КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

СПРАВОЧНИК

Под общей редакцией
чл.-корр. АН СССР В.В. Васильева,
чл.-корр. АН Латв. ССР Ю.М. Тарнопольского

Москва
·Машиностроение·
1990

ББК 34.43я2
К63
УДК 669.018-419.8 (035)

Данные о конструкционных и технологических свойствах композитов (часть 1-я) согласованы с ГСССД и по ГОСТ 8.310—78 соответствуют категории информационных данных

Авторы: **В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин, Н. А. Алфутов, А. И. Бейль, В. А. Бунаков, И. А. Дымков, А. Ф. Ермоленко, И. Г. Жигун, П. А. Зиновьев, Т. Я. Кинцис, В. В. Клейменов, А. А. Круклиньш, А. А. Кульков, В. Ф. Мануйлов, Б. Г. Попов, Г. Г. Портнов, О. С. Сироткин, А. М. Скудра, И. А. Соловьев, Ю. М. Тарнопольский, Ю. С. Царахов**

Рецензент **В. С. Стреляев**

Композиционные материалы: Справочник/В. В. Васильев,
К63 В. Д. Протасов, В. В. Болотин и др.; Под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. — М.: Машиностроение, 1990. — 512 с.; ил.
ISBN 5-217-01113-0

Приведены принципы создания композиционных материалов (КМ), сведения о составе, структуре и свойствах основных видов армирующих волокон и матричных материалов различной природы, технологические процессы их совмещения и физико-механические свойства получаемых КМ. Даны основы расчетов, проектирования и технологии изготовления элементов конструкций из КМ, технологические процессы, оборудование и оснастка, а также примеры эффективного использования КМ в современных конструкциях.

Для инженеров-конструкторов и технологов, занимающихся созданием и внедрением перспективных КМ во всех отраслях машиностроения, может быть полезен студентам втузов.

К $\frac{2703000000-214}{038(01)-90}$ 214—90 **ББК 34.43я2**

ISBN 5-217-01113-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Технический прогресс, с одной стороны, порождает необходимость разработки новых конструкционных материалов, а с другой, — в значительной степени обусловливается результатами этих разработок. Появляясь вследствие естественного стремления к совершенствованию существующих конструкций, новые материалы, в свою очередь, открывают возможности для реализации новых конструктивных решений и технологических процессов. В настоящее время перспективы прогресса в машиностроении, в основном, связываются с разработкой и широким применением композиционных материалов (композитов).

Композиционные материалы (КМ) обладают комплексом свойств и особенностей, отличающихся от традиционных конструкционных материалов (металлических сплавов) и в совокупности открывающих широкие возможности, как для совершенствования существующих конструкций самого разнообразного назначения, так и для разработки новых конструкций и технологических процессов. Успешная реализация больших потенциальных возможностей, заложенных в идее композиционного материала и в свойствах его компонентов, в значительной степени зависит от уровня информированности конструктора об этих возможностях, принципах конструирования и методах расчета. К сожалению, этот уровень не вполне соответствует достижениям науки. Ситуация усугубляется и тем, что имеющаяся (и достаточно обширная) литература по композитам ориентирована в основном на научных работников, а не на инженеров, занятых расчетом, проектированием и изготовлением конструкций из композитов.

Цель издания настоящего справочника заключается в изложении в доступной и компактной форме основной информации по свойствам композитов, методам расчета, проектирования и изготовления типовых конструкций.

В справочнике содержатся сведения, необходимые для внедрения композитов в конструкции различного назначения. В связи с тем, что композиты, как правило, не существуют отдельно от конкретных конструкций и процессов изготовления, их свойства излагаются в комплексе с вопросами конструирования и изготовления.

Особенность справочника заключается в попытке последовательной реализации подхода «от свойств материала к свойствам конструкции». Приведенные в нем характеристики материалов не могут быть непосредственно использованы в расчетах вследствие практически неограниченной и быстро меняющейся номенклатуры композитов, а также зависимости свойств композитов от технологии. Основная задача авторов справочника — дать ориентировочные свойства материалов, систематизировать методы определения этих свойств и способы их использования при проектировании и расчете конструкций основных типов.

Механика композитов находится в стадии развития и становления. Составляющие ее разделы разработаны с разной глубиной, многие вопросы еще далеки до завершения. Это, естественно, сказалось на полноте и глубине изложения материала в разных главах.

Редакторы и авторы будут признательны читателям за все замечания, направленные на улучшение содержания справочника.

Чл.-корр. АН СССР *В. В. Васильев*,
чл.-корр. АН Латв. ССР
Ю. М. Тарнопольский

ЧАСТЬ 1

КОНСТРУКЦИОННЫЕ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОМПОЗИТОВ

Глава 1

КОМПОЗИТЫ КАК КОНСТРУКЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Комбинирование различных веществ остается сегодня одним из основных способов создания новых материалов. Большинство современных конструкционных материалов представляют собой композиции, которые позволяют техническим изделиям обладать определенным сочетанием эксплуатационных свойств, например железобетонные конструкции, стеклопластиковые баллоны давления, автомобильные шины и т. п. Во всех случаях — это система разных материалов, каждый из составляющих которой имеет свое конкретное назначение применительно к рассматриваемому готовому изделию. Ни резина, ни корд автомобильной шины не могут выполнять своей функции независимо, они используются совместно и должны рассматриваться как единая композиция. Совместная работа разнородных материалов дает эффект, равносильный созданию нового материала, свойства которого и количественно и качественно отличаются от свойств каждого из его составляющих.

1.1. ОСНОВНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ, ПРЕДЪЯВЛЯЕМЫЕ В МАШИНОСТРОЕНИИ К КОНСТРУКЦИОННЫМ МАТЕРИАЛАМ

В машиностроении к конструкционным относятся материалы, из которых изготавливаются конструкции и детали машин, воспринимающие механические нагрузки. В конструкциях материалы могут испытывать различные воздействия, связанные, например, с видом нагрузки (растяжение, сжатие, изгиб), характером нагружения (статический, динамический) и, наконец, действием окружающей среды (температура, влажность и т. п.). Перечисленные факторы определяют комплекс конструктивно-эксплуатационных требований, предъявляемых к конструкционным материалам. Способность материалов удовлетворять комплексу требований выявляется при анализе их механических свойств, т. е. характеристик, определяющих поведение материала под действием приложенных внешних механических сил.

При оценке механических свойств материалов различают несколько видов показателей.

1. Показатели свойств материалов, определяемые вне зависимости от конструктивных особенностей и характера службы изделий. Эти показатели определяются путем стандартных испытаний образцов на растяжение, сжатие, изгиб, твердость. Прочностные и пластические свойства, определяемые при статических испытаниях на гладких образцах, не полностью характеризуют прочность материала в реальных условиях эксплуатации. Полученные характеристики могут быть использованы лишь для расчета деталей и конструкций, работающих при нормальных (комнатных) условиях и действии статических нагрузок.

2. Показатели конструктивной прочности материалов, характеризующие их работу в условиях эксплуатации конкретного изделия.

К этим показателям относятся характеристики долговечности изделий (усталостная прочность, износоустойчивость, коррозионная стойкость) и надежности материала в изделии (вязкость разрушения, энергия, поглощаемая при распространении трещины, живучесть при циклическом нагружении и т. д.).

Количественные характеристики перечисленных свойств определяются при статических и динамических испытаниях образцов с острыми трещинами, аналогичными тем, что имеются в реальных деталях машин и конструкциях в виде надрезов, отверстий, дефектов материала (пор, микропустот, инородных включений и т. п.).

Помимо эксплуатационных требований для конструкционных материалов принимаются во внимание требования по *технологичности*. Технологические свойства машиностроительных материалов должны обеспечивать возможно меньшую трудоемкость изготовления деталей и конструкций. Технологичность характеризуется способностью материала приобретать заданную форму при действии различных факторов (температуры, давления и др.), подвергаться механической обработке, соединяться различными методами (сваркой, склеиванием) и т. д. Особое значение имеет технологичность материала, а также его стоимость при массовом производстве.

Различия в упругих, прочностных и других свойствах, присущие различным материалам, тесно связаны с их составом и *структурой*. Изменения в составе и структуре (внутреннем строении) определенным образом отражаются и на свойствах материалов. Знание закономерностей, определяющих в материале наличие тех или иных физических, механических, теплофизических, технологических и иных свойств, позволяет рационально использовать существующие и создавать новые материалы.

1.2. ОБЩИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О КОМПОЗИТАХ

Композиционные материалы представляют собой гетерофазные системы, полученные из двух или более компонентов с сохранением индивидуальности каждого отдельного компонента.

Для композиционных конструкционных материалов характерны следующие признаки:

состав и форма компонентов материала определены заранее;

компоненты присутствуют в количествах, обеспечивающих заданные свойства материала;

материал является однородным в макромасштабе и неоднородным в микромасштабе (компоненты различаются по свойствам, между ними существует явная граница раздела).

В большинстве случаев компоненты композиции различны по геометрическому признаку. Один из компонентов, обладающий непрерывностью по всему объему, является матрицей, компонент прерывный, разделенный в объеме композиции, считается усиливающим или армирующим. Матричными материалами могут быть металлы и их сплавы, органические и неорганические полимеры, керамика и другие вещества. Усиливающими или армирующими компонентами чаще всего являются тонкодисперсные порошкообразные частицы или волокнистые материалы различной природы.

В зависимости от вида армирующего компонента композиты могут быть разделены на две основные группы: дисперсно-упрочненные и волокнистые, которые отличаются структурой, механизмами образования высокой прочности.

Дисперсно-упрочненные композиты представляют собой материал, в матрице которого равномерно распределены мелкодисперсные частицы второго вещества. В таких материалах при нагружении всю нагрузку воспринимает матрица, в которой с помощью множества практически нерастворяющихся в ней частиц второй фазы создается структура, эффективно сопротивляющаяся пластической деформации.

Известно, что вязкий, лишенный хрупкости материал перед разрушением претерпевает значительную деформацию. Причем пластические деформации в реальных кристаллических материалах начинаются при напряжениях, которые меньше, чем теоретически рассчитанные для идеальных материалов, примерно в 1000 раз.

Такая низкая прочность по сравнению с теоретической объясняется тем, что в пластической деформации активно участвуют дислокации — локальные искажения кристаллической решетки. При деформировании благодаря дислокациям сдвиг атомов в соседнее положение происходит не одновременно по всей поверхности скольжения, а растягивается во времени. Такое постепенное скольжение за счет небольших смещений атомов в области дислокации не требует значительных напряжений, что и проявляется при испытаниях пластичных материалов. Упрочнение таких материалов заключается в создании в них структуры, затрудняющей движение дислокаций.

Наиболее сильное торможение передвижению дислокаций создают дисперсные частицы второй фазы, например химические соединения типа карбидов, нитридов, оксидов, боридов, характеризующиеся высокой прочностью и температурой плавления.

Проблема повышения конструкционной прочности состоит не только в повышении прочностных свойств, но и в том, как при высокой прочности обеспечить высокое сопротивление вязкому разрушению, т. е. повысить надежность материала.

В дисперсно-упрочненных материалах заданные прочность и надежность достигаются путем формирования определенного структурного состояния, при котором эффективное торможение дислокаций сочетается с их равномерным распределением в объеме материала либо (что особенно благоприятно) с определенной подвижностью скапливающихся у барьеров дислокаций для предотвращения хрупкого разрушения.

Возможность получения дисперсно-упрочненных композитов заданной структуры можно продемонстрировать на примере гетерогенных сплавов, подвергнутых закалке и старению. Во многих сплавах после затвердевания происходят фазовые превращения, связанные с изменением взаимной растворимости компонентов в твердом состоянии. Неустойчивый пересыщенный твердый раствор при нагреве (а в некоторых случаях и при комнатной температуре) начинает распадаться. На начальных стадиях распада в пересыщенном твердом растворе образуются объемы, обогащенные компонентом растворенного вещества. При дальнейшем распаде твердого раствора эти зоны растут, образуя ультрадисперсные частицы, равномерно распределенные в объеме материала

Упрочнение при старении объясняется тем, что при деформировании в случае встречи частиц избыточной фазы дислокации вынуждены либо огибать эти частицы, либо их перерезать, на что требуется приложение дополнительной работы.

Упрочнение дисперсными частицами позволяет достигать $\sigma_т = 10^{-2}G$, где G — модуль сдвига, но при нагреве до $T = (0{,}6 \div 0{,}7)\ T_{пл}$ прочность резко снижается.

Структурные факторы определяют следующий допустимый уровень статической прочности в конструкциях различного назначения: для сталей $\sigma_в = 1600 \div 2200$ МПа; для титановых сплавов $\sigma_в = 1000 \div 1250$ МПа; для алюминиевых сплавов $\sigma_в = 550 \div 600$ МПа.

У волокнистых композитов матрица (чаще всего пластичная) армирована высокопрочными волокнами, проволокой, нитевидными кристаллами. Идея создания волокнисто-армированных структур состоит не в том, чтобы исключить пластическое деформирование матричного материала, а в том, чтобы при его деформации обеспечивалось нагружение волокон и использовалась бы их высокая прочность.

Механические свойства высокопрочных материалов определяются наличием поверхностных дефектов (надрезов, трещин и т. п.). Около вершин этих дефектов при нагружении концентрируются напряжения, которые зависят от приложенного напряжения, глубины трещины и радиуса кривизны в вершине трещины. Для хрупких материалов коэффициент концентраций напряжений равен $10^2 \div 10^3$. В этом случае при действии уже относительно небольших средних напряжений у кончика трещины растягивающие напряжения достигают предельных значений и материал разрушается.

Существует критическая длина трещины, при которой проявляется тенденция к ее неограниченному росту, приводящая к разрушению материала. Важен тот факт, что соответствующее критическое напряжение зависит от абсолютного размера трещины и оно тем выше, чем меньше длина трещины. Из хрупких веществ материалы с высокой воспроизводимой прочностью можно получать в основном в виде волокон. Это обусловлено тем, что волокна намного менее чувствительны к имеющимся в них дефектам, чем монолитные изделия. Из-за геометрии волокна трещины в них должны быть либо очень короткими, либо они должны быть преимущественно параллельны продольной оси волокна и, следовательно, относительно безопасны.

Изделие с высокой прочностью (например, канат) может быть в принципе получено путем объединения параллельных волокон, расположенных должным образом в пространстве. В канате волокна нагружаются в основном растягивающими напряжениями. При объединении волокон в изделие (путем соответствующих навивок) напряжения между отдельными волокнами создаются вследствие трения скольжения, возникающего при растяжении каната.

При изготовлении и в процессе эксплуатации канатов волокна в них подвергаются изгибам, взаимному трению, что приводит к падению прочности волокон, а иногда и к невозможности использовать их. Например, высокопрочные волокна (стеклянные, углеродные, борные) очень чувствительны к поверхностным повреждениям и их нельзя применять в канатах, не использовав среду, которая защитила бы поверхность волокон и связала их воедино. Такой средой может быть полимерный материал или пластичный металл.

Когда используются не непрерывные волокна (как в канатах), а объединяются связующим короткие (прерывные, дискретные) волокна, то и в этом случае сохраняется принцип волокнистого армирования, состоящий в том, что при нагружении композита на границе раздела матрицы с волокном возникают касательные напряжения, которые вызывают полное нагружение волокон.

Особенность волокнистой композиционной структуры заключается в равномерном распределении высокопрочных, высокомодульных волокон в пластичной матрице (содержание их, т. е. объемная доля, может достигать 75%). В дисперсно-упрочненных материалах оптимальным содержанием дисперсной фазы считается 2—4%. Дисперсные частицы в указанных материалах в отличие от волокон создают только «косвенное» упрочнение, т. е. благодаря их присутствию стабилизируется структура, формирующаяся при термической обработке. Другая отличительная особенность волокнистой композиционной структуры — анизотропия свойств, обусловленная преимущественным расположением волокон в том или ином направлении. Дисперсно-упрочненные же материалы имеют одинаковые свойства во всех направлениях, так как упрочняющие дисперсные частицы имеют равноосную форму.

1.3. ХАРАКТЕРИСТИКА ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

Компоненты волокнистых композитов. В волокнистых композитах высокопрочные волокна воспринимают основные напряжения, возникающие в композиции при действии внешних нагрузок, и обеспечивают жесткость и прочность композиции в направлении ориентации волокон.

Податливая матрица, заполняющая межволокнистое пространство, обеспечивает совместную работу отдельных волокон за счет собственной жесткости и взаимодействия, существующего на границе раздела матрица — волокно. Следовательно, механические свойства композита определяются тремя основными параметрами: высокой прочностью армирующих волокон, жесткостью матрицы и прочностью связи на границе матрица — волокно. Соотношения этих параметров характеризуют весь комплекс механических свойств материала и механизм его разрушения. Работоспособность композита обеспечивается как правильным выбором исходных компонентов, так и рациональной технологией производства, обеспечивающей прочную связь между компонентами при сохранении первоначальных свойств.

Армирующие волокна, применяемые в конструкционных композитах, должны удовлетворять комплексу эксплуатационных и технологических требований. К первым относятся требования по прочности, жесткости, плотности, стабильности свойств в определенном температурном интервале, химической стойкости и т. п. Теоретическая прочность материалов σ_M возрастает с увеличением модуля упругости E и поверхностной энергии γ вещества и падает с увеличением расстояния между соседними атомными плоскостями a_0:

$$\sigma_M = (\gamma E/a_0)^{1/2}.$$

Следовательно, высокопрочные твердые тела должны иметь высокие модули упругости и поверхностную энергию и возможно большее число атомов в единице объема. Этим требованиям удовлетворяют бериллий, бор, углерод, азот, кислород, алюминий и кремний. Наиболее прочные материалы всегда содержат один из этих элементов, а зачастую состоят только из элементов указанного ряда.

При создании волокнистых композитов применяются высокопрочные стеклянные, углеродные, борные и органические волокна, металлические проволоки, а также волокна и нитевидные кристаллы ряда карбидов, оксидов, нитридов и других соединений.

Армирующие компоненты в композитах применяются в виде моноволокон, нитей, проволок, жгутов, сеток, тканей, лент, холстов.

Технологичность волокон определяет возможность создания высокопроизводительного процесса изготовления изделий на их основе. Важным требованием является также совместимость волокон с материалом матрицы, т. е. возможность достижения прочной связи волокно — матрица при условиях, обеспечивающих сохранение исходных значений механических свойств компонентов.

Матричные материалы. В композитах важным элементом является матрица, которая обеспечивает монолитность композита, фиксирует форму изделия и взаимное расположение армирующих волокон, распределяет действующие напряжения по объему материала, обеспечивая равномерную нагрузку на волокна и ее перераспределение при разрушении части волокон. Материал матрицы определяет метод изготовления изделий из композитов, возможность выполнения конструкций заданных габаритов и формы, а также параметры технологических процессов и т. п.

Таким образом, требования, предъявляемые к матрицам, можно разделить на эксплуатационные и технологические. К первым относятся требования, связанные с механическими и физико-химическими свойствами материала матрицы, обеспечивающими работоспособность композиции при действии различных эксплуатационных факторов. Механические свойства матрицы должны обеспечить совместную работу армирующих волокон при различных видах нагрузок. Прочностные характеристики материала матрицы являются определяющими при сдвиговых нагрузках, нагружении композита в направлениях, отличных от ориентации волокон, а также при циклическом нагружении. Природа матрицы определяет уровень рабочих температур композита, характер изменения свойств при воздействии атмосферных и других факторов. С повышением температуры прочностные и упругие характеристики матричных материалов, так же как и прочность их соединений со многими типами волокон, снижается, материал матрицы также характеризует устойчивость композита к воздействию внешней среды, химическую стойкость, частично теплофизические, электрические и другие свойства.

Технологические требования к матрице определяются протекающими обычно одновременно процессами получения композита и изделия из него, т. е. процессами совмещения армирующих волокон с матрицей и окончательного формообразования изделия. Целью технологических операций являются обеспечение равномерного (без касания между собой) распределения волокон в матрице при заданном их объемном содержании, максимально возможное сохранение прочностных свойств волокон, создание достаточно прочного вз действия на границе волокно — матрица. Таким образом, к материалу матрицы предъявляют следующие требования: хорошая смачиваемость волокна, возможность предварительного изготовления полуфабрикатов (например, препрегов) с последующим изготовлением из них изделий; качественное соединение слоев композита в процессе формования; невысокие значения параметров формообразования (например, температуры, давления) и т. п.

Свойства границы раздела, в первую очередь, адгезионное взаимодействие волокна и матрицы определяют уровень свойств композитов и их сохранение при эксплуатации. Локальные напряжения в композите достигают максимальных значений как раз вблизи или непосредственно на границе раздела, где обычно и начинается разрушение материала. Граница раздела должна иметь определенные свойства, чтобы обеспечить эффективную передачу механической нагрузки от матрицы на волокно. Адгезионная связь по границе раздела не должна разрушаться под действием термических и усадочных напряжений, возникающих вследствие различия в температурных коэффициентах линейного расширения матрицы и волокна или в результате химической усадки связующего при его отверждении. Защита волокон от внешнего воздействия также в значительной степени определяется адгезионным взаимодействием по границе раздела.

Рассмотрим классификацию и основные особенности композитов. Простейший случай волокнистой структуры, характеризующей особенности данного класса материалов, представляет собой набор однородных волокон, заключенных в пластичной матрице. Свойства такого композита, образованного однонаправленно ориентированными волокнами, анизотропны.

Максимальные прочность и жесткость однонаправленного композита реализуются в направлении укладки волокон и могут быть в общем случае рассчитаны по известным свойствам его компонентов и их количественному соотношению.

Направленный характер свойств композитов, естественно, предполагает, что наряду с высокими механическими характеристиками в одних направлениях они обладают низкими в других.

Важнейшее достоинство композитов — возможность создавать из них элементы конструкций с заранее заданными свойствами, наиболее полно отвечающими характеру и условиям работы. Многообразие волокон и матричных материалов, а также схем армирования, используемых при создании композитов, позволяет направленно регулировать прочность, жесткость, уровень рабочих температур и другие свойства путем подбора состава, изменения соотношения компонентов и макроструктуры композита.

Для композиционных волокнистых материалов существует несколько классификаций, в основу которых положены различные признаки, например, материаловедческий (по природе компонентов); конструктивный (по типу арматуры и ее ориентации в матрице). В рамках рассматриваемых классификаций можно выделить несколько больших групп композиционных материалов. К таким группам следует отнести композиты с полимерной матрицей (пластики), композиты с металлической матрицей (металлокомпозиты), композиты с керамической матрицей и матрицей из углерода.

В зависимости от природы армирующих волокон различают, например, следующие композиты на полимерной матрице: стеклопластики, углепластики, боропластики, органопластики и т. д. Существуют аналогичные по названиям композиты и на других матрицах.

На рис. 1.1 представлена классификация композитов по конструктивному признаку.

Свойства композитов зависят не только от свойств волокон и матрицы, но и от способов армирования. Различают композиты: образованные из слоев, армированных параллельными непрерывными волокнами (свойства их в основном определяются свойствами однонаправленного слоя); армированные тканями (тексто…

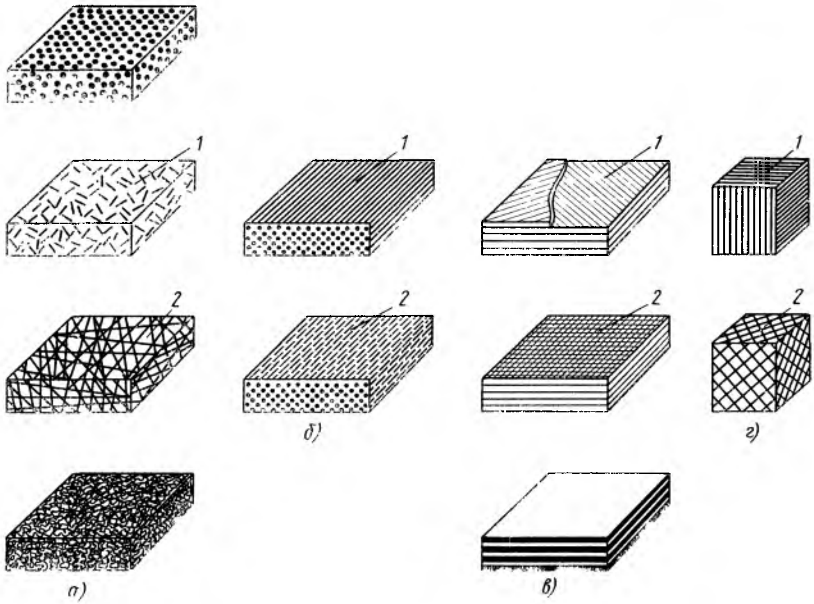


Рис. 1.1. Классификация композитов по конструктивному признаку:

а — хаотически армированные: *1* — короткие волокна; *2* — непрерывные волокна; *б* — одномерноармированные: *1* — однонаправленные непрерывные; *2* — однонаправленные короткие; *в* — двумерноармированные: *1* — непрерывные нити; *2* — ткани; *г* — пространственно армированные. *1* — три семейства нитей; *2* — *n* семейств нитей

с хаотическим и пространственным армированием.

Волокнистое армирование позволяет использовать новые принципы проектирования и изготовления изделий, основанные на том, что материал и изделие создаются одновременно в рамках одного и того же технологического процесса.

В результате совмещения армирующих элементов и матрицы образуется комплекс свойств композита, не только отражающих исходные характеристики его компонентов, но и включающий свойства, которыми изолированные компоненты не обладают. В частности, появление ряда новых свойств в композитах связано с гетерогенной структурой, обусловливающей наличие большой поверхности раздела между волокнами и матрицей. Так, наличие границы раздела между армирующими элементами и матрицей существенно повышает трещиностойкость материала.

Устойчивость любого твердого тела к распространению трещин определяется механизмом поглощения энергии в вершине растущей трещины. В композитах поперечные растягивающие напряжения на конце растущей трещины могут вызвать отслаивание волокон от матрицы, а сдвиговые напряжения на границе раздела — распространение отслоенных участков вдоль волокон. При отслаивании затрачивается энергия, поскольку волокна должны перемещаться относительно матрицы. Кроме того, при дальнейшем нагружении до разрушения волокна могут разрываться в матрице вдали от плоскости распространяющейся трещины. Поэтому для армированных материалов хара такие механизмы повышения вязкости разрушения, которых нет у гомогенных материалов.

Эти механизмы связаны с наличием в композиционных волокнистых материалах большого числа поверхностей раздела, которые могут стать тормозом на пути развития трещины. Можно в первом приближении отметить два явления, способствующих интенсивной диссипации энергии движения трещины — вытягивание волокон из матрицы и разрушение границы раздела между ними. Дополнительное сопротивление распространению трещин, развившихся в матрице, оказывают силы трения между вытягиваемым волокном и матрицей.

Повышенное сопротивление развитию разрушающих трещин в волокнистых материалах обусловлено их работоспособностью при значительных накопленных повреждениях.

Характерное для композитов высокое сопротивление усталости связано с тем, что высокомодульные волокна, воспринимающие основную нагрузку, как хрупкие материалы не снижают своей несущей способности при циклических нагрузках в отличие от пластически деформируемых материалов.

Современные композиты имеют не только широкий спектр физико-механических свойств, но и способны к направленному их изменению, например, повышать вязкость разрушения, регулировать жесткость, прочность и другие свойства. Эти возможности расширяются при применении в композитах волокон различной природы и геометрии, т. е. при создании гибридных композитов. Кроме того, для данных материалов характерно появление синергетического эффекта (согласованного совместного действия нескольких факторов в одном направлении).

Причины синергетического эффекта в гибридных композитах связаны со статистической природой прочности волокон, специфической концентрацией напряжений при разрушении композита положительными начальными напряжениями, которые могут возникнуть в процессе изготовления изделий.

Глава 2

ВОЛОКНИСТЫЕ АРМИРУЮЩИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

В качестве арматуры в композитах применяются волокна различной природы, представленные в разнообразных формах. Форма волокнистых армирующих элементов определяется природой волокон, способом их получения и дальнейшей текстильной переработкой, а также процессами получения композитов и изделий из них. Волокнистые армирующие элементы — это, как правило, непрерывные волокна, представленные в виде крученых и некрученых нитей, жгутов (ровингов), лент, тканей различного переплетения, а также короткие волокна в виде порошков, штапельных тканей, матов и т. д.

2.1. НЕПРЕРЫВНЫЕ ВОЛОКНА

Наиболее часто для армирования матриц из синтетических смол применяют стеклянные, углеродные, органические и борные волокна. Начинают применять базальтовые, сапфировые, волокна на основе карбида кремния и др. В стадии исследований находятся работы по созданию высокопрочных полиэтиленовых волокон. В качестве армирующих элементов при создании композитов на основе металлических матриц применяются тонкие проволоки из стали, вольфрама, бериллия, титана, ниобия и других металлов.

На рис. 2.1 приведены диаграммы растяжения некоторых типов армирующих волокон.

Армирующие волокна могут иметь неоднородную структуру и обладать анизотропией механических характеристик. К волокнам с ярко выраженной анизотропией относятся органические арамидные волокна, углеродные, борные. Стекловолокна и м

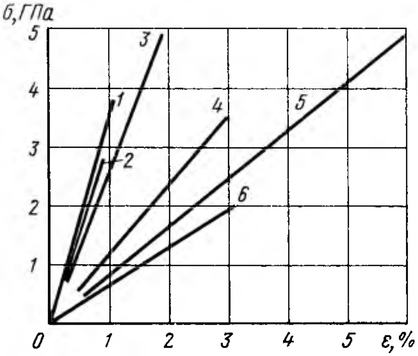


Рис. 2.1. Характерные диаграммы растяжения высокопрочных волокон, применяемых в современных композитах:

1 — борных; *2* — высокомодульных; *3* — высокопрочных углеродных; *4* — органических; *5* — S-стекла; *6* — E-стекла

лические волокна рассматриваются как однородные и изотропные. Анизотропия свойств волокон может оказать существенное влияние на характеристики композитов на их основе.

2.1.1. Стеклянные волокна. Стеклянные волокна широко применяют при создании неметаллических конструкционных композитов — стеклопластиков. При сравнительно малой плотности $(2{,}4 \div 2{,}6) \cdot 10^3$ кг/м^3 они имеют высокую прочность, низкую теплопроводность, теплостойки, стойки к химическому и биологическому действию.

Форма сечения стекловолокна — круг *1* (рис. 2.2). Однако выпускаются и полые волокна *2* и профилированные с формой сечения в виде треугольника *5*, квадрата *4*, шестиугольника *3*, прямоугольника *6*.

Непрерывные волокна получают вытягиванием расплавленной стекломассы через фильеры диаметром 0,8—3,0 мм и дальнейшим быстрым вытягиванием до диаметра 3—19 мкм. Штапельное волокно получают вытягиванием непрерывного стекловолокна и разрывом его на отрезки определенной длины или разделением расплавленного стекла на отдельные части, которые затем растягивают (раздувают) короткие волокна центробежным или комбинированным способом.

Кварцевое волокно, в основном, получают из стержней вытягиванием, поскольку кварц даже при температуре 2400 К имеет очень высокую вязкость, что затрудняет формование его из расплава.

Кремнеземное волокно, содержащее 94—99 % SiO_2, получают выщелачиванием из силикатных стекол оксидов алюминия, бора, кальция, магния.

Наиболее широко применяются бесщелочное алюмоборосиликатное E-стекло (в состав его входят оксиды SiO_2, Al_2O_3, B_2O_3, CaO, MgO, K_2O и Na_2O и некоторые другие компоненты), а также высокопрочное стекло (в состав его входят оксиды SiO_2, Al_2O_3, MgO).

Поверхность стеклянных волокон покрывают замасливателем, который предотвращает истирание волокон при транспортировке и различных видах переработки. Существует два типа замасливателей: технологические и активные (гидрофобно-адгезионные). Технологические замасливатели (например, парафиновая эмульсия или замасливатели на основе крахмала),

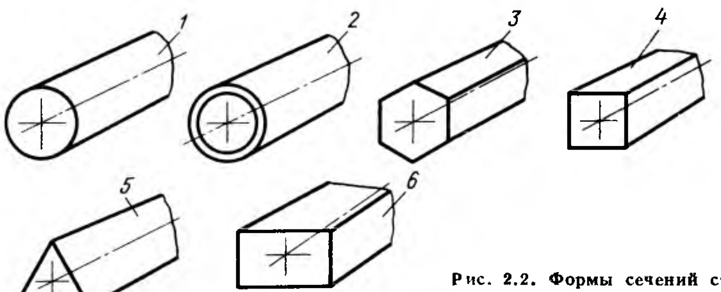


Рис. 2.2. Формы сечений стеклянных волокон

2.1. Механические свойства стекловолокон

Страна, марка стекла	Плотность $\rho \cdot 10^{-3}$, кг/м^3	Модуль упругости E	Средняя прочность на базе 10 мм $\bar{\sigma}_*^f$	Предельная деформация ε_*, %
		ГПа		
СССР				
Высокомодульное:				
ВМ-1	2,58	95	4,20	4,8
ВМП	2,58	93	—	—
УП-68	2,46	85	—	—
УП-73	2,40	83	—	—
Кислотостойкое № 7-А	2,56	74	2,00	3,6
США				
Алюмоборосиликатное Е-стекло	2,54	73,5	3,50	4,8
М-стекло	2,89	110	3,50	3,2
S-994	2,49	87	4,80	5,4
D-стекло с низкой диэлектрической проницаемостью	2,16	52,5	2,45	4,7
Известковонатриевое А-стекло	2,49	66	2,40	4,0
С-стекло	2,49	70	3,15	4,5
Свинцовосиликатное L-стекло	4,30	51	1,70	4,6
Плавленый кварц	2,21	74	6,0	—

применяемые только на стадии переработки волокна, состоят из клеящих и пластифицирующих веществ. Перед изготовлением стеклокомпозита эти замасливатели удаляют с помощью термической обработки при температуре до 1100 К или смывают.

После удаления замасливателей на поверхность волокон в ряде случаев наносят аппреты — вещества, способствующие созданию прочной связи на границе волокно — связующее. В качестве аппретов применяют обычно кремнийорганические и металлоорганические соединения.

Наиболее перспективны активные замасливатели, выполняющие двойную функцию — предохранение волокна от разрушения и улучшение адгезии между стеклом и полимерной матрицей.

По прочности стекловолокна значительно (на один-два порядка превосходят стекла в виде блоков. На прочность стекловолокон определяющее влияние оказывает состояние поверхности волокон, которое зависит от условий формования.

Стекловолокна весьма термостойки. При повышении температуры до 1200 К модуль упругости кварцевого волокна возрастает с 74 ГПа (при 300 К) до 83 ГПа. Бесщелочные алюмосиликатные стекла начинают снижать свою прочность при 600 К, натрийкальцийсиликатные, боратные, свинцовые и фосфатные при 400—500 К. Модуль упругости снижается незначительно вплоть до температуры размягчения.

Механические свойства стекловолокон, выпускаемых в СССР и за рубежом, приведены в табл. 2.1.

Стекловолокна применяются в качестве армирующих элементов композитов в виде жгутов и нитей на элементарных волокон, лент, тканей разнообразного плетения, матов, холстов и других нетканых материалов.

Для изготовления изделий из стеклопластиков методом намотки промышленностью выпускаются стекловолокна в виде непрерывных жгутов (ровингов), состоящих из прядей комплексных нитей суммарной линейной плотностью 555—4170 текс.

Тканые армирующие материалы получают путем текстильной переработки крученой комплексной нити, жгута, пряжи или ровницы. Для текстильной переработки используются стекловолокна диаметром 3—11 мкм. Тканые армирующие материалы технологичны, удобны при изготовлении крупногабаритных изделий, в образованных ими слоистых пакетах достигается высокое содержание арматуры. В основном промышленностью выпускаются ткани полотняного и сатинового переплетения.

Толстостенные изделия, если при этом необходимо обеспечить высокую межслойную прочность, получают из заготовок объемного плетения или трехмерного армирования.

Рулонные нетканые армирующие материалы, называемые холстами, представляют собой неориентированные наполнители из непрерывных или штапельных стекловолокон, скрепленных между собой связующим (жесткие холсты) или механическим прошиванием стеклянными нитями (мягкие холсты).

Жесткие холсты из рубленых нитей применяются для изготовления методами контактного и вакуумного формования крупногабаритных стеклопластиковых изделий, мягкие — в основном для изготовления изделий методом прессования.

2.1.2. Органические волокна. Для получения высокопрочных и высокомодульных композитов с полимерной матрицей (органопластиков) применяют волокна на основе ароматических полиамидов (арамидов) [17, 18, 24].

Высокомодульные и высокопрочные арамидные волокна обладают уникальным комплексом свойств: высокими прочностью при растяжении и модулем упругости, термостабильностью, позволяющей эксплуатировать их в широком температурном интервале, хорошими усталостными и диэлектрическими свойствами, незначительной ползучестью. Благодаря низкой плотности арамидные волокна по удельной прочности превосходят все известные в настоящее время армирующие волокна и металлические сплавы, уступая по удельному модулю упругости углеродным и борным волокнам. Арамидные волокна отличаются хорошей способностью к текстильной переработке. Так, сохранение прочности арамидных волокон после ткачества составляет 90% исходной прочности нитей, что дает возможность применять их в качестве тканых армирующих материалов.

Механические свойства органических арамидных волокон приведены в табл. 2.2.

2.1.3. Углеродные волокна. Углеродные волокна обладают комплексом ценных, а по ряду показателей уникальных механических и физико-химических свойств. Углеродным волокнам присущи высокая теплостойкость, низкие коэффициенты трения и термического расширения, высокая стойкость к атмосферным воздействиям и химическим реагентам, различные электрофизические свойства (от полупроводников до проводников). Они могут иметь сильно развитую поверхность (1000—2000 м^2/г). Углеродные волокна имеют высокие значения удельных механических характеристик. Углеродные волокна делятся на карбонизованные (температура термообработки 1173—2273 К, содержание углерода 80—90%) и графитизированные (температура термообработки до 3273 К, содержание углерода выше 99%).

Существуют два основных типа исходных материалов для углеродных волокон: химические волокна — вискозные или полиакрилонитрильные (ПАН) и углеродные пеки.

Процесс получения углеродных волокон из ПАН-волокон включает текстильную подготовку материала, окисление, высокотемпературную

2.2. Механические свойства органических арамидных волокон

Страна, марка волокна	Плотность $\rho\cdot10^{-3}$, кг·м$^{-3}$	Диаметр d_f, мкм	Модуль упругости E	Средняя прочность на базе 10 мм $\bar{\sigma}^f_*$	Предельная деформация ε_*, %
			ГПа	ГПа	
СССР					
ВНИИВЛОН	1,43	15	110—130	2,1—2,6	3—5
СВМ	1,43	15	125—135	3,8—4,2	3—4
Терлон	1,45	—	130—160	3,3—3,6	2,7—3,5
США					
Кевлар	1,45		60	2,7	4,5
Кевлар-29	1,45		60—70	2,8—3,3	4,5
Кевлар-49	1,45		130—140	3,6—3,8	2,7—3,5
Голландия					
Аренка	1,45		130—150	3,3—3,6	2,7—3,5

работку (карбонизацию и графитацию).

Окисление облегчает дегидрирование полимера, создает условия для создания оптимальной структуры углерода. С целью предотвращения усадки волокна при окислении проводят вытяжку для улучшения качества волокон.

В процессе высокотемпературной обработки осуществляется переход от органического к углеродному волокну. При этом происходят сложные процессы ароматизации углерода и формирования структуры углеродного волокна. Обработка проводится в вакууме или в инертной среде — азоте, гелии, аргоне. Конечная температура термообработки существенно влияет на свойства углеродных волокон. Изменяя ее, можно управлять свойствами волокна.

Более дешевые и доступные исходные материалы — нефтяные и каменноугольные пеки, представляющие собой смесь олигомерных продуктов. Волокна из них формуют, пропуская расплав при температуре 370—620 К через фильеры диаметром 0,3 мм. Затем сформованное волокно вытягивается до степени вытяжки 100 000—500 000%. При этом достигается высокая ориентация макромолекул волокна. Карбонизация и графитизация пековых волокон производится аналогично ПАН-волокнам.

Получение волокна без вытяжки возможно из мезофазного пека, т. е. системы, состоящей из жидкокристаллической и аморфной фаз. Волокна из мезофазных пеков отличаются более высокими прочностными показателями.

Углеродные волокна имеют фибриллярное строение. Характерный элемент структуры — закрытые поры, которые могут занимать до 33% объема волокна. Поры имеют иглоподобную форму, ориентированы они вдоль оси волокна, их средняя длина (2—3) 10^{-2} мкм, а диаметр (1—2) 10^{-3} мкм. Увеличение числа пор снижает прочность волокна при растяжении. Структура углеродного волокна показана на рис. 2.3.

Углеродные волокна, применяемые для армирования конструкционных материалов, условно делятся на две группы: высокомодульные

= 300÷700 ГПа, $\bar{\sigma}_*^f$ = 2÷2,5 ГПа) и высокопрочные (E = 200÷250 ГПа, $\bar{\sigma}_*^f$ = 2,5÷3,2 ГПа). Получены также волокна, в которых сочетаются высокая прочность и высокий модуль упругости.

Механические свойства высокопрочных высокомодульных углеродных волокон (отечественных и зарубежных) приведены в табл. 2.3.

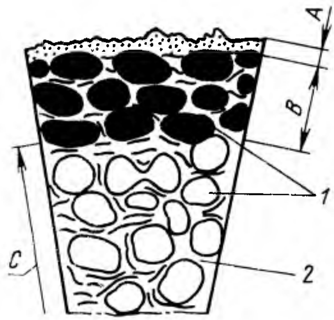


Рис. 2.3. Структура углеродного волокна: *А* — поверхностный слой; *В* — высокоориентированная зона; *С* — низкоориентированная зона; *1* — микрофибриллы; *2* — аморфный углерод

2.1.4. Борные волокна. Композиты на основе борных волокон имеют высокие прочностные (при растяжении и сжатии) и усталостные характеристики, а также высокий модуль упругости.

Борные волокна представляют собой непрерывные моноволокна, неоднородные по структуре и анизотропные диаметром 5—200 мкм.

Традиционным методом получения волокон бора является его химическое осаждение при высокой температуре (1400 К) из смеси газов $BCl_3 + H_2$ на вольфрамовую подложку в виде нитей диаметром ~12 мкм. В результате осаждения образуется сердцевина из боридов вольфрама (WB, W_2B_5 и WB) диаметром 15—17 мкм, вокруг которой располагается слой поликристаллического бора. Примеси в исходных продуктах влияют на фазовые превращения.

Предел прочности сердцевины волокна ниже предела прочности волокна в целом. Сердцевина волокна нагружена большими сжимающими напряжениями, а бор в области, прилегающей к подложке (вольфрамовой нити), — растягивающими. Это ведет к возникновению радиальных трещин в борных волокнах вследствие больших остаточных напряжений, которые растут с увеличением диаметра волокна.

Для повышения жаростойкости борных волокон и защиты от воздействия некоторых металлических матриц волокна покрывают карбидом кремния осаждением из парогазовой фазы в среде аргона и водорода.

Волокна бора, покрытые тонким слоем карбида кремния, называются борсиком.

Разрушение волокон бора и борсика происходит главным образом по дефектам на поверхности волокна. Поверхностное травление позволяет уменьшить дефектность волокна и увеличить его прочность. Еще большего дальнейшего увеличения прочности можно добиться соблюдением абсолютной чистоты камеры охлаждения и продуктов реакции, чтобы свести к минимуму посторонние включения в волокне.

Борные волокна выпускаются промышленностью как в виде моноволокон на катушках, так и в виде полуфабрикатов, представляющих собой комплексные армирующие материалы: ленты полотняного переплетения шириной от 5 до 50 см, основа которых образована борными волокнами, а уток — полиамидными или другими волокнами.

Волокна бора находят широкое применение в производстве композитов на основе полимерной и алюминиевой матриц. Композиты на основе борных волокон и алюминиевой матрицы имеют ряд преимуществ перед аналогичными материалами на основе полимерной матрицы. Так, они могут работать при температурах до 640 К и перерабатываться на обычном технологическом оборудовании, используемом в металлургическом производстве.

Механические свойства некоторых типов борных волокон приведены в табл. 2.4. Борные волокна обладают большой по сравнению с другими типами армирующих волокон

2.3. Механические свойства углеродных волокон

Страна, марка	Плотность $\rho \cdot 10^{-3}$, $кг \cdot м^{-3}$	Диаметр d_f, мкм	Модуль упругости E	Средняя прочность на базе 10 мм $\bar{\sigma}_*^f$	Предельная деформация ε_*, %
			ГПа		
СССР					
ВМН-3	1,71	7,0	250	1,43	0,6
ВМН-4	1,71	6,0	270	2,21	0,8
ВЭН-210	—	9,9	343	1.47	0,4
Кулон	1,90	—	400—600	2,0	0,4
ЛУ-2	1,70	—	230	2,0—2,5	1,0
ЛУ-3	1,70	—	250	2,5—3,0	1,1
ЛУ-4	1,70	—	250	3,0—3,5	1,3
Урал-15	1,5—1,6	—	70—80	1,5—1,7	2,1
Урал-24	1,7—1,8	—	150—200	1,7—2,0	1,1
Элур	1,6	—	150	2,0	1,3
США					
Торнел-300	1,77	7,0	238	3,15	1,3
Торнел-500	1,80	7,0	245	3,78	1,5
Торнел-600	1,80	7,0	245	4,20	1,7
Торнел-700	1,80	6,0	259	4,62	1,8
Торнел-800	1,80	6,0	273	5,46	2,0
Торнел-40	1,80	6,0	280	5,74	2,0
Магнамит AS3	1,80	8,0	190	2,70	1,4
Магнамит AS4	1,80	7,0	245	4,10	1,6—1.7
Магнамит AS6	1,80	5,5	252	4,47	1,65—1,80
Магнамит HMS	1,80	8,0	245—390	2,30	0,6—0,9
Магнамит JM6	1,74	5,4	280	4,44	1,5—1,6
Магнамит JM7X	1,77	5,3	308	5,60	1,6—1,8
Целион 12K	1,77	7,0	238	4,20	1,7
Целион G40	1,77	5,0	280	5,60	2,0
Целион G50	—	—	358	2,48	0,7
Целион ST	1,77	7,0	235	4,34	1,8
Целион G4-70	—	—	530	1,90	0,38
Фортафил 5T	—	—	270	2,76	1,0
Фортафил GC-5	—	—	331	1,76	1,0
Хитекс 33	1,8	7,0	238	3,50	1,5
Хитекс 42 HS	1,8	5,9	297	4,90	1,65
Хитекс 46 HS	1,8	5,0	322	5,60	1,7
Япония					
Карболон-L	1,95	6,0	380	2,42	0,6
Тормолон-S	—	—	414	1,79	0,4
Бесфайт HT	—	7,0	240	3,30	1,3
Бесфайт HM-4S	—	6,4	450	1,80	0,35
Бесфайт T-FT	—	—	240	4,40	1,8
Торейка T-300	1,76	8,4	235	3,53	1,5

Продолжение табл. 2.3

Страна, марка	Плотность $\rho \cdot 10^{-3}$, кг/м^3	Диаметр d_f, мкм	Модуль упругости E	Средняя прочность на базе 10 мм $\bar{\sigma}^f_*$	Предельная деформация ε_*, %
			ГПа		
Торейка Т-400	1,80	—	255	4,50	1,8
Торейка Т-700	1,80	—	260	5,10	2,0
Торейка Т-800	1,80	—	300	5,59	1,9
М-30	1,72	—	300	3,92	1,3
М-40	1,81	7,9	400	2,74	0,6
М-50	1,90	—	500	2,35	0,5
ФРГ					
Зиграфил HM	—	8	343	1,96	—
Зиграфил HF	—	8	216	2,36	—
Великобритания					
Графил-А	1,76	—	192	2,55	1,3
Графил-HMS	1,88	—	365—400	2,00	0,5—0,7
Графил-HTS	1,77	8,0	240	2,5—2,9	1,0
Модмор-I	2,0	7,8	400—450	1,7—2,5	0,5
Модмор-II	1,8	8,1	270	2,80	0,8—1,0
AE-I	1,99	7,8	407	1,74	0,4
AE-II	1,74	8,1	240	2,92	1,2
Франция					
Регилор AC	1,75	12,4	200	2,0	1,5
Регилор AG	2,0	11,0	420	1,90	0,45

2.4. Механические свойства борных волокон

Страна, тип волокна	Плотность $\rho\cdot10^{-3}$, $кг\cdot м^{-3}$	Диаметр d_f, мкм	Модуль упругости E, ГПа	Средняя прочность на базе 10 мм $\bar{\sigma}^f_*$, ГПа	Предельное удлинение ε_*, %
США					
Avco (B/*W*)	2,58 2,50 2,50	101 143 98	400 390—400 390—400	2,52 3,47 3,39	0,6 0,9 0,85
United Aircraft Corp. (B/*W*)	2,50 —	203 144	390—400 —	2,90 3,06	0,74 —
Hamilton Ltd. division (B/*W* + SiC)	2,76 2,76	107 147	394—403 400	3,80 3,30	0,95 0,80
Япония					
Toshiba (B/*W*)	2,5 2,5 2,5	97,2 96,8 99	363—386 378—388 374—393	3,74 3,58 3,23	1,0 0,93 0,84
Франция					
SMPE (B/*W*)	2,5	100±5	408	3,57	0,88
ФРГ					
Wacker-Chemie (B/*W*)	2,5	100±5	420	3,10	0,74
СССР					
B/*W*	2,5	95±3	394	2,95—3,5	0,75—0,9

говой жесткостью. Модуль сдвига $G = 180$ ГПа.

Борные волокна относятся к числу полупроводников, поэтому их присутствие в композите придает ему пониженные тепло- и электропроводность.

Прочность борных волокон обладает заметным статистическим разбросом. Коэффициент вариации прочности $w_{\sigma f} = s_\sigma/\bar{\sigma}^*_f$ в зависимости от дефектности структуры поверхности волокон колеблется в пределах 17—36 %.

Другие сведения по свойствам борных волокон содержатся в работах [6, 10, 12].

2.1.5. Волокна карбида кремния. Волокна этого типа, как правило, применяются в металлокомпозитах, предназначенных для эксплуатации при высоких температурах.

Основные физико-механические свойства волокон карбида кремния на вольфрамовой подложке приведены ниже [19]:

Плотность $\rho \cdot 10^{-3}$, кг·м$^{-3}$ . .	3,3
Модуль упругости при растяжении вдоль волокна E, ГПа	400—500
Модуль сдвига G, ГПа . . .	170
Средняя прочность при растяжении на базе 10 мм $\bar{\sigma}_f$, ГПа .	2—4
Предельная деформация ε_{**}, ГПа	0,3—0,5
Температурный коэффициент линейного расширения $\alpha \cdot 10^6$, К$^{-1}$ (300—600 К)	3,3

Более дешевые карбидокремниевые волокна на углеродной подложке имеют мелкозернистое строение (величина зерен 0,5—1,0 мкм), углеродный сердечник слабо связан со слоем карбида кремния (в связи с отсутствием зоны диффузионного взаимодействия). В поверхностном слое волокон обнаружены остаточные напряжения сжатия, но их величина меньше, чем в борных и карбидокремниевых волокнах на вольфрамовой подложке. Перечисленные факторы обусловливают пониженные прочностные характеристики карбидокремниевых волокон на углеродной подложке, кроме того, они характеризуются повышенной чувствительностью к поверхностным дефектам.

2.1.6. Металлические волокна. Металлические волокна или проволоки являются наиболее экономичными и, в ряде случаев, весьма эффективными армирующими материалами. Для конструкционных композитов, эксплуатируемых при низких и умеренных температурах, используют стальные и бериллиевые проволочные волокна; для композитов, эксплуатируемых при умеренных и высоких температурах, — вольфрамовые и молибденовые.

Проволочные волокна из сталей [11] являются самыми доступными. Наиболее широко применяются для изготовления тонкой высокопрочной проволоки коррозионно-стойкие стали с метастабильным в условиях холодной деформации аустенитом. В процессе изготовления по оптимальным технологическим режимам происходит практически полное превращение аустенита в мартенсит, что обеспечивает значительное упрочнение (в сочетании с наклепом при холодном деформировании). Кроме того, возможно дополнительное упрочнение в результате отпуска проволоки.

Разупрочнение стальных проволок происходит после выдержек при температурах 650—670 К. Исключением является проволока из стали ВНС-9, сохраняющая свои прочностные характеристики до температур 750—780 К.

Вольфрамовые волокна [15] являются достаточно технологичными волокнами для композитов, эксплуатируемых при высоких температурах. Введение в вольфрам и сплавы на его основе тугоплавких дисперсных частиц (карбидных и др.) позволяет существенно повысить способность вольфрамовых волокон к сохранению высокотемпературной прочности и сопротивления ползучести.

Для повышения длительной прочности при высоких температурах наносят распылением различные тонкие (4—12 мкм) барьерные покрытия (карбиды титана и гафния, окислы алюминия и гафния и др.); наиболее эффективным является покрытие HfC — единственное покрытие, позволяющее избежать рекристаллизации вольфрамовых волокон при температуре 1400 К в течение 1000 ч.

Молибденовые проволочные волокна [2] несколько уступают вольфрамовым по прочностным, упругим характеристикам и по жаропрочности.

Механические свойства молибденовых и некоторых других типов металлических проволочных волокон приведены в табл. 2.5.

2.1.7. Волокна с металлическими покрытиями [6, 23]. Волокна конструкционных композитов в ряде случаев имеют покрытия, выполняющие различные функции: защиту поверхности волокон от окисления или активного химического объемного взаимодействия с поверхностью матрицы, от воздействия тепла при изготовлении изделия или при его эксплуатации (барьерные функции), повышение смачиваемости поверхности волокон при формовании композита, снижение вероятности образования прочного соединения волокна с матрицей хим.

2.5. Механические свойства некоторых металлических волокон

Материал волокон	Плотность $\rho \cdot 10^{-3}$, $кг \cdot м^{-3}$	Диаметр d_f, мкм	Модуль упругости E	Средняя прочность на базе 10 мм σ^f
			ГПа	
Алюминий	2,7	—	70	0,29
Бериллий	1,85	130	310	1,1
Титан	4,5	—	120	0,55
Кремний	2,5	—	72	1,0
Сталь ВНС-9	7,8	100—300	200	3,5—3,8
Молибден + 5% V	—	250	334	1,8—2,0
Вольфрам	19,3	50	410	3,3

позита, «залечивание» поверхностных микродефектов волокон.

Вопрос нанесения покрытий на углеродные волокна особенно важен в связи с тем, что они плохо смачиваются расплавами основных конструкционных металлов и сплавов либо смачиваются, но при этом активно химически взаимодействуют с ними, т. е. подвержены при этом и физико-химической и механической деградации.

Расплавы алюминия и сплавов на его основе не смачивают углеродные волокна и ленты из них при температурах до 300 K. В то же время при контактировании с большими массами расплава происходит образование карбидов алюминия и разупрочнение волокон.

Никелевые покрытия имеют серьезные недостатки. При длительных выдержках при температурах 1100—1400 K применение никелевого покрытия углеродных волокон приводит к резкому снижению прочности вследствие рекристаллизации (и графитизации) волокон. При малых толщинах покрытий последующая пропитка расплавом алюминия приводит к растворению покрытия, отслоению матрицы от волокон. При увеличении толщины никелевого покрытия отмечаются высокие концентрации насыщения алюминия никелем, образование интерметаллидного соединения Al_3Ni и охрупчивание матрицы (а косвенно — волокон и композита в целом).

Более эффективны металлические покрытия (Cr, Mo, W), наносимые на углеродные волокна или ленты методом термического разложения легколетучих карбонилов перечисленных металлов при температурах, соответственно, 900, 1050, 950 K, а также покрытия карбида кремния, карбида титана, диборида титана, нитридов титана или циркония.

Значения прочности и модуля упругости углеродных волокон без покрытий и с защитными (барьерными) покрытиями приведены в табл. 2.6.

При выборе покрытий волокон необходимо учитывать, что способ нанесения покрытия и его рабочие параметры должны обеспечивать концентрацию атомов материала волокон в материале покрытия, близкую к предельной растворимости, причем необходимо, чтобы происходило ограниченное растворение материала волокна в материале покрытия, а не наоборот. Структура покрытия должна быть относительно крупнозернистой, иначе в связи с высокой избыточной энергией кристаллов затрудняется микропластическая деформация материала покрытия, и его разрушение имеет, в основном, хрупкий характер. Оптимальные толщины металлических покрытий должны быть в пределах от нескольких десятых долей микрона до нескольких микронов. В частности, при пластифицировании молибденовой проволоки диаметром 120 мкм гальваническими покрытиями меди, никеля и х

2.6. Прочность и модуль упругости углеродных волокон в зависимости от состава и толщины барьерных покрытий

Материал покрытия	Толщина покрытия, мкм	Средняя прочность на базе 10 мм σ_*^f, ГПа	Модуль упругости E, ГПа
SiC	0,001	1,42/1,54	247/292
	0,002	1,78/1,67	252/319
	0,010	1,88/1,75	218/220
TiN	0,029	1,73/2,26	244/—
	0,035	1,15/1,45	263/—
ZrN	0,055	1,77/1,36	215/257
	0,004	1,10/1,32	—/—
	0,061	1,10/0,97	268/281

Примечание. В числителе приведены значения для волокон без покрытий, в знаменателе — с покрытиями.

установлено, что наибольшее увеличение прочности волокон достигается при толщинах покрытий около 1 мкм. При этой толщине покрытия из меди прочность проволоки возрастает с 1,8 ГПа до 2,0 ГПа.

Исходная прочность углеродных волокон (2,2—3,2 ГПа) после пассивации (путем осаждения на их поверхность атомарного пироуглерода), отжига при 1273 К в течение 100 ч и в результате нанесения никелевого покрытия толщиной 1 мкм возрастает до 8 ГПа, при этом среднеквадратическое отклонение прочности снижается с 0,60 до 0,28 ГПа, а коэффициент вариации — с 18 до 4%.

Технологическими и пластифицирующими покрытиями волокон бора, бора с покрытием карбида кремния, а также карбидокремниевых волокон являются покрытия из алюминия и сплавов на его основе, наносимые методом протягивания волокон через расплав. Эти покрытия существенно стабилизируют прочность перечисленных волокон.

2.2. ПРОЧНОСТЬ НЕПРЕРЫВНЫХ ВОЛОКОН И ИХ ПУЧКОВ

При изготовлении изделий из композитов на основе непрерывных волокон последние обычно применяются в виде пучков в той или иной текстильной форме. Это могут быть крученые или некрученые нити различной линейной плотности или жгуты, составленные из таких нитей. Нити высокой линейной плотности (300 текс и выше) называют *цельноформованными жгутами*. Текстильную форму, получаемую трощением (сложением) отдельных нитей, называют *трощеным жгутом*.

Жесткостные и прочностные характеристики волокон в пучках имеют существенный статистический разброс, влияющий на свойства композитов, получаемых на их основе. Это приводит к необходимости оценивать параметры распределений прочности волокон по результатам их массового испытания. Традиционные методы проведения таких испытаний обладают рядом недостатков — они предполагают извлечение отдельных волокон из текстильных форм (нитей, жгутов), изготовление из них образцов (наклеивание захватной части), закрепление каждого образца в захватах испытательной машины. При диаметрах волокон от единиц до десятков микрометров эти операции весьма трудоемки и могут привести к повреждению волокон. Кроме того, испытания, связанные с извлечением отдельных волокон, не позволяют оценить те влияющие на поведение композита свойства, которые присущи пучку в целом. К таким свойствам относятся неодновременность вступления в работу волокон (разнодлинность), а также статистически значимое различие параметров распределения прочностных характеристик волокон при переходе от одного пучка к другому.

Для оценки свойств волокон по результатам испытаний пучка можно воспользоваться моделями разрушения, учитывающими наличие разнодлинности и рассеяния прочностных характеристик волокон [1, 8].

2.2.1. Модель разрушения пучка волокон, не взаимодействующих по

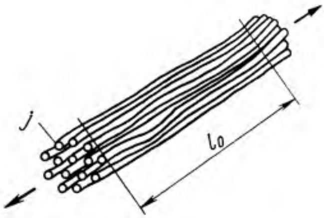


Рис. 2.4. Расчетная схема пучка разнодлинных волокон, не взаимодействующих по боковым поверхностям:
j — номер волокна; l_0 — длина пучка

вым поверхностям [1]. Рассмотрим пучок, состоящий из n разнодлинных волокон (рис. 2.4), для которых связь между напряжениями и деформациями определяется соотношением

$$\sigma_j(\varepsilon) = \widehat{R}(\lambda_j, \ \varepsilon), \qquad (2.1)$$

где $\widehat{R}$ (. , .) — некоторый оператор; $\lambda = \left\{\lambda_j^{(1)}, \ldots, \lambda_j^{(r)}\right\}$ — вектор параметров, являющийся случайным вектором, т. е. волокна могут быть не только линейно, но и нелинейноупругими, пластичными, вязкоупругими и т. п.

Диаграмма растяжения пучка из волокон определяется выражением

$$\sigma_0(\varepsilon) = \frac{1}{S_0}\sum_{j=1}^{n} S_j\widehat{R}(\lambda_j, \ \varepsilon - \varphi_j)\, h(\varepsilon - \varphi_j)\ \{1 - h\,[\widehat{R}(\lambda_j, \ \varepsilon - \varphi_j)\, h(\varepsilon - \varphi_j) - \sigma_j^*]\}, \qquad (2.2)$$

где S_j — площадь поперечного сечения волокна; $S_0 \sum_{j=1}^{n} S_j$ — общая площадь поперечного сечения пучка; $\varphi_j = 1 - l_j/l_0$ — разнодлинность; σ_j^* — разрушающее напряжение волокна; h (·) — функция Хевисайда.

Для большого количества волокон в пучке, когда можно принять, что $n \to \infty$, выражение (2.2) принимает вид

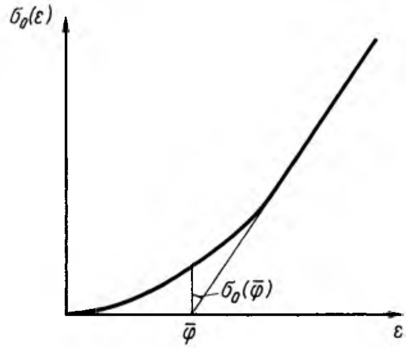


Рис. 2.5. Диаграмма растяжения пучка разнодлинных волокон

$$\sigma_0(\varepsilon) = \int_0^{\varepsilon} \left\{ \int_{\Omega_\lambda} \widehat{R}(\lambda, \ \varepsilon - \varphi)\,[1 - F_\varepsilon(\varepsilon - \varphi)]\, p_\lambda(\lambda) \right\} p_\varphi(\varphi)\, d\varphi, \qquad (2.3)$$

где Ω_λ — область определения вектора параметров λ; p_λ (·) — совместная плотность распределения компонентов вектора λ; F_ε (·) — функция распределения предельных деформаций волокон; p_φ (·) — плотность распределения разнодлинности.

Рассмотрим некоторые важные частные случаи выражения (2.3).

Начальный отрезок деформирования. При этом вероятностью разрушения можно пренебречь, а сами волокна считать линейно упругими:

$\widehat{R}$ (λ, ε) $\equiv E\varepsilon$.

Тогда

$$\sigma_0(\varepsilon) = \bar{E}\left[\varepsilon F_\varphi(\varepsilon) - \int_0^{\varepsilon} \varphi p_\varphi(\varphi)\, d\varphi\right], \qquad (2.4)$$

где $\bar{E} = \int_0^{\infty} E p_E(E)\, dE$ — среднее значение модуля упругости; F_φ (·) — функция распределения разнодлинности. Выражение (2.4) используется для определения параметров разнодлинности путем обработки диаграммы растяжения пучка σ_0 (ε) (рис. 2.5)

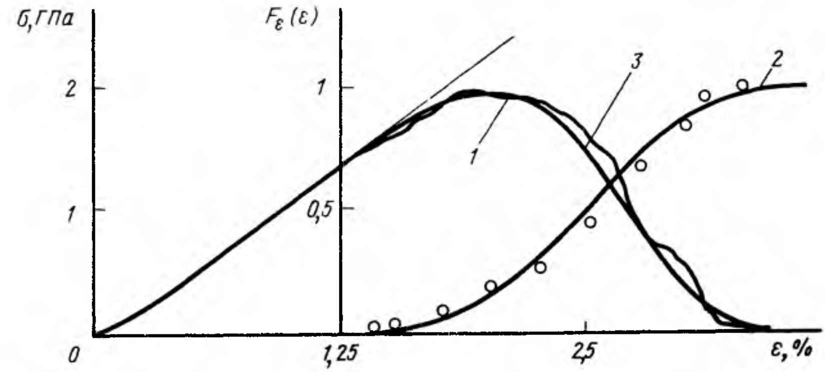


Рис. 2.6. Диаграмма растяжения пучка органических волокон

Так, из (2.4) получают уравнения асимптоты, положив $\varepsilon \to \infty$:

$$\sigma_0(\varepsilon) = \overline{E}(\varepsilon - \overline{\varphi}). \qquad (2.5)$$

Из (2.5) следует, что средняя разнодлинность определится пересечением асимптоты с осью абсцисс независимо от вида распределения $F_\varphi(\cdot)$.

Величину, характеризующую статическое рассеяние разнодлинностей, ее среднеквадратическое отклонение s_φ, найдем, измерив на диаграмме растяжения пучка величину ординаты $\sigma_0(\varepsilon)$ в точке $\varepsilon = \overline{\varphi}$. Определенное путем таких измерений среднеквадратическое отклонение разнодлинности слабо зависит от вида ее фактического распределения. Так, если принять, что разнодлинность распределена по нормальному закону, то

$$s_\varphi = \sqrt{2\pi}\,\frac{\sigma_0(\overline{\varphi})}{\overline{E}}, \qquad (2.6)$$

а если по экспоненциальному — $F_\varphi(\varphi) = 1 - \exp(-\varphi/\overline{\varphi})$ — при $\varphi > 0$, то

$$s_\varphi = e\,\frac{\sigma_0(\overline{\varphi})}{\overline{E}}, \qquad (2.7)$$

где $e \simeq 2{,}718$ — основание натуральных логарифмов.

Если нет оснований аппроксимировать функцию распределения разнодлинностей каким-либо конкретным законом распределения, ее можно получить путем графического дифференцирования начального участка диаграммы растяжения пучка волокон. Из выражения (2.4) следует, что

$$\frac{d\sigma_0}{d\varepsilon} = \overline{E}F_\varphi(\varepsilon). \qquad (2.8)$$

Для разнодлинностей, малых по сравнению с предельными деформациями волокон, выражение (2.3) примет вид

$$\sigma_0(\varepsilon) = \int_{\Omega_\lambda} \widehat{R}(\lambda, \varepsilon)\,\{1 - F_\sigma \times$$

$$\times [\widehat{R}(\lambda, \varepsilon)]\}\, p_\lambda(\lambda)\, d\lambda. \qquad (2.9)$$

В качестве предельной характеристики можно принять предельную деформацию. Тогда выражение (2.9) запишется в виде

$$\sigma_0(\varepsilon) = [1 - F_\varepsilon(\varepsilon)] \times$$

$$\times \int_{\Omega_\lambda} \widehat{R}(\lambda, \varepsilon)\, p_\lambda(\lambda)\, d\lambda, \qquad (2.10)$$

где $F_\varepsilon(\cdot)$ — функция распределения предельных деформаций волокон, связанная с функцией распределения предельных напряжений соотношением

$$F_\varepsilon(\varepsilon) = F_\sigma[\widehat{R}(\lambda, \varepsilon)]. \qquad (2.11)$$

Таким образом, если известно распределение вектора параметров λ, то функция распределения предельных деформаций найдется непосредственно

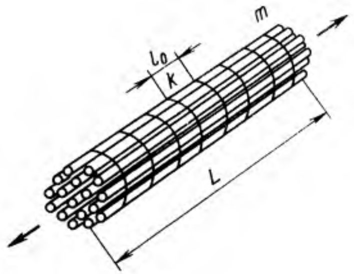


Рис. 2.7. Расчетная схема пучка волокон, взаимодействующих по боковым поверхностям

из диаграмм растяжения пучка по формуле

$$F_\varepsilon(\varepsilon) = 1 - \frac{\sigma_0(\varepsilon)}{\int\limits_{\Omega_\lambda} \widehat{R}(\lambda,\ \varepsilon)\, p_\lambda(\lambda)\, d\lambda}. \qquad (2.12)$$

Для пучков волокон, линейно упругих вплоть до разрушения, выражение (2.12) принимает вид

$$F_\varepsilon(\varepsilon) = 1 - \frac{\sigma_0(\varepsilon)}{\overline{E}\varepsilon}. \qquad (2.13)$$

На рис. 2.6 приведена экспериментальная диаграмма растяжения пучка органических волокон. Из диаграммы видно, что волокна вплоть до разрушения ведут себя практически линейно упруго. Испытания проводились на базе 400 мм. Кривая *1* — эмпирическая диаграмма растяжения; кривая *2* — аппроксимация эмпирической функции распределения при помощи распределения Вейбулла

$$F_\varepsilon(\varepsilon) = W(\alpha,\ \varepsilon_0,\ \varepsilon_c) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\left(\dfrac{\varepsilon-\varepsilon_0}{\varepsilon_c}\right)^{\alpha}\right] & \text{при } \varepsilon \geqslant \varepsilon_0, \\ 0 \text{ при } \varepsilon < \varepsilon_0 \end{cases} \qquad (2.14)$$

с параметрами $\alpha = 6{,}3$; $\varepsilon_0 = 0$; $\varepsilon_c = 0{,}0267$.

Кривая *3* — диаграмма растяжения, построенная в соответствии с (2.11).

Для аппроксимации эмпирического распределения прочности или предельной деформации принимается распределение Вейбулла, так как оно вытекает из теории хрупкого разрушения, в основе которой лежит представление о том, что прочность образца лимитируется прочностью слабейшего из элементов, на которые разбивается образец материала или конструкция [5].

2.2.2. Модель разрушения пучка волокон, взаимодействующих по боковой поверхности [8]. Визуальные наблюдения и анализ характера разрушения пучков волокон показывают, что между волокнами имеется заметное взаимодействие по боковым поверхностям (слипание), которое, как правило, не регламентируется и не контролируется при поступлении армирующего материала. Природа этого взаимодействия может быть различной: трение при наличии замасливателей и аппретов на поверхности волокон, для органических волокон — наличие общих микрофибриллярных образований у соседних волокон и т. п.

Для оценки функции распределения прочности волокон по результатам испытаний их пучков воспользуемся математической моделью, описывающей разрушение пучка при наличии взаимодействия между волокнами. Такие пучки являются частной моделью композита с матрицей низкой прочности. Однако для пучков слабо взаимодействующих волокон можно предложить более простую модель, позволяющую отразить физическую сущность явления и описать его аналитически.

Представим пучок волокон длиной L, состоящий из m участков длиной l_0 (рис. 2.7). Длина l_0 — характерный размер зоны разрушения, который не совпадает с длиной краевого эффекта, возникающего вблизи конца разрушенного волокна. Размер l_0 можно принять за характеристику взаимодействия волокон по боковой поверхности — чем больше взаимодействие, тем меньше l_0. Основные положения предлагаемой модели разрушения состоят в следующем [8]. Предполагается, что процесс разрушения имеет две стадии. На первой стадии все участки образца статистически эквивалентны, т. е. процесс накопления поврежде-

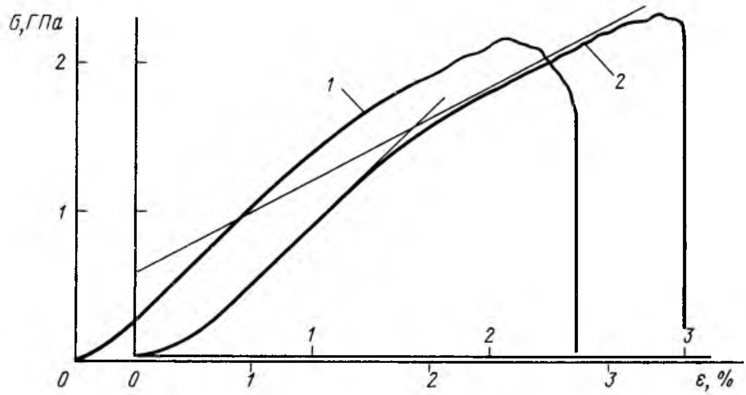


Рис. 2.8. Экспериментальные диаграммы растяжения пучков арамидных волокон при различных уровнях взаимодействия между волокнами:
1 — $m = 5$; *2* — $m = 10$

протекает на всех участках одинаково, их нельзя каким-либо образом отличить друг от друга; в тот момент, когда на диаграмме напряжение — деформация достигается максимум, во всех элементах, кроме одного, прекращается накопление повреждений, дальнейшие разрушения локализуются на участке длиной l_0. Эта модель отражает фазы разрушения, имеющие место в действительности: накопление диффузных повреждений и разделение образца на части.

При сделанных предположениях диаграмма растяжения пучка волокон задается параметрически выражениями:

$$\int\limits_{\Omega_\lambda} \widehat{R}\left(\lambda, \frac{m\varepsilon - \varepsilon_k}{m-1}\right) p_\lambda(\lambda)\, d\lambda = \frac{1 - F_\varepsilon(\varepsilon_k)}{1 - F_\varepsilon(\varepsilon_*)} \int\limits_{\Omega_\lambda} \widehat{R}(\lambda, \varepsilon_k)\, p_\lambda(\lambda)\, d\lambda;$$

$$\sigma_0(\varepsilon) = [1 - F_\varepsilon(\varepsilon_k)] \times \int\limits_{\Omega_\lambda} \widehat{R}(\lambda, \varepsilon_k)\, p_\lambda(\lambda)\, d\lambda, \quad (2.15)$$

где ε_k — параметр; ε_* — корень уравнения;

$$\frac{d\sigma_0(\varepsilon)}{d\varepsilon} = [1 - F_\varepsilon(\varepsilon)] \times \int\limits_{\Omega_\lambda} \frac{\partial \widehat{R}(\lambda, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} p_\lambda(\lambda)\, d\lambda - \frac{dF_\varepsilon(\varepsilon)}{d\varepsilon} \int\limits_{\Omega_\lambda} \widehat{R}(\lambda, \varepsilon)\, p_\lambda(\lambda)\, d\lambda = 0. \quad (2.16)$$

Здесь $F_\varepsilon(\varepsilon)$ — функция распредел ния предельных деформаций волокон на базе l_0.

Для случая пучка линейно упругих волокон, взаимодействующих по боковой поверхности, диаграмма растяжения определяется выражениями:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_k}{m}\left[(m-1)\frac{1 - F_\varepsilon(\varepsilon_k)}{1 - F_\varepsilon(\varepsilon_*)} + 1\right]; \quad (2.17)$$

$$\sigma_0 = \overline{E}\,[1 - F_\varepsilon(\varepsilon_k)]\,\varepsilon_k,$$

где ε_* определяется из уравнения

$$\frac{d}{d\varepsilon}\{\varepsilon[1 - F_\varepsilon(\varepsilon)]\} = 0. \quad (2.18)$$

Процесс деформирования и разрушения пучка взаимодействующих волокон принципиально отличается от процесса деформирования пучка не

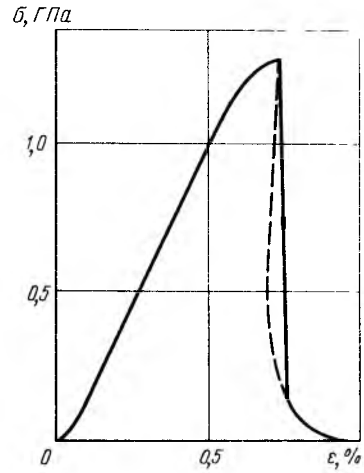


Рис. 2.9. Экспериментальная диаграмма растяжения пучка углеродных волокон

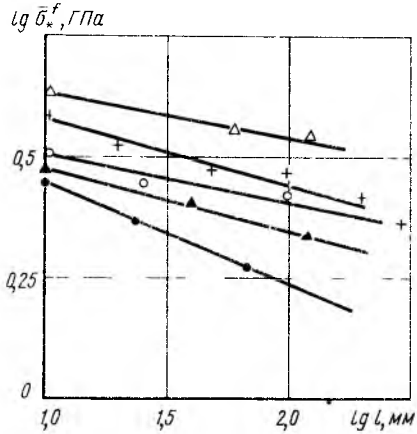


Рис. 2.10. Зависимость прочности волокон различных типов от базы испытаний l:

● — углеродные; △ — арамидные, + — борные; ▲ — стальные (сталь У8А, d_f = 80 мкм); ○ — стальные (сталь 12Х18Н10Т)

взаимодействующих волокон. Разрушенные пучки взаимодействующих волокон имеют локализованные зоны разрушения, а на диаграммах растяжения имеются участки неустойчивого деформирования (разрушения волокон происходят при постоянных деформациях). Это объясняется тем, что при локализации зоны разрушения разрывы волокон происходят за счет энергии остальных элементов образца. На рис. 2.8 и 2.9 приведены типичные диаграммы растяжения пучков волокон, взаимодействующих по боковым поверхностям.

Начальный участок функции распределения прочности взаимодействующих волокон можно определить путем обработки диаграммы растяжения пучка от начала нагружения до максимального значения нагрузки по формулам (2.12) или (2.13).

Для экспериментального определения неизвестного параметра m может быть предложен следующий метод [4]. Из исследуемой нити вырезается два образца. Предполагается, что образцы, вырезанные из соседних участков нити, обладают одинаковой или близкой степенью склеенности волокон. Один из образцов нагружается до разрушения. При нагружении производится запись диаграммы растяжения. У второго образца часть волокон надрезается концом остро отточенного ножа. Образец закрепляется в захватах испытательной машины и нагружается усилием N_0. Такое нагружение выполняют многократно. При каждом нагружении производится измерение деформации на различных расстояниях x от надреза, на базе $l \ll L$, где L — длина испытательной части образца. По результатам испытаний строится график зависимости измеренной деформации от расстояния до места надреза. При некотором $x = x_0$ деформация перестает зависеть от x, так как за счет взаимодействия волокон по боковой поверхности происходит постепенная загрузка перерезанных волокон, и на расстоянии $x > x_0$ от надреза они полностью загружаются, а их деформация отличается от деформации неповрежденных волокон. Длина, характеризующая степень склеенности волокон, $l_0 = 2x_0$, а параметр $m = L/l_0 = L/2x_0$. Полученная оценка параметра m используется в выражениях (2.15) и (2.17) при аппроксимации диаграммы растяжения. Если принято, что $F_\varepsilon(\varepsilon) = W(\alpha, \varepsilon_0, \varepsilon_l, \ldots)$, то

2.7. Формулы для сравнения классического и уточненного подходов к описанию масштабного эффекта прочности волокон при растяжении

Теория	Функция распределения прочности волокон на базе L	Базовая длина L_0	Приведенная средняя прочность на базе L	Дисперсия приведенной прочности на базе L
Классическая	$F(\sigma, L) = \begin{cases} 1 - \exp(-\lambda z_*^{\alpha}), & z_* > 0, \\ 0 & z_* \leqslant 0, \end{cases}$ $z_* = \dfrac{\sigma_* - \sigma_0}{\sigma_c}$, $\lambda = L/L_0$	Произвольная	$\bar{z}_*(\lambda) = \lambda^{1/\alpha}\Gamma\left(1+\dfrac{1}{\alpha}\right)$, где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция	$\operatorname{disp} z_*(\lambda) = \lambda^{2/\alpha}\,[\Gamma(1 + 2/\alpha) - \Gamma^2(1 + 1/\alpha)]$
Уточненная	$F(\sigma, L) = \begin{cases} 1 - \exp[-z^{\beta/2} \times (\lambda + z_*^{\beta/2})], & z_* > 0, \\ 0, & z_* \leqslant 0, \end{cases}$ $z_* = \dfrac{\sigma_* - \sigma_0}{\sigma_c}$, $\lambda = L/L_0$	Выражается через среднее расстояние между выбросами случайной функции $\sigma(x)$ за уровень $\sigma = \sigma_0 + \sigma_c$ в виде $L_0 = \langle l(\sigma_0 + \sigma_c)\rangle e$, где $e = 2{,}718$; определяется спектральными свойствами случайной функции $\sigma(x)$	$\bar{z}_*(\lambda) = 2^{-1/\beta}\,\Gamma \times \left(1 + \dfrac{2}{\beta}\right) \exp\left(\dfrac{\lambda^2}{8}\right) \times D_{-2/\beta}\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)$, где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция; $D.(\cdot)$ — функция параболического цилиндра	$\operatorname{disp} z_*(\lambda) = 2^{-2/\beta}\,\Gamma \times \left(1 + \dfrac{4}{\beta}\right) \exp\left(\dfrac{\lambda^2}{8}\right) \times D_{-4/\beta}\left(\dfrac{\lambda}{\sqrt{2}}\right) - \bar{z}_*^2(\lambda)$

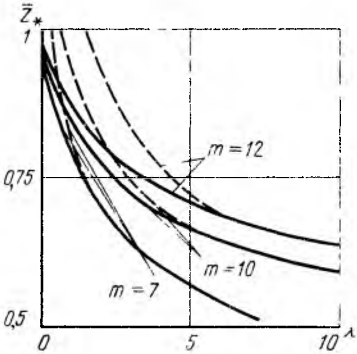


Рис. 2.11. Зависимости математического ожидания приведенного параметра прочности $\overline{Z}_*$ от базы испытаний λ по уточненной (————) и классической (— — —) теориям

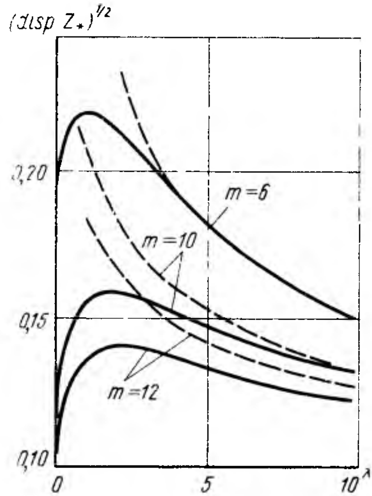


Рис. 2.12. Зависимость среднеквадратического отклонения приведенного параметра $(\mathrm{disp}\ Z_*)^{1/2}$ прочности от базы испытаний λ по уточненной (————) и классической (— — —) теориям

в результате аппроксимации найдутся параметры распределения α, ε_0, ε_c, соответствующие базе испытаний l_0.

2.2.3. Масштабный эффект прочности при растяжении армирующих элементов. Прочность армирующих волокон существенно зависит от базы испытаний (рис. 2.10). При расчете прочности композитов с помощью моделей разрушения необходимо оценивать прочность армирующих элементов на малых базах, равных нескольким диаметрам армирующего элемента. Под армирующими элементами понимаются элементарные волокна или их структурно обособленные группы (нити, пропитанные связующим, и т. п.). Проведение испытаний на столь малых базах затруднительно, а иногда и технически неосуществимо, поэтому армирующий элемент рассматривают как совокупность последовательно соединенных звеньев, прочности которых — независимые случайные величины. При таком подходе прочность армирующего элемента на произвольной базе описывается распределением Вейбулла W $(\alpha, \sigma_0, \sigma_c, \lambda)$, где $\lambda = L/L_0$, L_0 — некоторая исходная база.

Таким образом, достаточно оценить параметры распределения W $(\alpha, \sigma_0, \sigma_c, \lambda)$ при $\lambda = 1$, чтобы иметь распределение прочности на всех базах.

Экспериментальная проверка этого положения, проведенная в ряде работ на различных видах волокон, показала, что имеются заметные отклонения экспериментальных данных от зависимостей, получаемых на основании распределения Вейбулла. Особенности этих отклонений заключаются в следующем: при увеличении базы испытаний средняя прочность убывает медленнее, чем это следует из классической теории масштабного эффекта, приводящей к распределению Вейбулла; имеет место возрастание коэффициента вариации прочности при увеличении базы испытаний. При этом на каждой заданной базе испытаний распределение прочности волокон хорошо описывается распределением Вейбулла, но для каждой базы — со своим показателем α; с увеличением базы испытаний показатель распределения снижается.

Для описания наблюдаемых эффектов рассмотрим армирующий элемент как совокупность последовательно соединенных звеньев, прочности которых не являются независимыми случайными величинами, а связаны корреляционно. Если размеры звеньев малы по сравнению с длиной l, то для описания прочности армирующих элементов можно воспользоваться аппаратом теории выбросов случайных функций [9].

Применение уточненной теории к описанию масштабного эффекта прочности позволило качественно и количественно описать экспериментально наблюдаемые эффекты и оценить границы применимости классической теории.

В табл. 2.7 и на рис. 2.11 и 2.12 приведены результаты этой оценки, позволяющие сравнить уточненный и классический подходы. При достаточно больших базах испытаний ($\lambda = L_0 \sim 5$) уточненная теория переходит в классическую. В то же время использование уточненной теории при переходе с больших баз испытаний на малые позволяет избежать нереально завышенных оценок прочности волокон на малых базах.

2.3. ТКАНЫЕ АРМИРУЮЩИЕ МАТЕРИАЛЫ

Для получения слоистых композитов в качестве армирующих элементов используют ткани на основе высокопрочных волокон различной природы. Тканые материалы могут быть классифицированы по материаловедческому или конструктивному принципам. Пример такой классификации приведен на рис. 2.13. В зависимости от соотношения волокон в основе и утке ткани могут обладать анизотропией механических характеристик и варьироваться от равнопрочных до кордных (основных и уточных), в которых основная масса волокон ориентирована в направлении основы (основные) или утка (уточные).

Рис. 2.13. Классификация тканых армирующих материалов

Отечественной и зарубежной промышленностью выпускаются ткани на основе стеклянных, органических и углеродных волокон, имеющие различное переплетение. Наиболее простая схема — полотняное переплетение, когда каждая нить основы и утка проходит поочередно сверху и снизу пересекающихся нитей. Широко распространенным является сатиновое переплетение, когда каждая нить проходит поочередно сверху, а затем снизу пересекающей ее нити. Более сложным является саржевое переплетение, при котором каждая нить основы и утка проходит поочередно сверху и снизу двух и четырех пересекающих ее нитей. При этом на поверхности ткани образуется структура диагональных линий. Возможны и другие типы переплетений, например трехмерные.

Ниже приведены характеристики тканевых армирующих материалов на основе волокон различных типов.

Отечественной промышленностью выпускается широкий ассортимент стеклотканей, отличающихся по составу стекла, характеристикам нитей, виду переплетения, толщине, прочности, плотности укладки волокон, виду замасливателя и другим показателям [14]. Характеристики некоторых стеклотканей, наиболее часто применяемых в качестве армирующих материалов в композитах, приведены в табл. 2.8.

Характеристики некоторых марок органотканей приведены в табл. 2.9.

2.8. Характеристики стеклотканей, наиболее часто применяемых в качестве армирующих элементов

Марка ткани	Тип переплетения нитей	Поверхностная плотность m, кг/м²	Толщина h, мм	Плотность укладки нитей, текс/мм		Средняя прочность σ_*, ГПа	
				по основе	по утку	по основе	по утку
Т-10	Сатин 8/3	0,29	0,23	187	104	0,47	0,26
Т-10-80		0,29	0,25	187	104	0,51	0,29
Т-11	Сатин 8/3 или 5/3	0,39	0,30	238	140	0,39	0,23
Т-11-752		0,39	0,30	238	140	0,39	0,23
Т-11-ГВС-9		0,39	0,30	238	140	0,27	0,14
Т-12		0,37	0,30	229	135	0,39	0,23
Т-12-41		0,37	0,30	229	135	0,36	0,19
Т-12-ГВС-9		0,37	0,30	229	135	0,27	0,14
Т-13	Полотно	0,29	0,27	173	108	0,30	0,19
Т-14		0,31	0,29	173	140	0,28	0,23
Т-14-78		0,31	0,29	173	140	0,29	0,24
А-1		0,11	0,10	54	54	0,24	0,24
А-2		0,07	0,06	34	27	0,20	0,17
ТСУ 8/Э-ВМ-78	Сатин 8/3	0,32	0,27	134	179	0,33	0,43
ТУ ПР	Полотно	0,29	0,26	170	104	0,32	0,22
ТС-5Н-78		0,30	0,47	144	144	0,13	0,13
МТТС-2,1	Трехмерное переплетение	2,10	2,20	—	—	0,25	0,18

2.9. Характеристики тканей на основе органоволокон

Марка ткани	Тип переплетения нитей	Поверхностная плотность m, кг/м²	Толщина h, мм	Плотность укладки нитей, текс/мм		Средняя прочность σ_*, ГПа		Предельная деформация ε_*, %	
				по основе	по утку	по основе	по утку	по основе	по утку
СВМ	Полотно	—	0,45	142	142	0,39	0,39	—	—
		0,11	0,25—0,3	44,1	47	0,24	0,27	14	12
		0,075	0,15	26,5	30	0,28	0,35	10	9
	Рогожка 2/2	0,18	0,35	59	74	0,27	0,31	9	11
		0,11	0,20	43	44	0,26	0,26	10	10
	Сатин 8/3	0,16	0,40	75	69	0,26	0,21	12	9
	Однонаправленная лента	0,17	0,35	168	25,7	71	—	7,5	—
Кевлар-49 (США)	Полотно	—	0,45	140	130	—	—	—	—

2.10. Характеристики коротких волокон

Волокна	Отношение l_f/d_f	Диаметр d_f, мкм	Плотность $\rho\cdot10^{-3}$, кг·м$^{-3}$	Средняя прочность $\bar{\sigma}_*$	Модуль упругости E
				ГПа	
Измельченные минеральные	30—300	1—10	—	1,4	103
Даусонит	30—40	0,4—0,6	2,4	—	—
Франклин	40	2	—	—	—
Файбекс	40	0,1—0,15	3,2	6,9	276

Примечание. l_f — длина волокон.

и 2.10 [7]. Арамидные ткани характеризуются достаточно высокой термостойкостью. После нагрева до температуры 530 К они сохраняют исходный уровень свойств. Ткани на основе арамидных волокон обладают малой усадкой по сравнению с тканями на основе других типов волокон.

Композиты на базе органотканей (тканевые слоистые органопластики) обладают по сравнению со стеклопластиками более высокими прочностными и жесткостными характеристиками.

Углеродные волокна средней прочности используются в виде тканей различных структур [22]. К достоинствам углеродиных тканей относятся их высокая термостойкость, жесткость и прочность. Углеродные ткани, применяемые в качестве армирующих элементов композитов, как правило, используются в виде однонаправленных лент (кордовые ткани) или имеют полотняное или сатиновое переплетение. Однако применяют также ткани более сложного переплетения: саржевого и различного типа трикотажных.

2.4. КОРОТКОВОЛОКНИСТАЯ АРМАТУРА

Измельченные минеральные волокна получают измельчением минеральной ваты [16]. Волокна состоят (75%) из силикатного кальция и других легких металлов (25%); они представляют собой легкосыпучий порошок белого или сероватого цвета. Диаметр волокон 1—10 мкм при средней длине 275 мкм. Среднее отношение длин волокна к диаметру колеблется в пределах 40—60.

Измельченные минеральные волокна можно использовать как волокнистый наполнитель термопластов и реактопластов. Интенсивно исследуется проблема использования их в каучуках, изучаются также возможности применения минеральных волокон в клеях, герметиках и термоэластопластах.

При пропитке волокна поглощают небольшое количество жидкого связующего и могут использоваться для наполнения пластмасс.

Волокна франклин — промышленный продукт фирмы «Сертейнтид Продактс Корпорейшен», представляющий собой волокнистый кристаллический сульфат кальция в форме полугидрата, γ-ангидрита или β-ангидрита. Волокна франклин образуются в результате кристаллизации в водной среде при повышенных давлении и температуре. Волокна франклин — белый блестящий порошок, состоящий из микрокристаллов длиной 80 мкм одинакового диаметра, равного 2 мкм. Эти волокна химически стабильны, обладают очень низкой растворимостью в воде, имеют высокую термостойкость и хорошие теплоизоляционные свойства. Волокна обладают теми же свойствами, что

2.11. Свойства нитевидных кристаллов

Кристалл	Плотность $\rho \cdot 10^{-3}$, $кг \cdot м^{-3}$	Температура плавления, К	Средняя прочность $\bar{\sigma}_*$, ГПа	Модуль упругости E, ГПа
Оксид алюминия	3,9	355	14—23	480—1030
Нитрид алюминия	3,3	472	14—20	345
Оксид бериллия	1,8	822	13,8—19,3	689
Карбид бора	2,5	722	6,9	448
Графит	2,2	866	20,7	980
Оксид магния	3,6	3072	24,1	310,3

и безводный орторомбический β-сульфат кальция.

Волокна франклин применяются как наполнитель для пластмасс, повышающий их прочность. Пластмассы, наполненные волокнами франклин, обладают высокими физико-механическими и теплофизическими характеристиками. Поскольку волокна франклин имеют очень высокую термостойкость, их можно использовать не только для наполнения пластмасс, но и применять как усиливающий наполнитель для металлов, например алюминия. Композиты на основе алюминиевой матрицы и волокон франклин обладают более высокими прочностью и жесткостью, чем алюминий без волокна, что позволяет использовать их в качестве конструкционного материала.

Волокна даусонит представляют собой искусственно получаемые игольчатые кристаллы, которые могут использоваться в качестве наполнителя термопластов, повышающего их прочность. Термопласты, наполненные волокнами даусонит, сочетают высокий модуль упругости, хорошую теплостойкость и пониженный термический коэффициент расширения.

Волокна файбекс представляют собой микрокристаллы неорганического титаната, которые имеют сравнительно высокие модуль упругости и прочность. Они используются в качестве усиливающего наполнителя для пластмасс. Микрокристаллические волокна файбекс получают перекристаллизацией солей из расплава.

Некоторые характеристики коротких волокон приведены в табл. 2.10.

Усы представляют собой нитевидные монокристаллы, выращенные в специальных условиях. Усы имеют механическую прочность, эквивалентную прочности связи между атомами. Прочность усов обусловлена высоким совершенством и бездефектностью структуры кристаллов; такая структура не может быть получена в случае крупных кристаллов, всегда имеющих большое число дислокаций, резко уменьшающих их прочность. Усы карбида кремния имеют прочность более 30 ГПа и модуль упругости при растяжении более 690 ГПа.

Исследование зависимости прочности усов от их диаметра показывает, что по мере уменьшения диаметра и, следовательно, возрастания совершенства структуры прочность резко возрастает. Разрушающее напряжение при растяжении усов в 5—10 раз больше, чем у непрерывных армирующих волокон (стеклянных или борных).

Усы обладают одновременно достоинствами стеклянных и борных волокон: их предельное удлинение, как у стеклянного волокна (3—4%), а модуль упругости, как у борных волокон (410—690 ГПа и более).

Свойства некоторых наиболее распространенных видов нитевидных монокристаллов (усов) приведены в табл. 2.11.

Список литературы

1. **Абрамчук С. С., Ермоленко А. Ф., Протасов В. Д.** Оценка характеристик армирующих волокон путем испытания их пучков//Механика композитных материалов. 1984. № 1. С. 3—8.

2. **Алюминиевые** и магниевые сплавы, армированные волокнами/В. С. Иванова, И. М. Коноев, Ф. М. Елагин и др. М.: Наука, 1974. 199 с.

3. **Акио С.** Карбонизация полимеров и получение карбоновых волокон//Успехи химии. 1973. Т. 13. Вып. 2. С. 301—312.

4. А. с. 1120212 СССР, МКИ³ GOIN 3/08. Способ испытания на растяжение нитей.

5. **Болотин В. В.** Статистические методы в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965. 278 с.

6. **Волокнистые** композиционные материалы с металлической матрицей/Под ред. М. Х. Шоршорова. М.: Машиностроение, 1981. 272 с.

7. **Высокопрочные** армирующие волокна//Обзорная информация/Сер. Промышл. хим. волокон. М.: НИИТЭХИМ, 1983.

8. **Ермоленко А. Ф., Абрамчук С. С., Протасов В. Д.** Оценка параметров распределения прочности армирующих волокон, взаимодействующих по боковой поверхности, путем испытания их пучков// Механика композитных материалов. 1985 № 1. С. 3—6.

9. **Ермоленко А. Ф.** Масштабный эффект прочности при растяжении однонаправленных армирующих элементов// Механика композитных материалов. 1986. № 1. С. 38—43.

10. **Жигач А. Ф., Цирлин А. М.** Физико-химические свойства и прочностные характеристики борных нитей, перспективы их применения для армирования композиционных материалов//Журнал ВХО им. Д. И. Менделеева. 1978. Т. 23. № 3. С. 264—272.

11. **Колпашников А. И., Белоусов А. С., Мануйлов В. Ф.** Высокопрочная нержавеющая проволока. М.: Металлургия, 1971. 184 с.

12. **Композиционные** материалы/Под ред. М. Х. Шоршорова и др. М.: Наука, 1981. 456 с.

13. **Конкин А. А., Коннова Н. Ф.** Механические и физико-химические свойства углеродистых волокон//Журнал ВХО им. Д. И. Менделеева. 1978. Т. 13. № 3. С. 259—263.

14. **Конструкционные** стеклопластики/В. И. Альперин, Н. В. Корольков, А. В. Мотовкин и др. М.: Химия, 1979. 360 с.

15. **Макаров П. В., Поварова К. Б., Заварзина Е. К.**//Физика и химия обработки материалов. 1986. № 6. С. 119—124.

16. **Монокристаллические** волокна и армированные ими материалы/Р. Л. Механ, И. Герцог и др., М.: Мир, 1973. 437 с.

17. **Наполнители** для полимерных композиционных материалов: Справочное пособие/Под ред. Г.С. Каца и Д.В. Милевски. М.: Химия, 1981. 672 с.

18. **Перепелкин К. Е.** Структура и свойства волокон. М.: Химия, 1985. 324 с.

19. **Портной К. П., Салибеков С. Е., Светлов И. Л.** и др. Структура и свойства композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1979. 255 с.

20. **Производство** стеклянных волокон и тканей/Под ред. М. Д. Ходаковского. М.: Химия, 1973. 312 с.

21. **Стеклянные** волокна/Под ред. М. С. Аслановой М.: Химия, 1979. 256 с.

22. **Текстильные** материалы на основе углеродных волокон и методы определения их свойств//Обзорная информация/ Сер. Промышл. хим. волокон. М.: НИИТЭХИМ, 1985.

23. **Федоров Б. Б., Шоршоров М. Х., Хакимова Д. К.** Углерод и его взаимодействие с металлами. М.: Металлургия, 1978. 208 с.

24. **Blumberg H.** The future of newly develped fibres//Jurnal of Industrial Fabrics. — 1984. Vol. 3. N 1. P. 9—32.

25. **Huges J. D. H.** Strength adn modulus of current carbon fibres//Carbon. — 1984. Vol. 24. N 5. P. 551—556.

Глава 3

КОМПОЗИТЫ С ПОЛИМЕРНОЙ И УГЛЕРОДНОЙ МАТРИЦАМИ

В качестве армирующих элементов композитов с полимерной матрицей используются непрерывные и дискретные волокна различной природы, ткани и нетканые материалы на основе этих волокон. Наибольшее распространение получили пластики, армированные стеклянными, углеродными, органическими, борными и некоторыми другими видами волокон. В качестве матрицы используются отвержденные эпоксидные, полиэфирные и некоторые другие термореактивные смолы, а также полимерные термопластичные материалы.

Достоинства композитов с полимерной матрицей следующие: высокие удельные прочностные и упругие характеристики, стойкость к химическим агрессивным средам, низкие тепло- и электропроводность, радиопрозрачность стеклопластиков и т. п. К достоинствам этих материалов следует отнести также и то, что при их изготовлении относительно легко при умеренных температурах и давлениях удается соединить армирующие элементы с матрицей. При этом могут быть применены как традиционные процессы типа прессования, так и новые, такие, как намотка, когда материал и изделие создаются одновременно.

К недостаткам пластиков относятся их низкие прочность и жесткость при сжатии и сдвиге, низкие тепловая и радиационная стойкость, гигроскопичность, подверженность изменению физико-механических характеристик при старении и под воздействием климатических факторов.

Низкие тепловая и эрозионная стойкости, а также некоторые другие недостатки полимерных композитов, в основном, определяются полимерной матрицей. Качественно новый уровень свойств материала позволяет получить карбонизация полимерной матрицы, реализуемая при образовании углерод-углеродных композиционных материалов (УУКМ), представляющих собой систему углеродное волокно — углеродная матрица. Углеродная матрица, подобная по физико-механическим свойствам углеродным волокнам, позволяет наиболее полно реализовать в композите уникальные свойства углеродного волокна.

УУКМ обладают целым рядом ценных, часто уникальных свойств: чрезвычайно высокой теплостойкостью (в инертной среде они сохраняют свои высокие удельные физико-механические свойства вплоть до 2500 К и работают при повышенных температурах в отличие от углепластиков), хорошей стойкостью к термоудару (как тугоплавкие материалы), низкими значениями температурного коэффициента расширения и теплопроводности, высокой стойкостью к химическим реагентам (это свойство делает их весьма перспективными для использования в конструкциях химического машиностроения, атомной энергетике и др.).

3.1. ПРОЦЕССЫ ИЗГОТОВЛЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ И ИЗДЕЛИЙ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ

3.1.1. Прессование. Методом прессования получают детали и узлы разнообразного назначения, формы и размеров, обладающие высокой механической прочностью и жесткостью, хорошими диэлектрическими и радиотехническими свойствами. Прессованные детали из волокнистых термостойких и жаростойких пресс-материалов обладают стойкостью к высоким температурам, тепловому удару и окислению. Метод прессования позволяет изготавливать в пресс-формах детали и узлы машин массой от нескольких граммов до 100 кг и более с толщиной стенки от 0,5 до 100 мм и более.

Существует две разновидности метода прессования: прямое и литьевое.

Прямое горячее прессование предпочитают при изготовлении деталей различного назначения средней сложности, больших габаритов и массы.

При литьевом прессовании материал укладывают в загрузочную камеру предварительно замкнутой пресс-формы и под действием высокого давления и температуры через литниковые каналы продавливается (перетекает) в оформляющую полость пресс-формы. Литьевое прессование рационально применять для изготовления тонкостенных деталей сложной конфигурации с мелкой и тонкой арматурой при повышенных требованиях к точности размеров.

Выбор того или иного метода прессования следует осуществлять исходя прежде всего из конструктивных особенностей деталей, технических требований, предъявляемых к готовым изделиям, а также экономической целесообразности.

Основными характеристиками процесса прессования являются температура, давление и время выдержки.

Температура прессования зависит главным образом от химической природы связующего; она является важным фактором процесса прессования, определяющим пластичность мате-ла, т. е. способность материала к формованию и отверждению.

Температура прессования выбирается в зависимости от типа и марки материала, условий его подготовки, предварительного подогрева, исходной текучести, давления прессования, скорости отверждения, формы и размеров детали.

При переработке полимерных волокнистых композитов методом прессования различают два вида давления:

формования — это давление, при действии которого разогретый материал уплотняется и ему придается конфигурация детали в оформляющей полости пресс-формы;

отверждения — это давление, которое в процессе отверждения отформованного материала необходимо для предотвращения раскрытия формы под действием упругих или обратимых сил деформации и выделяющихся паров и газов.

Необходимое давление формования выбирается с учетом следующих факторов: текучести материала, зависящей от типа и содержания связующего и наполнителя, степени предварительной поликонденсации связующего (содержания растворимой части смолы) и содержания влаги. В зависимости от значений текучести материала, определяемых в лабораторных условиях, выбирается давление прессования.

Анализ экспериментальной зависимости прочности от давления прессования показывает, что, начиная с некоторого нижнего значения, давление прессования в довольно широком интервале почти не влияет на прочность материала в изделии.

Для стеклонаполненных материалов на основе эпоксидного и эпоксиднофенольного связующего минимальное давление прессования равно 2,5—5,0 МПа. При прессовании слоистых композитов удовлетворительное качество изделий достигается при давлении 1,0—5,0 МПа для всех видов связующих.

Время выдержки зависит прежде всего от следующих свойств материалов: скорости его отверждения, зависящей от природы связующего, типа отвердителя и ускорителя; содержания влаги и летучих продуктов в пресс-материале; температуры прессования; формы и толщины детали, теплофизических свойств материала; конструкции пресс-формы.

Технологический процесс прямого прессования волокнистых полимерных композитов включает следующие стадии: подготовку и дозирование материала, его предварительный подогрев, загрузку пресс-формы и смыкание пресс-формы, подпрессовку, выдержку под давлением, подъем подвижной плиты пресса и разъем пресс-формы, извлечение детали, очистку пресс-формы и подготовку ее к следующему рабочему циклу.

Подготовка материала к прессованию. Подготовка материала к переработке включает оценку его технологических характеристик (плотности, текучести, содержания влаги и летучих, содержания связующего и растворимой части смолы), подготовку его к виду, удобному для укладки в пресс-форму, а при необходимости доведение технологических свойств до требуемых значений путем сушки или других операций.

Высокое содержание влаги и летучих веществ в материалах является причиной появления дефектов в готовых деталях — вздутий, трещин, короблений, местного отжима связующего; низкое содержание этих веществ снижает текучесть материала, ухудшает его таблетируемость, приводит к недопрессовкам.

В практике переработки стеклонаполненных материалов иногда прибегают к увлажнению их паром или растворителями, выдерживая в атмосфере с влажностью 98%. В результате увлажнения технологические свойства материалов несколько улучшаются, однако повышение содержания влаги и летучих более нормы неизбежно приводит к известным видам дефектов на поверхности готовых деталей: вздутиям, трещинам, расслоениям, пористости и т. д.

Для изготовления из стеклонаполненных материалов мелких деталей сложной конфигурации с элементами толщиной менее 2—3 мм, а также деталей с большим количеством арматуры рекомендуется использовать экструдированный материал. Экструдирование позволяет существенно повысить текучесть (на 20—30%), уменьшить на 0,5—2,5% содержание влаги и летучих, сократить колебания усадки, однако вследствие сильного измельчения армирующих волокон разрушающие напряжения при растяжении и изгибе, а также удельная ударная вязкость в зависимости от марки материала и условий экструдирования уменьшаются на 70—80%.

Давление экструдирования зависит от марки материала, температуры подогрева и размеров фильеры.

Материалы с ориентированным армирующим наполнителем, поступающие с заводов-изготовителей в виде свернутых в рулоны лент, перед переработкой, как правило, разрезают на ленты определенной длины. При изготовлении силовых плоских деталей простой конфигурации длина лент может быть 100—150 мм, для получения деталей сложной формы наиболее предпочтительна длина лент от 10 мм и более.

Слоистые материалы с тканым армирующим наполнителем перед прессованием раскраивают на заготовки, повторяющие формы и размеры изготавливаемых деталей. Количество слоев заготовок определяется исходя из толщины детали и толщины слоя предварительно пропитанной ткани.

Процесс разрезки тканей на заготовки является трудоемким, требующим достаточно точно изготовленных шаблонов. Поэтому применяют технологические лазерные установки мощностью до 500 Вт с системами числового программного управления.

Материалы с хаотически расположенными волокнами, которые в состоянии поставки имеют большой удельный объем, целесообразно применять в виде таблеток. Стеклонаполненные материалы таблетируют в подогретых пресс-формах, что несколько снижает содержание в них влаги, а также усилие, требуемое для образования таблеток.

Нагрев материала до температуры прессования, при которой он переходит в вязкотекучее состояние, и выдержка под давлением (отверждение) составляют наиболее длительные стадии технологического процесса прессования. Однако при этом облегчаются условия формования изделия, сокращается время смыкания пресс-формы, снижаются усилие прессования, время выдержки, износ пресс-формы и содержание влаги и летучих в материале. Время подогрева зависит от геометрических размеров таблеток и плотности материала в таблетках.

В условиях единичного производства подогрев материала для крупных деталей осуществляют непосредственно в пресс-форме.

Для новолачных фенолоформальдегидных материалов наиболее эффективен и высокопроизводителен высокочастотный подогрев.

Менее эффективен высокочастотный нагрев для материалов на основе резольных смол. Материалы на основе кремнийорганических смол, отличающиеся высокими диэлектрическими свойствами, нагревать токами высокой частоты не удается.

Пресс-форма загружается материалом с равномерным его распределением по всей поверхности пресс-формы. Если объем загрузочной камеры недостаточен, то загрузку пресс-формы производят в несколько приемов, последовательно уплотняя материал каждой порции путем частичного смыкания формы.

Загрузку слоистых материалов производят, как правило, послойно в виде пакетов, чередуя направление основы и утка тканей, если прочность детали в обоих направлениях должна быть равной, и наоборот, если требуется анизотропия прочностных характеристик, то укладка слоев ткани производится только в направлении основы.

Подпрессовка. Основное назначение подпрессовок — дегазация пресс-формы с целью удаления летучих и паров влаги за короткий промежуток времени начальной стадии отверждения материала. Использование подпрессовки дает возможность сократить время выдержки, уменьшить внутренние напряжения, значительно (до 15%) повысить физико-механические и диэлектрические характеристики в готовых деталях. В зависимости от размеров и сложности деталей применяют, как правило, две-три (и более) подпрессовки. Однако подпрессовку можно использовать не всегда. При изготовлении тонкостенных деталей большой высоты, а также деталей в сложных пресс-формах с несколькими плоскостями разъема, сложными закладными элементами и арматурой применять подпрессовки нельзя.

Выполнение подпрессовок является ответственной операцией, момент начала ее выполнения зависит от характера пресс-материала, степени и скорости его прогрева в форме.

Выдержка — это время пребывания материала в нагретой форме, необходимое для его полного отверждения. Выдержкой при прессовании считается отрезок времени с момента первого смыкания и заканчивается в момент снятия давления для подъема пуансона перед извлечением отпрессованной детали.

При прессовании деталей из слоистых композитов время выдержки под давлением включает время охлаждения, которое производится также под давлением. Из-за низкой теплопроводности слоистых волокнистых композитов время охлаждения может быть значительным.

Съем деталей. В зависимости от конструкции пресс-формы и детали съем производится с помощью системы выталкивателей, специальных съемников или (для деталей из слоистых материалов) вручную.

Переработка термореактивных волокнистых полимерных материалов в отечественной промышленности осуществляется на гидравлических пресс-полуавтоматах и гибких переналаживаемых модулях.

В конструкции прессов предусмотрены средства для автоматического регулирования температуры нагрева пресс-форм, автоматического регулирования скорости хода подвижной плиты в процессе формования.

Универсальные гидравлические прессы применяют для изготовления крупногабаритных деталей из волокнистых композитов.

В состав гибкого производственного модуля входят: гидравлический пресс, система дозирования материала, система загрузки дозы материала в гнездо формы, система съема отпрессованной детали, системы ЧПУ прессом. Такой набор технических средств позволяет обеспечить прессование в автоматическом режиме разных деталей из одной партии материала.

Оценка качества изделий, полученных прессованием. В зависимости от назначения изделий в технической документации на изготовление и приемку их устанавливаются требования по физико-механическим, теплофизическим характеристикам, электро- и радиотехническим показателям, точности геометрических размеров, монолитности, внешнему виду и надежности.

Физико-механические и теплофизические характеристики материала в конструкции изделий определяют на образцах, вырезанных из некоторых контролируемых деталей, и на образцах-свидетелях, изготовленных из той же партии пресс-материала и по тем же технологическим режимам.

Важными показателями качества прессованных деталей являются состояние поверхности и структуры материала, которые в значительной мере влияют на надежность в условиях их эксплуатации. Кроме того, влияние дефектов одного и того же типа и размеров на физико-механические или другие эксплуатационные показатели из различных материалов не одинаково.

Дополнительная информация о процессах получения изделий из композитов методом прессования содержится в работах [6, 7, 10, 11, 21, 24].

3.1.2. Контактное, контактно-вакуумное и автоклавное формование. Известно более двадцати способов изготовления при низком давлении деталей и изделий из волокнистых полимерных композиционных материалов (ПКМ). Непосредственно процесс формования может быть осуществлен следующими способами: контактным, контактно-вакуумным, автоклавным.

Правильность выбора метода изготовления конструкций изделий является важной технологической задачей, определяющей, как правило, их свойства, а также преимущества ПКМ перед другими материалами. При выборе способа изготовления изделий необходимо учитывать их назнаи требования, предъявляемые к ним, конструкцию и габариты изделия, а также масштабы их производства.

Кроме того, способ изготовления конструкций изделий зависит от типа армирующего волокнистого наполнителя и полимерного связующего. Параметры же процесса определяются в первую очередь типом используемого связующего и очень часто не зависят от применяемого армирующего материала.

Наиболее прост по аппаратурно-технологическому оформлению **метод контактного формования**, который применяется для изготовления сравнительно небольшого количества крупногабаритных малонагруженных изделий сложной конфигурации. На подготовленную форму последовательно укладываются, пропитываются связующим и уплотняются до нужной толщины слои армирующего материала.

Процесс изготовления изделий методом контактного формования состоит из следующих операций: нанесения разделительных покрытий на формы; раскроя тканых или нетканых армирующих материалов; приготовления связующего; укладки армирующего материала на форму; нанесения на армирующий материал связующего и пропитки им арматуры; формования изделия с одновременным или последующим его отверждением при комнатной температуре или нагревании до 70—95 °С после желатинизации смолы; извлечения изделия из формы и механической обработки его по контуру согласно требованиям чертежа, контроля геометрии и дефектоскопии.

Способ контактного формования имеет целый ряд недостатков, которые особенно проявляются в условиях серийного производства. К ним относятся: значительный разброс показателей физико-механических свойств изделий; длительность процесса формования; зависимость качества изделий от квалификации формовщиков; тяжелые условия труда.

Однако применение способа контактного формования для производства в небольших количествах таких изделий, как, например, лодок, крыльев автомобилей, небольших катеров, трехслойных с пенопластным заполнителем кузовов специальных машин и укрытий антенн, считается экономически целесообразным, так как не требует сложной и дорогостоящей технологической оснастки и оборудования.

Контактно-вакуумное формование. Процесс контактно-вакуумного формования осуществляется за счет разности давления между наружным давлением и внутренним разрежением, создаваемым в полости между эластичным мешком и жесткой формой. Контактно-вакуумный способ формования применяют, как правило, в опытном производстве для изготовления небольшой серии крупногабаритных сложной формы однослойных и многослойных конструкций изделий, содержащих промежуточный слой из сотового заполнителя или теплоизолирующего пенопласта. В зависимости от класса применяемого связующего формование осуществляют «мокрым» способом с пропиткой сухого армирующего материала непосредственно на форме жидким связующим аналогично процессу контактного формования или «сухим» способом с формованием предварительно пропитанного и подсушенного армирующего материала с частичным освежением формуемого материала основным связующим или без него.

При «мокром» способе пропитки применяются связующие как холодного отверждения на основе полиэфирных и эпоксидных смол, так и горячего отверждения на основе модифицированных поливинилбутиролем фенолформальдегидных смол. При «сухом» способе формования используются связующие только горячего отверждения.

Автоклавное формование. Автоклавный способ формования применяется в производстве крупногабаритных конструкций изделий сложной формы с более высокими и стабильными в процессе эксплуатации физико-механическими свойствами при достаточно большой серии. Способ позволяет получать как однослойные изделия, так и многослойные с сотовым заполнителем или с заполнителем из жесткого пенопласта.

Для автоклавного формования волокнистых композитов могут быть пользованы автоклавы, применяемые для вулканизации резин и специально созданные для этих целей аппараты. Процесс автоклавного формования во многом сходен с контактно-вакуумным формованием. Отличие состоит в способе приложения и величине давления формования. Благодаря тому, что форма в момент опрессовки выложенной заготовки изделия в автоклаве испытывает всестороннее и равномерное нагружение, конструкция формы может быть достаточно тонкостенной, легкой, но должна сохранять герметичность в течение всего периода формования. Еще одним обязательным требованием, предъявляемым к форме для автоклавного формования, является высокая теплопроводность материала формы и сравнительно небольшая толщина ее стенки, чтобы прогрев формуемой заготовки изделия происходил при минимальных затратах времени.

При формировании крупногабаритных изделий сложного профиля особое внимание должно быть обращено на тщательную приформовку каждого слоя препрега с прикаткой горячим (70—90 °C) валиком и плотное прилегание эластичного чехла из резины, прорезиненной ткани и пленки.

Последовательность операций технологического процесса при автоклавном формовании следующая: выкладка заготовки изделия на подготовленную форму согласно требованиям чертежа, установка на расстоянии не менее чем 40 мм от кромки формы (в зоне припуска) термопары, обеспечивающей режим отверждения; укладка на заготовку перфорированной полипропиленовой пленки, по периметру заготовки — дренажной трубки; укладка поверх пленки одного-двух слоев чистой стеклянной ткани в качестве дренажного слоя; подготовка и установка эластичного чехла; создание разрежения под чехлом (0,08—0,09 МПа) и избыточного давления в автоклаве (0,3 МПа) инертным газом; проверка герметичности системы; формование по заданному температурному режиму и давлению; охлаждение, сброс давления в аппарате и вакуума под чехлом, снятие изделия.

Режимы автоклавного формования по температуре и давлению назначаются исходя из вида применяемого связующего и размеров формуемого изделия.

Процесс автоклавного формования трудоемок, качество выкладки зависит только от квалификации работников. С целью сокращения доли ручного труда на операции выкладки, сохранения одинаковых условий выкладки на всей поверхности формуемого пакета выкладку препрега (однонаправленных предварительно пропитанных лент) осуществляют на специально созданных многокоординатных выкладочных машинах с ЧПУ. При этом заданное количество слоев и углы укладки лент в каждом слое обеспечиваются движением раскладывающей головки по программе. Процесс автоматизированной выкладки позволяет в течение всего времени формования поддерживать давление прикатки и температуру прикатного ролика в узком диапазоне, что обеспечивает стабильность технологического процесса и его высокую производительность.

Процесс формования за один технологический цикл нескольких заранее полученных элементов, например прессованием, намоткой или выкладкой отвержденных или частично отвержденных в едином силовом узле с последующим совместным отверждением в автоклаве, получил название *интегрального*. Процесс интегрального формования позволяет получить новые качественные решения в создании высоконагруженных конструкций из волокнистых композитов, сократить объем слесарно-подгоночных работ, повысить качество.

3.1.3. Намотка. Одним из самых распространенных и совершенных процессов изготовления высокопрочных армированных оболочек является процесс непрерывной намотки. При этом методе лента, образованная системой нитей или сформированная из ткани, пропитывается полимерным связующим, подается на вращающуюся оправку, имеющую конфигурацию внутренней поверхности изделия, и укладывается в ней в различных направлениях. После получения необходимой толщины и структуры материала производится отверждение и удаление оправки. Метод непрерывной намотки позволяет получать оболочки вра-

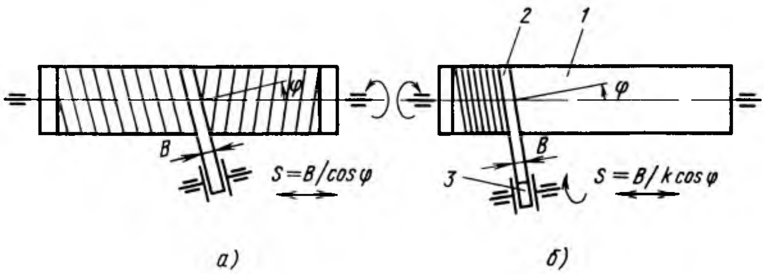


Рис. 3.1. Схема спирально-винтовой намотки лентой:
а — в один слой за один проход; *б* — в *B/k* слоев за один проход: *1* — оправка; *2* — наматываемая лента; *3* — катушка с лентой

ния сложной формы и реализовать с высокой точностью большое количество схем армирования изделий из композитов.

Применение тканых лент из различных волокнистых материалов при намотке изделий конической формы позволяет располагать слои армирующего материала не только параллельно образующей, но и параллельно и под различными углами к оси изделия.

Совершенство процесса изготовления армированных оболочек методом намотки определяет возможность его автоматизации и программирования анизотропии свойств в изделии, с одной стороны, с другой — получения изделий, имеющих форму тел вращения — цилиндров, замкнутых оболочек со сферическими днищами, конусов, тороидов и др.

Существует несколько технологических методов формования изделий намоткой в зависимости от способа нанесения связующего на волокнистый армирующий материал и обеспечения необходимого содержания его в материале изделия.

Способ «сухой» намотки заключается в том, что волокнистый армирующий материал перед формованием предварительно пропитывают связующим на пропиточных машинах, которые обеспечивают не только качественную пропитку, но и требуемое равномерное содержание связующего в препреге на основе стекло-, органо- и углеволокон за счет применения различных растворителей для регулирования вязкости связующего в процессе пропитки. Особенно эффективно применение предварительно пропитанных ровингов, полотен стекло-, углетканей и лент.

При использовании «сухого» метода намотки улучшаются условия и культура производства, повышается производительность процесса намотки в 1,5—2 раза, появляется возможность использования практически любого связующего: эпоксидного, эпоксидно-фенольного, фенолформальдегидного, полиимидного.

Способ «мокрой» намотки отличается тем, что пропитка армирующего волокнистого материала связующим и намотка на оправку совмещены. Необходимая вязкость связующего в данном случае обеспечивается выбором соответствующей смолы и применением подогрева связующего в пропитывающей ванне. Преимущество способа «мокрой» намотки заключается в более низком контактном давлении формования, что требует оборудования с меньшей мощностью привода и лучшей формуемостью поверхностей изделия. Поэтому способ «мокрой» намотки применяется преимущественно для изготовления крупногабаритных оболочек сложной конфигурации. Для достижения заданных углов армирования применяют намоточные машины с ЧПУ.

В зависимости от способа создания контактного давления формования различают следующие методы намотки: формование методом намотки с технологическим натяжением армирующего волокнистого материала, формование методом локального прижима уплотняющим роликом или с применением того и другого одновременно.

По типу укладки армирующего волокнистого материала в намотанном изделии различают несколько видов намотки, например прямую (окружную) намотку, спиральную, спирально-перекрестную, продольно-поперечную намотку и др. Независимо от способа намотки технологические стадии и физико-химические процессы образования структуры армированных волокнами композитов мало отличаются. Поэтому технологический цикл формования в зависимости от происходящих процессов разделен на следующие стадии: намотка и получение заготовки изделия, нагрев заготовки на оправке до температуры стеклования связующего, нагрев до температуры отверждения связующего, выдержка — отверждение связующего при постоянной температуре, охлаждение до температуры стеклования и далее до конечной температуры, съем изделия с оправки.

Прямая (окружная) намотка. Ее применяют в тех случаях, когда необходимо получить оболочку, длина которой равна или меньше ширины наматываемой ленты. В качестве армирующего волокнистого материала при прямой намотке используют, как правило, полотна предварительно пропитанных тканей или тканых лент.

В случае, когда методом прямой намотки необходимо получить изделие, длина которого намного превышает ширину одного полотна (ленты), применяют намоточные устройства с несколькими узлами раскладки. Сущность такого процесса заключается в одновременной укладке предварительно пропитанных связующим полотен ткани на оправку с нескольких самостоятельных раскладывающих механизмов.

Спиральная (тангенциальная, кольцевая) намотка. Сущность метода заключается в том, что сформированную ленту волокнистого материала, пропитанную полимерным связующим (тканая или однонаправленная), укладывают на поверхность оправки по винтовой линии. Витки, образованные

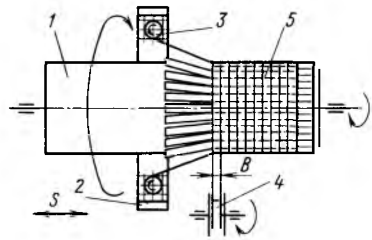


Рис. 3.2. Схема продольно-кольцевой (продольно-поперечной) намотки:

1 — оправка; *2* — вертлюг катушек продольных лент; *3* — катушка продольной ленты; *4* — катушка кольцевой ленты; *5* — наматываемая оболочка

непрерывной укладкой ленты, плотно уложены друг к другу или имеют строго постоянный нахлест, величина которого связана с числом формуемых одновременно слоев заданной структуры. Для спирально-винтовой намотки возможны два варианта укладки слоев армирующего материала:

однослойная укладка (рис. 3.1, *а*): формуется слой толщиной, равной толщине одной ленты, подаваемой на оправку, а ленты укладываются строго встык друг к другу;

многослойная укладка (рис. 3.1, *б*): формируется многослойная структура за один проход раскладывающего устройства; при этом лента укладывается на оправке с нахлестом, характеризуемым параметром k.

В сочетании с другими видами намотки (особенно со спирально-перекрестной) этот метод используется достаточно широко. Отдельно метод находит применение в тех случаях, когда необходимо провести усиление в местах, где требуется повышенная кольцевая прочность или жесткость. К таким случаям относятся: упрочнение цилиндрической части металлических сосудов давления, металлических труб различного диаметра, упрочнение артиллерийских стволов, стволов стрелкового оружия и др. Этот метод намотки применяется в основном для изделий цилиндрической формы. Однако возможна намотка изделий на конической оправке с углом конусности $\varphi \leqslant 20°$ для «мокрого» способа и $\varphi \leqslant 30°$ для «сухого» способа намотки.

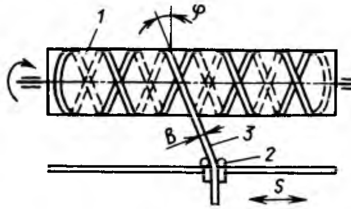


Рис. 3.3. Схема спирально-перекрестной намотки:

1 — оправка; *2* — каретка поперечного перемещения катушки; *3* — лента

Продольно-кольцевая (продольно-поперечная) намотка. Наиболее распространенная технологическая схема продольно-поперечной намотки показана на рис. 3.2. Вертлюг, на котором по периметру установлены шпули с ленточным наполнителем, вращаясь синхронно с вращением оправки, перемещается при этом вдоль оси оправки, укладывая продольные ленты. Одновременно с раскладывающего устройства спирально-винтовой намоткой укладывается ленточный армирующий материал, фиксирующий ленты продольной укладки. В данном случае намотку полной толщины стенки изделия осуществляют за несколько сложных проходов. Метод продольно-поперечной намотки, как правило, применяется при «сухом» режиме формования изделий.

Спирально-перекрестная намотка. При этом методе лента армирующего материала заданной ширины B укладывается на оправку с подачей S, превышающей ширину ленты в целое число раз. За прямой и обратный ход раскладывающего устройства (полный проход) формируется один спирально-перекрестный виток, закрывающий часть поверхности оправки. При следующем проходе раскладывающего устройства лента укладывается встык к ранее намотанной (рис. 3.3). Процесс ведут до тех пор, пока не будет закрыта вся поверхность оправки и, таким образом, сформирован полный двойной спиральный слой. Для получения заданной толщины стенки формируемого изделия проводят намотку нескольких таких слоев [20].

Этот метод намотки наиболее распространен; его широко применяют

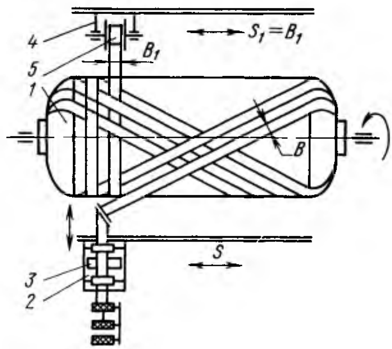


Рис. 3.4. Схема совмещенной спирально-кольцевой намотки:

1 — оправка; *2* — суппорт для спиральной намотки; *3* — ленто-пропитывающий тракт спиральных слоев; *4* — суппорт тангенциальной намотки; *5* — катушка для кольцевых слоев

для изготовления изделий, имеющих форму тел вращения с произвольной образующей — цилиндров, конусов, сфер, баллонов давления и др.

Метод имеет большой диапазон возможностей по конструированию различных схем укладки волокнистого армирующего материала в соответствии с действующими нагрузками.

Меняя угол намотки, можно получить различное распределение нагрузок в продольном и окружном направлении, т. е., распределяя армирующий материал вдоль направления действия главных напряжений от действующих нагрузок, можно достигнуть максимального использования прочности исходных волокон в изделиях.

Совмещенная спирально-кольцевая намотка. Метод заключается в одновременной укладке армирующего материала, сформированного в ленте, на оправку, с двух раскладывающих устройств, движение которых программированно задается вращением оправки (рис. 3.4). Непременным условием данного способа является то, что начало намотки спирально-винтовым и спирально-перекрестным методами и их окончание должно быть осуществлено в одно и то же время.

Метод применяют для изготовления намоткой изделий цилиндрической и конической формы с углом конусности не более 20°.

Косослойная продольно-поперечная намотка. Метод заключается в том, что слой продольно-поперечного армирования формируется не на всей длине оправки, а в пределах технологической ленты, укладываемой на оправку спирально-винтовым методом с малой подачей. Набор требуемой толщины стенки формуемого изделия осуществляется обычно за один ход раскладывающего устройства (рис. 35).

Формуемое изделие образуется путем спирально-винтовой намотки на оправку псевдоленты, образованной лентой кольцевого армирования, состоящей из n прядей, и нитями осевого армирования, подаваемых с вертлюга.

Пряди ленты кольцевого армирования пропитываются связующим непосредственно в процессе намотки «мокрым» способом, пропитка сухих осевых нитей осуществляется на оправке за счет избытка связующего в ленте кольцевых прядей.

Метод широко используется для изготовления напорных труб малого и среднего диаметров, а также конических изделий с углом конусности не более 20°.

Разнообразие способов получения изделий, имеющих форму тел вращения, предоставляет широкие возможности для выбора оптимальных конструктивно-технологических решений для создания прогрессивных конструкций из волокнистых полимерных композитов. Вместе с этим практика создания изделий из полимерных композитов позволила выделить целый ряд отработанных и проверенных решений, определяющих однозначные принципы выбора того или иного способа намотки. Например, крупногабаритные (диаметром более 800 мм) цилиндрические однослойные и многослойные конструкции с кольцевыми местами усиления жесткости целесообразнее с точки зрения получения лучших технико-экономических показателей изготавливать методом окружной намотки из предварительно пропитанных тканых армирующих материалов.

Для получения труб большого диаметра, работающих в условиях высокого внутреннего давления, хорошие результаты дает способ продольно-поперечной намотки из предварительно

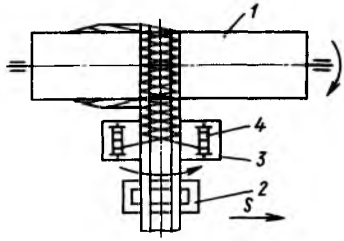


Рис. 3.5. Схема косослойной продольно-поперечной намотки:
1 — оправка; 2 — ванна для пропитки кольцевых жгутов; 3 — вертлюг для укладки осевых нитей; 4 — катушка для нитей

пропитанных лент с однонаправленной волокнистой структурой. Для получения труб малого диаметра (менее 400 мм) применяют косослойную продольно-поперечную спиральную намотку «мокрым» способом с использованием нитей и жгутов армирующего материала и эпоксидных связующих. Достаточно широкое распространение для производства напорных труб малой длины получил способ окружной намотки полотнами предварительно пропитанных тканей.

Создание баллонов высокого давления сферической и цилиндрической формы со сферическими цельномотаными днищами стало возможным благодаря созданию и развитию теории и метода спиральной намотки непрерывными лентами из волокнистых материалов по программируемым траекториям.

Параметры процессов намотки. Процессы формования методом намотки достаточно разнообразны, но все их можно в зависимости от состояния используемых армирующих материалов и полимерных связующих свести к двум способам — «сухому» и «мокрому». Причем некоторые методы намотки (окружная ткаными армирующими материалами, продольно-поперечная однонаправленными лентами) реализуются только при «сухом» способе, другие могут быть реализованы и тем и другим способом. Однако, несмотря на принципиальное различие этих способов и присущие им индивидуальные закономерности, между ними имеются и сходство: технологические факторы намотки, контактное давление, технологическое натяжение, температура разогрева связующего для обоих способов одинаковы.

Один из наиболее значимых технологических факторов процесса «мокрой» намотки, позволяющих существенным образом влиять на формирование структурных и прочностных показателей, — натяжение волокнистого армирующего материала. В зависимости от типа армирующего материала, применяемого связующего, а также габаритов изделия характер влияния натяжения на структуру композитов может изменяться.

Эффективный способ уменьшения фильтрации связующего из внутренних слоев на поверхность наматываемой оболочки, а следовательно, и степени неоднородности структуры — управление процессом миграции связующего путем изменения технологического натяжения по специально отработанной программе.

Натяжение при намотке — это фактор, регулирующий начальное напряженное состояние двухкомпонентной системы волокнистого композита.

Теория образования начальных напряжений в изделиях из волокнистых систем достаточно полно изложена в [2, 3, 22, 23]. Изменяя усилие натяжения волокон при намотке по заданному закону, можно существенно влиять на начальные напряжения в готовом изделии.

Диапазон относительных толщин, в которых этот метод оказывается эффективным, определяется степенью радиальной податливости наматываемого волокнистого армирующего материала, от которого зависит падение натяжения в наматываемых слоях, и предельно возможной величиной натяжения для определенного волокнистого материала. Этот диапазон может быть несколько расширен сочетанием программированной намотки с разделением процесса намотки (формования) на несколько циклов по толщине изделия. Положительный эффект достигается в этом случае за счет уменьшения объема композиционно-волокнистой системы, участвующей в одном цикле формования.

Другую группу факторов процесса намотки, влияющих на свойства композита в конструкции изделия, составляют параметры отверждения (полимеризации) полимерного связующего. Уровень температуры отверждения обычно выбирается в зависимости от типа применяемого связующего таким образом, чтобы обеспечить заданные требования по физико-механическим характеристикам отвержденной матрицы в композите, с одной стороны, с другой — закон изменения температуры в процессе нагрева и охлаждения должен учитывать конкретные условия, вытекающие из разнородности коэффициентов линейного термического расширения материалов заготовки изделия, ее геометрии, теплопроводности применяемой формообразующей оснастки, интенсивности теплопритока нагревательных устройств. Вместе с этим технологические режимы отверждения должны обеспечивать бездефектную структуру материала в конструкции с наименьшими затратами энергетических ресурсов.

Отработку режимов отверждения, как правило, проводят в несколько этапов: на образцах ненаполненного связующего, на модели изделия и натурном изделии. Выбор режима отверждения особо важное значение приобретает при изготовлении крупногабаритного изделия, состоящего из нескольких полимерных материалов с различной температурой отверждения. В этом случае необходимо, чтобы температура отверждения обеспечивала оптимальные характеристики всех материалов и по всей толщине изделия.

Оценку кинетики отверждения полимерного связующего можно выполнять методом определения вязкоупругих свойств связующего по динамическому модулю сдвига микрообразца на крутильном маятнике. Выбранный с помощью торсионного маятника оптимальный из нескольких температурных уровней режим проверяется на модели изделия по прочностным и жесткостным (или другим, например, теплофизическим, радиотехническим) характеристикам композита. Окончательно выбранный режим отверждения уточняется по результатам отверждения натурного изделия и чения реальной картины температурных полей по заложенным при намотке датчикам температуры на поверхности оправки в местах перехода одного материала к другому и на различных уровнях по толщине изделия.

Другим методом определения времени гелеобразования и температуры стеклования связующего является метод дифференциально-термического анализа, который позволяет разграничить эти две характеристики по температуре и времени в условиях, приближенных к реальным условиям отверждения. Метод позволяет на образцах неотвержденного материала толщиной 1,5 мм по термограммам при двух различных скоростях нагрева определить температуру начала и конца гелеобразования, температуру стеклования и рассчитать время промежуточной выдержки для перехода полимерной матрицы в стеклообразное состояние. Температуру окончательного отверждения устанавливают при получении степени отверждения 95—98% на таком уровне, чтобы она была выше температуры стеклования на величину, равную разности между температурой, при которой ускорение отверждения (полимеризации) наибольшее, и температурой стеклования. Этот метод чаще применяется при выборе режимов отверждения эпоксидно-фенольных связующих.

Не менее важной стадией процесса отверждения намотанной заготовки изделия для обеспечения монолитной структуры композита в изделии является стадия охлаждения. Выбор оптимального режима охлаждения отвержденного изделия с учетом релаксационных эффектов, происходящих на этой стадии в композите, позволит снизить остаточные температурные напряжения. Поэтому задача обеспечения ненапряженного состояния материала и готового изделия есть получение монолитной, без дефектов структуры материала и стабильных геометрических характеристик изделия.

Дополнительная информация об особенностях процесса намотки и свойствах композитов, полученных этим методом, содержится в работах [4, 12—16, 20].

3.2. СВОЙСТВА ПОЛИМЕРНЫХ СВЯЗУЮЩИХ И МАТРИЦ НА ИХ ОСНОВЕ

Полимерная матрица образуется после отверждения (полимеризации) связующего. К связующим и матрицам предъявляется весьма широкий комплекс требований как в процессе изготовле-

3.1. Технологические характеристики эпоксидных связующих

Марка смолы или связующего	Смола или состав связующего	Вязкость при 293 К		Время гелеобразования при 373 К, ч
		по Хопперу, Па·с	по вискозиметру, с	
ЭД-16	Эпоксидиановая	13—28	—	3
ЭД-20			—	4
АЦ-30	Эпоксициануратная + продукт конденсации эпихлоргидрина с анилином	$15\cdot10^3$	—	—
К-54/6	ЭД-20 + диэтиленгликольмалеинатфталат	—	—	1
К-115	Эпоксидиановая + олигоэфиракрилат (МГФ-9)	—	300	—
К-153	Эпоксидиановая + МГФ-9 + + тиокол	—	500—1800	1
К-168	Эпоксидиановая + МГФ-9	—	600	0,25
К-201		—	500	2,0

Продолжение табл. 3.1

Марка смолы или связующего	Смола или состав связующего	Вязкость при 293 К		Время гелеобразования при 373 К, ч
		по Хопперу, Па·с	по вискозиметру, с	
КД-Л-20		—	—	—
КД-5-10	Эпоксидиановая + эпоксиалифатическая (ДЭГ-1)	—	500	1
КД-5-20		—	250	1,15
КД-6-20		—	200 (по шариковому вискозиметру)	0,75
КДА-1	ЭД-20 + ДЭГ-1	—	500	—
КДЖ-5-20	Эпоксидиановая + модифицированный ДЭГ-1 (ДЭГ-Ж)	—	250	1,25
КДЖ-5-40		—	150	1,25
КДЖ-6-20		—	2000	0,6
КДЖ-6-40		—	1800	0,6
Метолон-Э	Продукт конденсации эпихлоргидрина с диаминодиметоксидифенилметаном	300 (при 323 К)	—	—
РЭС-3	Продукт конденсации эпихлоргидрина с резорцином	10 (при 313 К)	—	1
УП-63	Продукт конденсации эпихлоргидрина с фурфурилрезорцином	456	—	—
УП-544	Эпоксидированный фенолфурфурольный конденсат	—	—	—
УП-546	Продукт конденсации эпихлоргидрина с резорцинфурфурольным новолаком	—	—	—
УП-610	Продукт конденсации эпихлоргидрина с аминофенолом	100	—	
УП-612	Диокись циклического ацеталя	6—10	—	
УП-637	Диглицидиловый эфир резорцина	0,10—0,11	—	1
УП-632	Диокись циклического сложного эфира	26—36	—	—
УП-635	Продукт конденсации эпихлоргидрина со смесью пентаэритрита и резорцина	—	—	—
ЭА	Эпоксидная	0,120 (при 313 К)	—	—
ЭН-6	Эпоксиноволачная	—	—	—
ЭПОФ-5	Продукт конденсации эпихлоргидрина с полиоксифениленом	12,0 (при 323 К)	—	—
ЭПОФ-6		12,0 (при 323 К)	—	—

3.2. Физико-механические свойства эпоксидных матриц

Марка связующего	Отвердитель	Режим отверждения (температура, К/время отверждения, ч)	Теплостойкость по Мартенсу, К	Прочность, МПа		Ударная вязкость, кДж·м⁻²	Твердость по Бринеллю	Водопоглощение при 293 К в течение 24 ч, %
				при растяжении	при сжатии			
ЭД-16	Малеиновый ангидрид (МА)	(353÷423)/9 (80÷150)/9	90-95 363—368	59—88	127—157	29—33	99—108	—
ЭД-20		(353÷423)/9	373—383	—	147—167	15—18	99—115	—
АЦ-30	М-фенилендиамин (М-ФДА)	—	428—443	—	—	7—9	117	0,08
К-54/6	Полиэтилендиамин (ПЭПА)	293/12 + 358/8	338	—	108	14	177—197	0,06
К-115		293/12 + 343/6	338	—	108	10—13	99—118	0,04
К-153	Гексаметилендиамин (ГМДА)	293/12 + 323/1 или 348/1 + 373/4	333	39—40	88	8—10	99—118	0,08
К-168		293/4	328	—	89	8—10	99—118	0,08
К-201	ПЭПА	293/4	328	—	89	15	108—148	0,10
КД-Л-20	МА	373/(2—6)+393/(8—10)+ + 413/4	353	—	—	59—78	118	—
КД-5-10	ПЭПА	295/(10—24) + 313/24 или 295/(10—24) + + 360/(4—6)	368	—	—	12—15	99	—
КД-5-20		295/(10—24) + 360/(4—6)	363	—	—	20—23	108	0,08
КД-6-20	МА	353/10 + 393/10	373	—	—	40—50	108—118	—
КДА	Триэтаноламинотитанат (ТЭАТ-1)	363/1 + 373/10 + 403/10	363—368	89—93	—	15—20	158—177	—
КДЖ-5-20	ПЭПА	293/(10—24) + 313/24 или 333/10 + 360/(4—6)	333—373	—	—	9—10	99—108	0,06
КДЖ-5-40		293/(10—24) + 313/24 или 333/10 + 360/(4—6)	328—333	—	—	9—10	89—94	0,10
КДЖ-6-20			328—333	—	—	9—10	94—99	0,05
КДЖ-6-40			323	—	—	9—10	89—94	0,12

Продолжение табл. 3.2

Марка связующего	Отвердитель	Режим отверждения (температура, К/время отверждения, ч)	Теплостойкость по Мартенсу, К	Прочность, МПа		Ударная вязкость, $кДж \cdot м^{-2}$	Твердость по Бринеллю	Водопоглощение при 293 К в течение 24 ч, %
				при растяжении	при сжатии			
Метолон-Э	Метилтетрагидрофталевый ангидрид (МТГФА)	—	498—503	—	196	6—8	266	—
РЭС-3	Изо-МТГФА	353/3 + 383/3 + 423/7	373—378	108	137	22	197	—
УП-63	МТГФА + диметиламинометилфенол (УП-606/2)	353/5 + 398/20	403—413	98—108	177	20—25	197	—
УП-544	МА	353/21 + 393/2 + + 413/4 + 423/1	423—443	49—69	137—157	5—10	—	—
УП-546		353/2 + 393/2 + 413/4	433—453	69—88	186—196	12—17	—	—
УП-610	Ароматический амин (АА)	—	453—473	59—69	235—255	11—18	—	0,04
УП-612	МТГФА + УП-606/2	353/6 + 423/2 + 473/8	503—513	34—49	137—147	7—10	—	—
УП-632	Эвтектическая смесь ангидридов кислот	359/9 + 393/0,5 + 523/8 или 453/6 + 473/8	513—523	46—48	157—182	9—10	—	—
УП-635	АА (УП-581)+УП-606/2	—	—	88—98	157	12—20	—	—
УП-637	Изо-МТГФА	353/3 + 393/3	323—373	88	137	22	207	—
ЭА	МА	393/2	388	—	166—176	15—18	295—344	0,03
ЭН-6		353/2 + 393/4 + 433/6+ + 453/2 + 473/2	438—453	—	118—137	10—12	143—157	0,05
ЭПОФ-5		—	433	—	166	5—7	521	0,05
ЭПОФ-6		—	473—503	—	186	4—5	344	0,03

3.3. Технологические характеристики ненасыщенных полиэфирных смол

Марка смолы	Плотность $\rho \cdot 10^{-3}$ при 293 К, $кг \cdot м^{-3}$	Вязкость по Хепплеру при 293 К, Па·с	Время гелеобразования при 293 К, мин
ПН-1	1,12—1,16	0,5—0,8	60—120
ПН-3	1,12—1,16	0,5—1,0	60—180
ПНМ-2	1,15—1,17	0,2—0,4	30—170
ПН-6	1,31—1,32	1,2—2,0	120—300
ПН-8	1,08—1,10	0,1—0,2	$\leqslant$15
ПНМ-8	1,12—1,14	0,5—0,8	250—300
ПН-10	1,09	1,0—1,5	180—420
ПН-11	1,18—1,20	1,2—2,1	5—10
ПН-15	1,04—1,06	0,4—1,0	10—300
ПН-16	1,03—1,045	0,8—1,3	100—200
ПН-62	1,26—1,29	1,2—2,0	300
ПН-63	1,29—1,31	1,4—2,5	300
НПС-609-21М	1,20—1,30	0,36—0,70	180—1200
НПС-609-27	1,22	—	900
ЗСП-3	1,20—1,25	5—7	—
ПН-59	1,10—1,11	0,1—0,2	60—120
Слокрил-1	1,03—1,20	—	100—250
ПН-40	1,15—1,16	0,5—0,7	—

3.4. Физико-механические свойства полиэфирных матриц

Марка смолы	Теплостойкость по Мартенсу, К	Прочность, МПа		Предельная деформация при растяжении, %	Ударная вязкость, $кДж \cdot м^{-2}$
		при растяжении	при сжатии		
ПН-1	316—318	39—44	79—108	5—8	6—10
ПН-3	323—328	44—54	79—123	—	7—11
ПНМ-2	331	—	113—132	2,7—4,5	12—14
ПН-6	—	25—39	103—128	0,5—0,9	2—3
ПН-8	—	44—54	88—108	3—5	7—15
ПНМ-8	341	—	98—108	—	2—3
ПН-10	371	—	98—108	0,5—0,8	2—3
ПН-11	340	25	83—108	—	5—6
ПН-15	—	44—74	120—132	1,5—2	4—5
ПН-16	323	47	—	4—4,5	5—7
ПН-62	337	25—34	79—123	1—2	3—5
ПН-63	353	25—34	137	1—2	3—5
НПС-609-21М	323—343	39—59	98—137	2—3	3—7
НПС-609-27	—	50	—	162	4
ЗСП-3	363—368	60—69	—	98—132	2—3
ПН-69	—	—	—	59—78	54—98
Слокрил-1	363—378	43—47	—	125—134	2
ПН-40	333—343	69—79	—	—	5—7

3.5. Физико-механические свойства термопластичных матриц

Полимер, марка материала	Модуль упругости $E \cdot 10^{-2}$, МПа	Прочность, МПа		Предельное удлинение, %	Ударная вязкость, кДж·м$^{-2}$	Твердость по Бринеллю
		при растяжении	при сжатии			
Полиэтилены:						
высокого давления	—	10—17	12	400—600	—	14—25
низкого давления	6—8,5	20—45	20—36	300—800	2—150	45—60
среднего давления	8—12,5	18—40	—	200—1300	7—120	60—80
Полипропилен	—	25—40	50—70	200—800	33—88	40—70
Полистирол	30	35—45	80—100	1,5—3	20—30	140—160
Политетрафторэтилены:						
фторопласт-4	—	14—35	10—12	250—500	100	30—40
фторопласт-4Д	—	12—23	12	100—330	10	30—40
фторопласт-4М	3,5	16—31	20	250—400	125	30—40
фторопласт-40	—	27—50	—	150—400	125	58—63
фторопласт-42	—	25—50	—	250—500	137—196	—
Полиэтиленоксиды:						
гомополимер	29	68—71	110—130	—	90—120	150—180
сополимер	22—30	65—70	105—145	15—20	5—9	100—130
Полифениленсульфид:						
Райтон-6	34	76—77	113	1,6—3	—	—
Полифениленоксид:						
Арилокс-100	—	60	40	3	30	165
PPO	25	74	106	20—40	40	—
Норил	23	61	113	20—30	40	—
Полиэтилентерефталаты:						
лавсан	—	74—92	80	10—20	—	—
лавсан литьевой	—	60—70	80—100	2,4	15—30	95—110
Поликарбонат (дифлон)	24—28	57—70	80—90	50—100	120—140	110—160
Полиарилат 1060	19	75	96	62	—	200—250
Полиоксибензоат:						
Экксел-1-2000	25	99	127	8	163	—
Экксел-С-1000	13	70	140	7—9	—	—
Полиэфирсульфоны ароматические:						
Арилон	22,5	53	—	—	44	—
Астрель 360	26	91	—	—	27	—
Удель	25	70—72	97	50—100	68—72	—
Полиамиды:						
ПМ-67	—	120—140	200—230	9—20	60—120	180—280
ПМ-69	—	95—125	210—240	4—7	60—100	200—270
ДФО	32	120	—	20—30	—	—
2080	13	120	210	10	—	—
Р105 с	—	50	25	1,4	—	—
P_{18}	32—34	51	—	1,4	—	—
Р-150	38	106	—	9	—	—

Продолжение табл. 3.5

Полимер, марка материала	Модуль упругости $E \cdot 10^{-3}$, МПа	Прочность, МПа		Предельное удлинение, %	Ударная вязкость, кДж·м$^{-2}$	Твердость по Бринеллю
		при растяжении	при сжатии			
Полиамиды алифатические:						
6	12—15	55—77	85—77	100—150	90—130	100—120
610 литьевой	15—17	50—60	70—90	100—150	100	100—150
П-12А литьевой	16—18	40—55	60—63	200—280	80—90	75
Капролон-В	20—23	90—95	100—110	6—20	100—150	130—150
Полиамиды ароматические:						
Фенилон П	—	90	320	4	20	180—220
Фенилон C_1	—	100	220	5	20	180
Фенилон C_2	—	120	220	6	35	220

ния материала, так и при эксплуатации изделия из композита. Комплекс требований на этапе изготовления следующий: хорошая смачивающая способность и адгезия к армирующему материалу; низкая усадка при отверждении; низкая вязкость связующего при большой жизнеспособности; высокая скорость отверждения.

Комплекс требований, которые предъявляются к матрице на этапе эксплуатации, следующий: высокие физико-механические характеристики матрицы, во многом определяющие свойства композита; высокая термостойкость матрицы; стойкость к климатическим и биологическим факторам и т. д.

Технологические характеристики некоторых марок эпоксидных связующих приведены в табл. 3.1. Физико-механические свойства эпоксидных матриц на основе этих связующих приведены в табл. 3.2. Эпоксидные связующие имеют плотность 1230—1300 кг·м$^{-3}$, модуль упругости при растяжении 2000—4000 МПа. В табл. 3.3 и 3.4 приведены характеристики и физико-механические свойства полиэфирных смол и матриц на их основе.

В табл. 3.5 даны физико-механические свойства термопластичных матриц.

Были разработаны связующие нового типа, получившие название роливсанов, которые дают возможность сочетать высокую теплостойкость композита и легкую перерабатываемость связующего.

Основные химические и технологические особенности роливсанов состоят в следующем. Введение термостойких структур в молекулярные цепи связующего перенесено со стадии синтеза мономерно-олигомерных композиций и жидкофазного формования на стадию дополнительной обработки готового изделия после придания ему заданной формы. При этом стадия формования свободна от высокоплавких веществ, растворителей и побочных летучих продуктов, что делает излишним применение при переработке высоких температур и значительных давлений.

Роливсаны состоят из дивинилароматических соединений и отверждаются полимеризационно-поликонденсационным методом. На стадии формования изделия протекает трехмерная совместная полимеризация ненасыщенных компонентов системы. Полностью сформированную конечную термостойкую структуру матрица на основе роливсанов приобретает на стадии последующей термообработки при температуре > 450 К или облучения м...

3.6. Механические свойства отвержденной матрицы на базе связующего марки Роливсан НВ-1

T, К	Плотность $\rho\cdot10^{-3}$, кг·м$^{-3}$	Прочность при растяжении σ^{+}	Модуль упругости E	Предельная деформация при разрыве ε_{*}, %
		МПа		
293	1,15—1,17	50—70	1500—2500	3—4
520	—	40—50	1400—1600	4—5
620	—	10—20	—	6—8

ной дозой (> 1 нГр) ускоренных электронов. При этом образуется сетчатый сополимер с теплостойкостью 670—700 К.

Роливсаны предназначены для получения композитов и изделий из них с широким диапазоном температур эксплуатации (270—620 К). Основным преимуществом роливсанов перед другими связующими является сочетание жидкого состояния малотоксичной исходной композиции, незначительного выделения побочных летучих продуктов при ее отверждении с высокой теплостойкостью и прочностью как самой матрицы, так и композитов на ее основе.

Некоторые механические свойства отвержденной матрицы на базе связующего Роливсан НВ-1 приведены в табл. 3.6.

3.3 СВОЙСТВА КОМПОЗИТОВ С ПОЛИМЕРНОЙ МАТРИЦЕЙ

3.3.1. Стеклопластики. Наиболее широко в настоящее время применяют композиционные материалы, армированные стеклянными волокнами (стеклопластики). Они обладают относительно высокой прочностью, устойчивостью к знакопеременным нагрузкам и тепловым ударам, высокой радиопрозрачностью, коррозионной и эрозионной стойкостью, легко поддаются механической обработке.

Армирующими элементами в конструкционных стеклопластиках являются непрерывные волокна, организованные в виде нитей и жгутов различной степени крутки, либо ткани различного переплетения. Слоистые стеклопластики на основе тканей называют стеклотекстолитами.

Механические свойства стеклотекстолитов зависят от свойств волокон и матрицы, а также от вида переплетения волокон в ткани (сатиновое или атласное, саржевое, полотняное) и соотношения волокон по основе и утку ткани. Наиболее высокие механические характеристики имеют стеклотекстолиты на основе однослойных тканей сатинового переплетения. Характеристики стеклотекстолитов снижаются при использовании для их изготовления тканей с толщинами, бо́льшими, чем у однослойных сатиновых тканей (полотняного переплетения или многослойных тканей). Применение многослойных (объемных) стеклотканей увеличивает межслоевую прочность пластика, упрощает сборку заготовки изделия, уменьшая число ручных операций, необходимых при послойной укладке заготовки. Изготовленные на основе таких тканей композиты эффективно используются в авиа- и судостроении, космической технике.

Выбор связующего для стеклопластиков определяется условиями их изготовления и эксплуатации. В производстве стеклопластиков широко используются как термореактивные смолы (полиэфирные, эпоксидные, фенолформальдегидные и др.), так и различные термопластичные полимеры.

В табл. 3.7 приведены некоторые физико-механические свойства однонаправленных и ортогонально армированных стеклопластиков на основе эпоксидных смол.

3.3.2. Органопластики. Органопластики на основе высокопрочных

3.7. Физико-механические свойства стеклопластиков

Стеклопластик	Плотность $\rho \cdot 10^{-3}$, $кг \cdot м^{-3}$	Прочность при растяжении σ^+, МПа	Модуль упругости при растяжении E, ГПа	Теплопроводность λ, $Вт \cdot м^{-1} \cdot К^{-1}$	Температурный коэффициент линейного расширения $\alpha \cdot 10^7$, $К^{-1}$	Удельное объемное электрическое сопротивление $\rho \cdot 10^{-15}$, Ом·см	Диэлектрическая проницаемость ε_0	Тангенс угла диэлектрических потерь при частоте 10^9—10^{10} Гц
Однонаправленный на основе волокон:								
из Е-стекла	2	1600	56	0,4	1,0	5	4,2	0,015
из стекла ВМ-1	2,2	2100	70	0,5	1,2	0,1	4,3	0,02
Ортогонально армированный на основе волокон:								
из Е-стекла (1 : 1)	1,9	500	26	0,3	1,5	5	4,0	0,015
из стекла ВМ-1 (1 : 1)	1,95	860	32	0,35	1,6	0,1	4,1	0,02

П р и м е ч а н и е. Здесь и далее (1 : 1) — соотношение плотности укладки волокон в слоях.

мидных волокон обладают высокими удельными прочностными и упругими характеристиками, ударной вязкостью, электрическим сопротивлением, химической стойкостью, высокими теплоизоляционными свойствами. Армирующими элементами конструкционных органопластиков являются непрерывные волокна, представленные в виде нитей и жгутов различной линейной плотности и степени крутки, а также в виде тканей. Арамидные волокна при текстильной и других видах переработок незначительно снижают свои механические свойства, что послужило причиной широкого применения метода намотки при изготовлении изделий из органопластика.

Некоторые физико-механические свойства органопластиков приведены в табл. 3.8, 3.9 (см. стр. 60).

3.3.3. Углепластики. Углепластики — композиты на основе высокопрочных углеродных волокон — наряду с органопластиками являются наиболее перспективным видом композиционных материалов. Их отличают высокие удельные характеристики прочности и жесткости, термостойкость до 570 К, низкий температурный коэффициент линейного расширения, эрозионная стойкость и стойкость к агрессивным средам.

В качестве армирующих элементов в конструкционных углепластиках применяются непрерывные волокна в виде нитей или жгутов, ткани и нетканые материалы. В качестве матриц — эпоксидные, эпоксифенольные, полиимидные и другие смолы.

Углепластики находят применение в авиационной, ракетной и космической технике, в автомобилестроении, при изготовлении спортивного инвентаря и в других областях.

В табл. 3.10 приведены некоторые физико-механические свойства однонаправленных углепластиков.

3.3.4. Боропластики. Пластики с армирующими элементами в виде волокон бора применяются в тех случаях, когда требуется высокая прочность при сжатии, а также, когда элементы конструкции работают в условиях повышенных температур. Борные волокна относятся к числу полупровод-

3.10. Физико-механические свойства однонаправленных углепластиков при $T = 298$ К

Компоненты материала. Параметр	Материал									
	Р 313	AS/4397	A/3004	КМУ-1	КМУ-4	КМУ-1в	КМУ-1л	КМУ-2л	КМУ-2У	КМУ-3л
	США			СССР						
Волокно	Торнел-300	А	А	Жгут ВМН-3	Жгут ВМН-4	Жгут ВМН-1	Лента ЛУ-2	Лента ЛУ-2	Жгут ВМН-4	Лента ЛУ-2
Матрица	Эпоксидная РР 313	Полиимидная 4397	Полисульфоновая Р 1700	Эпокситрифенольная			Полиимидная			Эпоксифенольная
Объемное содержание волокон ν_f, %	61	64	57	—	—	—	—	—	—	—
Плотность $\rho \cdot 10^{-3}$, кг·м$^{-3}$	1,55	1,57	1,53	1,50	1,50	1,55	1,40	1,30	1,40	1,40
Прочность при растяжении, МПа:										
вдоль волокон σ_1^+	1400	1431	1322	740	1020	1000	650	380	900	650
поперек волокон σ_2^+	34,5	37,8	35,3	—	—	—	—	—	—	—
Прочность при сжатии, МПа:										
вдоль волокон σ_1^-	1108	1451	719	250	400	540	300	300	400	400
поперек волокон σ_2^-	186	211	133	—	—	—	—	—	—	—
Прочность при сдвиге вдоль волокон τ_{12}, МПа	74	66	112	30	30	48	25	26	30	2[illegible]

Модуль упругости при растяжении, ГПа:										
вдоль волокон E_1	142,8	128,5	114,2	160	180	180	120	81	140	120
поперек волокон E_2	9,13	9,78	8,1	—	—	—	—	—	—	—
Модуль сдвига G_{12}, ГПа	5,49	5,42	3,94	—	—	—	—	—	—	—
Предел пропорциональности при растяжении, МПа:										
вдоль волокон	1400	1431	1322	—	—	—	—	—	—	—
поперек волокон	34,5	37,8	30,3	—	—	—	—	—	—	—
Предел пропорциональности при сжатии, МПа:										
вдоль волокон	252	1212	587	—	—	—	—	—	—	—
поперек волокон	27,6	102	55,6	—	—	—	—	—	—	—
Коэффициент Пуассона:										
ν_{21}	0,32	0,30	0,34	—	—	—	—	—	—	—
ν_{12}	0,020	0,023	0,024	—	—	—	—	—	—	—
Температурный коэффициент линейного расширения:										
вдоль волокон $\alpha_1 \cdot 10^6$, K^{-1}	0	0	—0,011	—	—	—	—	—	—	—
поперек волокон $\alpha_2 \cdot 10^6$, K^{-1}	27,7	25,4	30,6	—	—	—	—	—	—	—
Удельная теплоемкость c, кДж/(кг·К)	1,005	0,795	0,766	—	—	—	—	—	—	—
Теплопроводность вдоль волокон λ_1, Вт/(м·К)	0,502	0,658	0,519	—	—	—	—	—	—	—
Предел выносливости на базе 10^7 циклов, МПа	—	—	—	350	500	500	300	200	400	300
Предел длительной прочности за 1000 ч	—	—	—	660	880	900	600	480	800	600

3.8. Физико-механические свойства однонаправленных органоэпоксикомпозитов

Параметр	Значения
Плотность ρ, г/см^3	1,30—1,38
Прочность, МПа:	
при растяжении вдоль оси σ_1^+	1400—2200
при трансверсальном растяжении σ_2^+	12,3—28,2
Модуль упругости, ГПа:	
вдоль оси E_1	78—95
при трансверсальном растяжении E_2	4,1—5,5
Прочность при сжатии, МПа:	
вдоль оси σ_1^-	280—310
в трансверсальном направлении σ_2^-	96,5—138
Прочность при сдвиге, МПа:	
в плоскости τ_{12}	20,0—44,1
межслоевом τ_{13}	48—69
Модуль сдвига в плоскости G_{12}, ГПа	2,1
Теплопроводность, Вт/(м·К):	
вдоль волокон λ_1	0,14
перпендикулярно направлению волокон λ_2	0,012
Температурный коэффициент линейного расширения, К$^{-1}$:	
вдоль волокон α_1	—(3,5—4) 10^{-6}
перпендикулярно волокнам α_2	(35—70)·10^{-6}

3.9. Характеристики слоистых органопластиков на основе эпоксидной матрицы и тканей из арамидных волокон Кевлар-49

Марка ткани	Плотность материала $\rho\cdot10^{-3}$, кг·м$^{-3}$	Объемное содержание связующего v_m, %	Прочность, МПа		Модуль упругости при растяжении E, ГПа
			при растяжении σ^+	при межслоевом сдвиге τ	
243	1,31	44,6	561	36	40,8
281	1,29	36,0	499	35	25,9
285	1,28	32,5	500	31	27,3
328	1,34	54,4	370	20	20,3
1050 X	1,28	32,1	512	32	25,6^{-6}
1033 X	1,30	38,6	374	29	24,4^{-6}

ков, поэтому их присутствие в материале придает ему повышенную тепло- и электропроводность.

В качестве связующих применяются эпоксидные, полиэфирные, фенолформальдегидные и другие смолы. Некоторые физико-механические свойства боропластиков приведены в табл. 3.11—3.13.

3.3.5. Гибридные армированные пластики. Создание гибридных композитов путем совмещения в едином материале волокон разной природы является эффективным средством регулирования свойств композитов.

Возможны различные варианты сочетания непрерывных армирующих волокон:

3.11. Физико-механические свойства однонаправленных бороволокнитов

Параметр	Значение при температуре, К	
	293	473
Прочность, МПа:		
при растяжении σ^+	1200	980
при сжатии σ^-	1160	1020
при сдвиге τ	60	45
Модуль, ГПа:		
упругости при растяжении E	250	240
сдвига G	9,80	5,10
Относительное удлинение при разрыве ε_*, %	0,35	0,45
Ползучесть при растяжении (напряжение 500 МПа), %	0,22	0,3
Длительная прочность (500 ч), МПа	1350	1060
Предел выносливости при изгибе на базе 10^7 циклов, МПа	400	350
Ударная вязкость a, кДж·м$^{-2}$	90	—
Логарифмический декремент затухания колебаний, %	0,5	3,5
Коэффициент:		
Пуассона	0,22	—
теплопроводности λ, Вт/(м·К)	0,5	54
Температурный коэффициент линейного расширения $\alpha \cdot 10^6$, К$^{-1}$	4	4
Удельная теплоемкость c, кДж/(кг·К)	~1	0,5

3.12. Модуль упругости и степень анизотропии эпоксибороволокнита в зависимости от расположения волокон

Взаимное расположение волокон	Угол между направлением волокон в соседних слоях, градус	Модуль упругости при сжатии, ГПа				Показатель анизотропии		
		E_x	E_y	$E_{45°}$	E_z	E_x/E_y	$E_x/E_{45°}$	E_x/E_z
Однонаправленное (1 : 0)	0	162	19	15	19	8,7	10,8	8,7
Перекрестное плоскостное (1 : 1)	90	86	85	16	19	1,02	5,3	4,6
(1 : 1 : 1)	60	92	93	89	18,5	0,99	1,04	4,8
Перекрестное пространственное (1 : 1 : 1)	90	54	53	—	58	1,02	—	0,96

Примечание. Объемное содержание волокон 42%.

создание гетероволокнистых материалов по принципу однородных смесей (волокна различных типов равномерно распределяются в первичной нити или жгуте) (табл. 3.14);

использование многокомпонентного армирующего материала: ткани, мата или шпона из различных нитей и жгутов (табл. 3.15);

чередование слоев листовых армирующих материалов с различными волокнами (табл. 3.16).

3.13. Прочность боровoлокнитов в зависимости от угла между направлениями приложения нагрузки и укладки волокон при растяжении и сжатии *

Угол приложения нагрузки, градус	Прочность материала, МПа			
	однонаправленного (1 : 0)	перекрестно-армированного		
		90° (1 : 1)	90° (2 : 1)	60° (1 : 1 : 1)
0	1200/1400	430/925	720/1200	380/800
30	— 200	178/210	—/177	383/—
45	—/195	137/189	180/168	680/915

* В числителе даны значения при растяжении, в знаменателе — при сжатии.

Примечание. Объемное содержание волокон 53—57%.

3.14. Свойства эпоксидных композитов на основе борокарбостеклонитей

Объемное содержание в нитях волокон, %			Плотность $\rho \cdot 10^{-3}$, $кг \cdot м^{-3}$	Прочность, МПа			Модуль упругости E, ГПа
борных	углеродных	стеклянных		при изгибе $\sigma_и$	при сжатии σ^-	при сдвиге τ	
78,1	10,4	11,5	1,84	1640	840	63,1	215
56,5	32,9	10,6	1,71	1660	827	53,0	190
46,2	42,7	11,1	1,72	1650	745	44,3	202
27,2	67,9	4,9	1,56	810	430	—	103

3.15. Свойства эпоксидных композитов на основе боростеклоткани

Объемное содержание в тканях волокон, %		Плотность $\rho \cdot 10^{-3}$, $кг \cdot м^{-3}$	Прочность, МПа			Модуль упругости E, ГПа
борных	стеклянных		при изгибе $\sigma_и$	при сжатии σ^-	при растяжении σ^+	
83,5	16,5	1,8	1090	1240	72	152
80,7	19,3	1,7	730	1130	87	118
64,5	35,5	1,73	980	1040	120	87

Наибольшее распространение среди гетероволокнистых композитов получили трехкомпонентные материалы, например, углестекло-, органобор-, боругле-, углеорганововолокниты. Независимо от технологических приемов сочетания волокон различия в термоупругих характеристиках армирующих волокон вызывают появление термических напряжений в процессе формования композита и при изменении температурных режимов эксплуатации

3.16. Свойства карбооргано- и карбостекловолокнитов с послойным чередованием углеродных и органических волокон

Композит	Объемное содержание волокон, %			Плотность $\rho\cdot10^{-3}$, кг·м$^{-3}$	Модуль упругости E, ГПа	Прочность, МПа, при		Ударная вязкость a, кДж·м$^{-2}$
	углеродных	органических (арамидных)	стеклянных			изгибе $\sigma_и$	сжатии σ^-	
Карбоорганово-локнит	40	14	—	1,4	175	980	520	150
	38	22	—	1,35	165	820	530	260
Карбо-стекло-волокнит	30	—	17	1,52	85	460	320	180
	17	—	33	1,62	77	410	300	172
	4	—	46	1,76	65	730	240	241

3.17. Свойства однонаправленных гибридных композитов на основе углеродного волокна Торнел-300 и арамидного волокна Кевлар-49

Параметр	Объемное содержание (углеродных/арамидных) волокон, %			
	100/0	75/25	50/50	0/100
Плотность ρ, г/см^3	1,60	1,56	1,51	1,35
Модуль упругости E, ГПа	145,48	119,97	108,25	77,22
Предел пропорциональности *, МПа	680	470	410	180
Прочность:				
при растяжении σ^+, ГПа	1,57	1,28	1,21	1,66
при сжатии σ^-, ГПа	1,01	0,94	0,69	0,29
при сдвиге (испытание на изгиб короткой балки), МПа	91,01	75,85	55,85	48,95

* Напряжение, вызывающее деформацию, 0,02%.

Примечание. Объемное содержание волокон 60%.

трехкомпонентного материала в изделии. Удачным считается сочетание арамидных и углеродных волокон вследствие того, что значения предельных температурных коэффициентов термического расширения у них близки и поэтому внутренние термические напряжения не столь значительны.

При сочетании углеродных и арамидных волокон в разном соотношении были получены однонаправленные композиты с существенно более высокими значениями прочности при сжатии, изгибе и сдвиге в сравнении с органокомпозитами (табл. 3.17).

Технический интерес представляют гибридные углеорганоэпокситекстолиты, обладающие при незначительном снижении жесткости и прочности в осевом направлении удовлетворительной прочностью при сжатии. Арматурой

3.18. Свойства гибридных композитов на основе углеродного волокна Торнел-300 и арамидного волокна Кевлар-49

Объемное содержание в армирующем материале углеродных и арамидных волокон (Торнел-300/Кевлар-49), %	Модуль упругости E, ГПа	Прочность при растяжении σ^+, ГПа	Предел пропорциональности при сжатии, МПа	Прочность при сжатии σ^-, МПа	Прочность при сдвиге τ (испытания короткой балки), МПа
Однонаправленные ленты:					
100/0	145	1,56	335	1007	91
75/25	120	1,28	280	938	76
50 50	108	1,21	301	688	56
0/100	77	1,26	109	286	49
Ортогонально армированные ленты:					
100/0	70	0,76	—	906	—
75/25	68	0,64	166	593	—
50/50	55	0,57	81	369	—
0/100	38	0,60	39	153	—
Сбалансированные ткани:					
100/0	66	0,48	139	588	40
75/25	62	0,47	114	278	32
50/50	51	0,42	55	241	29
0/100	37	0,57	38	165	26

Примечание. Объемное содержание волокон 50%.

для текстолитов служат равновесные ткани из органических волокон Кевлар-49 и углеродных Торнел-300. Свойства однонаправленных и слоистых композитов на основе лент и тканей из арамидного и углеродного волокна приведены в табл. 3.18.

3.4. УГЛЕРОД-УГЛЕРОДНЫЕ КОМПОЗИТЫ

3.4.1. Структурные схемы пространственно армированных композитов. Зависимость свойств углерод-углеродных композиционных материалов (УУКМ), как и других волокнистых композитов, от расположения (ориентации) волокнистых армирующих элементов (арматуры) делает решение вопроса оптимального выбора типа и схемы армирования одним из основных при разработке деталей различного назначения.

В связи с этим целесообразно классифицировать известные и перспективные типы армирующих элементов в первую очередь по геометрическому принципу. Из возможных схем армирования можно выделить три класса:

с хаотичным расположением волокон (фетры и войлоки) (рис. 3.6, *а*);

с ориентированными в двух направлениях волокнами и тканями (2Д армирование);

с ориентированными в трех (и более) направлениях волокнами (схемы армирования 3Д, 4Д и т. д.), т. е. с пространственным расположением волокон.

