этом протекают процессы гидратации содержащихся в массе доломита, а затем и окиси магния. Гидратация последнего протекает на поверхности зерен слабо обожженного магнезита. После выдержки огнеупорную массу направляют на формовку. Формование изделий производят на гидравлических прессах под давлением 90—95 МН/м².

Отпрессованные огнеупоры подвергают сушке, а затем обжигу в туннельных или многокамерных печах при температуре 1600° С.

Требования, предъявляемые к магнезитовым изделиям

Магнезитовый кирпич должен обладать следующими физико-химическими свойствами: содержание Mg $\geq 91\%$ и CaO $\leq 3\%$; предел прочности при сжатии ≥ 39 МН/м²; температура начала деформации под нагрузкой 0,196 МН/м² не менее 1500° С; огнеупорность магнезитового кирпича Саткинского завода $2180 \pm 30^\circ \text{С}$; термостойкость в воздушных теплосменах от 4 до 9; пористость 20—25%.

Магнезитовые изделия хорошо противостоят разъеданию основных шлаков, но при высоких температурах они взаимодействуют с окисью железа и особенно в присутствии соединений фосфора. При высоких температурах углерод и карбиды некоторых металлов интенсивно разрушают магнезит. Пары воды тоже интенсивно разрушают магнезитовые изделия.

13. Производство термостойкого магнезитового кирпича

Исследованиями был установлен состав магнезитовой шихты, который позволил получить термостойкий магнезит, выдерживающий до ста воздушных теплосмен. Для повышения термостойкости

магнезитовых изделий требуется увеличение размера зерен и их количества в огнеупорной массе. Для получения термостойкой массы был подобран следующий гранулометрический состав: зерен до 2—3 мм не менее 45—55%, мелких от 0,09 мм и меньше около 35%, остальное — промежуточные фракции.

Такой состав позволяет получить довольно плотную упаковку зерен в огнеупорном кирпиче.

В качестве связующего используется шпинель $MgO \cdot Al_2O_3$. Для образования шпинели в шихту вводят глинозем. При обжиге изделий Al_2O_3 образует шпинель, обладающую высокими термическими свойствами. Шпинель обеспечивает цементацию и повышает термостойкость магнезитовых изделий. Добавка Al_2O_3 повышает также температуру начала деформации изделий под нагрузкой. Сушка и обжиг термостойкого магнезитового кирпича подобны таковым для обычного кирпича, только конечная температура обжига термостойких изделий повышается до $1650^\circ C$ и выдерживаются они при последней не менее 6 ч.

Важнейшие технические показатели термостойких изделий заметно повышаются, например предел прочности при сжатии увеличивается до 49—69 MH/m^2 и температура деформации под нагрузкой 0,196 MH/m^2 возрастает до $1560^\circ C$ (начало деформации) и $1630^\circ C$ (разрушение).

Высокоплотные магнезитовые изделия

Высокоплотные магнезитовые изделия отличаются низкой пористостью порядка 6—8%, а в отдельных случаях она понижается до 2—3%. Изготавливаются они из металлургического магнезита с добавкой минерала пльменита TiO_2 в количестве 1—1,5%, последний способствует спеканию.

Магнезит с добавкой или без добавки подвергается тонкому помолу до порошка, проходящего через сито, имеющее 10 000 отверстий на 1 см^2 в количестве 95%. В этот порошок добавляется сульфитно-спиртовая барда для связывания отощенных частиц материала. Смесь тщательно перемешивают и из нее прессуют брикеты под давлением 78,5 MH/m^2 . С целью получения спека повышающего шлакоустойчивость и стойкость против гидратации, высушенные брикеты подвергают обжигу при температуре 1250—1350°С.

Обожженные брикеты измельчают до зернистости от 0 до 4 мм, затем добавляют сульфитно-спиртовую барду и на бегунах подготавливают массу к формованию магнезитовых изделий. Формовку изделий осуществляют прессованием под давлением 78,5 MH/m^2 . Отпрессован-

ный кирпич направляют на обычную сушку, а после сушки на обжиг. Обжиг сырца высокоплотного магнетита проводят при более высокой температуре, т. е. при 1650—1720° С.

Качество данного кирпича может быть охарактеризовано следующими данными:

Кажущаяся пористость, %	2,7—6,4
Объемная масса, кг/м ³	3200—3300
Предел прочности при сжатии, МН/м ²	170—175
Температура деформации под нагрузкой 0,196 МН/м ² , °С:	
начало деформации	1580—1590
разрушение	1690—1700
Термостойкость, водные теплосмены	11—16
Дополнительная усадка при 1650° С и выдержи- ке 2 ч, %	0,1—0,5

14. Доломитовые огнеупоры

Доломитовые огнеупоры изготавливают из природного минерала доломита, представляющего собой двойной карбонат магния и кальция $MgCO_3 \cdot CaCO_3$.

Доломит, так же как и магнезит, используется в качестве металлургического порошка для наварки подин и заправки печей с основной футеровкой. Кроме того он используется в качестве сырья в производстве доломитовых изделий с высокой огнеупорностью, которые обладают явно выраженным основным характером и хорошо противостоят разъедающему действию основных шлаков.

В виде примесей в этом минерале содержатся свободные окислы CaO и MgO, кремнезем, глинозем и окись железа, наиболее желательными примесями в доломите являются MgO и CaO, как окислы, повышающие огнеупорность.

При соотношении MgO и CaO, отвечающем минералу $MgCO_3 \cdot CaCO_3$, стойкость доломитовых изделий против разъедания железистых шлаков будет тем выше, чем больше в доломите свободной CaO; меньше кремнезема и полуторных окислов. Доломитовые огнеупоры выдерживают до 500 и выше плавков даже при кислородном дутье в конвертерах.

Отрицательным свойством доломитовых огнеупоров является то, что CaO даже при очень высокой температуре обжига не теряет способность гаситься. Поэтому

готовые изделия из доломита не выдерживают длительного хранения, они поглощают влагу из воздуха, разбухают и разваливаются. По этой причине доломитовые изделия надо использовать вскоре после изготовления, минуя складское хранение, закладывая в футеровку печей.

При изготовлении водоустойчивых доломитовых огнеупоров осуществляют обжиг шихты на клинкер (спек). Шихта, поступающая на обжиг, составляется из расчета получения в спеке водоустойчивых силикатов кальция типа $3\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$ и $2\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$. Спек из обжиговых печей поступает на измельчение до определенной величины зерен, к которым прибавляют минерализатор и органическое связующее вещество.

Оксид кальция обладает еще одним нежелательным для огнеупоров свойством, при избытке SiO_2 в доломите она образует $2\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$, могущий существовать в двух разных модификациях β и γ . Переход формы β в форму γ связан с рассыпанием черепка. Это явление происходит после обжига при охлаждении изделий. В связи с этим были разработаны условия производства доломитовых огнеупоров и установлены устойчивые соединения CaO , могущие противостоять воздействию H_2O и связать $2\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$ в более устойчивую форму. Стабилизация $2\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$ в обожженном доломите достигается добавкой фосфорита, который образует устойчивый твердый раствор $\text{Ca}_3(\text{PO}_4)_2$ с $2\text{CaO} \cdot \text{SiO}_2$.

В водоустойчивых доломитовых огнеупорах вся окись кальция связывается в трехкальциевый и двухкальциевый силикаты, а также в алюмоферриты. Алюмоферриты окиси кальция $4\text{CaO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$ и $2\text{CaO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$ являются легкоплавкими соединениями, понижающими огнеупорность изделий, поэтому их количество в доломитовых огнеупорах должно быть минимальным.

Для производства водоустойчивого доломитового кирпича предлагаются следующие оптимальные условия:

1. Гранулометрический состав готовой массы:

Фракции, мм	4—7	1—4	0—0,12
Содержание, %	16—24	25—34	24—30

2. Прессовое давление 49—59 МН/м², обеспечивающее получение сырца с объемной массой 2750—2800 кг/м³.

3. Режим сушки при температуре 90—180°С в течение 10—15 ч, обеспечивающей сырцу прочность 10 МН/м² и остаточную влажность ~0,8%.

4. Обжиг — в газокамерных или туннельных печах до конечной температуры 1500—1580°С с выдержкой при ней в течение 6 ч.

При данном технологическом режиме получены изделия следующего состава: 16,52% SiO_2 , 1,19% Al_2O_3 , 2,6% Fe_2O_3 , 0,76% MnO , 46,05% CaO , 30,05% MgO , 1,18% P_2O_5 и со следующими свойствами:

Огнеупорность, °С	1770—1780
Температура, °С, деформации под нагрузкой 0,196 МН/м ² :	
начало	1550—1610
разрушение	1680—1690

<i>Продолжение</i>	
Дополнительная усадка при температуре 1700° С, %	1,37
Объемный вес, кг/м ³	2800—2900
Предел прочности при сжатии, МН/м ²	98,10—127,53

Доломитовые огнеупоры на органической связке

Для изготовления доломитовых изделий со смольной связкой обожженный доломит измельчают до крупности зерен от 0 до 8 мм. В качестве связующего добавляют смольную связку, состоящую из 60—70% пека и 30—40% антраценового масла.

Предварительно подогретый доломит загружают в специальный смеситель, обогреваемый паровой рубашкой, и добавляют в него 10—15% указанной связки.

Температура смешиваемой массы устанавливается от 80 до 110° С и продолжительность смешивания — от 15 до 25 мин. Приготовленную таким способом огнеупорную массу направляют на прессование изделий при давлениях от 49 до 98 МН/м² или трамбовку в специальных устройствах. Обжиг кирпича на смоляной связке является весьма трудным процессом, так как при нагревании органическая связка сырца размягчается и кирпич деформируется, поэтому садка сырца осуществляется в этажерки и особо быстро нагревается до температуры 1000° С, затем температура обжига по установленному режиму поднимается до 1600° С.

Производство безобжиговых доломитовых огнеупоров на органической связке

Учитывая трудность обжига изделий на органической связке, для футеровки конвертеров и мартеновских печей стали применять доломитовые огнеупоры, минуя предварительный обжиг, который совершается непосредственно в металлургических печах при их пуске в работу.

Безобжиговые доломитовые огнеупорные материалы используются для следующих целей:

- 1) при плавке или набивке пода в электродуговых и мартеновских печах, а также в конвертерах;
- 2) при прессовании доломитовых кирпичей или блоков для футеровки конвертеров и мартеновских печей.

В безобжиговых огнеупорах лишь ограниченная часть СаО связана в силикаты и алюмоферриты. Остальная часть СаО находится в свободном состоянии. Для связывания таких масс при прессовании или набивке используют смолу или битум. Для составления шихт рекомендуется свежееобожженный доломит, в котором должно быть 3—4% SiO₂; 3—4% R₂O₃; не менее 35% MgO и 35—45% свободного СаО. Целесообразно, подготовленную шихту, перед использованием выдержать в течение 12 ч. Масса для днищ конвертеров содержит смолы 12—15% и подогревается при трамбовании до 70—90° С.

Для прессования безобжиговых блоков для стен конвертеров применяют массу с величиной зерен от порошка до 10—15 мм с добавкой от 5—6 до 10—12% смолы. Трамбование блоков монолитных футеровок конвертеров и подин мартеновских печей осуществляют

пневматическими молотками с горячими трамбовками. Днища конвертеров после трамбования покрывают металлическими крышками и обжигают до коксования смолы и упрочнения массы. Нагрев до максимальной температуры 600—700° С длится 30—40 ч. Иногда при температуре 200—300° С делают выдержку до 10 ч для удаления газов. При максимальной температуре днища выдерживают 20—25 ч и затем охлаждают от 10 до 50—60 ч. Производство безобжиговых магнезитовых огнеупоров аналогично производству доломитовых безобжиговых изделий. При этом учитываются технологические особенности производства магнезитовых изделий, о которых сказано ранее.

15. Форстеритовые огнеупоры

Форстеритовые огнеупоры по составу подобны природному минералу $2\text{MgO} \cdot \text{SiO}_2$, который образуется в огнеупорах при спекании (обжиге) сырья. Они содержат MgO от 35 до 55% и соотношение между MgO и SiO_2 в форстеритовом кирпиче колеблется в пределах 0,94—1,33. Обожженные форстеритовые изделия в среднем имеют следующий состав: 54,33% MgO ; 35,36% SiO_2 ; 6,92% Fe_2O_3 ; 0,63% FeO ; 2,26% $(\text{Al}_2\text{O}_3 + \text{Cr}_2\text{O}_3)$; 0,28% CaO .

В качестве сырья для производства форстеритовых огнеупоров используются широко распространенные в природе минералы оливиниты, серпентиниты, дуниты и тальк. Изделия изготавливаются из указанных минералов путем их измельчения и в зависимости от содержания в них MgO к ним добавляются каустический или намертво обожженный магнезит. Избыток MgO в шихте повышает шлакоустойчивость изделий и ускоряет образование черепка. Для связывания массы в сырец в нее добавляются клеющие вещества — патоку или сульфитно-спиртовую барду.

В составе массы, идущей на изготовление форстеритового кирпича, должны преобладать тонкие фракции шихты, при этом соотношение между фракциями зерен рекомендуется следующее, %:

Величина зерен, мм	Более 2	2—1	0,5—1	Менее 0,5
Содержание, %	3	12—17	18—25	65

Добавляемый каустический магнезит тоже надо измельчать до тонкости от 0 до 0,088 мм.

Достаточно однородная и хорошо формирующаяся масса получается смешением шихты на бегунах в течение 15—20 мин.

Подготовленную форстеритовую массу направляют на прессование, а затем и сушку, эти операции подобны процессам производства магнезитовых изделий. Обжиг форстеритовых кирпичей в зависимости от свойств исходного сырья проводят при температурах 1600—1700° С.

Форстеритовые огнеупоры отличаются более низкой теплопроводностью по сравнению с магнезитовыми изделиями. Они обладают высокой температурой дефор-

мации под нагрузкой и достаточной устойчивостью против разъедания основных шлаков. У форстеритовых изделий достаточно высока огнеупорность, которая равна 1830—1900° С.