Заготовки (блоки) со схемой армирования 2Д * обычно представляют собой пакет из слоев ткани, соединенных между собой полимерным свя-

* Далее для краткости слова «схема армирования» опущены.

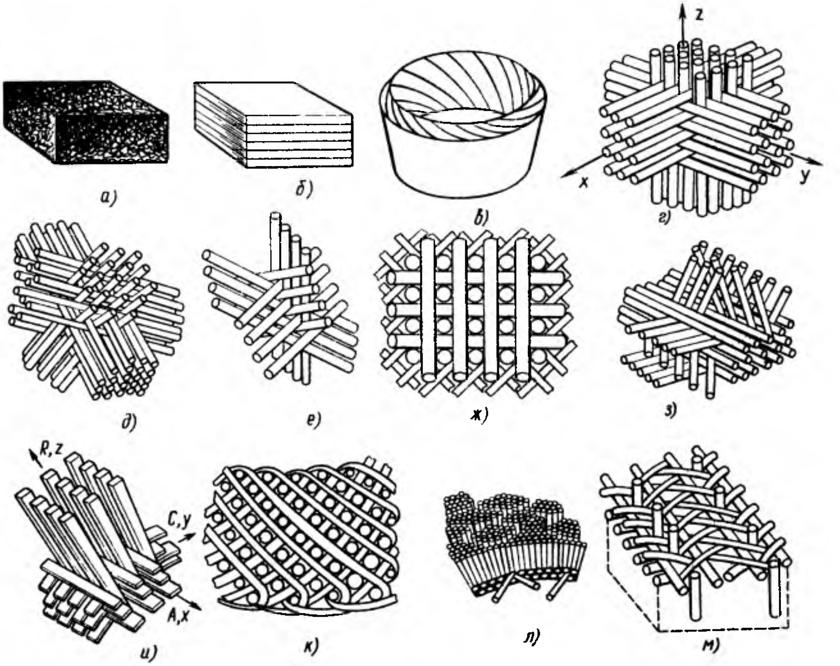


Рис. 3.6. Принципиальные схемы расположения волокон в УУКМ (структуры):
а — хаотичная; *б* — слоистая; *в* — розеточная; *г* — ортогональная 3Д; *д* — 4Д; *е* — 4Д-Л; *ж* — 5Д-Л; *з* — 5Д; *и* — аксиально-радиально-окружная; *k* — аксиально-спиральная; *л* — радиально-спиральная; *м* — аксиально-радиально-спиральная

зующим (рис. 3.6, *б*). Заготовки 2Д изготавливают также из препрегов геодезической или спиральной намоткой лент или розеточной укладкой слоев ткани (рис. 3.6, *в*).

Наиболее перспективным видом армирования углерод-углеродных композитов конструкционного назначения является многонаправленное, пространственное армирование, когда армирующие компоненты располагаются в трех, четырех и более направлениях. Такие образования называют пространственными армирующими структурами (ПАС), а составляющие их компоненты — элементами пространственных армирующих структур (ЭПАС).

Основным структурным элементом ПАС из прямолинейных ЭПАС является параллелепипед, у которого три ребра, шесть диагоналей, шесть граней; четыре длинные внутренние диагонали образуют тринадцать направлений. Если параллелепипед является кубом, то, комбинируя направления трех подгрупп, можно образовать уравновешенные (сбалансированные) системы. Всего существует семь хорошо сбалансированных структур укладки волокон (схем армирования), изотропия которых растет с увеличением числа направлений: структура 3Д; 4Д; 6Д; 7Д (4 + 3); 9Д (6 + 3); 10Д (6 + 4); 13Д (6 + 4 + 3).

Кроме того, имеются еще модификации: основного ортогонального 3Д-плетения — это структуры 4Д-Л, 5Д-Л и 4Д-плетения — это структура 5Д.

Иногда необходимо иметь высокое объемное содержание арматуры в одном из направлений. Этим условиям удовлетворяют трехнаправленные (3Д).

четырехнаправленные (4Д) структуры, а также их модификации (4Д-Л, 5Д-Л, 5Д).

Самая простая ПАС — ортогональная (рис. 3.6, *г*), т. е. ориентированная по трем взаимно перпендикулярным направлениям (x, y, z). В случае, когда ЭПАС по всем направлениям одинаковы по качеству и количеству волокон, 3Д структура хорошо уравновешена, компактна и проста в изготовлении. В сбалансированной 3Д структуре ЭПАС имеют квадратное сечение и расположены по типу квадратной сетки. ЭПАС занимают $^3/_4$ объема.

В 3Д структурах имеются два недостатка: пустоты между пересекающимися пучками волокон изолированы и образуют закрытые поры, что препятствует уплотнению композиции, прочность сцепления между параллельными слоями двух ЭПАС обеспечивается только одним ЭПАС в перпендикулярном направлении, что не дает необходимого сопротивления расслоению и разрыву.

Эти дефекты устранены в 4Д ПАС (рис. 3.6, *д*), где каждая плоскость, параллельная двум ЭПАС, пересекается по крайней мере двумя другими ЭПАС. В сбалансированной 4Д ПАС в вершине правильного тетраэдра сходятся четыре длинные диагонали куба, где каждая из них с тремя другими образует угол 70,5°. ЭПАС располагаются в виде треугольной сетки, каждый ЭПАС имеет шестиугольное сечение и занимает $^3/_{16}$ объема. Значит, четыре ЭПАС занимают те же $^3/_4$ объема, как и в 3Д структуре, а оставшуюся $^1/_4$ часть объема занимают открытые макропоры. Структура в этом случае более тонкая, так как поры чаще, чем в структуре 3Д, рассекаются нитями.

В 6Д структуре все ЭПАС расположены в направлении малых диагоналей куба.

Для оценки тонкости структуры иногда используют расстояние между центрами ЭПАС. Но этот способ не подходит для сравнения разных структур. Например, в 3Д структуре из пучков волокон круглого сечения диаметром 1 мм расстояние между центрами пучков равно 2 мм, а в 4Д структуре с пучками волокон того же размера это расстояние составляет 2,31 мм. Кажется, что 4Д структура грубее, но это не так. Более подходящий способ оценки — определение тонкости структуры по числу срезов пучков волокон на единицу площади поперечного сечения структуры. Эта величина называется индексом размера зерен. Для 3Д структуры с пучками волокон диаметром 1 мм индекс колеблется от 25 до 43,3 пучков волокон на 1 см² в зависимости от направления сечения относительно осей пучков. В 4Д структуре этот индекс изменяется от 35,35 до 50 пучков волокон на 1 см². Это значит, что 4Д структура тоньше, чем 3Д, на 25%.

Основные характеристики некоторых рассмотренных ПАС приведены в табл. 3.19.

Среди модифицированных ПАС следует обратить внимание на 4Д-Л структуру (рис. 3.6, *е*), у которых в одной плоскости размещаются три группы волокон, смещенные относительно друг друга под углом 60°, и на 5Д-Л структуру, у которой в одной плоскости в дополнение к волокнам 0—90° укладываются волокна под 45° (рис. 3.6, *ж*).

Для такого случая, когда нагрузка действует в одном направлении, но без риска расслоения, разработана 5Д структура, в которой пять направлений в параллелепипеде определяются четырьмя длинными диагоналями и одним из трех ребер. Практически, это основной пучок волокон, заключенный в 4Д структуру.

У 5Д структуры имеются те же преимущества, что и 4Д; она проста в изготовлении и не дороже сбалансированной 4Д структуры. Как и 3Д структура, она имеет осевую симметрию четвертого порядка относительно основного направления, что упрощает теоретические расчеты механических и теплофизических свойств изделий из таких усиленных в одном направлении 5Д структур (рис. 3.6, *в*).

Если нагрузка действует в двух направлениях, то используют 6Д структуру, которая отличается от ранее рассмотренной тем, что два основных пучка ориентированы под углом 90° в одной плоскости по ребрам куба

3.19. Характеристики сбалансированных 3Д, 4Д, 6Д структур из пучков волокон круглого сечения

Характеристика	3Д	4Д	6Д
Размещение пучков волокон	Квадратная сетка	В шахматном порядке	В шахматном порядке
Угол между пучками стержней, градус	90 (в двух направлениях)	70,5 (в трех направлениях)	90 (в одном направлении) 60 (в трех направлениях)
Компактность, %	59	68	49,4
Пористость	Закрытая	Открытая	Открытая
Изотропия	Слабая	Хорошая	Близкая к совершенству
Жесткость	Слабая	Хорошая	Отличная
Расслоение	Легкое	Невозможно	Невозможно
Минимальная поверхность стержней в срезе плоскостью, %	19,7	34	24,7

и связаны четырьмя более тонкими пучками, размещенными как в 4Д структуре.

Армирующие структуры тел вращения основаны на тех же переменных, что у тканей и блоков с прямолинейными волокнами (размер пучка волокон, число волокон в пучке по каждому направлению), но отличаются ориентацией пучков волокон. Так, в случае применения структур с трехнаправленной схемой армирования, получившей наиболее широкое распространение, вместо трех направлений x—y—z фигурируют направления A—R—C, т. е. аксиальное, радиальное и окружное направления.

В зависимости от пространственной ориентации ЭПАС существует три принципиально отличающиеся схемы армирования на основе 3Д структуры и одна схема на основе 4Д-Л структуры. Согласно первой схеме (рис. 3.6, *и*) z-волокна (волокна в направлении оси z) ориентированы по радиальному направлению R, x-волокна — по аксиальному A и y-волокна — по окружному C. По второй схеме (рис. 3.6, *л*) z-волокна ориентированы по радиальному R направлению, а x- и y-волокна располагаются послойно в коаксиальных слоях по спиральным траекториям. В третьем случае (рис. 3.6, *к*) z-волокна ориентированы в аксиальном направлении, а x- и y-волокна расположены по перекрестным траекториям с равными углами наклона относительно радиального направления R. В четвертой схеме армирования (рис. 3.6, *м*) z-волокна ориентированы по радиальному направлению R, второй пучок волокон — по аксиальному, а третий и четвертый — по спиральным траекториям, причем ЭПАС второго, третьего и четвертого направлений располагаются в коаксиальных слоях и взаимно переплетены.

Рассмотренные структуры армирующих элементов обладают теми же достоинствами и недостатками, что и прямолинейные 3Д и 4Д-Л структуры. Кроме того, они характеризуются переменной компактностью, уменьшающейся в радиальном направлении (от внутренней поверхности к наружной).

3.4.2. Процессы получения армирующих структур для УУКМ. Процесс получения хаотически армированной

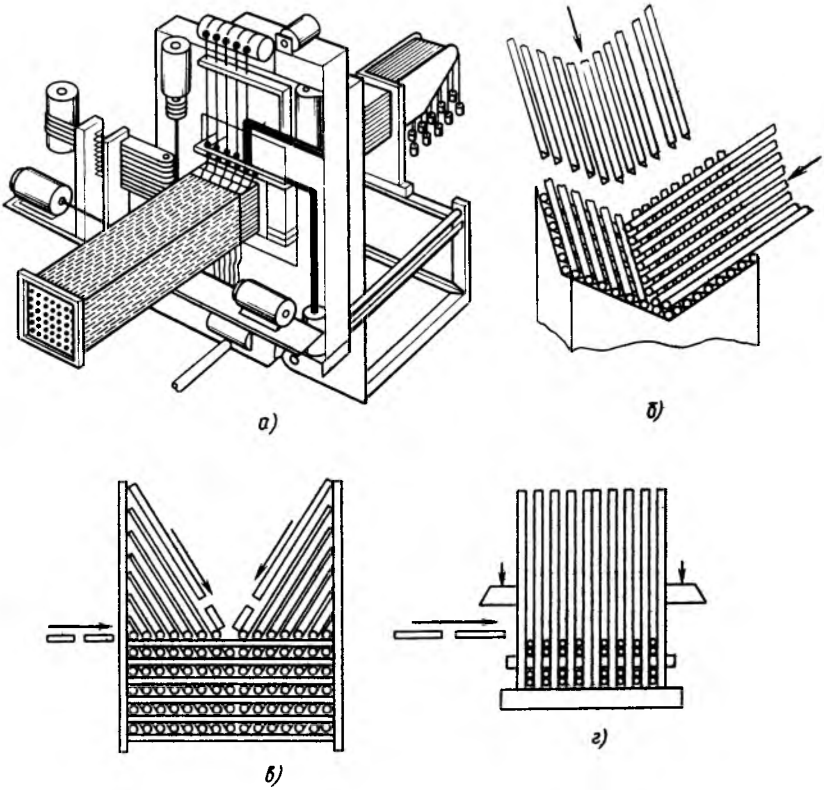


Рис. 3.7. Технологические схемы получения прямолинейных ПАС:
а — 3Д методом плетения; *б*, *в*, *г* — соответственно 4Д (по непрерывному способу), 4Д-Л (на перфорированной плите), 4Д-Л (по непрерывному способу)

структуры (войлока) включает следующие этапы:

предварительную разрезку волокон на отрезки длиной 40—60 мм;

измельчение волокон в водной среде до получения волокон длиной 10—0,5 мм и смешение с порошком фенолформальдегидной смолы в требуемой пропорции;

заливку полученной суспензии в форму, вакуумирование и сушку изделия (для получения необходимой плотности и прочности изделие на стадии сушки может подвергаться дополнительной опрессовке и пробивке, т. е. простегиванию);

термообработку при 430—460 К и дополнительную термообработку при 1100—1300 К.

Изготовление армирующих элементов с 2Д структурой осуществляется в полном соответствии с процессом получения фенольных углепластиков. Перед насыщением углеродом пластмассовые заготовки подвергаются дополнительной термообработке при 1100—1300 К.

Пространственно армированные структуры получают плетением волокнистых жгутов или сборкой из жестких стержней. При изготовлении пространственных структур, когда армирующие элементы располагаются вдоль ребер или диагоналей параллелепипеда, жесткие стержни предпочтительнее гибкой пряжи. Стержни получают методом осаждения пироуглерода из газовой фазы или пультрузией, используя ориентированные волокна, пропитанные (в случае пультрузии) термореактивными или термопластичными смолами.

Применение стержней снижает разрушение волокон в процессе изготовления полуфабриката, способствует хорошему выравниванию армирующих волокон в нужном направлении, позволяет применять волокна независимо от их способности к текстильной переработке.

Изготовление ПАС в виде блоков осуществляется по нескольким схемам. В одной из них в вертикальном или горизонтальном направлении с заданным шагом устанавливаются *z*-волокна. Волокна двух других направлений с помощью системы рапир при их возвратно-поступательном перемещении размещаются послойно между *z*-волокнами (рис. 3.7, *а*). Образующиеся при этом петли на выходе из формуемого изделия фиксируются кромочной нитью. После набора пакета заданной высоты осуществляется его отрезка в специальной фиксирующей оснастке и продолжается дальнейшая наработка материала.

Изготовление 4Д структур осуществляется преимущественно из стержней. Принцип сборки 4Д структуры показан на рис. 3.7, *б*. Показанный на рис. 3.7, *б* процесс обеспечивает возможность производства ПАС 4Д в непрерывном режиме машинным способом.

При изготовлении пространственной структуры 4Д-Л пользуются двумя принципиально отличающимися схемами. При первой схеме (рис. 3.7, *в*) стержни одной группы устанавливаются в специальную перфорированную плиту в вертикальном направлении и в шахматном порядке. Стержни трех других направлений размещаются между стержнями вертикального направления параллельными слоями При второй схеме (рис. 3.7, *г*) стержни первой группы размещаются в горизонтальной плоскости, между стержнями этой группы и тоже в горизонтальной плоскости размещают стержни второй группы. Стержни двух других групп входят между стержнями первой и второй группы с двух противоположных направлений под углом 60° к горизонтальной плоскости.

К достоинствам первой схемы относятся возможность сборки структур по форме, близкой к форме изделия, и зависимость плотности упаковки слоев трех групп стержней от фактического диаметра стержней, прямо связанного с линейной плотностью применяемого волокна. Ее основной недостаток — прерывность процесса.

Основные недостатки второй схемы состоят в том, что сборка каркаса только прямоугольного поперечного сечения с постоянным шагом укладки стержней независимо от возможных колебаний диаметра стержней, обусловленных применением волокон с различной линейной плотностью.

Достоинство ее — непрерывность процесса.

Для усовершенствования процесса изготовления ПАС пустотелых тел вращения, оптимизации качества были разработаны следующие способы, позволяющие перевести его на промышленную основу:

намотка нитей в двух направлениях между металлическими стержнями, которые потом заменяются нитями, т. е. комбинированная намотка;

намотка волокон в двух или трех направлениях на «еж» из армирующих волокон, определяющих третье направление;

прошивка нитью или пробивка стержнями слоев в радиальном направлении.

Для реализации схемы переплетения, приведенной на рис. 3.6, *б*, металлические стержни, определяющие продольное направление заготовки, направляют в специально просверленные пластины. Между ними автоматически пропускают (наматывают) в радиальном и окружном направлениях пучки нитей (рис. 3.8, *а*). Оборудование процесса позволяет изменить направление плетения, приближая форму заготовки к заданной. После намотки другая машина автоматически заменяет стержни нитями. Эта операция

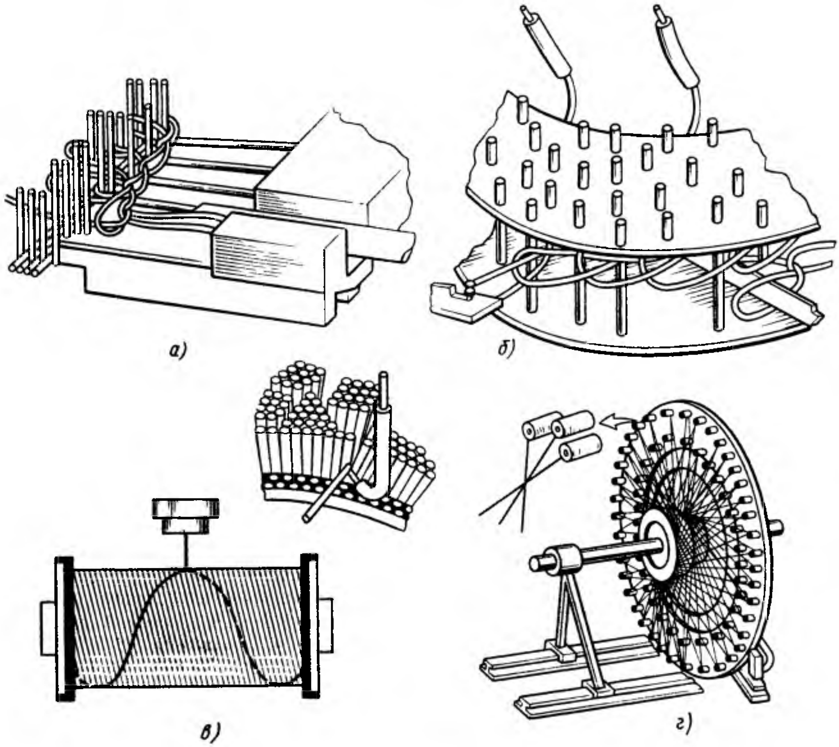


Рис. 3.8. Технологические схемы получения криволинейных ПАС:
а — аксиально-радиально-окружныя намоткой между аксиальными стержнями; *б* — аксиально-спиральныя намоткой между аксиальными стержнями; *в* — радиально-спиральныя намоткой радиальными ЭПАС; *г* — аксиально-радиально-спиральных укладкой между радиальными ЭПАС

носит название прошивки (шнуровки). Этот способ имеет следующие достоинства:

изменение отдельных частей детали варьированием шага намотки и сечением волокон;

точное выдерживание параметров, что имеет значение для процесса уплотнения (например, натяжение нитей, объемная плотность плетения);

использование сухих нитей, что позволяет получать чистую подложку, готовую к уплотнению;

быстрота и надежность операции, обеспечивающая снижение цены и отличную воспроизводимость.

Способ дает 50%-ную экономию материалов и 15-кратный выигрыш времени по сравнению с ручным способом. Автоматизация обеспечивает высокое качество структур.

Развитием предыдущего способа можно считать схему переплетения, изображенную на рис. 3.6, *к*. Особенность изготовления в этом случае заключается в том, что при получении цилиндрической заготовки автоматически обеспечивается переплетение спиральных слоев нитей на внутренней поверхности контура (рис. 3.8, *б*).

Получение полых ПАС со схемой укладки ЭПАС, изображенной на рис. 3.6, *л*, осуществляется на полностью автоматическом намоточном оборудовании двумя способами. Сущность первого способа заключается в том, что с помощью специального станка изготавливается ворсовая лента, которая наматывается на оправку. Получается ворсовое покрытие. Оправка с ворсовым покрытием перемещается на второй станок для намотки спиральных слоев (рис. 3.8, *в*).

Сущность второго способа получения такой ПАС заключается в том, что в предварительно изготовленную по форме внутреннего профиля изделия подложку из углерод-углеродного войлочного материала вставляются жесткие стержни. Пространство между стержнями заполняют углеродными волокнами методом намотки вдоль образующей и по спиральной траектории до получения необходимых толщин. Удаление подложки осуществляется на промежуточных стадиях получения УУКМ, когда ПАС приобретает достаточную жесткость.

Для получения ПАС прошивкой нитью слои углеродной ткани выкладывают на оправку, копирующую внутренний профиль изделия. После набора требуемой толщины производится прошивка пакета слоев углеродной швейной нитью на швейной машине челночного типа или на машине с односторонней прошивкой с помощью кривой иглы.

3.4.3. Углеродная матрица и способы ее получения. Углеродная матрица, подобная по физико-химическим свойствам углеродному волокну, обеспечивает термостойкость УУКМ и позволяет наиболее полно реализовать в композите уникальные свойства углеродного волокна. Углеродная матрица в композите выполняет следующие функции: передает усилие на волокна; защищает волокна от воздействия внешней среды; изолирует отдельные волокна друг от друга, препятствует их взаимному сдвигу.

Метод получения углеродной матрицы определяет ее структуру и свойства, а также характеристики УУКМ. Наиболее широкое применение нашли два способа получения углеродной матрицы: карбонизация полимерной матрицы заранее сформованной углепластиковой заготовки путем высокотемпературной термообработки в неокисляющей среде; осаждение из газовой фазы пироуглерода, образующегося при термическом разложении углеводородов в порах углеволокнистой подложки.

Оба эти способа имеют свои достоинства и недостатки. При создании УУКМ их часто комбинируют для придания композиту необходимых свойств.

Процесс карбонизации представляет собой высокотемпературную обработку изделия из углепластика до температуры 1073 К в неокисляющей среде (инертный газ, угольная засыпка и т. д.). Цель термообработки — перевод связующего в кокс. В процессе карбонизации происходит термодеструкция матрицы, сопровождающаяся потерей массы, усадкой, образованием большого числа пор и снижением вследствие этого физико-механических свойств композита.

Карбонизация проводится чаще всего в ретортных печах сопротивления. Реторта, изготовленная из жаропрочного сплава, предохраняет изделие от окисления кислородом воздуха, а нагревательные элементы и изоляцию — от попадания на них летучих коррозионно-активных продуктов пиролиза связующего и обеспечивает равномерность обогрева реакционного объема печи.

Механизм и кинетика карбонизации определяются соотношением скоростей диссоциации химических связей и рекомбинации образовавшихся радикалов. Процесс сопровождается удалением испаряющихся смолистых соединений и газообразных продуктов и образованием твердого кокса, обогащающегося атомами углерода. Поэтому в процессе карбонизации ключевым моментом является выбор температурно-временного режима, который должен обеспечивать максимальное образование коксового остатка из связующего, поскольку механическая прочность карбонизованного композита зависит, помимо прочего, от количества образовавшегося кокса.

Наиболее медленный подъем температуры должен происходить в интервале протекания глубоких пре-

3.20. Свойства УУКМ на основе углеродной ткани

Исходная матрица	Прочность при изгибе *, МПа	Модуль упругости при изгибе, ГПа
Фенолформальдегидная	132/93	14,7/10,3
Эпоксифенольная	113/93	14,0/13,3
Кремнийорганическая	128/77	12,8/8,5
Полибензимидазольная	32/56	14,7/19,2

* В числителе даны значения при температуре 297 К, в знаменателе — при 756 К.

генетических изменений связующего, содействующих образованию кокса, а затем скорость нагрева может быть значительно увеличена. Скорость нагрева (и охлаждения) определяет также распространение температуры в изделии. Разница температур в объеме изделия вызывает неравномерность протекания пирогенных процессов и объемных изменений, создает опасные внутренние напряжения, приводящие к деформации и растрескиванию изделия. Поэтому, чем больше габариты изделия, тем продолжительнее должен быть процесс карбонизации. Скорость подъема температуры при карбонизации — от нескольких градусов до нескольких десятков градусов в час, продолжительность процесса карбонизации 300 ч и более. Карбонизация заканчивается обычно в интервале температур 1073—1773 К, но при необходимости УУКМ могут нагреваться до более высоких температур, соответствующих температурному интервалу перехода углерода в графит.

Свойства УУКМ в значительной мере зависят от вида исходного связующего, в качестве которого применяются синтетические органические смолы, дающие высокий коксовый остаток (табл. 3.20). Чаще всего для этой цели применяют фенолформальдегидные смолы вследствие их технологичности, доступности низкой стоимости, образовавшийся в этом процессе кокс обладает высокой прочностью.

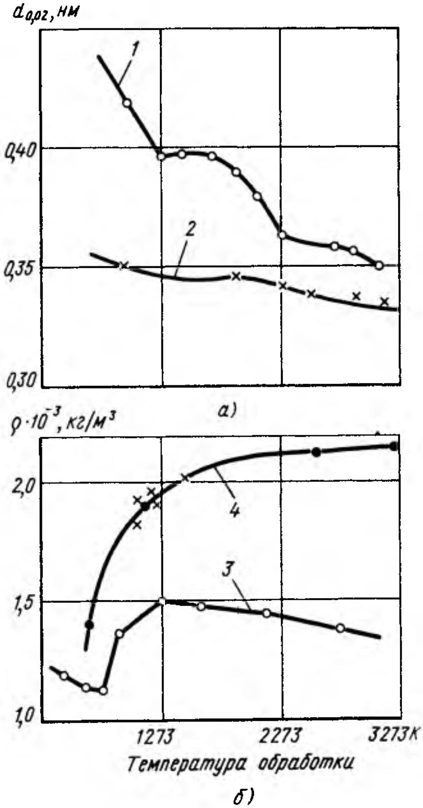


Рис. 3.9. Изменение межслоевого расстояния d_{002} (а) и плотности ρ (б) в процессе термообработки фенольной смолы (кривые 1, 3) и пека (кривые 2, 4)

Фенолформальдегидным смолам свойственны определенные недостатки. Вследствие поликонденсационного характера их отверждения и выделения при этом летучих соединений трудно получить однородную плотную структуру. Они дают кокс стеклоуглеродного типа, плохо поддающийся графитации, степень которой характеризует параметр межслоевого расстояния d_{002} в кристаллической структуре (рис. 3.9, а). Это снижает плотность ρ (рис. 3.9, б) углеродной матрицы УУКМ. Плотность кокса для фенолформальдегидных смол не превышает 1650 кг/м³, для фурановых смол — 1850 кг/м³ и для пеков — 2100 кг/м³.

Величина усадки при карбонизации фенолформальдегидных связующих больше, чем для других типов связующих, применяемых при производстве УУКМ, что приводит к возникновению внутренних напряжений в карбонизованном композите и снижению его физико-механических свойств.

Более плотный кокс дают фурановые связующие. Усадка их при карбонизации меньше, а прочность кокса выше, чем у фенолформальдегидных смол. Поэтому, несмотря на более сложный цикл отверждения, связующие на основе фурфурола, фурфурилиденацетонов, фурилового спирта также применяются при производстве УУКМ.

Высокое коксовое число имеют кремнийорганические связующие. Однако высокое содержание окиси кремния в коксе отрицательно сказывается на некоторых свойствах УУКМ на их основе. Поэтому применение этого класса связующих для получения УУКМ весьма ограничено.

Кроме рассмотренных типов синтетических смол имеются и другие полимеры с высоким коксовым остатком, пригодные для получения УУКМ на их основе. К ним относятся, например, полиимиды, полифенилены и полибензимидазол.

Весьма перспективны для получения углеродной матрицы каменноугольные и нефтяные пеки вследствие большого содержания углерода (до 92—95%) и высокого коксового числа. Преимуществами пеков перед другими связующими являются доступность и низкая стоимость, исключение растворителя из технологического процесса, хорошая графитируемость кокса и его высокая плотность. Однако вследствие неоднородности состава пеков, представляющих смесь индивидуальных органических соединений, при карбонизации пеков происходит дистилляция низкомолекулярных компонентов и образование значительной пористости. К недостаткам пеков можно отнести также термопластичность, приводящую к миграции связующего при термообработке и деформации изделия, наличие в их составе канцерогенных соединений, что требует дополнительных мер безопасности.

Вследствие выделения летучих соединений при термодеструкции смолы в карбонизованном пластике возникает значительная пористость, снижающая физико-механические свойства УУКМ. Поэтому стадией карбонизации углепластика завершается процесс получения лишь пористых материалов, для которых не требуется высокая прочность, например, низкоплотных УУКМ теплоизоляционного назначения. Обычно для устранения пористости и повышения плотности карбонизованный материал вновь пропитывается связующим и карбонизуется (этот цикл может повторяться неоднократно). Повторная пропитка производится в автоклавах в режиме «вакуум—давление», т. е. сначала заготовка нагревается в вакууме, после чего подается связующее и создается избыточное давление до 0,6—1,0 МПа. При пропитке используются растворы и расплавы связующих, причем пористость композита с каждым циклом уменьшается, поэтому необходимо использовать связующие с пониженной вязкостью. Степень уплотнения при повторной пропитке зависит от типа связующего, коксового числа, пористости изделия и степени заполнения пор. С ростом плотности при повторной пропитке повышается и прочность материала. Этим методом можно получать УУКМ с плотностью до 1800 кг/м³ и выше. Метод карбонизации углепластика сравнительно прост, он не требует сложной аппаратуры, обеспечивает хорошую воспроизводимость свойств материала получаемых изделий. Однако необходимость многократного проведения операций уплотнения значительно удлиняет и удорожает процесс получения изделий из УУКМ, что является серьезным недостатком указанного метода.

При получении УУКМ по способу осаждения пироуглерода из газовой фазы газообразный углеводород (метан, бензол, ацетилен и т. д.) или смесь углеводорода и разбавляющего газа (инертный газ или водород) диффундирует через углеволокнистый пористый каркас, где под действием высокой температуры происходит разложение углеводорода на нагретой поверхности волокна. Осаждающийся пироуглерод постепенно создает соединительные мостики между волокнами. Кинетика осаждения и структура получаемого пироуглерода зависят от многих факторов: температуры, скорости потока газа, давления, реакционного объема и др. Свойства получаемых композитов определяются также типом и содержанием волокна, схемой армирования.

Процесс осаждения проводится в вакууме или под давлением в индукционных печах, а также в печах сопротивления.

Разработано несколько технологических методов получения пироуглеродной матрицы.

При изотермическом методе заготовка находится в равномерно обогреваемой камере. Равномерность обогрева в индукционной печи обеспечивается с помощью тепловыделяющего элемента — сусцептора, изготавливаемого из графита. Углеводородный газ подается через днище печи и диффундирует через реакционный объем и заготовку; газообразные продукты реакции удаляются через выходное отверстие в крышке печи.

Процесс производится обычно при температуре 1173—1423 К и давлении 130—2000 кПа. Уменьшение температуры приводит к снижению скорости осаждения и чрезмерному удлинению продолжительности процесса. Увеличение температуры ускоряет осаждение пироуглерода, но при этом газ не успевает диффундировать в объем заготовки и происходит поверхностное наслоение пироуглерода. Продолжительность процесса достигает сотен часов.

Изотермический метод обычно применяется для изготовления тонкостенных деталей, поскольку в этом случае заполняются преимущественно поры, находящиеся у поверхности изделия.

Для объемного насыщения пор и получения толстостенных изделий применяется *неизотермический метод*, заключающийся в создании в заготовке температурного градиента путем помещения ее на обогреваемую оправку или сердечник или прямым разогревом ее током. Углеводородный газ подается со стороны, имеющей более низкую температуру. Давление в печи обычно равно атмосферному. В результате осаждение пироуглерода происходит в наиболее горячей зоне. Охлаждающее действие газа, протекающего над поверхностью с высокой скоростью, является основным способом достижения температурного градиента.

Повышение плотности и теплопроводности композита приводит к перемещению температурного фронта осаждения, что обеспечивает в конечном итоге объемное уплотнение материала и получение изделий с высокой плотностью (1700—1800 кг/м^3).

Для изотермического метода получения УУКМ с пироуглеродной матрицей характерны следующие достоинства: хорошая воспроизводимость свойств; простота технического оформления; высокая плотность и хорошая графитируемость матрицы; возможность обработки одновременно нескольких изделий.

К недостаткам относятся: малая скорость осаждения; поверхностное осаждение пироуглерода; плохое заполнение крупных пор.

Неизотермический метод имеет такие достоинства: большую скорость осаждения; возможность заполнения крупных пор; объемное уплотнение изделия.

Его недостатки заключаются в следующем: сложное аппаратурное оформление; обрабатывается лишь одно изделие; недостаточная плотность и графитируемость матрицы; образование микротрещин.

Разработаны различные технологические варианты этих методов осаждения. Так, при осаждении пироуглерода по методу перепада давления газ через заготовку (каркас) пропускается принудительно под давлением. Возникающий по толщине градиент давления зависит от проницаемости каркаса. По мере осаждения пироуглерода проницаемость снижается, что приводит к замедлению инфильтрации газа. Этим методом лучше уплотняются изделия с низкой проницаемостью. Метод технически весьма сложен, а получаемые результаты плохо воспроизводимы, поэтому метод не на-широкого применения в промышленности.

Модификацией процесса изотермического осаждения является *метод импульсного осаждения в режиме давление — вакуум.* В этом процессе реакционный объем попеременно заполняется углеводородным газом на несколько секунд и вакуумируется, в то время как температура заготовки с помощью индукционного нагрева поднимается от 1088 до 1283 К. Этот метод наиболее выгоден для объемного уплотнения изделий пироуглеродом. Хотя процесс затрудняется поверхностным осаждением пироуглерода, однако путем оптимального выбора температуры и времени осаждения удается достичь глубинного уплотнения углеродного изделия и снизить его газопроницаемость по гелию до 10^{-10} см²/с.

3.4.4. Высокотемпературная термообработка (графитация) УУКМ. Структура карбонизованных пластиков и композитов с пироуглеродной матрицей после уплотнения из газовой фазы несовершенна. Межслоевое расстояние d_{002}, характеризующее степень упорядоченности углеродной матрицы, относительно велико — свыше $3{,}44 \cdot 10^4$ мкм, а размеры кристаллов сравнительно малы — обычно не более $5 \cdot 10^{-3}$ мкм, что характерно для двухмерного упорядочения базисных слоев углерода. Кроме того, в ходе процесса получения в них могут возникать внутренние напряжения, способные привести к деформациям и искажениям структуры изделия при эксплуатации этих материалов при температуре выше температуры карбонизации или осаждения пироуглерода. Поэтому при необходимости получения более термостабильного материала проводят его высокотемпературную обработку. Конечная температура термообработки определяется условиями эксплуатации, но лимитируется сублимацией материала, которая интенсивно протекает при температуре свыше 3273 К. Термообработка проводится в индукционных печах или печах сопротивления в неокисляющей среде (графитовая засыпка, вакуум, инертный газ).

Изменение свойств углерод-углеродных материалов в процессе высокотемпературной термообработки определяется многими факторами: типом наполнителя и матрицы, конечной температурой и продолжительностью термообработки, видом среды и ее давлением и еще другими факторами. При высоких температурах преодолеваются энергетические барьеры в углеродном материале, препятствующие перемещению многоядерных соединений, их присоединению и взаимной переориентации с большей степенью уплотнения.

Длительность этих процессов невелика и степень превращения определяется в основном температурой. Поэтому длительность процессов высокотемпературной термообработки значительно меньше, чем в случае карбонизации или осаждения пироуглерода, и составляет обычно несколько часов. При высокотемпературной термообработке карбонизованных пластиков происходят необратимые деформации изделия, постепенное «залечивание» дефектов структуры и удаление гетероатомов. Для хорошо графитируемых материалов на основе пеков при температурах свыше 2473 К наблюдается интенсивный рост трехмерноупорядоченных углеродных кристаллитов вплоть до перехода к графитовой структуре. В то же время в карбонизованных пластиках на основе плохо графитирующихся полимерных связующих дефекты структуры сохраняются до 3273 К и материал остается в неграфитированной турбостратной структурной форме.

С ростом температуры термообработки прочность графитирующихся материалов снижается, в то время как у многих неграфитирующихся композитов механическая прочность повышается (табл. 3.21).

3.4.5. Термобарический процесс изготовления высокоплотных УУКМ. С развитием высокотемпературной техники возрастает потребность в высокоплотных УУКМ с плотностью, близкой к теоретической плотности графита.

Традиционные методы получения УУКМ не позволяют получать полуфабрикаты деталей значительной толщины со столь высокой плотностью. Одним из наиболее перспективных методов решения этой задачи является

3.21. Свойства УУКМ при различных температурах термообработки (ТТО)

Состав композита		ТТО, К	Плотность, кг/м³	Прочность при изгибе, МПа	Модуль упругости при изгибе, ГПа
Наполнитель	Матрица				
Высокомодульное волокно	Кокс фенольной смолы	1270/2870	1550/1640	149/588	17,2/18,5
Войлок	Пироуглерод	1370/2900	1570/1610	130/108	26/23
Непрерывное волокно		1370/3270	1500/1530	54/48	25/22

Примечание. В числителе приведены температуры низкотемпературного режима ТО и соответствующие им характеристики УУКМ, а в знаменателе — то же, для высокотемпературного режима.

термобарический процесс, при котором термообработка исходной углепластиковой заготовки проводится с одновременным приложением давления. Этот метод является модификацией описанного выше метода получения УУКМ карбонизацией углепластиков. Давление газовой среды на стадии карбонизации значительно улучшает процесс образования кокса из органического связующего, причем применение давления при карбонизации наиболее эффективно в области температур глубоких пирогенетических изменений связующего (773—923 К). В соответствии с принципом Ле-Шателье давление смещает равновесие химических реакций в сторону образования твердого кокса и уменьшения выхода летучих соединений.

Наиболее перспективными связующими для получения высокоплотных УУКМ являются хорошо графитизирующиеся пеки с содержанием углерода до 92—95%. Так, при повышении давления (от 0,1 до 10 МПа) в процессе карбонизации низкотемпературного каменноугольного пека из пека осаждается до 90% кокса, т. е. коксообразование приближается к теоретически возможному уровню. Приложение давления позволяет ускорить процесс карбонизации и сдвигает его в область наиболее низких температур. В результате продолжительность карбонизации изделия может быть уменьшена до нескольких часов без ухудшения свойств карбонизованного материала. Карбонизация под давлением проводится в специальных установках для горячего изостатического прессования (типа газостатов), где давление создается инертной газовой средой, или в обогреваемых пресс-формах.

Влияние давления положительно не только на стадии карбонизации, но и при более высоких температурах. Благодаря появлению пластичности углеродного материала при температурах свыше 1673—1873 К облегчается его уплотнение и графитация. В результате удается получить хорошо графитированный материал с плотностью до 2000 кг/м³. При этом продолжительность процесса составляет всего 7—14 ч. В этом и заключается преимущество данного метода, позволяющего в принципе изготавливать деталь за один цикл.

3.4.6. Процессы получения УУКМ с комбинированными матрицами. Одним из преимуществ УУКМ является возможность целенаправленного изменения их свойств путем варьирования условий получения. Поскольку углеродные матрицы, получаемые различными способами, описанными выше, различаются по структуре и термомеханическим свойствам, то для достижения необходимых свойств УУКМ эти способы часто комбинируются.

Помимо материалов с однокомпонентными углеродными матрицами, состоящими из пироуглерода или кокса, осажденного из связующего, разработаны и материалы с комбиинированными матрицами, полученные насыщением пироуглеродом в изотермических условиях карбонизованного углепластика. Цель введения пироуглерода в коксовую матрицу — оптимизация уплотнения карбонизованных изделий. Кроме того, осаждение пироуглерода, термомеханические свойства которого существенно отличаются от свойств кокса органических связующих, позволяет расширить диапазон термомеханических и других характеристик УУКМ.

Уплотнение пироуглеродом карбонизованного пластика приводит к снижению кажущейся плотности, что обусловлено образованием системы замкнутых пор и уменьшением открытой пористости при поверхностном наслоении пироуглерода. Однако прочностные характеристики композита при этом значительно возрастают.

В разработке изделий из УУКМ находят применение и другие варианты комбинированных матриц. В частности, для придания жесткости углеродной волокнистой заготовке и предотвращения ее деформации и нарушений структуры армирования при последующем уплотнении жидким связующим она предварительно насыщается пироуглеродом из газовой фазы. Этот метод рекомендуется, например, при изготовлении УУКМ с плотностью 1500—1600 кг/м^3. Осаждение пироуглерода на углеродное волокно перед пропиткой органическими связующими обеспечивает более прочную связь между армирующими волокнами и карбонизованной матрицей, что приводит к повышению прочности УУКМ.

Способ изготовления УУКМ с комбинированной матрицей, существенно повышающей механическую прочность композита, включает следующие технологические операции:

нанесение пироуглерода на углеродный волокнистый наполнитель;

пропитка наполнителя органическим связующим;

формообразование углепластиковой заготовки;

карбонизация ее до 1273 К;

уплотнение карбонизованной заготовки пироуглеродом;

графитация до 2273К (при необходимости).

Предполагается, что пироуглеродное покрытие на углеродном волокне уменьшает адгезию между волокном и полимерным связующим и, следовательно, вероятность возникновения внутренних напряжений и дефектов в композите в процессе усадки связующего при карбонизации. Оптимальная толщина пироуглеродного покрытия на моноволокне 0,001—0,1 нм. Между соседними моноволокнами не должна образовываться сплошная матрица, которая могла бы препятствовать их подвижности при формообразовании углепластика. Осаждение пироуглерода из метана предлагается проводить в изотермическом режиме при 1323 К остаточном давлении 1,5 кПа в течение 3 ч. Дополнительное уплотнение пироуглеродом карбонизованного пластика с целью заполнения открытой пористости позволяет еще более улучшить механические свойства УУКМ.

3.4.7. Свойства УУКМ. Измеренные при комнатной температуре физические, тепловые и механические свойства некоторых зарубежных материалов приведены в табл. 3.22. Однако эти свойства дают только первое представление о возможностях УУКМ и не позволяют сделать точную количественную оценку влияния схем укладки и вида матрицы, так как каждый разработчик использовал для изготовления материалов различные по свойствам волокна и различную технологию получения. Поэтому все дальнейшие сведения будут отражать качественную картину поведения УУКМ.

О влиянии схемы армирования на прочность можно судить по данным табл. 3.23.

Схема армирования (структура) существенно влияет на поведение материала при его разрушении (рис. 3.10). УУКМ 1Д структуры имеют хрупкий характер разрушения, 2Д структуры — частично хрупкий. Объемноармированные УУКМ при разрушении ведут себя как псевдопластичные материалы. Причем разрушение их на-

3.22. Физико-механические свойства УУКМ с различными структурами

Параметр	США		Франция	
	2Д	3Д	4Д	Ткань
Марка материала	5451	SPE	Сепкарб-500	Аэролор-22
Тип матрицы	Кокс пека	Кокс пека	Кокс пека	Пироуглерод
Температура ТО, К	1570—1650	1970	1800—1950	1500—1800
Прочность, МПа:				
при растяжении	45	115	—	40—70
при сжатии	90	77	70—120	120—200
Модуль упругости $E \cdot 10^{-3}$, МПа	28	65	—	20—30
Теплопроводность, Вт/(м·К)	5,9—15,0	18—22	50—150	—
Температурный коэффициент линейного расширения $\alpha \cdot 10^6$ при 300—2300 К, 1/К	—	1,86	1,0—2,0	—

3.23. Свойства УУКМ в зависимости от схемы армирования

Схема армирования (структура), тип армирующего материала, объемное содержание волокна, %	Прочность при изгибе	Модуль упругости	Прочность при межплоскостном сдвиге
	ГПа		МПа
1Д, волокно, 55	1,2—1,4	150—200	20—40
2Д, ткань, 35	0,3	60	20—40
3Д, ткань прошитая, 50	0,25—0,3	50—150	50—80
Хаотическая, войлок, 35	0,17	15—20	20—30

ступает при нагрузке в 2 раза большей, чем для высокоплотного графита. Причиной нехрупкого поведения объемно-армированных УУКМ является наличие системы внутренних трещин на границе волокно — матрица. Исчезновение системы внутренних трещин (при высоких температурах из-за термического расширения УУКМ число трещин резко снижается) ведет к тому, что объемно-армированный УУКМ имеет хрупкий характер разрушения. При высоких температурах кривая напряжение — деформация УУКМ 3Д структуры аналогична кривой для анизотропных материалов. УУКМ на основе ориентированных волокнистых наполнителей характеризуются ярко выраженной анизотропией свойств.

Учитывая основное применение УУКМ в качестве теплозащитных покрытий, большой интерес представляют свойства УУКМ как термостойких материалов. Эти материалы сохраняют высокие значения механических характеристик при повышенных температурах. Прочности при растяжении и сжатии обнаруживают тенденцию к увеличению до 2500 К, а модуль упругости при температурах выше

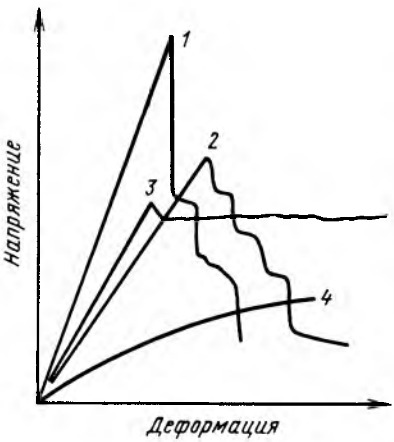


Рис. 3.10. Диаграммы напряжение—деформация УУКМ с различными структурами:

1 — 1Д; *2* — 2Д; *3* — 3Д; *4* — 3Д (при 3300 К)

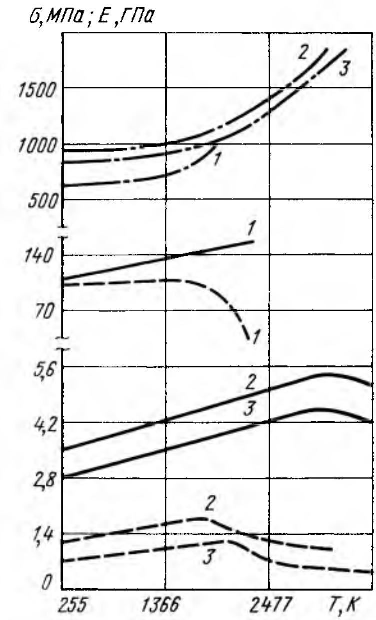


Рис. 3.11. Зависимость прочности при сжатии (—·—), растяжении (———) и модуля упругости при растяжении (— — —) материалов типа углерод-углерод AVCO/3Д и чистого графита ATJ-S от температуры:

1 — AVCO/3Д; *2* — ATJ-S вдоль зерен; *3* — ATJ-S поперек зерен

1643 К начинает снижаться (рис. 3.11). Теплопроводность УУКМ снижается с ростом температуры до 1300 К, а в интервале 1300—3300 К теплопроводность падает еще на 30—40% в сравнении с ее величиной при 1300 К. С ростом температуры термообработки теплопроводность возрастает, что объясняется повышением степени графитации матрицы. Удельная теплоемкость УУКМ при подъеме температуры от 500 до 2300 К возрастает с 0,8 до 2,2 кДж/(кг·К), а при последующем увеличении температуры до 3300 К она остается постоянной.

Если в неокисляющей среде механические характеристики УУКМ сохраняются вплоть до 2000 К, то на воздухе они выдерживают лишь кратковременный высокотемпературный нагрев, при длительном же воздействии вследствие окисления углерода характеристики УУКМ резко снижаются. При выяснении механизма окисления с целью повышения окислительной стойкости УУКМ установлено, что суммарная скорость гетерогенных реакций углерода с газами в отсутствие катализирующих примесей определяется соотношением скоростей следующих стадий процесса:

диффузией реагирующего газа и продуктов реакции из газового объема к поверхности углерода;

диффузией реагирующего газа от наружной поверхности к активным участкам внутри образца и переносом продуктов реакции в обратном направлении;

хемосорбцией молекул реагирующего газа на поверхности и десорбцией продуктов.

Окисление углерода начинается в первую очередь на активных центрах, какими могут являться кромки базисных углеродных слоев, дефекты решетки или дислокации. На процесс окисления большое влияние могут оказать примеси, например следы переходных металлов или их оксидов. Элементы, входящие в состав примесей, могут оказывать как ускоряющее действие на окисление углерода (например, Fe, Ca, K), так и замедлять процесс (например, Si или Al).

Пористость УУКМ и характер распределения пор также влияют на скорость окисления. Если лимитирующей стадией окисления является диффузия в порах, то с уменьшением соотношения радиуса пор и их длины энергия активации процесса снижается. Высокая пористость способствует ускоренному окислению композита.

Таким образом, повышению окислительной стойкости УУКМ способствуют применение хорошо графитирующейся матрицы, повышение плотности, конечной температуры обработки, снижение содержания катализирующих окислов примесей. Поскольку окисление углерода начинается уже при 630—720 K, то для увеличения предельной температуры эксплуатации УУКМ в окислительных газовых средах необходимо использовать различные способы защиты композита от окисления. Например, известно, что фосфаты и бораты замедляют процесс окисления искусственных углеродов. Особенно эффективна пропитка фосфатом цинка, который снижает скорость окисления в 20 раз. Антиокислительное действие фосфатов и боратов связано, возможно, с блокированием ими активных центров на поверхности углерода.

С целью защиты УУКМ от окисления возможно нанесение барьерных защитных покрытий, таких, как карбиды, силициды, а также пироуглерод.

Защитное действие покрытий, например карбида кремния, эффективно лишь на начальной стадии окисления. Если вначале скорость окисления УУКМ с покрытием очень мала по сравнению с немодифицированным УУКМ, то с течением времени она вновь возрастает до значения, характерного для исходного УУКМ. Это связано с возникновением температурных напряжений в слое карбида кремния при нагреве, приводящих к разрыву покрытия и быстрому окислению УУКМ.

Для эффективной защиты УУКМ от окисления покрытия должны удовлетворять следующим требованиям:

иметь высокую температуру плавления и разложения; низкое давление паров;

быть по возможности плотными, беспористыми;

при окислении образовывать тонкую оксидную пленку, препятствующую дальнейшему проникновению окисляющего газа внутрь изделия;

не вступать в реакции с углеродом;

значения температурных коэффициентов линейного расширения защитного слоя и УУКМ не должны сильно отличаться, чтобы не произошло разрыва или смещения покрытия;

иметь хорошую адгезию к углеродному материалу.

Различия в абляционной стойкости равноплотных УУКМ пытаются объяснить различием микроструктуры матриц. Методом дифракции электронов установлено, что структура тонких пироуглеродных покрытий определяется природой волокон. На вискозных волокнах почти во всех случаях, включая предварительно термообработанные углеродные волокна, покрытие получается изотропным. Если покрытые пироуглеродом волокна нагреть до 3100 K, то структура покрытия не меняется при условии, что сами волокна не были термообработаны до этой температуры. Если же перед осаждением пироуглерода волокна термообработать при 3100 K, затем покрыть пироуглеродом, а потом опять провести термообработку, то структура становится ориентированной. На предварительно термообработанных волокнах из полиакрилнитрила пироуглеродное покрытие имеет анизотропную структуру. Покрытие имеет такую же структуру, когда волокна с изотропным покрытием подвергаются термообработке при 3100 K. На волокнах из пека покрытия при всех условиях имеют ярко выраженную анизотропную структуру, кроме тех случаев, когда осаждение пироуглерода осуществляется на пековые волокна, имеющие на поверхности кокс эпоксидной смолы (при осаждении пироуглерода на стержни из углеродных волокон, связанных эпоксидной смолой). В данном случае всегда образуется покрытие с тропной структурой. В образцах композиций, армированных углеродным волокном, с матрицей из каменноугольного или нефтяного пеков после пропитки и пиролиза, проведенных при относительно низких давлениях (меньше 7 МПа), между филаментами пучка волокон образовывалась структура матрицы с графитовыми плоскостями, выровненными вдоль поверхностей волокон. Эта высокоориентированная структура базисных плоскостей при давлениях ниже 7 МПа формируется независимо от типа волокна, предыстории сырья и наличия или отсутствия пироуглеродного покрытия. По мере удаления от поверхности волокна структура матрицы становится менее ориентированной, наличие пироуглерода на элементарных волокнах усугубляет эту разориентацию.

Предпочтительная ориентация матрицы влияет на механические свойства композиций. В лучшем случае при полной ориентации матрицы вдоль поверхности волокна модуль упругости матрицы может быть одного порядка с модулем упругости волокна.

Список литературы

1. **Адаменко А. А.** Современные методы радиационной дефектоскопии. Киев: Наук. думка, 1984. 384 с.

2. **Болотин В. В., Болотина К. С.** Технологические напряжения и трансверсальная прочность армированных пластиков//Прочность материалов и конструкций Киев: Наук. думка, 1975. 239 с.

3. **Болотин В. В., Воронцов А. Н., Мурзаханов Р. Х.** Анализ технологических напряжений в намоточных изделиях из композитов на протяжении всего процесса изготовления//Механика композитных материалов. 1980. № 3. С. 500—508.

4. **Буланов И. М., Добровольский А. К., Харченко Е. Ф.** Оптимизация технологии изготовления изделий из органопластика по структурным параметрам//Применение пластмасс в машиностроении: Сб. трудов МВТУ им. Н. Э. Баумана. 1981. № 18. С. 81—91.

5. **Вайнберг Э. И.** Контроль изделий из композиционных материалов методом рентгеновской вычислительной томографии//Дефектоскопия. 1984. № 10. С. 32—36.

6. **Гуртовник И. Г., Спортсмен В. Н.** Стеклопластики радиотехнического назначения. М.: Химия, 1987. 154 с.

7. **Дедюхин В. Г., Ставров В. П.** Прессованные стеклопластики. М.: Химия, 1976. 271 с.

8. **Жигун И. Г., Поляков В. А.** Свойства пространственно-армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1978. 232 с.

9. **Колесников С. А.** Термостабилизация и карбонизация пластиков//Термоустойчивость пластиков конструкционного назначения. М.: Машиностроение, 1980. С. 213—237.

10. **Лосс В.** Исследование давления прессования для различной степени наполнения пресс-материала//Кунштоффе, 1974. Т. 64. № 5. С. 234—238.

11. **Назаров Г. И., Сушкин В. В.** Теплостойкие пластмассы. М.: Машиностроение, 1980. 204 с.

12. **Николаев В. Л., Инденбаум В. М.** К расчету остаточных напряжений в намоточных изделиях из стеклопластиков//Механика полимеров. 1970. № 6. С. 1026—1030.

13. **Першин В. А., Дрейцер В. И., Рогинский С. Л.** Влияние способа намотки на прочность стеклопластиков//Пластические массы. 1980. № 3. С. 27—29.

14. **Поляков В. И., Спридзанс Ю. Б.** Намотка волокнистых композитов с дополнительным давлением//Механика полимеров. 1972. № 5. С. 793—796.

15. **Портнов Г. Г., Спридзанс Ю. Б.** Намотка колец из стеклопластика с изменением усилия натяжения по программе//Механика полимеров. 1971. № 2. С. 361—364.

16. **Портнов Г. Г., Бейль А. И.** Модель для учета нелинейности свойств полуфабриката при силовом анализе намотки композитов//Механика полимеров. 1977. № 2. С. 231—244.

17. **Потапов А. И., Пеккер Ф. П.** Неразрушающий контроль конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 215 с.

18. **Протасов В. Д., Филипенко А. А., Харченко Е. Ф.** Влияние структурной неоднородности распределения компонентов в намоточных изделиях на их несущую способность//Проблемы прочности. 1978. № 4. С. 82—86.

19. **Рогайлин М. И., Чалых Е. Ф.** Справочник по углеграфитовым материалам. М.: Химия, 1974. 194 с.

20. **Росато Д. В., Грове К. С.** Намотка стеклонитью. М.: Машиностроение, 1969. 309 с.

21. **Соколов А. Д.** Направление интенсификации переработки и рационального использования реактопластов//Обмен опытом в радиопромышленности. 1983. № 5. С. 10.

22. **Тарнопольский Ю. М., Портнов Г. Г.** Программированная намотка стеклопластиков//Механика полимеров. 1970. № 1. С. 48—53.

23. **Тарнопольский Ю. М., Спридзанс Ю. Б.** Компенсация температурных напряжений в изделиях из стеклопластиков методом послойной намотки//Механика полимеров. 1972. № 4. С. 640—645.

24. **Цыплаков О. Г.** Научные основы технологии композиционно-волокнистых материалов. В 2 ч. М.: Химия, 1974. Ч. 1. 315 с.

25. Chouri J. Materials carbones—carbones composites carbones//L'Aeronautique of l'Astronautique. 1978. № 68. P. 30—43.

26. Forrest M. A., Marsh H. The effect of pressure on the carbonisation of pitch and pitch/carbon, febre composites//J. of Mater. Sci. 1983. Vol 18., № 5. P. 978—990.

27. Fritz W., Hüttner W. Carbon—fibre—reinfirced carbon composites//Nonmetall. Mater and Compos. ICMC Symp. Munich. 1978—1979. P. 245—266.

Глава 4

КОМПОЗИТЫ С МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ МАТРИЦЕЙ

В композитах с металлической матрицей сочетаются достоинства конструкционных металлических материалов с достоинствами композитов вообще. Для них характерны высокие значения прочностных характеристик, модулей упругости, вязкости разрушения, ударной вязкости; эти материалы сохраняют стабильность своих характеристик в более широких температурных интервалах, чем материалы с полимерными матрицами; они обладают также высокой тепло- и электропроводностью, малой чувствительностью к тепловым ударам и поверхностным дефектам. Им свойственны воспроизводимость характеристик, обусловленная этим же качеством конструкционных металлических материалов, в сочетании с высокой технологичностью, а также высокие значения временного сопротивления при растяжении в направлении, нормальном к оси волокон ($\bar{\sigma}_2$), прочности при сдвиге ($\bar{\tau}_{12}$). Последние из перечисленных достоинств позволяют в большинстве случаев применять наиболее простую одноосную схему армирования; гораздо менее распространены схемы послойно-перекрестного (ортогонального или более сложного характера плоского армирования) расположения волокон.

Металлические матрицы обладают высокой реакционной способностью в жидкофазном состоянии и высоким сопротивлением деформированию в твердофазном состоянии, поэтому проблемы химической и механической совместимости для композитов этого типа весьма серьезны, их решение требует комплексных подходов, тщательной научной и практической проработки процессов. Для конструкционных композитов преобладающими являются твердофазные процессы, когда матрица находится в состоянии высокой пластичности и ограниченной реакционной способности.

4.1. МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ МАТРИЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Для конструкционных композитов в качестве матричных составляющих преимущественно применяются алюминий, титан, сплавы на основе этих металлов, а также магниевые сплавы.

Матричные материалы на основе алюминия [1, 2]. Эти материалы имеют при нормальных условиях широкий спектр прочностных характеристик (временное сопротивление разрыву от 60—80 до 700—750 МПа), обладают низкой плотностью, высокой пластичностью, хрупкостью оксидной пленки, технологичностью при различных видах механической обработки, высокой свариваемостью, коррозионной стойкостью, способностью к релаксации напряжений. В качестве матричной составляющей таких композитов применяются технический алюминий, сплавы марок АМц, АМг2, АМг6, АД33, АВ, 1201, Д20, Д16, В95 и др.

Алюминий и сплавы на его основе при комнатной температуре характеризуются модулем упругости $E =$ $= (68 - 72{,}5)$ ГПа, модулем сдвига $G = (26{,}5 - 27)$ГПа, коэффициентом Пуассона $\mu_P = 0{,}32$—$0{,}33$. Сопротивление деформации при температурах горячей обработки алюминия и алюминиевых малолегированных сплавов при статических условиях деформирования составляет 8—25 МПа, допустимые степени деформации 80—95%. Для прочных алюминиевых сплавов эти показатели составляют

4.1. Механические свойства при комнатной температуре плазменно-напыленных алюминиевых матриц в компактном состоянии [6]

Материал	Состояние	$\sigma_в$	$\sigma_{0,2}$	δ, %
		МПа		
АД1	После напыления с местной защитой аргоном и отжига	60—120	35—50	25
АМг5	После напыления с местной защитой аргоном	180—250	80—100	4—8
АМг61	После напыления	360	200	3—4
	После напыления и отжига	270—280	150	15

соответственно 55—100 МПа и 60—80%. При динамических условиях деформирования сопротивление деформации этих материалов возрастает в 1,5—3 раза, а допустимые степени деформации снижаются на 10—20%.

В практике получения композитов на основе алюминия широко применяют методы предварительного совмещения составляющих, например плазменное напыление матричного материала, которое существенно изменяет его структуру и свойства [6]. В этом случае матрица формируется в результате высокоскоростного перемещения расплавленных мелких частиц, соударения их с поверхностью, на которую производят напыление, и высокоскоростной кристаллизации. Поэтому матрица в указанных условиях формируется в виде скопления тонкопластинчатых частиц размером 2—10 мкм, по границам которых наблюдаются сплошные либо дискретные тончайшие оксидные пленки (отдельные мельчайшие оксидные вкрапления наблюдаются и внутри пластин, их содержание зависит от атмосферы, в которой производят напыление). Кроме того, содержание легирующих элементов и примесей после плазменного напыления изменяется. В совокупности перечисленные факторы существенно изменяют и структуру, и механические свойства алюминиевых матриц (табл. 4.1).

Наличие в плазменно-напыленных матрицах дисперсных оксидных вкраплений и оксидных пленок по границам частиц вызывает смещение в сторону более высоких температур интервалов состояния высокой пластичности и параметров (температура и давление) формирования прочного соединения составляющих композитов. Оптимальные параметры деформирования плазменно-напыленных матриц на основе алюминия представлены в табл. 4.2.

Титановые и магниевые матрицы. Магниевые и титановые матричные составляющие композитов имеют ряд достоинств (магниевые матрицы обладают малой плотностью, титановые — сохраняют высокие прочностные характеристики при повышенных температурах), однако по технологичности (и особенно при горячем деформировании) они заметно уступают алюминиевым матрицам.

В качестве матричных составляющих применяются магниевые сплавы марок МА2-1, МА5, МА8 и некоторые другие [5]. Основные механические свойства этих сплавов следующие:

4.2. Параметры деформирования алюминиевых плазменно-напыленных матриц при повышенных температурах [6, 10]

Материал	$t_д$, °С	p, МПа	$\bar{\varepsilon}$, %
АД1	550	40—45	60
	480—520	65—75	50—55
АМг61	500—520	90—150	50—55

Примечание. Принятые обозначения: $t_д$ — температура деформирования; p — давление; ε — степень деформации.

4.3. Режимы сверхпластического деформирования титановых сплавов [3]

Материал	$\dot{\varepsilon}$, $с^{-1}$	σ_{sp}, МПа	$t_д$, °С
ВТ1-0	$1{,}2\cdot10^{-4}$	12—15	940
ОТ4-1	$3\cdot10^{-5}$—$5\cdot10^{-4}$	11—15	1010
ВТ6С	$(6—8)\cdot10^{-4}$	11—15	900
ВТ3-1	$1{,}5\cdot10^{-3}$	4—6	920
ВТ14	$3\cdot10^{-5}$—$5\cdot10^{-4}$	11—15	850—875

Примечание. Принятые обозначения: $\dot{\varepsilon}$ — скорость деформации; σ_{sp} — напряжение сверхпластического течения.

$\sigma_в = 250\div310$ МПа, $E = 37\div43$ ГПа, $\delta = 8\div15\%$.

Титановые матрицы обладают удовлетворительной технологичностью при горячем деформировании, хорошей свариваемостью, способностью длительно сохранять высокие прочностные характеристики (360—1050 МПа) при повышенных температурах [7] (300—450 °С). Однако эти материалы даже при повышенных технологических температурах сохраняют высокое сопротивление деформации, поэтому при получении композитов с хрупкими волокнами целесообразно пользоваться режимами сверхпластического деформирования (табл. 4.3).

4.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОЦЕССОВ ПОЛУЧЕНИЯ И ОБРАБОТКИ КОМПОЗИТОВ

Наиболее общая классификация процессов получения и обработки композитов представлена на рис. 4.1. Процессы, относящиеся к газо- и парофазной, а также химической и электрохимической группам, используются главным образом для нанесения технологических покрытий на волокна. Для конструкционных композитов с металлической матрицей наибольшее развитие получили твердофазные процессы. На рис. 4.2 представлена классификация процессов этой группы. В производстве и обработке рассматриваемых материалов необходимо различать получаемые на предварительной стадии полуфабрикаты композита (препреги), к которым относятся волокна с покрытиями, предварительно пропитываемые жгуты волокон, плетеные «ремни», сетки, пористые ленты с одним слоем волокон [6]. Впоследствии их используют в качестве элементов сборных многослойных заготовок. В результате компактирования этих заготовок могут быть получены компактные полуфабрикаты (ленты, листы, полосы, плиты, трубы, проволока), которые затем подвергаются процессам формообразования, раскроя, сварки, механической обработки. В отдельных случаях процессы формообразования и компактирования удается совместить, т. е. изготовление изделий из сборных заготовок может быть одно- либо двухстадийным

Рис. 4.1. Общая классификация процессов получения и обработки композитов с металлической матрицей [6, 10]

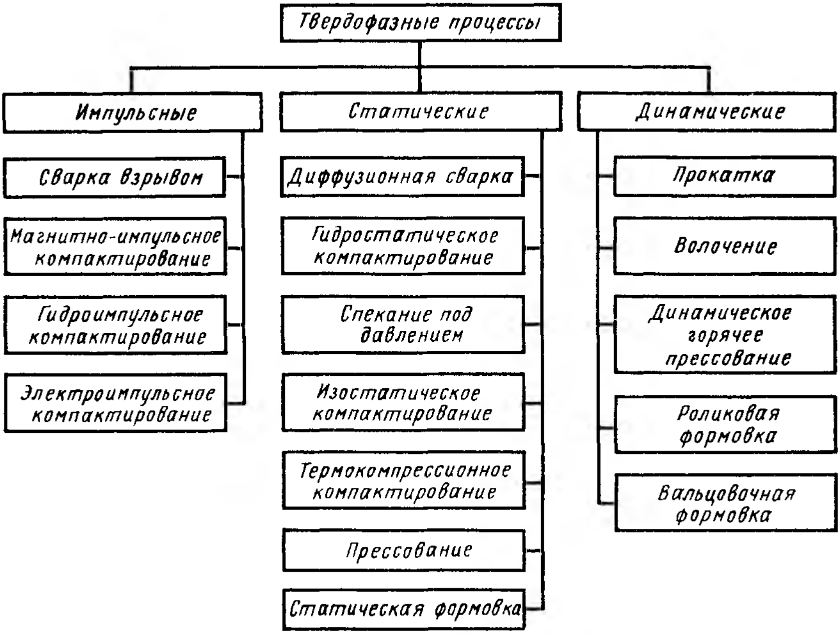


Рис. 4.2. Классификация твердофазных процессов получения и обработки композитов с металлической матрицей [6, 8, 10]

4.3. ПОЛУЧЕНИЕ ПОЛУФАБРИКАТОВ КОМПОЗИТОВ

При получении сборных заготовок укладкой или намоткой волокон последние располагают с определенным шагом между слоями матричных элементов, при этом положение волокон не фиксируется, поэтому при последующем компактировании взаимное расположение соседних волокон может оказаться непостоянным. Неравномерное распределение волокон в матрице обусловливает различия в распределении напряжений по участкам при нагружении изделия, концентрацию напряжений в отдельных участках и, как следствие, снижение эксплуатационных характеристик. Кроме того, в заготовках этого вида волокна не защищены от окисления при нагреве и в начальный период компактирования, в результате чего происходит снижение прочности (и химическая деградация) упрочнителя, затрудняется и формирование прочного соединения по границам раздела матрицы и волокон. На участки межкомпонентной поверхности в заготовках, получаемых укладкой или намоткой, могут попадать загрязнения (из атмосферы цеха и др.), что снижает качество соединения матриц и волокон и нарушает воспроизводимость основных характеристик изделий. Качество изделий из композитов повышается при обеспечении условий равномерной (или другой регулярной) укладки волокон в матрице, отсутствии окисления поверхности волокон и загрязнений на контактных поверхностях составляющих материала путем предварительного получения полуфабрикатов композитов [10].

Получение ленточных монослойных полуфабрикатов плазменным напылением. Оптимальным вариантом применения плазменного метода для изтовления полуфабрикатов композитов является процесс импульсного плазменного напыления металлической матрицы [5]. Стационарная плазменная струя при нанесении металлических покрытий путем распыления материала расходуемого проволочного электрода оказывает мощное тепловое и силовое воздействие, которое может привести к разупрочнению и даже разрушению некоторых видов волокон. Для изготовления ленточных монослойных (с одним слоем волокон) полуфабрикатов применяется импульсный процесс с использованием коаксиального плазмотрона [6]. Внутренний проволочный электрод [диаметр (1—3) 10^{-3} м] плазмотрона расходуется в ходе процесса напыления, для чего его непрерывно подают в канал массивного внешнего охлаждаемого электрода (источник питания состоит из конденсаторной батареи, зарядного выпрямителя и генератора инициирующих импульсов). Длительность разрядного импульса 10^{-4}—10^{-3} с. Напыление производят в герметичной камере, заполняемой аргоном, при давлении 13,1—99,6 кПа. Плазменная струя формируется за счет термического расширения газа в канале генератора и интенсивной эрозии электродов. Эрозия внутреннего проволочного электрода на два-три порядка больше, чем наружного, поэтому состав плазменной струи определяется практически полностью материалом внутреннего проволочного электрода, продукты эрозии которого представляют собой смесь пара и жидкой фазы. Генерированием коротких импульсов с большой амплитудой при малой частоте их следования (несколько герц) получают плазменную струю, насыщенную металлом расходуемого электрода.

Частицы материала матрицы композита при напылении оказывают термическое и механическое воздействие на волокна, однако оптимизация условий процесса обеспечивает возможность сохранения исходной прочности многих видов волокон, имеющих защитные покрытия, снижение исходной прочности волокон без покрытий составляет несколько процентов. Например, при напылении алюминия на волокна бора последние сохраняют 90—92% исходной прочности [6].

Ленты — полуфабрикаты получают плазменным напылением двумя способами [6]:

непрерывное волокно с заданным шагом наматывают на барабан, поверхность обода которого имеет нарезанные или накатанные по винтовой линии канавки, после закрепления концевых участков волокон производят напыление матричной составляющей композита;

на поверхности барабана фиксируют слой фольги из матричного материала, наматывают волокно, фиксируют концевые участки и производят напыление.

В первом случае можно получать ленты с более высокими объемными долями волокон и более равномерным их распределением в матричной составляющей. Ленты с одним рядом волокон обычно имеют толщину 150—250 мкм, их габаритные размеры в плоскости определяются шириной и диаметром барабана. Можно получать ленты шириной от нескольких десятков миллиметров до нескольких метров при длине не более 10 м.

Наиболее широкое плазменное напыление применяют для изготовления лент — полуфабрикатов из композитов системы алюминий—бор. В качестве оборудования применяют установки типа УПУ-3 мощностью до 30 кВт [6]. Напыленная матричная составляющая (в зависимости от режимов напыления) имеет пористость 5—40%. Напыляемые частицы перемещаются в плазменной струе с возрастающей скоростью 50—150 м/с, поэтому в результате движения волн сжатия развивается ударное давление, достигающее 1000 МПа (и более), время действия которого весьма мало (10^{-1}—10^{-9} с). Время действия напорного давления на два-три порядка больше, но его величина не превышает 20 МПа [6]. Вследствие высокоскоростного перемещения напыляемых частиц и соударения с волокнами и поверхностью обода барабана они расплющиваются в тончайшие пластинчатые образования с практически мгновенным затвердеванием пограничного (с поверхностью обода барабана или поверхностью волокна) слоя матричной частицы. Максимальная температура поверхности волокна в контакте с напыленной матричной частицей может достигать 0,8—0,9 от температуры плавления напыляемого материала. Так как матричная составляющая ленты формируется в результате последовательного переноса множества расплавленных и быстро деформирующихся (от соударения) частиц, она имеет слоистую тонкопластинчатую структуру. Между пластинами обычно располагаются дискретные цепочки дисперсных оксидов матричного материала; размер частиц матрицы, покрытых несплошным слоем оксидов, обычно равен 2—10 мкм. При напылении алюминиевых матриц применяют в качестве плазмообразующего газа аргон [расход (7,5—8,4) 10^{-4} м^3/с, дистанция напыления (110—120) $\times$ $\times 10^{-3}$ м].

При изготовлении бороалюминиевых лент плазменным напылением время воздействия плазмы на волокно составляет 8—10 с; время, в течение которого в контакте напыляемая частица — волокно поддерживается постоянная температура, находится в пределах 10^{-5}—10^{-6}с. В связи с этим химическое воздействие напыленного материала на волокно невелико. Для того чтобы активировать поверхность волокон и обеспечить хотя бы частичное соединение матрицы и волокон (необходимое для нормальной транспортировки лент, их раскроя и сборки многослойных заготовок — пакетов), производят подогрев барабана до температуры 250—350 °С [5,6].

На волокна бора без покрытия или с покрытием B_4C плазма оказывает некоторое адсорбционно-химическое воздействие, чем и объясняется небольшое снижение прочности волокон. Волокна карбида кремния и волокна бора с покрытием карбида кремния в результате плазменного напыления могут даже несколько упрочняться (до 10% исходной прочности), что объясняется [6] перераспределением и частичным снятием внутренних напряжений в волокнах. Это различие в характере изменения исходной прочности волокон связано еще и с тем, что карбид кремния обладает высокой стойкостью против окисления [12], так как получение плазменных лент — полуфабрикатов производится в камерах с местной защитой аргоном. Для защиты поверхности волокон от окисления при этом используют плазменные горелки с дополнительным кольцевым соплом, расположенным коаксиально по отношению к рабочему соплу. Через кольцевое сопло пропускают струю аргона, что создает препятствие интенсивному подсосу воздуха в плазменную струю и снижает содержание оксидов в напыленном слое матричной составляющей композита [6].

Природа напыляемого металла (в числе других факторов) воздействует на волокна при плазменном напылении. Прочность волокон снижается последовательно в ряду напыляемых металлов Zn, Al, Cu, Ni, Ti. Титан, являющийся одним из основных матричных материалов для конструкционных композитов, практически полностью разупрочняет волокна бора, и в большинстве случаев разрушение волокон происходит непосредственно в процессе напыления, однако и в этом случае ведущим ослабляющим фактором является окисление поверхности волокон.

При напылении в камерах с чистым аргоном титана прочность борволокон (особенно с покрытиями) удается почти полностью сохранить или свести потерю исходной прочности до нормального уровря [14].

Получение композитных полуфабрикатов типа жгутов. Полуфабрикаты этого типа представлены на рис. 4.3. Для их изготовления используют методы непрерывного литья, а также пропитки в вакууме и под давлением [6, 13]. Схема установки для получения композитных полуфабрикатов методом непрерывного литья (матричного материала) представлена на рис. 4.4.

Метод полунепрерывного литья, широко известный в металлургии, применительно к конструкционным композитам используется для изготовления полуфабрикатов, имеющих постоянные поперечные сечения. Его достоинствами (так же, как и метода протягивания волокон или их пу

4.4. Прочность семиволоконных пропитанных жгутов с алюминиевой (АД1) матрицей [13]

Число армирующих волокон жгута		$\sigma_в$, МПа	V_f, %
из стали	из бора		
6	1	2250	9,3
5	2	1880	18,6
4	3	1660	28,0
3	4	1550	37,0
1	6	1550	55,0
—	7	2100	70,0
		1650	62,0

Примечание. Временное сопротивление: борных волокон 3000 МПа, стальных проволочных волокон 3700 МПа.

4.5. Временное сопротивление бороалюминиевых жгутов с волокнами, имеющими покрытие карбида бора [6]

Число волокон в жгуте	Объемная доля, %	Длительность контакта волокон с расплавом, с	$\sigma_в$, МПа, жгута после		
			литья	отжига при 565 °С в течение 3600 с	отжига при 565 °С в течение 14 400 с
19	70	2,5	1350	1430	1210
		1,5	1390	1480	1350
		1,2	1425	1380	1230
16	60	2,5	1370	1180	1240
		1,5	1270	1210	1150
		1,2	1470	1260	1120

вается наличие удобных для хранения, транспортировки, выполнения операций сборки заготовок и изготовления изделий полуфабрикатов с временным сопротивлением разрыву до 2100 МПа (табл. 4.4).

Сталеалюминиевые жгуты (V_f = = 60%) имеют высокие характеристики; например, литые жгуты, армированные проволочными волокнами из высокопрочной стали, характеризуются сопротивлением разрыву 1060—1120 МПа [4].

При изготовлении боро- и сталеалюминиевых жгутов температура расплава матричной составляющей должна быть 665 ± 5 °С, длительность контакта волокон с расплавом 0,4—0,8 с. Скорость перемещения жгута 0,07 м/с обеспечивает высокое качество соединения матрицы и волокон при условии предварительного подогрева волокон до температуры 600 °С [20].

Метод непрерывного литья применяется и для изготовления бормагниевых полуфабрикатов.

При наличии на волокнах барьерных покрытий легче сохранить бо́льшую долю исходной прочности волокон, при этом время контакта волокон с расплавом может возрастать, что необходимо для образования прочного соединения, но не сопровождается снижением характеристик композита (табл. 4.5).

Методы пропитки применяются для изготовления полуфабрикатов ограниченных размеров и изделий различных конфигураций. Пропитку каркаса (или пучка) волокон осуществляют различными способами: вакуумной заливкой матричного расплава в форму, в полости которой предварительно размещен каркас волокон; вакуумным всасыванием расплава матрицы; пропиткой под давлением; центробежным литьем (эти процессы могут проводиться в обычной воздушной атмосфере или с применением защитных атмосфер). Кроме того, возможен вариант помещения в полость формы волокон с порошком матричного материала или фольгой, а также волокон, имеющих покрытие из материала матрицы, с последующим нагревом до температуры, превышающей температуру плавления матрицы композита, и опрессовкой формы. Процессы этой группы существенно отличаются от непрерывного литья большей длительностью, т. е., как правило, требуют специальных мер предупреждения градации волокон из-за контакта с расплавом матрицы [6, 14].

Бормагниевые полуфабрикаты могут быть получены методом вакуумной пропитки при температуре 750 °С. Жгуты с объемной долей волокон 70% имеют временное сопротивление разрыву порядка 2400 МПа [14].

В связи с низким сопротивлением разрушению при поперечном сжатии углеродных волокон, тканей и жгутов основным методом объединения их с металлическими матрицами является пропитка. Магниевые расплавы более совместимы с углеродными волокнами, чем алюминиевые. Углеродные волокна не разупрочняются после контакта с магниевыми расплавами в течение 5 мин при температурах 660—780 °С. Термическая стабильность углемагния, наоборот, ниже, чем углеалюминия. Карбид MgC_2 образуется при температурах 450 °С и выше, а карбид Al_4C_3 — при 500—550 °С [4]. Пропитка углеродных волокон без покрытия нецелесообразна, так как, во-первых, не происходит смачивания (при температурах, исключающих карбидообразование), во-вторых, не достигается полное проникновение расплава матрицы в промежутки между волокнами, а особенно — между филаментами (многофиламентных волокон). Это вызывает неравномерную укладку, непосредственные контакты и спекание волокон. В результате в композитах указанных систем при объемных долях волокон (без покрытия) выше 30—35% прочность не только не растет, но может даже снижаться из-за возрастания количества и протяженности непропитанных участков.

Одно из направлений развития технологии изготовления углеалюминия — проведение процесса при избыточных давлениях (не выше $1 \cdot 10^5$ Па) [6]. Скорость пропитки под давлением при получении углеалюминия составляет около 0,5 м/с. Однако и в этих условиях эффект армирования проявляется не полностью (временное сопротивление разрыву углеалюминиевых полуфабрикатов с объемными долями 40—60% составляет 700—800 МПа, т. е. 65—70% от ожидаемых показателей). Поэтому наиболее эффективным является путь проведения пропитки после нанесения на поверхность углеродных волокон покрытий.

4.6. Условия металлизации углеродных волокон термическим разложением карбонилов в газовой фазе [6]

Материал покрытия	Карбонил	Температура нагрева, °С	
		карбонила	волокна
V	$V(CO)_6$	20	70—100
Cr	$Cr(CO)_6$	40	350—700
Mo	$Mo(CO)_6$	50	450—700
W	$W(CO)_6$	70	450—700
Te	$Te_2(CO)_{10}$	20	60—70
Re	$Re_2(CO)_{10}$	70	400 - 600
Ni	$Ni(CO)_4$	20	100—250
Co	$Co(CO)_3$	20	180—220
Co	$CO_2(CO)_8$	20	180—200

Никелевое покрытие наносят методом химического осаждения, причем перед металлизацией для углеродных волокон проводят окислительную обработку (водный раствор азотной кислоты с концентрацией 65%, 5 мин), затем (в том числе для волокон с барьерными покрытиями карбида кремния и др.) — сенсибилизацию в растворе двуххлористого олова при температуре 80 °С в течение 10 мин и активацию в растворе хлористого палладия при той же температуре в течение 5 мин. Активирующая обработка требует последующей быстрой сушки (60—70 °С, 15—20 мин) и сразу после этого необходимо выполнять никелирование в растворе, содержащем 50 г/л хлористого никеля, 20 г/л гипофосфата натрия, 50 г/л хлористого аммония, 50 г/л трехзамещенного лимоннокислого натрия. Температура указанного водного раствора 80 °С (pH 8—9). Толщина покрытия составляет 0,05—2,0 мкм (при времени нанесения покрытия 0,1—4 мин) [6]. При пропитке тканых углеродных лент с объемным характером плетения необходимы меры для обеспечения равномерности покрытия. В частности, эффективной является добавка в рабочий раствор 0,01 г/л сернистого свинца [6].

Покрытия из тугоплавких металлов наносят на поверхность углеродных волокон методом термического разложения летучих карбонилов. Условия процессов газофазной металлизации волокон представлены в табл. 4.6.

Рассмотренные металлические покрытия имеют высокоразвитую поверхность высокодисперсного строения, т. е. помимо барьерного эффекта они существенно улучшают и условия пропитки, кроме того, применение технологических покрытий обеспечивает повышение прочности при сдвиге с 15 до 50 МПа.

4.4. КРИТЕРИИ РАЗРАБОТКИ ПРОЦЕССОВ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИТОВ

В большинстве случаев конструкционные композиты с металлической матрицей получают пластическим деформированием сборных заготовок. Основная задача такого деформирования — преобразовать неплотную заготовку в компактный полуфабрикат или изделие с прочным соединением (без образования продуктов химического объемного взаимодействия составляющих композита) матрицы и волокон, без нарушения сплошности и термического разупрочнения волокон. Выполнение этих требований обеспечивает наиболее полную реализацию эффекта упрочнения металлических материалов волокнами. В связи с этим при разработке деформационных процессов пользуются критериальным подходом, позволяющим установить расчетные предельные значения всех технологических параметров, а также параметров оснастки и заготовок. Критериальные выражения представляют собой равенства либо неравенства, в которых связаны факторы композита (или его составляющей) и процесса. Последующее введение критериального выражения в основное уравнение теории процесса и позволяет установить предельное значение искомого параметра. Подробно этот подход рассматривается в работах [10, 19].

Критерий полного уплотнения. Критериальное выражение для подавляющего большинства процессов компактирования имеет вид

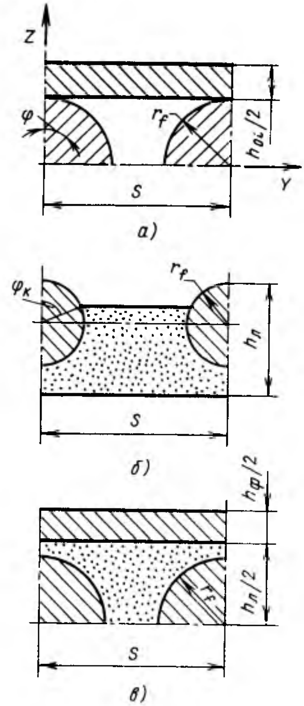


Рис. 4.5. Типы «ячеек» композитов [10]: *а* — заготовка, состоящая из чередующихся матричных слоев и рядов волокон, уложенных с шагом S; *б* — заготовка, состоящая из слоев неплотных монослойных лент-полуфабрикатов «одностороннего» напыления матричной составляющей (шаг укладки волокон — S); *в* — заготовка, состоящая из слоев неплотных монослойных полуфабрикатов в виде лент «двустороннего» напыления матричной составляющей на волокна, предварительно уложенные с шагом S

$$\varepsilon_{ф.\,к} = k_{нп},$$

где $\varepsilon_{ф.\,к}$ — степень деформации заготовки в безразмерном выражении; $k_{нп}$ — коэффициент неплотности заготовки (отношение суммарного объема неплотностей к объему, ограниченному контуром заготовки).

В сечении композита можно выделить множество идентичных элементов, называемых ячейками композита.

[6], типы которых представлены на рис. 4.5. Коэффициент неплотности рассчитывается следующим образом:

для типа, представленного на рис. 4.5, *а*:

$$k_{\text{нп}} = d_f\,(4S - \pi d_f)/4S\,(d_f + h_{0i}),$$

где h_{0i} — толщина матричного слоя;

для типа, представленного на рис. 4.5, *б*:

$$k_{\text{нп}} = 8h_{\text{л}} S p_m - 2d_f^2 p_m + [4d_f S \times (1 - \cos\varphi_k) - d_f^2 \times (2\varphi_k - \sin 2\varphi_k)]\,(1 - p_m) \times [8\,(h_{\text{л}} + h_{\text{ф}})\,S]^{-1};$$

для типа, представленного на рис. 4.5, *б*;

$$k_{\text{нп}} = p_m\,(4Sh_{\text{л}} - \pi d_f^2)/4S\,(h_{\text{л}} + h_{\text{ф}}).$$

где $h_{\text{л}}$ и $h_{\text{ф}}$ — толщина соответственно ленты с волокнами и фольги; p_m — пористость ленты в безразмерном выражении.

Деформационный критерий характеризуется также неравенством

$$p \geqslant \sigma^*_{sci},$$

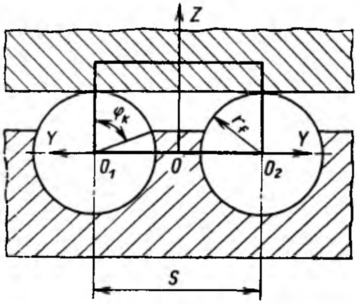


Рис. 4.6. Схема ячейки с компактной матричной составляющей [10]

где p — давление; σ^*_{sci} — среднее напряжение течения матричной составляющей в ячейке композита. Для определения последнего устанавливают главные напряжения в ячейке, используя совместное решение дифференциальных уравнений равновесия и условия пластичности:

$$\sigma_Z - \sigma_Y = \sigma_{sm},$$

где σ_Z и σ_Y — главные нормальные напряжения, действующие по осям Z и Y (рис. 4.6), а σ_{sm} — предел текучести матричного материала. Расчет главных напряжений производится по формуле

$$\sigma_{Z\varphi} = 2\sigma_{sm} r_f \left[\frac{1}{2r_f} \ln (S - 2r_f \sin\varphi) + \frac{1}{2S} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{2r_f}{S} \frac{1}{\sqrt{S^2 - 4r_f^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{S \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - 2r_f}{\sqrt{S^2 - 4r_f^2}} \right) \right] + \sigma_{sm} \left\{ 1 - 2r_f \left[\frac{1}{2r_f} \ln (S - 2r_f \sin\varphi_{\text{н}}) - \frac{1}{2S} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2}\right) + \frac{2r_f}{S} \frac{1}{\sqrt{S^2 - 4r_f^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{S \operatorname{tg} \frac{\varphi_{\text{н}}}{2} - 2r_f}{\sqrt{S^2 - 4r_f^2}} \right) \right] \right\},$$

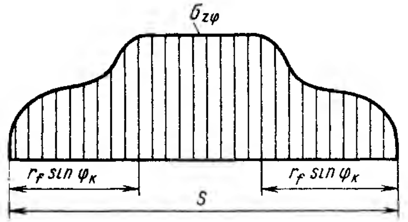


Рис. 4.7. Эпюра распределения $\sigma_{Z\varphi}$ в ячейке композита при постоянном значении σ_{sm}

где r_f и S — соответственно радиус поперечного сечения и шаг укладки волокон; φ — текущее значение угловой координаты в ячейке композита (φ_k — максимальное значение φ, равное $\pi/2$); $\varphi_н = \arccos(1-\sigma_{sm}/E_f^*)$— начальное значение угловой координаты [E_f^* — модуль упругости волокон при поперечном сжатии при температуре процесса (как и все остальные параметры, используемые в рассматриваемом расчете)].

Характер распределения $\sigma_{Z\varphi}$ в ячейке композита определяется и скоростными условиями процесса компактирования. При динамических условиях деформации эпюра $\sigma_{Z\varphi}$ в ячейке композита имеет вид, представленный на рис. 4.7. В этом случае σ_{sm} имеет практически постоянное значение (наибольшее для материала). При статическом компактировании эпюра $\sigma_{Z\varphi}$ изменяется не только по количественным данным, но и по характеру распределения в ячейке композита (рис. 4.8).

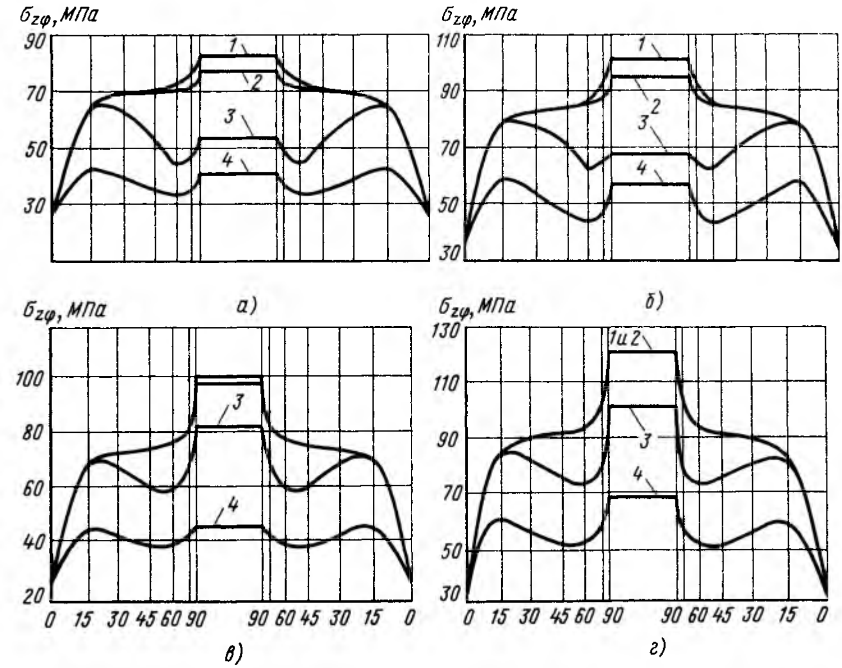


Рис. 4.8. Эпюры распределения напряжений в ячейке композита с недеформируемыми волокнами (диаметр волокон 140 мкм) при их укладке с шагом 180 мкм (*а, б*) и 160 мкм (*в, г*), при использовании в качестве матричной составляющей технического алюминия АД1 (*а, в*) и сплава АМг2 (*б, г*) в заключительный момент компактирования при температуре 500 °С со скоростью деформирования (мм/с):

1 — 10^{-3}; *2* — 10^{-2}; *3* — $3\cdot10^{-4}$; *4* — $5\cdot10^{-5}$

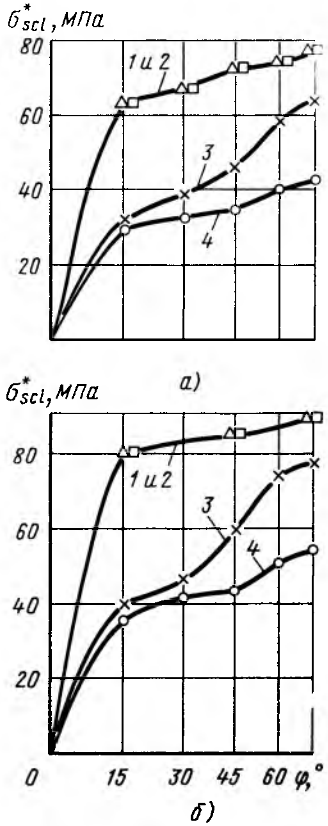


Рис. 4.9. Изменение среднего напряжения течения матричной составляющей композита σ^*_{scl} в ходе компактирования. Шаг укладки волокон 160 мкм. Материал матричной составляющей — АД1 (*а*) и АМг2 (*б*). Скорость деформирования:

1 — 10^{-2}; *2* — 10^{-3}; *3* — $3 \cdot 10^{-4}$; *4* — $5 \cdot 10^{-5}$

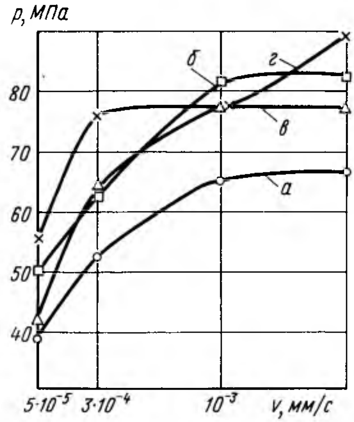


Рис. 4.10. Влияние скорости деформирования *v* на давление компактирования композита с волокнами диаметром 140 мкм, уложенными с шагом 180 мкм (*а*, *б*) и 160 мкм (*в*, *г*) при использовании в качестве матричной составляющей технического алюминия (*а*, *в*) и сплава АМг2 (*б*, *г*)

Зная $\sigma_{Z\varphi}$ (и $\sigma_{Y\varphi}$ через условие пластичности), легко установить σ^*_{sci}; результаты определения σ^*_{sci} и давления *p* представлены на рис. 4.9 и 4.10.

Критерий сохранения сплошности волокон. Для конструкционных композитов преимущественно используют хрупкие волокна, которые могут разрушаться при действии поперечно сжимающих напряжений (в первую очередь эти напряжения могут вызывать скалывание основной части волокна относительно подложки).

Критериальное выражение имеет следующий вид:

$$p < \sigma^*_f,$$

где σ_f — сопротивление волокна разрушению при поперечном сжатии. Величина σ^*_f для волокон бора составляет 86,6—376 МПа при диаметре сечения волокон 140 мкм и 79,3—261 МПа при диаметре 100 мкм [10].

Если в композит вводят проволочные волокна, правильнее пользоваться критериальным неравенством

$$p < \sigma^*_{sf},$$

где σ^*_{sf} — предел текучести материала металлических проволочных волокон при поперечном сжатии (при температуре, соответствующей температуре процесса компактирования ВКМ).

Критерий формирования прочного соединения составляющих композиционного материала. Время деформирования заготовки $t_д$ не должно быть меньше времени $t_с$, необходимого для формирования прочного соединения матричной составляющей и волокон.

т. е. должно соблюдаться критериальное условие [10]

$$t_д \geqslant t_с.$$

В общем случае формирование прочного соединения разнородных материалов происходит по трехстадийной схеме [6]:

$$t_с = t_{ф.\,к} + t_а + t_р,$$

где $t_{ф.\,к}$ — длительность образования полного физического контакта (сближения атомов соединяемых поверхностей, обеспечивающего полное уплотнение материала), характеризуемого действием на межкомпонентных поверхностях сил Ван-дер-Ваальса и слабым химическим взаимодействием; $t_а$ — длительность активации контактирующих поверхностей с образованием «активных центров» (поле упругих искажений в местах выхода в зону контакта дислокаций, их скоплений, пачек скольжения, а также в местах расположения деформационных микровыступов), благодаря которым формируется прочная химическая связь; $t_р$ — длительность реакционного (химического объема) взаимодействия, в том числе гетеродиффузии, образования промежуточных фазовых прослоек, прохождения рекристаллизации в зоне соединения взаимодействия компонентов композита.

При получении конструкционных композитов сопротивления, деформации матрицы и волокон различаются, как минимум, на порядок, поэтому в инженерных расчетах длительностью периода $t_{ф.\,к}$ можно пренебрегать [6], а формирование продуктов химического обьемного взаимодействия недопустимо, так как это вызывает значительное снижение прочностных характеристик при нагружении вдоль волокон [6]. Поэтому можно считать, что в рассматриваемой области композитов необходимо выполнение равенства $t_с \approx t_а$.

Для большинства деформационных процессов характерно интенсивное силовое воздействие; в таких условиях [6]

$$t_а = -\frac{1}{\nu}\ln\left(1 - \frac{N}{N_0}\right)\exp\frac{E_{эфф}}{kT},$$

где ν — частотный фактор (частота колебаний атомов в решетке деформируемого металла при температуре процесса); k — постоянная Больцмана; T — температура процесса. Число разрывов связей N связано с числом образующихся связей N_0 на единице поверхности соотношением $N \approx 0{,}9N_0$.

В случаях чисто термической активации соединяемых поверхностей (отжиг) или при малой интенсивности силового воздействия (диффузионная сварка) [6] величина эффективной энергии образования соединения $E_{эфф}$ практически равна энергии образования единичной связи $E_а$.

Для процессов с интенсивным силовым воздействием на участки контактных поверхностей составляющих композитов указанные величины различны, они связаны следующим выражением: $E_{эфф} = E_а - \omega\tau_к$, где ω — показатель структурного фактора; $\tau_к$ — контактное касательное напряжение на межкомпонентной границе в процессе компактирования [его предельная (и реализуемая в процессе деформирования заготовок) величина равна $\mu\sigma_{sm}$ (μ — коэффициент межкомпонентного трения, равный в условиях горячего деформирования 0,5)].

Решение вопроса об определении оптимальной длительности компактирования заготовок может быть осуществлено и на основе другого подхода [6], основанного на теоретическом и экспериментальном определении кинетики увеличения прочности $\bar{\tau}_{12}$ соединения, которая описывается уравнением функции

$$\frac{\bar{\tau}_{12}}{(\bar{\tau}_{12})_{max}} = 1 - \exp\left(-Kt^n\right), \quad (4.1)$$

где $(\bar{\tau}_{12})_{max}$ — максимальная прочность соединения составляющих рассматриваемого материала; $K = Z_0K_фK_зK_р$ — константа скорости реакции [Z_0 — фиксированное число зародышей с прочной связью (очагов взаимодействия на активных центрах); $K_ф$, $K_з$ и $K_р$ — соответственно константы скоростей процессов образования физического контакта, зарождения очагов взаимодействия и их увеличения до слияния]; t — время; n — показатель степени, характеризующий порядок химической реакции. Величина $K_ф$...

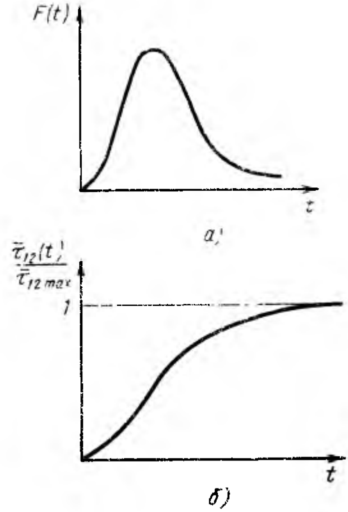


Рис. 4.11. Изменение скорости увеличения площади $F(t)$, на которой образуется связь компонентов (*а*), и возрастания прочности соединения $\tau_{12}(t)/\tau_{12\max}$ (*б*) во времени [6]

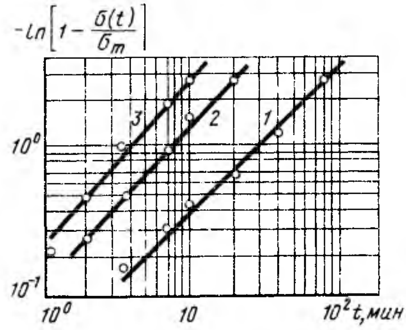


Рис. 4.12. Кинетика увеличения прочности соединения волокон бора и алюминиевой матричной составляющей композита [6] при температуре и давлении процесса:

1 — 470 °С и 18 МПа; *2* — 500 °С и 15 МПа; *3* — 520 °С и 15 МПа

жет быть представлена также в виде функции

$$K = K_0 \exp\left(-\frac{nE_a}{kT}\right),$$

где K_0 — эффективная частота колебаний в атомной решетке деформируемой составляющей с учетом энтропии процесса (при $n = 1$ $K_0 = \nu$).

После двойного логарифмирования обеих частей уравнения (4.1) с учетом последнего выражения получим

$$\ln\left[-\ln\left(1-\frac{\sigma(t)}{\sigma_{\max}}\right)\right] = n\ln K_0 - \frac{nE_a}{kT} + n\ln t;$$

поэтому кинетические зависимости прочности соединения в координатах $\ln\left[-\ln\left(1-\frac{\sigma(t)}{\sigma_{\max}}\right)\right]$—$\ln t$ представляют собой прямые или ломаные линии (при наличии прямых линий соединение формируется практически за одну стадию). Основные функции представлены на рис. 4.11 и 4.12. Из рис. 4.12 ясно, что соединение составляющих бороалюминия формируется за одну стадию (эффективная энергия активации образования связей для этих композиций равна 2,0 эВ при использовании нелегированной матрицы и 2,6 эВ — при использовании легированных матричных составляющих бороалюминия [6]).

Критерий предупреждения термического разупрочнения волокон. Определение параметров, обеспечивающих полное компактирование заготовок композитов с одновременным сохранением сплошности волокон и образованием прочного соединения их с матричной составляющей, связано с установлением оптимальной температуры процесса, от которой зависят многие значения величин, используемых для расчетов по предыдущим критериям. Повышение температуры деформирования $T_д$ с целью снижения предела текучести матричной составляющей композита, облегчения активации соединяемых поверхностей ограничивается возможным термическим ослаблением волокон, т. е. критериальное выражение имеет вид $T_д < T_{н.р}$, где $T_{н.р}$ — температура начала активного разупрочнения волокон. При использовании хрупких волокон эта величина определяется как соответствующая снижению прочности волокон (по сравнению с прочностью при комнатной температуре) на 5% (для отдельных видов волокон это снижение прочности может быть увеличено до 10%-ной потери исходной прочности). Таким образом, для определения этого критериального условия необходимо проведение серии температурных испытаний волокон.

Критерий компактирования заготовок в режиме сверхпластического состояния матричного материала. Критериальное выражение определяется двумя равенствами:

$$T_{д} = T_{sp};$$
$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{sp},$$

где T_{sp} — температура сверхпластического деформирования; $\dot{\varepsilon}_{sp}$ — скорость сверхпластической деформации.

Для реализации режима сверхпластического компактирования заготовок композитов необходимо располагать данными электронно-микроскопического исследования структуры матричной составляющей, а также данными ряда испытаний, что позволяет использовать расчетную методику [3], представленную ниже.

Температура сверхпластического деформирования определяется по формуле

$$\frac{T_{sp}}{T_0} = \frac{2}{1 + \dfrac{N_A \beta \sqrt[3]{36\pi V_1^2}}{Q \sqrt[3]{g_0}}},$$

где T_0 — температура перехода материала в однофазное состояние (по диаграмме); N_A — число Авогадро; V_1 — атомный объем; β — поверхностное натяжение на межфазной (межзеренной) границе; Q — тепловой эффект перехода (полиморфного превращения и т. д.); g_0 — минимальное количество атомов, участвующее в образовании зародыша новой фазы. Этот параметр, в свою очередь, рассчитывается по формуле

$$g_0 = 1800q/GV_1,$$

где q — теплота активации полиморфного превращения (локального растворения или плавления); G — модуль сдвига.

Величина скорости сверхпластической деформации рассчитывается следующим образом:

$$\dot{\varepsilon}_{sp} = \dot{\varepsilon}_{sp_0} + k_1\sigma,$$

где $\dot{\varepsilon}_{sp_0}$ — оптимальная скорость деформации в отсутствие напряжений шарового тензора (получают испытаниями матричного материала на кручение при температуре, соответствующей температуре процесса компактирования композита); σ — напряжение шарового тензора (гидростатическое давление); $k_1 = Db^3/d_{sp}^2 kT_{sp}$ — показатель [D — эффективный коэффициент диффузии (при температуре T_{sp}); b — вектор Бюргерса; d_{sp} — размер зерна в структуре матричного материала; k — постоянная Больцмана].

Размер зерна, обеспечивающий сверхпластическую деформацию, рассчитывается по формуле

$$d_{sp} = \frac{6\beta}{E_d(\rho - \alpha\rho) + \gamma\alpha\rho\eta + E_v N_v},$$

где E_d и E_v — энергия соответственно дислокации и образования вакансий; ρ — плотность дислокаций; α — коэффициент, учитывающий наличие расщепленных дислокаций и их концентрацию; γ и η — соответственно энергия и ширина дефектов упаковки; N_v — концентрация вакансий.

Помимо общих (универсальных) критериев разработки процессов деформирования композитов существует ряд частных критериев, свойственных конкретным процессам. Эти критерии и соответствующие критериальные решения рассматриваются в последующих разделах при рассмотрении процессов.

4.5. ДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ КОМПАКТИРОВАНИЯ КОМПОЗИТОВ

Динамические процессы деформирования (прокатка, волочение, динамическое горячее прессование) широко применяют для компактирования ВКМ. Плоские компактные полуфабрикаты из конструкционных ВКМ получают, в частности, прокаткой, причем существуют варианты прокатки, при которых ось прокатки совпадает с направлением оси волокон в заготовке либо перпендикулярна ей [9, 10, 11]. Прокатка поперек волокон характеризуется пониженным нагружением волокон, так как шаг их укладки в процессе компактирования возрастает. Особенности получения этим способом сталеалюминиевых и бороалюминиевых листов подробно рассматриваются в работах [10, 11, 16]. Распределение послойных деформаций при прокатке заготовок из плазменных лент благоприятно, так как коэффициенты неравномерности послойной деформации близки к единице ($k_н$ = 0,94÷1,02). Бóльшая неравномерность послойных деформаций наблюдается при прокатке заготовок, состоящих из чередующихся слоев фольги и рядов волокон.

При прокатке поперек волокон шаг укладки возрастает, поэтому расчет степени деформации $\varepsilon_{ф.\,к}$, обеспечивающей полное уплотнение заготовок, ведется с учетом этого фактора [10]:

при использовании заготовок, состоящих из чередующихся слоев фольги и рядов волокон:

$$\varepsilon_{ф.\,к} = \frac{d_f\,(4S - \pi d_f) + 4\Delta S\,(d_f + h_{0i})}{4\,(S + \Delta S)\,(h_{0i} + d_f)};$$

при использовании заготовок, содержащих пористые плазменные ленты с волокнами:

$$\varepsilon_{ф.\,к} = \frac{p_m\,(4Sh_л - \pi d_f^2) + 4\Delta S\,(h_л + h_ф)}{4\,(S + \Delta S)\,(h_л + h_ф)},$$

где $h_ф$ и $h_л$ — толщина соответственно фольги и пористых лент; ΔS — изменение шага укладки волокон при прокатке (табл. 4.7).

Данные о распределении послойных деформаций используют при расчете параметров заготовок. При заданной толщине листа h толщина заготовки $h_{зг} = h/(1 - \varepsilon_\Sigma)$, где ε_Σ — оптимальное суммарное обжатие при прокатке композита (определение этой величины для различных прокатных процессов применительно к композитам рассматривается ниже).

После определения общей толщины заготовки рассчитывают толщины матричных слоев h_{0i} для заготовок, состоящих из чередующихся матричных элементов и рядов волокон:

$$h_{0i} = h_{0i\,ср} k_{нi},$$

где $k_{нi}$ — коэффициент неравномерности послойной деформации при оптимальном значении суммарного относительного обжатия при прокатке (подробные данные о значениях $k_н$ сталеалюминиевых заготовок приведены в работе [11]);

$$h_{0i\,ср} = \frac{h_{зг} - d_f n}{n + 1};$$

n — число слоев волокон в заготовке.

Для заготовок, состоящих из пористых монослойных армированных лент и фольговых прокладок (и наружных обкладок), определяют суммарную толщину фольговых элементов [11] $h_ф$:

$$h_ф = \left[\frac{\pi d_f^2\,(1 - V_f + p_m V_f) - 4h_л S p_m V_f}{4V_f S}\right] \times (n_1 + 1), \qquad (4.2)$$

где n_1 — число слоев армированных пористых лент; p_m — пористость матричной составляющей в лентах. Средняя толщина фольгового элемента заготовок этого типа в $(n + 1)$ раз меньше величины, определяемой по (4.2).

Толщину каждого фольгового элемента определяют с учетом $k_{нi}$: $h_{фi} = h_{ф.\,ср} k_{нi}$. Значения $k_{нi}$ подробно представлены в работе [10].

Суммарное относительное обжатие, обеспечивающее полное уплотнение заготовки и формирование прочной связи слоев волокон между собой и с волокнами при использовании компактных матричных элементов, рассчитывают по формуле [5, 11]

$$\varepsilon_\Sigma = \frac{4\pi^2 n_в^2 t_с^2 R_в}{h_0}, \qquad (4.3)$$

4.7. Изменение шага волокон (ΔS) плоских заготовок при прокатке поперек волокон

Материал	d_f, мкм	V_f, %	ε_Σ, %	ΔS, мм
АД1—В	100	20	10	0,02
			20	0,06
			35	0,11
			48	0,13
			54	0,14
	100	30	10	0,01
			20	0,03
			35	0,04
			48	0,045
			52	0,05
	140	30	10	0,020
			20	0,045
			35	0,075
			48	0,110
			52	0,120
	140	40	10	0,010
			20	0,030
			35	0,065
			48	0,075
	140	45	10	0,005
			20	0,020
			35	0,035
			45	0.040
	140	50	20	0,015
			35	0,025
			45	0,035
АМг6—В	140	30	10	0,015
			20	0,040
			35	0,075
			50	0,110
	140	40	10	0,005
			20	0,010
			35	0,025
			45	0,030
АМг—ЭП322	200	25	25	0,065
			35	0,085
			50	0,170
			62	0,200

Продолжение табл. 4.7

Материал	d_f, мкм	V_f, %	ε_Σ, %	ΔS, мм
АМг6—ЭП322	200	35	20	0,035
			35	0,070
			50	0,085
			54	0,090
	600	35	20	0,170
			35	0,250
			50	0,330

Примечание. Начальный шаг укладки волокон в заготовках при использовании волокон бора диаметром 100 мкм составлял 130 мкм, для волокон бора диаметром 140 мкм шаг равнялся 180 мкм, а при использовании стальных проволочных волокон (сталь ЭП322) начальный шаг укладки волокон равнялся диаметру волокон плюс 20 мкм.

где $n_в$ — частота вращения валков прокатного стана; $R_в$ — радиус валков (остальные обозначения — см. ранее).

Если в заготовке используются пористые монослойные армированные ленты, в (4.3) необходимо вводить значения

$$t_с = \frac{\sqrt{R_в k_{нп} h_{зг}}}{2\pi R_в n_в} - \frac{1}{\nu} \times$$
$$\times \ln\left(1 - \frac{N}{N_0}\right) \exp\left(\frac{E_а - \omega\tau_к}{kT}\right).$$

Однако знание оптимального суммарного обжатия позволяет лишь определить момент окончания деформирования заготовки, а для разработки процесса необходимо знать величины допустимых обжатий по прокатным проходам. В этом случае определяющим является критерий сохранения сплошности волокон. Деформации по переходам находятся из выражения неявного вида [10]:

$$\sigma_f^* = \frac{\sigma_{sci}^*}{\delta}\left[(\delta+1)\left(\frac{h_{1i}+2R_в-\sqrt{4R_в^2-R_в\Delta h_i}}{h_{1i}}\right)^{\delta}-1\right], \quad (4.4)$$

где σ_f^* — сопротивление волокон разрушению при поперечном сжатии (при температуре процесса); σ_{sci}^* — напряжение течения матрицы композита при уплотнении «ячейки»; h_{1i} — толщина полосы после выполнения данного прохода; Δh_i — допустимое абсолютное обжатие на рассматриваемом прокатном проходе; $\delta = 2l_i\mu/\Delta h_i$ — показатель (где μ — коэффициент трения на контактной поверхности очага деформации; $l_i = \sqrt{R_в \Delta h_i}$ — длина дуги захвата заготовки валками).

Единственным неизвестным является Δh_i. Устанавливая его значения, легко определить величины относительных обжатий (они могут быть безразмерными, как во всех предыдущих выражениях, или переводятся в проценты). В частности, относительные допустимые обжатия (%), обеспечивающие осуществление прокатного перехода без разрушения волокон [11]:

$$\varepsilon_i = \frac{4R_в\mu^2}{h_{i-1}\delta^2}100.$$

Если на каком-то этапе расчета выражение (4.4) не имеет решения, значит этот переход нельзя выполнить с сохранением сплошности волокон. Зная допустимые значения Δh_i на всех переходах и суммируя их, можно определить максимально допустимое суммарное обжатие при прокатке:

$$\varepsilon_{\Sigma_{max}} = \frac{\sum\limits_{1}^{k}\Delta h_i}{h_{зг}}.$$

Эта методика расчета применяется при прокатке поперек волокон. Значения относительных обжатий по проходам при получении листов из конструкционных композитов представлены в табл. 4.8.

4.8. Относительное обжатие ε_i по переходам при прокатке армированных листов [10]

Материал	V_f, %	ε_i, %, на прокатном переходе				
		1	2	3	4	5
АД1—В	20	32	18	12	5	3
	25	28	17	12	5	3
	30	25	15	10	5	3
	35	25	15	8	4	3
	44	23	12	7	4	2
	54	21	12	7	3	—
АМг6—В	20	25	17	11	7	5
	25	25	17	11	7	3
	30	25	15	10	5	—
	35	25	15	10	5	—
АМг6—ЭП322	20	36	23	16	12	8
	30	29	17	12	6	4
	35	25	15	10	5	3

Примечание. Температура прокатки бороалюминия 520 °C, сталеалюминия 400 °C.

Методика расчета процесса прокатки вдоль волокон, помимо критериев полного уплотнения заготовки, формирования прочного соединения составляющих и других ранее рассмотренных критериев, базируется на частном критерии, используемом для процессов, при осуществлении которых в очаге деформации неизбежно действуют растягивающие напряжения, приложенные к волокнам. Этот критерий выражается неравенством $\sigma_1 < \bar{\sigma}_f$, где σ_1 — межкомпонентное растягивающее напряжение, приложенное к волокнам в очаге деформации; $\bar{\sigma}_f$ — временное сопротивление волокон разрыву при температуре, соответствующей температуре процесса.

В результате анализа процесса установлены варианты методики расчета параметров процесса [10] в зависимости от вида применяемых заготовок.

При использовании заготовок, состоящих из чередующихся фольговых элементов и рядов волокон:
для первого перехода

$$\varepsilon_1 = \frac{(\pi d_f \sigma_f / 2\sigma^*_{sci}) \times \sqrt{d_f / 2nR_{\text{в}}}}{d_f\,[1 - (\pi d_f / 4S)] + S}\,100;$$

для всех последующих переходов, т. е. для n-го перехода

$$\varepsilon_{ni} = \frac{\sqrt{\Delta h_1 + \ldots + \Delta h_{n_i - 1} + \dfrac{\pi d_f^3 \sigma_f^2}{2nR_{\text{в}}\,(\sigma_{sci})^2}} - \Delta h_1 - \ldots - \Delta h_{n_i - 1}}{n\,\{d_f\,[1 - \pi d_f / 4S)] + S\}}\,100,$$

где n_i — номер прохода.

Сложность процесса прокатки вдоль волокон заключается в том, что после полного уплотнения (при наличии допустимых отклонений на все параметры) деформировать заготовку без разрушения волокон нельзя. Единственной возможностью компенсации отклонений фактических параметров заготовок, процесса, оснастки от расчетных является уширение при прокатке узких полос и лент.

В связи с тем, что композиты с одноосным армированием обладают ярко выраженной анизотропией свойств, в ряде случаев необходимо применять другие схемы армирования, называемые послойно-перекрестными [10, 17]. Поэтому при прокатке таких заготовок необходимы особые методы расчета допустимых параметров взаимного расположения рядов волокон по слоям заготовки и допустимых обжатий по прокатным переходам. При прокатке листов с послойно-перекрестным расположением хрупких волокон допустимое обжатие

$$\varepsilon_{i\,\max} = \left\{ \frac{[\bar{\sigma}_f - (\sigma_{sc} + \sigma^*_{sci}) \sin\beta]\, d_f}{4\sigma^*_{sci}\mu m} \right\}^2 \Big/ R_{\text{в}} h_0, \qquad (4.5)$$

где σ_{sc} — предел текучести композита при растяжении вдоль волокон при температуре процесса; μ — коэффициент межкомпонентного трения при температуре прокатки, равный 0,5 при горячем деформировании; β — угол смещения волокон относительно поперечной оси полосы; m — коэффициент, равный отношению $2\varphi_{\text{к}}/\pi$.

Допустимые значения относительных обжатий по переходам при прокатке бороалюминиевых листов с послойно-перекрестным армированием и значения допустимых углов β представлены в приведенных далее табл. 4.9 и 4.10.

Прокаткой могут быть получены листы с ортогональным комбинированным армированием, когда вдоль направления прокатки в заготовке расположены проволочные металлические волокна, а в поперечном направлении уложены пористые монослойные ленты с хрупкими волокнами. Расчет параметров прокатки таких листовых заготовок сводится к следующему [[illegible]

4.9. Допустимые относительные обжатия ε_i при прокатке бороалюминиевых листов с послойно-перекрестным армированием

V_f, %	ε_i, %, на переходе			
	1	2	3	4
15	35	20	15	—
20	32	18	12	5
25	28	15	10	4
30	25	13	8	3

Примечание. Температура прокатки 520 °С, диаметр валков прокатного стана 0,6 м [10].

4.10. Допустимые углы β послойно-перекрестно армированных листов [10] в зависимости от параметров бороалюминия и его армирующих волокон при температуре прокатки

V_f, %	σ^*_{sci}, МПа	σ_{sc}, МПа	σ_{f520}, МПа	m	β
15	34	159	2520	0,410	21° 12′
20	45	180	2520	0,380	17° 28′
25	52	207	2520	0,350	15° 41′
30	59	231	2520	0,325	13° 23′

Примечания: 1. Значения углов β определены по преобразованной формуле (4.5) ($\varphi_к$ и β — в радианах).

2. Диаметр волокон бора 100 мкм.

Допустимое суммарное относительное обжатие определяется по формуле

$$\varepsilon_{\Sigma\,\max} = (\Delta h_{ф.\,к} + \Delta h_{к.\,м})/h_{зг},$$

где $\Delta h_{ф.\,к}$ — абсолютное обжатие, необходимое для уплотнения; $\Delta h_{к.\,м}$ — допустимое абсолютное обжатие уплотненной заготовки, имеющей толщину $h_{зг}$. Величины $\Delta h_{ф.\,к}$ и $\Delta h_{к.\,м}$, в свою очередь, определяются следующими выражениями:

$$\Delta h_{ф.\,к} = \frac{d_{fд} n_д (4S_д h_{0i} - \pi d_{fд}^2)}{4S_д} + \frac{k_{нп} n_п (4h_л S_п - \pi d_{fп}^2)}{4S_п};$$

$$\Delta h_{к.\,м} = \frac{[(\sigma_{sf} - \sigma_{sc} - \sigma^*_{sm})\, d_{fд} - 2\sigma^*_{sm}\mu_c \sqrt{R_в\, \Delta h_{ф.к}}]^2}{16\,(\sigma^*_{sm})^2\, \mu_c^2 R_в},$$

где $d_{fд}$ — диаметр расположенных вдоль прокатываемой заготовки проволочных волокон; $n_д$ — число фольговых слоев заготовки; $n_п$ — число слоев пористых лент с хрупкими волокнами, расположенными в заготовке поперек оси прокатки; $d_{fп}$ — диаметр хрупких волокон в пористых лентах; $h_л$ — толщина пористых армированных монослойных лент; $S_д$ — шаг укладки проволочных волокон; h_{0i} — толщина фольговых слоев; $k_{нп}$ — коэффициент неплотности матрицы пористых армированных лент; σ_{sf} — предел текучести проволочных волокон при температуре прокатки; σ^*_{sm} — среднее напряжение пластического течения матричной составляющей композита.

По данным расчетов, прокатку таких заготовок целесообразнее всего выполнять за два прохода с величинами обжатий, представленными в табл. 4.11.

Оптимальные температуры прокатки для бороалюминия 500—520 °С [11], для сталеалюминия 380—400 °С при использовании в качестве волокон проволоки из сталей 08Х18Н9Т и 12Х18Н10Т и 420—450 °С при использовании в качестве волокон проволоки из сталей 1Х15Н4АМ3 (ВНС-9) и ЭП322 [12]. Режимы термической упрочняющей

4.11. Обжатия по проходам при прокатке (500 °С) листов с ортогональным расположением слоев армирующих волокон композита алюминий — бор — сталь [10]

V_f, %, расположенных		ε_l, %, на проходе	
вдоль направления прокатки заготовки	в поперечном направлении	1	2
5	20	41,2	7,8
5	30	38,4	5,5
10	20	37,5	6,0
10	30	36,2	5,2

Примечание. $S_п = 130$ мкм; $d_{fп} = 100$ мкм; $S_д = 400$ мкм; $d_{fд} = 200$ мкм; $k_{нп} = 0{,}30$.

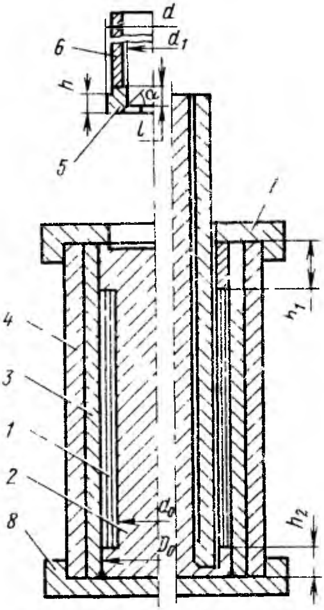


Рис. 4.13. Схема радиального компактирования армированных трубчатых заготовок с одновременным обратным выдавливанием материала осевого технологического вкладыша [10]:

1 — сборная полая армированная заготовка; 2 — вкладыш из материала технологического наполнителя полой заготовки; 3 — наружная технологическая оболочка; 4 — контейнер; 5 — полая пресс-шайба; 6 — полый пресс-штемпель; 7 — крышка, закрепленная на контейнере, 8 — нижняя плита

обработки соответствуют режимам термического упрочнения матричных сплавов. Динамическая деформационная обработка (прогладка — правка на прокатном стане со степенью деформации 0,5—2,0%) может применяться на заключительной стадии изготовления армированных плоских полуфабрикатов [11].

Процесс динамического горячего прессования [9] применяется, как правило, для получения композитов с металлическими волокнами, т. е. с особыми физическими свойствами.

4.6. СТАТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ КОМПАКТИРОВАНИЯ КОМПОЗИТОВ

Статические процессы (спрессовывание по схеме диффузионной сварки, сварка давлением при горячем прессовании, гидростатическое прессование, изостатическое компактирование и др.) широко применяются для компактирования конструкционных композитов, причем для композитов с хрупкими волокнами они являются основными, а для некоторых — единственно возможными.

Одним из основных видов полуфабрикатов и изделий являются трубы и другие полые профили. Процессы изготовления этих изделий из конструкционных композитов освещены в работах [6, 10, 13, 18].

Полые изделия относительно больших диаметров и относительно малых длин могут быть получены сваркой давлением сборных трубчатых заготовок с использованием наружной технологической оболочки и осевого вкладыша (технологического наполнителя) по схеме, представленной на рис. 4.13. Анализ процесса [10, 18] позволяет определить все основные параметры. Существо процесса заключается в том, что при внедрении полой пресс-шайбы во вкладыш технологического наполнителя на стенки сборного пакета (заготовки трубчатого изделия) действует давление, вызванное сопротивлением материала технологического наполнителя истечению в полость пресс-шайбы, и происходит сварка давлением. При определении параметров процесса пользуются критериями полного уплотнения композита, формирования прочного соединения составляющих, сохранения прочности и сплошности волокон. Параметр D_0 (см. рис. 4.13) легко связывается с заданным наружным диаметром изделия через температуру процесса и термический коэффициент линейного расширения. Внутренний диаметр заготовки определяется выражением

$$d_0 = \sqrt{\frac{d^2 - k_{\text{нп}} D_0^2}{1 - k_{\text{нп}}}}.$$

Время силового воздействия на единичный по длине участок обрабатываемой заготовки

$$t_{\text{д}} = (h + l_{\text{п. з}})/v,$$

где v — скорость перемещения пресс-шайбы; h — параметр (см. рис. 4.13); $l_{\text{п. з}} = d_1 \sin\alpha$ — длина пластической зоны (d_1 и α — параметры, см. рис. 4.13).

Угол α в прессовых процессах обычно выбирают в пределах 45—60°; величину h определяют из следующего выражения:

$$h = t_c v - d_1 \sin\alpha,$$

где t_c — время образования прочного соединения составляющих композита; определение этой величины рассмотрено в разд. 4.4.

На основании критериального решения условия сохранения сплошности волокон получено выражение [10]

$$\sigma_f^* = \frac{\sigma_{sci}^* \left[(d^2/\sin\alpha) \ln (d^2/d_1^2)\, \mu + \left(1/\cos^2 \frac{\alpha}{2}\right) d^2 \ln (d^2/d_1^2) + (4d^2/d_1)\, \mu l \right]}{\cos\gamma\, (d^2 - d_1^2)}, \tag{4.6}$$

где μ — коэффициент трения на пояске пресс-шайбы (поверхности ее скоса); γ — угол «естественного» течения материала технологического наполнителя, определяемый экспериментально, так как он зависит от конкретного значения α, температуры процесса, материала наполнителя, условий трения на рабочем пояске полости пресс-шайбы; l — длина калибрующего пояска рабочей полости пресс-шайбы, которая выбирается в пределах (3—15) 10^3 мкм; d — параметр, определяемый из практики сборки трубчатых заготовок (обычно $d_0 = d + 0{,}2$ мм); σ_f^* и σ_{sci}^* — показатели соответственно волокон и композита (см. разд. 4.4). Тогда в выражении (4.6) остается неизвестным один параметр d_1, который и контролирует силовые условия процесса.

Полые изделия, полученные из бороалюминия по рассмотренной схеме, при объемной доле волокон 50% имеют сопротивление разрушению 1200—1300 МПа (при степени сохранения сплошности волокон 97%) [10, 18]. Расчетные данные процесса представлены в табл. 4.12.

Процессы прессования обычно производят с некоторым пресс-остатком; в рассматриваемой зоне в донной части технологического вкладыша должна оставаться непропрессованной некоторая высота h_2; ее величина должна быть не менее полутора длин пластической зоны $l_{\text{п. з}}$. Для того чтобы исключить «концевой» эффект, в верхней части технологической оболочки заготовки предусматривается участок высотой h_1, не содержащий армированной собственно заготовки. Высота этого участка h_1 должна быть порядка (1,5—2,0) $l_{\text{п. з}}$.

Параметры h_1 и h_2 — см. на рис. 4.13.

Другим вариантом изготовления армированных труб является компактирование за счет давления изнутри полой заготовки (в технологической оболочке) при прохождении через ее

4.12. Параметры прессования бороалюминиевых труб с использованием технологического вкладыша заготовок (см. рис. 4.13)

D_0, м	d, м	d_1, м	$l\ 10^3$, мкм	Усилие прессования, кН
0,04	0,038	0,024	50—100	22,3—27,0
	0,038	0,020	50—100	23,3—31,0
	0,036	0,020	50—100	24,5—27,6
	0,036	0,016	30—50	34,5—35,3
0,05	0,048	0,032	50—150	31,4—35,0
	0,048	0,028	50—80	39,8—42,9
	0,048	0,026	30—50	45,0—46,8
	0,046	0,030	50—120	30,5—33,0
	0,046	0,022	50—80	51,0—53,0
0,06	0,057	0,031	50—100	66,0—68,0
	0,057	0,027	50—80	80,0—82,0
	0,057	0,025	30—50	87,0—88,0
	0,056	0,030	50—100	63,0—68,0
	0,056	0,026	30—50	78,0—80,0

Примечание. Скорость прессования $6{,}7 \cdot 10^{-4}$ м/с, температура 560 °С [10].

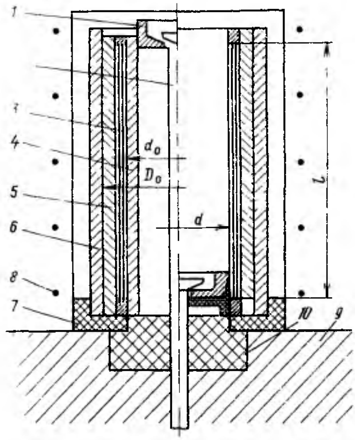


Рис. 4.14. Схема радиального уплотнения полых армированных заготовок в технологических оболочках [10]:

1 — пресс-шайба, *2* — тяга; *3* — полая армированная сборная заготовка; *4* — внутренняя технологическая оболочка; *5* — наружная технологическая оболочка; *6* — контейнер; *7* — нижняя (опорная) плита оснастки; *8* — система нагрева; *9* — подкладная плита; *10* — технологический вкладыш

полость пуансона (или нескольких последовательно уплотняющих пуансонов) [10].

Дополнительным фактором, ограничивающим величину деформации в радиальном направлении уплотняемой заготовки, является устойчивость внутренней технологической оболочки, поэтому процесс осуществляется за несколько проходов, количество которых рассчитывается по следующей формуле:

$$n_i = \lg k_{F\Sigma} / \lg k_{Fi\ \text{ср}},$$

где $k_{F\Sigma}$ — коэффициент уплотнения заготовки за весь процесс (коэффициент уменьшения сечения заготовки при уплотнении); $k_{Fi\ \text{ср}}$ — средний коэффициент уплотнения заготовки за переход (для данного процесса применительно к бороалюминиевым трубам он имеет значения 1,05—1,10) [10].

В то же время $k_{F\Sigma} = F_{\text{зг}}/F$, где $F_{\text{зг}}$ — сечение заготовки, а F — сечение готовой трубы. Наружные диаметры заготовки и трубы совпадают (это D_0 на рис. 4.14), d — внутренний диаметр готовой трубы задан, т. е. можно определить внутренний диаметр заготовки d_0. Параметр d нужно устанавливать с учетом заданного наружного диаметра трубы и коэффициента термического расширения материала.

Величина $k_{F\Sigma}$ связана с коэффициентом неплотности заготовки следующим образом:

$$k_{F\Sigma} = 1/(1 - k_{\text{нп}}).$$

Диаметр полости d_i обрабатываемой заготовки после каждого перехода определяется из равенства

$$d_i = \sqrt{D_0^2 - \frac{4F_i}{\pi}} \quad (F_i = F_{i-1}/k_{Fi}),$$

а усилие, потребное для осуществления перехода, из следующей формулы [10]:

$$P_i = \pi\sigma^*_{sci} \times \left(\frac{d_i^2 - d_{i-1}^2}{2 \sin 2\alpha} + d_i l_\text{к}\mu \right),$$

где $l_\text{к}$ — высота пресс-шайбы; $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{2t_{\text{п}\Sigma}v}{d - d_0}\right)$ — угол переходного участка от боковой к лицевой поверхности пресс-шайбы ($t_{\text{д}\Sigma} = t_\text{c}$ — время образования соединения; v — скорость перемещения пресс-шайбы).

При изготовлении труб из бороалюминия (волокна бора с покрытием карбида кремния) средний коэффициент уменьшения сечения уплотняемой заготовки составлял 1,065; $\alpha = 7°$; $v = 0{,}1$ м/мин. Трубы с объемной долей волокон 43%, компактированные при температуре 580 °С за восемь переходов при высоте пресс-шайбы $71 \cdot 10^2$ мкм и σ^*_{sci}, возраставшим от перехода к переходу от 8 до 28 МПа, имеют компактное строение, полностью сохраняют сплошность волокон, между составляющими композита образуется прочное соединение, сопротивление разрушению труб при растяжении 950 МПа [10]. Полученные по такой же схеме трубы из материалов АД1-В и Д16-В с объемной долей волокон 57% имеют более высокие значения указанной характеристики — соответственно 980 и 1150 МПа [13].

При радиальном компактировании заготовок армированных труб, устанавливаемых на жесткие оправки, компенсация колебаний пористости матрицы композита, допустимых отклонений по толщине элементов заготовок, температур деформирования, номинальных размеров деталей оснастки обеспечивается облойными полостями между рабочими деталями оснастки, в которые может истекать материал технологической оболочки сборной заготовки (рис. 4.15). Из условия компактности, а также из условия равенства сопротивления течению матричной составляющей композита в заключительной стадии уплотнения и сопротивления истечению материала

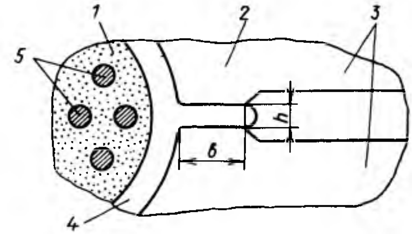


Рис. 4.15. Схема к определению параметров облойных полостей при радиальном компактировании армированных труб:
1 — матрица КМ; *2* — облой; *3* — рабочая вставка; *4* — технологическая оболочка; *5* — волокно КМ

технологической оболочки в облой определяется параметр облойной полости

$$b = \frac{2\mu\sigma^*_{sci}h - \sigma_s\left(h - 2\mu h - h \ln \frac{1}{2\mu}\right)}{2\mu\sigma_s},$$

где σ_s — предел текучести материала технологической оболочки при температуре процесса T; μ — коэффициент трения на участке облойной полости; h — величина, определяемая в зависимости от полного усилия компактирования (табл. 4.13):

$$P = \sigma^*_{sci}\pi D l_\text{тр}(1 + \alpha_1 T)(1 + \alpha_2 T),$$

где $l_\text{тр}$ — длина компактируемой трубы (или ее участка); α_1 и α_2 — коэффициенты линейного термического расширения композита в направлениях соответственно вдоль и поперек направления волокон.

Изготовление спирально армированных труб с металлическими проволочными волокнами может осуществляться методом гидростатического прессования по схеме, представленной на рис. 4.16. Изделие выдавливается через канал матрицы вместе с оправкой под действием высокого давления жидкости (заготовка должна быть предварительно герметизирована). При изготовлении сталеалюминиевых труб процесс осуществляется с 50%-ным обжатием заготовки по сечению при температуре 200 °С

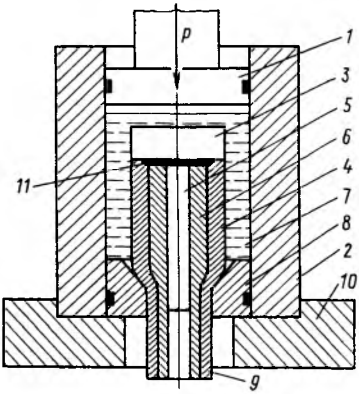


Рис. 4.16. Схема гидростатического прессования армированных труб [11]:
1 — пуансон; *2* — контейнер; *3* — пресс-шайба с иглой; *4* и *5* — трубчатые элементы из матричного материала; *6* — волокно, свернутое в спираль; *7* — рабочая жидкость; *8* — матрица прессовой оснастки; *9* — армированная труба; *10* — опорная плита; *11* — адгезионный слой

Спрессовывание элементов плоских пакетов — заготовок по схеме диффузионной сварки применительно к конструкционным композитам — наиболее универсальный процесс, хотя он и не обеспечивает высокую производительность. Этот процесс подробно изучен и широко освещен в работах [5, 6, 9, 10, 13, 21, 22].

При получении плоских панелей и листов спрессовыванием сборных заготовок по схеме диффузионной сварки в большинстве случаев, когда в композите используют хрупкие волокна, в качестве технологической оснастки применяют пресс-формы. В этих условиях спрессовывание связано с изменением только одного размера заготовки — ее толщины. При заданной толщине h изделия толщина заготовки

$$h_{\text{зг}} = h + \Delta h_{\text{ф. к}},$$

где $\Delta h_{\text{ф. к}}$ — абсолютная деформация уплотнения заготовки, количественно равная необходимому рабочему ходу активной части оснастки при деформировании. Поэтому с учетом такого процесса уплотнения плоских заготовок можно суммарный объем не-

4.13. Высота мостика облойной полости

P, МН	h, мкм	P, МН	h, мкм
6,3	600—1000	20	1400—1800
10	1000—1500	31,5—40	2000—2500
16	1200—1600	50—63	3000—3500

плотностей заготовки записать в виде равенства

$$\Delta h_{\text{ф. к}} b_{\text{зг}} l_{\text{зг}} = k_{\text{нп}} V_{\text{зг}}.$$

Так как объем таких заготовок представляет собой произведение трех габаритных размеров, то после сокращения

$$\Delta h_{\text{ф. к}} = k_{\text{нп}} h_{\text{зг}}.$$

Время образования физического контакта по всей площади границ матричной составляющей и волокон при скорости прессования (v)

$$t_{\text{ф}} = \Delta h_{\text{ф. к}}/v = k_{\text{нп}} h_{\text{зг}}/v.$$

После уплотнения заготовки необходима выдержка под давлением длительностью, соответствующей $t_{\text{а}}$, т. е. полное время деформирования

$$t_{\text{д}} = t_{\text{ф. к}} + t_{\text{а}}.$$

Полное усилие

$$P = \sigma^*_{sc\,i} b_{\text{зг}} l_{\text{зг}},$$

где величина $\sigma^*_{sc\,i}$ определяется по методике, изложенной в разд. 4.4.

Получение по указанной схеме изделий из композитов гарантирует наиболее стабильные результаты (по качественным признакам и уровню характеристик).

Листы из материалов АД1 — ЭП322 и Д20 — 1Х15Н4АМ3 после прессования при температурах соответственно 480 и 440 °С при шаге укладки волокон (диаметры волокон соответственно 400 и 200 мкм), в 2 раза превышающем их диаметр, толщине $2 \cdot 10^3$ мкм имели временное сопротивление разрыву при растяжении при комнатной температуре соответственно 780 и 975 МПа при объемной доле волокон 28% и 1[illegible]40 и 1470 МПа соответственно при объемной доле волокон 42% [10]. Давление при изготовлении этих изделий составляло для материала АД1 — ЭП322 34 МПа, а для материала Д20 — 1Х15Н4АМ3 — 88 МПа [10]. Панели на основе титановых сплавов с объемной долей волокон бора 21—27% с покрытием карбида кремния после спрессовывания при температуре 760 °С и давлении 84.4 МПа с выдержкой 1 ч (или при температуре 870 °С, том же давлении и выдержке 0,25 ч) имеют модуль упругости 162—197 ГПа и временное сопротивление до 1406 МПа [11].

При диффузионной сварке пакетов — заготовок бороалюминия [22] давление определяется материалом матричной составляющей, например, если используют материал ВКА-1, то температура деформирования составляет 500—520 °С, если технический алюминий АД1 или материал САП [22], то 620—640 °С; давление в обоих случаях составляет 30—35 МПа [22]. Время выдержки под давлением в этих условиях 15—20 мин [6]. При использовании для армирования волокон бора с покрытием карбида кремния композиции на основе алюминия получают диффузионной сваркой по режимам, зависящим не только от материала матрицы, но и от атмосферы, в которой осуществляется процесс [21].

Для композиций, в которых применяют нелегированную матричную составляющую (при объемной доле волокон 36%), диффузионная сварка проводится при температуре 500 °С, при приложении давления 35 МПа и выдержке 1 ч, если используют обычную (воздушную) атмосферу; при использовании защитной атмосферы аргона температура может быть увеличена до 593 °С, давление до 70 МПа, а время выдержки сокращается до 5 мин. При применении прочных легированных матриц композит формируется диффузионной сваркой при температуре 490—565 °С при давлении ~40 МПа в вакууме, однако время выдержки под давлением велико (1 ч). Композит алюминий — бериллий может быть получен диффузионной сваркой при температуре 538 °С, давлении 50 МПа и выдержке 5 мин [21]. Диффузионная сварка (в отличие от прокатки) не регламентирует параметры послойно-перекрестного армирования металлов и сплавов. В частности, этот процесс используется для получения ортогонально армированных полос, в которые вводятся волокна бора с покрытием кремния и стальная проволока. Температура прессования 500 °С, давление 70 МПа, время выдержки в вакуумной камере 1 ч [21].

Боромагниевый композит может быть получен в вакуумных камерах с выдержкой 1 ч при температурах 500—525 °С и давлениях соответственно 140—70 МПа [21]. В камерах для диффузионной сварки вакуум обычно 13,1—1,31 МПа [9]. При получении композита на основе титана марки ВТ1-0 в вакууме необходимы температура 780—920 °С, давления соответственно 60—40 МПа, выдержка 15—30 мин [9].

При изготовлении прессованием углеалюминиевых композитов равномерное распределение элементарных волокон (филаментов) достигается только при условии, что процесс выполняется в присутствии жидкой фазы. Процесс ведут в вакууме, при высоких температурах, обеспечивая компактирование заготовки в режимах контактного плавления элементов матричных сплавов [6, 13]. На углеродную ленту предварительно наносят барьерный слой карбида кремния, затем — технологическое покрытие никеля, после чего плазменным методом производят плазменное напыление алюминия [6]. Для того чтобы образующаяся в процессе спрессовывания сборной заготовки алюминиево-никелевая жидкая фаза эвтектического состава не вытекала под давлением активной части рабочего инструмента, в камере обеспечивается (подачей аргона) противодавление, равное 0,2 МПа. Процесс осуществляют при температуре 640—650 °С, давлении 1,7—3,0 МПа. Последующая термическая обработка проводится по режиму 670 °С, 300 с и обеспечивает в результате гомогенизирующего отжига получение твердого раствора никеля в матричной алюминиевой составляющей [6].

Процесс этого же типа применяется и для изготовления бороалюминия (волокна бора с покрытием карбида кремния) с использованием в качестве припоя силумина; процесс проводится при температурах 580—610 °С, при давлениях 0,5—2,0 МПа и времени выдержки 10—20 мин [13].

Разновидностью процесса прессования плоских заготовок является ступенчатое или «шаговое» прессование (заготовка большой длины участок за участком прессуется между инструментальными обогреваемыми плитами), позволяющее получать бороалюминиевые полосы длиной до 9 м и шириной до 1,2 м [21].

4.7. ФОРМООБРАЗОВАНИЕ ДЕТАЛЕЙ ИЗ КОМПОЗИТОВ

Профильные изделия из конструкционных композитов с металлической матрицей, в отличие от листов, лент, полос и труб, изготавливаются двумя способами: либо стадии компактирования и формообразования деталей следуют одна за другой (двухстадийное деформирование), либо эти стадии совмещаются (одностадийное деформирование). Примерами двухстадийного деформирования являются процессы компактирования плоских полуфабрикатов диффузионной сваркой или прокаткой с последующей обработкой в гибочных штампах [13, 23], на формовочных или вальцовочных машинах [11]. Одностадийное деформирование осуществляют, совмещая компактирование с формообразованием профилей уголковых, тавровых, двутавровых и других сечений при прессовании сборных заготовок в автоклавах [21].

Наиболее распространенным процессом формообразования профилей является поэлементная гибка компактных композитных заготовок. Процесс гибки характеризуется наличием зоны растяжения материала в зоне изгиба, наиболее удаленной от центра гиба (в этой зоне действуют небольшие сжимающие радиальные и значительные окружные растягивающие напряжения) и зоны сжатия (в ней и окружные и радиальные напряжения являются сжимающими *).

Эти зоны разделяет нейтральная ось. Положение нейтральной оси при гибке листовых заготовок из композитов зависит от многих факторов: объемной доли волокон, толщины технологических прокладок, их материала и схемы гибки [23]. В результате анализа напряженно-деформированного состояния установлено, что наличие «ячеек» в композите оказывает серьезное влияние и на общую картину распределения напряжений в зоне изгиба, и на их характер и величину в самих ячейках. Наибольшие окружные напряжения действуют в участках ячеек, где толщина матричных прослоек между волокнами минимальна, поэтому первым критериальным выражением для процесса гибки является неравенство

$$\sigma_{\theta\max} < \sigma_{mf},$$

где $\sigma_{\theta\max}$ — максимальное напряжение в ячейке, располагающейся в зоне растяжения при изгибе (окружное напряжение); σ_{mf} — прочность соединения составляющих композита. При нарушении этого условия происходит образование межкомпонентного расслоения, развивающееся в трещину, выходящую на поверхность растяжения изгибаемой заготовки. Но специфика гибки листовых заготовок из конструкционных композитов зависит и от того, что при пластическом изгибе композита пластической деформации подвергается только матричная составляющая, т. е. ее деформация аномально высока. Поэтому вторым критериальным выражением является неравенство

$$\varepsilon_{mi} < \delta_m,$$

где ε_{mi} — деформация растяжения матрицы в данном слое зоны растяжения при изгибе; δ_m — относительное удлинение матричной составляющей композита (обе величины — в безразмерном выражении).

Напряженное состояние компактного композита в зоне изгиба листовой заготовки выражается следующей зависимостью:

* Далее в формулах сжимающие напряжения для этого процесса имеют знак «минус».

$$-\sigma_{\rho\varphi} = -\sigma_{\rho i} \exp\left(\mp \frac{2d_f}{\sqrt{S^2-d_f^2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\sqrt{S^2-d_f^2}}{S-d_f \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}\right).$$

Здесь $\sigma_{\rho i}$ — радиальное напряжение в рассматриваемом слое ячеек композита $\left[-\sigma_{\rho i} = \beta\sigma_{sm} \ln \frac{R}{\rho_i}\right.$ — в зоне растяжения; $-\sigma_{\rho i} = \beta\sigma_{sm} \ln \frac{\rho_i}{r}$ — в зоне сжатия (знак «—» для зоны растяжения при изгибе, знак «+» для зоны сжатия очага деформации при изгибе)$\Big]$; $-\sigma_{\rho\varphi}$ — текущее значение радиального напряжения в ячейке композита; σ_{sm} — предел текучести матрицы композита; φ — угловая координата ячейки композита (см. разд. 4.4); S — шаг укладки волокон; d_f — диаметр сечения волокна; R — наружный радиус изгиба, равный сумме внутреннего радиуса изгиба r и толщины h изгибаемой заготовки; β — коэффициент Лодэ, равный в данном случае 1,15; ρ_i — текущее значение радиуса (в зоне растяжения $\rho_{i\ max} = R - \frac{h_m}{2}$, h_m — расстояние от поверхности растяжения заготовки при изгибе до ближайшего к ней слоя волокон).

Окружное напряжение $\sigma_{\theta\varphi}$ связано с $-\sigma_{\rho\varphi}$ условием пластичности:

$$\pm\sigma_{\theta\varphi} = -\sigma_{\rho\varphi} \pm \sigma_{sm},$$

где $\sigma_{\theta\varphi}$ имеет знак «+» для зоны растяжения, знак «—» — для зоны сжатия в очаге деформации при изгибе.

Возможности формообразования изделий из композита свободным изгибом невелики, как правило, процесс осуществляют [13, 23] в условиях действия радиального подпора, создаваемого технологическими обкладками или замкнутыми технологическими оболочками. Необходимо напряжение подпора

$$-\sigma_{п} = \bar{\sigma}_{mf} - \beta\sigma_{sm} + \beta\sigma_{sm} \ln\left(\frac{R}{R-\frac{h_m}{2}}\right) \exp\left(\frac{-2d_f}{\sqrt{S^2-d_f^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{S^2-d_f^2}}{S-d_f}\right).$$

Основным показателем технологической пластичности при гибке листовых заготовок является отношение внутреннего радиуса изгиба к толщине заготовки:

$$r/h = \frac{S(h-d_f-2h_m) - \delta_m h(S-d_f)}{2\delta_m h(S-d_f)}.$$

Схема гибки представлена на рис. 4.17. В качестве материала вкладыша применяют резину, полиуретан, свинец и другие материалы [23]. Линия изгиба параллельна расположению осей волокон композита.

Управление процессом гибки профилей из компактных листовых армированных заготовок осуществляется варьированием величин напряжений подпора, шага укладки волокон, их диаметра и увеличением параметра h_m.

При гибке в металлическом контейнере (замкнутой технологической оболочке) сталеалюминиевых заготовок ($V_f = 30\%$) показатель r/h находится в пределах 2,5—11, а при гибке бороалюминиевых листовых заготовок по схеме с жесткоэластичным подпором его значения составляют 2—8 [13] в зависимости от параметров внутреннего строения ВКМ.

Изгиб армированных сталеалюминиевых заготовок по схеме, когда линия изгиба нормальна к направлению волокон в заготовке, осуществляют при температурах 20—200 °С с углом изгиба 40—130° (при более высоких температурах формообразования, т. е. при 315—454 °С, угол изгиба составляет до 52—118°) [11].

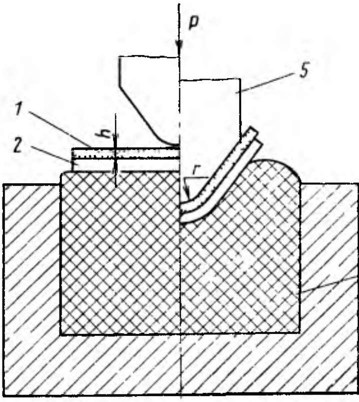


Рис. 4.17. Схема для гибки листовых заготовок из композитов с использованием комбинированного жесткоэластичного подпора [23]:

1 — армированная листовая заготовка; *2* — металлическая технологическая прокладка; *3* — эластичный полиуретановый вкладыш; *4* — корпус нижней части оснастки; *5* — пуансон

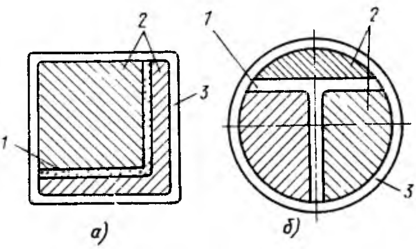


Рис. 4.18. Схемы одностадийного изостатического деформирования армированных изделий [21]:

а — уголковый профиль; *б* — профиль таврового сечения; *1* — армированная сборная заготовка; *2* — формующие элементы (инструментальные вкладыши); *3* — контейнер (замкнутая технологическая оболочка)

Другим технологическим направлением, заключающимся в совмещении компактирования и формообразования профилей, является диффузионная сварка под давлением в автоклавах и изостатических установках, когда сборные заготовки вместе с добавочными «внутренними инструментальными деформирующими элементами» заключают в замкнутую технологическую оболочку, нагревают и подвергают деформированию по схемам, представленным на рис. 4.18 [21].

4.8. ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПОЗИТОВ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ПО ОПТИМАЛЬНЫМ РЕЖИМАМ

Наиболее распространенным конструкционным композитом с металлической матрицей является бороалюминий. Материал ВКА-1 этой системы более чем в 2 раза превосходит по прочности при комнатной температуре конструкционные алюминиевые сплавы, по упругим характеристикам — в 3,5 раза. При повышенных температурах преимущества ВКА-1 еще более очевидны (табл. 4.14).

Материал ВКА-1 (V_f = 40÷50%) имеет предел выносливости (на базе 10^7 циклов) 600 МПа, относительное удлинение 0,4—0,7%, длительную (100 ч) прочность при 300 °С 600 МПа, при 400 °С — 500 МПа, при 500 °С — 400 МПа. Временное сопротивление разрыву при растяжении в направлении, нормальном к оси волокон, составляет 60—90 МПа, при сдвиге — не превышает 70 МПа. При использовании легированных сплавов в качестве матрицы бороалюминия эти характеристики могут быть заметно повышены: при использовании сплава АД33 прочность при сдвиге достигает 120 МПа, при использовании сплава Д16 160 МПа, прочность в поперечном к волокнам направлении может возрастать до 200 МПа и выше [10]. Прочность при сжатии, соосном с волокнами, у бороалюминия существенно выше, чем при растяжении, и составляет 1300—2000 МПа. Температурный коэффициент линейного расширения бороалюминия представлен в табл. 4.15.

Для композитов с одноосным армированием характерна высокая степень анизотропии многих характеристик, в том числе физических, в частности, коэффициент линейного расширения бороалюминия составляет $5{,}1\cdot10^{-6}$—$7{,}4\cdot10^{-6}$ °С$^{-1}$, показатель анизотропии прочности $\bar{\sigma}_2/\bar{\sigma}_1 = 0{,}05 \div 0{,}09$, а показатель анизотропии жесткости $E_2/E_1 = 0{,}521 \div 0{,}545$. Другой характерной особенностью одноосно

4.14. Механические свойства композита ВКА-1 [13]

t, °C	$\bar{\sigma}$, МПа	E, ГПа
20	1000—1200	250
300	900	235
400	700	228
500	500	220

4.15. Температурный коэффициент линейного расширения α бороалюминия [6]

V_f, %	$\alpha \cdot 10^6$, °C^{-1}, в интервалах, °C				
	20—100	100—200	200—300	300—400	400—500
45	4,7	5,0	5,3	6,1	6,6
30	10,2	5,4	—	4,0	5,7

4.16. Временное сопротивление одноосно-армированного бороалюминия в зависимости от угла разориентации осей нагружения и армирования θ [10]

θ, градусы	$\bar{\sigma}_\theta$	E_θ	θ, градусы	$\bar{\sigma}_\theta$	E_θ
0	800	185	20	200	—
5	820	180	30	—	120
10	760	180	45	120	120
15	630	—			

Примечание. Объемная доля волокон 30%.

армированных материалов является значительное влияние взаимного расположения осей армирования и приложения нагрузки (табл. 4.16).

Существуют различные пути снижения анизотропии характеристик (в первую очередь — прочности) бороалюминия (перекрестно-послойное армирование, комбинированное армирование в разных направлениях, комбинированные матрицы).

4.17. Прочность и жесткость ортогонально армированного бороалюминия [10]

Объемная доля волокон, %, в направлении полос		$\dfrac{\bar{\sigma}_\theta\ (\text{МПа})}{E_\theta\ (\text{ГПа})}$ при углах, градусы, между продольным направлением и осью нагружения		
продольном	поперечном	0	45	90
20	20	301—306 / 144—173	52—71 / 62—67	264—290 / 140—162
25	15	326—354 / 131—147	75—87 / 69—71	256—296 / 77—91
30	10	672—695 / 196—244	66—71 / 93	159—160 / 67—83
35	5	735—773 / 181—228	42—50 / 43—52	160—178 / 58—71

Примечание. Общая объемная доля волокон 40%.

4.18. Прочность при растяжении материала алюминий — бор — сталь [10]

Объемная доля волокон, %		$\bar{\sigma}_1$, МПа, при растяжении вдоль оси	
бора	стальной проволоки	волокон бора	стальных проволочных волокон
20	5	652	140
30	5	835	133
20	10	640	240
30	10	797	233

Механические свойства ортогонально армированного бороалюминия представлены в табл. 4.17.

Менее эффективным (в отношении удельных и абсолютных характеристик прочности и жесткости), но более благоприятным по технологическим возможностям формообразования изделий является комбинированное армирование по ортогональной схеме волокнами бора и проволочными стальными волокнами (табл. 4.18).

Еще один путь снижения анизотропии неизбежно связан с повышением плотности материала. Он заключается в использовании фольговых титановых дополнительных слоев заготовок и изделий из бороалюминия. В частности, при введении 10% (по объему) титанового сплава ВТ15 характеристики этого трехкомпонентного композита становятся следующими: $\bar{\sigma}_1 = 900 \div 1000$ МПа, $\bar{\sigma}_2 = 350$ МПа, $\gamma = 3{,}4 \times 10^3$ кг/м^3 [13]. Комбинации бороалюминия и неармированных слоев титана могут быть в широком интервале соотношений [5]:

Доля титана, % (остальное бороалюминий с 45% волокон)	0	10	20	30	50	70
$\bar{\sigma}_1$, МПа	1100	1140	1170	1195	1260	1320
$\bar{\sigma}_2$, МПа	70	135	170	190	235	300

Однако наиболее распространенными (поскольку обладают лучшим комплексом технологических, коррозионных характеристик и достаточно высокими механическими свойствами) являются бороалюминиевые двухкомпонентные материалы или трехкомпонентные, в которых две матричные составляющие имеют одну основу (алюминий).

Механические свойства двух- и трехкомпонентного бороалюминия представлены в табл. 4.19—4.22 [10].

Составляющие бороалюминия имеют различные термические коэффициенты линейного расширения, поэтому при нагреве бóльшее расширение матричной составляющей вызывает появление в волокнах продольных растягивающих напряжений (матрица, в свою очередь, испытывает действие межкомпонентных напряжений сжатия в направлении, соосном с волокнами). При охлаждении (после горячего компактирования или термической обработки) знаки напряжений по той же причине изменяются (табл. 4.23).

Композиты магний — бор ($V_f = 40 \div 45\%$) имеют высокие абсолютные и удельные характеристики прочности и жесткости [21] из-за низкой плотности матричной составляющей и высоких характеристик волокон. Относительное удлинение при растяжении вдоль волокон 0,5%, прочность при изгибе 1200—1300 МПа, модуль упругости — до 220 ГПа, коэффициент Пуассона 0,25. О влиянии состава боромагния на прочностные характеристики можно судить по данным табл. 4.24.

Композиты системы алюминий—сталь экономичны, отличаются высокой технологичностью. В связи с относительно высокой плотностью стальных проволочных волокон и относительно невысокой жесткостью сталеалюминиевые композиты по удельным показателям прочности и модуля упругости уступают материалам систем алюминий — бор и магний — бор. Тем не менее перечисленные достоинства ставят сталеалюминий в ряд наиболее реальных конструкционных композиционных материалов. В качестве матричной составляющей сталеалюминия применяют АД1, термически не-

4.19. Механические свойства материала АД1—В

Объемная доля волокон, %	$\bar{\sigma}_1$	$\bar{\sigma}_2$	E_1	E_2
	МПа		ГПа	
20	519—540	98—117	136,7	77,90
25	737—837	98—117	146,9	83,75
30	850—890	98—117	163,4	94,80
35	960—1020	88—117	191,5	118,80
40	1070—1130	88—108	199,3	127,60
47	1213—1230	88—108	226,6	134,50
54	1200—1270	69—79	245,0	139,10

4.20. Механические свойства бороалюминиевых композиций с легированными матрицами

Материал матрицы	V_f, %	Состояние композита	$\bar{\sigma}_1$, МПа	$\bar{\sigma}_2$, МПа	E_1, ГПа	E_2, ГПа
АМг6	30	После горячего деформирования	870	125	161,2	93,7
	35		885	92	187,2	103,6
	42		915	57	202,0	127,1
	30	После отжига	865	154	—	—
	35		880	128	—	—
	42		930	79	—	—
АМг2	35	После горячего деформирования	982	174	189,0	102,9
	45		1257	168	214,7	130,5

4.21. Прочность при повышенных температурах бороалюминиевых композиций с комбинированной матрицей

Материал	Объемная доля волокон, %	$\bar{\sigma}_1$, МПа, при температуре, °С	
		350	500
Д20—АД1—В	25	507	360
	30	615	435
	35	687	465
1201—АД1—В	30	593	410
	37	710	493
1201—АМг2—В	27	540	370
	32	655	425
АД1—АМг6—В	38	705	577
	41	737	595

упрочняемые сплавы АМг2, АМг3, АМг6, а также термически упрочняемые сплавы АВ, Д16, Д20, В95 и др. В качестве упрочнителей применяют проволочные волокна из коррозионно-стойких сталей (преимущественно из сталей с метастабильным при холодной деформации аустенитом, претерпевающим мартенситное превращение при холодном волочении). Наиболее полно данные о проволочных волокнах из сталей и их влиянии на свойства сталеалюминиевых композитов рассмотрены в работах [5, 10, 11, 13].

В композите КАС-1 в качестве упрочнителя применяют проволочные волокна из стали марки ВНС-9. Механические свойства композита КАС-1 при комнатной температуре следующие: $\bar{\sigma}_1 = 1300 \div 1450$ МПа; $E_1 = 110$ ГПа; $\bar{\sigma}_{-1} = 350$ МПа (на базе 10^7 циклов); $\tau_{12} = 66$ МПа; $\mu_р = 0{,}33$. Этот композит сохраняет высокую кратковременную и длительную прочности при повышенных температурах: при 300 °С $\bar{\sigma}_1 = 960$ МПа; при 500 °С $\bar{\sigma}_1 = 400$ МПа; $\sigma_{100} = 450$ МПа при температуре испытаний 300 °С.

4.22. Прочность бороалюминиевых композитов с комбинированной матрицей при комнатной температуре в зависимости от состояния материала

Материал	Объемная доля волокон, %	σ_1 (МПа)/σ_2 (МПа)		
		после горячего деформирования	после отжига	после закалки и отпуска
Д20—АД1—В	25	728/169	736/150	867/233
	30	850/134	857/121	1020/179
	35	880/127	887/120	1150/187
	40	943/115	—	1210/173
	44	1030/115	—	1265/163
1201—АД1—В	30	813/149	817/155	950/207
	37	871/133	875/140	1037/189
1201—АМг2—В	27	720/135	727/187	895/307
	32	837/157	845/155	1017/226
АД1—АМг6—В	25	777/133	820/130	—
	35	987/105	1070/110	—
	38	890/67	1085/152	—
	42	1003/59	1120/147	—
	48	1175/55	1290/135	—

Примечание. Объемная доля волокон бора в армированных частях листов (по их толщине) АД1—В, АМг2—В и АМг6—В 45—50%.

4.23. Межкомпонентные остаточные напряжения в материале АД1—В (V_f = 30%)

Состояние ВКМ	Остаточное напряжение при 20 °С, МПа	
	в матрице композита	в волокнах
После горячей деформации	+86÷+103	—200÷—240
После нагрева до 550 °С	+66÷+90	—153÷—210
После охлаждения в жидком азоте	—90÷—117	+210—+272
После приложения растягивающего напряжения 600 МПа	—134÷—150	+313—+350
После упругого растяжения (600 МПа) и нагрева до 150 °С	+76÷+82	—178÷—191

Примечание. Знак «+» — напряжения растяжения, знак «—» — напряжения сжатия.

Плотность материала КАС-1 составляет 4800 кг/м^3, в качестве исходных компонентов применяются главным образом проволочные волокна диаметром 0,15 мм, матричная алюминиевая фольга толщиной 100 мкм [5].

В качестве материала матрицы в КАС-1 используют сплав АВ или материал САП-1 (7—9% Al_2O_3) [13]. Временное сопротивление при растяжении в направлении, нормальном к оси волокон, в деформированном состоянии составляет 135—165 МПа, а после упрочняющей термообработки (матрица — сплав АВ) — 235—280 МПа, модуль упругости после проведения упрочняющей термической обработки достигает 115 ГПа, предел выносливости (без проведения термообработки) — 350 МПа, а временное сопротивление материала зависит от температуры испытаний следующим образом [13]:

Температура испытаний, °С	200	300	400	500
$\bar{\sigma}_1$, МПа	1100—1250	$\leqslant$ 1200	900—100	700—750

4.24. Прочность композита магний — бор [21]

Объемная доля волокон, %	$\bar{\sigma}_1$, МПа, при	
	растяжении	изгибе
25	880—920	1140
30	960	—
45	1200	—
50	1250	—
70	—	—
75	1330	1600

Примечание. При сжатии и объемной доле волокон 70% $\bar{\sigma}_1$ = = 3200 МПа.

Сталеалюминий при испытаниях в различных средах имеет высокие характеристики коррозионной стойкости (табл. 4.25).

Сталеалюминиевые композиты других составов также обладают высокими механическими и технологическими характеристиками (табл. 4.26—4.29). Термическая обработка сталеалюминия обычно проводится по режиму закалки и отпуска матричной составляющей, однако при выборе температуры нагрева перед закалкой необходимо учитывать, что на этой стадии не должно происходить разупрочнения проволочных волокон (термического или разупрочнения, связанного с обратным мартенсит-аустенитным превращением), поэтому в ряде случаев, особенно при использовании в материале проволочных волокон из сталей марок 08Х18Н9Т

4.25. Коррозионные характеристики композита КАС-1 [5]

Состояние торцов образца композита	Коррозионная среда (выдержка 2 месяца)	$\bar{\sigma}_1$, МПа		Скорость коррозии $v_К \cdot 10^5$, кг/м^2·ч
		в исходном состоянии	после испытаний в коррозионной среде	
Неизолированные	Тропическая камера	1336	1345	0,28
	Морская вода	1336	1224	2,45
	Полное погружение в 3%-ный раствор поваренной соли с добавкой 0,1% H_2O_2	1336	1172	55,40
Изолированные	Тропическая камера	1336	1390	0,07
	Морская вода	1336	1274	0,76
	Полное погружение в 3%-ный раствор поваренной соли с добавкой 0,1% H_2O_2	1336	1251	5,23

4.26. Прочность сталеалюминиевых композитов в горячедеформированном состоянии [10, 11] в зависимости от состава и объемной доли волокон

Материал	V_f, %	σ_1, МПа
АД1—12Х18Н10Т	24,5 40	466 757
АМг6—12Х18Н10Т	20 30	648 814
АМг6—ЭП322	15 25 35	613 833 1033
АМг6—1Х15Н4АМ3	10 20 30 40	573 877 1063 1230
АМг6—Н13М10К16	11 20 35	420 860 1230
Д16—12Х18Н10Т	20	530
Д20—12Х18Н10Т	20 30	540 700
Д20—1Х15Н4АМ3	15 20	547 630
В95—12Х18Н10Т В95—1Х15Н4АМ3	24 30	540 1206

4.27. Прочность сталеалюминиевых композитов после упрочняющей термической обработки [10]

Материал	V_f, %	σ_1, МПа
Д16—12Х18Н10Т Д20—12Х18Н10Т Д20—1Х15Н4АМ3 В95—12Х18Н10Т	20 20 20 14	640 693 720 590
В95—1Х15Н4АМ3	20 20 30	687 933 1402

4.28. Механические свойства сталеалюминия (матрица — сплав АМг6) при повышенных температурах [10]

Материал волокон	V_f, %	Температура испытаний, °C	σ_1	σ_{sc}	δ, %
			МПа		
12Х18Н10Т	5 10 15 20	300	163 236 243 251	98 171 — 183	19,2 6,2 6,0 2,5
ЭП322	15 5		212 126	143 75	5,1 20,1
12Х18Н10Т	10 15	350	163 184	102 107	10,3 9,9
ЭП322	15		264	—	8,9

4.29. Предельный угол изгиба листового сталеалюминия (матрица — сплав АМг6)

V_f, %	Материал волокон	Предельный угол изгиба, градус
5 10 15 20	12Х18Н10Т	112 72 40 25
10 20	ЭП322	42 35
11 14 20	Н13М10К16	81 59 39
10 20	1Х15Н4АМ3	34 29

Примечание. Толщина листа 1500 мкм, радиус изгиба по внутренней поверхности 3000 мкм [10]; гибка проводится по волокнам.

4.30. Остаточные напряжения в составляющих сталеалюминия [10] после горячего компактирования (матрица — сплав АМг6)

V_f, %	Диаметр волокон, мкм	Межкомпонентные остаточные напряжения, МПа	
		в матрице композита	в волокнах
15	200	+45	—265
	500	+70	—340
	1300	+105	—515
10	350	+20	—220
15		+45	—290
20		+105	—465

Примечание. «+» — знак напряжений растяжения, «—» — знак напряжений сжатия.

4.31. Пределы выносливости ВКМ Al—B и Al—C

Температура испытаний, °C	Предел выносливости, МПа, при числе циклов			
	10^5	10^6	10^7	10^8
Бороалюминий (V_f = 47%)				
20	690	620	550	430
250	600	400	240	—
Углеалюминий (V_f = 33÷38%)				
20	250	200	170	—

и 12Х18Н10Т, приходится проводить неполную закалку матрицы композита, т. е. закалку после нагрева до температуры, более низкой, чем принято для некоторых марок алюминиевых сплавов. По этой причине, а также в связи с наличием межкомпонентных остаточных напряжений (связанных с различием модулей упругости матричной составляющей и волокон, а также с различием термических коэффициентов линейного расширения матрицы и волокон) упрочнение сталеалюминия после закалки и отпуска может быть меньше ожидаемого.

Влияние объемной доли волокон на упругие характеристики сталеалюминия проявляется следующим образом [10]:

Объемная доля волокон, % . . .	5	8	15	20	30	40	50
Модуль упругости, ГПа:							
при растяжении	72,8	76,0	82,1	89,7	112,3	124,0	143,0
при изгибе	72,8	76,1	85,3	96,6	117,0	—	—

Межкомпонентные остаточные напряжения в сталеалюминии представлены в табл. 4.30.

Композиты на основе легких металлов и сплавов обладают повышенными характеристиками при кратковременных и длительных, статических и динамических нагружениях в широких температурных диапазонах испытаний. Обладают они существенными преимуществами перед традиционными металлическими материалами и при циклическом нагружении. В частности, бороалюминий и углеалюминий имеют показатели предела выносливости [21], представленные в табл. 4.31.

Повышенные циклические характеристики композитов наблюдаются не только при растяжении-сжатии, но и при циклическом консольном изгибе. Например, материал АМг3 — Н16К4М5Т2 характеризуется значениями циклической прочности при указанном виде испытаний, приведенными в табл. 4.32.

Значительный объем данных накоплен по характеристикам углеалюминиевых композитов, однако большой разброс характеристик углеродных волокон и лент, различие в технологических решениях процессов изготовления полуфабрикатов и изделий из этого материала проявляется в широком

4.32. Циклическая прочность ВКМ Амг3 —Н16К4М5Т2

Циклическая прочность, МПа	Число циклов $N_ц \cdot 10^5$	Циклическая прочность, МПа	Число циклов $N_ц \cdot 10^5$
При объемной доле волокон 20%		**При объемной доле волокон 29%**	
305	0,7	305	2,7
260	1,5	276	4
240	1,8	240	7
200	3,3	204	1,4

4.33. Механические свойства углеалюминия при 20 °С с однонаправленным армированием [6]

Тип углеродной ленты	Средняя прочность элементарных волокон (филаментов), МПа	V_f, %	$\bar{\sigma}_1$, МПа	E_1, ГПа
«Сатурн»	4500	33 45 53	400 630 830	133 154 168
«Элур»	2800—3000	33 45 53	290 450 500	130 150 160
ЛУ-П45	2500—2600	33 45 53	230 380 410	130 150 160
ЛУ-2	2000	33 45 53	200 310 360	116 130 140

Примечание. Плотность материала (2,1—2,25) 10^3 кг/м^3.

диапазоне характеристик композита, особенно прочностных. При объемных долях армирующей сост‧вляющей 18—53% временное сопротивление углеалюминия при растяжении вдоль расположения волокон составляет (150÷400)—(500÷1000) МПа [13]. Более детально свойства углеалюминия рассмотрены в табл. 4.33.

4.34. Временное сопротивление композита системы титан (Ti—6Al—4V) — молибден при повышенных температурах [21]

V_f, %	Временное сопротивление при растяжении, МПа, при температуре испытаний, °С			
	500	600	700	750
20	880	700	490	380
30	950	780	550	420
40	980	780	600	600

4.35. Модуль упругости композита системы титан (Ti—6Al—4V) — молибден при повышенных температурах [21]

V_f, %	E_1, ГПа, при температуре испытаний, °С							
	100	200	300	400	500	600	700	800
20	145	140	136	131	125	122	117	112
30	160	154	150	140	138	133	130	124
40	198	195	190	185	182	175	170	164

Помимо указанных факторов на свойства углеалюминия существенное влияние оказывают отношение длины волокон l_f (испытательной базы) к сечению d_f и вид покрытия. Например [32], прочность углеалюминия на основе матрицы из силумина (12% Si) при увеличении l_f/d_f до некоторого значения (для волокон с различными покрытиями — хром, карбид кремния, хром + карбид кремния) порядка 300—450 возрастает, а при дальнейшем увеличении l_f/d_f снижается. Для материала с объемной долей волокон 50% прочность при использовании волокон без покрытия с увеличением l_f/d_f с 8 до 100 возрастает от 550 до 770 МПа, а при последующем возрастании l_f/d_f до 1000 — снижается до 300 МПа. При использовании волокон с покрытием из хрома прочность растет (при увеличении l_f/d_f с 5 до 300) от 500 до 670 МПа, а затем снижается (при увеличении l_f/d_f до 1100) до 300 МПа. При использовании волокон с покрытием карбида кремния прочность углеалюминия при увеличении l_f/d_f с 20 до 450 растет от 550 до 930 МПа, а затем снижается (при увеличении l_f/d_f до 900) до 460 МПа. При использовании двойного покрытия (хром + карбид кремния) прочность при увеличении l_f/d_f с 6,5 до 400 растет с 830 до 940 МПа, дальнейшее увеличение l_f/d_f до 1180 приводит к снижению прочности до 650 МПа.

Повышенную прочность имеет углеалюминий ($V_f = 29 \div 35\%$) и при изгибе, т. е. 375—632 МПа.

Особое место среди конструкционных композитов занимают материалы на основе титана и титановых сплавов, упрочняемые проволочными волокнами из сплавов на основе бериллия, а также сплавов на основе вольфрама и молибдена. В ряде случаев титан и его сплавы могут быть армированы волокнами карбида кремния. Для материала титан — бериллий ($V_f = 33\%$) $\bar{\sigma}_1 = 1050$ МПа и $E_1 = 168{,}7$ ГПа, а у материала титан — карбид кремния ($V_f = 25\%$) $\bar{\sigma}_1 = 910$ МПа и $E_1 = 210$ ГПа.

Основными достоинствами композитов на основе титана и титановых сплавов являются повышенные характеристики прочности при высоких температурах (вплоть до 650—700 °С) и повышенная прочность при растяжении в направлении, поперечном расположению волокон [13]. Например, материал системы титан — молибден (ВТ1 — 0 — МЧ) с объемной долей волокон 18% имеет при комнатной температуре $\bar{\sigma}_1 = 520 \div 590$ МПа, а $\bar{\sigma}_2 = 353 \div 401$ МПа [13].

Наибольшей совместимостью с титановыми матричными составляющими обладают керамические волокна, имеющие близкие (к матрице) значения термического коэффициента линейного расширения. Наибольшее проявление армирования титана и его сплавов заключается в резком возрастании характеристик жесткости. Титановые композиты имеют при комнатной температуре $\bar{\sigma}_1 = 1300$ МПа, $\bar{\sigma}_2 = 665$ МПа, $E_1 = 260$ ГПа [13].

Эффект армирования, проявляющийся при высокотемпературном нагружении титановых композитов, иллюстрируется данными табл. 4.34, 4.35.

Список литературы

1. **Алюминиевые** сплавы. Структура и свойства полуфабрикатов из алюминиевых сплавов/Под ред. В. И. Елагина, В. А. Ливанова. М.: Металлургия, 1984. 408 с.
2. **Алюминиевые** сплавы. Промышленные деформируемые, спеченные и литейные сплавы/Под ред. Ф. И. Квасова и И. Н. Фридляндера. М.: Металлургия, 1984. 528 с.
3. **Базык А. С., Тихонов А. С.** Применение эффекта сверхпластичности в современной металлообработке//Технология обработки металлов давлением. М.: НИИМАШ, 1977. 64 с.
4. **Баландин Г. Ф., Семенов Б. И., Тищенкова Е. Ф.** Свойства сплавов в отливках. М.: Наука, 1975. С. 17—21.
5. **Волокнистые** и дисперсно-упрочненные композиционные материалы/Под ред. Н. В. Агеева и др. М.: Наука, 1976. 216 с.
6. **Волокнистые** композиционные материалы с металлической матрицей/Под ред. М. Х. Шоршорова. М.: Машиностроение, 1981. 272 с.
7. **Глазунов С. Г., Моисеев В. Н.** Конструкционные титановые сплавы/Под ред. А. Т. Туманова. М.: Металлургия, 1974. 368 с.
8. **Деформация** металлов взрывом/ А. В. Крупин, В. Я. Соловьев, Н. И. Шефтель, А. Г. Кобелев. М.: Металлургия, 1975, 415 с.
9. **Карпинос Д. М., Тучинский Л. И., Вишняков Л. Р.** Новые композиционные материалы. Киев: Вища школа, 1979. 312 с.
10. **Колпашников А. И., Арефьев Б. А., Мануйлов В. Ф.** Деформирование композиционных материалов. М.: Металлургия, 1982. 248 с.
11. **Колпашников А. И., Мануйлов В. Ф., Ширяев Е. В.** Армирование цветных металлов и сплавов волокнами. М.: Металлургия, 1974. 248 с.
12. **Композиционные** материалы: Пер. с англ.: В 8 т./Под общ. ред. Л. Браутмана, Р. Крока: Т. 4. Композиционные материалы с металлической матрицей/Под ред. К. Крейдера. М.: Машиностроение, 1978. 504 с.
13. **Композиционные** материалы/Под ред. А. И. Манохина. М.: Наука. 1981. 305 с.
14. **Костиков В. И., Шестерин Ю. Н., Милов В. П.**//Физика и химия обработки материалов. 1978. № 2. С 142—146.
15. **Магниевые** сплавы: В 2 т./Под ред. М. Б. Альтмана и др. М.: Металлургия, 1978. Т. 1 232 с., Т. 2 — 296 с.
16. **Мануйлов В. Ф., Вялов В. А., Ефремов А. В.** Новые технологические процессы обработки высокопрочных материалов. М.: МАТИ, 1976. 99 с.
17. **Мануйлов В. Ф., Колпашников А. И., Тихонов А. С.** и др.//Физика и

химия обработки материалов. 1978. № 2. С. 155—158.

18. **Мануйлов В. Ф., Макарова С. А., Шоршров М. Х.**//Физика и химия обработки материалов. 1977. № 4. С. 144—149.

19. **Мануйлов В. Ф., Тихонов А. С., Катинова Л. В.**//Физика и химия обработки материалов. 1977. № 1. С. 122—125.

20. **Семенов Б. И., Ханин Е. И., Маркевич Ю. Б.**//Физика и химия обработки материалов. 1978. № 1. С. 138—142.

21. Структура и свойства композиционных материалов/К. И. Портной, С. Е. Салибеков, И. Л. Светлов и др. М.: Машиностроение, 1979. 256 с.

22. **Туманов А. Т., Портной К. И., Чубаров В. М.** и др. Композиционные металлические материалы. М.: ВИАМ. ОНТИ, 1972. С. 40—48.

23. **Фридляндер И. Н., Грибков А. Н.**// Металловедение и термическая обработка металлов. 1980. № 11. С. 19—21.

24. **Чернышева Т. А., Кобелева Л. И.**// Физика и химия обработки материалов. 1986. № 5. С. 130—133.

Глава 5

СТРУКТУРНАЯ МЕХАНИКА КОМПОЗИТОВ

Армированные пластики состоят из полимерной матрицы и волокон. Совместная работа этих компонентов обеспечивается сцеплением их друг с другом. Причиной разрушения армированного пластика может быть как разрушение волокон или матрицы, так и нарушение сцепления. Таким образом, прочность армированного пластика определяется прочностными характеристиками трех его структурных элементов — волокон, матрицы и сцепления.

Структурные элементы армированных пластиков не разрушаются одновременно. Это объясняется различием их предельных характеристик. При определении соответствующих условий прочности необходимо учитывать, какой из структурных элементов в конкретных условиях нагружения разрушится первым.

Для оценки прочности структурных элементов армированного пластика необходимо определить их напряженное состояние. Даже при таком простом нагружении, как одноосное растяжение, компоненты армированного пластика (например, полимерная матрица) находятся в плоском или объемном напряженном состоянии и для оценки их прочности, определяющей прочность армированного пластика в целом, необходимо применить соответствующие критерии, учитывающие фактическое напряженное состояние.

На основе соответствующих критериев прочности структурных элементов — связующего, волокон и сцепления между ними — предложены критерии прочности пластиков, армированных как прямыми волокнами, так и тканями. Структура тканевых пластиков по сравнению с другими видами армированных пластиков весьма сложна. Отличительная особенность тканевых пластиков заключается в том, что их волокна объединены в нити, которые имеют искривленную форму и переплетены между собой. Предложенные условия прочности учитывают важнейшие особенности работы тканевых пластиков.

Композиты на основе металлической матрицы (металлокомпозиты) в отличие от армированных пластиков имеют ряд особенностей: хорошую электро- и теплопроводность, влагостойкость, широкий диапазон рабочих температур, повышенную жесткость (и прочность) однонаправленных материалов в поперечном направлении и при сдвиге, своеобразие механизмов разрушения, а также особенности их деформирования при температурно-силовых воздействиях и т. д.

Металлокомпозитам свойственно существенно неупругое поведение, обусловленное, в основном, неупругими деформациями обычно более податливого материала матрицы. Влияние металлических матриц на жесткость композита в целом весьма велико, оно во много раз превышает влияние полимерного связующего на жесткость армированных пластиков. Как следствие, проявляемые металлокомпозитами неупругие эффекты могут самым существенным образом влиять на несущую способность выполненных из этих материалов элементов конструкций. Наиболее заметно это влияние, например, в тех случаях, когда исчерпание несущей способности конструкции происходит в результате потери устойчивости. Таким образом, задача исследования и описания неупругих свойств металлокомпозитов представляет вполне реальный практический интерес. Без ее решения невозможны как надежные оценки несущей способности металлокомпозитных элементов конструкций, так и правильный выбор рациональных схем их армирования.

Характер деформирования металлокомпозитов при температурно-силовых воздействиях во многом определяется возникающими в их компонентах структурными напряжениями. Соотношение жесткостных свойств компонентов металлокомпозитов обычно таково, что остаточные значения структурных напряжений могут превосходить предел текучести материала матрицы. Существенные различия в температурных коэффициентах линейного расширения компонентов и широкий диапазон рабочих температур приводят к тому, что пластические деформации в материале матрицы могут возникать в результате чисто температурных воздействий на композит. При повышенных температурах интенсивно протекают процессы релаксации структурных напряжений, сопровождающиеся деформациями композита и при отсутствии действующих напряжений. В результате металлокомпозиты проявляют целый ряд эффектов, слабо выраженных или совсем не встречающихся у гомогенных конструкционных материалов.

5.1. ПЛАСТИКИ, АРМИРОВАННЫЕ ПРЯМЫМИ ВОЛОКНАМИ

5.1.1. Упругие характеристики однонаправленно армированного слоя. Оси упругой симметрии однонаправленно армированного пластика показаны на рис. 5.1. В случае трансверсально изотропной арматуры модуль упругости однонаправленно армированного слоя в направлении армирования определяется по следующей зависимости [16]:

$$E_1 = vE_{\text{Bz}} + (1 - v)\,E_{\text{c}} + \eta E_{\text{c}}, \qquad (5.1)$$

где

$$\eta = \frac{2v\,(1 - v)\,(\nu_{\text{c}} - \nu_{\text{Bzr}})^2}{1 + \nu_{\text{c}} + v\,(1 - \nu_{\text{c}} - 2\nu_{\text{c}}^2) + (1 - v)\,(1 - \nu_{\text{Br}\theta} - 2\nu_{\text{Brz}}\nu_{\text{Bzr}})\,\dfrac{E_{\text{c}}}{E_{\text{Br}}}}.$$

Здесь индексы 1 и 2 соответствуют направлениям, показанным на рис. 5.1; индексы в и с соответствуют волокнам и связующему; v — относительное объемное содержание волокон.

Если $\nu_{\text{c}} \approx \nu_{\text{Brz}}$, т. е. коэффициенты Пуассона компонентов практически одинаковы, то $\eta = 0$ и зависимость (5.1) принимает форму, которая соответствует правилу смеси:

$$E_1 \approx vE_{\text{Bz}} + (1 - v)\,E_{\text{c}}. \qquad (5.2)$$

Анализ зависимости коэффициента η от характеристик компонентов показывает, что влияние поперечных эффектов, возникающих в результате различия коэффициентов Пуассона полимерного связующего и волокон, на модуль упругости пластика E_1 в самых экстремальных случаях не превышает 2%. Следовательно, с достаточной для практики точностью модуль упругости однонаправленно армированных пластиков в направлении армирования определяется зависимостью (5.2).

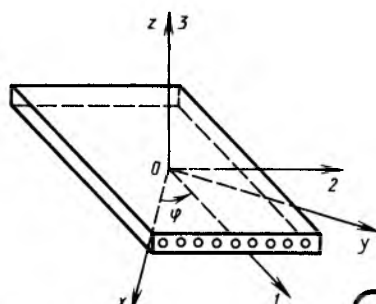


Рис. 5.1. Схема поворота осей

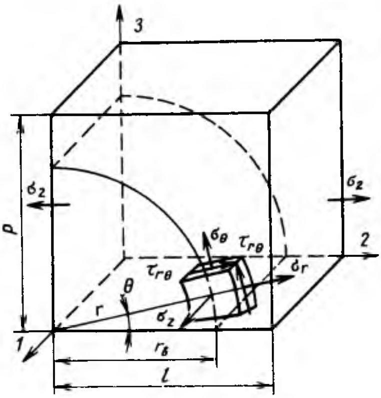


Рис. 5.2. Расчетная схема элемента структуры однонаправленно армированного пластика

Если $E_{вz} \gg E_с$, то для практически применяемых объемных содержаний (долей) волокон зависимость (5.2) может быть заменена более простой:

$$E_1 \approx vE_{вz}.$$

Коэффициент Пуассона ν_{12} в работе [18] определен в результате решения граничной задачи теории упругости для расчетной модели в виде коаксиальных цилиндров. Анализ полученных результатов показывает, что коэффициент Пуассона ν_{12} практически не зависит ни от модулей упругости компонент, ни от геометрии строения однонаправленно армированного пластика, а определяется лишь объемным содержанием волокон и коэффициентами Пуассона компонентов. Поэтому для практического применения рекомендуется следующая зависимость:

$$\nu_{12} = (1 - v)\,\nu_с + v\nu_{вzr}.$$

Если деформативные свойства однонаправленно армированных пластиков в направлении армирования в основном определяются жесткостью волокон и практически не зависят от геометрии упаковки волокон, то на упругие свойства пластика в направлении, перпендикулярном направлению армирования, существенно влияют как упругие свойства полимерного связующего, так и геометрия распределения волокон в поперечном сечении материала.

Нахождение модуля поперечной упругости E_2 является наиболее сложной задачей определения упругих свойств компонента по заданным характеристикам компонентов. При использовании метода тонких слоев для двоякопериодической расчетной модели было предложено применять следующую формулу для определения E_2 с учетом геометрии упаковки волокон [17]:

$$E_2 = \left[\frac{r_в}{p} J + \left(1 - \frac{r_в}{p}\right)\frac{1}{1 - \nu_с^2}\right] E_с,$$

где

$$J = \frac{1}{bE_с}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{2a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a - b}{a + b}}\right];$$

$$a = \frac{1 - \nu_с^2}{E_с};$$

$$b = \frac{r_в}{l}\left[\frac{1 - \nu_{вrz}\nu_{вzr}}{E_{вr}} - a\right].$$

Как видно из рис. 5.2, параметры p и l определяют вид упаковки волокон и так же, как и диаметр волокон $r_в$ и объемное содержание волокон v, являются величинами заданными.

В случае прямоугольной упаковки волокон должно быть задано соотношение $\frac{p}{l} = d$. Тогда из соотношения площади поперечного сечения волокна и всей площади сечения получим следующие зависимости:

$$\frac{r_в}{l} = 1{,}14\sqrt{vd}; \quad \frac{r_в}{p} = 1{,}14\sqrt{\frac{v}{d}}.$$

В случае квадратной упаковки волокон $l = p$, тогда эти зависимости принимают вид

$$\frac{r_в}{l} = \frac{r_в}{p} = 1{,}14\sqrt{v}.$$

При гексагональном расположении волокон, когда $p = \frac{\sqrt{3}}{2} l$, справедливо соотношение

$$\frac{r_в}{l} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}\,v}{\pi}} = 1{,}05\,\sqrt{v};$$

$$\frac{r_в}{p} = 1{,}21\,\sqrt{v}.$$

В результате решения двухосной задачи в плоскости, перпендикулярной направлению армирования, без учета эффектов, возникающих в армированном пластике в результате стеснения деформаций полимерного связующего и волокон в направлении армирования, получена формула для определения коэффициента Пуассона [17]:

$$\nu_{23} = \left(1 - \frac{r_в}{p}\right)\nu_c + \frac{r_в}{p} \times$$
$$\times \left[\frac{\nu_c}{\nu_{вr\theta}} g_2 + \frac{E_c}{E_{вr}}(g_1 - g_2)\right]\nu_{вr\theta},$$

где

$$g_1 = \frac{1}{k_1}\left[\frac{2}{\sqrt{1-k_1^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+k_1}{1-k_1}} - \frac{\pi}{2}\right] + \frac{1}{c}\left(\frac{\nu_c E_{вr}}{\nu_{вr\theta} E_c} - 1\right) \times$$
$$\times \left[\frac{\pi}{2} - \frac{l}{r_в}\,\frac{2}{c(\beta_1-\beta_2)\sqrt{\beta_1^2-1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\beta_1+1}{\beta_1-1}}\right];$$

$$g_2 = \begin{cases} \dfrac{l}{r_в}\,\dfrac{2}{c^2(\beta_1-\beta_2)\sqrt{\beta_2^2-1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{\beta_2+1}{\beta_2-1}}, & \text{если } |\beta_2| > 1; \\ \dfrac{l}{r_в}\,\dfrac{1}{c^2(\beta_1-\beta_2)\sqrt{1-\beta_2^2}}\ln\left|\dfrac{1+\beta_2+\sqrt{1-\beta_2^2}}{1+\beta_2-\sqrt{1-\beta_2^2}}\right|, & \text{если } |\beta_2| < 1; \end{cases}$$

$$c = \frac{r_в}{l}\left(\frac{E_{вr}}{E_c} + \frac{E_c}{E_{вr}} - 2\right);$$

$$k_1 = \frac{r_в}{l}\left(1 - \frac{E_c}{E_{вr}}\right);$$

$$\beta_1 = \frac{l}{r_в}\,\frac{E_{вr}}{E_{вr}-E_c};$$

$$\beta_2 = -\frac{l}{r_в}\,\frac{E_c}{E_{вr}-E_c}.$$

Коэффициент Пуассона ν_{21} определяется по следующей известной зависимости:

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1}\nu_{12}.$$

Для определения модуля продольного сдвига используют метод, основанный на расчетной модели, содержащей неограниченное число слоев бесконечно малой толщины [16]. Этот метод не учитывает влияние взаимодействия между поверхностями смежных слоев. Полученная приближенная формула для определения продольного модуля сдвига однонаправленно армированного пластика, учитывающая объемное содержание и вид упаковки волокон и упругие свойства компонентов, имеет вид

$$G_{12} = \left[1 - \frac{r_в}{p} + \frac{r_в}{p}k\left(\frac{2k}{\sqrt{k^2-1}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k+1}{k-1}} - \frac{\pi}{2}\right)\right]G_c,$$

где

$$k = \frac{1}{\frac{r_в}{l}\left(1 - \frac{G_c}{G_{вrz}}\right)}.$$

В реальных конструкциях армированные пластики обычно нагружены в плоскости армирования. В случае плоского напряженно-деформированного состояния закон деформирования для однонаправленно армированного пластика в осях его упругой симметрии *1—2* (см. рис. 5.1) имеет вид

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \tag{5.3}$$

где

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}};$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}};$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad Q_{66} = G_{12}.$$

В произвольных осях x — y закон деформирования принимает вид

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix},$$

где

$$\overline{Q}_{11} = Q_{11}\cos^4\varphi + 2\,(Q_{12} + 2Q_{66}) \times \sin^2\varphi\cos^2\varphi + Q_{22}\sin^4\varphi;$$

$$\overline{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \times \sin^2\varphi\cos^2\varphi + Q_{12}\,(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi);$$

$$\overline{Q}_{22} = Q_{11}\sin^4\varphi + 2\,(Q_{12} + 2Q_{66}) \times \sin^2\varphi\cos^2\varphi + Q_{22}\cos^4\varphi;$$

$$\overline{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \times \sin\varphi\cos^3\varphi + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\varphi\cos\varphi;$$

$$\overline{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \times \sin^3\varphi\cos\varphi + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\varphi\cos^3\varphi;$$

$$\overline{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \times \sin^2\varphi\cos^2\varphi + Q_{66}\,(\sin^4\varphi + \cos^4\varphi).$$

5.1.2. Упругие характеристики слоистого материала. В реальных конструкциях армированные пластики обычно имеют слоистую структуру, состоящую из однонаправленно армированных слоев. По теории слоистых материалов общий закон деформирования имеет следующий вид [16]:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ \hdashline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \hdashline k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix}. \tag{5.4}$$

Составляющие матриц жесткостей A_{ij}, B_{ij} и D_{ij} определяются по следующим зависимостям:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\overline{Q}_{ij})_k\,(z_k - z_{k-1}); \tag{5.5}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (\overline{Q}_{ij})_k\,(z_k^2 - z_{k-1}^2); \tag{5.6}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} (\overline{Q}_{ij})_k\,(z_k^3 - z_{k-1}^3). \tag{5.7}$$

Расчетная схема определения координат z_k и z_{k-1} показана на рис. 5.3. В обратной форме закон (5.4) имеет вид

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \hdashline k \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{c:c} A' & B' \\ \hdashline (B')^T & D' \end{array}\right] \begin{Bmatrix} N \\ \hdashline M \end{Bmatrix}. \tag{5.8}$$

Составляющие матрицы податливости a_{ij} в развернутом виде определяются по следующим зависимостям:

$$a_{11} = \frac{1}{\Delta}(A_{22}A_{66} - A_{26}^2);$$

$$a_{22} = \frac{1}{\Delta}(A_{11}A_{66} - A_{16}^2);$$

$$a_{12} = \frac{1}{\Delta}(A_{16}A_{26} - A_{12}A_{66});$$

$$a_{66} = \frac{1}{\Delta}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2); \quad (5.9)$$

$$a_{16} = \frac{1}{\Delta}(A_{12}A_{26} - A_{22}A_{16});$$

$$a_{26} = \frac{1}{\Delta}(A_{12}A_{16} - A_{11}A_{26}),$$

где

$$\Delta = A_{11}(A_{22}A_{66} - A_{26}^2) + \\ + A_{12}(A_{16}A_{26} - A_{12}A_{66}) + \\ + A_{16}(A_{12}A_{26} - A_{22}A_{16}).$$

В случае слоистого пластика с несбалансированной (число слоев материала n нечетное), но симметричной относительно срединной плоскости структуры, жесткости $B_{ij} = 0$, но $A_{16} \neq 0$ и $A_{26} \neq 0$. Если число слоев достаточно большое, тогда можно принять $A_{16} = A_{26} = 0$.

Если структура слоистого материала симметрична относительно его срединной плоскости, тогда $B_{ij} = 0$. В таком случае технические упругие

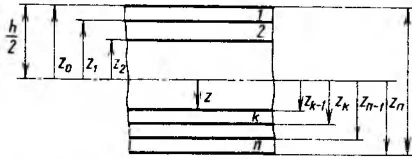


Рис. 5.3. Расчетная схема для определения z_k и z_{k-1}

характеристики слоистого материала в осях его упругой симметрии определяются по следующим формулам:

$$E_x = \frac{1}{h}\left(A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}}\right) = \frac{1}{ha_{11}};$$

$$E_y = \frac{1}{h}\left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}}\right) = \frac{1}{ha_{22}};$$

$$\nu_{xy} = \frac{A_{12}}{A_{22}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}};$$

$$G_{xy} = \frac{1}{h}A_{66} = \frac{1}{ha_{66}}.$$

Зависимость упругих характеристик косоугольно армированного стеклопластика от объемного содержания волокон v и угла намотки показана на рис. 5.4—5.6.

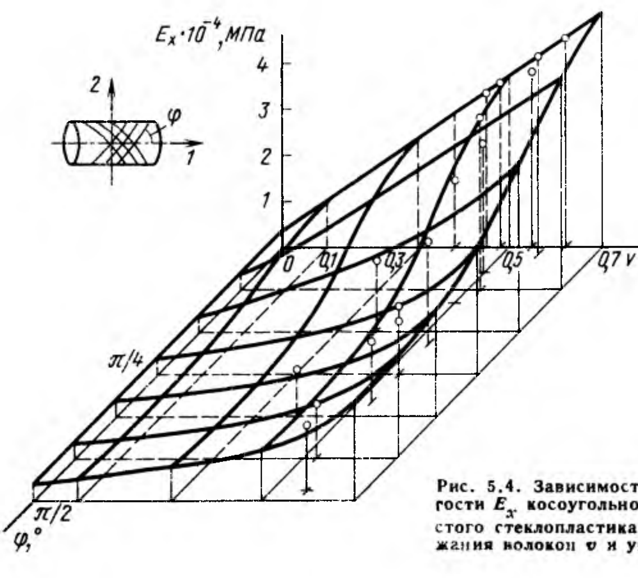


Рис. 5.4. Зависимость модуля упругости E_x косоугольно армированного слоистого стеклопластика от объемного содержания волокон v и угла намотки $\pm\varphi$ [11]

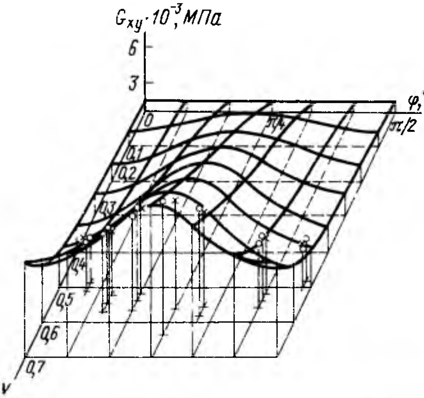


Рис. 5.5. Зависимость модуля сдвига G_{xy} косоугольно армированного слоистого стеклопластика от объемного содержания волокон v и угла намотки $\pm\varphi$ [31]

5.1.3. Напряжения в слоях слоистого материала. Напряжения в слоях слоистого материала зависят от механических свойств отдельных слоев, их толщины и ориентации, последовательности укладки, содержания и физико-механических свойств волокон и связующего.

В общем случае слоистые материалы находятся в неоднородном напряженном состоянии и их полные деформации определяются по следующим зависимостям:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_x^0 + zk_x;\\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y^0 + zk_y;\\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^0 + zk_{xy}.\end{aligned} \qquad (5.10)$$

Для определения ε^0 и k используем закон деформирования (5.8) в развернутом виде:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\\ k_x\\ k_y\\ k_{xy}\end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} A'_{11} & A'_{12} & A'_{16} & B'_{11} & B'_{12} & B'_{16}\\ A'_{21} & A'_{22} & A'_{26} & B'_{21} & B'_{22} & B'_{26}\\ A'_{61} & A'_{62} & A'_{66} & B'_{61} & B'_{62} & B'_{66}\\ \hdashline B'_{11} & B'_{21} & B'_{61} & D'_{11} & D'_{12} & D'_{16}\\ B'_{12} & B'_{22} & B'_{62} & D'_{21} & D'_{22} & D'_{26}\\ B'_{16} & B'_{26} & B'_{66} & D'_{61} & D'_{62} & D'_{66}\end{array}\right] \begin{Bmatrix}N_x\\ N_y\\ N_{xy}\\ \hdashline M_x\\ M_y\\ M_{xy}\end{Bmatrix}. \qquad (5.11)$$

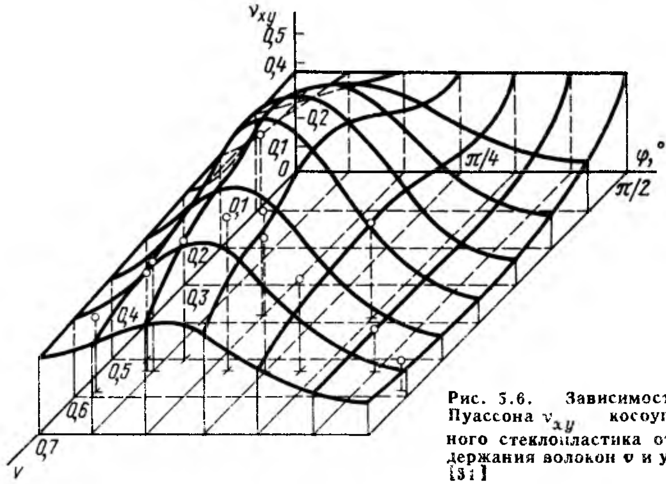


Рис. 5.6. Зависимость коэффициента Пуассона ν_{xy} косоугольно армированного стеклопластика от объемного содержания волокон v и угла намотки $\pm\varphi$ [31]

Из закона деформирования (5.11) следует:

$$\varepsilon_x^0 = A'_{11}N_x + A'_{12}N_y + A'_{16}N_{xy} + B'_{11}M_x + B'_{12}M_y + B'_{16}M_{xy};$$

$$k_x = B'_{11}N_x + B'_{21}N_y + B'_{61}N_{xy} + D'_{11}M_x + D'_{12}M_y + D'_{16}M_{xy}.$$

Поместив выражения для ε_x^0 и k_x в первое из уравнений (5.10), получим

$$\varepsilon_x = (A'_{11} + zB'_{11})\,N_x + (A'_{12} + zB'_{21})\,N_y + (A'_{16} + zB'_{61})\,N_{xy} + (B'_{11} + zD'_{11})\,M_x + (B'_{12} + zD'_{12})\,M_y + (B'_{16} + zD'_{16})\,M_{xy}. \quad (5.12)$$

Деформации ε_y и γ_{xy} определяются аналогично:

$$\varepsilon_y = (A'_{21} + zB'_{12})\,N_x + (A'_{22} + zB'_{22})\,N_y + (A'_{26} + zB'_{62})\,N_{xy} + (B'_{21} + zD'_{21})\,M_x + (B'_{22} + zD'_{22})\,M_y + (B'_{26} + zD'_{26})\,M_{xy}; \quad (5.13)$$

$$\gamma_{xy} = (A'_{61} + zB'_{16})\,N_x + (A'_{62} + zB'_{26})\,N_y + (A'_{66} + zB'_{66})\,N_{xy} + (B'_{61} + zD'_{61})\,M_x + (B'_{62} + zD'_{62})\,M_y + (B'_{66} + zD'_{66})\,M_{xy}. \quad (5.14)$$

Для определения средних напряжений в слоях используем закон Гука. Применив его к слою k, входящему в состав слоистого материала, получим

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (5.15)$$

При составлении закона (5.15) принято, что деформации отдельных слоев и всего слоистого материала одинаковы, т. е. отсутствует межслойное скольжение.

Для вычисления средних напряжений в слоях необходимо в уравнения (5.15) подставить значения деформаций ε_x, ε_y и γ_{xy}, определяемых по формулам (5.12)—(5.15).

После того как найдены σ_{xk}, σ_{yk} и τ_{xyk}, определяют средние напряжения в направлениях упругой симметрии однонаправленно армированного слоя:

$$\sigma_{1k} = \sigma_{xk}\cos^2\varphi_k + \sigma_{yk}\sin^2\varphi_k + \tau_{xyk}\,2\sin\varphi_k\cos\varphi_k; \quad (5.16)$$

$$\sigma_{2k} = \sigma_{xk}\sin^2\varphi_k + \sigma_{yk}\cos^2\varphi_k - \tau_{xyk}\,2\sin\varphi_k\cos\varphi_k; \quad (5.17)$$

$$\tau_{12k} = (\sigma_{yk} - \sigma_{xk})\sin\varphi_k\cos\varphi_k + \tau_{xyk}(\cos^2\varphi_k - \sin^2\varphi_k). \quad (5.18)$$

Таким образом, зависимости (5.16)—(5.18) дают возможность определить средние напряжения в направлениях упругой симметрии произвольного слоя k для самого общего случая несимметрии структуры слоистого материала.

5.1.4. Напряженное состояние компонентов. В первом приближении можно принимать, что в слоистых пластиках однонаправленно армированные слои работают в условиях плоского напряженного состояния. Таким образом, задача определения напряжений в однонаправленно армированном пластике сводится к решению соответствующей плоской задачи теории упругости. Такую задачу можно решить, например, методом комплексного переменного [2] или при помощи функции напряжений или функции перемещений [17].

Наименьшую прочность армированные пластики имеют при поперечном растяжении и продольном сдвиге. Напряженное состояние полимерного связующего при поперечном растяжении однонаправленно армированного пластика показано на рис. 5.2.

В результате решения бигармонического уравнения [17]

$$\sigma_r = \sigma_2\bar{\sigma}_r. \quad (5.19)$$

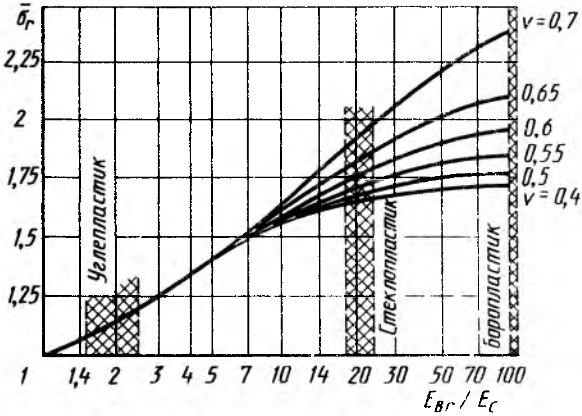


Рис. 5.7. Зависимость коэффициента концентрации напряжений $\bar{\sigma}_r$ от соотношения модулей упругости волокон ($E_{\text{вr}}$) и связующего (E_{c}) и объемного содержания волокон v

По аналогии

$$\sigma_\theta = \sigma_2\bar{\sigma}_\theta;$$

$$\tau_{r\theta} = \sigma_2\bar{\tau}_{r\theta};$$

$$\sigma_z = \sigma_2\bar{\sigma}_z = \sigma_2\nu_{\text{c}}(\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta).$$

Коэффициенты концентрации напряжений $\bar{\sigma}_r$, $\bar{\sigma}_\theta$ и $\bar{\tau}_{r\theta}$ весьма чувствительны к изменению соотношения модулей упругости волокон в поперечном направлении $E_{\text{вr}}$ и полимерного связующего E_{c} и объемного содержания волокон v. В связи с анизотропией упругих свойств волокон соотношение модулей упругости $E_{\text{вr}}$ и E_{c} может меняться в широком диапазоне. Так, в случае органических или углеродных волокон это соотношение равно 1,0—2,5, а в случае стеклянных и борных волокон — соответственно 20—25 и 100—120.

Численные значения коэффициентов $\bar{\sigma}_r$ и $\bar{\sigma}_\theta$ определяются по кривым, которые приведены на рис. 5.7 и 5.8.

Для композитов, у которых отношение $E_{\text{вr}}/E_{\text{c}} < 5$, коэффициент концентрации $\bar{\sigma}_r$ практически зависит лишь от этого отношения и на него не влияет объемное содержание волокон. Модуль продольной упругости волокон $E_{\text{вz}}$, а также коэффициенты Пуассона волокон и связующего практически не влияют на $\bar{\sigma}_r$. В случае продольного сдвига

$$\tau_{rz} = \tau_{12}\bar{\tau}_{rz}, \tag{5.20}$$

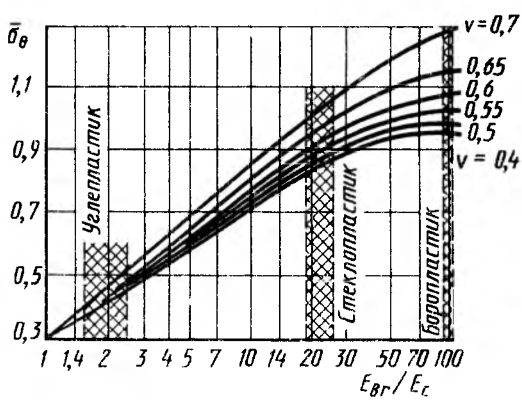


Рис. 5.8. Зависимость коэффициента концентрации напряжений $\bar{\sigma}_\theta$ от соотношения модулей упругости волокон и связующего ($E_{\text{вr}}/E_{\text{c}}$) и объемного содержания волокон v

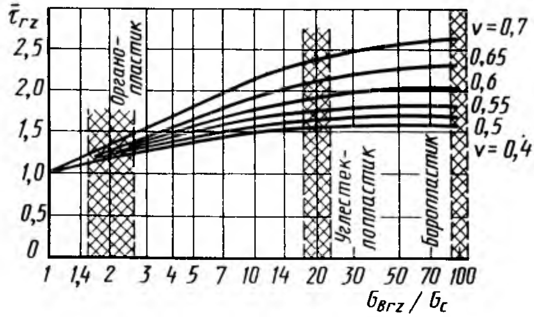


Рис. 5.9. Зависимость коэффициента концентрации касательных напряжений $\bar{\tau}_{rz}$ от соотношения модулей сдвига волокон и связующего ($G_{\text{в}rz}/G_{\text{с}}$) и объемного содержания волокон v

где

$$\bar{\tau}_{rz} = \frac{G_{\text{в}rz}}{G_{12}}\left[\frac{G_{\text{в}rz}}{G_{\text{с}}} \times \left(1-\frac{r_{\text{в}}}{l}\right)+\frac{r_{\text{в}}}{l}\right]^{-1}.$$

Кривые для определения коэффициента концентрации напряжений $\bar{\tau}_{rz}$ приведены на рис. 5.9.

5.1.5. Критерии прочности структурных элементов. Типичная предельная кривая прочности эпоксидного связующего ЭД-16 приведена на рис. 5.10. При обычных температурах полимерное связующее является хрупким материалом. Причиной разрушения таких материалов являются растягивающие напряжения. Поэтому при определении прочности полимерного связующего при комбинированном сдвиге и осевого нагружения используют следующую рабочую гипотезу: связующее разрушается, когда удельная работа главного растягивающего напряжения достигает своего предельного значения. Из рис. 5.10 следует, что сжимающие напряжения повышают прочность связующего на сдвиг. Принятая гипотеза позволяет учитывать этот эффект; тогда критерий прочности связующего на участке *А — Б* имеет следующий вид:

$$\sigma^2 + 2(1+\nu_{\text{с}})\tau^2 - \sigma\sqrt{\sigma^2+4\tau^2} = 2(R_{\text{с}}^{+})^2. \quad (5.21)$$

На участке *Б — В* сжимающие напряжения близки к прочности связующего на сжатие и предельная кривая описывается энергетическим критерием в виде [17]

$$\sigma^2 + 2(1+\nu_{\text{с}})\tau^2 + \sigma\sqrt{\sigma^2+4\tau^2} = 2(k_{\text{с}}R_{\text{с}}^{+})^2, \quad (5.22)$$

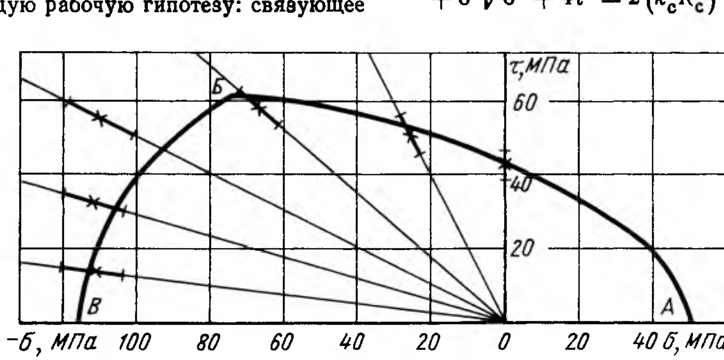


Рис. 5.10. Предельная кривая прочности эпоксидного связующего ЭД-16

где

$$k_c = \left[\frac{1}{2}\left(\sin^4\psi + \frac{1+\nu_c}{2}\sin^2 2\psi - \sin^3\psi\sqrt{4-3\sin^2\psi}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

В этой формуле ψ — угол ориентации плоскости разрушения.

В составе композита связующее находится в более сложном напряженном состоянии и поэтому для оценки прочности армированного пластика критерии (5.21) и (5.22) непосредственно неприменимы. Критерий прочности однонаправленно армированного композита должен учитывать повышение прочности связующего на сдвиг от воздействия сжимающего напряжения, вытекающее из критерия, приведенного в формуле (5.21).

В общем случае нагружения на контактную поверхность между волокнами и связующим одновременно действуют как нормальные, так и касательные напряжения, и для оценки прочности сцепления необходимо применить соответствующий критерий, учитывающий взаимодействие этих напряжений. Предположим, что межмолекулярные связи разрушаются только при растяжении. Растяжение связей происходит в тех случаях, когда действуют нормальные растягивающие напряжения σ_r, касательные напряжения τ_{rz} или комбинации этих напряжений. Воздействие всех остальных напряжений не вызывает удлинение межмолекулярных связей и, следовательно, при этом разрушение не начинается на контактной поверхности, а возникает в объеме одного из контактирующих материалов.

При таких допущениях из обобщенного критерия прочности [3] вытекает следующий критерий прочности сцепления между волокнами и связующим [19]:

$$\frac{\bar{\sigma}_r}{R_b} + \left(\frac{\tau_{zr}}{T_b}\right)^2 = 1, \qquad (5.23)$$

где R_b и T_b — прочности сцепления на отрыв и на сдвиг.

Условие прочности волокон может быть представлено в виде выражения [17]

$$\varepsilon_в \leqslant \varepsilon_{вR}, \qquad (5.24)$$

где $\varepsilon_в$ и $\varepsilon_{вR}$ — фактическая и предельная деформации пучка волокон.

5.1.6. Прочность при одноосном растяжении. При растяжении в направлении армирования всю нагрузку воспринимают волокна. В таком случае прочность на растяжение в направлении армирования определяется по формуле

$$R_1^+ = [(1-v)E_c + vE_в]\,\varepsilon_{вR}^+.$$

Из рис. 5.2 следует, что в случае поперечного растяжения на полимерное связующее воздействуют напряжения σ_r, σ_θ, σ_r и $\tau_{r\theta}$. В таком случае критерий (5.20) принимает вид

$$\frac{\sigma_r^2 + \sigma_\theta^2 + \nu_c(\sigma_r+\sigma_\theta)^2}{(R_c^+)^2} + \left(\frac{\tau_{r\theta}}{T_c}\right)^2 - \frac{2\nu_c}{(R_c^+)^2} \times [\sigma_r\sigma_\theta + \nu_c\sigma_r(\sigma_r+\sigma_\theta) + \nu_c\sigma_\theta(\sigma_r+\sigma_\theta)] = 1. \qquad (5.25)$$

Критерием (5.25) можно пользоваться, если известен угол $\theta = \theta_{крит}$ (см. рис. 5.2), при котором он имеет минимум. Минимизируя критерий (5.25), можно убедиться, что $\theta_{крит} = 0°$.

При $r = r_в$ и $\theta = 0°$ имеет место $\tau_{r\theta} = 0$. Обозначив среднее напряжение σ_2 в момент разрушения через R_2^+ с учетом зависимости (5.19), из критерия (5.25) получим следующую формулу для прочности при поперечном растяжении:

$$R_2^+ = \frac{R_c^+}{\sqrt{\bar{\sigma}_r^2(1-\nu_c^2) + \bar{\sigma}_\theta^2(1-\nu_c^2) - 2\nu_c\bar{\sigma}_r\bar{\sigma}_\theta(1-\nu_c)}} \approx \frac{R_c^+}{\bar{\sigma}_r\sqrt{1-\nu_c^2}} \qquad (5.26)$$

где $\bar{\sigma}_r$ и $\bar{\sigma}_\theta$ определяются по кривым, которые приведены на рис. 5.7 и 5.8.

Формула (5.26) применима, если прочность связующего меньше прочности сцепления. Если прочность сцепления меньше прочности связующего, тогда для определения R_2^+ необходимо использовать критерий (5.23), который в конкретном случае имеет вид

$$\frac{\bar{\sigma}_r R_2^+}{R_b} + \left(\frac{\bar{\tau}_{r\theta} R_2^+}{T_b}\right)^2 = 1. \quad (5.27)$$

Минимизируя этот критерий по зависимости

$$\frac{\partial R_2^+(\theta)}{\partial\theta} = 0,$$

получаем

$$R_2^+ = \frac{R_b}{\bar{\sigma}_r}. \qquad (5.28)$$

Формула (5.28) дает возможность определить прочность армированного пластика при поперечном растяжении, если заданы его структура и прочность сцепления между волокнами и связующим на отрыв R_b. Эта формула может быть использована и для решения обратной задачи — косвенного определения прочности сцепления R_b по экспериментально установленной прочности R_2^+ и заданной структуре материала, т. е. по параметру $\bar{\sigma}_r$. При этом

$$R_b = R_2^+\bar{\sigma}_r. \qquad (5.29)$$

Таким образом, при помощи формулы (5.28) можно определить прочность армированного пластика в том случае, когда первым разрушается связующее, а при помощи формулы (5.29) — когда первым разрушается сцепление. Фактическая прочность армированного пластика равна меньшей из этих двух прочностей. Оптимальным является случай, когда связующее и сцепление разрушаются одновременно. Оптимальная зависимость между этими прочностями зависит от вида нагружения. В случае поперечного растяжения при равенстве правых частей зависимостей (5.28) и (5.29)

$$R_c^+ = R_b\sqrt{1-\nu_c^2}. \qquad (5.30)$$

В случае продольного сдвига

$$T_c\bar{\tau}_{rz} = T_b.$$

При растяжении косоугольно армированного ($\pm\varphi$) пластика зависимости типа (5.30) имеют вид:

а) в случае разрушения связующего на отрыв

$$\frac{R_c T_c}{\sqrt{(1-\nu_c^2)(\bar{\sigma}_r a_1 T_c)^2 + (a_2 R_c^+)^2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{T_b}{a_2\bar{\tau}_{rz}}\right)^2\left[\sqrt{\left(\frac{a_1\bar{\sigma}_r}{R_b}\right)^2 + \left(\frac{2a_2\bar{\tau}_{rz}}{T_b}\right)^2} - \frac{a_1\bar{\sigma}_r}{R_b}\right];$$

б) в случае разрушения связующего на сдвиг

$$\frac{\sqrt{2}\,R_c^+}{\sqrt{a_1^2(1+\nu_c^2) + 2(1+\nu_c)a_2^2 + a_1(1+\nu_c)\sqrt{a_1^2(1-\nu_c^2)+4a_2^2}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{T_b}{a_2\bar{\tau}_{rz}}\right)^2\left[\sqrt{\left(\frac{a_1\bar{\sigma}_r}{R_b}\right)^2 + \left(\frac{2a_2\bar{\tau}_{rz}}{T_b}\right)^2} - \frac{a_1\bar{\sigma}_r}{R_b}\right],$$

где

$$a_1 = \sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi \times \frac{\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{26} - \bar{Q}_{22}\bar{Q}_{16}}{\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{12}^2};$$

$$a_2 = -\sin\varphi\cos\varphi + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \times \frac{\bar{Q}_{22}\bar{Q}_{16} - \bar{Q}_{12}\bar{Q}_{26}}{\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{22} - \bar{Q}_{12}^2}.$$

Эти зависимости имеют большое практическое значение, так как они дают возможность оценить степень использования прочности связующего при заданном R_b и T_b и определить прочности сцепления R_b и T_b, необходимые для полного использования прочности связующего.

Формулы (5.25)—(5.30) неприменимы для органопластиков. При поперечном растяжении органопластиков сначала разрушаются волокна. Эта особенность органопластиков отличает их от других видов армированных пластиков, у которых первыми разрушаются связующее или сцепление между волокнами и связующим.

Исходное допущение для определения R_2^+ заключается в следующем: разрушение волокон при поперечном растяжении связано с разрушением сцепления между фибриллами. Для приближенной оценки прочности органопластиков используют критерий (5.27), который в конкретном случае принимает вид [20]

$$\frac{R_2^+\bar{\sigma}_r}{R_{\text{в}r}^+} = 1, \qquad (5.31)$$

где $R_{\text{в}r}^+$ — прочность волокон на поперечное растяжение.

Из критерия (5.31) следует

$$R_2^+ = \frac{R_{\text{в}r}^+}{\bar{\sigma}_r}. \qquad (5.32)$$

Коэффициент концентрации напряжений $\bar{\sigma}_r$ определяется по кривым, которые приведены на рис. 5.7. Для органопластиков при $E_{\text{в}r}/E_{\text{с}} \approx 1{,}0$ этот коэффициент практически не зависит от объемного содержания волокон v (при его изменении в пределах от 0,4 до 0,7) и является величиной постоянной $\bar{\sigma}_r = 1{,}0$. В таком случае формула (5.32) для органопластиков принимает вид

$$R_2^+ \approx R_{\text{в}r}^+. \qquad (5.33)$$

Из (5.33) следует, что R_2^+ для органопластиков практически не зависит от объемного содержания волокон v. Формула (5.33) может быть также использована для косвенного определения $R_{\text{в}r}^+$.

5.1.7. Прочность при продольном сдвиге. Геометрия внутреннего строения армированных пластиков при продольном сдвиге также является причиной возникновения неоднородного напряженного состояния их структурных элементов. С увеличением соотношения модулей сдвига волокон и связующего и объемного содержания волокон концентрация напряжений возрастает.

В отличие от поперечного растяжения момент достижения сдвиговыми напряжениями в критических зонах армированного пластика значения прочности связующего не всегда является началом лавинообразного разрушения всего материала. В этом случае в точках максимальной концентрации напряжений начинается условное течение связующего и происходит перераспределение поля напряжений [17]. Установлено, что в результате условного течения связующего прочность продольного сдвига однонаправленно армированного стеклопластика в пределах разброса можно считать равной прочности сдвига связующего [17].

Аналогичные результаты были получены при исследовании прочностных свойств различных видов армированных пластиков при сдвиге [23, 25, 28]. На основе этих результатов можно заключить, что прочность продольного сдвига однонаправленно армированных пластиков практически не зависит от объемного содержания волокон, а зависит лишь от прочности связующего на сдвиг $T_{\text{с}}$. Следовательно, концентрация напряжений в пластике при сдвиге как бы «притупляется» и не влияет на его прочностные свойства. В таком случае можно принимать, что $\bar{\tau}_{rz} = 1$.

Таким образом, когда прочность связующего меньше прочности сцепления, в первом приближении можно принять, что при продольном сдвиге

$$T_{12} = T_{\text{с}}. \qquad (5.34)$$

Для ряда армированных пластиков разрушение материала начинается с разрушения сцепления между волокнами и связующим. Прочность продольного сдвига таких материалов существенно зависит от концентрации напряжений и определяется по следующей формуле [17]:

$$T_{12} = \frac{T_b}{\bar{\tau}_{rz}}. \qquad (5.35)$$

Если экспериментально установлена прочность продольного сдвига T_2 и известна структура материала, т. е. $\bar{\tau}_{rz}$, тогда формулу (5.35) можно использовать для косвенного определения прочности сцепления на сдвиг:

$$T_b = T_{12}\bar{\tau}_{rz}. \qquad (5.36)$$

В органопластиках прочность сцепления между волокнами и связующим обычно больше прочности связующего; особенность их разрушения состоит в том, что первыми разрушаются органические волокна на продольный сдвиг. В таком случае

$$T_{12} = \frac{T_{\text{в}\,rz}}{\bar{\tau}_{rz}}, \qquad (5.37)$$

где $T_{\text{в}\,rz}$ — прочность органических волокон на продольный сдвиг.

Из рис. 5.9 следует, что при $\frac{G_{\text{в}\,rz}}{G_{\text{c}}} \approx$ $\approx 1{,}7$ коэффициент концентрации $\bar{\tau}_{rz} \approx 1{,}2$ и практически не зависит от объемного содержания волокон v. В таком случае формула (5.37) для определения прочности однонаправленно армированного органопластика на продольный сдвиг имеет вид

$$T_{12} \approx 0{,}8T_{\text{в}\,rz}. \qquad (5.38)$$

Формула (5.38) может быть также использована для косвенного определения прочности органических волокон на продольный сдвиг по экспериментально установленной прочности продольного сдвига однонаправленно армированного органопластика T_{12}. В этом случае $T_{\text{в}\,rz} = 1{,}2T_{12}$.

5.1.8. Прочность при одноосном сжатии. При сжатии в направлении армирования первыми обычно разрушаются волокна. В таком случае для определения прочности однонаправленно армированного пластика R^- можно использовать «закон смеси»:

$$R_1^- = \left[E_{\text{в}z}v + E_{\text{c}}(1-v)\right]\varepsilon_{\text{в}R}^-. \qquad (5.39)$$

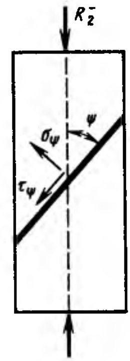


Рис. 5.11. Расчетная схема определения прочности полимерного связующего при сжатии

В этой зависимости предельная деформация волокон на сжатие $\varepsilon_{\text{в}R}^-$ равняется предельной деформации армированного пластика.

В первом приближении можно считать, что в плоскости, перпендикулярной направлению армирования, все направления равнопрочны, т. е. материал является трансверсально изотропным. В плоскости разрушения действуют напряжения σ_ψ и τ_ψ (рис. 5.11).

Для определения прочности однонаправленно армированного пластика на поперечное сжатие R_2^- используют теорию прочности Мора. Уравнение огибающей главных кругов Мора при нагружении в плоскости трансверсальной изотропии имеет следующий вид:

$$\tau_\psi = T_2 + s\sigma_\psi, \qquad (5.40)$$

где T_2 — прочность сдвига в плоскости трансверсальной изотропии; s — коэффициент влияния нормальных напряжений, действующих перпендикулярно плоскости разрушения.

Подставив в уравнение (5.40) выражения для τ_ψ и σ_ψ, получим

$$R_2^- = \frac{2T_2}{\sin 2\psi - s(1-\cos 2\psi)}. \qquad (5.41)$$

Минимальное значение прочности R_2^- соответствует достижению максимума функции

$$\frac{T_2}{R_2^-} = \frac{1}{2}\left[\sin 2\psi - s(1-\cos 2\psi)\right],$$

т. е. при $\operatorname{tg} 2\psi = \frac{1}{s}$. Отсюда $\psi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{s}$, или $s = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\psi}$.

Подставив выражение для s в (5.41), получим

$$R_2^- = \frac{2T_2 \sin 2\psi}{1 - \cos 2\psi} = 2T_2 \operatorname{ctg} \psi, \quad (5.42)$$

где

$$T_2 = G_{23}\gamma_{R2} = 2G_{23}\varepsilon_2^+.$$

Модуль сдвига

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{23})}.$$

Подставив в (5.42) выражения для T_2 и G_{23}, получим

$$R_2^- = \frac{2E_2\varepsilon_2^+}{1 + \nu_{23}} \operatorname{ctg} \psi = \frac{2R_2^+}{1 + \nu_{23}} \operatorname{ctg} \psi. \quad (5.43)$$

В случае разрушения связующего R_2^+ определяется по формуле (5.25), а в случае нарушения сцепления между волокнами и связующим — по (5.29).

Угол наклона плоскости разрушения ψ определяется экспериментально. Для армированных пластиков в первом приближении можно принять $\psi \approx 30° = \mathrm{const}$. Тогда формула (5.43) принимает вид

$$R_2^- = 3{,}5 \frac{R_2^+}{1 + \nu_{23}}. \quad (5.44)$$

Установлено, что разрушение однонаправленно армированного пластика от воздействия напряжений σ_ψ и τ_ψ носит сдвиговой характер.

Для органопластиков формула (5.44) дает сильно заниженные результаты по сравнению с экспериментом. Это объясняется тем, что ввиду специфики деформирования органических волокон при поперечном сжатии [10] не выполняется равенство $\gamma_{R2} = 2\varepsilon_2^+$. С учетом опытных данных установлено, что хорошее совпадение с экспериментом дает допущение $\gamma_{R2} = 4\varepsilon_2^+$. Экспериментально установлено, что для органопластиков $\psi \approx 35°$. В таком случае формула (5.43) для органопластиков при $\nu_{23} = 0{,}3$ принимает вид

$$R_2^- = \frac{\operatorname{ctg} \psi E_2}{1 + \nu_{23}} \gamma_{R2} = 4{,}4E_2\varepsilon_2^+ = 4{,}4R_2^+. \quad (5.45)$$

5.1.9. Критерии прочности однонаправленно армированного слоя при комбинированном нагружении. Структурные элементы однонаправленно армированного слоя находятся в неоднородном напряженном состоянии. Максимальные напряжения создаются в точках, расположенных на поверхностях регулярно расположенных волокон. Принимается, что критическое напряженное состояние достигается одновременно во всех наиболее невыгодно расположенных точках, совокупность которых образует сечение, по которому происходит разрушение. Таким образом, в конкретном случае вполне оправданным является допущение, что разрушение в отдельной точке соответствует разрушению материала в целом. При комбинированном нагружении, когда на однонаправленно армированный композит одновременно действуют нормальные напряжения σ_2 и напряжения продольного сдвига τ_{12}, прочность обычно определяется прочностью связующего или прочностью сцепления.

Рассмотрим случай, когда прочность связующего меньше прочности сцепления. В зависимости от величины и знака напряжений σ_2 и τ_{12} возможны следующие три механизма разрушения: разрушение связующего на отрыв, сдвиг и сжатие.

Типичная предельная кривая прочности приведена на рис. 5.12. Участок *1* этой кривой соответствует разрушению связующего на отрыв, участок *2* — разрушению на сдвиг, а участок *3* — разрушению пластика на сжатие.

Для оценки прочности слоя k в случае разрушения связующего на отрыв используем следующий критерий [16]:

$$\left(\frac{\sigma_{2k}}{R_c^+} \bar{\sigma}_r\right)^2 (1 - \nu_c^2) + \left(\frac{\tau_{12k}}{T_c}\right)^2 = 1 \quad (5.46)$$

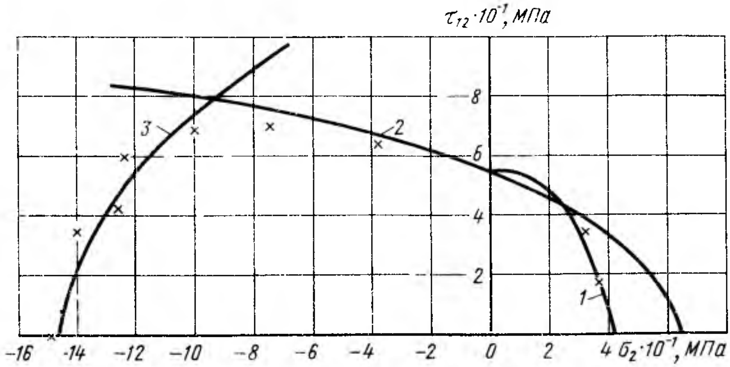


Рис. 5.12. Предельная кривая прочности однонаправленно армированного эпоксидного стеклопластика при комбинированном осевом и сдвиговом нагружении:
участок *1* построен по критерию (5.46); *2* — по (5.47); *3* — по (5.48)

Если разрушение материала при комбинированном нагружении имеет характер, типичный для продольного сдвига, то необходимо использовать критерий типа (5.21). В результате обработки многочисленных опытных данных установлено, что в случае сдвигового разрушения из-за текучести связующего можно принимать $\bar{\sigma}_r = 1$ и тогда критерий для слоя k принимает следующий вид:

$$\sigma_{2k}^2\left(1+\nu_c^2\right)+2\tau_{12k}^2\left(1+\nu_c\right)+ \\ +\sigma_{2k}\left(1+\nu_c\right)\times \\ \times\sqrt{\sigma_{2k}^2\left(1-\nu_c\right)^2+4\tau_{12k}^2}= \\ =2\left(R_c^+\right)^2. \qquad (5.47)$$

Когда отношение сжимающих напряжений σ_{2k} к сдвиговым τ_{12k} превышает определенный предел, разрушение материала носит характер разрушения при поперечном сжатии. Если принять, что однонаправленно армированный пластик является трансверсально изотропным материалом, то для оценки его прочности можно использовать критерий типа (5.22). В конкретном случае имеем

$$\sigma_{2k}^2+2\left(1+\nu_{23}\right)\tau_{12k}^2+ \\ +\sigma_{2k}\sqrt{\sigma_{2k}^2+4\tau_{12k}^2}=2\left(R_2^-\right)^2, \qquad (5.48)$$

где σ_{2k} — абсолютные значения сжимающих напряжений.

Предельные кривые, построенные по критериям (5.46)—(5.48), показаны на рис. 5.12 [25].

В случае нарушения сцепления критерий прочности слоя имеет вид

$$\frac{\sigma_{2k}\bar{\sigma}_r}{R_b}+\left(\frac{\tau_{12k}\bar{\tau}_{rz}}{T_b}\right)^2=1,$$

где R_b и T_b — прочности сцепления на отрыв и на сдвиг.

Основная особенность разрушения органопластиков заключается в том, что от воздействия напряжений σ_{2k} и τ_{12k} первыми разрушаются волокна. В качестве гипотезы принимается положение: разрушение органических волокон связано с разрушением сцепления между фибриллами. В первом приближении на такой случай разрушения можно распространить критерий (5.14); тогда критерий прочности однонаправленно армированного органопластика принимает вид

$$\frac{\sigma_{2k}\bar{\bar{\sigma}}_r}{R_{\text{в}r}^+}+\left(\frac{\tau_{12k}\bar{\bar{\tau}}_{rz}}{T_{\text{в}\,rz}}\right)^2=1.$$

В этом критерии через $\bar{\bar{\sigma}}_r$ и $\bar{\bar{\tau}}_{rz}$ обозначены коэффициенты концентрации напряжений между фибриллами. В настоящее время отсутствует методика их определения. Экспери-

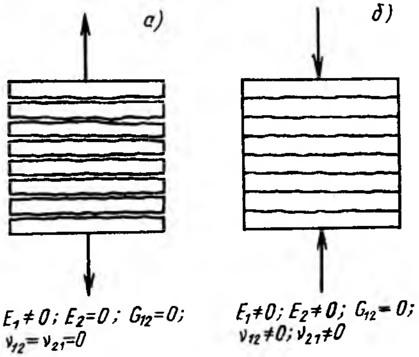


Рис. 5.13. Соотношения упругих характеристик, принимаемые при построении предельных кривых, при поперечном растяжении (*а*) и сжатии (*б*) после потери сплошности слоистого материала

тально установлено, что для практических расчетов можно принимать

$$\bar{\bar{\sigma}}_r \approx \bar{\sigma}_r = 1{,}0 \quad \text{и} \quad \bar{\bar{\tau}}_{rz} \approx \bar{\tau}_{rz} = 1{,}2.$$

Тогда критерий прочности для органопластиков принимает вид

$$\frac{\sigma_{2k}}{R^+_{\text{в}r}} + 1{,}4\left(\frac{\tau_{12k}}{T_{\text{в}\,rz}}\right)^2 = 1. \quad (5.49)$$

В случае разрушения волокон следует пользоваться условием прочности (5.24), на основе которого критерий прочности для слоя k, армированного под углом φ_k, имеет вид: $\varepsilon_{1k} = \varepsilon_{\text{в}R}$ или в развернутом виде

$$\varepsilon_x \cos^2\varphi_k + \varepsilon_y \sin^2\varphi_k + \gamma_{xy}\sin\varphi_k\cos\varphi_k = \varepsilon_{\text{в}R}. \quad (5.50)$$

В случае произвольной структуры слоистого материала средние деформации ε_x, ε_y и γ_{xy} определяются по формулам (5.12)—(5.14).

Если структура слоистого материала симметрична относительно его срединной плоскости, тогда критерий (5.50) принимает вид

$$\begin{aligned}&\sigma_x(\bar{a}_{11}\cos^2\varphi_k + \bar{a}_{12}\sin^2\varphi_k + \\ &+ \bar{a}_{16}\cos\varphi_k\sin\varphi_k) + \\ &+ \sigma_y(\bar{a}_{12}\cos^2\varphi_k + \bar{a}_{22}\sin^2\varphi_k + \\ &+ \bar{a}_{26}\cos\varphi_k\sin\varphi_k) + \\ &+ \tau_{xy}(\bar{a}_{16}\cos^2\varphi_k + \bar{a}_{26}\sin^2\varphi_k + \\ &+ \bar{a}_{66}\cos\varphi_k\sin\varphi_k) = \varepsilon_{\text{в}R}, \quad (5.51)\end{aligned}$$

где $\bar{a}_{ij} = a_{ij}h$; h — толщина слоистого материала.

Составляющие матрицы податливости a_{ij} определяются по формулам (5.9).

Критерии (5.50) и (5.51) определяют момент разрушения волокон в слое k. Этот критерий повторно должен применяться ко всем слоям, имеющим различную ориентацию волокон. В результате такого повторного расчета можно установить, который из слоев разрушается первым, т. е. критический угол φ_k. Зная критическое значение угла φ_k и строение слоистого материала, при помощи критериев (5.50) или (5.51) можно определить прочность слоистого материала в целом. Это объясняется тем, что после разрушения наиболее нагруженных волокон в результате скачкообразного перераспределения напряжений обычно начинается лавинное разрушение всего материала. При определении параметров a_{ij} необходимо учитывать влияние нарушения сплошности материала, т. е. предыдущие ступени разрушения материала.

5.1.10. Алгоритм построения предельных кривых. Для построения предельных кривых нарушения сплошности и прочности расчетные операции выполняются в следующем порядке.

1. Устанавливают технические упругие характеристики связующего и волокон, их относительное объемное содержание v и структуру материала.

2. С помощью зависимостей, которые приведены в п. 5.1.1, в соответствии с заданной структурой определяют технические упругие характеристики однонаправленно армированного пластика.

3. По зависимостям п. 5.1.1 находят составляющие матрицы упругости Q_{ij} и $\bar{Q}_{ij}$.

4. По зависимостям (5.5)—(5.7) определяют составляющие матриц жесткостей A_{ij}, B_{ij} и D_{ij}.

5. В результате обращения матрицы жесткостей находят составляющие матрицы податливостей A'_{ij}, B'_{ij} и D'_{ij}, входящие в закон деформирования (5.11).

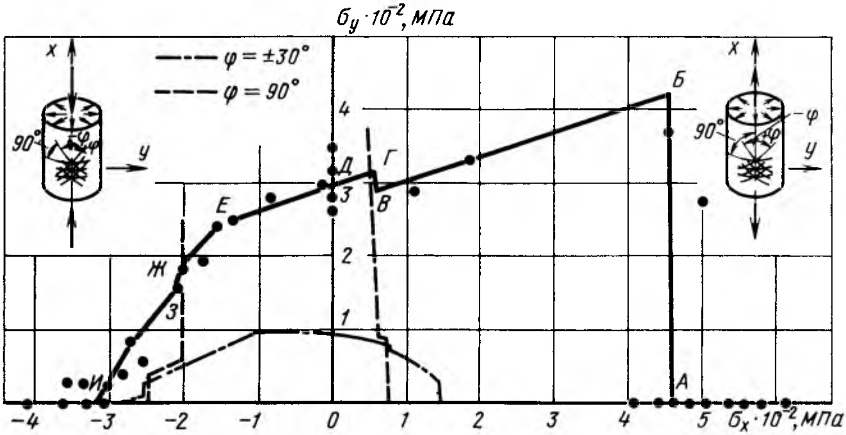


Рис. 5.14. Прочность трехнаправленно (±30°/90°) армированно стеклопластиковой оболочки при двухосном нагружении [26]:

А—Б — разрыв волокон, ориентированных под углом ± 30°, после разрушения связующего во всех слоях; *Б—В* — одновременное разрушение волокон и связующего в слоях при φ = 90° после потери сплошности косоугольно (± 30°) армированных слоев; *Г—Е* — разрыв волокон, ориентированных под углом 90° после разрушения связующего в косоугольно армированных слоях; *Е—Ж* — разрушение на поперечное сжатие косоугольно армированных слоев после их предварительного разрушения на сдвиг; *Ж—З* — разрушение на поперечное сжатие всех слоев после разрушения на сдвиг косоугольно армированных слоев; *З—И* — разрушение на поперечное сжатие косоугольно армированных слоев после потери сплошности всех слоев

6. По формулам (5.16)—(5.18) определяют средние напряжения в направлениях упругой симметрии однонаправленно армированного слоя σ_{1k}, σ_{2k} и τ_{12k}. Для этого в эти формулы необходимо подставить значения средних напряжений σ_{xk}, σ_{yk} и τ_{xyk}, определяемых по зависимостям (5.15).

7. По кривым, приведенным на рис. 5.7 и 5.9, находят коэффициенты концентрации напряжений $\bar{\sigma}_r$ и $\bar{\tau}_{rz}$.

8. Устанавливают значения предельных деформаций волокон на растяжение $\varepsilon^{+}_{вR}$ и на сжатие $\varepsilon^{-}_{вR}$; прочности связующего на растяжение R^{+}_{c} и на сдвиг T_c и прочности сцепления между волокнами и связующим на отрыв R_b и на сдвиг T_b. В случае органопластиков вместо R^{+}_{c}, T^{+}_{c}, R_b и T_b устанавливают прочности волокон на поперечное растяжение $R^{+}_{вr}$ и на продольный сдвиг $T_{вrz}$.

9. По формуле (5.44) или (5.45) определяют прочность на поперечное сжатие.

10. Предельные кривые нарушения сплошности строятся по критериям (5.46)—(5.49). Для этого в этих критериях необходимо поставить значение средних напряжений σ_{2k} и τ_{12k}, определяемых по формулам (5.16)—(5.18). Критерии (5.46)—(5.49) должны применяться к каждому из различно ориентированных однонаправленно армированных слоев. Фактический предел нарушения сплошности материала будет соответствовать наименьшему значению, определенному по вышеуказанным критериям. Таким образом определяется первая ступень разрушения материала.

11. В случае многонаправленно армированного слоистого материала процесс разрушения носит многоступенчатый характер. Для построения предельных кривых второй ступени нарушения сплошности повторяют процедуру, изложенную в п. 10, при условии, что для разрушенного слоя принимают значения упругих характеристик, приведенные на рис. 5.13. Аналогично строят предельные кривые

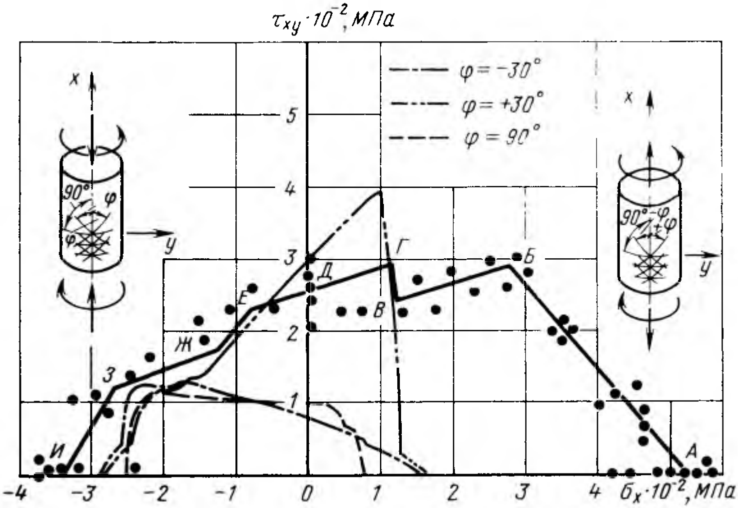


Рис. 5.15. Прочность трехнаправленно (± 30°/90°) армированной стеклопластиковой оболочки при осевом нагружении и кручении [26]:

А—В — разрыв волокон, ориентированных под углом +30°, после разрушения связующего во всех слоях; *Б—В* — разрушение на сжатие волокон, ориентированных под углом —30°, после разрушения связующего во всех слоях; *В—Г* — одновременное разрушение на сжатие волокон под углом —30° и на сдвиг связующего в слоях под углом +30° после разрушения связующего в остальных слоях; *Г—Е* — разрушение на сжатие волокон под углом +30° после потери сплошности слоев под углом —30 и 90°; *Е—Ж* — одновременное разрушение на сжатие волокон под углом —30° и связующего на сдвиг в слоях под углом +30° после разрушения связующего в остальных слоях; *Ж—З* — разрушение волокон на сжатие под углом —30° после потери сплошности всех слоев; *З—И* — разрушение на сжатие слоев под углом +30° после потери сплошности остальных слоев

для последующих ступеней нарушения сплошности.

12. Так как в случае многонаправленно армированного пластика последняя ступень разрушения обычно связана с разрушением волокон, то предельную кривую прочности строят по критерию (5.50) или (5.51) с учетом предыдущих ступеней разрушения.

Характерные предельные кривые, построенные по вышеизложенному алгоритму, приведены на рис. 5.14 и 5.15 [13, 14, 15, 24, 26, 29]. Каждому участку предельных кривых, приведенных на рис. 5.14 и 5.15, соответствует свой механизм разрушения. Так, например, в случае кривой, показанной на рис. 5.14, на участке *А—Б* происходит разрыв волокон, ориентированных под углом +30° после нарушения сплошности (штриховые кривые) всех слоев; на участке *Б—В* — разрушение на сжатие волокон, ориентированных под углом —30° после предварительной потери сплошности всех слоев. Таким образом, предельные кривые прочности (сплошности) дают полную информацию о ступенчатом характере разрушения композита.

5.2. ПЛАСТИКИ, АРМИРОВАННЫЕ ТКАНЯМИ

5.2.1. Расчетная модель пластика. Пластики, армированные тканями, представляют собой очень сложный класс композитов. Это объясняется тем, что из-за переплетения нитей жесткость и напряженное состояние тканевых пластиков в пределах повторяющегося элемента структуры непрерывно меняются от сечения к сечению. Также в пределах любого сечения распределение напряжений имеет весьма сложный неоднородный характер. Ниже сделана попытка приближенно определить напряжения в структурных элементах тканевого пластика с учетом переплетения нитей и ступенчатого характера разрушения материала. Для исследования напряженно-деформированного состояния тканевого пластика используется расчетная модель его структуры, которая показана на рис. 5.16. На этой схеме направления основы, утка и нормали к плоскости слоя обозначены соответственно через о, у и z. В основе предложенной расчетной модели тканевого пластика (для различных видов переплетений) лежат следующие допущения.

1. Структура материала регулярна, и все его компоненты деформируются линейно.

2. Искривления нитей смежных слоев по фазе совпадают.

3. Изменение искривления нитей в процессе нагружения материала пренебрежимо мало.

4. Искривленная ось волокон заменяется ломаной, характерные параметры которой ($T_о$, $T_у$, $c_о$, $c_у$, $\beta_о$ и $\beta_у$) показаны на рис. 5.16. Все вышеприведенные параметры определяются по микрофотографиям структуры материала.

5. Отдельный слой представляется как состоящий из двух условных монослоев основы и утка, которые обозначаются соответственно через о и у. Искривление нитей учитывается чередованием в условных монослоях наклонно и продольно армированных полос, которые на рис. 5.16 для монослоя основы обозначены через оβ и о1, а для монослоя утка — через уβ и у1. Относительные ширины наклонно армированных полос определяются по зависимостям $n_о = 2c_о/T_о$; $n_у = 2c_у/T_у$.

6. Элементарные волокна размещены равномерно по объему условных монослоев, которые, следовательно, имеют во всех точках одинаковое относительное объемное содержание волокон, равное среднему для всего материала, и относительные толщины:

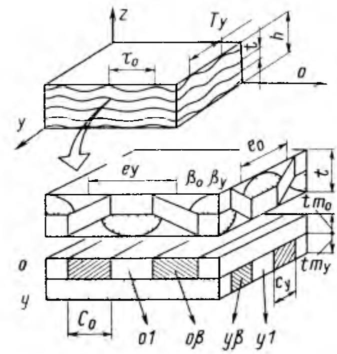


Рис. 5.16. Модель структуры тканевого пластика

$$m_о = t_о/t = 1/(1 + k_у f_у p_у / k_о f_о p_о);$$

$$m_у = 1 - m_о,$$

где $k_о$ и $k_у$ — число элементарных волокон в нитях основы и утка (зависит от номера нитей); $f_о$ и $f_у$ — средние площади поперечных сечений элементарных волокон; $p_о$ и $p_у$ — число нитей на единицу длины.

7. При нагружении материала в плоскости ткани в условном монослое основы возникают средние деформации $\varepsilon_о^о$, $\varepsilon_у^о$ и $\gamma_{оу}^о$ (или в матричной форме $\{\varepsilon^о\}$), равные средним деформациям монослоя утка $\varepsilon_о^у$, $\varepsilon_у^у$ и $\gamma_{оу}^у$ (или $\{\varepsilon^у\}$) и средним деформациям всего слоя $\varepsilon_о$, $\varepsilon_у$ и $\gamma_{оу}$ (или $\{\varepsilon\}$):

$$\{\varepsilon^о\} = \{\varepsilon^у\} = \{\varepsilon\}.$$

Здесь и далее нижние индексы обозначают направления деформаций или напряжений, а верхние — структурный элемент.

8. Средние напряжения в отдельном слое $\sigma_о$, $\sigma_у$ и $\tau_{оу}$ (или $\{\sigma\}$) складываются из средних напряжений в условных монослоях по закону смеси:

$$\{\sigma\} = m_о \{\sigma^о\} + m_у \{\sigma^у\}.$$

9. Средние нормальные деформации условных монослоев в направлениях армирования $\varepsilon_о^о$ и $\varepsilon_у^у$ складываются из деформаций наклонно и продольно

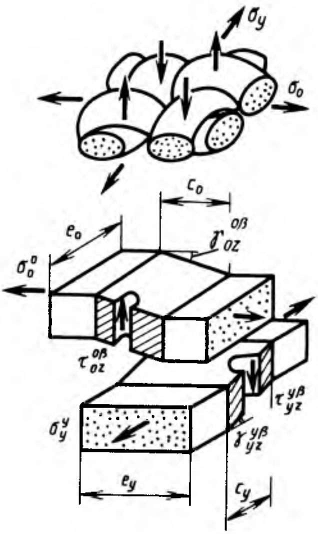


Рис. 5.17. Схема взаимодействия переплетенных нитей

армированных полос по закону смеси:

$$\varepsilon_o^o = n_o \varepsilon_o^{o\beta} + \left(1 - n_o\right) \varepsilon_o^{ol};$$

$$\varepsilon_y^y = n_y \varepsilon_y^{y\beta} + \left(1 - n_y\right) \varepsilon_y^{yl}.$$

10. Остальные деформации и все напряжения в плоскости ткани по площади условных монослоев распределены равномерно.

11. Напряженно - деформированное состояние условных монослоев основы и утка по толщине однородное, так как эффект коробления условного пакета из несимметричных слоев очень быстро затухает с увеличением числа слоев, а также с учетом того, что отдельный слой тканевого пластика работает в составе пакета [6].

12. Напряженно - деформированное состояние условных наклонно армированных полос зависит от взаимодействия переплетных нитей в местах их перекрещивания (рис. 5.17). Взаимодействие нитей учитывается с помощью следующих условий для наклонно армированных полос:

условие неразрывности деформаций

$$\gamma_{oz}^{o\beta} c_o = -\gamma_{yz}^{y\beta} c_y;$$

условие равновесия

$$\tau_{oz}^{o\beta} e_o m_o = \tau_{yz}^{y\beta} e_y m_y,$$

где e_o и e_y — ширины полосок условных монослоев основы и утка, армированных волокнами только одной нити ($e_o = 1/p_o$; $e_y = 1/p_y$).

13. Нормальными напряжениями в направлении оси z пренебрегают.

14. Все одинаковые элементы структуры тканевого пластика разрушаются одновременно.

5.2.2. Упругие характеристики пластика. Слоистый тканепластик, показанный на рис. 5.16, является ортотропным материалом. Его технические упругие характеристики определяются по следующим формулам, полученным на основе принятой расчетной модели:

$$E_o = \frac{m_o}{a_o} + m_y E_2^y;$$

$$E_y = m_o E_2^o + \frac{m_y}{a_y};$$

$$\nu_{oy} = \left(m_o E_2^o b_o / a_o + m_y E_2^y b_y / a_y + \right.$$
$$\left. + m_y d_o / a_o a_y\right) / \left(m_o E_2^o \omega + m_y / a_y\right);$$

$$\nu_{yo} = \left(m_o E_2^0 b_o / a_o + m_y E_2^y b_y / a_y + \right.$$
$$\left. + m_o d_y / a_o a_y\right) / m_y E_2^y \omega + m_o / a_o); \tag{5.52}$$

$$G_{oy} = m_o G_{12}^o + m_y G_{12}^y,$$

где

$$\omega = 1 - d_o d_y / a_o a_y;$$

$$a_i = n_i \left[S_{11}^{i\beta} - \left(S_{15}^{i\beta}\right)^2 c_i / G m_i e_i\right] +$$
$$+ \left(1 - n_i\right) / E_1^i;$$

$$b_i = n_i \left[S_{12}^{i\beta} - S_{15}^{i\beta} S_{25}^{i\beta} c_i / G m_i e_i\right] -$$
$$- \left(1 - n_i\right) \nu_{12}^i / E_1^i;$$

$$d_i = -\Omega T_i / m_j e_j;$$

$$G = S_{55}^{o\beta} c_o / m_o e_o + S_{55}^{o\beta} c_y / m_y e_y;$$

$$\Omega = n_o n_y S_{15}^{o\beta} S_{15}^{y\beta} / 2G;$$

$$S_{11}^{i\beta}=\frac{\cos^4\beta_i}{E_1^i}+\frac{\sin^4\beta_i}{E_3^i}+\left(\frac{1}{G_{23}^i}-\frac{2\nu_{23}^i}{E_1^i}\right)\cos^2\beta_i\sin^2\beta_i;$$

$$S_{55}^{i\beta}=\frac{1}{G_{23}^i}+4\left(\frac{1+2\nu_{13}^i}{E_1^i}+\frac{1}{E_3^i}-\frac{1}{G_{23}^i}\right)\times\cos^2\beta_i\sin^2\beta_i;$$

$$S_{12}^{i\beta}=-\frac{\nu_{12}^i}{E_1^i}\cos^4\beta_i-\frac{\nu_{32}^i}{E_3^i}\sin^4\beta_i;$$

$$S_{15}^{i\beta}=\left[\left(\frac{1}{G_{23}^i}-\frac{2\nu_{13}^i}{E_1^i}\right)\times(\cos^2\beta_i-\sin^2\beta_i)-2\left(\frac{\cos^2\beta_i}{E_1^i}-\frac{\sin^2\beta_i}{E_3^i}\right)\right]\cos\beta_i\sin\beta_i;$$

$$S_{25}^{i\beta}=2\left(\frac{\nu_{12}^i}{E_1^i}-\frac{\nu_{32}^i}{E_3^i}\right)\cos\beta_i\sin\beta_i;$$

$$i,j=\text{о, у};\quad i\neq j;\quad \beta>0.$$

Технические упругие характеристики E_1^i, $E_2^i=E_3^i$, $\nu_{12}^i=\nu_{13}^i$, ν_{23}^i, $G_{12}^i=G_{13}^i$ (i = о, у) определяются по зависимостям, которые приведены в разд. 5.1.1. Так как в зависимостях (5.52) $m_\text{у}d_\text{о}=m_\text{о}d_\text{у}$, то для тканевых пластиков до потери сплошности характерна симметрия упругих свойств, т. е. $\nu_\text{оу}E_\text{у}=\nu_\text{уо}E_\text{о}$.

Тканевые пластики весьма неустойчивы к потере сплошности. Даже небольшие растягивающие напряжения, действующие поперечно направлению армирования, могут вызвать растрескивание условных монослоев, что изменяет упругие характеристики материала в целом. Принимается, что при наличии трещин поврежденные условные монослои не воспринимают касательных и растягивающих напряжений, действующих, соответственно, параллельно и перпендикулярно плоскости трещин. В таком случае при определении упругих характеристик тканевого пластика по зависимостям (5.52) для условного монослоя с трещинами следует принимать $E_2^+=\nu_{12}^+=\nu_{21}^+=\nu_{23}^+=G_{12}=0$ (знак «+» означает растяжение). При разгрузке и повторном нагружении на сжатие эти трещины практически не влияют на восприятие монослоем сжимающих напряжений. Таким образом, после потери сплошности пластик обладает бимодульными свойствами.

Растрескиванием и взаимодействием переплетенных нитей объясняется несимметричность упругих свойств (т. е. неравенство $\nu_\text{оу}E_\text{у}\neq\nu_\text{уо}E_\text{о}$) для тканевых пластиков [6]. При растрескивании обоих монослоев тканевого пластика его модуль сдвига $G_\text{оу}$ стремится к нулю.

5.2.3. Прочность пластика при одноосном растяжении. Прочность тканевых пластиков зависит от прочности нитей, пропитанных связующим, которые рассматриваются как однонаправленно армированные структурные элементы. Поэтому к пропитанным нитям применяются структурные критерии прочности. Для прогнозирования прочности тканевых пластиков, например при растяжении, необходимо определить напряженное состояние пропитанных нитей на участках с ориентацией волокон параллельно плоскости ткани и под углом к ней. При этом используется модель структуры материала, показанная на рис. 5.16. Согласно этой модели пропитанные нити условно представляются как монослои основы и утка, состоящие из продольно и наклонно армированных полос. В наиболее невыгодном напряженном состоянии находятся наклонно армированные полосы, в которых кроме нормальных напряжений, равных средним нормальным напряжениям по всему монослою $\left(\sigma_\text{о}^{\text{о}\beta}=\sigma_\text{о}^\text{о};\ \sigma_\text{у}^{\text{о}\beta}=\sigma_\text{у}^\text{о};\ \sigma_\text{у}^{\text{у}\beta}=\sigma_\text{у}^\text{у};\ \sigma_\text{о}^{\text{у}\beta}=\sigma_\text{о}^\text{у}\right)$, из-за взаимодействия переплетенных нитей (см. рис. 5.17) возникают и касательные напряжения $\tau_{\text{о}z}^{\text{о}\beta}$ и $\tau_{\text{у}z}^{\text{у}\beta}$.

Рассмотрим случай, когда нагрузка приложена в направлении основы. Первым разрушается монослой утка.

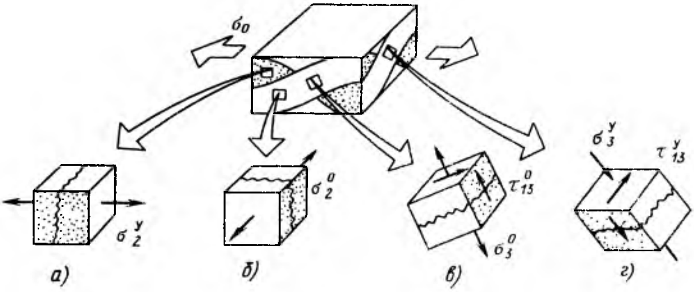


Рис. 5.18. Схемы потери сплошности первого (*а*), второго (*б*) и третьего (*в*) вида при одноосном растяжении и сжатии (*г*) тканевого пластика

как показано на рис. 5.18, *а*. Первая ступень разрушения тканевого пластика, определяющая момент потери его сплошности первого вида, вызывается напряжением σ_0^y, когда оно достигает прочности на поперечное растяжение R_{2y}^+, пропитанной связующим нити утка. При этом в первом приближении можно пренебрегать влиянием напряжений σ_y^y и $\tau_{yz}^{y\beta}$. Прочность R_{2y}^+ определяется по формулам (5.26), (5.28) или (5.33). Обозначив напряжение σ_0 в момент растрескивания монослоя утка через σ_0^+ при условии, что $\sigma_0^y = R_{2y}^+$, получим

$$\sigma_0^+ = R_{2y}^+/g_{12}^y, \qquad (5.53)$$

где

$$g_{12}^y = \left(1 + \nu_{oy} b_y/\omega a_y\right) E_2^y/E_o.$$

Коэффициент концентрации напряжений $\bar{\sigma}_r$ в зависимостях (5.26), (5.28) или (5.33) относится к однонаправленно армированной среде внутри нити, где объемное содержание волокон всегда выше, чем в среднем по слою. В первом приближении можно принять, что объемное содержание волокон в нити — величина постоянная и равна 0,7. Тогда получим (см. рис. 5.7), что для стеклопластика $\bar{\sigma}_r = 2{,}0$; для органопластика $\bar{\sigma}_r = 1{,}1$.

При дальнейшем увеличении нагрузки возможны два случая разрушения [5]: 1) растрескивание монослоя основы из-за воздействия поперечных напряжений, вызванных эффектом Пуассона в плоскости о—у (рис. 5.18, *б*); 2) разрушение монослоев основы и утка на наклонно армированных полосах (рис. 5.18, *в*). Первый случай, когда растрескивается монослой, армированный в направлении растяжения, называется потерей сплошности второго вида. Обозначив напряжение σ_o в момент растрескивания монослоя основы через $\sigma_o^{+(+)}$, получим условие потери сплошности второго вида:

$$\sigma_o^{+(+)} = R_{2o}^+/g_{12}^o, \qquad (5.54)$$

где

$$g_{12}^o = -\left(\nu_{oy} + b_o/\omega a_o\right) E_2^o/E_o.$$

Учет ранее наступившей потери сплошности первого вида выполняется путем подстановки в зависимость (5.54) значений $E_2^y = \nu_{12}^y = \nu_{21}^y = G_{12}^y = 0$.

Третьим видом потери сплошности называется второй случай разрушения, когда монослой основы и утка на наклонно армированных полосах разрушается от сдвига по наклонным плоскостям (см. рис. 5.18, *в*, *г*). Из-за взаимодействия переплетенных нитей основы и утка (см. рис. 5.17) разрушение монослоев утка вызывает и разрушение монослоев основы (на наклонных полосах), и наоборот. Прочность монослоев главным образом определяется комбинированным воздействием напряжений σ_3^o, τ_{13}^o и σ_3^y, τ_{13}^y (см. рис. 5.18, *в*, *г*). Обозначив приложенное напряжение σ_o, при котором происходит разрушение монослоя на наклонно армированных полосах, через $\sigma_о^{+++}$, на основе критериев прочности (см. разд. 5.1.9) получим формулы для определения момента потери сплошности третьего вида в случае разрушения монослоев основы или утка:

при разрушении связующего на сдвиг (при $\nu_с = 0{,}35$)

$$\sigma_о^{+++} = \sqrt{2} R_с^{+} \times$$
$$\times \left(u_i^2 + 2{,}7 v_i^2 + u_i \sqrt{u_i^2 + 4 v_i^2} \right)^{-1/2}; \tag{5.55}$$

при поперечном разрушении волокон

$$\sigma_о^{+++} =$$
$$= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}_r u_i}{R_{вr}^{+}} \right)^2 + 4 \left(\frac{\bar{\tau}_{rz} v_i}{T_{в\,rz}} \right)^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\bar{\sigma}_r u_i}{R_{вr}^{+}} \right) \frac{T_{в\,rz}}{\bar{\tau}_{rz} v_i}; \tag{5.56}$$

при разрушении сцепления

$$\sigma_о^{+++} =$$
$$= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\left(\frac{\bar{\sigma}_r u_i}{R_b} \right)^2 + 4 \left(\frac{\bar{\tau}_{rz} v_i}{T_b} \right)^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\bar{\sigma}_r u_i}{R_b} \right] \frac{T_b}{\bar{\tau}_{rz} v_i}, \tag{5.57}$$

где

$$u_i = g_{11}^i \sin^2 \beta_i - 2 g_{15}^i \sin \beta \cos \beta;$$
$$v_i = g_{11}^i \sin \beta_i \cos \beta_i -$$
$$- g_{15}^i \left(\cos^2 \beta_i - \sin^2 \beta_i \right), \quad i = о,\ у;$$
$$g_{11}^о =$$
$$= \left[1 + \nu_{оу} \left(b_о E_2^о + d_у / a_у \right) \right] / \omega a_о E_о;$$
$$g_{11}^у =$$
$$= - \left(\nu_{оу} + b_у E_2^у + d_о / a_о \right) / \omega a_у E_о;$$
$$g_{15}^о = \left(c_о g_{11}^о S_{15}^{о\beta} + c_у g_{11}^у S_{15}^{у\beta} \right) / G e_о m_о;$$
$$g_{15}^у = g_{15}^о e_о m_о / e_у m_у.$$

Учет потери сплошности первого и второго видов производится путем приравнивания нулю упругих характеристик E_2, ν_{12}, ν_{21}, G_{12} для монослоя утка и основы. Фактически потеря сплошности третьего вида произойдет при наименьшем значении $\sigma_о^{+++}$ из зависимостей (5.55)—(5.57).

Третий вид потери сплошности характерен только для тканевых пластиков. После его наступления происходит раздробление связующего по всему объему материала, что равносильно его полному разрушению, хотя растягивающая нагрузка тканевым пластиком еще воспринимается до разрыва волокон основы. Обозначив приложенное среднее напряжение $\sigma_о$ в момент разрыва волокон основы через $R_о^{+}$, получим приближенную формулу конечной прочности тканевого пластика с учетом потери сплошности третьего вида:

$$R_о^{+} \approx R_{вz}^{+} m_о v \cos \beta_о. \tag{5.58}$$

Критерий (5.58) позволяет определить $R_о^{+}$ с запасом, так как содержит множитель $\cos \beta_о$. В действительности после потери сплошности происходит частичное выпрямление волокон. Если допустить, что перед разрывом волокна выпрямляются полностью, тогда вместо (5.58) получим

$$R_о^{+} \approx R_{вz}^{+} m_о v. \tag{5.59}$$

Разрыв волокон основы возможен и до потери сплошности третьего вида. Тогда конечная прочность тканевого пластика в первом приближении определяется также по зависимости (5.58).

На рис. 5.19 приведены экспериментальные и теоретические кривые [27].

5.2.4. Диаграмма деформирования пластика. Бимодульность. Предварительная потеря сплошности при растяжении отражается на диаграмме деформирования тканепластиков. До полного разрыва образцов на диаграммах деформирования при растяжении обычно наблюдаются два характерных перелома, соответствующие потерям сплошности первого и третьего вида. При сжатии диаграмма деформирования вплоть до разрушения является линейной.

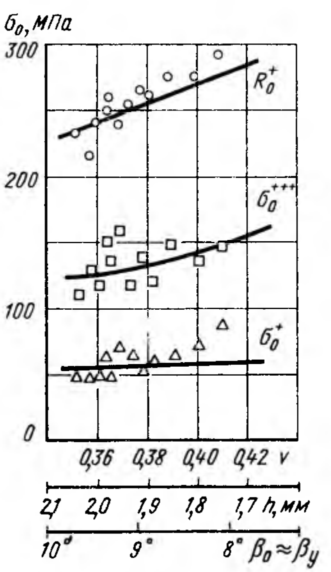


Рис. 5.19. Экспериментальные [27] и теоретические результаты в случае одноосного растяжения:

экспериментальные точки соответствуют двум предварительным ступеням разрушения (△, □) и конечному разрушению (○); теоретические кривые построены по формулам (5.53), (5.55) и (5.59) для тканевого стеклопластика со следующими параметрами: $m_0 = 0{,}52$; $R_c^+ = 60$ МПа; $R_{вr}^+ =$ $= 1{,}35$ ГПа

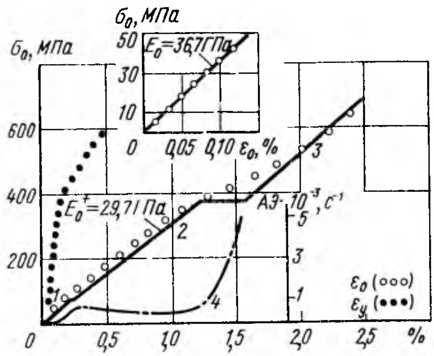


Рис. 5.20. Диаграммы продольного и поперечного деформирования тканевого пластика при одноосном растяжении в направлении основы

С учетом исходных допущений принимается, что при достижении σ_0 величины, соответствующей уровню потери сплошности, все однотипные, находящиеся в наиболее невыгодном напряженном состоянии структурные элементы тканевого пластика разрушаются одновременно, в результате чего происходит скачкообразное изменение упругих свойств материала. Но фактически в реальном тканевом пластике из-за разброса его параметров изменение жесткости в момент потери сплошности носит плавный характер, как это видно по точкам экспериментальной диаграммы деформирования, приведенной на рис. 5.20. Для учета плавного характера потери сплошности необходимо применить стохастическую модель разрушения. Но и в настоящей работе использованная детерминированная модель разрушения позволяет с достаточной для практики точностью учитывать важнейшие особенности процесса разрушения тканевого пластика.

В качестве примера рассмотрим теоретическое построение диаграммы деформирования тканепластика, исходные параметры которого приведены на рис. 5.20. Прямая *1*, рассчитанная по формуле (5.52), характеризует модуль упругости тканепластика при сжатии и начальный модуль при растяжении. Напряжение σ_0^+, соответствующее моменту потери сплошности первого вида, т. е. первому перелому, определено по зависимости (5.53).

После достижения напряжением σ_0 величины σ_0^+ происходит скачкообразный переход на прямую *2*, которая построена с учетом потери сплошности первого вида. Влиянием потери сплошности второго вида при построении диаграммы деформирования обычно можно пренебречь. Напряжение, соответствующее моменту потери сплошности третьего вида σ_0^{+++}, т. е. второму перелому, определено по зависимости (5.55).

Согласно исходным допущениям при σ_0^{+++} происходит мгновенное разрушение на сдвиг нитей основы и утка на всех наклонно армированных участках, в результате чего нити основы выпрямляются. Прямая *3* на диаграмме деформирования рассчитана по следующей формуле:

$$\sigma_0 = E_{\text{в}z} m_0 v (\varepsilon_0 - \Delta\varepsilon_0),$$

где $\Delta\varepsilon_0 = n_0 (\sec \beta_0 - 1)$ — дополнительная деформация от выпрямлений нитей основы. Конечная прочность тканепластика определяется по формуле (5.59).

На рис. 5.20 также приведены результаты измерения продольных и поперечных деформаций тканепластика. Пластик армирован тканью Т-42-36, содержащей в направлении основы органоволокна СВМ, а в направлении утка стекловолокна ВМП, связующее ЭХД-У. Прямые *1—3* построены при следующих исходных данных: волокна СВМ — $E_{\text{в}z} = 110$ ГПа; $E_{\text{в}r} = 3{,}6$ ГПа; $\nu_{\text{в}zr} = \nu_{\text{в}r\theta} = 0{,}16$; $G_{\text{в}\,zr} = 2{,}2$ ГПа; $G_{\text{в}\,r\theta} = 1{,}5$ ГПа; $R^+_{\text{в}z} = 2{,}3$ ГПа; $R^+_{\text{в}r} = 70$ МПа; $T_{\text{в}\,zr} = 45$ МПа; волокна ВМП — $E_{\text{в}} = 75$ ГПа; $\nu_{\text{в}} = 0{,}22$; $G_{\text{в}} = 31$ ГПа; $R^+_{\text{в}z} = 1{,}55$ ГПа; связующее ЭХД-У — $E_{\text{c}} = 3$ ГПа; $\nu_{\text{c}} = 0{,}35$; $G_{\text{c}} = 1{,}11$ ГПа; $R^+_{\text{c}} = 75$ МПа; $T_{\text{c}} = 65$ МПа; ткань Т-42-36 — $v = 0{,}55$; $m_0 = 0{,}53$; $n_0 = 0{,}35$; $n_{\text{у}} = 0{,}40$; $\beta_0 = 12°$; $\beta_{\text{у}} = 11°$. Кривая *4* отражает результаты измерения акустической эмиссии. Увеличение интенсивности акустической эмиссии весьма хорошо совпадает с расчетными данными скачкообразного деформирования.

После однократного нагружения выше уровня потери сплошности первого вида тканепластик становится бимодульным материалом, так как при сжатии имеет модуль упругости E_0, а при растяжении — модуль E_0^+.

Методы экспериментального определения механических свойств армированных пластиков, в том числе тканевых пластиков, детально изложены в [21].

5.3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ВОЛОКНИСТЫХ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТОВ

5.3.1. Особенности деформирования композитов. Проявляемые металлокомпозитами неупругие свойства достаточно сложны, однако практически все особенности деформирования этих материалов при температурно-силовых воздействиях могут быть проиллюстрированы с помощью простейшей модели, предполагающей параллельное включение компонентов и дающей удовлетворительные оценки свойств однонаправленных волокнистых композитов в направлении армирования. Наиболее прост для рассмотрения случай, когда температурными деформациями и деформациями ползучести волокна можно пренебречь, упругие свойства компонентов неизменны, а предел текучести идеально пластичной, изотропно упрочняющейся матрицы кусочно-линейно зависит от температуры.

Проанализируем поведение принятой модели композита при различных видах внешних воздействий.

Металлокомпозитам свойственно обусловленное взаимодействием упругого волокна и изотропно упрочняющейся матрицы существенно анизотропное упрочнение. Свободное температурное деформирование металлокомпозитов может носить неупругий характер.

Композиты с металлической матрицей могут проявлять обусловленные процессами релаксации структурных напряжений деформации, аналогичные деформациям обратной ползучести, но возникающие в результате мгновенного силового или чисто температурного воздействия на материал.

Металлокомпозиты могут различным образом деформироваться при растяжении и сжатии, а их жесткостные свойства при определенных условиях могут зависеть от времени.

Данные об особенностях деформирования простых моделей металлокомпозитов при температурно-силовых воздействиях находятся в хорошем качественном соответствии с результатами экспериментальных исследований свойств этих материалов. Примером может служить представленная на рис. 5.21 экспериментальная зависимость [11] продольной деформации однонаправленной композиции никель—углерод (объемная доля волокна $v = 0{,}45$) от температуры. На рис. 5.22 представлена полученная экспериментальная

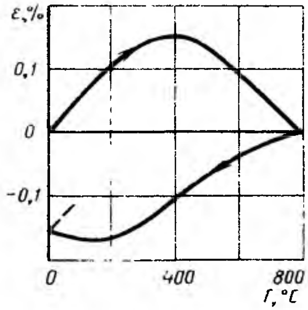


Рис. 5.21. Экспериментальная зависимость деформации композиции никель—углерод от температуры [11]

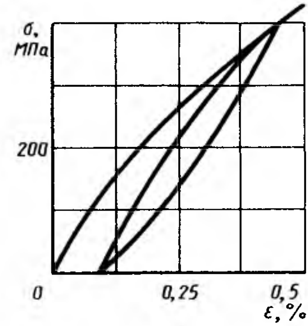


Рис. 5.22. Экспериментальная кривая деформирования боралюминия

тально кривая деформирования с разгрузкой и повторным нагружением боралюминия ($v = 0{,}45$; предел текучести материала матрицы около 50 МПа) со схемой армирования [0°/±45°]. Анализ этой зависимости, кроме прочего, позволяет сделать вывод, что подобно однонаправленным ведут себя и материалы, армированные волокнами различным образом ориентированных семейств.

Экспериментальные исследования особенностей деформирования металлокомпозитов при сложном напряженном состоянии (в объемах, достаточных для надежной экстраполяции проявляемых ими свойств на траектории нагружения и на температурные режимы общего вида) осложняются анизотропией этих свойств и требуют проведения большого числа достаточно трудоемких испытаний. Преодолеть возникающие трудности и заметно сократить количество необходимых экспериментов позволяет использование (наряду с феноменологическим) структурного подхода к исследованию и описанию неупругих свойств металлокомпозитов.

Структурный подход реализуется уже при использовании приема, когда свойства пакета различным образом ориентированных слоев определяются расчетным путем (с применением, например, соотношений теории слоистых сред) по известным свойствам однонаправленного материала. Определение эффективных жесткостных характеристик однонаправленного материала может основываться на решении задачи механики сплошной среды для представительного элемента композитной структуры как в точной постановке [2, 12], так и с использованием тех или иных упрощающих допущений.

Исследования полей структурных напряжений, естественно, требуют решения задачи в точной постановке. Точные методы весьма сложны в реализации. Это обстоятельство не позволяет использовать их для определения проявляемых композитами жесткостных свойств непосредственно при расчетах несущей способности элементов конструкций. Полученные точными методами результаты при этом неизбежно должны быть аппроксимированы с использованием той или иной феноменологической модели деформирования материала.

Всем этим обусловлено широкое использование для исследования и описания неупругих свойств композитов простых моделей композитной среды. Простейшей является модель, предполагающая параллельное включение материала матрицы и тонких, воспринимающих только продольные напряжения волокон [9]. Применяется также модель, использующая систему допущений, изложенных в [7]. Удовлетворительные результаты эти две модели (как и модель коаксиальных цилиндров [22]) дают для материалов с относительно малой объемной долей волокна. Для описания процессов деформирования композитов при проском напряженном состоянии используется модель тонких сечений [17]. Для определения приведенных термопластических свойств волокнистых композитов использовалась модель, описанная в [8].

Использование п[illegible] моделей композитной среды п[illegible]ет получать результаты, вполн[illegible]ригодные для нужд практики. После надлежащей экспериментальной проверки или проверки сопоставлением результатов расчетов с результатами точных решений простые модели композитной среды могут использоваться непосредственно для расчетных оценок несущей способности и рационального проектирования элементов конструкций из композитов. При этом оказывается возможным прогнозировать несущую способность конструкций в зависимости от объемного содержания и свойств армирующих волокон и материала матрицы.

5.3.2. Модель деформирования композита при плоском напряженном состоянии. Одной из простых моделей композитной среды, использующихся для исследования и описания процессов неупругого деформирования волокнистых композитов, является модель тонких сечений. Она позволяет прогнозировать неупругие свойства, проявляемые волокнистыми композитами при плоском напряженном состоянии — напряженном состоянии, реализующемся в материале достаточно широкого класса тонкостенных оболочечных конструкций.

Модель тонких сечений предполагает разбиение представительного элемента однонаправленного материала на элементарные слои (рис. 5.23), не взаимодействующие друг с другом по смежным граням. Напряженное состояние компонентов в пределах элементарного слоя считается однородным; контакт по границе их раздела — идеальным.

Связь средних напряжений $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \tau_{12}\}^{\text{т}}$ с деформациями $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \gamma_{12}\}^{\text{т}}$ для элементарного слоя

$$d\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{B}\,d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{S} \qquad (5.60)$$

удобно представить в блочной форме

$$d\sigma_f = B_{ff}\,d\varepsilon_f + \boldsymbol{B}_{fr}\,d\boldsymbol{\varepsilon}_r - dS_f; \qquad (5.61)$$

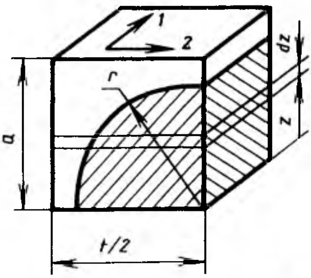


Рис. 5.23. Представительный элемент однонаправленного материала

$$d\boldsymbol{\sigma}_r = \boldsymbol{B}_{rf}\,d\varepsilon_f + \boldsymbol{B}_{rr}\,d\boldsymbol{\varepsilon}_r - d\boldsymbol{S}_r$$

таким образом, что

$$\sigma_f = \sigma_{11}; \quad \boldsymbol{\sigma}_r = \{\sigma_{22}, \tau_{12}\}^{\text{т}};$$
$$\varepsilon_f = \varepsilon_{11}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_r = \{\varepsilon_{22}, \gamma_{12}\}^{\text{т}};$$
$$B_{ff} = b_{11}; \quad \boldsymbol{B}_{fr} = [b_{12} \quad b_{13}]; \qquad (5.62)$$
$$\boldsymbol{B}_{rf} = [b_{21} \quad b_{31}]^{\text{т}};$$
$$\boldsymbol{B}_{rr} = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{bmatrix};$$
$$S_f = s_1; \quad \boldsymbol{S}_r = \{s_2, s_3\}^{\text{т}}.$$

Здесь $\boldsymbol{B}$ — матрица жесткости элементарного слоя; $\boldsymbol{S} = \{s_1, s_2, s_3\}^{\text{т}}$ — вектор напряжений, обусловленных температурно-временными эффектами. Тогда уравнения равновесия и совместности деформаций компонентов в пределах элементарного слоя можно записать в следующем виде:

$$\sigma_f = v'\sigma_f' + v''\sigma_f'';$$
$$\boldsymbol{\sigma}_r = \boldsymbol{\sigma}_r' = \boldsymbol{\sigma}_r''; \qquad (5.63)$$
$$\varepsilon_f = \varepsilon_f' = \varepsilon_f'';$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_r = v'\boldsymbol{\varepsilon}_r' + v''\boldsymbol{\varepsilon}_r''.$$

Здесь и далее одним и двумя штрихами помечены величины, относящиеся соответственно к материалу волокна и матрицы; v — объемное содержание соответствующего компонента $(v' + v'' = 1)$. Соотношения между напряжениями и деформациями для компонентов можно записать так: $d\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{A}'d\boldsymbol{\sigma}' + d\boldsymbol{e}'$

или

$$d\varepsilon_f' = A_{ff}'\, d\sigma_f' + A_{fr}\, d\sigma_r' + de_f';$$

$$d\varepsilon_r' = \mathbf{A}_{rf}'\, d\sigma_f' + \mathbf{A}_{rr}'\, d\sigma_r' + de_r'. \tag{5.64}$$

Здесь

$$\mathbf{A}' = \mathbf{B}'^{-1};\quad de' = \mathbf{A}'\, d\mathbf{S}';$$

$$A_{ff}' = a_{11}';\quad \mathbf{A}_{fr}' = [a_{12}' \quad a_{13}'];$$

$$\mathbf{A}_{rf}' = [a_{21}' \quad a_{31}']^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{A}_{rr}' = \begin{bmatrix} a_{22}' & a_{23}' \\ a_{32}' & a_{33}' \end{bmatrix};$$

$$e_f' = e_1';\quad \mathbf{e}_r' = \{e_2',\ e_3'\}^{\mathrm{T}}.$$

Аналогичным образом соотношения (5.64) выглядят для материала матрицы; они замыкают систему уравнений (5.60)—(5.63), которая позволяет получить выражения для блоков матрицы $\mathbf{B}$ и вектора $d\mathbf{S}$ в виде:

$$\mathbf{B}_{rr} = \left(v' \left(\mathbf{B}_{rr}'\right)^{-1} + v'' \left(\mathbf{B}_{rr}''\right)^{-1}\right)^{-1};$$

$$\mathbf{B}_{rf} = \mathbf{B}_{rr}\left(v' \left(\mathbf{B}_{rr}'\right)^{-1} \mathbf{B}_{rf}' + \right.$$

$$\left. + v'' \left(\mathbf{B}_{rr}''\right)^{-1} \mathbf{B}_{rf}''\right);$$

$$\mathbf{B}_{fr} = -\left(v'\mathbf{A}_{fr}'/A_{ff}' + v''\mathbf{A}_{fr}''/A_{ff}''\right)\mathbf{B}_{rr};$$

$$B_{ff} = v'/A_{ff}' + v''/A_{ff}'' +$$

$$+ \mathbf{B}_{fr}\left(\mathbf{B}_{rr}\right)^{-1}\mathbf{B}_{rf};$$

$$d\mathbf{S}_r = \mathbf{B}_{rr}\left(v' \left(\mathbf{B}_{rr}'\right)^{-1} d\mathbf{S}_r' + \right.$$

$$\left. + v'' \left(\mathbf{B}_{rr}''\right)^{-1} d\mathbf{S}_r''\right);$$

$$dS_f = v'\, de_f'/A_{ff}' +$$

$$+ v''\, de_f''/A_{ff}'' + \mathbf{B}_{fr}\left(\mathbf{B}_{rr}\right)^{-1} d\mathbf{S}_r.$$

Для проведения расчетов необходимо установить связь напряженно-деформированного состояния (НДС) компонентов с НДС элементарного слоя. Ее удобно представить следующим образом:

$$d\sigma'' = \mathbf{U}\, d\sigma + d\mathbf{V}$$

или

$$d\sigma_f'' = U_{ff}\, d\sigma_f + \mathbf{U}_{fr}\, d\sigma_r + dV_f;$$

$$d\sigma_r'' = \mathbf{U}_{rf}\, d\sigma_f + \mathbf{U}_{rr}\, d\sigma_r + d\mathbf{V}_r,$$

где

$$U_{ff} = u_{11};\quad \mathbf{U}_{fr} = [u_{12} \quad u_{13}];$$

$$\mathbf{U}_{rf} = [u_{21} \quad u_{31}]^{\mathrm{T}};\quad \mathbf{U}_{rr} = \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{32} & u_{33} \end{bmatrix};$$

$$V_f = v_1;\quad \mathbf{V}_r = \{v_2,\ v_3\}^{\mathrm{T}}.$$

Выражения для блоков матрицы U и вектора dV имеют вид

$$U_{ff} = A_{ff}/A_{ff}'';\quad \mathbf{U}_{fr} = \left(\mathbf{A}_{fr} - \mathbf{A}_{fr}''\right)/A_{ff}'';$$

$$\mathbf{U}_{rf} = 0;\quad \mathbf{U}_{rr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$dV_f = \left(de_f - de_f''\right)/A_{ff};\quad d\mathbf{V}_r = 0.$$

Кроме того, в силу (5.63) имеет место соотношение

$$\sigma' = \lceil 1/v',\ 1,\ 1 \rfloor \sigma - \lceil v''/v',\ 0,\ 0 \rfloor \sigma''$$

Свойства однонаправленного материала, т. е. связь средних напряжений

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{a}\int_0^a \sigma\, dz$$

с деформациями представительного элемента $\overline{d\varepsilon} = d\varepsilon$ (равными по предположению средним деформациям элементарных слоев) $\overline{d\sigma} = \bar{B}\, d\varepsilon - \overline{dS}$, устанавливаются с использованием известных соотношений теории слоистых сред:

$$\bar{\mathbf{B}} = \frac{1}{a}\int_0^a \mathbf{B}(z)\, dz \approx \frac{1}{a}\sum_i \mathbf{B}_i\, \Delta z_i;$$

$$\overline{d\mathbf{S}} = \frac{1}{a}\int_0^a d\mathbf{S}(z) \approx \frac{1}{a}\sum_i d\mathbf{S}_i\, \Delta z_i.$$

Если толщина монослоя $h = 2a$ (см. рис. 5.23) больше диаметра волокна $d = 2r$, то объемная доля волокна в пределах элементарного слоя v' меняется по координате z таким образом, что

$$v' = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{r^2 - z^2}}{t} & \text{при} \quad 0 \leqslant z \leqslant r; \\ 0 & \text{при} \quad r \leqslant z \leqslant a, \end{cases}$$

в противном случае

$$v' = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{r^2 - z^2}}{t} \\ \text{при} \quad 0 \leqslant z \leqslant 2a - r; \\ \dfrac{2\sqrt{r^2 - z^2} + \sqrt{r^2 - (2a - r)^2}}{t} \\ \text{при} \quad 2a - r \leqslant z \leqslant a. \end{cases}$$

Среднее значение объемной доли волокна v_f связано с его диаметром d, шагом укладки t и толщиной монослоя h соотношением

$$v_f = \frac{\pi d^2}{4ht}.$$

После перехода к общей системе координат 1^*, 2^* (рис. 5.24) для пакета различным образом ориентированных слоев

$$\sigma^* = \alpha^{\mathrm{T}}\sigma; \quad \varepsilon^* = \alpha^{-1}\varepsilon;$$

$$\mathbf{B}^* = \alpha^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\alpha; \quad \mathbf{S}^* = \alpha^{\mathrm{T}}\mathbf{S},$$

где

$$\alpha = \begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ \sin^2\varphi & \cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi \\ -2\sin\varphi\cos\varphi & 2\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \end{bmatrix}.$$

Здесь φ — угол армирования i-го слоя.

Свойства пакета $d\sigma^* = \mathbf{G}\, d\varepsilon^* - d\mathbf{F}$ устанавливаются с использованием соотношений теории слоистых сред

$$\mathbf{G} = \frac{1}{H}\sum_i h_i \mathbf{B}_i^*;$$

$$d\mathbf{F} = \frac{1}{H}\sum_i h_i\, d\mathbf{S}_i^*,$$

где $H = \sum_i h_i$ — суммарная толщина пакета.

Приведенные зависимости пригодны для описания процессов деформирования волокнистых композитов в случае, когда связь напряжений с деформациями для компонентов неоднородна,

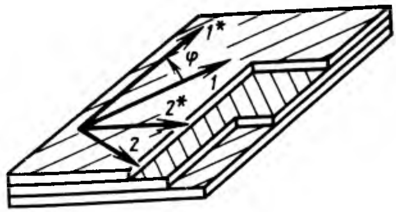


Рис. 5.24. Пакет различным образом ориентированных слоев

а оси симметрии их жесткостных свойств в силу приобретаемой деформационной анизотропии могут (что выражается, например, в неравенстве нулю коэффициентов a''_{13}, a''_{23}, a''_{31} и a''_{32} матрицы A'') не совпадать с направлением армирования. Для проведения расчетов необходимо также располагать соотношениями, устанавливающими свойства компонентов.

5.3.3. Описание свойств компонентов. Деформации компонентов металлокомпозитов складываются из термоупругих ε^e, пластических ε^p и деформаций ползучести ε^c, развивающихся при повышенных температурах:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p + \varepsilon^c. \qquad (5.65)$$

Соотношение линейной термоупругости для изотропного материала

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{E}\left((1+\nu)\,\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}\right) + \delta_{ij}\int \alpha\, dT$$

может быть представлено следующим образом:

$$d\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{E}\left((1+\nu)\, d\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\, d\sigma_{kk}\right) + \left(-\frac{1}{E}\frac{dE}{dT}\left((1+\nu)\,\sigma_{ij} - \nu\delta_{ij}\sigma_{kk}\right) + \frac{1}{E}\frac{d\nu}{dT}\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}\right) + \delta_{ij}\alpha\right) dT.$$

Здесь σ_{ij} и ε_{ij} — тензоры напряжений и деформаций; ν — коэффициент Пуассона; $\alpha = d\varepsilon_{ii}/dT$ (по i не суммировать) — температурный коэффициент линейного расширения; T — температура (используется обычное соглашение о суммировании по повторяющемуся индексу); δ_{ij} — символ Кронеккера. Для плоского напряженного состояния будучи записано в векторно-матричной форме соотношение термоупругости приобретает вид

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{A}^e\, d\boldsymbol{\sigma} + d\mathbf{e}^e, \qquad (5.66)$$

где

$$\mathbf{A}^e = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{симм.} & & 2(1+\nu) \end{bmatrix}; \qquad (5.67)$$

$$d\mathbf{e}^e = -\frac{1}{E^2}\frac{dE}{dT}\begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \nu\sigma_{22} \\ \sigma_{22} - \nu\sigma_{11} \\ 2(1+\nu)\tau_{12} \end{Bmatrix} dT + \frac{1}{E}\frac{d\nu}{dT}\begin{Bmatrix} -\sigma_{22} \\ -\sigma_{11} \\ 2\tau_{12} \end{Bmatrix} dT + \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{Bmatrix} dT.$$

Армирующие волокна могут проявлять заметную анизотропию термоупругих свойств. Для ее описания можно ограничиться введением трех не зависящих от температуры коэффициентов:

$$\psi = \frac{E_2}{E_1}; \quad \chi = \frac{G_{12} 2(1+\nu_{12})}{E_1} \quad \text{и} \quad \theta = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \qquad (5.68)$$

где E_1, E_2 и G_{12} — модули упругости материала волокна соответственно в продольном, поперечном направлении и при сдвиге; ν_{12} — коэффициент поперечной деформации ($\nu_{12} = |\varepsilon_{22}/\varepsilon_{11}|$ при $\sigma_{22} = 0$); α_1 и α_2 — температурные коэффициенты линейного расширения соответственно в продольном и поперечном направлениях. В результате выражения для матрицы A^e и вектора de^e в (5.66) приобретают вид

$$\mathbf{A}^e = \frac{1}{E_1}\begin{bmatrix} 1 & -\nu_{12} & 0 \\ & 1/\psi & 0 \\ & & 2(1+\nu_{12})/\chi \end{bmatrix};$$

$$d\mathbf{e}^e = -\frac{1}{E_1}\frac{dE_1}{dT} \times \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \nu_{12}\sigma_{22} \\ \sigma_{22}/\psi - \nu_{12}\sigma_{11} \\ 2(1+\nu_{12})\tau_{12}/\chi \end{Bmatrix} dT + \frac{1}{E_1}\frac{d\nu_{12}}{dT}\begin{Bmatrix} -\sigma_{22} \\ -\sigma_{11} \\ 2\tau_{12}/\chi \end{Bmatrix} dT + \alpha_1\begin{Bmatrix} 1 \\ \theta \\ 0 \end{Bmatrix} dT. \qquad (5.69)$$

Функциями температуры при этом, как можно видеть, являются величины E_1, ν_{12} и α_1. При $\psi = \chi = \theta = 1$ ($E_1 = E$; $\nu_{12} = \nu$; $\alpha_1 = \alpha$) соотношения (5.69) переходят в (5.67).

Соотношения простейшего варианта теории неизотермического течения имеют вид

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{9}{4}\frac{s_{ij}s_{kl}}{\sigma_i^2 H}\, d\sigma_{kl} - \frac{3}{2}\frac{s_{ij}g}{\sigma_i H}\, dT.$$

Здесь $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_{kk}/3$ и $\sigma_i = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$ — соответственно тензор-девиатор и интенсивность напряжений; $H = \partial\sigma_\text{т}/\partial q$ и $g = \partial\sigma_\text{т}/\partial T$ — частные производные функции $\sigma_\text{т}(q, T)$, представляющей собой зависимость текущего значения предела текучести $\sigma_\text{т}$ от меры упрочнения $q = \int \overline{d\varepsilon_i^p}$ и температуры T; $\overline{d\varepsilon_i^p} = \sqrt{2d\varepsilon_{ij}^p\, d\varepsilon_{ij}^p/3}$ — интенсивность приращений пластических деформаций. Величина H связана с касательным модулем $E_\text{к}$, определяемым по диаграммам изотермического деформирования при одноосном растяжении (сжатии) материала, соотношением $H = (1/E_\text{к} - 1/E)^{-1}$. Упругое деформирование материала $\left(d\varepsilon_{ij}^p = 0\right)$ имеет место при выполнении хотя бы одного из следующих двух условий:

$$\sigma_i < \sigma_\text{т}; \quad d\sigma_i \leqslant g\,dT.$$

При плоском напряженном состоянии

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{A}^p\, d\boldsymbol{\sigma} + d\mathbf{e}^p,$$

где

$$\mathbf{A} = \frac{9}{4}\frac{1}{\sigma_i^2}\left(\frac{1}{E_{\text{к}}} - \frac{1}{E}\right) \times$$

$$\times \begin{bmatrix} s_{11}^2 & s_{11}s_{22} & 2s_{11}\tau_{12} \\ & s_{22}^2 & 2s_{22}\tau_{12} \\ \text{симм.} & & 4\tau_{12}^2 \end{bmatrix};$$

$$d\mathbf{e}^p = -\frac{3}{2}\frac{g}{\sigma_i}\left(\frac{1}{E_{\text{к}}} - \frac{1}{E}\right) \times$$

$$\times \{s_{11},\ s_{22},\ 2\tau_{12}\}^{\text{т}}\, dT;$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}^2 + 3\tau_{12}^2};$$

$$\overline{d\varepsilon}_i^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \times$$

$$\times \sqrt{\left(d\varepsilon_{11}^p\right)^2 + d\varepsilon_{11}^p\, d\varepsilon_{22}^p + \left(d\varepsilon_{22}^p\right)^2 + \left(d\gamma_{12}^p\right)^2/4};$$

$$s_{11} = \frac{2}{3}\left(\sigma_{11} - \frac{1}{2}\sigma_{22}\right) \quad (1 \rightleftarrows 2).$$

Ползучесть металлокомпозитов проявляется главным образом при повышенных температурах и в основном определяется деформациями кратковременной ползучести. Соотношение, описывающее процессы кратковременной ползучести:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \frac{3}{2} A \frac{\sigma^{N-1}}{S^N} s_{ij},$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}^c$ — тензор скоростей деформаций ползучести, при плоском напряженном состоянии имеет вид

$$d\varepsilon^c = d\mathbf{e}^c = \frac{3}{2} A \frac{\sigma_i^{N-1}}{S^N} \times$$

$$\times \{s_{11},\ s_{22},\ 2\tau_{12}\}^{\text{т}}. \qquad (5.70)$$

Здесь A, N (T) и S (T) — определяемые экспериментально константа и функции температуры.

Полные деформации компонентов определяются в соответствии с (5.65) суммированием их отдельных составляющих. Так, например, для материала матрицы

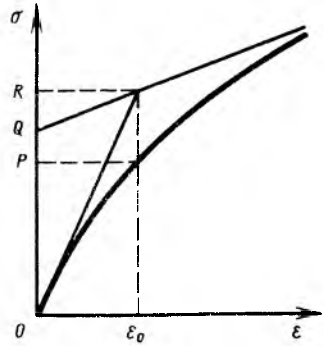


Рис. 5.25. График функции σ(ε), аппроксимирующей кривые деформирования материала матрицы

$$d\varepsilon'' = \mathbf{A}''\, d\sigma'' + d\mathbf{e}'';$$

где

$$\mathbf{A}'' = \mathbf{A}^e + \mathbf{A}^p;$$

$$d\mathbf{e}'' = d\mathbf{e}^e + d\mathbf{e}^p + d\mathbf{e}^c.$$

При решении конкретных задач возникает необходимость аппроксимировать теми или иными соотношениями экспериментальные зависимости, определяющие свойства компонентов.

5.3.4. Аппроксимация экспериментальных зависимостей, определяющих свойства компонентов. Для аппроксимации экспериментальных зависимостей, определяющих свойства компонентов, следует использовать самые простые и учитывающие характер этих зависимостей аналитические выражения. При этом свойства материала однозначно определяются ограниченным количеством входящих в аппроксимирующие функции параметров.

Для аппроксимации кривых деформирования материалов σ (ε) удобна зависимость

$$\bar{\sigma} = \frac{Q\varepsilon/\varepsilon_0}{\left[1 + (\varepsilon/\varepsilon_0)^n\right]^{1/n}} + kE\varepsilon, \qquad (5.71)$$

где E — модуль упругости материала; Q — начальная ордината асимптоты кривой (5.71) на рис. 5.25; k — отношение модуля упрочнения (углового коэффициента асимптоты) к модулю упругости;

$$\varepsilon_0 = \frac{Q}{E(1-k)};$$

$$n = \ln 2/\ln\left(\frac{r-k}{1-k}\right).$$

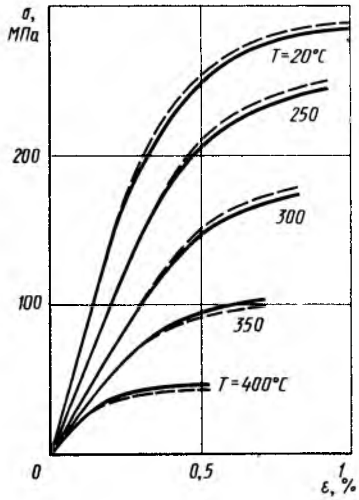


Рис. 5.26. Кривые деформирования сплава Д16АТ при различных значениях температуры и аппроксимирующие их кривые (штриховые)

Здесь $r = P/R$; P — значение напряжения при $\varepsilon = \varepsilon_0$ (см. рис. 5.25) $R = E\varepsilon_0$ — ордината точки пересечения асимптоты с прямой $\sigma = E\varepsilon$. Таким образом, зависимость (5.71) задается значениями четырех параметров E, Q, k и r. Выражение для касательного модуля имеет следующий вид:

$$E_к = \frac{Q/\varepsilon_0}{[1 + (\varepsilon/\varepsilon_0)^n]^{(1+n)/n}} + kE.$$

Для описания процессов неизотермического деформирования достаточно задать зависимости модуля упругости материала и параметра Q в (5.71) от температуры. Характер этих зависимостей таков, что на интервале $T > T_1$ они могут быть аппроксимированы выражением

$$y = y_1 \left\{(1 - p) \times \left[1 + \left(\frac{T - T_1}{T_3 - T_1}\right)^m\right]^{-1} + p\right\}, \qquad (5.72)$$

где y_1 — значение функции при $T = T_1$; $p = y_2/y_1$ [$y = y_2$ — асимптота кривой (5.72)]; T_3 — значение аргумента, при котором $y = F = (y_1 + y_2)/2$; $m = \ln \frac{1}{3} \Big/ \ln (T_2 - T_1)/(T_3 - T_1)$.

Здесь T_2 — значение аргумента, при котором $y = G = (F + y_1)/2$. При $T < T_1$ следует положить $y = y_1$. Таким образом, зависимость (5.72) задается значениями пяти параметров y_1, y_2, T_1, T_2 и T_3. На рис. 5.26 представлены результаты аппроксимации с использованием приведенных выше соотношений кривых деформирования при различных температурах сплава Д16АТ.

Зависимость параметров N и S в соотношениях кратковременной ползучести (5.70) от температуры удовлетворительно описывается выражением

$$y = y_1 \exp [-c (T - T_1)], \qquad (5.73)$$

где y_1 — значение функции при $T = T_1$;

$$c = \ln \frac{1}{2} \Big/ (T_2 - T_1)$$

(здесь T_2 — значение аргумента, при котором $y = H = y_1/2$). Таким образом, зависимость (5.73) однозначно определяется величинами y_1, T_1 и T_2.

Зависимости коэффициентов линейного расширения [см. (5.67) и (5.69) и компонентов от температуры можно аппроксимировать кусочно-линейными функциями, которые задаются координатами y_i и T_i точек разбиения рассматриваемого температурного интервала.

Простое геометрическое толкование коэффициентов приведенных соотношений облегчает аппроксимацию определяющих свойства компонентов зависимостей.

5.3.5. Результаты расчетов процессов деформирования композитов при температурно-силовых воздействиях. Рассмотрим результаты расчетов, дающие представление об особенностях деформирования материалов, армированных волокнами двух типов — со свойствами во всем диапазоне рассматриваемых температур, примерно соответствующими свойствами волокон бора ($E_1' = 400$ ГПа; $\psi = \chi = 1$; $\nu_{12}' = 0{,}21$; $\alpha_1' = 5 \cdot 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$; ($\theta = 1$) и углеродных волокон ($E_1' = 200$ ГПа; $\psi = \chi = 0{,}1$; $\nu_{12}' = 0{,}15$; $\alpha_1' =$

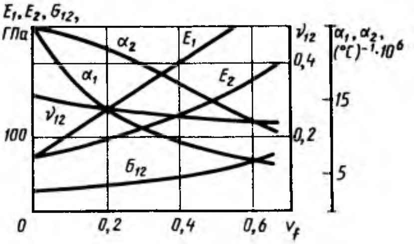


Рис. 5.27. Зависимость термоупругих характеристик однонаправленного бороалюминия от объемной доли волокна

$\times 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$; $\theta = 10$). Связующим в обоих случаях служил алюминиевый сплав Д16АТ ($\nu'' = 0{,}31$; $\alpha'' = 25 \times 10^{-6}$ (°C)$^{-1}$; $A = 10^{-4}$ с$^{-1}$), свойства которого приведены на рис. 5.26.

Результаты расчетов упругих констант E_1, E_2, G_{12}, ν_{12} и коэффициентов α_1 и α_2 однонаправленного бороалюминия ($v_f = 0{,}5$), полученные при разбиении представительного элемента на различное число элементарных слоев, свидетельствуют о том, что для определения эффективных жесткостных свойств композитов в рамках рассматриваемой модели вполне допустимо разбиение представительного элемента на два элементарных слоя.

На рис. 5.27 приведены зависимости упругих констант (E_1, E_2, G_2, ν_2) и коэффициентов линейного расширения α_1 и α_2 однонаправленного бороалюминия от объемной доли волокна v_f.

При получении результатов, представленных на рис. 5.28—5.32, объемная доля волокна принималась равной 0,5.

На рис. 5.28, *а*, *б* приведены кривые деформирования при нормальной температуре соответственно бор- и углеалюминия со схемами армирования [$\pm\varphi$] для различных значений угла укладки слоев φ. Анизотропия углеродных волокон существенно снижает поперечную и сдвиговую жесткости однонаправленного материала. Как следствие, квазиизотропные структуры металлокомпозитов на основе углеродных волокон даже при равенстве продольного модуля упругости арматуры по жесткости уступают материалам, армированным, например, волокнами бора. Это следует иметь ввиду при выборе материала для изготовления элементов конструкций, работоспособность которых определяется их жесткостью.

На рис. 5.29 приведена кривая мгновенного (с разгрузкой и повторным нагружением) деформирования при температуре 350 °С бороалюминия со схемой армирования [0°/$\pm$45]. Степень проявления эффекта Баушингера металлокомпозитами зависит от схемы армирования материала, свойств компонентов, уровня действующих напряжений. Так, гистеризисные явления почти не наблюдаются при разгрузке

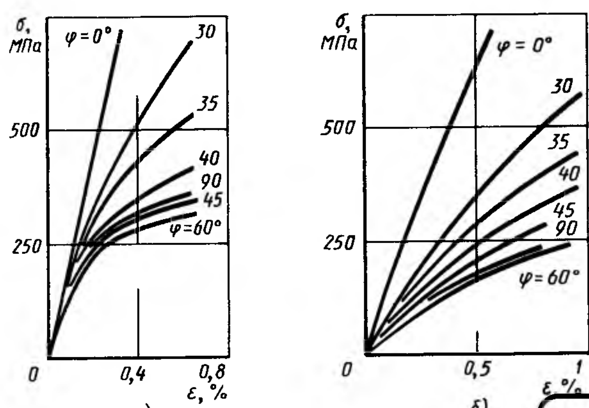


Рис. 5.28. Кривые деформирования перекрестно армированных ([$\pm\varphi$]) боро- (*а*) и углеалюминия (*б*) для различных значений угла укладки слоев

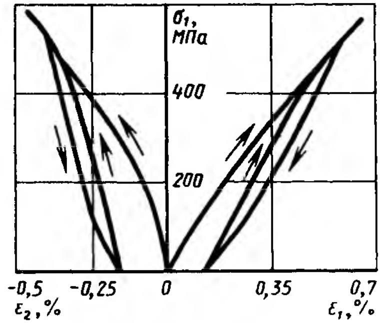


Рис. 5.29. Кривые мгновенного (с разгрузкой и повторным нагружением) деформирования бороалюминия при температуре 350°С (ε_1 и ε_2—соответственно продольная и поперечная деформации материала)

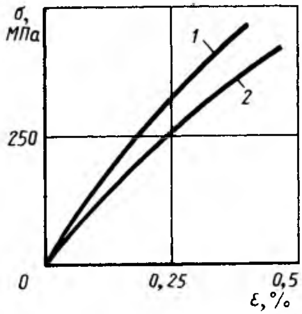


Рис. 5.31. Кривые деформирования бороалюминия при растяжении (*1*) и сжатии (*2*), полученные с учетом структурных напряжений, возникающих в материале при мгновенном повышении его температуры от нормальной до 300 °С

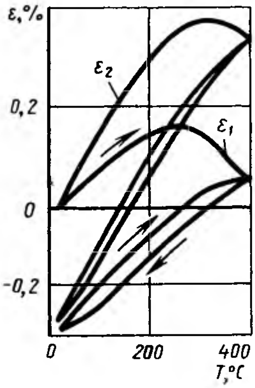


Рис. 5.30. Зависимости продольной ε_1 и поперечной ε_2 деформаций углеалюминия от температуры T

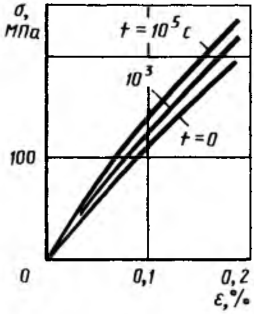


Рис. 5.32. Кривые деформирования бороалюминия при сжатии, реализующиеся сразу после мгновенного повышения его температуры от нормальной до 300 °С ($t = 0$) и по истечении 10^3 и 10^5 с

и повторном нагружении металлокомпозитов в направлениях, отличных от направлений преимущественной ориентации армирующих волокон, у композиций с высоким пределом текучести материала матрицы и при низких уровнях действующих напряжений. В целом металлокомпозитам свойственно существенно анизотропное упрочнение, что необходимо учитывать при использовании феноменологического подхода для описания их неупругих свойств.

На рис. 5.30 приведены зависимости продольной ε_1 и поперечной ε_2 деформаций углеалюминия со схемой армирования [0°/±45°] от температуры, полученные без учета деформаций ползучести и свидетельствующие о том, что при свободном температурном расширении (сжатии) металлокомпозитов в них могут развиваться значительные пластические деформации. Таким образом, следует различать полные температурные деформации этих материалов и коэффициенты их линейного расширения, т. е. механические характеристики, в соотношениях термоупругости. Выделить упругую составляющую температурных деформаций можно, сопоставив характер деформирования материала при его нагревании и последующем охлаждении. Неупругие эффекты при термоциклировании должны описываться, например, с использованием соотношений термопластичности, учитывающих зависимость тензора активных напряжений от температуры.

На рис. 5.31 приведены кривые деформирования при растяжении и сжатии бороалюминия со схемой армирования [0/±45] ($T = 300$ °C), полученные с учетом структурных напряжений, возникающих в компонентах при мгновенном повышении температуры композита от нормальной до 300 °C. Из рис. 5.31 видно, что композиты с металлической матрицей могут различным образом сопротивляться растяжению и сжатию. Это явление обусловлено наличием в компонентах возникающих в результате температурно-силовых воздействий на материал структурных напряжений.

Процессы релаксации структурных напряжений приводят при определенных условиях к развитию в металлокомпозитах деформаций, аналогичных деформациям обратной ползучести, но возникающих в результате мгновенных температурно-силовых воздействий на материал. Эта особенность поведения металлокомпозитов учитывается при проектировании элементов конструкций, работоспособность которых определяется стабильностью их линейных размеров или формы.

Процессы релаксации структурных напряжений обуславливают при определенных условиях зависимость жесткостных свойств металлокомпозитов от времени. На рис. 5.32 представлены кривые деформирования при сжатии боралюминия со схемой армирования [0°/±45°], которые реализуются сразу после мгновенного повышения температуры материала от нормальной до 300 °C ($t = 0$) и по истечении 10^3 и 10^5 с.

Список литературы

1. **Булавс Ф. Я., Радиньш И. Г.** Упругие свойства слоистых армированных пластиков//Механика композитных материалов. Рига: Риж. политехн. ин-т, 1977. С. 3—19.

2. **Ванин Г. А.** Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наукова думка, 1985. 302 с.

3. **Гольденблат И. И., Копнов В. А.** Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. М.: Машиностроение, 1968. 191 с.

4. **Круклиньш А. А.** Жесткостные характеристики тканевых пластиков//Механика композитных материалов. Рига: Риж. политехн. ин-т, 1984. С. 75—88.

5. **Круклиньш А. А.** Структурные критерии прочности тканевых пластиков//Механика композитных материалов. Рига: Риж. политехн. ин-т, 1984. С. 57—74.

6. **Круклиньш А. А.** Структурная теория пластиков, армированных тканями: Дис. на соискание канд. техн. наук. Рига: Риж. политехн. ин-т, 1985. 180 с.

7. **Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.** Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.

8. **Маслов Б. П.** Приведенные термопластические свойства волокнистых композитов//Прикладная механика. 1982. Т. 18. № 10. С. 23—28.

9. **Немировский Ю. В.** Об упругопластическом поведении армированного слоя// ЖПМТФ. 1969. № 6. С. 75—83.

10. **Перов Б. В., Скудра А. М., Машинская Г. П. и др.** Особенности разрушения органопластиков и их влияние на прочность.//Разрушение композитных материалов. Рига: Зинатне. 1979. С. 182—189.

11. **Портной К. И., Салибеков С. Е., Светлов И. Л. и др.** Структура и свойства композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1979. 255 с.

12. **Рикардс Р. Б., Чате А. К.** Упругие свойства композита с анизотропными волокнами//Механика композитных материалов. 1980. № 1. С. 22—29.

13. **Скудра А. А.** Прочность косоугольно армированных пластиков при двухосном растяжении//Механика армированных пластиков. Рига: Риж. политехн. ин-т, 1985. С. 17—27.

14. **Скудра А. А.** Прочность косоугольно армированных пластиков при комбинированном двухосном растяжении и сжатии//Механика армированных пластиков. Рига. Риж. политехн. ин-т, 1985. С. 23—34.

15. **Скудра А. А.** Структурные критерии прочности косоугольно армированных пластиков: Дис. на соискание канд. техн. наук. Рига, 1984. 213 с.

16. **Скудра А. М., Булавс Ф. Я.** Прочность армированных пластиков. М.: Химия, 1982. 213 с.

17. **Скудра А. М., Булавс Ф. Я.** Структурная теория армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1978. 192 с.

18. **Скудра А. М., Булавс Ф. Я., Роценс К. А.** Ползучесть и статическая усталость армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1971. 238 с.

19. **Скудра А. М., Кирулис Б. А., Захаров А. В.** Прочность контакта между волокнами и связующим в армированных пластиках//Механика композитных материалов. Рига: Риж. политехн. ин-т, 1985. С. 30—37.

20. **Скудра А. М., Юрьянс А. В.** Критерии прочности органопластиков при простых видах нагружения//Механика армированных пластиков. Рига: Риж. политехн. ин-т, 1983. С. 19—31.

21. **Тарнопольский Ю. М., Кинцис Т. Я.** Методы статических испытаний армированных пластиков. М.: Химия, 1975. 263 с.

22. **Хилл Р.** теория механических свойств волокнистых композиционных материалов//Механика/Сб. переводов. 1966. № 2 (96). С. 131—149.

23. **Earkins I.** Shear failure mechanisms in parallel fiament glass—resin composites//SPE J. 1963. Vol. 19. April. P. 37—41.

24. **Ikegami K., Nose Y., Yasunaga T.,** Shiratori E. Failure criterion of angle—ply laminates of fibre reinforced plastics and applications to optimize the strength// Fibre Science and Technology. 1982. Vol. 16, N 1. P. 175—190.

25. **Knappe W., Scheneider W.** Bruchkriterien für unidirektionalen Glassfaser// Kunstsfoffe unter ebener Kurzzeit — und Langzeit — Bean spruchung//Kunststoffe. 1972. Bd. 62. H. 12. S. 864.

26. **Knauss H., Schelling H.** Mehrachsig beanspruchte Drei—Richtungs—Wickelrohre aus verstärkten Kunststoffen//Kunststoffe. 1969. Bn. 59. H. 12. S. 911—917.

27. **Owen M. I., Rice D. I.** Biaxial strength behaviour of glass—fabric—reinforced polyester resins//Composites. 1984. January. P. 13—25.

28. **Puck A., Schneider W.** On failure mechanisms and failure criteria of filament—wound glass—fibre resin composites//Plast. Polym. 1969. Vol. 37. February. P. 33—43.

29. **Skudra A. M.** Micromechanics of failure of reinforced plastics//Hadnbook of composites. — Amsterdam, New York, Oxford. 1984. Vol. 3. Failure of mechanics of composites. P. 1—69.

30. **Uemura M., Yamawaki K.** Fracture strength of helically wound composite cylinders//Proceedings of the 9th Int. Symp. Space Technol. and Sci. Tokyo. 1971. P. 215—223.

31. **Yamawaki K., Uemura M.** An analysis for elastic moduli of unidirectional fibre—reinforced and multilayered composite materials//Daigaku Uchu Koku Kenkynsho Hakoku (Tokyo). 1971. Vol. 7, N 2. P. 315—332.

Глава 6

МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТОВ

6 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

Механикой разрушения (в узком смысле) обычно называют механику тел, содержащих трещины. Основное внимание в этом разделе механики уделяют установлению условий устойчивости трещин в упругих, упругопластических и вязкоупругих материалах, а также решению задач о распределении напряжений и деформаций в окрестности трещин. Трещины и трещиноподобные дефекты имеются практически в любой крупногабаритной конструкции, и наличие этих дефектов, вообще, еще не служит препятствием к ее безопасной и безотказной эксплуатации. Задача состоит в том, чтобы ввести характеристики трещиностойкости конструкционных материалов и разработать методы испытаний, позволяющие правильно выбирать материалы, технологические процессы и условия эксплуатации по критерию трещиностойкости, устанавливать безопасные размеры трещин и трещиноподобных дефектов.

В другом разделе механики — в теории накопления рассеянных микроповреждений — исследуют повреждения, возникающие на уровне структурных элементов материала (зерен, включений, микропор и т. п.). Анализ показал, что для построения удовлетворительной теории усталости конструкционных материалов необходим синтез механики тел, содержащих трещины, с механикой накопления рассеянных микроповреждений, поскольку процессы накопления микроповреждений и роста макроскопических трещин практически всегда происходят параллельно.

Объединенные модели механики разрушения [6, 7] позволяют получить уравнения, которые описывают устойчивый рост трещин в конструкционных материалах при циклическом и (или) длительном квазистатическом нагружении.

Приведем некоторые начальные сведения из механики тел с трещинами

[16, 17, 18]. Вначале рассмотрим материал, который во всех отношениях, кроме способности к хрупкому разрушению, обладает свойствами линейно упругой изотропной однородной среды. Применительно к этому модельному материалу говорят о «линейной механике разрушения».

Прототипом задач линейной механики разрушения служит задача Гриффитса о трещине отрыва в неограниченной среде при условиях плоской деформации (рис. 6.1). Трещина длиной $2l$ представлена в виде плоского математического разреза. На бесконечности заданы номинальные напряжения σ, нормальные к плоскости трещины. Материал подчиняется закону Гука с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν. Для того, чтобы размер трещины l увеличился на dl, необходимо затратить работу, значение которой пропорционально dl. Гриффитс связывал эту работу с энергией поверхностных сил. В действительности основная часть работы затрачивается на пластическое деформирование и другие необратимые явления. Все эти факторы учитываются в виде удельной работы разрушения γ, отнесенной к единице площади вновь образованной трещины. Удельная работа γ имеет размерность Дж/м^2 = Н/м. Для конструкционных материалов удобна единица измерения кДж/м^2 = кН/м. Согласно энергетической концепции Гриффитса трещина не растет, если значение потенциальной энергии системы Π, высвобождаемой при продвижении фронта трещины на dl, меньше работы разрушения, т. е. $-d\Pi < \gamma dl$. При $-d\Pi > \gamma dl$ значение высвобождаемой энергии превышает работу разрушения, причем за счет избыточной энергии этот рост может оказаться динамическим. После вычислений найдем

$$\frac{d\Pi}{dl} = -\frac{\pi\sigma^2 l\,(1-\nu^2)}{E}. \qquad (6.1)$$

Если это выражение подставить в условие $-d\Pi = \gamma dl$, то придем к формуле Гриффитса для критического напряжения:

$$\sigma_c = \left[\frac{\gamma E}{\pi l\,(1-\nu^2)}\right]^{1/2}. \qquad (6.2)$$

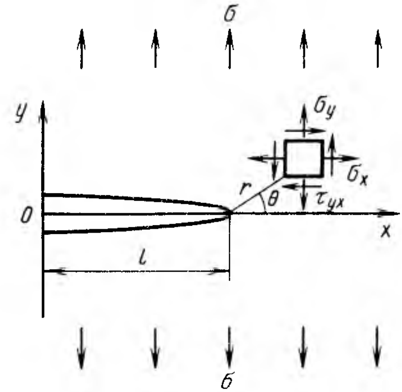


Рис. 6.1. Трещина отрыва в неограниченной среде

Альтернативный подход к механике тел с трещинами был предложен Ирвином (1954 г.). Поле напряжений в окрестности математического разреза в линейно-упругом теле имеет особенность типа квадратного корня. Если процесс разрушения носит локальный характер, то он должен в первую очередь зависеть от распределения напряжений в окрестности фронта трещины. Сингулярные члены в формулах для напряжений имеют вид

$$\sigma_{jk}(r, \theta) = \frac{K}{(2\pi r)^{1/2}} f_{jk}(r, \theta), \qquad (6.3)$$

где r — полярный радиус; θ — полярный угол; индексы j, k принимают значения x, y, z (см. рис. 6.1). Параметр K — это коэффициент интенсивности напряжений, который в задаче Гриффитса определяется так:

$$K_{\mathrm{I}} = \sigma\,(\pi l)^{1/2}, \qquad (6.4)$$

где индекс I указывает, что коэффициент относится к случаю трещины отрыва. Явные выражения для угловых функций $f_{jk}(r, \theta)$ не выписываем. Коэффициенты интенсивности напряжений имеют размерность Н·м$^{-3/2}$ = Па·м$^{1/2}$. В практических расчетах удобнее использовать коэффициенты интенсивности с размерностью МПа·м$^{1/2}$.

Согласно Ирвину трещина не растет, если $K_{\mathrm{I}} < K_{\mathrm{Ic}}$, и распространяется

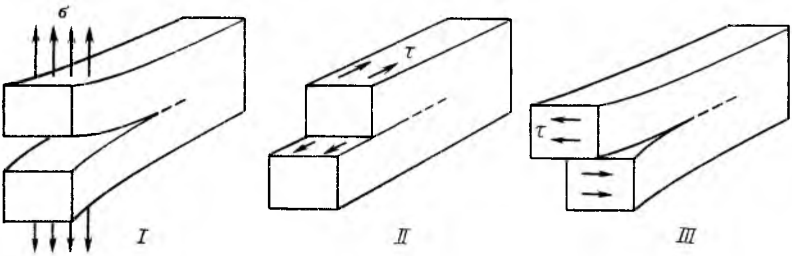


Рис. 6.2. Три моды разрушения:
I — отрыв; *II* — поперечный сдвиг; *III* — продольный сдвиг

(как статически, так и динамически), если $K_I > K_{Ic}$. Граничное соотношение имеет вид

$$K_I = K_{Ic}, \qquad (6.5)$$

где K_{Ic} — критическое значение коэффициента интенсивности напряжений. Условия (6.2) и (6.5) будут эквивалентны, если положить

$$K_{Ic} = \left(\frac{\gamma E}{1-\nu^2}\right)^{1/2}. \qquad (6.6)$$

Формула (6.6) устанавливает соответствие между энергетическим подходом Гриффитса и «силовым» подходом Ирвина.

Правая часть формулы (6.1) с точностью до знака равна энергии системы, высвобождаемой при продвижении трещины на единицу длины интенсивности высвобождения энергии G. Величина G имеет размерность силы (размер в направлении оси Oz принят равным единице). Поэтому ее называют также силой, продвигающей трещину. Поскольку с учетом (6.1)

$$G = \frac{\pi\sigma^2 l\,(1-\nu^2)}{E}, \qquad (6.7)$$

то условие энергетического баланса принимает вид

$$G = G_{Ic}. \qquad (6.8)$$

В данной задаче $G = K^2\,(1-\nu^2)/E$, $G_{Ic} = \gamma$, так что за характеристику трещиностойкости материала может быть принята одна из трех связанных между собой величин: γ, K_{Ic} или G_{Ic}.

Подход, основанный на понятии коэффициентов интенсивности напряжений, оказался наиболее удобным для практических расчетов. Существуют три основные задачи для трещины в неограниченной среде в условиях плоской деформации, соответствующие трем модам разрушения (рис. 6.2): *I* — отрыв, *II* — поперечный сдвиг, *III* — продольный сдвиг. Коэффициенты интенсивности напряжений для этих мод определяют соответственно по формулам:

$$K_I = \sigma\,(\pi l)^{1/2}, \quad K_{II} = K_{III} = \tau\,(\pi l)^{1/2}, \qquad (6.9)$$

где σ и τ — номинальные напряжения (их направления показаны на рис. 6.2). В общем случае наложения трех мод разрушения для интенсивности высвобождения энергии имеем формулу Ирвина

$$G = \frac{1-\nu^2}{E}\left(K_I^2 + K_{II}^2\right) + \frac{1+\nu}{E} K_{III}^2. \qquad (6.10)$$

Если постулировать, что удельная работа разрушения не зависит от моды, то критическое сочетание номинальных напряжений должно удовлетворять условию (6.8) с левой частью, определяемой по (6.10). Этот критерий применим также в более общем случае — при условии, что поле номинальных напряжений изменяется

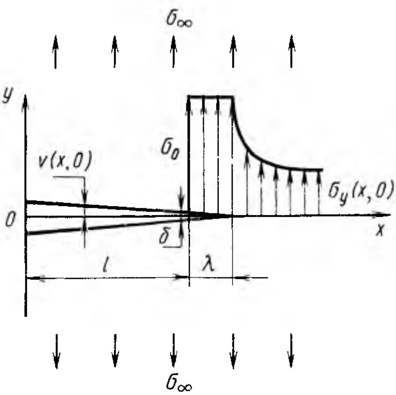


Рис. 6.3. Модель тонкой концевой зоны

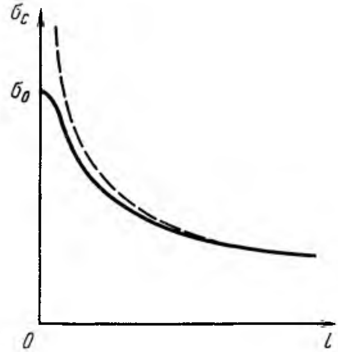


Рис. 6.4. Зависимость между критическими напряжением σ_c и длиной трещины

статочно медленно. Коэффициент интенсивности напряжений [16, 17]

$$K = Y\sigma_\infty (\pi l)^{1/2}, \qquad (6.11)$$

где σ_∞ — некоторое номинальное напряжение; l — характерный размер трещины; Y — безразмерный коэффициент, зависящий от типа нагружения, формы образца (элемента конструкции), формы и размещения трещины и соотношений между упругими постоянными материалами.

Естественное распространение линейной механики разрушения на нелинейно упругие материалы основано на методе инвариантных интегралов. Интенсивность высвобождения энергии связана с потоком энергии через поверхность, окружающую фронт трещины. В условиях плоской задачи этот поток выражается через J-интеграл Райса:

$$J = \int_C \left(W dy - \sigma_{jk} n_k \frac{\partial u_j}{\partial x} ds \right), \qquad (6.12)$$

где C — контур, окружающий вершину трещины; n_k — вектор внешней нормали к этому контуру; u_j — вектор перемещений; W — плотность энергии деформации, накопленной от некоторого начального состояния до рассматриваемого состояния. Для линейно-упругого материала правая часть из (6.12) дает тот же результат, что и формула Ирвина (6.10). Понятие J-интеграла часто применяют к трещинам в упругопластическом материале, принимая, что процесс роста трещины не сопровождается разгрузкой.

Другой подход к учету пластического деформирования основан на введении тонкой концевой зоны у фронта трещины, где сосредоточены все неупругие эффекты. Такова модель Леонова—Панасюка—Дагдейла (рис. 6.3). В пределах концевой зоны длиной λ напряжение $\sigma_y(x, 0)$ считают постоянным и равным σ_0. Это напряжение аналогично пределу текучести материала. Вне концевой зоны материал считают линейно-упругим. Трещина начинает расти, как только ее раскрытие на фронте δ достигает критического значения δ_c. Это значение принимают за характеристику трещиностойкости материала. Таким образом, вместо условий (6.2), (6.5) и (6.8) вводят соотношение

$$\delta = \delta_c. \qquad (6.13)$$

Для длины концевой зоны и раскрытия на фронте трещины имеем формулы [16]:

$$\lambda = l \left[\sec\left(\frac{\pi\sigma_\infty}{2\sigma_0} \right) - 1 \right];$$

$$\delta = \frac{8\sigma_\infty l}{\pi E} \ln\sec\left(\frac{\pi\sigma_\infty}{2\sigma_0} \right). \qquad (6.14)$$

При $\sigma_\infty \ll \sigma_0$ получаем формулу Гриффитса (6.2), если $\gamma = \sigma_0\delta_c$, или соотношение Ирвина (6.5) при $K_c = (E\sigma_0\delta_c)^{1/2}$. Отличие состоит в том, что вместо $1 - \nu^2$ в формулу входит единичный множитель, поскольку в модели Леонова—Панасюка—Дагдейла рассматривается плоское напряженное состояние. Штриховая линия на рис. 6.4 соответствует формуле Гриффитса (6.2). Для очень коротких трещин критическое напряжение близко к σ_0.

6.2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ

Общий подход к анализу устойчивости тел с трещинами основан на методах аналитической механики [7, 8]. Если рассматривать только квазистатические процессы и незаживающие трещины, то тело с трещинами представляет собой механическую систему с односторонними связями. Принцип виртуальных перемещений для таких систем формулируется следующим образом: система с идеальными односторонними связями находится в равновесии тогда и только тогда, когда сумма элементарных работ всех активных сил на любых малых перемещениях, совместимых с условиями связей, равна нулю или отрицательна, т. е. $\delta A \leqslant 0$.

Рассмотрим некоторое состояние системы тело с трещинами — нагрузка. Пусть это состояние при фиксированных параметрах трещин является устойчивым равновесием. Наряду с этим невозмущенным состоянием рассмотрим совокупность бесконечно близких смежных состояний. Смежные состояния удовлетворяют следующему комплексу условий: время, заданные поверхностные и объемные силы, а также заданные перемещения не варьируются; во всех точках тела, кроме, может быть, малых окрестностей фронтов трещин, выполнены все условия равновесия и совместности деформаций, все механические уравнения состояния. Единственные механические параметры, которые подлежат варьированию, — параметры трещин.

Если траектории всех трещин заранее известны (например, из учета симметрии задачи), то роль обобщенных координат выполняют размеры трещин. В дальнейшем число обобщенных координат считаем конечным и равным m. Обозначим обобщенные координаты $l_1, \ldots, l_m$; их совокупность $l = \{l_1, \ldots, l_m\}$ есть вектор обобщенных координат. Запишем условие необратимости трещин в виде $\delta l_j \geqslant 0$, где $j = 1, \ldots, m$.

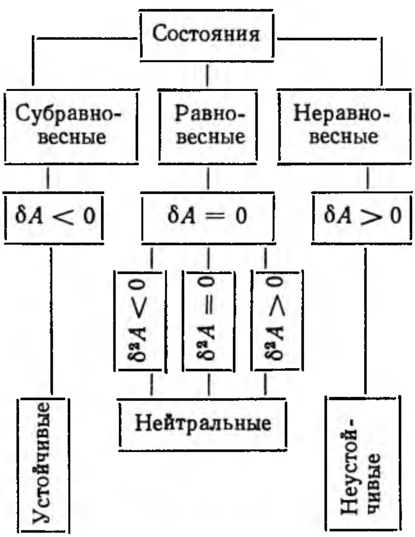
Этот способ варьирования (варьирование по Гриффитсу) [7] использовался тогда, когда к телам с трещинами применяли энергетический подход, ссылаясь, однако, в большинстве случаев не на принцип виртуальных перемещений, а на соотношения энергетического баланса. Для однопараметрических задач при наличии потенциальной энергии системы оба подхода эквивалентны. Принцип виртуальных перемещений позволяет распространить теорию на многопараметрические задачи и непотенциальные системы.

В аналитической механике разрушения целесообразно отдельно рассматривать состояния, для которых на любых виртуальных перемещениях работа всех внешних и внутренних сил строго отрицательна. Эти состояния называются субравновесными. Состояния, для которых имеются такие виртуальные перемещения $\delta l_j > 0$, что выполнено условие $\delta A = 0$, а при остальных $\delta l_j > 0$ $\delta A < 0$, считаются равновесными, а состояния, для которых имеется хотя бы одно виртуальное перемещение, такое, что $\delta A > 0$, — неравновесными.

Для классификации характера распространения трещин можно использовать понятие устойчивости. Субравновесные состояния являются устойчивыми; для перехода в любое смежное состояние необходимы дополнительные энергетические затраты, источники которых в системе отсутствуют. Неравновесные состояния по всей природе неустойчивы.

Равновесные состояния могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Для суждения об их устойчивости возьмем вариацию по Гриффитсу от виртуальной работы δA, т. е. $\delta^2 A \equiv \delta(\delta A)$. Равновесное состояние считается устойчивым, если для любых отличных от нуля виртуальных перемещений δl_j выполнено условие $\delta^2 A < 0$, и неустойчивым, если среди вариаций найдутся такие $\delta l_j > 0$, что $\delta^2 A > 0$. Равновесные состояния, для которых имеются такие вариации $\delta l_j > 0$, что выполнено условие $\delta^2 A = 0$, а при остальных вариациях $\delta^2 A < 0$ считаются нейтральными. Нейтральные состояния могут быть либо критическими, т. е. соответствующими переходу от устойчивого состояния к неустойчивому, либо сомнительными. В последнем случае надо исследовать поведение следующих членов в разложении δA в степенные ряды по δl_j.

Данную классификацию состояний систем тело с трещинами — нагрузка можно выразить в виде схемы, приведенной ниже, где соотношения $\delta A = 0$, $\delta A < 0$ (и т. д.) носят условный характер; их следует понимать в смысле, точно сформулированном в тексте (классификация проведена с четким разделением по двум признакам — равновесности и устойчивости):



Представим виртуальную работу в виде $\delta A = \delta A_e + \delta A_i + \delta A_f$, где δA_e — виртуальная работа внешних сил; δA_i — виртуальная работа внутренних сил во всем объеме тела, за исключением концевых зон — окрестностей фронтов трещин, где происходит интенсивное повреждение и деформирование. Виртуальная работа, совершаемая в концевых зонах, выделена в отдельное слагаемое δA_f. При варьировании по Гриффитсу все члены в правой части будут линейными функциями от вариаций δl_j. Поэтому можно записать

$$\delta A_e + \delta A_i \equiv \sum_{j=1}^{m} G_j \delta l_j;$$

$$\delta A_f \equiv -\sum_{j=1}^{m} \Gamma_j \delta l_j, \qquad (6.15)$$

где множители G_j — обобщенные силы, которые продвигают трещины, т. е. активные обобщенные силы. Аналогично множители Γ_j называются обобщенными силами сопротивления, т. е. пассивными обобщенными силами.

Условие субравновесности $\delta A < 0$ с учетом формул (6.15) принимает вид $G_j < \Gamma_j$, где $j = 1, \ldots, m$. Система находится в равновесном состоянии по m_1 обобщенным координатам $l_1, \ldots, l_{m_1}$, если выполнены условия $G_j = \Gamma_j$ при $j = 1, \ldots, m_1$ и $G_j < \Gamma_j$ при $j = m_1 + 1, \ldots, m$. Наконец, система будет неравновесна, если хотя бы для одного l имеет место неравенство $G_j > \Gamma_j$.

Рассмотрим связь обобщенных сил G_j и Γ_j с обычными понятиями механики разрушения. Пусть внешние и внутренние силы потенциальны (кроме сил, препятствующих продвижению трещины). Тогда $\delta A_e + \delta A_i = -\delta\Pi$, где Π — потенциальная энергия этих сил. С учетом первой формулы (6.15) имеем

$$G_j = -\frac{\partial \Pi}{\partial l_j}. \qquad (6.16)$$

Таким образом, активные обобщенные силы G_j имеют смысл интенсивностей высвобождения энергии. Соответствующие силы сопротивления Γ_j являются характеристиками трещиностойкости. В однопараметрическом случае ($m = 1$) приходим к параметрам Ирвина G и $\Gamma = G_c$.

Аналитическая механика разрушения может быть распространена на усталостные трещины и вообще на трещины замедленного разрушения. Основное положение теории роста усталостных трещин состоит в том, что они распространяются устойчиво при приближенном выполнении условия равновесности по Гриффитсу, в котором учтено влияние микроповреждений на удельную работу разрушения [7].

Рассмотрим векторный процесс $\boldsymbol{l}(t) = \{l_1(t), \ldots, l_m(t)\}$, где t — время, и векторный процесс воздействий $\boldsymbol{s}(t) = \{s_1(t), \ldots, s_\mu(t)\}$. Кроме того, введем процесс $\psi(t) = \{\psi_1(t), \ldots, \psi_\nu(t)\}$, компоненты которого равны мерам микроповреждений на фронтах трещин, а также процесс $\varphi(\boldsymbol{L}, t) = \{\varphi_1(\boldsymbol{L}, t), \ldots, \varphi_\nu(\boldsymbol{L}, t)\}$, который описывает микроповреждения на продолжении $\boldsymbol{L}$ вектора $\boldsymbol{l}$ (траектории трещин считаем заданными). Имеет место тождество $\psi(t) \equiv \varphi[(\boldsymbol{l}(t), t]$.

При циклическом нагружении наряду со временем t введем дискретный аргумент N, который принимает значения, равные номеру цикла или блока нагружения. В дальнейшем для упрощения формулировок будем говорить о циклах нагружения. Условия, накладываемые на δA, выразим через верхние грани разностей $G_j - \Gamma_j$, достигаемые в течение N-го цикла:

$$H_j(N) = \sup_{t_{N-1} \leqslant t < t_N} \times$$
$$\times \{G_j[\boldsymbol{l}(t), \boldsymbol{s}(t), \psi(t)] - $$
$$- \Gamma_j[\boldsymbol{l}(t), \boldsymbol{s}(t), \psi(t)]\}. \quad (6.17)$$

Здесь (t_{N-1}, t_N) — отрезок времени, отвечающий N-му циклу. Система тело с трещинами — нагрузка остается субравновесной в течение N-го цикла, если все $H_j(N) < 0$, и неравновесной, если хотя бы одна из величин $H_j(N) > 0$. Для трещин, равновесных по обобщенной координате l_k, имеем $H_k(N) = 0$.

Условия на обобщенные силы $H_j(N)$ дополним уравнением, которое описывает накопление микроповреждений на продолжении фронтов трещин:

$$\varphi(\boldsymbol{L}, N) - \varphi(\boldsymbol{L}, N-1) =$$
$$= \mathop{\Phi}_{n=1}^{n=N} \{\boldsymbol{l}(n), \boldsymbol{s}(n), \boldsymbol{L}\}. \quad (6.18)$$

Здесь $\Phi\{\ldots\}$ — наследственный оператор, действующий на функции $\boldsymbol{l}(n)$ и $\boldsymbol{s}(n)$ при $1 \leqslant n \leqslant N$.

При $t = 0$ система тело с трещинами—нагрузка находится в субравновесном состоянии и, следовательно, устойчива. При некоторых $0 < t < t_*$ выполнены условия $H_j(N) < 0$ при $j = 1, \ldots, m$. При этом на неподвижных фронтах трещин происходит накопление микроповреждений. Первое нарушение неравенств $H_j(N) < 0$ означает окончание инкубационной стадии.

Характер дальнейшего роста трещин зависит от распределения микроповреждений в окрестности их фронтов. Существуют две типичные ситуации: трещина растет по обобщенной координате l_k квазинепрерывно так, что в пределах каждого цикла выполняется условие $H_k(N) = 0$; трещина распространяется скачкообразно. Система тело с трещинами — нагрузка последовательно переходит из одного субравновесного состояния в другое, проходя через неустойчивые равновесные состояния. Если размеры скачков малы по сравнению с технически значимыми размерами, то скачкообразный рост может быть аппроксимирован непрерывным ростом. Скорость роста трещин приближенно определяется из условия равновесности по соответствующей обобщенной координате.

Поскольку скорость накопления микроповреждений зависит от локальных напряжений, то в теории усталостного разрушения приходится отказываться от представления о трещине как о математическом разрезе. Существенную роль приобретают параметры длины, характеризующие концентрацию напряжений на фронте усталостной трещины. Эти параметры длины имеют смысл некоторых эффективных радиусов кривизны на фронте трещины. В простейших моделях, аналогичных модели механики хрупкого разрушения, эти радиусы можно принять за структурные постоянные материалы. В других случаях, например, при рассмотрении трещин коррозионной усталости характерные радиусы кривизны становятся переменными величинами, связанными с мерами микроповреждений у фронта

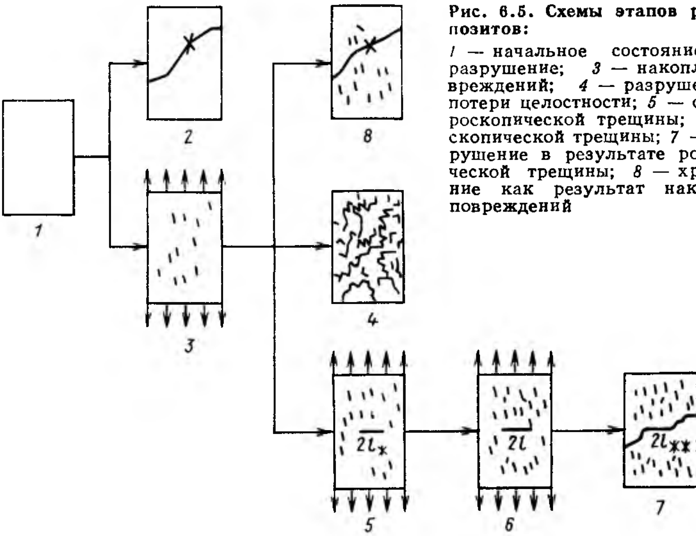


Рис. 6.5. Схемы этапов разрушения композитов:

1 — начальное состояние; *2* — хрупкое разрушение; *3* — накопление микроповреждений; *4* — разрушение вследствие потери целостности; *5* — образование макроскопической трещины; *6* — рост макроскопической трещины; *7* — финальное разрушение в результате роста макроскопической трещины; *8* — хрупкое разрушение как результат накопления микроповреждений

трещины. Для замыкания системы определяющих соотношений наряду с уравнениями типа (6.17) и (6.18) необходимо ввести уравнения для характерных радиусов кривизны на фронте.

6.3. ОСОБЕННОСТИ РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТОВ

Одно из основных направлений механики разрушения композитов — прогнозирование трещиностойкости, статической и циклической прочности композита на основе известных свойств компонентов и проектируемой структуры композита.

Большинство композитов создаются на основе высокопрочных армирующих элементов и матрицы, обладающей достаточно высокой степенью деформативности. При разрушении армирующего элемента или повреждения границы раздела происходит перераспределение напряжений таким образом, что повреждение локализуется в относительно малом объеме. Благодаря этому эффективная прочность композита в целом практически не снижается, что является одним из преимуществ композитов перед большинством традиционных материалов.

Аналогичное явление свойственно композитам, у которых матрица хрупкая, а армирующие элементы обладают высокой пластичностью (например, хрупкая керамика, армированная короткими металлическими волокнами). В этом случае локализация повреждений происходит благодаря высокой деформативности армирующих элементов. Финальному разрушению композита, как правило, предшествует накопление повреждений на уровне структуры, т. е. на уровне волокна, включения и т. п. Поэтому хорошо разработанные методы механики тел с трещинами, в частности, линейной механики разрушения, можно лишь ограниченно применять к композитам. Значительное место в механике разрушения композитов занимают модели, основанные на анализе накопления повреждений на уровне структуры композита. В дальнейшем эти повреждения (в отличие от макроскопических трещин) будут называться микроповреждениями.