Форстеритовый кирпич используют для замены магнезитовых огнеупоров и особенно в печах с плавкой шлаков, содержащих окислы железа. Они также используются в качестве заменителей динаса и шамота. Форстеритовые изделия могут быть использованы при строительстве печей в цветной металлургии, для сводов дуговых печей и др.

Свойства форстеритовых изделий

Указанного выше состава изделия, обожженные при температуре 1670° С, обладают следующими свойствами:

Предел прочности при сжатии, МН/м ² . . .	20—30
Температура деформации под нагрузкой 0,196 МН/м ² , °С:	
начало	1580—1620
разрушение	1650—1710
Пористость кажущаяся, %	26—28
Объемная масса, кг/м ³	2350—2420
Огнеупорность, °С	1830—1880
Термостойкость, воздушные теплосмены .	5—14
Дополнительная усадка при температуре 1700° С (выдержка 1 ч)	0,8—1,4

16. Шпинельные огнеупоры

Шпинельные огнеупорные изделия получают синтезом технического глинозема с каустическим магнезитом. Во время обжига отпрессованного кирпича MgO, взаимодействуя с Al₂O₃, образует шпинель MgO·Al₂O₃, минерал, встречающийся в природе.

Для составления шихты, идущей на изготовление шпинельных изделий, требуется глинозем 70% и каустического магнезита 30%, в последнем должно быть MgO не менее 91,0%.

Образование MgO·Al₂O₃ сопровождается усадкой спека на 29—24%, для устранения усадки в изделиях осуществляют предварительный синтез шпинели в обжигаемых брикетах. Так как окислы, образующие шпинель очень тугоплавкие: температура плавления MgO равна 2800° С, а Al₂O₃ — 2050° С, то для обеспечения спекания их при более низких температурах в шихту добавляют минерализаторы, позволяющие снизить температуру спекания до 1650° С. В качестве минерализатора применяют хромит, он ускоряет образование

шпинели и рост ее кристаллов. Для изготовления брикетов шпинельную шихту измельчают до порошка, имеющего около 85% зерен размером от 0 до 0,088 мм, затем увлажняют до 3—4% водным раствором, содержащим 0,5% патоки или сульфатно-спиртовой барды. Далее эту шихту брикетируют на прессах под давлением 15—20 МН/м². Затем брикеты обжигают при температуре 1650° С. После обжига брикеты измельчают. Зерновой состав порошка должен быть следующим:

Фракция, мм	3—2	2—0,5	0,5
Содержание, %	25	25—35	40—50

К зернистой шихте добавляют 20% связки, сырой брикетной массы, измельченной до тонкости зерен порядка 0—0,088 мм. После смешения на бегунах из массы прессуют шпинельные изделия. Отпрессованный сырец подвергается ускоренной сушке и после сушки направляется на обжиг. Обжиг шпинельных изделий осуществляют при температуре 1650° С. Продолжительность обжига по установленному режиму составляет от 100 до 110 ч.

Полученные указанным способом огнеупоры обладают следующими свойствами:

Предел прочности при сжатии, МН/м ²	Выше 49
Температура деформации под нагрузкой 0,196 МН/м ² , °С:	
начало	1600—1650
разрушение	1660
Кажущаяся пористость, %	19—25
Объемная масса, кг/м ³	2600—2800 }
Огнеупорность, °С	Выше 1920° С
Термостойкость, воздушные тепло-смены	30—40
Дополнительная усадка при температуре 1700° С при выдержке в течение 1 ч, %	0,4
Средний коэффициент линейного расширения в интервале температур 20—700° С	(0,9—1,0)·10 ⁻⁵

17. Производство хромомагнезитовых огнеупоров

Хромомагнезитовые изделия изготавливают из широко распространенных в природе минералов хромита и магнезита. Для получения данных огнеупоров используется порода (серпентинит), содержащая свыше 80% FeO·Cr₂O₃ и спеченный магнезит. Приготовленные из этих материалов изделия обладают огнеупорностью порядка 2000° С, а иногда и выше. Они обладают нейтральными свойствами и высокой стойкостью против основных и железистых шлаков. Хромомагнезитовые изделия часто используются в качестве прослойки, разделяющей кладку динаса и основного огнеупора или шамота.

Выпускаются два типа хромомagneзитовых изделий:

1. Изделия общего назначения, которые должны удовлетворять ГОСТ 5381—72.

2. Изделия, используемые для кладки сводов мартеновских и электросталеплавильных печей, которые должны удовлетворять соответствующим техническим условиям.

Хромомagneзитовые изделия

Для производства данного типа изделий шихта составляется из 50—50% хромита и 40—50% магнезита. При таком соотношении компонентов в изделиях должно быть 17—22% Cr_2O_3 и 45—55% MgO . При этом допускается добавка различных видов бракованных хромомagneзитовых изделий в количестве 20—30% сверх 100% свежей массы.

Измельчение компонентов шихты может быть совместным или раздельным. Шихта измельчается до частиц такого состава:

Фракция, мм	2—1	0,2—0,06	0,06—0
Содержание, %	7	45—50	20—25

Все остальные операции производства хромомagneзита: подготовка шихты, режим прессования, сушка и обжиг аналогичны соответствующим процессам производства магнезитового кирпича. Только обжиг данных изделий должен вестись в «мягком» окислительном пламени, так как в окислительной атмосфере имеет место реакция между хромитом и магнезитом с образованием магнезиоферрита, этот процесс сопровождается изменением объема и появлением брака.

Важнейшие свойства хромомagneзитовых изделий могут быть охарактеризованы следующими данными:

Предел прочности при сжатии, MN/m^2	20—50
Температура деформации под нагрузкой 0,196 MN/m^2 , °C:	
начало	1450—1530
разрушение	1480—1600
Огнеупорность	Выше 1920
Термостойкость, водные теплосмены	3—5
Кажущаяся пористость, %	11—28
Объемная масса, $\text{кг}/\text{m}^3$	2700—2850
Коэффициенты линейного расширения (средний)	$(10,85—1,0) \cdot 10^{-5}$

Термостойкие хромомagneзитовые изделия

Особенностью термостойких хромомagneзитовых изделий является постоянство объема при высоких температурах и неизменность свойств в работе. Это качество хромомagneзита очень ценно для работы сводов пла-

вильных печей, где они преимущественно и используются.

Для изготовления данного типа хромомagneзитовых изделий применяются шихты, содержащие от 20 до 35% хромита, остальное магнезит, что соответствует содержанию 8—14% Cr_2O_3 и не менее 60% MgO . Кроме того, для получения термостойкого хромомagneзита требуется крупнозернистый хромит; опытом показано, что хромит должен измельчаться до зерен от 0,75 до 2,0 мм, а фракции менее 0,75 мм удаляются. При этом магнезит должен измельчаться до более тонкого порошка от 0 до 0,3 мм.

Гранулометрический состав огнеупорной массы, обеспечивающей термостойкость изделий принимают следующий:

Фракции, мм . . .	0,75	0,75—0,12	0,12
Хромит, % . . .	86	12	2
Магнезит, % . . .	—	29	71

Применяют также добавки железной руды, которая, во время обжига изделий, улучшает спекание и повышает скорость роста зерен периклаза.

Дальнейший процесс подготовки шихты: прессование и сушка аналогичны таковым в производстве магнезитовых изделий. Но прессование термостойкого хромомagneзитового кирпича осуществляют при более высоких давлениях порядка 88,29 до 196,20 МН/м². Обжиг изделий производится по режиму магнезитового кирпича.

Отпрессованный под давлением 157 МН/м² и обожженный в течение 50 ч, при конечной температуре 1700°С кирпич получился следующего качества:

Предел прочности при сжатии, МН/м ² . . .	44
Температура деформации под нагрузкой 0,196 МН/м ² , °С:	
начало	1500
разрушение	1630
Кажущаяся пористость, %	13,5
Термостойкость, водные теплосмены	30

18. Огнеупорные растворы, массы, бетоны и теплоизоляционные материалы

Связующие огнеупорные растворы (мертели) должны обладать следующими свойствами:

1. Затворенная водой масса, при кладке кирпича должна хорошо заполнять его неровности и давать тонкие швы.

2. Раствор должен хорошо схватываться с кирпичом, приобретать механическую прочность после высушивания и во время работы в печи при высоких температурах свариваться и обладать малой пористостью.

3. Швы из раствора должны иметь термическое расширение, воздушную и огнеую усадку или рост близкие к свойствам кирпича.

Для кладки печных стен из шамота готовят шамотные растворы из тонко измельченного шамота и огнеупорной глины. В растворах для связывания полукислых огнеупоров шамот частично или целиком заменяют песком или кварцевой мелочью. Жидкое стекло в шамотных растворах понижает их огнеупорность и температуру деформации под нагрузкой, но в количестве 1,0—1,5% в пересчете на Na_2O при 300—800°С дает хорошее сцепление раствора с кирпичом, увеличивая прочность шва. Рабочая температура швов 850—1000°С, т. е. они при этих температурах устойчивы. Растворы класса 0 готовят с шамотом из каолина (с 37% Al_2O_3) для стен с рабочей температурой 1450—1550°С.

Т а б л и ц а 18

Свойства шамотных и полукислых растворов (мертелей)

Классы	Огнеупорность не ниже, °С	Содержание $\text{Al}_2\text{O}_3 + \text{TiO}_2$, %, не ниже		Содержание влаги, %, не больше
		для шамотных	для полукислых	
0	1730	37	—	7
I	1710	33	—	7
II	1650	30	20—30	7
III	1580	30	20—30	7

Растворы класса I с содержанием 33% Al_2O_3 используют для печной кладки, работающей при 1450°С и выше. Растворы класса II с 30% Al_2O_3 применяют для кладки стен, работающих при 850—1450°С (табл. 18).

Для диасовой кладки растворы готовят из молотого кварцита, диасового боя и огнеупорной глины (не

более 15%). Хорошая схватываемость в кладке обеспечивается тонким помолом динаса до зерен менее 0,2 мм, которых должно быть 60—80% и фракции менее 0,088 мм 40—50%.

Хромомагнезитовый раствор для связывания хромомагнезитовых кирпичей и блоков содержит 30% периклазового цемента и 70% измельченного (до 1 мм) хромита. Периклазовый цемент готовят из магнезита, обожженного при высоких температурах и измельченного до зерен 0,088 мм (не менее 85%).

Хромомагнезитовая смесь затворяется водным раствором, содержащим 17—20% $MgSO_4$ с добавкой 0,5—1,0% сульфитно-спиртовой барды на сухую массу.

Огнеупорные бетоны

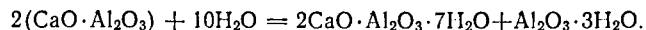
Огнеупорные бетоны должны иметь следующие свойства:

1 Достаточно быстро твердеть на воздухе, прочность может снижаться при нагревании до температур разложения продуктов твердения вяжущего и упрочняться при высоких температурах за счет спекания.

2. Высокую огнеупорность и термостойкость, малую усадку при сушке и обжиге, высокую температуру деформации под нагрузкой 0,196 МН/м².

В огнеупорных бетонах связующими служат глиноземистый цемент, портландцемент с измельченными добавками заполнителя или жидкое стекло с добавкой Na_2SiF_6 и заполнителя. Заполнителями служат обычный, каолиновый и высокоглиноземистый шамот, полукислые материалы, хромит и хромомагнезит, для термоизоляционных бетонов — пористый шамот.

В минералогическом составе цемента преобладает $CaO \cdot Al_2O_3$ и меньше содержится $CaO \cdot 2Al_2O_3$, $12CaO \cdot 7Al_2O_3$, $2CaO \cdot Al_2O_3 \cdot SiO_2$. Основная реакция твердения:



Через сутки после затворения прочность цемента достигает 70% от прочности 28-суточной выдержки. Гидроалюминаты кальция при нагревании до 400°С и выше отдают воду постепенно и без разрушения структуры. После обжига от 800 до 1000—1200°С предел прочности при сжатии бетонов с глиноземистым цементом умень-

шается в 1,5—2 раза (до 8—15 МН/м²), что допускается при службе бетонов в печах. Шамотные бетоны с глиноземистым цементом содержат 15—20% вяжущего и 80—85% шамотного заполнителя. Зерновой состав шамота: менее 1 мм 60%, от 10 до 20 мм 25% и от 40 до 60 мм 15%. Бетоны с шамотным заполнителем и глиноземистым цементом применимы для температур 900—1300° С. Для более высоких температур применяется специальный глиноземистый цемент в количестве 20% и высокоглиноземистый шамот — 80%, зерновой состав такой же, как и для шамотного бетона.

Хромитовые бетоны с обычным глиноземистым цементом содержат 7—15% вяжущего и 85—93% хромитового порошка с зернами менее 0,5 мм 35—40% и с зернами 0,5—5,0 мм 55—65%. Применимы они для температур в печи порядка 1300—1500° С. Взамен цемента применяется жидкое стекло с добавкой 10% кремнефтористого натрия, при этом получается бетон, твердеющий при обычных температурах, прочность бетона при нагреве не уменьшается.

Режим сушки и нагрева футеровок из огнеупорных бетонов следующий: подъем температуры до 100—110° С в течение 10—12 ч, выдержка при 100—110° С до окончания сушки, но не менее 1 суток. Подъем температуры до 500—600° С происходит со скоростью 30—50 град/ч, а затем до максимальной температуры по 80—100 град/ч.

Защитные огнеупорные обмазки, наносимые на огнеупорную поверхность холодной стены, способствуют продлению срока службы футеровки. Они должны хорошо схватываться с футеровкой печи. Поверхность кладки внутри печи покрывается обмазкой с помощью цемент-пушки (торкретированием) или вручную.

Хромитовая обмазка для защиты шамотной футеровки состоит из 90—92% хромитовой руды, 8—10% пластичной легкоспекающейся огнеупорной глины и 3,5—5% сульфитно-спиртовой барды на твердую массу.