Схемы разрушения композитов, учитывающие взаимодействие между процессом накопления микроповреждений

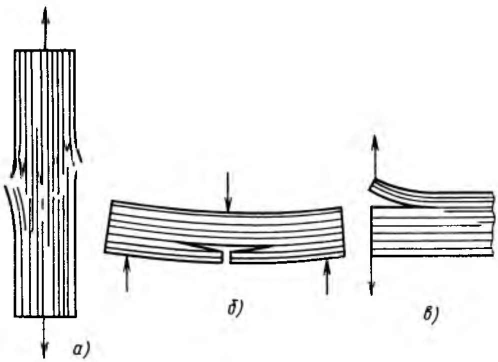


Рис. 6.6. Типы разрушения слоистых композитов:

а — «щеткообразное» разрушение однонаправленных композитов при растяжении вдоль волокон; *б* — продольное растрескивание при испытании по схеме трехточечного изгиба; *в* — межслойное растрескивание при испытании по двухконсольной схеме

и финальным разрушением, приведены на рис. 6.5. В начальном состоянии *1* в образце имеются начальные дефекты той же природы, что и микроповреждения. После приложения нагрузки происходит либо хрупкое разрушение образца (состояние *2*), либо идет процесс накопления микроповреждений (состояние *3*). В последнем случае возможны три варианта. Во-первых, процесс накопления может завершиться вследствие того, что плотность микроповреждений достигает некоторого критического значения, при котором происходит разрушение образца путем потери целостности (состояние *4*). Во-вторых, в окрестности одного или нескольких разрушенных элементов структуры могут образоваться сочетания дефектов, которые станут зародышами макроскопических трещин. Этому соответствует состояние *5*, где характерный размер зародышевой трещины обозначен l_*. Далее происходит постепенный рост трещины (состояние *6*), пока ее размер не достигнет критического значения l_{**} (состояние *7*). В-третьих, возможно хрупкое разрушение *8* как завершение процесса накопления микроповреждений.

Схемы, показанные на рис. 6.5, можно отнести к любому конструкционному материалу. В композитах виды разрушений еще более разнообразны из-за взаимодействия двух и большего числа механизмов повреждений. Например, даже в простейшем случае однонаправленного композита с непрерывными волокнами различают разрывы отдельных волокон, нарушения границы раздела матрицы — волокно, разрушение по матрице, а также взаимодействие этих трех явлений.

Макроскопическое растрескивание композитов также весьма разнообразно по форме. Так, если плоскость начального надреза или трещины направлена ортогонально направлению армирования, то трещина, как правило, развивается совсем не так, как в обычных макроскопически квазиизотропных материалах. Достаточно указать на «щеткообразное» разрушение однонаправленных композитов при растяжении вдоль волокон (рис. 6.6, *а*) и продольное растрескивание образцов при испытаниях на трещиностойкость по схеме трехточечного изгиба (рис. 6.6, *б*). Напротив, если начальная трещина лежит в плоскости армирования, то она растет, оставаясь примерно в этой плоскости. Поэтому для испытания композитов на трещиностойкость в плоскостях армирования пригодны стандартные методы, разработанные для обычных конструкционных материалов [24].

Примером служит испытание на межслойное растрескивание по двухконсольной схеме (рис. 6.6, *в*). Для экспериментальной оценки трещиностойкости в плоскостях армирования часто используют методы, которые были предложены для испытания прочности клеевых соединений [14].

6.4. СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАЗРУШЕНИЯ И МАСШТАБНЫЙ ЭФФЕКТ ПРОЧНОСТИ

Механические свойства композитов имеют случайную природу, поэтому прогноз несущей способности и долговечности конструкции должен иметь вероятностный характер. Поскольку от конструкции требуется высокая надежность, то разрушение должно трактоваться как редкое событие и, следовательно, теоретические выводы должны относиться к событиям малой вероятности. Поэтому весьма желательна разработка стохастических моделей разрушения конструкций из композитов. Стохастические модели должны удовлетворять двум требованиям: во-первых, оставаться состоятельными для малых вероятностей разрушения и, во-вторых, описывать масштабный эффект разрушения, допуская при этом прогнозирование на большие масштабы.

Под масштабным эффектом прочности подразумевают нарушение классических законов подобия, наблюдаемое при механических испытаниях геометрически подобных образцов. Это нарушение кажущееся: оно свидетельствует о том, что на прочность образца влияют также некоторые другие параметры, имеющие размерность длины, но не входящие в классические уравнения теории упругости и пластичности. Это может быть характерный размер волокна, зерна, микроскопической трещины и т. п. Чем грубее структура композита, чем соизмеримее структурные масштабы длины с масштабами образца, тем при прочих равных условиях сильнее проявляется маштабный эффект.

Масштабный эффект прочности композитов является естественным следствием неоднородности структуры. Неоднородность структуры вместе с тем носит стохастический характер. Это происходит из-за разброса механических свойств волокон и материала матрицы, случайной упаковки волокон, начальных разрывов и искривлений волокон, местных нарушений адгезии, пористости связующего и т. п. Таким образом, масштабный эффект прочности и стохастическая природа разрушения композитов оказываются тесно связанными между собой.

Известная модель «слабого звена» (модель Вейбулла) может служить примером стохастической модели, удовлетворяющей поставленным выше требованиям [2]. Но эта модель и ее различные обобщения относятся к случаю идеально хрупкого материала, не позволяя описывать вязкие эффекты разрушения, резервирование, перераспределение поля напряжений и т. п. Применительно к большинству композитов на основе полимерных и металлических матриц эта модель непригодна. Удачные попытки статистической обработки экспериментальных данных по композитам при помощи модели Вейбулла — это не более чем аппроксимация эмпирического распределения при помощи двух- или трехпараметрического распределения. Если в результаты аппроксимации ввести зависимость от масштаба, содержащуюся в модели Вейбулла, то экстраполяция на большие масштабы, как правило, окажется неудовлетворительной.

Альтернативой является модель «пучка волокон» Даниэлса [23], которая связывает разрушающую нагрузку для пучка волокон с математическим ожиданием суммы разрушающих нагрузок для отдельных волокон. Тем самым модель в существенной степени учитывает резервирование и вязкий характер разрушения. Применение модели Даниэлса может привести к чрезмерно оптимистическим выводам о надежности конструкции (особенно в области высоких надежностей), а также преуменьшить снижение надежности с ростом масштаба.

В последние годы разработаны модели, объединяющие подход Вейбулла и Даниэлса. Например, призматический образец из однонаправленного волокнистого композита представляют в виде последовательного соединения звеньев, каждое из которых имеет длину, равную неэффективной длине волокна. К каждому звену применяется подход Даниэлса, а последовательное соединение звеньев в сущности эквивалентно подходу Вейбулла. В некоторых моделях учитывается возможность разрыва двух или нескольких рядом расположенных волокон, принимается во внимание концентрация напряжений вблизи разрыва и т. п. Эти модели обладают большей гибкостью, чем модели Вейбулла и Даниэлса, и при надлежащем выборе параметров могут хорошо согласовываться с результатами эксперимента [1, 22].

Наиболее общий подход к проблеме разрушения композитов основан на использовании кинетических моделей. Этот подход позволяет в рамках одной модели учесть нестационарный процесс нагружения, временное запаздывание разрушения, накопление отдельных повреждений, их слияние в магистральную трещину и развитие последней [4, 19]. Из-за очень большой размерности пространства состояний для реалистических моделей к удовлетворительным результатам приводят лишь самые простые модели.

При использовании модели квазинезависимых повреждений, позволяющей вычислять и оценивать показатели надежности конструкций из композитов с учетом масштабного эффекта, применяют следующую систему допущений [5].

1. Тело (образец или элемент конструкции) состоит из большого числа одинаковых в статистическом смысле первичных объемов (структурных элементов), разрушение каждого из которых происходит квазинезависимым образом. Структурный элемент разрушается, когда номинальное напряжение σ достигает предельного значения s для этого элемента. Это значение является случайной величиной с заданной функцией распределения $F(s)$.

2. Тело, в свою очередь, может быть разбито на конечное число критических объемов (элементов), разрушение хотя бы одного из которых влечет за собой разрушение тела в целом. В частном случае критический объем может совпадать с объемом тела.

3. Критический объем разрушается, если число разрушенных структурных элементов в этом объеме достигнет некоторого предельного значения, которое по предположению является неслучайной (заданной) величиной. При этом отношение предельного числа структурных элементов к их общему числу достаточно мало по сравнению с единицей.

4. Число структурных элементов в критическом объеме, их предельное число, упомянутое в допущении 3, представляют собой достаточно большие числа.

Допущение 1 используется в большинстве статистических моделей разрушения, начиная с модели Вейбулла. Допущение 2 выражает концепцию «слабого звена», применяемую, однако, не к малым элементам структуры, а к макроэлементам. Предполагается, что размеры, форма и размещение критических объемов в реальной конструкции оцениваются на основании наблюдений над характером разрушения конструкции или ее моделей. Выбор критических объемов производится с учетом геометрии реальной конструкции, вида нагружения, а также механических характеристик композита. Введение промежуточного масштаба геометрического подобия позволяет более гибко описать явление масштабного эффекта.

Первая часть допущения 3 не требует специальных комментариев. Вторая часть позволяет приближенно принять, что разрушение одного первичного элемента не влияет на поведение остальных. Таким образом, на данной стадии рассмотрения не учитываются вероятности одновременного обрыва двух или более элементов, прогрессивного развития трещины и т. п. Допущения 4 вводятся лишь для того, чтобы обосновать применение предельных теорем теории вероятностей и переход к асимптотическим распределениям. Экспериментальным основанием для этих допущений могут служить наблюдения над процессом последовательного разрыва волокон в механических моделях однонаправленных композитов [1, 4].

Рассмотрим критический объем V_0, содержащий N структурных элементов. Функция распределения $F(s)$ может быть истолкована как вероятность разрушения наугад взятого структурного элемента при номинальном напряжении σ, не превышающем s. Отсюда вероятность события, состоящего в том, что из N элементов будет

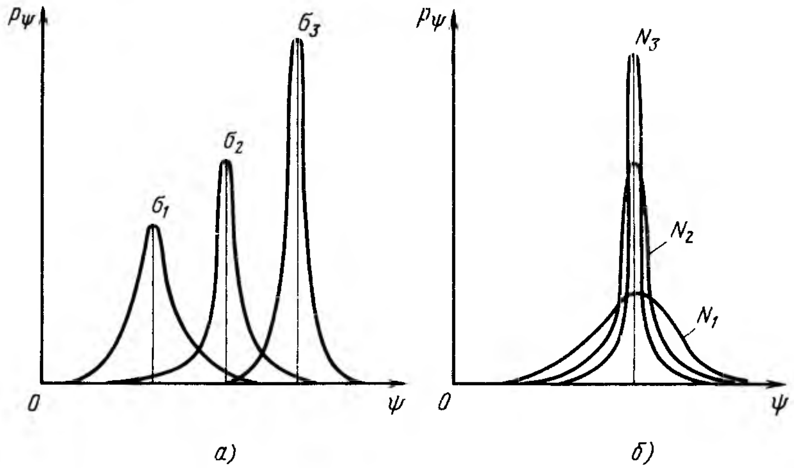


Рис. 6.7. Зависимости плотности распределения $p_\psi(\psi)$ меры микроповреждений от номинального напряжения σ (*а*) и числа структурных элементов N (*б*)

разрушено не менее чем n элементов, определяется как

$$P_N^n = \sum_{k=0}^{n} C_N^k F^k(s)\,[1 - F(s)]^{N-k}. \tag{6.19}$$

Здесь C_N^k — биноминальные коэффициенты. При не очень малых для приближенной оценки вероятности (6.19) используем центральную предельную теорему. Для меры микроповреждений $\psi = n/N$ получим асимптотическое распределение вероятности:

$$F_\psi(\psi;\ \sigma) \sim$$
$$\sim \Phi\left\{\frac{\psi - F(\sigma)}{(F(\sigma)\,[1 - F(\sigma)]\,N^{-1})^{1/2}}\right\}, \tag{6.20}$$

где $\Phi(u)$ — функция нормированного распределения Гаусса, т. е.

$$\Phi(u) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{u} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz.$$

Из формулы (6.20) видно, что математическое ожидание меры повреждения $\mathbf{E}(\psi(\sigma))$ и коэффициент вариации этой меры $w_\psi(\sigma)$ асимптотически выражаются через функцию распределения $F(s)$ и число первичных элементов N следующим образом:

$$\mathbf{E}[\psi(\sigma)] \sim F(\sigma);$$
$$w_\psi(\sigma) \sim \left[\frac{1 - F(\sigma)}{NF(\sigma)}\right]^{1/2}. \tag{6.21}$$

Графическое выражение формул (6.20) и (6.21) приведено на рис. 6.7. По оси ординат отложена плотность вероятности $p_\psi(\psi;\ \sigma) = \partial F\psi(\psi;\ \sigma)/\partial\psi$, рассматриваемая как функция номинального напряжения σ и числа первичных элементов N. Вычисления выполнены в предположении, что прочность структурных элементов подчиняется распределению Вейбулла

$$F(s) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{s}{s_c}\right)^\alpha\right], \tag{6.22}$$

где s_c и α — некоторые постоянные. С ростом напряжения σ распределение (6.20) становится более компактным. Аналогичный эффект наблюдается с ростом числа первичных элементов N, т. е. с увеличением критического ма, ответственного за прочность тела в целом, или уменьшением масштаба структуры.

Согласно допущению 3 функция распределения разрушающего напряжения σ_* для критического объема V_0 может быть выражена через функцию распределения меры повреждений (6.20):

$$F_*(\sigma_*) \sim 1 - \sim \Phi\left\{\frac{\psi_* - F(\sigma_*)}{(F(\sigma_*)[1 - F(\sigma_*)] N^{-1})^{1/2}}\right\}. \quad (6.23)$$

Несмотря на то, что в формулу (6.23) входит функция распределения Гаусса, эта формула дает для разрушающего напряжения σ_* распределение, которое существенно отличается от нормального. В частности, поскольку по условию разрушающее напряжение структурных элементов распределено на положительной полуоси, то и разрушающее напряжение σ_* для критического объема также распределено на положительной полуоси.

Некоторые выводы качественного характера можно сделать при анализе формулы (6.23): в частности, с ростом числа структурных элементов N распределение F_* (σ_*) становится более компактным, причем при $N \to \infty$ коэффициент вариации ω_σ разрушающего напряжения стремится к нулю.

В рассмотренной модели характерный масштаб образца или конструкции влияет на разрушающую нагрузку. Если материал тела таков, что критический объем, определяющий прочность тела в целом, совпадает с объемом тела, то прогнозирование масштабного эффекта (в том числе и при высоких показателях надежности) может быть проведено на основе формул типа (6.20), (6.21) и (6.23). При этом из теории следует повышение надежности с увеличением масштаба, что происходит главным образом за счет уменьшения разброса характеристик прочности и долговечности при относительно слабом уменьшении их средних значений.

Пусть тело объемом V состоит из m критических объемов $V_1, V_2, \ldots, V_m$. В рамках допущения (2) разрушение тела произойдет, как только в одном из этих объемов мера повреждения достигнет предельного значения. Номинальные напряжения могут изменяться при переходе от одного критического объема к другому. Но если все нагрузки заданы с точностью до одного параметра σ, то функция распределения для каждого критического объема может быть выражена через этот параметр по формулам типа (6.23). Обозначив функцию распределения для объема V_k через $F_*^k(\sigma_*)$, получим для функции распределения F_{**} (σ_{**}) тела в целом выражение

$$F_{**}(\sigma_{**}) = 1 - \prod_{k=1}^{m} [1 - F_*^k(\sigma_{**})]. \quad (6.24)$$

Формула (6.24) выражает концепцию «слабого звена», примененную на уровне макрообъемов $V_1, V_2, \ldots, V_m$. С увеличением числа этих макрообъемов (при прочих равных условиях) надежность системы уменьшается. Таким образом, рассматриваемая модель объединяет две противоположные тенденции масштабного эффекта и поэтому обладает большой гибкостью. Гибкость модели возрастает за счет значительной свободы в выборе размеров, формы и расположения критических объемов.

Рассмотрим множество геометрически подобных тел из одного и того же композита. Характерный масштаб тела обозначим через L. Пусть функция распределения разрушающего непряжения (усилия) для тела описывается зависимостью (6.23). Если при изменении L все критические объемы изменяются пропорционально L, то масштабный эффект будет определяться только числом первичных элементов (рис. 6.8, *а*), т. е. имеет место зависимость квантилей σ_{**} распределения F_{**} (σ_{**}). Противоположный случай возможен, когда размеры критических объемов не зависят от L, тогда масштабный эффект определяется в соответствии с концепцией «слабого звена» (рис. 6.8, *б*). Размеры и форма критических объемов могут достаточно произвольно зависеть от масштаба длины L. В частности, можно указать условия, при

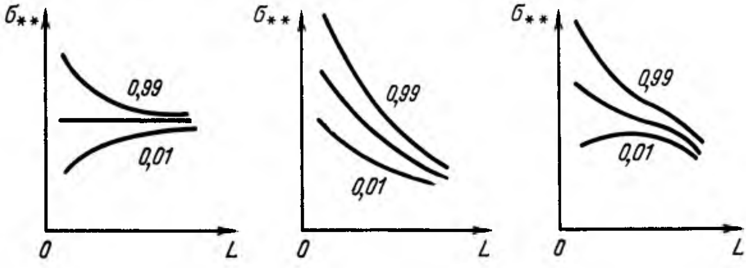


Рис. 6.8. Масштабный эффект прочности композита:
а — все критические объемы пропорциональны L^3; *б* — размеры критических объемов не зависят от L; *в* — общий случай зависимости критических объемов от L

которых изменение квантилей высокой надежности будет немонотонным (рис. 6.8, *в*). Размеры и форма критических объемов должны выбираться на основании изучения механизма разрушения геометрически подобных тел разного масштаба, что является условием успеха при прогнозировании надежности на крупногабаритные конструкции.

6.5. НАКОПЛЕНИЕ МИКРОПОВРЕЖДЕНИЙ В ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТАХ

Пусть однонаправленный волокнистый композит подвергается растяжению в направлении волокон с номинальными напряжениями σ. На ранних этапах происходит накопление рассеянных микроповреждений. Следует различать по крайней мере два вида повреждений (рис. 6.9). Первый вид — единичные разрывы волокон (см. рис. 6.9, *а*) — характеризуется отношением ψ_1 числа разрывов в рассматриваемом объеме V к общему числу элементов структуры в этом объеме. Под элементом структуры, как обычно, понимается отрезок волокна вместе с примыкающей частью матрицы и длиной, которая равна удвоенной длине передачи — неэффективной длине λ_e, рассчитанной в предположении упругого деформирования матрицы [3,20]. Второй вид — повреждение матрицы (см. рис. 6.9, *б*) — характеризуется отношением суммы длин поврежденных участков границы матрица—волокно к общей длине волокон в рассматриваемом объеме. Эта мера повреждений обозначается через ψ_2.

Опишем накопление микроповреждений в композите при помощи векторного процесса с составляющими $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$. Если матрица деформируется упруго, то $\psi_2 \equiv 0$.

В некоторый момент времени t_* плотность микроповреждений достигает некоторого критического уровня. Характер процесса качественно изменяется. Может произойти либо разрушение композита вследствие потери целостности (т. е. из-за одновременного образования множественных трещин), либо могут образоваться одна или несколько устойчивых макроскопических трещин при сохранении целостности композита. Финальное разрушение наступит в момент времени t_{**}, когда размер одной или нескольких

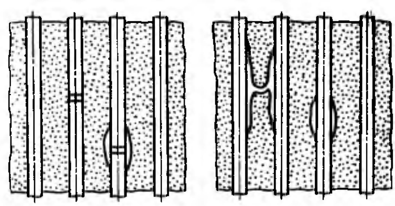


Рис. 6.9. Виды рассеянных повреждений однонаправленного волокнистого композита:
а — единичные разрывы волокон; *б* — разрушение границы матрица—волокно

трещин достигнет некоторого критического значения. Формально разрушения вследствие потери целостности можно включить в эту схему, полагая, что число образовавшихся трещин весьма велнко и что $t_{**} = t_*$.

Будем считать, что все волокна первоначально непрерывные с круговым сечением одинакового радиуса r; объемное содержание волокон v_f постоянно в V; материал волокон линейно упругий с модулем Юнга E_f вплоть до разрушения; материал матрицы — идеальный упругопластический с модулем упругости E_m, модулем сдвига G_m и предельным напряжением при кратковременном сдвиге τ_m. Это можно истолковать либо как предел текучести матрицы, либо как напряжение трения на поврежденной границе матрица — волокно, либо как некоторое предельное напряжение, которое учитывает все неупругие явления при повреждении матрицы.

Временными эффектами при деформировании матрицы будем пренебрегать, полагая, что время распространения расслоения вдоль матрицы мало по сравнению с характерным временем жизни нагруженных волокон [6].

Оценки, приведенные ниже, будут носить качественный характер, выкладки будут сделаны на физическом уровне строгости, в частности, будут опускаться множители порядка единицы (за исключением случаев, когда эти множители нужны для качественных выводов) и отбрасываться малые слагаемые.

Если не учитывать микроповреждений в композите, то связь между напряжениями σ_f в волокнах и номинальными напряжениями в композите σ определяется как обычно.

Примем $E_m/E_f \ll 1$, $v_f \sim 1$; при этом $\sigma \sim \sigma_f$. Мы не будем учитывать изменение номинальных напряжений в процессе развития трещин, полагая, что размеры последних малы по сравнению с размерами сечения, а также концентрацию напряжений на фронте трещин (ввиду расслоения волокон на фронте и выраженного масштабного эффекта прочности волокон эффективные коэффициенты концентрации будут довольно близки к единице).

При обсуждении вероятностных оценок будем широко использовать предельные теоремы, а для макроскопических величин будем давать оценки «почти наверное», т. е. с вероятностью порядка единицы, отождествляя детерминистические величины с медианами распределения, квантилями порядка $1 - e^{-1} = 0{,}632\ldots$ и т. п. Многие из введенных ограничений легко снять; но этого делать не следует, чтобы конечные формулы обладали максимальной простотой и наглядностью.

Представим композит как совокупность большого числа структурных элементов — отрезков волокон с примыкающей матрицей и длиной

$$\lambda_e \sim r\left(\frac{E_f}{2G_m}\right)^{1/2}. \qquad (6.25)$$

При достаточно больших напряжениях матрица в окрестности разрыва деформируется неупруго. Характерная длина передачи усилия с разорванного волокна [11]

$$\lambda_p \sim r\,\frac{\sigma}{2\tau_m} \qquad (6.26)$$

зависит от номинальных напряжений в волокнах, обозначаемых (здесь и в дальнейшем) через σ. Для простоты будем считать, что переход от (6.25) происходит при $\sigma = \sigma_Y$, где напряжение σ_Y находится из условия $\lambda_e = \lambda_p$. Объединив (6.25) и (6.26), получим оценку для характерной длины

$$\lambda \sim \left\{ r\left(\frac{E_f}{2G_m}\right)^{1/2}, \quad r\,\frac{\sigma}{2\sigma_m} \right\}. \qquad (6.27)$$

Здесь и в дальнейшем первый член в фигурных скобках относится к упругой матрице, второй член — к неупругой матрице.

При переменных напряжениях, когда нарушается условие $\sigma < \sigma_Y$, все же целесообразно считать общее число структурных элементов постоянным и имеющим порядок $N \sim V/V_r$, где $V_r \sim 2\pi r^2 \lambda_e$. За первую меру микроповреждений ψ_1 примем отношение числа разорванных структурных элементов к числу N. Для учета повреждений границы матрица—волокно введем вторую меру:

$$\psi_2(t) = \int_0^t \Lambda(t, \tau)\, d\psi_1(\tau). \qquad (6.28)$$

Ядро в (6.28) определяется как

$$\Lambda(t, \tau) = \begin{cases} 0, \ \sigma(t, \tau) < \sigma_Y; \\ \dfrac{\sigma(t, \tau)}{\sigma_Y} - 1, \ \sigma(t, \tau) \geqslant \sigma_Y. \end{cases} \qquad (6.29)$$

Здесь $\sigma(t, \tau) = \sup \sigma(\tau_1)$ при $\tau_1 \in [\tau, t]$. Иногда удобно ввести третью меру микроповреждений $\psi_3 = \psi_1 + \psi_2$. При $\psi_3 < 1$ эта мера может быть истолкована как отношение суммы всех неэффективных длин к общей длине волокон.

При достаточно малой плотности повреждений допустимо пренебречь взаимодействием между разрывами отдельных структурных элементов (процесс укрупнения повреждений будет рассмотрен позднее). Пусть процесс накопления повреждений в каждом структурном элементе описывается уравнением

$$\frac{d\varphi}{dt} = f(\varphi, \sigma, \psi_1, \psi_2, s). \qquad (6.30)$$

Здесь $\varphi(t)$ — мера повреждения элемента; s — характеристика прочности структурного элемента, которая предполагается случайной величиной с функцией распределения $F(s; \lambda)$, зависящей от рабочей длины 2λ. Эту функцию распределения считаем заданной. Время жизни τ наугад взятого элемента при заданных $\sigma(t)$, $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ определяется из решения обратной краевой задачи для уравнения (6.30) с граничными условиями $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\tau) = 1$. Уравнения типа (6.30) могут описывать процесс накопления повреждений не только при длительно действующих, но и при циклических напряжениях. Например, если напряжения изменяются по синусоидальному циклу с амплитудой σ, которая в свою очередь является функцией «медленного» времени, то $\varphi(t)$ есть функция «медленного» времени t.

Процесс $\psi_1(t)$ является ступенчатым процессом. Поскольку $\psi_1 N \gg 1$, то заменяем его сглаженным процессом. Асимптотическое представление для функции распределения этого процесса дано в [5]. При $\psi_1 \ll 1$, $\psi_1 N \gg 1$ можно положить

$$\psi_1(t) \sim F_\tau(t), \qquad (6.31)$$

где $F_\tau(\cdot)$ — функция распределения времени жизни структурных элементов.

Если правая часть в уравнении (6.30) не зависит от ψ_1 и ψ_2, то решение задачи упрощается. Для примера запишем уравнение (6.30) в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{t_c}\left(\frac{\sigma}{s}\right)^m. \qquad (6.32)$$

Здесь t_c — характерное время; s — характерное напряжение; m — показатель кривых длительной прочности волокон при постоянном напряжении. При циклических напряжениях t_c имеет смысл продолжительности цикла, σ — амплитуды напряжений, m — показателя кривых усталости волокон. Для параметра s двухпараметрическое распределение Вейбулла

$$F_s(s; \lambda) = 1 - \exp\left[-\frac{\lambda}{r}\left(\frac{s}{s_c}\right)^\alpha\right], \qquad (6.33)$$

где s_c — характерная прочность волокон; $\alpha \geqslant 1$ — коэффициент, характеризующий изменчивость прочности. Если t_c имеет порядок продолжительности стандартных испытаний на кратковременную прочность, то постоянная s_c приобретает смысл характерной прочности волокон при кратковременных испытаниях на базе длиной $2r$ (в действительности испытания производят на значительно большей базе, так что величина s_c оценивается путем экстраполяции опытных данных).

Пусть $\sigma = \mathrm{const} < \sigma_Y$. Тогда из уравнения (6.32) с использованием соотношений (6.31) и (6.33) находим, что

$$\psi_1(t) = 1 - \exp\left[-\frac{\lambda_e}{r}\left(\frac{\sigma}{s_c}\right)^\alpha\left(\frac{t}{t_c}\right)^\beta\right], \qquad (6.34)$$

где $\beta = \alpha/m$ — показатель, характеризующий разброс долговечности [illegible]

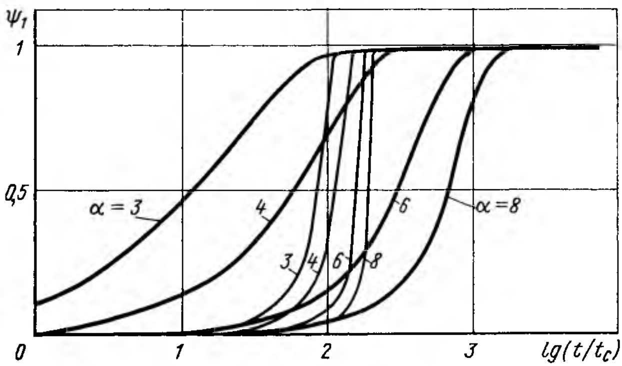


Рис. 6.10. Зависимость меры микроповреждений от времени (при различных α)

кон. При $\sigma = \dot{\sigma} t < \sigma_Y$ (где $\dot{\sigma} = \mathrm{const}$) аналогично получим

$$\psi_1(t) = 1 -$$

$$-\exp\left\{-\frac{\lambda_e}{r}\left(\frac{\dot{\sigma} t}{s_c}\right)^{\alpha}\left[\frac{1}{(m+1)\,t_c}\right]^{\beta}\right\}. \qquad (6.35)$$

Типичные зависимости $\psi_1\ (t)$, построенные по формулам (6.34) и (6.35), представлены на рис. 6.10. Жирные линии соответствуют нагружению при $\sigma = \mathrm{const}$, тонкие — нагружению при $\dot{\sigma} = \mathrm{const}$. При этом $m = 4$, $\sigma/s_c = 10^{-1}$, $\dot{\sigma} t_c/s_c = 10^{-3}$, $\lambda_e/r = 10^2$. На рис. 6.11 показано изменение во времени величины $L = \lg\ (I/I_0)$, где $I = \mathrm{const}\ \sigma^2\dot{\psi}$, $I_0 = \mathrm{const}$. Эта величина характеризует логарифмический уровень энергии деформации, освобождающейся в единицу времени вследствие разрыва волокон. В первом приближении можно считать, что величина L пропорциональна уровню акустического излучения при неразрушающих испытаниях.

Если в процессе нагружения нарушается неравенство $\sigma < \sigma_Y$, то воз-

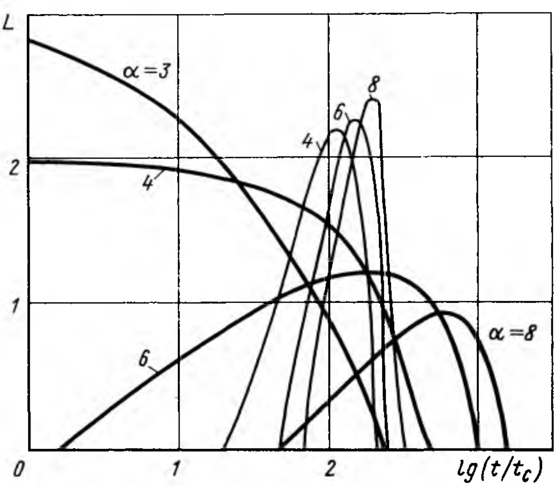


Рис. 6.11. Зависимость логарифмического уровня высвобождающейся энергии от времени (при различных α): ——— — при постоянной нагрузке; ——— — при линейно-возрастающей нагрузке

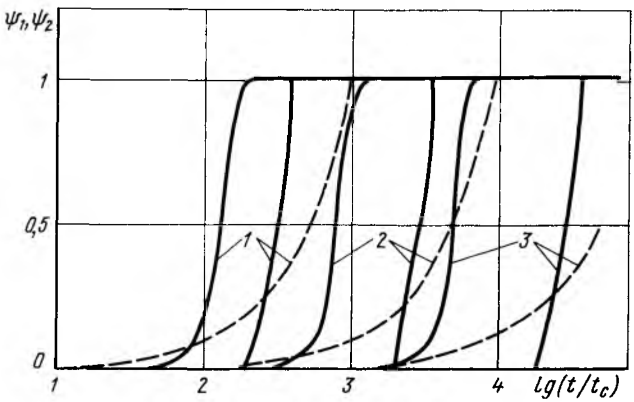


Рис. 6.12. Зависимость мер микроповреждений ψ_1 и ψ_2 при линейно возрастающей нагрузке:

— — — изменение напряжений в волокнах

никает необходимость введения меры повреждений ψ_2. Изменение двух мер повреждения во времени при $\dot{\sigma} =$ $=$ const показано на рис. 6.12. Принято, что $m = \alpha = 4$, $\lambda_e/r = 10^2$, $\sigma_Y = 0{,}2s_c$, а значения $\dot{\sigma}t_c/s_c$ для кривых *1*, *2*, *3* равны соответственно 10^{-3}, 10^{-4} и 10^{-5}.

Приведенные графики неприменимы при значениях ψ_1 и ψ_2, достаточно близких к единице, поскольку при этом утрачивают смысл исходные допущения. По той же причине эти графики не учитывают энергию, которая освобождается при объединении двух или нескольких разрывов. Критические значения плотности повреждений малы по сравнению с единицей, так что практическое значение имеют только начальные участки кривых.

Проанализируем условия разрушения вследствие потери целостности [16]. При упругом деформировании матрицы эти условия выражаются через меру повреждения ψ_1, при неупругом — через ψ_1 и ψ_3. Так как при упругом деформировании матрицы $\psi_2 = 0$, то в дальнейшем рассмотрим меру ψ_3. Условие разрушения постулируем в виде $\psi_3 = \psi_{**}$, где критическое значение ψ_{**} — некоторая постоянная для данного композита. Верхняя граница $\psi_{**} = 1$ соответствует либо разрушению всех элементов, либо полной потере эффективности матрицы.

Нижнюю границу для критического значения оценим из условия, что почти наверное у каждого разрушенного элемента найдется соседний разрушенный элемент. При таком «двойниковании» появляются новые соседи и образуется немалая вероятность последующего объединения очагов разрушения, что и составляет механизм разрушения путем потери целостности. Обозначим число соседей через n_{**}. Учитывая, что неэффективная длина $\lambda = \lambda_e\psi_3/\psi_1$, определим вероятность такой ситуации, как $1 - (1 -$ $- \psi_1)^{n_{**}\psi_3/\psi_1} \sim n_{**}\psi_3$. Отсюда

$$\psi_{**} \sim n_{**}^{-1}. \qquad (6.36)$$

При гексагональной укладке число боковых соседей $n_{**} = 6$, а число всех соседей $n_{**} = 20$. Некоторые экспериментальные данные указывают на то, что после разрушения вследствие потери целостности примерно 10% структурных элементов оказываются разрушенными.

Применим оценку (6.36) для вычисления разрушающих напряжений при кратковременном нагружении композита. Используя формулу (6.35) при $t \sim t_c$, $\dot{\sigma} t_c \sim \sigma_{**}$, получаем

$$\psi_3(t_c) \sim \frac{\lambda}{r}\left(\frac{\sigma_{**}}{s_c}\right)^{\alpha} \frac{1}{(m+1)^{\beta}}.$$

Отсюда с учетом (6.27) получаем оценку (при $m^{1/m} \sim 1$)

$$\sigma_{**} \sim \left\{\frac{s_c}{n_{**}^{1/\alpha}}\left(\frac{2G_m}{E_f}\right)^{1/2\alpha}, \frac{s_c}{n_{**}^{1/(\alpha+1)}}\left(\frac{2\tau_m}{s_c}\right)^{1/(\alpha+1)}\right\}. \quad (6.37)$$

Первое произведение в фигурных скобках аналогично по структуре и порядку оценке Розена. Второе произведение учитывает неупругое деформирование матрицы. При больших α (что соответствует малой изменчивости прочности волокон) разрушающее напряжение довольно слабо зависит от величины n_{**}.

6.6. ЗАРОЖДЕНИЕ И РОСТ ПОПЕРЕЧНЫХ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ТРЕЩИН В ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТАХ

Зародыш макроскопической трещины — это пучок из n_* разорванных волокон, так что ее размер $l_* \sim r n_*^{1/2}$. Выбор числа n_* достаточно условен. Например, при гексагональной укладке для зародыша внутренней трещины естественно положить $n_* = 7$. Зародыш образуется, если в объеме V найдется хотя бы один разрушенный структурный элемент, соседями которого в поперечном сечении окажутся $n_* - 1$ разрушенных структурных элементов. Отсюда

$$F_*(t_*) = 1 - [1 - F_\tau(t_*;\ \lambda_e) \times F_{\tau *}^{n_*-1}(t_*;\ \lambda)]^{\psi_1(t_*) N}. \quad (6.38)$$

Здесь $F_\tau(t_*; \lambda_e)$ и $F_{\tau *}(t_*; \lambda)$ — вероятности образования соответственно первичного и вторичного разрыва.

При вычислении функции $F_*(t_*)$ следовало бы рассмотреть различные варианты последовательности образования вторичных разрывов [4, 19]. Но при этом после каждого разрыва величина λ будет изменяться, что крайне усложняет расчет. В формуле (6.38) в первом приближении принято, что вторичные разрывы происходят одновременно. Тогда под λ надо понимать среднее значение неэффективной длины после первичного разрыва.

Заменив в формуле (6.38) $N = V/V_r$, $F_\tau(t; \lambda_e) \approx \psi_1(t)$, $F_{\tau *}(t; \lambda) \approx \psi_3(t)$, получим при $\psi_1 N \gg 1$, $\psi_3 \ll 1$ асимптотическое распределение для моментов t_* образования первого зародыша:

$$F_*(t_*) \sim 1 - \exp - \left[-\frac{V}{V_r}\psi_1(t_*)\,\psi_3(t_*)^{n_*-1}\right]. \quad (6.39)$$

Если свойства композита таковы, что макроскопическая трещина зарождается только у его поверхности [2], то в формуле (6.39) надо заменить V на S, V_r на S_r и принять, что $n_* = 3$ или $n_* = 4$.

С учетом приведенных выше результатов можно сделать практические выводы о влиянии масштабного эффекта на прочность композита. Пусть, например, $\sigma = \text{const}$, а матрица работает упруго вплоть до разрушения композита. Тогда из формул (6.34) и (6.39) получим

$$F_*(t_*) \sim 1 - \exp\left[-\frac{V}{V_r}\left(\frac{\lambda_e}{r}\right)^{n_*} \times \left(\frac{\sigma}{s_c}\right)^{\alpha n_*}\left(\frac{t_*}{t_c}\right)^{\beta n_*}\right]. \quad (6.40)$$

В эту формулу нетрудно ввести эффективный коэффициент концентрации напряжений $\varkappa$; он войдет под знак экспоненты как множитель $\varkappa^{\alpha(n_*-1)}$.

Составим отношение математических ожиданий для времен t_* при одинаковом уровне напряжений и различных объемах V_1 и V_2:

$$\frac{E[t_{*,1}]}{E[t_{*2}]} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1/\beta n_*}. \quad (6.41)$$

Здесь $E[\cdot]$ — оператор математического ожидания. Аналогично для напряжений, приводящих к образованию зародыша при одинаковых t, имеем

$$\frac{E\,[\sigma_{*,\,1}]}{E\,[\sigma_{*,\,2}]} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1/\alpha n_*}. \quad (6.42)$$

В эти соотношения, помимо показателей масштабного эффекта волокон α и β, входит число n_*, характеризующее размер зародыша макроскопической трещины. Таким образом, композиты обнаруживают тем меньшую чувствительность к масштабному эффекту, чем большее число разорванных волокон образует зародыш макроскопической трещины. Соотношения (6.41) и (6.42) могут быть использованы для оценки числа n_*, входящего в формулы (6.38)—(6.40).

Рассмотрим процесс устойчивого подрастания поперечной трещины в однонаправленном волокнистом композите [6]. Такие трещины из-за расслоения волокон представляют собой пространственные образования, вытянутые вдоль армирования. С ростом размера трещины растет длина соседних «оголенных» волокон. Например, внутренняя дисковая трещина (рис. 6.13) занимает область, которую можно представить в виде цилиндра радиусом l и длиной 2λ, определяемой выражением

$$\lambda \approx \left\{(lr)^{1/2}\left(\frac{Ef}{2G_m}\right)^{1/2},\; l\,\frac{\sigma}{2\tau_m}\right\}. \quad (6.43)$$

Оценка (6.43), переходящая в (6.27) при $l \sim r$, получается так же, как оценка (6.27).

Пусть в момент t трещина имеет размер l. Оценим время, в течение которого размер увеличивается до $l + \Delta l$, где $\Delta l \sim 2r$. Число волокон, находящихся на фронте трещины, имеет порядок $2\pi n^{1/2}$, т. е. достаточно велико. Ввиду перемещения волокон по их свойствам совокупность, находящаяся на фронте, образует выборку, которая обладает достаточной эргодичностью. Если обозначить продолжительность жизни отрезка волокна на фронте трещины через $\Delta\tau$, то среднее время подрастания трещины на один ряд волокон будет близко к математическому ожиданию $E\,[\Delta\tau]$. Отсюда

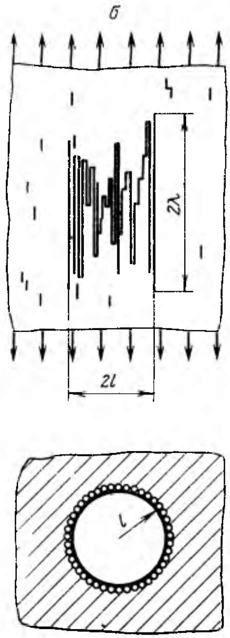


Рис. 6.13. Модель внутренней дисковой трещины в однонаправленном волокнистом композите

для средней скорости подрастания трещины полудетерминистическая оценка

$$\frac{dl}{dt} \sim \frac{2r}{E\,[\Delta\tau]}. \quad (6.44)$$

Пусть $\Delta\tau \ll t_{**} - t_*$. Если пренебречь повреждением, то осреднение в уравнении (6.44) может быть выполнено при помощи функции $F_s\,(s;\,\lambda)$. В результате приходим к приближенному уравнению

$$\frac{dl}{dt} \sim 2r \int\limits_0^\infty \frac{\partial F_s\,(s;\,\lambda)}{\partial s}\; \frac{ds}{f\,[\varkappa\sigma\,(t),\,s]}. \quad (6.45)$$

Здесь $\varkappa$ — эффективный коэффициент концентрации на фронте трещины.

Вычислим правую часть в (6.45) в предположении, что прочность волокон подчиняется распределению

(6.33) и $\Gamma(1+1/\beta)\sim 1$. Тогда

$$\frac{dl}{dt}\sim\left\{\frac{2r}{t_c}\left(\frac{\varkappa\sigma}{s_c}\right)^m\left(\frac{l}{r}\right)^{1/2\beta}\times\right.$$
$$\times\left(\frac{F_f}{2G_m}\right)^{1/2\beta},\ \frac{2r}{t_c}\left(\frac{\varkappa\sigma}{s_c}\right)^{1/\beta}\times$$
$$\left.\times\left(\frac{\sigma}{2\tau_m}\right)^{1/\beta}\right\}. \qquad (6.46)$$

Уравнение (6.46) по структуре аналогично полуэмпирическим уравнениям типа уравнения Пэриса—Эрдогана в линейной механике разрушения. Применительно к замедленному разрушению простейшее уравнение имеет вид

$$\frac{dl}{dt}=cK^m. \qquad (6.47)$$

где $K=Y\sigma(\pi l)^{1/2}$ — коэффициент интенсивности; c и m — некоторые эмпирические постоянные.

Уравнение (6.46) приводится к виду (6.47) только при $\alpha=1$, что соответствует экспоненциальному распределению прочности волокон. При этом показатель у интенсивности напряжений в уравнении Пэриса—Эрдогана окажется равным m (т. е. показателю кривых длительной прочности или кривых усталости у волокон), если матрица деформируется упруго, и $2m$ при неупругом деформировании матрицы. В действительности параметр α принимает для технических волокон значения $\alpha=5$ и более. Поэтому уравнение (6.46) и более общие уравнения, которые учитывают предварительное повреждение волокон, не вписываются в схему линейной механики разрушения.

Рассмотрим вопрос об устойчивости поперечных трещин в волокнистых композитах. Определим критический размер трещины l_{**} как такое значение l, при котором каждое волокно на фронте трещины с вероятностью порядка единицы окажется разрушенным. Будем трактовать, как и ранее, дисковую трещину в большом массиве композита (с учетом расслоений) как трехмерное образование (см. рис. 6.13). Событие, состоящее в том, что наугад взятое волокно на фронте будет разрушено, есть объединение двух событий: кратковременного разрушения (за время $t\sim t_c$) волокна, которое к моменту попадания на фронт было еще неразрушенным, и разрушения волокна за счет накопления в нем повреждений до того, как волокно попало на фронт трещины.

Пренебрегая накоплением повреждений в волокне, получаем условие неустойчивости трещин в виде $\varkappa\sigma>s(\lambda)$. Здесь $\varkappa$ — эффективный коэффициент концентрации на фронте трещины, зависящей от размера l. Для оценки критического размера трещины имеем уравнение $F_s(\varkappa\sigma;\lambda)\sim 1$, в которое надо подставлять значение λ, полученное из (6.27).

Возьмем для примера распределение (6.33). С точностью до соотношения $1-e^{-1}=0{,}632\ldots\sim 1$ найдем

$$\frac{l_{**}}{r}\sim\left\{\left(\frac{s_c}{\varkappa\sigma}\right)^{2\alpha}\frac{2G_m}{E_f},\right.$$
$$\left.\left(\frac{s_c}{\varkappa\sigma}\right)^{\alpha}\frac{2\tau_m}{\sigma}\right\}. \qquad (6.48)$$

Соотношение Гриффитса—Ирвина (6.2) как условие для нахождения критического размера трещины следует из (6.48) только при $\alpha=1$.

6.7. МЕЖСЛОЙНОЕ РАЗРУШЕНИЕ КОМПОЗИТОВ

Разрушение однонаправленных волокнистых, слоистых и слоисто-волокнистых композитов по плоскости раздела слоев наиболее близко по характеру к видам разрушения, которые рассматриваются в механике разрушения. Направление развития трещины в этом случае задано расположением слоев. Поэтому для оценки трещиностойкости композитов при межслойном разрушении часто применяют те же методы испытаний и обработки результатов, что и для обычных конструкционных материалов. Отличие состоит лишь в том, что в расчетах учитывают анизотропию композитов как макроскопически однородных материалов [24].

Однако детальный анализ (например, результатов исследования трещиностойкости композитов в условиях комбинированного нагружения при сочетании отрыва и поперечного сдвига) показывает, что стандартные методы механики разрушения можно применять к композитам слоистой структуры лишь с большой осторожностью.

Рассмотрим слоистый или слоисто-волокнистый композит. Пусть этот материал в макроскопическом отношении ортотропный. Плоскости ортотропии параллельны координатным плоскостям системы $Oxyz$, а начальная трещина, расположенная в плоскости Oxz, растет, оставаясь в той же плоскости (рис. 6.14). Для оценки трещиностойкости композита при комбинированном нагружении примем критерий (6.8).

Формулы для интенсивности высвобождения энергии в условиях рассматриваемой задачи можно найти в [21]. Выпишем раздельно слагаемые, отвечающие модам отрыва поперечного и продольного сдвига:

$$G_{\rm I} = K_{\rm I}^2 \left(a_{11}a_{22}\right)_{\eta}^{1/2}; \quad G_{\rm II} = K_{\rm II}^2 a_{11};$$

$$G_{\rm III} = \frac{K_{\rm III}^2}{2\left(c_{44}c_{55}\right)^{1/2}}. \qquad (6.49)$$

Здесь a_{jk} — элементы матрицы упругих податливостей, связывающих компоненты деформаций $\{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}\}$ с компонентами напряжений $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{xz}, \tau_{yz}\}$; c_{jk} — элементы матрицы упругих жесткостей, т. е. матрицы, обратной по отношению к a_{jk}. В формулы (6.49) входит безразмерный коэффициент

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \times$$

$$\times \left[\left(\frac{a_{22}}{a_{11}}\right)^{1/2} + \frac{2a_{12} + a_{66}}{2a_{11}}\right]^{1/2},$$

зависящий от соотношения между элементами матрицы a_{jk} упругих податливостей.

Если принять, что условие (6.8) справедливо при замене G на $G_{\rm I} + G_{\rm II} + G_{\rm III}$, а $G_{\rm Ic}$ не зависит от моды разрушения, то получим соотношения между критическими значениями коэффициентов интенсивности напряжений $K_{\rm Ic}$, $K_{\rm IIc}$ и $K_{\rm IIIc}$. В частности, для плоского напряженного состояния применение формул (6.8) и (6.49) дает соотношение

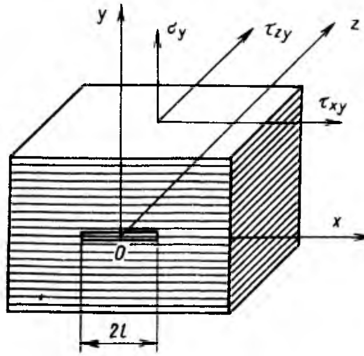


Рис. 6.14. Комбинированное нагружение ортотропного композита с начальной трещиной

$$\frac{K_{\rm IIc}}{K_{\rm Ic}} = \left(\frac{E_x}{E_y}\right)^{1/4}, \qquad (6.50)$$

где E_x и E_y — модули упругости в направлении соответствующих осей. Для сочетания отрыва и поперечного сдвига формула (6.50) приводит к соотношению

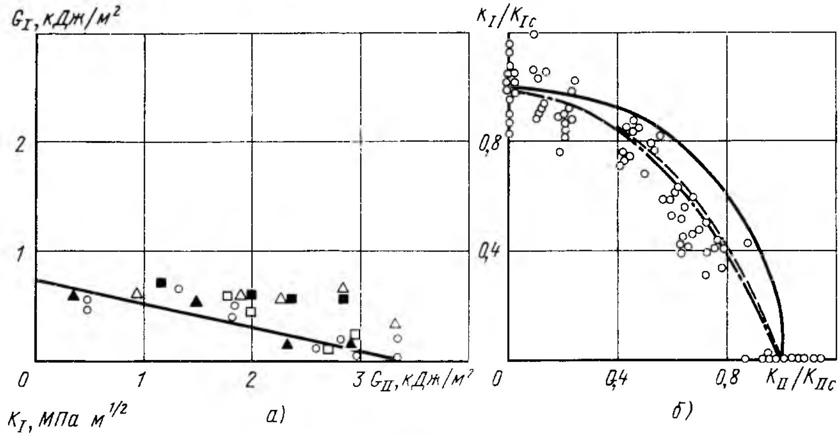
$$\frac{K_{\rm I}^2}{K_{\rm Ic}^2} + \frac{K_{\rm II}^2}{K_{\rm IIc}^2} = 1, \qquad (6.51)$$

где $K_{\rm Ic}$ и $K_{\rm IIc}$ связаны формулой (6.50).

Для представления результатов испытаний на трещиностойкость при сочетании отрыва и поперечного сдвига обычно используют зависимость

$$\left(\frac{K_{\rm I}}{K_{\rm Ic}}\right)^{\mu_1} + \left(\frac{K_{\rm II}}{K_{\rm IIc}}\right)^{\mu_2} = 1, \qquad (6.52)$$

где значения $K_{\rm Ic}$ и $K_{\rm IIc}$ находят из эксперимента. Показатели μ_1 и μ_2 также подбирают с учетом опытных данных. Обычно подходят значения $\mu_1 = \mu_2 = 2$, что отвечает теоретическому соотношению (6.51) с тем отличием, что не накладывается априорных



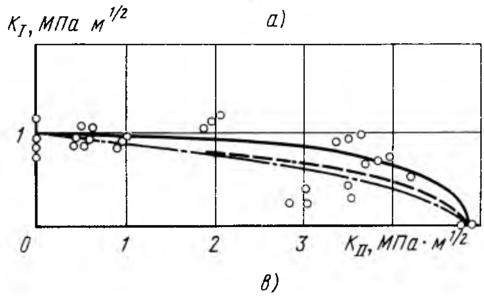


Рис. 6.15. Диаграмма трещиностойкости при комбинированном нагружении (сочетание отрыва и поперечного сдвига):
а — стеклотекстолита; *б* — однонаправленного стеклопластика; *в* — углепластика

предположений типа (6.52) о связи между K_{Ic} и K_{IIc}.

Экспериментальные данные о трещиностойкости стеклотекстолита при комбинированном нагружении [25] приведены на рис. 6.15, *а*. Как видно из диаграммы, приближенно выполняется соотношение

$$\frac{G_I}{G_{Ic}} + \frac{G_{II}}{G_{IIc}} = 1,$$

которому отвечает уравнение (6.51) при надлежащем выборе G_{Ic} и G_{IIc}. Аналогичные графики в переменных K_I и K_{II} для стеклопластика Scotchply 1002 [29] и углепластика Т 300/1034 С [27] приведены соответственно на рис. 6.15, *б* и *в*. Результаты вычислений по (6.51) нанесены на этих рисунках сплошной линией.

В статье [27] была предложена эмпирическая зависимость

$$g\left(\frac{K_I}{K_{Ic}}\right)^2 + (1-g)\frac{K_I}{K_{Ic}} + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIc}}\right)^2 = 1, \qquad (6.53)$$

где K_{Ic} и K_{IIc} определяют из эксперимента, а коэффициент

$$g = \frac{G_{Ic}}{G_{IIc}} = \left(\frac{E_x}{E_y}\right)^{1/2}\left(\frac{K_{Ic}}{K_{IIc}}\right)^2.$$

Если $g = 1$, то приходим к соотношению (6.51). При $g \ll 1$, что типично для однонаправленных высокопрочных композитов, вместо (6.53) рекомендуют более простую формулу:

$$\frac{K_I}{K_{Ic}} + \frac{K_{II}^2}{K_{IIc}^2} = 1. \qquad (6.54)$$

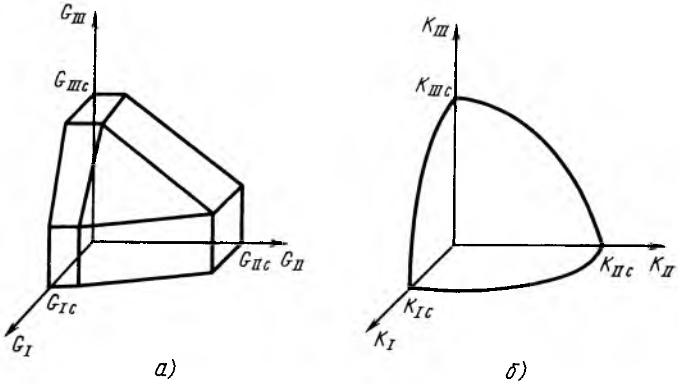


Рис. 6.16. Предельные поверхности трещиностойкости для ортотропных композитов: *а* — модель независимо задаваемых фронтов разрушения; *б* — модель, учитывающая влияние нормальных напряжений на удельную работу разрушения при сдвиге

Результаты вычислений по соотношениям (6.53) и (6.54) нанесены на рис. 6.15, *б* и *в* соответственно штриховой и штрихпунктирной линиями.

Чтобы в рамках аналитической механики разрушения (разд. 6.2) учесть существенную зависимость трещиностойкости от моды разрушения, надо провести различие между фронтами разрушения отрыва и сдвига. Это позволит описать размеры трещины при помощи двух или трех обобщенных координат, а характеристики трещиностойкости — при помощи двух или трех обобщенных сил.

Примем, что у трещины в композите со средним размером l имеется три, вообще, несовпадающих фронта с обобщенными координатами l_{I}, l_{II} и l_{III}. При этом $l_{\text{I}} \approx l_{\text{II}} \approx l_{\text{III}} \approx l$, но обобщенные координаты в общем случае независимы. Обычно $l_{\text{I}} \leqslant \min\{l_{\text{II}}, l_{\text{III}}\}$, т. е. фронты сдвига несколько опережают фронт отрыва. Различают следующие обобщенные силы сопротивления: Γ_{I}, Γ_{II} и Γ_{III} — при разрушении по одной из парциальных мод, $\Gamma_{\text{I, II}}$, $\Gamma_{\text{I, III}}$ и $\Gamma_{\text{II, III}}$ — при совпадении двух фронтов; $\Gamma_{\text{I, II, III}}$ — при совпадении трех фронтов.

Условие равновесности трещины, выраженное в виде равенства нулю суммы виртуальных работ всех внешних и внутренних сил при варьировании по Гриффитсу, принимает различный вид в зависимости от взаимного расположения фронтов. На рис. 6.16 приведены предельные поверхности трещиностойкости для ортотропных композитов.

Другой подход основан на введении явной зависимости удельной работы разрушения от напряженного состояния. Пусть, например, удельная работа разрушения Γ связана с максимальным напряжением отрыва σ у фронта трещины:

$$\Gamma = \Gamma_0\,[1 - f(\sigma)]. \tag{6.55}$$

Здесь Γ_0 — удельная работа разрушения при отсутствии напряжений отрыва; $f(0) = 0$, $f(\sigma) > 0$ при $\sigma > 0$; напряжение отрыва положительно при сжатии. Если оценить концентрацию напряжений у фронта трещины при помощи формулы Нейбера [7], то в правую часть формулы (6.55) войдет коэффициент интенсивности K_{I}. Так, при $f(\sigma) = a_1\sigma + a_2\sigma^2 + \ldots$ (где a_1, a_2, ... — некоторые постоянные) обобщенная сила сопротивления Γ будет полиномом от K_{I}. Подстановка Γ в условие равновесия по Гриффитсу приведет к уравнению, обобщающему эмпирические зависимости типа (6.53). Примерный вид предельной поверхности в координатах K_{I}, K_{II}, K_{III} показан на рис. 6.16, *б*.

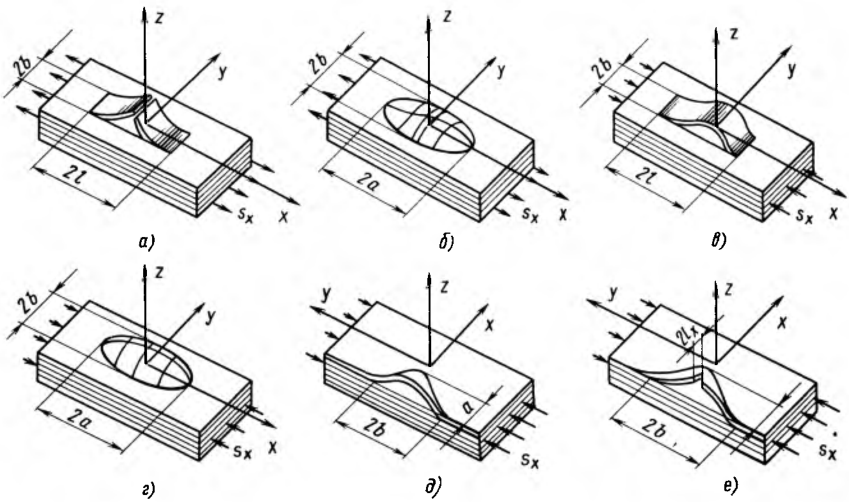


Рис. 6.17. Примеры отслоений в композитах:
а — открытое отслоение при растяжении; *б* — эллипсоидальное при растяжении; *в* — сжатое в условиях цилиндрического изгиба; *г* — эллипсоидальное при сжатии; *д* — кромочное; *е* — кромочное с вторичной трещиной

6.8. УСТОЙЧИВОСТЬ ДЕФЕКТОВ ТИПА РАССЛОЕНИЙ

Конструкции из композитов весьма чувствительны к технологическим дефектам, например, к расслоениям, непроклеям и трещинам, а также ко вновь образовавшимся дефектам (например, к надрезам поверхностных слоев). Дефекты типа расслоений могут появляться также на стадиях транспортировки, хранения и эксплуатации. Они могут вызываться температурными напряжениями, локальными нагрузками, например, ударами по поверхности конструкции. Для поверхностного отслоения характерно выпучивание тонкого отслоившегося участка, которое может происходить при сжатии, поверхностном нагреве или растяжений из-за эффекта Пуассона. Поэтому механика поверхностных отслоений обязательно должна учитывать геометрическую нелинейность хотя бы для отслоившейся области.

Типичные примеры отслоения показаны на рис. 6.17.

Для описания роста расслоений и отслоений при циклических и (или) длительно действующих нагрузках в этом случае необходимо существенное обобщение механики разрушения, включающее учет повреждений, которые накапливаются на фронте расслоений (см. разд. 6.2).

Рассмотрим отслоение толщиной h в линейно упругом композите. Пусть толщина h достаточно мала, чтобы можно было пренебречь влиянием поведения отслоившегося участка на номинальные напряжения и деформации в основном элементе. Материал основного элемента будем считать ортотропным с главными осями упругости, параллельными координатным осям O_x и O_y. Главные оси номинальных напряжений и деформаций также будем считать параллельными этим осям. Обозначим номинальные напряжения s_x, s_y, номинальные деформации e_x, e_y. Напряжения и деформации в отслоившемся участке обозначим через σ_x, σ_y и ε_x, ε_y соответственно. Влиянием компонент τ_{xy} и γ_{xy} в отслоении будем пренебрегать, приближенно приняв, что главные оси напряжений и деформаций во всех точках отслоений также параллельны координатным осям. Прощадь, занятую отслоением в плоскости Oxy, обозначим Ω, границу этой области через S.

Применим к этой задаче методы аналитической механики разрушения [8]. Потенциальная энергия безмоментной упругой деформации основного элемента вместе с отслоением определяется как

$$V_0 = \text{const} - \frac{h}{2(1-\nu_{xy}\nu_{yx})} \times \iint_\Omega \left[E_x\left(e_x^2-\varepsilon_x^2\right) + 2\nu_{xy}E_x \times (e_x-\varepsilon_x)(e_y-\varepsilon_y) + E_y\left(e_y^2-\varepsilon_y^2\right)\right] dx\,dy. \quad (6.56)$$

Константа в формуле (6.56) имеет смысл потенциальной энергии безмоментной деформации для неповрежденного элемента.

Потенциальная энергия изгиба накапливается только в отслоении. Если в начальном состоянии отслоившийся участок был плоским, а прогиб при выпучивании стал равным $w(x, y)$, то для потенциальной энергии изгиба имеем выражение

$$V_b = \frac{h^3}{24(1-\nu_{xy}\nu_{yx})} \times \iint_\Omega \left[E_x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu_{xy}E_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + E_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + (1-\nu_{xy}\nu_{yx})\,G_{xy} \times \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] dx\,dy. \quad (6.57)$$

Виртуальная работа разрушения δA_f равна сумме работы, затрачиваемой на разрушение матричной прослойки, и работы, идущей на продвижение трещины в отслоении. Обозначим удельную работу разрушения матричной прослойки γ_m, удельную работу разрушения отслоения γ_k (индекс k указывает направление развития трещин в отслоении). Тогда

$$\delta A_f = \int_S \gamma_m\,|ds\times\delta l| + \sum_k \gamma_k h\,\delta l_k, \quad (6.58)$$

где ds — элемент длины границы отслоения S.

Для вычисления энергии V_b необходимо знать форму выпучивания $w(\tilde{x}, \tilde{y})$. Например, для эллипсоидного в плане отслоения с полуосями a и b естественно взять выражение

$$w(x, y) = f\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2, \quad (6.59)$$

удовлетворяющее условиям защемления на границе S. Прогиб f при $x = y = 0$, а также критические деформации e_x^* и e_y^* найдем вариационным методом. Для этого используем квадратичный функционал теории упругой устойчивости

$$W = \frac{h}{2}\iint_\Omega \left[s_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + s_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy. \quad (6.60)$$

Подставив выражение типа (6.59) в формулы (6.57) и (6.60) и приравняв результаты, получим одно из искомых уравнений. Для вывода остальных уравнений используем связь между перемещениями на границе отслоения, выраженными через номинальные деформации основного элемента и через выпучивание отслоения. В [9] для замыкания были предложены соотношения

$$\frac{1}{2}\iint_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\,dy = -\left(e_x-e_x^*\right)\Omega;$$
$$\frac{1}{2}\iint_\Omega \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dx\,dy = -\left(e_y-e_y^*\right)\Omega. \quad (6.61)$$

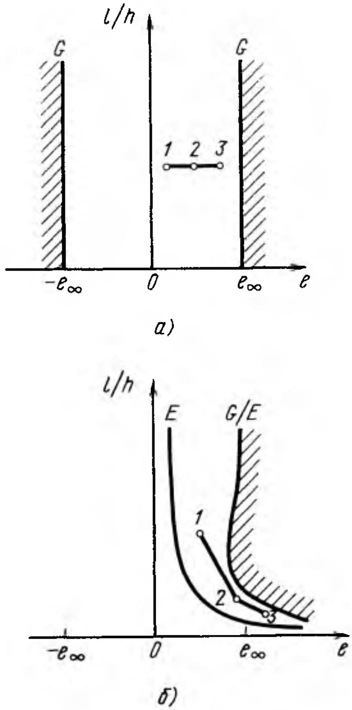


Рис. 6.18. Диаграмма устойчивости отслоений:

а — в окрестности надреза; *б* — при сжатии в условиях цилиндрического изгиба; *G* — граница устойчивости по Гриффитсу; *E* — граница устойчивости по Эйлеру; *G/E* — граница устойчивости по Гриффитсу для выпученных отслоений; *1, 2, 3* — начальные состояния

Эти соотношения приравнивают сокращения длины хорд области Ω, осредненные по всей этой области.

Простейший пример отслоения представлен на рис. 6.17, *а*. В этом случае энергией U_b можно пренебречь. Отслоение будет находиться в субравновесном состоянии, пока $e_x < e_\infty$, где

$$e_\infty^2 = \frac{(\gamma_m b + \gamma_x h)(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})}{E_x bh}. \tag{6.62}$$

Здесь γ_x — удельная работа образования продольных трещин. В аналогичном случае сжатого закрытого отслоения (рис. 6.17, *в*) следует учитывать энергию изгиба. Для деформации e_x, отвечающей границе устойчивости по Гриффитсу выпученного отслоения, имеем уравнение

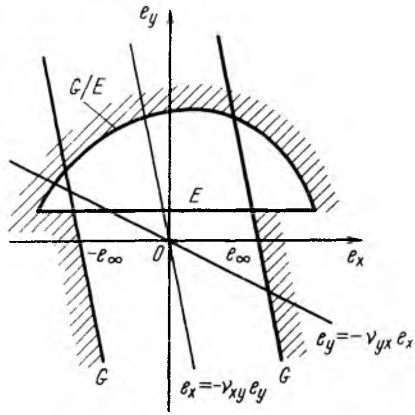


Рис. 6.19. Диаграмма устойчивости эллипсоидальных отслоений:

Обозначения *G*, *E* и *G/E* — см. рис. 6.18

$$e_x^2 + 2e_x e_*(l) - 3e_*^2(l) = e_\infty^2, \tag{6.63}$$

где критическая деформация

$$e_*(l) = \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{h}{l}\right)^2. \tag{6.64}$$

При этом принято, что форма выпученного отслоения $w(x) = f\cos^2(\pi x/2l)$.

Диаграмма устойчивости для типов отслоений, представленная на рис. 6.17, *а*, *в*, дана на рис. 6.18. Здесь *G* — границы устойчивости отслоений по Гриффитсу, *E* — границы устойчивости по Эйлеру, соответствующие критическим деформациям (6.64), *G/E* — границы устойчивости по Гриффитсу для выпученных отслоений. Очень короткие отслоения могут терять устойчивость по Гриффитсу без предварительного выпучивания. Закрытые эллипсоидальные отслоения по типу рис. 6.17, *г* подробно рассмотрены в [12, 13].

Рассмотрим открытые отслоения, например, распространяющиеся от начального поперечного разреза (см. рис. 6.17, *б*) или от боковой кромки (см. рис. 6.17, *д*). В первом случае выпучивание отслоения может начаться из-за эффекта Пуассона, во-втором случае — только при сжатии вдоль оси Ox. Будем считать, что отслоения имеют в плане эллиптическую форму с полуосями a и b, а для формы выпучивания возьмем выражение (6.59). Сводная диаграмма устойчивости на плоскости e_x, e_y приведена на рис. 6.19. Две параллельные прямые, обозначенные буквой G, показывают границы устойчивости по Гриффитсу, найденные в предположении, что отслоение не выпучивается. Линия E соответствует границе выпучивания, а линия G/E — границе устойчивости по Гриффитсу для выпученных отслоений. На диаграмме прямая $e_y = -\nu_{yx}e_x$ соответствует типу отслоений, представленных на рис. 6.17, *б*. При сжатии основного элемента отслоение становится неустойчивым без предварительного выпучивания. При растяжении характер неустойчивости зависит от соотношений между a, b и h, а также от механических характеристик. На рис. 6.19 представлен такой случай, когда при растяжении основного элемента вдоль оси Ox отслоение вначале выпучивается, а затем теряет устойчивость по Гриффитсу. Линия $e_x = -\nu_{xy}e_y$ на рис. 6.19 построена для кромочного отслоения (см. рис. 6.17, *д*). При сжатии такое отслоение всегда устойчиво, а при растяжении теряет устойчивость по Гриффитсу только после предварительного выпучивания. Выпученное отслоение может начать разрушаться с образованием дополнительных трещин. Пример такой трещины показан на рис. 6.17, *е*. Дополнительные сведения об устойчивости дефектов типа отслоений можно найти в [9, 12, 13, 15].

6.9. РОСТ ДЕФЕКТОВ ТИПА ОТСЛОЕНИЙ

Рост отслоений в слоистых композитах при длительно действующих и (или) циклических нагрузках происходит устойчиво, если параметры отслоения принадлежат области устойчивости по Гриффитсу. Однако при длительном нагружении в матрице и армирующих элементах возникают рассеянные повреждения, которые снижают сопротивление отслоений. Таким образом, чтобы распространить теорию на устойчиво растущие отслоения, необходимо учесть накопление повреждений на фронте отслоения и его продолжении [7, 9].

Рассмотрим открытое отслоение в растянутом элементе (см. рис. 6.19, *а*), причем ограничим анализ формально более простым случаем длительного квазистатического нагружения с номинальной деформацией $e_x(t)$. Введем меру повреждений $\varphi(x, t)$ матричной прослойки и примем, что накопление повреждений происходит в результате действия касательных напряжений $\tau(x, t)$, возникающих в этой прослойке. Уравнение типа (6.18) запишем в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \begin{cases} 0, & |\tau| \leqslant \tau_{th}; \\ \dfrac{1}{t_c}\left(\dfrac{|\tau| - \tau_{th}}{\tau_\psi}\right)^m, & |\tau| \geqslant \tau_{th}. \end{cases} \tag{6.65}$$

Здесь τ_{th} — пороговое значение напряжения, необходимое для повреждения; τ_ψ — материальная константа, характеризующая сопротивление процессу накопления повреждений; показатель m аналогичен показателям кривых статической усталости; t_c — некоторая постоянная.

Напряжение $\tau(x, t)$ в безмоментном «балочном» приближении

$$|\tau| = \frac{G_m\lambda_0\,|e_x|}{h_m}\exp\left(-\frac{x-l}{\lambda_0}\right), \tag{6.66}$$

где G_m — модуль сдвига материала матрицы; h_m — толщина матричной прослойки; λ_0 — параметр, характеризующий длину передачи нагрузки или длину краевого эффекта в композите [3].

Для дальнейших расчетов необходимо конкретизировать зависимость $\Gamma(\psi)$. Пусть, например,

$$\Gamma = \Gamma_0(1 - \psi^\alpha), \tag{6.67}$$

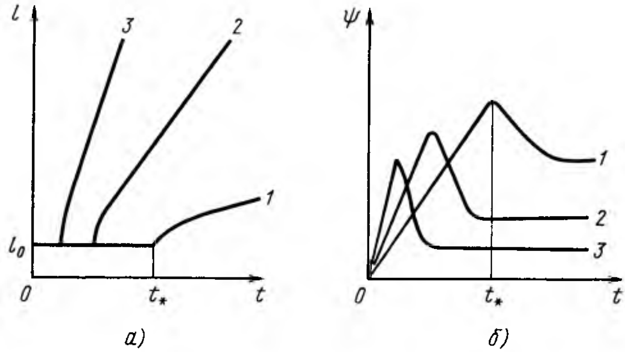


Рис. 6.20. Диаграмма отслоений, распространяющихся от надреза, при растяжении: *а* — рост отслоений; *б* — накопление микроповреждений на фронте; *1*, *2* и *3* — кривые, соответствующие начальным состояниям *1*, *2* и *3* на рис. 6.18, *а*

где Γ_0 — обобщенная сила сопротивления межслойному сдвигу в неповрежденном композите; $\alpha > 0$ (например, $\alpha = 1$). Момент завершения инкубационной стадии найдем как положительный корень уравнения $G(t) = \Gamma(t)$ при $l = l_0 = \text{const}$, $\varphi(x, 0) = \varphi_0(x)$. С учетом (6.66) и (6.67) получим уравнение

$$\varphi_0(l_0) + \frac{1}{t_c} \times \int_0^{t_*} \left[\frac{|\tau(l_0, t_1)| - \tau_{th}}{\tau_\psi} \right]^m dt_1 = \left[1 - \frac{e_x^2(t_*)}{e_\infty^2} \right]^{1/\alpha}. \qquad (6.68)$$

При $|\tau(x, t_1)| < \tau_{th}$ подынтегральное выражение в этом уравнении и последующих аналогичных формулах следует принять равным нулю. Как только началось продвижение фронта, полудлину $l(t)$ можно найти из решения уравнения

$$\varphi_0[l(t)] + \frac{1}{t_c} \times \int_0^t \left\{ \frac{|\tau[l(t_1), t_1]| - \tau_{th}}{\tau_\psi} \right\}^m dt_1 = \left[1 - \frac{e_x^2(t)}{e_\infty^2} \right]^{1/\alpha}. \qquad (6.69)$$

Это уравнение приходится решать численно. Наиболее простой и естественный алгоритм основан на задании приращений Δl длины и нахождении соответствующих моментов времени l. Алгоритм расчета естественно включает в себя инкубационную стадию и возможность приостановки роста отслоения.

На рис. 6.20 приведен случай $e_x = \text{const}$ для трех различных значений $e_1 < e_2 < e_3$. Процесс роста отслоения показан на рис. 6.20, *а*, а процесс накопления повреждений на фронте — на рис. 6.20, *б*. После начала продвижения фронта при $t = t_*$ следует неустановившийся участок. Затем скорость dl/dt, а также мера повреждений ψ приближаются к постоянным значениям. Эти значения нетрудно оценить, полагая при вычислении интегралов в уравнении (6.69) $dl/dt = \text{const}$, $l(t) \approx l(t_1) + (dl/dt)(t - t_1)$; нижний предел интегрирования надо заменить на $-\infty$. Тогда при $\varphi_0(x) = 0$ и $\tau_{th} = 0$ для скорости продвижения фронта отслоения получаем формулу

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\lambda_0}{m t_c} \left(\frac{e_x}{e_\psi} \right)^m \times \left(1 - \frac{e_x^2}{e_\infty^2} \right)^{-1/\alpha}; \quad e_\psi = \frac{\tau_\psi h_m}{G_m \lambda_0}. \qquad (6.70)$$

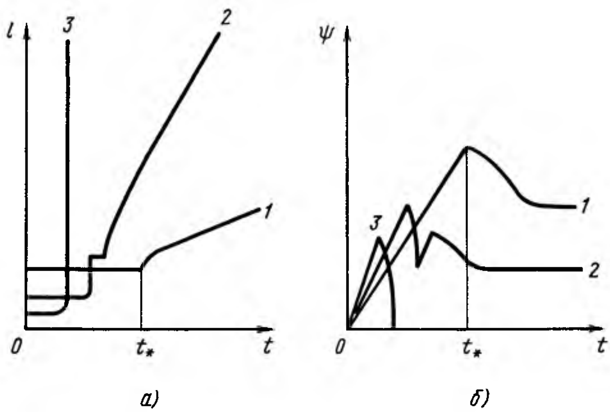


Рис. 6.21. Диаграмма отслоений в композите при сжатии:
а — рост отслоений; *б* — накопление микроповреждений на фронте

Формула (6.70) пригодна также и при переменных e_x, если только $e_x(t)$ меняется достаточно медленно. Достаточно потребовать, чтобы изменение $e_x(t)$ за время порядка $\lambda_0 (dl/dt)^{-1}$ было пренебрежимо мало. Тогда формулу (6.70) можно рассматривать как дифференциальное уравнение, аналогичное уравнению роста усталостных трещин [16]. Начальное условие для этого уравнения принято в виде $l(t_*) = l_0$, а для нахождения момента t_* окончания инкубационной стадии следует воспользоваться уравнением (6.68).

Для расчета роста отслоений в сжатых элементах нужно учитывать энергию изгиба, высвобождающуюся при росте выпученного отслоения. Ряд задач рассмотрен в [10, 13, 15]. Некоторые качественные особенности роста отслоения, изображенного на рис. 6.17, *в*, приведены на рис. 6.21. При этом принято $e_x = \text{const}$. Кривые *1*, *2* и *3* соответствуют начальным состояниям *1*, *2* и *3* на рис. 6.18. Кривая *1* (см. рис. 6.21) относится к случаю, когда начальный размер отслоения достаточно велик, но $e_x \ll e_\infty$, так что начальное состояние субравновесно. После окончания инкубационной стадии продолжительностью t_* размер l начинает расти. Картина роста отслоения качественно сходна с той, которую мы имеем в случае растяжения (см. рис. 6.20).

Кривая *2* (см. рис. 6.21) соответствует случаю, когда начальное состояние также субравновесно. Поэтому существует некоторая относительно непродолжительная инкубационная стадия. После подрастания отслоения до неустойчивого состояния происходит скачок до нового субравновесного состояния. Новый размер отслоения может быть оценен, исходя из соотношения энергетического баланса [7, 8]. При скачкообразном подрастании отслоения мера повреждения ψ падает практически до нуля, поскольку фронт отслоения переходит в малоповрежденную область матричной прослойки (см. кривую *3* на рис. 6.21, *б*). Далее следует вторая инкубационная стадия. После того, как будет накоплено достаточное повреждение, фронт отслоения снова страгивается. Дальнейший рост происходит устойчиво, поскольку в данном случае $e_x < e_\infty$.

Кривая *3* соответствует значениям l_0 и e_x, при которых начальная точка находится в весьма узкой полосе, заключенной между областью, где выпучивания нет, и областью, в которой отрезок устойчивого роста отслоения завершается полным отщеплением наружного слоя.

Значения критической деформации e_∞ для конструкционных композитов достаточно высоки (порядка 10^{-3}). Поэтому типичное поведение сжатых отслоений описывается кривыми *1* на рис. 6.21, *а*, *б*. Обычно уже в ненагруженном элементе отслоение имеет начальный прогиб, полученный, например, в процессе изготовления. Тогда накопление повреждений и рост отслоений могут происходить и при $\bar{e}_x < e_\infty (l)$.

Список литературы

1. **Аргон А.** Статистические аспекты разрушения//Композиционные материалы. Т. 5. Разрушение и усталость. М.: Мир, 1978. С. 166—205.

2. **Болотин В. В.** Статистические методы в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965. 278 с.

3. **Болотин В. В.** Основные уравнения теории армированных сред//Механика полимеров. 1965, № 2. С. 27—37.

4. **Болотин В. В.** Некоторые математические и экспериментальные модели разрушения//Проблемы прочности. 1971. № 2. С. 13—20.

5. **Болотин В. В.** Статистическая теория накопления повреждений в композиционных материалах и масштабный эффект надежности//Механика полимеров. 1976. № 2. С. 247—255.

6. **Болотин В. В.** Объединенная модель разрушения композитных материалов при длительно действующих нагрузках//Механика композитных материалов. 1981. № 3. С. 405—420.

7. **Болотин В. В.** Уравнения роста усталостных трещин//Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1983. № 4. С. 153—160.

8. **Болотин В. В.** Многопараметрическая механика разрушения//Расчеты на прочность. Вып. 25. М.: Машиностроение, 1984. С. 12—33.

9. **Болотин В. В.** Дефекты типа расслоений в конструкциях из композитных материалов//Механика композитных материалов. 1984, № 2. С. 239—255.

10. **Болотин В. В.** Уравнения роста отслоений в оболочках из композиционных материалов//Надежность и ресурс машин и конструкций. Вып. 26. М.: Моск. энергет. ин-т, 1984. С. 5—10.

11. **Келли А.** Множественное разрушение слоистых пластиков//Разрушение композитных материалов. Рига: Зинатне, 1979. С. 120—125.

12. **Кисляков С. А., Нефедов С. В.** Равновесные размеры эллипсоидальных отслоений в ортотропной цилиндрической оболочке//Надежность и ресурс машин и конструкций. Вып. 26. М.: Моск. энергет. ин-т 1984, С. 30—34.

13. **Кисляков С. А.** Устойчивость и рост отслоений в цилиндрической оболочке из композитного материала при сжатии//Механика композитных материалов. 1985. № 4. С. 653—657.

14. **Кортен Х. Т.** Разрушение армированных пластиков. М.: Химия, 1967. 165 с.

15. **Мурзаханов Г. Х., Несин Д. Н.** Расчет роста эллипсоидальных отслоений в сферической оболочке при циклическом нагружении//Надежность и ресурс машин и конструкций. Вып. 26. М.: Моск. энергет. ин-т, 1984. С. 15—20.

16. **Панасюк В. В., Андрейкив А. Е., Ковчик С. Е.** Методы оценки трещиностойкости конструкционных материалов. Киев: Наукова думка, 1977. 227 с.

17. **Партон В. З., Морозов Е. М.** Механика упругопластического разрушения. М.: Наука, 1985. 504 с.

18. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.

19. **Разрушение** конструкций из композитных материалов/Под ред. В. П. Тамужа, В. Д. Протасова. Рига: Зинатне, 1986. 264 с.

20. **Розен Б.** Механика упрочнения композиций//Волокнистые композиционные материалы. М.: Мир, 1967. С. 54—96.

21. **Си Г., Либовиц Г.** Математическая теория хрупкого разрушения//Разрушение. Т. 2/Под ред. Г. Либовица. М.: Мир, 1975. С. 84—203.

22. **Тамуж В. П., Куксенко В. С.** Микромеханика разрушения полимерных материалов. Рига: Зинатне, 1978. 294 с.

23. **Фрейденталь А. М.** Статистический подход к хрупкому разрушению//Разрушение. Т. 2/Под ред. Г. Либовица. М.: Мир, 1975. С. 616—645.

24. **Фудзии Т., Дзако М.** Механика разрушения композиционных материалов. М.: Мир, 1982. 232 с.

25. **Щугорев В. Н.** Дефекты типа отслоений при совместном действии отрыва и межслойного сдвига//Механика композитных материалов. 1987. № 3. С. 539—542.

26. **Хан Н. Г., Эриксон Я. Б., Цай Е. В.** Характеристики прочности однонаправленно армированных композитов, определяемые матрицей или поверхностью раздела//Прочность и разрушение композитных материалов. Рига: Зинатне, 1983. С. 259—270.

27. **Donaldson S. L.** Fracture toughness testing of graphite (epoxy and graphite) PEEK composites//Composites. 1985. Vol. 16. N 2. P. 103—112.

28. **Flashner F., Kenig S., Zewi I. G., Dodiuk H.** Fracture toughness of adhesively bonded joints//Engineering Fracture Mechanics. 1985. Vol. 21. N 5. P. 997—1004.

29. **Hahn H. T.** A mixed—mode fracture criterion for composite materials//Composites Technology Review. 1983. Vol. 5, N 1. P. 26—29.

30. **Wang S. S., Chim E. S.—M., Yu T. P., Goetz D. P.** Fatigue of random short—fiber SMC composite//Journal of Composite Materials. 1983. Vol. 17. N 3. P. 299—314.

Глава 7

МЕТОДЫ СТАТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ КОМПОЗИТОВ

Конструкционные материалы для оценки их прочности и жесткости подвергаются механическим испытаниям. По характеру воздействия на материал методы испытаний разделяются на прямые (разрушающие и методы, основанные на непосредственном измерении перемещений и деформаций, т. е. методы механических испытаний) и косвенные (неразрушающие методы). У неразрушающих методов испытаний выделяются три направления: контроль физико-механических характеристик, дефектоскопия элементов конструкций и измерение напряжений. Косвенные неразрушающие методы исключительно важны, однако они должны быть обоснованы и проверены при помощи прямых методов. С помощью прямых методов испытаний получают сведения о свойствах конструкционных материалов, необходимых при проектировании разных конструкций.

Разработка и все расширяющееся применение композитов в ответственных высоконагруженных конструкциях вновь заставили обратиться к методам механических испытаний, так как методы, применяемые для испытаний металлов, оказались недостаточными. Непрерывно разрабатываются новые методы испытания, проверяются и пересматриваются существующие. В настоящее время исследовательская практика значительно обогнала методы испытаний, регламентируемые существующими немногочисленными стандартами. Многочисленные исследования композитов на основе разных методов создали обстановку противоречивых суждений о конструкционных возможностях этих материалов. Это усиливает необходимость в критическом анализе существующих методов, их оценки и обобщении.

В данной главе рассмотрены наиболее перспективные прямые методы кратковременных статических испытаний композитов на растяжение, сжатие, сдвиг и изгиб. Методы апробированы, в основном, на однонаправленных композитах (укладка 0°). Если схема нагружения и расчетные формулы применимы также для ортотропных материалов (укладки 0/90°, ±45°), то необходимые пояснения даны в тексте и в табл. 7.1—7.8. Предпочтение отдано нагружению в направлениях осей упругой симметрии материала; исключения указаны особо.

Широкое применение намоточных конструкций привело к разработке многочисленных методов испытания композитов на кольцевых образцах. Это позволяет рассмотреть с единых позиций — по способу нагружения — методы испытаний плоских и кольцевых образцов на растяжение, сжатие, сдвиг и изгиб. Материал для каждого способа нагружения представлен в табл. 7.1—7.8. Обозначения схем нагружения в этих таблицах (например, схема 2—4) используются также в тексте при описании данной схемы нагружения.

7.1. ОСНОВНЫЕ ОСОБЕННОСТИ СВОЙСТВ КОМПОЗИТОВ

Современные волокнистые КМ с однонаправленной, слоистой и пространственной укладкой арматуры являются неоднородными существенно анизотропными материалами. Для этого класса материалов привычные термины — испытания на растяжение, сжатие, сдвиг, изгиб — становятся бессодержательными без указания направления между нагрузкой и осями упругой симметрии исследуемого материала. Поэтому введены две системы координатных осей: оси упругой симметрии материала (*1*, *2*, *3*) и оси нагружения (x, y, z для плоских образцов; θ, z, r — для кольцевых и трубчатых образцов). Предпочтительно пользоваться методами, при реализации которых оси x, y, z (или θ, z, r) и *1*, *2*, *3* совпадают.

Большинство слоистых и волокнистых композитов слабо сопротивляются межслойному сдвигу и поперечному отрыву. Сопротивление сдвигу характеризуется отношениями E_x/G_{xz} и Π_x/Π_{xz}, сопротивление поперечному отрыву и сжатию перпендикулярно волокнам — отношениями E_x/E_z, Π_x^+/Π_z^+, Π_x^+/Π_z^-. Здесь E_x и E_z — модули упругости в направлениях x и z; G_{xz} — модуль межслойного сдвига; Π_x и Π_z — прочность в направлениях

x и z; $П_{xz}$ — сдвиговая прочность в плоскости xz. Оси x и y расположены в плоскости укладки арматуры, ось z перпендикулярна этой плоскости; знаком (+) обозначено растяжение, знаком (—) — сжатие.

Анизотропия и особенности строения вызывают трудности, прежде всего, с установлением числа прочностных и упругих характеристик, необходимых для полной паспортизации материала. Число определяемых характеристик зависит от типов напряженного состояния и анизотропии [3, 13]. Для ортотропного тела при двухосном напряженном состоянии следует определить модули упругости E_x и E_y, модули сдвига G_{xy} и G_{xz}, коэффициент Пуассона ν_{xy} и прочности $П_x$, $П_y$ и $П_{xy}$. Для трансверсально изотропного тела следует определить следующие характеристики: модули упругости при растяжении и сжатии $\left(E_x^{+(-)}\right.$ и $\left.E_y^{+(-)}\right)$, модуль сдвига (G_{xy}), коэффициент Пуассона (ν_{xy}), прочности при растяжении и сжатии в главных осях $\left(П_x^{+(-)}\right.$ и $\left.П_y^{+(-)}\right)$ и при сдвиге $\left(П_{ij}\right)$ в двух плоскостях (в плоскости укладки волокон и в плоскости изотропии).

Принципиальным является выбор схем нагружения, при которых характеристики материала наиболее просто связаны с величинами, определяемыми в эксперименте, выбор аналитического аппарата для обработки эксперимента и оценка области применения расчетных зависимостей. Так как в основе расчетных формул лежит аппарат теории упругости анизотропного тела, необходима оценка погрешности перехода к однородной сплошной анизотропной среде. Число структурных элементов (волокон, слоев препрегов и др.) должно быть достаточным для этого перехода [2, 10]. При изгибе, например, минимально необходимое число слоев для совершения предельного перехода зависит от параметра

$$k_и = \frac{\pi}{2}\,\frac{h}{l}\sqrt{\frac{E_x^и}{G_{xz}^и}}.$$

Для свободно опертого стержня, нагруженного синусоидальной нагрузкой, минимальное число слоев n зависит от $k_и$ следующим образом:

$k_и$	1	3	5	7
n	5	15	17	20

Для волокнистых композитов главные трудности состоят в создании однородного напряженного состояния в расчетном (представительном) объеме материала даже при простейших видах испытаний. Трудности возрастают с повышением степени анизотропии материалов, т. е. материалов, армированных высокомодульными и высокопрочными волокнами (боро-, угле- и органопластиков). При испытаниях композитов измеряемая деформация существенно зависит от граничных условий, т. е. от закрепления и нагружения образца. Это явление, характерное для конструкций из существенно анизотропных материалов, — специфическое проявление принципа Сен-Венана. Согласно принципу Сен-Венана для изотропной среды возмущения быстро затухают на расстояниях Λ от источника возмущения, незначительно превышающих характерный размер образца H (размер зоны возмущения имеет порядок $\Lambda \sim \sim H$). В случае анизотропной среды возмущения затухают неодинаково в различных направлениях. В направлениях наибольшей жесткости они затухают медленнее, а в направлениях наименьшей жесткости — быстрее. В результате область заметных возмущений вытягивается в направлении наибольшей жесткости. Характерный размер области возмущений в этом направлении

$$\Lambda \sim H\left(\frac{E_i}{G_{ij}}\right)^{1/2}, \qquad (7.1)$$

где E_i, G_{ij} — модули соответственно упругости и сдвига; i и j равны 1, 2, 3.

Анизотропия упругих свойств предъявляет повышенные требования к форме и размерам образца, исключению краевых эффектов — выбору расстояния от захватов до рабочей части, способу передачи нагрузки и закрепления образца, ориентации арматуры, углу вырезки образца. Прочностная анизотропия при неправильном выборе схемы нагружения и закрепления приводит к изменению механизма разрушения, например, к расслоению или смятию — срезу образца в его опорной зоне. Важен вопрос выбора ширины образца. Она должна быть достаточной для устранения «эффекта, перерезанных нитей». Далее у образцов из косо-, перекрестно- и ортогонально армированных материалов следует учесть взаимодействие слоев арматуры и особенности напряженного состояния на свободных кромках материала, т. е. кромочный эффект, который заключается в возникновении около свободных кромок материала межслойных напряжений, направление действия и величина которых зависят от типа укладки арматуры. Из-за отсутствия возможности теоретической оценки кромочного эффекта корректными можно считать только испытания образцов с однонаправленной арматурой, уложенной параллельно продольной оси образца.

Новым является и подход к технологии. Материал и конструкция создаются одновременно; в то же время композиты крайне чувствительны к силовой и температурной предыстории. Особого внимания требуют технологические дефекты, в частности, пористость, искривления и разориентация арматуры. Пористость проявляется при оценке свойств, определяемых полимерной матрицей (например, прочности при сдвиге). Однако не все методы испытаний одинаково чувствительны к влиянию пористости. Например, при испытаниях однонаправленных углепластиков наиболее чувствительным к пористости оказался метод трехточечного изгиба, наименее чувствительным — метод растяжения полосы.

Влияние искривления волокон проявляется при определении характеристики в направлении армирования. При испытаниях кольцевых образцов измеряемый модуль

$$E_\theta^* = E_\theta \frac{1}{1 + \frac{E_\theta}{G_{\theta r}} \frac{f^2}{2}}, \quad (7.2)$$

где E_θ — модуль упругости материала при растяжении вдоль выпрямленных волокон; $G_{\theta r}$ — модуль межслойного сдвига; f — параметр, характеризующий искривление армирующих волокон (при искривлении по синусоиде $f = \pi A \frac{k}{l}$; A — амплитуда синусоиды; k — число полуволн на базе l).

Формула (7.2) учитывает только влияние сдвига. Для материалов, армированных анизотропными волокнами, следует учесть также модуль упругости E_r:

$$E_\theta^* = \frac{E_\theta}{\frac{2 + f^2}{2(1 + f^2)^{3/2}} + \frac{E_\theta}{G_{\theta r}} \times \frac{f^2}{2(1 + f^2)^{3/2}} + \frac{E_\theta}{E_r} \times \left[1 + \frac{2 + 3f^2}{2(1 + f^2)^{3/2}}\right]}. \quad (7.3)$$

Даже при малых искривлениях ($f^2 \approx 0{,}01$) модуль упругости E_θ^* и прочность Π_θ^* у реальных материалов может быть значительно ниже, чем у материалов с идеально прямыми волокнами. Модуль упругости материала в направлении, перпендикулярном армирующим волокнам,

$$E_r^* = E_r \frac{1}{1 + \frac{E_r}{G_{\theta r}} \frac{f^2}{2}}, \quad (7.4)$$

мало зависит от искривленности волокон, так как $G_{\theta r}$ и E_r — величины одного порядка. Аналогичным образом можно показать, что модуль сдвига $G_{\theta r}^*$ материала с начальными искривлениями волокон незначительно зависит от степени искривления слоев.

Все перечисленные особенности свойств относятся к композитам с волокнистой и слоистой структурой. Дополнительные трудности возникают при испытаниях пространственно-армированных композитов, у которых поперечная связь обеспечивается жестким каркасом вместо податливой матрицы.

7.2. ОБРАЗЦЫ ДЛЯ ИСПЫТАНИЙ

При выборе формы и способа изготовления образцов из композитов должны быть правильно смоделированы все

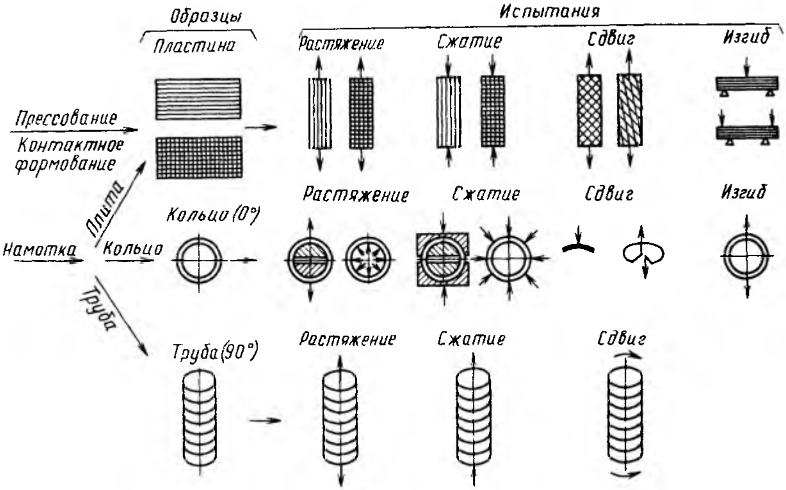


Рис. 7.1. Образцы и методы испытания

условия и процессы изготовления будущего материала, изделия или конструкции.

Способы изготовления материала, соответствующие им образцы определенной формы и методы испытаний схематически показаны на рис. 7.1. В зависимости от способа изготовления образцы для механических испытаний композитов делятся на плоские (стержни, пластины) и тела вращения (кольца, трубы), а образцы в виде кольца (кольцевые) могут быть разрезаны на сегменты.

Образцы и методы (см. рис. 7.1) по существу служат для паспортизации монослоя *. Для паспортизации плоских монослоев достаточно иметь образцы одинаковой формы, но с различной укладкой арматуры. Для паспортизации намоточных монослоев необходимо иметь образцы в виде колец и труб (кольцевые и трубчатые). Кольцевые образцы из однонаправленного материала служат для определения характеристик в направлении укладки арматуры, трубчатые с углом намотки 90° — в направлении, перпендикулярном направлению укладки арматуры. Кроме того, трубчатые образцы с различной симметричной (относительно продольной оси образца) укладкой арматуры используются для определения характеристики сдвига и для изучения сложного напряженного состояния.

Образцы для механических испытаний композитов должны удовлетворять (кроме технологических) следующим требованиям: применимость для всех видов механических испытаний; простота и дешевизна приспособления для проведения испытаний; простота установки в испытательной машине и проведения испытаний; воспроизводимость вида разрушения, его местоположения и численного значения прочности; применимость для определения

* Монослой (основной структурный элемент слоистых и волокнистых композитов) — плоский или изогнутый элемент материала, состоящий из полимерной матрицы и одного слоя арматуры, уложенной в одном направлении (однонаправленный монослой) или в виде ткани (тканый монослой). Монослоями можно считать применяемые при изготовлении композитов ленты-препреги, а также материалы с однородной по толщине укладкой арматуры. Испытания монослоя необходимы не только для паспортизации материала; результаты испытаний являются основной для расчета материалов со сложными схемами укладки арматуры и гибридных материалов.

упругих характеристик и исследования влияния окружающей среды; нечувствительность к способу крепления. Удовлетворить всем этим требованиям трудно, поэтому для определения прочности и упругих постоянных применяются образцы разной формы и размеров.

Форма образцов из композитов в значительной степени зависит также от цели испытаний: проверки научных гипотез, технической паспортизации материалов, контроля качества материалов. Наиболее жесткие требования предъявляются к образцам второй группы, которым в этой главе уделено особое внимание.

7.3. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

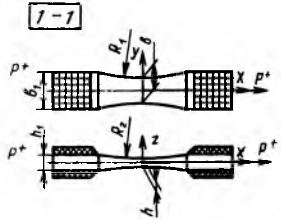
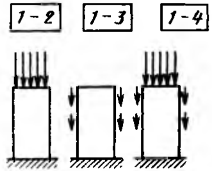
7.3.1. Растяжение плоских образцов. Несмотря на аналогию геометрии нагружения при растяжении и сжатии плоских образцов из композитов общими в этих методах являются только расчетные зависимости, естественно, с учетом знака напряжений и деформаций (табл. 7.1). Требования к форме и размерам образцов, способы крепления и нагружения образцов, виды разрушения в обоих случаях существенно различны. Оба метода стандартизованы ГОСТ 25.601—80; ASTM D 3039—76 (растяжение) и ГОСТ 25.602—80; ASTM D 3410—75 (сжатие). Требования в ASTM и ГОСТе несколько расходятся. Стандарты ASTM распространяются на однонаправленные и ортогонально армированные стекло-, боро- и углепластики; нагружение производится в направлениях главных осей упругой симметрии материала (схема армирования и взаимная ориентация осей материала и направления нагрузки ГОСТами не регламентированы). При испытаниях плоских образцов на растяжение или сжатие определяются прочность в осевом направлении $\Pi_x^{+(-)}$, модуль упругости $E_x^{+(-)}$ и коэффициенты Пуассона $\nu_{yx}^{+(-)}$ и $\nu_{zx}^{+(-)}$.

По ASTM предусмотрено использование только образцов в виде полосок, по ГОСТу для определения прочности на растяжение или сжатие, кроме них, допускается также применение двусторонних лопаток, преимущества которых (в сравнении с образцами-полосками) заключаются в следующем: заданное сечение разрушения, более низкое разрывное усилие (при одинаковых размерах поперечного сечения зоны крепления), чем облегчается крепление образца и передача усилий, меньшая чувствительность к неточностям установки в испытательной машине. Их основные недостатки: неоднородное напряженное состояние, более трудоемкое изготовление. В отдельных случаях применяются образцы с круглым поперечным сечением и трехслойные балки [3].

Образец для испытаний материалов на одноосное растяжение и сжатие имеет функциональные части: две переходные, две нагрузочные и рабочую. Переходные части служат для поглощения возмущений напряженно-деформированного состояния, связанных с креплением и нагружением образца (краевого эффекта). Нагрузочные части служат для крепления образца в испытательной машине, они воспринимают и передают рабочей части внешнюю нагрузку. В рабочей части образца производятся измерения деформаций и по ее геометрическим размерам этой части и внешней нагрузке подсчитываются напряжения. Размеры рабочей части выбираются с учетом следующих требований: в рабочей части должно быть однородное напряженное состояние; измеряемые величины не должны зависеть от размеров поперечного сечения образца; должно быть обеспечено надежное крепление измерительных инструментов.

Для удовлетворения первого требования общая длина образца при заданной длине мерной базы должна быть выбрана с учетом зоны краевого эффекта. Установлено, что длина зоны краевого эффекта при растяжении зависит от отношений упругих постоянных $\alpha = E_x/E_z$ и $\beta = \dfrac{E_x}{G_{xz}} - 2\nu_{zx}$, от относительных геометрических размеров зоны крепления образца $\dfrac{a}{h}$, $\dfrac{b}{a}$, $\dfrac{c}{a}$ ($2a$ — длина защемленной части образца, b — координата сечения

7.1. Методы растяжения и сжатия плоских образцов

	Растяжение (+)	Сжатие (−)
Сведения о методах		
Определяемые характеристики	$\Pi_x^+, E_x^+, \nu_{yx}^+, \nu_{zx}^+$	$\Pi_x^-, E_x^-, \nu_{yx}^-, \nu_{zx}^-$
Измеряемые величины	$P^+, P^+_{\text{разр}}, \varepsilon_x^+, \varepsilon_y^+, \varepsilon_z^+$	$P^-, P^-_{\text{разр}}, \varepsilon_x^-, \varepsilon_y^-, \varepsilon_z^-$
Расчетные зависимости	$\Pi_x^{+(-)} = \dfrac{P^{+(-)}_{\text{разр}}}{bh}$; $\nu_{yx}^{+(-)} = \dfrac{\varepsilon_y^{+(-)}}{\varepsilon_x^{+(-)}}$;	$E_x^{+(-)} = \dfrac{P^{+(-)}}{bh}\,\dfrac{1}{\varepsilon_x^{+(-)}}$; $\nu_{zx}^{+(-)} = -\dfrac{\varepsilon_z^{+(-)}}{\varepsilon_x^{+(-)}}$
Ограничения: структурные: укладка	$0°, 90°, 0°/90°$	
угол вырезки, градус	0, 90	
физические	Для E_x и ν: линейный диапазон диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$	
геометрические	См. (7.6) и (7.7)	$l/b > 4$ (схема *1—3*) $l/b > 5$ (схема *1—2*) $l \leqslant l_{\text{кр}}$ — см. (7.10)

Примечание. $P_{\text{разр}}$ — нагрузка при разрушении образца.

рабочей части образца, $2c$ — толщина защемленной части образца, $2h$ — толщина рабочей части образца) и от способа передачи растягивающей нагрузки, т. е. параметра q/p (где p — растягивающая нагрузка, q — сжимающая нагрузка на образец в захватах). Расчеты показывают, что даже для очень сильно анизотропных материалов ($\alpha = 40$, $\beta = 150$) длина зоны краевого эффекта не превышает 4,4 толщины рабочей части образца. Экспериментальное исследование распределения деформаций по длине и высоте хорошо согласуется с теоретическими выводами и показывает, что распределение деформаций зависит от степени анизотропии и типа укладки арматуры материала образца. В зоне крепления образца наружные слои оказываются перегруженными, внутренние — недогруженными. В образцах-полосках $\left(\frac{c}{a} = 1\right)$ возмущение напряженно-деформированного состояния выравнивается медленнее, чем в образцах-лопатках $\left(\frac{c}{a} > 1\right)$. Увеличение длины участка нагружения, характеризуемое параметром $\frac{a}{h}$, приводит к уменьшению деформаций на краю сечения. Изменение параметра q/p мало влияет на распределение нормальных напряжений σ_x. Значение напряжений σ_z и τ_{xz} в зоне краевого эффекта на два-три порядка ниже, чем напряжения σ_x.

Методом конечных элементов было исследовано напряженное состояние узла крепления (образец—слой клея—накладки) в зависимости от геометрии накладок и жесткости образца при растяжении и при растяжении совместно с изгибом перпендикулярно плоскости образца (вследствие параллельного смещения захватов) [8]. При растяжении осевые нормальные напряжения σ_x практически не зависят от длины накладок, но очень сильно возрастают напряжения σ_z, если длина накладок больше или меньше длины захватов. Важна форма обращенных к середине образца концов накладок: если концы накладок скошены, то напряжения σ_z значительно меньше, чем в случае, когда накладки имеют прямые концы.

Установлено [8], что при растяжении совместно с изгибом перпендикулярно плоскости образца напряжения σ_x и τ_{xz} в образце возрастают с увеличением длины накладок; все напряжения в образце, за исключением напряжений σ_x, уменьшаются с увеличением жесткости образца (напряжение σ_x не чувствительно к изменению жесткости образца); напряжения в образце возрастают с увеличением толщины накладок. Все эти выводы действительны только в случае надежного крепления накладок к образцу. Контролировать отсутствие изгиба образца при помощи наклеенных на обе стороны его датчиков (рекомендация стандартов) не эффективно, так как в случае изгиба образца вследствие параллельного смещения осей захватов изгибающий момент в середине образца тоже равен нулю.

Размеры образцов, рекомендуемые современными стандартами, в основном соответствуют изложенным выше требованиям. Размеры рабочей части образца (длина, ширина, толщина) установлены стандартами в зависимости от типа укладки арматуры.

Основная техническая трудность при растяжении композитов (особенно однонаправленных) — надежная передача образцу растягивающих усилий обычно с помощью сил трения; применяются также образцы особых форм, у которых боковые поверхности головок являются опорными. Силы трения создаются клиновидными захватами или при помощи стягивающих болтов. Надежное крепление образца в клиновидных захватах обеспечивается при следующем условии:

$$\frac{f}{2\,\mathrm{tg}\,(\alpha + \varphi)} > 1, \qquad (7.5)$$

где f — коэффициент трения материала образца по поверхности захватов; α — угол наклона губок захватов; φ — приведенный угол трения качения на наклонной поверхности захватов.

При выборе угла α слабое сопротивление композитов поперечному сжатию учитывается условием

$$l_1 > \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\varphi)}\,\frac{\Pi_x^+}{\Pi_z^-}\,\frac{b}{b_1}\,h, \tag{7.6}$$

где l_1 — длина участка образца, воспринимающего нормальное давление q; Π_x^+, Π_z^- — прочность материала образца при осевом растяжении и поперечном сжатии соответственно; b, b_1 — ширина образца в рабочей части и в местах приложения нагрузки соответственно; h — толщина рабочей части образца.

В случае применения двусторонних лопаток скалывание их головок должно быть предотвращено правильным выбором ширины:

$$b\left(1-\frac{b}{b_1}\right) < 2l_1\frac{\Pi_{xz}}{\Pi_x^+}\,\frac{h_1}{h}, \tag{7.7}$$

где Π_{xz} — сопротивление материала образца межслойному сдвигу; h_1 — толщина участка образца, воспринимающего нормальное давление q.

Продольный профиль двусторонней лопатки должен быть выбран таким, чтобы растягивающая нагрузка передавалась рабочей части без нарушения целостности всего образца. Установление закономерности $\frac{dz}{dx} = f(x)$ проводится на основе выбранного критерия прочности. Наиболее эффективный способ уменьшения сечения рабочей части образца — изменение ширины образца, однако соблюдение условий передачи растягивающей нагрузки в этом случае приводит к слишком большой длине образца. Поэтому часто применяют двойные лопатки, в которых уменьшение сечения рабочей части образца создается за счет изменения толщины и ширины образца. Уменьшение толщины рабочей части, т. е. изгибной жесткости образца в плоскости, перпендикулярной к укладке арматуры, предпочтительно и потому, что в этой плоскости неточность установки образца в захватах испытательной машины и, следовательно, влияние изгиба наибольшее. Однако изменение толщины образца допустимо только для материалов с однородной по толщине укладкой арматуры.

Условия передачи нагрузки могут быть значительно улучшены при помощи приклеенных к образцу накладок. Накладки изготавливаются из материала, модуль упругости которого значительно меньше, а удлинение при разрыве больше соответствующих характеристик испытываемого материала. Обычно в качестве материала для накладок применяются стеклопластики, а иногда и древесный шпон. Толщина накладок составляет (1,5—4) h, где h — толщина образца.

Размеры накладок выбираются с таким расчетом, чтобы разрывное усилие, воспринимаемое ими, было больше разрывного усилия рабочей части образца:

$$\Pi_x^+ bh < 2\Pi_{xz} b_{\text{накл}} l_{\text{накл}}, \tag{7.8}$$

где Π_{xz} — меньшая из прочностей при межслойном сдвиге материала накладок, образца или клея, при помощи которого крепятся накладки.

Вид разрушения при растяжении зависит от направления действия внешней нагрузки относительно армирующих волокон и от типа укладки арматуры. Однонаправленные композиты при нагружении в направлении армирования разрушаются от разрыва армирующих волокон, что сопровождается появлением поперечных трещин разрыва и продольных трещин сдвига и расслоением в полимерной матрице. При увеличении угла нагружения к направлению армирующих волокон вид разрушения постепенно меняется от сдвига и скалывания полимерной матрицы параллельно направлению укладки армирующих волокон до чистого поперечного отрыва в полимерной матрице при нагружении перпендикулярно армирующим волокнам. Вид разрушения композитов с симметричной перекрестной арматурой (угол укладки арматуры к направлению действия нагрузки равен $\pm\theta$) зависит от угла укладки армирующих волокон. При углах укладки, меньших 30°, разрушение материала происходит в результате распространения трещины из-за расслоения матрицы между армирующими слоями; в этом случае очень важны межслойные напряжения. При углах укладки, больших 60°, трещина распространяется вдоль армирующих волокон вследствие разрыва полимерной матрицы без предшествующего расслоения. При углах укладки между 30 и 60° наблюдается сочетание описанных видов разрушения.

7.3.2. Сжатие плоских образцов. При испытаниях на сжатие размеры полосок выбираются с учетом концентрации нормальных напряжений σ_y и касательных τ_{xy}. Минимальное значение отношения l/b зависит от способа нагружения; соответствующие значения l/b для полосы из ортотропного материала приведены в табл. 7.1.

Главная задача, решаемая при сжатии плоских образцов, — выбор способа приложения нагрузки и обеспечение разрушения образца от сжатия. При нагружении только нормальными усилиями по торцам образца (схема *1—2*) практически невозможно обеспечить полный контакт между опорной поверхностью образца и поверхностью пуансона испытательной машины, следствием чего является преждевременное разрушение образца. При нагружении образца одними лишь касательными усилиями (схема *1—3*), как это регламентировано ASTM, передача сжимающих усилий тоже является несовершенной, особенно в случае применения плоских клиньев (ASTM предусмотрены конусные зажимные патроны). Наиболее рациональным является комбинированное нагружение — нормальными усилиями по торцам образца и касательными усилиями по боковым граням образца (схема *1—4*). При комбинированном нагружении угол наклона клиновидных вкладышей захватов выбирается из условий распределения нагрузки по торцам и боковым граням образца. Экспериментально установлено, что боковое раздавливание образца исключено, когда нагрузка по торцам его составляет 45—50% от разрушающей (в случае отсутствия боковой нагрузки). В действующих приспособлениях угол наклона составляет 14—17°. Концевые части образца защищены накладками.

При сжатии однонаправленных композитов в направлении армирования наблюдаются три вида разрушения: выпучивание армирующих волокон (материалы с матрицей из низкомодульных связующих, $E_{\text{м}} = 15 \div 25$ МПа), поперечный разрыв вследствие различия коэффициентов Пуассона компонентов материала и неравномерности распределения поперечных деформаций по длине образца (материалы с матрицей средней жесткости, $E_{\text{м}} = 200 \div 700$ МПа) и срез армирующих волокон под углом 45° без местного выпучивания арматуры (материалы с жесткой матрицей, $E_{\text{м}} > 2000$ МПа). Материалы, армированные под углом к продольной оси образца, разрушаются от сдвига без смятия по торцам; всю сдвигающую нагрузку при этом воспринимает матрица. Перечисленные основные виды разрушения могут сопровождаться рядом других явлений: неупругим и нелинейным поведением армирующих волокон и матрицы, расслоением, поверхностным отслоением, общей потерей устойчивости, смятием по торцам, скалыванием по слою. Различное сочетание всех этих явлений может затруднить определение вида разрушения.

Даже в случае отсутствия полного расслоения незаметное глазом выпучивание боковой поверхности образца может привести к заметным погрешностям при измерении деформации. Критическое напряжение, при котором происходит местная потеря устойчивости, сопровождающаяся разрывом связующего,

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{2\pi^2}{3} E_x^- \left(\frac{\varkappa_0^2}{2}\right)^{1/5}, \tag{7.9}$$

где $\varkappa_0 = \dfrac{36\gamma}{\pi^4 E_x^- l^*}$; γ — удельная работа разрушения по Гриффитсу; l^* — длина отслоившегося участка при местной потере устойчивости.

При испытаниях на сжатие должна быть обеспечена устойчивость самого образца и, особенно, его рабочей части. Для исключения потери устойчивости образца в целом применяются приспособления, в которых поверхности образца касаются призматических выступов, которые предотвращают выпучивание образца, но не стесняют деформации в его плоскости. Для исключения потери устойчивости рабочей части ее свободная длина l должна быть меньше критической длины:

$$l_{\text{кр}} = 0{,}907h \times \\ \times \sqrt{\left(\frac{1}{\sigma^-_{\text{кр}}} - \frac{1{,}2}{G_{xz}}\right) E^-_x}\,, \tag{7.10}$$

где E_x и G_{xz} — модули соответственно упругости и сдвига испытываемого материала; $\sigma^-_{\text{кр}}$ — критическое напряжение при сжатии.

Методы испытания на растяжение и сжатие плоских образцов разработаны для случая, когда волокна параллельны или перпендикулярны оси образца.

7.3.3. Растяжение кольцевых образцов. Наиболее распространенные методы растяжения кольцевых образцов приведены в табл. 7.2. Широко применяется метод растяжения полудисками (схема *2—1*). Меньше распространены методы испытания на растяжение колец при помощи равномерного внутреннего давления, создаваемого податливым кольцом (схема *2—3*) или гидравлической системой (схема *2—4*).

Метод растяжения колец полудисками стандартизован (ГОСТ 25.603—82; ASTM D 2290—76).

Растяжение полудисками — метод простой в осуществлении и в обработке результатов, однако имеет некоторые существенные недостатки: распределение деформаций по окружности образца неравномерное *, большое влияние оказывает трение между кольцом и полудисками и, главное, около разъема полудисков вследствие изменения радиуса кривизны свободной части образца в нем возникает концентрация напряжений. В тонкостенных кольцах (тонкими являются кольца, у которых $\frac{h}{R} < 2\sqrt{3}\,\frac{G_{\theta r}}{E_\theta}$) концентрация радиальных растягивающих напряжений σ^+_r оказывает небольшое влияние, зато численные значения напряжений межслойного сдвига $\tau_{\theta r}$ могут превысить предельную для данного материала величину еще до разрушения образца нормальными окружными напряжениями σ_θ. С увеличением относительной толщины образца h/R, степени анизотропии и величины предельной деформации материала все эти явления усиливаются. Вследствие концентрации напряжений измеренная при испытаниях колец полудисками прочность оказывается пониженной и может служить только для качественного сопоставления материалов. Предложения о поправочных коэффициентах практического применения не нашли.

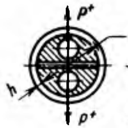
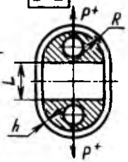
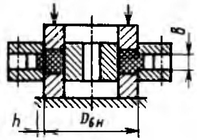
Попытка смягчить влияние концентрации напряжений применением образцов, в которых оба полукольца соединены прямыми и взаимно параллельными участками (схема *2—2*), из-за технологических трудностей оказывалась малоэффективной, так же как и попытки применять более сложные многосекторные приспособления [1]. В последнем случае сохраняется недопустимо высокая концентрация напряжений и добавляется неравномерность нагружения образца вследствие многосекторности приспособления. При определении модуля упругости измерители деформаций размещаются на участках образца с наиболее равномерным распределением деформаций — примерно под углом 30—45°

* Неравномерность распределения деформаций оценивается при помощи коэффициента концентрации

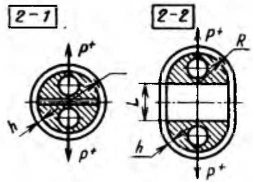
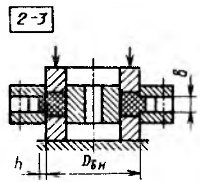
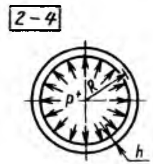
$$k_{\text{т}} = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{к}}} = \frac{\sigma_{\theta\,\max}}{\sigma_{\theta\,\text{ср}}} = \\ = \frac{E_\theta \varepsilon_{\theta\max}}{p/2bh} = \\ = 1 + \frac{\pi}{n}\left(\frac{3G_{\theta r}}{E_\theta}\right)^{1/2} \times \\ \times \left[1 - \frac{2G_{\theta r}}{(E_r E_\theta)^{1/2}}\right],$$

где n — число секторов приспособления (у полудисков $n = 2$); $\sigma_{\text{пр}}$ — прочность, определенная на прямом образце; $\sigma_{\text{к}}$ — прочность, определенная на кольцевом образце.

7.2. Методы растяжения кольцевых образцов

	Растяжение полудисками	Растяжение внутренним давлением, создаваемым	
		с помощью податливого кольца	гидравлической системой
Сведения о методах	2-1  2-2 	2-3 	2-4 
Определяемые характеристики	$П_\theta^+$, E_θ^+		
Измеряемые величины	P^+, $P^+_{разр}$, ε_θ^+	p^+, $p^+_{разр}$, ε_θ^+	
Расчетные зависимости	$П_\theta^+ = \dfrac{P_{разр}}{2bh}$; $E_\theta^+ = \dfrac{P^+}{2bh}\,\dfrac{1}{\varepsilon_\theta^+}$	$П_\theta^+ = \dfrac{p^+_{разр}D_{вн}}{2h}$; $E_\theta^+ = \dfrac{p^+D_{вн}}{2h\varepsilon_\theta^+}$	$П_\theta^+ = \dfrac{p^+_{разр}D_{вн}}{2h}$; $E_\theta^+ = \dfrac{p^+D_{вн}}{2h\varepsilon_\theta^+}$

Продолжение табл. 7.2

	Растяжение полудисками	Растяжение внутренним давлением, создаваемым	
		с помощью податливого кольца	гидравлической системой
Сведения о методах			
Ограничения: структурные: укладка	0°, 90°, 0°/90°		
угол вырезки, градус	0, 90		
физические	Для E_θ^+: линейный диапазон диаграммы $P^+ \sim \varepsilon_\theta^+$ (или $p^+ \sim \varepsilon_\theta^+$)		
геометрические	$0{,}08 \leqslant \frac{h}{R} \leqslant 0{,}18$* $L \geqslant \frac{2}{3} R$	$0{,}08 \leqslant \frac{h}{R} \leqslant 0{,}18$*	$0{,}08 \leqslant \frac{h}{R} \leqslant 0{,}18$*

* Для стеклопластиков.

Примечание. $P^+_{разр}$, $p^+_{разр}$ — нагрузки при разрушении образца; ось θ является касательной к окружности с радиусом R.

к разъему полудисков. При испытаниях образцов с параллельной средней частью измерители деформаций размещаются в середине обоих прямых участков образца, где поле деформаций однородное.

Концентрация напряжений в образце исключается при испытаниях равномерным внутренним давлением, создаваемым при помощи податливого кольца (схема *2—3*) или гидравлической системой (схема *2—4*). Основные недостатки метода испытаний податливым кольцом — это необходимость предварительной и систематической тарировки элемента нагружения и очень тщательной обработки поверхности образца, а метода гидравлических испытаний — необходимость использования специального сложного и дорогого оборудования для создания давления.

7.3.4. Сжатие кольцевых образцов. Сжатие колец в их плоскости осуществляется наружным давлением; применяемые на практике схемы нагружения и расчетные зависимости приведены в табл. 7.3. Испытания колец на сжатие полудисками (схема *3—1*) отличаются от растяжения полудисками тем, что в этом случае удается уменьшить влияние концентрации напряжений в образце около разъема полудисков. Наилучшие результаты достигнуты при испытаниях кольцевых образцов в приспособлениях с полуобоймами и замками-решетками, которые исключают возможность увеличения горизонтального диаметра образца. Нагружение наружным давлением при помощи податливого кольца (схема *3—2*) и гидравлической системы (схема *3—3*) проводится аналогично испытаниям на растяжение соответствующими методами. При нагружении образца при помощи податливого кольца последнее для образца является упругим основанием и в некоторой степени повышает критическое давление, при котором образец теряет устойчивость.

Наружное давление может быть реализовано и при помощи механических приспособлений, нагрузка на образец в которых создается при помощи большого числа (до 72) одинаковых рычагов (кулачков), которые через нагрузочный плунжер соединены с пуансоном испытательной машины. Преимущества многокулачкового приспособления: простая (хотя и трудоемкая в изготовлении) конструкция и корректность эксперимента. Однако даже при высокой точности изготовления приспособления неравномерность обжатия кольцевого образца рычагами может достигать 10%; в процессе эксплуатации эта неравномерность возрастает, что требует периодической наладки и тарировки приспособления. Мощность многокулачкового приспособления конструктивно ограничена.

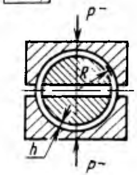
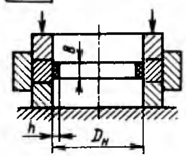
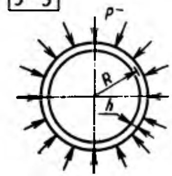
При испытаниях колец на сжатие наружным давлением особенно трудно выбрать относительную толщину образца h/R, при которой можно не учитывать влияния побочных факторов и добиться разрушения от сжатия. В зависимости от относительной толщины образца h/R и степени анизотропии исследуемого материала $E_\theta/G_{\theta r}$ при сжатии кольцевых образцов наблюдаются три различных вида исчерпания несущей способности: потеря устойчивости (при испытаниях тонкостенных образцов), разрушение собственно от сжатия (кольца средней относительной толщины) и разрушение при двухосном сжатии (толстых колец), при анализе которого следует учитывать не только окружное напряжение σ_θ, но и радиальные напряжения σ_r.

Критическое давление, при котором наступает потеря устойчивости кольца:

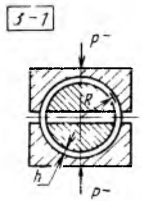
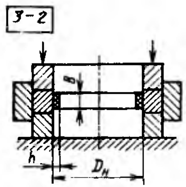
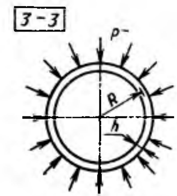
$$p_{кр} = \frac{1}{1 + 0{,}4\varkappa^2}\, p^*_{кр}, \quad (7.11)$$

где $p^*_{кр} = \dfrac{3E_\theta J}{R^3}$ — критическое давление на единицу длины оси кольца, определенное без учета сдвигов (R — средний радиус кольца), $\varkappa = \dfrac{h}{R}\sqrt{\dfrac{E_\theta}{G_{\theta z}}}$.

При нагружении кольца наружным давлением часто не удается правильно оценить прочность при сжатии вследствие «отщелкивания» внутреннего слоя. «Отщелкивание» и последующая потеря устойчивости внутреннего слоя кольца происходит, когда разность энергии внутреннего слоя, сохранившего кольцевую конфигурацию

	Сжатие полудисками	Сжатие наружным давлением, создаваемым	
		с помощью податливого кольца	гидравлической системой
Сведения о методах	3-1 	3-2 	3-3 
Определяемые характеристики	Π_θ^-, E_θ^-		
Измеряемые величины	P^-, $P^-_{разр}$, ε_θ^-	p^-, $p^-_{разр}$, ε_θ^-	
Расчетные зависимости	$\Pi_\theta^- = \dfrac{P^-_{разр}}{2bh}$; $E_\theta^- = \dfrac{P^-}{2bh}\,\dfrac{1}{\varepsilon_\theta^-}$	$\Pi_\theta^- = \dfrac{p^-_{разр}D_н}{2h}$; $E_\theta^- = \dfrac{p^-D_н}{2h\varepsilon_\theta^-}$	$\Pi_\theta^- = \dfrac{p^-_{разр}D_н}{2h}$; $E_\theta^- = \dfrac{p^-D_н}{2h\varepsilon_\theta^-}$

Продолжение табл. 7.3

	Сжатие полудисками	Сжатие наружным давлением, создаваемым	
		с помощью податливого кольца	гидравлической системой
Сведения о методах			
Ограничения: структурные: укладка	0°, 90°, 0°/90°		
угол укладки, градус	0, 90		
физические	Для E_θ^-: линейный диапазон диаграммы $P^- \sim \varepsilon_\theta^-$ (или $p^- \sim \varepsilon_\theta^-$)		
геометрические	$0{,}08 \leqslant \frac{h}{R} \leqslant 0{,}18$*	$0{,}08 \leqslant \frac{h}{R} \leqslant 0{,}18$*	$0{,}08 \leqslant \frac{h}{R} \leqslant 0{,}18$*

* Для стеклопластиков.

Примечание. $P^-_{\text{разр}}$, $p^-_{\text{разр}}$ — нагрузки при разрушении образца; ось θ является касательной к окружности с радиусом R.

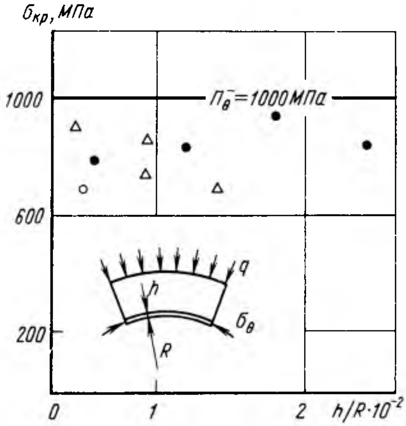


Рис. 7.2. Влияние отслоения ($\sigma_{\text{кр}}$) и относительной толщины h/R на прочность (Π_θ) кольца при сжатии [3]:
h/R равно 0,11 (Δ); 0,21 (○) и 0,34 (●)

и энергии того же слоя после отслоения и потери устойчивости оказывается больше энергии сцепления внутреннего слоя. При толщине слоя, равной h_0, которая определяется укладкой, критическое напряжение, при котором происходит «отщелкивание»,

$$\sigma_{\text{кр}} = 0{,}916E_\theta \times$$

$$\times \left[\left(\frac{h_0}{R_{\text{вн}}}\right)^2 + \varkappa\left(\frac{h_0}{R_{\text{вн}}}\right)^{-1}\right]^{1/2}, \tag{7.12}$$

где $\varkappa = \dfrac{4{,}77\gamma}{E_\theta R_{\text{вн}}}$ (γ — удельная работа разрушения по Гриффитсу); $R_{\text{вн}}$— внутренний радиус кольца. Как видно из рис. 7.2, из-за отщелкивания внутреннего слоя при испытаниях не удается достичь нагрузки, соответствующей прочности материала.

Проявление указанного механизма разрушения зависит также от относительной толщины кольца. Появившееся в результате «отщелкивания» расслоение при спиральной намотке может стать возбудителем размотки, при кольцевой укладке может происходить последовательное «отщелкивание» слоя за слоем.

7.4. СДВИГ

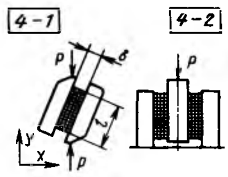
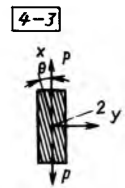
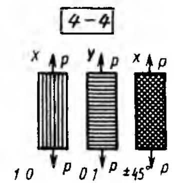
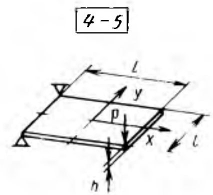
Наиболее часто применяемые в исследовательской практике методы испытания на сдвиг плоских образцов приведены в табл. 7.4 и 7.5, кольцевых образцов — в табл. 7.6, 7.8, трубчатых — в табл. 7.5. Методы определения характеристик сдвига при изгибе плоских и кольцевых образцов рассмотрены в разд. 7.5. В этих таблицах указаны измеряемые величины, определяемые характеристики, приведены расчетные формулы и структурные, физические и геометрические ограничения.

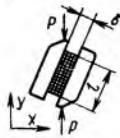
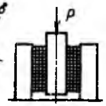
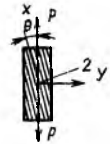
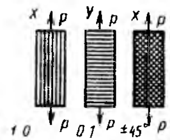
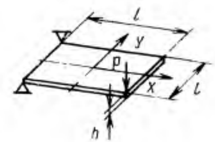
7.4.1. Сдвиг в плоскости. Метод перекашивания пластины в шарнирном четырехзвеннике заимствован из испытаний фанеры. Недостатки этого метода: неоднородность распределения деформаций в рабочей части образца, ограниченные возможности ориентации осей упругой симметрии материала относительно направления действия нагрузки, сильное обжатие кромок образца, возможность выпучивания тонких образцов, большие размеры образцов, зависимость от способа приложения сдвигающей нагрузки.

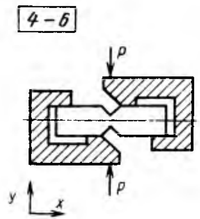
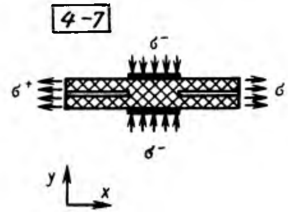
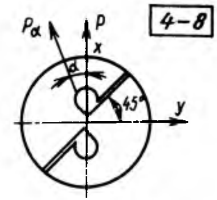
В стандартных приспособлениях с жесткой шарнирной рамой оси вращения шарниров не совпадают с угловыми точками рабочей части образца, что и является причиной неравномерности распределения и концентрации деформаций в рабочей части образца. Диагонали жесткой шарнирной рамы удлиняются и укорачиваются на одинаковую величину, вследствие чего при испытаниях неравновесных материалов, оси упругой симметрии которых совпадают с диагоналями приспособления, невозможно обеспечить состояние чистого сдвига.

Для устранения этих недостатков предложены приспособления, в которых оси вращения шарниров вынесены над поверхностью образца и совмещены с угловыми точками рабочей части образца; приспособления, в которых растягивающая нагрузка прилагается через систему взаимно не связанных рычагов на некотором расстоянии от рабочей части образца; приспособления, в которых сдвигающие усилия на образец передаются через жесткую

7.4. Методы сдвига в плоскости укладки арматуры

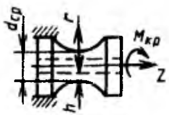
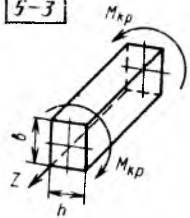
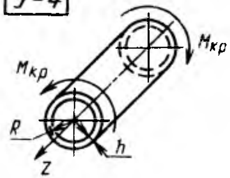
	Перекашивание полосы	Растяжение полосы		Кручение квадратной пластины
		под углом к главным осям ортотропии	в главных осях ортотропии	
Сведения о методах				
Определяемые характеристики	G_{xy}, Π_{xy}	G_{12}	G_{xy}	G_{xy}
Измеряемые величины	P, $P_{\text{разр}}$, ε_{45}	P; ε_0, ε_{45}, ε_{90} (розетки 0°/45°/90°) или ε_0, ε_{120}, ε_{240} (розетки 0°/120°/240°)	P, ε_x, ε_y, $\varepsilon_x^{\pm 45}$	P, w_{p}
Расчетные зависимости	$G_{xy} = P/(2F\varepsilon_{45})$; $\Pi_{xy} = \dfrac{P_{\text{разр}}}{F}$, где $F = lh$ (схема *4—1*), $F = 2lh$ (схема *4—2*)	См. (7.13)—(7.19)	См. (7.20)—(7.23)	$G_{xy} = \dfrac{3Pl^2}{h^3 w_{\text{p}}}$

	Перекашивание полосы	Растяжение полосы		Кручение квадратной пластины
		под углом к главным осям ортотропии	в главных осях ортотропии	
Сведения о методах	4-1  4-2 	4-3 	4-4 	4-5 
Ограничения: структурные: укладка	0°, 90°, 0/90°	0°	0°, 90°, 0°/90° (все три совместно)	0°; 90°; 0/90°
угол вырезки, градус	0; 90	10—15	0, 90, 45	0; 90
физические	—	—	—	Линейный диапазон диаграммы $P \sim w_p$; $w_p \leqslant 0{,}5h$
геометрические	$\frac{l}{b} > 10$	$\frac{l}{b} \approx 15$	—	$\frac{1}{25} > \frac{h}{l} > \frac{1}{100}$ для (боропластиков)

	Несимметричный изгиб	Двухосное нагружение	Растяжение диска
Сведения о методах			
Определяемые характеристики	Π_{xy}, G_{xy}		
Измеряемые величины	P, $P_{\text{разр}}$, γ		
Расчетные зависимости	$\Pi_{xy} = \dfrac{P_{\text{разр}}}{F}$;	$G_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}$	
Ограничения:			
структурные:			
укладка	—		
угол вырезки, градус	—		
физические	G_{xy}: линейный диапазон диаграммы τ—γ		
геометрические	—		

П р и м е ч а н и е. $P_{\text{разр}}$— нагрузка при разрушении образца; $w_{\text{р}}$— прогиб в точке приложения нагрузки (схема 4—5).

7.5. Методы кручения прямых стержней и труб

	Стержни с кольцевой выемкой	Стержни с гладкой переходной поверхностью	Прямые стержни	Трубы
Сведения о методах	5-1 	5-2 	5-3 	5-4 
Определяемые характеристики	Π_{rz}		G_{xy}, G_{xz}, G_{yz}	$G_{\theta z}$, $\Pi_{\theta z}$
Измеряемые величины	$M_{кр.\,разр}$		$M_{кр}$, φ_1, φ_2	$M_{кр}$, $M_{кр.\,разр}$, φ_1, φ_2, $\varepsilon^{+45°}$, $\varepsilon^{-45°}$
Расчетные зависимости	$\Pi_{rz} = \frac{M_{кр.\,разр}}{W_p}$		$C_z = G_{xz} b h^3 f(\eta)$, где $f(\eta) = \frac{32\eta^2}{\pi^4} \sum\limits_{k=1,3,5\ldots} \frac{1}{k^4} \left(1 - \frac{2\eta}{k\pi} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2\eta}\right)$;	$G_{\theta z} = \frac{M_{кр}}{J_p} \frac{l}{\varphi_1 - \varphi_2}$ или $G_{\theta z} = \frac{M_{кр}}{J_p} \frac{1}{\varepsilon^{+45°} - \varepsilon^{-45°}}$

		$\eta = \alpha\beta;\ \alpha = \frac{b}{h};$ $\beta = \sqrt{G_{yz}/G_{xz}}$	$\Pi_{\theta z} = \frac{M_{кр.\ разр}}{W_р}$
Ограничения: структурные: укладка	Симметрична относительно оси z	0°, 90°, 0°/90°	
угол вырезки, градус	—	0, 90	
физические	—	Линейный диапазон диаграммы $M_{кр} \sim \varphi$	Для $G_{\theta z}$: линейный диапазон диаграммы $M_{кр} \sim \varphi$
геометрические	Схема *5—1*: $d \leqslant 15$ мм; $l_р/d = 0{,}2 \div 1{,}0$ Схема *5—2*: $h \approx 2$ мм (для стеклопластиков)	—	$h/R = f\,(E_z/E_\theta)$ Ориентировочно: для стеклопластика $h/R < 1/10$, для углепластика $h/R < 1/40$

Примечание. $M_{кр.\ разр}$ — крутящий момент при разрушении образца; ось z — продольная ось образца; ось θ является касательной к окружности с радиусом R; ось r — направлена по радиусу; оси x и y — см. схему *5—3*; $J_р$ и $W_р$ — полярный момент инерции и момент сопротивления поперечного сечения образца.

шарнирную раму и регулируемые тяги с шарнирами. Перечисленные недостатки и технические трудности привели к противоречивым оценкам метода и к постепенному отказу от него.

Вместо метода перекашивания пластины в шарнирном четырехзвеннике стали применять простой и экономичный метод перекашивания полосы (табл. 7.4, схемы *4—1* и *4—2*). Около свободных кромок образца наблюдается отличное от чистого сдвига напряженное состояние — зона краевого эффекта. Фиксированные кромки образца испытывают обжатие в звеньях приспособления. Влияние краевых зон и равномерность распределения касательных напряжений по ширине образца зависят от отношения длины к ширине рабочей части образца l/b и от отношения упругих постоянных исследуемого материала G_{xy}/E_y. Установлено, что для композитов влияние краевых зон пренебрежимо мало при $l/b > 10$, за исключением случая, когда $\nu_{xy} = \nu_{yx} \approx -1$; для таких материалов метод неприменим. Более детальные исследования [6] позволили установить, что оптимальное значение отношения l/b зависит от схемы укладки арматуры, т. е. от степени анизотропии материала. Упругие постоянные, определяемые методом перекашивания полосы, мало чувствительны к относительным размерам l/b, так как измерения проводят в центре рабочей части образца, где напряженное состояние наиболее однородно. При определении прочности Π_{xy} заметное влияние оказывает обжатие кромок образца. Предпочтение следует отдать приклеиванию образца к звеньям приспособления. Направление действия нагрузки (по диагонали или параллельно кромкам рабочей части образца) заметного влияния на распределение напряжений не оказывает. Звенья приспособлений должны иметь постоянное поперечное сечение; уменьшение их толщины по длине образца приводит к заметному приросту нормальных напряжений в образце. Нормальные напряжения σ_y могут быть причиной преждевременного разрушения образца. По сравнению с испытаниями в шарнирном четырехзвеннике метод перекрашивания полосы позволяет получить более высокие значения модуля сдвига и несколько пониженные значения прочности.

Кажущейся простотой отличается метод растяжения анизотропной полосы, имеющей несколько разновидностей схемы укладки арматуры (схемы *4—3* и *4—4*). Однако для определения прочности сдвига в плоскости укладки арматуры анизотропные полосы не применяются, так как метод дает заниженные значения. При растяжении полосы с укладкой арматуры $\pm 45°$ не обеспечивается состояние чистого сдвига и по площадкам сдвига действуют также нормальные напряжения; это приводит к несколько пониженным напряжениям на диаграмме $\tau_{12} \sim \gamma_{12}$.

При растяжении полосы из однонаправленного материала с укладкой арматуры под углом θ численное значение этого угла, при котором относительные деформации сдвига $\gamma_{12}/\varepsilon_x$ максимальны и касательное напряжение τ_{12} (как единственное) достигает своего критического значения, зависит от анизотропии упругих и прочностных свойств исследуемого материала.

Отношение $\gamma_{12}/\varepsilon_x$ имеет максимум при угле

$$\theta = \operatorname{arctg}\left[(B + D^{1/2})^{1/3} + (B - D^{1/2})^{1/3} - \frac{\delta_1}{3}\right]^{1/2}, \quad (7.13)$$

$$B = \frac{1}{2\alpha} - \frac{\delta_1^3}{27} - \frac{\delta_1\delta_2}{6};$$

$$D = \frac{1}{4\alpha^2} - \frac{\delta_1}{3\alpha}\left(\frac{\delta_2}{2} + \frac{\delta_1^2}{9}\right) - \frac{\delta_2}{27}\left(\frac{\delta_1^2}{4} + \delta_2\right);$$

$$\alpha = \frac{E_1}{E_2}; \quad \delta_1 = 3 - \frac{E_2}{G_{12}} + 2\nu_{12};$$

$$\delta_2 = \frac{3E_2}{E_1} - \frac{E_2}{G_{12}} + 2\nu_{12}.$$

Для современных композитов оптимальное значение угла θ составляет 10—15°. Установлено, что отношение

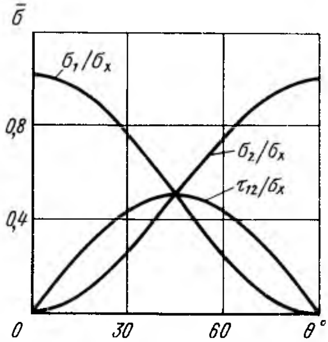


Рис. 7.3. Изменение относительных напряжений σ_1/σ_x, σ_2/σ_x и τ_{12}/σ_x в образце из однонаправленного углепластика Modmor I/ERLA4617 в зависимости от угла θ

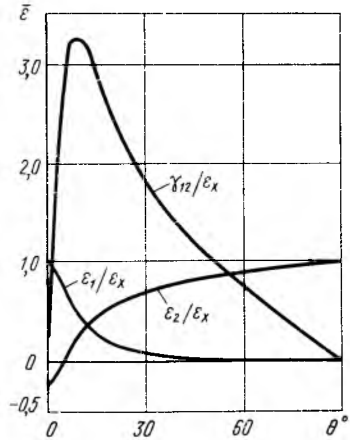


Рис. 7.4. Изменение относительных деформаций $\varepsilon_1/\varepsilon_x$, $\varepsilon_2/\varepsilon_x$ и $\gamma_{12}/\varepsilon_x$ в образце из однонаправленного углепластика Modmor I/ERLA4617 в зависимости от угла θ

напряжений σ_1/σ_x, σ_2/σ_x и τ_{12}/σ_x значительно чувствительнее к изменению угла θ, чем отношения деформаций $\varepsilon_1/\varepsilon_x$, $\varepsilon_2/\varepsilon_x$ и $\gamma_{12}/\varepsilon_x$ (рис. 7.3 и 7.4). С учетом этого допуски на угол вырезки образца, угол наклейки тензодатчиков и угол, определяющий направление действия нагрузки, приняты равными $\pm 1°$. Расчетные зависимости при растяжении полосы с укладкой арматуры под углом θ справедливы для однородного напряженно-деформированного состояния. Результаты теоретических и экспериментальных исследований [10] показывают, что длина зоны (в данном случае несимметричной) краевого эффекта и поле перемещений в рабочей части образца зависят от относительной длины полосы l/b, угла θ и упругих характеристик материала полосы. Погрешность определения модуля сдвига в плоскости G_{12} учитывается при помощи зависимости

$$\frac{G_{12}}{G_{12}^*} = \frac{\tau_{12}}{\tau_{12}^*} = \frac{1 - \dfrac{\beta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\sin\theta\cos\theta}}{1 - \dfrac{2}{3}\eta}, \quad (7.14)$$

где G_{12}^* — определяемый экспериментально кажущийся модуль сдвига в плоскости, если при пересчете среднего осевого напряжения $\bar{\sigma}_x = \dfrac{P}{F}$ в главных осях материала (под углом θ к направлению действия нагрузки) используются зависимости

$$\tau_{12}^* = -\bar{\sigma}_x \sin\theta\cos\theta$$

и

$$\beta = \frac{6\left(\dfrac{b}{2l}\right)^2\left(\dfrac{\bar{s}_{16}}{\bar{s}_{11}}\right)}{1 + 6\left(\dfrac{b}{2l}\right)^2\left(\dfrac{\bar{s}_{66}}{\bar{s}_{11}}\right)};$$

$$\eta = -\beta\left(\frac{\bar{s}_{16}}{\bar{s}_{11}}\right).$$

Здесь l и b — соответственно длина и ширина рабочей части образца; $\bar{s}_{11}$, $\bar{s}_{16}$, $\bar{s}_{66}$ — коэффициенты податливости, пересчитанные в осях образца.

При выборе отношения l/b следует также учесть, что гибкие полосы более чувствительные к механическим воздействиям во время эксперимента. Обычно отношение l/b находится в пределах 14—16.

При перекашивании и растяжении анизотропной полосы по экспериментально определенным касательным напряжениям τ и деформациям сдвига γ строится диаграмма $\tau \sim \gamma$ (в общем случае нелинейная), из которой определяется модуль сдвига (касательный или секущий). Поэтому при испытаниях по схемам *4—1* и *4—4* (см. табл. 7.4) физические ограничения (рабочий диапазон диаграммы $\tau \sim \gamma$) не накладываются.

При нагружении по схемам *4—1* и *4—2* касательные напряжения

$$\tau_{xy} = \frac{P}{F}, \qquad (7.15)$$

где $F = lh$ — для схемы *4—1* и $F = 2lh$ — для схемы *4—2*, а деформация сдвига

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{45^\circ}.$$

При нагружении по схеме *4—3* касательное напряжение

$$\tau_{12} = \frac{P}{2bh}\sin 2\theta, \qquad (7.16)$$

деформация сдвига

$$\gamma_{12} = (\varepsilon_y - \varepsilon_x)\sin 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta. \qquad (7.17)$$

При использовании розетки тензодатчиков 0°/120°/240° (угол отсчитывается против часовой стрелки) относительные деформации определяются по следующим формулам:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0^\circ};$$

$$\varepsilon_y = \frac{2\varepsilon_{120^\circ} + 2\varepsilon_{240^\circ} - \varepsilon_{0^\circ}}{3}; \qquad (7.18)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(\varepsilon_{240^\circ} - \varepsilon_{120^\circ})}{\sqrt{3}},$$

при использовании розетки тензодатчиков 0°/45°/90°

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{0^\circ};$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{90^\circ}; \qquad (7.19)$$

$$\gamma_{xy} = -\varepsilon_{0^\circ} + 2\varepsilon_{45^\circ} - \varepsilon_{90^\circ}.$$

Формулы (7.16) и (7.17) применимы также в случае растяжения полосы с укладкой арматуры под углом ±45° с целью определения модуля сдвига в плоскости составляющего ее однонаправленного монослоя [10]. В этом случае

$$\tau_{12} = \frac{1}{2}\sigma_x \text{ и } \gamma_{12} = \varepsilon_y - \varepsilon_x.$$

При испытаниях по схеме *4—4* (см. табл. 7.4) из независимых опытов определяются характеристики однонаправленного материала (E_{11}, E_{22}, ν_{12} и ν_{21}) и касательный модуль упругости $E_x^{\pm 45^\circ}$ полосы с укладкой ±45°; при этом для кривой $\sigma_x^{\pm 45^\circ} \sim \varepsilon_x^{\pm 45^\circ}$ применяется кусочно-линейная аппроксимация. Далее, по экспериментально определенным величинам $\varepsilon_x^{\pm 45^\circ}$ и $\nu_{xy}^{\pm 45^\circ}$ для каждого отрезка $\sigma_x^{\pm 45^\circ} \sim \varepsilon_x^{\pm 45^\circ}$ определяется деформация сдвига

$$\Delta\gamma_{12} = \left(1 + \nu_{xy}^{\pm 45^\circ}\right)\varepsilon_x^{\pm 45^\circ} \qquad (7.20)$$

и касательные напряжения

$$\Delta\tau_{12} = G_{12}\,\Delta\gamma_{12}, \qquad (7.21)$$

где касательный модуль сдвига

$$G_{12} = \frac{L_1 E_x^{\pm 45^\circ}}{4\left(L_1 - E_x^{\pm 45^\circ}\right)}. \qquad (7.22)$$

Здесь

$$L_1 = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \times (E_{11} + E_{22} + 2\nu_{21}E_{11}). \qquad (7.23)$$

По подсчитанным $\Delta\gamma_{12}$ и $\Delta\tau_{12}$ строится диаграмма деформирования.

Для определения модуля сдвига в плоскости укладки арматуры широко применяется трехточечная схема нагружения на кручение квадратной пластины (см. табл. 7.4, схема *4—5*). Эта схема была обоснована С. В. Цаем. Однако авторам стала известна неопубликованная дипломная работа Адамса Р. (An Investigation of the Elastic Properties of a Transversely Isotropic Material, 1962 г.), в которой использован двухточечный метод кручения квадратной пластины. В этой работе имеется ссылка на отчет В. Тилмана (F. G. H. Report No. 150/19, 1945 г.). Популярность метода обусловлена простотой расчетной формулы. Однако эксперименты должны вестись с большой тщательностью.

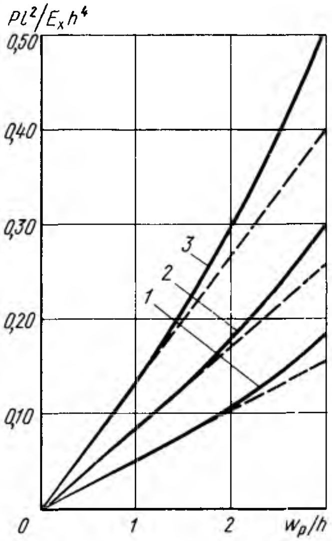


Рис. 7.5. Зависимость прогиб—нагрузка при кручении квадратной пластины по трехточечной схеме из эпоксидного стекло- (*1*), боро- (*2*) и углепластика (*3*):
——— — по нелинейной теории;
— — — — по линейной теории

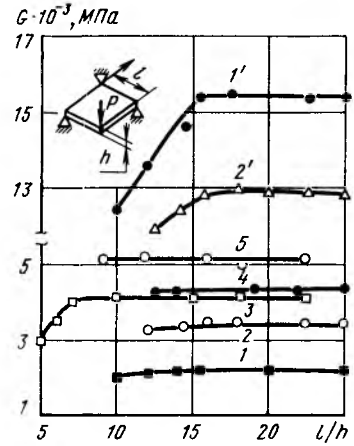


Рис. 7.6. Зависимость значений G_{xy} (*1*—*5*) и $G_{45°}$ (*1'* и *2'*) углепластиков (*1*—*4*) и стеклопластика (*5*) от отношения l/h пластины при кручении по трехточечной схеме. Укладка арматуры:
1 и *1'* — 1 : 1; *2* и *2'* — ± 30°; *3* — 2 : 2; *4* — 1 : 0; *5* — 1 : 1

Метод применим только при малых прогибах ($w \leqslant 0{,}1h$) пластин из однородных по толщине и ортотропных в осях образца материалов. Формула, учитывающая большие прогибы и силу тяжести пластины, имеет вид

$$\alpha\bar{w}^3 + \beta\bar{w} - \bar{P} - \frac{\bar{\rho}}{4} = 0, \quad (7.24)$$

где

$$\alpha = \frac{128}{\pi^8}\left(1 + \frac{E_x}{E_y} + \frac{E_x}{G_{xy}} - 2\nu_{xy}\right)^{-1};$$

$$\beta = \frac{1}{3}\,\frac{E_y}{E_x}; \quad \bar{P} = \frac{Pl^2}{E_xh^4};$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho l^4}{E_xh^4}; \quad \bar{w} = \frac{w_p}{4}.$$

Формула (7.24) применима для определения модуля сдвига G_{xy}, если известны модули упругости E_x и E_y, коэффициент Пуассона ν_{xy} и плотность материала образца ρ.

Расчеты по уточненным формулам для разных материалов показывают, что зависимость $P \sim w$ остается линейной до $\frac{w}{h} \cong 1$ и больше (рис. 7.5). Однако из-за возможности потери устойчивости пластины следует ограничиться прогибами $w \leqslant 0{,}5h$. При определении модуля сдвига измерение прогиба w проводится только в пределах начального линейного участка диаграммы $P \sim w$. Относительная толщина пластины h/l определяется двумя условиями: влиянием поперечного сдвига на прогиб (при больших отношениях h/l) и возможностью потери устойчивости (при малых отношениях h/l). Приведенные в табл. 7.4 границы отношения h/l даны для боропластиков. Однако по результатам испытаний стекло-, угле- и боропластиков с разной схемой укладки арматуры установлено, что стабильные показания можно получить уже при $h/l < 1/15$ (рис. 7.6). Образец должен быть плоским, без начальных прогибов

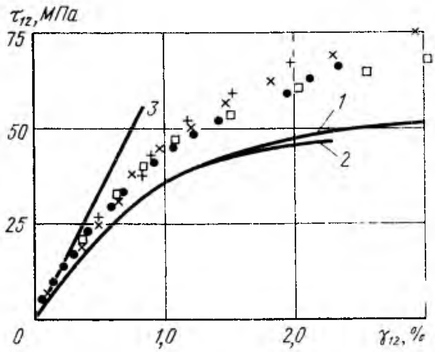


Рис. 7.7. Кривые деформирования эпоксидного углепластика при сдвиге:
методы и укладка: ● — шарнирный четырехзвенник, 1 : 0; □ — шарнирный четырехзвенник, 1 : 1; + — перекашивание полосы, 1 . 1; × — растяжение полосы, ± 45°; кручение: *1* — трубы круглого поперечного сечения; *2* — трубы квадратного поперечного сечения с укладкой $(0°/90°_2/0°/90°_2/0°/90°_2/0°)$; *3* — квадратной пластины

и искривлений, его толщина — постоянная (в расчетную формулу входит величина h^3). Расстояние от точки опоры или нагружения до вершины углов пластины не должно превышать $2h$.

Широко применяют испытания на сдвиг по схеме Иосипеску для образцов из металлов [4, 7, 12, 15]. В этом случае к концевым частям призматического образца прилагаются изгибающие моменты одинакового направления, в результате чего в среднем его сечении (при $l/2$) изгибающий момент равен нулю и действует только перерезывающая сила $Q = P$ (см. табл. 7.4, схема *4—6*). Перерезывающая сила зависит от способа реализации граничных условий [15]. В рабочем сечении образца с целью преобразования параболического распределения касательных напряжений по высоте в постоянное сделаны два симметричных надреза.

Оптическими методами было установлено, что в рабочем сечении образца имеет место полоса конечной ширины, в которой касательные напряжения постоянны. Метод конечных элементов не подтверждает эти выводы [7]. Показано, что распределение напряжений на участке между надрезами неоднородно с отчетливо выраженной концентрацией у вершин надрезов. Для учета этих особенностей вводятся поправочные коэффициенты. Их значения, зависящие от степени анизотропии испытываемого материала, установлены лишь для частных случаев. Стремление довести метод до стандартного объясняется преимуществами схемы Иосипеску: возможностью определения как модуля, так и прочности сдвига (в плоскости или межслойного в зависимости от вырезки образца), хорошей воспроизводимостью результатов испытаний (особенно для материалов, близких к квазиизотропным), простотой и небольшими размерами образцов и приспособлений.

Экспериментальная оценка методов перекашивания в шарнирном четырехзвеннике, перекашивания полосы, растяжения анизотропной полосы и кручения квадратной пластины показывает, что при определении модуля сдвига в плоскости все эти методы дают сопоставимые результаты (см. кривые деформирования на рис. 7.7). При определении прочности количественно сопоставимыми являются методы перекашивания пластины и растяжения полосы, но резко выделяются прочности, полученные при перекашивании полосы и при трехточечном изгибе.

В работе [9] проведена многокритериальная оценка девяти методов испытаний на сдвиг.

7.4.2. Межслойный сдвиг. Трехточечный изгиб прямых стержней и сегментов кольца является весьма распространенным методом определения характеристик межслойного сдвига. Однако этому методу свойственны существенные ограничения. Более подробно о возможностях и недостатках метода трехточечного изгиба см. в п. 7.5.1.

Простотой осуществления отличается метод определения прочности межслойного сдвига при растяжении или сжатии призматических или кольцевых образцов с надрезами (рис. 7.8). Однако этому методу свойственны существенные недостатки: в случае испытания образцов с несимметрично рас-

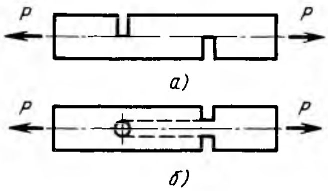


Рис. 7.8. Схема нагружения образца с несимметрично (*а*) и симметрично (*б*) расположенными надрезами

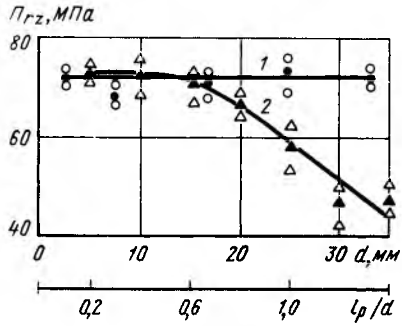


Рис. 7.9. Зависимость прочности $П_{rz}$ от относительной ширины $l_р/d$ кольцевой выемки (*1*) и диаметра d в рабочей части образца (*2*)

положенными надрезами (рис. 7.8, *а*) необходимы приспособления, предотвращающие изгиб образца; трудоемкая оценка концентрации напряжений; высокая чувствительность к качеству нанесения надрезов. Именно из-за некачественного нанесения надрезов (недостаточная или избыточная глубина надрезов) на практике наблюдается недопустимо большой разброс результатов, вследствие чего этот метод нельзя считать надежным.

Хорошие результаты, особенно для пространственно-армированных материалов, дает метод испытания на кручение образцов с кольцевой выемкой (схемы *5—1* и *5—2*, см. табл. 7.5). Применяются образцы двух типов — с центральным отверстием и без него. Важно правильно выбрать геометрические параметры выемки — ее относительные ширину $l_р/d$, диаметр d или толщину стенки h. Исследования показывают, что в пределах отношения $l_р/d = 0{,}2 \div 1{,}0$ длина рабочей части образца $l_р$ не влияет на измеренную прочность $П_{rz}$ (рис. 7.9). Увеличение диаметра рабочей части d от 5 до 15 мм тоже не сказывается на измеренной прочности $П_{rz}$, но при дальнейшем увеличении диаметра ($d > 15$ мм) наблюдается резкое ее уменьшение. Толщина стенки h для образцов из стеклопластиков составляет 2 мм. Структурные и физические ограничения на метод не накладываются.

7.4.3. Кручение. Метод кручения прямых стержней (схема *5—3*), несмотря на большую трудоемкость и высокие требования к точности проведения эксперимента и обработки результатов, применяется для определения модулей сдвига армированных пластиков. Определение этим методом прочности на сдвиг пока проблематично. Модули сдвига вычисляются по экспериментально определенной жесткости при кручении:

$$C = \frac{l}{\varphi_1 - \varphi_2} M_{кр}, \qquad (7.25)$$

где $M_{кр}$ — крутящий момент; l — длина мерной базы (составляет примерно одну треть свободной длины стержня); φ_1 и φ_2 — углы закручивания соответственно в начале и в конце мерной базы. Измерения проводятся, как правило, в пределах начального линейного участка диаграммы кручения $M_{кр} \sim \varphi$.

Для определения модулей сдвига по экспериментально определенной жесткости при кручении C пользуются аналитическими зависимостями, связывающими в случае испытания стержня из ортотропного материала два модуля сдвига и геометрические размеры поперечного сечения (см. табл. 7.5).

Вычислить модули сдвига опытным путем для стержней с круглым поперечным сечением нетрудно, однако не всегда можно изготовить три серии образцов, вырезанных в направлениях трех взаимно перпендикулярных главных осей упругой симметрии исследуемого материала. В таких случаях проводят испытания серий образцов с круглым и с прямоугольными поперечными сечениями или нескольких серий образцов с прямоугольным

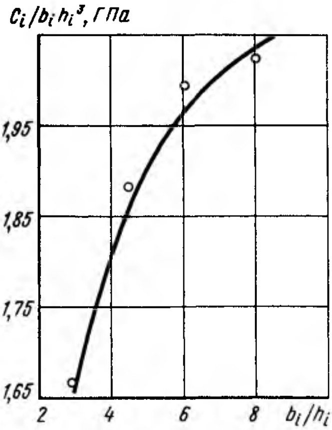


Рис. 7.10. Кривая $\frac{C_i}{b_ih_i^3} = f\,(b_i/h_i)$

поперечным сечением с разными отношениями сторон b/h.

При обработке результатов испытаний образцов с поперечным сечением, близким по форме к квадрату, по экспериментально определенным четырем-пяти значениям жесткости при кручении C_i методом наименьших квадратов строится кривая $\frac{C_i}{b_ih_i^3} = f\left(\frac{b_i}{h_i}\right)$ (рис. 7.10), с помощью которой выбираются два значения жесткостей при кручении C_1 и C_2. По ним определяются модули сдвига G_{xy} и G_{xz}.

Ниже приведена схема определения модулей сдвига с использованием ЭВМ:

1) по известным значениям b_1, h_1, C_1 и b_2, h_2, C_2 определяют отношение

$$F\,(\beta) = \frac{b_2}{b_1}\,\frac{h_2^3}{h_1^3}\,\frac{C_1}{C_2}; \tag{7.26}$$

2) по известным значениям b_1, h_1, b_2, h_2 и заданным отношениям $\beta = \sqrt{G_{xz}/G_{xy}}$ (интервал β зависит от исследуемого материала; обычно $\beta \leqslant 1$) с помощью ЭВМ и формулы для функции кручения (см. табл. 7.5, схема *5—3*) строят функцию

$$F\,(\beta) = \frac{f\,(\alpha_1\beta)}{f\,(\alpha_2\beta)}, \tag{7.27}$$

где $\alpha_1 = b_1/h_1$ и $\alpha_2 = b_2/h_2$;

3) из равенства численных значений функций, определенных по формулам (7.26) и (7.27), определяют β, функцию $f\,(\alpha, \beta)$ и модули сдвига

$$G_{xy} = \frac{C_1}{b_1h_1\,(\alpha,\ \beta)} \tag{7.28}$$

и

$$G_{xz} = \beta^2G_{xy}. \tag{7.29}$$

В случае, когда нет возможности применить ЭВМ, следует пользоваться графиками или таблицами функций кручения или методом последовательных приближений [3].

Трудностей с определением функций кручения $F\,(\beta)$ можно избежать, используя вместо стержней полоски, у которых $b \gg h$ или $b \ll h$. При условии, что

$$\frac{h}{b}\sqrt{\frac{G_{yz}}{G_{xz}}} < \frac{\pi}{4} \tag{7.30}$$

или

$$\frac{h}{b}\sqrt{\frac{G_{yz}}{G_{xz}}} > 4\pi, \tag{7.31}$$

жесткость при кручении C соответственно можно выразить следующими зависимостями:

$$\frac{3}{bh^3}C_z = C_{yz} - 0{,}63025\,\frac{h}{b}\,G_{yz}\sqrt{\frac{G_{yz}}{G_{xz}}}, \tag{7.32}$$

или

$$\frac{3}{hb^3}C_z = G_{xz} - 0{,}63025\,\frac{b}{h}\,G_{xz}\sqrt{\frac{G_{xz}}{G_{yz}}}. \tag{7.33}$$

Для определения модулей сдвига G_{xz} и G_{yz} измеряется жесткость при кручении C_z при разных отношениях h/b и строится график приведенная жесткость $\frac{3}{bh^3}C_z$ — отношение h/b (рис. 7.11). Экстраполируя при $\frac{h}{b}=0$, получаем

$$G_{yz} = \frac{3}{bh^3}\,C_z \tag{7.34}$$

и

$$G_{xz} = \frac{0{,}3972}{k_1^2} G_{yz}^3, \qquad (7.35)$$

где k_1 — тангенс угла наклона прямой $\frac{3}{bh^3} C_z$.

Этот приближенный метод требует очень высокую точность определения модуля сдвига G_{yz} и наклона прямой k_1, так как ошибки определения модуля сдвига G_{xz} растут пропорционально квадрату (или кубу) погрешности определения величины k_1 и G_{yz}. Высокие требования к точности определения размеров поперечного сечения образца и первого из модулей сдвига — это общий недостаток обработки результатов при кручении стержней с некруглым поперечным сечением.

При определении модуля и прочности при сдвиге в плоскости укладки арматуры эталонным является метод кручения тонкостенных труб (см. табл. 7.5, схема *5—4*). При кручении тонкостенных труб касательные напряжения по окружности и по длине образца распределены равномерно; деформации сдвига по толщине стенки образца практически постоянны. При кручении понятие «тонкостенная труба» есть функция степени анизотропии материала образца E_z/E_θ и в зависимости от этого отношения необходимая относительная толщина образца h/R может меняться в весьма широких пределах (см. табл. 7.5). Недостатки метода: применим только для намоточных материалов или образцов специальных конструкций (например, укладка арматуры параллельна оси образца); весьма большие размеры образцов; потребность в специальном оборудовании; недопустимость потери устойчивости образца (для ее предотвращения применяются вкладыши, не препятствующие деформированию образца).

Из сопоставления характеристик сдвига, полученных разными методами испытания плоских образцов из различных армированных материалов, следует, что при определении модуля сдвига все методы дают результаты, которые укладываются в пределы разброса данных эксперимента.

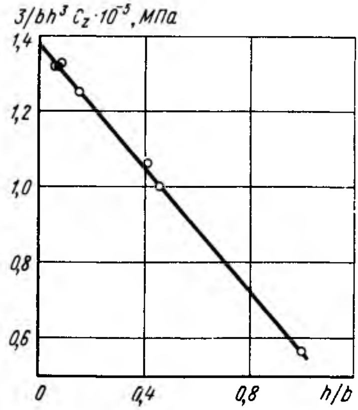


Рис. 7.11. К определению модуля сдвига G_{yz} при помощи диаграммы приведенная жесткость — h/b

При определении прочности на сдвиг резко выделяются методы растяжения анизотропной полосы и трехточечного изгиба. Это вызвано несколькими причинами. В случае растяжения анизотропной полосы непригодным для определения прочности при сдвиге из-за скалывания по слою может оказаться сам метод или неправильным может быть выбран угол $\theta = 10°$. При испытаниях на трехточечный изгиб могут сказаться как недостатки самого метода, так и особенности испытываемого материала (поведение органопластиков при сжатии часто не является линейно-упругим; в таком случае формулы технической теории изгиба неприемлемы). Наиболее стабильные показания по сравнению с методом кручения квадратной пластины дают методы растяжения анизотропной полосы, кручения квадратной пластины и кручения стержня прямоугольного поперечного сечения, наименее стабильные — трехточечный изгиб.

Для определения модулей сдвига из опытов на кручение кольцевых образцов создано несколько схем нагружения. Наиболее рациональные из них приведены в табл. 7.6. Однородность напряженного состояния образца наилучшим образом реализуется при схеме нагружения 6-

для которой влияние изгиба и поперечного сдвига пренебрежимо мало. Технически проще схема нагружения *6—2*, однако при этом влияние изгиба пренебрежимо мало только для случаев, указанных в табл. 7.6. Применение целых колец (схема *6—3*) для определения модулей сдвига из-за весьма жестких геометрических ограничений (см. табл. 7.6) целесообразно только в случаях, когда упругие постоянные и прочность исследуются на одних и тех же образцах. Модули сдвига по определенной в опытах кручения колец жесткости при кручении C вычисляются такими же способами, как при кручении прямых стержней.

7.4.4. Двухосное растяжение-сжатие. При двухосном растяжении-сжатии для определения модуля сдвига в плоскости укладки арматуры используются зависимости между нормальными и касательными напряжениями и соответствующими им деформациями:

$$G_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{\gamma_{xy}}, \qquad (7.36)$$

где

$$\tau_{xy} = \frac{|\sigma_x| + |\sigma_y|}{2} = |\sigma_x| \text{ или } |\sigma_y|; \qquad (7.37)$$

$$\gamma_{xy} = 2|\varepsilon_x| = 2|\varepsilon_y| = \sqrt{2}\,\varepsilon_{45^\circ}. \qquad (7.38)$$

Прочность

$$\Pi_{xy} = \min\{|\sigma_{x\,\text{разр}}|, |\sigma_{y\,\text{разр}}|\}. \qquad (7.39)$$

Старым методом определения характеристики сдвига композитов в плоскости укладки арматуры при двухосном нагружении является испытание крестовины. Преимущество его — простота реализации двухосного нагружения; недостаток — большие размеры образца, т. е. расход испытываемого материала, поэтому метод имеет лишь ограниченное применение.

Другой способ реализации двухосного растяжения-сжатия [5] основан на применении образцов-полосок с осевыми прорезями (см. табл. 7.4, схема *4—7*), которые обеспечивают чистоту напряженного состояния в рабочей части. Система нагружения должна обеспечить выполнение условия $\sigma_x^+ = \sigma_y^-$. Для надежной передачи сжимающей нагрузки применяются накладки (при малых нагрузках — пластины из олова, при больших нагрузках — из стеклопластика). Расстояние между прорезями в два раза больше ширины образца, т. е. $P^- = 2P^+$. Метод проверен на разных материалах и несмотря на наличие концентрации напряжений в узлах рабочей части, дает хорошие результаты, особенно при определении прочности.

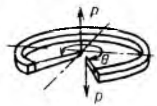
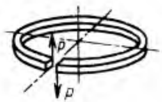
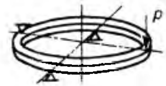
Экспериментально проверена схема нагружения *4—8* образца, представляющего собой диск с двумя антисимметричными вырезами, между которыми расположена рабочая часть [14]. Образец нагружается двумя сосредоточенными силами на растяжение или сжатие вдоль оси ($\alpha = 0^\circ$) или под некоторым углом $\alpha < 45^\circ$. При $\alpha > 0^\circ$ образец испытывает двухосное напряженное состояние ($\sigma_x \neq 0$, $\sigma_y \neq 0$, $\tau_{xy} \neq 0$). При $\alpha = 0^\circ$ напряжения $\sigma_x = \sigma_y = 0$; $\tau_{xy} = \frac{P}{F}$, деформация сдвига $\gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ и прочность $\Pi_{xy} = P_{\text{разр}}/F$. Метод дает хорошие результаты, но из-за малых размеров рабочей части образца (длина 10 мм) требует тщательности в работе и высококачественных средств измерения деформаций.

7.5. ИЗГИБ

При испытаниях композитов на изгиб в основном используется трехточечная схема нагружения (табл. 7.7, схемы *7—1* и *7—2*). Меньше распространены в практике испытаний четырехточечная (схема *7—3*) и пятиточечная схемы (схема *7—4*) нагружения, хотя они имеют значительные преимущества перед трехточечной.

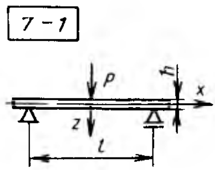
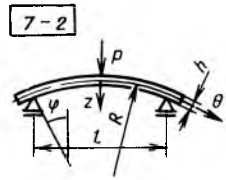
7.5.1. Трехточечная схема. Трехточечная схема нагружения на изгиб позволяет определить модуль упругости $E_x^{\text{и}}$, модуль межслойного сдвига $G_{xz}^{\text{и}}$, прочность по нормальным напряжениям $\Pi_x^{\text{и}}$ и прочность межслойного сдвига $\Pi_{xz}^{\text{и}}$.

7.6. Методы кручения кольцевых образцов

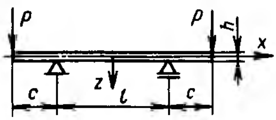
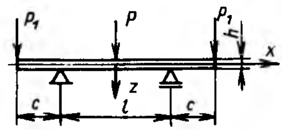
	Силы приложены в центре	Силы приложены в месте разреза	Целое кольцо
Сведения о методах	6–1 	6–2 	6–3 
Определяемые характеристики	$G_{\theta r}$, $G_{\theta z}$	$G_{\theta r}$, $G_{\theta z}$	$G_{\theta z}$; $G_{\theta r}$ — затруднительно
Измеряемые величины	P, $\omega_{\text{р}}$	P, $\omega_{\text{р}}$	P, $\omega_{\text{р}}$
Расчетные зависимости	$C = \frac{PR^3}{\omega_{\text{р}}}\theta$	$C = \dfrac{3}{\dfrac{\omega_{\text{р}}}{\pi PR^3} - \dfrac{1}{E_\theta J}}$	$C = \dfrac{0{,}037885}{\dfrac{2\omega_{\text{р}}}{PR^3} - \dfrac{0{,}46709}{E_\theta J}}$
Ограничения:			
структурные: укладка	0°, 90°, 0°/90°		
угол вырезки, градус	0, 90		
физические	—	—	—
геометрические	—	Член $\frac{1}{E_\theta J} \to 0$ $\left(\text{при } \frac{b}{h} > 3\right)$	$\frac{R}{h} > 12$ $\left(\text{при } \frac{b}{h} = 0{,}5 \div 10\right)$

Примечание. R — средний радиус кольца; $J = \frac{hb^3}{12}$; b и h — ширина и толщина кольца. Ось θ является касательной к окружности с радиусом R; $\omega_{\text{р}}$ — прогиб в точке приложения нагрузки для схемы *6—3* либо взаимное перемещение точек приложения нагрузки для схем *6—1* и *6—2*.

7.7. Методы изгиба стержней

	Трехточечный изгиб	
	Прямой стержень	Криволинейный стержень
Сведения о методах		
Определяемые характеристики	$E^{и}_{x}, G^{и}_{xz}, П^{и}_{x}, П^{и}_{xz}$	$П_{\theta r}$
Измеряемые величины	$P, P_{разр}, w_{max}$	P
Расчетные зависимости	$E^{и}_{x}$ и $G^{и}_{xz}$ совместно: [см. формулу (7.40)]; $E^{и}_{x}$ без учета сдвигов: $E^{и}_{x} = \frac{Pl^3}{4bh^3 w_{max}}$; $П^{и}_{x} = \frac{3}{2}\frac{P_{разр} l}{bh^2}$; $П^{и}_{xz} = \frac{3}{4}\frac{P_{разр}}{bh}$	$П_{\theta r} = \frac{3}{2}\frac{Q_{разр}}{bh}$, где $Q_{разр}$ — см. (7.48) и (7.49)
Ограничения: структурные: укладка		0°, 90°, 0°/90°
угол вырезки, градус		0, 90
физические	$E^{и}_{x}$ и $G^{и}_{xz}$: линейный диапазон диаграммы $P \sim w$	—
геометрические	$E^{и}_{c}$: $l/h \geqslant 40$; $E^{и}_{x}$ и $G^{и}_{xz}$: $8 \leqslant \frac{l}{h} \leqslant \sqrt{\frac{1-k_\tau}{k_\tau}\frac{E^{и}_{x}}{G^{и}_{xz}}}$	$\frac{l}{2R} < \frac{\sigma_{r\,доп}}{П_{\theta r}}$; $\frac{h}{2l} > \frac{П_{\theta r}}{П_{\theta}}$

Примечание. $P_{разр}$ — нагрузка при разрушении образца; $k_\tau =$ радиальных напряжений; b — ширина балки.

Четырехточечный изгиб	Пятиточечный изгиб
7-3 	7-4 
$E_x^{\text{и}}$, $\Pi_x^{\text{и}}$	$E_x^{\text{и}}$, $G_{xz}^{\text{и}}$, $E_x^{\text{и}}/G_{xz}^{\text{и}}$
P, $P_{\text{разр}}$, w, $\varepsilon_{\text{р}}$, φ_{c}	P, P_1, w
$E_x^{\text{и}}$ — см. (7.50)—(7.53) $\Pi_x^{\text{и}} = \dfrac{6P_{\text{c}}}{bh^2}$	См. (7.54)—(7.58)
$E_x^{\text{и}}$: линейный диапазон диаграммы $P \sim w$	Линейный диапазон диаграммы $P \sim w$
$\Pi_x^{\text{и}}$: $\dfrac{c}{h} > \dfrac{\Pi_x^{\text{и}}}{4\Pi_{xz}^{\text{и}}}$	$\dfrac{c}{h} > \dfrac{\Pi_x^{\text{и}}}{4\Pi_{xz}^{\text{и}}}$; $P_{\max} = P_{1\,\max} < \dfrac{bh^2}{6c}\,\Pi_x^{\text{и}}$

$= w_\tau/w$ — доля прогиба от поперечных сдвигов; $\sigma_{r\,\text{доп}}$ — допустимая величина

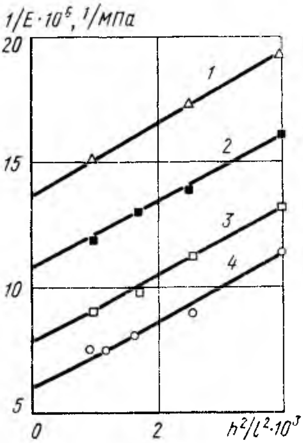


Рис. 7.12. К определению модуля упругости $E_x^{\text{и}}$ и модуля сдвига $G_{xz}^{\text{и}}$ боропластиков:
укладки: *1* — 1 : 1 : 1; *2* — 1 : 1; *3* — 2 : 1; *4* — 1 : 0

Теоретически модули упругости при растяжении, сжатии и изгибе одинаковые $\left(E_x^+ = E_x^- = E_x^{\text{и}}\right)$, однако из-за технологических несовершенств и особенностей напряженного состояния при изгибе модуль упругости $E_x^{\text{и}}$ может несколько отличаться от E_x^+ или E_x^- (эта особенность учитывается индексом «и»).

Для экспериментального определения упругих постоянных при изгибе $E_x^{\text{и}}$ и $G_{xz}^{\text{и}}$ используются уточненные, учитывающие влияние сдвига формулы для прогиба стержня в середине пролета l. Модуль упругости при изгибе $E_x^{\text{и}}$ можно определить совместно с модулем межслойного сдвига $G_{xz}^{\text{и}}$ или без учета влияния сдвига.

Одновременно определить модули $E_x^{\text{и}}$ и $G_{xz}^{\text{и}}$ по измеренным в эксперименте нагрузке P_i и прогибу в середине пролета $w_{\max i}$ для образцов с разными отношениями $(h/l)_i$ можно двумя способами — графически или аналитически.

При графическом решении в системе координат $(h/l)_i^2$, $1/E_{f_i}$ по экспериментально полученным данным для образцов с разной относительной толщиной $(h/l)_i$ строится прямая, описываемая выражением

$$\frac{1}{E_{f_i}} = \frac{1}{E_x^{\text{и}}} + \frac{1{,}2}{G_{xz}^{\text{и}}}\left(\frac{h}{l}\right)_i^2, \quad (7.40)$$

где

$$E_{f_i} = \frac{P_i l_i^3}{48 J_i w_{\max i}} = \frac{P_i}{4 b_i w_{\max i}}\left(\frac{l}{h}\right)_i^3.$$

Тангенс угла наклона прямой (7.40) к оси абсцисс равен $\frac{1{,}2}{G_{xz}^{\text{и}}}$ (рис. 7.12), эта прямая пересекает ось ординат в точке $\frac{1}{E_x^{\text{и}}}$.

Аналитически модуль сдвига $G^{\text{и}}$ определяется из решения системы двух уравнений (7.40), где точки $i = 1$ и $i = 2$ подбираются при помощи экспериментально построенной прямой (7.40); пользуясь методом наименьших квадратов, $E_x^{\text{и}}$ и $G_{xz}^{\text{и}}$ можно определить по следующим формулам:

$$E_x^{\text{и}} = \frac{m s_{11} - s_1^2}{s_{11} s_2 - s_1 s_2}; \quad (7.41)$$

$$G_{xz}^{\text{и}} = \frac{m s_{11} - s_1^2}{m s_{12} - s_{11} s_2}, \quad (7.42)$$

где m — число экспериментальных точек, равное сумме всех $\left(\frac{h}{l}\right)_i n_w$ (n_w — число измерений прогиба при $\left(\frac{h}{l}\right)_i = \text{const}$);

$$s_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h}{l}\right)_i^2; \quad s_{11} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h}{l}\right)_i^4;$$

$$s_2 = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{E_{f_i}};$$

$$s_{12} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{E_{f_i}}\left(\frac{h}{l}\right)_i^2.$$

При использовании этого способа определения модулей $E_x^и$ и $G_{xz}^и$ следует учесть, что доля прогиба от поперечных сдвигов w_τ составляет лишь часть от обычно весьма малого общего прогиба образца w. Для надежного определения модуля сдвига выбором относительного пролета l/h в зависимости от степени анизотропии исследуемого материала $E_x^и/G_{xz}^и$ должно быть обеспечено достаточно большое отношение прогибов $k_\tau = \frac{w_\tau}{w}$. Для установления необходимого относительного пролета l/h в зависимости от заданных численных значений $E_x^и/G_{xz}^и$ и $k_\tau = \frac{w_\tau}{w}$ можно использовать зависимость

$$\frac{l}{h} \leqslant 1{,}095 \sqrt{\frac{1-k_\tau}{k_\tau} \frac{E_x^и}{G_{xz}^и}}. \tag{7.43}$$

При этом должно быть минимальное допустимое отношение $(l/h)_{\min} \geqslant 8$.

Для определения модуля упругости $E_x^и$ без учета влияния сдвигов следует выбирать такой относительный пролет l/h, при котором это влияние пренебрежимо мало. На рис. 7.13 приведена зависимость необходимого относительного пролета l/h от степени анизотропии исследуемого материала $E_x^и/G_{xz}^и$ при определении модуля упругости $E_x^и$ без учета сдвигов с заданной погрешностью δ. Необходимые значения l/h для существенно анизотропных материалов оказываются весьма большими, как правило, больше 40 (см. рис. 7.13). Это может привести к определенным трудностям в измерении прогибов и нагрузок, а также к необходимости учета изменения пролета l и прогиба w при цилиндрических опорах:

$$l_1 = l - 2\Delta l; \tag{7.44}$$

$$w_1 = w - \Delta w, \tag{7.45}$$

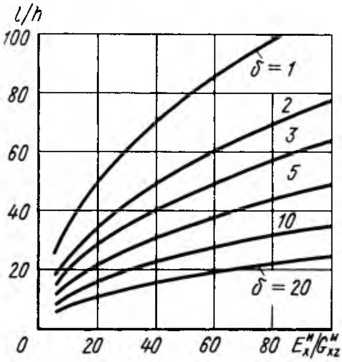


Рис. 7.13. Зависимость величины минимального отношения l/h от отношения $E_x^и/G_{xz}^и$ без учета сдвигов с заданной погрешностью δ (%)

где

$$\Delta l = \frac{R_2}{\frac{1}{4}\frac{l}{w} + \frac{w}{l}};$$

$$\Delta w = \frac{2R_2}{1 + \frac{l^2}{4w}}.$$

Здесь R_2 — радиус цилиндрической опоры.

При испытаниях композитов на изгиб строго следует различать прочности по нормальным $П_x^и$ и по касательным $П_{xz}^и$ напряжениям, так как (в отличие от изотропных материалов) эти величины могут отличаться друг от друга на порядок (и больше), а касательные напряжения могут существенно влиять на характер разрушения при изгибе.

Разрушение от нормальных напряжений сопровождается разрушением (переломом) крайних растянутых или сжатых слоев, разрушение от касательных напряжений — скалыванием по слою приблизительно на уровне срединной плоскости образца. В очень коротких стержнях наблюдается третий вид разрушения — от смятия и среза, сопровождающийся кажущимся ростом сопротивления материалов касательным напряжением. Перераспределение напряжения в образце и изменение характера разру-

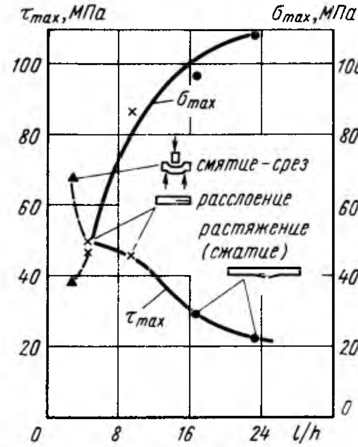


Рис. 7.14. Зависимость максимальных нормальных и касательных напряжений и характера разрушения при трехточечном изгибе от относительного пролета l/h (материал — полиэфирный стеклопластик, толщина образца 4 мм)

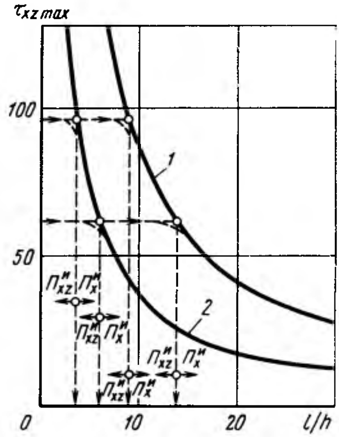


Рис. 7.15. Зависимость максимальных касательных напряжений (при заданной прочности $П_x^и$) от относительного пролета l/h при трехточечном изгибе (материалы — однонаправленный боропластик):
1 — $\tau_{max} = 840/(l/h)$, $П_x^+ = 1680$ МПа, $П_{xz} = 96$ МПа, $\chi = 70\%$, $\chi_п = 0$; 2 — $\tau_{max} = 360/(l/h)$, $П_x^+ = 720$ МПа, $П_{xz} = 62$ МПа, $\chi = 30\%$, пористость $\chi_п = 6\%$

ния в зависимости от относительного пролета l/h показаны на рис. 7.14. Для материалов со слоистой структурой возможен еще один вид разрушения — отслоение хлопком сжатого наружного слоя. Критическое напряжение, при котором возможен этот вид разрушения:

$$\sigma_{кр} = 16\pi^2 E_x^и \left(\frac{h_0}{h}\right)^2 \times \left[1 + \sqrt{1 + \frac{3\gamma l^4}{64\pi^4 E_x^и h_0^5}}\right], \quad (7.46)$$

где h_0 — толщина отслаивания; γ — удельная работа разрушения по Гриффитсу.

Вследствие всех этих особенностей при экспериментальном определении прочности на изгиб обязательно следует указать вид разрушения, иначе результаты экспериментов будут несопоставимы.

Ожидаемый характер разрушения — от нормальных или касательных напряжений — приблизительно можно оценить при помощи диаграммы $\frac{l}{h}$, τ_{max} (рис. 7.15). Численное значение касательных напряжений в образце при его разрушении от нормальных напряжений

$$\tau_{max} = \frac{П_x^и}{2} \frac{h}{l}. \quad (7.47)$$

Формула (7.47) в координатах $\frac{l}{h}$, τ_{max} представляет собой равнобокую гиперболу, асимптоты которой совпадают с осями координат (см. рис. 7.15). Величина τ_{max}, равная прочности при межслойном сдвиге $П_{xz}^и$, определит значение относительного пролета l/h, при котором будет меняться вид разрушения образца — от нормальных или касательных напряжений. Для реальных материалов вследствие технологических несовершенств точно определенную точку пересечения кривой τ_{max} с прямой $П_{xz}^и$ получить невозможно и около теоретической точки пересечения всегда имеется некоторая переходная область, в пределах которой возможно разрушение материала как от нормальных, так и от касательных напряжений. Кроме того (по изложенным далее причинам), прочность $П^{и}_{xz}$ не является величиной постоянной, а с ростом l/h уменьшается, вследствие чего абсцисса точки пересечения перемещается в сторону более высоких значений l/h.

Влияние сдвигов на распределение нормальных напряжений при параметрах $\varkappa = \frac{\pi h}{2l}\sqrt{\frac{E^{и}_{x}}{G_{xz}}} < 1{,}2$ пренебрежимо мало, а при больших значениях $\varkappa$ значительно меньше, чем на прогиб.

Трехточечный изгиб относительно коротких балок или сегментов кольца (см. табл. 7.7, схемы 7—1 и 7—2) является самым распространенным способом определения межслойной сдвиговой прочности $П_{xz}$. Уточненное решение задачи об изгибе относительно короткого стержня из анизотропного материала [3, 16], однако, показало, что напряженное состояние существенно отличается от предполагаемого технической теорией изгиба. Распределение касательных напряжений по высоте относительно короткого стержня из анизотропного материала только в середине полупролета приближенно соответствует квадратичной параболе технической теории изгиба: около точек приложения сосредоточенных нагрузок распределения касательных напряжений по высоте стержня имеют явно выраженные максимумы вблизи нагруженной поверхности стержня (рис. 7.16). В относительно коротких стержнях из анизотропного материала отсутствуют участки с постоянной ординатой максимальных касательных напряжений (рис. 7.17). Кроме того, по всей длине относительно короткого стержня действуют сжимающие трансверсальные напряжения σ^{-}_{z} и вблизи контактных областей наблюдаются большие сжимающие контактные напряжения. Вследствие этих отклонений экспериментально определенная прочность межслойного сдвига $П^{и}_{xz}$ с увеличением относительного пролета уменьшается (рис. 7.18) и поэтому результаты испытаний относительно коротких стержней на трехточечный изгиб могут служить лишь для качественного сопоставления механических свойств разных композитов.

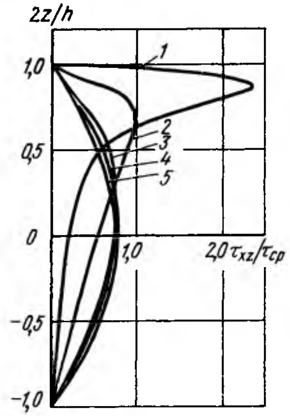


Рис. 7.16. Зависимость отношений τ_{xy}/τ_{cp} по ординате $2z/h$ в зависимости от x/l. Кривые 1—5 для x/l, соответственно равных 0,05; 0,15; 0,25; 0,35; 0,50 ($l/h = 4$)

При определении прочности межслойного сдвига на сегментах кольца используется формула для призматических стержней. При этом, однако, следует учесть, что в сегментах кольца

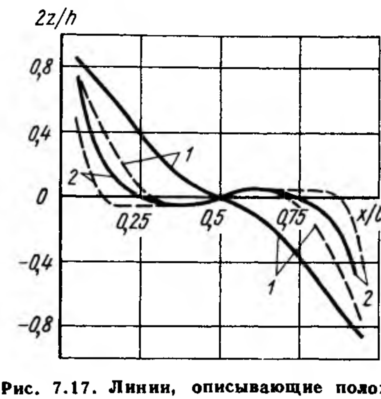


Рис. 7.17. Линии, описывающие положение максимума касательных напряжений на координатной плоскости $\{x, z\}$ для анизотропных (———) и изотропных (— — —) материалов:
1 — $l/h = 4$; 2 — $l/h = 10$ (x/l отсчитывается от середины пролета)

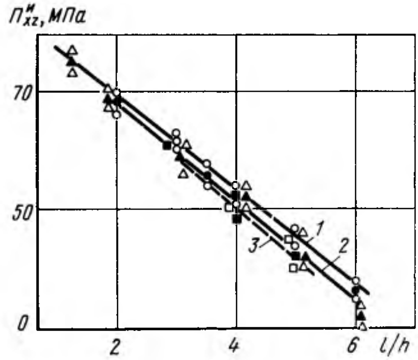


Рис. 7.18. Зависимость прочности $П^{и}_{xz}$ от относительного пролета l/h при трехточечном изгибе (b = 10 мм):
1 — h = 10 мм; *2* — h = 15 мм; *3* — h = 20 мм

в отличие от призматических стержней по всей длине (за исключением участков приложения нагрузки) действуют также нормальные межслойные напряжения σ_r, направление действия которых зависит от схемы нагружения. При нагружении сегментов выпуклостью вверх (см. табл. 7.7, схема *7—2*) напряжения растягивающие (σ^+_r), при нагружении сегментов выпуклостью вниз — сжимающие (σ^-_r). В первом случае вследствие совместного действия касательных и растягивающих радиальных напряжений прочность образца понижается, в последнем — сжимающие радиальные напряжения затрудняют расширение трещины расслоения от касательных напряжений и таким образом «повышают» сопротивление материала межслойному сдвигу. Это различие усиливается с увеличением относительного пролета l/h, что убедительно доказывается следующими результатами эксперимента (материал стеклопластик с укладкой 0°/90°):

l/h	Выпуклость вверх $\tau_{\theta r}/\sigma_r$, МПа	Выпуклость вниз $\tau_{\theta r}/\sigma_r$, МПа
4,6	30,8/6,0	33,6/—6,5
7,8	20,4/7,7	36,2/—11,6
11,0	18,3/8,4	35,6/—16,0

При испытаниях сегментов кольца следует также учесть, что величина перерезывающей силы Q и ее координата зависят от способа опоры образца: при опоре на плиту или на острые ребра призмы

$$Q_{разр} = \frac{P_{разр}}{2} \text{ (под силой } P\text{)}, \tag{7.48}$$

при опоре на цилиндры

$$Q = \frac{1}{\cos\theta}\,\frac{P_{разр}}{2} \text{ (над опорой)}. \tag{7.49}$$

При определении прочности межслойного сдвига $П^{и}_{\theta r}$ размеры сегментов следует выбирать такими, чтобы при разрушении образца нормальные окружные напряжения σ_θ и нормальные радиальные напряжения σ_r были пренебрежимо малы по сравнению с касательными напряжениями $\tau_{\theta r}$. Условия выбора отношения размеров l/R и h/l приведены в табл. 7.7.

7.5.2. Чистый изгиб и четырехточечная схема. Достоинства схемы чистого изгиба — это однородное напряженное состояние по всей длине образца, отсутствие поперечного сдвига и контактных напряжений от сосредоточенных сил. Образец по всей его длине доступен для измерений. Основной недостаток — практически невозможно нагружение образца в соответствии с расчетной схемой — изгибающим моментом в торцовом сечении образца.

Модуль упругости $E^{и}_x$ при испытаниях на чистый изгиб можно определять несколькими способами: измеряя относительные деформации растянутых или сжатых наружных слоев ($\varepsilon_р$ или $\varepsilon_с$), прогиб в середине пролета w_{max} или угол поворота торцовых сечений стержня φ. Соответствующие расчетные зависимости имеют вид

$$E^+_x = \frac{M_0}{w}\,\frac{\varepsilon_р + \varepsilon_с}{2\varepsilon^2_р}; \tag{7.50}$$

$$E^-_x = \frac{M_0}{w}\,\frac{\varepsilon_р + \varepsilon_с}{2\varepsilon^2_с}, \tag{7.51}$$

или

$$E^{и}_x = \frac{M_0 l^2}{8 J w_{max}}, \tag{7.52}$$

или

$$E^{и}_x = \frac{M_0 l}{2J\varphi}. \qquad (7.53)$$

Формулы (7.50) и (7.51) позволяют выявить разномодульность испытываемого материала ($E^+_x \neq E^-_x$).

Четырехточечная схема нагружения отличается от схемы чистого изгиба способом нагружения: изгибающий момент создается при помощи сосредоточенных сил, приложенных внутри или вне пролета l образца. Следовательно, на участках образца от опоры до точки приложения нагрузки действует перерезывающая сила, т. е. поперечные сдвиги. В случае приложения нагрузки вне пролета l это, однако, не оказывает влияния на однородность напряженного состояния части образца, расположенной между опорами, т. е. для этой части образца сохраняются все достоинства схемы чистого изгиба. Схема нагружения сосредоточенными силами внутри пролета l, как менее выгодная, здесь не рассматривается. При определении прочности $\Pi^{и}_x$ размеры консоли длиной c должны быть установлены с учетом изгибающего момента $M^{и}_x$ и перерезывающей силы Q.

Модуль упругости $E^{и}_x$ при испытаниях на четырехточечный изгиб определяют по формулам (7.50)—(7.53) с учетом того, что $M_0 = Pc$.

7.5.3. Пятиточечная схема. Такая схема (см. табл. 7.7, схема *7—4*) нагружения — это совокупность трех- и четырехточечной схем нагружения с их достоинствами и недостатками. При нагружении по пятиточечной схеме напряженное состояние образца переменное по всей длине, что должно быть учтено при выборе его размеров. В отличие от двух предыдущих схем нагружения пятиточечная схема позволяет определить также модуль межслойного сдвига $G^{и}_{xz}$, притом двумя разными способами. Для определения прочностей $\Pi^{и}_x$ и $\Pi^{и}_{xz}$ пятиточечная схема нагружения не применяется. Недостаток пятиточечной схемы — две независимые системы нагружения.

Возможны три варианта пятиточечной схемы.

1. При соотношении сил

$$\frac{P_1}{P} = \frac{l}{6c} \qquad (7.54)$$

модуль межслойного сдвига

$$G^{и}_{xz} = \frac{0{,}3Pl}{bhw}, \qquad (7.55)$$

где w — прогиб в середине пролета l.

2. При невыполнении условия (7.54) проводят испытания стержней при нескольких значениях P, P_1 и c (пролет l остается постоянным). В системе координат $\frac{Pl}{4P_1c}$, $\frac{w}{P_1c}$ методом наименьших квадратов строится прямая, описываемая выражением

$$w = \frac{Pl^3}{48E^{и}_x J} - \frac{P_1cl}{8E^{и}_x J} + \frac{0{,}3Pl}{G^{и}_{xz}bh}, \qquad (7.56)$$

которая пересекает ординату в точке $-\frac{l^2}{8E^{и}_x J}$, а при абсциссе, равной $\frac{Pl}{4P_1lc} = \frac{3}{2}$, имеет ординату $\frac{1{,}8}{G^{и}_{xz}bh}$.

3. При условии, чтобы прогиб в середине пролета w был бы равен нулю. Тогда можно определить отношение

$$\beta^2 = \frac{E^{и}_x}{G^{и}_{xz}} = \frac{1}{1{,}2}\left(\frac{l}{h}\right)^2 \times$$
$$\times \left(\frac{6c}{l}\,\frac{P_1}{P} - 1\right) \qquad (7.57)$$

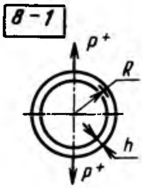
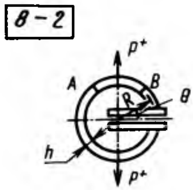
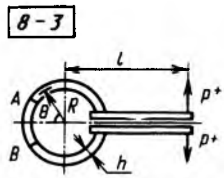
и далее по известным β^2 и $G^{и}_{xz}$ найти модуль упругости

$$E^{и}_x = \beta^2 G^{и}_{xz}. \qquad (7.58)$$

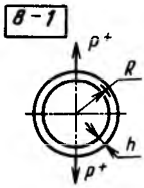
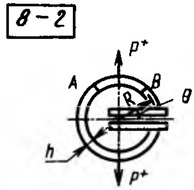
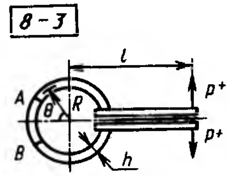
Ограничения для нагрузки P и P_1 см. в табл. 7.7.

7.5.4. Изгиб колец. Метод изгиба целых колец сосредоточенными силами (табл. 7.8, схема *8—1*) экспериментально хорошо проверен и при правильном выборе относительной толщины образца дает вполне достоверные результаты. Модуль межслойного сдвига $G^{и}_{\theta r}$ по измеренным в экспери-

7.8. Методы изгиба кольцевых образцов

	Целое кольцо	Разрезные кольца: Силы приложены в центре	Разрезные кольца: Силы приложены эксцентрично
Сведения о методах			
Определяемые характеристики	$G_{\theta r}$, $\Pi_{\theta r}$	$\Pi_{\theta r}$	Π_r^+
Измеряемые величины	P^+, $P^+_{\text{разр}}$, w_0	$P^+_{\text{разр}}$	$P^+_{\text{разр}}$
Расчетные зависимости	Для $G_{\theta r}$: строится график $1/E^{\text{и}}_{\theta 0 i} \sim (h/R)^2_i$ [см. (7.59)] $\Pi_{\theta r} = \dfrac{3}{4}\,\dfrac{P^+_{\text{разр}}}{bh}$	$\Pi_{\theta r} = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{P^+_{\text{разр}}}{bh}$	$\Pi_r^+ = \dfrac{3}{2}\,\dfrac{P^+_{\text{разр}} l}{bhR} \times \left(1 + \dfrac{R}{h}\cos\theta\right)$
Ограничения: структурные: укладка	0°, 90°, 0°/90°		
угол вырезки, градус	0, 90		
физические	Для $G_{\theta r}$: линейный диапазон диаграммы $P \sim w_0$	—	—

Продолжение табл. 7.8

	Целое кольцо	Разрезные кольца	
		Силы приложены в центре	Силы приложены эксцентрично
Сведения о методах			
геометрические	Для $G_{\theta r}$: $\frac{R}{h} \leqslant 0{,}727 \times \sqrt{\frac{1-k_\tau}{k_\tau} \frac{E_\theta}{G_{\theta r}}}$; для $\Pi_{\theta r}$: $h/R = 0{,}08 \div 0{,}18$ (для стеклопластиков)	—	—
		—	См. (7.60) и (7.61)

Примечание. $P^+_{\text{разр}}$ — нагрузка при разрушении образца; ось θ является касательной к окружности с радиусом R, ось r направлена по радиусу; $k_\tau = \frac{w_{0\tau}}{w_0}$ — доля перемещения от сдвигов; w_0 — изменение диаметра кольца в направлении действия нагрузки.

менте нагрузке P и изменению вертикального диаметра w_0 определяется таким же способом, как при трехточечном изгибе призматических стержней: по экспериментально полученным данным для образцов с разной относительной толщиной $(h/R)_i$; в системе координат $\left(\frac{h}{R}\right)_i^2$, $\frac{1}{E^{\text{и}}_{\theta_{0i}}}$ строится прямая

$$\frac{1}{E^{\text{и}}_{\theta_{0i}}} = \frac{1}{E^{\text{и}}_{\theta}} + \frac{0{,}528}{G^{\text{и}}_{\theta r}} \left(\frac{h}{R}\right)_i^2, \quad (7.59)$$

где

$$E^{\text{и}}_{\theta_{0i}} = 0{,}149 \frac{P_i R_i^3}{J_i w_{0i}} = 1{,}785 \frac{P_i}{b_i w_{0i}} \left(\frac{R}{h}\right)_i^3.$$

Точка пересечения прямой (7.59) с осью ординат дает величину $\frac{1}{E^{\text{и}}_{\theta}}$, а с осью абцисс образует угол, тангенс которого равен $\frac{0{,}528}{G^{\text{и}}_{\theta r}}$. Для обработки результатов эксперимента можно пользоваться также методом наименьших квадратов.

Для обеспечения надежности метода растяжения колец сосредоточенными силами при определении модуля межслойного сдвига относительная толщина образца h/R должна быть выбрана с учетом степени анизотропии исследуемого материала $E_\theta^{и}/G_{\theta r}^{и}$ и доли изменения вертикального диаметра от касательных напряжений $k_\tau = \dfrac{w_{0\tau}}{w_0}$.

При определении прочности межслойного сдвига $\Pi_{\theta r}^{и}$ методом изгиба целых колец выбором относительной толщины образца должно быть обеспечено разрушение от сдвига — расслоение по срединной плоскости. Для определения прочности по окружным напряжениям $\Pi_\theta^{и}$ этот метод не применяется.

При определении прочности межслойного сдвига $\Pi_{\theta r}^{и}$ на разрезных кольцах образцы нагружаются сосредоточенными силами P, которые приложены к жестким консолям таким образом, чтобы линия их действия проходила через центр кольца (см. табл. 7.8, схема *8—2*). Ширина у рабочего участка AB составляет примерно половину ширины образца. Для предотвращения разрушения образца от изгиба сечение кольца на горизонтальном диаметре усилено стальным хомутиком.

Изгиб разрезных колец позволяет определить также сопротивление намотанного материала поперечному отрыву Π_r^+ (схема *8—3*). Изгибающий момент $M = Pl$ создается при помощи двух консолей, в конце которых приложена сила P. Разрушение образца в этом случае может произойти в виде расслоения в результате совместного действия нормальных напряжений σ_r^+ и касательных напряжений $\tau_{\theta r}$. Влияние касательных напряжений

$$\tau_{\theta r} = -\frac{\sin\theta}{l/R + \cos\theta}\,\sigma_{r\,\max} \qquad (7.60)$$

зависит от выбора длины консолей и размеров рабочего участка AB.

Разрушение образца может быть вызвано также окружными нормальными напряжениями σ_θ. Для исключения такого разрушения размеры образца должны удовлетворять неравенству

$$\frac{h}{R} > 4\,\frac{\Pi_r^+}{\Pi_\theta^+}, \qquad (7.61)$$

где Π_θ^+ — прочность по нормальным окружным напряжениям.

7.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОДЕРЖАНИЯ АРМАТУРЫ И ПЛОТНОСТИ КОМПОЗИТОВ

Важными параметрами, определяющими свойства композитов, являются объемное (χ) и массовое ($\chi_{мас}$) содержание арматуры. Связь между ними выражается формулами:

$$\chi = \frac{\rho_M \chi_{мас}}{\rho_M \chi_{мас} + (1 - \chi_{мас})\rho_A} = \frac{\chi_{мас}}{\chi_{мас} + (1 - \chi_{мас})\dfrac{\rho_A}{\rho_M}} \qquad (7.62)$$

и

$$\chi_{мас} = \frac{\rho_A \chi}{P_A \chi + (1 - \chi)\rho_M} = \frac{\chi}{\chi + (1 + \chi)\dfrac{\rho_M}{\rho_A}}. \qquad (7.63)$$

Из этих формул видно, что при пересчете массового содержания арматуры в объемное или наоборот необходимо знать плотность арматуры (ρ_A) и матрицы (ρ_M) композита.

Метод определения плотности жестких пластмасс стандартизован (ГОСТ 15139—69; ASTM D 792—66). Ввиду отсутствия специализированных стандартов стандарты по определению плотности жестких пластмасс распространяются и на армирующие волокна и композиты в целом.

Содержание арматуры в композитах определяется тремя методами: растворением полимерной матрицы, выжиганием ее и гравиметрическим методом.

Выбор растворителя зависит от материала матрицы. Стандартом ASTM D 3171—76 предусмотрены следующие реагенты:

для растворения эпоксидных матриц — ацетон и азотная кислота (70%-ный раствор, не менее) или ацетон, диметилформамид, этиленгликоль, гидрооксид калия;

для растворения фенольных и полиимидных матриц — ацетон, перекись водорода (50%-ный раствор), серная кислота (96—98%-ный раствор).

Последовательность действий при растворении матрицы описана в стандарте.

Метод выжигания матрицы отличается от метода растворения только способом удаления матрицы: образец после взвешивания помещается в печь с определенной постоянной температурой (зависит от материала арматуры) до полного выжигания матрицы.

При растворении или выжигании матрицы неизбежны некоторые потери арматуры. Если эти потери превышают полпроцента, то вносится поправка, которая определяется при выдерживании чистой арматуры такого же качества и в таком же количестве в тех же условиях, как при растворении или выжигании матрицы. Эта поправка приближенная, так как при удалении матрицы арматура хотя бы временно защищена связующим.

Массовая доля арматуры определяется исходя из массы композита (исходного образца) $M_К$ и массы арматуры после удаления матрицы $M_А$:

$$\chi_{\text{мас}} = \frac{M_А}{M_К}. \qquad (7.64)$$

Для определения объемного содержания арматуры χ необходимо знать еще плотность композита $\rho_К$ и арматуры $\rho_А$:

$$\chi = \frac{M_А/\rho_К}{M_К/\rho_А}. \qquad (7.65)$$

Если известна также плотность матрицы $\rho_М$, то можно определить объемное содержание пустот

$$\chi_п = -\frac{M_А/\rho_А + (M_К - M_А)/\rho_М}{M_К/\rho_К}. \qquad (7.66)$$

По гравиметрическому методу объемное содержание арматуры

$$\chi = \frac{\rho_К - \rho_М}{\rho_А - \rho_М}. \qquad (7.67)$$

Гравиметрический метод является точным только в случае полного отсутствия в композите пустот.

У многих волокон плотность меняется в весьма широких пределах. В таких случаях приведенные выше методы определения объемного содержания арматуры могут дать лишь приближенные результаты.

Список литературы

1. **Николаев В. П., Попов В. Д., Сборовский А. К.** Прочность и надежность намоточных стеклопластиков. Л.: Машиностроение, 1983. 168 с.
2. **Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А.** Пространственно-армированные композиционные материалы: Справочник. М.: Машиностроение, 1987. 224 с.
3. **Тарнопольский Ю. М., Кинцис Т. Я.** Методы статических испытаний армированных пластиков. М.: Химия, 1981. 272 с.
4. **Adams D. F., Walrath D. E.** Iosipescu Shear Properties of SMC Composite Materials//Composite Materials: Testing and Design (Sixth Conference). ASTM STP N 787. Philadelphia, Pa., 1982. P. 19—33.
5. **Duggan M. P.** Experimental Evaluation of the Slotted—Tension Shear Test for Composite Materials//Experimental Mechanics, 1980. Vol. 20. N 7. P. 233—239.
6. **Garcia R., Weisshaar T. A., McWithey R. R.** An Experimental and Analytic Investigation of the Rail Shear—Test Method as Applied to Composite Materials//Experimental Mechanics. 1980. Vol. 20. N 8. P. 273—279.
7. **Herakovich C. T., Bergner N. W. Jr.** Finite Element Stress Analysis of a Notched Coupon Specimen for In—Plane Shear Behavior of Composites//Composites. 1980. Vol. 11. N 3. P. 149—154.
8. **Kural M. H., Flaggs D. L.** A Finite Element Analysis of Composite Tension Specimens//Composites Technology Review, Spring 1983, Vol. 5, N 1, P. 11—17.
9. **Lee S., Munro M.** Evaluation of In-Plane Shear Test Methods for Advanced Composite Materials by the Decision Analysis Technique//Composites. 1986. Vol. 17. N 1. P. 13—22.

10. Nemeth M. P., Herakovich C. T., Post D. On the off-Axis Tension Test for Unidirectional Composites//Composites Technology Review. Summer 1983. Vol. 5. N 2. P. 61—68.
11. Stöffler G. Determination of Torsion Strength and Shear Moduli of a Multi-Layer Composite//J. Compos. Mater. 1980. April. P. 95—110.
12. Swanson S. R., Messick M., Toombes G. R. Comparison of Torsion Tube and Iosipescu In—Plane Shear Test Results for a Carbon Fibre—Reinforced Epoxy Composite//Composites. 1985. Vol. 16. N 3. P. 220—224.
13. Tsai S. W. Composites Design — 1986. — Think Composites: Dayton, Paris and Tokyo. 1986.
14. Voloshin A., Arcan N. Pure Shear Moduli of Unidirectional Fibre—Reinforced Materials//Fibre Science and Technology. 1980. Vol. 13. N 2. P. 125—134.
15. Walrath D. E., Adams D. F. The Iosipescu Shear Test as Applied to Composite Materials//Experimental Mechanics, 1983. Vol. 23. N 3. P. 105—110.
16. Whitney J. M., Browning C. E. On Short—Beam Shear Tests for Composite Materials//Experimental Mechanics. 1985. Vol. 25. N 9. P. 294—300.

Глава 8

ПРОЧНОСТНЫЕ, ТЕРМОУПРУГИЕ И ДИССИПАТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПОЗИТОВ

Основные характеристики композитов могут быть определены экспериментальными методами (см. гл. 7), что открывает возможность использования феноменологического подхода к описанию процессов деформирования и разрушения КМ.

Рассмотрим некоторые модели КМ, которые можно отнести к числу структурно-феноменологических. Феноменологический подход используется для описания поведения однонаправленного КМ (монослоя), структурный — для рассмотрения многослойных композитов, составленных из разноориентированных (и в общем случае различных) монослоев.

8.1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ОДНОНАПРАВЛЕННОГО МАТЕРИАЛА (МОНОСЛОЯ) В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

8.1.1. Характеристики монослоя в «естественной» системе координат. Связь между напряжениями и деформациями для однонаправленного армированного материала при плоском напряженном состоянии в «естественной» (рис. 8.1) системе координат имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_2 + \alpha_1\,\Delta T; \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_1 + \alpha_2\,\Delta T; \\ \gamma_{12} &= \tau_{12}/G_{12} \end{aligned}\right\} \qquad (8.1)$$

или в матричной форме

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T,$$

а в компактной записи

$$\{\varepsilon_{12}\} = [S^0]\{\sigma_{12}\} + \{\alpha_{12}\}\Delta T.$$

Здесь $\{\varepsilon_{12}\}$, $\{\sigma_{12}\}$, $\{\alpha_{12}\}$ — матрицы-столбцы (векторы) соответственно деформаций, напряжений и коэффициентов термического расширения монослоя; $[S^0]$ — матрица податливости монослоя; ΔT — изменение температуры, отсчитываемое от некоторой соответствующей начальному недеформированному и напряженному состоянию материала температуры; E_1, E_2, G_{12}, ν_{12}, ν_{21}, α_1, α_2 — технические постоянные термоупругости монослоя. При этом индекс 1 соответствует направлению вдоль волокон, а 2 — направлению, ортогональному волокнам в плоскости монослоя (см. рис. 8.1). Соотношения (8.1) справедливы и для ортотропного монослоя с любой иной структурой армирования, если оси 1, 2, 3 являются главными осями ортотропии монослоя.

Обращая соотношения (8.1), получим

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11}^0 & g_{12}^0 & 0 \\ g_{12}^0 & g_{22}^0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{66}^0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ 0 \end{Bmatrix} \Delta T \qquad (8.2)$$

или

$$\{\sigma_{12}\} = [G^0]\,\{\varepsilon_{12}\} - \{\beta_{12}\}\,\Delta T.$$

Коэффициенты матрицы жесткости монослоя $[G^0]$ взаимосвязаны с коэффициентами матрицы податливости $[S^0]$ и техническими постоянными упругости монослоя (табл. 8.1).

Индексы у компоненты g_{66}^0 матрицы жесткости монослоя, связывающей деформации и напряжения сдвига в плоскости монослоя, принято сохранять в соответствии с индексацией компонент матрицы жесткости в случае трехмерного напряженно-деформированного состояния.

Введенные в (8.2) коэффициенты температурных напряжений, образующие матрицу-столбец $\{\beta_{12}\}$, связаны с термоупругими характеристиками слоя:

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= g_{11}^0\alpha_1 + g_{12}^0\alpha_2 = \\ &= (\alpha_1 + \nu_{21}\alpha_2)\,E_1/(1-\nu_{12}\nu_{21}); \\ \beta_2 &= g_{12}^0\alpha_1 + g_{22}^0\alpha_2 = \\ &= (\alpha_2 + \nu_{12}\alpha_1)\,E_2/(1-\nu_{12}\nu_{21}). \end{aligned}\right\} \qquad (8.3)$$

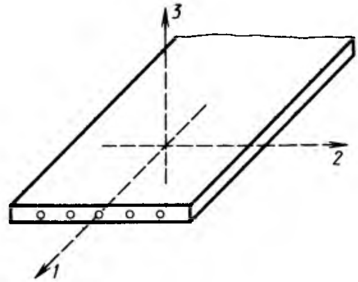


Рис. 8.1. Оси «естественной» системы координат однонаправленного монослоя

Соотношения, обратные (8.3), имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\beta_1 g_{22}^0 - \beta_2 g_{12}^0}{g_{11}^0 g_{22}^0 - g_{12}^{0\,2}} = \\ &= (\beta_1 - \nu_{12}\beta_2)/E_1; \\ \alpha_2 &= \frac{\beta_2 g_{11}^0 - \beta_1 g_{12}^0}{g_{11}^0 g_{22}^0 - g_{12}^{0\,2}} = \\ &= (\beta_2 - \nu_{21}\beta_1)/E_2. \end{aligned}\right\} \qquad (8.4)$$

8.1.2. Преобразование характеристик монослоя при повороте системы координат. При переходе от естественных для однонаправленного материала (связанных с его микроструктурой) осей координат (*1*, *2*, *3*, см. рис. 8.1) к некоторой системе координат (x, y, z), полученной вращением осей (*1*, *2*) вокруг оси *3* на угол θ (рис. 8.2), матрицы напряжений и деформаций преобразуются следующим образом [1]:

$$\{\sigma_{xy}\} = [T_1]\,\{\sigma_{12}\}; \qquad (8.5)$$

$$\{\varepsilon_{xy}\} = [T_2]\,\{\varepsilon_{12}\}, \qquad (8.6)$$

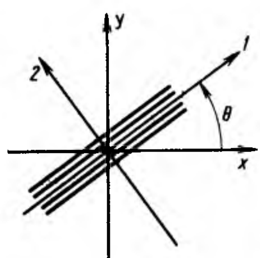


Рис. 8.2. Схема поворота осей координат монослоя

8.1. Расчетные зависимости для постоянных упругости однонаправленного материала (монослоя)

Независимые постоянные упругости	Расчетные зависимости для постоянных, выраженных через		
	технические постоянные	компоненты матрицы жесткости	компоненты матрицы податливости
E_1	E_1	$g_{11}^0 - \frac{(g_{12}^0)^2}{g_{22}^0}$	$\frac{1}{s_{11}^0}$
E_2	E_2	$g_{22}^0 - \frac{(g_{12}^0)^2}{g_{11}^0}$	$\frac{1}{s_{22}^0}$
ν_{12}	ν_{12}	$\frac{g_{12}^0}{g_{22}^0}$	$-\frac{s_{12}^0}{s_{11}^0}$
G_{12}	G_{12}	g_{66}^0	$\frac{1}{s_{66}^0}$
g_{11}^0	$\frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$	g_{11}^0	$\frac{s_{22}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2}$
g_{22}^0	$\frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$	g_{22}^0	$\frac{s_{11}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2}$
g_{12}^0	$\frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$	g_{12}^0	$-\frac{s_{12}^0}{s_{11}^0 s_{22}^0 - (s_{12}^0)^2}$
g_{66}^0	G_{12}	g_{66}^0	$1/s_{66}^0$
s_{11}^0	$\frac{1}{E_1}$	$\frac{g_{22}^0}{g_{11}^0 g_{22}^0 - (g_{12}^0)^2}$	s_{11}^0
s_{22}^0	$\frac{1}{E_2}$	$\frac{g_{11}^0}{g_{11}^0 g_{22}^0 - (g_{12}^0)^2}$	s_{22}^0
s_{12}^0	$-\frac{\nu_{12}}{E_1}$	$-\frac{g_{12}^0}{g_{11}^0 g_{22}^0 - (g_{12}^0)^2}$	s_{12}^0
s_{66}^0	$\frac{1}{G_{12}}$	$\frac{1}{g_{66}^0}$	s_{66}^0

где матрицы преобразования напряжений $[T_1]$ и деформаций $[T_2]$ имеют вид

$$[T_1] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2sc \\ s^2 & c^2 & 2sc \\ sc & -sc & c^2-s^2 \end{bmatrix};$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -sc \\ s^2 & c^2 & sc \\ 2sc & -2sc & c^2-s^2 \end{bmatrix}. \quad (8.7)$$

Здесь обозначено $s = \sin\theta$, $c = \cos\theta$. Обратные (8.5) и (8.6) преобразования напряжений и деформаций определяются соотношениями

$$\{\sigma_{12}\} = [T_1]^{-1}\{\sigma_{xy}\}; \quad (8.8)$$

$$\{\varepsilon_{12}\} = [T_2]^{-1}\{\varepsilon_{xy}\}, \quad (8.9)$$

где

$$[T_1]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2-s^2 \end{bmatrix};$$

$$[T_2]^{-1} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}. \tag{8.10}$$

Справедливы следующие тождества:

$$\left.\begin{aligned} &[T_1]^{-1} = [T_2]^{\mathrm{T}}; \quad [T_2]^{-1} = [T_1]^{\mathrm{T}}; \\ &([T_1]^{-1})^{\mathrm{T}} = [T_2]; \; ([T_2]^{-1})^{\mathrm{T}} = [T_1]; \\ &[T_1]^{-1} = [T_1(-\theta)]; \quad [T_2]^{-1} = \\ &= [T_2(-\theta)]. \end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

Из (8.1), (8.2), (8.5), (8.6) следуют соотношения, связывающие напряжения и деформации в монослое в произвольной системе координат (x, y):

$$\{\varepsilon_{xy}\} = [\bar{S}_{xy}]\{\sigma_{xy}\} + \{\bar{\alpha}_{xy}\}\Delta T; \tag{8.12}$$

$$\{\sigma_{xy}\} = [\bar{G}_{xy}]\{\varepsilon_{xy}\} - \{\bar{\beta}_{xy}\}\Delta T. \tag{8.13}$$

Матрицу податливости монослоя $[\bar{S}_{xy}]$, матрицу жесткости $[\bar{G}_{xy}]$, а также матрицу-столбец термических коэффициентов линейного расширения $\{\bar{\alpha}_{xy}\}$ и матрицу-столбец коэффициентов термических напряжений можно записать в следующем виде:

$$[\bar{S}_{xy}] = [T_2][S^0][T_2]^{\mathrm{T}}; \tag{8.14}$$

$$[\bar{G}_{xy}] = [T_1][G^0][T_1]^{\mathrm{T}}; \tag{8.15}$$

$$\{\bar{\alpha}_{xy}\} = [T_2]\{\alpha_{12}\}; \tag{8.16}$$

$$\{\bar{\beta}_{xy}\} = [T_1]\{\beta_{12}\}. \tag{8.17}$$

Матрицы в (8.14)—(8.17) имеют следующую структуру:

$$[\bar{S}_{xy}] = \begin{bmatrix} \bar{s}_{xx} & \bar{s}_{xy} & \bar{s}_{xs} \\ \bar{s}_{xy} & \bar{s}_{yy} & \bar{s}_{ys} \\ \bar{s}_{xs} & \bar{s}_{ys} & \bar{s}_{ss} \end{bmatrix};$$

$$[\bar{G}_{xy}] = \begin{bmatrix} \bar{g}_{xx} & \bar{g}_{xy} & \bar{g}_{xs} \\ \bar{g}_{xy} & \bar{g}_{yy} & \bar{g}_{ys} \\ \bar{g}_{xs} & \bar{g}_{ys} & \bar{g}_{ss} \end{bmatrix};$$

$$\{\bar{\alpha}_{xy}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\alpha}_x \\ \bar{\alpha}_y \\ \bar{\alpha}_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \{\bar{\beta}_{xy}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\beta}_x \\ \bar{\beta}_y \\ \bar{\beta}_{xy} \end{Bmatrix},$$

а развернутые формулы для их компонент приведены в табл. 8.2.

Справедливы следующие тригонометрические тождества:

$$\left.\begin{aligned} s^4 &= (3 - 4\cos 2\theta + \cos 4\theta)/8; \\ s^3c &= (2\sin 2\theta - \sin 4\theta)/8; \\ s^2c^2 &= (1 - \cos 4\theta)/8; \\ sc^3 &= (2\sin 2\theta + \sin 4\theta)/8; \\ c^4 &= (3 + 4\cos 2\theta + \cos 4\theta)/8. \end{aligned}\right\} \tag{8.18}$$

Использование (8.18) в (8.14) и (8.15) позволяет получить иную форму записи компонент матриц жесткости и податливости, приведенную в табл. 8.3. Приведенные в табл. 8.3 коэффициенты V_k, Q_k могут рассматриваться как независимые характеристики жесткости (податливости) однонаправленного материала при плоском напряженном состоянии. Формулы табл. 8.1 позволяют, в частности, установить их связь с техническими постоянными упругости монослоя. Таким образом (см. табл. 8.1 и 8.3) четыре независимые характеристики жесткости монослоя могут быть представлены в одном из пяти равноправных взаимосвязанных вариантов $(E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12})$, $(g_{11}^0, g_{12}^0, g_{22}^0, g_{66}^0)$, $(s_{11}^0, s_{12}^0, s_{22}^0, s_{66}^0)$, (V_1, V_2, V_3, V_4) (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4).

8.1.3. Инварианты жесткости монослоя. Анализ формул табл. 8.3 позволяет выделить [20] четыре инварианта жесткости монослоя, т. е. величины, неизменяющиеся при преобразованиях поворота системы координат:

$$\begin{aligned} I_1 = V_1 &= (3\bar{g}_{11} - 2\bar{g}_{12} + 3\bar{g}_{22} + \\ &+ 4\bar{g}_{66})/8 = (3g_{11}^0 + 2g_{12}^0 + 3g_{22}^0 + \\ &+ 4g_{66}^0)/8; \\ I_2 = V_4 &= (\bar{g}_{11} - 2\bar{g}_{12} + 2\bar{g}_{22} + \\ &+ 4\bar{g}_{66})/8 = (g_{11}^0 - 2g_{12}^0 + 4g_{66}^0)/8; \\ I_3 = V_2^2 &= (g_{16} + g_{26})^2 + \\ &+ (g_{11} - g_{22})^2/4 = (g_{11}^0 - g_{22}^0)^2/4; \\ I_4 &= [4(V_1 - V_4)(V_4 + V_3) - \\ &- V_2^2](V_4 - V_3) = \\ &= \det[\bar{G}_{xy}] = \det[G^0]. \end{aligned} \tag{8.19}$$

8.2. Расчетные зависимости для преобразования компонент основных матриц монослоя при повороте на угол θ

Компонента матрицы	Формулы преобразования
$\bar{s}_{xx}$	$c^4 s^0_{11} + s^4 s^0_{22} + (2s^0_{12} + s^0_{66})\, s^2c^2$
$\bar{s}_{xy}$	$(s^0_{11} + s^0_{22} - s^0_{66})\, s^2c^2 + (s^4 + c^4)\, s^0_{12}$
$\bar{s}_{xs}$	$[2c^2 s^0_{11} - 2s^2 s^0_{22} + (2s^0_{12} + s^0_{66})\,(s^2 - c^2)]\, sc$
$\bar{s}_{yy}$	$s^4 s^0_{11} + c^4 s^0_{22} + (2s^0_{12} + s^0_{66})\, s^2c^2$
$\bar{s}_{ys}$	$[2s^2 s^0_{11} - 2c^2 s^0_{22} - (2s^0_{12} + s^0_{66})\,(s^2 - c^2)]\, sc$
$\bar{s}_{ss}$	$(4s^0_{11} - 8s^0_{12} + 4s^0_{22})\, s^2c^2 + (s^2 - c^2)^2\, s^0_{66}$
$\bar{g}_{xx}$	$c^4 g^0_{11} + s^4 g^0_{22} + 2\,(g^0_{12} + 2g^0_{66})\, s^2c^2$
$\bar{g}_{xy}$	$(g^0_{11} + g^0_{22} - 4g^0_{66})\, s^2c^2 + (s^4 + c^4)\, g^0_{12}$
$\bar{g}_{xs}$	$[c^2 g^0_{11} - s^2 g^0_{22} + (g^0_{12} + 2g^0_{66})\,(s^2 - c^2)]\, sc$
$\bar{g}_{yy}$	$s^4 g^0_{11} + c^4 g^0_{22} + 2\,(g^0_{12} + 2g^0_{66})\, s^2c^2$
$\bar{g}_{ys}$	$[s^2 g^0_{11} - c^2 g^0_{22} - (g^0_{12} + 2g^0_{66})\,(s^2 - c^2)]\, sc$
$\bar{g}_{ss}$	$(g^0_{11} - 2g^0_{12} + g^0_{22})\, s^2c^2 + (s^2 - c^2)^2\, g^0_{66}$
$\bar{\alpha}_x$	$\alpha_1 c^2 + \alpha_2 s^2$
$\bar{\alpha}_y$	$\alpha_1 s^2 + \alpha_2 c^2$
$\bar{\alpha}_{xy}$	$2\,(\alpha_1 - \alpha_2)\, sc$
$\bar{\beta}_x$	$\beta_1 c^2 + \beta_2 s^2$
$\bar{\beta}_y$	$\beta_1 s^2 + \beta_2 c^2$
$\bar{\beta}_{xy}$	$(\beta_1 - \beta_2)\, sc$

Примечание. Принято $s = \sin\theta$, $c = \cos\theta$.

Непосредственно из формул табл. 8.2 также следует, что инвариантами рассматриваемых преобразований поворота системы координат являются также и следующие комбинации термоупругих характеристик:

$$\left.\begin{aligned} I_\alpha &= \bar{\alpha}_x + \bar{\alpha}_y = \alpha_1 + \alpha_2; \\ I_\beta &= \bar{\beta}_x + \bar{\beta}_y = \beta_1 + \beta_2. \end{aligned}\right\} \quad (8.20)$$

Последние соотношения являются формой записи первых (линейных) инвариантов тензоров второго ранга термических коэффициентов линейного расширения и коэффициентов температурных напряжений монослоя.

Если слой изотропен, то

$$g^0_{11} = g^0_{22}; \quad g^0_{66} = (g^0_{11} - g^0_{12})/2.$$

В этом случае

$$\begin{gathered} I_1 = V_1 = E/(1 - \nu^2); \\ I_2 = V_4 = G; \\ I_3 = V_2^2 = 0; \qquad (8.21) \\ I_4 = 4\,(V_1 - V_4)\, V_4^2 = E^2G/(1 - \nu^2); \\ I_4/I_1I_2 = E. \end{gathered}$$

Можно считать, что инварианты (I_4/I_1I_2) и I_2 характеризуют средние жесткости однонаправленного слоя

8.3. Расчетные зависимости для преобразования компонент матриц податливости и жесткости монослоя при повороте на угол θ в произвольной системе координат $(x,\ y)$

Компоненты матрицы	Формулы преобразования
$\bar{s}_{xx}$	$Q_1 + Q_2 \cos 2\theta + Q_3 \cos 4\theta$
$\bar{s}_{xy}$	$Q_1 - \frac{1}{2} Q_4 - Q_3 \cos 4\theta$
$\bar{s}_{xs}$	$Q_2 \sin 2\theta + 2Q_3 \sin 4\theta$
$\bar{s}_{yy}$	$Q_1 - Q_2 \cos 2\theta + Q_3 \cos 4\theta$
$\bar{s}_{ys}$	$Q_2 \sin 2\theta - 2Q_3 \sin 4\theta$
$\bar{s}_{ss}$	$Q_4 - 4Q_3 \cos 4\theta$
$\bar{g}_{xx}$	$V_1 + V_2 \cos 2\theta + V_3 \cos 4\theta$
$\bar{g}_{xy}$	$V_1 - 2V_4 - V_3 \cos 4\theta$
$\bar{g}_{xs}$	$\frac{1}{2} V_2 \sin 2\theta + V_3 \sin 4\theta$
$\bar{g}_{yy}$	$V_1 - V_2 \cos 2\theta + V_3 \cos 4\theta$
$\bar{g}_{ys}$	$\frac{1}{2} V_2 \sin 2\theta - V_3 \sin 4\theta$
$\bar{g}_{ss}$	$V_4 - V_3 \cos 4\theta$

Примечание. Принятые обозначения: $Q_1 = (3s^0_{11} + 2s^0_{12} + 3s^0_{22} + s^0_{66})/8$; $V_1 = (3g^0_{11} + 2g^0_{12} + 3g^0_{22} + 4g^0_{66})/8$; $Q_2 = (s^0_{11} - s^0_{22})/2$; $V_2 = (g^0_{11} - g^0_{22})/2$; $Q_3 = (s^0_{11} - 2s^0_{12} + s^0_{22} - s^0_{66})/8$; $V_3 = (g^0_{11} - 2g^0_{12} + g^0_{22} - 4g^0_{66})/8$; $Q_4 = (s^0_{11} - 2s^0_{12} + s^0_{22} + s^0_{66})/2$; $V_4 = (g^0_{11} - 2g^0_{12} + g^0_{22} + 4g^0_{66})/8$.

соответственно при растяжении и сдвиге. Они могут быть использованы при сравнении средней жесткости анизотропных монослоев с жесткостью конкурирующих с ними изотропных конструкционных материалов.

8.2. ТЕРМОУПРУГОСТЬ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТОВ ПРИ ПЛОСКОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Многослойными материалами принято называть материалы, образованные последовательной укладкой нескольких разноориентированных монослоев (рис. 8.3). Каждый из монослоев характеризуется своим, в общем случае отличным от других слоев, набором характеристик: E_1^k, E_2^k, G_{12}^k, ν_{12}^k,

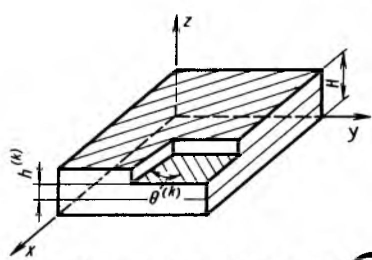


Рис. 8.3. Структура многослойного композита

$\alpha_1^{(k)}$, $\alpha_2^{(k)}$, $h^{(k)}$, $\theta^{(k)}$. Здесь k — номер монослоя в пакете n-слойного материала, $h^{(k)}$ — его толщина, $\theta^{(k)}$ — угол армирования. Введем следующие системы координат: общую «глобальную» (x, y) и местные «естественные» координаты монослоев $(1, 2)^{(k)}$.

8.2.1. Соотношения термоупругости. Средние для пакета слоев напряжения определим следующим образом:

$$\{\sigma_{xy}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_x^{(k)} \bar{h}^{(k)} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_y^{(k)} \bar{h}^{(k)} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \tau_{xy}^{(k)} \bar{h}^{(k)} \end{Bmatrix}. \quad (8.22)$$

Здесь $\bar{h}^{(k)}$ — относительная толщина k-го слоя; $\bar{h}^{(k)} = h^{(k)}/H$, где H — общая толщина пакета слоев (см. рис. 8.3). Будем считать, что деформации слоев равны между собой и, следовательно, совпадают со средними деформациями пакета, а изменение температуры всех слоев одинаково:

$$\{\varepsilon_{xy}\} = \{\varepsilon_{xy}\}^{(k)}; \quad (8.23)$$

$$\Delta T^{(k)} = \Delta T \ (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \quad (8.24)$$

Подставив в (8.22) соотношения Дюамеля—Неймана для слоя (8.13), получим

$$\{\sigma_{xy}\} = [G_{xy}]\{\varepsilon_{xy}\} - \{\beta_{xy}\}\Delta T \quad (8.25)$$

или

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xs} \\ g_{xy} & g_{yy} & g_{ys} \\ g_{xs} & g_{ys} & g_{ss} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_{xy} \end{Bmatrix} \Delta T, \quad (8.25а)$$

где

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \bar{g}_{ij}^{(k)} \bar{h}^{(k)} \quad (ij = x,\ y,\ s);$$

$$\beta_x = \sum_{k=1}^{n} \bar{\beta}_x^{(k)} \bar{h}^{(k)};$$

$$\beta_y = \sum_{k=1}^{n} \bar{\beta}_y^{(k)} \bar{h}^{(k)}; \quad (8.26)$$

$$\beta_{xy} = \sum_{k=1}^{n} \bar{\beta}_{xy}^{(k)} \bar{h}^{(k)}.$$

Обращая соотношения (8.25), имеем

$$\{\varepsilon_{xy}\} = [S_{xy}]\{\sigma_{xy}\} + \{\alpha_{xy}\}\Delta T. \quad (8.27)$$

Здесь $[G_{xy}]$, $[S_{xy}]$ — матрицы жесткости и податливости пакета слоев ($[S_{xy}] = [G_{xy}]^{-1}$); $\{\alpha_{xy}\}$ — матрица-столбец термических коэффициентов линейного расширения пакета; $\{\beta_{xy}\}$ — матрица-столбец коэффициентов термических напряжений пакета. Из (8.25) и (8.27) следуют формулы, определяющие взаимосвязь $\{\alpha_{xy}\}$ и $\{\beta_{xy}\}$:

$$\{\alpha_{xy}\} = [S_{xy}]\{\beta_{xy}\}; \quad \{\beta_{xy}\} = [G_{xy}]\{\alpha_{xy}\}. \quad (8.28)$$

В (8.28) коэффициенты матрицы податливости $[S_{xy}]$ следующим образом связаны с коэффициентами матрицы жесткости $[G_{xy}]$:

$$s_{xx} = \frac{g_{yy}g_{ss} - g_{ys}^2}{\Delta g};$$

$$s_{xy} = \frac{g_{xs}g_{ys} - g_{ss}g_{xy}}{\Delta g};$$

$$s_{yy} = \frac{g_{xx}g_{ss} - g_{xs}^2}{\Delta g};$$

$$s_{xs} = \frac{g_{xy}g_{ys} - g_{yy}g_{xs}}{\Delta g}; \quad (8.29)$$

$$s_{ss} = \frac{g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2}{\Delta g};$$

$$s_{ys} = \frac{g_{xy}g_{xs} - g_{xx}g_{ys}}{\Delta g};$$

$$\Delta g = \det[G_{xy}].$$

8.2.2. Термические напряжения в слоях многослойного пакета. При менении температуры пакета слоев многослойного материала (например, при охлаждении его от температуры полимеризации связующего до температуры эксплуатации) возникают термические (остаточные) напряжения и деформации в составляющих пакет монослоях. Деформации пакета в целом в системе координат (x, y) могут быть определены по формулам (8.27). В данном случае

$$\{\varepsilon_{xy}\} = \{\alpha_{xy}\}\,\Delta T, \qquad (8.30)$$

где для определения $\{\alpha_{xy}\}$ необходимо последовательно выполнить вычисления по формулам (8.3), (8.17), (8.26), (8.28). Деформации каждого из слоев в системе координат (x, y) совпадают со средними деформациями пакета (8.23), а в «естественных» координатах $(1,\ 2)^{(k)}$ они могут быть определены из формул

$$\{\varepsilon_{12}\}^{(k)} = \left[T_2^{(k)}\right]^{-1}\{\varepsilon_{xy}\}. \quad (8.31)$$

Деформации, определяемые соотношением (8.31), вызваны взаимным стеснением слоев пакета при изменении температуры. Деформации свободного расширения слоев $\{\varepsilon^*_{12}\}$ определяются соотношениями

$$\{\varepsilon^*_{12}\}^{(k)} = \{\alpha_{12}\}^{(k)}\,\Delta T.$$

Действительные, или актуальные, деформации слоев, вызывающие появление напряжений, равны разности деформаций (8.31) и деформаций свободного расширения слоев $\{\varepsilon^*_{12}\}^{(k)}$.

Термические (остаточные) напряжения в слоях можно определить следующим образом:

$$\{\sigma_{12}\}^{(k)} = [G^0]^{(k)}\left(\{\varepsilon_{12}\}^{(k)} - \{\varepsilon^*_{12}\}^{(k)}\right),$$

или

$$\{\sigma_{12}\}^{(k)} = [G^0]^{(k)}\{\varepsilon_{12}\}^{(k)} - \{\beta_{12}\}^{(k)}\,\Delta T. \qquad (8.32)$$

8.2.3. Преобразование характеристик КМ при повороте системы координат. Средние жесткости. Рассмотрим преобразование характеристик многослойных композитов при повороте системы координат вокруг оси z на угол γ. При этом углы армирования всех слоев изменяются на угол γ, например, $\theta^{(1)}$ примет значение $\theta^{(1)} - \gamma$ и т. д. Следует учитывать следующие тригонометрические преобразования при использовании в соотношениях (8.26) формул из табл. 8.3:

$$\cos 2(\theta - \gamma) = \cos 2\theta \cos 2\gamma + \sin 2\theta \sin 2\gamma;$$

$$\cos 4(\theta - \gamma) = \cos 4\theta \cos 4\gamma + \sin 4\theta \sin 4\gamma;$$

$$\sin 2(\theta - \gamma) = \sin 2\theta \cos 2\gamma - \cos 2\theta \sin 2\gamma;$$

$$\sin 4(\theta - \gamma) = \sin 4\theta \cos 4\gamma - \cos 4\theta \sin 4\gamma.$$

Поскольку γ — величина постоянная для всех слоев, имеем

$$g_{x'x'}(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} V_1^{(k)}\bar h^{(k)} + \cos 2\gamma \sum_{k=1}^{n} V_2^{(k)}\bar h^{(k)} \cos 2\theta^{(k)} + \sin 2\gamma \sum_{k=1}^{n} V_2^{(k)}\bar h^{(k)} \sin 2\theta^{(k)} + \cos 4\gamma \sum_{k=1}^{n} V_3^{(k)}\bar h^{(k)} \cos 4\theta^{(k)} + \sin 4\gamma \sum_{k=1}^{n} V_3^{(k)}\bar h^{(k)} \sin 4\theta^{(k)}.$$

Аналогично можно получить выражения и для остальных коэффициентов $g_{i'j'}(\gamma)$. Они приведены в табл. 8.4. Найдем средние значения коэффициентов жесткости в плоскости x, y:

$$\langle g_{ij}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_{i'j'}(\gamma)\,d\gamma \qquad (i,\ j = x,\ y,\ s). \qquad (8.33)$$

8.4. Формулы преобразования компонент матрицы жесткости многослойного мате

Компонента жесткости	Расчетные		
$g_{x'x'}$	$\sum\limits_{k=1}^{n} V_1^{(k)}\bar{h}^{(k)}$	$\sum\limits_{k=1}^{n} V_2^{(k)}\bar{h}^{(k)}\cos 2\theta^{(k)}$	$\sum\limits_{k=1}^{n} V_2^{(k)}\bar{h}^{(k)}\sin 2\theta^{(k)}$
$g_{x'y'}$	$\sum\limits_{k=1}^{n}\left(V_1^{(k)}-2V_4^{(k)}\right)\bar{h}^{(k)}$	0	0
$g_{x's'}$	0	$\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} V_2^{(k)}\bar{h}^{(k)}\sin 2\theta^{(k)}$	$-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} V_2^{(k)}\bar{h}^{(k)}\cos 2\theta^{(k)}$
$g_{y'y'}$	$\sum\limits_{k=1}^{n} V_1^{(k)}\bar{h}^{(k)}$	$-\sum\limits_{k=1}^{n} V_2^{(k)}\bar{h}^{(k)}\cos 2\theta^{(k)}$	$-\sum\limits_{k=1}^{n} V_2^{(k)}\bar{h}^{(k)}\sin 2\theta^{(k)}$
$g_{y's'}$	0	$\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} V_2^{(k)}\bar{h}^{(k)}\sin 2\theta^{(k)}$	$-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} V_2^{(k)}\bar{h}^{(k)}\cos 2\theta^{(k)}$
$g_{s's'}$	$\sum\limits_{k=1}^{n} V_4^{(k)}\bar{h}^{(k)}$	0	0

Подставив в (8.33) формулы табл. 8.4, получим

$$\left.\begin{aligned}
\langle g_{xx}\rangle = \langle g_{yy}\rangle &= \sum_{k=1}^{n} V_1^{(k)}\bar{h}^{(k)};\\
\langle g_{xs}\rangle &= \langle g_{ys}\rangle = 0;\\
\langle g_{xy}\rangle &= \sum_{k=1}^{n}\left(V_1^{(k)}-2V_4^{(k)}\right)\bar{h}^{(k)};\\
\langle g_{ss}\rangle &= \sum_{k=1}^{n} V_4^{(k)}\bar{h}^{(k)}.
\end{aligned}\right\} \quad (8.34)$$

Таким образом, средние значения коэффициентов жесткости многослойных материалов не зависят от структуры пакета слоев [см. (8.34)] и полностью определяются свойствами и относительной толщиной монослоев, образующих пакет.

Коэффициенты термического расширения многослойного материала [см. (8.28)] при повороте системы координат преобразуются как компоненты матрицы деформаций

$$\{\alpha_{x'y'}(\gamma)\} = [T_2(\nu)]\{\alpha_{xy}\}, \quad (8.35)$$

и коэффициенты термических напряжений как компоненты матрицы напряжений

$$\{\beta_{x'y'}(\gamma)\} = [T_1(\gamma)]\{\beta_{xy}\}. \quad (8.36)$$

В плоскости x, y средние значения этих коэффициентов равны:

$$\begin{gathered}
\langle\alpha_x\rangle = \langle\alpha_y\rangle = (\alpha_x+\alpha_y)/2;\\
\langle\beta_x\rangle = \langle\beta_y\rangle = (\beta_x+\beta_y)/2; \quad (8.37)\\
\langle\alpha_{xy}\rangle = 0; \quad \langle\beta_{xy}\rangle = 0.
\end{gathered}$$

8.2.4. Характеристики термоупругости основных структур КМ. Для многих частных видов структуры пакета риала **произвольной структуры при повороте вокруг оси z на угол γ**

зависимости

$$
\left.\begin{array}{cc}
\sum\limits_{k=1}^{n} V_3^{(k)}\bar{h}^{(k)}\cos 4\theta^{(k)} & \sum\limits_{k=1}^{n} V_3^{(k)}\bar{h}^{(k)}\sin 4\theta^{(k)} \\
-\sum\limits_{k=1}^{n} V_3^{(k)}\bar{h}^{(k)}\cos 4\theta^{(k)} & -\sum\limits_{k=1}^{n} V_3^{(k)}\bar{h}^{(k)}\sin 4\theta^{(k)} \\
\sum\limits_{k=1}^{n} V_3^{(k)}\bar{h}^{(k)}\sin 4\theta^{(k)} & -\sum\limits_{k=1}^{k} V_3^{(k)}\bar{h}^{(k)}\cos 4\theta^{(k)} \\
\sum\limits_{k=1}^{n} V_3^{(k)}\bar{h}^{(k)}\cos 4\theta^{(k)} & \sum\limits_{k=1}^{n} V_3^{(k)}\bar{h}^{(k)}\sin 4\theta^{(k)} \\
-\sum\limits_{k=1}^{n} V_3^{(k)}\bar{h}^{(k)}\sin 4\theta^{(k)} & \sum\limits_{k=1}^{n} V_3^{(k)}\bar{h}^{(k)}\cos 4\theta^{(k)} \\
-\sum\limits_{k=1}^{n} V_3^{(k)}\bar{h}^{(k)}\cos 4\theta^{(k)} & -\sum\limits_{k=1}^{n} V_3^{(k)}\bar{h}^{(k)}\sin 4\theta^{(k)}
\end{array}\right]
\qquad
\left\{\begin{array}{c}
1 \\ \cos 2\gamma \\ \sin 2\gamma \\ \cos 4\gamma \\ \sin 4\gamma
\end{array}\right\}
$$

слоев многослойного материала формулы (8.26) заметно упрощаются. Рассмотрим три вида структур, часто используемых при создании конструкций из композитов.

Ортогонально армированные материалы. Такие материалы состоят из n слоев, из которых часть уложена под углом $\theta^{(1)} = 0°$, а остальные слои — под углом $\theta^{(2)} = 90°$. Суммарная относительная толщина слоев первого типа $\bar{h}^{(1)}$, второго типа $\bar{h}^{(2)}$. Характеристики всех слоев одинаковы.

С учетом формул (8.15), (8.17) и (8.26) получим

$$
\begin{gathered}
g_{xx} = g_{11}^0\bar{h}^{(1)} + g_{22}^0\bar{h}^{(2)};\\
g_{yy} = g_{22}^0\bar{h}^{(1)} + g_{11}^0\bar{h}^{(2)};\\
g_{xy} = g_{12}^0;\quad g_{ss} = g_{66}^0;\\
g_{xs} = g_{ys} = 0;
\end{gathered}
\tag{8.38}
$$

$$
\beta_x = \beta_1\bar{h}^{(1)} + \beta_2\bar{h}^{(2)};
$$

$$
\beta_y = \beta_2\bar{h}^{(1)} + \beta_1\bar{h}^{(2)};\quad \beta_{xy} = 0.
$$

Структура матрицы жесткости этого материала ($g_{xs} = g_{ys} = 0$) позволяет считать его ортотропным. Главные оси ортотропии совпадают с осями x, y.

Перекрестно армированные материалы. Такие материалы состоят из $2n$ слоев, из которых n слоев уложены под углом θ к оси x, а остальные n слоев — под углом $-\theta$.

С учетом формул (8.15), (8.17) и (8.26) получим

$$
\begin{gathered}
g_{xx} = \left(\bar{g}_{xx}^{(1)} + \bar{g}_{xx}^{(2)}\right)/2 = \bar{g}_{xx};\\
g_{yy} = \left(\bar{g}_{yy}^{(1)} + \bar{g}_{yy}^{(2)}\right)/2 = \bar{g}_{yy};\\
g_{xy} = \left(\bar{g}_{xy}^{(1)} + \bar{g}_{xy}^{(2)}\right)/2 = \bar{g}_{xy};\\
g_{ss} = \left(\bar{g}_{ss}^{(1)} + \bar{g}_{ss}^{(2)}\right)/2 = \bar{g}_{ss};
\end{gathered}
$$

$$g_{xs} = g_{ys} = 0;$$
$$\beta_x = \left(\bar{\beta}_x^{(1)} + \bar{\beta}_x^{(2)}\right)/2 = \bar{\beta}_x; \quad (8.39)$$
$$\beta_y = \left(\bar{\beta}_y^{(1)} + \bar{\beta}_y^{(2)}\right)/2 = \bar{\beta}_y;$$
$$\beta_{xy} = \left(\bar{\beta}_{xy}^{(1)} + \bar{\beta}_{xy}^{(2)}\right)/2 = 0.$$

При укладке слоев под углом $\theta = \pm 45^\circ$ с учетом формул табл. 8.2 имеем

$$g_{xx} = g_{yy} = \left(g_{11}^0 + 2g_{12}^0 + g_{22}^0 + 4g_{66}^0\right)/4;$$
$$g_{xy} = \left(g_{11}^0 + 2g_{12}^0 + g_{22}^0 - 4g_{66}^0\right)/4; \quad (8.40)$$
$$g_{ss} = \left(g_{11}^0 - 2g_{12}^0 + g_{22}^0\right)/4;$$
$$g_{xs} = g_{ys} = 0;$$
$$\beta_x = \beta_y = (\beta_1 + \beta_2)/2; \quad \beta_{xy} = 0.$$

Перекрестно армированный материал с углами $\theta = \pm 45^\circ$ является ортогонально армированным материалом с $h^{(1)} = h^{(2)} = 0{,}5$, рассматриваемым в осях, повернутых на угол 45° относительно осей системы координат предыдущего примера. Анализ формул (8.40) и (8.38) показывает, что равенство жесткостей материала в двух ортогональных направлениях ($g_{xx} = g_{yy}$ при $\bar{h}^{(1)} = \bar{h}^{(2)} = 0{,}5$) в формулах (8.38) еще не означает изотропии жесткости в плоскости (x, y). В то же время равенство коэффициентов термических напряжений в двух взаимно ортогональных направлениях свидетельствует об изотропии характеристик термического расширения материала в плоскости (x, y). Общие условия, связывающие симметрию структуры и физических свойств материала, определены теоремой Германа [6].

Квази-изотропные материалы. Рассмотрим многослойный композит, в котором одинаковые монослои равной толщины уложены под углами $\theta^{(k)} = k\pi/n$; $k = 1, 2, \ldots, n$; $n \geqslant 3$.

Простейшие примеры таких материалов — композиты со схемой укладки слоев [30°/—30°/90°] или [0°/45°/90°/—45°] ($n = 4$).

Из (8.26) и формул табл. 8.3 следует

$$g_{xx} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(V_1 + V_2\cos\frac{2\pi k}{n} + V_3\cos\frac{4\pi k}{n}\right).$$

Суммы $\sum_{k=1}^{n}\cos(2\pi k/n)$, $\sum_{k=1}^{n}\cos(4\pi k/n)$, а также входящие в выражения для других коэффициентов суммы

$$\sum_{k=1}^{n}\sin(2\pi k/n) \text{ и } \sum_{k=1}^{n}\sin(4\pi k/n)$$

равны нулю.
Тогда

$$g_{xx} = g_{yy} = V_1;$$
$$g_{xy} = V_1 - 2V_4;$$
$$g_{ss} = V_4;$$
$$g_{xs} = g_{ys} = 0.$$

Из (8.26) и формул табл. 8.2 следует, что $\beta_x = \beta_y = (\beta_1 + \beta_2)/2$, $\beta_{xy} = 0$.

Равенство нулю компонент матрицы жесткости g_{xs}, g_{ys} позволяет считать материал ортотропным. Определяя технические постоянные упругости по формулам табл. 8.1, пригодным для любого ортотропного материала при плоском напряженном состоянии, получим

$$E_1 = E_2 = 4V_4(1 - V_4/V_1) = E;$$
$$\nu_{12} = \nu_{21} = 1 - 2V_4/V_1 = \nu;$$
$$G_{12} = V_4 = E/[2(1 + \nu)].$$

Рассматриваемый материал изотропен в плоскости x, y. Естественно, что значения его коэффициентов жесткости равны средним жесткостям (8.34) многослойного композита при одинаковых характеристиках слоев.

8.2.5. Технические постоянные упругости КМ. Технические постоянные упругости многослойного материала могут быть определены непосредственно из соотношений (8.25). Так, для случая нагружения материала вдоль оси x они принимают вид

$$\sigma_x = g_{xx}\varepsilon_x + g_{xy}\varepsilon_y + g_{xs}\gamma_{xy};$$
$$0 = g_{xy}\varepsilon_x + g_{yy}\varepsilon_y + g_{ys}\gamma_{xy};$$
$$0 = g_{xs}\varepsilon_x + g_{ys}\varepsilon_y + g_{ss}\gamma_{xy}.$$

Отсюда

$$E_x = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \frac{g_{xx}g_{yy}g_{ss} + 2g_{xy}g_{ys}g_{xs} - g_{xx}g_{ys}^2 - g_{yy}g_{xs}^2 - g_{ss}g_{xy}^2}{g_{yy}g_{ss} - g_{ys}^2},$$

или

$$E_x = \frac{\Delta g}{g_{yy}g_{ss} - g_{ys}^2}. \qquad (8.41)$$

Здесь Δg есть определитель матрицы $[G_{xy}]$:

$$\Delta g = \det \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{xy} & g_{xs} \\ g_{xy} & g_{yy} & g_{ys} \\ g_{xs} & g_{ys} & g_{ss} \end{bmatrix}.$$

Аналогично могут быть получены выражения для модулей упругости

$$E_y = \frac{\Delta g}{g_{xx}g_{ss} - g_{xs}^2};$$

$$G_{xy} = \frac{\Delta g}{g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2} \qquad (8.42)$$

и коэффициента Пуассона

$$\nu_{xy} = \frac{g_{xy}g_{ss} - g_{xs}g_{ys}}{g_{yy}g_{ss} - g_{ys}^2}. \qquad (8.43)$$

В случае ортотропного композита ($g_{xs} = g_{ys} = 0$) имеем формулы, аналогичные приведенным в табл. 8.1:

$$E_x = g_{xx} - \frac{g_{xy}^2}{g_{yy}};$$

$$E_y = g_{yy} - \frac{g_{xy}^2}{g_{xx}}; \qquad (8.44)$$

$$G_{xy} = g_{ss}; \quad \nu_{xy} = g_{xy}/g_{yy}.$$

Для ортотропного материала из (8.28) следуют расчетные формулы для температурных коэффициентов линейного расширения:

$$\alpha_x = \frac{\beta_x g_{yy} - \beta_y g_{xy}}{g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2};$$

$$\alpha_y = \frac{\beta_y g_{xx} - \beta_x g_{xy}}{g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2}. \qquad (8.45)$$

Коэффициенты матриц жесткости и термических напряжений в (8.45) определяются формулами (8.26).

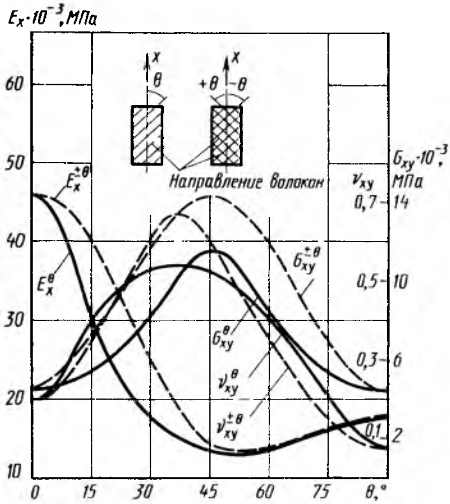


Рис. 8.4. Зависимость технических постоянных упругости E_x, G_{xy}, ν_{xy} однонаправленного монослоя и перекрестно-армированного материала от угла ориентации волокон (θ)

На рис. 8.4 приведены графики изменения в зависимости от угла ориентации волокон однонаправленных монослоев технических констант упругости однонаправленного материала, определяемых формулами (8.41)—(8.43), и аналогичных констант ортотропного перекрестно-армированного материала, определяемых формулами (8.44). Графики построены для стеклопластика со следующими характеристиками однонаправленного материала: $E_1 = 46\,000$ МПа, $E_2 = 18\,000$ МПа, $G_{12} = 4500$ МПа, $\nu_{12} = 0{,}2$. Взаимное стеснение деформаций сдвига в слоях перекрестно-армированного материала приводит к возрастанию его модулей упругости по сравнению со свободно деформируемым однонаправленным композитом.

8.2.6. Термонейтральные структуры КМ. Рассмотрим вопрос о температурной стабильности многослойных армированных материалов.

Материал, температурный коэффициент линейного расширения которого в заданном направлении равен нулю, является одноосно термотральным материалом. Простейший пример задачи построения такой структуры материала — определение угла θ укладки однонаправленного материала по отношению к заданному направлению (например, оси x), обеспечивающего нулевой температурный коэффициент линейного расширения в этом направлении (см. рис. 8.2).

Формулы для температурных коэффициентов линейного расширения монослоя в произвольной системе координат приведены в табл. 8.2.

Приняв $\bar{\alpha}_x = 0$, имеем

$$\alpha_1 c^2 + \alpha_2 s^2 = 0.$$

Отсюда следует

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}} \tag{8.46}$$

или

$$\sin\theta = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}}.$$

Формулы (8.46) дают действительное решение при различных знаках α_1 и α_2. При выполнении условий (8.46) коэффициенты $\bar{\alpha}_y$ и $\bar{\alpha}_{xy}$ в общем случае отличны от нуля и выражаются следующими простыми формулами:

$$\bar{\alpha}_y = \alpha_1 + \alpha_2; \qquad \bar{\alpha}_{xy} = 2\sqrt{-\alpha_1\alpha_2}. \tag{8.47}$$

При $\alpha_1 = -\alpha_2$ и $\theta = 45°$ рассматриваемая структура является термонейтральной в направлении осей x и y, т. е. $\bar{\alpha}_x = \bar{\alpha}_y = 0$, не являясь термоизотропной ($\bar{\alpha}_{xy} \neq 0$), поскольку из (8.47) следует, что

$$\bar{\alpha}_{xy} = 2\alpha_1.$$

Рассмотрим *одноосно термонейтральные структуры общего вида*, используя соотношения (8.28). Примем $\alpha_x = 0$, $\alpha_{xy} = 0$. Тогда из (8.28) следует

$$\alpha_x = s_{xx}\beta_x + s_{xy}\beta_y + s_{xs}\beta_{xy} = 0;$$
$$\alpha_{xy} = s_{xs}\beta_x + s_{ys}\beta_y + s_{ss}\beta_{xy} = 0. \tag{8.48}$$

Поскольку в (8.48) в общем случае $\beta_x \neq 0$, $\beta_y \neq 0$, $s_{ss} \neq 0$, будем считать, что второе уравнение (8.48) выполняется при $s_{xs} = s_{ys} = \beta_{xy} = 0$, т. е. ограничимся рассмотрением ортотропного материала.

В этом случае [см. (8.29)] ненулевые коэффициенты податливости в (8.48) равны

$$s_{xx} = \frac{g_{yy}}{g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2};$$

$$s_{xy} = -\frac{g_{xy}}{g_{xx}g_{yy} - g_{xy}^2}.$$

Из первого уравнения (8.48) следует условие, связывающее термоупругие характеристики одноосно термонейтрального ортотропного материала

$$g_{yy}\beta_x = g_{xy}\beta_y \tag{8.49}$$

или

$$\frac{\beta_x}{\beta_y} = \frac{g_{xy}}{g_{yy}}.$$

Условие (8.49) может быть конкретизировано для некоторых частных структур многослойных материалов. Так, для перекрестно-армированного материала, содержащего равное число слоев, уложенных под углами θ и $-\theta$ к некоторой оси (для определенности x), входящие в (8.49) величины согласно формулам (8.26), (8.15), (8.16), (8.2), (8.3) могут быть записаны в следующем виде:

$$g_{xy} = \bar{g}_{12} = \left(g_{11}^0 + g_{22}^0 - 4g_{66}^0\right)s^2c^2 + g_{12}^0\left(s^4 + c^4\right);$$

$$g_{yy} = \bar{g}_{22} = s^4 g_{11}^0 + c^4 g_{22}^0 + 2\left(g_{12}^0 + 2g_{66}^0\right)s^2c^2;$$

$$\beta_x = \bar{\beta}_x = \beta_1 c^2 + \beta_2 s^2; \quad \beta_y = \bar{\beta}_y = \beta_1 s^2 + \beta_2 c^2;$$

$$\beta_1 = g_{11}^0\alpha_1 + g_{12}^0\alpha_2; \quad \beta_2 = g_{12}^0\alpha_1 + g_{22}^0\alpha_2.$$

Подстановка выписанных формул в (8.49) позволяет получить квадратное уравнение относительно переменной

$X = \operatorname{tg}^2\theta$ $(X \geqslant 0)$, определяющее величину угла $\pm\theta$ укладки слоев перекрестно-армированного материала, обеспечивающую тепловую стабильность структуры в направлении оси x:

$$X^2 + BX + C = 0, \qquad (8.50)$$

где

$$B = \frac{4g_{66}^0\left[g_{11}^0\bar{\alpha} + (1+\bar{\alpha})\,g_{12}^0 + g_{22}^0\right]}{g_{11}^0 g_{22}^0 - g_{12}^{02}} - \bar{\alpha} - 1;$$

$$C = \bar{\alpha} = \alpha_1/\alpha_2.$$

Так, органопластик Kevlar 49/ERLA4617 имеет следующие характеристики: $E_1 = 69$ ГПа, $E_2 = 4{,}52$ ГПа, $G_{12} = 2{,}48$ ГПа, $\nu_{12} = 0{,}41$, $\alpha_1 = -5{,}17\cdot10^6$ К$^{-1}$, $\alpha_2 = 68{,}7\cdot10^6$ К$^{-1}$, $X = 0{,}9693$, $\theta = \pm44{,}55°$.

Полный график зависимости термических коэффициентов линейного расширения перекрестно-армированного материала на основе однонаправленного органопластика этого типа от угла армирования, построенный по формулам (8.28), приведен на рис. 8.5.

Назовем *двухоснотермонейтральными изотропными структурами* многослойные материалы, для которых выполняется условие

$$\alpha_x = \alpha_y = \alpha_{xy} = 0 \qquad (8.51)$$

и при изменении температуры не происходит изменения линейных и угловых размеров тела в плоскости x, y. Из (8.28) непосредственно следует, что в этом случае

$$\{\beta_{xy}\} = \{0\}. \qquad (8.52)$$

Последнее выражение значительно удобней исходной постановки (8.51), так как для коэффициентов термических напряжений $\{\beta_{xy}\}$ в отличие от термических коэффициентов линейного расширения $\{\alpha_{xy}\}$ существует правило аддитивности (8.26).

Рассмотрим многослойный материал, составленный из n монослоев одного типа с коэффициентами термических напряжений β_1, β_2. Из (8.26) и (8.52) следуют уравнения

$$\beta_1\left(c^{(1)^2} + c^{(2)^2} + \cdots + c^{(n)^2}\right) + \beta_2\left(s^{(1)^2} + s^{(2)^2} + \cdots + s^{(n)^2}\right) = 0;$$

$$\beta_1\left(s^{(1)^2} + s^{(2)^2} + \cdots + s^{(n)^2}\right) + \beta_2\left(c^{(1)^2} + c^{(2)^2} + \cdots + c^{(n)^2}\right) = 0;$$

$$\beta_1\left(s^{(1)}c^{(1)} + s^{(2)}c^{(2)} + \cdots + s^{(n)}c^{(n)}\right) - \beta_2\left(s^{(1)}c^{(1)} + s^{(2)}c^{(2)} + \cdots + s^{(n)}c^{(n)}\right) = 0. \qquad (8.53)$$

Решением системы (8.53) (кроме тривиального решения $\beta_1 = \beta_2 = 0$) является

$$\beta_1 = -\beta_2;$$

$$\sum_{k=1}^{n} s^{(k)^2} = \sum_{k=1}^{n} c^{(k)^2} = n/2; \qquad (8.54)$$

$$\sum_{k=1}^{n} s^{(k)}c^{(k)} = 0.$$

Так, для перекрестно-армированного материала ($n = 2$, $\theta^{(1)} = \theta$, $\theta^{(2)} = -\theta$) система условий (8.54) имеет вид

$$\beta_1 = -\beta_2;$$

$$\sin^2\theta + \sin^2(-\theta) = 1; \qquad (8.54а)$$

$$\sin\theta\cos\theta + \sin(-\theta)\cos(-\theta) = 0,$$

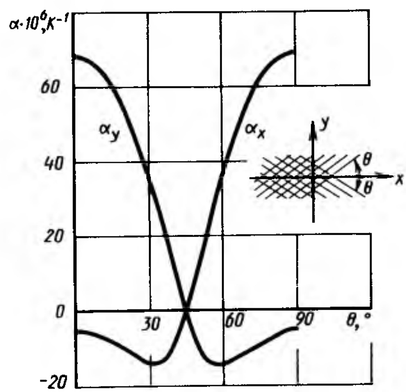


Рис. 8.5. Зависимость температурных коэффициентов линейного расширения перекрестно-армированного органопластика Kevlar49/ERLA4617 от угла армирования

откуда следует

$$\theta = \pi/4; \; \beta_1 = -\beta_2. \qquad (8.55)$$

При этом третье условие из (8.54а) выполняется тождественно.

Первое условие системы (8.54) определяет соотношение связи между термоупругими характеристиками монослоя, необходимое для создания термонейтральных структур (8.54). Положив $\beta_1 = -\beta_2$, из (8.3) получим

$$-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{E_2 (1 + \nu_{12})}{E_1 (1 + \nu_{21})}. \qquad (8.56)$$

Изотропная в смысле коэффициентов линейного расширения (8.51) структура (8.55) перекрестно-армированного материала не является изотропной по характеристикам упругости.

8.3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК МОНОСЛОЯ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЭКСПЕРИМЕНТОВ НА МНОГОСЛОЙНЫХ МАТЕРИАЛАХ

Рассмотрим процесс идентификации характеристик жесткости монослоя [2] по результатам экспериментов с многослойными материалами, составленными из монослоев этого типа.

Связь между напряжениями и деформациями для монослоя относительно главных осей ортотропии дана формулами (8.2). В качестве независимых параметров, полностью определяющих упругие свойства монослоя при плоском напряженном состоянии, выберем коэффициенты матрицы жесткости g_{11}^0, g_{22}^0, g_{12}^0, g_{66}^0, сгруппировав их в матрицу-столбец:

$$\{G^0\} = \{g_{11}^0, \; g_{22}^0, \; g_{12}^0, \; g_{66}^0\}^{\mathrm{T}} = \{g_1^0, \; g_2^0, \; g_3^0, \; g_4^0\}^{\mathrm{T}}. \qquad (8.57)$$

Обобщенный закон Гука для многослойного пакета (8.25) без учета температурных напряжений для произвольных осей (см. рис. 8.3) имеет вид

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= g_{xx}\varepsilon_x + g_{xy}\varepsilon_y + g_{xs}\gamma_{xy};\\
\sigma_y &= g_{xy}\varepsilon_x + g_{yy}\varepsilon_y + g_{ys}\gamma_{xy}; \qquad (8.58)\\
\tau_{xy} &= g_{xs}\varepsilon_x + g_{ys}\varepsilon_y + g_{ss}\gamma_{xy}.
\end{aligned}$$

Для симметричных относительно осей x и y структур многослойных материалов (далее для простоты будем рассматривать только такие структуры) компоненты матрицы жесткости g_{xs}, g_{ys} равны нулю и пакет многослойного материала в условиях плоского напряженного состояния ведет себя в среднем как ортотропный материал. С учетом (8.26) и формул из табл. 8.2 выражения для ненулевых компонент матрицы жесткости многослойного материала могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
g_{xx} &= \sum_{k=1}^{n} \left[g_{11}^0 c^4 + 2\left(g_{12}^0 + g_{66}^0\right) \times s^2c^2 + g_{22}^0 s^4\right]^{(k)} \bar{h}^{(k)};\\
g_{yy} &= \sum_{k=1}^{n} \left[g_{11}^0 s^4 + 2\left(g_{12}^0 + g_{66}^0\right) \times s^2c^2 + g_{22}^0 c^4\right]^{(k)} \bar{h}^{(k)};\\
g_{xy} &= \sum_{k=1}^{n} \left[\left(g_{11}^0 + g_{22}^0 - 4g_{66}^0\right) s^2c^2 + g_{12}^0 \left(s^4 + c^4\right)\right]^{(k)} \bar{h}^{(k)};\\
g_{ss} &= \sum_{k=1}^{n} \left[\left(g_{11}^0 + g_{22}^0 - 2g_{12}^0\right) s^2c^2 + g_{66}^0 \left(c^2 - s^2\right)^2\right]^{(k)} \bar{h}^{(k)}. \qquad (8.59)
\end{aligned}$$

Сгруппируем коэффициенты жесткости g_{xx}, g_{yy}, g_{xy}, g_{ss} для некоторого m-го пакета в матрицу-столбец:

$$\{G^m\} = \{g_{xx}^m, \; g_{yy}^m, \; g_{xy}^m, \; g_{ss}^m\}^{\mathrm{T}} = \{g_1^m, \; g_2^m, \; g_3^m, g_4^m\}^{\mathrm{T}}. \qquad (8.60)$$

Если пакет набран из одинаковых по жесткостным характеристикам монослоев, (8.59) можно записать следующим образом:

$$\{G^m\} = [A^m]\{G^0\}, \qquad (8.61)$$

где $[A^m]$ — матрица размерностью 4×4, компоненты которой являются функциями углов ориентации главных осей ортотропии монослоев и их относительных толщин.

Пусть экспериментально определена часть элементов векторов $\{$

($m = 1, 2, \ldots, M$) для некоторых M пакетов, изготовленных из одинаковых монослоев с известными схемами армирования. Например, для трех видов структур армирования ($M = 3$) определены из экспериментов следующие характеристики:

для 1-го вида: $(g_1^1)^{\text{э}}$, $(g_2^1)^{\text{э}}$;
для 2-го вида: $(g_1^2)^{\text{э}}$, $(g_2^2)^{\text{э}}$, $(g_3^2)^{\text{э}}$;
для 3-го вида: $(g_2^3)^{\text{э}}$, $(g_3^3)^{\text{э}}$.

Назовем эти характеристики базовыми. Для каждой из базовых жесткостных характеристик может быть вычислено ее расчетное значение с использованием соотношений (8.59), если известны характеристики упругости монослоя — элементы матрицы-столбца $\{G^0\}$. Объединим известные экспериментальные и соответствующие им расчетные значения жесткостных характеристик рассматриваемых структур в матрицы-столбцы. Для рассматриваемого примера они примут вид

$$\{\widehat{G}\}^{\text{э}} = \left\{(g_1^1)^{\text{э}}, (g_2^1)^{\text{э}}, (g_1^2)^{\text{э}}, (g_2^2)^{\text{э}}, (g_3^2)^{\text{э}}, (g_2^3)^{\text{э}}, (g_3^3)^{\text{э}}\right\}^{\text{T}};$$

$$\{\widehat{G}\}^{\text{р}} = \left\{(g_1^1)^{\text{р}}, (g_2^1)^{\text{р}}, (g_1^2)^{\text{р}}, (g_2^2)^{\text{р}}, (g_3^2)^{\text{р}}, (g_2^3)^{\text{р}}, (g_3^3)^{\text{р}}\right\}^{\text{T}}.$$

Перейдем к более простым обозначениям элементов введенных матриц-столбцов:

$$\{\widehat{G}\}^{\text{э}} = \left\{g_1^{\text{э}}, g_2^{\text{э}}, \ldots, g_L^{\text{э}}\right\}^{\text{T}};$$

$$\{\widehat{G}\}^{\text{р}} = \left\{g_1^{\text{р}}, g_2^{\text{р}}, \ldots, g_L^{\text{р}}\right\}^{\text{T}}.$$

Размерность матриц-столбцов L ($L \geqslant 4$) равна суммарному числу экспериментально определенных элементов в M структурах многослойных материалов.

С учетом (8.59) можно записать

$$\{\widehat{G}\}^{\text{р}} = [\widehat{A}]\{G^0\}, \tag{8.62}$$

где $[\widehat{A}]$ — матрица, составленная из отдельных строк матриц $[A^m]$ в соответствии с видом матрицы-столбца $\{\widehat{G}\}^{\text{р}}$. Размерность матрицы $\{\widehat{A}\}$ равна $L \times 4$.

Задача идентификации упругих характеристик монослоя может быть сформулирована следующим образом: определить значения элементов вектора $\{G^0\}$, обеспечивающие минимальные в определенном смысле расхождения между экспериментальными и теоретическими значениями жесткостных характеристик многослойных пакетов, т. е. обеспечивающие минимум некоторой функции:

$$\Phi\left(\{\widehat{G}\}^{\text{э}}, \{\widehat{G}\}^{\text{р}}\right), \tag{8.63}$$

удовлетворяющей условию

$$\lim \Phi = 0 \quad \text{при} \quad \left(\{\widehat{G}\}^{\text{э}} - \{\widehat{G}\}^{\text{р}}\right) \to 0. \tag{8.64}$$

Введем в рассмотрение следующие векторы:

$$\{V_{\text{I}}\} = \left\{g_1^{\text{э}} - g_1^{\text{р}}, g_2^{\text{э}} - g_2^{\text{р}}, \ldots, g_L^{\text{э}} - g_L^{\text{р}}\right\}^{\text{T}};$$

$$\{V_{\text{II}}\} = \left\{1 - \frac{g_1^{\text{р}}}{g_1^{\text{э}}}, 1 - \frac{g_2^{\text{р}}}{g_2^{\text{э}}}, \ldots, 1 - \frac{g_L^{\text{р}}}{g_L^{\text{э}}}\right\}^{\text{T}}, \tag{8.65}$$

позволяющие построить функции Φ, удовлетворяющие условию (8.64):

$$\Phi_{\text{I}} = \sum_{j=1}^{L} \left(g_j^{\text{э}} - g_j^{\text{р}}\right)^2 = \{V_{\text{I}}\}^{\text{T}}\{V_{\text{I}}\};$$

$$\Phi_{\text{II}} = \sum_{j=1}^{L} \left(1 - \frac{g_j^{\text{р}}}{g_j^{\text{э}}}\right)^2 = \{V_{\text{II}}\}^{\text{T}}\{V_{\text{II}}\}. \tag{8.66}$$

Функции Φ_{I} и Φ_{II} представляют собой квадраты эвклидовых норм векторов (8.65). Задачи идентификации применительно к функциям (8.66) сводятся к определению вектора $\{G^0\}$, обеспечивающего минимум эвклидовых норм векторов (8.65).

Уравнения Эйлера для этих задач имеют вид

$$\frac{\partial \Phi_{\text{I}}}{\partial \{G^0\}} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_{\text{II}}}{\partial \{G^0\}} = 0 \tag{8.67}$$

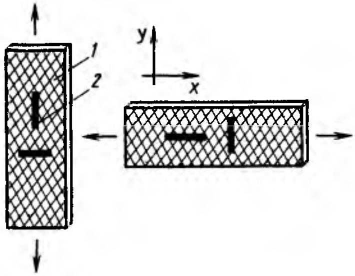


Рис. 8.6. Схема экспериментов для определения характеристик жесткости g_{xx}, g_{yy}, g_{xy} многослойных материалов:
1 — образец; *2* — датчик деформации

или в развернутой с учетом (8.62) форме

$$\{G^0\}_{\mathrm{I}} = ([\hat{A}]^{\mathrm{T}} [\hat{A}])^{-1} [\hat{A}]^{\mathrm{T}} \{\hat{G}\}^{э}; \tag{8.68}$$

$$\{G^0\}_{\mathrm{II}} = ([\tilde{A}]^{\mathrm{T}} [\tilde{A}])^{-1} [\tilde{A}]^{\mathrm{T}} \{E\}. \tag{8.69}$$

Здесь $\{E\}$ — единичный вектор, а компоненты $\tilde{a}_{ij}$ матрицы $[\tilde{A}]$ связаны с компонентами $\hat{a}_{ij}$ матрицы $[\hat{A}]$ следующим образом:

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{\hat{a}_{ij}}{g_j^{э}} \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ L). \tag{8.70}$$

Уравнения (8.68), (8.69) имеют смысл в случае, когда $([\hat{A}]^{\mathrm{T}}\ [\hat{A}])$ и $([\tilde{A}]^{\mathrm{T}}\ [\tilde{A}])$ — невырожденные матрицы.

Для сильно анизотропных волокнистых материалов, у которых $g_{11}^0 \gg g_{22}^0, g_{12}^0, g_{66}^0$, лучшие в смысле устойчивости решений результаты дает минимизация функции Φ_{II}, определяющей норму вектора относительных невязок базовых характеристик.

8.5. Коэффициенты жесткости (ГПа) многослойных структур из углепластика HTS/DX210

Тип структуры	g_{xx}	g_{yy}	g_{xy}
[±20°]	83,32	9,434	11,79
[±45°]	32,89	32,89	25,29
[0°/±45°]	56,62	24,47	17,62

Рассмотрим пример идентификации характеристик однонаправленного материала по результатам испытаний на одноосное растяжение многослойных материалов сложных структур: [±20°], [±45°], [0/±45°]. Каждую структуру испытывали на одноосное растяжение в главных направлениях ортотропии материала, при этом измерены деформации вдоль и поперек образца (рис. 8.6). В результате экспериментов для каждой структуры материала были определены следующие технические постоянные упругости:

$$E_x,\ E_y,\ \nu_{xy},\ \nu_{yx},$$

по которым можно найти коэффициенты матрицы жесткости многослойного материала:

$$g_{xx} = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}};\quad g_{yy} = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}};\quad g_{xy} = \frac{\nu_{yx}E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}}.$$

В табл. 8.5 такие данные представлены для многослойных углепластиков на основе однонаправленного углепластика HTS/DX210. Поскольку у материала со структурой армирования [±45°] число независимых компонент матрицы жесткости равно двум ($g_{yy} = g_{xx}$), общее число базовых характеристик L равно восьми, а размерность матриц $[\hat{A}]$ и $[\tilde{A}]$ есть 8×4. Матрицы $([\hat{A}]^{\mathrm{T}}\ [\hat{A}])$ и $([\tilde{A}]^{\mathrm{T}}\ [\tilde{A}])$ в рассматриваемом примере хорошо обусловлены. Решение уравнений (8.68) или (8.69) с учетом формул табл. 8.1 позволяет идентифицировать следующие значения технических констант однонаправленного углепластика HTS/DX210: E_1 = 103,4 ГПа, E_2 = 7,6 ГПа, G_{12} = 3,8 ГПа, ν_{12} = 0,3.

8.4. ИЗГИБ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТОВ

Будем считать, что слои многослойного материала идеально связаны между собой (взаимное проскальзывание ев отсутствует). Классическая теория пластин, основанная на гипотезах Кирхгофа—Лява, приводит к следующим формулам для деформаций пакета слоев:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^0 + z\varkappa_x;$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^0 + z\varkappa_y; \qquad (8.71)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}^0 + z\varkappa_{xy}$$

или в матричном виде

$$\{\varepsilon_{xy}\} = \{\varepsilon^0\} + z\{\varkappa\}.$$

Здесь z — расстояние от некоторой координатной плоскости, за которую может быть выбрана любая плоскость, параллельная границам слоев многослойного композита (рис. 8.7); $\{\varepsilon^0\}$ — вектор деформаций координатной плоскости, а $\{\varkappa\}$ — вектор изменений кривизн пластины.

8.4.1. Характеристики термоупругости при изгибе. Характеристиками напряженного состояния композита могут служить силы и моменты, действующие на единицу длины координатной плоскости. Определим их следующим образом:

$$N_x = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \sigma_x^{(k)} dz; \quad N_y = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \sigma_y^{(k)} dz; \quad N_{xy} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \tau_{xy}^{(k)} dz; \qquad (8.72)$$

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \sigma_x^{(k)} z\, dz; \quad M_y = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \sigma_y^{(k)} z\, dz; \quad M_{xy} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \tau_{xy}^{(k)} z\, dz. \qquad (8.73)$$

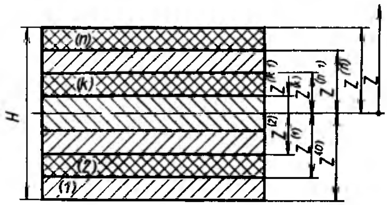


Рис. 8.7. Пакет слоев многослойного материала:
1, 2, ..., n — слои

Использование в (8.72) и (8.73) сумм интегралов позволяет учесть кусочно-линейный характер распределения напряжений по толщине пакета слоев. Выражение для напряжений в слое (8.13) с учетом формул (8.71) принимает вид

$$\{\sigma_{xy}\}^{(k)} = [\overline{G}_{xy}]^{(k)} (\{\varepsilon^0\} + z\{\varkappa\}) - \{\bar{\beta}_{xy}\}^{(k)} \Delta T^{(k)}. \qquad (8.74)$$

Здесь и далее считаем, что изменение температур слоев $\Delta T^{(k)}$ относительно невелико и не приводит к изменению жесткостей $[\overline{G}_{xy}]^{(k)}$ и коэффициентов $[\bar{\beta}_{xy}]^{(k)}$.

Подстановка (8.74) в (8.72),(8.73) дает

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\overline{G}_{xy}]^{(k)} dz \{\varepsilon^0\} + \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\overline{G}_{xy}]^{(k)} z dz \{\varkappa\} - \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \{\bar{\beta}_{xy}\}^{(k)} \Delta T^{(k)} dz; \qquad (8.75)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\overline{G}_{xy}]^{(k)} z dz \{\varepsilon^0\} + \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} [\overline{G}_{xy}]^{(k)} z^2 dz \{\varkappa\} - \sum_{k=1}^{n} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \{\bar{\beta}_{xy}\}^{(k)} \Delta T^{(k)} z dz, \qquad (8.76)$$

или

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & C_{16} & C_{26} & C_{66} \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \varkappa_x \\ \varkappa_y \\ \varkappa_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{16} \\ B_{21} \\ B_{22} \\ B_{26} \end{Bmatrix} \qquad (8.77)$$

и в компактной записи

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \varkappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix}.$$

Здесь

$$[A],\ [C],\ [D] = \sum_{k=1}^{n} \int_{z(k-1)}^{z(k)} [\overline{G}_{xy}]^{(k)} (1,\ z,\ z^2)\, dz; \qquad (8.78)$$

$$\{B_1\},\ \{B_2\} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z(k-1)}^{z(k)} \{\bar{\beta}_{xy}\}^{(k)} (1,\ z)\, dz. \qquad (8.79)$$

Смысл введенных температурных слагаемых $\{B_1\}$, $\{B_2\}$ ясен из формул (8.77), (8.79) — это силы и моменты, возникающие в многослойном материале при изменении его температуры и ограничении обобщенных деформаций $\{\varepsilon^0\} = \{0\}$, $\{\varkappa\} = \{0\}$.

При линейном распределении температуры по толщине пакета слоев ($\Delta T = \Delta T_0 + K_T z$) векторы обобщенных термических сил принимают вид

$$\{B_1\} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z(k-1)}^{z(k)} \{\bar{\beta}_{xy}\}^{(k)}\, dz \Delta T_0 + \sum_{k=1}^{n} \int_{z(k-1)}^{z(k)} \{\bar{\beta}_{xy}\}^{(k)}\, z dz k_T; \qquad (8.80)$$

$$\{B_2\} = \sum_{k=1}^{n} \int_{z(k-1)}^{z(k)} \{\bar{\beta}_{xy}\}^{(k)}\, z dz \Delta T_0 + \sum_{k=1}^{n} \int_{z(k-1)}^{z(k)} \{\bar{\beta}_{xy}\}^{(k)}\, z^2\, dz k_T.$$

Если коэффициенты матриц $[\overline{G}_{xy}]^{(k)}$ и температуры $\Delta T^{(k)}$ неизменны в каждом из слоев пакета, то, выполнив интегрирование в (8.78) и (8.79), получим

$$[A] = \sum_{k=1}^{n} [\overline{G}_{xy}]^{(k)} (z_{(k)} - z_{(k-1)});$$

$$[C] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} [\overline{G}_{xy}]^{(k)} \left(z_{(k)}^2 - z_{(k-1)}^2\right);$$

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} [\overline{G}_{xy}]^{(k)} \left(z_{(k)}^3 - z_{(k-1)}^3\right); \qquad (8.81)$$

$$\{B_1\} = \sum_{k=1}^{n} \{\bar{\beta}_{xy}\}^{(k)} \Delta T^{(k)} (z_{(k)} - z_{(k-1)});$$

$$\{B_2\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \{\bar{\beta}_{xy}\}^{(k)} \Delta T^{(k)} \times \left(z_{(k)}^2 - z_{(k-1)}^2\right).$$

Из первого уравнения систем (8.81) и (8.26) следует, что

$$[A] = H\ [G_{xy}].$$

8.4.2. Изгиб перекрестно-армированных материалов. Конкретный вид выражений (8.81) зависит от структуры пакета слоев многослойного композита и расположения координатной плоскости. Для ряда частных случаев соотношения (8.81) заметно упрощаются. Рассмотрим примеры, относящиеся к распространенному типу многослойных композитов — перекрестно-армированным материалам, образованным монослоями, ориентированными под углами $+\theta$ и $-\theta$. В качестве координатной поверхности во всех примерах выбрана срединная плоскость, т. е. плоскость, делящая толщину многослойного композита H на две равные части. Изменение температуры всех слоев одинаково: $\Delta T^{(k)} = \Delta T$. Толщины слоев в рассматриваемых примерах $h^{(k)} = H/n$.

Симметричная структура слоев с нечетным общим числом слоев n. Схема такого материала представлена на рис. 8.8, *а*. Здесь светлые срезы волокон соответствуют слоям с ориентацией волокон $+\theta$, а зачерненные $-\theta$. Для рассматриваемого случая формулы (8.81) принимают вид

$$(A_{11},\ A_{12},\ A_{22},\ A_{66}) = (\bar{G}_{xx},\ \bar{G}_{xy},\ \bar{G}_{yy},\ \bar{G}_{ss})\, H;$$
$$(A_{16},\ A_{26}) = (\bar{G}_{xs},\ \bar{G}_{ys})\, H/n;$$
$$C_{ij} = 0 \quad (ij = 1,\ 2,\ 6);$$
$$(D_{11},\ D_{12},\ D_{22},\ D_{66}) = (\bar{G}_{xx},\ \bar{G}_{xy},\ \bar{G}_{yy},\ \bar{G}_{ss})\, H^3/12;$$
$$(D_{16},\ D_{26}) = (\bar{G}_{xs},\ \bar{G}_{ys})\, \frac{3n^2-2}{n^3}\frac{H^3}{12}; \tag{8.82}$$
$$(B_{11},\ B_{12}) = (\bar{\beta}_x,\ \bar{\beta}_y)\, H\Delta T;$$
$$B_{16} = \bar{\beta}_{xy}\Delta T H/n; \quad B_{2i} = 0 \ (i = 1,\ 2,\ 6).$$

Компоненты A_{16}, A_{26}, D_{16}, D_{26}, B_{16} имеют знак угла армирования θ внешних слоев пакета.

Симметричная структура пакета слоев с четным общим числом слоев n ($n = 4$, 8, ...). Схема такого материала представлена на рис. 8.8, *б*. Формулы (8.81) для этого случая принимают вид

$$(A_{11},\ A_{12},\ A_{22},\ A_{66}) = (\bar{G}_{xx},\ \bar{G}_{xy},\ \bar{G}_{yy},\ \bar{G}_{ss})\, H;$$
$$A_{16} = A_{26} = 0;$$
$$C_{ij} = 0 \quad (i,\ j = 1,\ 2,\ 6);$$

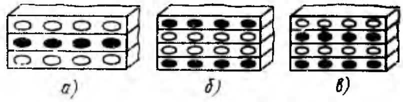


Рис. 8.8. Пакеты слоев перекрестно-армированного материала:

а и *б* — с симметричной относительно срединной плоскости структурой; *в* — с антисимметричной структурой

$$(D_{11},\ D_{12},\ D_{66}) = (\bar{G}_{xx},\ \bar{G}_{xy},\ \bar{G}_{yy},\ \bar{G}_{ss})\, H^3/12;$$
$$(D_{16},\ D_{26}) = (\bar{G}_{xs},\ \bar{G}_{ys})\, H^3/4n; \tag{8.83}$$
$$(B_{11},\ B_{12}) = (\bar{\beta}_x,\ \bar{\beta}_y)\, H\Delta T;$$
$$B_{16} = 0; \ B_{2i} = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ 6).$$

Компоненты D_{16}, D_{26} имеют знак угла армирования внешних слоев пакета. Равенство нулю компонент матриц $[C]$, $\{B_2\}$ характерно не только для рассмотренных примеров, но и для симметричных структур пакета слоев общего вида.

Антисимметричная структура пакета слоев с четным общим числом слоев n. Схема материала представлена на рис. 8.8, *в*. Формулы (8.81) для этого случая принимают вид

$$(A_{11},\ A_{12},\ A_{22},\ A_{66}) = (\bar{G}_{xx},\ \bar{G}_{xy},\ \bar{G}_{yy},\ \bar{G}_{ss})\, H;$$
$$A_{16} = A_{26} = 0;$$
$$C_{11} = C_{12} = C_{22} = C_{66} = 0;$$
$$(C_{16},\ C_{26}) = (\bar{G}_{xs},\ \bar{G}_{ys})\, H^2/2n; \tag{8.84}$$
$$(D_{11},\ D_{12},\ D_{22},\ D_{66}) = (\bar{G}_{xx},\ \bar{G}_{xy},\ \bar{G}_{yy},\ \bar{G}_{ss})\, H^3/12;$$
$$D_{16} = D_{26} = 0;$$
$$(B_{11},\ B_{12}) = (\bar{\beta}_x,\ \bar{\beta}_y)\, H\Delta T; \quad B_{16} = 0;$$
$$B_{21} = B_{22} = 0; \ B_{26} = \bar{\beta}_{xy}\Delta T H^2/2n.$$

Компоненты C_{16}, C_{26}, B_{26} имеют знак угла армирования внешнего слоя при положительном z.

Особенность рассмотренных примеров заключается в том, что компоненты с индексами 16, 26, не равные нулю уменьшаются при увеличении числа слоев n. Поэтому «дробление» общей толщины (увеличение n) перекрестно-армированных композитов позволяет «улучшить» структуру матриц $[A]$, $[C]$, $[D]$, $\{B_1\}$, $\{B_2\}$, уменьшая величину коэффициентов, ответственных за взаимосвязь параметров напряженно-деформированного состояния.

8.4.3. Обратные соотношения. Соотношения (8.77) могут быть обращены. При частичном обращении имеем

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ M+B_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & C_1' \\ C_2' & D' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N+B_1 \\ \varkappa \end{Bmatrix} \tag{8.85}$$

или

$$\begin{Bmatrix} N+B_1 \\ \varkappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A'' & C_1'' \\ C_2'' & D'' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ M+B_2 \end{Bmatrix}, \tag{8.86}$$

где

$$[A'] = [A]^{-1};\ [C_1'] = -[A]^{-1}[C];$$
$$[C_2'] = [C][A]^{-1};\ [D'] = [D] -$$
$$-[C][A]^{-1}[C];$$
$$[A''] = [A] - [C][D]^{-1}[C];\ [C_1''] =$$
$$= [C][D]^{-1};\ [C_2''] = -[D]^{-1}[C];$$
$$[D''] = [D]^{-1}.$$

При полном обращении (8.77) получим

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \varkappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & C^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N+B_1 \\ M+B_2 \end{Bmatrix}, \tag{8.87}$$

где

$$[A^*] = [K]^{-1};\ [C^*] =$$
$$= -[K]^{-1}[C][D]^{-1};$$
$$[D^*] = [D]^{-1} +$$
$$+ [D]^{-1}[C][K]^{-1}[C][D]^{-1};$$
$$[K] = [A] - [C][D]^{-1}[C].$$

Если имеет место только термическое воздействие, соотношения (8.77) определяют вызванные им обобщенные температурные (остаточные) деформации

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \varkappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^* & C^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix}. \tag{8.87a}$$

Для материалов с симметричной структурой пакета при выборе в качестве координатной срединной плоскости пакета формулы (8.87) значительно упрощаются:

$$[A^*] = [A]^{-1};\ [C^*] =$$
$$= [0];\ [D^*] = [D]^{-1}.$$

8.5. ДИССИПАТИВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТОВ

При циклическом нагружении реальных материалов уже при малых амплитудах деформации наблюдается рассеяние (диссипация) энергии вследствие внутренних процессов различной физической природы. Это явление в области амплитуд, не превышающих предел упругости материала, обычно называют внутренним трением или несовершенной упругостью [13, 14].

Широкое распространение получил приближенный энергетический метод учета внутреннего трения при колебаниях механических систем, который предполагает введение некоторой функции диссипации энергии за цикл нагружения при сохранении линейно упругой связи между напряжениями и деформациями. Поэтому наряду с упругими константами рассматриваются как независимые диссипативные параметры материала (логарифмические декременты колебаний или коэффициенты рассеяния). Для изотропных тел [11] потери энергии ΔW в единице объема тела за цикл нагружения определяются с помощью двух коэффициентов ψ', ψ'', амплитудных значений энергии формоизменения W' и энергии изменения объема W'' [11]:

$$\Delta W = \psi' W' + \psi'' W''. \tag{8.88}$$

8.5.1. Диссипативные характеристики однонаправленного композита. При определении потерь энергии за симметричный цикл гармонического нагружения однонаправленного композита примем следующие допущения:

материалы матрицы (связующего) и волокна линейно упругие, изотропные и однородные;

связь волокон и связующего идеальна, и потери энергии в единице объема композита ΔW равны сумме потерь энергии в армирующем волокне $\Delta W_{\text{а}}$ и в связующем $\Delta W_{\text{с}}$ с учетом их объемного содержания:

$$\Delta W = \mu \Delta W_{\text{а}} + (1-\mu)\,\Delta W_{\text{с}}; \qquad (8.89)$$

удельные потери энергии в составляющих композита равны сумме потерь энергии за счет сдвиговой и объемной деформации:

$$\Delta W_{\text{а}} = \Delta W'_{\text{а}} + \Delta W''_{\text{а}},\ \Delta W_{\text{с}} = \Delta W'_{\text{с}} + \Delta W''_{\text{с}} \qquad (8.90)$$

(индекс — штрих относится к энергии формоизменения, индекс — два штриха — к энергии изменения объема);

удельные потери энергии за цикл нагружения в компонентах композита пропорциональны амплитудным значениям энергии изменения формы и объема:

$$\begin{aligned} &\Delta W'_{\text{а}} = \psi'_{\text{а}} W'_{\text{а}}; \quad \Delta W''_{\text{а}} = \psi''_{\text{а}} W''_{\text{а}};\\ &\Delta W'_{\text{с}} = \psi'_{\text{с}} W'_{\text{с}}; \quad \Delta W''_{\text{с}} = \psi''_{\text{с}} W''_{\text{с}}; \end{aligned} \qquad (8.91)$$

коэффициенты диссипации $\psi'_{\text{а}}$, $\psi''_{\text{а}}$, $\psi'_{\text{с}}$, $\psi''_{\text{с}}$ составляющих композита не зависят от амплитуды напряжений, но, в общем случае, могут быть функциями частоты нагружения и температуры.

Если принять простейшие гипотезы Фойхта об однородности поля перемещений для продольного направления в однонаправленном композите и Рейсса об однородности поля обобщенных сил для сдвиговых напряжений и напряжений, нормальных к волокнам, то выражения для напряжений в компонентах при плоском напряженном состоянии примут вид [1]

$$\sigma_1^{\text{а}} = \frac{E_{\text{а}}}{E_1}\sigma_1 + (\mu - 1) \times \frac{\nu_{\text{с}} E_{\text{а}} - \nu_{\text{а}} E_{\text{с}}}{E_1}\sigma_2;$$

$$\sigma_1^{\text{с}} = \frac{E_{\text{с}}}{E_1}\sigma_1 + \mu\frac{\nu_{\text{с}} E_{\text{а}} - \nu_{\text{а}} E_{\text{с}}}{E_1}\sigma_2; \qquad (8.92)$$

$$\sigma_2^{\text{а}} = \sigma_2^{\text{с}} = \sigma_2;\quad \tau_{12}^{\text{а}} = \tau_{12}^{\text{с}} = \tau_{12}.$$

Удельные потери энергии в компонентах композита определяются следующей формулой:

$$\Delta W_{\text{к}} = \frac{1}{2E_{\text{к}}}\Big[\frac{2}{3}\psi'_{\text{к}}(1+\nu_{\text{к}}) \times \left(\sigma_1^{\text{к}2} + \sigma_2^{\text{к}2} - \sigma_1^{\text{к}}\sigma_2^{\text{к}} + 3\tau_{12}^{\text{к}2}\right) + \frac{\psi''_{\text{к}}}{3}(1-2\nu_{\text{к}})\left(\sigma_1^{\text{к}2} + \sigma_2^{\text{к}2} + 2\sigma_1^{\text{к}}\sigma_2^{\text{к}}\right)\Big]. \qquad (8.93)$$

В этом случае к = а, с. Формула удельной энергии диссипации однонаправленного композита за цикл нагружения принимает вид

$$\Delta W = \frac{1}{2}\left(A\sigma_1^2 + B\sigma_2^2 + C\tau_{12}^2 + D\sigma_1\sigma_2\right), \qquad (8.94)$$

где

$$A = \frac{1}{3E_1^2}\{\mu E_{\text{а}}[2\psi'_{\text{а}}(1+\nu_{\text{а}}) + \psi''_{\text{а}}(1-2\nu_{\text{а}})] + (1-\mu)E_{\text{с}} \times [2\psi'_{\text{с}}(1+\nu_{\text{с}}) + \psi''_{\text{с}}(1-2\nu_{\text{с}})]\};$$

$$B = \frac{1}{3}\Big\{\frac{\mu}{E_{\text{а}}}[2\psi'_{\text{а}}(1+\nu_{\text{а}}) + \psi''_{\text{а}}(1-2\nu_{\text{а}})] + \frac{(1-\mu)}{E_{\text{с}}} \times [2\psi'_{\text{с}}(1+\nu_{\text{с}}) + \psi''_{\text{с}}(1-2\nu_{\text{с}})] + \frac{2(\nu_{\text{с}}E_{\text{а}} - \nu_{\text{а}}E_{\text{с}})(1-\mu)}{E_1} \times \left(\frac{\psi'_{\text{а}} - \psi''_{\text{а}}}{E_{\text{а}}} - \frac{\psi'_{\text{с}} - \psi''_{\text{с}}}{E_{\text{с}}}\right)\Big\};$$

$$C = 2\left[\frac{\psi'_{\text{а}}(1+\nu_{\text{а}})\mu}{E_{\text{а}}} + \frac{\psi'_{\text{с}}(1+\nu_{\text{с}})(1-\mu)}{E_{\text{с}}}\right];$$

$$D = \frac{2}{3E_1}\Big\{\frac{\mu(1-\mu)(\nu_{\text{с}}E_{\text{а}} - \nu_{\text{а}}E_{\text{с}})}{E_1} \times (2\psi'_{\text{с}} + \psi''_{\text{с}} - 2\psi'_{\text{а}} - \psi''_{\text{а}}) + \mu[\psi''_{\text{а}}(1-2\nu_{\text{а}}) - \psi'_{\text{а}}(1+\nu_{\text{а}})] + (1-\mu)[\psi''_{\text{с}}(1-2\nu_{\text{с}}) - \psi'_{\text{с}}(1+\nu_{\text{с}})]\Big\}.$$

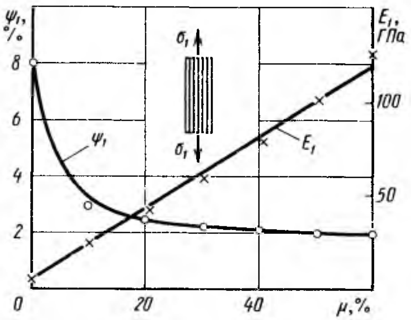


Рис. 8.9. Зависимости коэффициента диссипации ψ_1 и модуля упругости E_1 при одноосном нагружении вдоль волокон от относительно объемного содержания волокон:

——— — расчетные результаты, ○, × — экспериментальные [22]

В (8.93) отброшены члены, имеющие порядок квадрата коэффициентов Пуассона в сравнении с единицей. Напряжение в формулах (8.93), (8.94) есть амплитудные значения напряжений за цикл гармонического нагружения композита.

Соотношение (8.94) следует рассматривать как ориентировочное, так как потери энергии в реальных композитах могут быть связаны не только с поглощением энергии волокном и матрицей, но и с процессами, происходящими на границе волокно—матрица (образование промежуточных химических соединений, наличие трещин, «непроклеев» и других дефектов, влияние которых трудно поддается априорной оценке).

В матричном виде (8.94) запишем следующим образом:

$$\Delta W = \frac{1}{2}\{\sigma_{12}\}^{\mathrm{T}}[\psi^0]\{\sigma_{12}\}, \qquad (8.95)$$

где

$$[\psi^0] = \begin{bmatrix} A & D/2 & 0 \\ D/2 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}.$$

Если коэффициенты диссипации энергии вследствие изменения формы и объема совпадают $\psi_к = \psi'_к = \psi''_к$, то общие удельные потери энергии ΔW в материале пропорциональны амплитуде полной упругой энергии W:

$$\Delta W_к = \psi_к W_к.$$

В этом случае в формулах (8.94) можно выявить соотношение, уменьшающее число независимых констант, характеризующих рассеяние энергии в однонаправленном композите, до трех:

$$D = -2\nu_{12}A. \qquad (8.96)$$

Определить три независимые константы A, B и C, характеризующие диссипацию энергии в однонаправленном композите, на практике можно по результатам опытов на одноосное циклическое нагружение вдоль и поперек волокон и на чистый сдвиг в плоскости (*1*, *2*) (см. рис. 8.1). Из опытов могут быть найдены [7] соответствующие коэффициенты диссипации ψ_1, ψ_2, ψ_6 — технические постоянные диссипативных свойств материала.

На рис. 8.9 представлены графические зависимости коэффициента диссипации ψ_1 и модуля упругости E_1 однонаправленного углепластика при одноосном гармоническом нагружении вдоль волокон от относительного объемного содержания волокон μ. В расчете приняты следующие значения характеристик: $E_а = 194$ ГПа, $\nu_а = 0{,}3$, $\psi_а = 1{,}8\,\%$, $E_с = 6$ ГПа, $\nu_с = 0{,}3$, $\psi_с = 8{,}0\%$.

В формулах (8.94), (8.95) коэффициенты

$$A = \frac{\psi_1}{E_1}, \quad B = \frac{\psi_2}{E_2}; \quad C = \frac{\psi_6}{G_{12}}.$$

Формула (8.95) может быть переписана в виде

$$\Delta W = \{\sigma_{12}\}^{\mathrm{T}}[\psi^0]\{\sigma_{12}\} =$$

$$= \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \frac{\psi_1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}\psi_1}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}\psi_1}{E_1} & \frac{\psi_2}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\psi_6}{G_{12}} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix}. \qquad (8.97)$$

Поскольку компоненты матрицы $[\psi]$ в (8.97) определяются через упругие и диссипативные характеристики композита, будем называть $[\psi]$ матрицей упругодиссипативных характеристик (УДХ) по напряжениям. Используя формулы (8.1), (8.2), запишем (8.97) через деформации и в смешанной форме:

$$\Delta W = \frac{1}{2}\{\varepsilon_{12}\}^{\mathrm{T}}[\varphi^0]\{\varepsilon_{12}\};$$
$$\Delta W = \frac{1}{2}\{\varepsilon_{12}\}^{\mathrm{T}}[\chi^0]\{\sigma_{12}\}. \qquad (8.98)$$

Здесь

$$[\varphi^0] = [G^0][\psi^0][G^0] = [\chi^0][G^0];$$
$$[\chi^0] = [G^0][\psi^0] = [\varphi^0][S^0]. \qquad (8.99)$$

В свою очередь, $[\psi^0] = [S^0][\chi^0] = [S^0][\varphi^0][S^0]$. (8.100).

Матрицы $[\psi^0]$ и $[\varphi^0]$ являются симметричными, а смешанная матрица $[\chi^0]$ несимметрична ($\chi^0_{12} \neq \chi^0_{21}$):

$$[\varphi^0] = \begin{bmatrix} \varphi^0_{11} & \varphi^0_{12} & 0 \\ \varphi^0_{12} & \varphi^0_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varphi^0_{66} \end{bmatrix};$$

$$[\psi^0] = \begin{bmatrix} \psi^0_{11} & \psi^0_{12} & 0 \\ \psi^0_{12} & \psi^0_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \psi^0_{66} \end{bmatrix};$$

$$[\chi^0] = \begin{bmatrix} \chi^0_{11} & \chi^0_{12} & 0 \\ \chi^0_{21} & \chi^0_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \chi^0_{66} \end{bmatrix}.$$

Формулы (8.97)—(8.100) справедливы, конечно, не только для однонаправленных композитов, но и для любого трансверсально изотропного (или ортотропного) монослоя при плоском напряженном состоянии.

Рассмотрим преобразование матриц упругодиссипативных характеристик (УДХ) монослоя (8.99), (8.100) при переходе от «естественной» системы координат (*1*, *2*) (см. рис. 8.1) к некоторой произвольно ориентированной системе координат (x, y) (см. рис. 8.2), повернутой вокруг оси *3* на угол θ. Для определения матриц УДХ монослоя в системе координат (xy) $[\bar{\psi}_{xy}]$, $[\bar{\varphi}_{xy}]$, $[\bar{\chi}_{xy}]$ достаточно заменить напряжения и деформации в формулах (8.97), (8.98) их выражениями по формулам (8.5), (8.6):

$$\{\sigma_{xy}\} = [T_1]\{\sigma_{12}\};$$
$$\{\varepsilon_{xy}\} = [T_2]\{\varepsilon_{12}\}.$$

В результате имеем

$$[\bar{\psi}_{xy}] = [T_2][\psi^0][T_2]^{\mathrm{T}};$$
$$[\bar{\varphi}_{xy}] = [T_1][\varphi^0][T_1]^{\mathrm{T}}; \qquad (8.101)$$
$$[\bar{\chi}_{xy}] = [T_1][\chi^0][T_2]^{\mathrm{T}};$$

$$[\bar{\psi}_{xy}] = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_{xx} & \bar{\psi}_{xy} & \bar{\psi}_{xs} \\ \bar{\psi}_{xy} & \bar{\psi}_{yy} & \bar{\psi}_{ys} \\ \bar{\psi}_{xs} & \bar{\psi}_{ys} & \bar{\psi}_{ss} \end{bmatrix};$$

$$[\bar{\varphi}_{xy}] = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_{xx} & \bar{\varphi}_{xy} & \bar{\varphi}_{xs} \\ \bar{\varphi}_{xy} & \bar{\varphi}_{yy} & \bar{\varphi}_{ys} \\ \bar{\varphi}_{xs} & \bar{\varphi}_{ys} & \bar{\varphi}_{ss} \end{bmatrix};$$

$$[\bar{\chi}_{xy}] = \begin{bmatrix} \bar{\chi}_{xx} & \bar{\chi}_{xy} & \bar{\chi}_{xs} \\ \bar{\chi}_{yx} & \bar{\chi}_{yy} & \bar{\chi}_{ys} \\ \bar{\chi}_{sx} & \bar{\chi}_{sy} & \bar{\chi}_{ss} \end{bmatrix}.$$

Выражения для компонент матриц $[\bar{\psi}_{xy}]$, $[\bar{\varphi}_{xy}]$, $[\bar{\chi}_{xy}]$, полученные после выполнения операций умножения в (8.101), приведены в табл. 8.6.

Коэффициенты диссипации (технические постоянные диссипации) определяются отношением потерь энергии за цикл нагружения (8.97), (8.98) к амплитуде упругой энергии в цикле нагружения:

$$W = \frac{1}{2}\{\sigma_{xy}\}^{\mathrm{T}}[\bar{S}_{xy}]\{\sigma_{xy}\} =$$
$$= \frac{1}{2}\{\varepsilon_{xy}\}^{\mathrm{T}}[\bar{G}_{xy}]\{\varepsilon_{xy}\} =$$
$$= \frac{1}{2}\{\varepsilon_{xy}\}^{\mathrm{T}}\{\sigma_{xy}\}. \qquad (8.102)$$

Обозначим коэффициенты диссипации (технические постоянные) при одноосном циклическом нагружении материала вдоль осей x, y соответственно ψ_x, ψ_y и при чистом сдвиге в осях (x, y) через ψ_s. Тогда из (8.97), (8.101), (8.102) следует

$$\psi_x = \frac{\bar{\psi}_{xx}}{\bar{S}_{xx}}; \quad \psi_y = \frac{\bar{\psi}_{yy}}{\bar{S}_{yy}}; \quad \psi_s = \frac{\bar{\psi}_{ss}}{\bar{S}_{ss}}. \qquad (8.103)$$

8.6. Расчетные зависимости для преобразования компонент матриц упругодиссипативных характеристик монослоя при повороте естественной системы координат на угол θ

Компонента матрицы	Формулы преобразования
$\bar{\psi}_{xx}$	$c^4\psi_{11}^0 + s^4\psi_{22}^0 + (2\psi_{12}^0 + \psi_{66}^0)\, s^2c^2$
$\bar{\psi}_{xy}$	$(\psi_{11}^0 + \psi_{22}^0 - \psi_{66}^0)\, s^2c^2 + (s^4 + c^4)\,\psi_{12}^0$
$\bar{\psi}_{xs}$	$[2c^2\psi_{11}^0 - 2s^2\psi_{22}^0 + (2\psi_{12}^0 + \psi_{66}^0)(s^2 - c^2)]\, sc$
$\bar{\psi}_{yy}$	$s^4\psi_{11}^0 + c^4\psi_{22}^0 + (2\psi_{12}^0 + \psi_{66}^0)\, s^2c^2$
$\bar{\psi}_{ys}$	$[2s^2\psi_{11}^0 - 2c^2\psi_{22}^0 - (2\psi_{12}^0 + \psi_{66}^0)(s^2 - c^2)]\, sc$
$\bar{\psi}_{ss}$	$(4\psi_{11}^0 - 8\psi_{12}^0 + 4\psi_{22}^0)\, s^2c^2 + (s^2 - c^2)^2\,\psi_{66}^0$
$\bar{\varphi}_{xx}$	$c^4\varphi_{11}^0 + s^4\varphi_{22}^0 + 2\,(\varphi_{12}^0 + 2\varphi_{66}^0)\, s^2c^2$
$\bar{\varphi}_{xy}$	$(\varphi_{11}^0 + \varphi_{22}^0 - 4\varphi_{66}^0)\, s^2c^2 + (s^4 + c^4)\,\varphi_{12}^0$
$\bar{\varphi}_{xs}$	$[c^2\varphi_{11}^0 - s^2\varphi_{22}^0 + (\varphi_{12}^0 + 2\varphi_{66}^0)(s^2 - c^2)]\, sc$
$\bar{\varphi}_{yy}$	$s^4\varphi_{11}^0 + c^4\varphi_{22}^0 + 2\,(\varphi_{12}^0 + 2\varphi_{66}^0)\, s^2c^2$
$\bar{\varphi}_{ys}$	$[s^2\varphi_{11}^0 - c^2\varphi_{22}^0 - (\varphi_{12}^0 + 2\varphi_{66}^0)(s^2 - c^2)]\, sc$
$\bar{\varphi}_{ss}$	$(\varphi_{11}^0 - 2\varphi_{12}^0 + \varphi_{22}^0)\, s^2c^2 + (s^2 - c^2)^2\,\varphi_{66}^0$
$\bar{\chi}_{xx}$	$c^4\chi_{11}^0 + s^4\chi_{22}^0 + (\chi_{12}^0 + \psi_{21}^0 + 2\chi_{66}^0)\, s^2c^2$
$\bar{\chi}_{xy}$	$(\chi_{11}^0 + \chi_{22}^0 - 2\chi_{66}^0)\, s^2c^2 + c^4\chi_{12}^0 + s^4\chi_{21}^0$
$\bar{\chi}_{xs}$	$[c^2(\chi_{11}^0 - \chi_{12}^0 - \chi_{66}^0) - s^2(\chi_{22}^0 - \chi_{21}^0 - \chi_{66}^0)]\, 2sc$
$\bar{\chi}_{yx}$	$(\chi_{11}^0 + \chi_{22}^0 - 2\chi_{66}^0)\, s^2c^2 + s^4\chi_{12}^0 + c^4\chi_{21}^0$
$\bar{\chi}_{yy}$	$s^4\chi_{11}^0 + c^4\chi_{22}^0 + (\chi_{12}^0 + \chi_{21}^0 + 2\chi_{66}^0)\, s^2c^2$
$\bar{\chi}_{ys}$	$[s^2(\chi_{11}^0 - \chi_{12}^0 - \chi_{66}^0) - c^2(\chi_{22}^0 - \chi_{21}^0 - \chi_{66}^0)]\, 2sc$
$\bar{\chi}_{sx}$	$[c^2(\chi_{11}^0 - \chi_{21}^0 - \chi_{66}^0) - s^2(\chi_{22}^0 - \chi_{12}^0 - \chi_{66}^0)]\, sc$
$\bar{\chi}_{sy}$	$[s^2(\chi_{11}^0 - \chi_{21}^0 - \chi_{66}^0) - c^2(\chi_{22}^2 - \chi_{12}^0 - \chi_{66}^0)]\, sc$
$\bar{\chi}_{ss}$	$(\chi_{11}^0 + \chi_{22}^0 - \chi_{12}^0 - \chi_{21}^0)\, 2s^2c^2 + (c^2 - s^2)^2\,\chi_{66}^0$

Примечание. Принятые обозначения: $s = \sin\theta$, $c = \cos\theta$.

В (8.103) компоненты матриц упругодиссипативных характеристик по напряжениям $\bar{\psi}_{xx}$, $\bar{\psi}_{yy}$, $\bar{\psi}_{ss}$ и компоненты матрицы податливости $\bar{S}_{xx}$, $\bar{S}_{yy}$, $\bar{S}_{ss}$ связаны с компонентами в главных осях *1*, *2* монослоя формулами, приведенными в табл. 8.6 и 8.2.

Формулы (8.103) через технические упругие и диссипативные постоянные монослоя можно записать следующим образом:

$$\psi_x = \frac{\dfrac{\psi_1}{E_1}c^4 + \dfrac{\psi_2}{E_2}s^4 + \left(\dfrac{\psi_6}{G_{12}} - 2\nu_{12}\dfrac{\psi_1}{E_1}\right)s^2c^2}{\dfrac{c^4}{E_1} + \dfrac{s^4}{E^2} + \left(\dfrac{1}{G_{12}} - \dfrac{2\nu_{12}}{E_1}\right)s^2c^2}; \quad (8.104)$$

$$\psi_s = \frac{4\left[\dfrac{\psi_1(1+2\nu_{12})}{E_1} + \dfrac{\psi_2}{E_2}\right] \times s^2c^2 + \dfrac{\psi_6}{G_{12}}(s^2-c^2)^2}{4\left[\dfrac{1+2\nu_{12}}{E_1} + \dfrac{1}{E_2}\right]s^2c^2 + \dfrac{(s^2-c^2)^2}{G_{12}}}. \quad (8.105)$$

Формула для ψ_y определяется соотношением (8.104) при замене угла θ на угол $(\pi/2 - \theta)$.

На рис. 8.10 представлены диаграммы зависимости (8.104) коэффициента диссипации ψ_x от угла θ ориентации волокон относительно направления нагружения для однонаправленного углепластика HMS/DX210. Исходные данные для расчета представлены в табл. 8.7. Экспериментальные результаты заимствованы из работы [21].

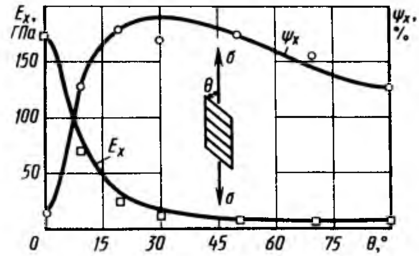


Рис. 8.10. Зависимости коэффициента диссипации ψ_x и модуля упругости E_x при одноосном циклическом нагружении однонаправленного углепластика HMS/DX210 от угла ориентации волокон θ:

○, □ — экспериментальные результаты; ——— — расчетные

8.5.2 Упругодиссипативные характеристики многослойного материала при плоском напряженном состоянии. Определим упругодиссипативные характеристики многослойного материала (см. рис. 8.3) при плоском напряженном состоянии. Будем считать, что слои деформируются одинаково [см. (8.23)], а средние для пакета слоев напряжения определены формулами (8.22). При идеальной взаимосвязи слоев потери энергии в многослойном композите при циклическом нагружении равны сумме потерь энергии в монослоях. Потери за цикл нагружения в k-м слое определяются с помощью матрицы УДХ по деформациям $[\bar{\varphi}_{xy}]^{(k)}$ через амплитудные значения компонент вектора деформации, или с помощью матрицы УДХ монослоя по напряжениям $[\bar{\psi}_{xy}]^{(k)}$ через амплитудные значения напряжений,

8.7. Упругие и диссипативные характеристики зарубежных однонаправленных композитов

Композиты	E_1	E_2	G_{12}	ν_{12}	ψ_1	ψ_2	ψ_6
	ГПа				%		
Углепластик:							
HMS/DX209	188,8	6,0	2,7	0,3	0,67	6,9	10
HTS/DX210	103,4	7,6	3,8	0,3	0,49	5,5	6,7
HMS/DX210	172,7	7,2	3,8	0,29	0,45	4,2	7,1
Стеклопластик GLASS/DX210	37,8	10,1	4,9	0,29	0,87	6,1	6,9

или с помощью смещенной матрицы $[\bar{\chi}_{xy}]^{(k)}$ [см. (8.101)]. Соответственно и потери энергии в многослойном параллелепипеде из композита (см. рис. 8.3) единичной длины и ширины, отнесенные к толщине пакета H, могут быть представлены в трех формах:

$$\Delta W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\varepsilon_{xy}^{(k)}\right\}^{\mathrm{T}}[\bar{\varphi}_{xy}]^{(k)} \times \\ \times \left\{\varepsilon_{xy}^{(k)}\right\}\bar{h}^{(k)};$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\varepsilon_{xy}^{(k)}\right\}^{\mathrm{T}}[\bar{\chi}_{xy}]^{(k)} \times \\ \times \left\{\sigma_{xy}^{(k)}\right\}\bar{h}^{(k)}; \qquad (8.106)$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sigma_{xy}^{(k)}\right\}^{\mathrm{T}}[\bar{\psi}_{xy}]^{(k)}\left\{\sigma_{xy}^{(k)}\right\}.$$

Под напряжениями или деформациями в (8.106) понимаются их амплитудные значения в гармоническом цикле нагружения.

Потери энергии в многослойном композите могут быть определены с помощью матриц УДХ относительно средних напряжений $\{\sigma_{xy}\}$ и деформаций $\{\varepsilon_{xy}\}$:

$$\Delta W = \frac{1}{2}\{\varepsilon_{xy}\}^{\mathrm{T}}[\varphi_{xy}]\{\varepsilon_{xy}\};$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}\{\varepsilon_{xy}\}^{\mathrm{T}}[\chi_{xy}]\{\sigma_{xy}\}; \qquad (8.107)$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}\{\sigma_{xy}\}^{\mathrm{T}}[\psi_{xy}]\{\sigma_{xy}\}.$$

Связь между матрицами УДХ по средним напряжениям и деформациями в (8.107) с матрицами УДХ монослоев устанавливается соотношениями

$$[\varphi_{xy}] = \sum_{k=1}^{n}[\bar{\varphi}_{xy}]^{(k)}\bar{h}^{(k)};$$

$$[\chi_{xy}] = \left(\sum_{k=1}^{n}[\bar{\chi}_{xy}]^{(k)}\,\overline{[G_{xy}]}^{(k)}\bar{h}^{(k)}\right)\times \\ \times [S_{xy}]; \qquad (8.108)$$

$$[\psi_{xy}] = [S_{xy}]\left(\sum_{k=1}^{n}[\bar{G}_{xy}]^{(k)}[\bar{\psi}_{xy}]^{(k)} \times \right. \\ \left. \times [\bar{G}_{xy}]^{(k)}\bar{h}^{(k)}\right)[S_{xy}],$$

где матрицы жесткости $[G_{xy}]$ и податливости $[S_{xy}] = [G_{xy}]^{-1}$ пакета слоев определены формулами (8.26), (8.29). Для частных случаев структуры пакета слоев многослойного композита формулы (8.108) могут быть заметно упрощены. Так для перекрестно-армированного материала матрица УДХ по напряжениям может быть представлена в виде

$$[\psi_{xy}] = [\psi_{xy}^{0}] + [S_{xy}][P_{xy}][S_{xy}], \qquad (8.109)$$

где $[\psi_{xy}^{0}]$ — неполная упругодиссипативная матрица монослоя в системе координат (x, y), а $[P_{xy}]$ — вспомогательная матрица:

$$[\psi_{xy}^{0}] = \begin{bmatrix} \bar{\psi}_{xx} & \bar{\psi}_{xy} & 0 \\ \bar{\psi}_{xy} & \bar{\psi}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\psi}_{ss} \end{bmatrix}, \quad [P_{xy}] = \\ = \begin{bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & 0 \\ p_{xy} & p_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & p_{ss} \end{bmatrix}.$$

Матрица $[\psi_{xy}^{0}]$ равна матрице $[\bar{\psi}_{xy}]$ [см. (8.101)] при $\bar{\psi}_{xs} = \bar{\psi}_{ys} = 0$, а компоненты матрицы $[P_{xy}]$ выражаются формулами

$$p_{xx} = \bar{g}_{xs}(2\bar{\psi}_{xs}\bar{g}_{xx} + 2\bar{\psi}_{ys}\bar{g}_{xy} + \\ + \bar{\psi}_{ss}\bar{g}_{xs});$$

$$p_{xs} = \bar{\psi}_{xy}(\bar{g}_{ys}\bar{g}_{xx} + \bar{g}_{xy}\bar{g}_{xs}) + \\ + \bar{\psi}_{ys}(\bar{g}_{yy}\bar{g}_{xs} + \bar{g}_{ys}\bar{g}_{xy}) + \\ + \bar{\psi}_{ss}\bar{g}_{xs}\bar{g}_{ys}; \qquad (8.110)$$

$$p_{yy} = \bar{g}_{ys}(2\bar{\psi}_{xs}\bar{g}_{xy} + 2\bar{\psi}_{ys}\bar{g}_{yy} + \\ + \bar{\psi}_{ss}\bar{g}_{ys});$$

$$p_{ss} = \bar{\psi}_{xx}\bar{g}_{xs}^{2} + 2\bar{\psi}_{xs}\bar{g}_{\ x}\bar{g}_{ys} + \\ + 2\bar{\psi}_{xs}\bar{g}_{xs}\bar{g}_{ss} + \bar{\psi}_{yy}\bar{g}_{ys}^{2} + 2\bar{\psi}_{ys}\bar{g}_{ys}\bar{g}_{ss}.$$

При одноосном нагружении перекрестно-армированного композита вдоль оси x потери энергии и потенциальная энергия равны соответственно

$$\Delta W = \frac{1}{2}\psi_{xx}\sigma_x^2; \quad W = \frac{1}{2}\sigma_x^2/E_x, \tag{8.111}$$

где E_x — модуль упругого пакета слоев в направлении оси x;

$$E_x = \bar{g}_{xx} - \bar{g}_{xy}^2/\bar{g}_{yy},$$

а соответствующий этому случаю нагружения коэффициент диссипации принимает вид

$$\psi_x = \Delta W/W = \psi_{xx}/s_{xx}. \tag{8.112}$$

Раскрывая (8.112) с учетом (8.109)—(8.11), (8.29), (8.39), имеем

$$\psi_x = \frac{\bar{\psi}_{xx}(\bar{g}_{xx}\bar{g}_{yy} - \bar{g}_{xy}^2)}{\bar{g}_{yy}} + \frac{2\bar{\psi}_{xs}(\bar{g}_{xs}\bar{g}_{yy} - \bar{g}_{ys}\bar{g}_{xy})}{\bar{g}_{yy}} + \frac{\bar{\psi}_{ss}(\bar{g}_{xs}\bar{g}_{yy} - \bar{g}_{ys}\bar{g}_{xy})^2}{\bar{g}_{yy}[\bar{g}_{ss}\bar{g}_{yy} - \bar{g}_{xy}^2)}. \tag{8.113}$$

В (8.113) компоненты матрицы УДХ монослоя и компоненты матрицы жесткости монослоя в системе координат (x, y) связаны с компонентами соответствующих матриц в естественных осях монослоя формулами, приведенными в табл. 8.2, 8.6.

На рис. 8.11 представлены графики зависимости коэффициентов диссипации ψ_x и модулей упругости E_x от угла θ при одноосном нагружении вдоль оси x перекрестно-армированных композитов. При расчетах использовалась трехкомпонентная модель УДХ монослоя. Упругие и диссипативные характеристики материалов, использованных при расчетах, сведены в табл. 8.7.

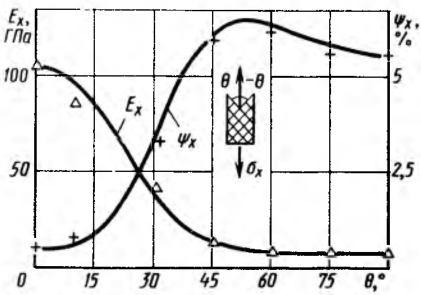


Рис. 8.11. Зависимости коэффициента диссипации ψ_x и модуля упругости E_x при одноосном циклическом нагружении перекрестно-армированного углепластика HTS/DX210 от угла ориентации волокон: △, + — экспериментальные результаты; ——— — расчетные

8.5.3. Диссипация энергии при изгибе многослойных композитов. Будем считать, что слои композита идеально связаны между собой, при этом выполняются гипотезы Кирхгофа—Лява классической теории пластин, приводящие к формулам (8.71) для деформаций пакета слоев.

Удельные потери энергии $\Delta W^{(k)}$ каждого k-го монослоя за цикл нагружения при плоском напряженном состоянии определяются в системе координат (x, y) с помощью матриц УДХ по деформациям $[\varphi_{xy}]^{(k)}$ или по напряжениям $[\psi_{xy}]^{(k)}$ и амплитудных значений деформаций $\{\varepsilon_{xy}\}^{(k)}$ или напряжений $\{\sigma_{xy}\}^{(k)}$ соотношениями

$$\Delta W^{(k)} = \frac{1}{2}\{\varepsilon_{xy}^{(k)}\}^{\mathrm{T}}[\varphi_{xy}]^{(k)}\{\varepsilon_{xy}^{(k)}\};$$

$$\Delta W^{(k)} = \frac{1}{2}\{\sigma_{xy}^{(k)}\}^{\mathrm{T}}[\psi_{xy}]^{(k)}\{\sigma_{xy}^{(k)}\}. \tag{8.114}$$

Найдем потери энергии ΔW в объеме многослойного композита единичных размеров вдоль осей x, y и высотой H (см. рис. 8.3). Проведя интегрирование по высоте каждого монослоя в первом уравнении (8.114) с учетом (8.71), получим

$$\Delta W = \frac{1}{2}(\{\varepsilon^0\}^{\mathrm{T}}[\varphi_1]\{\varepsilon^0\} + 2\{\varepsilon^0\}^{\mathrm{T}}[\varphi_2]\{\varkappa\} + \{\varkappa\}^{\mathrm{T}}[\varphi_3]\{\varkappa\}), \tag{8.115}$$

где матрицы $[\varphi_1]$, $[\varphi_2]$, $[\varphi_3]$ связаны с матрицами УДХ монослоев следующим образом:

$$[\varphi_1] = \sum_{k=1}^{n}\int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}}[\varphi_{xy}]^{(k)}\,dz; \quad [\varphi_2] =$$

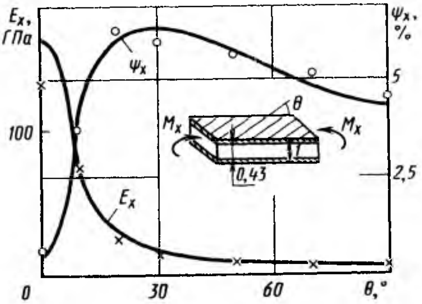


Рис. 8.12. Зависимости коэффициента диссипации ψ_x и приведенного модуля упругости E_x однонаправленного гибридного углестеклопластика от угла ориентации волокон по отношению к плоскости действия циклического изгибающего момента: ——— — расчетные; ○, × — экспериментальные

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{z(k-1)}^{z(k)} [\varphi_{xy}]^{(k)} z dz; \quad [\varphi_3] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{z(k-1)}^{z(k)} [\varphi_{xy}]^{(k)} z^2 dz$$

или

$$[\varphi_j] = \sum_{k=1}^{n} \int_{z(k-1)}^{z(k)} [\varphi_{xy}]^{(k)} z^{j-1} dz \quad (j = 1,\ 2,\ 3). \qquad (8.116)$$

В свернутом матричном виде (8.115) можно записать так:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \varkappa \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_2 & \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \varkappa \end{Bmatrix}, \qquad (8.117)$$

где матрицы $[\varphi_j]$ ($j = 1, 2, 3$) — симметричные, полностью заполненные (в общем случае ориентации монослоев).

Воспользовавшись (8.87), представим потери энергии многослойного композита за цикл нагружения как функцию силовых факторов:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A^* & C^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_2 & \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^* & C^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}, \qquad (8.118)$$

при этом амплитудное значение потенциальной энергии многослойного композита имеет вид

$$W = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} A^* & C^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}. \qquad (8.119)$$

Для многослойного композита с симметричной укладкой монослоев относительно срединной плоскости, которая выбрана за координатную, соотношения (8.118) упрощаются [см. (8.87), (8.81)]:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \times \begin{bmatrix} A^{-1}\varphi_1 A^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1}\varphi_3 D^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix}. \qquad (8.120)$$

Для случая одноосного свободного изгиба, когда

$$M_x \neq 0; \ M_y = 0; \ M_{xy} = 0; \ \{N\} = \{0\},$$

формулы (8.119), (8.120) для однонаправленного композита позволяют получить следующее выражение для коэффициента диссипации:

$$\psi_x = \Delta W / W = \bar{\psi}_{xx} / \bar{S}_{xx}, \qquad (8.121)$$

которое совпадает с (8.103), (8.104).

Для случая перекрестно-армированных материалов (при достаточно большом числе слоев n) из (8.119), (8.120) следуют формулы, совпадающие с формулой (8.113), полученной для одноосного циклического плоского нагружения материалов этого типа. Констатируемое совпадение коэффициентов диссипации однонаправленного и перекрестно-армированного композита при свободном изгибе и одноосном нагружении в плоскости в общем случае невозможно для композита произвольной структуры.

На рис. 8.12 представлены экспериментальные зависимости для многослойного композита в случае циклического нагружения изгибающим моментом при изменении ориентации плоскости действия момента по отношению к осям армирования композита

Внешние слои выполнены из углепластика HMS/DX210, внутренний — из стеклопластика GLASS/DX210. Исходные данные по упругим и диссипативным характеристикам материалов взяты из табл. 8.7.

8.6. ПРОЧНОСТЬ И ДЕФОРМАТИВНОСТЬ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТОВ

8.6.1. Описание прочностных свойств монослоя. Разрушение материала обычно связывают с его напряженным состоянием; при этом критерий прочности (разрушения) имеет вид

$$f(\sigma_{ij}, F) = 0, \qquad (8.122)$$

где F — некоторые характеристики прочности материала.

Феноменологические критерии прочности типа (8.122) призваны обеспечить интерполяцию данных некоторых базовых экспериментов по определению прочностных характеристик материала на случай напряженного состояния произвольного вида. Следствием имеющейся относительной свободы в формулировке критериев прочности является неоднозначность в выборе конкретной формы критерия (8.122).

Широкое распространение получили тензорно-полиномиальные формы записи критериев прочности [10, 16]:

$$F_i\sigma_i + F_{ij}\sigma_i\sigma_j + F_{ijk}\sigma_i\sigma_j\sigma_k + \cdots = 1, \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, 6, \qquad (8.123)$$

где F_i, F_{ij}, F_{ijk}, ... — матричные обозначения тензоров поверхности прочности второго, четвертого, шестого и последующих четных рангов.

Если ограничиться линейными и квадратичными слагаемыми (такие ограничения обычны при практическом использовании критерия), то для ортотропного тела, рассматриваемого в главных осях симметрии, при плоском напряженном состоянии формула (8.123) имеет вид

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{66}\tau_{12}^2 = 1. \qquad (8.124)$$

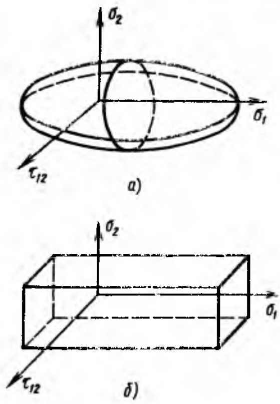


Рис. 8.13. Предельные поверхности однонаправленного композита

Соотношение (8.124) определяет в пространстве σ_1, σ_2, τ_{12} поверхность, которую принято называть предельной (рис. 8.13, *а*).

Эксперименты, проведенные с типичными однонаправленными композитами, позволили установить, что в зависимости от вида напряженного состояния реализуются принципиально различные механизмы разрушения материала: разрыв волокон, расслоение материала, разрушение связующего, потеря устойчивости волокон и т. д. Поэтому аппроксимация поверхности прочности гладкой поверхностью (8.124) не представляется бесспорной.

Простейшая гипотеза, учитывающая возможность реализации нескольких механизмов разрушения материала, состоит в том, что эти виды разрушения взаимно независимы и разрушение наступает тогда, когда предельных значений достигают в отдельности напряжения σ_1, σ_2 или τ_{12}. Предельная поверхность в пространстве σ_1, σ_2, τ_{12} в этом случае представляет собой прямоугольный параллелепипед (рис. 8.13, *б*), а условие (критерий) прочности имеет вид

$$-F_{-1} \leqslant \sigma_1 \leqslant F_{+1}; \quad -F_{-2} \leqslant \sigma_2 \leqslant F_{+2}; \quad |\tau_{12}| \leqslant F_{12}, \qquad (8.125)$$

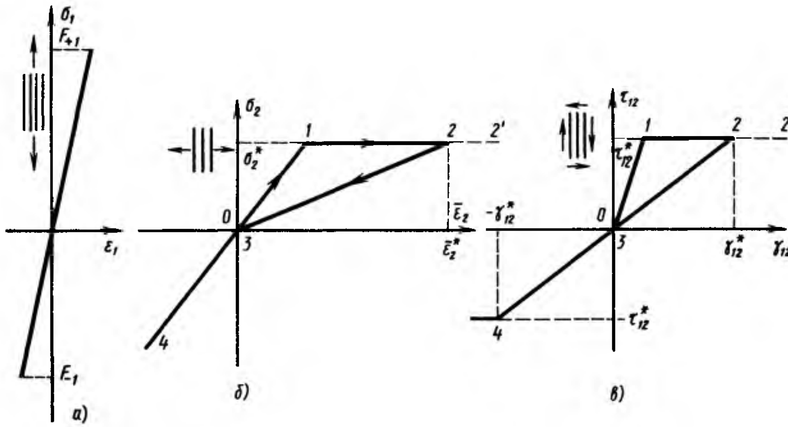


Рис. 8.14. Модельные диаграммы деформирования однонаправленного материала в составе пакета слоев многослойного композита

где F — соответствующие пределы прочности; знаки «+» и «—» в индексах означают соответственно растяжение и сжатие.

8.6.2. Особенности деформирования монослоя с хрупким полимерным связующим в составе многослойного пакета. Изолированные однонаправленные материалы (монослои) деформируются практически линейно упруго вплоть до разрушения. Важной особенностью современных однонаправленных композитов (прежде всего с полимерными связующими) является то, что предельные деформации при растяжении монослоя в поперечном направлении (соответствующие выполнению условия $\sigma_2 = F_{+2}$) и при сдвиге в плоскости слоя ($|\tau_{12}| = F_{12}$) существенно меньше предельных деформаций материала при растяжении в продольном направлении. Поэтому деформирование многослойных пакетов со сложной структурой укладки монослоев, как правило, сопровождается процессами трещинообразования в связующем одного, нескольких или всех монослоев пакета.

Будем считать, что деформирование однонаправленного материала в составе пакета слоев многослойного композита происходит в соответствии с диаграммами, представленными на рис. 8.14. Деформирование однонаправленного материала в направлении волокон линейно упругое (см. рис. 8.14, *а*). При достижении предельных напряжений F_{+1} или F_{-1} слой считается разрушенным. При нагружении в направлении, ортогональном волокнам, в пределах участка *0—1* (см. рис. 8.14, *б*) слой монолитен и линейно упруг. В точке *1* начинается процесс трещинообразования в связующем, который развивается на участке деформирования *1—2*. Разгрузка с любой точки участка *1—2* происходит с разгрузочным модулем $\tilde{E}_2$, равным секущему модулю диаграммы. Остаточные деформации равны нулю, что соответствует предположению о полном закрытии трещин. При последующем сжатии материала (участок диаграммы *3—4*) полностью восстанавливается начальный модуль материала. Повторное деформирование материала при положительных значениях напряжений σ_2 происходит по участку *3—2* и далее по участку *2—2'*. Диаграмма деформирования на рис. 8.14, *б* построена в функции приведенной деформации $\tilde{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 + \nu_{12}\varepsilon_1$, что позволяет учесть влияние деформирования в направлении укладки волокон на растрескивание связующего. Разгрузочный модуль $\tilde{E}_2$ на диаграмме σ_2—$\tilde{\varepsilon}_2$ определяется выражением

$$\tilde{E}_2 = \left[\frac{\tilde{\varepsilon}_2^*}{\sigma_2^*} + \frac{\nu_{12}\nu_{21}}{E_2}\right]^{-1},$$

где индекс «*» — знак наибольшего значения параметра за предысторию деформирования.

При сдвиге (см. рис. 8.14, *в*) на участке *0—1* монослой деформируется линейно упруго. Участок диаграммы *1—2* соответствует этапу развития трещинообразования в связующем монослое. Разгрузка (участок *2—3*) происходит с разгрузочным модулем сдвига $\widetilde{G}_{12} = \tau_{12}^*/\gamma_{12}^*$. Процесс сдвигового деформирования не зависит от знака напряжения τ_{12}. Поэтому на участке *3—4* деформирование также происходит с разгрузочным модулем $\widetilde{G}_{12}$. Повторное деформирование в область положительных напряжений τ_{12} происходит по траектории *4—3—2* и далее по участку *2—2'*, где возобновляется трещинообразование в связующем.

Началу трещинообразования в монослое соответствуют напряжения σ_2^* и τ_2^* (см. рис. 8.14, *в*), определяемые условиями

$$|\tau_{12}^*| = F_{12}, \quad \sigma_2^* \leqslant F_{+2},$$

или

$$\sigma_2^* = F_{+2}, \quad |\tau_{12}^*| \leqslant F_{12}.$$

В соответствии с рассматриваемой моделью поведения монослоя, кроме двух естественных его состояний, — начального (монолитный материал) и конечного (материал разрушен) — существует группа промежуточных состояний: материал с трещинами в полимерном связующем.

Введем матрицу-столбец параметров эффективной жесткости монослоя $\{\xi_1, \xi_2, \xi_{12}\}$, которые определим следующим образом:

$$\xi_1 = \frac{E_1}{E_1^0}; \quad \xi_2 = \frac{E_2}{E_2^0}; \quad \xi_{12} = \frac{G_{12}}{G_{12}^0}.$$

Здесь E_1^0, E_2^0, G_{12}^0 — начальные, E_1, E_2, G_{12} — текущие значения касательных модулей упругости монослоя, зависящие от предыстории деформирования.

В зависимости от знака напряжений σ_2, величины деформаций $\bar{\varepsilon}_2$ и $|\gamma_{12}|$ и знака их приращений матрица-столбец параметров эффективной жесткости монослоя принимает одно из восьми возможных вариантов значений, приведенных в табл. 8.8.

Будем считать, что коэффициент Пуассона не изменяет своего значения в процессе деформирования и выполняется соотношением симметрии $E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}$, тогда

$$\nu_{21} = \nu_{21}^0 \xi_2.$$

Параметры эффективной жесткости используются при формировании матрицы жесткости монослоя, связывающей приращения напряжений и деформаций:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_1 \\ \Delta\sigma_2 \\ \Delta\tau_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{12}^0\nu_{21}^0} \times \begin{bmatrix} E_1^0\xi_1 & \nu_{12}^0 E_2^0 \xi_2 & 0 \\ \nu_{21}^0 E_1^0 \xi_2 & E_2^0 \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 - \nu_{12}^0\nu_{21}^0\right) G_{12}^0 \xi_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_1 \\ \Delta\varepsilon_2 \\ \Delta\gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (8.126)$$

или

$$\Delta\{G_{12}\} = [\widetilde{G}^0]\,\Delta\{\varepsilon_{12}\}.$$

8.6.3. Алгоритмы решения задач о деформировании и прочности многослойных композитов. Описанная модель поведения монослоя может быть применена для анализа процессов деформирования и разрушения многослойных композитов, составленных из нескольких разноориентированных монослоев. Для многослойных композитов эта процедура достаточно трудоемка и предполагает использование ЭВМ.

Наиболее естественными для реализации модели являются алгоритмы последовательных нагружений. Могут быть построены три основных типа таких алгоритмов: основанные на последовательном изменении напряжений, деформаций и комбинированные

8.8. Параметры эффективной жесткости однонаправленного материала

Состояние монослоя	Параметры деформированного состояния		ξ_1	ξ_2	ξ_{12}
	в поперечном направлении	при сдвиге			
Начальное $F_{-1} < \sigma < F_{+1}$, $F_{-2} < \sigma_2 < F_{+2}$, $\lvert\tau_{12}\rvert < F_{12}$	—	—	1	1	1
Трещины открыты $\sigma_2 > 0$	$\tilde{\varepsilon}_2 < \tilde{\varepsilon}_2^*$	$\lvert\gamma_{12}\rvert < \lvert\gamma_{12}^*\rvert$	1	$\widetilde{E}_2/E_2^0$	$\widetilde{G}_{12}/G_{12}^0$
	$\tilde{\varepsilon}_2 = \tilde{\varepsilon}_2^*$, $\Delta\tilde{\varepsilon}_2 > 0$	$\lvert\gamma_{12}\rvert < \lvert\gamma_{12}^*\rvert$	1	0	$\widetilde{G}_{12}/G_{12}^0$
		$\lvert\gamma_{12}\rvert = \lvert\gamma_{12}^*\rvert$, $\Delta\,\lvert\gamma_{12}\rvert > 0$	1	0	0
	$\tilde{\varepsilon}_2 < \tilde{\varepsilon}_2^*$		1	$\widetilde{E}_2\ E_2^0$	0
Трещины закрыты $\sigma_2 < 0$	$\tilde{\varepsilon}_2 < 0$		1	1	0
		$\lvert\gamma_{12}\rvert < \lvert\gamma_{12}^*\rvert$	1	1	$\widetilde{G}_{12}/G_{12}^0$
Конечное $\sigma_1 = F_{+1}$, или $\sigma_1 = F_{-1}$, или (и) $\sigma_2 = F_{-2}$	—	—	0	0	0

Алгоритмы первого типа приведены в работе [12], пример алгоритма третьего типа дан в статье [9].

Алгоритм второго типа (деформационного нагружения) может быть построен следующим образом. Будем считать, что на всех этапах деформирования композита связь его слоев идеальна, т. е. деформации всех слоев в системе координат композита (x, y) при плоском напряженном состоянии одинаковы и равны средним деформациям композита в целом. Пусть на m-м шаге нагружения средние деформации композита возрастают на величину шага по деформациям $\Delta\,\{\varepsilon_{xy}\}_m = \{\Delta\varepsilon_x,\ \Delta\varepsilon_y,\ \Delta\gamma_{xy}\}_m$.