Динасовая обмазка повышает срок службы динасовой футеровки. Для горячих ремонтов ее изготавливают из 93% кварцита, 5% пластичной огнеупорной глины и 2% жидкого стекла. Зернистый состав массы: зерен от 0,5 до 0,2 мм 20—30%; 0,06 мм 45—55% и не более 2% зерен выше 0,5 мм.

Теплоизоляционные огнеупорные материалы

В связи с интенсификацией металлургических процессов и значительным ростом производительности печей резко возросла потребность в тепловой энергии. За этим также последовал рост потерь тепла, которые дополнительно потребовали большого расхода топлива и электроэнергии. Для уменьшения потерь тепла печами применяются теплоизоляционные материалы.

Широкое использование в печестроении получили шамотные и dinasовые легковесные изделия. В последнее время стали применять легковесные пористые изделия из окиси циркония, корунда, хромомagneзита и магнезита. Теплоизоляционные материалы применяют в форме кирпичей, плит, фасонных изделий, в виде засыпки, шлаковой ваты, а также массы, которая намазывается на горячую поверхность стен. В практике возможны два варианта использования теплоизоляционных изделий:

1) в виде легковесной кладки, которая своей поверхностью ограничивает внутренний объем печи и, следовательно, подвержена воздействию пламени и продуктов тепловой обработки;

2) в виде тепловой изоляции, накладываемой на наружную поверхность печи, работающей в атмосфере цеха.

Широко распространены шамотные теплоизоляционные изделия. Получают их способами выгорающих добавок, пенокерамическим или химическим.

Способы выгорающих добавок основаны на введении в шамотную массу 25—30% мелких опилок дерева, увеличение содержания опилок ухудшает формуемость изделий. Используется также древесный уголь, который улучшает формуемость изделий, но он хуже выгорает. Небольшая добавка опилок к древесному углю значительно повышает его выгорание.

В легковесных изделиях используют плотный зернистый шамот и реже пористый шамот. Зернистость шамота может быть однородна и составлять 2—3 мм. Добавка шамота в массу в количестве 20—30% устраняет деформацию и образование посечек (разрывов шириной $<0,5$ мм) и трещин (разрывов шириной $>0,5$ мм) в изделиях. Глина как пластификатор и связующее добавляется в массу в количестве от 30 до 45%. Часть глины

5—10% вводят в виде шликера в ранее приготовленную смесь шамота с опилками. Массы, направляемые на пластичную формовку содержат 25—35% влаги. Приготовленная пластичная масса подвергается вылеживанию, после этого она лучше формуется. Отформованные изделия после медленной сушки обжигают. Выгорание добавок при обжиге обеспечивается избытком кислорода воздуха при 500—1000°С, завершение обжига достигается при 1250—1350°С.

Пенокерамический способ. Этот способ преимущественно применяют при получении шамотных легковесных изделий. Он основан на введении в шамотную массу специально приготовленной пены, которая формирует пористую структуру огнеупора и сохраняет ее в обожженных изделиях. Пена представляет собой коллоидную систему диспергированного газа в жидкой среде. Приготавливают шамотную массу из шамота, глины и опилок (3—5%) и затворяют водой до 25—30%. В качестве пенообразователя применяют канифольное мыло и иногда природный «мыльный корень». Канифольное мыло изготавливают растворением 7% едкого натра в 50% воды. В этот горячий раствор добавляют 43% расплавленной канифоли при постоянном помешивании. Для устойчивости пены в нее добавляют раствор столярного клея.

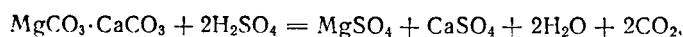
При получении пенообразователя берут 12% клея, в горячий клей добавляют 17% канифольного мыла и 71% воды. Эту смесь кипятят до образования однородной эмульсии. Для приготовления пены в воду добавляют 2,5% эмульсии и эту водную смесь обрабатывают в пеновзбивателе барабанного типа. При этом должна получаться пена с объемной массой от 0,04 до 0,06 г/см³. Для получения устойчивого шликера требуется высокое содержание в нем шамота от 90 до 95% и соответственно глины не более 5—10%. Добавка глины выше 10% увеличивает усушку и усадку и, следовательно, деформацию, посечку и трещины в изделиях. При этом глина должна иметь 75% зерен 0,5 мм, а более 2 мм не выше 5%. Устойчивость шликера также достигается добавкой в него 3—5% опилок. Влажность его с электролитом ~ 25—30%.

Массу, из которой отливают изделия, приготавливают из шликера с добавкой в него пены, на одну часть шликера (по объему) добавляют от 0,75 до 1,5 части

пены. Влажность такой пеномассы равна 30—35%, а объемная масса не изменяется от 0,6 до 0,90 г/см³. Шамотную массу смешивают с пеной в специальном шнековом смесителе, делающем от 70 до 120 об/мин. Из готовой массы отливают изделия в формы, которые направляют в сушила. Сушку отформованной пеномассы осуществляют в два этапа, при 40—50° С в течение 18—20 ч, после чего освобожденные от форм изделия сушатся при 90° С до остаточной влажности 4%.

Высушенные изделия обжигаются в туннельных или другого типа печах при температурах от 1250 до 1350° С. Обычно пористые изделия во время обжига изменяются и не имеют правильной формы и поэтому нуждаются в механической обработке (шлифовке).

Химический способ производства теплоизоляционных огнеупорных изделий. В этом способе порообразователем служат газы, возникающие в химической реакции. В шамотно-глинистый шликер, содержащий 80—85% шамота, добавляются доломит и раствор серной кислоты. Реакция протекает по следующей схеме:



При этом выделяется CO₂, вызывающая вспучивание массы, объем которой увеличивается почти в два раза. Закрепление нового объема пористой массы достигается добавкой гипса, который, схватываясь, образует двухводный гипс, закрепляющий пористое состояние массы.

Динасовые легковесные огнеупоры преимущественно получают методом выгорающих добавок, получают они и пенокерамическим способом. Для получения пористого динася используется кварцитовый порошок, в качестве выгорающих добавок применяют измельченные антрацит или коксик. Измельчение материалов осуществляется до следующего зернистого состава:

Размер зерен, мм	3	3—05	0,5—0,088	0,088	Выше 0,5
Кварцит, %	—	—	24	66	10
Антрацит, %	5	52	20	23	—
Коксик, %	11	27	21	41	—

Соотношение между кварцитом и выгорающими добавками принимается следующим:

	Кварцит	Антрацит	Коксик
Шихта с антрацитом, %	65	35	—
Шихта с коксиком, %	70	—	30

Массу заготавливают на бегунах. Время смешения от 12 до 15 мин. Щелочность массы должна быть в пределах 2,0—2,5%. Готовая масса должна проходить через сито 0,5 мм в количестве 70% и остальное через сито 3 мм. Для упрочнения сырца в массу добавляют сульфитно-спиртовую барду в количестве 1% на сухое вещество. Отпрессовывают изделия на револьверном станке и направляют на сушку в туннельную печь. Брак при сушке достигает 4—5%. Сухой легковесный динас обжигают совместно с обычным динасом. Укладку легковеса в печи осуществляют на верхние слои обычного динаса. Для устранения брака легковес загружают рассредоточенно, с просветами между изделиями не менее 18—20 мм, в противном случае остаются изделия с невыгоревшими добавками до 35—50%. При обжиге стремятся получить максимальную тридимитизацию динаса: до 78—86% тридимита, от 13—15% кристобалита и от 4 до 7% кварца.

Перлитовый легковес. Во ВНИПИ «Теплопроект» разработан, так называемый, совмещенный способ получения легковесных огнеупоров на основе вспученного перлитового песка и воздухововлекающих добавок. Вспученный перлит получается из одноименной вулканической стекловаты горной породы Арагацкого месторождения. При этом получается перлитовый песок высокой пористости до 75—80% от объема зерна, а размер пор колеблется от 0,5 до 10 мкм.

Состав вспученного перлитового песка:

Компоненты . . .	SiO ₂	Al ₂ O ₃	TiO ₂	Fe ₂ O ₃	
Содержание, % .	74,13	14,21	0,55	0,97	
Компоненты . . .	CaO	MgO	Na ₂ O	K ₂ O	Потери при прокаливании
Содержание, % .	0,9	0,83	4,1	2,91	Остальное

Вспученный перлитовый песок пригоден для производства легковесных огнеупоров различной плотно-

сти — от 0,4 до 0,7—0,9 г/см³. Способ получения огнеупоров высокой пористости заключается в том, что составляется шликер из пористого перлитового песка, отошающих огнеупорных компонентов (шамот), связующего и воды. Одновременно вводятся регулирующие вязкость добавки — пептизатор и коагулянт, которые при совместной обработке дополнительно вовлекают в шликер воздух, равномерно распределяющийся в виде мелких пузырьков, разделенных прочными тонкими пленками жидкости. В качестве воздухововлекающих компонентов применяют 14%-ный раствор абигата натрия — пептизатор и раствор мочевино-формальдегидной смолы МФ-17 — коагулянт.

В зависимости от отошающей добавки в перлитовый шликер можно получить изделия с высокой огнеупорностью. Введение в шихту с перлитом высокоглиноземистых компонентов, позволяет получать легковесы класса А с огнеупорностью 1750—1830° С. Отлитые в формы и высушенные изделия подвергаются обжигу. В обжиге перлитовый песок при температуре 700—800° С действует как пламень и способствует взаимодействию компонентов шихты с образованием пористого изделия.

Теплоизоляционные высокотемпературные материалы. Выше рассмотренные методы производства обычных легковесных изделий, применимы для получения теплоизоляционных пористых изделий из корунда, магнезита, хромомагнезита и окиси циркония. Они применяются в вакуумных печах сопротивления и тигельных вакуумных индукционных печах.

Теплоизоляционные материалы минералогического происхождения применяются преимущественно в рыхлом виде, для тепловой изоляции электропечей, засыпки промежутков между стальным кожухом и огнеупорной кладкой печи. Из этих же материалов изготавливают различного типа теплоизоляционные изделия.

В качестве тепловой изоляции широко используется минерал — асбест (по гречески «несгораемый»). Асбест распространен в природе в форме волокнистой массы. Вследствие хорошей делимости волокон друг от друга в технике из асбеста изготавливают ткани и несгораемую одежду. Промышленность из асбеста выпускает различной формы и размеров изделия для тепловой и электрической изоляции. Применяется он также в форме

Т а б л и ц а 19

**Теплопроводность и теплоемкость асбеста в зависимости
от плотности его массы**

Материал	Плотность, кг/м ³	Теплопро- водность, λ , Вт/(м·К)	Теплоем- кость, c , кДж/(кг·К)
Асбестовый кирпич . . .	470	0,13	0,837
Асбестовая ткань	575	0,154	0,837
Плотно набитый асбест	702	0,233	0,837

ваты и тестоподобной массы с глиной для обмазки труб и аппаратов (табл. 19).

При температуре 700°С асбест обезвоживается, рассыпаясь в порошок, и теряет теплоизоляционные свойства. Плавится он при температуре выше 1500°С.

Диатомит представляет собой пористые осадочные образования из панцирей микроводорослей (диатомий), в основном состоящих из аморфного кремнезема. Трепел, его образование, по-видимому, обязано разрушению богатых кремнеземом горных пород, без участия микроорганизмов. По внешнему виду он не отличается от диатомита и инфузорной земли.

Инфузорная земля представляет собой скопления кремнеземистых скелетов радиолярий и губок. Все эти минеральные образования обладают высокой пористостью, дисперсностью и пластичностью. Последнее свойство позволяет их использовать в производстве теплоизоляционных изделий с выгорающими добавками или с помощью пенообразователей или без них.

Теплопроводность изделий из пенодиатомитовой массы, в зависимости от температуры и массы:

Температура, °С	103	207	207	430
Объемная масса, кг/м ³	460	510	357	510
Теплопроводность, Вт/(м·К)	0,13	0,22	0,21	0,383

19. Выбор огнеупоров для промышленных печей и служба их в кладке печей

Огнеупоры для кладки печи выбирают в зависимости от характера ее работы, что определяется назначением печи: сушильная, нагревательная или плавильная

печь, величинами рабочих температур и характером шлаков. Высокотемпературный режим плавки резко ухудшает условия работы огнеупоров и значительно сокращает срок их службы, что надо учитывать при выборе огнеупоров. Кроме того в различных частях печи условия службы огнеупоров разные. В некоторых звеньях печи они работают под механической нагрузкой, поэтому важно, чтобы огнеупорные материалы обладали высокой температурой начала деформации под нагрузкой, могли противостоять механическим давлениям кладки при высоких температурах процесса и истирающему действию движущихся твердых тел. Зная более подробно условия службы огнеупоров на каждом участке печи, можно правильно подобрать химический состав, класс, сорт и фасон огнеупора, обеспечивающего стойкость кладки.

Выбор огнеупоров для мартеновских печей

Мартеновские печи работают при температурах в рабочем пространстве порядка 1650—1750° С. При таких температурах агрессивное действие шлаков резко возрастает. При этом, если плавка ведется с основными шлаками, то мартеновские печи называются основными и делаются с магнезитовой подиной. Если в мартеновских печах плавка ведется кислыми шлаками, то эти печи называют кислыми и делают их с диносовой подиной (наварка из кварцевого песка или кварцита).

По конструкции главного свода мартеновские печи разделяются на печи с распорным, с подвесным и с распорно-подвесным сводами. Условия работы огнеупоров на отдельных участках мартеновской печи различны. По характеру термических и физико-химических воздействий на огнеупоры эта печь делится на несколько конструктивных звеньев.

Подина. На под печи действуют высокая температура металла, достигающая 1650° С; резкие колебания температуры (после слива металла наступает резкое охлаждение от загружаемой шихты) и удары твердой шихты, загружаемой в печь; химические реакции расплавов металла и шлака; давление масс металла и шлака. Для подины основных печей применяют магнезит. На магнезитовую кладку подины наваривают (набивается) слой обожженного магнезитового порошка, смешанный с

10—25% мартеновского шлака. Наварку подины осуществляют перед пуском печи.