Полные средние деформации композита после m-го шага нагружения становятся равными сумме

$$\{\varepsilon_{xy}\}_m = \{\varepsilon_{xy}\}_{m-1} + \Delta\,\{\varepsilon_{xy}\}_m.$$

Полные деформации и приращения деформаций монослоев в естественных координатах монослоев $(1,\ 2)^{(k)}$ определим следующим образом:

$$\{\varepsilon_{12}\}_m^{(k)} = [T_1]_{m-1}^{(k)}\ \{\varepsilon_{xy}\}_m\,;$$

$$\Delta\,\{\varepsilon_{12}\}_m^{(k)} = \{\varepsilon_{12}\}_m^{(k)} - \{\varepsilon_{12}\}_{m-1}^{(k)}.$$

Здесь матрица преобразований деформаций $[T_1]_{m-1}^{(k)}$ определена на предыдущем шаге нагружения по формулам (8.9), (8.11). Приращения напряжений и полные напряжения в слоях равны [см. (8.2), (8.126)]:

$$\Delta\,\{\sigma_{12}\}_m^{(k)} = [\widetilde{G}^0]_{m-1}^{(k)}\,\Delta\,\{\varepsilon_{12}\}_m^{(k)};$$

$$\{\sigma_{12}\}_m^{(k)} = \{\sigma_{12}\}_{m-1}^{(k)} + \Delta\,\{\sigma_{12}\}_m^{(k)}$$

Средние напряжения в пакете слоев на m-м шаге нагружения, необходимые для построения диаграмм деформирования композита, определим следующим образом [см. (8.5), (8.22)]:

$$\{\sigma_{xy}\}_m = \sum_{k=1}^{m} [T_1]_{m-1}^{(k)} \{\sigma_{12}\}_m^{(k)} \bar{h}^{(k)}.$$

Параметры напряженно-деформированного состояния слоев используем для определения матрицы параметров эффективной жесткости каждого слоя в соответствии с логикой модели, отраженной в табл. 8.8:

$$\{\xi\}_m^{(k)} = f\left(\{\sigma_{12}\}_m^{(k)}, \{\varepsilon_{12}\}_m^{(k)}, \Delta\{\varepsilon_{12}\}_m^{(k)}\right).$$

Параметры эффективной жесткости слоев используем при формировании по формулам (8.126) их матриц касательных жесткостей $[\tilde{G}^0]_m^{(k)}$, соответствующих m-му этапу нагружения.

Относительно небольшая жесткость при сдвиге многих современных полимерных композитов и их склонность к трещинообразованию при сдвиге нередко приводят к заметному изменению исходных углов укладки монослоев вследствие деформаций сдвига. Этот вид нелинейностей, связанный с изменением геометрических параметров (углов укладки слоев) структуры многослойного композита, принято называть структурной нелинейностью. Приближенный учет этого вида нелинейности может быть проведен путем коррекции углов укладки слоев следующим образом:

$$\theta_m^{(k)} = \theta_{m-1}^{(k)} + \gamma_{12m}^{(k)}/2.$$

Новые значения углов армирования $\theta_m^{(k)}$ используем на $(m+1)$-м шаге нагружения при определении матрицы преобразования деформаций $[T_1]_m^{(k)}$ по формулам (8.7).

На рис. 8.15 представлена построенная по описанному алгоритму диаграмма деформирования стеклопластика квазиизотропной структуры [0°, 90°, 45°,—45°]. На диаграмме отмечены характерные точки «излома», связанные с началом трещинообразования в слоях, уложенных под углом 90° к направлению нагружения ($\sigma_2^{90°} =$

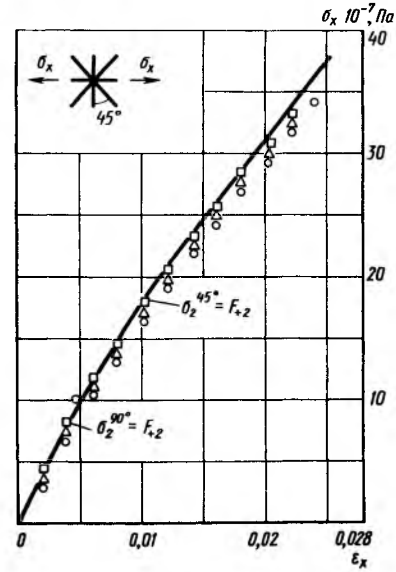


Рис. 8.15. Диаграмма деформирования многослойного стеклопластика:

——— — расчет (при $E_1 = 3920 \cdot 10^7$ Па; $F_{+1} = 108 \cdot 10^7$ Па; $E_2 = 840 \cdot 10^7$ Па; $F_{+2} = 3{,}2 \cdot 10^7$ Па; $G_{12} = 420 \cdot 10^7$ Па; $F_{12} = 11{,}7 \cdot 10^7$ Па; $\nu_{12} = 0{,}26$); □, △, ○ — эксперимент (Halpin)

$= F_{+2}$), а также в слоях, уложенных под углом ±45° к направлению нагружения ($\sigma_2^{45°} = F_{+2}$). В обоих случаях начало трещинообразования связано с достижением напряжений σ_2, в ортогональных волокнах, предела прочности F_{+2}.

Характерные точки подобных диаграмм, построенных для различных лучей нагружения (деформирования), позволяют построить диаграммы предельных состояний на плоскости σ_x — — σ_y. Для квазиизотропной структуры [0°, 90°, 45°, —45°] диаграмма предельных состояний построена на рис. 8.16.

Шриховые линии на рис. 8.16 соответствуют смене состояний слоев композита, а сплошные — полному разрушению материала.

Надписи у линий поясняют причины изменения состояния материала.

На рис. 8.17 приведена диаграмма прочности перекрестно-армирован-

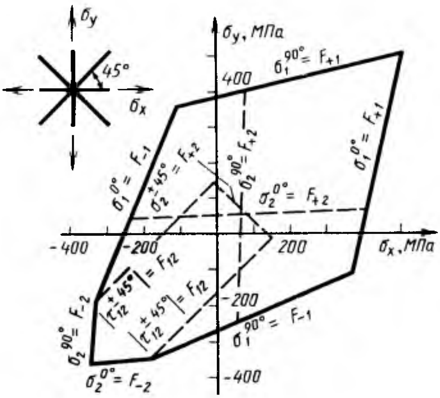


Рис. 8.16. Диаграмма предельных состояний квазиизотропного стеклопластика в условиях плоского напряженного состояния

ного материала, отражающая зависимость прочности от угла укладки слоев к направлению одноосного растяжения. Сплошные линии соответствуют расчетному пределу прочности композита, а штриховые — расчетному пределу монолитности, т. е. выполнению условий начала трещинообразования в монослоях. Надписи у линий поясняют определенную причину смены состояния или разрушения материала. Расчеты проведены при следующих исходных данных: $E_1 = 46\,500$ МПа, $E_2 = 7000$ МПа, $G_{12} = 7000$ МПа, $\nu_{12} = 0{,}25$, $F_{+1} = 1600$ МПа, $F_{-1} = 500$ МПа, $F_{+2} = 40$ МПа, $F_{-2} = 200$ МПа, $F_{12} = 60$ МПа. Экспериментальные результаты получены при испытаниях трубчатых образцов [9] на осевое ратяжение (на рис. 8.17 они отмечены крестиками) или растяжение в окружном направлении (отмечены кружочками). В зависимости от угла $\mp\theta$ укладки слоев возможны несколько вариантов исчерпания несущей способности композита.

Список литературы

1. **Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г.** Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 264 с.
2. **Алфутов Н. А., Таирова Л. П.** Возможности определения свойств монослоя в композите//Методы и средства диагностики несущей способности изделий из композитов. Рига: Зинатне, 1986. С. 212—215.
3. **Амбарцумян С. А.** Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания. М.: Наука, 1987. 360 с.
4. **Болотин В. В., Новичков Ю. Н.** Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 376 с.
5. **Ванин Г. А.** Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наукова думка, 1985. 304 с.
6. **Герман В. Л.** Некоторые теоремы об анизотропных средах//ДАН СССР. 1945. Т. XVIII. № 2. С. 95—98.
7. **Зиновьев П. А., Ермаков Ю. Н.** Диссипация энергии при колебаниях тел из волокнистых полимерных материалов. Структурная модель//Применение пластмасс в машиностроении. М.: МВТУ, 1986. Вып. 21. С. 37—54.
8. **Зиновьев П. А., Ермаков Ю. Н.** Диссипация энергии при изгибе многослойных волокнистых композитов//Известия вузов. Машиностроение. 1986. № 4. С. 15—20.
9. **Зиновьев П. А., Тараканов А. И., Фомин Б. Я.** Деформирование и разруше-

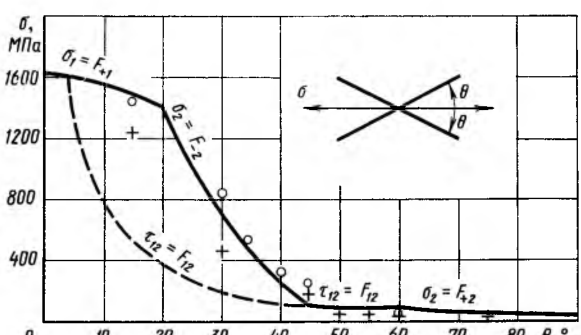


Рис. 8.17. Диаграмма прочности перекрестно-армированного стеклопластика при одноосном растяжении

ние композиционных материалов при двухосном растяжении//Применение пластмасс в машиностроении. М.: МВТУ, 1978. Вып. 19. С. 33—58.

10. **Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.** Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.

11. **Москвитин В. В.** Циклические нагружения элементов конструкций. М.: Наука, 1981. 344 с.

12. **Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А.** Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1976. 144 с.

13. **Пановко Я. Г.** Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Физматгиз, 1960. 194 с.

14. **Писаренко Г. С.** Обобщенная модель учета рассеяния энергии при колебаниях. Киев: Наукова думка, 1985. 236 с.

15. **Скудра А. М., Булаве Ф. Я.** Прочность армированных пластиков. М.: Химия, 1982. 214 с.

16. **Тетерс Г. А., Рикардс Р. Б., Нарусберг В. Л.** Оптимизация оболочек из слоистых композитов. Рига: Зинатне, 1978. 238 с.

17. **Хорошун Л. П., Солтанов Н. С.** Термоупругость двухкомпонентных смесей. Киев: Наукова думка, 1984. 110 с.

18. **Adams R. D., Bacon D. G. C.** Effect of fiber orientation and laminate geometry on the dynamic properties of CFRP//J. Composite materials. 1973. Vol 7. P. 402—428.

19. **Daniel I. M., Liber T.** Lamination residual strains and stresses in hybrid laminates.//Composite materials: testing and design (Fourth conference). ASTM. STP. 617. 1977. P. 330—343.

20. **Hanh H. T.** A derivation of invariants of fourth rank tensors//J. Composite materials. Vol. 8. January 1974. P. 2—14.

21. **Ni R. G., Adams R. D.** The damping and dynamic moduli of symmetric laminated composite beams—theoretical and experimental results//J. Composite materials. 1984. Vol. 18. P. 104—121.

22. **Wright G. C.** The dynamic properties of glass and carbon fibre reinforced plastic beams//J. Sound and vibration. 1972. Vol. 21. N 2. P. 205—212.

Глава 9

СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВЕННО-АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИТОВ

9.1. КЛАССИФИКАЦИЯ КОМПОЗИТОВ

В зависимости от способа образования пространственных связей многомерные композиты можно разделить на четыре группы (рис. 9.1). К первой группе относятся материалы, пространственные связи в которых образуются за счет искривления всех или части волокон одного из направлений. Эти материалы создаются по традиционной системе двух нитей: искривленных нитей основы и прямолинейных нитей утка. Эта группа подразделяется на несколько подгрупп (см. рис. 9.1). В основу деления положен принцип соединения прямолинейных волокон утка по толщине композита, соединение может быть одноразовым и повторяющимся. Для одноразового соединения характерно пронизывание волокнами основы всей толщины материала, а для повторяющегося — лишь части его, т. е. волокна основы соединяют лежащие рядом волокна утка по высоте материала или соединение осуществляется через одно, два и более волокон утка.

Ко второй группе относятся материалы, пространственные связи которых создаются за счет введения волокон третьего направления, т. е. они образуются системой трех нитей в прямоугольной или цилиндрической системе координат. Волокна могут быть взаимно ортогональными в трех направлениях или располагаться под углом к одной из плоскостей армирования.

Третья группа состоит из материалов, пространственные связи в которых создаются системой n нитей [1]. Часть нитей имеет взаимно ортогональное расположение в трех направлениях, а часть располагается под углом к плоскостям.

Четвертую группу составляют материалы, пространственные связи в которых создаются нитевидными кри-

Рис. 9.1. Классификация пространственных схем армирования по способу·создания межслойных связей

сталлами или другими дискретными элементами. У таких материалов основной каркас образуется непрерывными волокнами, лентой или тканью. Особенности этих материалов заключаются в характере расположения нитевидных кристаллов или дискретных элементов относительно направления основной арматуры и в способе их соединения с волокнами. Указанные особенности обусловлены выбором технологического режима изготовления композиционного материала.

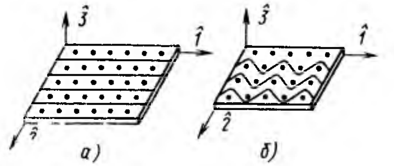


Рис. 9.2. Типичные схемы армирования слоя:
а — с прямолинейным расположением волокон; *б* — с заданной степенью искривления волокон в плоскости слоя

9.2. СТРУКТУРНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Разнообразие структурных схем армирования [8, 12, 19] и существенные различия в принципах построения армирующего каркаса даже в пределах одного класса композитов обусловливают трудности разработки расчетных моделей их упругих свойств. Упростить решение этой задачи можно введением в расчет типичных элементов структуры, объединяющих семейство волокон одного или двух направлений. Упругие свойства таких элементов рассчитываются по формулам для анизотропного тела.

Анализ структурных схем армирования [18] показывает, что во всех рассматриваемых группах материалов (кроме *n*-мерных) можно выделить повторяющийся элемент в виде плоского слоя. Его характерная особенность (в отличие от обычного однонаправленного слоя, принятого в теории армированных сред) — наличие волокон двух направлений. Волокна, соответствующие направлению оси *1*, прямолинейные (рис. 9.2, *а*) или искривленные по заданному закону (рис. 9.2, *б*), расположены в плоскости слоя, а волокна направления оси *3* — перпендикулярны плоскости слоя. Если пространственный каркас образован системой трех нитей, повторяющиеся элементы выделяются эквидистантными плоскостями $y = \text{const}$, $z = \text{cosnt}$ или $x = \text{const}$ (рис. 9.3), проходящими между волокнами двух направлений. Здесь x, y, z совпадают

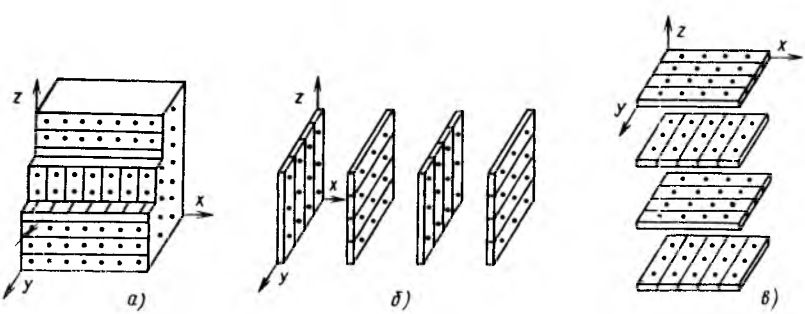


Рис. 9.3. Схема разбиения на слои материала, образованного системой трех нитей:
а — расположение волокон в материале; *б* — расположение слоев в плоскости *zy*; *в* — расположение слоев в плоскости *yx*

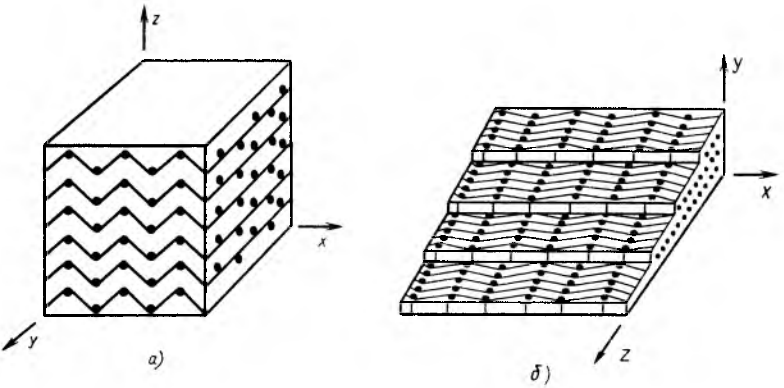


Рис. 9.4. Схема разбиения на слои материала, образованного системой двух нитей: *а* — **расположение волокон в материале;** *б* — **расположение волокон в смежных слоях**

с осями *1*, *2*, *3* расчетной модели материала. На рис. 9.2 $\widehat{1}$, $\widehat{2}$, $\widehat{3}$ — система координат слоя совпадает с расчетной.

Повторяющиеся элементы из материала, структурные схемы которых образованы системой двух нитей, выделяются эквидистантными плоскостями $y = \text{const}$, проходящими между противофазно искривленными волокнами (рис. 9.4). Каждый из элементов содержит арматуру двух взаимно ортогональных направлений. Волокна, лежащие в плоскости деления, искривлены по заданному закону, перпендикулярные плоскости — прямолинейны. Смежные элементы имеют одинаковое содержание волокон и отличаются друг от друга лишь противофазным расположением волокон. Подобное выделение повторяющихся элементов может осуществляться и в более сложных структурах [18].

Таким образом, композиты с пространственным расположением арматуры можно рассматривать как составленные из структурных элементов (слоев). Смежные слои в материале могут различаться по ориентации и содержанию волокон в плоскости слоя. Содержание и расположение волокон, пронизывающих плоскости деления, во всех слоях одинаково. Элементарный слой, выделенный из пространственно-армированного материала двумя параллельными плоскостями, представляет по своей структуре двухмерно-армированный композит.

9.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОЯ

Для расчета упругих характеристик (постоянных) слоя (см. рис. 9.2) используют два подхода. Первый основан на принципе частичного сглаживания структуры материала [14]. Подход заключается в определении, во-первых, характеристик анизотропного «связующего» — модифицированной матрицы, во-вторых, свойств однонаправленного слоя с модифицированной матрицей. Последняя получается усреднением (в этом и состоит принцип частичного сглаживания) арматуры, расположенной ортогонально по отношению к слою, со связующим. Плоскость изотропии приведенной матрицы совпадает с плоскостью слоя.

Упругие характеристики слоя с прямолинейным расположением волокон согласно этому подходу определяются по формулам из работы [18].

Более простые формулы для расчета упругих характеристик слоя дает второй подход (табл. 9.1). Они получены при условиях плоской задачи [1, 2]. Модули упругости и сдвига модифицированной матрицы в пло-

9.1. Упрощенные зависимости для расчета упругих характеристик слоя с прямолинейным расположением арматуры

Характеристика слоя	Зависимости для арматуры	
	любой	высокомодульной
$E_{\hat{1}}$	$\dfrac{1+(n_1^*-1)\mu_1}{a_{11}^*}$	$\mu_1 E_a^{(1)}+\dfrac{(1-\mu_1)(1+\mu_3)}{1-\mu_3}E_c$
$E_{\hat{2}}$	$\dfrac{\left[1+\left(n_2^*-1\right)\mu_1\right]E_a}{[\mu_1+n_2^*(1-\mu_1)][1+(n_2^*-1)\mu_1]-\left(a_{22}^*E_a+\nu_a\right)^2(1-\mu_1)\mu_1}$	$\dfrac{(1+\mu_1)(1+\mu_3)}{(1-\mu_1)(1-\mu_3)\left(1-\nu_a^{(1)2}\right)}E_c$
$E_{\hat{3}}$	$\dfrac{1+(n_3^*-1)\mu_3}{a_{33}^*}$	$\mu_3 E_a^{(3)}+\dfrac{(1+\mu_1)(1-\mu_3)}{(1-\mu_1)\left(1-\nu_a^{(1)2}\right)}E_c$
$\nu_{\hat{1}\hat{2}}$	$\dfrac{E_{\hat{2}}\left[\nu_a\mu_1a_{11}^*-(1-\mu_1)a_{12}^*\right]}{1+(n_1^*-1)\mu_1}$	$\nu_a^{(1)}\delta^{(1)}$
$\nu_{\hat{1}\hat{3}}$	$\dfrac{E_{\hat{3}}\left[\nu_a a_{33}^*\mu_3-(1-\mu_3)a_{13}^*\right]}{1-[n_3^*-1]\mu_3}$	$\nu_a^{(3)}\mu_3+(1-\mu_3)\nu_{12}^*$
$\nu_{\hat{2}\hat{3}}$	$\dfrac{E_{\hat{3}}\left[\nu_a a_{33}^*\mu_3-(1-\mu_3)a_{13}^*\right]}{1-(n_3^*-1)\mu_3}$	$\nu_a^{(3)}\mu_3+(1-\mu_3)\nu_c$
$G_{\hat{1}\hat{2}}$	$\dfrac{m_{12}^*(1+\mu_1)+1-\mu_1}{m_{12}^*(1-\mu_1)+1+\mu_1}G_{12}^*$	$\dfrac{1+\mu_1}{(1-\mu_1)(1-\mu_3)}G_c$
$G_{\hat{2}\hat{3}}$	$\dfrac{m_{23}^*(1+\mu_3)+1-\mu_3}{m_{23}^*(1-\mu_3)+1+\mu_3}G_{23}^*$	$\dfrac{1+\mu_3}{(1-\mu_3)(1-\mu_1)}G_c$
$G_{\hat{1}\hat{3}}$	$\dfrac{m_{13}^*(1+\mu_3)+1-\mu_3}{m_{13}^*(1-\mu_3)+1+\mu_3}G_{13}^*$	$\dfrac{(1+\mu_1)(1+\mu_3)}{(1-\mu_1)(1-\mu_3)}G_c$

Примечание. $n_1^*=\dfrac{E_a}{E_1^*}$; $n_2^*=n_1^*$; $n_3^*=\dfrac{E_a}{E_3^*}$; $m_{12}^*=\dfrac{G_a}{G_{12}^*}$; $m_{23}^*=\dfrac{G_a}{G_{23}^*}$; $m_{13}^*=\dfrac{G_a}{G_{13}}$; $\delta^{(1)}=\dfrac{(1+\mu_3)(1+\mu_1)}{(1-\mu_3)(1-\mu_1)\mu_1\left(1-\nu_a^{(1)2}\right)}\dfrac{E_c}{E_a^{(1)}}$.

скости ее изотропии вычисляются так:

$$E_1^*=E_2^*=\frac{1+\mu_3}{1-\mu_3}E_c; \qquad (9.1)$$

$$G_{12}^*=\frac{1}{1-\mu_3}G_c. \qquad (9.2)$$

Формула (9.1) [2] является полуэмпирическим приближением к более точным соотношениям для трансверсального модуля, вытекающим из решения задачи теории упругости; выражение (9.2) представляет собой предел (при $E_a\to\infty$) модуля сдвига в плоскости

9.2. Упрощенные зависимости для расчета упругих характеристик слоя с искривленными волокнами в его плоскости

Характеристика	Зависимость
$\tilde{E}_{1'}$	$\left[\frac{1}{E_{\hat{1}}} - k_1\left(\frac{1}{E_{\hat{1}}} - \frac{1}{E_{\hat{3}}}\right) - \frac{k_3}{4}\left(\frac{1}{E_{\hat{1}}} + \frac{1}{E_{\hat{3}}} + \frac{2\nu_{\hat{1}\hat{3}}}{E_{\hat{3}}} - \frac{1}{G_{\hat{1}\hat{3}}}\right)\right]^{-1}$
$\tilde{E}_{3'}$	$\left[\frac{1}{E_{\hat{3}}} + k_1\left(\frac{1}{E_{\hat{1}}} - \frac{1}{E_{\hat{3}}}\right) - \frac{k_3}{4}\left(\frac{1}{E_{\hat{1}}} + \frac{1}{E_{\hat{3}}} + \frac{2\nu_{\hat{1}\hat{3}}}{E_{\hat{3}}} - \frac{1}{G_{\hat{1}\hat{3}}}\right)\right]^{-1}$
$\tilde{E}_{2'}$	$E_{\hat{2}}$
$\tilde{\nu}_{2'1'}$	$\tilde{E}_{1'}\left(k_2\frac{\nu_{\hat{2}\hat{1}}}{E_{\hat{1}}} + k_1\frac{\nu_{\hat{3}\hat{2}}}{E_{\hat{2}}}\right)$
$\tilde{\nu}_{2'3'}$	$\tilde{E}_{3'}\left(k_2\frac{\nu_{\hat{3}\hat{2}}}{E_{\hat{2}}} + k_1\frac{\nu_{\hat{2}\hat{1}}}{E_{\hat{1}}}\right)$
$\tilde{\nu}_{3'1'}$	$\tilde{E}_{1'}\left[\frac{\nu_{\hat{3}\hat{1}}}{E_{\hat{1}}} - \frac{k_3}{4}\left(\frac{1}{E_{\hat{1}}} + \frac{1}{E_{\hat{3}}} + \frac{2\nu_{\hat{1}\hat{3}}}{E_{\hat{3}}} - \frac{1}{G_{\hat{1}\hat{3}}}\right)\right]$
$\tilde{G}_{1'2'}$	$\left[\frac{k_2}{G_{\hat{1}\hat{2}}} + \frac{k_1}{G_{\hat{2}\hat{3}}}\right]^{-1}$
$\tilde{G}_{3'2'}$	$\left[\frac{k_2}{G_{\hat{2}\hat{3}}} + \frac{k_1}{G_{\hat{1}\hat{2}}}\right]^{-1}$
$\tilde{G}_{1'3'}$	$\left[\frac{1}{G_{\hat{1}\hat{3}}} + k_3\left(\frac{1}{E_{\hat{1}}} + \frac{1}{E_{\hat{3}}} + \frac{2\nu_{\hat{1}\hat{3}}}{E_{\hat{3}}} - \frac{1}{G_{\hat{1}\hat{3}}}\right)\right]^{-1}$

9.3. Параметр k_i в зависимости от формы и степени искривления волокон

Параметр	Синусоида	Ломаная	Синусоида	Ломаная
	Произвольная степень искривления		Степень малого искривления	
k_1	$1 - \left(1 + \frac{\pi^2}{4}\psi^2\right)^{-1/2}$	$\psi^2(1+\psi^2)^{-2}$	$\frac{\pi}{8}\psi^2$	ψ^2
k_2	$\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\psi^2\right)^{-1/2}$	$(1+\psi^2)^{-2}$	$1 - \frac{\pi^2}{8}\psi^2$	$1 - \psi^2$
k_3	$\frac{\pi^2}{2}\psi^2\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\psi^2\right)^{-3/2}$	$4\psi^2(1+\psi^2)^{-2}$	$\frac{\pi}{2}\psi^2$	$4\psi^2$

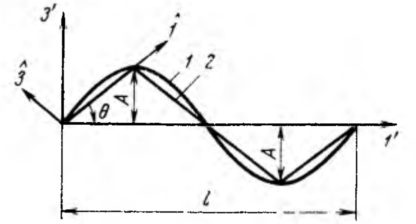


Рис. 9.5. Схема регулярного искривления волокон основы:

1 — по синусоиде; *2* — по ломаной (ось *1* направлена по ломаной или касательной к линии искривления)

укладки волокон. Выражение для ν_{12}^* модифицированной матрицы получается при подстановке (9.1), (9.2) в условие изотропии $E_1^* = E_2^* = 2G_{12}^* (1 + \nu_{12}^*)$. Значение $\nu_{12}^* = \nu_c + (1 + \nu_c) \mu_3$ является завышенным [17, 18]. Для простоты расчета ν_{12}^* будем полагать, как и в [2], равным коэффициенту Пуассона арматуры соответственно направлений *1* и *2*. Выражения для расчета упругих констант слоя с искривленными волокнами одного направления (см. рис. 9.2, *б*) приведены в табл. 9.2. Входящие в расчет характеристики слоя с прямолинейным расположением волокон определяются по формулам табл. 9.1. Выражения для параметра k_i как функции от $\psi = 4A/l$ для заданных форм искривления (рис. 9.5) представлены в табл. 9.3.

9.4. КОМПОЗИТЫ, АРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМОЙ ДВУХ НИТЕЙ

9.4.1. Материалы. Стеклопластики на основе эпоксидного связующего ЭДТ-10 и многослойных стеклотканей различаются по схемам переплетения и типам волокон. Для изготовления стеклотканей использовались сплошные и полые (капиллярные) волокна из алюмоборосиликатного стекла и высокомодульного стекла ВМ-1. Модуль упругости и коэффициент Пуассона алюмоборосиликатных волокон $E_а = 7{,}31 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_а = 0{,}25$; для высокомодульных волокон ВМ-1 $E_а = 10^5$ МПа, $\nu_а = 0{,}25$; упругие характеристики связующего ЭДТ-10 $E_с = 2900$ МПа, $\nu_с = 0{,}35$.

Типы и характеристики стеклотканей приведены в табл. 9.4. Их схемы армирования показаны на рис. 9.6 (они обозначены в табл. 9.4 римскими цифрами). Композиты изготавливались в форме пластин методом пропитки в вакууме под давлением.

Для удобства дальнейшего описания введена классификация материалов по структурной схеме армирования, углу наклона волокон основы к направлению оси x и типу арматуры. Стеклопластики на основе алюмоборосиликатных волокон АБ обозначены буквой С, высокомодульные и полые волокна имеют дополнительные буквы в обозначении — «в» и «п». Степень искривления волокон (средний угол наклона к оси *1* в градусах) указана арабскими цифрами, идущими после римской, две последние арабские цифры обозначают объемное содержание волокон в процентах.

9.4.2. Диаграммы деформирования. Характер кривых деформирования композитов, образованных системой двух нитей, как и слоистых композитов, определяется в основном расположением волокон и направлением нагрузки относительно главных осей материала, а также степенью искривлеиия армирующих волокон. О влиянии угла нагружения на изменение характера диаграмм деформирования композитов свидетельствуют данные, представленные на рис. 9.7. Характер кривой *1* (см. рис. 9.7, *а*), полученной при нагружении материала С-II-32-50 в направлении прямолинейных волокон утка (оси *y*), существенным образом отличается от кривых, полученных при нагружении в направлении основы (кривая *7*) и под углом к ней (*2*—*6*). Принципиальных различий в характере кривых *2*—*7* не наблюдается.

Все кривые деформирования на рис. 9.7 имеют линейный начальный участок. Наклон и «точка перелома» кривой зависят от направления приложения нагрузки. Положение «точки перелома» определяется и видом нагружения. По сравнению с растяжением при испытании на сжатие

9.4. Многослойные стеклоткани и стеклопластики на их основе

Марка волокна	Ткань				Стеклопластик			Условное обозначение материала
	Толщина, мм	Схема армирования	Плотность, нитей/дм, по		θ, градус	μ, %	ρ, г/см³	
			основе	утку				
АБ	1,6	I	72	42	10	65	1,90	C-I-10-65
	2,1	I	72	42	19	55	1,84	C-I-19-55
	2,5	II	72	49	21	50	1,72	C-II-21-50
	10,3	II	72	42	32	50	1,85	C-II-32-50
	12,8	II	78	48	36	45	1,80	C-II-36-45
	13,4	II	78	48	41	42	1,68	C-II-41-42
	2,1	V	72	42	16	53	1,85	C-V-16-53
	5,25	I	—	—	26	42	1,70	C-I-26-42
ВМ-1	2,22	II	42	35,7	17	57	1,66	C-II-17в-57
	2,70	V	60	30,8	17	52	1,78	C-V-17в-52
АБ *	1,50	II	43	35	12	49	1,54	C-II-12п-49
	2,50	V	72	31	13	34	1,45	C-V-13п-34
АБ	2,56	III	48	29,8	15	48	1,83	C-III-15-48
	2,96	IV	48	48	14	49	1,90	C-IV-14-49

* Волокно полое.

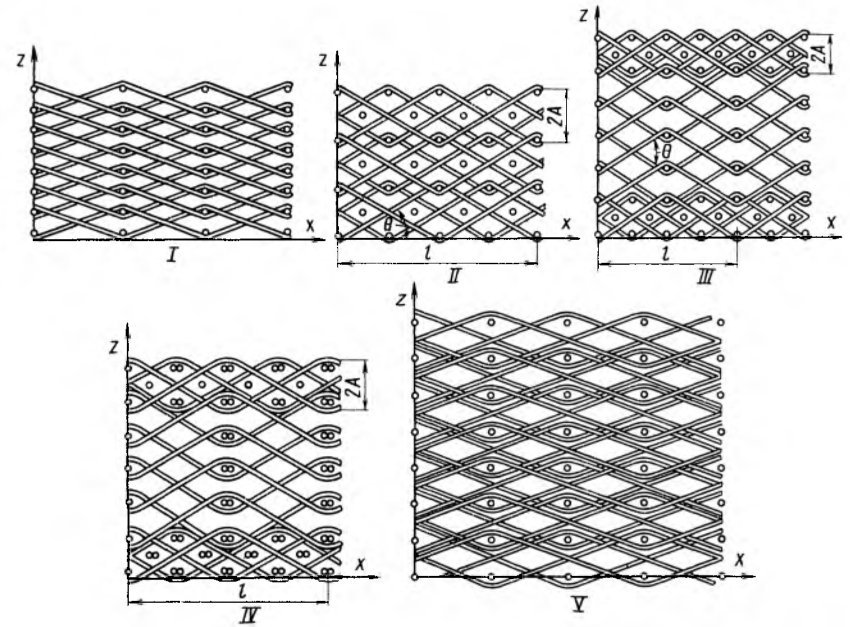


Рис. 9.6. Типы структурных схем армирования стеклопластиков, образованных системой двух нитей:

I — соединение рядом лежащих слоев; *II* — через один слой; *III* — с переменной плотностью по высоте; *IV* — с усилением по утку; *V* — рядом лежащих слоев со сдвигом по амплитуде на 1/4 полупериода

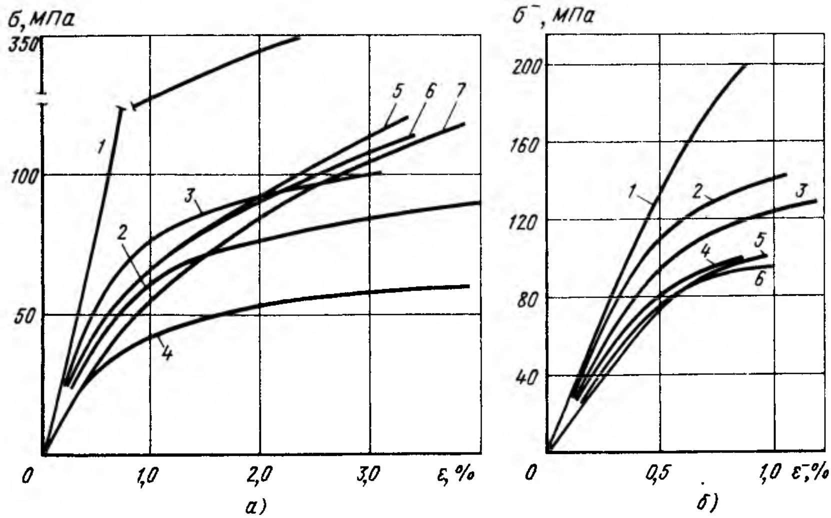


Рис. 9.7. Кривые деформирования стеклопластиков С-II-32—50 при растяжении (*а*) и сжатии (*б*). Угол к направлению основы:

90° (*1*); 75° (*2*); 60° (*3*); 45° (4); 30° (*5*); 15° (*6*); 0° (7)

рис. 9.7, *б*) точка перелома кривой смещается в диапазон более высоких напряжений. Заметное влияние на кривые деформирования оказывает структура (рис. 9.8). Схемы армирований стеклопластиков С-III-15-48 и С-IV-14-49 существенно отличаются от схем уже рассмотренных материалов (см. рис. 9.7), характер кривых деформирования их также отличен. Стеклопластики С-III-15-48 и С-IV-14-49 имеют линейную зависимость между напряжениями и деформациями вплоть до разрушения при нагружении в направлении утка и основы, в то время как стеклопластик С-II-32-50 при нагружении в направлении основы имеет только начальный линейный участок.

При испытаниях на изгиб материалов, образованных системой двух нитей, зависимость прогиб-напряжение $\sigma_{max}(w)$, как и $\sigma(\varepsilon)$ при растяжении, в основном, определяется углом вырезки образца по отношению к направлению основы и углом наклона искривленных волокон основы к оси x. Для этого класса материалов при нагружении в направлениях основы и утка вплоть до разрушения строгой линейной зависимости $\sigma_{max}(w)$ не наблюдается. Кривые $\sigma_{max}(w)$ при изгибе имеют больший начальный линейный участок, чем $\sigma(\varepsilon)$ при растяжении.

Различия в свойствах армирующих волокон или в структурных схемах армирования при одних и тех же углах искривления волокон основы практически не влияют на характер кривых деформирования при изгибе [1].

Все типы материалов рассматриваемого класса имеют линейную зависимость между деформациями и напряжениями в достаточно широком диапазоне расчетных эксплуатационных нагрузок. Это позволяет использовать для расчета упругих характеристик разработанную для упругих материалов теорию армированных сред.

9.4.3. Определение упругих характеристик. При построении расчетной модели композитов, образованных системой двух нитей, принимается, что материал состоит из слоев, ограниченных эквидистантными плоскостями $y = \text{const}$ (см. рис. 9.4, *б*), где y — координата вдоль оси *2* расчетной

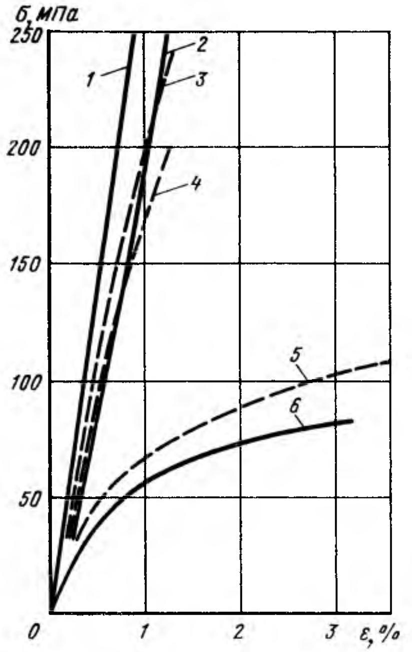


Рис 9.8. Кривые деформирования стеклопластиков при растяжении в направлении утка (1, 4), основы (2, 3) и под углом 45° (5, 6):

——— — для С-IV-14-49; — — — — для С-III-15-48

системы координат 1 2 3 (на рис. 9.9 ось 2 перпендикулярна плоскости слоя 1, 3). При этом все волокна нечетных слоев искривлены одинаково в соответствии с периодическим законом:

$$z_1 = -Af\,(x + l/2), \qquad (9.3)$$

а все волокна четных слоев искривлены в противофазе, т. е. по закону:

$$z_2 = -z_1.$$

Следовательно, углы наклона искривленных волокон в пределах бесконечно малого элемента dx вдоль оси 1 в двух смежных слоях, перпендикулярных оси 2, равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. При определении упругих характеристик (постоянных) вначале находят компоненты a_{ij} для двух скрепленных по длине слоев с учетом совместности их деформаций, а затем производят усреднение

$$a_{ij} = \frac{1}{l}\int_0^l a'_{ij}\,dx, \qquad (9.4)$$

$$i,\ j = 1' \ldots 6',$$

где a'_{ij} — коэффициенты матрицы податливости элемента dx в осях 1 2 3: определяемые через компоненты матрицы жесткости по зависимостям *:

$$a^{2}_{ij} = \frac{B_{ik}B_{jk} - B_{kk}B_{ij}}{B_{ii}B_{jj}B_{kk} - B_{jj}B^2_{ik} - B_{kk}B^2_{ij} - B_{ii}B^2_{jk} + 2B_{ij}B_{ik}B_{jk}}; \qquad (9.5)$$

$$a_{ii} = \frac{B_{jj}B_{kk} - B^2_{jk}}{B_{ii}B_{jj}B_{kk} - B_{jj}B^2_{ik} - B_{kk}B^2_{ij} - B_{ii}B^2_{jk} + 2B_{ij}B_{ik}B_{jk}}; \qquad (9.6)$$

$$a'_{66} = B^{-1}_{66};\quad a_{55} = B^{-1}_{55};\quad a_{44} = B^{-1}_{44}. \qquad (9.7)$$

Компоненты матрицы жесткости слоя $B_{ij} = \hat{1}, \hat{2}, \ldots, \hat{6}$ в главных осях

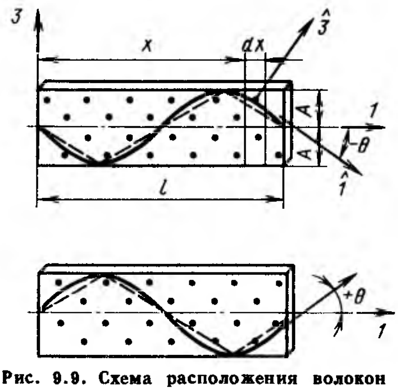


Рис. 9.9. Схема расположения волокон в двух рядом лежащих слоях модели материала

* Суммирование по парным индексам не проводится.

$\widehat{1}\,\widehat{2}\,\widehat{3}$ выражаются через упругие постоянные:

$$B_{ij} = \frac{E_i\,(\nu_{ij} + \nu_{ik}\nu_{kj})}{\left\{\begin{matrix} 1 - \nu_{ij}\nu_{jk} - \nu_{ik}\nu_{ki} - \\ - \nu_{jk}\nu_{kj} - 2\nu_{ij}\nu_{jk}\nu_{ki} \end{matrix}\right\}}; \quad (9.8)$$

$$B_{ii} = \frac{E_i}{\left\{\begin{matrix} (-1\nu_{ij}\nu_{ji} + \nu_{ik}\nu_{ki} + \\ + 2\nu_{ij}\nu_{jk}\nu_{ki})\,(1 - \nu_{jk}\nu_{kj})^{-1} \end{matrix}\right\}}; \quad (9.9)$$

$$i,\ j,\ k = \widehat{1},\ \widehat{2},\ \widehat{3};$$

$$i \neq j \neq k;$$

$$B_{\widehat{6}\,\widehat{6}} = G_{\widehat{1}\,\widehat{2}};\quad B_{\widehat{5}\,\widehat{5}} = G_{\widehat{1}\,\widehat{3}};$$

$$B_{\widehat{4}\,\widehat{4}} = G_{\widehat{3}\,\widehat{2}}. \quad (9.10)$$

Упругие постоянные слоя с прямолинейным расположением волокон в направлениях $\widehat{1}$ и $\widehat{2}$, входящие в зависимости (9.8)—(9.10), определяются по формулам табл. 9.1. Таким образом, задаваясь параметрами искривления волокон в слое (см. табл. 9.3) и используя формулы (9.4)—(9.10), определяют упругие постоянные композита, образованного системой двух нитей.

В случае использования высокомодульной арматуры и при условии пренебрежения в указанных зависимостях членами ν_{ij}^2, E_i/E_j для расчета упругих характеристик композита используют приближенные выражения, которые приведены в табл. 9.5. Значения упругих постоянных, вычисленные по приближенным формулам табл. 9.5, несущественно отличаются от значений характеристик, вычисленных по полным зависимостям (9.5)—(9.7). Наибольшая погрешность наблюдается при расчете модулей сдвига. Для материалов с углом наклона волокон основы 45° погрешность при расчете $\widehat{G}_{12}$ по упрощенным формулам составила 5,5%. Увеличение жесткости армирующих волокон практически не влияет на погрешность [1].

9.4.4 Расчетные и экспериментальные значения упругих характеристик. Возможность использования приближенных зависимостей (см. табл. 9.5) при расчете упругих характеристик материалов, образованных системой двух нитей, оценивалась на различных типах стеклопластиков, структурные схемы армирования которых были показаны на рис. 9.6. У исследованных материалов в широких пределах варьировался угол наклона волокон основы к оси x, объемное содержание и свойства армирующих волокон. Экспериментальное определение упругих постоянных производилось в диапазоне линейной зависимости между деформациями и напряжениями.

Расчет характеристик по выражениям из табл. 9.5 для исследуемых материалов несложен. При наличии постоянной степени искривлений волокон в указанные зависимости вводится параметр искривления ψ. Для материалов типа С-III-15-48 и С-IV-14-49 при наличии двух степеней искривления волокон вводятся два параметра: ψ_1 и ψ_2. Жесткость слоев приближенно вычисляют по формуле суммирования.

Упругие характеристики исследуемых материалов и результаты статистической обработки приведены в табл. 9.6. Сопоставление расчетных и экспериментальных значений свидетельствует о достаточной точности рассматриваемого подхода (табл. 9.7). Расхождения в расчетных и экспериментальных значениях модулей упругости не превышают 17%, причем расчетные значения, в основном, оказываются выше экспериментальных. Для модуля сдвига наблюдается некоторое превышение экспериментальных значений над расчетными; максимальное расхождение 19%.

Модули упругости стеклопластиков при испытании на сжатие и растяжение в направлении прямолинейных волокон практически одинаковы. При нагружении в направлении искривленных волокон на растяжение и сжатие для некоторых типов стеклопластиков [18] наблюдаются значительные расхождения в значениях модулей упругости.

9.5. Приближенные зависимости для расчета упругих характеристик композита с противофазным искривлением волокон

Характеристика	Зависимость
$\hat{E}_1$	$\dfrac{(1-\psi^2)^2+\dfrac{4\left(\alpha^2+1+2\nu_{\hat{3}\hat{1}}\right)}{\beta^2}\psi^2}{1+2\nu_{\hat{3}\hat{1}}\psi^2+\dfrac{4\alpha^2}{\beta^2}\psi^2+\alpha^2\psi^4}E_{\hat{1}}$
$\hat{E}_3$	$\dfrac{(1-\psi^2)^2-\dfrac{4\alpha^2\left(1+2\nu_{\hat{1}\hat{3}}+\dfrac{1}{\alpha^2}\right)}{\beta^2}\psi^2}{1+2\nu_{\hat{1}\hat{3}}\psi^2+\dfrac{4}{\beta^2}\psi^2+\dfrac{1}{\alpha^2}\psi^4}E_{\hat{3}}$
$\hat{E}_2$	$\hat{E}_2=E_{\hat{2}}$
$\hat{\nu}_{13}$	$\dfrac{\nu_{\hat{1}\hat{3}}(1+\psi^4)+\left(1+\dfrac{1}{\alpha^2}-\dfrac{4}{\beta^2}\right)\psi^2}{1+2\nu_{\hat{1}\hat{3}}\psi^2+\dfrac{4}{\beta^2}\psi^2+\dfrac{1}{\alpha^2}\psi^4}$
$\hat{\nu}_{23}$	$\dfrac{\nu_{\hat{2}\hat{3}}+\psi^2\nu_{\hat{2}\hat{1}}}{1+\psi^2}$
$\hat{\nu}_{21}$	$\dfrac{\nu_{\hat{2}\hat{1}}+\psi^2\nu_{\hat{2}\hat{3}}}{1+\psi^2}$
$\hat{G}_{13}$	$G_{\hat{1}\hat{3}}\left[1+\dfrac{\beta^2\left(1+\dfrac{1}{\alpha^2}-2\nu_{\hat{1}\hat{3}}-\dfrac{4}{\beta^2}\right)\psi^2}{(1+\psi^2)^2}\right]$
$\hat{G}_{12}$	$\dfrac{G_{\hat{1}\hat{2}}G_{\hat{2}\hat{3}}(1+\psi^2)}{G_{\hat{2}\hat{3}}+\psi^2G_{\hat{1}\hat{2}}}$
$\check{G}_{23}$	$\dfrac{G_{\hat{1}\hat{2}}G_{\hat{2}\hat{3}}(1+\psi^2)}{G_{\hat{1}\hat{2}}+\psi^2G_{\hat{2}\hat{3}}}$

Примечание. $\alpha^2=E_{\hat{1}}/E_{\hat{3}}$; $\beta^2=E_{\hat{1}}/G_{\hat{1}\hat{3}}$.

Условные значения модулей упругости вследствие неучета сдвигов при их расчете по экспериментальным данным из опытов на изгиб могут снижаться до 32% от модуля упругости, полученного при испытании на растяжение.

Расчетные зависимости для определения характеристик материалов под углом φ к оси *1* в плоскости *12* имеют

9.6. Экспериментальные значения упругих характеристик для главных направлений ортотропии стеклопластиков, образованных системой двух нитей

Материал	E_x	E_y	G_{xy}	G_{xz}	G_{xy}	ν_{yx}	ν_{xy}
	ГПа						
С-I-10-65	32,5	23,8	6,1	7,1	—	0,170	0,122
С-I-19-55	25,0	19,4	4,3	5,7	4,2	0,166	0,128
С-II-21-50	22,5	18,7	3,8	4,6	—	0,155	0,135
С-II-21-39	21,6	16,6	—	—	—	0,153	0,130
С-II-32-50	13,0	19,8	4,05	—	—	0,126	0,176
С-II-36-45	10,5	18,0	—	—	—	0,115	0,188
С-II-41-42	8,3	16,4	2,8	5,1	—	0,100	0,200
С-II-12п-49	20,5	19,5	3,6	4,1	—	0,142	0,126
С-II-13п-34	17,8	12,5	2,65	3,2	3,3	0,157	0,126
С-III-17в-57	27,5	30,7	4,3	5,4	5,65	0,118	0,134
С-III-15-48	21,3	17,9	3,87	—	—	0,160	0,130
С-IV-14-49	20,6	22,0	3,75	—	—	0,138	0,166
С-V-17в-52	29,0	20,0	3,7	5,8	—	0,166	0,108

Примечания: 1. Коэффициент вариации значений упругих характеристик не превышал 7%.

2. Для материала С-I-10-65 $E_z = 12{,}2$; для С-II-36-45 $E_z = 8{,}8$ ($v = 6{,}2\%$).

3. Для материала С-II-32-50 $\nu_{xz} = 0{,}25$ и $\nu_{zy} = 0{,}14$.

9.7. Расчетные и экспериментальные значения (ГПа) модулей упругости и сдвига стеклопластиков, образованных системой двух нитей

Материал	E_1	E_1/E_x	E_2	E_2/E_y	E_3	E_3/E_z	G_{12}	G_{12}/G_{xy}	G_{13}	G_{13}/G_{xz}
С-I-10-65	33,6	1,03	26,5	1,11	11,0	0,91	5,1	0,84	6,2	0,87
С-I-19-55	24,7	0,99	20,3	1,04	8,4	—	3,7	0,87	5,6	0,99
С-II-21-50	21,3	0,95	19,5	1,03	7,8	—	3,3	0,88	5,5	1,18
С-II-32-50	14,8	1,13	23,3	1,07	7,8	—	3,2	—	6,4	—
С-II-36-45	10,6	1,02	21,1	1,17	7,2	1,09	2,8	—	6,3	—
С-II-41-42	8,7	1,05	19,7	1,14	5,5	—	2,6	0,91	6,1	1,19
С-II-12п-49	22,8	1,11	21,4	0,94	7,6	—	3,2	0,89	3,9	0,94
С-II-17в-57	29,6	1,08	32,6	1,06	8,7	—	3,9	0,90	5,5	0,94
С-III-15-48	20,6	0,96	17,4	0,97	7,7	—	3,1	0,91	4,0	9,98
С-IV-14-49	18,0	0,92	21,4	0,97	7,8	—	3,2	0,86	3,9	—
С-V-13п-34	18,8	1,06	12,2	0,98	5,6	—	2,2	0,83	2,9	0,89
С-V-17в-52	31,3	1,07	22,3	1,12	8,0	—	3,4	0,90	5,4	1,01

Примечания: 1. Расчетная система осей координат направлена вдоль осей материала *xyz*.

2. Расчетные значения упругих характеристик имеют индекс, выраженный арабскими цифрами.

следующий вид:

$$E_\varphi = \left[\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{G_{12}} + \frac{Q_{22}\cos^4\varphi + Q_{11}\sin^4\varphi - Q_{12}\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2} \right]^{-1}; \quad (9.11)$$

$$G_\varphi = \left[\frac{\cos 2\varphi}{G_{12}} + \frac{Q_{11}^2 Q_{22} + 2Q_{12}}{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}} \sin^2 2\varphi \right]^1; \quad (9.12)$$

$$\nu_\varphi = E_\varphi \left[\frac{Q_{12}(1 - 2\sin^2\varphi\cos^2\varphi) - (Q_{11} + Q_{22})\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}^2} + \frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{G_{12}} \right]. \quad (9.13)$$

Компоненты матрицы жесткости, входящие в эти зависимости, определяются через упругие характеристики композита:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}};$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}};$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_2}{1 - \nu_{21}\nu_{12}}.$$

Значения упругих постоянных рассчитываются с учетом искривления волокон по зависимостям из табл. 9.5.

Опытные значения упругих характеристик материалов трех различных типов приведены в табл. 9.8. Характеристики определяли в диапазоне напряжений, не превышающих 50% от разрушающих. В указанном диапазоне диаграммы деформирования при растяжении и сжатии этих материалов с достаточной точностью можно считать линейными (см. рис. 9.7, 9.8). Разброс значений (см. табл. 9.8) упругих постоянных незначителен.

9.8. Зависимость модуля упругости E_φ и коэффициента Пуассона ν_φ от угла вырезки образцов для стеклопластиков, образованных системой двух нитей

Угол вырезки, градус	С-II-32-50	С-IV-14-49	С-III-15-48
	E_φ, ГПа		
0	13,5	19,5	21,6
15	13,7	18,2	18,8
30	13,0	15,1	14,0
45	12,0	11,2	12,2
60	15,5	15,5	13,5
75	17,2	18,5	16,6
90	21,7	22,0	17,9
	ν_φ		
0	0,127	0,138	0,160
15	0,175	0,216	0,295
30	0,290	0,380	—
45	0,380	0,540	0,480
60	0,350	0,410	0,460
75	0,280	0,265	0,330
90	0,183	0,166	0,130

Примечание. Коэффициент вариации значений упругих характеристик не превышал 8%.

Установлено, что для материалов, отличающихся значительным углом искривления волокон основы (С-II-32-50), модули упругости в направлении основы и под углом к ней ($\varphi \leqslant 45°$) различаются незначительно. Различия в коэффициентах Пуассона для главных осей ортотропии и под углом к ним весьма существенны. Опытные значения модуля упругости и сдвига под углом φ хорошо совпадают с расчетными, вычисленными по известным формулам пересчета упругих постоянных относительно осей упругой симметрии ортотропного тела, исходя из экспериментально определяемых значений E_x, E_y, G_{xy}, E_{45} и ν_{xy} (рис. 9.10). Экспериментальные значения в главных направлениях ортотропии также хорошо совпадают с четными (см. табл. 9.8). Следовательно, упругие постоянные E_φ, G_φ, ν_φ материалов с достаточной точностью могут быть рассчитаны по свойствам исходных компонентов и их объемному содержанию.

9.4.5. Прочностные свойства. В табл. 9.9 представлены прочностные характеристики при сжатии, растяжении и изгибе * типичных материалов в главных направлениях ортотропии. Эти характеристики имеют небольшой разброс. Значительное превышение прочностных характеристик материалов при растяжении и изгибе в направлении искривленных волокон по сравнению с прочностью при сжатии не является следствием различной чувствительности этих характеристик к искривлению волокон. В табл. 9.10 сопоставлены прочностные характеристики в направлении искривленных волокон с аналогичными характеристиками в направлении прямых волокон одного и того же материала при равном объемном содержании арматуры ($\mu_1 = \mu_2$). Приведенные данные свидетельствуют о том, что искривлен-

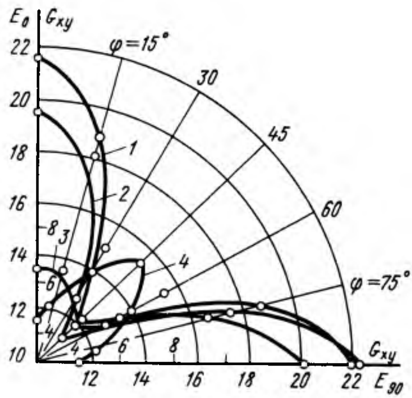


Рис. 9.10. Расчетные и экспериментальные значения (ГПа) модулей упругости и сдвига под углом к главному направлению ортотропии материала:
1 — С-IV-14-49; *2* — С-III-15-48; *3* — С-V-13п-34; *4* — С-V-13п; ——— — расчетные кривые; ○ — экспериментальные точки

* Прочность при изгибе определяли при $l/h = 20$.

9.9. Прочностные характеристики R (МПа) материалов, образованных системой двух нитей в главных направляющих ортотропии

Материал	R_x^+	R_x^-	$R_x^и$	$R_y^и$	R_y^+	R_y^-
С-I-10-65	444	292	505	545	390	350
С-I-19-55	370	262	455	500	350	335
С-II-21-50	340	226	425	467	322	317
С-II-21-39	320	—	—	—	285	—
С-II-32-50	149	117	205	350	340	274
С-II-36-45	130	112	185	334	295	260
С-II-41-42	115	105	162	318	270	240
С-II-17в-57	382	245	394	570	471	320
С-II-12п-49	296	243	372	400	298	255
С-III-15-48	337	223	388	411	270	251
С-IV-14-49	324	213	—	—	343	282
С-V-17в-52	460	210	415	410	370	260
С-V-13п-34	310	262	396	316	231	326

Примечания: 1. Здесь и далее нижние индексы «*x*» и «*y*» соответствуют направлению главных осей; верхние индексы: «+» — растяжение, «—» — сжатие, «и» — изгиб.

2. Коэффициент вариации значений характеристик не превышал 8%.

9.10. Прочностные характеристики (МПа) в направлениях армирования материалов, образованных системой двух нитей при $\mu_1 = \mu_2$

Характеристика	С-II-32-50	С-II-35-45	С-II-41-42	С-II-17в-57*	С-IV-14-49
R_x^+	149	130	115	382	324
R_y^+	340	295	270	471	343
R_x/R_y	0,44	0,44	0,43	0,81	0,94
R_x^-	117	112	105	245	213
R_y^-	274	260	240	320	282
R_x^-/R_y^-	0,43	0,43	0,44	0,76	0,75
$R_x^{\text{и}}$	205	186	162	394	376
$R_y^{\text{и}}$	350	334	318	570	553
$R_x^{\text{и}}/R_y^{\text{и}}$	0,59	0,55	0,51	0,69	0,68

* Для материалов С-II-17в-57 $\mu_1/\mu_2 = 1{,}17$; для остальных материалов $\mu_1/\mu_2 = 1$.

ные волокна практически одинаково влияют на прочность при растяжении и сжатии: увеличение степени искрив-

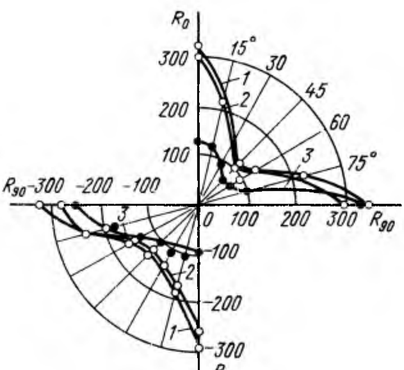


Рис. 9.11. Расчетные и экспериментальные значения прочности (МПа) при растяжении и сжатии стеклопластиков, образованных системой двух нитей под углом к главным направлениям ортотропии:
1 — СП-II-32-50; *2* — С-II-15-48; *3* — С-V-14-49; ——— — расчетные кривые; ○ — экспериментальные точки

ления волокон приводит к снижению прочности. Причем поведение рассматриваемых материалов различно при нагружении на изгиб вдоль волокон основы и утка. При изгибе в направлении волокон утка не наблюдается заметного снижения прочности с уменьшением отношения пролет: высота образца [18]. При испытании на изгиб в направлении волокон основы прочность с уменьшением отношения пролет: высота образца заметно возрастает. Прочностные характеристики под углом φ к направлению основы могут быть описаны зависимостью [20]

$$\frac{1}{R_\varphi} = \frac{1}{R_x} - \left(\frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y}\right)\sin^2\varphi - \left(\frac{1}{2R_x} + \frac{1}{2R_y} - \frac{1}{R_{45}}\right)\sin^2 2\varphi. \tag{9.14}$$

За исходные расчетные данные при этом принимаются опытные значения характеристик в главных направлениях и под углом 45° к ним. Применимость зависимости (9.14) подтверждена совпадением расчетных и экспериментальных значений этих характеристик для трех типов материалов (рис. 9.11).

Прочность при сжатии исследуемых материалов под углами φ, не равными 0 и 90°, как правило, оказывается значительно выше прочности их при растяжении (табл. 9.11). Все композиты исследованных типов имеют стабильные значения рассматриваемых характеристик, о чем свидетельствует незначительный их разброс. Средние значения прочностных характеристик, как показывают опытные данные, практически не изменяются при определении их на материалах, взятых из разных партий, но имеющих одинаковые схемы армирования и содержание арматуры.

9.4.6. Влияние структурных параметров. Некоторые типы композитов не имеют четко выраженной противофазности расположения волокон в смежных элементах. Для этих материалов характерно наличие одинаковых форм искривления волокон во всем объеме и смещение искривлений по фазе в направлении оси *1* в смежных элементах на часть периода. В зависимости от относительного смещения по фазе упаковка искривленных волокон в смежных элементах может быть однофазной, противофазной или иметь промежуточный характер. Приближенная оценка значений упругих констант материалов с искривленными волокнами, смещенными по фазе, может быть произведена по моделям для композитов с противофазно и однофазно искривленными волокнами. Погрешность расчета может быть оценена путем сравнения характеристик материалов, имеющих однофазное и противофазное расположение волокон в смежных элементах. Степень и закон искривления волокон в материале обоих типов при этом принимаются одинаковыми.

Исследования [9] показывают, что замена однофазного искривления волокон противофазным при углах наклона $\theta > 10°$ приводит к значительному росту модуля сдвига G_{13} в плоскости искривления волокон и модуля упругости E_1. Для рассмотренного диапазона изменения угла θ расхождение в значениях G_{13} сопоставляемых материалов возрастает с увеличением угла искривления волокон. Максимальное расхождение в значениях E_1 наблюдается при углах $\theta = 22 \div 23°$. Коэффициент Пуассона и модуль упругости E_3 мало чувствительны к изменению расположения волокон. Увеличение жесткости армирующих волокон существенно повышает чувствительность G_{13} и E_1 к заданному расположению волокон. При расчете E_1 и G_{13} оказывается важным точное установление характера искривления (однофазного или противофазного) волокон в материале.

Степень искривления. Численная оценка изменения упругих характеристик материалов, образованных системой двух нитей, в зависимости от угла θ представлена в работе [9]. Увеличение угла θ до 15° приводит к незначительному снижению модулей упругости E_1 и E_3. Значение модуля сдвига G_{13} при этом существенно увеличивается. Наиболее чувствителен к углу наклона волокон основы коэффициент Пуассона ν_{13} (при увеличении от 0 до 15° его значение возрастает примерно на 60%).

Уменьшение коэффициента армирования в направлении искривленных волокон при неизменном объемном содержании в материале арматуры более заметно отражается на значении G_{13}, чем на модулях упругости и коэффициенте Пуассона ν_{13}.

Увеличение жесткости армирующих волокон приводит к линейному изменению упругих характеристик композитов, образованных системой двух нитей. Применение волокон с повышенной жесткостью весьма эффективно при создании композитов с высокой сдвиговой жесткостью [9].

9.11. Зависимость предела прочности при растяжении R_φ^+ и сжатии R_φ^- типичных материалов, образованных системой двух нитей, от угла вырезки образца

Угол вырезки, градус	С-II-32-50	С-IV-14-49	С-III-15-48	С-V-12в-57
	R_φ^+, МПа			
0	149	324	337	460
$\varphi = 15$	122	160	—	—
30	94	—	—	—
45	71	117	122	137
60	75	—	—	—
75	104	226	—	—
$\varphi = 90$	340	343	270	370
	R_φ^-, МПа			
0	117	213	223	210
$\varphi = 15$	112	188	197	—
30	113	157	153	—
45	111	149	142	138
60	149	167	168	—
75	194	246	189	—
$\varphi = 90$	274	282	251	260

Примечание. Коэффициент вариации значений характеристик составлял 2—9%.

9.5. КОМПОЗИТЫ, АРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМОЙ ТРЕХ НИТЕЙ

9.5.1. Определение упругих характеристик. Упругие характеристики композитов, армированных системой трех нитей, могут быть рассчитаны по двум вариантам. В первом последовательность расчета констант двухмерно-армированной среды с трансверсально-изотропной матрицей сводится к расчету контант однонаправленной среды с ортотропной матрицей. При таком подходе происходит последовательное сглаживание неоднородности в структуре материала вследствие модификации свойства матрицы. Условия совместной работы компонентов трехмерно-армированного материала сводятся к условиям деформирования однонаправленной структуры с анизотропной матрицей. Во втором варианте расчетная модель материала представляется слоистой средой [9], составленной из ортогонально армированных слоев, упругие характеристики которых определяются с учетом коэффициентов армирования всего материала. Соединение слоев осуществляется по принципу приравнивания деформаций в плоскости, параллельной слоям, и равенства напряжений в плоскости, перпендикулярной к слоям. Оба варианта предусматривают модификацию свойств матрицы за счет устранения одного из направлений армирования перпендикулярно плоскости слоя.

При вычислении упругих характеристик слоистой модели трехмерно-армированного материала применяются два подхода. При первом используется обобщенный закон Гука для ортотропного слоистого материала в случае трехмерного деформирования. Исходя из условия равенства послоевых деформаций, параллельных плоскости слоев (условия Фойгта) и равенства напряжений, перпендикулярных плоскости слоев (условия Рейсса), вычисляются все упругие постоянные материала. При втором подходе [2] используются зависимости, в которых напряжения σ_k, перпендикулярные плоскости слоев ij, не учитываются, что следует из условий плоской задачи. Тогда свойства материала в направлении k следует рассматривать при сведении трехмерной структуры к слоистой, но уже параллельно плоскости ik либо jk.

Формулы для модулей упругости и сдвига, полученные в случае армирования высокомодульной арматурой ($E_a \gg E_c$), когда $1/n$ и ν_a^2, $\delta^{(i)}$ можно пренебречь, имеют вид

$$E_i = \mu_i E_a + \frac{1-\mu_i}{(1-\mu_j)(1-\mu_k)} E_c;$$

$$G_{ij} = \frac{(1+\mu_i)(1+\mu_j)}{(1-\mu_i)(1-\mu_j)(1-\mu_k)} G_c;$$

$$i,\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3;$$

$$i \neq j \neq k. \qquad (9.15)$$

Более сложные зависимости для расчета характеристик дает второй вариант, основанный на рассмотрении трехмерно-армированного материала как слоистой среды.

В случае соединения слоев при плоском напряженном состоянии выражения для упругих характеристик материала в плоскостях, параллельных слоям, имеют вид

$$E_i = Q_{ii} - \frac{Q_{ij}^2}{Q_{jj}}; \quad \nu_{ij} = \frac{Q_{ij}}{Q_{ii}}; \qquad (9.16)$$

$$G_{ij} = \frac{\mu_i}{\mu_i+\mu_j} G_{ij}^{(i,\ k)} + \frac{\mu_j}{\mu_j+\mu_i} G_{ij}^{(j,\ k)};$$

$$i,\ j = 1,\ 2,\ 3; \quad i \neq j. \qquad (9.17)$$

Здесь верхний индекс указывает направление волокон слоя.

Компоненты матрицы жесткости Q_{ii} и Q_{ij} при укладке двух слоев, выраженные через характеристики жесткости каждого слоя, имеют вид

$$Q_{ii} = \frac{\mu_i}{\mu_i+\mu_j} Q_{\parallel}^{(i,\ k)} + \frac{\mu_j}{\mu_j+\mu_i} Q_{\perp}^{(j,\ k)}; \qquad (9.18)$$

$$Q_{ij} = \frac{\mu_i}{\mu_i+\mu_j} Q_{ij}^{(i,\ k)} +$$

$$+\frac{\mu_j}{\mu_i+\mu_j}\,Q_{ij}^{(j,\,k)}; \qquad (9.19)$$

$$i,\ j=1,\ 2,\ 3;\quad i\neq j,$$

где $Q_{\parallel}^{(i,\,k)}$, $Q_{\perp}^{(j,\,k)}$ — компоненты жесткости смежных слоев в направлениях, соответственно параллельном и перпендикулярном направлению волокон. Они вычисляются с учетом свойств исходных компонентов и коэффициента объемного армирования:

$$Q_{\parallel}^{(i,\,k)}=\frac{\left[n_i(\mu_i+\mu_j)(1-\mu_k)+(1-\mu_i-\mu_j)(1+\mu_k)\right]E_{\text{а}}^{(i)}}{n\Pi_i(1-\mu_k)\left(1-\nu_{\text{а}}^{(i)2}\delta^{i}\right)}; \qquad (9.20)$$

$$Q_{\perp}^{(i,\,k)}=\delta^{(i)}Q_{\parallel}^{(i,\,k)};$$

$$Q_{ij}^{(i,\,k)}=\nu_{\text{а}}^{(i)}\delta^{(i)2}Q_{\parallel}^{(i,\,k)};$$

$$n_i=\frac{E_{\text{а}}^{(i)}}{E_{\text{с}}};\quad i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3; \qquad (9.21)$$

$$\delta^{(i)}=\frac{n_i\left(1-\mu_k^2\right)(1+\mu_i+\mu_j)}{n_i\left(1-\mu_k^2\right)+(\mu_i+\mu_j)\times(1-\mu_i-\mu_j)\left(1-\nu_{\text{а}}^{(i)2}\right)\times\left[n_i-1-\mu_k(n_i+1)\right]^2}. \qquad (9.22)$$

Модули сдвига рассчитывают по формуле

$$G_{ji}^{(i,\,k)}=\frac{G_{\text{а}}^{(i)}(1+\mu_i+\mu_j)}{n_i(1-\mu_k)(1-\mu_i-\mu_j)+(\mu_i+\mu_j)},$$

$$i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3;\quad i\neq j\neq k. \qquad (9.23)$$

В рассматриваемом подходе модуль упругости композита в соответствии с (9.16) вычисляется дважды; формально — при перестановке индексов j и k. Это обстоятельство следует из того, что в условиях плоской задачи упругие характеристики материала определяются только в одной плоскости. Ортотропный материал в этой плоскости имеет четыре упругие постоянные, следовательно, в трех взаимно оротгональных плоскостях по условиям плоской задачи получается 12 независимых постоянных; три из них (модули упругости) — дважды. Однако перестановка параметров μ_j и μ_k в широкой области их изменения при вычислении модуля упругости E_i по формуле (9.16) не приводит к существенным различиям в его значении.

Выражение (9.16)—(9.23) упрощаются в случае применения высокомодульной арматуры, когда $E_{\text{а}}\gg E_{\text{с}}$. Пренебрегая членами $1/n$, $\nu_{\text{а}}^2$, δ, $\nu_{\text{а}}$ и полагая $n_1=n_2=n_3=n$ из (9.16)—(9.23) для расчета модулей упругости и сдвига трехмерно-армированного композита, найдем

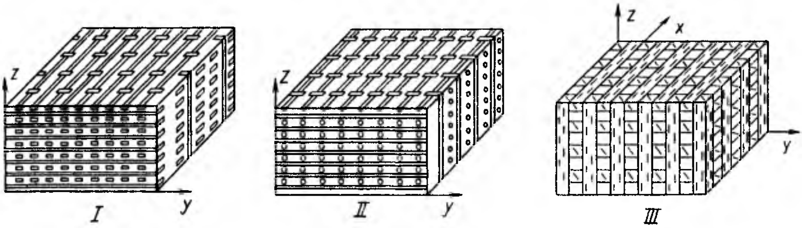
$$E_i=\mu_iE_{\text{а}}+\frac{(1+\mu_k)\left[(1-\mu_i-\mu_j)^2\mu_i+(1+\mu_i+\mu_j)\mu_j\right]}{(1-\mu_k)(1-\mu_i-\mu_j)(\mu_i+\mu_j)}E_{\text{с}}; \qquad (9.24)$$

$$G_{ij}=\frac{1+\mu_i+\mu_j}{(1-\mu_i-\mu_j)(1-\mu_k)}G_{\text{с}};$$

$$i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3;\quad i\neq j\neq k. \qquad (9.25)$$

При $i=1$, $j=2$, $k=3$ и $\mu_3=0$ формулы (9.24) и (9.25) вырождаются в зависимости (см. табл. 9.1) для упругих постоянных отдельного слоя, параллельного плоскости 12. Формулы (9.24), (9.25) весьма удобны для ориентировочного анализа изменения модулей упругости трехмерно-армированного материала в зависимости от параметров объемного армирования.

Соединение слоев при объемном напряженном состоянии приводит к сложным и громоздким зависимостям для расчета упругих постоянных материала [9]. При этом расчетные значения характеристик, вычисленные по таким зависимостям, незначительно отличаются от значений, вычисленных по (9.16)—(9.23). Последние описывают верхнюю границу модулей упругости и сдвига и нижнюю границу коэффициентов Пуассона [18]. Нижняя граница для модулей упругости E_1, E_2 и модулей сдвига соответствует св-



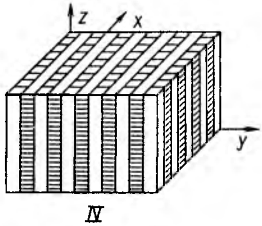


Рис. 9.12. Типичные структурные схемы армирования образцов из материалов, образованных системой трех нитей:

I — стеклопластик с шахматной схемой расположения волокон в направлении *z*; *II* — со строчной схемой; *III* — углепластик с равномерной укладкой волокон в трех направлениях; *IV* — с укладкой в двух направлениях

дению трехмерной волокнистой структуры к одномерной за счет модификации свойств матрицы. Расчетные значения модуля упругости в направлении 3 в отличие от модулей упругости в направлениях 1 и 2 в большей степени зависят от выбора исходной модели. Для слоистой модели значения модуля E_3 могут существенно различаться, что объясняется различным выбором плоскости слоя.

Использование для расчета модулей упругости упрощенных зависимостей, полученных при условии $E_a \gg E_c$, не вносит заметных погрешностей в их значения. В случае использования высокомодульной арматуры ($E_a/E_c \simeq \simeq 100$) погрешность в расчете модулей упругости по упрощенным формулам не превышает 0,5%. Коэффициенты Пуассона для слоистой модели имеют наибольшие значения в случае объемного напряженного состояния [9]. При этом в поперечных к слоям плоскостях коэффициенты Пуассона ν_{32} и ν_{31} при малом армировании материала в третьем направлении могут стать больше коэффициента Пуассона связующего.

Наименьшие значения ν_{ij} соответствуют приближенной слоистой модели в случае плоского напряженного состояния, а наибольшее — в случае соединения слоев при объемном напряженном состоянии.

9.5.2. Механические свойства. С целью установления приемлемости предлагаемых подходов к описанию свойств трехмерно-армированных материалов и оценки зависимости этих свойств от свойств исходных компонентов и структурных параметров исследования проведены на девяти различных типах композитов, которые отличались друг от друга способом создания пространственных связей, объемным содержанием, свойствами армирующих волокон и типом полимерной матрицы. Схемы армирования представлены на рис. 9.12. Изготовление материалов осуществлялось по различным схемам: прошивкой в направлении *3* пакета слоев ткани (схемы I и II) и плетением каркаса системой трех нитей (схемы III и IV). Композиты, изготовленные по этим схемам, имеют обозначения, указывающие объемное содержание и вид армирующих волокон. Например, стеклопластик, изготовленный по схеме I с общим объемным содержанием волокон, равным 59%, условно обозначен С-I-59. Структурные параметры исследованных материалов и их условное обозначение приведены в табл. 9.1. Первые два типа стеклопластиков име-

9.12. Структурные параметры материалов, армированных системой трех нитей

Материал	Объемное содержание арматуры, %				Шаг, мм, между волокнами направления *2* вдоль осей		Толщина пластины, мм
	μ_Σ	μ_1	μ_2	μ_3	1	3	
С-I-59	59,0	23,5	32,4	3,1	4,5	9,0	9
С-II-63	63,0	27,1	29,8	6,1	8,0	8,0	8
С-III-45 кв *	45,0	16,7	16,7	12,5	2,5	3,0	250
С-III-43,5 кв	43,5	19,5	19,5	4,5	3,5	3,5	250
С-III-39 кр	39,0	13,0	13,0	13,0	2,5	2,5	250
С-III-39,3 кр	39,3	17,0	17,0	5,3	3,5	3,5	250
С-IV-40 в	40,0	17,5	17,5	5,0	2,5	2,0	3
УПШ-43	43,0	14,3	14,3	14,3	3,0	3,0	100
ОП-Ш	—	—	—	—	3,0	3,0	100

* Материал С-III-45 кв в направлениях *1* и *2* армирован кварцевыми волокнами, а в направлении *3* — кремнеземными.

Примечание. Принятые обозначения: кр — кремнеземные; кв — кварцевые; в — высокомодульные волокна.

ли разные схемы укладки (шахматную I, строчную II) волокон в направлении 3.

Все эти материалы имеют линейные диаграммы деформирования при испытаниях на растяжение в направлениях укладки арматуры. На рис. 9.13 приведены типичные зависимости σ (ε) при растяжении материалов, изготовленных на основе алюмоборосиликатных, кварцевых и кремнеземных волокон. При испытании на трехточечный изгиб образцов из рассматриваемых композитов изменение прогиба от нагрузки для большинства из них имеет линейную зависимость вплоть до разрушения. Наличие некоторой нелинейности в зависимости σ (ε) для композитов на основе кремнеземных и кварцевых волокон обусловлено относительно небольшой (до 5,0%) пористостью их матриц.

Упругие постоянные в главных направлениях ортотропии материала. Рассмотрены композиты с различными комбинациями коэффициентов объемного армирования по направлениям укладки волокон, а также с различными упругими свойствами волокон, но с подобными структурными схемами армирования и с одинаковым принципом распределения арматуры по направлениям армирования. Это позволяет наиболее полно оценить влияние струк-

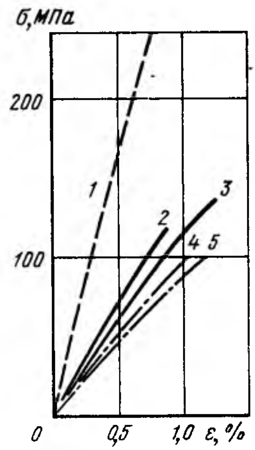


Рис. 9.13. Диаграммы деформирования при растяжении материалов, образованных системой трех нитей:

1, 2, 4 — растяжение по оси *x*; *3, 5* — растяжение по оси *z*; — — — — алюмоборосиликатные волокна; ——— — кварцевые; —— —— — кремнеземные

9.13. Расчетные и экспериментальные значения (ГПа) модулей упругости и сдвига композитов, образованных системой трех нитей

Характеристика	С-I-59		С-II-63		С-III-45 кв		С-III-43,5 кв		УП-III-43	
	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
E_1	25,0	21,1	27,7	23,4	17,8	15,5	18,6	17,1	39,4	38,4
E_1/E_x^+	1,13	0,97	1,20	1,01	1,21	1,05	1,26	1,16	1,18	1,15
E_2	29,8	26,7	28,9	25,0	17,8	15,5	18,6	17,1	39,4	38,4
E_2/E_y^+	1,02	0,92	1,03	0,90	1,26	0,99	1,26	1,16	1,18	1,15
E_3	12,8	8,5	15,1	10,5	14,5	12,8	10,1	8,02	21,5*	21,0*
E_3/E_z^-	0,92	0,61	0,89	0,62	1,34	1,08	1,42	1,13	0,90	0,88
G_{12}	4,46	3,97	4,70	4,17	2,44	2,44	2,53	2,45	2,20	2,18
G_{12}/G_{xy}	1,15	1,03	0,98	0,87	1,01	1,01	1,20	1,16	1,10	1,09
G_{13}	3,10	3,04	3,46	3,41	2,37	2,33	2,17	2,18	2,20	2,18
G_{13}/G_{xz}	0,86	0,85	0,91	0,90	1,00	0,98	0,97	1,22	1,11	1,10
G_{23}	3,35	3,26	3,52	3,48	2,37	2,33	2,17	2,18	2,20	2,18
G_{23}/G_{yz}	0,96	0,93	0,88	0,87	0,96	0,84	1,31	1,22	1,11	1,10

* Значения E_z^- для материала УП-III-43 получены на образцах, имеющих случайное искривление волокон ($\theta \approx 11°$).

турных параметров, содержания арматуры и ее свойств на упругие характеристики рассматриваемого класса композитов (табл. 9.13).

Упругие характеристики композитов, изготовленных на основе алюмоборосиликатных волокон с двумя различными схемами укладки их в направлении 3, имели близкие значения как общего коэффициента армирования, так и коэффициентов армирования в направлениях 1 и 2. Коэффициенты армирования в направлении 3 отличались примерно в 2 раза. Различие в значениях коэффициентов армирования μ_3 этих композитов существенным образом отражается на значениях модулей упругости E_z (см. табл. 9.13). Заметного расхождения в значениях остальных упругих характеристик рассматриваемых композитов не наблюдается.

При одинаковых значениях коэффициентов армирования в трех направлениях упругие свойства материалов во всех трех ортогональных плоскостях весьма близки. Для всех материалов, как показывает анализ экспериментальных данных, значения парных коэффициентов Пуассона в трех главных плоскостях армирования хорошо согласуются со значениями модулей упругости в соотношениях симметрии упругих констант.

Расчет упругих постоянных материалов осуществлялся по упрощенным зависимостям (9.16)—(9.25), описывающим верхнюю (I) и нижнюю (II) границы (см. табл. 9.13). Упругие характеристики арматуры и связующего материалов С-I-59 и С-II-63 составляли $E_a = 73{,}1$ ГПа, $E_c = 3{,}3$ ГПа, для материалов С-III-45 кв, С-III-43,5 кв — $E_a = 73{,}0$ ГПа, $E_c = 2{,}9$ ГПа. Для материалов УП-III-43 соответственно $E_a = 245$ ГПа, $E_c = 2{,}9$ ГПа. Коэффициенты Пуассона арматуры и связующего всех исследованных материалов равны соответственно: $\nu_a = 0{,}25$, $\nu_c = 0{,}35$.

Модули сдвига исследованных материалов (см. табл. 9.13) хорошо описываются упрощенными зависимостями. Некоторое превышение их экспериментальных значений объясняется искривлением армирующих волокон, которые не учитываются в расчетной модели. По этой же причине имеет место некоторое превышение расчетных значений модулей упругости материалов, изготовленных на основе кремнеземных, кварцевых и углеродных волокон. Расчет модулей упругости с учетом искривлений волокон дает хорошее совпадение их расчетных и экспериментальных значений (см. табл. 9.13). При близких значениях коэффициентов армирования в трех направлениях лучшее описание модулей упругости дает второй подход, использование которого в случае больших различий в коэффициентах армирования порождает существенную погрешность для модуля упругости в направлении наименьшего содержания арматуры. Для материалов с малым μ в одном направлении армирования хорошее совпадение расчетных и экспериментальных значений E_i наблюдается при использовании зависимостей (9.24), (9.25) первого подхода. Расчетные значения коэффициентов Пуассона вычислялись по зависимостям слоистой модели в случае соединения слоев при объемном напряженном состоянии [18]. Эти зависимости описывают верхний и средний уровни изменения коэффициентов Пуассона. При $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ совпадение расчетных и экспериментальных значений ν_{ij} удовлетворительное. При малом μ_3 удовлетворительное совпадение опытных и расчетных значений наблюдается только для коэффициента Пуассона ν_{32}.

Совпадение расчетных и экспериментальных значений упругих постоянных под углом к направлениям армирования (рис. 9.14) вполне удовлетворительное. Опытные значения характеристик оказались несколько выше расчетных. Особенно отчетливо это превышение (до 10%) наблюдается в диапазоне углов 15—30 и 60—75°. Разброс характеристик незначителен: коэффициент вариации их значений не превышал 7%.

Прочность при одноосном нагружении. Прочностные характеристики при растяжении в направлении армирования, как показывает анализ данных табл. 9.14, значительно отличаются от прочностных характеристик при изгибе и сжатии. Особенно это характерно для второго типа материалов, для которого, несмотря на сравнительную близость значений μ (см. табл. 9.12) в направлении x и y, прочностные характеристики при рас-

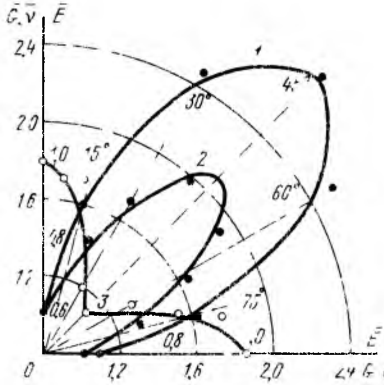


Рис. 9.14. Расчетные и экспериментальные значения упругих характеристик под углом к главному направлению ортотропии материала, образованного системой трех нитей: *1* — $\bar{\nu}_\alpha = \nu_\alpha/\nu_{21}$; *2* — $\bar{G}_\alpha = G_\alpha/G_{12}$; *3* — $\bar{E}_\alpha = E_\alpha/E_1$; ——— — расчетные кривые; ● — экспериментальные точки

9.14. Прочностные характеристики (МПа) стеклопластиков, образованных системой трех нитей из алюмоборосиликатных волокон

Характеристика	С-I-59		С-II-63	
	Значение характеристики	Коэффициент вариации v, %	Значение характеристики	Коэффициент вариации v, %
R_x	265	5,0	216	4,0
R_y	460	7,8	472	2,9
R_x^-	244	4,4	176	5,4
R_y^-	330	8,0	285	8,3
R_z^-	482	4,1	502	6,4
$R_x^и$	322	5,0	300	8,0
$R_y^и$	465	4,2	500	7,5
R_{xz}	104	9,6	66	2,1
R_{yz}	123	9,1	–	[illegible]

9.15. Прочностные характеристики (МПа) материалов, образованных системой трех нитей, из кремнеземных, кварцевых и углеродных волокон

Характеристика	С-III-39 кр		С-III-45 кв		УП-III-43	
	Значение характеристики	Коэффициент вариации v, %	Значение характеристики	Коэффициент вариации v, %	Значение характеристики	Коэффициент вариации v, %
R_x^+	160	10,7	138	8,4	178	11,2
R_z^+	180	12,4	240	11,2	195	4,3
R_x^-	183	12,1	218	8,6	180	4,5
R_y^-	168	2,9	197	10,0	179	4,7
R_z^-	178	4,7	161	4,2	177	5,0
$R_z^и$	79	16,5	63	6,1	202	5,8
R_{xz}	70	7,5	84	7,7	107	7,4
R_{yz}	70	9,2	111	10,1	124	2,9

тяжении различаются более чем в 2 раза.

Прочности при растяжении и сжатии в направлении y оказываются на 60% больше соответствующих значений характеристик направления x см. табл. 9.14), в то время как разли-

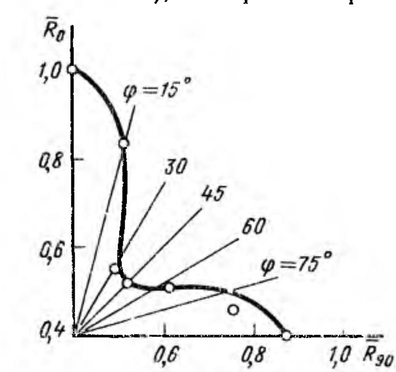


Рис. 9.15. Зависимость относительного значения прочности при растяжении стеклопластиков, образованных системой трех нитей от угла вырезки образца по отношению к главным направлениям ортотропии:

——— – расчетные кривые; ● — экспериментальные точки

чия в коэффициентах армирования для этих направлений не превышают 10%. Такое расхождение в значениях указанных прочностей в значительной степени обусловлено структурой армирования [18]. Прочность при сдвиге этих материалов по сравнению с другими характеристиками (табл. 9.15) достаточно высокая. Данные табл. 9.15 показывают, что при равных коэффициентах армирования в трех направлениях (С-III-39 кр и УП-III-43) значения прочности в указанных направлениях одинаковы. Характерной особенностью рассматриваемых материалов является стабильность значений прочности при изгибе: изменение отношения пролет к высоте образца не вносит существенных изменений в их значения.

Зависимость прочности исследованных материалов от угла вырезки образца по отношению к направлениям армирования показана на рис. 9.15. Здесь же приведены расчетные значения. Экспериментальные значения прочности, как видно из рис. 9.15, удовлетворительно согласуются с расчетными.

9.5.3. Влияние структурных факторов и полимерной матрицы на механические свойства. О важности учета влияния **полимерной матрицы** свидетельствуют данные экспериментов (табл. 9.16), полученные на двух различных в технологическом отношении типах матриц — эпоксидной ЭДТ-10 и фенолформальдегидной (ФН). Все материалы изготавливались по одной и той же схеме армирования, в которой распределение волокон по направлениям x и y было одинаковым.

Анализ экспериментальных данных этих материалов (см. табл. 9.16) показывает, что стеклопластики с матрицей ФН имеют меньшее значение модулей сдвига и модуля упругости в трансверсальном направлении, чем материалы с матрицей ЭДТ-10, в то время как объемное содержание арматуры в последних ниже. Снижение характеристик и увеличение разброса их значений для стеклопластиков с матрицей ФН обусловлено относительно высокой пористостью этих материалов. Это подтверждает и сопоставление расчетных и экспериментальных зна-

9.16. Зависимость упругих (ГПа) и прочностных (МПа) характеристик композитов, образованных системой трех нитей, от типа полимерной матрицы

Характеристика	Тип волокон, матрицы		
	Кварцевые, ЭДТ	Кварцевые, ФН	Кремнеземные, ЭДТ-10
E_x	14,7	15,7	16,7
E_1/E_x	1,16	1,13	0,93
E_z	7,0	5,4	8,5
E_3/E_z	1,13	1,45	0,95
G_{xy}	2,1	1,3	2,2
G_{12}/G_{xy}	1,16	1,95	1,05
G_{xz}	1,7	0,45	2,1
G_{13}/G_{xz}	1,22	4,95	0,97
R_x^+	155	104	92
R_x^-	170	65	250
R_z^-	224	217	300
R_{xy}	109	36	100
R_{xz}	79	26	71
μ_Σ, %	43,5	45,4	39,3
μ_3	5,3	5,4	5,8
Пористость, %	4,5	13,9	6,4

Примечания: 1. В этой и последующих таблицах расчетные значения характеристик обозначены снизу цифровыми индексами, а экспериментальные — буквенными.

2. Коэффициент вариации упругих характеристик не превышал 9%, а прочностных — 11%.

чений упругих постоянных (см. табл. 9.16). Расчетные значения вычислялись по приближенным формулам (9.15). Упругие характеристики матриц были весьма близки по значениям и при расчете принимались равными $E_c = 2980$ МПа, $\nu_c = 0{,}35$, $E_a = 73\,100$ МПа, $\nu_a = 0{,}25$. Для материалов с матрицей ФН, пористость которых составляла 13,9%, экспериментальные значения E_z значительно ниже расчетных. Особенно большое

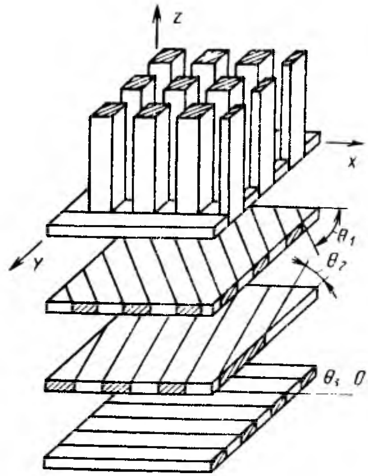


Рис. 9.16. Схема композитов с переменным углом укладки по толщине

расхождение между расчетными и экспериментальными значениями имеется для модулей сдвига. Совпадение расчетных и экспериментальных значений упругих постоянных стеклопластиков с матрицей ЭДТ-10 вполне удовлетворительное.

Прочность при сдвиге композитов на связующем ЭДТ-10 более чем в 3 раза превышает аналогичную характеристику композитов на основе матрицы ФН (см. табл. 9.16). Существенное расхождение значений характерно и для прочности при растяжении и сжатии указанных материалов. Композиты с эпоксидной матрицей имеют прочность при растяжении в направлениях основного армирования в 1,5 раза выше (при сжатии в 2,5 раза), чем прочность материалов с матрицей ФН в этих же направлениях. Различие в значениях коэффициентов армирования этих материалов невелико.

Влияние угла укладки арматуры (рис. 9.16) по толщине композита на его свойства оценено на двух типах материалов. Первый из них в направлениях *x*, *y*, *z* содержал одинаковое количество арматуры, а под углом ±45° (в плоскости *xy*) — в 2 раза меньше. Второй тип отличался тем, что во всех направлениях (кроме

9.17. **Характеристики стеклопластиков, образованных системой трех нитей**

Характеристика	Значения характеристики	Коэффициент вариации v, %	Значения характеристики	Коэффициент вариации v, %
	Тип 1, $\mu = 0{,}56$		Тип 2, $\mu = 0{,}5$	
E_x, ГПа	20,7	2,1	17,4	12,9
E_1/E_x	0,9	—	0,87	—
E_z, ГПа	16,7*	8,7	16,2	9,0
E_3/E_z	1,10	—	0,97	—
G_{xy}, ГПа	6,9	6,1	5,4	3,5
G_{12}/G_{xy}	0,77	—	1,07	—
G_{xz}, ГПа	5,5	7,1	3,5	7,0
G_{13}/G_{xz}	0,55	—	0,77	—
$R_{\bar{x}}$, МПа	171	7,2	182	7,3
R_z, МПа	181	6,9	170	8,6
R_{xz}, МПа	120	3,6	87	8,4
R_{xy}, МПа	191	9,5	167	5,8
ν_{xz}	0,215	6,4	0,22	5,2
ν_{13}/ν_{xz}	0,84		0,71	—
ν_{yx}	—	—	0,31	8,8
ν_{21}/ν_{yx}	—	—	0,97	—

* При наличии искривленных волокон направления z среднее значение $E_z = 12{,}5$ ГПа.

направления z) содержалось одинаковое количество арматуры, а в направлении z — в 1,11 раза больше, чем в каждом из остальных направлений. В качестве арматуры использовались алюмоборосиликатные волокна, а связующим являлось ЭДТ-10.

Стеклопластик первого типа, как видно из анализа данных табл. 9.17, отличается высокими характеристиками сопротивления сдвигу в плоскостях xy (укладки основной арматуры) и xz. Высокие значения модуля сдвига и прочности при сдвиге в плоскости xy обусловлены укладкой арматуры под углом $\pm 45°$.

О реализации упругих свойств исходных компонентов (арматуры и связующего) в исследованных материалах можно судить по сопоставлению расчетных и экспериментальных значений их упругих постоянных. Расчет упругих характеристик рассматриваемого типа материалов проводился путем сведения реальной их структуры к слоистой модели.

При расчете характеристики арматуры и связующего приняты равными: $E_a = 73$ ГПа, $E_c = 2{,}9$ ГПа, $\nu_a = 0{,}25$, $\nu_c = 0{,}35$. Согласованность расчетных и экспериментальных данных модулей упругости достаточно хорошая, а также модуля сдвига в плоскости xy, т. е. в плоскости основного расположения арматуры. Несколько завышенные его экспериментальные значения для стеклопластика типа 1 обусловлены наличием искривленных волокон в плоскости xz.

Для модуля сдвига в плоскостях, перпендикулярных плоскости основного расположения арматуры, как следует из табл. 9.17, имеет место существенная несогласованность между расчетными и экспериментальными (последние выше расчетных) значениями для обоих типов исследованных материалов. Такое явление обусловлено двумя факторами: наличием технологических дефектов, что особенно свойственно стеклопластику первого типа, и влиянием косоугольной укладки арматуры под углом $\pm 45°$ в плоскости xy на значения этих характеристик. Завышенное значение большинства упругих характеристик (выше расчетного) свидетельствует о высокой реализации свойств исходных компонентов в композите (см. табл 9 17).

9.5.4. Особенности свойств трехмерно-армированных (3Д) углерод-углеродных композитов. О преимуществах и недостатках углерод-углеродных материалов 3Д по сравнению с обычными традиционными полимерными материалами аналогичной структуры можно судить по данным табл. 9.18. Эти данные получены на пространственно-армированных материалах, каркас которых был создан системой трех взаимно ортогональных волокон [10]. В качестве арматуры для их изготовления использовали жгуты углеродных волокон с модулем упругости $2 \times \times 10^5$ МПа и прочностью $3 \cdot 10^3$ МПа. Материалы, изготовленные на основе полимерной и углеродной матриц, имели равномерное распределение арматуры по трем ортогональным направлениям. Расчетные значения модулей упругости и сдвига этих материалов представлены в табл. 9.18. Расчет проводили без учета пористости матрицы. При расчете принято, что упругие характеристики углеродных волокон не изменяются с повышением температуры. Совпадение расчетных и экспериментальных значений модулей упругости и сдвига для углепластика на основе полимерной матрицы, как видно из данных табл. 9.18, хорошее.

Для углепластика с углеродной матрицей расчетные значения упругих характеристик плохо согласуются с опытными данными. Расчетное значение модуля упругости оказывается существенно ниже экспериментального. Для модуля сдвига получается противоположный результат — экспериментальные значения более чем в 2 раза ниже расчетных. Такое явление объясняется тем, что в процессе создания углеродной матрицы происходит науглероживание волокон, что способствует повышению их жесткости. Кроме того, жесткость углеродной матрицы оказывается значительно выше жесткости исходной полимерной матрицы.

Прочностные характеристики углерод-углеродных материалов также чувствительны к технологическому режиму их создания. Замена полимерной матрицы на углеродную в меньшей степени отражается на прочности при сжатии материала и в большей степени влияет на прочность при растяжении и изгибе. Прочность при сдвиге углерод-углеродных материалов как высокотемпературных весьма высока и мало отличается от прочности слоистых материалов на основе полимерной матрицы.

Рассматриваемые углерод-углеродные материалы при нагружении на растяжение в направлении армирования, так же как и материалы с полимерной матрицей аналогичной структуры, имеют линейную зависимость $\sigma(\varepsilon)$ до разрушения. Кривые деформирования этих материалов при сжатии имеют отчетливо выраженный перелом, свидетельствующий о качественных изменениях в механизме передачи усилий. Напряжения, при которых наблюдается перелом в зависимости $\sigma^-(\varepsilon)$, составляет 0,55—0,60 от предела прочности [18].

9.18. Характеристики углепластиков 3Д на основе углеродной и полимерной матриц

Характеристика	Матрица	
	углеродная	полимерная
E_x^-, ГПа	50 0	36,0
E_1/E_x^-	0,69	0,93
G_{xy}, ГПа	0,87	2,18
G_{12}/G_{xy}	2,76	0,92
R_x^-, МПа	103	180
R_x^+, МПа	14	177
$R_x^и$, МПа	40	202

Примечание. Коэффициент вариации для упругих характеристик составляет 4—6%, для прочностных — 9—11%.

О влиянии структуры армирования на формирование упругих свойств углерод-углеродных материалов можно судить по данным, полученным при исследовании двух видов структур. ортогонально-армированной в трех направлениях и с переменной укладкой по толщине; их структурные параметры приведены в табл. 9.19. Всего исследовано четыре типа материалов (1—4). Причем материал типа 1 имел два варианта (А и Б) одинаковой структуры, различие состояло только в характере распределения волокон по направлениям армирования. Материал типа 2 имел ортогональное расположение волокон по трем направлениям и одинаковое их объемное содержание, но его изготовление проходило без повторной графитизации. Структура армирования материала типа 4 отличалась от первых трех тем, что угол укладки волокон в плоскости xy изменялся по толщине, т. е. каждый последующий слой по отношению к

9 19. Структурные параметры композитов

Характеристика	Тип материала: 1 А	1 Б	2	3	4
Структура армирования	ортогональная в трех направлениях (3Д)				с переменным углом укладки по высоте (Мод 3)
Распределение арматуры по осям армирования, %:					
x	44	33,3	33,3	44	71 (в плоскости xy)
y	44	33,3	33,3	44	—
z	12	33,3	33,3	12	29
Плотность исходной структуры, г/см^3	0,60	0,65	0,66	0,76	0,45
Матрица	Пек, графитизация за два цикла		Пек, графитизация за один цикл	ПУ *	ПУ *
Плотность материала, г/см^3	1,56	1,57	1,52	1,58	1,58

* Пироуглеродная матрица.

9.20. Прочностные (МПа) и упругие характеристики (ГПа) в зависимости от схемы армирования и распределения арматуры

Характеристика	Тип композита: 1 А	1 Б	2	3	4
R_x^-	87	60	133	100	56
R_z^-	66	55	138	57	133
R_{xy}	21	31	22	40	42
R_{xz}	15	20	18	26	36
E_x	42	62	50	47	20
E_z	28	55	50	13	23
G_{xy}	1,04	1,30	1,1	2,5	4,5
G_{xz}	0,90	1,10	0,94	1,2	0,85

Примечание. Коэффициент вариации не превышал 10% при определении прочностных характеристик и 7% при определении упругих.

предыдущему поворачивался на угол 60°. Пакет таких слоев пронизывался перпендикулярно плоскости xy волокнами направления z.

Из сравнения характеристик материалов типа 1 (табл. 9.20) следует, что равномерное распределение волокон по трем ортогональным направлениям является наиболее предпочтительным для формирования свойств углерод-углеродных композитов. Их модули упругости и сдвига значительно выше, чем у материалов с неравномерным распределением. Положительное влияние на эти характеристики оказывает и повторная графитизация (см. табл. 9.20, тип 2 и тип 1Б). Сопоставление расчетных и экспериментальных значений этих материалов [18] свидетельствует о хорошем согласовании расчетных и экспериментальных значений модулей сдвига композитов, изготовленных по обычной технологии методом пропитки каменноугольным пеком. Для модулей упругости имеет место заметное превышение экспериментальных значений над расчетными, что обусловлено неучетом при расчете эффекта воздействия углеродной матрицы на свойства волокна.

При расчете модуль упругости углеродной матрицы принят равным 6110 МПа (усредненные данные эксперимента), волокон — $2,2 \cdot 10^5$ МПа. Содержание пор для всех исследованных материалов было примерно одинаковым и равным 18%.

Увеличение циклов графитизации для материалов с пековой матрицей приводит к значительному отклонению от установленного уровня значений модуля сдвига и особенно модулей упругости. Большое значение имеет также характер распределения волокон в формировании упругих свойств этого класса материалов: равномерное распределение в большей степени способствует науглероживанию волокон всех направлений армирования, а неравномерное — преимущественно в направлении меньшей плотности.

Для материалов с пироуглеродной матрицей удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных значений наблюдается в основном для моделей упругости, причем незначительное превышение экспериментальных значений над расчетными свойственно только для направлений x, y (основного армирования). Объясняется это тем, что процесс создания материалов с пироуглеродной матрицей способствует образованию закрытых пор и в меньшей степени (по сравнению с пековой) способствует науглероживанию волокон [11]. Наличие пор заметно снижает экспериментальные значения, но при расчете это не учитывается. Наличие пор в материале (в объеме 18%) приводит к снижению значений модулей сдвига в 1,7—3,6 раза.

Различие по прочностным характеристикам (см. табл. 9.20) свидетельствует о зависимости их от структуры армирования и технологии изготовления. Это следует из сопоставления композитов типов 15 и 2. Несмотря на идентичность их структурных параметров, характеристики прочности при сжатии различаются более чем в 2 раза.

9.6. ЧЕТЫРЕХНАПРАВЛЕННЫЕ КОМПОЗИТЫ (4Д)

На примере материала, схема расположения волокон в котором показана на рис. 9.17, исследовано поведение четырехнаправленных композитов при статическом нагружении. Объемное содержание арматуры в композите составляло 40%. Исследования проводились на образцах, вырезанных как в направлении главных осей упругой симметрии (*1*, *2*, *3*), так и в направлении укладки волокон в направлении осей $\bar{1}\,\bar{2}\,\bar{3}$ (ось $\bar{1}$ совпадает с направлением волокон). Образцы испытывались на растяжение, сжатие, изгиб и сдвиг. Испытания на растяжение и сжатие образцов свидетельствуют о том, что как в направлении укладки волокон, так и в направлении главных осей упругой симметрии материал ведет себя упруго при достаточно высоких значениях напряжений (0,5—0,6 от разрушающих) (рис. 9.18, *а*).

Предельные деформации при сжатии в направлении волокон оказываются существенно выше (на 40—60%), чем по главным направлениям.

Кривые нагрузка—прогиб (p — w), полученные при поперечном изгибе образцов (рис. 9.18, *б*), имеют характер, аналогичный характеру кривых $\sigma \sim \varepsilon$. Поведение материала при нагружении на кручение не имеет заметных отличий от двух рассмотренных видов нагружения. Кривые $\tau_{max} \sim \sim \gamma$ имеют также значительный линейный участок (рис. 9.18, *в*).

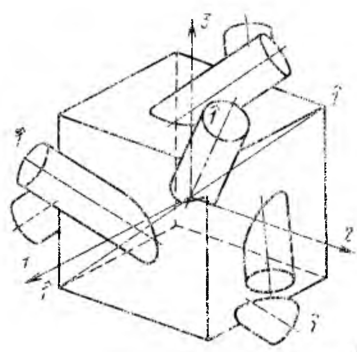
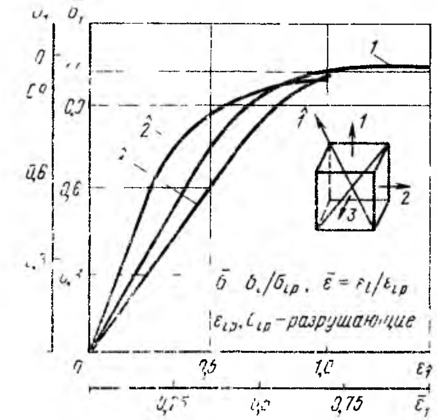
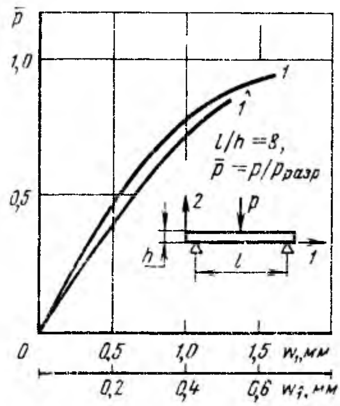


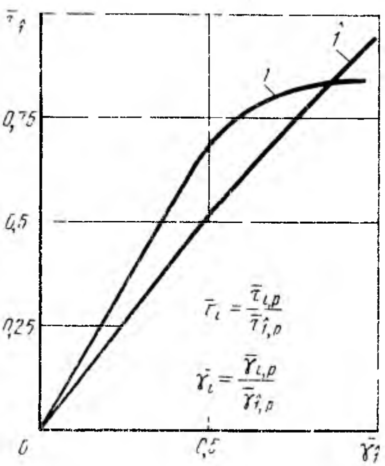
Рис. 9.17. Геометрия четырехнаправленной структуры



а)



б)



в)

Рис. 9.18. Кривые деформирования 4Д композита при нагружении на сжатие (*а*), поперечный изгиб (*б*) и кручение (*в*) в направлениях:

1 — главных осей упругой симметрии; $\hat{1}$, $\hat{2}$ — соответственно вдоль одного из направлений армирования и в направлении, перпендикулярном ему

Построение зависимостей для определения упругих свойств рассматриваемого класса композитов осуществлялось на основе метода усреднения жесткостей отдельных направлений (однонаправленных материалов) при условии: 1) равенства деформаций четырех структурных элементов (однонаправленных материалов), расположенных по отношению к ребрам куба по направлениям, заданным таблицей направляющих косинусов вдоль диагоналей куба; 2) связующее по направлениям распределено пропорционально объему арматуры каждого направления. Тогда компоненты тензора жесткости 4Д композита можно представить в виде

$$B_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{4} B^0_{ijkl} l^{(n)}_{i\alpha} l^{(n)}_{j\beta} l^{(n)}_{k\gamma} l^{(n)}_{l\delta};$$

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ i,\ j,\ k,\ l = 1,\ 2,\ 3, \tag{9.26}$$

где B^0_{ijkl} — компоненты тензора жесткости однонаправленного монотропного материала, латинские индексы отнесены к системе его главных осей, а греческие — к системе осей, ориентированных вдоль ребер куба.

Из (9.26) получим в матричной записи

$$B_{\alpha\alpha} = B_{11} = \frac{1}{9}\left(B^0_{11} + 4B^0_{22} + 4B^0_{12} + 8B^0_{66}\right);$$

$$B_{\alpha\beta} = B_{12} = \frac{1}{9}\left(B^0_{11} + B^0_{22} + 4B^0_{12} + 3B^0_{23} - 4B^0_{66}\right);$$

$$B_{\gamma\gamma} = B_{66} = \frac{1}{9}\left(B^0_{11} + B^0_{22} + \right. \tag{9.27}$$

$$+3B_{44}^{0}-2B_{12}^{0}+2B_{66}^{0});$$

$$\alpha,\ \beta=1,\ 2,\ 3;\ \ \gamma=4,\ 5,\ 6.$$

Оставшиеся 12 компонент матрицы жесткости $B_{\alpha j}$, $B_{\gamma\delta}$ равны нулю при α, равном 1, 2, 3 (γ и δ равны 4, 5, 6). Здесь и в дальнейшем компоненты (константы) для главных направлений упругой симметрии материала не имеют сверху индекса.

В результате усреднения получены три независимые упругие постоянные, характеризующие 4Д композит как материал с кубической симметрией упругих свойств.

Выражения для компонент матрицы жесткости однонаправленного материала, входящие в правую часть (9.27), имеют вид

$$B_{11}^{0}=\frac{\left(1-\nu_{23}^{0}\right)E_{1}^{0}}{1-\nu_{23}^{0}-2\nu_{12}^{0}\nu_{21}^{0}};$$

$$B_{22}^{0}=\frac{\left(1-\nu_{21}^{0}\nu_{12}^{0}\right)E_{2}^{0}}{\left(1+\nu_{23}^{0}\right)\left(1-\nu_{23}^{0}-2\nu_{12}^{0}\nu_{21}^{0}\right)};$$

$$B_{12}^{0}=\frac{E_{2}^{0}\nu_{21}^{0}}{1-\nu_{23}^{0}-2\nu_{12}^{0}\nu_{21}^{0}};$$

$$B_{23}^{0}=\frac{\left(\nu_{23}^{0}+\nu_{21}^{0}\nu_{12}^{0}\right)E_{2}^{0}}{\left(1-\nu_{23}^{0}\right)\left(1-\nu_{23}^{0}-2\nu_{12}^{0}\nu_{21}^{0}\right)};\qquad(9.28)$$

$$B_{66}^{0}=G_{12}^{0};\ \ B_{44}^{0}=G_{23}^{0}=\frac{B_{22}^{0}-B_{23}^{0}}{2}=\frac{E_{2}^{0}}{2\left(1+\nu_{23}^{0}\right)}.$$

Технические постоянные 4Д композита в главных направлениях упругой симметрии выражаются через компоненты матрицы жесткости:

$$E=\frac{\left(B_{11}^{0}+2B_{12}\right)\left(B_{11}-B_{12}\right)}{B_{11}+B_{12}};$$

$$\nu=\frac{B_{12}}{B_{22}+B_{12}}.\qquad(9.29)$$

$$G=B_{66}.$$

Технические постоянные в системе координат $\widehat{1}\,\widehat{2}\,\widehat{3}$, одна из осей которой совпадает с направлением волокон, выражаются через эти же компоненты матрицы жесткости:

$$E_{\widehat{1}}=\frac{3B_{66}\left(B_{11}+2B_{12}\right)}{B_{11}+B_{66}+2B_{12}};$$

$$E_{\widehat{2}}=\frac{4B_{66}\left(B_{11}+2B_{12}\right)\left(B_{11}-B_{12}\right)}{B_{11}\left(B_{11}+2B_{66}\right)+B_{12}\left(B_{11}-2B_{12}\right)}=\frac{4G}{1+\dfrac{2G(1-\nu)}{E}};\qquad(9.30)$$

$$\nu_{\widehat{2}\,\widehat{1}}=\frac{B_{11}-2B_{66}+2B_{12}}{2\left(B_{11}+B_{66}+2B_{12}\right)}=\frac{E_{\widehat{1}}}{2G}-1;$$

$$\nu_{\widehat{2}\,\widehat{3}}=1-\frac{2\left(B_{11}-B_{12}\right)\times\left(B_{11}+4B_{66}+2B_{12}\right)}{3B_{11}\left(B_{11}+2B_{66}\right)+B_{12}\left(B_{11}-2B_{12}\right)}=1-\frac{2(1-2\nu)}{3}\frac{E_{\widehat{2}}}{E_{0}}-\frac{E_{\widehat{2}}}{6G};$$

$$G_{\widehat{2}\,\widehat{3}}=\frac{3B_{66}\left(B_{11}-B_{12}\right)}{2\left(B_{11}+B_{66}-B_{12}\right)}=\left[\frac{1}{G}+\frac{4}{3}\left(\frac{1}{E}-\frac{1}{E_{\widehat{2}}}\right)\right]^{-1};$$

$$G_{\widehat{1}\,\widehat{2}}=\frac{3B_{66}\left(B_{11}-B_{12}\right)}{B_{11}+4B_{66}-B_{12}}=\left[\frac{1}{G}+\frac{8}{3}\left(\frac{1}{E}-\frac{1}{E_{\widehat{2}}}\right)\right]^{-1}$$

Иногда технические постоянные в главных направлениях упругой симметрии композита легко определяются экспериментально, однако возникает необходимость определения упругих постоянных в системе координат $\widehat{1}\,\widehat{2}\,\widehat{3}$. Поэтому приведем зависимости, связывающие компоненты матрицы жесткости B_{ij} с техническими постоянными:

$$B_{11} = \frac{E(1-\nu)}{1-\nu-2\nu^2} =$$

$$= 4B_{\hat{2}\hat{2}} - 3B_{\hat{1}\hat{1}};$$

$$B_{12} = \frac{E\nu}{1-\nu-2\nu^2} =$$

$$= 2B_{\hat{2}\hat{2}} - B_{\hat{1}\hat{1}} - 2B_{\hat{5}\hat{5}}; \quad (9.31)$$

$$B_{66} = G = B_{\hat{5}\hat{5}} - 2B_{\hat{2}\hat{2}} + 2B_{\hat{1}\hat{1}};$$

$$B_{22} = B_{33} = B_{11}; \quad B_{13} = B_{23} =$$

$$= B_{12}; \quad B_{44} = B_{55} = B_{66}.$$

Зная B_{ij}, по формулам (9.30) определяем технические постоянные в системе координат $\hat{1}\hat{2}\hat{3}$.

Экспериментальная проверка полученных зависимостей показывает, что модуль упругости в направлении главных осей упругой симметрии хорошо описывается ими. Причем модули упругости в направлении волокон более чем на порядок превосходят значения модулей упругости в направлении главных осей упругой симметрии. Для коэффициентов Пуассона имеет место обратное явление — в последнем направлении их значения в 3—4 раза выше, чем при нагружении в направлении волокон. Расчетные значения остальных упругих постоянных, в особенности модулей сдвига, существенно отличаются от экспериментальных. Причем даже качественная картина изменения расчетных значений модулей сдвига не согласуется с экспериментом. Максимальное значение модуля сдвига согласно расчетным данным соответствует главным плоскостям упругой симметрии, т. е. $G_{12} = G_{max}$, в то время как экспериментальное его значение в этой плоскости оказывается в 5—6 раз ниже модуля сдвига $G_{\hat{1}\hat{2}}$ в плоскости, параллельной одному из направлений укладки волокон.

Прочность при сжатии в одном из направлений укладки волокон более чем в 3 раза превышает прочность по главным направлениям упругой симметрии. Таким образом, характер изменения прочностных и жесткостных свойств материала аналогичен. Анализ данных свидетельствует о том, что расположение арматуры под углом к плоскости, в которой приложена внешняя нагрузка, не обеспечивает реализацию ее свойства точно так же, как и в случае нагружения однонаправленного материала в плоскости, перпендикулярной армированию. Поэтому использование подходов, основанных на методах суммирования жесткостей, для оценки свойств 4Д композита в главных направлениях упругой симметрии может привести к большим погрешностям.

Так как некоторые из зависимостей рассмотренных подходов удовлетворительно описывают упругие характеристики 4Д композита, сравним последние с аналогичными характеристиками других хорошо изученных ортогонально армированных материалов. Например, отношение модуля сдвига в плоскости, параллельной одному из направлений укладки волокон 4Д композита, к максимальному модулю сдвига G_{45} в плоскости ортогонально армированного материала определяется так:

$$\frac{G_{\hat{1}\hat{2}}}{G_{12}^{45}} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9}\,\frac{2G_{12}^0 + 3G_{23}^0}{B_{11}^0 + B_{22}^0 - 2B_{12}^0}, \quad (9.32)$$

а отношение $G_{\hat{1}\hat{2}}$ 4Д материала к модулю сдвига G_{12} материала, армированного в трех ортогональных направлениях (3Д) с одинаковым коэффициентом армирования, составляет

$$\frac{G_{\hat{1}\hat{2}}}{G_{12}} = \frac{B_{\hat{6}\hat{6}}}{B_{66}} = 1 + \frac{1}{3}\,\frac{B_{11} + B_{22} - 2B_{12}^0 - 4G_{12}^0}{2G_{12}^0 + G_{23}^0} =$$

$$= \frac{\mu E_a}{6E_m} + 1 \simeq \frac{E_1^0}{6E_m} + 1. \quad (9.33)$$

По модулям упругости как в направлении главных осей упругой симметрии, так и в направлении укладки волокон 4Д композиты значительно уступают ортогонально армированным в трех направлениях материалам. Так, отношение максимального значения, соответствующего одному из направлений волокон 4Д композита, к модулю упругости в направлении главных осей упругой симметрии 3Д композита составляет $E_{\overset{\frown}{1}}/E_1 = 0{,}8$, а $E/E_1 \simeq 0{,}13$.

Анализ расчетных зависимостей показывает, что никакое многонаправленное армирование, приводящее к кубической симметрии упругих характеристик, не позволяет получать значения модуля упругости вдоль главных осей упругой симметрии большим, чем в материале, армированном в трех ортогональных направлениях.

Эти выводы хорошо подтверждаются экспериментальными данными. Ниже приведены отношения значений характеристик 4Д композита к характеристикам 3Д композита ($\mu_{4Д} \cong \mu_{3Д}$):

E/E_1 . . .	0,071	$G_{\overset{\frown}{1}\overset{\frown}{2}}$	11,00
$E_{\overset{\frown}{1}}/E_1$ . . .	0,90	R^{-}/R^{-}_{1} . . .	0,23
G/G_{12} . . .	2,00	$R_{\overset{\frown}{1}}/R^{-}_{1}$ . . .	0,72

Отношение экспериментальных значений модулей упругости в направлении армирования хорошо согласуется с расчетным. Явное превосходство у 4Д композита над 3Д композитом лишь в модулях сдвига. По остальным приведенным характеристикам они значительно уступают последнему. Однако увеличение одних характеристик за счет снижения других в 4Д композите эффективно достигается изменением угла наклона волокон, параллельных диагоналям правильного параллелепипеда. Увеличение угла приводит к возрастанию модулей упругости и к снижению модулей сдвига, т. е. значения упругих характеристик приближаются к значениям однонаправленного материала.

Проведенные исследования свидетельствуют о том, что 4Д композиты, армированные по диагоналям куба, существенно превосходят материалы, армированные системой трех нитей как по сдвиговой жесткости, так и по предельному коэффициенту армирования.

Список литературы

1. **Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г** Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 263 с.

2. **Болотин В. В.** Плоская задача теории упругости для деталей из армированных материалов//Расчеты на прочность. М.: Машиностроение, 1966. Вып. 2. С. 3—31.

3. **Болотин В. В.** Прогнозирование ресурса машин и конструкций. М.: Машиностроение, 1984. 312 с.

4. **Ван Фо Фы Г. А.** Конструкции из армированных пластмасс. Киев: Техника, 1971. 220 с.

5. **Гольденблат И. И., Бажанов В. Л., Копнов В. А.** Длительная прочность в машиностроении. М.: Машиностроение, 1977. 248 с.

6. **Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.** О жесткости двоякопериодических решеток//Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 1. С. 75—79.

7. **Делнест Л., Перес Б.** Неупругая модель из конечных элементов для четырехнаправленного углерод-углеродного композиционного материала//Аэрокосмическая техника. 1984. Т. 2, № 6. С. 3—11.

8. **Жигун И. Г., Грушко В. Е., Матвеев И. А.** Механические свойства трехмерно-армированных стеклопластиков с переменным углом укладки арматуры по высоте//Механика композитных материалов. 1983. № 4. С. 696—700.

9. **Жигун И. Г., Поляков В. А.** Свойства пространственно-армированных пластиков. Рига: Зинатне, 1978. 215 с.

10. **Жигун И. Г., Радимов Н. П.** Особенности механических свойств трехмерно-армированных углерод-углеродных композитов//Механика композитных материалов. 1982. № 3. С. 504—507.

11. **Жигун И. Г., Радимов Н. П.** Влияние структуры армирования типа матрицы на сопротивление сдвигу и сжатию пространственно-армированных композитов «Поликарбон»//Механика композитных материалов. 1985. № 1. С. 37—42.

12. **Крегерс А. Ф., Зилауц А. Ф.** Предельные значения коэффициентов армирования волокнистых композитов с пространственной структурой//Механика композитных материалов. 1984. № 5. С. 784—790.

13. **Крегерс А. Ф., Мелбардис Ю. Г.** Определение деформативности пространственно-армированных композитов методом усреднения жесткостей//Механика полимеров. 1978. № 1. С. 3—8.

14. **Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А.** Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига: Зинатне, 1980. 572 с.

15. **Немировский Ю. В., Резников Б. С.** О механизме разрушения армированных балок при изгибе. Разрушение от сдвига//Механика полимеров. 1974. № 2. С. 340—347.

16. **Победря Б. Е.** Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.

17. **Скудра А. М., Булавс Ф. Я.** Прочность армированных пластиков. М.: Химия, 1982. 216 с.

18. **Тарнопольский Ю. М., Жигун И. Г., Поляков В. А.** Пространственно-армированные композиционные материалы/Справочник. М.: Машиностроение, 1987. 223 с.

19. **Толкс А. М., Репелис И. А., Гайлите А. П.** и др. Цельнотканые каркасы для пространственного армирования//Механика композитных материалов. 1986. № 5. С. 795—799.

20. **Упрочнение** металлов волокнами/ В. С. Иванова, И. М. Копьев, Л. Р. Ботвина, Т. Д. Шеомергор. М.: Наука, 1973 206 с.

21. **Хашин З., Розен Б. В.** Упругие модули материалов, армированных волокнами//Труды американского общества инженеров-механиков. Сер. Е. Прикладная механика/Пер. с англ. 1969, № 2. С. 223—232.

22. **McAllister L. S., Lachmann W. L.** Multidirectional Carbon-Carbon Composites. Jn: Handbook of Composites. Vol. 4// Fabrication of Composites. Ed. by A. Kelly and S. T. Mileiko, Elsevier Science Publishers, The Hague. 1983. P. 109—175.

23. **Taverna A. R., McAllister L. E.** Thn Development of High Strength Three-Dimensionally Reinforced Graphite Compositer//Jn. Adv. Mater. Compos. and Carbon. A Symposium of the American Ceramic Society. Chicago. 1971. P 199—207.

24. **Tuler F. R., Graham M. E.** Stress Ware Response and Damage of Three-Dimensional Graphite Reinforced Composite materials//Jn: Proc. 19th Nat. SAMPE Sump. 1974. P 496—516.

ЧАСТЬ 2

РАСЧЕТ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ КОМПОЗИТОВ

Глава 1

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕХАНИКИ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ КОМПОЗИТОВ

Композиты являются неоднородными материалами, причем степень их неоднородности характеризуется двумя уровнями (рис. 1.1). Первый уровень (микронеоднородность) связан с наличием в материале двух фаз — матрицы или связующего и армирующих элементов (волокон) или наполнителей (частиц) различной природы. Микронеоднородность, как правило, принимается во внимание лишь в специальных задачах, связанных с определением свойств композиции по свойствам и объемному содержанию ее компонентов, анализом взаимодействия волокон и матрицы и других, которые относятся к исследованию структурных характеристик композитов как конструкционных материалов. Эти вопросы рассматривались в первой части справочного пособия. В настоящей части обсуждаются композитные детали и элементы конструкций.

Поскольку даже в простой детали (например, профиле, трубке, панели) число волокон или других элементов, характеризующих микронеоднородность материала, чрезвычайно велико, анализ явлений, порождаемых отдельными микроструктурными элементами, представляется не только исключительно сложным, но и не вполне реалистическим. При расчете композитных элементов, как правило, используется феноменологический подход, предполагающий, что материал является условно однородным и обладает некоторыми осредненными свойствами, которые могут быть определены экспериментально на образцах конечных размеров. Соответствующие экспериментальные методы были описаны в первой части справочного пособия (см. гл. 7).

Таким образом, в дальнейшем микроструктура композита будет игнорироваться, а сам материал будет считаться условно однородным и обладающим некоторым набором экспериментально найденных констант, в совокупности определяющих его жесткость и прочность при всех возможных условиях нагружения. Однако композитные элементы часто обладают неоднородностью второго уровня — макронеоднородностью, порождаемой наличием слоев с различной природой материала, толщинами, углами армирования и т. д. (см. рис. 1.1). В принципе и здесь может быть использован феноменологический подход, однако он явно нерационален, так как требует, как правило, большого объема экспериментальных исследований и не позволяет описать взаимодействие между элементами макроструктуры.

Принимая во внимание большое разнообразие слоистых структур, которые могут быть образованы даже из одного вида композиционного материала, и связанную с этим трудоемкость экспериментальных исследований, которые необходимо осуществить для того, чтобы обеспечить расчет в рамках феноменологического подхода, необходимо отдать предпочтение структурному подходу, непосредственно учитывающему макроструктурную неоднородность материала.

Будем считать, что композит, образующий некоторый конструктивный

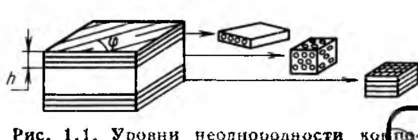


Рис. 1.1. Уровни неоднородности композиционного материала

элемент, является в общем случае макронеоднородным и состоит из отдельных слоев. Каждый слой считается микрооднородным и наделяется механическими характеристиками, определяемыми экспериментально. Характеристики системы слоев устанавливаются расчетным путем на основе анализа взаимодействия слоев и в явном виде зависят от макроструктурных параметров материала.

1.1. УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

1.1.1. Статические соотношения. Выделим из некоторого условно однородного слоя бесконечно малый элемент и отнесем его к ортогональной системе криволинейных координат α, β, γ (рис. 1.2). Система координат обычно выбирается в соответствии с формой тела таким образом, чтобы поверхности, ограничивающие тело, являлись координатными поверхностями. Большинство встречающихся в расчетной практике конструктивных форм позволяет добиться этого, используя ортогональные системы координат. В случаях, когда сделать это не удается, можно ввести более общую неортогональную систему координат или, сохраняя ортогональную систему, допустить возможность несовпадения одной или нескольких граничных поверхностей с координатными поверхностями. На практике обычно реализуется второй путь, поскольку упрощение записи граничных условий, связанное с введением неортогональных координат, редко компенсирует значительное усложнение записи исходных уравнений. Таким образом, в дальнейшем будем использовать ортогональные системы координат.

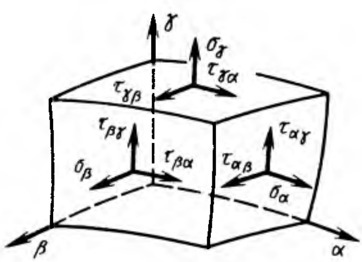


Рис. 1.2. Напряженное состояние элемента материала

По граням выделенного элемента действуют нормальные σ_α, σ_β, σ_γ и касательные $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\beta\alpha}$, $\tau_{\alpha\gamma}$, $\tau_{\gamma\alpha}$, $\tau_{\beta\gamma}$, $\tau_{\gamma\beta}$ напряжения, которые должны удовлетворять уравнениям равновесия:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2H_3\sigma_\alpha)+\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1H_3\tau_{\beta\alpha})+\\
+\frac{\partial}{\partial\gamma}(H_1H_2\tau_{\gamma\alpha})-\sigma_\beta H_3\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}-\\
-\sigma_\gamma H_2\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}+\tau_{\alpha\beta}H_3\frac{\partial H_1}{\partial\beta}+\\
+\tau_{\alpha\gamma}H_2\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}+F_\alpha H_1H_2H_3=0;\\
\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1H_3\sigma_\beta)+\frac{\partial}{\partial\gamma}(H_1H_2\tau_{\gamma\beta})+\\
+\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2H_3\tau_{\alpha\beta})-\sigma_\gamma H_1\frac{\partial H_3}{\partial\beta}-\\
-\sigma_\alpha H_3\frac{\partial H_1}{\partial\beta}+\tau_{\beta\gamma}H_1\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}+\\
+\tau_{\beta\alpha}H_3\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}+F_\beta H_1H_2H_3=0; \qquad (1.1)\\
\frac{\partial}{\partial\gamma}(H_1H_2\sigma_\gamma)+\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2H_3\tau_{\alpha\gamma})+\\
+\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1H_3\tau_{\beta\gamma})-\sigma_\alpha H_2\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}-\\
-\sigma_\beta H_1\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}+\tau_{\gamma\alpha}H_2\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}+\\
+\tau_{\gamma\beta}H_1\frac{\partial H_3}{\partial\beta}+F_\gamma H_1H_2H_3=0.
\end{gathered}
$$

Вывод этих уравнений в простой координатной форме представлен в работе [2].

Уравнения (1.1) соответствуют суммам проекций сил, действующих на показанный на рис. 1.2 элемент, на оси α, β, γ. Соответствующие уравнения моментов относительно этих осей позволяют установить свойство парности касательных напряжений

$$\tau_{\alpha\beta}=\tau_{\beta\alpha};\quad \tau_{\alpha\gamma}=\tau_{\gamma\alpha};\quad \tau_{\beta\gamma}=\tau_{\gamma\beta}. \qquad (1.2)$$

С учетом (1.2) уравнения (1.1) могут быть записаны в более компактной форме

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2H_3\sigma_\alpha)+\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1^2H_3\tau_{\alpha\beta})+$$
$$+\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial\gamma}(H_1^2H_2\tau_{\alpha\gamma})-$$
$$-\sigma_\beta H_3\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}-\sigma_\gamma H_2\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}+$$
$$+F_\alpha H_1H_2H_3=0; \qquad (1.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1H_3\sigma_\beta)+\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\gamma}(H_1H_2^2\tau_{\beta\gamma})+$$
$$+\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2^2H_3\tau_{\alpha\beta})-\sigma_\gamma H_1\frac{\partial H_3}{\partial\beta}-$$
$$-\sigma_\alpha H_3\frac{\partial H_1}{\partial\beta}+F_\beta H_1H_2H_3=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}(H_1H_2\sigma_\gamma)+\frac{1}{H_3}\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2H_3^2\tau_{\alpha\gamma})+$$
$$+\frac{1}{H_3}\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1H_3^2\tau_{\beta\gamma})-\sigma_\alpha H_2\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}-$$
$$-\sigma_\beta H_1\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}+F_\gamma H_1H_2H_3=0$$

В уравнениях (1.1), (1.3) через F_α, F_β, F_γ обозначены компоненты объемных (инерционных, гравитационных и др.) нагрузок, а через H_1, H_2, H_3 — коэффициенты Ламе основной метрической формы пространства, определяющей дифференциал дуги произвольной кривой в этом пространстве:

$$ds^2=H_1^2\,d\alpha^2+H_2^2\,d\beta^2+H_3^2\,d\gamma^2. \qquad (1.4)$$

Коэффициенты Ламе, зависящие в общем случае от переменных α, β, γ, являются, как следует из (1.4), масштабными коэффициентами, определяющими количество единиц длины, содержащееся в единице соответствующей координаты. Коэффициенты H_1, H_2, H_3, соответствующие сплошному евклидову пространству, должны удовлетворять уравнениям Ламе:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\right)+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\right)+$$
$$+\frac{1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial\beta}\right)+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}\right)+$$
$$+\frac{1}{H_1^2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}\right)+$$
$$+\frac{1}{H_2^2}\frac{\partial H_3}{\partial\beta}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}=0; \qquad (1.5)$$

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial\beta\,\partial\gamma}-\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial\beta}\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}-$$
$$-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}=0;$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial\alpha\partial\gamma}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}-$$
$$-\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}=0;$$

$$\frac{\partial^2 H_3}{\partial\alpha\,\partial\beta}-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}\frac{\partial H_3}{\partial\beta}-$$
$$-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}=0,$$

1.1.2. Физические соотношения. Такие соотношения, называемые иногда уравнениями среды или определяющими соотношениями, связывают напряжения с относительными деформациями. Известно большое количество мер (определений) деформаций. Наиболее распространенной среди них является мера Коши, согласно которой линейная относительная деформация (e_α, e_β, e_γ) представляет собой отношение абсолютного приращения длины элемента к его первоначальной длине, а деформация сдвига ($e_{\alpha\beta}$, $e_{\alpha\gamma}$, $e_{\beta\gamma}$) отождествляется с изменением угла между линиями, которые до деформации были взаимно ортогональными. При расчете композитных элементов конструкций, как правило, предполагается, что материал является линейно упругим и описывается обобщенным законом Гука для анизотропного тела.

В общем случае анизотропии (рис. 1.3) все компоненты напряжений и деформаций являются взаимосвязан-

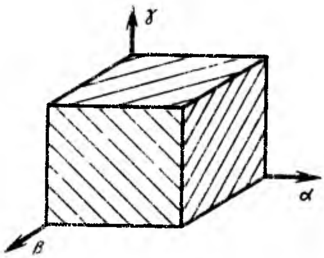


Рис. 1.3. Элемент анизотропного материала

ными и обобщенный закон Гука имеет вид

$$e_\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} - \nu_{\alpha\beta}\frac{\sigma_\beta}{E_\beta} - \nu_{\alpha\gamma}\frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma} + \eta_{\alpha,\alpha\beta}\frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} + \eta_{\alpha,\alpha\gamma}\frac{\tau_{\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}} + \eta_{\alpha,\beta\gamma}\frac{\tau_{\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}};$$

$$e_\beta = -\nu_{\beta\alpha}\frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} + \frac{\sigma_\beta}{E_\beta} - \nu_{\beta\gamma}\frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma} + \eta_{\beta,\alpha\beta}\frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} + \eta_{\beta,\alpha\gamma}\frac{\tau_{\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}} + \eta_{\beta,\beta\gamma}\frac{\tau_{\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}};$$

$$e_\gamma = -\nu_{\gamma\alpha}\frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} - \nu_{\gamma\beta}\frac{\sigma_\beta}{E_\beta} + \frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma} + \eta_{\gamma,\alpha\beta}\frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} + \eta_{\gamma,\alpha\gamma}\frac{\tau_{\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}} + \eta_{\gamma,\beta\gamma}\frac{\tau_{\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}}; \qquad (1.6)$$

$$e_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta,\alpha}\frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} + \eta_{\alpha\beta,\beta}\frac{\sigma_\beta}{E_\beta} + \eta_{\alpha\beta,\gamma}\frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma} + \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} + \lambda_{\alpha\beta,\alpha\gamma}\frac{\tau_{\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}} + \lambda_{\alpha\beta,\beta\gamma}\frac{\tau_{\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}};$$

$$e_{\alpha\gamma} = \eta_{\alpha\gamma,\alpha}\frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} + \eta_{\alpha\gamma,\beta}\frac{\sigma_\beta}{E_\beta} + \eta_{\alpha\gamma,\gamma}\frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma} + \lambda_{\alpha\gamma,\alpha\beta}\frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} + \frac{\tau_{\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}} + \lambda_{\alpha\beta,\beta\gamma}\frac{\tau_{\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}};$$

$$e_{\beta\gamma} = \eta_{\beta\gamma,\alpha}\frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} + \eta_{\beta\gamma,\beta}\frac{\sigma_\beta}{E_\beta} + \eta_{\beta\gamma,\gamma}\frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma} + \lambda_{\beta\gamma,\alpha\beta}\frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} + \lambda_{\beta\gamma,\alpha\gamma}\frac{\tau_{\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}} + \frac{\tau_{\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}}.$$

Здесь (i, j, k, $l = \alpha, \beta, \gamma$); E_i — модуль упругости в направлении i; ν_{ij} — коэффициент Пуассона, характеризующий деформацию в направлении i при нагружении в ортогональном направлении j; G_{ij} — модуль сдвига в плоскости ij; $\eta_{ij,k}$ — коэффициент влияния первого рода, характеризующий сдвиг в плоскости ij, вызванный растяжением или сжатием в направлении k; $\eta_{i,jk}$ — коэффициент влияния второго рода, характеризующий удлинение в направлении i, вызванное сдвигом в плоскости jk; $\lambda_{ij,kl}$ — коэффициент Ченцова, характеризующий сдвиг в плоскости ij, вызванный касательными напряжениями, действующими в плоскости kl

В соотношения (1.6) входят 36 коэффициентов, которые связаны следующими условиями симметрии упругих постоянных:

$$\frac{\nu_{\alpha\beta}}{E_\beta} = \frac{\nu_{\beta\alpha}}{E_\alpha}; \quad \frac{\nu_{\alpha\gamma}}{E_\gamma} = \frac{\nu_{\gamma\alpha}}{E_\alpha}; \quad \frac{\nu_{\beta\gamma}}{E_\gamma} = \frac{\nu_{\gamma\beta}}{E_\beta};$$

$$\frac{\eta_{\alpha,\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} = \frac{\eta_{\alpha\beta,\alpha}}{E_\alpha}; \quad \frac{\eta_{\alpha,\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}} = \frac{\eta_{\alpha\gamma,\alpha}}{E_\alpha}; \quad \frac{\eta_{\alpha,\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}} = \frac{\eta_{\beta\gamma,\alpha}}{E_\alpha};$$

$$\frac{\eta_{\beta,\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} = \frac{\eta_{\alpha\beta,\beta}}{E_\beta}, \quad \frac{\eta_{\beta,\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}} = \frac{\eta_{\alpha\gamma,\beta}}{E_\beta}; \quad \frac{\eta_{\beta,\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}} = \frac{\eta_{\beta\gamma,\beta}}{E_\beta}; \qquad (1.7)$$

$$\frac{\eta_{\gamma,\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}} = \frac{\eta_{\alpha\beta,\gamma}}{E_\gamma}; \quad \frac{\eta_{\gamma,\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}} = \frac{\eta_{\alpha\gamma,\gamma}}{E_\gamma};$$

$$\frac{\eta_{\gamma,\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}} = \frac{\eta_{\beta\gamma,\gamma}}{E_\gamma};$$

$$\frac{\lambda_{\alpha\beta,\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}} = \frac{\lambda_{\alpha\gamma,\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}}; \quad \frac{\lambda_{\alpha\beta,\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}} =$$

$$= \frac{\lambda_{\beta\gamma,\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}}; \quad \frac{\lambda_{\alpha\gamma,\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}} = \frac{\lambda_{\beta\gamma,\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}}.$$

Эти условия имеют простой физический смысл, который может быть выявлен, если рассмотреть, например, первое равенство (1.7), записав его в виде $E_\alpha \nu_{\alpha\beta} = E_\beta \nu_{\beta\alpha}$. Отсюда следует, что если материал обладает высокой жесткостью в направлении α, т. е. $E_\alpha > E_\beta$, то $\nu_{\alpha\beta} < \nu_{\beta\alpha}$, т. е. он будет соответственно меньше сокращаться в этом направлении при растяжении в направлении β.

Пятнадцать условий (1.7) сокращают число независимых упругих постоянных в соотношениях (1.6) до 21.

Общий случай анизотропии в реальных материалах практически не встречается. Как правило, элементарные армированные слои укладываются параллельно некоторой плоскости, которая является плоскостью упругой симметрии (рис. 1.4). Нагружение такого материала в плоскости $\alpha\beta$ не вызывает сдвига в трансверсальных по отношению к слоям плоскостях $\alpha\gamma$ и $\beta\gamma$. В результате соотношения (1.6) упрощаются следующим образом:

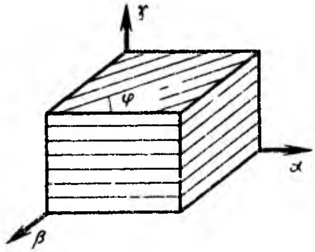


Рис. 1.4. Элемент слоистого анизотропного материала

$$e_\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} - \nu_{\alpha\beta}\frac{\sigma_\beta}{E_\beta} - \nu_{\alpha\gamma}\frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma} + \eta_{\alpha,\alpha\beta}\frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}};$$

$$e_\beta = -\nu_{\beta\alpha}\frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} + \frac{\sigma_\beta}{E_\beta} - \nu_{\beta\gamma}\frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma} + \eta_{\beta,\alpha\beta}\frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}};$$

$$e_\gamma = -\nu_{\gamma\alpha}\frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} - \nu_{\gamma\beta}\frac{\sigma_\beta}{E_\beta} + \frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma} + \eta_{\gamma,\alpha\beta}\frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}}; \qquad (1.8)$$

$$e_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta,\alpha}\frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} + \eta_{\alpha\beta,\beta}\frac{\sigma_\beta}{E_\beta} + \eta_{\alpha\beta,\gamma}\frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma} + \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}};$$

$$e_{\alpha\gamma} = \frac{\tau_{\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}} + \lambda_{\alpha\gamma,\beta\gamma}\frac{\tau_{\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}};$$

$$e_{\beta\gamma} = \lambda_{\beta\gamma,\alpha\gamma}\frac{\tau_{\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}} + \frac{\tau_{\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}}.$$

Наибольшее распространение в реальных конструкциях получил ортотропный (ортогонально анизотропный) материал (рис. 1.5), обладающий тремя взаимно ортогональными направлениями (осями ортотропии), в которых растяжение или сжатие не вызывает изменения углов между ними, т. е. деформаций сдвига. В соотношениях (1.8) при этом исчезает связь между линейными деформациями и касатель-

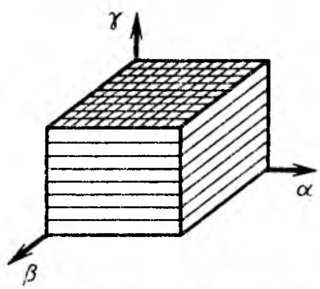


Рис 1.5. Элемент ортотропного материала

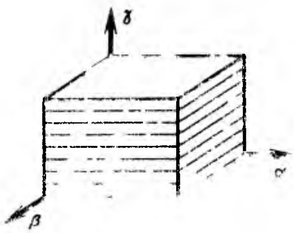


Рис. 1.6. Элемент трансверсально изотропного материала

ными напряжениями и они принимают вид

$$e_\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} - \nu_{\alpha\beta}\frac{\sigma_\beta}{E_\beta} - \nu_{\alpha\gamma}\frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma};$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}};$$

$$e_\beta = -\nu_{\beta\alpha}\frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} + \frac{\sigma_\beta}{E_\beta} - \nu_{\beta\gamma}\frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma};$$

$$e_{\alpha\gamma} = \frac{\tau_{\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}};$$

$$e_\gamma = -\nu_{\gamma\alpha}\frac{\sigma_\alpha}{E_\alpha} - \nu_{\gamma\beta}\frac{\sigma_\beta}{E_\beta} + \frac{\sigma_\gamma}{E_\gamma}; \quad e_{\beta\gamma} = \frac{\tau_{\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}}. \qquad (1.9)$$

Имеют место также первые три условия симметрии, с учетом которых равенства (1.9) можно записать в более распространенной форме:

$$e_\alpha = \frac{1}{E_\alpha}(\sigma_\alpha - \nu_{\beta\alpha}\sigma_\beta - \nu_{\gamma\alpha}\sigma_\gamma);$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G_{\alpha\beta}};$$

$$e_\beta = \frac{1}{E_\beta}(\sigma_\beta - \nu_{\alpha\beta}\sigma_\alpha - \nu_{\gamma\beta}\sigma_\gamma);$$

$$e_{\alpha\gamma} = \frac{\tau_{\alpha\gamma}}{G_{\alpha\gamma}}; \qquad (1.10)$$

$$e_\gamma = \frac{1}{E_\gamma}(\sigma_\gamma - \nu_{\alpha\gamma}\sigma_\alpha - \nu_{\beta\gamma}\sigma_\beta);$$

$$e_{\beta\gamma} = \frac{\tau_{\beta\gamma}}{G_{\beta\gamma}}.$$

Соотношения (1.9) или (1.10) включают девять независимых упругих постоянных — три модуля упругости E_α, E_β, E_γ, три модуля сдвига $G_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\gamma}$, $G_{\beta\gamma}$ и три коэффициента Пуассона, например, $\nu_{\alpha\beta}$, $\nu_{\alpha\gamma}$, $\nu_{\beta\gamma}$. Остальные коэффициенты могут быть найдены из условий симметрии (1.7).

Типичной ортотропной структурой является система ортогонально армированных элементарных слоев композита, показанная на рис. 1.5. Ее частным и достаточно широко распространенным случаем является система изотропных слоев (рис. 1.6). При нагружении в плоскости $\alpha\beta$ материал ведет себя как изотропный, т. е. его свойства не зависят от направления нагружения. При нагружении в трансверсальных плоскостях $\alpha\gamma$ и $\beta\gamma$ физические соотношения соответствуют ортотропному материалу. Таким образом, для рассматриваемого случая

$$e_\alpha = \frac{\sigma_\alpha}{E} - \nu\frac{\sigma_\beta}{E} - \nu_1\frac{\sigma_\gamma}{E_1};$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G};$$

$$e_\beta = -\nu\frac{\sigma_\alpha}{E} + \frac{\sigma_\beta}{E} - \nu_1\frac{\sigma_\gamma}{E_1};$$

$$e_{\alpha\gamma} = \frac{\tau_{\alpha\gamma}}{G_1};$$

$$e_\gamma = -\nu_2\frac{\sigma_\alpha}{E} - \nu_2\frac{\sigma_\beta}{E} + \frac{\sigma_\gamma}{E_1};$$

$$e_{\beta\gamma} = \frac{\tau_{\beta\gamma}}{G_1}.$$

Причем $G = E/2(1 + \nu)$ и имеет место следующее условие симметрии: $\nu_1 E = \nu_2 E_1$. Такой материал называется трансверсально изотропным.

И наконец, при полной изотропии, т. е. для материала, свойства которого не зависят от направления нагружения, справедлив традиционный закон Гука:

$$e_\alpha = \frac{1}{E}(\sigma_\alpha - \nu\sigma_\beta - \nu\sigma_\gamma);$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{\tau_{\alpha\beta}}{G};$$

$$e_\beta = \frac{1}{E}(\sigma_\beta - \nu\sigma_\alpha - \nu\sigma_\gamma);$$

$$e_{\alpha\gamma} = \frac{\tau_{\alpha\gamma}}{G};$$

$$e_\gamma = \frac{1}{E}(\sigma_\gamma - \nu\sigma_\alpha - \nu\sigma_\beta);$$

$$e_{\beta\gamma} = \frac{\tau_{\beta\gamma}}{G},$$

где $G = E/2(1+\nu)$. Изотропный материал характеризуется двумя независимыми упругими постоянными E и ν.

Более полный анализ физических соотношений для анизотропной среды содержится в работе [3].

1.1.3. Геометрические соотношения. Соотношения связывают относительные деформации с перемещениями u_α, u_β, u_γ произвольной точки тела в направлениях координатных осей. Эти соотношения имеют вид

$$e_\alpha = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{u_\beta}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \frac{u_\gamma}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial \gamma};$$

$$e_\beta = \frac{1}{H_2}\frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{u_\gamma}{H_2 H_3}\frac{\partial H_2}{\partial \gamma} + \frac{u_\alpha}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha};$$

$$e_\gamma = \frac{1}{H_3}\frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{u_\alpha}{H_1 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial \alpha} + \frac{u_\beta}{H_2 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial \beta}; \qquad (1.11)$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u_\alpha}{H_1}\right) + \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{u_\beta}{H_2}\right);$$

$$e_{\beta\gamma} = \frac{H_2}{H_3}\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{u_\beta}{H_2}\right) + \frac{H_3}{H_2}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u_\gamma}{H_3}\right);$$

$$e_{\alpha\gamma} = \frac{H_3}{H_1}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{u_\gamma}{H_3}\right) + \frac{H_1}{H_3}\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{u_\alpha}{H_1}\right).$$

Вывод этих соотношений представлен в работе [2].

1.1.4. Граничные условия. Статические (1.3), физические (1.6) и геометрические (1.11) соотношения образуют полную систему уравнений теории упругости анизотропного тела, содержащую 15 уравнений и столько же искомых функций — шесть напряжений, шесть относительных деформаций и три перемещения. Решение этой системы должно удовлетворять заданным граничным условиям, которые характеризуют условия закрепления и нагружения тела. Если на границе заданы перемещения, то найденные в результате решения перемещения приравниваются к заданным. Если на граничной поверхности задаются распределенные по этой поверхности нагрузки, то ставятся статические граничные условия

$$t_\alpha = \sigma_\alpha l_\alpha + \tau_{\beta\alpha} l_\beta + \tau_{\gamma\alpha} l_\gamma;$$

$$t_\beta = \sigma_\beta l_\beta + \tau_{\gamma\beta} l_\gamma + \tau_{\alpha\beta} l_\alpha; \qquad (1.12)$$

$$t_\gamma = \sigma_\gamma l_\gamma + \tau_{\alpha\gamma} l_\alpha + \tau_{\beta\gamma} l_\beta.$$

Здесь t_α, t_β, t_γ — проекции заданной поверхностной нагрузки на оси α, β, γ; l_α, l_β, l_γ — косинусы углов между наружной нормалью к граничной поверхности и осями координат в точке, где записываются условия (1.12). Наиболее простую форму условия (1.12) принимают, если граничная поверхность совпадает с координатной поверхностью. В частности, если это поверхность $\alpha = \text{const}$, то $l_\alpha = 1$, $l_\beta = l_\gamma = 0$ и $t_\alpha = \sigma_\alpha$, $t_\beta = \tau_{\alpha\beta}$, $t_\gamma = \tau_{\alpha\gamma}$. На поверхности $\beta = \text{const}$ $l_\beta = 1$, $l_\alpha = l_\gamma = 0$ и $t_\alpha = \tau_{\gamma\alpha}$, $t_\beta = \sigma_\beta$, $t_\gamma = \tau_{\beta\gamma}$, а на поверхности $\gamma = \text{const}$ $l_\gamma = 1$, $l_\alpha = l_\beta = 0$ и $t_\alpha = \tau_{\gamma\alpha}$, $t_\beta = \tau_{\alpha\beta}$, $t_\gamma = \sigma_\gamma$.

1.2. УРАВНЕНИЯ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ КОМПОЗИТОВ

1.2.1. Геометрические соотношения. Приведенные в разд. 1.1 уравнения позволяют описать широкий класс конструкций как из композитов, так и из традиционных материалов, однако их решение связано с большими и не всегда преодолимыми трудностями. В связи с этим ниже будут представлены более простые уравнения, основанные на некоторых дополнительных предположениях, учитывающих геометрические и структурные особенности рассматриваемых элементов.

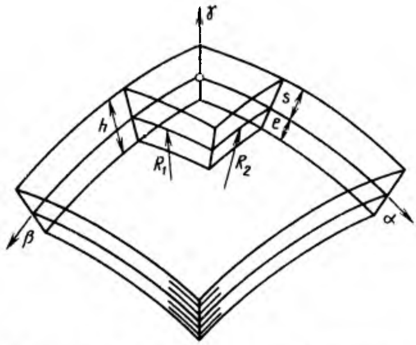


Рис. 1.7. Элемент композитной стенки

Типовой конструктивный элемент, образованный из композита, как правило, состоит из системы слоев (см. рис. 1.1 и рис. 1.7), укладываемых и фиксируемых в результате некоторой последовательности технологических операций на поверхности оправки, матрицы, пресс-формы и т. д. Форма этой поверхности определяет конфигурацию элемента и детали, а соответствующий набор слоев из композитов, металлов, термопластов, легких и эластичных заполнителей (пенопласт, сотовый заполнитель, резина и т. д.) обеспечивает необходимое сочетание механических и теплофизических характеристик стенки.

В качестве носителя формы элемента конструкции введем некоторую базовую поверхность, отстоящую от внутренней и наружной поверхностей соответственно на расстояния e и s (см. рис. 1.7). При $e = 0$ базовая поверхность совмещается с внутренней поверхностью элемента, при $s = 0$ — с наружной, а при $e = s = h/2$ — со срединной поверхностью, разделяющей толщину элемента пополам.

Введем систему координат, связанную с базовой поверхностью (см. рис. 1.7). Координату γ, которая называется нормальной координатой, будем отсчитывать от базовой поверхности вдоль ее наружной нормали. В связи с этим базовая поверхность часто называется начальной поверхностью или поверхностью отсчета. На поверхности можно ввести два взаимно ортогональных направления, определяющих линии кривизны и соответствующие им главные радиусы кривизны поверхности R_1 и R_2 (см. рис. 1.7). Направим координатные оси α и β вдоль линий кривизны. Тогда для произвольной линии, лежащей на базовой поверхности $\gamma = 0$, равенство (1.4) имеет вид

$$ds^2 = A_1^2\, d\alpha^2 + A_2^2\, d\beta^2.$$

Здесь A_1 и A_2 — коэффициенты первой квадратичной формы базовой поверхности. Для поверхности, отнесенной к криволинейным координатам α, β и помещенной в трехмерное евклидово пространство, отнесенное к декартовым координатам x, y, z так, что между декартовыми и криволинейными координатами произвольной точки 0 (рис. 1.8) существует взаимно однозначное соответствие, коэффициенты первой квадратичной формы A_1, A_2

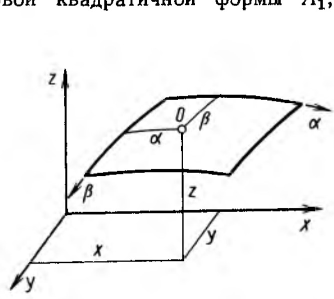


Рис. 1.8. Элемент поверхности, отнесенной к декартовым и ортогональным криволинейным координатам

и главные кривизны k_1, k_2 определяются равенствами

$$A_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 ;$$

$$A_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 ; \tag{1.13}$$

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = -\frac{1}{A_1^2 A_2}\left(D_1 \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha^2} + D_2 \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha^2} + D_3 \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2}\right);$$

$$k_2 = \frac{1}{R_2} = -\frac{1}{A_1 A_2^2}\left(D_1 \frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} + D_2 \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} + D_3 \frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2}\right), \tag{1.14}$$

где

$$D_1 = \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta};$$

$$D_2 = \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta};$$

$$D_3 = \frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta}.$$

Для того чтобы координатные линии α и β были линиями кривизны поверхности, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} = 0; \tag{1.15}$$

$$D_1 \frac{\partial^2 x}{\partial \alpha\, \partial \beta} + D_2 \frac{\partial^2 y}{\partial \alpha\, \partial \beta} + D_3 \frac{\partial^2 z}{\partial \alpha\, \partial \beta} = 0.$$

Рассмотрим в качестве примера поверхность вращения (рис. 1.9). В качестве координатных линий примем параллели $r = \text{const}$ и меридианы $\beta = \text{const}$. Тогда для произвольной точки 0 имеем

$x = r \sin \beta$; $y = r \cos \beta$; $z = z(r)$, где $z(r)$ — уравнение меридиана в координатах r, z (рис. 1.10). Согласно

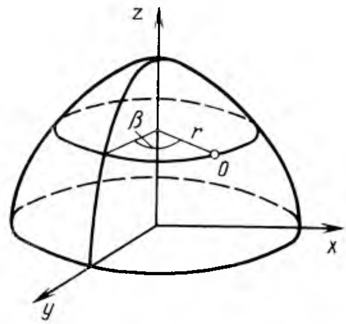


Рис. 1.9. Поверхность вращения

формулам (1.13), (1.14), заменяя α на r и учитывая, что

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \sin \beta; \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \cos \beta;$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = z'; \quad \frac{\partial x}{\partial \beta} = r \cos \beta;$$

$$\frac{\partial y}{\partial \beta} = -r \sin \beta; \quad \frac{\partial z}{\partial \beta} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = z'';$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \beta^2} = -r \sin \beta; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial \beta^2} = -r \cos \beta;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \beta^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial r\, \partial \beta} = \cos \beta;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial r\, \partial \beta} = -\sin \beta; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial r\, \partial \beta} = 0,$$

получим

$$A_1 = \sqrt{1 + (z')^2}; \quad A_2 = r;$$

$$R_1 = -\frac{1}{z''}\left[1 + (z')^2\right]^{3/2};$$

$$R_2 = -\frac{r}{z'}\sqrt{1 + (z')^2}.$$

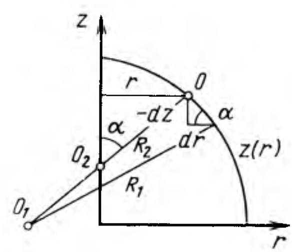


Рис. 1.10. Меридиан поверхности вращения

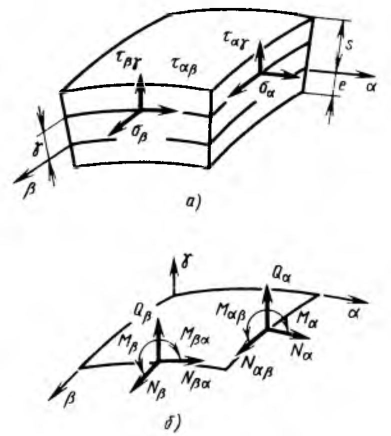


Рис. 1.11. Приведение напряжений (*а*) к усилиям и моментам (*б*)

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что условия (1.15) удовлетворяются, т. е. меридианы и параллели являются линиями кривизны поверхности вращения. Рассмотрим далее меридиан, показанный на рис. 1.10. Из полученного выражения для R_1 следует, что R_1 является радиусом кривизны плоской кривой $z(r)$, т. е. радиусом кривизны меридиана O_1O. Далее из рис. 1.10 следует

$$\operatorname{tg}\alpha = -z'; \quad \sin\alpha = -z'/\sqrt{1+(z')^2},$$

т. е. $R_2 = r/\sin\alpha$ и R_2 есть отрезок O_2O нормали к поверхности.

Итак, геометрия базовой поверхности определяется функциями $A_1(\alpha, \beta)$, $A_2(\alpha, \beta)$, $k_1(\alpha, \beta) = R_1^{-1}(\alpha, \beta)$, $k_2(\alpha, \beta) = R_2^{-1}(\alpha, \beta)$.

Рассмотрим теперь стенку композитного элемента (см. рис. 1.7). В принятых координатах коэффициенты Ламе, входящие в формулу (1.4), имеют вид

$$H_1 = A_1(1+\gamma k_1); \quad H_2 = A_2(1+\gamma k_2); \quad H_3 = 1. \qquad (1.16)$$

Здесь γ — расстояние произвольной точки стенки от базовой поверхности по нормали к ней. Из равенств (1.16) следует, что геометрия элемента определяется коэффициентами первой квадратичной формы и главными радиусами кривизны базовой поверхности, а также параметрами e и s (см. рис. 1.7), ограничивающими координату γ.

С учетом (1.16) уравнения Ламе (1.5) позволяют записать следующие полезные геометрические соотношения:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\beta}\right) + \frac{A_1A_2}{R_1R_2} = 0; \\
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{A_2}{R_2}\right) = \frac{1}{R_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha}; \\
\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A_1}{R_1}\right) = \frac{1}{R_2}\frac{\partial A_1}{\partial\beta}; \qquad (1.17) \\
\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha}; \\
\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\beta}.
\end{gathered}$$

1.2.2. Основные уравнения. Особенность большинства композитных элементов конструкций заключается в том, что их толщина, как правило, значительно меньше других характерных размеров — радиусов кривизны базовой поверхности, длины элемента, размеров в плане и т. п. Это обстоятельство позволяет существенно упростить общие уравнения, приведенные в разд. 1.2. При этом в соответствии с традиционными гипотезами прикладных теорий балок, пластин и оболочек учитываются только основные составляющие напряженного состояния, соответствующие усилиям и моментам, приведенным к базовой поверхности (в связи с этим она иногда называется поверхностью приведения). Усилия и моменты, распределенные по сторонам элемента базовой поверхности и статически эквивалентные исходным напряжениям (рис. 1.11), имеют вид

$$N_\alpha = \frac{1}{A_2}\int_{-e}^{s}\sigma_\alpha H_2\,d\gamma;$$

$$N_\beta = \frac{1}{A_1}\int_{-e}^{s}\sigma_\beta H_1\,d\gamma;$$

$$N_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_2}\int_{-e}^{s}\tau_{\alpha\beta} H_2\,d\gamma;$$

$$N_{\beta\alpha} = \frac{1}{A_1}\int_{-e}^{s}\tau_{\alpha\beta}H_1\,d\gamma;$$

$$Q_\alpha = \frac{1}{A_2}\int_{-e}^{s}\tau_{\alpha\gamma}H_2\,d\gamma;$$

$$Q_\beta = \frac{1}{A_1}\int_{-e}^{s}\tau_{\beta\gamma}H_1\,d\gamma; \qquad (1.18)$$

$$M_\alpha = \frac{1}{A_2}\int_{-e}^{s}\sigma_\alpha H_2\gamma\,d\gamma;$$

$$M_\beta = \frac{1}{A_1}\int_{-e}^{s}\sigma_\beta H_1\gamma\,d\gamma;$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_2}\int_{-e}^{s}\tau_{\alpha\beta}H_2\gamma\,d\gamma;$$

$$M_{\beta\alpha} = \frac{1}{A_1}\int_{-e}^{s}\tau_{\alpha\beta}H_1\gamma\,d\gamma.$$

Эти соотношения позволяют выявить как преимущества, так и недостатки рассматриваемой прикладной теории. В отличие от напряжений (см. рис. 1.11), которые зависели от трех переменных α, β и γ, усилия и моменты зависят только от α и β, т. е. по существу исходная система трехмерных уравнений, приведенная в разд. 1.2, заменяется принципиально более простой системой двухмерных уравнений, которая приводится ниже. В то же время замена (1.18) показывает, что из рассмотрения заранее исключаются самоуравновешенные по толщине стенки напряжения, т. е. не учитываются составляющие напряжений, которые не дают усилий и моментов и для которых интегралы (1.18) обращаются в ноль.

В результате уравнения равновесия (1.3) заменяются следующими:

$$L_\alpha(N) + k_1A_1A_2Q_\alpha + f_\alpha = 0;$$

$$L_\beta(N) + k_2A_1A_2Q_\beta + f_\beta = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(A_2Q_\alpha) + \frac{\partial}{\partial\beta}(A_1Q_\beta) - A_1A_2(k_1N_\alpha + k_2N_\beta) + f_\gamma = 0; \qquad (1.19)$$

$$L_\alpha(M) - A_1A_2Q_\alpha + m_\alpha = 0;$$

$$L_\beta(M) - A_1A_2Q_\beta + m_\beta = 0,$$

где

$$L_\alpha(\Phi) = \frac{\partial}{\partial\alpha}(A_2\Phi_\alpha) - \Phi_\beta\frac{\partial A_2}{\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\beta}(A_1\Phi_{\beta\alpha}) + \Phi_{\alpha\beta}\frac{\partial A_1}{\partial\beta};$$

$$L_\beta(\Phi) = \frac{\partial}{\partial\beta}(A_1\Phi_\beta) - \Phi_\alpha\frac{\partial A_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\alpha}(A_2\Phi_{\alpha\beta}) + \Phi_{\beta\alpha}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha}.$$

Функция Φ заменяется соответственно на N и M:

$$f_\alpha = \int_{-e}^{s}F_\alpha H_1H_2\,d\gamma + B_1B_2p_\alpha + C_1C_2q_\alpha;$$

$$f_\beta = \int_{-e}^{s}F_\beta H_1H_2\,d\gamma + B_1B_2p_\beta + C_1C_2q_\beta;$$

$$f_\gamma = \int_{-e}^{s}F_\gamma H_1H_2\,d\gamma + B_1B_2p - C_1C_2q; \qquad (1.20)$$

$$m_\alpha = \int_{-e}^{s}F_\alpha H_1H_2\gamma\,d\gamma + sC_1C_2q_\alpha - eB_1B_2p_\alpha;$$

$$m_\beta = \int_{-e}^{s}F_\beta H_1H_2\gamma\,d\gamma + sC_1C_2q_\beta - eB_1B_2p_\beta.$$

В соотношениях (1.20), определяющих внешние нагрузки, приведенные к базовой поверхности, через F обозначены, как и ранее, объемные силы, а через q и p — поверхностные на-

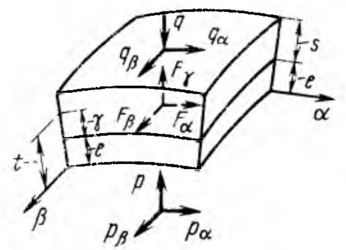


Рис. 1.12. Нагрузки, действующие на элемент композитной стенки

грузки, показанные на рис. 1.12. Коэффициенты первой квадратичной формы внутренней ($\gamma = -e$) и наружной ($\gamma = s$) поверхностей соответственно равны:

$$B_1 = A_1(1 - ek_1); \quad B_2 = A_2(1 - ek_2);$$
$$C_1 = A_1(1 + sk_1); \quad C_2 = A_2(1 + sk_2).$$

Усилия и моменты связаны с обобщенными деформациями физическими соотношениями, которые для ортотропного материала имеют следующий вид:

$$N_\alpha = B_{11}\varepsilon_\alpha + B_{12}\varepsilon_\beta + C_{11}\varkappa_\alpha + C_{12}\varkappa_\beta;$$
$$N_\beta = B_{21}\varepsilon_\alpha + B_{22}\varepsilon_\beta + C_{21}\varkappa_\alpha + C_{22}\varkappa_\beta;$$
$$N_{\alpha\beta} = B_{33}^{11}\varepsilon_{\alpha\beta} + B_{33}^{12}\varepsilon_{\beta\alpha} + C_{33}^{11}\varkappa_{\alpha\beta} + C_{33}^{12}\varkappa_{\beta\alpha};$$
$$N_{\beta\alpha} = B_{33}^{21}\varepsilon_{\alpha\beta} + B_{33}^{22}\varepsilon_{\beta\alpha} + C_{33}^{21}\varkappa_{\alpha\beta} + C_{33}^{22}\varkappa_{\beta\alpha};$$
$$M = C_{11}\varepsilon_\alpha + C_{12}\varepsilon_\beta + D_{11}\varkappa_\alpha + D_{12}\varkappa_\beta; \tag{1.21}$$
$$M_\beta = C_{21}\varepsilon_\alpha + C_{22}\varepsilon_\beta + D_{21}\varkappa_\alpha + D_{22}\varkappa_\beta;$$
$$M_{\alpha\beta} = C_{33}^{11}\varepsilon_{\alpha\beta} + C_{33}^{12}\varepsilon_{\beta\alpha} + D_{33}^{11}\varkappa_{\alpha\beta} + D_{33}^{12}\varkappa_{\beta\alpha};$$
$$M_{\beta\alpha} = C_{33}^{21}\varepsilon_{\alpha\beta} + C_{33}^{22}\varepsilon_{\beta\alpha} + D_{33}^{21}\varkappa_{\alpha\beta} + D_{33}^{22}\varkappa_{\beta\alpha};$$
$$Q_\alpha = K_1\psi_\alpha; \quad Q_\beta = K_2\psi_\beta.$$

Здесь величины ε характеризуют растяжение, сжатие и сдвиг базовой поверхности, величины $\varkappa$ определяют ее изгиб и кручение, а величины ψ характеризуют деформации трансверсального (называемого также поперечным или межслоевым) сдвига стенки. Соответственно коэффициенты жесткости B, D, C и K называются мембранными, изгибными, смешанными и сдвиговыми и имеют вид

$$B_{11} = \int_{-e}^{s} S_{12}A_{11}\,d\gamma;$$
$$C_{11} = \int_{-e}^{s} S_{12}A_{11}\gamma\,d\gamma;$$
$$D_{11} = \int_{-e}^{s} S_{12}A_{11}\gamma^2\,d\gamma;$$
$$B_{22} = \int_{-e}^{e} S_{21}A_{22}\,d\gamma;$$
$$C_{22} = \int_{-e}^{s} S_{21}A_{22}\gamma\,d\gamma;$$
$$D_{22} = \int_{-e}^{s} S_{21}A_{22}\gamma^2\,d\gamma;$$
$$B_{12} = B_{21} = \int_{-e}^{s} A_{12}\,d\gamma; \tag{1.22}$$
$$C_{12} = C_{21} = \int_{-e}^{s} A_{12}\gamma\,d\gamma;$$
$$D_{12} = D_{21} = \int_{-e}^{s} A_{12}\gamma^2\,d\gamma;$$
$$B_{33}^{11} = \int_{-e}^{s} S_{12}A_{33}\,d\gamma;$$
$$C_{33}^{11} = \int_{-e}^{s} S_{12}A_{33}\gamma\,d\gamma;$$
$$D_{33}^{11} = \int_{-e}^{s} S_{12}A_{33}\gamma^2\,d\gamma;$$

$$B_{33}^{22} = \int_{-e}^{s} S_{21} A_{33}\, d\gamma;$$

$$C_{33}^{22} = \int_{-e}^{s} S_{21} A_{33} \gamma\, d\gamma;$$

$$D_{33}^{22} = \int_{-e}^{s} S_{21} A_{33} \gamma^2\, d\gamma;$$

$$B_{33}^{12} = B_{33}^{21} = \int_{-e}^{s} A_{33}\, d\gamma;$$

$$C_{33}^{12} = C_{33}^{21} = \int_{-e}^{s} A_{33} \gamma\, d\gamma;$$

$$D_{33}^{12} = D_{33}^{21} = \int_{-e}^{s} A_{33} \gamma^2\, d\gamma;$$

$$K_1 = h^2 \left(\int_{-e}^{s} S_{21} \frac{d\gamma}{G_{\alpha\gamma}} \right)^{-1};$$

$$K_2 = h^2 \left(\int_{-e}^{e} S_{12} \frac{d\gamma}{G_{\beta\gamma}} \right)^{-1}.$$

Здесь

$$S_{12} = \frac{1 + \gamma k_2}{1 + \gamma k_1}; \quad S_{21} = \frac{1 + \gamma k_1}{1 + \gamma k_2}. \tag{1.23}$$

Величины A_{mn}, входящие в формулы (1.22), являются коэффициентами жесткости материала, т. е. коэффициентами закона Гука, разрешенного относительно напряжений:

$$\sigma_\alpha = A_{11} e_\alpha + A_{12} e_\beta;$$
$$\sigma_\beta = A_{21} e_\alpha + A_{22} e_\beta; \tag{1.24}$$
$$\tau_{\alpha\beta} = A_{33} e_{\alpha\beta}.$$

Эти коэффициенты, являющиеся в общем случае функциями координат, выражаются через модули упругости и коэффициенты Пуассона:

$$A_{11} = \overline{E}_\alpha; \quad A_{22} = \overline{E}_\beta;$$

$$A_{12} = A_{21} = \nu_{\alpha\beta} \overline{E}_\alpha = \nu_{\beta\alpha} \overline{E}_\beta;$$

$$A_{33} = G_{\alpha\beta}; \tag{1.25}$$

$$\overline{E}_{\alpha,\beta} = E_{\alpha,\beta} / (1 - \nu_{\alpha\beta} \nu_{\beta\alpha}).$$

Обобщенные деформации связаны с перемещениями u, v, w точки базовой поверхности по осям α, β, γ геометрическими соотношениями, которые имеют следующий вид:

$$e_\alpha = \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \varphi_1 v + k_1 w;$$

$$e_\beta = \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \varphi_2 u + k_2 w;$$

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha} - \varphi_1 u;$$

$$e_{\beta\alpha} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \varphi_2 v;$$

$$\varkappa_\alpha = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha} + \varphi_1 \theta_\beta; \tag{1.26}$$

$$\varkappa_\beta = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} + \varphi_2 \theta_\alpha;$$

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha} - \varphi_1 \theta_\alpha;$$

$$\varkappa_{\beta\alpha} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} - \varphi_2 \theta_\beta.$$

Здесь

$$\theta_\alpha = \psi_\alpha + \omega_\alpha, \quad \theta_\beta = \psi_\beta + \omega_\beta \tag{1.27}$$

— углы поворота нормали к базовой поверхности в плоскостях $\alpha\gamma$ и $\beta\gamma$; ψ_α, ψ_β — углы сдвига;

$$\omega_\alpha = k_1 u - \frac{1}{A_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha};$$

$$\omega_\beta = k_2 v - \frac{1}{A_2} \frac{\partial w}{\partial \beta} \tag{1.28}$$

— углы поворота касательных к координатным линиям α и β;

$$\varphi_1 = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \beta};$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha}.$$

Перемещения u, w и углы θ_α, ω_α, ψ_α показаны на рис. 1.13.