Подину кислых печей выкладывают из динасового кирпича. На эту подину наваривают слой кремнеземистой набивки, осуществляют это последовательной насыпкой тонких слоев кварцевого песка. Для сварки каждого слоя в монолит, после насыпки каждого слоя, повышают температуру.

Стены рабочего объема мартеновской печи подвергаются воздействию высоких температур (до 1750° С). Они также, как и подина, подвергаются резкой смене температур во время слива металла и загрузки холодной шихты и ударам загружаемой шихты. Переднюю и заднюю стенки основных печей выкладывают из магнезитового кирпича, а кислых — из динаса.

Своды мартеновских печей подвергаются воздействию температур до 1800° С. Сложность службы свода дополняется колебанием температур во время горячего ремонта, неравномерностью нагрева свода по его длине, химическим действием горячей пыли шихты, пыли, содержащейся в газах, брызг шлака, а также высокому истирающему действию частиц пыли движущихся с большой скоростью. Кроме того, огнеупоры должны иметь точные размеры и правильную форму, что требуется для тщательной и плотной укладки их в своде. Огнеупоры должны обладать постоянством объема при высоких температурах процесса. Последним требованиям лучше других огнеупоров удовлетворяют динасовые изделия, хотя у них низкая термостойкость и плохая устойчивость против основных шлаков. В подвесных сводах применяют термостойкие хромомагнезитовые изделия, в частности выпускаемые заводом «Магнезит».

Головки мартеновской печи работают в условиях, близких к службе свода и стен рабочего пространства. Огнеупорные изделия верхней части головок, перемычек между окнами и торцевых стенок должны удовлетворять тем же требованиям, какие предъявляют к огнеупорам свода. Поэтому верхнюю часть головок, перегородки между каналами и вертикальные каналы выкладывают из динасового или хромомагнезитового кирпича. Нижняя часть головки, подвергается воздействию основных шлаков, поэтому ее выкладывают из магнезитового или хромомагнезитового кирпича.

Насадка регенераторов и шлаковики печи подверга-

ются действию высокой температуры, которая в верхних рядах насадки и под сводами составляет от 1300 до 1500° С, резким изменением температур при переключении регенераторов с горячих дымовых газов на холодный воздух и ошлакованию пылью. Эти факторы сильно влияют на кладку верхних частей регенератора.

Исходя из указанных требований своды регенераторов и насадки, а также своды и стены шлаковиков выкладывают из динасового кирпича. Для уменьшения потерь тепла по сводам укладывают на плашку трепельный кирпич.

Обычно нижние 2/3 стены и насадки регенераторов выкладывают из шамота, верхнюю 1/3 из динасового кирпича. Хотя динасовый кирпич не термостойкий и плохо стоит против шлакования пылью, по сравнению с шамотным кирпичом, но применение шамота здесь затруднено пониженной температурой начала его размягчения.

В последнее время в верхнем слое садки (1/3 ее высоты) динас заменяют форстеритом, который обладает более высокими, чем динас, огнеупорностью, термостойкостью, устойчивостью против разъедания окислами железа и высокой температурой деформации под нагрузкой. Нижние 2/3 высоты садки выкладывают из шамота или многошамота.

Особого внимания заслуживает высокоглиноземистый огнеупор ($Al_2O_3 \geq 60\%$), обладающий более высокими физико-химическими свойствами по сравнению с форстеритом и являющийся наиболее желательным для кладки насадок.

Выбор огнеупоров для конвертеров

При кислородном дутье, газ под давлением, проникая в расплав, развивает в зоне реакции температуру 2000—2500° С и приводит в интенсивное движение жидкую сталь. В связи с этим футеровка конвертера работает при температуре порядка 1750—1850° С и, находясь постоянно в контакте с бурлящей средой, подвергается химическому разъеданию и механическому размыванию кипящим расплавом. Во время слива стали, заливки чугуна и холодных присадок футеровка конвертера подвергается резким сменам температур. Учитывая подобные условия работы огнеупоров в конвертере,

надо выбирать огнеупоры с высокими огнеупорностью, термостойкостью, стойкостью против разъедающего действия расплава и механической прочностью против размывания расплавленной средой.

Этим требованиям удовлетворяет высокоплотный и термостойкий магнезит. В настоящее время для футеровки сталеплавильных конвертеров применяют доломитовые огнеупоры на органической связке как обожженные, так и безобжиговые изделия, см. с. 624. Стойкость доломитовых огнеупоров против разъедания железистых шлаков тем выше, чем больше в доломите свободной CaO , доломитовая футеровка выдерживает 500 плавов и больше.

*Выбор огнеупоров для отражательных печей
при плавке медных концентратов*

В отражательных печах плавят медные концентраты, содержащие значительное количество железа, конвертерную черновую медь и катодную медь.

При плавке железистых концентратов, для ошлакования избытка железа в шихту добавляют кремнезем. При этом для уменьшения потерь меди со шлаками, в зависимости от содержания железа в огарке, в шихту добавляют от 36—38 до 40—50% SiO_2 . Такая плавка является кислой, в связи с этим отражательные печи кладут из динаса.

Конструкция отражательных печей проще и температуры плавки ниже, чем в мартеновских печах. Основными звеньями отражательных печей являются фундамент, лещадь (под), стены и свод.

Фундамент отражательных печей на новостроящихся заводах делают из бутового камня или бетона и кирпича. На действующих заводах, как правило, новые отражательные печи строят на шлаковом фундаменте.

Лещадь (под) наваривают внутри печи, на кирпичную кладку. Для наварки лещади применяют чистый кварц или песок с содержанием SiO_2 не менее 94—96%. Преимущественно используется речной песок. Кварц или речной песок измельчают до тонкого состояния, максимальная величина зерен не должна быть более 2—2,5 мм. Чем тоньше измельчены данные материалы, тем быстрее и полнее кварц переходит в тридимит

в навариваемом поду. Обычно лещады наваривают толщиной до 0,6—0,7 м.

Стены отражательных печей работают при температуре газов от 1500 до 1600°С в плавильной и 1200—1300°С в отстойной зонах. При плавке концентратов они обычно закрыты откосами шихты. Откосы шихты поддерживают температуру стен постоянной и при загрузке холодной шихты в печь, ее влияние на колебания температуры стен уменьшается. Стены печи возводят на шлаковом или кирпичном фундаменте и целиком выкладывают из динасового кирпича. На некоторых заводах кладку боковых стен делали из магнезита, а в наиболее ответственных частях печи — из хромомagneзита.

В последнее время магнезитовым кирпичом футеруют печь только в районе выпускных отверстий для штейна или иногда пояс ванны печи, если в печи плавят обожженную шихту с большим содержанием железных окислов, которые интенсивно размывают динасовую кладку. Для увеличения срока службы кладки на некоторых заводах применяют ступенчатую кладку стен со стороны рабочего объема печи. Наибольший срок службы обеспечивает кладка боковых стен из большемерного фасонного кирпича, имеющего с одной стороны срез под углом 60° или из соответствующих динасовых блоков. Кладка продольных стен из такого динасового кирпича дает толщину до 450 мм на уровне пят свода и до 1570 мм на уровне лещады.

Свод отражательных печей омывается продуктами сгорания топлива с температурой от 1600 до 1300°С. При этом он подвергается химическому и абразивному воздействию частиц шихты и газов движущихся с большой скоростью. Загружаемая в печь шихта способствует значительному колебанию температуры под сводом. Таким образом, от огнеупоров, применяемых для сводов, требуются: высокая огнеупорность, термостойкость, химическая стойкость и прочность против истирающего действия твердых частиц шихты, точность размеров и правильность формы.

На отражательных печах шириной больше 7,5 м (до 9—10 м) арочные своды стали заменять подвесными. Применяют также своды арочно-распорные с подвеской. Для сводов используют большемерный динасовый кирпич высокого качества. Толщина свода колеблется от 381 до 508 мм. Как правило, своды делают одинаковой

толщины на всем протяжении рабочего пространства печи. На некоторых заводах в целях экономии кирпича свод в плавильной зоне делают толщиной 508 мм, а в отстойной зоне толщиной 381 мм.

Загрузочные отверстия расположены по всей длине свода, по обе его стороны. В динасовом своде отверстия выкладывают из магнезитового кирпича. Иногда боковые части свода по всей длине расположения отверстий выполняют из магнезита, а центральную — из динаса. Имеются тенденции к замене динасового кирпича в сводах магнезитовым, ибо он обладает более высокой огнеупорностью и стойкостью против основной железистой пыли, которая быстро шлакует динасовый свод. Опытной проверкой было установлено, что необожженный магнезитовый кирпич, спрессованный под высоким давлением, в сравнении с обожженным магнезитом, обладает более высокими свойствами и большей продолжительностью работы в своде.

Выбор огнеупоров для нагревательных печей

Наиболее высокие температуры имеют место в печах для нагрева черных металлов. Температура нагрева черных металлов в зависимости от рода обработки и состава сплава колеблется от 1100 до 1300° С. В рабочем объеме камерных печей и в сварочной зоне методических печей температура достигает 1350—1400° С, а в отдельных случаях 1500° С. При такой температуре печей можно использовать для кладки стен шамот, свод тоже может быть выполнен из шамота или динаса. Температура пода, обычно, ниже. Под иногда покрывается окалиной образующей железистый шлак, в связи с этим подину выкладывают из талькового или магнезитового огнеупоров, как более стойких против разъедания железистого шлака. Кроме того, под подвергается ударам и истиранию при движении слитков. Значительные колебания температуры происходят в камерных печах при выгрузке и загрузке слитков в печь. Следовательно, для нагревательных печей требуется огнеупорный и термостойкий кирпич, он должен обладать механической прочностью и химической стойкостью против железистых шлаков. Для стен могут быть использованы шамотные, многошамотные или высокоглиноземистые изделия. Для сводов динасовый или шамотный, для подин магнезитовый, доломитовый или тальковый огнеупоры.

Выбор огнеупоров для нагревательных печей цветных металлов

Нагрев и термообработка цветных металлов проводятся при более низких температурах, чем черных, и часто в защитной газовой среде. Для нагрева тяжёлых цветных металлов, т. е. меди и ее сплавов — латуни и бронзы, температура нагрева колеблется в пределах от 700 до 900°С, а легких металлов и сплавов на основе алюминия и магния от 100° до 600°С. Поэтому для нагревательных печей цветной металлургии требуются огнеупоры с малой газопроницаемостью, стойкие против истирания и ударов движущихся слитков, достаточной огнеупорности и термостойкости. Таким требованиям удовлетворяют: шамот, многошамот, каолиновый и высокоглиноземистый шамот.

Глава XXX

ВЫСОКООГНЕУПОРНЫЕ ИЗДЕЛИЯ ИЗ ЧИСТЫХ СОЕДИНЕНИЙ

В производственной практике при получении тугоплавких металлов или сплавов, а также металлов высокой чистоты, для изготовления тиглей или футеровки плавильных емкостей в печах, применяют следующие окислы: Al_2O_3 , MgO , CaO , ZrO_2 , TiO_2 и BeO . Данные окислы обладают температурой плавления выше 2000°С, а у некоторых она повышается до 2500 и 2900°С. В отдельных случаях для плавки металлов, не образующих карбиды, используется графит, последний имеет температуру плавления выше 3500°С. Кроме тугоплавких окислов, в исследовательской практике получили распространение керамические изделия из других тугоплавких химических соединений. Высокоогнеупорные изделия изготавливают из следующих химических чистых соединений: окислов, сульфидов, карбидов, графита, нитридов, двойных или тройных систем из окислов, обычно, типа шпинелидов.

К указанным огнеупорам могут быть предъявлены те же требования, которые обычно предъявляются к огнеупорам промышленного печестроения, а именно, они должны обладать:

- 1) высокой огнеупорностью;
- 2) высокой термической стойкостью к температурным ударам;
- 3) стойкостью в отношении паров и газов, расплавленных и твердых фаз при высоких температурах, т. е. должны быть устойчивы против расплавленных металлов и шлаков;
- 4) высокой плотностью, т. е. низкой пористостью и газопроницаемостью;
- 5) высокой механической прочностью и твердостью при высоких температурах.

1. Подготовка сырья

Предварительный обжиг сырья

Перед составлением огнеупорных масс из окислов производят термическую подготовку сырья, т. е. его предварительный обжиг.

Обжигают материалы при максимальной температуре, возможной для данного соединения, так как чем выше температура предварительного обжига сырья, тем меньше будет усадка изделия при рабочей температуре.

Необходимо при этом учитывать, что при чрезмерном повышении температуры предварительного обжига в материале происходит рекристаллизация и рост зерен, в результате чего при последующем обжиге изделий ухудшается спекание огнеупорных масс.

В некоторых случаях сырые материалы подвергают плавке в дуговых печах. У плавящихся окислов значительно понижается усадка изделий в работе и сохраняется постоянство размеров, повышается огнеупорность и термостойкость. Но плавящиеся материалы плохо спекаются даже при достаточно высоких температурах, поэтому они требуют очень тонкого измельчения.

Измельчение обожженного сырья

Следующей операцией подготовки материалов является дробление и измельчение продуктов обжига в шаровых мельницах. Обычно для повышения производительности и качества размола материала измельчение производится в жидких средах. При этом осуществляет-

ся помол материала до нескольких микрон, а иногда и долей микрона.

Измельчение окислов в жидкостях целесообразно потому, что это устраняет пыление и оздоравливает обстановку рабочего места. В тех случаях, когда окислы взаимодействуют с водой, их измельчают в спирте или в какой-либо другой органической жидкости. Во время измельчения огнеупорных окислов, они загрязняются намалываемым железом от футеровки мельницы и стальных шаров.

Железо из измельченного материала удаляется отмывкой водным раствором кислот.

Способы формования изделий из высокоогнеупорных окислов

Изделия из чистых соединений могут быть изготовлены двумя способами:

1. Прессованием или выдавливанием (прошивкой) через мундштук. Этим способом получают массивные изделия.

2. Отливкой из шликерных огнеупорных масс в соответствующие формы. Этим способом отливаются тонкостенные изделия и изделия малых размеров.

Для прессования изделий требуются пластичные огнеупорные массы. Так как многие чистые окислы, особенно после обжига, обладают высокой твердостью и отошающими свойствами и трудно поддаются формованию путем прессования, в них вводят различного рода пластификаторы, например парафин или другие органические связующие.

Для получения тонкостенных изделий из огнеупорных масс приготавливают литейные шликеры (суспензии). Если измельченные окислы не взаимодействуют с водой, то для литья изделий из них составляют водные суспензии. При взаимодействии окислов с водой составляют суспензии на органических затворителях, к последним относятся бензол, ацетон, спирт и другие органические соединения. Возможно также получение огнеупорных изделий из окислов, путем их расплавления и отливки из расплава в формы.

Отливку огнеупорных изделий из водных шликеров и приготовленных суспензий на органических жидкостях производят в гипсовые формы.

Обжиг и спекание отформованных изделий

Отформованные изделия, после сушки на воздухе направляют в специальные сушила, в которых температуру сушки повышают до 30—55° С.

При указанных температурах вода затверения медленно испаряется из отформованных изделий, что уменьшает образование трещин и количество брака в готовой продукции. После сушки изделия направляют в обжиговые печи. Обычно обжиг таких изделий производят в две стадии и, как правило, начало обжига связано с медленным подъемом температуры со скоростью от 20 до 300 град/ч и завершается обжиг температурой 1200—1450° С.

Обожженные в первой стадии изделия подвергаются второму обжигу с более ускоренным подъемом температуры до 1700—2200° С, при которой они выдерживаются от 1 до 3—5 ч. После выдержки изделий при максимальной температуре следует медленное охлаждение их в печи, с тем чтобы не вызвать растрескивания.

Спекание представляет собой сложный процесс и оно определяется рядом факторов. Самым важным из них является температура обжига, так как от нее зависит физико-химическое состояние вещества. Значительное влияние на спекание изделий оказывает структура исходного материала, размер кристаллов и чистота исходного сырья.

Небольшие добавки в огнеупорную массу веществ, образующих жидкую фазу, способствует спеканию тугоплавких частиц окисла. При обжиге огнеупорная масса, состоящая из разрозненных частиц спекается, цементируясь в черепок достаточной плотности и прочности. И чем больше достигается плотность черепка, тем меньше его пористость. Для деформации спеченных изделий требуются значительные усилия. Для оценки спекаемости огнеупорного окисла в черепок рекомендуется формула, позволяющая определить относительную плотность обожженного изделия

$$E = \frac{O_m}{\rho},$$

O_m — объемная масса изделия, г/см³,

ρ — плотность вещества, г/см³.

Очевидно, при полном спекании обожженного изделия будет $O_m = \rho$ и тогда $E = 1$.

Важным показателем спекания огнеупорных окислов является их температура плавления, так как чем выше температура плавления окисла, тем выше требуется температура для спекания изделия. Установлен показатель спекаемости огнеупорных окислов, по которому можно ориентировочно определить температуру спекания изделия.

Показатель спекаемости окислов представляет собой отношение температуры спекания $T_{сп}$ к температуре плавления $T_{пл}$ окисла:

$$T_{сп} = aT_{пл},$$

причем для окислов и силикатов $a=0,80$. Для обжига высокоогнеупорных изделий из окислов в среднем требуются температуры от 1650 до 2500°С с выдержкой при максимальной температуре от 1 до 3—5 ч.

2. Изделия из окиси алюминия

Изделия из окиси алюминия (глинозема) получили значительное распространение в исследовательской практике и в металлургии цветных и редких металлов.

Изделия из Al_2O_3 используются для изготовления емкостей, в которых успешно могут плавиться следующие металлы: Mg, Al, Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Pd, Pt, Cu, Ag, Au, Cd, Ca и Si. Возможность плавки столь большого числа элементов в сосудах из Al_2O_3 объясняется ее высокой химической стойкостью и огнеупорностью. Глинозем интенсивно начинает испаряться только при температуре 3000°С и достаточно устойчив против углерода до 1800°С. Он обладает высокой температурой деформации под нагрузкой 0,196 МПа/м² (до 1900°С), ему присуща исключительно высокая прочность, значительно превосходящая таковую у большинства огнеупоров.

Глинозем в производстве может быть получен в различных кристаллических модификациях.

Глинозем, полученный при температурах ниже 1200°С, существует в форме $\gamma-Al_2O_3$, эта кристаллическая форма при дальнейшем нагреве от 1200 до 1450°С полностью переходит в форму $\alpha-Al_2O_3$, последняя является устойчивой до температуры плавления и при 2050°С плавится в жидкость, не изменяя своей кристаллической структуры. Глинозем $\alpha-Al_2O_3$ отвечает природному минералу корунду, поэтому изделия из α -глинозема назы-

ваются корундовыми. Если в глиноземе присутствуют небольшие количества щелочных соединений, то возникает форма β - Al_2O_3 , последняя устойчива до температуры 1600°C , при которой она превращается в α - Al_2O_3 .

Изделия, изготовленные из плавленного глинозема называются алундовыми.

Производство изделий из окиси алюминия

Технология подготовки массы состоит из следующих стадий:

1. Дополнительного обжига технического глинозема при температуре выше 1500°C с целью полного превращения γ - Al_2O_3 (плотность $3,6\text{ г/см}^3$) в стабильную форму α - Al_2O_3 (плотность $3,99\text{ г/см}^3$).

2. Измельчения в шаровых мельницах до частиц порядка $1\text{—}3\text{ мкм}$. Особо тонкое измельчение требуется для понижения температур спекания окисла. При этом добавка Al_2O_3 должна иметь частиц меньше 1 мкм не менее 80% . Высокая дисперсность Al_2O_3 способствует формуемости массы и обеспечивает хорошее спекание корундовых изделий.

3. Приготовления суспензии из обожженного и измельченного глинозема с добавками минерализаторов. Суспензия используется для шликерного литья изделий в гипсовые формы.

4. Обжига готовых отливок при температуре порядка $1600\text{—}1750^\circ\text{C}$. Величина добавки минерализатора зависит от его природы и колеблется от $0,5$ до 5% . Наиболее эффективно действует добавка $1\text{—}2\%$ TiO_2 , которая способствует рекристаллизации глинозема и образует с ним твердые растворы типа $\text{TiO}_2\text{—Al}_2\text{O}_3$ и деформирует кристаллическую решетку α - Al_2O_3 . При этом температура спекания корундовых изделий понижается до 1500°C .

Корундовые изделия в зависимости от их размера, формы и назначения изготавливают несколькими способами. Тигли, трубки и другие тонкие изделия различных форм и фасона изготавливают литьем шликерных водных масс в гипсовые формы.

Из приготовленных масс глинозема с органическими пластификаторами корундовые изделия изготавливают прессованием, прошивкой через мундштуки или отливкой под давлением в формы.

Для изготовления крупных изделий используют глиноземистые массы, приготовленные с наполнителем из глиноземистого шамота или плавленого корунда, при этом наполнитель составляют из гранул различного размера. В этом случае изготовление изделий производят полусухим прессованием или набивкой форм пневматическими устройствами.

Приготовление литейных шликеров

Так как при измельчении Al_2O_3 в шаровых мельницах он загрязняется железом, то последнее удаляют отмывкой водным 8%-ным раствором соляной кислоты. Затем Al_2O_3 отмывают водой от HCl и фильтрованием отделяют от воды. Полученный твердый остаток (кэк) вновь затворяется водой до содержания в шликере последней не менее 20%.

Для удаления газовых включений данный шликер подвергают вакуумной обработке в течение 10—15 мин при разряжении 15—20 мм рт. ст. Плотность шликера доводят до 1,8—2,2 г/см³. Если за 2 ч в нем не будет признаков коагуляции и отстаивания, такой шликер пригоден для литья изделий. Шликерное литье является наиболее целесообразным способом изготовления мелких и тонких полых изделий.

При литье керамических изделий из водного шликера получается наиболее плотная укладка частиц корунда, чего невозможно достигнуть при других способах формования изделий, даже при давлении 2000 кгс/см². Кроме того, данные изделия обладают свойством спекаться при меньших температурах обжига, чем корундовые изделия, полученные другими способами формования. Литые изделия на шликере получают удовлетворительной плотности с объемной массой 2,4 г/см³; при обжиге они получают усадку до 14—15%.

Для повышения прочности отливок, требующих дополнительной механической обработки, в шликер добавляют 5% мочевиноформальдегидной смолы. Упрочняющее действие смолы достигается нагреванием извлеченного из гипсовой формы изделия при 100° С в течение часа.

Отлитые и подсушенные изделия направляют на обжиг.

Обжиг корундовых изделий производится по описанному выше режиму в течение 1—2 ч при температуре 1700° С.

Обожженные изделия получают достаточной плотности, имея закрытую пористость 3%, а объемную массу 3,85 г/см³, предел прочности на изгиб достигает 147,2—196,2 МН/мм² (1500—2000 кгс/см²). Обжиг изделий из Al₂O₃ может быть организован в пламенных печах с использованием газообразного топлива и дутья обогащенного кислородом, позволяющего получить температуру в печи до 2000° С. Кроме того, обжиг изделий из Al₂O₃ часто осуществляют в электрических печах сопротивления с использованием нагревательных элементов сопротивления из углерода или графита, при этом возможно получение температур до 2500—2600° С.

В вакуумных печах или с нейтральной средой применяют металлические нагревательные элементы сопротивления из молибдена для 1700—1900° С и из вольфрама до 2500—2700° С.

3. Изделия из окиси циркония

Цирконий довольно широко распространен в природе. Содержание циркония в земной коре выше таких известных и получивших значительное распространение в технике металлов, как медь, никель и бериллий вместе взятые. Однако скопления его соединений в виде промышленных месторождений встречаются значительно реже.

Наиболее часто в природе встречаются соединения циркония в виде минералов: циркона ZrO₂·SiO₂ и бадделента ZrO₂. Циркон является силикатом, соединение химически достаточно прочное и трудно поддается разложению. Его температура плавления равна 2430° С, поэтому и циркон, как огнеупор, представляет значительный интерес. Из циркона получают окись циркония ZrO₂. Бадделент ZrO₂, природная загрязненная примесями окись циркония, содержание которой в бадделеите иногда достигает 99%, но в рудном бадделентовом концентрате обычно содержится до 70—90%.

Окись циркония обладает высокой температурой плавления (2950° С), температура кипения ZrO₂ равна 4300° С. Высокая огнеупорность окиси циркония позволяет организовать производство огнеупорных изделий

для плавления редких и весьма ценных металлов, таких как платина, и ее спутников: Rh, Pd, Os, Ru, Ir, которые имеют температуры плавления от 1770—1950 до 2350—2500° С.

Тигли окиси циркония выдерживают более 30 плавов платины. Сталеплавильная печь, футерованная огнеупорами из ZrO_2 , выдержали 1200 плавов без ремонта. Окись циркония довольно устойчива против углерода до 1900° С, а после 2200° С она разлагается и образует карбид циркония. Поэтому в изделиях из ZrO_2 можно успешно проводить плавку металлов в печах с угольными нагревательными элементами с нагревом до 2000° С. Теплопроводность изделий из ZrO_2 равна 1,59 Вт/(м·К), что позволяет ее использовать в качестве тепловой изоляции в высокотемпературных печах.

Химической особенностью ZrO_2 является амфотерность: в кислой среде она проявляет щелочные свойства и, наоборот, в щелочной среде взаимодействует в качестве кислоты и образует соли соответствующих щелочей. Из физических свойств очень важным является полиморфизм ZrO_2 , т. е. модификационные превращения кристаллической структуры в зависимости от температуры. Переход из одной кристаллической формы ZrO_2 в другую связан со значительными объемными изменениями, что приводит к разрушению готовых изделий. Эти превращения обратимы, переход из одной кристаллической формы в другую сопровождается изменениями объема до 8%. У окиси циркония возникают следующие кристаллические формы: моноклинная, устойчивая при температуре ниже 1100° С; тетрагональная, устойчивая при температуре от 1100 до 1900° С; выше 1900° С, до расплавления — тригональная форма.

В производстве огнеупорных изделий из ZrO_2 возникла необходимость получения кристаллической формы, устойчивой против объемных изменений. Было установлено, что устойчивую форму ZrO_2 обеспечивают окислы щелочноземельных металлов CaO, MgO и др., катионы которых имеют близкий к Zr^{4+} ионный радиус. Наиболее активным стабилизатором является CaO и в меньшей степени MgO, поэтому добавка извести получила более широкое применение.

Термическая обработка изделий тоже содействует стабилизации свойств ZrO_2 . При температурах обжига 1700—1750° С и выше до 2000° С достигается более пол-

ная стабилизация свойств изделий из ZrO_2 . Во время обжига, добавки стабилизаторов образуют с ZrO_2 твердые растворы и создают достаточно устойчивую при всех температурах кристаллическую форму — кубическую.

Для производственного получения устойчивой формы изделий из ZrO_2 достаточны добавки CaO от 3% до 10% (по массе) или 10—25% (моля). Присутствие посторонних примесей, в особенности SiO_2 и Al_2O_3 , резко понижают стабилизирующее действие CaO и MgO , при этом резко падает термостойкость и механическая прочность изделий из ZrO_2 .

Таким образом, для изготовления огнеупорных изделий требуется чистая ZrO_2 , содержащая 0,5—1% примесей. Для производства термически стойких изделий из ZrO_2 обязательна предварительная стабилизация ее. С этой целью окись циркония смешивают со стабилизирующей добавкой CaO , с которой тщательно измельчают до тонкого состояния. После измельчения из смеси изготовляют брикеты, которые направляют на стабилизирующий обжиг при температурах от 1700 до 1900° С. Обожженный материал вновь подвергается дроблению и измельчению до частиц от 0,5 мм до нескольких микрон, в зависимости от размера и формы изготавливаемых изделий.

Для придания массе пластичности и формуемости к измельченному материалу добавляют пластификаторы $ZrCl_4$, $MgCl_2 \cdot H_2O$ или $Zr(OH)_4$. Кроме того, в качестве связующих добавок используются декстрин, патока или другие органические вещества. Хорошим связующим является очень тонко измельченная ZrO_2 .