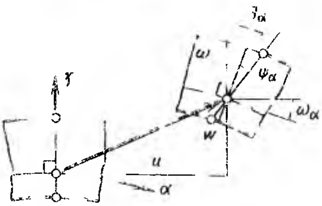


Рис. 1.13. Перемещения и углы поворота элемента нормали к базовой поверхности

Система уравнений строительной механики конструкций из композитов включает, таким образом, пять уравнений равновесия (1.19), десять физических соотношений (1.2) и двенадцать геометрических соотношений (1.26) - (1.28), т. е. всего содержит 27 уравнений, в которые входят 27 неизвестных — десять усилий и моментов N, Q, M, десять обобщенных деформаций ε, ψ, $\varkappa$, четыре угла поворота θ, ω и три перемещения u, v, w. Эта система имеет в совокупности десятый порядок по переменным α и β. Соответственно в каждой точке края элемента, описываемого приведенными выше уравнениями, необходимо сформулировать пять граничных условий.

Геометрические граничные условия записываются относительно перемещений точки базовой поверхности u, v, w и углов поворота нормали к ней θ_α, θ_β. В частности, при жестком закреплении края α = const или края β = const $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, $\vartheta_\alpha = 0$, $\theta_\beta = 0$.

Статические граничные условия накладываются на усилия и моменты. В частности,

для свободного края α = const

$$N_\alpha = 0; \quad N_{\alpha\beta} = 0, \quad Q_\alpha = 0;$$
$$M_\alpha = 0; \quad M_{\alpha\beta} = 0,$$

для края β = const

$$N_\beta = 0; \quad N_{\beta\alpha} = 0; \quad Q_\beta = 0;$$
$$M_\beta = 0, \quad M_{\beta\alpha} = 0.$$

Возможны также различные варианты смешанных граничных условий. Наиболее распространено свободное опирание края, устраняющее возможные смещения в нормальной по отношению к базовой поверхности плоскости и не препятствующее смещению в касательной плоскости в направлении, нормальном к краю. Эти условия имеют следующий вид.

для края α = const

$$N_\alpha = 0; \quad v = 0; \quad w = 0; \quad M_\alpha = 0;$$
$$\vartheta_\beta = 0,$$

для края β = const

$$N_\beta = 0; \quad u = 0; \quad w = 0,$$
$$M_\beta = 0; \quad \theta_\alpha = 0$$

Для получения приближенных решений на практике часто используется вариационный принцип Лагранжа. Согласно этому принципу истинное деформированное состояние отличается от всех геометрически возможных, т. е. соответствующих заданным условиям закрепления, тем, что для него реализуется минимальное значение полной энергии, т. е. выполняется условие

$$\delta U - \delta A = 0,$$

где

$$\delta U = \iint (N_\alpha\,\delta\varepsilon_\alpha + N_\beta\,\delta\varepsilon_\beta + N_{\alpha\beta}\,\delta\varepsilon_{\alpha\beta} + N_{\beta\alpha}\,\delta\varepsilon_{\beta\alpha} + Q_\alpha\,\delta\psi_\alpha + Q_\beta\,\delta\psi_\beta + M_\alpha\,\delta\varkappa_\alpha + M_\beta\,\delta\varkappa_\beta + M_{\alpha\beta}\,\delta\varkappa_{\alpha\beta} + M_{\beta\alpha}\,\delta\varkappa_{\beta\alpha})\,A_1A_2\,d\alpha\,d\beta \tag{1.29}$$

— вариация потенциальной энергии деформации;

$$\delta A = \iint (f_\alpha\,\delta u + f_\beta\,\delta v + f_\gamma\,\delta w + m_\alpha\,\delta\theta_\alpha + m_\beta\,\delta\theta_\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

— вариация работы внешних сил. Подставляя в (1.29) геометрические соотношения (1.26)—(1.28) и выражая вариации обобщенных деформаций через δu, δv, δw, $\delta\theta_\alpha$, $\delta\theta_\beta$, можно получить уравнения равновесия (1.19) и следующие естественные граничные условия:

при α = const

$$N_\alpha\,\delta u = 0; \quad N_{\alpha\beta}\,\delta v = 0; \quad Q_\alpha\,\delta w = 0;$$
$$M_\alpha\,\delta\theta_\alpha = 0; \quad M_{\alpha\beta}\,\delta\theta_\beta = 0,$$

при β = const

$$N_\beta\,\delta v = 0; \quad N_{\beta\alpha}\,\delta u = 0, \quad Q_\beta\,\delta w = 0;$$
$$M_\beta\,\delta\theta_\beta = 0; \quad M_{\beta\alpha}\,\delta\theta_\alpha = 0$$

Если в результате решения системы (1.19), (1.21), (1.26) —(1.28) найдены усилия, моменты, деформации, перемещения и углы поворота, удовлетворяющие заданным граничным условиям, то в произвольной точке A, отстоящей от базовой поверхности на расстояние γ (рис. 1.14), могут быть найдены перемещения

$$u_\alpha = u + \gamma\theta_\alpha; \quad u_\beta = v + \gamma\theta_\beta; \quad u_\gamma = w; \tag{1.30}$$

деформации

$$\begin{gathered} e_\alpha = \frac{A_1}{H_1}(\varepsilon_\alpha + \gamma\varkappa_\alpha); \\ e_\beta = \frac{A_2}{H_2}(\varepsilon_\beta + \gamma\varkappa_\beta); \\ e_{\alpha\beta} = \frac{A_1}{H_1}(\varepsilon_{\alpha\beta} + \gamma\varkappa_{\alpha\beta}) + \frac{A_2}{H_2}(\varepsilon_{\beta\alpha} + \gamma\varkappa_{\beta\alpha}); \end{gathered} \tag{1.31}$$

напряжения в слоях, эквидистантных базовой поверхности,

$$\begin{gathered} \sigma_\alpha = A_{11}e_\alpha + A_{12}e_\beta; \\ \sigma_\beta = A_{21}e_\alpha + A_{22}e_\beta; \\ \tau_{\alpha\beta} = A_{33}e_{\alpha\beta}; \end{gathered} \tag{1.32}$$

трансверсальные (межслоевые) напряжения, удовлетворяющие заданным статическим условиям на поверхностях $\gamma = -e$ и $\gamma = s$ (см. рис. 1.12):

$$\begin{gathered} \tau_{\alpha\gamma} = -\frac{1}{H_1^2 H_2}\left\{\int_{-e}^{\gamma}\left[H_1\frac{\partial}{\partial\alpha}\times\right.\right. \\ \times(H_2\sigma_\alpha) + \frac{\partial}{\partial\beta}(H_1^2\tau_{\alpha\beta}) - \\ \left.-\sigma_\beta H_1\frac{\partial H_2}{\partial\alpha} + F_\alpha H_1^2 H_2\right]d\gamma + \\ \left. + B_1^2 B_2 p_\alpha\right\}; \\ \tau_{\beta\gamma} = -\frac{1}{H_1 H_2^2}\left\{\int_{-e}^{\gamma}\left[H_2\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1\sigma_\beta) + \right.\right. \\ + \frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2^2\tau_{\alpha\beta}) - \sigma_\alpha H_2\frac{\partial H_1}{\partial\beta} + \\ \left.\left. + F_\beta H_1 H^2\right]d\gamma + B_1 B_2^2 p_\beta\right\}; \\ \sigma_\gamma = -\frac{1}{H_1 H_2}\left\{\int_{-e}^{\gamma}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2\tau_{\alpha\gamma}) + \right.\right. \\ + \frac{\partial}{\partial\beta}(H_1\tau_{\beta\gamma}) - k_1 A_1 H_2\sigma_\alpha - \\ \left.\left. - k_2 A_2 H_1\sigma_\beta + F_\gamma H_1 H_2\right]d\gamma + B_1 B_2 p\right\}. \end{gathered} \tag{1.33}$$

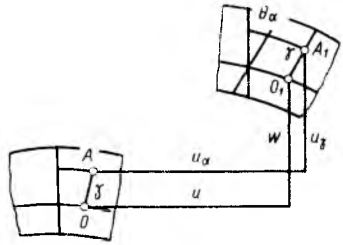


Рис. 1.14. Перемещения произвольной точки A стенки

Вывод и более подробный анализ приведенных в настоящем разделе соотношений содержится в работе [1].

Рассмотрим некоторые распространенные частные формы записи основных уравнений.

Для тонкостенных элементов, у которых $h/R_1 \ll 1$, $h/R_2 \ll 1$, можно не учитывать изменения радиусов кривизны слоев по толщине стенки и приближенно считать, что параметры S_{12} и S_{21} [см. (1.23)] равны единице. Тогда коэффициенты жесткости (1.22) упрощаются следующим образом:

$$B_{mn} = \int_{-e}^{s} A_{mn}\,d\gamma;$$

$$C_{mn} = \int_{-e}^{s} A_{mn}\gamma\,d\gamma;$$

$$D_{mn} = \int_{-e}^{s} A_{mn}\gamma^2\,d\gamma \;(mn = 11,\ 12,\ 21,\ 22);$$

$$B_{33} = B_{33}^{11} = B_{33}^{12} = B_{33}^{21} = B_{33}^{22} = \int_{-e}^{s} A_{33}\, d\gamma;$$

$$C_{33} = C_{33}^{11} = C_{33}^{12} = C_{33}^{21} = C_{33}^{22} = \int_{-e}^{s} A_{33}\gamma\, d\gamma; \tag{1.34}$$

$$D_{33} = D_{33}^{11} = D_{33}^{12} = D_{33}^{21} = D_{33}^{22} = \int_{-e}^{s} A_{33}\gamma^2\, d\gamma;$$

$$K_1 = h^2 \left(\int_{-e}^{s} \frac{d\gamma}{G_{\alpha\gamma}} \right)^{-1};$$

$$K_2 = h^2 \left(\int_{-e}^{s} \frac{d\gamma}{G_{\beta\gamma}} \right)^{-1}.$$

В результате физические соотношения (1.21) принимают вид

$$N_\alpha = B_{11}\varepsilon_\alpha + B_{12}\varepsilon_\beta + C_{11}\varkappa_\alpha + C_{12}\varkappa_\beta;$$

$$N_\beta = B_{21}\varepsilon_\alpha + B_{22}\varepsilon_\beta + C_{21}\varkappa_\alpha + C_{22}\varkappa_\beta;$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = B_{33}(\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha}) + C_{33}(\varkappa_{\alpha\beta} + \varkappa_{\beta\alpha});$$

$$M_\alpha = C_{11}\varepsilon_\alpha + C_{12}\varepsilon_\beta + D_{11}\varkappa_\alpha + D_{12}\varkappa_\beta; \tag{1.35}$$

$$M_\beta = C_{21}\varepsilon_\alpha + C_{22}\varepsilon_\beta + D_{21}\varkappa_\alpha + D_{22}\varkappa_\beta;$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = C_{33}(\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha}) + D_{33}(\varkappa_{\alpha\beta} + \varkappa_{\beta\alpha});$$

$$Q_\alpha = K_1\psi_\alpha; \quad Q_\beta = K_2\psi_\beta.$$

Уравнения равновесия (1.19), геометрические соотношения (1.26)—(1.28) и формулы для перемещений, деформаций и напряжений (1.30)—(1.33) по существу не изменяются, однако их можно несколько упростить, полагая $H_1 \approx B_1 \approx C_1 \approx A_1$, $H_2 \approx B_2 \approx C_2 \approx A_2$, т. е. не учитывая изменение метрических свойств элемента по его толщине.

Если тонкостенный элемент не содержит податливых на сдвиг слоев (например, из пенопласта, сот, резины и т. п.), то можно дополнительно не учитывать деформации поперечного сдвига, считая связь между слоями абсолютно жесткой и полагая $K_1 \to \infty$, $K_2 \to \infty$. Из последних двух равенств (1.35) следует $\psi_\alpha = Q_\alpha/K_1 = 0$, $\psi_\beta = Q_\beta/K_2 = 0$ и согласно формулам (1.27), (1.28)

$$\theta_\alpha = \omega_\alpha = k_1 u - \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha};$$

$$\theta_\beta = \omega_\beta = k_2 v - \frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \beta}. \tag{1.36}$$

Получаемая в результате система уравнений (1.19), (1.35) (без последних двух равенств) и (1.26), (1.36) имеет в совокупности восьмой порядок по переменным α и β. В функционале (1.29) следует принять $\psi_\alpha = 0$, $\psi_\beta = 0$, тогда естественные граничные условия записываются следующим образом:

при $\alpha = \text{const}$

$$N_\alpha \delta u = 0; \quad N_{\alpha\beta}\delta v = 0;$$

$$Q_\alpha^* \delta w = 0; \quad M_\alpha \delta\theta_\alpha = 0,$$

при $\beta = \text{const}$

$$N_\beta \delta v = 0; \quad N_{\alpha\beta}\delta u = 0;$$

$$Q_\beta^* \delta w = 0; \quad M_\beta \delta\theta_\beta = 0,$$

где

$$Q_\alpha^* = Q_\alpha + \frac{1}{A_2}\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \beta};$$

$$Q_\beta^* = Q_\beta + \frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{\alpha\beta}}{\partial \alpha}$$

— обобщенные поперечные силы, к которым при отсутствии деформаций поперечного сдвига приводятся собственно поперечные силы Q_α, Q_β и крутящий момент $M_{\alpha\beta}$.

Распространенной расчетной моделью является безмоментная оболочка, обладающая только мембранными жесткостями. Физические соотношения для безмоментной оболочки получаются из равенств (1.35) при $C_{mn} = 0$, $D_{mn} = 0$, т. е.

$$N_\alpha = B_{11}\varepsilon_\alpha + B_{12}\varepsilon_\beta;$$
$$N_\beta = B_{21}\varepsilon_\alpha + B_{22}\varepsilon_\beta; \qquad (1.37)$$
$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha} = B_{33}(\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha}).$$

Уравнения равновесия (1.19) упрощаются и принимают вид

$$L_\alpha(N) + f_\alpha = 0; \quad L_\beta(N) + f_\beta = 0;$$
$$(k_1 N_\alpha + k_2 N_\beta) A_1 A_2 = f_\gamma. \qquad (1.38)$$

При вычислении приведенных нагрузок f_α, f_β, f_γ в равенствах (1.20) следует принять $H_1 = B_1 = C_1 = A_1$, $H_2 = B_2 = C_2 = A_2$. Геометрические соотношения (1.26) определяют деформации, т. е.

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \varphi_1 v + k_1 w;$$
$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{A_2}\frac{\partial v}{\partial \beta} + \varphi_2 u + k_2 w;$$
$$(1.39)$$
$$\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial u}{\partial \beta} - \varphi_1 u - \varphi_2 v.$$

Система (1.37)—(1.39) имеет в совокупности 4-й порядок по переменным α, β и позволяет сформулировать в каждой точке края два граничных условия — для усилий N_α, $N_{\alpha\beta}$ (край $\alpha = \mathrm{const}$), для усилий N_β, $N_{\alpha\beta}$ (край $\beta = \mathrm{const}$) и для перемещений u и v. Решение системы (1.37)—(1.39) не позволяет наложить ограничений на прогиб w. Существенно, что эта система разделяется на три группы уравнений — три уравнения равновесия (1.38) включают три усилия N_α, N_β, $N_{\alpha\beta}$, физические соотношения (1.37) определяют деформации ε_α, ε_β, $\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha}$, а геометрические соотношения (1.39) — перемещения u, v, w.

1.2.3. Коэффициенты жесткости композитной стенки. Жесткость композитной стенки определяется коэффициентами (1.22), которые содержат всю информацию о структуре стенки и механических свойствах составляющих материалов. Ниже рассматриваются типовые структуры стенки композитных элементов конструкций.

Введем координату $t = e + \gamma$ (см. рис. 1.12), отсчитываемую от внутренней поверхности стенки. Тогда мембранные (B), смешанные (C), изгибные (D) и сдвиговые (K) жесткости стенки определяются равенствами

$$B_{11} = I_{11}^{(0)}; \quad C_{11} = I_{11}^{(1)} - eI_{11}^{(0)};$$
$$D_{11} = I_{11}^{(2)} - 2eI_{11}^{(1)} + e^2 I_{11}^{(0)};$$
$$B_{22} = J_{22}^{(0)}; \quad C_{22} = J_{22}^{(1)} - eJ_{22}^{(0)};$$
$$D_{22} = J_{22}^{(2)} - 2eJ_{22}^{(1)} + e^2 J_{22}^{(0)};$$
$$B_{12} = L_{12}^{(0)}; \quad C_{12} = L_{12}^{(1)} - eL_{12}^{(0)};$$
$$D_{12} = L_{12}^{(2)} - 2eL_{12}^{(1)} + e^2 L_{12}^{(0)}; \qquad (1.40)$$
$$B_{33}^{11} = I_{33}^{(0)}; \quad C_{33}^{11} = I_{33}^{(1)} - eI_{33}^{(0)};$$
$$D_{33}^{11} = I_{33}^{(2)} - 2eI_{33}^{(1)} + e^2 I_{33}^{(0)};$$
$$B_{33}^{22} = J_{33}^{(0)}; \quad C_{33}^{22} = J_{33}^{(1)} - eJ_{33}^{(0)};$$
$$D_{33}^{22} = J_{33}^{(2)} - 2eJ_{33}^{(1)} + e^2 J_{33}^{(0)};$$
$$B_{33}^{12} = L_{33}^{(0)}; \quad C_{33}^{12} = L_{33}^{(1)} - eL_{33}^{(0)};$$
$$D_{33}^{12} = L_{33}^{(2)} - 2eL_{33}^{(1)} + e^2 L_{33}^{(0)};$$

$$K_1 = h^2 \left(\int_0^h S_{21} \frac{dt}{G_{\alpha\gamma}} \right)^{-1};$$
$$K_2 = h^2 \left(\int_0^h S_{12} \frac{dt}{G_{\beta\gamma}} \right)^{-1}, \qquad (1.41)$$

где

$$I_{mm}^{(r)} = \int_0^h S_{12} A_{mm} t^r \, dt$$
$$(mm = 11,\ 33; \quad r = 0,\ 1,\ 2);$$
$$J_{nn}^{(r)} = \int_0^h S_{21} A_{nn} t^r \, dt$$
$$(nn = 22,\ 33; \quad r = 0,\ 1,\ 2); \qquad (1.42)$$
$$L_{mn}^{(r)} = \int_0^h A_{mn} t^r \, dr$$
$$(mn = 12,\ 33; \quad r = 0,\ 1,\ 2);$$
$$S_{12} = \frac{1 + k_2(t - e)}{1 + k_1(t - e)};$$
$$S_{21} = \frac{1 + k_1(t - e)}{1 + k_2(t - e)}.$$

Однородная стенка характеризуется коэффициентами A_{ij}, которые не зависят от t и определяются формулами (1.25). Наиболее простые выражения для жесткостей получаются при совмещении базовой поверхности с внутренней поверхностью стенки, т. е. при $e = 0$. Тогда согласно (1.40)

$$\begin{aligned}
&B_{11} = I_{11}^{(0)}; \quad B_{22} = J_{22}^{(0)}; \quad B_{12} = L_{12}^{(0)};\\
&B_{33}^{11} = I_{33}^{(0)}; \quad B_{33}^{22} = J_{33}^{(0)}; \quad B_{33}^{12} = L_{33}^{(0)};\\
&C_{11} = I_{11}^{(1)}; \quad C_{22} = J_{22}^{(1)}; \quad C_{12} = L_{12}^{(1)};
\end{aligned} \tag{1.43}$$

$$\begin{aligned}
&C_{33}^{11} = I_{33}^{(1)}; \quad C_{33}^{22} = J_{33}^{(1)}; \quad C_{33}^{12} = L_{33}^{(1)};\\
&D_{11} = I_{11}^{(2)}; \quad D_{22} = J_{22}^{(2)}; \quad D_{12} = L_{12}^{(2)};\\
&D_{33}^{11} = I_{33}^{(2)}; \quad D_{33}^{22} = J_{33}^{(2)}; \quad D_{33}^{12} = L_{33}^{(2)}.
\end{aligned}$$

Интегралы I, J, L (1.42) и жесткости K_1, K_2 (1.41) могут быть вычислены с любой степенью точности по формулам

$$I_{mm}^{(0)} = A_{mm}h\left[1 + h(k_2 - k_1) \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}hk_1 + \frac{1}{4}h^2k_1^2 - \frac{1}{5}h^3k_1^3 + \cdots\right)\right];$$

$$I_{mm}^{(1)} = A_{mm}h^2\left[\frac{1}{2} + h(k_2 - k_1) \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}hk_1 + \frac{1}{5}h^2k_1^2 - \frac{1}{6}h^3k_1^3 + \cdots\right)\right];$$

$$I_{mm}^{(2)} = A_{mm}h^3\left[\frac{1}{3} + h(k_2 - k_1) \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}hk_1 + \frac{1}{6}h^2k_1^2 - \frac{1}{7}h^3k_1^3 + \cdots\right)\right];$$

$$J_{nn}^{(0)} = A_{nn}h\left[1 + h(k_1 - k_2)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}hk_2 + \frac{1}{4}h^2k_2^2 - \frac{1}{5}h^3k_2^3 + \cdots\right)\right];$$

$$J_{nn}^{(1)} = A_{nn}h^2\left[\frac{1}{2} + h(k_1 - k_2)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}hk_2 + \frac{1}{5}h^2k_2^2 - \frac{1}{6}h^3k_2^3 + \cdots\right)\right];$$

$$L_{mn}^{(0)} = A_{mn}h, \quad L_{mn}^{(1)} = \frac{1}{2}A_{mn}h^2;$$

$$L_{mn}^{(2)} = \frac{1}{3}A_{mn}h^3;$$

$$K_1 = \frac{hG_{\alpha\gamma}}{1 + h(k_1 - k_2)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}hk_2 + \frac{1}{4}h^2k_2^2 - \frac{1}{5}h^3k_2^3 + \cdots\right)}; \tag{1.44}$$

$$K_2 = \frac{hG_{\beta\gamma}}{1 + h(k_2 - k_1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}hk_1 + \frac{1}{4}h^2k_1^2 - \frac{1}{5}h^3k_1^3 + \cdots\right)}.$$

Тонкая однородная стенка удовлетворяет дополнительным условиям $hk_1 \ll 1$, $hk_2 \ll 1$, позволяющим принять $S_{12} = S_{21} = 0$. В этом случае жесткости (1.40) или (1.34) имеют вид

$$B_{mn} = I_{mn}^{(0)}; \quad C_{mn} = I_{mn}^{(1)} - eI_{mn}^{(0)};$$

$$D_{mn} = I_{mn}^{(2)} - 2eI_{mn}^{(1)} + e^2I_{mn}^{(0)}$$

$$(mn = 11,\ 12,\ 22);$$

$$B_{33} = B_{33}^{11} = B_{33}^{12} = B_{33}^{22} = I_{33}^{(0)}; \tag{1.45}$$

$$C_{33} = C_{33}^{11} = C_{33}^{12} = C_{33}^{22} = I_{33}^{(1)} - eI_{33}^{(0)};$$

$$D_{33} = D_{33}^{11} = D_{33}^{12} = D_{33}^{22} = I_{33}^{(2)} - 2eI_{33}^{(1)} + e^2I_{33}^{(0)},$$

где

$$I_{mn}^{(r)} = \frac{A_{mn}h^{r+1}}{r+1} \quad (mn = 11, 12, 22, 33).$$

Сдвиговые жесткости

$$K_1 = G_{\alpha\gamma}h; \quad K_2 = G_{\beta\gamma}h.$$

При $e = h/2$, т. е. в случае, когда базовая поверхность совпадает со срединной поверхностью стенки, все смешанные жесткости обращаются в ноль и равенства (1.45) записываются следующим образом:

$$B_{mn} = A_{mn}h; \quad C_{mn} = 0;$$

$$D_{mn} = A_{mn}\frac{h^3}{12}.$$

Слоистая стенка (рис. 1.15) характеризуется жесткостями (1.40) или (1.43) (при $e = 0$), где согласно (1.42), (1.41)

$$I_{mn}^{(r)} = \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{k} S_{12}^{(i)} A_{mm}^{(i)} \times \left(t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}\right);$$

$$J_{nn}^{(r)} = \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{k} S_{21}^{(i)} A_{nn}^{(i)} \times \left(t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}\right);$$

$$L_{mn}^{(r)} = \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{k} A_{mn}^{(i)} \left(t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}\right);$$

(1.46)

$$K_1 = \frac{h^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{S_{21}^{(i)}}{G_{\alpha\gamma}^{(i)}} (t_i - t_{i-1})};$$

$$K_2 = \frac{h^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{S_{12}^{(i)}}{G_{\beta\gamma}^{(i)}} (t_i - t_{i-1})}.$$

$$S_{12}^{(i)} = \frac{2 + k_2 (t_{i-1} + t_i - 2e)}{2 + k_1 (t_{i-1} + t_i - 2e)};$$

$$S_{21}^{(i)} = \frac{2 + k_1 (t_{i-1} + t_i - 2e)}{2 + k_2 (t_{i-1} + t_i - 2e)}.$$

При выводе равенств (1.46) предполагалось, что радиусы кривизны слоя не изменяются по его толщине и равны соответствующим средним значениям.

Тонкая слоистая стенка, для которой можно принять $S_{12}^{(i)} = S_{21}^{(i)} = 1$, характеризуется жесткостями (1.45), где

$$I_{mn}^{(r)} = \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{k} A_{mn}^{(i)} \left(t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}\right). \qquad (1.47)$$

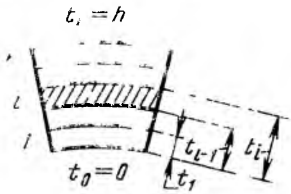


Рис. 1.15 Геометрические параметры слоистой стенки

Сдвиговые жесткости при этом имеют вид

$$K_1 = \frac{h^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{G_{\alpha\gamma}^{(i)}} (t_i - t_{i-1})};$$

$$K_2 = \frac{h^2}{\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{G_{\beta\gamma}^{(i)}} (t_i - t_{i-1})}.$$

В общем случае наиболее простые выражения для жесткостей получаются, если принять в равенствах (1.42) $e = 0$. Если структура тонкой стенки симметрична относительно срединной поверхности, разделяющей толщину стенки пополам, то, полагая $e = h/2$, т. е. совмещая базовую поверхность со срединной, можно получить вместо (1.45)

$$B_{mn} = I_{mn}^{(0)}; \quad C_{mn} = 0,$$

$$D_{mn} = I_{mn}^{(2)} - \frac{\left[I_{mn}^{(1)}\right]^2}{I_{mn}^{(0)}}.$$

Здесь $mn = 11, 12, 21, 22, 33$ и величины $I_{mn}^{(r)}$ ($r = 0, 1, 2$) определяются формулой (1.47).

Приведенные выше коэффициенты жесткости зависят от упругих постоянных отдельных слоев, образующих стенку. Рассмотрим типовые структуры слоев композитных элементов конструкций.

Симметрично армированный слой (рис. 1.16) образован из однонаправленных или ортогонально армированных элементарных слоев, уложенных так, что оси основного армирования составляют с осью α углы $\pm\varphi_i$.

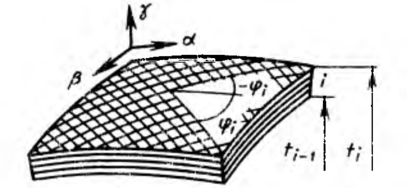


Рис. 1.16. Структурные параметры симметрично армированного слоя

При большом числе элементарных слоев и одинаковом количестве чередующихся слоев с углами φ_i и $-\varphi_i$ обобщенный слой, показанный на рис. 1.16, можно считать условно однородным и ортотропным. Тогда коэффициенты жесткости определяются равенствами

$$A_{11}^{(i)} = \overline{E}_1^{(i)} \cos^4 \varphi_i + \overline{E}_2^{(i)} \sin^4 \varphi_i + 2\left(\overline{E}_1^{(i)} \nu_{12}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)}\right) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i;$$

$$A_{12}^{(i)} = A_{21}^{(i)} = \overline{E}_1^{(i)} \nu_{12}^{(i)} + \left[\overline{E}_1^{(i)} + \overline{E}_2^{(i)} - 2\left(\overline{E}_1^{(i)} \nu_{12}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)}\right)\right] \times \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i; \qquad (1.48)$$

$$A_{22}^{(i)} = \overline{E}_1^{(i)} \sin^4 \varphi_i + \overline{E}_2^{(i)} \cos^4 \varphi_i + 2\left(\overline{E}_1^{(i)} \nu_{12}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)}\right) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i;$$

$$A_{33}^{(i)} = \left(\overline{E}_1^{(i)} + \overline{E}_2^{(i)} - 2\overline{E}_1^{(i)} \nu_{12}^{(i)}\right) \times \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i + G_{12}^{(i)} \cos^2 2\varphi_i;$$

$$G_{\alpha\gamma}^{(i)} = G_{13}^{(i)} \cos^2 \varphi_i + G_{23}^{(i)} \sin^2 \varphi_i;$$

$$G_{\beta\gamma}^{(i)} = G_{13}^{(i)} \sin^2 \varphi_i + G_{23}^{(i)} \cos^2 \varphi_i.$$

Здесь $\overline{E}_{1,2}^{(i)} = E_{1,2}^{(i)}/\left(1 - \nu_{12}^{(i)} \nu_{21}^{(i)}\right)$; $\overline{E}_1^{(i)} \nu_{12}^{(i)} = \overline{E}_2^{(i)} \nu_{21}^{(i)}$; оси 1, 2 располагаются в плоскости элементарного слоя и направлены соответственно вдоль и поперек волокон (для однонаправленного слоя) или основного армирования (для ткани), ось 3 направлена по нормали к слою (параллельна оси γ).

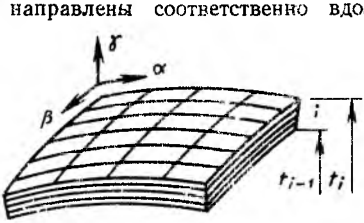


Рис. 1.17. Структурные параметры ортотропного слоя

Ортотропный слой (рис. 1.17), оси ортотропии которого совпадают с осями α и β, обладает следующими коэффициентами жесткости:

$$A_{11}^{(i)} = \overline{E}_\alpha^{(i)}; \quad A_{22}^{(i)} = \overline{E}_\beta^{(i)}; \quad A_{33}^{(i)} = G_{\alpha\beta}^{(i)}; \qquad (1.49)$$

$$A_{12}^{(i)} = A_{21}^{(i)} = \nu_{\alpha\beta}^{(i)} \overline{E}_\alpha^{(i)} = \nu_{\beta\alpha}^{(i)} \overline{E}_\beta^{(i)},$$

где $\overline{E}_{\alpha,\beta}^{(i)} = E_{\alpha,\beta}^{(i)}/\left(1 - \nu_{\alpha\beta}^{(i)} \nu_{\beta\alpha}^{(i)}\right)$.

Модули поперечного сдвига $G_{\alpha\gamma}^{(i)}$ и $G_{\beta\gamma}^{(i)}$.

Изотропный слой из металла, термопласта или другого материала характеризуется параметрами

$$A_{11}^{(i)} = A_{22}^{(i)} = \overline{E}^{(i)}; \quad A_{33}^{(i)} = G^{(i)} = E^{(i)}/2\left(1 + \nu^{(i)}\right);$$

$$A_{12}^{(i)} = A_{21}^{(i)} = \nu^{(i)} \overline{E}^{(i)},$$

$$G_{\alpha\gamma}^{(i)} = G_{\beta\gamma}^{(i)} = G^{(i)},$$

где $\overline{E}^{(i)} = E^{(i)}/\left[1 - \left(\nu^{(i)}\right)^2\right]$.

Если стенка включает слои **упругого заполнителя** (рис. 1.18), образованного из пенопластов, сот, резины или других материалов, жесткость которых значительно ниже жесткости остальных (несущих) слоев, то влиянием заполнителя на мембранные, смешанные и изгибные жесткости стенки можно пренебречь, полагая $A_{11}^{(i)} = A_{12}^{(i)} = A_{21}^{(i)} = A_{22}^{(i)} = A_{33}^{(i)} = 0$. Можно считать также, что поперечная сдвиговая податливость стенки определяется, в основном, заполнителем, т. е. при вычислении сдвиговых жест

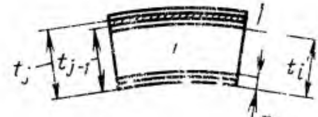


Рис. 1.18. Элемент трехслойной стенки

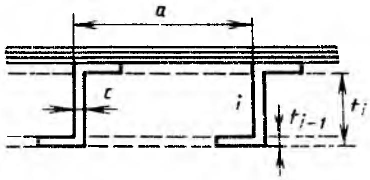


Рис. 1.19. Элемент стенки, подкрепленной ребрами

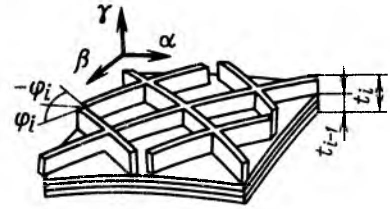


Рис. 1.20. Элемент стенки, подкрепленной спиральными ребрами

костей K_1, K_2 можно учитывать только характеристики заполнителя, полагая для несущих слоев $G_{\alpha\gamma}^{(i)} \to \infty$, $G_{\beta\gamma}^{(i)} \to \infty$.

Элементы, подкрепленные ребрами (рис. 1.19), можно рассматривать как состоящие из условных слоев, соответствующих обшивке, полкам и стенкам ребер. Слои, соответствующие ребрам, наделяются приведенными жесткостями. Пусть, например, ребра направлены вдоль оси α. Тогда коэффициенты жесткости слоя i, моделирующего стенки ребер, имеют вид $A_{22}^{(i)} = A_{12}^{(i)} = A_{21}^{(i)} = A_{33}^{(i)} = 0$, $A_{11}^{(i)} = E_p c/a$, где E_p — модель упругости материала ребра.

Для системы несущих ребер, составляющих углы $\pm\varphi_i$ с осью α (рис. 1.20), имеем

$$A_{11}^{(i)} = E_i b_i \cos^4 \varphi_i; \; A_{22}^{i} = E_i b_i \sin^4 \varphi_i;$$

$$A_{12}^{(i)} = A_{21}^{(i)} = A_{33}^{(i)} = E_i b_i \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i; \quad (1.50)$$

$$G_{\alpha\gamma}^{(i)} = G_i b_i \cos^2 \varphi_i; \; G_{\beta\gamma}^{(i)} = G_i b_i \sin^2 \varphi_i,$$

где

$$b_i = \frac{F_i}{a_i (t_i - t_{i-1})}.$$

Здесь E_i, G_i, F_i — соответственно модули упругости и сдвига и площадь сечения ребра; a_i — расстояние между ребрами (по нормали к осям).

1.2.4. Стенка переменной толщины. Приведенные в п. 1.3.2 соотношения относились к композитным элементам конструкций с постоянной толщиной стенки. Если толщина стенки является переменной, эти соотношения нуждаются в некоторой модификации. Предположим, что слоистый композитный элемент ограничен поверхностями $\gamma = -e\,(\alpha, \beta)$ и $\gamma = s\,(\alpha, \beta)$, не эквидистантными базовой поверхности $\gamma = 0$, т. е. его толщина $h = e + s$ зависит от координат α и β (рис. 1.21). Будем считать, что функции $e\,(\alpha, \beta)$, $s\,(\alpha, \beta)$ и, следовательно, $h\,(\alpha, \beta)$ изменяются медленно, т. е. что их производные малы по сравнению с единицей и можно принять (рис. 1.21) $\sin \eta \approx \eta$, $\cos \eta \approx 1$ и $\sin \zeta \approx \zeta$, $\cos \zeta \approx 1$. Тогда

$$\eta_\alpha = \frac{1}{C_1} \frac{\partial s}{\partial \alpha}; \quad \eta_\beta = \frac{1}{C_2} \frac{\partial s}{\partial \beta};$$

$$\zeta_\alpha = \frac{1}{B_1} \frac{\partial e}{\partial \alpha}; \quad \zeta_\beta = \frac{1}{B_2} \cdot \frac{\partial e}{\partial \beta}.$$

Здесь B и C — коэффициенты первой квадратичной формы внутренней ($\gamma = -e$) и наружной ($\gamma = s$) поверхностей.

Для элемента переменной толщины статические (1.19), физические (1.21) и геометрические (1.26)—(1.28) соотношения, а также формулы (1.30)—(1.33) для перемещений, деформаций и напряжений, по существу, остаются без изменения. Необходимо только

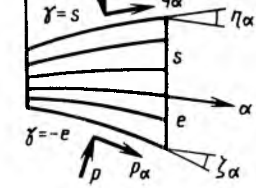


Рис. 1.21. Элемент стенки переменной толщины

иметь в виду, что, во-первых, изменяются проекции внешних нагрузок q и p (см. рис. 1.21) на оси α и β, в результате чего формулы (1.20) для приведенных к базовой поверхности сил и моментов усложняются и заменяются следующими:

$$f_\alpha = \int_{-e}^{s} F_\alpha H_1 H_2 \, d\gamma + B_1 B_2 (p_\alpha + \zeta_\alpha p) + C_1 C_2 (q_\alpha + \eta_\alpha q);$$

$$f_\beta = \int_{-e}^{s} F_\beta H_1 H_2 \, d\gamma + B_1 B_2 (p_\beta + \zeta_\beta p) + C_1 C_2 (q_\beta + \eta_\beta q);$$

$$f_\gamma = \int_{-e}^{s} F_\gamma H_1 H_2 \, d\gamma + B_1 B_2 (p - \zeta_\alpha p_\alpha - \zeta_\beta p_\beta) - C_1 C_2 (q - \eta_\alpha q_\alpha - \eta_\beta q_\beta); \quad (1.51)$$

$$m_\alpha = \int_{-e}^{s} F_\alpha H_1 H_2 \gamma \, d\gamma + s C_1 C_2 (q_\alpha + \eta_\alpha q) - e B_1 B_2 (p_\alpha + \zeta_\alpha p);$$

$$m_\beta = \int_{-e}^{s} F_\beta H_1 H_2 \gamma \, d\gamma + s C_1 C_2 (q_\beta + \eta_\beta q) - e B_1 B_2 (p_\beta + \zeta_\beta p).$$

Во-вторых, следует учитывать, что геометрические параметры e, s, h, входящие в равенства (1.22), (1.31), (1.33), (1.51), зависят от переменных α и β.

1.2.5. Учет температурного воздействия. Помимо объемных и поверхностных нагрузок, которые учитываются уравнениями, приведенными в п. 1.2.2, на конструкции из композитов могут воздействовать температурные поля, вызывающие появление температурных деформаций и напряжений. В слоистых материалах температурные напряжения могут возникать за счет различных коэффициентов линейного расширения отдельных слоев.

Для получения уравнений термоупругости достаточно вместо обобщенного закона Гука (1.24) воспользоваться следующими соотношениями:

$$\sigma_\alpha = A_{11} e_\alpha + A_{12} e_\beta - A_{1\text{т}} T;$$
$$\sigma_\beta = A_{21} e_\alpha + A_{22} e_\beta - A_{2\text{т}} T; \quad (1.52)$$
$$\tau_{\alpha\beta} = A_{33} e_{\alpha\beta},$$

где T — приращение температуры. Входящие сюда коэффициенты $A_{1\text{т}}$, $A_{2\text{т}}$ выражаются через коэффициенты линейного температурного расширения материала и будут приведены ниже.

В результате использования формул (1.52) физические соотношения (1.21) обобщаются следующим образом:

$$N_\alpha^\text{т} = N_\alpha - B_{1\text{т}}; \quad N_\beta^\text{т} = N_\beta - B_{2\text{т}};$$
$$N_{\alpha\beta}^\text{т} = N_{\alpha\beta}; \quad N_{\beta\alpha}^\text{т} = N_{\beta\alpha};$$
$$M_\alpha^\text{т} = M_\alpha - D_{1\text{т}}; \quad M_\beta^\text{т} = M_\beta - D_{2\text{т}};$$
$$M_{\alpha\beta}^\text{т} = M_{\alpha\beta}; \quad M_{\beta\alpha}^\text{т} = M_{\beta\alpha};$$
$$Q_\alpha^\text{т} = Q_\alpha; \quad Q_\beta^\text{т} = Q_\beta.$$

Здесь величины без индекса «т» определяются соотношениями (1.21), а температурные коэффициенты имеют вид

$$B_{1\text{т}} = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{s} A_{1\text{т}} T H_2 \, d\gamma;$$

$$B_{2\text{т}} = \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{s} A_{2\text{т}} T H_1 \, d\gamma;$$

$$D_{1\text{т}} = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{s} A_{1\text{т}} T H_2 \gamma \, d\gamma;$$

$$D_{2\text{т}} = \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{s} A_{2\text{т}} T H_1 \gamma \, d\gamma.$$

Уравнения равновесия (1.19) записываются через полные усилия и моменты, т. е.

$$L_\alpha (N^\text{т}) + k_1 A_1 A_2 Q_\alpha + f_\alpha = 0;$$
$$L_\beta (N^\text{т}) + k_2 A_1 A_2 Q_\beta + f_\beta = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(A_2Q_\alpha)+\frac{\partial}{\partial\beta}(A_1Q_\beta)-$$

$$-A_1A_2\left(k_1N_\alpha^{\text{т}}+k_2N_\beta^{\text{т}}\right)+f_\gamma=0;$$

$$L_\alpha(M^{\text{т}})-A_1A_2Q_\alpha+m_\alpha=0;$$

$$L_\beta(M^{\text{т}})-A_1A_2Q_\beta+m_\beta=0.$$

Геометрические соотношения (1.26)—(1.28) и формулы (1.30), (1.32), (1.33) остаются без изменения, а равенства (1.32) для напряжений заменяются на (1.52). Естественные граничные условия записываются через полные усилия и моменты, т. е. при $\alpha=\text{const}$

$$N_\alpha^{\text{т}}\,\delta u=0;\quad N_{\alpha\beta}\,\delta v=0;\quad Q_\alpha\,\delta w=0;$$

$$M_\alpha^{\text{т}}\,\delta\theta_\alpha=0;\quad M_{\alpha\beta}\,\delta\theta_\beta=0,$$

при $\beta=\text{const}$

$$N_\beta^{\text{т}}\,\delta v=0;\quad N_{\beta\alpha}\,\delta u=0;\quad Q_\beta\,\delta w=0;$$

$$M_\beta^{\text{т}}\,\delta\theta_\beta=0;\quad M_{\beta\alpha}\,\delta\theta_\alpha=0.$$

Для слоистой стенки (см. рис. 1.15) имеют место формулы, аналогичные (1.40):

$$B_{m\text{т}}=I_{m\text{т}}^{(0)};\quad D_{m\text{т}}=I_{m\text{т}}^{(1)}-eI_{m\text{т}}^{(0)}$$
$$(m=1,\ 2),$$

где в дополнении к (1.42)

$$I_{1\text{т}}^{(r)}=\frac{1}{A_2}\int\limits_0^h A_{1\text{т}}TH_2t^r\,dt;$$

$$I_{2\text{т}}^{(r)}=\frac{1}{A_1}\int\limits_0^h A_{2\text{т}}TH_1t^r\,dt;\qquad r=0,\ 1.$$

Если не учитывать изменение температуры и метрических коэффициентов по толщине слоя, то можно записать следующие равенства, аналогичные (1.46):

$$I_{1\text{т}}^{(r)}=\frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{k}A_{1\text{т}}^{(i)}T_iH_2^{(i)}\times$$
$$\times\left(t_i^{r+1}-t_{i-1}^{r+1}\right);$$

$$I_{2\text{т}}^{(r)}=\frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{k}A_{2\text{т}}^{(i)}T_iH_1^{(i)}\times$$
$$\times\left(t_i^{r+1}-t_{i-1}^{r+1}\right),$$

$$H_1^{(i)}=1+\frac{k_1}{2}(t_{i-1}+t_i-2e);$$

$$H_1^{(i)}=1+\frac{k_2}{2}(t_{i-1}+t_i-2e);$$

T_i — температура i-го слоя. Для тонкой стенки эти формулы можно упростить, приняв в них $H_1^{(i)}=1,\ H_2^{(i)}=1$.

Приведем коэффициенты $A_{1\text{т}}^{(i)}$, $A_{2\text{т}}^{(i)}$ для типовых слоев.

Для симметрично армированного композитного слоя (см. рис. 1.16) в дополнение к равенствам (1.48) запишем

$$A_{1\text{т}}^{(i)}=\overline{E}_1^{(i)}\left(\alpha_{\text{т}1}^{(i)}+\nu_{12}^{(i)}\alpha_{\text{т}2}^{(i)}\right)\cos^2\varphi_i+$$
$$+\overline{E}_2^{(i)}\left(\alpha_{\text{т}2}^{(i)}+\nu_{21}^{(i)}\alpha_{\text{т}1}^{(i)}\right)\sin^2\varphi_i;$$

$$A_{2\text{т}}^{(i)}=\overline{E}_1^{(i)}\left(\alpha_{\text{т}1}^{(i)}+\nu_{12}^{(i)}\alpha_{\text{т}2}^{(i)}\right)\sin^2\varphi_i+$$
$$+\overline{E}_2^{(i)}\left(\alpha_{\text{т}2}^{(i)}+\nu_{21}^{(i)}\alpha_{\text{т}2}^{(i)}\right)\cos^2\varphi_i.$$

Здесь $\alpha_{\text{т}1}^{(i)}$, $\alpha_{\text{т}2}^{(i)}$— коэффициенты линейного температурного расширения элементарного армированного слоя в продольном и поперечном направлении.

Для ортотропного слоя (см. рис. 1.17) дополнительно к формулам (1.49) имеем

$$A_{1\text{т}}^{(i)}=\overline{E}_\alpha^{(i)}\left(\alpha_{\text{т}\alpha}^{(i)}+\nu_{\alpha\beta}^{(i)}\alpha_{\text{т}\beta}^{(i)}\right);$$

$$A_{2\text{т}}^{(i)}=\overline{E}_\beta^{(i)}\left(\alpha_{\text{т}\beta}^{(i)}+\nu_{\beta\alpha}^{(i)}\alpha_{\text{т}\alpha}^{(i)}\right).$$

Здесь $\alpha_{\text{т}\alpha}^{(i)}$, $\alpha_{\text{т}\beta}^{(i)}$ — коэффициенты линейного температурного расширения слоя в направлениях α и β.

Для изотропного слоя $A_{1\text{т}}^{(i)}=A_{2\text{т}}^{(i)}=\overline{E}^{(i)}\alpha_{\text{т}}^{(i)}\left(1+\nu^{(i)}\right)$, а для системы ребер, показанной на рис. 1.20, в соответствии с равенствами (1.50)

$$A_{1\text{т}}^{(i)}=E_ib_i\alpha_{\text{т}}^{(i)}\cos^2\varphi_i;$$

$$A_{2\text{т}}^{(i)}=E_ib_i\alpha_{\text{т}}^{(i)}\sin^2\varphi_i.$$

Здесь $\alpha_{\text{т}}^{(i)}$ — коэффициент линейного температурного расширения ребра в продольном направлении.

1.2.6. Нелинейные уравнения. При выводе уравнений, приведенных в п. 1.2.2, предполагалось, что размеры, форма и расположение элемента материала, показанного, например, на рис. 1.14, изменяются при нагружении настолько мало, что этими изменениями можно пренебречь. В результате уравнения равновесия (1.19) соответствуют исходным геометрическим параметрам конструкции, а геометрические соотношения (1.26)—(1.28) записаны для исходной геометрии и малых деформаций. Однако после нагружения геометрические параметры конструкции в большей или меньшей степени всегда отличаются от исходных. Эти отличия учитываются геометрически нелинейными теориями деформирования, прикладные варианты которых обсуждаются в настоящем разделе.

Рассмотрим бесконечно малый элемент базовой поверхности, показанный на рис. 1.11. В процессе нагружения этот элемент может смещаться и поворачиваться как твердое тело, искривляться и претерпевать деформации, вызывающие удлинение или укорочение его сторон и изменение прямых углов между ними. Поскольку в конструкционных материалах и, в частности, композитах, использующихся для изготовления несущих конструкций, большие деформации не допускаются в силу накладываемых требований по жесткости или в силу свойств самих материалов (предельная деформация волокон в композитах не превышает 2,5%), исключим из рассмотрения нелинейные эффекты, связанные с деформациями материала. Кроме того, будем считать малым угол поворота элемента вокруг нормальной оси γ (см. рис. 1.11). Тогда система уравнений, обобщающая уравнения (1.19), (1.21), (1.26)—(1.28) и позволяющая учесть перемещения элемента конструкции, его поворот вокруг осей α, β и дополнительное искривление, появившиеся в процессе нагружения конструкции, имеют следующий вид.

Уравнения равновесия:

$$L_\alpha(N) + k_1A_1A_2Q_\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha}(A_2Q_\alpha\omega_\alpha) + \frac{\partial}{\partial\beta}(A_1Q_\beta\omega_\alpha) + \omega_\beta\left(Q_\alpha\frac{\partial A_1}{\partial\beta} - Q_\beta\frac{\partial A_2}{\partial\alpha}\right) - k_1A_1A_2(\omega_\alpha N_\alpha + \omega_\beta N_{\alpha\beta}) + f_\alpha = 0;$$

$$L_\beta(N) + k_2A_1A_2Q_\beta + \frac{\partial}{\partial\beta}(A_1Q_\beta\omega_\beta) + \frac{\partial}{\partial\alpha}(A_2Q_\alpha\omega_\beta) + \omega_\alpha\left(Q_\alpha\frac{\partial A_1}{\partial\beta} - Q_\beta\frac{\partial A_2}{\partial\alpha}\right) - k_2A_1A_2(\omega_\beta N_\beta + \omega_\alpha N_{\beta\alpha}) + f_\beta = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(A_2Q_\alpha) + \frac{\partial}{\partial\beta}(A_1Q_\beta) - A_1A_2(k_1N_\alpha + k_2N_\beta) - \frac{\partial}{\partial\alpha}(A_2N_\alpha\omega_\alpha) - \frac{\partial}{\partial\alpha}(A_2N_{\alpha\beta}\omega_\beta) - \frac{\partial}{\partial\beta}(A_1N_\beta\omega_\beta) - \frac{\partial}{\partial\beta}(A_1N_{\beta\alpha}\omega_\alpha) - A_1A_2(k_1Q_\alpha\omega_\alpha + k_2Q_\beta\omega_\beta) + f_\gamma = 0; \quad (1.53)$$

$$L_\alpha(M) - A_1A_2Q_\alpha - k_1A_1A_2(\omega_\alpha M_\alpha + \omega_\beta M_{\alpha\beta}) + m_\alpha = 0;$$

$$L_\beta(M) - A_1A_2Q_\beta - k_2A_1A_2(\omega_\beta M_\beta + \omega_\alpha M_{\beta\alpha}) + m_\beta = 0.$$

Входящие сюда операторы L_α, L_β и моменты m_α, m_β были приведены в обозначениях к уравнениям (1.19): углы поворота ω_α, ω_β определяются равенствами (1.28), а выражения (1.20) для нагрузок изменяются следующим образом:

$$f_\alpha = \int_{-e}^{s} F_\alpha H_1H_2\,d\gamma + B_1B_2(p_\alpha + \omega_\alpha p) + C_1C_2(q_\alpha - \omega_\alpha q);$$

$$f_\beta = \int_{-e}^{s} F_\beta H_1H_2\,d\gamma + B_1B_2(p_\beta + \omega_\beta p) + C_1C_2(q_\beta - \omega_\beta q);$$

$$f_\gamma = \int_{-e}^{s} F_\gamma H_1 H_2\, d\gamma + B_1 B_2 (p - p_\alpha \omega_\alpha - p_\beta \omega_\beta) - C_1 C_2 (q + q_\alpha \omega_\alpha + q_\beta \omega_\beta).$$

Физические соотношения:

$$N_\alpha = B_{11}\varepsilon_\alpha + B_{12}\varepsilon_\beta + C_{11}\varkappa_\alpha + C_{12}\varkappa_\beta + \frac{1}{2}(L_{11}\omega_\alpha^2 + L_{12}\omega_\beta^2);$$

$$N_\beta = B_{21}\varepsilon_\alpha + B_{22}\varepsilon_\beta + C_{21}\varkappa_\alpha + C_{22}\varkappa_\beta + \frac{1}{2}(L_{21}\omega_\alpha^2 + L_{22}\omega_\beta^2);$$

$$N_{\alpha\beta} = B_{33}^{11}\varepsilon_{\beta\alpha} + B_{33}^{12}\varepsilon_{\beta\alpha} + C_{33}^{11}\varkappa_{\alpha\beta} + C_{33}^{12}\varkappa_{\beta\alpha} + L_{33}^{11}\omega_\alpha\omega_\beta;$$

$$N_{\beta\alpha} = B_{33}^{21}\varepsilon_{\alpha\beta} + B_{33}^{22}\varepsilon_{\beta\alpha} + C_{33}^{21}\varkappa_{\alpha\beta} + C_{33}^{22}\varkappa_{\beta\alpha} + L_{33}^{22}\omega_\alpha\omega_\beta; \tag{1.54}$$

$$M_\alpha = C_{11}\varepsilon_\alpha + C_{12}\varepsilon_\beta + D_{11}\varkappa_\alpha + D_{12}\varkappa_\beta + \frac{1}{2}(T_{11}\omega_\alpha^2 + T_{12}\omega_\beta^2);$$

$$M_\beta = C_{21}\varepsilon_\alpha + C_{22}\varepsilon_\beta + D_{21}\varkappa_\alpha + D_{22}\varkappa_\beta + \frac{1}{2}(T_{21}\omega_\alpha^2 + T_{22}\omega_\beta^2);$$

$$M_{\alpha\beta} = C_{33}^{11}\varepsilon_{\alpha\beta} + C_{33}^{12}\varepsilon_{\beta\alpha} + D_{33}^{11}\varkappa_{\alpha\beta} + D_{33}^{12}\varkappa_{\beta\alpha} + T_{33}^{11}\omega_\alpha\omega_\beta;$$

$$M_{\beta\alpha} = C_{33}^{21}\varepsilon_{\alpha\beta} + C_{33}^{22}\varepsilon_{\beta\alpha} + D_{33}^{21}\varkappa_{\alpha\beta} + D_{33}^{22}\varkappa_{\beta\alpha} + T_{33}^{22}\omega_\alpha\omega_\beta;$$

$$Q_\alpha = K_1\psi_\alpha;$$

$$Q_\beta = K_2\psi_\beta.$$

Здесь введены дополнительные коэффициенты жесткости при нелинейных членах:

$$L_{11} = \frac{1}{A_2}\int_{-e}^{s} A_{11} H_2\, d\gamma;$$

$$L_{12} = \frac{1}{A_2}\int_{-e}^{s} A_{12} H_2\, d\gamma;$$

$$L_{21} = \frac{1}{A_1}\int_{-e}^{s} A_{21} H_1\, d\gamma;$$

$$L_{22} = \frac{1}{A_1}\int_{-e}^{s} A_{22} H_1\, d\gamma;$$

$$L_{33}^{11} = \frac{1}{A_2}\int_{-e}^{s} A_{33} H_2\, d\gamma;$$

$$L_{33}^{22} = \frac{1}{A_1}\int_{-e}^{s} A_{33} H_1\, d\gamma;$$

$$T_{11} = \frac{1}{A_2}\int_{-e}^{s} A_{11} H_2 \gamma\, d\gamma; \quad T_{12} = \frac{1}{A_2}\int_{-e}^{s} A_{12} H_2 \gamma\, d\gamma;$$

$$T_{21} = \frac{1}{A_1}\int_{-e}^{s} A_{21} H_1 \gamma\, d\gamma; \quad T_{22} = \frac{1}{A_1}\int_{-e}^{s} A_{22} H_1 \gamma\, d\gamma;$$

$$T_{33}^{11} = \frac{1}{A_2}\int_{-e}^{s} A_{33} H_2 \gamma\, d\gamma;$$

$$T_{33}^{22} = \frac{1}{A_1}\int_{-e}^{s} A_{33} H_1 \gamma\, d\gamma.$$

Вводя переменную $t = \gamma + e$ (см. рис. 1.12), получаем

$$L_{mn} = F_{mn}^{(0)}; \quad L_{mn}^{11} = F_{mn}^{(0)};$$

$$T_{mn} = F_{mn}^{(1)} - eF_{mn}^{(0)}; \quad T_{mn}^{11} = F_{mn}^{(1)} - eF_{mn}^{(0)}; \quad F_{mn}^{(r)} = \frac{1}{A_2}\int_{-e}^{s} A_{mn} H_2 t^r\, dt$$

при $mn = 11,\ 12,\ 33$; $r = 0,\ 1$;

$$L_{mn} = P_{mn}^{(0)};\quad L_{mn}^{22} = P_{mn}^{(0)};$$

$$T_{mn} = P_{mn}^{(1)} - eP_{mn}^{(0)};$$

$$T_{mn}^{22} = P_{mn}^{(1)} - eP_{mn}^{(0)};\quad P_{mn}^{(r)} = \frac{1}{A_1}\int\limits_{-e}^{s} A_{mn}H_1 t^r\,dt$$

при $mn = 21,\ 22,\ 33$; $r = 0,\ 1$.

Для слоистой стенки (рис. 1.15), не учитывая изменения метрических коэффициентов по толщине слоя, найдем

$$F_{mn}^{(r)} = \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{k} A_{mn}^{(i)}H_2^{(i)} \times \left(t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}\right);$$

$$P_{mn}^{(r)} = \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{k} A_{mn}^{(i)}H_1^{(i)} \times \left(t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r-1}\right),$$

где, как и ранее,

$$H_1^{(i)} = 1 + \frac{k_1}{2}\left(t_{i-1} + t_i - 2e\right);$$

$$H_2^{(i)} = 1 + \frac{k_2}{2}\left(t_{i-1} + t_i - 2e\right).$$

Для тонкой стенки можно считать $H_1^{(i)} = 1$ и $H_2^{(i)} = 1$.

Геометрические соотношения, определяющие деформации ε, $\varkappa$, ψ и углы поворота ω, которые входят в уравнения (1.53), (1.54), совпадают с соотношениями (1.26)—(1.28).

Таким образом, геометрически нелинейная теория, учитывающая поворот элемента базовой поверхности (см. рис. 1.11) относительно осей α, β и его дополнительное искривление, связанные с воздействием внешней нагрузки, определяется системой уравнений (1.53), (1.54), (1.26)—(1.28). Естественные граничные условия имеют следующий вид:

при $\alpha = \text{const}$

$$(N_\alpha + Q_\alpha\omega_\alpha)\,\delta u = 0;$$
$$(N_{\alpha\beta} + Q_\alpha\omega_\beta)\,\delta v = 0;$$
$$(Q_\alpha - N_\alpha\omega_\alpha - N_{\alpha\beta}\omega_\beta)\,\delta w = 0;$$
$$M_\alpha\delta\theta_\alpha = 0;\quad M_{\alpha\beta}\delta\theta_\beta = 0, \tag{1.55}$$

при $\beta = \text{const}$

$$(N_\beta + Q_\beta\omega_\beta)\,\delta u = 0;$$
$$(N_{\beta\alpha} + Q_\beta\omega_\alpha)\,\delta u = 0;$$
$$(Q_\beta - N_\beta\omega_\beta - N_{\beta\alpha}\omega_\alpha)\,\delta w = 0;$$
$$M_\beta\delta\theta_\beta = 0;\quad M_{\beta\alpha}\delta\theta_\alpha = 0.$$

Распределение перемещений по толщине стенки по-прежнему определяется равенствами (1.30), однако формулы для напряжений (1.32) изменяются и принимают вид

$$\sigma_\alpha = A_{11}\,\Delta_\alpha + A_{12}\,\Delta_\beta;$$
$$\sigma_\beta = A_{21}\,\Delta_\alpha + A_{22}\,\Delta_\beta;$$
$$\tau_{\alpha\beta} = A_{33}\,\Delta_{\alpha\beta}, \tag{1.56}$$

где

$$\Delta_\alpha = e_\alpha + \frac{1}{2}\,\omega_\alpha^2;\quad \Delta_\beta = e_\beta + \frac{1}{2}\,\omega_\beta^2;$$
$$\Delta_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta} + \omega_\alpha\omega_\beta, \tag{1.57}$$

а компоненты малой деформации e определяются формулами (1.31).

Приведем некоторые упрощенные варианты уравнений геометрически нелинейной теории. Представленные выше соотношения содержат нелинейные члены, включающие углы поворота элемента базовой поверхности, показанного на рис. 1.11, а также производные этих углов, характеризующие изменение кривизны этого элемента. Как правило, ограничения по жесткости, накладываемые на перемещения несущих элементов конструкций, исключают большие углы поворота и величины ω_α, ω_β можно считать малыми по сравнению с единицей. Однако производные этих величин, связанные с местным изгибом поверхности в зонах закрепления или нагружения элемента, могут оказаться значительными и должны быть учтены. Таким образом, упростим приведенные выше нелинейные уравнения, оставив из нелинейных членов только те, которые включают водные от углов поворота. Тогда уравнения равновесия (1.53) принимают вид

$$L_\alpha(N) + k_1 A_1 A_2 Q_\alpha + A_2 Q_\alpha \times \times \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \alpha} + A_1 Q_\beta \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \beta} + f_\alpha = 0;$$

$$L_\beta(N) + k_2 A_1 A_2 Q_\beta + A_1 Q_\beta \times \times \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \beta} + A_2 Q_\alpha \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \alpha} + f_\beta = 0; \tag{1.58}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(A_2 Q_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta}(A_1 Q_\beta) - A_1 A_2 (k_1 N_\alpha + k_2 N_\beta) - A_2\left(N_\alpha \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \alpha} + N_{\alpha\beta}\frac{\partial \omega_\beta}{\partial \alpha}\right) - A_1\left(N_{\beta\alpha}\frac{\partial \omega_\alpha}{\partial \beta} + N_\beta \frac{\partial \omega_\beta}{\partial \beta}\right) + f_\gamma = 0; \tag{1.59}$$

$$L_\alpha(M) - A_1 A_2 Q_\alpha + m_\alpha = 0;$$

$$L_\beta(M) - A_1 A_2 Q_\beta + m_\beta = 0. \tag{1.60}$$

Приведенные поверхностные нагрузки определяются линейными соотношениями (1.20). В физических сооружениях (1.54) необходимо отбросить нелинейные члены, включающие квадраты и произведения углов ω, тогда они переходят в линейные соотношения (1.21). Геометрические соотношения, как и ранее, сохраняют форму (1.26)—(1.28), а формулы для перемещений и напряжений записываются в виде равенств (1.30)—(1.32). Действительно, отбрасывая в соотношениях (1.57) квадраты углов поворота, получим $\Delta_\alpha = e_\alpha$, $\Delta_\beta = e_\beta$, $\Delta_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta}$, после чего закон Гука (1.56) принимает линейную форму (1.32). Граничные условия, накладываемые на решение уравнений (1.58)—(1.60), остаются нелинейными и сохраняются в форме (1.55).

Итак, геометрически нелинейная теория, учитывающая из нелинейных эффектов только те, которые связаны с изменением кривизны поверхности элемента конструкции в процессе нагружения, определяется уравнениями (1.58)—(1.60), (1.21), (1.26)—(1.28). Для оболочек можно сделать еще одно упрощение. В оболочках мембранные усилия N, как правило, значительно превышают поперечные силы Q, т. е. в уравнениях (1.58) можно пренебречь нелинейными членами, содержащими Q_α и Q_β. Тогда эти уравнения упрощаются следующим образом:

$$L_\alpha(N) + k_1 A_1 A_2 Q_\alpha + f_\alpha = 0;$$

$$L_\beta(N) + k_2 A_1 A_2 Q_\beta + f_\beta = 0 \tag{1.61}$$

и совпадают с линейными. Таким образом, получаемая система уравнений равновесия (1.59)—(1.61), физических соотношений (1.21) и геометрических соотношений (1.26)—(1.28) отличается от линейной системы только формой уравнения равновесия (1.59), которое, по существу, отличается от линейного тем, что учитывает изменение кривизны элемента в процессе нагружения. Граничные условия (1.55) при этом также упрощаются и принимают вид: при

$\alpha = \mathrm{const}$

$$N_\alpha \delta u = 0; \quad N_{\alpha\beta}\delta v = 0; \quad M_\alpha \delta\theta_\alpha = 0;$$

$$M_{\alpha\beta}\delta\theta_\beta = 0; \quad (Q_\alpha - N_\alpha \omega_\alpha - N_{\alpha\beta}\omega_\beta)\,\delta w = 0; \tag{1.62}$$

при $\beta = \mathrm{const}$

$$N_\beta \delta v = 0; \quad N_{\beta\alpha}\delta u = 0;$$

$$M_\beta \delta\theta_\beta = 0; \quad M_{\beta\alpha}\delta\theta_\alpha = 0;$$

$$(Q_\beta - N_\beta \omega_\beta - N_{\beta\alpha}\omega_\alpha)\,\delta w = 0.$$

Приведем уравнения нелинейной безмоментной теории оболочек, обобщающие уравнения (1.37)—(1.39) и учитывающие изменение радиусов кривизны в процессе нагружения. Физические и геометрические соотношения этой теории по-прежнему определяются равенствами (1.37), (1.39), а уравнения равновесия следуют из (1.59)—(1.61) и имеют вид

$$L_\alpha(N) + f_\alpha = 0; \quad L_\beta(N) + f_\beta = 0;$$

$$A_1 A_2 (k_1 N_\alpha + k_2 N_\beta) +$$

$$+ A_2\left(N_\alpha \frac{\partial\omega_\alpha}{\partial\alpha} + N_{\alpha\beta}\frac{\partial\omega_\beta}{\partial\alpha}\right) +$$
$$+ A_1\left(N_{\beta\alpha} \frac{\partial\omega_\alpha}{\partial\beta} + N_\beta\frac{\partial\omega_\beta}{\partial\beta}\right) = f_\gamma. \tag{1.63}$$

Соответствующие граничные условия следуют из (1.62):
при $\alpha = \text{const}$

$$N_\alpha\delta u = 0; \quad N_{\alpha\beta}\delta v = 0;$$
$$(N_\alpha\omega_\alpha + N_{\alpha\beta}\omega_\beta)\,\delta w = 0,$$

при $\beta = \text{const}$

$$N_\beta\delta v = 0; \quad N_{\beta\alpha}\delta u = 0;$$
$$(N_\beta\omega_\beta + N_{\beta\alpha}\omega_\alpha)\,\delta w = 0.$$

Система уравнений (1.37), (1.39), (1.63) в отличие от линейной системы (1.37)—(1.39) имеет не четвертый, а шестой порядок по переменным α и β и не разделяется на независимые группы уравнений. Эта система свободна от ограничений, свойственных классической безмоментной теории, в частности, она позволяет рассматривать длинные оболочки и получать решение, непрерывное по отношению к тангенциальным перемещениям u, v и прогибу w.

1.2.7. Линеаризованные уравнения устойчивости. Стержневые и тонкостенные композитные элементы конструкций при некоторых условиях нагружения могут терять устойчивость. Наиболее распространенным критерием, дающим конструктивное определение критической нагрузке, при которой покоящаяся упругая система теряет устойчивость, является статический критерий Эйлера. Согласно этому критерию под критическим понимается наименьшее значение нагрузки, при котором кроме исходного состояния равновесия существует близкое к нему возмущенное состояние.

Исходное (докритическое) состояние, как правило, считается безмоментным и описывается уравнениями (1.37)—(1.39), т. е.

$$L_\alpha(N^0) + f_\alpha = 0; \quad L_\beta(N^0) + f_\beta = 0;$$
$$A_1A_2(k_1N_\alpha^0 + k_2N_\beta^0) = f_\gamma;$$
$$N_\alpha^0 = B_{11}\varepsilon_\alpha^0 + B_{12}\varepsilon_\beta^0;$$
$$N_\beta^0 = B_{21}\varepsilon_\alpha^0 + B_{22}\varepsilon_\beta^0;$$
$$N_{\alpha\beta}^0 = N_{\beta\alpha}^0 = B_{33}(\varepsilon_{\alpha\beta}^0 + \varepsilon_{\beta\alpha}^0);$$
$$\varepsilon_\alpha^0 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_0}{\partial\alpha} + \varphi_1 v_0 + k_1 w_0; \tag{1.64}$$
$$\varepsilon_\beta^0 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial v_0}{\partial\beta} + \varphi_2 u_0 + k_2 w_0;$$
$$\varepsilon_{\alpha\beta}^0 + \varepsilon_{\beta\alpha}^0 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial v_0}{\partial\alpha} +$$
$$+ \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_0}{\partial\beta} - \varphi_1 u_0 - \varphi_2 v_0.$$

Величины, относящиеся к докритическому состоянию, отмечены индексом «0». Пусть в системе, поведение которой описывается уравнениями (1.64), создано некоторое возмущение, т. е. она отклонена от исходного состояния с малыми дополнительными перемещениями u, v, w. Эти перемещения вызовут появление дополнительных деформаций, сил и моментов. Согласно критерию Эйлера следует предположить, что в таком возмущенном состоянии система находится в в равновесии, т. е. описывается нелинейными уравнениями (1.58)—(1.60), в которых в силу безмоментности докритического состояния следует принять $m_\alpha = m_\beta = 0$. Учитывая малость докритических и дополнительных перемещений, можно провести линеаризацию этой системы, т. е. вычесть из уравнений (1.58)—(1.60) соответствующие уравнения (1.64) и отбросить нелинейные члены. В результате линеаризованные уравнения устойчивости записываются в виде

$$L_\alpha(N) + k_1A_1A_2Q_\alpha = 0;$$
$$L_\beta(N) + k_2A_1A_2Q_\beta = 0;$$
$$-(A_2Q_\alpha) + \frac{\partial}{\partial\beta}(A_1Q_\beta) -$$
$$- A_1A_2(k_1N_\alpha + k_2N_\beta) -$$
$$- A_2\left(N_\alpha^0\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial\alpha} + N_{\alpha\beta}^0\frac{\partial\omega_\beta}{\partial\alpha}\right) -$$
$$- A_1\left(N_{\beta\alpha}^0\frac{\partial\omega_\alpha}{\partial\beta} + N_\beta^0\frac{\partial\omega_\beta}{\partial\beta}\right) = 0; \tag{1.65}$$

$$L_\alpha(M) - A_1A_2Q_\alpha = 0;$$
$$L_\beta(M) - A_1A_2Q_\beta = 0.$$

В эти уравнения входят докритические усилия N^0_α, $N^0_{\alpha\beta} = N^0_{\beta\alpha}$, N^0_β и дополнительные усилия N, Q, моменты M и углы поворота ω, вызванные наложенным возмущением. Для дополнительных усилий, моментов, деформаций и перемещений справедливы линейные физические и геометрические соотношения (1.21), (1.26)—(1.28).

Существенно, что уравнения (1.65) и соответствующие им граничные условия являются однородными, поскольку заданные поверхностные и краевые нагрузки учитываются уравнениями (1.64), устанавливающими связь между этими нагрузками и докритическими усилиями. В связи с этим линеаризованные уравнения устойчивости всегда допускают нулевое решение, соответствующее исходному состоянию равновесия, т. е. уравнениям (1.64). Согласно критерию Эйлера критической является первая (по мере развития нагружения) комбинация усилий N^0_α, $N^0_{\alpha\beta} = N^0_{\beta\alpha}$, N^0_β, при которой система уравнений (1.65), а также (1.21) и (1.26)—(1.28) будет иметь ненулевое решение, т. е. будет существовать равновесное состояние, соответствующее дополнительным перемещениям u, v, w. Знаки в уравнениях (1.65) соответствуют растягивающим докритическим усилиям N^0_α и N^0_β.

1.2.8. Уравнения динамики. Предположим, что на рассматриваемую конструкцию действуют силы, зависящие от времени t. Согласно принципу Даламбера уравнения движения можно получить из уравнений равновесия, если учесть инерционные силы. В результате уравнения (1.19) обобщаются следующим образом:

$$L_\alpha(N) + k_1A_1A_2Q_\alpha - A_1A_2\left(B_\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C_\rho\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial t^2}\right) + f_\alpha = 0;$$

$$L_\beta(N) + k_2A_1A_2Q_\beta - A_1A_2\left(B_\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + C_\rho\frac{\partial^2\theta_\beta}{\partial t^2}\right) + f_\beta = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(A_2Q_\alpha) + \frac{\partial}{\partial\beta}(A_1Q_\beta) - A_1A_2(k_1N_\alpha + k_2N_\beta) - B_\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f_\gamma = 0; \quad (1.66)$$

$$L_\alpha(M) - A_1A_2Q_\alpha - A_1A_2\times\left(C_\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D_\rho\frac{\partial^2\theta_\alpha}{\partial t^2}\right) + m_\alpha = 0;$$

$$L_\beta(M) - A_1A_2Q_\beta - A_1A_2\left(C_\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + D_\rho\frac{\partial^2\theta_\beta}{\partial t^2}\right) + m_\beta = 0.$$

Физические и геометрические соотношения сохраняются в форме (1.21), (1.26)—(1.28).

В уравнениях (1.66) члены, включающие перемещения u, v, w, соответствуют поступательному движению бесконечно малого элемента тела в направлении осей α, β, γ, а члены, включающие углы θ_α и θ_β, соответствуют повороту этого элемента в плоскостях $\alpha\gamma$ и $\beta\gamma$. Инерционные свойства характеризуются коэффициентами

$$B_\rho = I^{(0)}_\rho; \quad C_\rho = I^{(1)}_\rho; \quad D_\rho = I^{(2)}_\rho,$$

где

$$I^{(r)}_\rho = \frac{1}{A_1A_2}\int\limits_{-e}^{s} H_1H_2\rho\gamma^r\,d\gamma.$$

Здесь $r = 0, 1, 2$; ρ — плотность материала. Вводя координату $t = \gamma + e$ (см. рис. 1.12), получаем

$$B_\rho = J^{(0)}_\rho; \quad C_\rho = J^{(1)}_\rho - eJ^{(0)}_\rho;$$
$$D_\rho = J^{(2)}_\rho - 2eJ^{(1)}_\rho + e^2J^{(0)}_\rho,$$

где

$$J^{(r)}_\rho = \frac{1}{A_1A_2}\int\limits_0^h H_1H_2\rho t^r\,dt.$$

Для однородной (ρ = const) стенки

$$J_\rho^{(r)} = \rho h^{r+1}\left\{\frac{1}{r+1}\left[1 - e(k_1 + k_2) + k_1 k_2 e^2\right] + \frac{h}{r+2}(k_1 + k_2 - 2k_1 k_2 e) + \frac{h^2}{r+3}k_1 k_2\right\}.$$

Для слоистой стенки (см. рис. 1.15), если можно не учитывать изменение метрических коэффициентов по толщине слоя,

$$J_\rho^{(r)} = \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{k}\rho_i H_1^{(i)} H_2^{(i)} \times (t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}),$$

где

$$H_1^{(i)} = 1 + \frac{k_1}{2}(t_{i-1} + t_i - 2e);$$

$$H_2^{(i)} = 1 + \frac{k_2}{2}(t_{i-1} + t_i - 2e).$$

Для тонкой стенки можно приближенно принять $H_1 = A_1$, $H_2 = A_2$, $H_1^{(i)} = 1$, $H_2^{(i)} = 1$.

Список литературы

1. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
2. Власов В. З. Избранные труды. Т. I. М.: Изд. АН СССР, 1962. 528 с.
3. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.

Глава 2

КОМПОЗИТНЫЕ БАЛКИ, СТЕРЖНИ И КОЛЬЦА

Композитные балки, стержни и кольца — элементы, имеющие одну общую особенность: размеры их поперечного сечения, как правило, значительно меньше длины осевой линии. Эта особенность позволяет ввести при расчете этих элементов некоторые дополнительные (см. гипотезы в гл. 1) предположения, позволяющие свести задачу к одномерной, т. е. описать напряженно-деформированное состояние рассматриваемых элементов системой обыкновенных дифференциальных уравнений, включающих только одну независимую переменную — осевую координату. В результате решения при этом часто удается получить аналитические выражения для напряжений и деформаций. Расчету металлических балок, стержней и колец посвящена обширная справочная литература [2], поэтому в настоящей главе в основном обсуждаются особенности расчета соответствующих композитных элементов. Вывод приведенных ниже результатов представлен в работе [1].

2.1. КОМПОЗИТНЫЕ БАЛКИ

Композиты широко применяются для изготовления балочных элементов конструкций различного назначения, а высокомодульные композиты на основе углеродных и борных волокон успешно используются для усиления металлических балок. Конструктивно они представляют собой, как правило, слоистую систему (рис. 2.1), включающую в общем случае слои композита, металла и податливого на сдвиг заполнителя из сот, пенопласта и т. п.

Уравнения (1.19), (1.21), (1.26)—(1.28) (см. гл. 1, ч. 2) принимают в рассматриваемом случае следующий вид (см. рис. 2.1):

уравнения равновесия

$$N' = 0;\ M' = Q;\ Q' + \bar{p} = 0, \quad (2.1)$$

где $\bar{p} = pb_1 - qb_k$; b_1, b_k — ширина соответственно нижней и верхней полки;

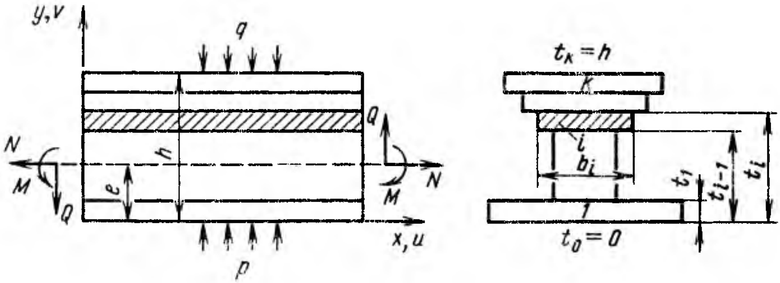


Рис. 2.1. Слоистая балка

соотношения упругости для осевой силы N, изгибающего момента M и поперечной силы Q

$$N = Bu'; \; M = D\theta';$$
$$Q = K(\theta + v'), \qquad (2.2)$$

где $u(x)$ и $\theta(x)$ — осевое смещение и угол поворота сечения балки; $v(x)$ — прогиб; штрих обозначает производную по x. Осевая B, изгибная D жесткости и координата нейтральной оси e балки определяются равенствами

$$B = I_0; \; D = I_2 - eI_1;$$
$$e = I_1/I_0, \qquad (2.3)$$

где для слоистой балки (см. рис. 2.1)

$$I_n = \int_0^h bE_x y^n \, dy =$$
$$= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{k} b_i E_x^{(i)} \left(t_i^{n+1} - t_{i-1}^{n+1}\right). \qquad (2.4)$$

Здесь $n = 0, 1, 2$; E_x — осевой модуль упругости. Сдвиговая жесткость

$$K = h^2 \left(\int_0^h \frac{dy}{bG_{xy}}\right)^{-1} =$$
$$= h^2 \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{t_i - t_{i-1}}{b_i G_{xy}^{(i)}}\right]^{-1}, \qquad (2.5)$$

где G_{xy} — модуль сдвига.

Общее решение системы (2.1), (2.2) может быть записано в форме

$$N(x) = N_0;$$
$$Q(x) = Q_0 - Q_p - Q_R;$$
$$M(x) = M_0 + Q_0 x - M_p - M_R; \qquad (2.6)$$
$$u(x) = u_0 + \frac{N_0}{B} x;$$
$$\theta(x) = \theta_0 + \frac{M_0}{D} x + \frac{Q_0}{2D} x^2 - \theta_p - \theta_R;$$
$$v(x) = v_0 + \frac{1}{K}(Q_0 x - M_p - M_R) - \left(\theta_0 x + \frac{M_0}{2D} x^2 + \frac{Q_0}{6D} x^3 - v_p - v_R\right).$$

Здесь величины с индексом «0» соответствуют начальному сечению $x = 0$ (рис. 2.2) Функции с нижним индексом «p» учитывают распределенную нагрузку $\bar{p}(x)$ и имеют вид

$$Q_p = \int_0^x \bar{p}\, dx; \; M_p = \int_0^x dx \int_0^x \bar{p}\, dx;$$
$$\theta_p = \frac{1}{D} \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x \bar{p}\, dx;$$
$$v_p = \frac{1}{D} \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x dx \int_0^x \bar{p}\, dx.$$

Функции с нижним индексом «R» учитывают сосредоточенные воздей-

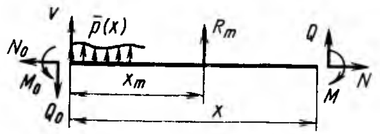


Рис. 2.2. Схема нагружения балки

ствия (см. рис. 2.2) и записываются следующим образом:

$$Q_R = \sum_{m=1}^{n} Q_R^{(m)};\quad M_R = \sum_{m=1}^{n} M_R^{(m)};$$

$$\theta_R = \sum_{m=1}^{n} \theta_R^{(m)};\quad v_R = \sum_{m=1}^{n} v_R^{(m)}. \tag{2.7}$$

Здесь n — число сосредоточенных сил R_m и

при $x_m < x$

$$Q_R^{(m)} = 0;\quad M_R^{(m)} = 0;\quad \theta_R^{(m)} = 0;$$

$$v_R^{(m)} = 0,$$

при $x \geqslant x_m$

$$Q_R^{(m)} = R_m;\quad M_R^{(m)} = R_m\left(x - x_m\right);$$

$$\theta_R^{(m)} = \frac{R_m}{2D}\left(x - x_m\right)^2;\quad v_R^{(m)} =$$

$$= \frac{R_m}{6D}\left(x - x_m\right)^3.$$

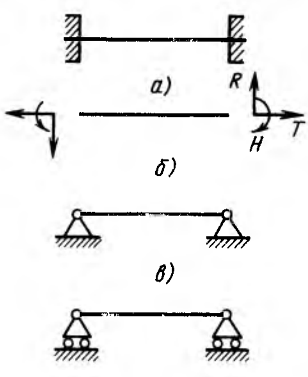


Рис. 2.3. Граничные условия:

а — жесткое закрепление (заделка); *б* — нагружение силами и моментом; *в* — неподвижное шарнирное опирание; *г* — свободное опирание

Начальные значения сил, перемещений, момента и угла поворота находятся из граничных условий для концов балки. Имеют место следующие варианты граничных условий:

жесткое закрепление (заделка, рис. 2.3, *а*)

$$u = 0;\ v = 0;\ \theta = 0,$$

свободный край

$$N = 0;\ Q = 0;\ M = 0,$$

нагруженный край (рис. 2.3, *б*)

$$N = T;\ Q = R;\ M = H,$$

неподвижная шарнирная опора (рис. 2.3, *в*)

$$u = 0;\ v = 0;\ M = 0,$$

свободное опирание (рис. 2.3, *г*)

$$N = 0;\ v = 0;\ M = 0.$$

По найденным силовым N, Q, M и кинематическим u, v, θ переменным может быть определено распределение напряжений и перемещений по высоте сечения. Продольные нормальные напряжения

$$\sigma_x = E_x(y)\left(\frac{N}{B} + \frac{M}{D}\bar{y}\right), \tag{2.8}$$

где $\bar{y} = y - e$; $0 \leqslant y \leqslant h$. Касательные напряжения

$$\tau_{xy} = -\frac{Q}{b(y)\,D}\int_0^y E_x b\bar{y}\,dy.$$

Разрушение слоистых балок при изгибе часто сопровождается их расслоением. Поэтому межслоевые касательные напряжения, действующие по плоскости контакта слоев с номерами i и $i+1$, т. е. при $y = t_i$ (см. рис. 2.1),

$$\tau_{xy}^{(i,\ i+1)} = -\frac{Q}{2b_iD}\sum_{j=1}^{i} E_x^{(j)} b_j \left(t_j - t_{j-1}\right)\left(t_j + t_{j-1} - 2e\right). \tag{2.9}$$

Трансверсальные нормальные напряжения (см. рис. 2.1)

$$\sigma_y = -\frac{1}{b(y)}\left(\frac{\bar{p}}{D}\int_0^y dy \int_0^y E_x b\bar{y}\,dy + \right.$$

$$+ pb_1\Bigg) = -\frac{\bar p}{b(y)\,D}\Bigg(y\int_0^y E_x b\bar y\,dy - \int_0^y E_x b\bar y y\,dy\Bigg) - \frac{pb_1}{b(y)}.$$

На границе контакта слоев i и $i+1$

$$\sigma_y^{(i,\ i+1)} = -\frac{\bar p}{b_i D}\Bigg\{t_i\sum_{j=1}^{i} E_x^{(j)} b_j (t_j - t_{j-1})\left[\frac{1}{2}(t_j + t_{j-1}) - e\right] - \sum_{j=1}^{i} E_x^{(j)} b_j\left[\frac{1}{3}(t_j^3 - t_{j-1}^3) - \frac{e}{2}(t_j^2 - t_{j-1}^2)\right]\Bigg\} - \frac{pb_1}{b_i}.$$

Продольные перемещения распределяются по высоте сечения по линейному закону

$$u_x(x,\ y) = u(x) + \bar y\theta(x).$$

Вариация полной энергии (функционала Лагранжа) имеет вид

$$\delta\Pi = \int [N\,\delta u' + M\,\delta\theta' + Q\delta(\theta + v') - \bar p\,\delta v]\,dx.$$

Пример расчета. Рассмотрим двутавровую балку из алюминиевого сплава, усиленную сверху накладкой из боралюминия (рис. 2.4). Геометрические параметры балки: $l = 10h$, $b = 0{,}5h$, $\delta = 0{,}05h$, $h = 0{,}1$ м; нагрузка (см. рис. 2.1) $\bar p = -qb = -30$ кН/м; характеристики материалов: модули упругости и сдвига и предел текучести алюминиевого сплава соответственно равны (ГПа) 70; 27,7 и 0,26, модули упругости и сдвига и пределы прочности при сжатии и сдвиге (ГПа) однонаправленного боралюминия — 255 и 63; 2 и 0,084.

По формулам (2.3)—(2.5) находим характеристики сечения, для которого (см. рис. 2.1 и 2.4) $k = 4$:

$$t_0 = 0;\ t_1 = 0{,}05h;\ t_2 = 0{,}9h;$$
$$t_3 = 0{,}95h;\ t_4 = h$$

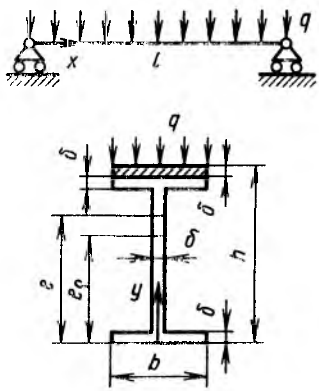


Рис. 2.4. Свободно опертая двутавровая балка

и

$$I_n = \frac{h^{n+2}}{n+1}[0{,}5\cdot 70\cdot 0{,}05^{n+1} + 0{,}05\cdot 70\,(0{,}9^{n+1} - 0{,}05^{n+1}) + 0{,}5\cdot 70\,(0{,}95^{n+1} - 0{,}9^{n+1}) + 0{,}5\cdot 230\,(1 - 0{,}95^{n+1})].$$

В результате

$$I_0 = 12{,}85h^2;\ I_1 = 9{,}29h^3;$$
$$I_2 = 8{,}41h^4;\ e = 0{,}72h;$$
$$B = 12{,}85\cdot 10^{-2}\ \text{ГПа}\cdot\text{м}^2;$$
$$D = 1{,}69\cdot 10^{-4}\ \text{ГПа}\cdot\text{м}^4;$$
$$K = h^2\left(\frac{0{,}05}{0{,}5\cdot 27{,}7} + \frac{0{,}8}{0{,}05\cdot 27{,}7} + \frac{0{,}05}{0{,}5\cdot 27{,}7} + \frac{0{,}05}{0{,}5\cdot 63}\right)^{-1} = 1{,}6\cdot 10^{-2}\ \text{ГПа}\cdot\text{м}^2.$$

В круглых скобках последней формулы существенным является только второе слагаемое, т. е. при вычислении сдвиговой податливоти сечения можно учитывать только стенку двутавра.

В соответствии с решением (2.6), принимая (см. рис. 2.4) $N_0 = 0$, $M_0 = 0$, $v_0 = 0$ и закрепляя балку от продольного смещения, т. е. полагая $u_0 = 0$, получим

$$N = 0;\quad Q = Q_0 - \bar p x;$$
$$M = Q_0 x - \bar p\,\frac{x^2}{2};\quad u = 0;$$

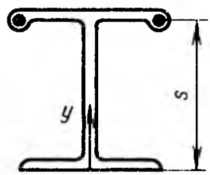


Рис. 2.5. Профиль, усиленный композитными жгутами

$$\theta = \theta_0 + \frac{Q_0}{2D} x^2 - \frac{\bar{p}x^3}{6D};$$

$$v = \frac{1}{K}\left(Q_0 x - \bar{p}\frac{x^2}{2}\right) - \left(\theta_0 x + \frac{Q_0 x^3}{6D} - \frac{\bar{p}x^4}{24D}\right).$$

Начальные значения Q_0 и θ_0 находятся из граничных условий на конце $x = l - v(l) = 0$, $M(l) = 0$. Окончательно получим

$$Q = \bar{p}\left(\frac{l}{2} - x\right); \quad M = \frac{\bar{p}}{2}(l - x)x;$$

$$v = \frac{\bar{p}x}{2K}(l - x) + \frac{\bar{p}x}{24D}(l^3 - 2lx^2 + x^3).$$

Максимальный прогиб

$$v_m = v\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{5\bar{p}l^4}{384D}\left(1 + 9,6\frac{D}{l^2K}\right) = \frac{5\bar{p}l^4}{384D}\left(1 + 10,1\frac{h^2}{l^2}\right).$$

При $h/l = 0,1$ поправка, связанная с учетом поперечного сдвига, составляет около 10%. При $\bar{p} = -30$ кН/м получим $v_m = -2,5 \cdot 10^{-3}$ м.

Найдем напряжения. Максимальные нормальные напряжения в соответствии с формулой (2.8) в металлической части балки реализуются на ее нижней поверхности ($y = 0$), в среднем сечении ($x = l/2$)

$$\sigma_x = \frac{E_x^{(1)}M}{D}(y - e) = 0,22 \text{ ГПа}.$$

Таким образом запас прочности (по пределу текучести) по нормальным напряжениям в металле составляет 1,18. В слое боралюминия максимальные сжимающие напряжения имеют место в точке $x = l/2$, $y = h$, т. е. $\sigma_x = -0,31$ ГПа, запас прочности составляет 6,45. Найдем также касательные напряжения, действующие на границе раздела металла и боралюминия (при $y = t_3$). По формуле (2.9) имеем

$$\tau = -\frac{\bar{p}lh^3}{2bD}[70 \cdot 0,5 \cdot 0,05(0,05 - 1,44) + 70 \cdot 0,85 \cdot 0,05(0,9 - 1,44) + 70 \cdot 0,5 \cdot 0,05(0,95 - 1,44)] = -0,0087 \text{ ГПа}.$$

Соответствующий запас прочности составляет 9,65.

Для сравнения рассмотрим аналогичную двутавровую металлическую балку с высотой сечения h. В этом случае $D = 1,00h^4$, $e = h/2$ и максимальные нормальные напряжения составляют 0,26 ГПа, т. е. балка находится в предельном состоянии. Ее максимальный прогиб $v_m = 4,14 \times 10^{-3}$ м, т. е. он в 1,63 раза превышает прогиб балки с композитной накладкой.

Композиты на основе жестких волокон иногда используются в виде жгутов, усиливающих металлический профиль (рис. 2.5). В этом случае формула (2.4) обобщается следующим образом:

$$I_n = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{k} b_i E_x^{(i)}\left(t_i^{n+1} - t_{i-1}^{n+1}\right) + \sum_{j=1}^{m} E_j F_j s_j^n.$$

Здесь m — число жгутов; E_j, F_j, s_j — соответственно модуль упругости, площадь поперечного сечения и координата j-го жгута (см. рис. 2.5).

Рассмотрим устойчивость слоистых стержней при осевом сжатии (рис. 2.6). Линеаризованное уравнение устойчивости стержня имеет вид

$$v^{\mathrm{IV}} + k^2 v'' = 0, \qquad (2.10)$$

где

$$k^2 = \frac{T}{D(1-\lambda)} \left(\text{здесь } \lambda = \frac{T}{K}\right).$$

Решение уравнения (2.10), а также выражения для изгибающего момента, поперечной силы и угла поворота сечения записываются следующим образом:

$$v = C_1 x + C_2 + C_3 \sin kx + C_4 \cos kx;$$

$$M = Dk^2(1-\lambda)(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx); \qquad (2.11)$$

$$Q = Dk^3(1-\lambda)(C_3 \cos kx - C_4 \sin kx);$$

$$\theta = k\left[\frac{D}{K}k^2(1-\lambda) - 1\right](C_3 \cos kx - C_4 \sin kx) - C_1.$$

Решения (2.11) должны удовлетворять четырем однородным условиям на концах $x = 0$ и $x = l$ (см. рис. 2.6). В результате получается однородная система четырех линейных алгебраических уравнений, которая обладает ненулевым решением (нулевое решение $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ соответствует $v = 0$, т. е. прямолинейной форме равновесия стержня), если ее определитель равен нулю. Из этого условия находится параметр k, а затем сила T, наименьшее значение которой является критическим.

Окончательное выражение для критической силы имеет следующий вид:

$$T_{\text{к}} = \frac{T_{\text{Э}}}{1 + (T_{\text{Э}}/K)}, \qquad (2.12)$$

где $T_{\text{Э}} = c\pi^2 D/l^2$ — критическая нагрузка, определяемая формулой Эйлера и не учитывающая деформацию поперечного сдвига ($T_{\text{к}} = T_{\text{Э}}$ при $K \to \infty$). Для шарнирно опертого стержня (рис. 2.7, *а*), как известно, $c = 1$, для консольного (рис. 2.7, *б*)— $c = 0{,}25$ и для жестко закрепленного стержня (рис. 2.7, *в*) $c = 4$.

Рис. 2.6. Слоистый стержень, сжатый в осевом направлении

Рассмотрим колебания слоистых балок. Уравнения динамики имеют вид

$$B\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = B_\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + C_\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2};$$

$$K\left(\theta + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = D\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - C_\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - D_\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}; \qquad (2.13)$$

$$K\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \bar{p}(x, t) = B_\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Здесь B, D, K — жесткости, определяемые равенствами (2.3)—(2.5); B_ρ, C_ρ, D_ρ — аналогичные инерционные характеристики, причем

$$B_\rho = J_0; \quad C_\rho = J_0(e - e_\rho); \quad e_\rho = J_1/J_0; \quad D_\rho = J_2 - 2eJ_1 + e^2 J_0 \qquad (2.14)$$

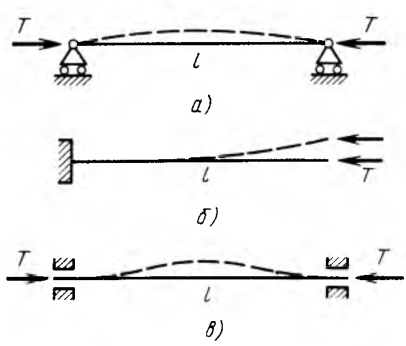


Рис. 2.7. Формы потери устойчивости свободно опертого (*а*), консольного (*б*) и жестко закрепленного по концам (*в*) стержня

и для слоистой балки

$$J_n = \int\limits_0^h b\rho y^n\,dy = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{k} b_i\rho_i \times$$
$$\times \left(t_i^{n+1} - t_{i-1}^{n+1}\right),$$

где $n = 0, 1, 2$; ρ_i — плотность материала i-го слоя. Уравнения (2.13) могут быть сведены к одному:

$$D\frac{\partial^6 v}{\partial x^6} - \left[D_\rho + B_\rho D\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{K}\right)\right]\times$$
$$\times\frac{\partial^6 v}{\partial x^4\,\partial t^2} + \left[\frac{B_\rho^2 D}{BK} - \frac{C_\rho^2}{B} +\right.$$
$$\left. + B_\rho D_\rho\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{K}\right)\right]\frac{\partial^6 v}{\partial x^2\,\partial t^4} +$$
$$+ \frac{B_\rho}{BK}\left(B_\rho D_\rho - C_\rho^2\right)\frac{\partial^6 v}{\partial t^6} +$$
$$+ B_\rho\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\,\partial t^2} - \frac{B_\rho^2}{B}\frac{\partial^4 v}{\partial t^4} =$$
$$= -\frac{D}{K}\frac{\partial^4 \bar p}{\partial x^4} + \frac{1}{K}\left(D_\rho + \frac{B_\rho D}{B}\right)\times$$
$$\times\frac{\partial^4 \bar p}{\partial x^2\,\partial t^2} - \frac{1}{BK}\left(B_\rho D_\rho - C_\rho^2\right)\times$$
$$\times\frac{\partial^4 \bar p}{\partial t^4} + \frac{\partial^2 \bar p}{\partial x^2} - \frac{B_\rho}{B}\frac{\partial^2 \bar p}{\partial t^2}.$$

Входящий сюда коэффициент C_ρ учитывает связанный характер продольных и изгибных колебаний. Эти формы колебаний разделяются, если $C_\rho = 0$ или $e = e_\rho$. В общем случае $e \neq e_\rho$, так как координата нейтральной оси балки e зависит от распределения жесткости по сечению, а соответствующая инерционная характеристика e_ρ— от распределения плотности материала. В частности, для балки, сечение которой показано на рис. 2.4, при одинаковых плотностях материалов слоев $e = 0{,}72h$, $e_\rho = 0{,}58h$. Условие $e = e_\rho$ строго выполняется для однородных балок, при этом

$$e = e_\rho = \left(\int\limits_0^h by\,dy\right)\Bigg/\left(\int\limits_0^h b\,dy\right),$$

и для балок, структура которых симметрична относительно средней линии $y = h/2$ (при этом $e = e_\rho = h/2$). В общем случае о необходимости учета связанности форм свободных колебаний можно ориентировочно судить, сравнивая параметр $\lambda_c = \pi^2 m^2 (e - e_\rho)^2/l^2$ (m — номер формы колебаний, l — длина балки) с единицей. Для балки, показанной на рис. 2.4, $\lambda_c = 0{,}002m^2$.

Если можно считать, что $C_\rho = 0$, уравнение изгибных колебаний слоистой балки принимает вид

$$D\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \left(D_\rho + \frac{B_\rho D}{K}\right)\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\,\partial t^2} +$$
$$+ \frac{B_\rho D_\rho}{K}\frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + B_\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} =$$
$$= \bar p - \frac{1}{K}\left(D\frac{\partial^2 \bar p}{\partial x^2} - D_\rho\frac{\partial^2 \bar p}{\partial t^2}\right).$$

Заметим, что аналогичную форму уравнение изгибных колебаний имеет для балки с нерастяжимой нейтральной осью, т. е. при $B \to \infty$.

Коэффициент D_ρ учитывает инерцию поворота сечения. Влияние этого эффекта на частоту собственных колебаний можно ориентировочно оценить, сравнивая параметр $\lambda_D = \pi^2 m^2 D_\rho / l^2 B_\rho$ с единицей. Для балки, показанной на рис. 2.4, $\lambda_D = 0{,}017m^2$.

Если считать, что $C_\rho = 0$ и $D_\rho = 0$, т. е. не учитывать влияние продольных колебаний на изгибные и инерцию поворота сечения, уравнение изгибных колебаний записывается в форме

$$D\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{B_\rho D}{K}\frac{\partial^4 v}{\partial x^2\,\partial t^2} +$$
$$+ B_\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \bar p - \frac{D}{K}\frac{\partial^2 \bar p}{\partial x^2}.$$

Коэффициент, содержащий величину K, учитывает податливость слоистой балки при поперечном сдвиге. О том, насколько существенным является влияние этой податливости на частоты свободных колебаний, можно ориентировочно судить, сравнивая параметр $\lambda_k = \pi^2 m^2 D / K l^2$ с единицей. Для балки, показанной на рис. 2.4, $\lambda_k = 0{,}104m^2$.

Для длинных балок ($l/h \geqslant 50$) при анализе первых форм колебаний приведенные выше эффекты можно не учитывать и принимать $C_\rho = 0$, $D_\rho = 0$, $K \to \infty$. Тогда уравнение изгибных колебаний принимает традиционный вид

$$D\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + B_\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \bar{p}.$$

Слоистая структура композитной балки учитывается параметрами D и B_ρ, которые определяются по формулам (2.3) и (2.14).

2.2. ТОНКОСТЕННЫЕ СТЕРЖНИ

Наиболее перспективно применение композитов в тонкостенных стержнях (рис. 2.8), которые изготавливаются намоткой или выкладкой однонаправленной или тканой ленты под различными углами к оси и используются в качестве элементов ферменных конструкций, подкосов, лонжеронов, винтов самолетов и вертолетов, приводных валов и т. д.

Расчет тонкостенных стержней с замкнутым контуром поперечного сечения осуществляется на основе гипотез балочной теории, согласно которым принимается, что поперечное сечение не деформируется и при растяжении, сжатии, изгибе и кручении стержня перемещается и поворачивается как жесткий диск. При нагружении к стенке стержня возникают осевые нормальные усилия N_z (z, s) и касательные усилия N_{zs} (z, s), которые сводятся к осевой силе P (z), поперечным силам Q_x (z) и Q_y (z), изгибающим моментам M_x (z), M_y (z) и крутящему моменту M_z (z) (см. рис. 2.8). Силы и моменты, действующие в сечении z = const стержня, связаны условиями равновесия оси стержня (рис. 2.9)

$$P' = 0; \quad Q'_x = 0; \quad Q'_y = 0; \quad (2.15)$$

$$M'_x - Q_y = 0; \quad M'_y - Q_x = 0; \quad M'_z = 0.$$

Здесь штрих обозначает производную по z. Решение уравнений (2.15) аналогично решению (2.6):

$$P = P_0; \quad Q_x = Q_x^0; \quad Q_y = Q_y^0; \quad (2.16)$$

$$M_x = M_x^0 + Q_y^0 z; \quad M_y = M_y^0 + Q_x^0 z;$$

$$M_z = M_z^0.$$

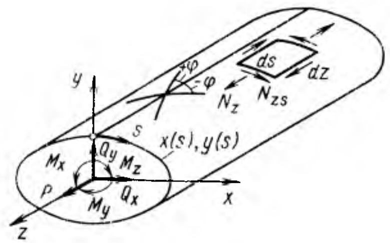


Рис. 2.8. Тонкостенный композитный стержень

Здесь величины с индексом «0» соответствуют сечению $z = 0$. Если на стержень дополнительно действуют сосредоточенные нагрузки, в правую часть равенств (2.16) добавляются слагаемые, аналогичные составляющим (2.7).

Стержень с однозамкнутым контуром поперечного сечения для усилий N_z и N_{zs} является статически определимой системой. Эти усилия выражаются через силы и моменты, действующие в сечении с помощью условий равновесия элемента стержня, показанного на рис. 2.8. В частности, продольные усилия определяются следующим образом:

$$N_z = B\left[\frac{P}{S} + k\left(\frac{\bar{M}_x}{D_x^0}\bar{y} + \frac{\bar{M}_y}{D_y^0}\bar{x}\right)\right]. \quad (2.17)$$

В этом случае

$$k = \frac{1}{1 - n_x n_y}; \quad n_x = \frac{D_{xy}^0}{D_x^0};$$

$$n_y = \frac{D_{xy}^0}{D_y^0}; \quad (2.18)$$

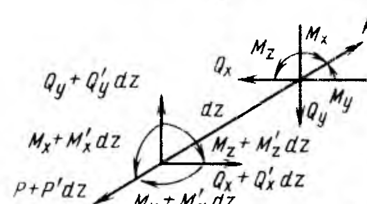


Рис. 2.9. Элемент оси стержня с приведенными к оси силами и моментами

$$D_x^0 = D_x - y_0^2 S; \quad D_y^0 = D_y - x_0^2 S;$$

$$D_{xy}^0 = D_{xy} - x_0 y_0 S; \quad x_0 = S_y/S;$$

$$y_0 = S_x/S;$$

$$S = \oint B\,ds + \sum_{j=1}^{m} E_j F_j;$$

$$S_x = \oint By\,ds + \sum_{j=1}^{m} E_j F_j y_j; \quad (2.19)$$

$$S_y = \oint Bx\,ds + \sum_{j=1}^{m} E_j F_j x_j;$$

$$D_x = \oint By^2\,ds + \sum_{j=1}^{m} E_j F_j y_j^2;$$

$$D_y = \oint Bx^2\,ds + \sum_{j=1}^{m} E_j F_j x_j^2;$$

$$D_{xy} = \oint Bxy\,ds + \sum_{j=1}^{s} E_j F_j x_j y_j;$$

$$\overline{M}_x = M_x - y_0 P; \quad \overline{M}_y = M_y - x_0 P;$$

$$\bar{x} = x - x_0 - n_x (y - y_0);$$

$$\bar{y} = y - y_0 - n_y (x - x_0). \quad (2.20)$$

Входящая в формулы (2.17) и (2.19) величина B обозначает жесткость стенки стержня при растяжении или сжатии в осевом направлении. Если контур сечения не деформируется (т. е. принимается, что $e_s = 0$), то

$$B = B_{11} = \sum_{i=1}^{k} h_i \left[\overline{E}_i^{(i)} \cos^4 \varphi_i + \overline{E}_2^{(i)} \sin^4 \varphi_i + 2\left(\overline{E}_1^{(i)} \nu_{12}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)}\right) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i\right], \quad (2.21)$$

где k — число слоев стенки; h_i — суммарная толщина элементарных слоев с углами армирования $\pm\varphi_i$ (структура материала считается симметричной); φ_i — угол между осью основного армирования слоя и образующей стержня (см. рис. 2.8); $\overline{E}_{1,2}^{(i)} = E_{1,2}^{(i)}/\left(1 - \nu_{12}^{(i)}\nu_{21}^{(i)}\right)$ (индексы 1, 2 соответствуют направлению основного армирования и ортогональному направлению в плоскости слоя); E, G, ν — соответственно модуль упругости, модуль сдвига и коэффициент Пуассона.

Иногда вместо условия $e_s = 0$ вводится условие отсутствия контурных напряжений ($\sigma_s = 0$). В этом случае

$$B = B_{11} - (B_{12}^2/B_{22}), \quad (2.22)$$

где

$$B_{12} = \sum_{i=1}^{k} h_i \left\{\overline{E}_1^{(i)} \nu_{12}^{(i)} + \left[\overline{E}_1^{(i)} + \overline{E}_2^{(i)} - 2\left(\overline{E}_1^{(i)} \nu_{12}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)}\right)\right] \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i\right\};$$

$$B_{22} = \sum_{i=1}^{k} h_i \left[\overline{E}_1^{(i)} \sin^4 \varphi_i + \overline{E}_2^{(i)} \cos^4 \varphi_i + 2\left(\overline{E}_1^{(i)} \nu_{12}^{(i)} + 2G_{12}^{(i)}\right) \sin^2 \varphi_i \cos^2 \varphi_i\right].$$

На практике формула (2.21) используется для коротких стержней, а также в случаях, когда жесткость контура сечения обеспечивается упругим заполнителем, поперечными ребрами или стенками. В случае длинных пустотелых стержней продольная жесткость определяется по формуле (2.22).

Суммы в равенствах (2.19) учитывают продольные подкрепляющие элементы. Число таких элементов в сечении обозначено через m; E_j, F_j, x_j, y_j — модуль упругости, площадь и координаты центра поперечного сечения j-го элемента. Напряжение в j-м продольном элементе определяется формулой, аналогичной (2.17), т. е.

$$\sigma_j = E_j \left[\frac{P}{S} + k\left(\frac{\overline{M}_x}{D_x^0}\,\bar{y} + \frac{\overline{M}_y}{D_y^0}\,\bar{x}\right)\right].$$

Величина S является осевой жесткостью стержня, величины S_x, S_y и D_x, D_y, D_{xy} (2.19) являются жесткостными параметрами, аналогичными статическим моментам и моментам инерции сечения. Индекс «0» в равенствах (2.18) обозначает характеристики, соответствующие осям, параллельным заданным и проходящим через точку с координатами x_0 и y_0, аналогичную центру тяжести сечения. И наконец, координаты $\bar{x}$ и $\bar{y}$ (2.20) соответствуют центральным главным осям.

Формула (2.17) записана для произвольной системы координат x, y, к которой отнесено сечение стержня. Если контур сечения имеет ось симметрии, например ось x (рис. 2.10, *а*), то $S_x = 0$, $D_{xy} = 0$ и

$$N_z = B\left[\frac{P}{S} + \frac{M_x}{D_x} y + \frac{\overline{M}_y}{D_y^0}(x - x_0)\right].$$

Если сечение имеет две оси симметрии (рис. 2.10, *б*), то дополнительно $S_y = 0$ и

$$N_z = B\left(\frac{P}{S} + \frac{M_x}{D_x} y + \frac{M_y}{D_y} x\right). \tag{2.23}$$

В продольных элементах

$$\sigma_j = E_j\left(\frac{P}{S} + \frac{M_x}{D_x} y_j + \frac{M_y}{D_y} x_j\right). \tag{2.24}$$

Сдвигающие усилия определяются следующим образом:

$$N_{zs} = N_{zs}^Q(z,\ s) + N_{zs}^0. \tag{2.25}$$

Составляющая

$$N_{zs}^Q = -k\left[\frac{Q_y}{D_x^0} s_x(s) + \frac{Q_x}{D_y^0} s_y(s)\right] \tag{2.26}$$

обеспечивает статическую эквивалентность усилий N_{zs} поперечным силам Q_x и Q_y, действующим в сечении. Функции $s_x(s)$ и $s_y(s)$ зависят от начала отсчета координаты s и имеют вид

$$s_x(s) = \int_0^s B\bar{y}\, ds + \sum_{j=1}^{m_s} E_j F_j \bar{y}_j;$$
$$s_y(s) = \int_0^s B\bar{x}\, ds + \sum_{j=1}^{m_s} E_j F_j \bar{x}_j. \tag{2.27}$$

Координаты $\bar{x}$ и $\bar{y}$ определяются равенствами (2.20). Суммы, входящие

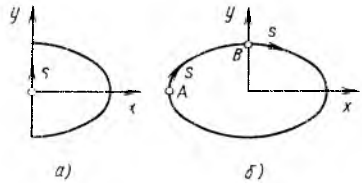


Рис. 2.10. Сечение с одной (*а*) и двумя (*б*) осями симметрии

в соотношения (2.27), учитывают продольные подкрепления, через m_s обозначено число подкрепляющих элементов, расположенных на рассматриваемом интервале (от $s = 0$ до текущего значения s).

Составляющая N_{zs}^0, не зависящая от s, компенсирует произвол в выборе начала отсчета контурной координаты и обеспечивает статическую эквивалентность усилий N_{zs} крутящему моменту M_z, действующему в сечении. Тогда

$$N_{zs}^0 = \frac{1}{2F}\left(M_z - \oint N_{zs}^Q r\, ds\right),$$

где r — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на касательную к контуру (рис. 2.11); F — площадь, ограниченная контуром сечения. Запишем окончательную формулу для сдвигающих усилий

$$N_{zs} = Q_x F_x(s) + Q_y F_y(s) + \frac{M_z}{2F}, \tag{2.28}$$

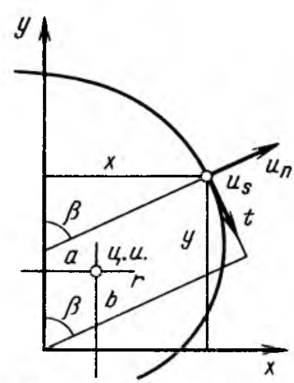


Рис. 2.11. Геометрические характеристики сечения

где

$$F_x(s) = -\frac{k}{D_y^0}\left[s_y(s) - \frac{1}{2F}\oint s_y(s)\, r\, ds\right];$$
$$F_y(s) = -\frac{k}{D_x^0}\left[s_x(s) - \frac{1}{2F}\oint s_x(s)\, r\, ds\right]. \qquad (2.29)$$

Равенство (2.28) соответствует произвольной системе декартовых координат. Если сечение имеет ось симметрии (см. рис. 2.10, *а*) и начало отсчета координаты s принимается в точке пересечения контурной линии и оси симметрии, то контурный интеграл в функции $F_x(s)$ исчезает. Если сечение имеет две оси симметрии (см. рис. 2.10, *б*), то целесообразно использовать формулу (2.28) сначала для анализа реакции стержня на силу Q_x, а затем — на силу Q_y. Если в первом случае отсчитывать контурную координату от точки A, а во втором — от точки B, то в равенствах (2.29) исчезают оба контурных интеграла.

При $Q_x = 0$, $Q_y = 0$, т. е. в случае чистого кручения, из (2.28) следует известная формула Бредта:

$$N_{zs} = M_z/2F.$$

Таким образом, нормальное и сдвиговое усилия, возникающие в стержне при осевом нагружении, изгибе и кручении, определяются равенствами (2.17) и (2.28). Приведем выражения для относительных деформаций стенки стержня. Осевая деформация определяется в точке с координатами x, y следующим образом:

$$e_z = w' + \theta_x' y + \theta_y' x, \qquad (2.30)$$

где

$$w = w_0 + \frac{P_0 z}{S} - (y_0\theta_x + x_0\theta_y) \qquad (2.31)$$

— осевое смещение начала координат;

$$\theta_x = \theta_x^0 + \frac{k}{D_x^0}\int_0^z (\overline{M}_x - n_y\overline{M}_y)\, dz;$$
$$\theta_y = \theta_y^0 + \frac{k}{D_y^0}\int_0^z (\overline{M}_y - n_x\overline{M}_x)\, dz \qquad (2.32)$$

— углы поворота сечения вокруг осей x и y.

Деформация сдвига имеет вид

$$e_{zs} = N_{zs}/C, \qquad (2.33)$$

где сдвиговая жесткость стенки

$$C = B_{33} = \sum_{i=1}^{k} h_i\left[\left(\overline{E}_1^{(i)} + \overline{E}_2^{(i)} - 2\overline{E}_1^{(i)}\nu_{12}^{(i)}\right)\sin^2\varphi_i\cos^2\varphi_i + G_{12}^{(i)}\cos^2 2\varphi_i\right]. \qquad (2.34)$$

По деформациям стенки могут быть найдены деформации армированного слоя в главных осях ортотропии

$$e_1^{(i)} = e_z\cos^2\varphi_i + e_s\sin^2\varphi_i + e_{zs}\sin\varphi_i\cos\varphi_i;$$
$$e_2^{(i)} = e_z\sin^2\varphi_i + e_s\cos^2\varphi_i - e_{zs}\sin\varphi_i\cos\varphi_i; \qquad (2.35)$$
$$e_{12}^{(i)} = (e_s - e_z)\sin 2\varphi_i + e_{zs}\cos 2\varphi_i.$$

Угол армирования слоя ($\pm\varphi_i$) подставляется в эти формулы со своим знаком (см. рис. 2.8). Деформации e_z и e_{zs}, входящие в равенства (2.35), определяются соотношениями (2.30) и (2.33). Для жесткого контура сечения, когда осевая жесткость определяется по формуле (2.21), контурная деформация e_s принимается равной нулю, а для податливого контура сечения, когда осевая жесткость определяется по формуле (2.22), $e_s = -e_z B_{12}/B_{22}$ (при этом учитывается деформация контура сечения за счет эффекта Пуассона).

По деформациям слоя могут быть найдены соответствующие напряжения

$$\sigma_1^{(i)} = \overline{E}_1^{(i)}\left(e_1^{(i)} + \nu_{12}^{(i)} e_2^{(i)}\right);$$
$$\sigma_2^{(i)} = \overline{E}_2^{(i)}\left(e_2^{(i)} + \nu_{21}^{(i)} e_1^{(i)}\right); \qquad (2.36)$$
$$\tau_{12}^{(i)} = G_{12}^{(i)} e_{12}^{(i)}$$

и осуществлена оценка прочности стержня.

Приведем выражения для перемещений точки стержня по осям x, y, z:

$$u_x = u + y\theta_z;$$
$$u_y = v - x\theta_z;$$
$$u_z = w + y\theta_x + x\theta_y.$$

Здесь u, v, w — перемещения начала координат (см. рис. 2.8) по осям x, y, z, причем w определяется равенством (2.31), а u и v принимают вид

$$u = u_0 + \int_0^z (\psi_x - \theta_y)\,dz;$$
$$v = v_0 + \int_0^z (\psi_y - \theta_x)\,dz. \qquad (2.37)$$

Выражения для углов поворота θ_x, θ_y имеют вид (2.32), а углы сдвига ψ_x и ψ_y при поперечном изгибе в плоскостях xz и yz, а также угол поворота сечения относительно оси z определяются следующими равенствами:

$$\psi_x = c_x Q_x + c_{xy} Q_y + c_{xz} M_z;$$
$$\psi_y = c_{yx} Q_x + c_y Q_y + c_{yz} M_z; \qquad (2.38)$$
$$\theta_z = \theta_0 + \int_0^z (c_{zx} Q_x + c_{zy} Q_y + c_z M_z)\,dz,$$

где

$$c_x = \oint F_x^2 \frac{ds}{C}; \quad c_{xy} = c_{yx} = \oint F_x F_y \frac{ds}{C}; \quad c_y = \oint F_y^2 \frac{ds}{C};$$
$$c_{xz} = c_{zx} = \frac{1}{2F} \oint F_x \frac{ds}{C};$$
$$c_z = \frac{1}{4F^2} \oint \frac{ds}{C};$$
$$c_{yz} = c_{zy} = \frac{1}{2F} \oint F_y \frac{ds}{C}.$$

Характеристики F_x, F_y и C имеют форму (2.29) и (2.34). Если сечение имеет ось симметрии, например ось x (см. рис. 2.10, *а*), то $c_{xy} = c_{yx} = 0$ и $c_{xz} = c_{zx} = 0$. При наличии двух осей симметрии (см. рис. 2.10, *б*) дополнительно $c_{yz} = c_{zy} = 0$ и равенства (2.38) принимают вид

$$\psi_x = c_x Q_x; \quad \psi_y = c_y Q_y;$$
$$\theta_z = \theta_0 + c_z \int_0^z M_z\,dz.$$

В приведенные выше соотношения (2.16) для сил, моментов и перемещений (2.31), (2.32), (2.37), (2.38) входят 12 начальных параметров (они отмечены индексом «0»), соответствующих силам, моментам, перемещениям и углам поворота, заданным в сечении $z = 0$. Эти величины определяются из граничных условий на концах стержня, т. е. при $z = 0$ и $z = l$. В сечении $z = \text{const}$ может быть записано шесть граничных условий. В частности, на свободном торце

$$P_0 = 0; \quad Q_x^0 = 0; \quad Q_y^0 = 0; \quad M_x^0 = 0;$$
$$M_y^0 = 0; \quad M_z^0 = 0.$$

Если торец полностью закреплен, то

$$u_0 = 0; \quad v_0 = 0; \quad w_0 = 0; \quad \theta_x^0 = 0;$$
$$\theta_y^0 = 0; \quad \theta_z^0 = 0.$$

В случае шарнирного опирания обращаются в ноль перемещения опорной точки и моменты относительно осей, проходящих через эту точку.

Приведем некоторые полезные соотношения. Перемещения по касательной и по нормали к контуру сечения (см. рис. 2.11) выражаются следующим образом:

$$u_s = u\cos\beta - v\sin\beta + r\theta_z;$$
$$u_n = u\sin\beta + v\cos\beta + t\theta_z.$$

Здесь u, v и θ_z определяются равенствами (2.37), (2.38), а $r = x\sin\beta + y\cos\beta$ и $t = y\sin\beta - x\cos\beta$ — отрезки нормали и касательной, показанные на рис. 2.11.

В сечении произвольной формы можно выделить центр изгиба, обладающий следующим свойством: сила Q_x или Q_y, приложенная в центре изгиба, не вызывает закручивания стержня. Координаты центра изгиба имеют вид (см. рис. 2.11)

$$a = c_{yz}/c_z; \quad b = -c_{xz}/c_z.$$

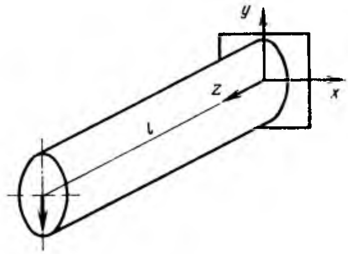


Рис. 2.12. Консольный цилиндрический стержень

Если сечение имеет ось симметрии, то центр изгиба лежит на этой оси. В сечении, имеющем две оси симметрии, центр изгиба совпадает с точкой пересечения этих осей.

Пример расчета. Консольный цилиндрический стержень радиусом $R = 0{,}1$ м и длиной $l = 1$ м нагружен силой $Q = 10^3$ Н, приложенной на конце $z = l$ (рис. 2.12). Стенка стержня является трехслойной и состоит из несущих слоев и легкого заполнителя — пенопласта (рис. 2.13, *а*). Несущие слои образованы из углепластика с характеристиками $E_1 = 180$ ГПа, $E_2 = 6{,}2$ ГПа, $G_{12} = 5$ ГПа, $\nu_{12} = 0{,}007$, $\nu_{21} = 0{,}21$, состоят из спиральных слоев с углами армирования $\pm 45°$ толщиной $0{,}6 \cdot 10^{-3}$ м и кольцевых слоев ($\varphi = 90°$) толщиной $0{,}3 \times 10^{-3}$ м (для каждого из несущих слоев). Стержень усилен 12 одинаковыми продольными ребрами из боропластика с параметрами $E_p = 210$ ГПа, $F_p = 10^{-4}$ м².

Для определения сил и моментов, действующих в сечениях стержня, воспользуемся равенствами (2.16) и схемой на рис. 2.12. В этом случае

$$P = Q_x = M_y = M_z = 0;$$

$$Q_y = -Q; \quad M_x = Q\,(l - z).$$

Жесткости стенки согласно (2.21) и (2.34) (контур считается жестким, т. е. принимается $e_s = 0$)

$$B = B_{11} = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-3}\,[180{,}4 + 6{,}21 + 2(1{,}26 + 10)]\,\frac{1}{4} + 2 \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 6{,}21 = 66{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ ГПа} \cdot \text{м};$$

$$C = B_{33} = 2 \cdot 0{,}6 \cdot 10^{-3}\,(180{,}4 + 6{,}21 - 2{,}52)\,\frac{1}{4} + 2 \cdot 0{,}3 \cdot 10^{-3} \cdot 5 = 55{,}6 \cdot 10^{-3} \text{ ГПа} \cdot \text{м}.$$

Оси x, y являются главными и центральными. В стенке и в продольных элементах в соответствии с (2.23) и (2.24) имеем

$$N_z = B\,\frac{M_x}{D_x}\,y; \quad \sigma_j = E_p\,\frac{M_x}{D}\,y_j.$$

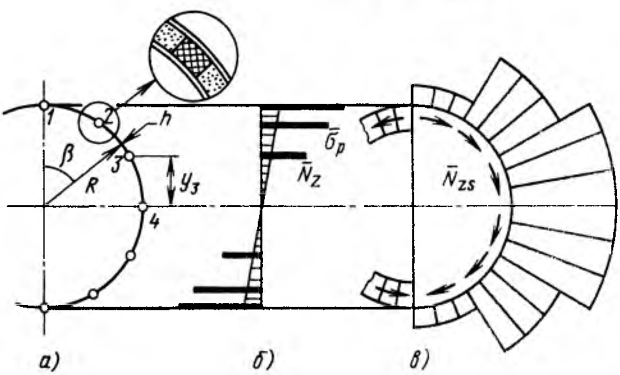


Рис. 2.13. Распределение нормальных напряжений и сдвигающих усилий по контуру сечения

где в соответствии с (2.19)

$$D_x = \oint By^2\,ds + \sum_{j=1}^{12} E_pF_py_j^2 =$$

$$= BR^3 \int_0^{2\pi} \cos^2\beta\,d\beta + E_pR^2 \sum_{j=1}^{12} \cos^2\beta_j =$$

$$= \pi\cdot 66{,}4\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-3} +$$

$$+ 210\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-4}\left(2 + 4\,\frac{3}{4} + 4\,\frac{1}{4}\right) =$$

$$= 1{,}47\cdot 10^{-3}\ \text{ГПа}\cdot\text{м}^4.$$

Таким образом,

$$N_z = 45{,}2QR\left(1 - \frac{z}{l}\right)\cos\beta =$$

$$= 4{,}52\cdot 10^{-3}\left(1 - \frac{z}{l}\right)\cos\beta;$$

$$\sigma_j = 143\cdot 10^3 QR\left(1 - \frac{z}{l}\right)\cos\beta_j =$$

$$= 14{,}3\left(1 - \frac{z}{l}\right)\cos\beta_j.$$

Здесь N_z в Н/м; σ_j в МПа.

Максимальные значения усилий и напряжений реализуются в сечении $z = 0$. На рис. 2.13, *б* показаны относительные средние напряжения в стенке ($\bar\sigma_z = N_z/h$, где $h = 1{,}8\cdot 10^{-3}$ м — суммарная толщина несущих слоев) и напряжения в ребрах.

Сдвигающие усилия находятся по формуле (2.28), т. е.

$$N_{zs} = -k\,\frac{Q_y}{D_x^0}\,s_x(s) = \frac{Q}{D_x}\,s_x(s),$$

$$s_x(s) = \int_0^s By\,ds + \sum_{j=1}^{m_s} E_pF_py_j =$$

$$= BR^2\sin\beta + E_pF_pR\sum_{j=1}^{m_s}\cos\beta_j.$$

Функция $s_x(s)$ вычисляется по участкам. Помещая начало отсчета координаты s в точке *1* (см. рис. 2.13, *а*) и относя к первому участку половину площади сечения элемента *1*, последовательно найдем

$$s_x^{1-2} = 66{,}4\cdot 10^{-3}\cdot 10^{-2}\sin\beta +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot 210\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}1 = (66{,}4\sin\beta +$$

$$+ 10{,}5)\,10^{-5}\ \text{ГПа}\cdot\text{м}^3;$$

$$s_x^{2-3} = \left[66{,}4\sin\beta + 210\cdot 0{,}1\left(\frac{1}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]10^{-5} = (66{,}4\cdot\sin\beta +$$

$$+ 28{,}7)\,10^{-5}\ \text{ГПа}\cdot\text{м}^3;$$

$$s_x^{3-4} = \left[66{,}4\sin\beta + 210\cdot 0{,}1\left(\frac{1}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)\right]10^{-5} = (66{,}4\sin\beta +$$

$$+ 39{,}2)\,10^{-5}\ \text{ГПа}\cdot\text{м}^3.$$

Распределение относительных сдвигающих усилий по контуру сечения показано на рис. 2.13, *в*.

Перейдем к определению деформаций. Из равенств (2.30), (2.32) имеем

$$e_z = \theta_x' y = \frac{M_x}{D_x}\,y = \frac{Q\,(l - z)}{D_x}\,R\cos\beta.$$

Из соотношения (2.33)

$$e_{zs} = \frac{Qs_x(s)}{D_xC}.$$

Рассмотрим наиболее нагруженное сечение $z = 0$. Например, в окрестности точки *1*, т. е. при $\beta \approx 0$,

$$e_z = \frac{10^3\cdot 0{,}1}{1{,}47\cdot 10^{-3}\cdot 10^9} = 0{,}68\cdot 10^{-4};$$

$$e_{zs} = \frac{10^3\cdot 10{,}5\cdot 10^{-5}}{1{,}47\cdot 10^{-3}\cdot 55{,}6\cdot 10^{-3}\cdot 10^9} =$$

$$= 0{,}013\cdot 10^{-4}.$$

Деформация в элементарных слоях согласно равенствам (2.35):

в слоях с углами армирования $\pm 45°$

$$e_1 = \frac{1}{2}(e_z \pm e_{zs}) =$$

$$= (0{,}34 \pm 0{,}0065)\,10^{-4};$$

$$e_2 = \frac{1}{2}(e_z \mp e_{zs}) =$$

$$= (0{,}34 \mp 0{,}0065)\, 10^{-4};$$

$$e_{12} = \mp e_z = \mp 0{,}68 \cdot 10^{-4};$$

в слое с углом армирования 90°

$$e_1 = 0; \quad e_2 = e_z = 0{,}68 \cdot 10^{-4}; \quad e_{12} = -e_{zs} = -0{,}013 \cdot 10^{-4}.$$

Напряжения вычисляются по формулам (2.36). В частности, в слое с углом армирования +45° $\sigma_1 = 0{,}18$ МПа, $\sigma_2 = 0{,}255$ МПа, $\tau_{12} = -0{,}34$ МПа.

Найдем перемещения. Из равенств (2.32), (2.37), (2.38) для рассматриваемого случая ($\theta_x^0 = 0$, $v = 0$) получаем

$$\theta_x = \int\limits_0^z \frac{M_x}{D_x}\, dz = \frac{Q}{D_x}\left(lz - \frac{z^2}{l}\right);$$

$$v = \int\limits_0^z (\psi_y - \theta_x)\, dz; \quad \psi_y = c_y Q_y.$$

Здесь

$$c_y = \frac{1}{C} \oint F_y^2\, ds; \quad F_y = \frac{s_x(s)}{D_x}.$$

Находим

$$c_y = \frac{4R}{CD_x^2}\left[\int\limits_0^{\pi/6} \left(s_x^{1-2}\right)^2 d\beta + \int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \left(s_x^{2-3}\right)^2 d\beta + \int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \left(s_x^{3-4}\right)^2 d\beta\right] = 34 \cdot 10^{-10}\, \frac{1}{\text{Н}}.$$

Таким образом, прогиб стержня

$$v = -\int\limits_0^z \left[\frac{Q}{c_y} + \frac{Q}{D_x}\left(lz - \frac{z^2}{2}\right)\right] dz = -\frac{Qz}{c_y} - \frac{Q}{D_x}\left(l\,\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}\right).$$

Прогиб на нагруженном торце $v = 10^{-3}\,(0{,}029 + 0{,}226) = -0{,}255 \times 10^{-3}$ м. Первое слагаемое определяет прогиб, появляющийся в результате сдвига стенки, а второе — соответствует изгибу стержня.

2.3. КОМПОЗИТНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ФЕРМЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Композитные стержни являются перспективными конструктивными элементами плоских и пространственных ферм, широко использующихся в различных областях техники. Как правило, стержни ферменных конструкций работают в условиях одноосного растяжения или сжатия, что хорошо согласуется со структурными особенностями волокнистых композитов, обладающих максимальной жесткостью и прочностью в направлении армирования.

Однако стержни, армированные только в осевом направлении, не нашли широкого применения. Причиной этого послужила специфическая для однонаправленных композитов форма разрушения при продольном сжатии, связанная с образованием продольных трещин, вызванных растяжением материала в поперечном направлении за счет эффекта Пуассона. Для уменьшения этой деформации стержни обычно армируются и в поперечном направлении. Кроме того, в силу причин технологического характера продольные слои иногда укладываются под некоторым углом к оси стержня. Таким образом, типовая структура композитного стержня фермы образуется из системы продольных или спиральных слоев и слоя, армированного в поперечном направлении. Наиболее распространенными являются стержни кругового поперечного сечения.

Под действием осевой силы P (см. рис. 2.8) в стержне возникают осевые деформации

$$e_z = \frac{P}{S}, \tag{2.39}$$

где в соответствии с первым равенством (2.19)

$$S = \oint B\, ds.$$

Если стержень имеет сплошной заполнитель, который иногда используется как оправка при его изготовлении, то согласно равенству (2.21) $B = B_{11}$ и соответственно кольцевая деформация $e_s = 0$. Для пустотелого стержня согласно (2.22)

$$B = B_{11} - \frac{B_{12}^2}{B_{22}}; \quad e_s = -\frac{B_{12}}{B_{11}} e_z. \tag{2.40}$$

Для круглого стержня радиуса R имеем $S = 2\pi RB$, а для структуры, образованной из спиральных и кольцевых слоев, в формулах для коэффициентов жесткости стенки B_{mn} следует принять $k = 2$, $\varphi = \varphi_1$ ($\varphi = 0$ для продольного слоя), $h = h_c$, $\varphi_2 = 90°$, $h_2 = h_к$.

Деформации слоев в координатах, связанных с направлениями армирования, находятся по формулам (2.35), в которые подставляются e_z согласно (2.39), e_s в соответствии с (2.40) (или полагается $e_s = 0$) и принимается $e_{zs} = 0$. Напряжения в слоях определяются с помощью закона Гука (2.36) для слоя.

Оценка прочности стержневых элементов ферменных конструкций, работающих на растяжение или сжатие, может быть осуществлена с помощью структурных (см. гл. 5, ч. 1) или феноменологических (см. гл. 8, ч. 1) критериев прочности слоистых композитов.

Приведем примеры применения структурных критериев.

Рассмотрим осевое растяжение силой P стержня, образованного из спиральных и кольцевых слоев. При растяжении первым разрушается кольцевой слой, в котором образуются кольцевые трещины. Критерии прочности, соответствующие различным механизмам разрушения (разрушение связующего, нарушение адгезионной прочности, поперечное разрушение органических волокон), определяются равенствами (5.26)—(5.30) (см. гл. 5, ч. 1). Обсуждаемое разрушение кольцевого слоя не приводит к существенному снижению несущей способности стержня. При дальнейшем возрастании осевой силы в кольцевом

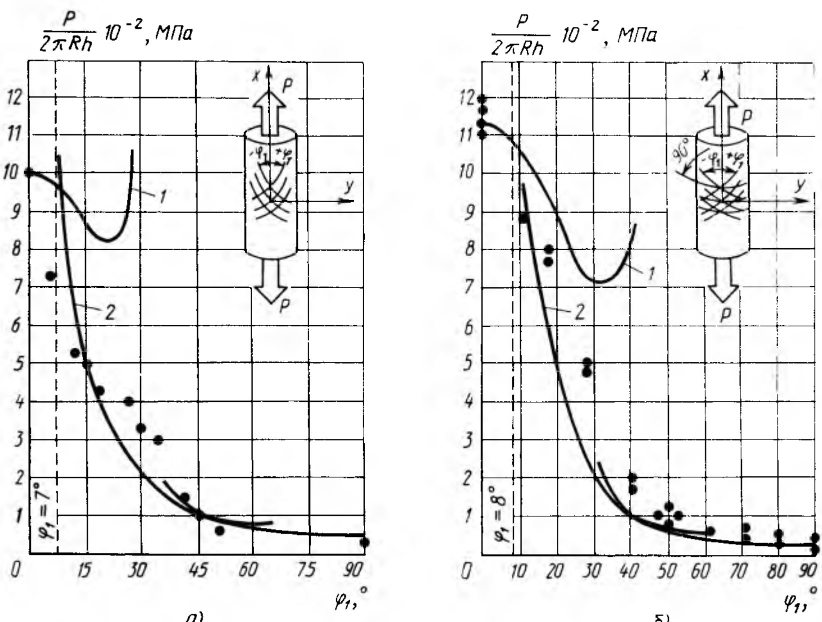


Рис. 2.14. Зависимость растягивающей предельной нагрузки от угла армирования для круглых стержней из углепластика (*а*) и стеклопластика (*б*), намотанных под углами $\pm\varphi_1$ (*а*) и дополнительно усиленных кольцевыми слоями (*б*):

1 — соответствует условию прочности волокон; 2 — соответствует разрушению связующего; ● — экспериментальные результаты [4, 5]

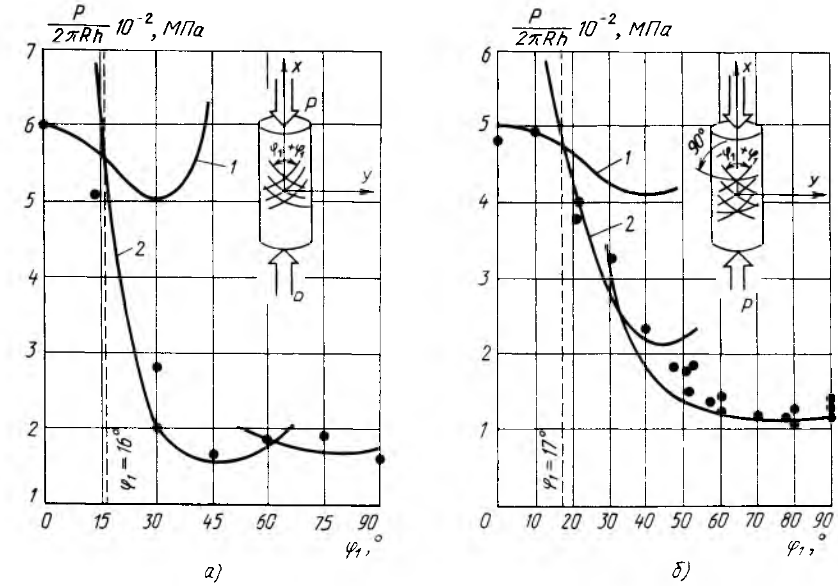


Рис. 2.15. Зависимость сжимающей предельной нагрузки от угла армирования для круглых стержней из углепластика (*а*) и стеклопластика (*б*), намотанных под углами $\pm\varphi_1$ (*а*) и дополнительно усиленных кольцевыми слоями (*б*) (обозначения см. рис. 2.14)

слое следует принять $E_2 = G_{12} = \nu_{12} = \nu_{21} = 0$. Характер разрушения спиральных слоев в растянутом стержне зависит от угла армирования φ_1. При малых углах φ_1 (до 7—10°), т. е. при армировании, близком к продольному, имеет место разрушение волокон при растяжении (см. гл. 5, ч. 1). Если угол φ_1 превышает указанные выше значения, то в спиральных слоях разрушается связующее (соответствующие критерии прочности см. в пп. 5.1.6, 5.1.7, ч. 1). На рис. 2.14, *а*, *б* приведены теоретические и экспериментальные результаты, иллюстрирующие зависимость предельной растягивающей нагрузки от угла армирования.

Рассмотрим осевое сжатие. При малых углах армирования спиральных слоев (до 12—17°) разрушение стержня вызывается разрушением спиральных волокон при сжатии в соответствии с критерием (5.39). При больших углах армирования происходит разрушение связующего или нарушение адгезионного взаимодействия между волокнами и связующим (соответствующие критерии прочности см. в пп. 5.16—5.18, ч. 1). На рис. 2.15, *а*, *б* представлены теоретические и экспериментальные результаты, иллюстрирующие зависимость предельной сжимающей нагрузки от угла армирования.

Одной из возможных форм разрушения сжатого стержня является потеря устойчивости. Соответствующая критическая сила определяется формулой, аналогичной (2.12), т. е.

$$P_к = \frac{\pi^2 D}{l^2\left(1+\frac{\pi^2 D}{l^2 K}\right)}.$$

Здесь l — длина стержня; D и K — соответственно изгибная и сдвиговая жесткости. Для круглого стержня $D = \pi BR^2$, $K = \pi CR$. Здесь B и C — жесткости стенки при растяжении-сжатии и сдвиге определяются равенствами (2.21) или (2.22) и (2.34).

Тонкостенные стержни иногда могут терять устойчивость по местной форме, т. е. как оболочки. Соответствующие результаты представлены в п. 4.3.4, ч. 2.

2.4. КРУГОВЫЕ КОЛЬЦА

Композитные кольца и шпангоуты, нагруженные в своей плоскости, являются распространенными элементами конструкций различного назначения.

Исходные уравнения для слоистого кольца, нагруженного радиальными и тангенциальными поверхностными и объемными силами (рис. 2.16), следуют из уравнений (1.19), (1.21) и (1.26):

$$N' + \frac{Q}{R} + t = 0;$$

$$M' - Q + m = 0;$$

$$Q' - \frac{N}{R} + n = 0; \qquad (2.41)$$

$$N = B\varepsilon + C\varkappa;$$

$$M = C\varepsilon + D\varkappa;$$

$$Q = K\psi;$$

$$\varepsilon = v' + \frac{w}{R}; \quad \varkappa = \theta';$$

$$\theta = \psi + \frac{v}{R} - w'.$$

Штрихом здесь обозначена производная по окружной координате s_1 (см. рис. 2.16). Тангенциальная t, нормальная n и моментная m нагрузки, приведенные к нейтральной оси, определяются равенствами (1.20), т. е.

$$t = \int_{-e}^{s} F_\beta bH\,d\gamma + b_1 H_e p_\beta + b_k H_s q_\beta;$$

$$n = \int_{-e}^{s} F_\gamma bH\,d\gamma + b_1 H_e p - b_k H_s q; \qquad (2.42)$$

$$m = \int_{-e}^{s} F_\beta bH\gamma d\gamma + b_i s H_s q_\beta - b_k e H_e p_\beta,$$

где $b(\gamma)$ — ширина кольца (рис. 2.17); $H = 1 + \gamma/R$; $H_e = 1 - e/R$; $H_s = 1 + s/R$. Нагрузки F_β и F_γ отнесены к единице объема, p, q, p_β, q_β — к единице поверхности, на которой они действуют, а t, n, m — к единице длины нейтральной оси кольца.

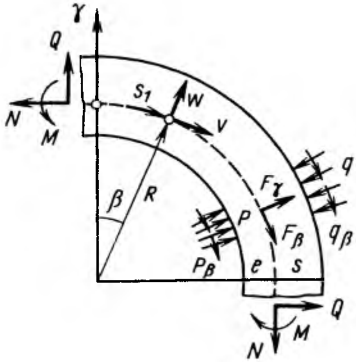


Рис. 2.16. Геометрические параметры и характер нагружения кольца

Мембранная B, смешанная C, изгибная D и сдвиговая K жесткости сечения кольца в соответствии с равенствами (1.40), (1.42) имеют следующий вид:

$$B = I_0; \quad C = I_1 - eI_0; \quad D = I_2 - 2eI_1 + e^2 I_0 \qquad (2.43)$$

[где

$$I_p = \int_0^h \frac{Ebr^p\,dr}{1 + (r-e)R} \quad (p = 0,\ 1,\ 2)]$$

и

$$K = h^2 \left[\int_0^h \left(1 + \frac{r-e}{R}\right) \frac{dr}{bG} \right]^{-1}.$$

Здесь r — расстояние от внутренней поверхности до текущей поверхности, на уровне которой задаются ширина

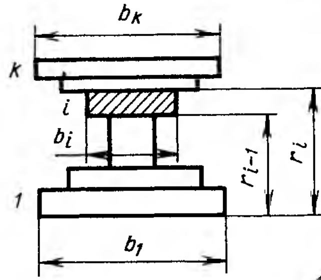


Рис. 2.17. Геометрические параметры слоистого кольца

кольца b, тангенциальный модуль упругости E и модуль сдвига G в плоскости $\beta\gamma$. Для слоистого кольца (см. рис. 2.17) согласно равенствам (1.46) приближенно имеем

$$I_p = \frac{1}{p+1}\sum_{i=1}^{k}\frac{b_i E_i\left(r_i^{p+1} - r_{i-1}^{p+1}\right)}{1 + (r_{i-1} + r_i - 2e)/2R};$$

$$K = \frac{h^2}{\sum\limits_{i=1}^{k}\frac{r_i - r_{i-1}}{b_i G_i}\times\left[1 + \frac{1}{2R}(r_{i-1} + r_i - 2e)\right]}.$$

Координату нейтральной оси кольца целесообразно задать так, чтобы смешанная жесткость C обратилась в нуль. Тогда с учетом формул (2.43)

$$B = I_0;\quad D = I_2 - I_1^2/I_0;\quad e = I_1/I_0.$$

В результате соотношения упругости принимают вид

$$N = B\left(v' + \frac{w}{R}\right);$$

$$M = D\theta';\quad Q = K\left(\theta - \frac{v}{R} + w'\right). \tag{2.44}$$

Система (2.41), (2.44), содержащая шесть неизвестных функций — N, Q, M, v, w, θ, разделяется на две независимые подсистемы. Уравнения (2.41) сводятся к следующим:

$$N'' + \lambda^2 N = \bar{n}/R;$$

$$Q = -RN' - Rt;$$

$$M' = -RN'' - \bar{m},$$

где $\lambda = 1/R$; $\bar{n} = n - Rt'$; $\bar{m} = m + Rt$.

Соответствующее решение имеет вид

$$N = N_s\cos\beta - Q_s\sin\beta;$$

$$Q = Q_s\cos\beta + N_s\sin\beta - Rt; \tag{2.45}$$

$$M = M_0 + RN_0 + RQ_s\sin\beta - RN_s\cos\beta - R\int_0^\beta \bar{m}\,d\beta,$$

где

$$N_s = N_0 - R\int_0^\beta \bar{n}\sin\beta\,d\beta;$$

$$Q_s = Q_0 + Rt_0 - R\int_0^\beta \bar{n}\cos\beta\,d\beta.$$

Величины с нижним индексом «0» обозначают значения соответствующих функций при $\beta = 0$.

Система (2.44), включающая теперь в качестве неизвестных перемещения v, w и угол поворота сечения θ, сводится к следующим уравнениям:

$$v''' + \lambda^2 v' = \frac{M}{RD} - \frac{Q'}{RK} + \frac{N''}{B};$$

$$w = \frac{RN}{B} - Rv';$$

$$\theta = \frac{Q}{K} + \frac{v}{R} - w',$$

решение которых имеет вид

$$v = V_s\cos\beta - W_s\sin\beta + R\Theta_s;$$

$$w = \frac{R}{B}N + W_s\cos\beta + V_s\sin\beta; \tag{2.46}$$

$$\theta = \Theta_s + Q\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{K}\right) + \frac{Rt}{B},$$

где

$$V_s = v_0 - RC - R\int_0^\beta F_s\cos\beta\,d\beta;$$

$$W_s = w_0 - \frac{RN_0}{B} + R\int_0^\beta F_s\sin\beta\,d\beta;$$

$$\Theta_s = C + \int_0^\beta F_s\,d\beta; \tag{2.47}$$

$$C = \theta_0 - Q_0\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{K}\right) - \frac{Rt_0}{B};$$

$$F_s = \frac{RM}{D} - (N - nR)\times\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{K}\right) - \frac{t'R^2}{B}.$$

Нижний индекс «0», как и ранее, выделяет величины, относящиеся к начальному сечению $\beta = 0$ или $s_1 = 0$ (см. рис. 2.16).

Таким образом, силы и моменты, действующие в сечениях кольца, а также смещения и углы поворота сечений, возникающие при нагружении, определяются решениями (2.45) и (2.46). Эти зависимости соответствуют достаточно общей расчетной модели кольца и применительно к прикладным задачам могут быть упрощены. В частности, при расчете колец, как правило, не учитывается деформация нейтральной оси. В этом случае в равенствах (2.46), (2.47) следует принять $B \to \infty$. Если дополнительно не учитывается деформация поперечного сдвига, то принимается $K \to \infty$. В результате этих упрощений соотношения (2.46) принимают вид

$$v = V_s \cos\beta - W_s \sin\beta + R\left(\theta_0 + \frac{R}{D}\int_0^\beta M\,d\beta\right);$$

$$w = W_s \cos\beta + V_s \sin\beta;$$

$$\theta = \theta_0 + \frac{R}{D}\int_0^\beta M\,d\beta,$$

где

$$V_s = v_0 - R\theta_0 - \frac{R^2}{D}\int_0^\beta M\cos\beta\,d\beta;$$

$$W_s = w_0 + \frac{R^2}{D}\int_0^\beta M\sin\beta\,d\beta.$$

Решение (2.45), (2.46) включает шесть начальных параметров N_0, Q_0, M_0, v_0, w_0, θ_0, которые определяются из граничных условий. В частности, при полном закреплении края следует удовлетворить условиям $v = w = \theta = 0$, а на нагруженном краю задать силы N, Q и момент M (см. разд. 2.1). В случае замкнутого кольца полученное решение должно обладать свойством периодичности. В частности, из

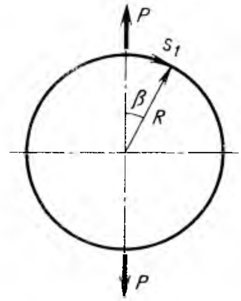


Рис. 2.18. Кольцо, нагруженное диаметральными силами

равенств (2.45) при этом следуют условия

$$\int_0^{2\pi} \bar{n}\sin\beta\,d\beta = \int_0^{2\pi} \bar{n}\cos\beta\,d\beta = \int_0^{2\pi} \bar{m}\,d\beta = 0,$$

которые накладываются на действующую нагрузку и обеспечивают равновесие кольца как твердого тела.

Пример расчета. Рассмотрим замкнутое кольцо, нагруженное двумя диаметрально приложенными силами (рис. 2.18). В соответствии с условиями нагружения и условиями симметрии в решении (2.45), (2.46) следует принять $N_0 = 0$, $Q_0 = -P/2$, $v_0 = 0$, $\theta_0 = 0$ и потребовать, чтобы выполнялись условия $v(\pi/2) = 0$, $\theta(\pi/2) = 0$. Тогда из равенств (2.45) следует

$$M_0 = \frac{PR}{\pi}; \quad w_0 = 0{,}0745\,\frac{PR^3}{D}\left[1 + 5{,}3\,\frac{D}{R}\left(\frac{1}{B} + \frac{1}{K}\right)\right]. \qquad (2.48)$$

Проанализируем вторую формулу, определяющую смещение точки приложения силы. Для однородного прямоугольного сечения (рис. 2.19, сече-

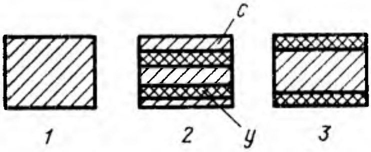


Рис. 2.19. Сечения (1—3) композитных колец:
с – стеклопластик; у — углепластик

ние 1) с малой относительной толщиной h/R
$D = Ebh^3/12$; $B = Ebh$; $K = Gbh$ и

$$w_0 = 0{,}0745\,\frac{PR^3}{D}\times$$
$$\times\left[1 + 0{,}44\,\frac{h^2}{R^2}\left(1 + \frac{E}{G}\right)\right].$$

Здесь первое слагаемое в круглых скобках учитывает деформацию нейтральной оси кольца, а второе — деформацию поперечного сдвига. Из полученного результата следует, что для тонких колец обе эти деформации являются несущественными. На рис. 2.20 приведены построенные с помощью формулы (2.48) для w_0 теоретические диаграммы деформирования кольца из стеклоткани (1) и комбинированных колец (2, 3) из стеклоткани, усиленных слоями углепластика, сечения которых показаны на рис. 2.19.

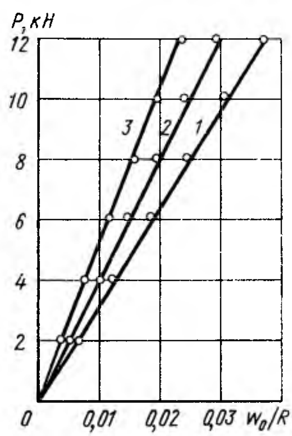


Рис. 2.20. Теоретические (————) и экспериментальные (○) диаграммы деформирования композитных колец

Точками отмечены результаты измерений.

Приведем формулы для напряжений. Основные тангенциальные напряжения выражаются через продольную силу и изгибающий момент следующим образом:

$$\sigma_\beta = \frac{E}{H}\left(\frac{N}{B} + \gamma\,\frac{M}{D}\right). \quad (2.49)$$

Разрушение композитных колец может происходить также в результате расслоения, вызванного поперечными касательными и нормальными напряжениями, которые (см. гл. 1) находятся из уравнений равновесия

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}(H^2 b\tau_{\beta\gamma}) - Hb\sigma'_\beta - bHF_\beta = 0;$$
$$\frac{\partial}{\partial\gamma}(Hb\sigma_\gamma) + b\tau'_{\beta\gamma} -$$
$$-\frac{b}{R}\sigma_\beta + bhF_\gamma = 0.$$

Интегрирование по γ с учетом граничных условий $\tau_{\beta\gamma}(\gamma = -e) = -p_\beta$, $\sigma_\gamma(\gamma = -e) = -p$ (см. рис. 2.16) и равенств (2.41), (2.49) приводит к следующему результату:

$$\tau_{\beta\gamma} = \frac{1}{bH^2}\left[Q\left(\frac{1}{BR}\int_{-e}^{\gamma} bE\,d\gamma -\right.\right.$$
$$\left.-\frac{1}{D}\int_{-e}^{\gamma} bE\gamma\,d\gamma\right) + \frac{t}{B}\int_{-e}^{\gamma} bE\,d\gamma +$$
$$+\frac{m}{D}\int_{-e}^{\gamma} bE\gamma\,d\gamma + \int_{-e}^{\gamma} bHF_\beta\,d\gamma -$$
$$\left.- b_1 H_e^2 p_\beta\right];$$

$$\sigma_\gamma = \frac{1}{bH}\left[\frac{N}{BR}\int_{-e}^{\gamma}\frac{E}{H}\,b\,d\gamma -\right.$$
$$-\frac{N}{R}\int_{-e}^{\gamma}\frac{d\gamma}{H^2}\left(\frac{1}{BR}\int_{-e}^{\gamma} bE\,d\gamma -\right.$$

$$-\frac{1}{D}\int_{-e}^{\gamma} bE\gamma\,d\gamma\Bigg) + \frac{M}{D}\int_{-e}^{\gamma}\frac{E}{H}\,b\gamma\,d\gamma +$$

$$+ n\int_{-e}^{\gamma}\frac{d\gamma}{H^2}\Bigg(\frac{1}{BR}\int_{-e}^{\gamma} bE\,d\gamma -$$

$$-\frac{1}{D}\int_{-e}^{\gamma} bE\gamma\,d\gamma\Bigg) - \frac{t'}{B}\int_{-e}^{\gamma}\frac{d\gamma}{H^2}\times$$

$$\times\int_{-e}^{\gamma} bE\,d\gamma - \frac{m'}{D}\int_{-e}^{\gamma}\frac{d\gamma}{H^2}\times$$

$$\times\int_{-e}^{\gamma} bE\gamma\,d\gamma - \int_{-e}^{\gamma}\frac{d\gamma}{H^2}\int_{-e}^{\gamma} bHF'_{\beta}\,d\gamma -$$

$$-\int_{-e}^{\gamma} bHF_{\gamma}\,d\gamma +$$

$$+ bH_e^2 p_\beta \int_{-e}^{\gamma}\frac{d\gamma}{H^2} - b_1 H_e p\Bigg].$$

Входящие сюда параметры H, H_e были приведены в обозначениях к формулам (2.42).

Список литературы

1. **Васильев В. В.** Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.

2. **Прочность,** устойчивость, колебания. Т. 1. М.: Машиностроение, 1968. 831 с.

3. **Тарнопольский Ю. М., Хитров В. В.** Стержни из композитов для ферменных конструкций//Механика композиционных материалов. 1986. № 2. С. 258—268.

4. **Krauss H., Schelling H.** Mehrachsig beanspruchte Drei—Richtungs—Wickelrohre aus Verstärkten Kunststoffen//Kunststoffe. 1969. Bd. 59. H. 12. S. 911—917.

5. **Snell M. B.** Strength and elastic responce of symmetric angle—ply cfrp// Composites. 1978. Vol. 9. N 4. P. 167—176.

Глава 3

БАЛЛОНЫ ДАВЛЕНИЯ ИЗ КОМПОЗИТОВ

Особенностью создания конструкций из композитных материалов является то, что их эффективность определяется наличием конструктивных схем и схем армирования, в которых композит работает только в направлении волокон. Именно в этом случае реализуются наибольшие удельные характеристики материала, причем даже небольшое отступление от оптимальных параметров конструкции может существенно снизить ее несущую способность.

Создание оболочечных конструкций из композитов связано с некоторыми принципами, обусловленными их специфическими свойствами, а именно:

1) процесс проектирования, заключающийся в определении конструктивной формы и геометрических параметров оболочки при заданных механических характеристиках материла, применительно к композитам не ожет быть строго реализован, так как свойства материала зависят от структурных параметров (углов армирования, соотношения слоев и т. д.) которые заранее неизвестны, следовательно, неотъемлемой частью процесса проектирования в рассматриваемом случае является конструирование самого материала;

2) собственно армированный материал образуется одновременно с изделием в процессе его изготовления, и его свойства в значительной степени зависят от параметров технологического процесса.

Метод непрерывной намотки жгутом или лентой композита, отличаясь большими возможностями, однако, не позволяет реализовать любые, в том числе и достаточно эффективные схемы армирования, т. е. имеет ограничения, которые должны быть учтены в процессе проектирования.

Таким образом, при создании тонкостенных конструкций из композитов

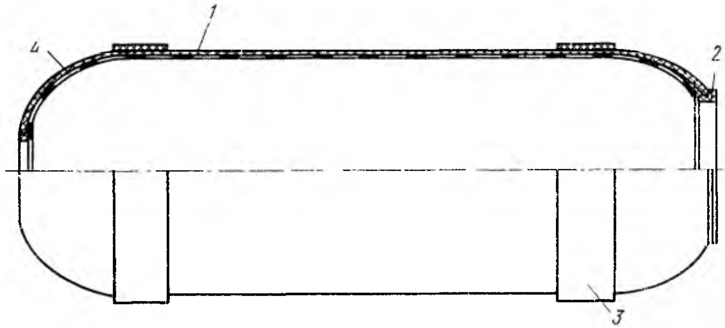


Рис. 3.1. Баллон давления из композитов, полученный непрерывной намоткой нитью:
1 — силовая оболочка; *2* — закладные фланцы; *3* — узлы крепления; *4* — герметизирующая оболочка

вопросы оптимального проектирования (оптимального армирования), конструирования и разработки технологического процесса не могут рассматриваться изолированно, что условно допускается при создании металлических изделий.

Композитные баллоны давления представляют собой конструкции, применительно к которым эффективность использования армированных материалов общепризнана. Широко применяют оценку эффективности баллонов по критерию [9], имеющему вид

$$\frac{pV}{G}=\frac{1}{k_{ф}}\left(\frac{\bar{\sigma}}{\rho}\right),$$

где p — давление в баллоне; V — его объем; G — масса силовой оболочки; $\bar{\sigma}/\rho$ — удельная прочность материала; $k_{ф}$ — коэффициент, определяющий рациональную структуру ($k_{ф}={}^{3}/_{2}$ — для металлических шаров-баллонов и $k_{ф}=3$ — для оптимальных баллонов из композитов).

Композитные баллоны давления используются в качестве емкостей для агрессивных жидкостей и газов, криогенных сред и глубокого вакуума. Конструктивно они выполняются, как правило, в виде цилиндрической оболочки с днищами специальной формы (рис. 3.1). Баллоны давления имеют следующие основные узлы: собственно силовую оболочку, узлы стыковки (для крепления баллона) и местных усилений (места патрубков, люков и т. д.).

При современных ценах на исходные материалы применение композитов чаще всего вызывает удорожание конструкций. Однако это компенсируется улучшенными техническими характеристиками (массой и параметрами, коррозионной стойкостью и т. д.) и удобствами эксплуатации. Кроме того, изготовление конструкций методом намотки производится, как правило, на автоматизированном оборудовании, что повышает производительность труда и снижает себестоимость изделий.

Технологический процесс изготовления оболочек можно разделить на две стадии: изготовление силовой оболочки и оформление стыковочных узлов и местных усилений.

Изготовление силовой оболочки из армированных материалов производится методом намотки пропитанных связующим нитей, жгутов или ленты на оправку соответствующей формы для баллонов и трубопроводов или в пазы удаляемой оправки, эластичных формообразующих элементов для сетчатых оболочек [8, 10].

Метод намотки, характеризующийся укладкой предварительно пропитанной связующим и обработанной ленты (препрега), носит название «сухой» намотки. Такой метод позволяет эффективнее контролировать степень армирования пластика и осуществлять при намотке и отверждении более равномерное распределение связующего по толщине стенки, что повышает качество изделия. Кроме того, более высокий коэффициент внутриструктурного трения позволяет реализовать схемы армирования в более широком диапазоне геодезического отклонения.

Однако «сухой» способ требует более сложного технологического оборудования. Поэтому чаще употребляется «мокрый» способ намотки. При этом армирующий материал проходит пропитку связующим непосредственно перед укладкой на оправку. Изготовление стыковочных узлов производится путем подмотки ткаными лентами. Неполярные отверстия получают посредством прорезания с подкреплением периметра ткаными салфетками.

3.1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Основной расчетной схемой при анализе напряженно-деформированного состояния конструкций типа баллонов давления является слоистая безмоментная оболочка вращения. Оболочка нагружена постоянным внутренним давлением p и осевыми силами Q_0, равномерно распределенными по краю полюсного отверстия радиуса r_0. Осевые силы могут изменяться от значения $Q_0 = 0$ для баллона с открытым полюсным отверстием до значения $Q_0 = pr_0/2$, соответствующего полюсному отверстию, закрытому жесткой силовой крышкой. В числе слоев могут быть изотропные типа внутренней герметизирующей оболочки и слои из композита, образованные нитями, уложенными под углами $+\varphi_i$ или $-\varphi_i$ к образующей. Учитывая взаимодействие между слоями, уравнения равновесия слоя при осесимметричном нагружении можно записать в виде [14]

$$\frac{d}{dr}(BN_{\alpha k}) - N_{\beta k}\frac{dB}{dr} + AB p_{\alpha k} = 0;$$

$$\frac{d}{dr}(BN_{\alpha\beta k}) + N_{\alpha\beta k}\frac{dB}{dr} + AB p_{\beta k} = 0; \quad (3.1)$$

$$\frac{N_{\alpha k}}{R_1} + \frac{N_{\beta k}}{R_2} = p_{\gamma k}.$$

Здесь $A = \sqrt{1 + (z')}$; $B = r$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, заданной уравнением $z = z(r)$; R_1, R_2 — главные радиусы кривизны, вычисляемые с помощью соотношений

$$1/R_1 = -z''[1 + (z')^2]^{-3/2};$$

$$1/R_2 = -[1 + (z')^2]^{-1/2} z'/r.$$

В общем случае для оболочки, состоящей из одного изотропного слоя и нескольких пар армированных симметричных слоев с углами укладки $\pm\varphi_i$, на каждый из них будут действовать нагрузки q_0, q_i и p_0, p_i (рис. 3.2). При этом удовлетворяются соотношения

$$p^{\pm}_{\alpha i} = q_i/2; \quad q_0 + \sum_1^n q_i = 0;$$

$$p^{\pm}_{\gamma i} = p_i/2; \quad p_0 + \sum_1^n p_i = p.$$

Знаки «+» или «—» соответствуют углам $+\varphi_i$ и $-\varphi_i$. Между армированными слоями действует кольцевая само-

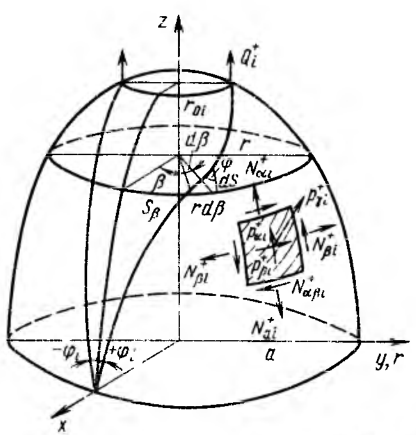


Рис. 3.2. Схема нагружения и положение ленты на поверхности i-го слоя

уравновешенная для каждой пары слоев нагрузка $\pm\tau_i$, т. е. $p^{\pm}_{\beta i} = \pm\tau_i$. Таким образом, для нитяных слоев система (3.1) приводится к виду

$$\frac{d}{dr}\left(rN^{\pm}_{\alpha i}\right) - N^{\pm}_{\beta i} + r\sqrt{1+(z')^2}\,\frac{q_i}{2} = 0;$$

$$\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\left(r^2 N^{\pm}_{\alpha\beta i}\right) \pm r\sqrt{1+(z')^2}\,\tau_i = 0; \qquad (3.2)$$

$$\frac{rz''}{1+(z')^2}\,N^{\pm}_{\alpha i} + z' N^{\pm}_{\beta i} - r\sqrt{1+(z')^2}\,\frac{p_i}{2} = 0.$$

Интегрировав первое и третье уравнения системы (3.2) и проведя некоторые преобразования, можно записать зависимости для определения безмоментных усилий с учетом осевых сил $Q_i/2$, действующих на отдельный слой по параллели с радиусом r_{0i}:

$$N^{\pm}_{\alpha i} = -\frac{\sqrt{1+(z')^2}}{2rz'}\left[Q_i r_{0i} + \int_{r_{0i}}^{r}(z'q_i + p_i)\,r\,dr\right];$$

$$N^{\pm}_{\beta i} = -\frac{\sqrt{1+(z')^2}}{2rz'} \times \left\{rp_i - \frac{z''}{z'\left[1+(z')^2\right]} \times \left[Q_i r_{0i} + \int_{r_{0i}}^{r}(z'q_i + p_i)\,r\,dr\right]\right\}. \qquad (3.3)$$

В пределах каждого слоя модель композита можно представить в виде системы гибких нитей. Тогда толщина слоя, уложенного под углом $+\varphi_i$ или $-\varphi_i$, может быть выражена через число нитей $n_i/2$, образующих отдельный слой, и приведенную площадь сечения нити f (с учетом связующего):

$$\frac{h}{2} = \frac{n_i f}{4\pi r\cos\varphi_i}. \qquad (3.4)$$

Равенство (3.4), в сущности, представляет собой технологическое ограничение, выражающее условие непрерывности намотки — постоянство числа нитей, проходящих через любое поперечное сечение оболочки.

В соответствии с механикой нитяных систем связь безмоментных усилий с напряжениями в ленте выражается через напряжения в ленте с помощью равенств

$$N^{\pm}_{\alpha i} = \sigma_{1i}\,\frac{h_i}{2}\cos^2\varphi_i = \frac{\sigma_{1i}n_i f}{4\pi r}\cos\varphi_i;$$

$$N^{\pm}_{\beta i} = \sigma_{1i}\,\frac{h_i}{2}\sin^2\varphi_i = \frac{\sigma_{1i}n_i f}{4\pi r}\sin\varphi_i\,\mathrm{tg}\,\varphi_i; \qquad (3.5)$$

$$N^{\pm}_{\alpha\beta i} = \pm\sigma_{1i}\,\frac{h_i}{2}\sin\varphi_i\cos\varphi_i = \pm\frac{\sigma_{1i}n_i f}{4\pi r}\sin\varphi_i.$$

Здесь σ_{1i} — напряжения в нитях i-го слоя (в силу симметрии намотки одинаковые для слоев $\pm\varphi_i$). Непосредственно из формул (3.3) и первых двух равенств (3.5) вытекает условие, что безмоментные усилия $N_{\alpha i}$ и $N_{\beta i}$ воспринимаются одним семейством нитей только в том случае, если между формой оболочки $z\,(r)$, траекторией армирования и нагрузками Q_i, $p_i\,(r)$, $q_i\,(r)$ существует зависимость

$$\frac{z''}{z'\left[1+(z')^2\right]} = \frac{p_i r}{Q_i r_{0i} + \int_{r_{0i}}^{r}(z'q_i + p_i)\,r\,dr} - \frac{1}{r}\,\mathrm{tg}^2\,\varphi_i. \qquad (3.6)$$

Соотношение (3.6) может быть названо условием существования оболочки вращения, образованной системой гибких нитей. При невыполнении этого условия оболочка превращается в механизм, т. е. не воспринимает внешней нагрузки в рамках гипотез нитяной системы.

Если связь формы образующей оболочки, схемы армирования и условий нагружения соответствует равенству (3.6), то напряжения в нитях определяются однозначно с помощью формулы

$$\sigma_{1i} = -\frac{2\pi\sqrt{1+(z')^2}}{n_i f z' \cos\varphi_i}\left[Q_i r_{0i} + \int\limits_{r_{0i}}^{r}(z'q_i + p_i)\, r\, dr\right]. \qquad (3.7)$$

При этом усилия взаимодействия внутри пары слоев вычисляются непосредственно из второго уравнения системы (3.2) с учетом равенств (3.5) и (3.7):

$$\tau_i = \frac{n_i f}{4\pi r^2\sqrt{1+(z')^2}}\,\frac{d}{dr}(\sigma_{1i} r \sin\varphi). \qquad (3.8)$$

Второе условие технологической реализуемости конструкции сводится к условию равновесия ленты на оправке в процессе намотки (условию несоскальзывания нити), которое определяется неравенством

$$\max|\mathrm{tg}\ \theta_i| \leqslant k_{\text{т}}. \qquad (3.9)$$

Здесь $k_{\text{т}}$ — располагаемый коэффициент трения нити на поверхности оправки; θ_i — угол геодезического отклонения нити i-го слоя (угол между нормалью траектории и нормалью поверхности оправки), тангенс которого выражается формулой

$$\mathrm{tg}\ \theta_i = \frac{R_{ni}}{R_{gi}},$$

где $\dfrac{1}{R_{ni}} = \dfrac{\cos^2\varphi_i}{R_1} + \dfrac{\sin^2\varphi_i}{R_2}$; $\dfrac{1}{R_{gi}} =$

$$= \frac{\cos\varphi_i}{\sqrt{1+(z')^2}}\,\frac{d\varphi_i}{dr} + \frac{\sin\varphi_i}{r\sqrt{1+(z')^2}}$$

— соответственно нормальная и геодезическая кривизны кривой на поверхности. С учетом выражений для главных радиусов кривизны R_1 и R_2 неравенство (3.9) представляется в форме

$$\mathrm{tg}\ \theta_i = \frac{\dfrac{d}{dr}(r\sin\varphi_i)}{\dfrac{rz''\cos^2\varphi_i}{1+(z')^2} + z'\sin^2\varphi_i}. \qquad (3.10)$$

Выражения (3.6)—(3.10) являются общими соотношениями, позволяющими проектировать широкий класс баллонов давления при различных схемах армирования.

В случае оптимального армирования композитной силовой оболочки баллона давления без несущего герметизирующего слоя по критерию минимума массы целевая функция определяется равенством

$$G = \sum_{i=1}^{n} \rho_i n_i f S_{1i}.$$

Здесь S_{1i} — длина нити i-го семейства; ρ_i — плотность материала.