Особенно тонкое измельчение обожженных брикетов до 1—10 мкм необходимо при изготовлении изделий литьем из шликера. Высокая тонкость материала требуется для получения устойчивого шликера, т. е. не оседающих суспензий в течение 2—3 ч выдержки.

Указанными в начале данной главы методами: прессованием масс или отливкой из шликера изготавливают изделия. Сформованные изделия сушат, затем их направляют на обжиг в слабоокислительной среде. В зависимости от характера и свойств массы, а также формы и размеров изделий обжиг их проводится при температурах от 1700 до 2400° С. Для повышения термостойкости крупных изделий в шихту вводится материал с величиной зерен до 6 мм.

Высокая термостойкость изделий из окиси циркония достигается приготовлением шихты из 50—70% плавленной ZrO_2 , стабилизированной 5—10% CaO , и 50—30% плавленной нестабилизированной ZrO_2 .

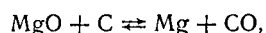
4. Изделия из окиси магния

Магний распространен в природе широко и по содержанию в земной коре он занимает восьмое место (после O, Si, Al, Fe, Ca, Na и K). В основном он распространен в виде $MgCO_3$ и $MgCl_2$. Углекислые соли магния находятся в твердой оболочке земли. Хлорид встречается в твердой оболочке в форме солевых отложений, а также в водах озер, морей и океанов. Из рапы (растворов) лиманов и озер широко организована добыча MgO . Из карбоната или хлорида получается чистая MgO , используемая для изготовления высокоогнеупорных изделий.

При прокаливании чистые гидрокарбонат магния $4 MgCO_3 \cdot Mg(OH)_2 \cdot 4 H_2O$ или $MgCl_2 \cdot 6 H_2O$ разлагаются до MgO .

Окись магния очень тугоплавка, ее температура плавления равна $2800^\circ C$. Температура кипения MgO в окислительной среде выше $3000^\circ C$. Изделия из окиси магния выдерживают температуру до $2200^\circ C$.

В контакте с углеродом MgO начинает интенсивно испаряться уже при $1500^\circ C$, так как она восстанавливается по реакции



при этом магний получается в парообразном состоянии и уходит из сферы реакции, а затем вновь окисляется. Температура кипения Mg равна $1120^\circ C$. Этим объясняется интенсивная коррозия изделий из MgO в восстановительной среде.

Изделия из MgO обладают высокой огнеупорностью, но термостойкость у них низкая. Это объясняется значительным температурным коэффициентом расширения черепка из MgO . Изделия из MgO широко используют для плавки урана и его сплавов, железа, Ni, Co, Cu, Al, Ag, Au, Mg, Zn и Sn, при этом не наблюдается взаимодействия указанных металлов со стенками тигля. Обладая незначительной пористостью, изделия из MgO хорошо выдерживают плавки хлористых солей.

5. Изделия из окиси бериллия

Бериллий относится к редким элементам. В земной коре он встречается в виде минералов берилла $3\text{BeO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 6\text{SiO}_2$, хризоберилла BeAl_2O_4 ($\text{BeO} \cdot \text{Al}_2\text{O}_3$) фенакита Be_2SiO_4 ($2\text{BeO} \cdot \text{SiO}_2$) гельвина $\text{Mn}(\text{Be} \cdot \text{SiO}_4)_6\text{S}_2$ и других соединений.

Прозрачные кристаллы берилла, в зависимости от их окраски и чистоты, используются для изготовления драгоценных камней изумруда, аквамарина, воробьевита и гелеодора. Для получения чистой окиси бериллия широко используется берилл и меньше остальные минералы.

Месторождения берилла обычно связаны с породами, содержащими слюды и полевой шпат, в которых количество берилла незначительно. Его добыча связана с обогащением, при этом в концентрате содержание BeO достигает 10—12%. Часто этому минералу сопутствуют окислы щелочей Na_2O , $\text{K}_2\text{O} \cdot \text{Li}_2\text{O}$, а также Rb_2O и Cs_2O , иногда присутствует He . Окись бериллия плавится при 2600°C , а испаряется при 4300°C , поэтому BeO представляет значительный интерес для производства высокоогнеупорных и чистых изделий. Огнеупорные изделия из BeO широко используют для плавки радиоактивных и других редких металлов (Be , Th , U , La , Ce). Они достаточно устойчивы при плавке щелочей и карбонатов и слабо стоят против кислых шлаков.

Изготовление изделий из окиси бериллия

На рост кристаллов окиси бериллия значительно влияет температура, поэтому необходим предварительный обжиг BeO при температуре $1300\text{—}1400^\circ\text{C}$. Обожженную окись бериллия подвергают измельчению в шаровой мельнице с целью разрушения кристаллических сростков. Измельченная масса освобождается от попавших частиц железа шаров и футеровки мельницы промывкой 3—5%-ным раствором соляной кислоты. Из массы для литья изделий изготавливают шликер, который должен обладать кислой реакцией $\text{pH}=4,5\text{—}5,0$, плотностью $1,9\text{—}2,0\text{ г/см}^3$ и содержать воды 33—37%.

Отлитые изделия после извлечения из гипсовых форм сушат и обжигают. Обжиг проводят в две стадии: вначале с медленным подъемом температуры до 1000°C , а затем нагрев ускоряют и температуру повышают до 1800°C , при которой изделия выдерживают 30 мин.

Используется также способ прессования изделий из окиси бериллия. Для этого подготовленную указанным выше способом BeO тщательно смешивают со связующим. В качестве связующего применяют водорастворимую синтетическую смолу из этиленгликоля с молекулярной массой около 4000. К окиси бериллия добавляют 14% сухой смолы и 20% воды. После смешения и подсушки массы при 80°C , она протирается через сито с размером ячейки в 1 мм, окончательно подсушивается при $100\text{—}120^\circ\text{C}$ и направляется на прессование. Для улучшения прессуемости массы в нее добавляют около 0,1% смазочного масла. Изделия прессуют в стальных прессформах под давлением $137\text{—}196\text{ МН/м}^2$. Свежеотпрессованные изделия получаются очень прочными и могут обрабатываться на токарном станке. Обжиг ведется двухстадийно по указанному выше режиму. Изделия из BeO получают также методом прессования прошивкой массы через мунштук. Дальнейшая обработка, полученных изделий, аналогична ранее указанной.

Иногда для получения изделий из BeO применяют способ набивки массы в форму. В этом случае приготавливают массу из $\frac{1}{3}$ сырой, необожженной BeO и $\frac{2}{3}$ обожженной и измельченной окиси бериллия. Эту смесь увлажняют 7—10% H_2O и используют для набивки соответствующих изделий. Далее они подвергаются сушке и обжигу по указанному ранее способу.

Глава XXXI

ИЗДЕЛИЯ ИЗ УГЛЕРОДА

В производстве углеродистых изделий используют углерод и его кристаллическую модификацию графит как в чистом виде, так и в смеси с другими материалами. При этом графит может быть природным, добытым из соответствующих месторождений или искусственно, полученным в производстве из обычных углей, путем графитирования углерода при высоких температурах. В металлургии легких металлов широко используются углеродистые и графитированные изделия. Например, все мировое производство алюминия (электролиз) базируется на футеровочных материалах на основе углерода.

Мировое производство алюминия составляет примерно 12 млн. т/год, при этом на каждую тонну алюминия расходуется до 0,6—0,55 т углеродистых изделий, что составляет в год до 6,8—7 млн. т. Без углеродистых материалов немыслима работа дуговых электропечей, где угольные и графитированные электроды служат для подвода электроэнергии в рабочее пространство печи.

Угольные блоки применяются для проводящих электрический ток подлин алюминиевых электролизеров (ванн) и дуговых печей. Их боковая футеровка выполняется из угольных блоков. Такие блоки также используются для подлин доменных печей. Плавка в индукционных печах металлов с высокой электропроводностью, для повышения к. п. д. установки, осуществляется в графитированных тиглях. Графитированные тигли не пропитываются расплавленными металлами, поэтому потери при плавке серебра и золота уменьшаются до нуля.

Металлотермическое получение U, Th, Be и других редких металлов производится в графитированных тиглях. Для плавки легких и других цветных металлов применяются графитошамотные тигли.

1. Виды угольных и графитированных изделий

Угольные и графитированные, прессованные и обожженные изделия

К ним относятся электроды для дуговых электропечей, нагревательные элементы для электропечей сопротивления, различные футеровочные блоки, плиты и другие изделия более сложной формы. Графитированные изделия широко используются в металлургии, энергетике и химии. В порошковой металлургии изготавливаются графитированные прессформы, матрицы, пуансоны и обоймы. Широко используются графитированные литейные формы для непрерывного литья, питатели для разливки металлов, кокпиль, тигли для индукционных бессердечниковых печей при плавке солей и других материалов не проводящих электрического тока (шлаков), графитированные элементы для низкотемпературных теплообменников при агрессивных средах (кислотах), экраны для вакуумных печей и угольные трубы для электрофильтров.

Электродная масса

Электродная масса предназначена для изготовления самообжигающихся непрерывных электродов для дуговых электропечей и непрерывных самообжигающихся анодов для алюминиевых электролизеров, для набивки подин и забивки швов при монтаже блоков в подинах дуговых электропечей и алюминиевых ванн.

Изделия из углерода с добавками огнеупорных материалов:

1. Карборундовые изделия на основе карбида кремния:

а) рефраксовые — рекристаллизованные, на органической связке;

б) карбофраксовые — глина, стекло и другие неорганические связки.

2. Графитошамотные изделия:

а) тигли для плавки легких и цветных тяжелых металлов и их сплавов;

б) реторты и муфели для дистилляции цинка и других металлов;

в) изложницы для получения биметаллических слитков (медь — железо), пробки и стаканы для ковшей при разливке расплавов.

2. Свойства углеродистых и графитированных изделий

Угольные и особенно графитированные изделия обладают высокой стойкостью по отношению к различным расплавленным шлакам и многим металлам, а также к хлористым и втористым расплавленным солям. При обычной температуре они хорошо противостоят воздействию всех кислот, щелочей и соляных растворов. Углеродистая футеровка имеет преимущества не только вследствие химической стойкости по отношению к агрессивным средам при высокой температуре и давлении, но также ввиду высокой стойкости против разрушения от резких изменений температуры и истирающего действия нагреваемых материалов. Стойкость и механическая прочность углеродистых материалов обуславливается высокой твердостью, теплопроводностью и малым коэффициентом линейного расширения. Графитированные изделия легко поддаются механической обработке: точке, распиливанию, сверлению, строжке и шлифовке.

Способы получения углеродистых изделий

Технология производства углеродистых материалов охватывает изготовление угольных, коксовых, графитовых, графитированных и графито-шамотных изделий.

Угольными изделиями называются электроды, блоки, футеровочные плиты и другие изделия, которые изготавливаются из антрацита. Они обычно содержат много золы, обладают высоким электросопротивлением, плохо проводят тепло и менее стойки по отношению к кислороду воздуха при повышенных температурах по сравнению с графитированными изделиями.

Коксовые изделия изготавливают из малозольных коксов, поэтому они содержат золы меньше 1%, но тоже имеют высокое электрическое сопротивление, малую теплопроводность и менее стойки к кислороду воздуха при повышенных температурах.

Графитовые изделия получают из природного графита. В СССР пока не обнаружены крупные месторождения графита, поэтому природный графит в основном используют в качестве добавки при изготовлении угольных изделий.

Графитированные изделия получают из малозольного кокса, а также из нефтяного или пекового коксов специальной термообработкой угольных обожженных изделий в печах при температурах выше 2000° С.

Графитированные изделия обладают высокой электропроводностью, теплопроводностью, более стойки по отношению к кислороду воздуха при повышенных температурах и малозольны. У них отсутствует высокая твердость угольных изделий, поэтому к ним приложим любой вид механической обработки.

3. Исходное сырье и его свойства

Углерод является единственным и основным материалом, из которого изготавливают электроды, подовые блоки для печей и другие изделия, проводящие электрический ток. Углерод обладает исключительными технологическими и тепловыми свойствами:

- 1) не плавится при температурах, применяемых в промышленной металлургии;
- 2) окислы его газообразны и легко удаляются из зоны реакции;
- 3) хорошо проводит электрический ток;
- 4) инертен к химическому воздействию многих продуктов плавки и агрессивных сред.

Для производства угольных изделий используют антрацит и термоантрацит.

Антрацит должен быть высокого качества и иметь следующие показатели:

Плотность, кг/м ³	1360—1500
Содержание серы, %	<2,5
Содержание золы, %	<4,0

Термоантрацит является продуктом тепловой обработки в специальных шахтных печах при температуре порядка 1100° С. Термообработка антрацита повышает его электропроводность, термостойкость и механическую прочность. Он должен иметь следующие показатели:

Содержание:	
влаги, %	<0,2
зола	5,0
серы	1,9
Выход летучих, %	<0,3
Удельное электросопротивление, Ом·мм ² /м	1000
Размер кусков, мм	25—100

Нефтяной кокс используют для изготовления прессованных и обожженных анодов или анодной массы для самообжигающихся непрерывных анодов, применяемых в алюминиевых электролизерах, а также заготовок для графитирования. Нефтяной кокс получают коксованием тяжелых нефтяных остатков при нефтепереработке. Он должен обладать следующими свойствами:

Содержание, %, не более:	
влаги	3
зола	0,3
серы	1,0
окиси железа	0,08
окиси кремния	0,07
Выход летучих веществ, %, не более	7,0
Плотность (после прокаливания при 1300° С в течение 5 ч), кг/м ³	2,04·10 ³
Механическая прочность на истирание, %	13,0

Каменноугольный пек применяют в качестве связующего вещества и пластификатора, обеспечивающего формуемость углеродистой массы при прессовании.

При обжиге углеродистых изделий каменноугольный пек спекается и связывает зернистый наполнитель массы в прочные блоки. Данный пек получают из смол коксового производства, путем отгонки из этих смол легких и тяжелых масел. Получаемый в остатке пек в зависимости от степени отгонки антраценового масла разделяется на твердый, средний и мягкий. Это свойство пеков определяется температурой их размягчения.

В электродной промышленности СССР широко используется средний пек с температурой размягчения 65—75° С следующего состава, %: 33 свободный углерод; 60—65 летучих; не более 0,9 зола; не более 0,5 влаги.

Иногда для понижения температуры размягчения массы добавляют мягкий пек или антраценовое масло.

4. Производство углеродистых изделий

Изготовление электродов и других угольных и графитированных изделий является довольно сложным технологическим процессом. От начала производства до выдачи готовых изделий требуется от 2—3 до 4 мес.

Технология производства указанной продукции может быть представлена схемой, приведенной на рис. 183.

Начинается производство углеродистых изделий с предварительного дробления сырья до кусков 40—50 мм. Затем следует прокатка дробленых материалов с целью удаления влаги, летучих, повышения их плотности и электропроводности.

Прокаливание антрацита, нефтяного и пекового коксов производится в ретортных, в шахтных электрических или во вращающихся

ся трубчатых печах. В данных аппаратах сырье подвергается постепенному подогреву, сушке и прокаливанию при конечной температуре 1350°С. Прокаленные материалы должны обладать определенной электропроводностью: сопротивление нефтяного кокса должно составлять не более 650 Ом·мм²/м, а термоантрацита не более 1000 Ом·мм²/м.

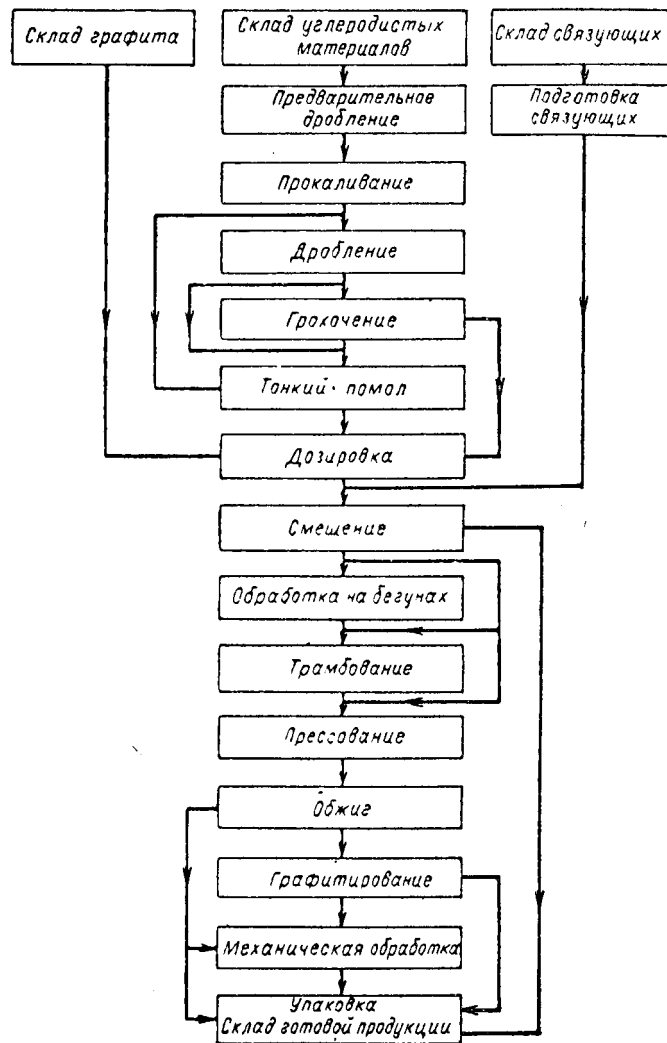


Рис. 183. Схема производства углеродных изделий

Измельчение прокаленных материалов

Прокаленные материалы направляют на измельчение в шаровые или стержневые мельницы. Задача этой стадии производства изготовить измельченный продукт определенного зернистого состава, так как гранулометрический состав шихты оказывает решающее влияние на качество готовой продукции. Шихта, состоящая из частиц разного размера, при прессовании обеспечивает плотную укладку углеродистой массы, так как в изделии образуется объемная решетка из крупных зерен, между крупными зернами объемы заполняются мелкими зернами и связующим пеком. Обычно рекомендуется следующий гранулометрический состав материалов:

Для термоантрацита:				
мм	0—1	1—4	4—8	8—10
%	20	40	30	10
Для нефтяного кокса:				
мм	0,5—0,15	0,15—0,09		0,09—0,07
%	10	30		60

Составление углеродистой массы перед прессованием

В зависимости от качества и назначения углеродистых изделий подбирают вещественный и зернистый составы массы, направляемой на смешение. В состав шихты для изготовления угольных электродов и фасонных изделий входят следующие материалы:

	Угольные, %	Графитированные, %
Термоантрацит или антрацит	45	—
Оборотные материалы	32	—
Графит (природный)	3	2
Нефтяной кокс	—	73
Связующее	20	25

Составленную шихту подвергают тщательному смешению в машинах, обогреваемых паром (рис. 184). Одновременно с загрузкой зернистой массы в смеситель загружают предварительно расплавленный каменноугольный пек. При смешении температура углеродистой массы должна быть выше температуры размягчения каменноугольного пека на 50—70° С. При таком условии происходит хорошее смачивание и смешение связующего с сухой зернистой массой шихты и получается однородная тестообразная углеродистая масса, пригодная для прессования. В зависимости от качества и количества связующего, типаготавливаемой массы и режима нагрева ее в смесительной машине емкостью до 2000 л на смешение требуется от 75 до 110 мин.

Приготовленную таким способом углеродистую массу направляют в отделение прессов для формования углеродистых изделий. На прессование масса поступает в подогретом виде, т. е. в размягченном состоянии, с температурой на 20—30° С выше температуры размягчения связующего компонента (пека).

Прессование изделий

Прессование углеродистой массы осуществляется на гидравлических прессах мощностью от 1000 до 9000 тс.

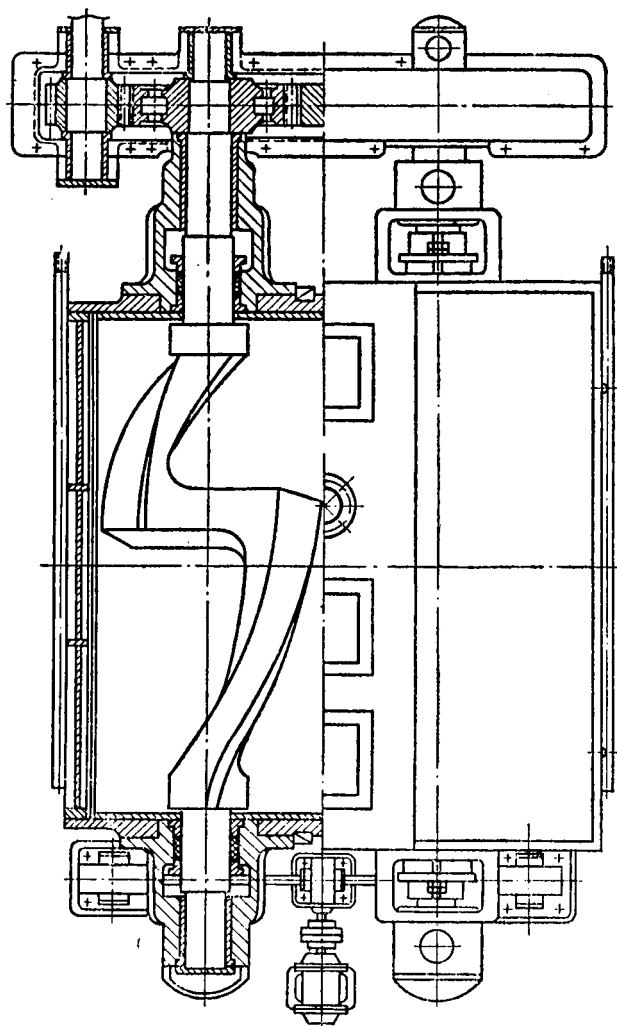


Рис. 184. Двухвальная смесительная машина

В современных гидравлических прессах рабочее давление жидкости достигает 20—40 МН/м², а в некоторых случаях 49—59 МН/м². В зависимости от назначения и величины изделий прессование осуществляют либо на прессах с глухими матрицами, либо на прошивных прессах через мунштук. Для монтажа стен и подов алюминиевых электролизеров (ванн) глухим прессованием изготавливают плиты: для стен размером 115×400×550 мм, подовые блоки и аноды размером 400×400×550 мм.

Прошивкой через мунштук прессуют более длинные изделия, при этом форма поперечного сечения мунштука определяет форму поперечного сечения изделия. Прошивкой прессуют подовые блоки размером 400×550×1200 мм и плиты размером 115×400×1000 мм для стен алюминиевых ванн. Для подов электродуговых и доменных печей прошивкой получают блоки размером 3200×410×400 мм и 3200×550×550 мм.

Данным способом прессуют электроды для дуговых электропечей длиной от 1,5 до 2,5 м и диаметром от 100 до 1000 мм для угольных от 50 до 900 мм и для графитированных.

Обжиг изделий

Отпрессованные изделия направляют на обжиг в многокамерные кольцевые печи. Обжиговая печь состоит из 20—30 последовательно связанных и соприкасающихся между собой камер, которые соединены каналами для перехода газов из одной камеры в другую.

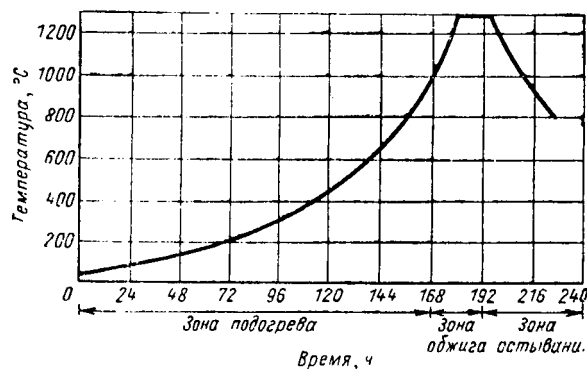


Рис. 185. График режима обжига углеродистых изделий

Камеры расположены в два ряда, образуя замкнутую систему, работающую по круговому циклу. Они углублены в землю так, что их свод расположен на уровне пола цеха. Длина печи по замкнутой линии достигает 42 м, ширина 7,8—8 м, высота (глубина) 5—5,5 м. Эти печи работают на газообразном топливе с подвижной зоной огня. Система газоходов расположена вдоль камер и позволяет подключать любую камеру к питанию газом и воздухом. Каждая камера разделена стенками на три огневых шахты с горелками и на несколько кассет (муфель) для закладки обжигаемых изделий.

Угольные изделия загружают следующим способом: отпрессованные блоки устанавливают в кассеты колоннами на расстоянии 20—30 мм одна от другой, а от стен муфеля на расстоянии 30—40 мм. Промежутки между ними заполняют засыпкой. Заложённый слой блоков тоже покрывают засыпкой слоем в 40—50 мм для закладки на него следующего слоя блоков. Самый верхний подсводный горизонт закрывают засыпкой в 200—300 мм, засыпка покрывается слоем кирпича для защиты от сгорания. Затем камеры накрывают съёмным сводом и подключают к ним обогрев. В качестве засыпки применяют антрацитовую или коксовую мелочь, часто используется кварцевый крупнозернистый песок.

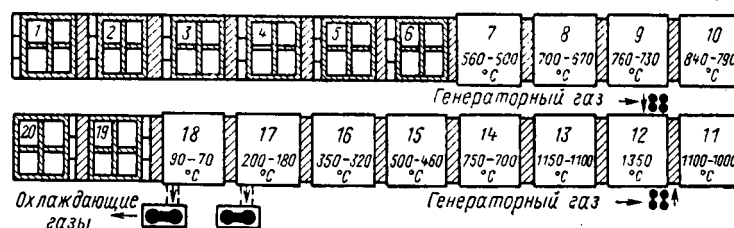


Рис. 186. Схема многокамерной кольцевой печи непрерывного действия

Углеродистые изделия обжигаются по строго определенному режиму, т. е. с весьма медленным подъемом температуры и столь же замедленным охлаждением, поэтому камерную печь делят на три зоны: подогрева, обжига и охлаждения. График обжига изделий показан на рис. 185. Обжиг в многокамерной печи (рис. 186) проводится следующим образом: в центре группы выделенных камер, от 7 до 18, например, камера 12 находится на обжиге, в эту камеру подается топливный газ и воздух, температура в камере поднимается до 1300—1380°С. Перед камерой обжига по ходу движения огня расположены камеры от 7 до 11 с уже обожженными изделиями, которые медленно охлаждаются и по мере охлаждения выгружаются. Охлаждение их осуществляют воздухом, который, проходя путь от камеры 7 до камеры 11, нагревается до температуры 1000—1100°С и горячим поступает в камеру обжига 12.

Перед работающей камерой расположены камеры от 13 до 18, загруженные сырыми изделиями, через которые проходят горячие продукты сгорания, постепенно нагревая и подготавливая изделия к обжигу, сами продукты сгорания охлаждаются до 100—120°С и выходят в трубу. Камеры от 19 до 6 готовятся к выгрузке обожженных изделий и загрузке изделий подлежащих обжигу. После суточной выдержки изделий при максимальной температуре обжиг переводят в следующую камеру 13, затем в 14 и т. д.

5. Производство графитированных изделий

Графитирование представляет собой термическую обработку предварительно обожженных угольных изделий. При высокотемпературном нагреве угольных блоков происходит переход углерода

из одной кристаллической модификации в другую — графит, связанный с ростом кристаллов его от 10^{-7} до 10^{-4} см. Этот процесс сопровождается изменением физических и химических свойств изделия. У графитированных изделий повышается стойкость к окисляемости кислородом воздуха на $100\text{—}200^\circ\text{C}$ по сравнению с угольными изделиями. Значительно уменьшается электросопротивление графитированных изделий — до $8\text{—}12\text{ Ом}\cdot\text{мм}^2/\text{м}$ по сравнению с $35\text{—}70\text{ Ом}\cdot\text{мм}^2/\text{м}$ для угольных и коксовых. Теплопроводность графитированных изделий почти в 10 раз выше, чем у коксовых и угольных. Плотность у графитированных изделий повышается на $5\text{—}10\%$. Отличительным свойством этих изделий по сравнению с угольными является высокая механическая обрабатываемость. Для перевода угля в графит требуется нагрев до $2200\text{—}2500^\circ\text{C}$, так как при данных температурах происходит рекристаллизация углерода. Дальнейший подъем температуры до 3000°C позволяет удалить (испарением) из изделий значительное количество зольных примесей и получить изделия высокого качества и чистоты.

Технология графитирования

Процесс графитирования совершается в электрических печах сопротивления прямого нагрева, когда сами изделия превращаются в элементы сопротивления, в которых непосредственно развивается тепло, обеспечивающее нагрев их до 2500°C и рекристаллизацию угля в графит. Печи для графитирования в плане представляют прямоугольник шириной от 3,5 до 4 м и длиной от 8 до 20 м. Ширина печи зависит от длины графитируемых изделий. Масса загруженных изделий по длине печи с засыпкой промежутков между ними называется керном. Длина печи определяется производительностью, в более длинных печах повышается коэффициент использования электроэнергии. Эта зависимость показана в табл. 20.

Т а б л и ц а 20

Влияние емкости печи на тепловой к. п. д.

Длина керна печи, м	Масса загрузки, кг		Удельный расход энергии на керна печи, кВт·ч	Тепловой к. п. д.
	электро- дов	пере- сыпки		
4,558	4 970	2700	7310	34,7
9,078	10 990	4640	5620	41,8
17,892	20 310	7665	5000	44,5

Графитировочная печь состоит из двух продольных шамотных стен толщиной 250 мм, которые могут быть разборными или стационарными. Торцовые стены строятся толщиной от 800 до 1000 мм. В торцовые стены вмонтированы электроды, подводящие электрический ток к керну печи. Данные электроды могут быть угольными или графитированными, но обязательно с охлаждаемыми токопроводами (рис. 187).

Заделка электродов в торцовые стены должна выполняться тщательно и исключать подсос воздуха в печь через щели между

электродами и огнеупорной кладкой. Важно, чтобы способ заделки электродов в торцовую стенку печи позволял, без разборки стены, быстро заменить сгоревший электрод новым. Такое решение показано на рис. 188. Подвод энергии к этим электродам осуществляют переносными пакетами медных шин, переносными от одной печи к другой с помощью крана. Необходим хороший контакт между медными токоподводами и электродами, так как при плохом контакте потери энергии достигают 20% и выше.

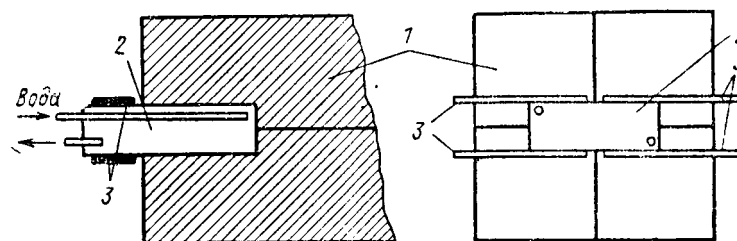


Рис. 187. Охлаждающая коробка, заделанная в электрод:
1 — электрод; 2 — коробка; 3 — медная шина

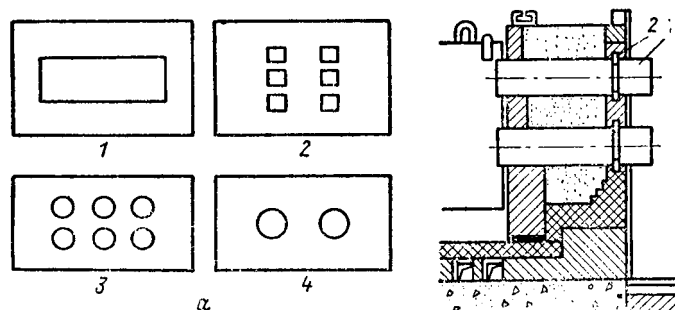


Рис. 188. Токоподводящие узлы:

a — конструкция токоподводящих пакетов электродов (1 — блок из угольных электродов; 2 — блок из прямоугольных графитированных электродов с плотностью тока 5–8 А/см²; 3 — то же, из цилиндрических; 4 — графитированные электроды с плотностью тока 10–12 А/см²); б — заделка электродов в стенке печи (1 — электрод; 2 — сальниковые уплотнения)

Свода печь не имеет, он заменяется толстым слоем засыпки на изделия. Под печи с корытообразным углублением, которое заполняется навариваемой смесью из углеродистых материалов и песка. Эта смесь обеспечивает повышенное тепловое и электрическое сопротивление пода. Так как набивка пода в работе теряет свои изоляционные свойства, то после одной или двух кампаний она заменяется новой. Под подом предусматривают каналы для охлаждения подины воздухом. Охлаждение пода понижает его электропроводность, что снижает потери энергии за счет утечки тока.

Перед пуском печи на набивную подину производят равномерную засыпку из зернистого металлургического кокса с величиной зерен от 6 до 10 мм. На нее укладывают изделия в длину параллельно торцовым стенкам. Расстояние между рядом изделий и торцовой стенкой печи равно 200—250 мм. Расстояния между рядами изделий в зависимости от их размера разные и чем тоньше изделие,

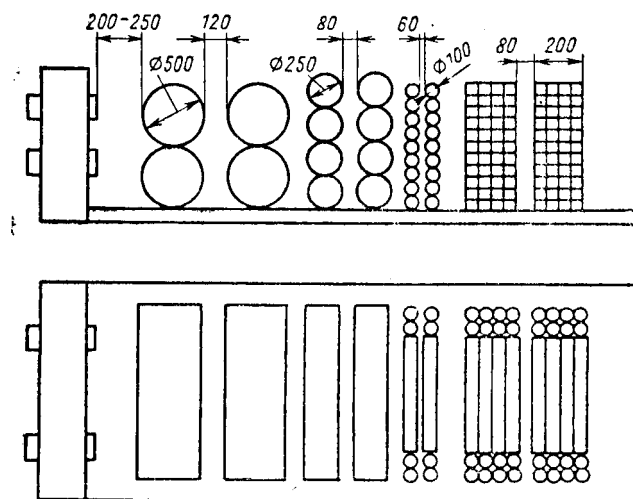


Рис. 189. Схема укладки электродов в печи

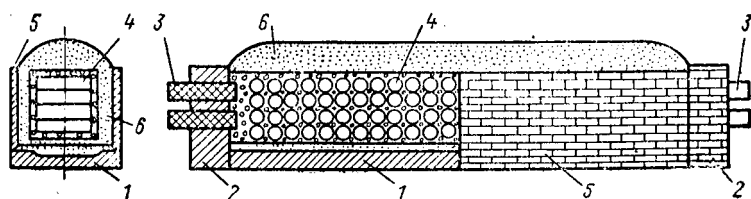


Рис. 190. Схема графитированной печи:

1 — корыто; 2 — торцовая стена (токоподвод); 3 — электрод; 4 — графитируемые изделия; 5 — боковая стенка; 6 — теплоизоляционная шихта

тем меньше промежутков между ними. Способ закладки изделий в печь на графитацию показан на рис. 189.

Фиксирование расстояний между рядами обеспечивается шаблонами, а промежутки между этими рядами заполняются коксовой засыпкой. Расстояние между продольными стенками печи и торцами рядов изделий, обычно, равны 500—700 мм и обеспечиваются установкой металлических щитов. Этот промежуток заполняют теплоизоляционной массой. Состав изоляционной массы по объему, следующий: коксовая мелочь : песок : опилки = 2 : 2 : 1. Эта смесь име-

ет очень низкую теплопроводность, подобную асбесту, теплоемкость тоже невысокую, порядка 0,71 кДж/(кг·К). Эта засыпка, обладая высокими теплоизоляционными свойствами, значительно снижает потери электроэнергии в окружающую среду и на собственный нагрев. Изделия располагают в печи так, что они с коксовой засыпкой как бы образуют сплошное тело — керн (канал), по которому электрический ток переходит от одной торцевой стенки к другой. Заложенный в печь керн закрывается слоем изоляционной засыпки толщиной до 700 мм. Такой способ загрузки обеспечивает хорошую тепловую защиту графитированных изделий и значительно уменьшает потери тепла печью, рис. 190.

Процесс графитирования

При питании печей для графитирования электроэнергией применяются источники с большой силой тока и относительно малыми напряжениями, так как количество тепла, выделяемое в проводнике с постоянным сопротивлением, пропорционально квадрату силы тока и определяется по уравнению Джоуля — Ленца

$$Q = I^2 R \tau \text{ Дж,}$$

где I — сила электрического тока, А;
 R — сопротивление проводника, Ом;
 τ — время, с.

В табл. 21 дана характеристика трансформаторов, применяемых на печах для графитирования, в которой показаны необходимые для нормальной работы напряжения и сила тока.

Т а б л и ц а 21

Характеристика трансформаторов

Мощность, Вт	Максимальная сила тока, А	Ступени напряжения, В										
		1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я	10-я	11-я
$1 \cdot 10^6$	20 000	200	180	160	140	120	100	—	—	—	—	—
		100	90	80	70	60	50	—	—	—	—	—
$2 \cdot 10^6$	38 000	240	220	200	180	170	160	150	140	130	—	—
		120	110	100	90	85	80	75	70	60	—	—
$8 \cdot 10^6$	84 000	200	180	160	150	140	130	120	110	106	110	95

Температурный режим графитирования угольных изделий зависит от намечаемого качества и свойств выпускаемой продукции, а также от массы нагреваемых блоков.

Массивным изделиям требуется медленный подъем температуры, обеспечивающий равномерный нагрев их по всему объему. При большой скорости подъема температуры в крупных изделиях возникают напряжения, в связи с этим они разрушаются. Для мелких

изделий подъем температур может быть ускоренным, так как они быстро и равномерно прогреваются по всему объему. Заложенный в печи керн представляет последовательную цепь переменных электросопротивлений, так как угольные изделия более электропроводны в сравнении с пересыпкой: электрическое сопротивление пере-

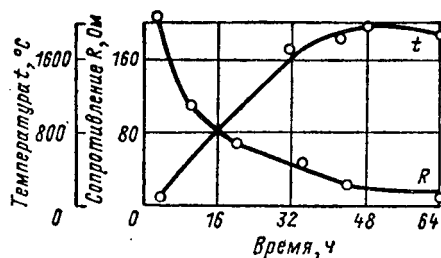


Рис. 191. Кривые активного сопротивления и температуры графитировочной печи

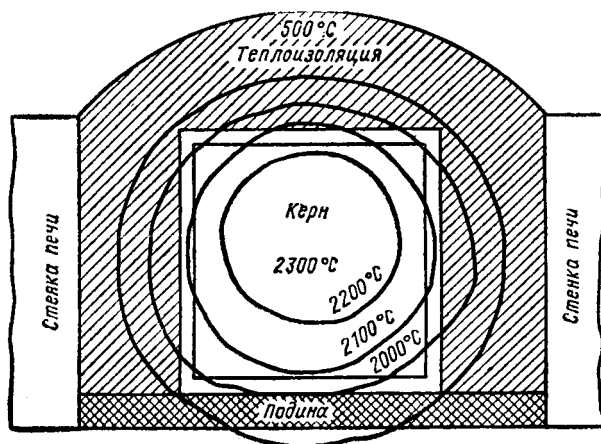


Рис. 192. Топограмма распределения температур в графитировочной печи

сыпки в начале кампании составляет 99% и в конце 97%, соответственно для угольных изделий 1,0 и 3%. Таким образом, основная масса тепла развивается в пересыпке и затем теплопроводностью передается поверхности графитируемых изделий. По этой причине требуется тщательное регулирование электрической энергии, поступающей в печь для графитирования. Контроль графитирования угольных изделий производят измерением активного сопротивления керна и температуры процесса, а также изменения во времени электросопротивления графитируемых изделий, которое к концу процесса становится постоянным (рис. 191).

Схема распределения температур в поперечном сечении печи показана на рис. 192. Графитирование заканчивается отключением печи от электрической сети, после чего печь охлаждается и разгружается. Для повторного использования изоляционную засыпку собирают отдельно от коксовой засыпки керна.

Список литературы

1. Технология керамики и огнеупоров. М., Стройиздат, 1962. 707 с ил. Авт.: П. П. Будников, А. С. Бережной, И. А. Булавин и др.
2. Черепанов А. М., Тресвятский С. Т. Высокоогнеупорные материалы и изделия из окислов. М., «Металлургия», 1964. 400 с. с ил.
3. Мамыкин П. С. Огнеупорные изделия. М., Metallurgizdat, 1955. 487 с. с ил.
4. Чалых Е. Ф. Технология и оборудование электродных и электроугольных предприятий. М., «Металлургия», 1972. 427 с. с ил.

Владимир Александрович Арутюнов
Всеволод Иванович Миткалинный
Сергей Борисович Старк

МЕТАЛЛУРГИЧЕСКАЯ ТЕПЛОТЕХНИКА

Том I

Редакторы издательства М. Р. Лановская, Г. А. Лебедева,
Н. Ф. Фокина
Художественный редактор Д. В. Орлов
Технический редактор Л. В. Добужинская
Корректоры В. Б. Левин и С. С. Копелевич
Переплет художника Ю. М. Крикловенского

Слано в набор 24/I 1974 г. Подписано в печать 1/VII 1974 г. Т-1167
Формат бумаги 84×108¹/₃₂ Бумага типографская № 3 Усл. печ. л. 35,2
Уч.-изд. л. 35,19 Тираж 12 200 экз. Заказ № 49 Изд. № 5347 Цена 1 р. 44 к

Издательство «Металлургия», 119034, Москва, Г-34, 2-й Обыденский пер., д. 1
Владимирская типография Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств
полиграфии и книжной торговли
г. Владимир, ул. Победы, д. 18-б.