Ограничениями в задаче проектирования являются условия существования слоя оболочки как нитяной системы в форме (3.6), которые дополняются условиями прочности:

нити i-го слоя

$$\left|\frac{2\pi\sqrt{1+(z')^2}}{n_i f z'\cos\varphi_i}\left[Q_i r_{0i} + \int\limits_{r_{0i}}^{r}(z'q_i + p_i)\, r\, dr\right]\right| \leqslant \bar{\sigma}_{1i};$$

связующего при межслоевом сдвиге

$$\left|\frac{n_i f}{2\pi r\sqrt{1+(z')^2}}\,\frac{d}{dr}(\sigma_{1i} r\sin\varphi_i)\right| \leqslant \bar{\tau}_{12i}; \quad \frac{q_i}{2} \leqslant \bar{\tau}_{12i},$$

(где $\bar{\sigma}_{1i}$, $\bar{\tau}_{12i}$ — прочность материала i-го слоя при нагружении в направлении армирования и при сдвиге), а также условиями технологической реализуемости:

непрерывности армирования

$$n_i f = \text{const};$$

равновесия нити при намотке

$$\left| \frac{\frac{d}{dr}(r\sin\varphi_i)}{\frac{rz''\cos^2\varphi_i}{1+(z')^2} + z'\sin^2\varphi_i} \right| \leqslant k_т.$$

Пространство проектирования определяется набором параметров n_i, соответствующих числу нитей каждого слоя, и функций $\varphi_i(r)$, характеризующих его закон армирования, т. е. в общем случае является функциональным. Тогда в соответствии с теорией оптимального управления рациональная траектория намотки каждого слоя синтезируется из участков граничных и внутренних экстремалей, определяемых целевой функцией и наложенными ограничениями. Так, граничная экстремаль, соответствующая условию равнопрочности i-го слоя, определяется равенством

$$\frac{d}{dr}(r\sin\varphi_i) = \frac{2\pi r\sqrt{1+(z')^2}}{\bar{\sigma}_{1i} n_i f} q_i \operatorname{ctg}\varphi_i. \qquad (3.11)$$

При этом условия существования оболочки, прочности связующего и технологическое ограничение по несоскальзыванию нити представляются зависимостями

$$\frac{\bar{\sigma}_{1i} n_i f}{2\pi}\cos\varphi_i \frac{z'}{\sqrt{1+(z')^2}} + Q_i r_{0i} + \int_{r_{0i}}^{r} (z' q_i + p_i)\, r\, dr = 0;$$

$$\left| \tau_i = \frac{q_i \operatorname{ctg}\varphi_i}{2} \right| \leqslant \bar{\tau}_{12i}; \qquad (3.12)$$

$$\left| \operatorname{tg}\theta_i = -\frac{q_i}{p_i \sin\varphi_i} \right| \leqslant k_т.$$

Для силовой оболочки баллона давления, состоящей из n слоев, когда

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p; \quad \sum_{i=1}^{n} Q_i = Q; \quad \sum_{i=1}^{n} q_i = 0,$$

в предположении, что $p = \mathrm{const}$, а материал всех слоев одинаков, из равенств (3.12) следует условие

$$\frac{\bar{\sigma}_1}{2\pi}\frac{z'}{\sqrt{1+(z')^2}} \sum_{i=1}^{n} n_i f \cos\varphi_i + Q r_0 + \frac{p(r^2 - r_0^2)}{2} = 0.$$

При этом получается класс проектов, отличающихся друг от друга законом распределения касательных усилий между слоями $q_i(r)$. Так как возможность варьирования величиной $q_i(r)$ ограничена низкой прочностью материалов при межслоевом сдвиге, практическую реализацию получил только случай $q_i = 0$ [5, 4, 7, 12, 13]. Для такого случая закон армирования определяется намоткой по геодезическим линиям поверхности, определяемым известной теорией Клеро:

$$r\sin\varphi_i = \mathrm{const}. \qquad (3.13)$$

При геодезическом армировании, как следует из условий (3.12), форма контура баллона определяется первым равенством, касательные усилия внутри пары слоев отсутствуют и нить находится в равновесии на оправке при сколь угодно малом коэффициенте трения при намотке, т. е. вся синтезированная оптимальная траектория состоит из одного граничного участка, соответствующего прочности нитей. Это является одним из следствий результата, что при проектировании оболочек минимальной массы условие равнопрочности таких конструкций с использованием нитяной модели соответствует достаточному условию оптимальности, так как при этом выполняются все условия теоремы Леви о статически определимых системах минимальной массы.

3.2. ОПТИМИЗАЦИЯ ФОРМЫ И СТРУКТУРЫ КОМПОЗИТНЫХ БАЛЛОНОВ ДАВЛЕНИЯ

Одним из наиболее распространенных типов конструкций баллонов является оболочка вращения, нагруженная постоянным внутренним давлением p

и осевыми усилиями Q_0 ($0 \leqslant Q_0 \leqslant$ $\leqslant pr_0/2$), равномерно распределенными по краю полюсного отверстия радиуса r_0. Кроме того, в окрестности полюсного отверстия находится металлический фланец радиуса $r = b$ (рис. 3.3). Оболочка образована намоткой одного семейства нитей, уложенных по геодезическим линиям поверхности. При этом в окрестности фланца нить касается полюсного отверстия ($r = r_0$, $\varphi = \pi/2$). Форма образующей поверхности баллона состоит из двух участков. На первом из них, расположенном вне фланца, нагрузка $p' = p$, $Q' = Q_0$, на втором — нагружение части баллона, примыкающей к фланцу, определяется реакцией со стороны фланца. При дополнительных предположениях, что осевые усилия Q_0 приложены к фланцу, а контактное давление между оболочкой и фланцем распределено равномерно по радиусу, соответствующие нагрузки определяются зависимостями $p'' =$ $= p + 2Q_0 r_0/(b^2 - r_0^2)$, $Q'' = 0$.

Тогда уравнение для определения формы меридиана (3.6) с учетом условий нагружения и закона армирования (3.13) приводится к виду на первом участке

$$\frac{z_1''}{z_1'[1 + (z')^2]} = \frac{2r}{r^2 - t_0^2} - \frac{r_0^2}{r(r^2 - r_0^2)}, \tag{3.14}$$

где $t_0^2 = r_0^2 - \dfrac{2Q_0}{p} r_0$.

Уравнение (3.14) допускает разделение переменных; его первый интеграл имеет вид

$$z_1' = -\frac{r(r^2 - t_0^2)\sqrt{a^2 - r_0^2}}{\sqrt{a^2 (r^2 - r_0^2)(a^2 - t_0^2)^2 - r^2 (a^2 - r_0^2)(r^2 - t_0^2)^2}}. \tag{3.15}$$

Постоянная интегрирования в равенстве (3.15) определена из условия параллельности касательной к образующей оси вращения $0z$ при $r = a$.

При численном интегрировании равенства (3.15) следует учесть, что соответствующий интеграл является несобственным в окрестности $r = a$.

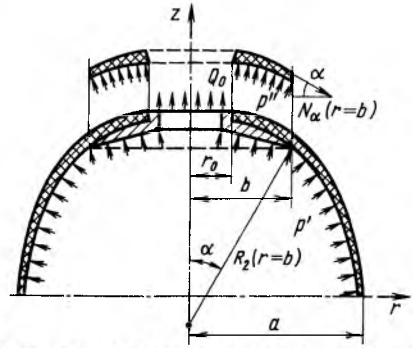


Рис. 3.3. Характер нагружения оболочки

Его оценка может быть записана в форме

$$z_1(a - \varepsilon) = \sqrt{\frac{2(a^2 - t_0^2)(a^2 - r_0^2)}{2a^4 - 3a^2 r_0^2 + r_0^2 t_0^2}}\sqrt{\varepsilon}.$$

Уравнение (3.15) допускает решение в эллиптических интегралах

$$\bar{z}_1 = \frac{\bar{n}_2 - \bar{t}_0^2}{\sqrt{1 - \bar{n}_2}} F(k, \eta) + \sqrt{1 - \bar{n}_2}\, E(k, \eta), \tag{3.16}$$

где $F(k, \eta), E(k, \eta)$ — эллиптические интегралы I и II рода; $k = \sqrt{\dfrac{1 - \bar{n}_1}{1 - \bar{n}_2}}$ — модуль эллиптического интеграла;

$$\eta = \arcsin\sqrt{\frac{1 - \bar{r}^2}{1 - \bar{n}_1}};$$

$$\bar{n}_{1,2} = \frac{1 - 2\bar{t}_0^2}{2}\left[-1 \pm \sqrt{\frac{1}{1 - \bar{r}_0^2}\left(1 + \bar{r}_0^2\frac{3 - 4\bar{t}_0^2}{1 - 2\bar{t}_0^2}\right)}\right];$$

$\bar{r} = r/a$; $\bar{z} = z_1/a$; $\bar{r}_0 = r_0/a$; $\bar{t}_0 = t_0/a$.

При использовании формулы (3.16) образующая оболочка может быть построена до радиуса $r_1 = a\sqrt{\bar{n}_1}$, который определяет минимальное расстояние образующей до оси вращения и только для оболочки со свободным отверстием ($Q = 0$) совпадает с радиусом r_0. Это и вызывает необходимость достраивать меридиан на участке фланца (см. рис. 3.10, штриховая линия). Кроме того, можно рекомендовать выбирать размер фланца из условия равенства радиусу точки перегиба основной образующей. Тогда из условия $z_1''(b) = 0$ следует

$$b \geqslant r_0 \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{8}{9} \frac{t_0^2}{r_0^2}}},$$

Уравнение для построения образующей на участке $r_0 \leqslant r \leqslant b$ получается непосредственно из (3.14) при $t_0 = r_0$, его первый интеграл

$$z_2' = -\frac{r\sqrt{r^2 - r_0^2}\,(b^2 - t_0^2)\sqrt{a^2 - r_0^2}}{\sqrt{a^2(b^2 - r_0^2)(a^2 - t_0^2)^2 - r^2(r^2 - r_0^2)(b^2 - t_0^2)(a^2 - r_0^2)^2}}. \quad (3.17)$$

При этом постоянная интегрирования определена из условия сопряжения участков образующей при $r = b$, т. е. $z_1'(b) = z_2'(b)$. Уравнение (3.17) также допускает решение в эллиптических интегралах

$$\bar{r}_2 = -\frac{\bar{m}_1}{\sqrt{\bar{m}_1 + \bar{m}_2}} F(l, \lambda) + \sqrt{\bar{m}_1 + \bar{m}_2}\, E(l, \lambda) + C'. \quad (3.18)$$

Здесь модуль эллиптического интеграла

$$l = \sqrt{\bar{m}_2/(\bar{m}_1 + \bar{m}_2)};$$

$$\lambda = \arccos \sqrt{\frac{\bar{r}^2 - \bar{r}_0^2}{\bar{m}_2}};$$

$$\bar{m}_{1,2} = \sqrt{\frac{\bar{r}_0^4}{4} + \frac{(b^2 - \bar{r}_0^2)^2 (1 - \bar{t}_0^2)^2}{(b^2 - t_0^2)^2 (1 - \bar{r}_0^2)^2}} \pm \frac{\bar{r}^2}{2};$$

$$\bar{b} = b/a; \quad \bar{z}_2 = z_2/a.$$

Постоянная C определяется из условия сопряжения двух частей оболочки при $r = b$ $z_1(b) = z_2(b)$:

$$C = \frac{\bar{n}_2 - \bar{t}_0^2}{\sqrt{1 - \bar{n}_2}} F(k, \eta_1) + \frac{\bar{m}_1}{\sqrt{\bar{m}_1 + \bar{m}_2}} F(l, \lambda_1) + \sqrt{1 - \bar{n}_2} \times E(k, \eta_1) - \sqrt{\bar{m}_1 + \bar{m}_2}\, E(l, \lambda_1),$$

где

$$\eta_1 = \arcsin \sqrt{\frac{1 - \bar{b}^2}{1 - \bar{n}_1}};$$

$$\lambda_1 = \arccos \sqrt{\frac{\bar{b}^2 - \bar{r}_0^2}{\bar{m}_2}}.$$

Зависимости (3.16), (3.18) представляют семейство образующих оболочек вращения, зависящих только от двух безразмерных параметров $\bar{r}_0 = r_0/a$ и Q_0/pr_0. При этом уравнение (3.16) справедливо при $\bar{b} \leqslant \bar{r} \leqslant 1$, т. е. $0 \leqslant \eta_{,} \leqslant \eta_1$, а уравнение (3.18) — при $\bar{r}_0 \leqslant \bar{r} \leqslant \bar{b}$, т. е. $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \pi/2$.

На рис. 3.4 представлены графики, определяющие оптимальные формы днищ при различных радиусах полюсного отверстия и значениях параметра Q_0/pr_0. На рис. 3.5 показана зависимость максимальной высоты днища z_0, необходимой для проектирования баллона, от параметров $\bar{r}_0$ и Q_0/pr_0. Проектная толщина оболочки на экваторе

$$h_a = \frac{p(a^2 - r_0^2) + 2Qr_0}{2a\bar{\sigma}_1 \cos^2 \varphi_a}.$$

Внутренний объем оболочки находится численным интегрированием выражения

$$V = \pi \int\limits_{z(r_0)}^{z_1(r_0)} r^2\, dz = \pi \left(\int\limits_{r_0}^{b} r^2 z_2'\, dr + \int\limits_{b}^{a} r^2 z_1'\, dr \right); \quad (3.19)$$

результаты расчета показаны на рис. 3.6. Масса силовой оболочки без учета фланца

$$G = \rho nf S_1, \quad (3.20)$$

где $nf = \dfrac{\pi}{\bar{\sigma}_1 \cos \varphi_a} [p(a^2 - r_0^2) + 2Q_0 r_0]$ — мощность армирования;

$$S_1 = \int\limits_{S(r_0)}^{S(a)} \frac{dS}{\cos\varphi} = \int\limits_{r_0}^{b} \sqrt{1 + (z_2')^2} \times \frac{dr}{\cos\varphi} + \int\limits_{b}^{a} \sqrt{1 + (z_1')^2} \frac{dr}{\cos\varphi}$$ — дли-

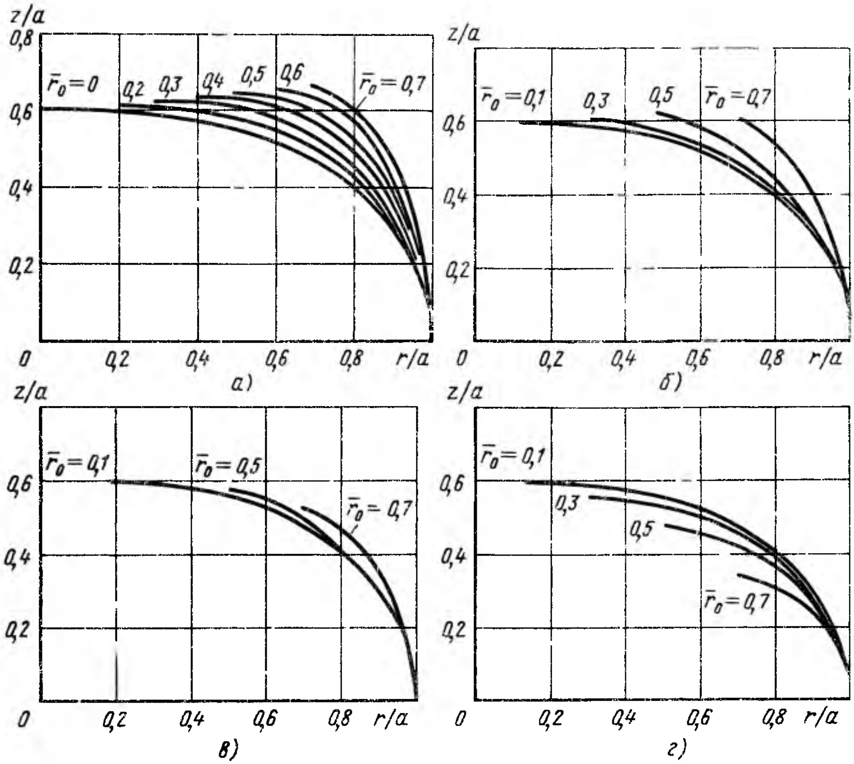


Рис. 3.4. Образующие днища с различными радиусами полюсных отверстий:

а — при $Q_0/pr_0 = 0{,}5$ (закрытое полюсное отверстие); *б* — при $Q_0/pr_0 = 0{,}4$; *в* — при $Q_0/pr_0 = 0{,}3$; *г* — при $Q_0/pr_0 = 0$ (открытое полюсное отверстие)

на нити от экватора до полюсного отверстия.

Соответствующие графики показаны на рис 3.7. Формула (3.20) может быть преобразована к виду

$$G = k_ф \frac{\rho p V}{\bar\sigma_1}\left(1 - \bar r_0^2\right),$$

где $k_ф = \dfrac{\pi a^3 S_1}{V\sqrt{a^2 - r_0^2}}$.

Безразмерный парамегр $k_ф$ (коэффициент формы) представлен на рис. 3.8. Из графика следует, что только при малых радиусах полюсного отверстия $k_ф = 3$. Для больших полюсных отверстий и разгруженных днищ ($Q_0/pr_0 \to 0$) его величина может существенно отличаться от значения полученного с помощью энергетического подхода.

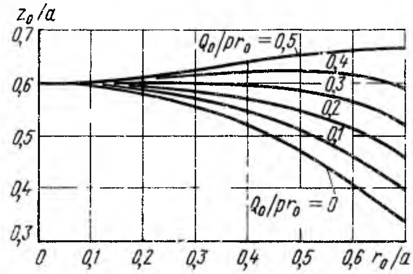


Рис. 3.5. Зависимость высоты днища z_0/a от радиуса полюсного отверстия r_0/a и параметра нагрузки Q_0/pr_0

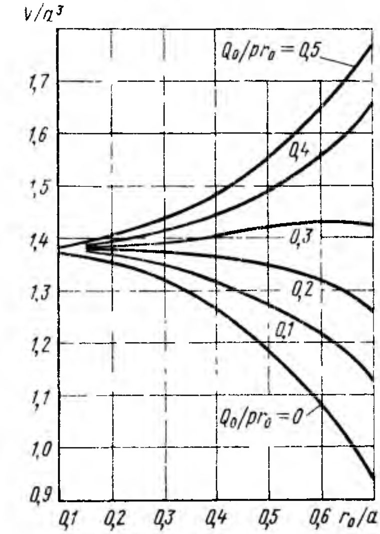


Рис. 3.6. Зависимость внутреннего объема днища V/a^3, образованного геодезической намоткой, от радиуса полюсного отверстия r_0/a и параметра нагрузки Q_0/pr_0

Одним из способов изготовления баллонов давления, связанным с использованием высокопроизводительного оборудования для намотки — станков планетарного типа, является плоскостная намотка [11], основное достоинство которой — технологичность и простота исполнения. При такой намотке спиральный виток лежит в одной плоскости, составляющей угол γ с осью вращения (рис. 3.9). Непосредственно из очевидных соотношений геометрических

$$x = r\cos\beta; \quad y = r\sin\beta; \quad z = y\operatorname{ctg}\gamma$$

и дифференциальных

$$\frac{r\,d\beta}{dS} = \frac{r}{\sqrt{1+(z')^2}}; \qquad \frac{d\beta}{dr} = \operatorname{tg}\varphi$$

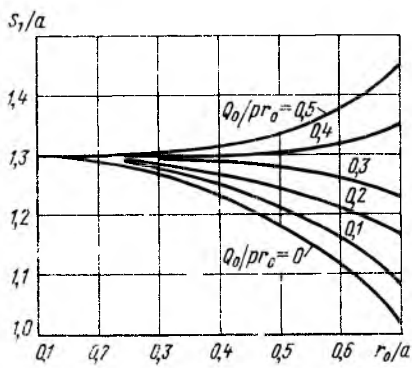


Рис. 3.7. Зависимость длины нити S_1/a, образующей днище, от радиуса полюсного отверстия r_0/a и параметра нагрузки Q_0/pr_0

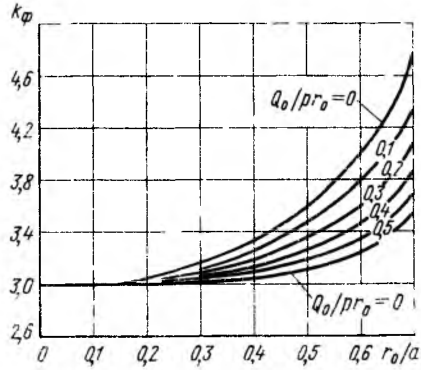


Рис. 3.8. Зависимость коэффициента формы днища $k_ф$, образованного геодезической намоткой, от радиуса полюсного отверстия r_0/a и параметра нагрузки Q_0/pr_0

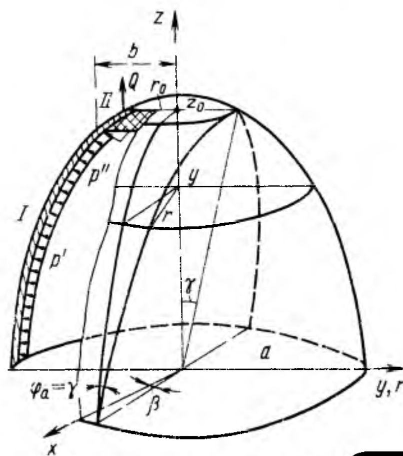


Рис. 3.9. Схема нагружения баллона и положение нити при плоскостной намотке

следует зависимость для определения закона изменения угла армирования

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{rz' - z}{\sqrt{1 + (z')^2}\sqrt{r^2 \operatorname{ctg}^2\gamma - z^2}}. \tag{3.21}$$

Условие существования равновесной формы меридиана оболочки, образованной намоткой одного семейства нитей (3.6), для баллона давления имеет вид

$$\frac{z''}{z'\,[1 + (z')^2]} = \frac{2r}{r^2 - t_0^2} - \frac{1}{r}\operatorname{tg}^2\varphi, \tag{3.22}$$

где на участке фланца следует принять $z = z_2(r)$, $t_{02}^2 = 0$, вне его — $z = z_1(r)$, $t_{01}^2 = r_0^2$. Окончательно, как следует из равенств (3.21), (3.22), равновесная форма меридиана определяется интегрированием уравнения

$$\frac{z''}{z'\,[1 + (z')^2]} = \frac{2r}{r^2 - t_0^2} - \frac{1}{r}\,\frac{(rz' - z)^2}{(r^2 \operatorname{ctg}^2\gamma - z^2)\,[1 + (z')^2]}. \tag{3.23}$$

Форма образующей строится численным интегрированием уравнения (3.23) при начальных условиях на участке I: $r = a$, $1/z_1' = 0$; $z_1 = 0$; $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\gamma$; на участке II: $r = b$; $z_2' = z_1'$; $z_2 = z_1$.

При выполнении процедуры численного интегрирования следует учесть, что интеграл для построения $z(r)$ является несобственным при $r = a$. Кроме того, определение тангенса угла наклона витка при заданном радиусе полюсного отверстия r_0 требует применения метода последовательных приближений для решения уровнения $\operatorname{tg}\gamma = z_0(\gamma)/r_0$, где $z_0 = z(r_0)$.

Проектная толщина оболочки на экваторе определяется равенством

$$h_a = \frac{pa}{2\bar{\sigma}_1 \cos^2\gamma}.$$

Условие технологической реализуемости проекта контролируется условием несоскальзывания нити (3.9),

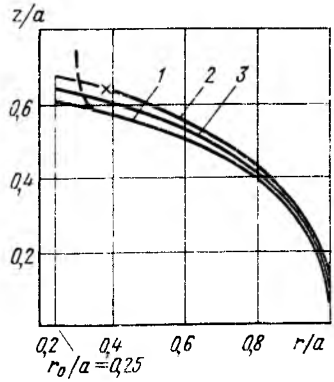


Рис. 3.10. Форма образующей баллона давления:

1 — плоскостная намотка $\operatorname{tg}\gamma = 0{,}4$, $r_0/a = 0{,}25$; *2* — намотка по ЛПО $\operatorname{tg}\theta = 0{,}2$, $\sin\varphi_a = 0{,}4$, $r_0/a = 0{,}25$ (× — точка переключения на геодезическую намотку); *3* — геодезическая намотка $r_0/a = 0{,}25$

которое для плоскостной намотки принимает вид

$$\operatorname{tg}\theta = \sqrt{\left|\frac{[1 + (z')^2]\,(r^2 + z^2) - (rz' - z)^2}{[1 + (z')^2]\,(r^2 \operatorname{ctg}^2\gamma - z^2) + (rz' - z)^2}\right|} \leqslant k_{\text{т}}.$$

Напряжения в ленте армированного материала в соответствии с равенством (3.7) определяются зависимостью

$$\sigma_1 = -\frac{\pi p r^2}{nf}\,\frac{\sqrt{1 + (z')^2}}{z' \cos\varphi}\,(1 - t_0^2/r^2).$$

Результаты расчета формы образующей для баллона давления с параметрами $r_0/a = 0{,}25$, $\operatorname{tg}\gamma = 0{,}4$ представлены на рис. 3.10. На рис. 3.11 показаны значения тангенса угла геодезического отклонения для различных точек меридиана, а на рис. 3.12 — изменение напряжений в ленте. На этих же рисунках показаны значения соответствующих параметров для равнонапряженной оболочки, образованной геодезической намоткой. Имеющиеся различия в большой степени зависят от радиуса полюсного отверстия; для $r_0/a < 0{,}1$ они становятся несущественн-

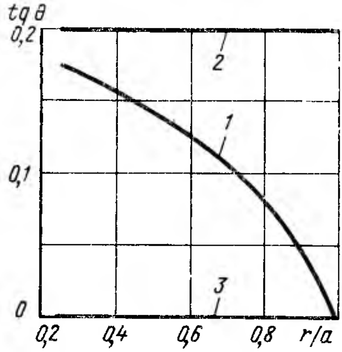


Рис. 3.11. Изменение тангенса угла геодезического отклонения:
1 — плоскостная намотка; *2* — намотка по ЛПО; *3* — геодезическая намотка

ными. Поэтому при малых относительных радиусах полюсного отверстия баллон давления, образованный плоскостной намоткой, сохраняя свои технологические преимущества, не уступает по эффективности равнопрочной конструкции.

Другим возможным вариантом армирования баллона давления является намотка по линиям постоянного отклонения от геодезической траектории (ЛПО) [6]. Ее целесообразно использовать, когда угол укладки ленты на экваторе не может быть выбран произвольно, т. е. он определяется не величиной радиуса полюсного отверстия, а задается с учетом других конструктивных соображений.

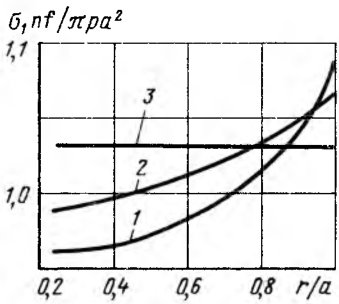


Рис. 3.12. Изменение напряжений в нитях:
1 — плоскостная намотка; *2* — намотка на ЛПО; *3* — геодезическая намотка

Такая намотка позволяет осуществить предельно реализуемые в технологическом отношении траектории армирования, так как, исключая соскальзывание с оправки, допускает при заданном коэффициенте трения максимальное отклонение от положения нити, соответствующего геодезической намотке. Уравнение ЛПО в соответствии с (3.10) имеет вид

$$\operatorname{tg}\theta = \pm\frac{1}{z'}\times$$

$$\times\frac{r^2\zeta'}{\dfrac{rz''}{z'\,[1+(z')^2]}(r^2-\zeta^2)+\zeta^2}. \tag{3.24}$$

Здесь введена функция Клеро $\zeta = r\sin\varphi$, которая при условии $\zeta = \text{const}$ выражает известное уравнение геодезической линии на поверхности вращения. С другой стороны, равновесная форма баллона давления должна удовлетворять уравнению (3.6), которое может быть записано в форме

$$\frac{z''}{z'\,[1+(z')^2]} = \frac{2r}{r^2-t_0^2} -$$

$$-\frac{1}{r}\,\frac{\zeta^2}{r^2-\zeta^2}. \tag{3.25}$$

Если ввести дуговую координату на экваторе S_β и длину меридиана S с помощью зависимостей (см. рис. 3.3)

$$S_\beta = a\beta = a\int_a^r \frac{\zeta}{r}\sqrt{\frac{1+(z')^2}{r^2-\zeta^2}}\,dr;$$

$$S = \int_a^r \sqrt{1+(z')^2}\,dr,$$

то систему (3.24)—(3.25) для определения формы контура и координат намотки можно свести к разрешающей системе уравнений, удобных для численной реализации:

$$\frac{d^2z}{dr^2} = \frac{2rz'\,[1+(z')^2]}{r^2-t_0^2} -$$

$$-\frac{z'\zeta^2\,[1+(z')^2]}{r\,(r^2-\zeta^2)};$$

$$\frac{d\zeta}{dr} = \pm \frac{2z'(r^2 - \zeta^2)\operatorname{tg}\theta}{r^2 - t_0^2};$$
$$\frac{dS_\beta}{dr} = \frac{a\zeta}{r}\sqrt{\frac{1 + (z')^2}{r^2 - \zeta^2}}; \qquad (3.26)$$
$$\frac{dS}{dr} = \sqrt{1 + (z')^2}.$$

При этом граничные условия задачи Коши имеют вид $r = 0$; $z = 0$; $1/z' = 0$; $\zeta = \zeta_a$; $S_\beta = 0$; $S = 0$. Как и в случае плоскостной намотки, интеграл для определения формы контура является несобственным, сама образующая состоит из двух участков, для первого из которых $z = z_1(r)$, $t_{01} = r_0$, для второго — $z = z_2(r)$, $t_{02} = 0$. В зависимости от заданного угла намотки на экваторе $\varphi = \varphi_a$ необходимо выбрать знак отклонения от геодезической линии: при $\varphi_a > \arcsin r_0/a$ $\operatorname{tg}\theta > 0$; при $\varphi_a < \arcsin r_0/a$ $\operatorname{tg}\theta < 0$. Кроме того, для образования полюсного отверстия заданного радиуса $r = r_0$ появляется необходимость перехода на геодезическую намотку. Точка переключения экстремали определяется равенством $\zeta = \zeta_0 = r_0$.

На рис. 3.10 показана форма образующей баллона давления, а на рис. 3.12 дан закон изменения напряжений в нитях для оболочки с параметрами: $r_0/a = 0{,}25$; $\varphi_a = 23{,}5°$; $\zeta_a/a = 0{,}4$. Проектная толщина оболочки на экваторе для этого случая ($\varphi_a > \arcsin r_0/a$)

$$h_a = \frac{pa}{2\bar{\sigma}_1 \cos^2 \varphi_a}.$$

Особенностью конструкций, образованных намоткой одного семейства нитей, является существенное увеличение толщины оболочки в районе фланца при возрастании внутреннего давления. При этом исходные соотношения теории безмоментных оболочек перестают быть справедливыми. Кроме того, в некоторых случаях появляется необходимость варьирования формой меридиана с целью приближения ее к заданной. Такая задача решается проектированием равнонапряженной оболочки вращения, состоящей из нескольких семейств нитей.

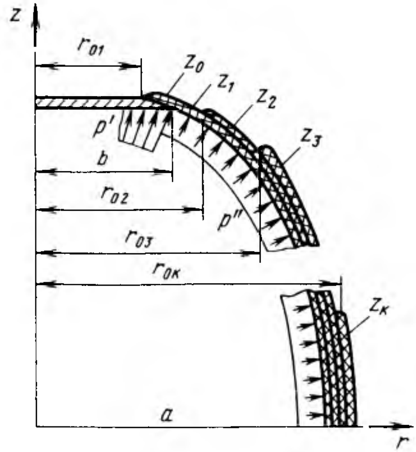


Рис. 3.13. Схема образования многослойной оболочки вращения

При этом каждое семейство определяется углом намотки φ_{ai} и толщиной h_{ai} на экваторе и заканчивается на радиусе $r_{0i} = a \sin \varphi_{ai}$. Последнее равенство является следствием требования намотки по геодезическим линиям поверхности, что обеспечивает равнонапряженность системы. При возрастании угла φ_{ai} от семейства к семейству образуется система слоев (рис. 3.13). Такая намотка, получившая название многозонной (элемент оболочки при $r_{0,i-1} \leqslant r \leqslant r_{0,i}$ иногда называют зоной), не позволяет получить оболочку заданной формы, однако обладает бóльшими возможностями, чем рассмотренная выше схема армирования одним семейством нитей.

Одним из вариантов конструкции баллона давления с полюсным отверстием, закрытым жесткой силовой крышкой, является оболочка вращения, образованная намоткой нескольких семейств нитей, первое из которых доходит до горловины баллона, а все остальные располагаются вне фланца. Тогда оболочка на участке первого слоя состоит из двух частей; для первой давление определяется реакцией со стороны фланца, для второй оно соответствует внутреннему давлению баллона. Согласно равенству

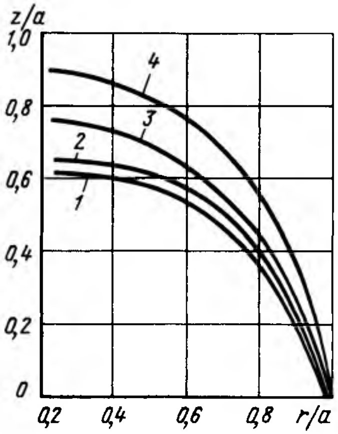


Рис. 3.14. Изменение контура оболочки вращения, имеющей многослойную схему армирования, в зависимости от числа слоев k, образованных углами
$1 - k = 1$, $\varphi_{a1} = 17°$; $2 - k = 2$, $\varphi_{a1} = 17°$, $\varphi_{a2} = 30°$; $3 - k = 3$, $\varphi_{a1} = 17°$, $\varphi_{a2} = 30°$, $\varphi_{a3} = 45°$; $4 - k = 5$, $\varphi_{a1} = 17°$, $\varphi_{a2} = 30°$, $\varphi_{a4} = 60°$, $\varphi_{a5} = 75°$

(3.14) для первой части при $Q_0 = 0$, $p'' = pb^2/(b^2 - r_{01}^2)$, $r_{0j} = r_{01}$

$$z_0' = -\frac{r\sqrt{r^2 - r_{01}^2}}{\sqrt{C_0^2 - r^2(r^2 - r_{01}^2)}},$$

где $C_0 = \dfrac{\bar{\sigma}_1 n_1 f}{\pi p}\,\dfrac{b^2 - r_{01}^2}{b^2}$; $r\sin\varphi_0 = r_{01}$.

Аналогично для второй части

$$z_1' = \frac{r^3}{\sqrt{C_1^2 - r^2(r^2 - r_{01}^2)}},$$

где

$$C_1^2 = \frac{\bar{\sigma}_1 n_1 f}{\pi p}; \quad r\sin\varphi_1 = r_{01}.$$

Для произвольного участка оболочки, состоящего из j слоев и содержащегося между параллелями $r = r_{0j}$ и $r = r_{0,\,j+1}$, форма меридиана определяется интегрированием равенства

$$z_j' = \frac{r^3}{\sqrt{\sum_{i=1}^{j} C_i\sqrt{r_i^2 - r_{0i}^2} - r^6}},$$

где $C_i = \dfrac{\bar{\sigma}_1 n_i f}{\pi p}$; $r\sin\varphi_i = r_{0i}$.

При этом условия сопряжения всех участков выполняются тождественно. Ввиду того, что рассматриваемые оболочки являются днищами баллонов давления (в том числе и при нулевой длине цилиндрической части), необходимо потребовать, чтобы на экваторе касательная к образующей была параллельна оси оболочки. Это требование может быть записано в форме условия прочности оболочки на экваторе

$$\sum_{i=1}^{k} n_i f\cos\varphi_{ai} = \pi p a^2/\bar{\sigma}_1. \quad (3.27)$$

Выбор числа нитей, составляющих каждый из слоев оболочки, достаточно произволен. Пределы изменения n_j определяются при выборе числа нитей всех предыдущих слоев $(j - 1)$ условиями, что, с одной стороны, предельное давление воспринимается только нитями j-го слоя:

$$(n_j f)_{\max} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - r_{0j}^2}}\left(\frac{\pi p a^2}{\bar{\sigma}_1} - \sum_{i=1}^{j-1} n_i f\sqrt{1 - r_{0i}^2/a^2}\right),$$

с другой стороны, на участке j—1-го слоя оболочка вырождается в цилиндр

$$(n_j f)_{\min} = \frac{1}{\sqrt{r_{0,\,j+1}^2 - r_{0j}^2}} \times \left(\frac{\pi p r_{0,\,j+1}^3}{\bar{\sigma}_1} - \sum_{i=1}^{j-1} n_i f\sqrt{r_{0,\,j+1}^2 - r_{0j}^2}\right).$$

При этом число нитей, образующих каждый слой, во-первых, должно быть целым, а, во-вторых, для одного слоя, например последнего, число нитей в нем не может быть выбрано произвольно, а определяется однозначно из условия (3.27).

На рис. 3.14 показано изменение формы контура оболочки в зависимости от числа образующих ее слоев.

Соответствующим выбором числа слоев, их расположения и количества нитей в них форма меридиана может изменяться в достаточно широких пределах. При этом, однако, следует учитывать конечность толщины элементарного слоя, вытекающую из условий технологической реализации конструкции. Поэтому для баллонов больших давлений, когда потребное число слоев достаточно велико, может быть поставлена задача построения оптимальной равнонапряженной оболочки заданной формы. Теоретически ее решение требует предположения о непрерывной зависимости толщины от угла армирования, т. е. бесконечности числа слоев [7, 9, 12].

Исходными предпосылками является связь безмоментных усилий в оболочке баллона давления, определяемых формулами

$$N_\alpha = \frac{pR_2}{2};$$

$$N_\beta = \frac{pR_2}{2}\left(2 - \frac{R_2}{R_1}\right),$$

где R_2, R_1 — главные радиусы кривизны поверхности заданной формы с напряжениями нитей, которые могут быть записаны в виде интегральной суммы

$$N_\alpha = 2\sum_{i=1}^{\infty} N_{\alpha i}^{\pm} = \bar\sigma_1 \int \cos^2\varphi\, dh;$$

$$N_\beta = 2\sum_{i=1}^{\infty} N_{\beta i}^{\pm} = \bar\sigma_1 \int \sin^2\varphi\, dh.$$

Используя условие непрерывности намотки и закон геодезической укладки нитей в слоях, эту связь можно представить в форме интегрального уравнения, в котором неизвестной функцией будет закон изменения толщины оболочки на экваторе в зависимости от распределения углов армирования по слоям:

$$\frac{pR_2}{2\sigma_1}\left(3 - \frac{R_2}{R_1}\right) = \int\limits_{\varphi_{a1}}^{\arcsin r/a} \frac{\cos\varphi_a}{\sqrt{r^2/a^2 - \sin^2\varphi_a}} \times \frac{dh_a}{d\varphi_a}\, d\varphi_a.$$

Здесь φ_{a1} — угол армирования первого слоя, определенный величиной полюсного отверстия ($\sin\varphi_{a1} = r_0/a$).

Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{dh_a}{d\varphi_a} = \frac{2p}{\pi\bar\sigma_1\cos\varphi_a}\,\frac{d}{d\varphi_a} \times \int\limits_{\sin\varphi_{a1}}^{\sin\varphi_a} \frac{R_2(\bar r)\,[3 - R_2(\bar r)/R_1(\bar r)]}{\sqrt{\sin^2\varphi_\alpha - \bar r^2}}\,\bar r\, dr,$$

где $\bar r = r/a$.

Например, для сферического баллона ($R_2 = R_1 = a$) искомое соотношение определяется равенством

$$\frac{dh_\alpha}{d\varphi_\alpha} = \frac{2pa}{\pi\bar\sigma_1}\,\frac{\sin\varphi_a}{\sqrt{\sin^2\varphi_\alpha - \sin^2\varphi_{\alpha 1}}}.$$

Отсюда находится зависимость распределения числа нитей в отдельных слоях от угла армирования каждого слоя:

$$nf = \frac{2pa^2}{\bar\sigma_1}\sqrt{\sin^2\varphi_\alpha - \sin^2\varphi_{\alpha 1}}. \tag{3.28}$$

Найденное непрерывное теоретическое распределение нитей по слоям и углам армирования должно быть представлено в форме конечного разбиения. При этом возможны различные варианты технологического исполнения. Например, задаваясь равномерным распределением зон на поверхности оболочки ($\Delta r_{0i} = \text{const}$), из зависимости (3.28) следует выбрать мощность армирования каждой зоны. Или при постоянном числе нитей в каждой зоне из (3.28) определяется величина угла армирования на экваторе, а следовательно, и радиус полюсного отверстия отдельного слоя. Окончательно найденное решение в зависимости от числа выбранных слоев должно корректироваться по формулам, полученным для оболочек, образованных конечным числом семейств нитей. Естественно, что форма оболочки будет отличаться от заданной, приближаясь к ней при увеличении числа слоев.

Конструктивные особенности баллонов давления, образованных намоткой армированной ленты, определяются наличием оболочки переменной толщины, составленной из слоев гетерогенного материала. Это обусловливает существенную анизотропию механических свойств, сложность процессов деформирования и разрушения конструкции. При оценке прочности и деформативности определяющими являются задачи выбора расчетной схемы и соответствующей модели материала. Как правило, в качестве расчетной схемы используется безмоментная оболочка вращения, так как моментное состояние имеет локальный характер и появляется в окрестности закрепленных краев и линий возмущения. Выбор модели материала связан с особенностями разрушения конструкций из композитов, для которых разрушение начинается с нарушения сплошности связующего. При этом разрушающийся слой поддерживается в предельном состоянии за счет связи с соседними слоями [2], и зависимость напряжений в нем от соответствующих деформаций может быть описана законом, аналогичным диаграмме идеально-пластического тела. При таких допущениях на диаграмме деформирования появляются хорошо подтверждаемые экспериментальными данными точки излома.

Последовательность поверочного расчета можно представить в следующем виде. Предполагается, что в любой точке баллона известны безмоментные усилия N_α и N_β, пропорциональные внутреннему давлению, связь которых с соответствующими деформациями определяется равенствами

$$N_\alpha = B_{11}\varepsilon_\alpha + B_{12}\varepsilon_\beta; \quad N_\beta = B_{12}\varepsilon_\alpha + B_{22}\varepsilon_\beta, \tag{3.29}$$

где обобщенные жесткости на начальном этапе нагружения имеют вид:

$$B_{11} = \sum_{i=1}^{n} h_i\left(\overline{E}_1^i\cos^4\varphi_i + 2\overline{E}_1^i\mu_{12}^i\sin^2\varphi_i\cos^2\varphi_i + \overline{E}_2^i\sin^4\varphi_i + G_{12}^i\sin^2 2\varphi_i\right);$$

$$B_{12} = \sum_{i=1}^{n} h_i\left[\left(\overline{E}_1^i+\overline{E}_2^i\right)\sin^2\varphi_i\cos^2\varphi_i + \overline{E}_1^i\mu_{12}^i\left(\sin^4\varphi_i+\cos^4\varphi_i\right) - G_{12}^i\sin^2 2\varphi_i\right]; \tag{3.30}$$

$$B_{22} = \sum_{i=1}^{h} h_i\left(\overline{E}_1^i\sin^4\varphi_i + 2\overline{E}_1^i\mu_{12}^i\sin^2\varphi_i\cos^2\varphi_i + \overline{E}_2^i\cos^4\varphi_i + G_{12}^i\sin^2 2\varphi_i\right).$$

Здесь E_1^i, E_2^i, G_{12}^i— модули упругости материала i-го слоя соответственно при нагружении вдоль армирования, поперек ленты и при сдвиге; μ_{12}^i — соответствующий коэффициент Пуассона; $\overline{E}_1^i = E_1^i/\left(1-\mu_{12}^i\mu_{21}^i\right)$, $E_1^i\mu_{12}^i = E_2^i\mu_{21}^i$.

Разрешив систему (3.29) относительно деформаций ε_α, ε_β, с помощью геометрических соотношений, задаваемых формулами

$$\varepsilon_1^i = \varepsilon_\alpha\cos^2\varphi_i + \varepsilon_\beta\sin^2\varphi_i;$$
$$\varepsilon_2^i = \varepsilon_\alpha\sin^2\varphi_i + \varepsilon_\beta\cos^2\varphi_i; \tag{3.31}$$
$$\varepsilon_{12}^i = (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha)\sin 2\varphi_i,$$

найдем деформации в ленте, по которым согласно закону Гука

$$\sigma_1^i = \overline{E}_1^i\left(\varepsilon_1^i + \mu_{12}^i\varepsilon_2^i\right); \quad \sigma_2^i = \overline{E}_2^i\left(\varepsilon_2^i + \mu_{21}^i\varepsilon_1^i\right); \quad \tau_{12}^i = G_{12}^i\varepsilon_{12}^i \tag{3.32}$$

вычисляются напряжения вдоль армирующих элементов слоя $\left(\sigma_1^i\right)$, поперек них $\left(\sigma_2^i\right)$ и касательные напряжения в ленте $\left(\tau_{12}^i\right)$. В частном случае, когда оболочка образована намоткой пары спиральных слоев, выполненных из одного материала, соответствующее решение может быть представлено следующими аналитическими зависимостями:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2hL}\left\{(N_\alpha + N_\beta)\left[1 + \frac{2G_{12}}{E_2}\times(1+\mu_{12})\,\mathrm{tg}^2 2\varphi\right] + \frac{N_\alpha - N_\beta}{\cos^2\varphi}\right\};$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2hL}\left\{(N_\alpha + N_\beta)\left[1 + \frac{2G_{12}}{E_2}\times(1+\mu_{21})\,\mathrm{tg}^2 2\varphi\right] - \frac{N_\alpha - N_\beta}{\cos 2\varphi}\right\}; \tag{3.33}$$

$$\tau_{12}=\frac{G_{12}\operatorname{tg}2\varphi}{hL\cos 2\varphi}\left[N_\beta\left(\frac{1+\mu_{21}}{E_1}\sin^2\varphi+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1+\mu_{12}}{E_2}\cos^2\varphi\right)-N_\alpha\left(\frac{1+\mu_{21}}{E_1}\times\right.$$
$$\left.\left.\times\cos^2\varphi+\frac{1+\mu_{12}}{E_2}\sin^2\varphi\right)\right],$$

где $L=1+G_{12}\operatorname{tg}^2 2\varphi\left(\frac{1+\mu_{21}}{E_1}+\right.$
$$\left.+\frac{1+\mu_{12}}{E_2}\right).$$

Для того чтобы установить значение внутреннего давления p_1, при котором в наиболее нагруженном слое (например, с номером k) происходит разрушение связующего, можно воспользоваться одной из известных феноменологических теорий прочности однонаправленных материалов. Поверхность разрушения с учетом допущения, что прочность при растяжении и сжатии считается одинаковой, в общем виде может быть представлена уравнением

$$F_{11}\sigma_1^2+F_{12}\sigma_1\sigma_2+F_{22}\sigma_2^2+F_{66}\sigma_{12}^2=1,$$

где F_{ij} — тензор прочности IV ранга, компоненты которого определяются выбором соответствующего критерия прочности.

При дальнейшем нагружении давление отсчитывается от значения p_1, а деформации — от уровня, соответствующего $p=p_1$. Для определения упругих характеристик пакета при вычислении обобщенных жесткостей B_{ij} следует в слагаемых, соответствующих номеру k, принять $E_2^k=G_{12}^k=$ $=\mu_{12}^k=\mu_{21}^k=0$ при $\sigma_2^k>0$ и $G_{12}^k=$ $=\mu_{12}^k=\mu_{21}^k=0$ при $\sigma_2^k<0$. Затем расчет повторяется до достижения порога растрескивания связующего другого слоя и так до разрушения связующего во всех слоях, когда оболочка окажется образованной системой нитей. Условием разрушения конструкции будет разрушение нитей хотя бы одного слоя. В частном случае, когда оболочка образована парой симметричных слоев, исчерпание несущей способности определяется разрушением связующего, если не выполняется условие существования баллона как нитяной системы.

Порог растрескивания связующего в существенной мере зависит от соотношения жесткостей однонаправленного материала вдоль армирования и поперек волокон (E_1/E_2). Анализ применения высокомодульных углеродных, борных и других волокон и работа конструкции в условиях криогенных температур показывает, что в некоторых случаях разрушение связующего может наступить одновременно с разрушением волокон.

Аналогичная ситуация может наблюдаться для более пластичных, например металлических, связующих. При этом возникает задача оптимального проектирования баллона давления с учетом несущей способности связующего [1]. Так как задача расчета оболочки для общей модели материала является статически неопределимой при нахождении напряжений в слоях армированного материала, одного условия равнопрочности уже недостаточно для получения конструкции минимальной массы.

Дополнительным требованием, обеспечивающим оптимальность структуры, является расположение волокон по траекториям главных напряжений внутри каждого слоя, эквивалентное требованию $\tau_{12}^i=0$. Для баллона, образованного укладкой пары симметричных слоев, как следует из третьего равенства системы (3.33), это приводит к условию связи безмоментных усилий с параметрами армирования в виде

$$\frac{N_\beta}{N_\alpha}=$$
$$=\frac{E_2(1+\mu_{21})\cos^2\varphi+E_1(1+\mu_{12})\sin^2\varphi}{E_2(1+\mu_{21})\sin^2\varphi+E_1(1+\mu_{12})\cos^2\varphi}. \tag{3.34}$$

При этом напряжения в ленте, определяемые из первых двух равенств системы (3.33), описываются следующими зависимостями:

$$\sigma_1=\frac{E_1(1+\mu_{12})(N_\alpha+N_\beta)}{h[E_1(1+\mu_{12})+E_2(1+\mu_{21})]};$$
$$\sigma_2=\sigma_1\frac{E_2(1+\mu_{21})}{E_1(1+\mu_{12})};\quad \tau_{12}=0. \tag{3.35}$$

Для баллона давления, полюсное отверстие которого закрыто жесткой силовой крышкой, с учетом формул для безмоментных усилий N_α, N_β равенство (3.34) принимает вид

$$\frac{rz''}{z'\left[1+(z')^2\right]} = 2 - \frac{1-(1-k)\cos^2\varphi}{k+(1-k)\cos^2\varphi}, \tag{3.36}$$

а закон армирования, обеспечивающий равнонапряженность оболочки и вытекающий из совместного решения уравнений (3.34) и (3.35), описывается зависимостью

$$r\cos^k\varphi\left[1-(1-k)\cos^2\varphi\right]^{\frac{1-k}{2}} = \mathrm{const}. \tag{3.37}$$

Здесь

$$k = \frac{E_2(1+\mu_{21})}{E_1(1+\mu_{12})}.$$

Входящая в (3.37) постоянная может быть выражена через угол армирования φ_a при $r = a$. При $k \to 0$ закон намотки совпадает с условием Клеро $r\sin\varphi = \mathrm{const}$, т. е. требует геодезической укладки нитей.

Форма образующей на участке равнонапряженной траектории определяется численным интегрированием равенства

$$z(r) = -\int_a^r \frac{dr}{\sqrt{\left[\dfrac{k+(1-k)\cos^2\varphi}{k+(1-k)\cos^2\varphi_a}\,\dfrac{a^2\cos\varphi_a}{r^2\cos\varphi}\right]^2 - 1}}$$

совместно с законом армирования

$$r = a\frac{\cos^k\varphi_a\left[1-(1-k)\cos^2\varphi_a\right]^{\frac{1-k}{2}}}{\cos^k\varphi_a\left[1-(1-k)\cos^2\varphi\right]^{\frac{1-k}{2}}}.$$

Для критерия прочности однонаправленного материала общего вида проектная толщина оболочки на экваторе

$$h_\alpha = \frac{pa\sqrt{F_{11}+kF_{12}+k^2F_{22}}}{2\left[k+(1-k)\cos^2\varphi_a\right]}.$$

Так как укладка нитей производится не по геодезическим линиям поверхности, существенным оказывается технологическое ограничение на несоскальзывание нитей при намотке. При построении оптимального управления с одной точкой переключения в окрестности полюсного отверстия требуется переход на геодезическую траекторию. Параметры точки переключения определяются из системы

$$r_* = r_0/\sin\varphi_*;$$

$$\frac{r_0}{a} = \sin\varphi_*\left(\frac{\cos\varphi_a}{\cos\varphi_*}\right)^k \times$$

$$\times\left[\frac{1-(1-k)\cos^2\varphi_\alpha}{1-(1-k)\cos^2\varphi_*}\right]^{\frac{1-k}{2}},$$

где r_*, φ_* — радиус сечения и угол армирования в точке переключения экстремалей.

Форма образующей на участке геодезической укладки находится численным интегрированием выражения

$$z_1(r) =$$

$$= -\int_{r_*}^r \frac{r^3\,dr}{\sqrt{C_1\left[r^2-(1-k)r_0^2\right]^{\frac{1+k}{2}} - r^6}} +$$

$$+ C_2.$$

Здесь C_1 и C_2 определяются из условия непрерывности образующей в точке переключения и имеют вид

$$C_1 = \frac{r_*^6}{\left[r_*^2-(1-k)r_0^2\right]^{\frac{1+k}{2}}} \times$$

$$\times\frac{1+\left[z'(r_*)\right]^2}{z'(r_*)};\quad C_2 = z(r_*).$$

На рис. 3.15 приведена образующая баллона давления для относительного радиуса полюсного отверстия $\bar{r}_0 = r_0/a = 0{,}2$ с коэффициентом трения на намотке $k_т = 0{,}5$ и параметром относительной жесткости материала $k = 0{,}1$, построенная с использованием равнонапряженной траектории (кривая *1*) и при геодезическом армировании (кривая *2*) для модели материала с учетом несущей способности связующего. Для сравнения приведена форма образующей баллона, построен-

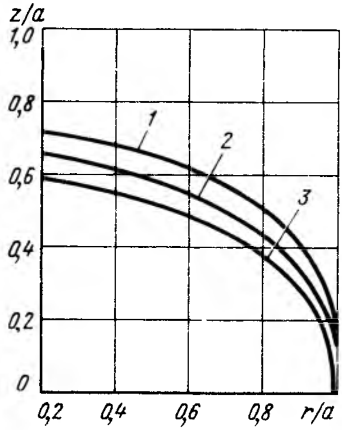


Рис. 3.15. Образующие баллона давления для различных вариантов проектирования:
1 — равнонапряженная траектория; *2* — геодезическая намотка; *3* — геодезическая намотка системы нитей

ная для модели в виде системы нитей (кривая *3*).

3.3. КОМБИНИРОВАННЫЕ БАЛЛОНЫ ДАВЛЕНИЯ

Особенностью баллонов, работающих длительное время под давлением, является требование сохранения ими герметичности. Используемые способы герметизации композитных конструкций не всегда отвечают этому условию. Так, резиновый слой с течением времени теряет герметизирующие свойства вследствие старения, а слои термопласта можно использовать в сравнительно узком диапазоне температур.

Один из перспективных способов обеспечения герметичности — введение несущего металлического слоя, обладающего малой проницаемостью, стойкостью к агрессивным средам и позволяющего использовать металлическую оболочку в качестве оправки при намотке баллона. Получаемая комбинированная конструкция, состоящая из внутреннего изотропного слоя и наружного армированного слоя, как правило, оказывается тяжелее баллона из композита, однако обладает по сравнению с последним рядом технологических и эксплуатационных преимуществ.

Введение металлического слоя требует решения задачи оптимального проектирования комбинированной конструкции, т. е. выбора оптимального соотношения толщин металла и композита, схемы армирования и построения формы контура баллона. Ввиду того, что на оболочку действует только внутреннее давление, нагружение металлического слоя может считаться близким к простому. Как известно, в этом случае достаточно точные результаты могут быть получены на основании деформационной теории пластичности. При этом физические соотношения для металлического слоя имеют вид

$$\begin{gathered}\varepsilon_\alpha=\frac{\sigma_\alpha^0-\mu\sigma_\beta^0}{E}+\left(\frac{1}{E_c}-\frac{1}{E}\right)\times\\ \times\left(\sigma_\alpha^2-\frac{1}{2}\,\sigma_\beta^0\right);\\ \varepsilon_\beta=\frac{\sigma_\beta^0-\mu\sigma_\alpha^0}{E}+\\ +\left(\frac{1}{E_c}-\frac{1}{E}\right)\left(\sigma_\beta^0-\frac{1}{2}\,\sigma_\alpha^0\right).\end{gathered} \tag{3.38}$$

Здесь σ_α^0, σ_β^0 — меридиональное и кольцевое напряжения в герметизирующем изотропном слое; E, μ — модуль упругости и коэффициент Пуассона его материала; $E_c\,(\sigma_i)$ — секущий модуль, определенный по единой кривой $\sigma_i - \varepsilon_i$ [$\sigma_i^2 = (\sigma_\alpha^0)^2 - \sigma_\alpha^0\sigma_\beta^0 + (\sigma_\beta^0)^2$ — интенсивность напряжений].

В полимерных композитах связующее разрушается на начальном этапе нагружения. Тогда для модели материала в виде системы нитей с учетом равенств (3.5) и соотношений (3.38) физические зависимости для комбинированной оболочки представляются в виде [7]

$$\begin{aligned}N_\alpha&=\overline{B}_{11}^*\varepsilon_\alpha+\overline{B}_{12}^*\varepsilon_\beta;\\ N_\beta&=\overline{B}_{12}^*\varepsilon_\alpha+\overline{B}_{22}^*\varepsilon_\beta.\end{aligned} \tag{3.39}$$

Здесь обобщенные жесткости имеют вид

$$\overline{B}_{11}^*=\frac{4E^2E_ch_0}{3E^2+(1-2\mu)\,E_c\,[2E-(1-2\mu)\,E_c]}+\sum h_iE_1^i\cos^4\varphi_i;$$

$$\overline{B}^*_{12} = \frac{2EE_c\,[E-(1-2\mu)\,E_c]\,h_0}{3E^2+(1-2\mu)\,E_c\,[2E-(1-2\mu)\,E_c]} + \sum h_i E_1^i \sin^2\varphi_i \cos^2\varphi_i;$$

$$\overline{B}^*_{22} = \frac{4E^2E_c h_0}{3E^2+(1-2\mu)\,E_c\,[2E-(1-2\mu)\,E_c]} + \sum h_i E_1^i \sin^4\varphi_i,$$

где h_0 — толщина герметизирующей оболочки; h_i — толщина i-го слоя армированного материала.

Соотношения (3.39) могут быть использованы при поверочном расчете комбинированной конструкции. По известным безмоментным усилиям и параметрам структуры с помощью метода последовательных нагружений определяются деформации пакета, с помощью которых вычисляются напряжения в слоях. При этом диапазон изменения давления разбивается на участки; на начальном участке секущий модуль E_c принимается равным E, а на каждом последующем E_c определяется по интенсивности напряжений, найденной на предшествующем этапе нагружения.

В задаче оптимального проектирования комбинированного баллона давления следует потребовать равнонапряженности как герметизирующей оболочки, так и слоев композита. В условиях нелинейного развития пластических деформаций в изотропном слое это требование, очевидно, можно выполнить только при определенной нагрузке p^*, т. е. определенной степени упрочнения металла, которую в рассматриваемой задаче можно оценить значением секущего модуля E^*_c (здесь и далее величины, отмеченные звездочкой, соответствуют нагрузке $p = p^*$). Тогда условие равнонапряженности эквивалентно требованию постоянства деформаций всех элементов структуры:

$$\varepsilon^*_\alpha = \varepsilon^*_\beta = \varepsilon^*_{1i} = \varepsilon. \qquad (3.40)$$

В частном случае, когда баллон давления при полюсном отверстии закрыт жесткой силовой крышкой, безмоментные усилия связаны с главными радиусами кривизны оболочки равенствами

$$N_\alpha = \frac{pR_2}{2}; \quad N_\beta = \frac{pR_2}{2}\left(2-\frac{R_2}{R_1}\right). \qquad (3.41)$$

При намотке одного слоя композита условием равнонапряженности его нитей является намотка по геодезическим линиям поверхности в соответствии с теоремой Клеро:

$$r\sin\varphi = a\sin\varphi_a = r_0, \qquad (3.42)$$

где r_0, a — радиусы полюсного отверстия и экваториального сечения баллона.

Закон изменения толщины армированного слоя, вытекающий из условия непрерывности намотки (3.4), имеет вид

$$h = h_\alpha \frac{\cos\varphi_\alpha}{\cos\varphi}. \qquad (3.43)$$

Из соотношений (3.39)—(3.43) следует уравнение, определяющее образующую комбинированного баллона [5]:

$$\frac{rz''}{z\,[1+(z')^2]} = 2 - \frac{\lambda^* r^2\sqrt{r^2-r_0^2}+r_0^2 a}{\lambda^* r^2\sqrt{r^2-r_0^2}+(r^2-r_0^2)\,a}. \qquad (3.44)$$

Здесь

$$\lambda^* = \frac{ah_0}{h_a E_1 A^* \sqrt{a^2-r_0^2}};$$

$$A^* = \frac{1}{2E^*_c(\sigma_i)} + \frac{1-2\mu}{E}.$$

Для баллона с постоянной толщиной герметизирующей оболочки ($h_0 = \mathrm{const}$) при граничном условии на экваторе $r = a$ $z' = \infty$ интеграл уравнения (3.44) имеет вид

$$\bar z = -\int_1^{\bar r} \frac{\bar r^3\,d\bar r}{\sqrt{\left[\dfrac{\lambda^*\bar r^2+\sqrt{\bar r^2-\bar r_0^2}}{\lambda^*+\sqrt{1-\bar r_0^2}}\right]^2-\bar r^6}}, \qquad (3.45)$$

где $\bar{z} = z/a$; $\bar{r} = r/a$; $\bar{r}_0 = r_0/a$.

Интеграл является несобственным при $\bar{r} \to 1$, соответствующая оценка в районе экваторе при $\bar{r} = 1 - \varepsilon$

$$\bar{z}(1-\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\sqrt{1-\bar{r}_0^2}\,(\lambda^* + \sqrt{1-\bar{r}_0^2})}{\lambda^* \sqrt{1-\bar{r}_0^2} + 2 - 3\bar{r}_0^2}}.$$

Образующая баллона, вычисленная с помощью (3.45), соответствует определенной степени упрочнения материала герметизирующей оболочки, т. е. величине E_c^* при $p = p^*$.

Величины соответствующих напряжений описываются зависимостями

$$\sigma_\alpha^* = \sigma_\beta^* = \sigma_i^* =$$

$$= \frac{p^* a}{2\left[h_0 + h_a E_1 A^* \left(1 - \bar{r}_0^2\right)\right]} = \text{const};$$

$$\sigma_1^* = \frac{p^* a E_1 A^*}{2\left[h_0 + h_a E_1 A^* \left(1 - \bar{r}_0^2\right)\right]} = \text{const}, \tag{3.46}$$

т. е. величины σ_1^*, σ_i^*, A^* не зависят от координат на поверхности баллона при $p = p^*$ и оба слоя являются равнонапряженными.

Отметим некоторые частные формы записи полученного решения. При $\lambda^* = 0$, что соответствует оболочке без герметизирующего металлического слоя, форма образующей определяется уравнением

$$\bar{z} = -\int_1^{\bar{r}} \frac{\bar{r}^3\, dr}{\sqrt{\dfrac{\bar{r}^2 - \bar{r}_0^2}{1 - \bar{r}_0^2} - \bar{r}^6}}.$$

Результат совпадает с формулой (3.15) для $t_0 = 0$. При $\lambda^* \to \infty$, что соответствует чисто металлическому баллону, интеграл (3.45)

$$\bar{z} = -\int_1^{\bar{r}} \frac{\bar{r}\, dr}{\sqrt{1 - \bar{r}^2}}$$

определяет сферическую оболочку.

При использовании в качестве материала герметизирующего слоя металлов с выраженной площадкой текучести в качестве диаграммы деформирования допустимо использовать модель жесткопластического тела, т. е.

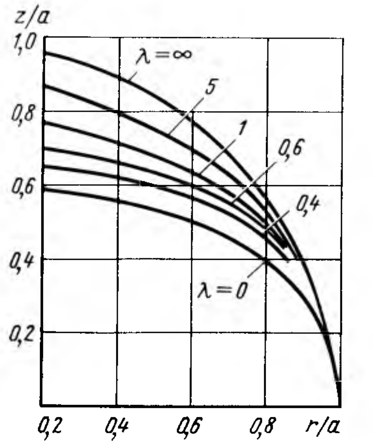


Рис. 3.16. Формы контуров оптимальных комбинированных баллонов при различных параметрах λ для $\varphi_a = 10°$

предполагать, что в момент, предшествующий разрушению, напряжения в металлической оболочке равны пределу текучести ($\sigma_\alpha^0 = \sigma_\beta^0 = \sigma_i = \sigma_т$), а напряжения в нитях равны предельным ($\sigma_1 = \bar{\sigma}_1$). Тогда при принятых допущениях безмоментные усилия в оболочке связаны с напряжениями в слоях зависимостями

$$N_\alpha = \sigma_т h_0 + \bar{\sigma}_1 h \cos^2\varphi;$$
$$N_\beta = \sigma_т h_0 + \bar{\sigma}_1 h \sin^2\varphi. \tag{3.47}$$

В этом случае с учетом равенств (3.41)—(3.43) интеграл, определяющий равновесную форму меридиана, может быть приведен к виду (3.45) [7], где вместо параметра λ^* следует принять величину

$$\lambda = \frac{\sigma_т h_0 a}{\bar{\sigma}_1 h_a \sqrt{a^2 - r_0^2}}. \tag{3.48}$$

Выбор модели материала герметизирующего слоя определяется конкретным видом его диаграммы деформирования. Для материалов с большой степенью упрочнения можно потребовать, например, чтобы равнопрочность конструкции существовала в предельном состоянии при разрушении ($p^* = p_{max}$, $A^* = A_{max}$) или при эксплуатационной нагрузке $p = p_{экс}$.

На рис. 3.16 представлена серия контура оптимальных комбинированных

ных баллонов давления для различных параметров λ при $\varphi_a = 10°$.

Особенностью разрушения комбинированных баллонов является, как правило, разрыв герметизирующей оболочки в окрестности штуцера. Одним из конструктивных способов повышения несущей способности при больших давлениях является разнесение армированных слоев в окрестности фланца, т. е. превращение конструкции в многослойную, когда композитная оболочка образована несколькими семействами нитей, каждое из которых характеризуется радиусом полюсного отверстия r_{0i}.

Для модели материала герметизирующего слоя в виде жесткопластического тела и варианта конструкции баллона, когда полюсные отверстия всех слоев размещаются в пределах диаметра фланца, условие равновесия фланца может быть записано в форме (см. рис. 3.14)

$$p'\pi b^2 = p''\pi\left(b^2 - r_{01}^2\right) + \sigma_{\text{т}} h_0 2\pi b \sin\alpha_b, \tag{3.49}$$

где b — радиус фланца; α_b — угол наклона касательной к меридиану при $r = b$; $\operatorname{tg}\alpha_b = -z'(b)$.

Уравнение равновесия части оболочки, соприкасающейся с фланцем, на участке $r_{0k} \leqslant r \leqslant r_{0,\ k+1}$ при условии равнопрочности системы нитей имеет вид

$$2\pi r\bar{\sigma}_1 \sin\alpha \sum_{i=1}^{k} h_i \cos^2\varphi_i = p''\pi\left(r^2 - r_{01}^2\right). \tag{3.50}$$

Здесь φ_i — угол между нитями i-го слоя и меридианом (при геодезической намотке $\sin\varphi_i = r_{0i}/r$); h_i — переменная толщина i-го слоя (для геодезической намотки), связанная с толщиной на экваторе равенством $h_i = h_{ai}\sqrt{\left(a^2 - r_{0i}^2\right)\left(r^2 - r_{0i}^2\right)}$. Дополняя равенства (3.49), (3.50) условием прочности баллона на экваторе, определяемое равенством

$$\bar{\sigma}_1 \sum_{i=1}^{n} h_{ai}\cos^2\varphi_{ai} + \sigma_{\text{т}} h_0 = p'a/2 \tag{3.51}$$

(где n — общее число слоев), и учитывая, что в рассматриваемом варианте конструкции радиус полюсного отверстия совпадает с радиусом фланца, т. е. при $k = n$ и $r = b$, как следует из (3.50):

$$2\pi b\bar{\sigma}_1 \sin\alpha_b \sum_{i=1}^{n} h_i\cos^2\varphi_i = p''\pi\left(b^2 - r_{0i}^2\right), \tag{3.52}$$

система зависимостей (3.49)—(3.52) приводится к уравнению, определяющему форму меридиана комбинированной оболочки на участке между полюсными отверстиями слоев k и $k+1$. Его интеграл имеет вид

$$\bar{z}_k = -\int\limits_{\bar{r}_{0k}}^{\bar{r}} \frac{\bar{r}\left(\bar{r}^2 - \bar{r}_{01}^2\right) d\bar{r}}{\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} C_i\sqrt{\bar{r}^2 - \bar{r}_{0i}^2}\right)^2 - \bar{r}^2\left(\bar{r}^2 - \bar{r}_{0i}^2\right)^2}} + A_k. \tag{3.53}$$

Здесь $\bar{z}_k = z_k/a$; $\bar{r} = r/a$; $\bar{r}_{0i} = r_{0i}/a$;

$$C_i = \frac{\lambda_i\left(\bar{b}^2 - \bar{r}_{01}^2\right)}{\bar{b}^2\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j\sqrt{\bar{b}^2 - \bar{r}_{0j}^2}} \times$$

$$\times \frac{\bar{b}^2 + \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j\sqrt{\bar{b}^2 - \bar{r}_{0j}^2}}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j\sqrt{1 - \bar{r}_{0j}^2}};$$

$$\lambda_i = \frac{\bar{\sigma}_1 h_{ai}\sqrt{1 - \bar{r}_{0i}^2}}{\sigma_{\text{т}} h_0}; \quad \bar{b} = b/a.$$

Постоянные A_k определяются из условия непрерывности образующей, состоящей из отдельных участков: $A_k = \bar{z}_{k-1}(\bar{r}_{0k})$. Как и в случае многослойной оболочки без несущего герметизирующего слоя, диапазон возможного изменения толщин отдельных слоев ограничен зависимостями

$$h_{ak}^{\max}=\frac{1}{1-\bar r_{0k}^{2}}\left[\left(\frac{p'a}{2\bar\sigma_1}-\frac{\sigma_{\text{т}}h_0}{\bar\sigma_1}\right)-\sum_{i=1}^{k-1}h_{ai}\left(1-\bar r_{0i}^{2}\right)\right];$$

$$h_{ak}^{\min}=\frac{\sigma_{\text{т}}h_0}{\bar\sigma_1\sqrt{\left(1-\bar r_{0k}^{2}\right)\left(\bar r_{0,\,k+1}^{2}-\bar r_{0k}^{2}\right)}}\times\left[\frac{\bar r_{0,\,k+1}^{2}-\bar r_{01}^{2}}{\bar b^{2}-\bar r_{0i}^{2}}\left(\frac{p'a}{2\sigma_{\text{т}}h_0}\bar b^{2}-\bar b\sin\alpha_b\right)-\sum_{i=1}^{k-1}\lambda_i\sqrt{\bar r_{0,\,k+1}^{2}-\bar r_{0i}^{2}}\right].$$

При оценке верхней границы толщины k-го слоя на экваторе предполагается, что все толщины слоев (до k — включительно 1) известны. Кроме того, оценка нижней границы не инвариантна по отношению к форме оболочки. Поэтому может быть использован метод последовательных приближений, на первом этапе которого для фланцев небольшого диаметра следует принять $\sin\alpha_b=0$.

Форма образующей комбинированной оболочки вне участка фланца определяется интегралом

$$\bar z_n^{*}=-\int_{\bar b}^{\bar r}\frac{\bar r^{3}\,d\bar r}{\sqrt{\left(\dfrac{\bar r^{2}+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\sqrt{\bar r^{2}-\bar r_{0i}^{2}}}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\sqrt{1-\bar r_{0i}^{2}}}\right)^{2}-\bar r^{6}}}+A_n. \qquad (3.54)$$

Постоянная интегрирования A_n определяется из условия непрерывности формы меридиана на границе участка фланца: $A_n=\bar z_n\ (\bar r=\bar b)$, где z_n определяется численным интегрированием (3.53) для $k=n$.

На рис. 3.17 показана форма баллона с четырьмя армированными слоями. Приняты следующие параметры: $\bar r_{01}=0{,}105$; $\bar r_{02}=0{,}1383$; $\bar r_{03}=0{,}1717$; $\bar r_{04}=0{,}205$. Для сравнения приведена также форма контура однозонного баллона с параметром $\lambda=0{,}376$.

Применение зонной намотки позволяет управлять формой контура комбинированного баллона, варьируя расположением отдельных слоев и их мощностью армирования. Для произвольного случая когда все слои, за исключением первого, размещаются вне пределов диаметра фланца ($r_{0k}>b$ при $k>1$), уравнение образующей на участке $r_{0k}\leqslant r\leqslant r_{0,\,k+1}$ представляется в форме

$$\bar z_k=-\int_{\bar r_{0k}}^{\bar r}\frac{\bar r^{3}\,d\bar r}{\sqrt{\left(\dfrac{\bar r^{2}+\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i\sqrt{\bar r^{2}-\bar r_{0i}^{2}}}{1+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\sqrt{1-\bar r_{0i}^{2}}}\right)^{2}-\bar r^{6}}}+A_k, \qquad (3.55)$$

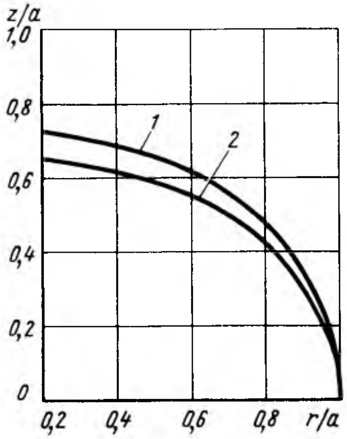


Рис. 3.17. Форма контура оптимального комбинированного баллона:
1 — четырехслойный баллон со слоями, расположенными в пределах фланца; *2* — исходный однослойный прототип

где постоянные A_k выбираются из условия непрерывности формы меридиана: $A_k = \bar{z}_{k-1}\ (\bar{r}_{0k})$.

Выбор взаимного расположения отдельных слоев и их толщин на экваторе можно осуществить, рассматривая оптимальную схему армирования теоретически бесконечно зонной оболочки аналогично зависимостям, рассмотренным выше для оболочки без несущего герметизирующего слоя. Для принятых моделей жесткопластического тела материала, изотропного слоя и нитяной структуры композитной части баллона решение соответствующего интегрального уравнения имеет вид

$$\frac{dh_a}{d\varphi_a} = \frac{4}{\pi}\,\frac{\sin\varphi_a}{a^2}\,\frac{d}{d(\sin^2\varphi_a)}\times$$
$$\times\int\limits_{\sin^2\varphi_{a1}}^{\sin^2\varphi_a}\frac{0{,}5pR_2\,(3-R_2/R_1)-2\sigma_{\text{т}}h_0}{\bar{\sigma}_1\sqrt{\sin^2\varphi_a-\sin^2\varphi_{a1}}}\times$$
$$\times\, r\,dr. \qquad (3.56)$$

Здесь R_2, R_1 — главные радиусы кривизны меридиана оболочки заданной формы; φ_{a1} — начальный угол армирования, определенный величиной радиуса полюсного отверстия ($\sin\varphi_{a1} = r_0/a$).

В частном случае сферического баллона ($R_1 = R_2 = a$) решение (3.56) определяется равенством

$$\frac{dh_a}{d\varphi_a} = \frac{2}{\pi}\,\frac{pa-2\sigma_{\text{т}}h_0}{\bar{\sigma}_1}\times$$
$$\times\frac{\sin\varphi_a}{\sqrt{\sin^2\varphi_a-\sin^2\varphi_{a1}}}. \qquad (3.57)$$

Если в зависимости (3.57) вместо толщины элементарного слоя dh_a ввести соответствующую ему мощность армирования $d\,(nf)$ — площадь сечения нитей, образующих этот элементарный слой ($dnf = 2\pi a\cos\varphi_a\,dh_a$), то решение уравнения (3.57) принимает вид

$$nf = 4a\,\frac{pa-2\sigma_{\text{т}}h_0}{\bar{\sigma}_1}\sqrt{\sin^2\varphi_a-\sin^2\varphi_{a1}}. \qquad (3.58)$$

Равенство (3.58) представляет собой непрерывную зависимость мощности армирования nf от угла укладки нитей φ_a элементарных слоев на экваторе. Реальные конструкции могут быть изготовлены намоткой достаточно большого, но всегда конечного числа слоев, задаваемого из конструктивных или технологических соображений. Применительно к сферической оболочке, для которой композит должен быть теоретически распределен равномерно по образующей, можно отметить два практически реализуемых варианта распределения материала по слоям: 1) принимается, что параметр nf для всех слоев одинаков, т. е. каждый слой образуется одним и тем же числом нитей; 2) можно принять, что полюсные отверстия слоев располагаются на одинаковом расстоянии друг от друга; число нитей, образующих каждый из них, является переменным.

Рассмотрим сравнение двух вариантов на примере баллона давления сферической формы радиуса $a = 0{,}17$ м, нагруженного внутренним давлением $p = 8$ ГПа. В качестве материала герметизирующего слоя принят титановый сплав с пределом текучести $\sigma_{\text{т}} = 1{,}05$ ГПа и плотностью $\rho_0 = 4{,}5\cdot10^3$ кг/м³. Толщина металлической оболочки $h_0 = 3{,}7\cdot10^{-3}$ м. Армированный слой выполнен из стеклопластика с параметрами: $\bar{\sigma}_1 = 1{,}4$ ГПа,

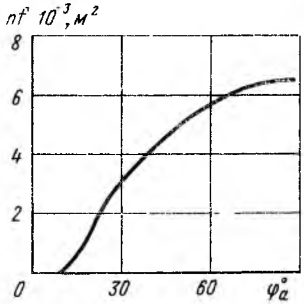


Рис. 3.18. Распределение мощности армирования nf в зависимости от угла намотки на экваторе φ сферического комбинированного баллона

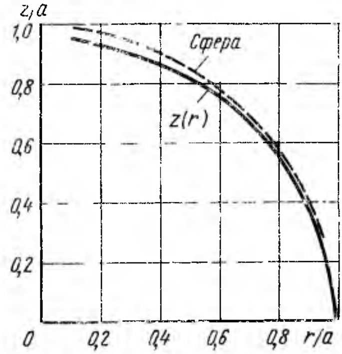


Рис. 3.19. Форма оптимальной оболочки при намотке пятью слоями $z(r)$ и исходная сфера

$\rho_1 = 2{,}1\cdot10^3$ кг/м³. На рис. 3.18 приведено распределение мощности армирования по углу φ_a, построенное с помощью зависимости (3.58) для $\bar r_{01} = \sin\varphi_{a1} = 0{,}1$. Для оболочки, образованной намоткой пяти слоев композита, распределение параметров структуры, соответствующих вариантам $\Delta nf = \text{const}$ и $\Delta\varphi_a = \text{const}$, приведено в табл. 3.1.

Поверочные расчеты показывают, что для материалов с большой степенью упрочнения предпочтительнее использовать второй вариант расположения слоев, так как при дискретизации структуры в первом случае оболочка оказывается недостаточно прочной в кольцевом направлении на экваторе баллона. Форма оптимального контура должна быть уточнена для принятого расположения конечного числа слоев. Результат сравнения с заданной сферической оболочкой, построенный с помощью численного интегрирования зависимости (3.54) для второго варианта, показан на рис. 3.19. Отметим, что для использованных материалов масса комбинированного сферического баллона с наружным слоем из стеклопластика составляет 9,2 кг, масса металлического баллона 10,4 кг, теоретическая масса стеклопластикового баллона без герметизирующего слоя 7,3 кг.

3.1. Распределение параметров структуры

№ слоя	$\Delta nf = \text{const}$		$\Delta\varphi_a = \text{const}$	
	$\bar r_{0i}$	$\Delta nf_i\cdot10^6$, м²	$\bar r_{0i}$	$\Delta nf_i\cdot10^6$, м²
1	0,1	580	0,1	770,7
2	0,2756	580	0,38	718,5
3	0,4540	580	0,63	610,6
4	0,6428	580	0,80	455,5
5	0,8192	52	0,94	265
6	—	—	0,997	54,1

Список литературы

1. **Бунаков В. А., Радовинский А. Л.** К определению рациональной формы безмоментных оболочек вращения, изготовленных методом намотки из высокомодульных материалов//Механика полимеров. 1975. № 5. С. 822—828.
2. **Васильев В. В., Дудченко А. А., Елпатьевский А. Н.** Об особенностях деформирования ортотропного стеклопластика при растяжении//Механика полимеров. 1970. № 6. С. 144—146.
3. **Елпатьевский А. Н., Васильев В. В.** Прочность цилиндрических оболочек из армированных материалов. М.: Машиностроение, 1972. 168 с.
4. **Зиккел И.** Равнопрочные сосуды давления//Ракетная техника и космонавтика. 1962. № 6. С. 120—122.
5. **Колеров Н. Н.** Расчет и проектирование баллонов из композиционных материалов//Проектирование, расчет и испытание конструкций из композицион-

ных материалов. М.: ЦАГИ, 1978. Вып. VI. С. 153—160.

6. **Миткевич А. Б., Протасов В. Д.** Равновесные стеклопластиковые баллоны давления минимальной массы при негеодезической намотке//Механика полимеров. 1975. № 6. С. 983—987.

7. **Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А.** Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.

8. **Применение** конструкционных пластмасс в производстве летательных аппаратов/Под ред. А. Л. Абибова. М.: Машиностроение, 1971. 215 с.

9. **Ривлин Р., Пипкин А.** Проектирование сосудов давления, усиленных нерастяжимыми нитями//Прикладная механика (ASME). 1983. № 1. С. 123—129.

10. **Росато Д. В., Грове К. С.** Намотка стеклонитью. М.: Машиностроение, 1969. 348 с.

11. **Хартунг Р.** Сосуды давления, полученные методом плоскостной намотки нитей//Ракетная техника и космонавтика. 1963. № 12. С. 159—160.

12. **Черевацкий С. Б.** О произвольных нитевых оболочках вращения, нагруженных давлением//Прочность и динамика авиационных двигателей. М.: Машиностроение, 1966. Вып. 4. С. 20—30.

13. **Шурч Г., Бурграф О.** Аналитическое исследование оптимальной формы сосудов давления, навитых из стекловолокна//Ракетная техника и космонавтика. 1964. № 5. С. 33—47.

14. **Bunakov V. A., Protasov V. D., Cherevatskii S. B.** Optimum Design of Membrane Composite Shells of Revolution//Mechanics of Composite. Moscow, MIR Publisheres. 1982. P. 252—280.

Глава 4

МНОГОСЛОЙНЫЕ КОМПОЗИТНЫЕ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

Среди многослойных конструкций, выполненных из композитов, оболочки вращения занимают особое место, поскольку они весьма технологичны при изготовлении естественным для волокнистых композитов методом — методом намотки. С точки зрения расчета многослойных конструкций, оболочки вращения являются достаточно простыми объектами исследования, поскольку модельное представление о распределении деформаций в трансверсальном направлении и периодичность решений по окружной координате позволяют свести решение трехмерной задачи теории упругости к последовательности решений одномерных краевых задач. При расчете на ЭВМ наиболее удобной формой представления разрешающих дифференциальных уравнений одномерных задач являются системы дифференциальных уравнений первого порядка, или канонические системы. Для таких систем разработаны стандартные программы интегрирования, а также различные вычислительные приемы, обеспечивающие достаточную точность решения [1, 2, 5, 7].

4.1. СТАТИКА ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

4.1.1. Вариационно-матричный способ получения канонических систем дифференциальных уравнений. Рассмотрим многослойную оболочку вращения. Координатные оси α, β направлены соответственно вдоль меридиана и параллели; материалы слоев ортотропные, с осями упругой симметрии, совпадающими с направлениями координатных осей. В этом случае при получении разрешающих уравнений можно пользоваться соотношениями, записанными для амплитудных значений n-й гармоники разложений функций в ряды Фурье по угловой координате β.

Процедуры получения канонических систем разрешающих дифференциальных уравнений для решения задач статики многослойных оболочек вращения общего вида приведены ниже.

Рассмотрим кольцевой оболочечный элемент, ограниченный нормальными коническими сечениями $\alpha=\alpha_1$ и $\alpha=\alpha_2$ (рис. 4.1). Ось α направлена вдоль меридиана; угловая координата β определяет плоскость меридиана; координата γ направлена вдоль внешней нормали к базовой поверхности оболочки; радиус параллели $r(\alpha)$ равен параметру Ламе $A_2(\alpha)$. Будем считать, что в пределах кольцевого элемента геометрические параметры, жесткостные характеристики и внешние поверхностные силы изменяются непрерывно.

Математическая формулировка принципа возможных перемещений для кольцевого оболочечного элемента имеет вид

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int\limits_0^{2\pi} \delta\varepsilon^{\mathrm T}\mathscr{N} A_1A_2\,d\beta\,d\alpha - \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int\limits_0^{2\pi} \delta X^{\mathrm T} f A_1 A_2\,d\beta\,d\alpha - \sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^{2\pi}\delta X_i^{\mathrm T} t_i A_2(\alpha_i)\,d\beta = 0, \quad (4.1)$$

где ε — вектор-столбец обобщенных деформаций; $\mathscr{N}$ — вектор-столбец внутренних обобщенных силовых факторов, сопряженных с ε; X — вектор-столбец обобщенных перемещений; f — вектор-столбец распределенных сил, сопряженных с X; «Т» обозначает операцию транспонирования; $X_i = X$ $(\alpha = \alpha_i)$ $(i = 1,\ 2)$ — обобщенные перемещения торцовых сечений: t_i $(i = 1, 2)$ — вектор-столбец внешних торцовых погонных силовых факторов (считается, что положительные направления X_i и t_i совпадают); величины, перед которыми стоит знак δ, считаются произвольными кинематическими факторами, не нарушающими внутренних и внешних связей, т. е. это произвольные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие кинематическим (главным) условиям.

Связь обобщенных внутренних силовых факторов и деформаций устанавливается на основе соотношений упругости

$$\mathscr{N} = \mathscr{D}\varepsilon, \quad (4.2)$$

где $\mathscr{D}$ — симметричная, положительно определенная матрица, содержащая интегральные по толщине жесткостные характеристики.

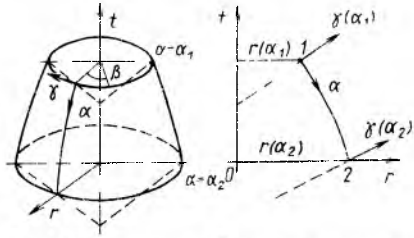


Рис. 4.1. Элемент оболочки вращения

Воспользовавшись периодичностью решений по угловой координате β, кинематические и силовые факторы можно разложить в тригонометрические ряды и представить в виде

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty}\bar{\beta}_{\Phi n}\bar{\Phi}_n + \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{\beta}_{\Phi n}\tilde{\Phi}_n, \quad (4.3)$$

где $\Phi = (\varepsilon,\ \mathscr{N},\ X,\ f,\ X_i,\ t_i)$, а матрицы $\bar{\beta}_{\Phi n}$, $\tilde{\beta}_{\Phi n}$ содержат тригонометрические функции $\sin n\beta$, $\cos n\beta$. Коэффициенты разложений $\bar{\Phi}_n$ и $\tilde{\Phi}_n$ соответствуют симметричным и кососимметричным (относительно нулевого меридиана $\beta = 0$) составляющим решений и являются функциями координаты α. Специальный выбор знаков при коэффициентах матриц $\bar{\beta}_{\Phi n}$ и $\tilde{\beta}_{\Phi n}$ позволяет формировать одинаковые системы разрешающих уравнений как для симметричных, так и для кососимметричных составляющих. Поэтому в дальнейшем, если не указывается принадлежность к симметричным или кососимметричным составляющим (отсутствуют символы «—» или «~»), то подразумевается, что такая запись справедлива как для симметричных, так и для кососимметричных составляющих. Нижним индексом n будет отмечаться принадлежность к n-й гармонике разложения.

После подстановки (4.3) в (4.1) и интегрирования по угловой координате β получим следующую одномерную вариационную формулировку:

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left(\delta\varepsilon_n^{\mathrm T}\mathscr{N}_n - \delta X_n^{\mathrm T} f_n\right)A_1A_2\,d\alpha - \sum_{i=1}^{2}\delta X_{in}^{\mathrm T} t_{in} A_2(\alpha_i) = 0, \quad (4.4)$$

где
$$\mathcal{N}_n = \mathcal{D}\varepsilon_n. \qquad (4.5)$$

Для того чтобы записать связь компонент ε_n с перемещениями, коэффициентов вектор-столбца X_n оказывается, как правило, недостаточно, поскольку необходимо располагать также некоторыми производными $d/d\alpha$ от коэффициентов X_n (например, производными от перемещений или углов поворота). Эти производные удобно сгруппировать в отдельный вектор-столбец Y_n. После этого можно представить связь ε_n с перемещениями следующим образом:

$$\varepsilon_n = L_{1n}X_n + L_{2n}Y_n. \qquad (4.6)$$

Особенностью записи (4.6) является то, что матрицы L_{1n}, L_{2n} не содержат дифференциальных операторов $d/d\alpha$, поскольку все необходимые производные от обобщенных перемещений X_n содержатся в вектор-столбце Y_n.

Между коэффициентами X_n и Y_n по определению существует дифференциальная связь, которую в общем виде можно представить так:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}X_n - C_1X_n - C_2Y_n = 0;\\ &\frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}\delta X_n - C_1\delta X_n - C_2\delta Y_n = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4.7)$$

Для того чтобы в формулировке задачи (4.4) коэффициенты X_n и Y_n считать независимыми, нужно дополнительные условия связи (4.7) ввести в (4.4) с помощью множителей Лагранжа. В результате этих процедур с учетом (4.5), (4.6) получим

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left(\left(L_{1n}\delta X_n + L_{2n}\delta Y_n\right)^{\mathrm{T}}\mathcal{D}\left(L_{1n}X_n + L_{2n}Y_n\right) - \delta X_n^{\mathrm{T}}f_n\right)A_1A_2\,d\alpha + \int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}\delta X_n - C_1\delta X_n - C_2\delta Y_n\right)^{\mathrm{T}}\lambda_nA_1\,d\alpha + \int_{\alpha_2}^{\alpha_2}\delta\lambda_n^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}X_n - C_1X_n - C_2Y_n\right)A_1\,d\alpha - \sum_{i=1}^{2}\delta X_{in}^{\mathrm{T}}t_{in}A_2(\alpha_i) = 0, \qquad (4.8)$$

где λ и $\delta\lambda$ — множители Лагранжа.

Вариационная формулировка (4.8) позволяет:

получить [1] искомую каноническую систему дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}\begin{vmatrix} X_n \\ \lambda_n \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_n \\ \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}, \qquad (4.9)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= C_1 - bS_{21};\\ A_{12} &= bC_2^{\mathrm{T}};\\ A_{21} &= S_{11} - dS_{21};\\ A_{22} &= -A_{11}^{\mathrm{T}};\\ b &= C_2S_{22}^{-1};\\ d &= S_{21}^{\mathrm{T}}S_{22}^{-1}; \end{aligned}\right| \qquad (4.10)$$

$$S_{ij} = A_2L_{in}^{\mathrm{T}}\mathcal{D}L_{jn} \quad (i,\ j = 1,\ 2); \qquad (4.11)$$

$$H_1 = 0; \quad H_2 = -A_2f_n, \qquad (4.12)$$

выразить компоненты вектор-столбца Y_n:

$$Y_n = S_{22}^{-1}\left(C_2^{\mathrm{T}}\lambda_n - S_{21}X_n\right), \qquad (4.13)$$

сформулировать силовые граничные условия

$$\left.\begin{aligned} &\text{при } \alpha = \alpha_1 \quad \lambda_{1n} = -t_{1n}A_2(\alpha_1);\\ &\text{при } \alpha = \alpha_2 \quad \lambda_{2n} = t_{2n}A_2(\alpha_2), \end{aligned}\right\} \qquad (4.14)$$

где $\lambda_{in} = \lambda_n(\alpha_i)$ $(i = 1,\ 2)$.

Кинематические граничные условия могут задаваться на компоненты векторов X_{1n} и X_{2n}. Как следует из записи силовых граничных условий (4.14), множители Лагранжа представляют внутренние силовые факторы, умноженные на радиус параллели.

Полученная вариационно-матричным способом система дифференциальных уравнений (4.9) в качестве неизвестных функций аргумента α содержит компоненты векторов обобщенных перемещений X_n и обобщенных силовых факторов λ_n. Соотношения (4.10)—(4.12) определяют алгоритм получения коэффициентов канонической системы. В качестве исходной информации выступают: матрицы L_{1n}, L_{2n} [см. (4.6)], определяющие кинематику деформирования; матрица $\mathscr{D}$ [см. (4.5)], характеризующая приведенные жесткости многослойного пакета; матрицы C_1, C_2 [см. (4.7)], устанавливающие дополнительные внутренние связи; вектор f_n [см. (4.12)], определяющий коэффициенты разложения в ряды Фурье внешних распределенных сил и моментов. Конкретное содержание исходной информации для различных моделей деформирования приводится в последующих разделах.

После решения краевой задачи и определения X_n и λ_n в сечениях вывода результатов согласно (4.10), (4.13) определяется

$$Y_n = b^T \lambda_n - d^T X_n.$$

После этого с использованием (4.6) восстанавливаются значения обобщенных деформаций ε_n и осуществляется пересчет результатов для точек вывода (4.3). В точках вывода производится суммирование решений по отдельным гармоникам.

Рассмотрим особенности получения разрешающих уравнений для случая совместного силового и температурного нагружения. Исходная вариационная формулировка остается прежней, т. е. (4.4). Изменяется запись связи обобщенных силовых факторов с деформациями. Согласно изложенному в п. 1.3.5 можно записать вместо (4.2) $\mathscr{N} = \mathscr{D}\varepsilon - \Delta\mathscr{N}_т$, где вектор-столбец $\Delta\mathscr{N}_т$ определяет дополнительные внутренние силовые факторы, обусловленные температурными деформациями.

Для n-й гармоники разложения запишем

$$\mathscr{N}_n = \mathscr{D}e_n - \Delta\mathscr{N}_{тn}. \quad (4.15)$$

Такое представление внутренних силовых факторов приведет к изменению вектор-столбца свободных членов в системе дифференциальных уравнений (4.9). Вместо (4.12) получим

$$H_1 = bN_2; \quad H_2 = -N_1 + dN_2, \quad (4.16)$$

где $N_1 = A_2(f_n + L_{1n}\Delta\mathscr{N}_{тn})$; $N_2 = A_2 L_{2n}^T \Delta\mathscr{N}_{тn}$. Кроме того, вместо выражения (4.13) следует воспользоваться зависимостью

$$Y_n = b^T \lambda_n - d^T X_n + S_{22}^{-1} N_2. \quad (4.17)$$

Значения обобщенных деформаций вычисляются согласно (4.6), для определения внутренних силовых факторов необходимо использовать выражение (4.15).

4.1.2. Построение матриц жесткости кольцевых элементов. Матрицу жесткости отдельного кольцевого элемента, деформирование которого описывается системой дифференциальных уравнений (4.9), можно получить с использованием матрицы фундаментальных решений [1]. В силу линейности исходной задачи компоненты вектора состояния (обобщенные перемещения X_n и внутренние силовые факторы λ_n) в сечении α—α_2 можно связать с компонентами вектора состояния в сечении α—α_1 следующим образом:

$$\begin{bmatrix} X_{2n} \\ \lambda_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} \\ \omega_{21} & \omega_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1n} \\ \lambda_{1n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_n^{частн} \\ \lambda_n^{частн} \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

где ω_{ij} — блоки матрицы фундаментальных решений.

Заполнение матрицы фундаментальных решений можно представить так. Решается задача Коши для элемента при $H_1 = H_2 = 0$ (см. 4.9) при начальных условиях, когда только j-я компонента вектора состояния в первом сечении (α—α_1) равна единице, остальные компоненты — нули. В результате интегрирования (4.9) в сечении α—α_2 получим определенный вектор состояния. Этот вектор заносится как i-й столбец в матрицу ω. Получив решения всех $2m$ (m — размерности векторов X_n и λ_n) задач с единичными начальными условиями, полностью заполним матрицу фундаментальных решений. Вектор частного решения получается после интегрирования неоднородного уравнения (4.9) при нулевых начальных условиях.

При численной реализации процедур заполнения матрицы фундаментальных решений для моментных оболочечных элементов участки выбираются достаточно короткими, если не применяются приемы ортогонализации [2, 5, 7]. Это связано со спецификой разрешающей системы дифференциальных уравнений, для которой возможны быстровозрастающие и быстрозатухающие решения, а также с неизбежными погрешностями округления при вычислении на ЭВМ. При большом участке интегрирования, если не применяются специальные приемы, векторы решений в ω при расчете на ЭВМ могут стать практически линейно зависимыми или вычисляться недостаточно точно. Длину участка интегрирования необходимо выбирать, ориентируясь на собственные значения матрицы разрешающей системы и соответствующие длины зон краевых эффектов.

Связь векторов состояния в сечениях $\alpha-\alpha_1$ и $\alpha-\alpha_2$, представленная выражением (4.18), и силовые граничные условия (4.14) позволяют выразить силовые факторы $A_2(\alpha_1)\boldsymbol{t}_{1n}$ и $A_2(\alpha_2)\boldsymbol{t}_{2n}$ (их можно рассматривать как реакции отсеченных частей оболочки) через перемещения сечений и приведенные к сечениям нагрузки

$$\begin{bmatrix} A_2(\alpha_1)\,\boldsymbol{t}_{1n} \\ A_2(\alpha_2)\,\boldsymbol{t}_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} K_{12} \\ K_{21} K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1n} \\ X_{2n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}, \qquad (4.19)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &K_{12} = -\omega_{12}^{-1}; \quad K_{11} = -K_{12}\omega_{11}; \\ &K_{21} = K_{12}^{\mathrm{T}}; \quad K_{22} = -\omega_{22}K_{12}; \\ &P_1 = K_{12}X_n^{\text{частн.}}; \\ &P_2 = -\lambda_n^{\text{частн}} - \omega_{22}P_1. \end{aligned}\right\} \qquad (4.20)$$

Полученная матрица $[K_{ij}]$ [см. (4.19)] представляет матрицу жесткости конечного кольцевого оболочечного элемента; вектор $[P_i]$ определяет приведенные к торцам элемента внешние распределенные силы. Дальнейшее решение краевой задачи выполняется с использованием стандартных операций метода конечных элементов [6].

4.1.3. Тонкие многослойные оболочки. Исходные данные для получения разрешающей системы дифференциальных уравнений (4.9) имеют следующий вид.

Обобщенные деформации ε и матрицы разложения $\bar{\beta}_{\varepsilon n}$ и $\tilde{\beta}_{\varepsilon n}$ в тригонометрические ряды запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon = [\varepsilon_\alpha,\ \varepsilon_\beta,\ \gamma_{\alpha\beta},\ \varkappa_\alpha,\ \varkappa_\beta,\ \chi_{\alpha\beta}]^{\mathrm{T}}; \\ &\bar{\beta}_{\varepsilon n} = \ulcorner c_n,\ c_n,\ s_n,\ c_n,\ c_n,\ s_n \lrcorner; \\ &\tilde{\beta}_{\varepsilon n} = \ulcorner s_n,\ s_n,\ -c_n,\ s_n,\ s_n,\ -c_n \urcorner, \end{aligned}\right\} \qquad (4.21)$$

где $\gamma_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha}$; $\chi_{\alpha\beta} = \varkappa_{\alpha\beta} + \varkappa_{\beta\alpha}$; $s_n = \sin n\beta$; $c_n = \cos n\beta$. Здесь и в дальнейшем угловыми скобками $\ulcorner \cdot \lrcorner$ обозначаются диагональные матрицы.

Внутренние силовые факторы $\mathcal{N}$ и матрицы разложения $\mathcal{N}$ в тригонометрические ряды имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{N} = [N_\alpha,\ N_\beta,\ N_{\alpha\beta}, \\ &\quad M_\alpha,\ M_\beta,\ M_{\alpha\beta}]^{\mathrm{T}}; \\ &\bar{\beta}_{Nn} = \bar{\beta}_{\varepsilon n};\ \ \tilde{\beta}_{Nn} = \tilde{\beta}_{\varepsilon n}. \end{aligned}\right\} \qquad (4.22)$$

Обобщенные перемещения X и матрицы разложения X в тригонометрические ряды имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &X = [u,\ v,\ w,\ \omega_\alpha]^{\mathrm{T}}; \\ &\bar{\beta}_{xn} = \ulcorner c_n,\ s_n,\ c_n,\ c_n \lrcorner; \\ &\tilde{\beta}_{xn} = \ulcorner s_n,\ -c_n,\ s_n,\ s_n \lrcorner. \end{aligned}\right\} \qquad (4.23)$$

Компоненты вектор-столбца Y и матрицы разложения Y в тригонометрические ряды имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &Y = \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\,[u,\ v,\ \omega_\alpha]^{\mathrm{T}}; \\ &\bar{\beta}_{yn} = \ulcorner c_n,\ s_n,\ c_n \lrcorner; \\ &\tilde{\beta}_{yn} = \ulcorner s_n,\ -c_n,\ s_n \lrcorner. \end{aligned}\right\} \qquad (4.24)$$

Компоненты вектор-столбца внешних распределенных сил f и матрицы разложения f [см. (1.19)] в тригонометрические ряды имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} f &= \frac{1}{A_1A_2}[f_\alpha, f_\beta, f_\gamma, 0]^{\mathrm{T}};\\ \overline{\beta}_{fn} &= \overline{\beta}_{xn}; \quad \widetilde{\beta}_{fn} = \widetilde{\beta}_{xn}. \end{aligned}\right\} \quad (4.25)$$

Компоненты обобщенных перемещений на торцах X_i $(i = 1, 2)$ имеют вид, аналогичный (4.23).

Обобщенные силовые факторы λ, сопряженные с перемещениями X (4.23), можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= A_2\left[N_\alpha, N_{\alpha\beta}^*, Q_\alpha^*, M_\alpha\right]^{\mathrm{T}};\\ \overline{\beta}_{\lambda n} &= \overline{\beta}_{xn}; \quad \widetilde{\beta}_{\lambda n} = \widetilde{\beta}_{xn}, \end{aligned}\right\} \quad (4.26)$$

где

$$N_{\alpha\beta}^* = N_{\alpha\beta} + k_2M_{\alpha\beta};$$

$$Q_\alpha^* = Q_\alpha + \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\beta}M_{\alpha\beta}.$$

Матрица приведенных жесткостных характеристик многослойного пакета $\mathcal{D}$ имеет следующую структуру:

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & C_{11} & C_{12} & 0\\ & B_{22} & 0 & C_{12} & C_{22} & 0\\ & & B_{33} & 0 & 0 & C_{33}\\ & & & D_{11} & D_{12} & 0\\ & & & & D_{22} & 0\\ \text{сим.} & & & & & D_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

где коэффициенты B_{ij}, C_{ij}, D_{ij} вычисляются согласно (1.34) (т. е. без учета изменения метрических характеристик).

Для амплитудных значений n-й гармоники разложения связь ε_n с X_n и Y_n [см. (4.6)] устанавливается на основе соотношений:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha n} &= \frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}u_n + k_1w_n;\\ \varepsilon_{\beta n} &= \varphi_2u_n + \bar{n}v_n + k_2w_n;\\ \gamma_{\alpha\beta n} &= -\bar{n}u_n - \varphi_2v_n + \frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}v_n;\\ \varkappa_{\alpha n} &= \frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}\omega_{\alpha n};\\ \varkappa_{\beta n} &= k_2\bar{n}v_n + \bar{n}^2w_n + \varphi_2\omega_{\alpha n};\\ \chi_{\alpha\beta n} &= 2\left(-\varphi_2k_2v_n - \varphi_2\bar{n}w_n - \right.\\ &\left.- \bar{n}\omega_{\alpha n} + k_2\frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}v_n\right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

где $\bar{n} = n/A_2$; $\varphi_2 = \dfrac{1}{A_1A_2}\dfrac{dA_2}{d\alpha}$.

Тогда для выбранных последовательностей компонентов ε (4.21), X (4.23) и Y (4.24) матрицы L_{1n} и L_{2n} (см. 4.6) будут иметь следующие коэффициенты:

$$L_{1n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_1 & 0\\ \varphi_2 & \bar{n} & k_2 & 0\\ -\bar{n} & -\varphi_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & k_2\bar{n} & \bar{n}^2 & \varphi_2\\ 0 & -2\varphi_2k_2 & -2\varphi_2\bar{n} & -2\bar{n} \end{bmatrix}; \quad (4.29)$$

$$L_{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2k_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрицы связи C_1 и C_2 [см. (4.7)] можно записать в виде

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ k_1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

Компоненты вектор-столбца дополнительных внутренних силовых факторов, обусловленных температурными деформациями, упорядочены следующим образом:

$$\Delta\mathcal{N}_{\text{т}} = [B_{1\text{т}},\ B_{2\text{т}},\ 0,\ D_{1\text{т}},\ D_{2\text{т}},\ 0]^{\text{T}} \tag{4.31}$$

(см. 1.2.5). Матрицы разложения $\Delta\mathcal{N}_{\text{т}}$ в тригонометрические ряды совпадают с матрицами $\bar{\beta}_{\varepsilon n}$ и $\tilde{\beta}_{\varepsilon n}$.

4.1.4. Учет деформаций поперечного сдвига. Обобщенные деформации ε и матрицы $\bar{\beta}_{\varepsilon n}$, $\tilde{\beta}_{\varepsilon n}$ имеют вид

$$\varepsilon = [\varepsilon_\alpha,\ \varepsilon_\beta,\ \gamma_{\alpha\beta},\ \varkappa_\alpha,\ \varkappa_\beta,\ \chi_{\alpha\beta},\ \psi_\alpha,\ \psi_\beta]^{\text{T}}; \tag{4.32}$$

$$\bar{\beta}_{\varepsilon n} = \lceil c_n,\ c_n,\ s_n,\ c_n,\ c_n,\ s_n,\ c_n,\ s_n \rfloor;$$

$$\tilde{\beta}_{\varepsilon n} = \lceil s_n,\ s_n,\ -c_n,\ s_n,\ s_n,\ -c_n,\ s_n,\ -c_n \rfloor.$$

Внутренние силовые факторы

$$\mathcal{N} = [N_\alpha,\ N_\beta,\ N_{\alpha\beta},\ M_\alpha,\ M_\beta,\ M_{\alpha\beta},\ Q_\alpha,\ Q_\beta]^{\text{T}}. \tag{4.33}$$

Матрицы разложения $\mathcal{N}$ в тригонометрические ряды совпадают с матрицами $\bar{\beta}_{\varepsilon n}$ и $\tilde{\beta}_{\varepsilon n}$:

$$\bar{\beta}_{Nn} = \bar{\beta}_{\varepsilon n}; \quad \tilde{\beta}_{Nn} = \bar{\beta}_{\varepsilon n}.$$

Обобщенные перемещения X и матрицы $\bar{\beta}_{xn}$ и $\tilde{\beta}_{xn}$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned} X &= [u,\ v,\ w,\ \theta_\alpha,\ \theta_\beta]^{\text{T}};\\ \bar{\beta}_{xn} &= \lceil c_n,\ s_n,\ c_n,\ c_n,\ s_n \rfloor;\\ \tilde{\beta}_{xn} &= \lceil s_n,\ -c_n,\ s_n,\ s_n,\ -c_n \rfloor. \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

Компоненты вектор-столбца Y

$$Y = \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}[u,\ v,\ w,\ \theta_\alpha,\ \theta_\beta]^{\text{T}}. \tag{4.35}$$

Матрицы разложения Y в тригонометрические ряды аналогичны матрицам разложения X:

$$\bar{\beta}_{yn} = \tilde{\beta}_{xn}; \quad \tilde{\beta}_{yn} = \tilde{\beta}_{xn}.$$

Компоненты вектор-столбца внешних распределенных сил f [см. пояснения к (1.19)] следующие:

$$f = \frac{1}{A_1A_2}[f_\alpha,\ f_\beta,\ f_\gamma,\ m_\alpha,\ m_\beta]^{\text{T}}. \tag{4.36}$$

Матрицы разложения f в тригонометрические ряды совпадают с матрицами $\bar{\beta}_{xn}$ и $\tilde{\beta}_{xn}$:

$$\bar{\beta}_{fn} = \bar{\beta}_{xn}; \quad \tilde{\beta}_{fn} = \tilde{\beta}_{xn}.$$

Обобщенные силовые факторы λ, сопряженные с перемещениями X (4.34), имеют следующие компоненты:

$$\lambda = A_2[N_\alpha,\ N_{\alpha\beta},\ Q_\alpha,\ M_\alpha,\ M_{\alpha\beta}]^{\text{T}}. \tag{4.37}$$

Матрицы разложения λ в тригонометрические ряды имеют вид

$$\bar{\beta}_{\lambda n} = \bar{\beta}_{xn}; \quad \tilde{\beta}_{\lambda n} = \tilde{\beta}_{xn}.$$

Матрица приведенных жесткостных характеристик многослойного пакета $\mathcal{D}$ имеет следующую структуру:

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0\\ & B_{22} & 0 & C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0\\ & & B_{33} & 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0\\ & & & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0\\ & & & & D_{22} & 0 & 0 & 0\\ & & & & & D_{33} & 0 & 0\\ & & & & & & K_1 & 0\\ \text{сим} & & & & & & & K_2 \end{bmatrix}. \tag{4.38}$$

Коэффициенты матрицы $\mathscr{D}$(4.38) вычисляются на основе соотношений (1.34).

Коэффициенты обобщенных деформаций ε_n выражаются через перемещения следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha n} &= \frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}u_n + k_1 w_n;\\
\varepsilon_{\beta n} &= \varphi_2 u_n + \bar n v_n + k_2 w_n;\\
\gamma_{\alpha\beta n} &= -\bar n u_n - \varphi_2 v_n + \frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}v_n;\\
\varkappa_{\alpha n} &= \frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}\theta_{\alpha n};\\
\varkappa_{\beta n} &= \varphi_2\theta_{\alpha n} + \bar n\theta_{\beta n};\\
\chi_{\alpha\beta n} &= -\bar n\theta_{\alpha n} - \varphi_2\theta_{\beta n} + \frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}\theta_{\beta n};\\
\psi_{\alpha n} &= \theta_{\alpha n} + \frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}w_n - k_1 u_n;\\
\psi_{\beta n} &= \theta_{\beta n} - \bar n w_n - k_2 v_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.39)$$

На основе соотношений (4.39) заполняются матрицы L_{1n}, L_{2n} (см. (4.6)):

$$L_1 n = \begin{bmatrix}
0 & 0 & k_1 & 0 & 0\\
\varphi_2 & \bar n & k_2 & 0 & 0\\
-\bar n & -\varphi_2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \varphi_2 & \bar n\\
0 & 0 & 0 & -\bar n & -\varphi_2\\
-k_1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & -k_2 & -\bar n & 0 & 1
\end{bmatrix}; \qquad (4.40)$$

$$L_{2n} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.$$

Матрицы связи C_1 и C_2 [(см. (4.7)] можно записать в виде

$$C_1 = O_{(5\times5)};\quad C_2 = E_{(5\times5)}, \qquad (4.41)$$

где $O_{(5\times5)}$ и $E_{(5\times5)}$ — нулевая и единичная матрица размерности (5×5).

Компоненты вектор-столбца дополнительных внутренних силовых факторов, обусловленных температурными деформациями, упорядочены следующим образом:

$$\Delta\mathscr{N}_{\text{т}} = [B_{1\text{т}},\ B_{2\text{т}},\ 0,\ D_{1\text{т}},\ D_{2\text{т}},\ 0,\ 0,\ 0]^{\text{T}} \qquad (4.42)$$

(см. п. 1.2.5). Матрицы разложения $\Delta\mathscr{N}_{\text{т}}$ в тригонометрические ряды совпадают с матрицами $\bar\beta_{\varepsilon n}$ и $\tilde\beta_{\varepsilon n}$.

4.1.5. Учет изменения метрических характеристик. Обобщенные деформации ε и матрицы $\bar\beta_{\varepsilon n}$, $\tilde\beta_{\varepsilon n}$:

$$\varepsilon = [\varepsilon_\alpha,\ \varepsilon_\beta,\ \varepsilon_{\alpha\beta},\ \varepsilon_{\beta\alpha},\ \varkappa_\alpha,\ \varkappa_\beta,\ \varkappa_{\alpha\beta},\ \varkappa_{\beta\alpha},\ \psi_\alpha,\ \psi_\beta]^{\text{T}}; \qquad (4.43)$$

$$\bar\beta_{\varepsilon n} = \lceil c_n,\ c_n,\ s_n,\ s_n,\ c_n,\ c_n,\ s_n,\ s_n,\ c_n,\ s_n\rfloor;$$

$$\tilde\beta_{\varepsilon n} = \lceil s_n,\ s_n,\ -c_n,\ -c_n,\ s_n,\ s_n,\ -c_n,\ -c_n,\ s_n,\ -c_n\rfloor.$$

Внутренние силовые факторы

$$\mathscr{N} = [N_\alpha,\ N_\beta,\ N_{\alpha\beta},\ N_{\beta\alpha},\ M_\alpha,\ M_\beta,\ M_{\alpha\beta},\ M_{\beta\alpha},\ Q_\alpha,\ Q_\beta]^{\text{T}}. \qquad (4.44)$$

Матрицы разложения $\mathscr{N}$(4.44) в тригонометрические ряды определяются так:

$$\bar\beta_{Nn} = \bar\beta_{\varepsilon n};\quad \tilde\beta_{Nn} = \tilde\beta_{\varepsilon n}.$$

Коэффициенты матрицы приведенных жесткостных характеристик многослойного пакета $\mathscr{D}$ определяются с учетом изменения метрических свойств [см. (1.22)]:

$$
\mathscr{D}=\begin{bmatrix}
B_{11} & B_{12} & 0 & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & B_{22} & 0 & 0 & C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & B_{33}^{11} & B_{33}^{12} & 0 & 0 & C_{33}^{11} & C_{33}^{12} & 0 & 0\\
 & & & B_{33}^{22} & 0 & 0 & C_{33}^{12} & C_{33}^{22} & 0 & 0\\
 & & & & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & & & & D_{22} & 0 & 0 & 0 & 0\\
 & & & & & & D_{33}^{11} & D_{33}^{12} & 0 & 0\\
 & & & & & & & D_{33}^{22} & 0 & 0\\
 & & & & & & & & K_1 & 0\\
\text{сим.} & & & & & & & & & K_2
\end{bmatrix}. \qquad (4.45)
$$

Для n-й гармоники разложения коэффициенты вектор-столбца обобщенных деформаций ε выражаются через перемещения следующим образом [см. (1.26)]:

$$
\left.\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha n} &= \frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}u_n + k_1 w_n;\\
\varepsilon_{\beta n} &= \varphi_2 u_n + \bar{n} v_n + k_2 w_n;\\
\varepsilon_{\alpha\beta n} &= \frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}v_n;\\
\varepsilon_{\beta\alpha n} &= -\bar{n} u_n - \varphi_2 v_2;\\
\varkappa_{\alpha n} &= \frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}\theta_{\alpha n};\\
\varkappa_{\beta n} &= \varphi_2\theta_{\alpha n} + \bar{n}\theta_{\beta n};\\
\varkappa_{\alpha\beta n} &= \frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}\theta_{\beta n};\\
\varkappa_{\beta\alpha n} &= -\bar{n}\theta_{\alpha n} - \varphi_2\theta_{\beta n};\\
\psi_{\alpha n} &= \theta_{\alpha n} + \\
&+ \frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}w_n - k_1 u_n;\\
\psi_{\beta n} &= \theta_{\beta n} - \bar{n} w_n - k_2 v_n.
\end{aligned}\right\} \qquad (4.46)
$$

На основе соотношений (4.46) заполняются матрицы L_{1n}, L_{2n} [см. (4.6)]:

$$
L_{1n}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & k_1 & 0 & 0\\
\varphi_2 & \bar{n} & k_2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\bar{n} & -\varphi_2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \varphi_2 & \bar{n}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -\bar{n} & -\varphi_2\\
-k_1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & -k_2 & -\bar{n} & 0 & 1
\end{bmatrix}; \qquad (4.47)
$$

$$
L_{2n}=\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.
$$

Представление компонент векторов X, Y, f, λ дается выражениями

(4.34)—(4.37). Матрицы связи C_1, C_2 и вектор $\Delta\mathcal{N}_T$ определяются согласно (4.41), (4.42).

4.2. УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

При получении разрешающих уравнений будем считать, что в исходном невозмущенном состоянии в оболочке действуют начальные напряжения. Исходное напряженное состояние определяется решением задачи статики в линейной постановке. При составлении уравнений движения в окрестности исходного состояния будем учитывать начальное напряженное состояние. В деформационных соотношениях кроме линейных составляющих будем учитывать нелинейные слагаемые, связанные с дополнительными углами поворота нормалей.

При решении задач рассмотрим только осесимметричное начальное напряженное состояние. Будем считать, что действующие на конструкцию внешние нагрузки при движении системы не изменяются ни по величине, ни по направлению, а система в целом (включая внешние нагрузки, поведение материала и условия связи) консервативная.

4.2.1. Получение канонических систем дифференциальных уравнений. Для исследования гармонического движения системы относительно начального напряженного состояния воспользуемся вариационной формулировкой задачи [1]:

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{0}^{2\pi} (\delta\varepsilon^{\mathrm{T}}\mathcal{N} + \Lambda\delta\theta^{\mathrm{T}}\mathcal{N}_0\theta - \omega^2\delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{u})\, A_1A_2\, d\beta\, d\alpha - \sum_{i=1}^{2}\int_{0}^{2\pi}\delta X_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}_i A_2(\alpha_i)\, d\beta = 0. \quad (4.48)$$

Здесь Λ — параметр нагружения;

$$\mathcal{N}_0 = \begin{bmatrix} N_{\alpha}^{0} & N_{\alpha\beta}^{0} \\ N_{\alpha\beta}^{0} & N_{\beta}^{0} \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

определяет матрицу начальных погонных усилий, коэффициенты которой определяются решением задачи статики при $\lambda = 1$ (нагружение считается пропорциональным); при осесимметричном начальном напряженном состоянии $N_{\alpha\beta} = 0$;

$$\theta = [\omega_\alpha,\ \omega_\beta]^{\mathrm{T}} \text{ —} \quad (4.50)$$

вектор-столбец углов поворота нормали;

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} B_\rho & 0 & 0 & C_\rho & 0 \\ & B_\beta & 0 & 0 & C_\rho \\ & & B_\rho & 0 & 0 \\ & & & D_\rho & 0 \\ \text{сим.} & & & & D_\rho \end{bmatrix} \text{ —} \quad (4.51)$$

матрица приведенных инерционных характеристик многослойного пакета; определение коэффициентов B_ρ, C_ρ, D_ρ дается в разд. 1.2.8;

$$\boldsymbol{u} = [u,\ v,\ w,\ \theta_\alpha,\ \theta_\beta]^{\mathrm{T}} \text{ —} \quad (4.52)$$

вектор-столбец перемещений и углов поворота сечений; ω — круговая частота гармонических колебаний; X_i, t_i — дополнительные (первого порядка малости) перемещения и реакции на торцах кольцевого элемента; связь обобщенных силовых факторов и деформаций (дополнительных, первого порядка малости) определяется соотношениями (4.2).

Воспользуемся периодичностью решения по угловой координате β и представим искомые функции аналогично (4.3). Введем в рассмотрение задачи вектор-столбцы обобщенных перемещений X и производных Y, как это было сделано в п. 4.1.1. Тогда для n-й гармоники разложения дополнительно к связи (4.6) запишем

$$\theta_n = R_{1n}X_n + R_{2n}Y_n; \quad (4.53)$$

$$\boldsymbol{u}_n = F_{1n}X_n + F_{2n}Y_n. \quad (4.54)$$

После выполнения процедур вариационно-матричного способа вывода канонических систем получим однородную разрешающую систему дифференциальных уравнений для решения задач устойчивости и колебаний:

$$\frac{1}{A_1}\frac{d}{d\alpha}=\begin{bmatrix} X_n \\ \lambda_n \end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_n \\ \lambda_n \end{bmatrix}, \quad (4.55)$$

где

$$\left.\begin{aligned} A_{11} &= C_1 - bS_{21}^*; \\ A_{12} &= bC_2^{\mathrm{T}}; \\ A_{21} &= S_{11}^* - dS_{21}^*; \\ A_{22} &= -A_{11}^{\mathrm{T}}; \\ b &= C_2 S_{22}^{*-1}; \\ d &= S_{21}^{*\mathrm{T}} S_{22}^{*-1}; \end{aligned}\right\} \quad (4.56)$$

$$S_{ij}^* = A_2\left(L_{in}^{\mathrm{T}}\mathscr{D}L_{jn} + \Lambda R_{in}^{\mathrm{T}}\mathscr{N}_0 R_{jn} - \right.$$
$$\left. - \omega^2 F_{in}^{\mathrm{T}} M F_{jn}\right) \quad (i,\ j = 1,\ 2). \quad (4.57)$$

С учетом того, что обобщенные перемещения X_n и силовые факторы λ_n являются дополнительными, граничные условия на торцах рассматриваемой оболочки также будут однородными.

Отличие процедур получения канонической системы (4.56) от процедур получения матрицы разрешающей системы дифференциальных уравнений для решения задачи статики (4.9) заключается в вычислении матриц S_{ij}^* [см. (4.57)]. Как видно из выражения (4.57), матрицы S_{ij}^* содержат кроме жесткостных характеристик информацию о начальном напряженном состоянии, а также инерционные характеристики системы.

Полученная система дифференциальных уравнений (4.55) позволяет для многослойной оболочки вращения решать задачи устойчивости и определять критический параметр нагружения. При этом в выражении (4.57) следует положить $\omega^2 = 0$. Для определения частот колебаний оболочки вычисление матриц S_{ij}^* выполняется при $\Lambda = \mathrm{const}$. В частном случае при $\Lambda = 0$ определяются частоты ненагруженной системы.

Поскольку искомый параметр собственного значения λ (или ω^2) входит в коэффициенты матрицы разрешающих дифференциальных уравнений, то коэффициенты матрицы фундаментальных решений, а следовательно, и коэффициенты матрицы жесткости кольцевого оболочечного элемента будут иметь нелинейную зависимость от λ (или ω^2). В случае разбивки оболочки на короткие элементы для каждого элемента можно применить прием линеаризации матрицы жесткости по параметру собственного значения и выделить для элемента матрицу, аналогичную матрице приведенных начальных напряжений (или матрице приведенных масс) конечного элемента в методе конечных элементов (МКЭ).

4.2.2. Устойчивость и колебания тонких многослойных оболочек. Исходными данными для получения разрешающей системы будут матрицы L_{1n}, L_{2n} (4.29); матрица приведенных жесткостных характеристик $\mathscr{D}$ (4.27); матрицы связи C_1, C_2 (4.30); матрицы R_{1n}, R_{2n} [см. (4.50), (4.53)], которые можно представить в виде

$$R_{1n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_2 & \bar{n} & 0 \end{bmatrix};$$
$$R_{2n} = O_{(2\times 3)}, \quad (4.58)$$

где $O_{(2\times 3)}$ — нулевая матрица размерности (2×3); матрица начальных погонных усилий

$$\mathscr{N}_0 = \begin{bmatrix} N_\alpha^0 & 0 \\ 0 & N_\beta^0 \end{bmatrix}; \quad (4.59)$$

матрицы F_{1n}, F_{2n} [см. (4.52), (4.54)]:

$$F_{1n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_2 & \bar{n} & 0 \end{bmatrix};$$
$$F_{2n} = O_{(5\times 3)}; \quad (4.60)$$

матрица приведенных инерционных характеристик M, определяемая выражением (4.51).

При вычислении коэффициентов B_ρ, C_ρ, D_ρ (см. п. 1.2.8) изменение метрических характеристик можно не учитывать и считать, что

$$B_\rho = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \rho \, d\gamma; \quad C_\rho = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \rho\gamma \, d\gamma;$$

$$D_\rho = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \rho\gamma^2 \, d\gamma. \qquad (4.61)$$

Если расчет проводится без учета инерционных составляющих, связанных с углами поворота сечений, то в матрице $\boldsymbol{M}$ (4.51) можно положить $C_\rho = D_\rho = 0$.

Компоненты векторов ε, $\mathcal{N}$, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, λ определены в п. 4.1.3.

4.2.3. Устойчивость и колебания тонких многослойных оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига. Исходными данными для получения разрешающей системы (4.55) будут матрицы $\boldsymbol{L}_{1n}$, $\boldsymbol{L}_{2n}$ (4.40); матрица приведенных жесткостных характеристик $\mathcal{D}$ (4.38); матрицы связи $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$ (4.41); матрицы $\boldsymbol{R}_{1n}$, $\boldsymbol{R}_{2n}$ [см. (4.50), (4.53)]:

$$\boldsymbol{R}_{1n} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & \bar{n} & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{R}_{2n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad (4.62)$$

матрица начальных погонных усилий $\mathcal{N}_0$ (4.59); матрицы $\boldsymbol{F}_{1n}$, $\boldsymbol{F}_{2n}$ [см. (4.52,) (4.54)]:

$$\boldsymbol{F}_{1n} = \boldsymbol{E}_{(5\times5)}; \quad \boldsymbol{F}_{2n} = \boldsymbol{O}_{(5\times5)}; \qquad (4.63)$$

матрица приведенных инерционных характеристик $\boldsymbol{M}$ (4.51) с коэффициентами B_ρ, C_ρ, D_ρ (4.61).

Компоненты векторов ε, $\mathcal{N}$, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, λ определены в п. 4.1.4.

4.2.4. Устойчивость и колебания многослойных оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига и изменения метрических характеристик. Исходными данными для получения разрешающей системы (4.55) будут матрицы $\boldsymbol{L}_{1n}$, $\boldsymbol{L}_{2n}$ (4.47); матрица приведенных жесткостных характеристик $\mathcal{D}$ (4.45); матрицы связи $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$ (4.41); матрицы $\boldsymbol{R}_{1n}$, $\boldsymbol{R}_{2n}$ (4.62); матрицы $\boldsymbol{F}_{1n}$, $\boldsymbol{F}_{2n}$ (4.63); матрица приведенных инерционных характеристик $\boldsymbol{M}$ (4.51) с коэффициентами B_ρ, C_ρ, D_ρ, определенными с учетом изменения метрических характеристик (см. п. 1.2.8).

4.3. РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Оболочки цилиндрической формы широко применяются в различных отраслях техники в качестве резервуаров, баллонов давления, трубопроводов, корпусов летательных аппаратов и других силовых конструкций. Математический аппарат расчета тонких изотропных цилиндрических оболочек разработан достаточно полно. Расчет цилиндрических оболочек из слоистых композитов обладает рядом особенностей, и далеко не всегда удается воспользоваться известными решениями. Кроме того, даже для простых расчетных схем аналитические решения для оболочек из слоистых композитов, как правило, теряют свои основные преимущества, заключающиеся в простоте расчетных зависимостей и обозримости аналитических выкладок. В этих случаях оказывается удобней использовать более общий математический аппарат и проводить расчеты на ЭВМ.

4.3.1. Задача статики свободно опертой слоистой цилиндрической оболочки. Рассмотрим замкнутую круговую цилиндрическую оболочку, свободно опертую по торцам $x = 0$ и $x = l$ (рис. 4.2), нагруженную нормальными силами p и q по внутренней и внеш-

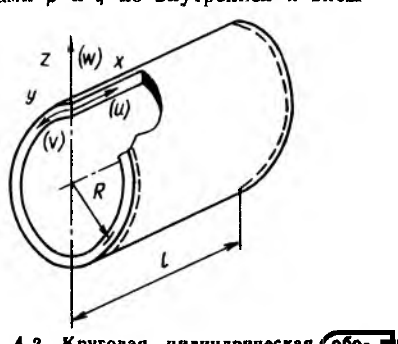


Рис. 4.2. Круговая цилиндрическая оболочка

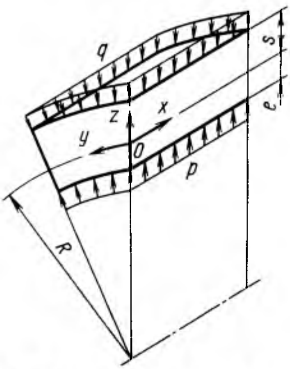


Рис. 4.3. Нагрузки, действующие на цилиндрическую оболочку

ней поверхностям (рис. 4.3). Граничные условия свободного опирания предполагают отсутствие на торцах нормального прогиба w, касательного перемещения v, угла поворота сечения в плоскости торца, осевого усилия N_x и изгибающего момента M_x. Такие граничные условия [4] приближенно моделируют опирание края оболочки на шпангоут, жесткий в своей плоскости и податливый при кручении и изгибе из плоскости.

Для решения воспользуемся вариационной формулировкой задачи, основанной на принципе возможных перемещений. С учетом граничных условий запишем

$$\int_0^l \int_0^{2\pi R} \left(\delta\varepsilon^{\mathrm{T}} \mathscr{N} - \delta X^{\mathrm{T}} \mathscr{P}\right) dy\, dx = 0, \tag{4.64}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon = [\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \varepsilon_{xy},\ \varepsilon_{yx},\ \varkappa_x,\\ &\quad \varkappa_y,\ \varkappa_{xy},\ \varkappa_{yx},\ \psi_x,\ \psi_y]^{\mathrm{T}};\\ &\mathscr{N} = [N_x,\ N_y,\ N_{xy},\ N_{yx},\\ &\quad M_x,\ M_y,\ M_{xy},\ M_{yx},\\ &\quad Q_x,\ Q_y]^{\mathrm{T}}; \end{aligned}\right\} \tag{4.65}$$

$$X = [w,\ \psi_x,\ \psi_y,\ u,\ v]^{\mathrm{T}}; \tag{4.66}$$

$$\mathscr{P} = [\bar{p},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}. \tag{4.67}$$

Здесь $\bar{p} = (1 - e/R)\,p - (1 + s/R)\,q$; $[-e$ и s — нормальные координаты внутренней и внешней поверхностей цилиндрической оболочки (см. рис. 4.3)].

Следует отметить, что включение в компоненты вектора обобщенных перемещений X (4.66) средних углов поперечного сдвига ψ_x, ψ_y (а не углов поворота сечений θ_x, θ_y) возможно только для граничных условий свободного опирания. В этом случае разрешающие системы алгебраических уравнений не содержат особенностей при переходе к тонким оболочкам и дают результаты, соответствующие гипотезам Кирхгофа—Лява. При выборе обобщенных перемещений в виде $X = [w,\ \theta_x,\ \theta_y,\ u,\ v]^{\mathrm{T}}$ определитель разрешающей системы стремится к нулю при $R/h \to \infty$.

Связь обобщенных деформаций с обобщенными перемещениями устанавливается согласно соотношениям (1.26); для цилиндрической оболочки

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x};\\ &\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R};\\ &\varepsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x};\quad \varepsilon_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y};\\ &\varkappa_x = \frac{\partial\theta_x}{\partial x} = \frac{\partial\psi_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2};\\ &\varkappa_y = \frac{\partial\theta_y}{\partial y} = \frac{\partial\psi_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} +\\ &\quad + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial y};\\ &\varkappa_{xy} = \frac{\partial\theta_y}{\partial x} = \frac{\partial\psi_y}{\partial x} -\\ &\quad - \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x};\\ &\varkappa_{yx} = \frac{\partial\theta_x}{\partial y} = \frac{\partial\psi_x}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y\,\partial x}, \end{aligned}\right\} \tag{4.68}$$

где использованы соотношения

$$\theta_x = \psi_x - \frac{dw}{dx};$$

$$\theta_y = \psi_y + \frac{v}{R} - \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Связь внутренних силовых факторов $\mathcal{N}$ с обобщенными деформациями ε определяется выражением $\mathcal{N} = \mathcal{D}\varepsilon$, структура матрицы $\mathcal{D}$ приведена в (4.45); коэффициенты матрицы $\mathcal{D}$ вычисляются согласно зависимостям (1.22) с учетом отсутствия кривизны оболочки в меридиональном направлении ($k_1 = 0$).

При симметричном [относительно плоскости $y = 0$ (см. рис. 4.2)] нагружении решение может быть представлено в виде двойных тригонометрических рядов

$$\begin{pmatrix} \bar{p}, & w \\ N_x, & \varepsilon_x \\ N_y, & \varepsilon_y \\ M_x, & \varkappa_x \\ M_y, & \varkappa_y \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \bar{p}_{mn}, & w_{mn} \\ N_{x\,mn}, & \varepsilon_{x\,mn} \\ N_{y\,mn}, & \varepsilon_{y\,mn} \\ M_{x\,mn}, & \varkappa_{x\,mn} \\ M_{y\,mn}, & \varkappa_{y\,mn} \end{pmatrix} \times$$
$$\times \sin\lambda_m \cos\lambda_n y;$$

$$\begin{pmatrix} & u \\ Q_x, & \psi_x \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} & u_{mn} \\ Q_{x\,mn}, & \psi_{x\,mn} \end{pmatrix} \times$$
$$\times \cos\lambda_m x \cos\lambda_n y;$$

$$\begin{pmatrix} & v \\ Q_y, & \psi_y \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} & v_{mn} \\ Q_{y\,mn}, & \psi_{y\,mn} \end{pmatrix} \times$$
$$\times \sin\lambda_m x \sin\lambda_n y;$$

$$\begin{pmatrix} N_{xy}, & \varepsilon_{xy} \\ N_{yx}, & \varepsilon_{yx} \\ M_{xy}, & \varkappa_{xy} \\ M_{yx}, & \varkappa_{yx} \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} N_{xy\,mn}, & \varepsilon_{xy\,mn} \\ N_{yx\,mn}, & \varepsilon_{yx\,mn} \\ M_{xy\,mn}, & \varkappa_{xy\,mn} \\ M_{yx\,mn}, & \varkappa_{yx\,mn} \end{pmatrix} \times$$
$$\times \cos\lambda_m x \sin\lambda_n y$$

или в матричном виде

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{\varepsilon\,mn} \varepsilon_{mn}; \\ \mathcal{N} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{N\,mn} \mathcal{N}_{mn}; \\ \mathbf{X} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{x\,mn} X_{mn}; \\ \mathcal{P} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{p\,mn} \mathcal{P}_{mn}, \end{aligned}\right\} \quad (4.69)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{\varepsilon\,mn} = \beta_{N\,mn} = \\ &= \lceil s_{mx}c_{ny},\ s_{mx}c_{ny},\ c_{mx}s_{ny},\ c_{mx}s_{ny},\ s_{mx}c_{ny},\ s_{mx}c_{ny},\ c_{mx}s_{ny},\ c_{mx}s_{ny},\ c_{mx}c_{ny},\ s_{mx}s_{ny}\rfloor; \\ &\beta_{x\,mn} = \beta_{p\,mn} = \\ &= \lceil s_{mx}c_{ny},\ c_{mx}c_{ny},\ s_{mx}s_{ny},\ c_{mx}c_{ny},\ s_{mx}s_{ny}\rfloor. \end{aligned}\right\} \quad (4.70)$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} s_{mx} &= \sin\lambda_m x; \quad c_{mx} = \cos\lambda_m x; \\ s_{ny} &= \sin\lambda_n y; \quad c_{ny} = \cos\lambda_n y; \\ \lambda_m &= \pi m/l; \quad \lambda_n = n/R. \end{aligned}\right\} \quad (4.71)$$

С учетом соотношений (4.68)—(4.71) можно представить связь амплитудных значений гармоник разложения ε_{mn} и X_{mn} в следующем виде:

$$\varepsilon_{mn} = L_{mn} X_{mn}, \quad (4.72)$$

где

$$L_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda_m & 0 \\ 1/R & 0 & 0 & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_m \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_n & 0 \\ \lambda_m^2 & -\lambda_m & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_n^2 & 0 & \lambda_n & 0 & \lambda_n/R \\ \lambda_m\lambda_n & 0 & \lambda_m & 0 & \lambda_m/R \\ \lambda_m\lambda_n & -\lambda_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для $\mathcal{N}_{mn}$ и ε_{mn} связь устанавливается приведенными соотношениями упругости

$$\mathcal{N}_{mn} = \mathcal{D}\varepsilon_{mn}. \qquad (4.73)$$

После подстановки в вариационную формулировку задачи (4.64) выражений (4.69)—(4.73) и выполнения операций интегрирования получим систему линейных алгебраических уравнений для m,n-й гармоники разложения решения

$$\mathcal{K}_{mn}X_{mn} = \mathcal{P}_{mn}, \qquad (4.74)$$

где

$$\mathcal{K}_{mn} = L_{mn}^{\mathrm{T}}\mathcal{D}L_{mn} \qquad (4.75)$$

— приведенная матрица жесткости системы; $\mathcal{P}_{mn}$ — вектор-столбец приведенных нагрузок. В рассматриваемой задаче в векторе $\mathcal{P}_{mn}$ содержится только один ненулевой коэффициент [см. (4.67)]

$$p_{mnp} = \frac{1}{d_{mn}} \int\limits_0^l \int\limits_0^{2\pi R} \bar{p}(x, y) \sin\frac{m\pi x}{l} \times$$

$$\times \cos\frac{ny}{R}\, dy\, dx, \qquad (4.76)$$

где $m = 1, 2, 3, \ldots$; $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$;

$$d_{mn} = \begin{cases} \pi Rl/2 & \text{при} \quad n \neq 0; \\ \pi Rl & \text{при} \quad n = 0; \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} m = 1, 2, 3, \ldots; \\ m = 1, 2, 3, \ldots . \end{matrix}\right\} \qquad (4.77)$$

Для случая равномерного давления

$$p_{mn} = \begin{cases} 4\bar{p}/(\pi m) & n = 0; \\ & m = 1, 3, 5, \ldots \\ 0, & \text{если } n \neq 0. \end{cases}$$

При нагружении оболочки в точке $x = l/2$, $y = 0$ сосредоточенной нормальной силой P, совпадающей по направлению с внешней нормалью [4], коэффициенты p_{mn} будут определяться следующим образом:

$$p_{m0} = (-1)^{\frac{m+3}{2}} \frac{P}{\pi Rl}$$

$$(m = 1, 3, 5, \ldots);$$

$$p_{mn} = (-1)^{\frac{m+3}{2}} \frac{2P}{\pi Rl}$$

$$\begin{pmatrix} m = 1, 3, 5, \ldots \\ n = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix}$$

При нагружении оболочки системой k сосредоточенных нормальных сил (симметрично расположенных относительно плоскости $y = 0$) для вычисления коэффициентов p_{mn} можно воспользоваться выражением

$$p_{mn} = \frac{1}{d_{mn}} \sum_{i=1}^{k} P_i \sin\frac{m\pi x_i}{l} \times$$

$$\times \cos\frac{n\pi y_i}{R} \qquad (4.78)$$

где P_i — значение нормальной силы (положительное направление вдоль внешней нормали); x_i, y_i — координаты x и y точки приложения i-й силы; d_{mn} — коэффициент, определяемый из выражения (4.77).

После решения системы алгебраических уравнений (4.74) и определения коэффициентов вектор-столбца X_{mn} вычисляются с помощью соотношения (4.72) компоненты ε_{mn}. Далее согласно (4.69) производится накопление результатов в точках вывода.

Рассмотрим один частный случай расчета, относящийся к тонким гладким слоистым и регулярно подкрепленным оболочкам, нагруженным нормальным давлением [4].

При расчете таких оболочек можно не учитывать изменение радиуса кривизны по толщине и деформации поперечного сдвига ($\psi_x = \psi_y = 0$).

Решением для m,n-й гармоники разложения будут следующие амплитудные значения перемещений:

$$\left.\begin{aligned}
u_{mn} &= \frac{p_{mn}}{D}\,(d_{13}d_{22} - d_{12}d_{23});\\
v_{mn} &= \frac{p_{mn}}{D}\,(d_{12}d_{13} - d_{11}d_{23});\\
w_{mn} &= \frac{p_{mn}}{D}\,(d_{11}d_{22} - d_{12}^2),
\end{aligned}\right\} \quad (4.79)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&d_{ij} = c_{cj} + a_{ij}; \quad c_{11} = 0;\\
&c_{12} = \frac{1}{R}\,(C_{12} + C_{33})\,\lambda_m\lambda_n;\\
&c_{13} = \frac{B_{12}}{R}\,\lambda_m;\\
&c_{22} = \frac{1}{R}\left(2C_{33} + \frac{D_{33}}{R}\right)\lambda_m^2 +\\
&\quad + \frac{1}{R}\left(2C_{22} + \frac{D_{22}}{R}\right)\lambda_n^2;\\
&c_{23} = \left(B_{22} + \frac{C_{22}}{R}\right)\frac{\lambda_n}{R} +\\
&\quad + \frac{1}{R}\,(D_{12} - 2D_{33})\,\lambda_m^2\lambda_n +\\
&\quad + \frac{D_{22}}{R}\lambda_n^3; \quad c_{33} = \frac{B_{22}}{R^2} +\\
&\quad + \frac{2}{R}\,(C_{12}\lambda_m^2 + C_{22}\lambda_n^2);\\
&a_{11} = B_{11}\lambda_m^2 + B_{33}\lambda_n^2;\\
&a_{12} = (B_{12} + B_{33})\,\lambda_n\lambda_m;\\
&a_{22} = B_{33}\lambda_m^2 + B_{22}\lambda_n^2;\\
&a_{13} = C_{11}\lambda_m^3 +\\
&\quad + (C_{12} + 2C_{33})\,\lambda_m\lambda_n^2;\\
&a_{23} = C_{22}\lambda_n^3 +\\
&\quad + (C_{12} + 2C_{33})\,\lambda_m^2\lambda_n;\\
&a_{33} = D_{11}\lambda_m^4 +\\
&\quad + 2\,(D_{12} + 2D_{33})\,\lambda_m^2\lambda_n^2 +\\
&\quad + D_{22}\lambda_n^4;\\
&D = d_{33}\,(d_{11}d_{22} - d_{12}^2) -\\
&\quad - d_{11}d_{23}^2 - d_{22}d_{13}^2 +\\
&\quad + 2d_{12}d_{13}d_{23}.
\end{aligned}\right\} \quad (4.80)$$

Для вычисления амплитудных значений гармоник разложения обобщенных деформаций можно воспользоваться зависимостями (4.72), положив ψ_{xmn} и ψ_{ymn} равными нулю.

4.3.2. Осесимметричная деформация цилиндрических оболочек. Для замкнутых цилиндрических оболочек, нагруженных внутренним давлением p, внешним давлением q и осевыми усилиями $N = \text{const}$, не изменяющимися по координате y (рис. 4.4), исходными данными для проведения расчета будут следующие соотношения.

Связь деформаций с перемещениями:

$$\varepsilon_x = u'; \quad \varepsilon_y = \frac{w}{R};$$

$$\varkappa_x = \theta_x'; \quad \psi_x = \theta_x + w', \quad (4.81)$$

где

$$(\cdot)' = \frac{d}{dx}\,(\cdot).$$

Физические соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
N_x &= B_{11}\varepsilon_x + B_{12}\varepsilon_y;\\
N_y &= B_{12}\varepsilon_x + B_{22}\varepsilon_y + C_{12}\varkappa_x;\\
M_x &= C_{12}\varepsilon_y + D_{11}\varkappa_x;\\
Q_x &= K_x\psi_x.
\end{aligned}\right\} \quad (4.82)$$

Координата начальной поверхности e выбрана так, чтобы смешанная жест-

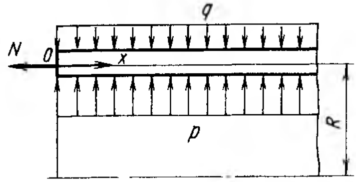


Рис. 4.4. Осесимметричное нагружение цилиндрической оболочки

кость C_{11} обращалась в ноль. В этом случае [см. (1.40)]

$$B_{11} = I_{11}^{(0)};\quad B_{12} = I_{12}^{(0)};\quad B_{22} = I_{22}^{(0)};$$

$$C_{12} = I_{12}^{(1)} - \frac{1}{I_{11}^{(0)}} I_{11}^{(1)} I_{12}^{(0)};$$

$$D_x = D_{11} = I_{11}^{(2)} - \frac{\left[I_{11}^{(1)}\right]^2}{I_{11}^{(0)}};$$

$$K_x = K_1;\quad e = \frac{I_{11}^{(1)}}{I_{11}^{(0)}}.$$

Каноническая система разрешающих дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
u' &= -\frac{B_{12}}{RB_{11}} w + \frac{1}{B_{11}} N_x;\\
w' &= -\theta_x + \frac{1}{K_x} Q_x;\\
\theta_x' &= -\frac{C_{12}}{RD_x} w + \frac{1}{D_x} M_x;\\
N_x' &= 0;\\
Q_x' &= \frac{1}{R^2}\left(\frac{B}{B_{11}} - \frac{C_{12}^2}{D_x}\right) w +\\
&+ \frac{B_{12}}{RB_{11}} N_x + \frac{C_{12}}{RD_x} M_x - \bar{p};\\
M_x' &= Q_x,
\end{aligned}\right\}\qquad (4.83)$$

где $B = B_{11}B_{22} - B_{12}^2$.

Если в качестве вектора состояния принять $\mathbf{Z} = [u, w, \theta_x, N_x, Q_x, M_x]^{\mathrm{T}}$, то матрицу разрешающей системы (4.83) [в п. 4.1.1 эта матрица представлена в блочном виде $\mathbf{A}_{ij}$ (4.9)] можно представить в виде

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
0 & -a_{12} & 0 & a_{14} & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & a_{25} & 0\\
0 & -a_{32} & 0 & 0 & 0 & a_{36}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & a_{52} & 0 & a_{12} & 0 & a_{32}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}, \qquad (4.84)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
a_{12} &= \frac{B_{12}}{RB_{11}};\quad a_{14} = \frac{1}{B_{11}};\\
a_{25} &= \frac{1}{K_x};\quad a_{32} = \frac{C_{12}}{RD_x};\\
a_{36} &= \frac{1}{D_x};\\
a_{52} &= \frac{1}{R^2}\left(\frac{B}{B_{11}} - \frac{C_{12}^2}{D_x}\right);\\
B &= B_{11}B_{22} - B_{12}^2.
\end{aligned}\right\}\qquad (4.85)$$

Таким образом, исходную систему (4.83) запишем так:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{A}\mathbf{Z} + \mathbf{H}, \qquad (4.86)$$

где

$$\mathbf{Z}' = \frac{d}{dx}[u, w, \theta_x, N_x, Q_x, M_x]^{\mathrm{T}};$$

$$\mathbf{H} = [0, 0, 0, 0, -\bar{p}, 0]^{\mathrm{T}};$$

матрица $\mathbf{A}$ определена таблицей (4.84).

Будем искать решение системы (4.86) в форме

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_* + \mathbf{Z}_{\text{частн}},$$

где $\mathbf{Z}_*$ — решение однородной системы $\mathbf{Z}' = \mathbf{A}\mathbf{Z}$; $\mathbf{Z}_{\text{частн}}$ — частное решение неоднородной системы (4.86). Для однородной системы с постоянными коэффициентами решение запишем в виде $\mathbf{Z} = \mathbf{C}e^{\nu x}$. Для определения коэффициентов ν получим характеристическое уравнение $\det(\mathbf{A} - \nu\mathbf{E}) = 0$ или в развернутом виде

$$\det\begin{bmatrix}
-\nu & -a_{12} & 0 & a_{14} & 0 & 0\\
0 & -\nu & -1 & 0 & a_{25} & 0\\
0 & -a_{32} & -\nu & 0 & 0 & a_{36}\\
0 & 0 & 0 & -\nu & 0 & 0\\
0 & a_{52} & 0 & a_{12} & -\nu & a_{32}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\nu
\end{bmatrix} =$$

$$= \nu^2\left(\nu^4 - 2k_1^2\nu^2 + k_2^4\right) = 0, \qquad (4.87)$$

где

$$2k_1^2 = 2a_{32} + a_{25}a_{52};$$

$$k_2^4 = a_{52}a_{36} + a_{32}^2,$$

или

$$\left.\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{1}{2RD_x}\times \\ &\times\left[C_{12}\left(2-\frac{C_{12}}{RK_x}\right)+\right. \\ &\left.+\frac{BD_x}{RB_{11}K_x}\right]; \\ k_2^4 &= \frac{B}{R^2B_{11}D_x}; \\ B &= B_{11}B_{22}-B_{12}^2. \end{aligned}\right\} \quad (4.88)$$

Два нулевых корня решения (4.87) соответствуют осевому смещению оболочки как твердого тела и равномерному растяжению вдоль оси x.

При $k_1^2 < k_2^2$

$$\nu_{1,2} = -r \pm it;\ \nu_{3,4} = r \pm it,$$

где

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{\frac{1}{2}(k_2^2+k_1^2)}; \\ t &= \sqrt{\frac{1}{2}(k_2^2-k_1^2)}. \end{aligned}\right\} \quad (4.89)$$

При $k_1^2 > k_2^2$

$$\nu_1 = -r_1;\ \nu_2 = -r_2;$$
$$\nu_3 = r_1;\ \nu_4 = r_2,$$

где

$$r_{1,2} = \sqrt{k_1^2 \mp \sqrt{k_1^4-k_2^4}}. \quad (4.90)$$

При постоянном давлении $\bar{p}$ и осевой растягивающей силе N полное решение можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{1}{B_{11}}\times \\ &\times\left[Nx-\frac{B_{12}}{R}\int w\,dx\right]+u_0; \\ N_x &= N; \\ w &= \sum_{i=1}^{4} C_i\Phi_{wi}(x)+w_0; \\ \theta_x &= \sum_{i=1}^{4} C_i\Phi_{\theta i}(x); \\ Q_x &= \sum_{i=1}^{4} C_i\Phi_{Qi}(x); \\ M_x &= \sum_{i=1}^{4} C_i\Phi_{Mi}(x)+M_0, \end{aligned}\right\} \quad (4.91)$$

где u_0 — осевое смещение цилиндрической оболочки как твердого тела;

$$\left.\begin{aligned} w_0 &= \frac{R}{B}(\bar{p}RB_{11}-NB_{12}); \\ M_0 &= \frac{C_{12}}{R}w_0 \end{aligned}\right\} \quad (4.92)$$

— частные решения; константы C_i определяются с использованием граничных условий задачи; функции Φ_{wi}, $\Phi_{\theta i}$, Φ_{Qi}, Φ_{Mi} имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{Mi} &= \Phi_i;\quad \Phi_{Qi} = \Phi_i'; \\ \Phi_{wi} &= \frac{1}{a_{52}}\Phi_i''-\frac{a_{32}}{a_{52}}\Phi_i; \\ \Phi_{\theta i} &= -\frac{1}{a_{52}}\Phi_i'''+ \\ &+\left(\frac{a_{32}}{a_{52}}+a_{25}\right)\Phi_i'. \end{aligned}\right\} \quad (4.93)$$

Для расчета коротких оболочек, края которых «влияют друг на друга», удобно пользоваться функциями в следующем виде:

при $k_1^2 < k_2^2$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \operatorname{ch} rx\cos tx; \\ \Phi_2 &= \operatorname{sh} rx\sin tx; \\ \Phi_3 &= \operatorname{ch} rx\sin tx; \\ \Phi_4 &= \operatorname{sh} rx\cos tx, \end{aligned}\right\} \quad (4.94)$$

где r и t вычисляются согласно (4.89);

при $k_1^2 > k_2^2$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \operatorname{ch} r_1x;\quad \Phi_2 = \operatorname{ch} r_2x; \\ \Phi_3 &= \operatorname{sh} r_1x;\quad \Phi_4 = \operatorname{sh} r_2x, \end{aligned}\right\} \quad (4.95)$$

где r_1, r_2 вычисляются согласно (4.90).

Для расчета длинных оболочек, края которых практически «не влияют друг на друга», используется запись через экспоненциальные функции:

при $k_1^2 < k_2^2$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= e^{-rx}\cos tx; \\ \Phi_2 &= e^{-rx}\sin tx; \\ \Phi_3 &= e^{rx}\cos tx; \\ \Phi_4 &= e^{rx}\sin tx; \end{aligned}\right\} \quad (4.96)$$

4.1. Формулы для функций Φ_i и их производных

Функция Φ_i и производные	Формулы при $k_1^2 < k_2^2$	Формулы при $k_1^2 > k_2^2$
Φ_1	$e^{-rx}\cos tx$	$e^{-r_1 x}$
Φ_2	$e^{-rx}\sin tx$	$e^{-r_2 x}$
Φ_1'	$-t\Phi_2 - r\Phi_1$	$-r_1\Phi_1$
Φ_2'	$t\Phi_1 - r\Phi_2$	$-r_2\Phi_2$
Φ_1''	$(r^2 - t^2)\,\Phi_1 + 2rt\Phi_2$	$r_1^2\Phi_1$
Φ_2''	$(r^2 - t^2)\,\Phi_2 - 2rt\Phi_1$	$r_2^2\Phi_2$
Φ_1'''	$-r\,(r^2 - 3t^2)\,\Phi_1 + t\,(t^2 - 3r^2)\,\Phi_2$	$-r_1^3\Phi_1$
Φ_2'''	$-r\,(r^2 - 3t^2)\,\Phi_2 - t\,(t^2 - 3r^2)\,\Phi_1$	$-r_2^3\Phi_2$

при $k_1^2 > k_2^2$

$$\Phi_1 = e^{-r_1 x};\quad \Phi_2 = e^{-r_2 x};\qquad \Phi_3 = e^{r_1 x};\quad \Phi_4 = e^{r_2 x}. \tag{4.97}$$

Для определения постоянных интегрирования C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) используются четыре граничных условия задачи, которые при $x = 0$ и $x = l$ могут быть наложены на θ_x (либо на M_x), а также на w (либо на Q_x).

При анализе краевого эффекта вблизи $x = 0$ для длинных оболочек можно воспользоваться функциями (4.96) или (4.97) (в зависимости от соотношения параметров k_1^2, k_2^2), положить $C_3 = C_4 = 0$, а коэффициенты C_1, C_2 определить из граничных условий при $x = 0$.

Для удобства проведения вычислений в табл. 4.1 представлены формулы для вычисления функции Φ_i и их производных; в табл. 4.2 приводятся выражения для функций решений Φ_{Mi}, Φ_{Qi}, Φ_{wi}, $\Phi_{\theta i}$; в табл. 4.3 даны выражения для функций решения при $x=0$

Примеры расчета краевых эффектов слоистой композитной цилиндрической оболочки приведены ниже.

Общие соотношения. Согласно (4.91) решение записывается в виде

$$w = \Phi_{w1}C_1 + \Phi_{w2}C_2 + w_0;$$
$$\theta_x = \Phi_{\theta 1}C_1 + \Phi_{\theta 2}C_2;\qquad Q_x = \Phi_{Q1}C_1 + \Phi_{Q2}C_2; \tag{4.98}$$
$$M_x = \Phi_{M1}C_1 + \Phi_{M2}C_2 + M_0,$$

где w_0, M_0 определяются выражениями (4.92); вид функций решения дается в табл. 4.2; значения функций решения при $x = 0$ приводятся в табл. 4.3.

Для определения напряжений в i-м слое оболочки необходимо выполнить следующие операции.

1. Вычислить

$$\varepsilon_x = \frac{N}{B_{11}} - \frac{B_{12}}{B_{11}}\frac{w}{R};\quad \varepsilon_y = \frac{w}{R};$$

$$\varkappa_x = \frac{M_x}{D_x} - \frac{C_{12}}{D_x}\frac{w}{R}.$$

2. Подсчитать деформации в i-м слое

$$\varepsilon_x^i = \varepsilon_x + \gamma_i\varkappa_x;\quad \varepsilon_y^i = \varepsilon_y,$$

где γ_i — нормальная координата в пределах i-го слоя.

3. С использованием соотношений, приведенных в гл. 5 и 8 ч. I, пересчитать деформации в системе координат слоя и воспользоваться законом Гука.

Пример 1. Свободный край (см. рис. 4.4).

Граничные условия

$$M_x(0) = 0;\qquad Q_x(0) = 0$$

или с учетом (4.98)

$$\Phi_{M1}^0 C_1 + \Phi_{M2}^0 C_2 = -M_0;$$
$$\Phi_{Q1}^0 C_1 + \Phi_{Q2}C_2 = 0,$$

отсюда

$$C_1 = -M_0\frac{\Phi_{Q2}^0}{d};\quad C_2 = M_0\frac{\Phi_{Q2}^0}{d},$$

где

$$d = \Phi_{M1}^0\Phi_{Q2}^0 - \Phi_{Q1}^0\Phi_{M2}^0.$$

4.2. Выражения для функций решений

Функция	Выражения при условии	
	$k_1^2 < k_2^2$	$k_1^2 > k_2^2$
Φ_{M_1}	$\Phi_1 = e^{-rx} \cos tx$	$\Phi_1 = e^{-r_1 x}$
Φ_{M_2}	$\Phi_2 = e^{-rx} \sin tx$	$\Phi_2 = e^{-r_2 x}$
Φ_{Q_1}	$-t\Phi_2 - r\Phi_1$	$-r_1\Phi_1$
Φ_{Q_2}	$t\Phi_1 - r\Phi_2$	$-r_2\Phi_2$
Φ_{w1}	$\Phi_1 \left[\frac{1}{a_{52}}(r^2 - t^2) - \frac{a_{32}}{a_{52}}\right] + \Phi_2 \left[\frac{1}{a_{52}} 2rt\right]$	$\left[\frac{r_1^2}{a_{52}} - \frac{a_{32}}{a_{52}}\right] \Phi_1$
Φ_{w2}	$\Phi_1 \left[-\frac{1}{a_{52}} 2rt\right] + \Phi_2 \left[\frac{r^2 - t^2}{a_{52}} - \frac{a_{32}}{a_{52}}\right]$	$\left[\frac{r_2^2}{a_{52}} - \frac{a_{32}}{a_{52}}\right] \Phi_2$
$\Phi_{\theta 1}$	$\Phi_1 \left[\frac{r(r^2 - 3t^2)}{a_{52}} - r\left(\frac{a_{32}}{a_{52}} + a_{25}\right)\right] + \Phi_2 \left[\frac{-t(t^2 - 3r^2)}{a_{52}} - t\left(\frac{a_{32}}{a_{52}} + a_{25}\right)\right]$	$\left[\frac{r_1^3}{a_{52}} - \left(\frac{a_{32}}{a_{52}} + a_{25}\right) r_1\right] \Phi_1$
$\Phi_{\theta 2}$	$\Phi_1 \left[\frac{t(t^2 - 3r^2)}{a_{52}} + t\left(\frac{a_{32}}{a_{52}} + a_{25}\right)\right] + \Phi_2 \left[\frac{r(r^2 - 3t^2)}{a_{52}} - r\left(\frac{a_{32}}{a_{52}} + a_{25}\right)\right]$	$\left[\frac{r_2^3}{a_{52}} - \left(\frac{a_{32}}{a_{52}} + a_{25}\right) r_2\right] \Phi_2$

Согласно данным табл. 4.3 имеем:

1) если параметры оболочки таковы [см. (4.88)], что $k_1^2 < k_2^2$, то

$$\Phi_{M1}^0 = 1; \quad \Phi_{M2}^0 = 0; \quad \Phi_{Q1}^0 = -r;$$

$$\Phi_{Q2}^0 = t; \quad d = t;$$

$$C_1 = -M_0; \quad C_2 = -M_0 r/t,$$

где r и t вычисляются согласно (4.89), коэффициенты системы определяются по табл. 4.3;

2) если $k_1^2 > k_2^2$, то

$$\Phi_{M1}^0 = 1; \quad \Phi_{M2}^0 = 1; \quad \Phi_{Q1}^0 = -r_1;$$

$$\Phi_{Q2}^0 = -r_2; \quad d = 1 + r_1 r_2;$$

$$C_1 = M_0 \frac{r_2}{1 + r_1 r_2};$$

$$C_2 = M_0 \frac{-r_1}{1 + r_1 r_2},$$

4.3. Выражения для функций решений при $x = 0$

Функция	Выражения при условии	
	$k_1^2 < k_2^2$	$k_1^2 > k_2^2$
Φ_{M1}^0	1	1
Φ_{M2}^0	0	1
Φ_{Q1}^0	$-r$	$-r_1$
Φ_{Q2}^0	t	$-r_2$
Φ_{w1}^0	$\dfrac{r^2 - t^2}{a_{52}} - \dfrac{a_{32}}{a_{52}}$	$\dfrac{r_1^2}{a_{52}} - \dfrac{a_{32}}{a_{52}}$
Φ_{w2}^0	$-\dfrac{2rt}{a_{52}}$	$\dfrac{r_2^2}{a_{52}} - \dfrac{a_{32}}{a_{52}}$
$\Phi_{\theta 1}^0$	$\dfrac{r(r^2 - 3t^2)}{a_{52}} - r\left(\dfrac{a_{32}}{a_{52}} + a_{25}\right)$	$\dfrac{r_1^3}{a_{52}} - \left(\dfrac{a_{32}}{a_{52}} + a_{25}\right) r_1$
$\Phi_{\theta 2}^0$	$\dfrac{t(t^2 - 3r^2)}{a_{52}} + t\left(\dfrac{a_{32}}{a_{52}} + a_{25}\right)$	$\dfrac{r_2^3}{a_{52}} - \left(\dfrac{a_{32}}{a_{52}} + a_{25}\right) r_2$

где r_1 и r_2 вычисляются согласно (4.90), коэффициенты системы определяются по табл. 4.3.

Для оболочки симметричного строения (при $C_{12} = 0$) $M_0 = 0$ [см. (4.92)] краевой эффект свободного края отсутствует.

Пример 2. Действие торцовых моментов M и перерезывающих сил Q (рис. 4.5, *а*).

Граничные условия

$$M_x(0) = M;$$

$$Q_x(0) = Q,$$

или

$$\Phi_{M1}^0 C_1 + \Phi_{M2}^0 C_2 = M - M_0;$$

$$\Phi_{Q1}^0 C_1 + \Phi_{Q2}^0 C_2 = Q,$$

отсюда

$$C_1 = (M - M_0)\frac{\Phi_{Q2}^0}{d} - Q\frac{\Phi_{M2}^0}{d};$$

$$C_2 = -(M - M_0)\frac{\Phi_{Q1}^0}{d} + Q\frac{\Phi_{M1}^0}{d},$$

где

$$d = \Phi_{M1}^0 \Phi_{Q2}^0 - \Phi_{Q1}^0 \Phi_{M2}^0.$$

Дальнейшая последовательность решения такая же, как для примера 1.

Пример 3. Краевой эффект в зоне подкрепления упругим шпангоутом (рис. 4.5).

Граничные условия

$$\theta_x(0) = 0;$$

$$w(0) = w_к,$$

где

$$w_к = \frac{R^2}{B_к}\left[\bar{p}a_к + 2Q_x(0)\right];$$

$B_к = E_к h_к a_к$ — жесткость кольца на растяжение.

С помощью констант C_1, C_2 граничные условия задачи запишутся в следующем виде:

$$\Phi^0_{\theta 1}C_1 + \Phi^0_{\theta 2}C_2 = 0;$$

$$\left(\Phi^0_{w1} - \frac{2R^2}{B_к}\Phi^0_{Q1}\right)C_1 + \left(\Phi^0_{w2} - \frac{2R^2}{B_к}\Phi^0_{Q2}\right)C_2 = \frac{R^2\bar{p}a_к}{B_к} - w_0.$$

Решением системы при $C_{12} = 0$ и $K_x \to \infty$ будет

$$C_1 = -\frac{w_0 - \dfrac{\bar{p}a_к R^2}{B_к}}{\dfrac{2r^2}{a_{52}}\left(1 + \dfrac{8R^2D_x r^3}{B_к}\right)};$$

$$C_2 = -C_1;$$

$$w = w_0 - \frac{w_0 - \dfrac{\bar{p}a_к R^2}{B_к}}{1 + \dfrac{8R^2D_x r^3}{B_к}}e^{-rx}(\cos rx + \sin rx).$$

Для анализа краевого эффекта для тонкой слоистой цилиндрической оболочки коэффициенты разрешающей системы дифференциальных уравнений упрощаются:

$$a_{25} = 0; \quad k_1^2 = \frac{C_{13}}{RD_x};$$

$$k_2^4 = \frac{B}{R^2B_{11}D_x}.$$

Разрешающая система дифференциальных уравнений (4.83) может быть сведена к следующему виду [4]:

$$u = \frac{1}{B_{11}}\left[Nx - \frac{B_{12}}{R}\int w\,dx\right] + u_0;$$

$$N_x = N;$$

$$w^{IV} - 2k_1^2 w'' + k_1^4 w = k_p(x),$$

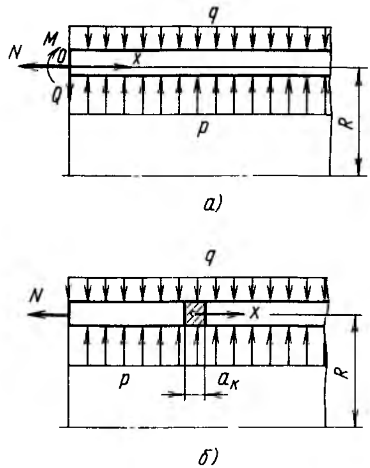


Рис. 4.5. Цилиндрическая оболочка:
а — нагруженная торцовыми силами и моментами; *б* — усиленная шпангоутом

где

$$k_p(x) = \frac{1}{D_x}\left(\bar{p} - \frac{B_{12}N}{R} - \frac{D_x}{K_x}\bar{p}''\right).$$

4.3.3. Устойчивость цилиндрических оболочек. Рассмотрим решение задачи устойчивости свободно опертой по торцам ($x = 0$, $x = l$) многослойной цилиндрической оболочки, находящейся в безмоментном осесимметричном напряженном состоянии:

$$N_x^0 = -T; \quad N_y^0 = -qR; \quad N_{xy}^0 = 0.$$

Для случая «мертвых» внешних сил воспользуемся следующей вариационной формулировкой задачи:

$$\int_0^l \int_0^{2\pi R} \left(\delta\varepsilon^T \mathcal{N} - \Lambda\,\delta\theta^T \mathcal{N}_0\theta\right) dy\,dx = 0, \tag{4.99}$$

где

$$\theta = [\omega_x,\ \omega_y]^T;$$

$$\mathcal{N}_0 = \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & qR \end{bmatrix};$$

$$\omega_x = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \omega_y = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R};$$

Λ — параметр нагружения; компоненты векторов $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathcal{N}$ представлены соотношениями (4.65). Связь деформаций с перемещениями определяется так же, как и при решении задачи статики, выражениями (4.68).

Введем в рассмотрение вектор-столбец обобщенных перемещений X [см. (4.66)]. Воспользуемся разложением решений в тригонометрические ряды [см. (4.69)], в результате для m, n-й гармоники разложения запишем

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{mn} = L_{mn}X_{mn}; \quad \mathcal{N}_{mn} = \mathcal{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{mn}; \quad \boldsymbol{\theta}_{mn} = R_{mn}X_{mn}, \tag{4.100}$$

где

$$R_{mn} = \begin{bmatrix} -\lambda_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_n & 0 & 0 & 0 & 1/R \end{bmatrix};$$

$$\lambda_m = \pi m/l; \quad \lambda_n = n/R;$$

матрица $\mathbf{L}_{mn}$ определена для выражения (4.72); структура матрицы $\mathcal{D}$ приводится в (4.45), коэффициенты матрицы $\mathcal{D}$ вычисляются согласно зависимостям (1.22). После выполнения интегрирования с учетом (4.100) вариационная формулировка задачи (4.99) позволяет получить следующую обобщенную задачу на собственные значения:

$$(\mathcal{K}_{mn} - \Lambda S_{mn}) X_{mn} = 0, \tag{4.101}$$

где

$$\mathcal{K}_{mn} = L_{mn}^{\mathrm{T}}\mathcal{D}L_{mn};$$

$$S_{mn} = K_{mn}^{\mathrm{T}}\mathcal{N}_0 R_{mn}.$$

Матрица $\mathcal{K}_{mn}$ характеризует приведенную жесткость оболочки; с помощью матрицы S_{mn} учитывается начальное напряженное состояние оболочки. Нагружение считается пропорциональным. Значения параметров нагружения $\Lambda = \Lambda_{mn}$, при котором система (4.101) имеет нетривиальные решения, называются собственными значениями. Собственные значения Λ_{mn} определяются корнями уравнения

$$\det(\mathcal{K}_{mn} - \Lambda_{mn}S_{mn}) = 0. \tag{4.102}$$

Наименьшее из всех собственных значений $\Lambda_* = \min\limits_{(m,\,n)} \Lambda_{mn}$ определяет критическую комбинацию нагрузки

$$T_{\text{кр}} = \Lambda_* T; \quad q_{\text{кр}} = \Lambda_* q.$$

Параметры волнообразования m и n, соответствующие критической комбинации нагрузки, характеризуют форму потери устойчивости.

Уравнения (4.101), (4.102) позволяют определять критические комбинации осевых и боковых нагрузок, а также формы потери устойчивости для слоистых цилиндрических оболочек общего вида.

Рассмотрим случай одноосного осевого сжатия. Для осесимметричной формы потери устойчивости ($n = 0$, $v = 0$, $\psi_y = 0$) получим [4]

$$T_{\text{кр}} = \min_{(m)} \left\{ \frac{\lambda_m^4 D_x + \dfrac{\lambda_m^2}{R}\left[C_{12}\left(2 - \dfrac{C_{12}}{RK_x}\right) + \dfrac{BD_x}{RB_{11}X_x} + \dfrac{B}{R^2B_{11}} \right]}{\lambda_m^2\left(1 + \dfrac{D_x}{K_x}\lambda_m^2\right)} \right\}, \tag{4.103}$$

где $\lambda_m = \pi m/l$, $B = B_{11}B_{22} - B_{12}^2$. Критическое усилие определяется в результате минимизации выражения (4.103) по числу полуволн в осевом направлении (m).

При расчете тонкой оболочки можно пренебречь деформацией поперечного сдвига, положив $K_x \to \infty$. Тогда

$$T_{\text{кр}} = \min_{(m)} \left\{ \lambda_m^2 D_x + \frac{2C_{12}}{R} + \frac{1}{\lambda_m^2}\,\frac{B}{R^2B_{11}} \right\}. \tag{4.104}$$

При большом числе m выражение (4.104) допускает приближенную минимизацию. Используя условие минимума функции с непрерывным аргументом, получим

$$\lambda_m = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{B}{B_{11}D_x}}; \tag{4.105}$$

$$T_{\text{кр}} = \frac{2}{R}\left(\sqrt{\frac{BD_x}{B_{11}}} + C_{12}\right)$$

При исследовании неосесимметричной формы потери устойчивости необходимо воспользоваться уравнением (4.102). Для случая осевого сжатия решением (4.102) будет выражение

$$T_{\text{кр}} = \min_{(m,\ n)} \left\{ \frac{1}{\lambda_m^2} \left[k_{11} + \frac{1}{\Delta_{11}} \times \right. \right.$$

$$\times (-k_{12}\Delta_{12} + k_{13}\Delta_{13} -$$

$$\left.\left. - k_{14}\Delta_{14} + k_{15}\Delta_{15}) \right] \right\}, \quad (4.106)$$

где k_{ij} — элементы матрицы $\mathscr{K}_{mn}$ [см. (4.101)]; Δ_{ij} — миноры матрицы $\mathscr{K}_{mn}$, представляющие определители четвертого порядка, соответствующие тем матрицам, которые получаются из матрицы $\mathscr{K}_{mn}$ в результате вычеркивания i-й строки и j-го столбца.

Для тонких слоистых оболочек, при анализе которых можно не учитывать изменение радиуса кривизны по толщине и деформации поперечного сдвига, выражение (4.106) упрощается:

$$T_{\text{кр}} = \min_{(m,\ n)} \left\{ \frac{1}{\lambda_m^2} \left[d_{33} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{d_{11}d_{23}^2 + d_{22}d_{13}^2 - - 2d_{12}d_{13}d_{23}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \right] \right\}, \quad (4.107)$$

где коэффициенты d_{ij} определяются выражениями (4.80).

Рассмотрим случай действия бокового внешнего давления q ($T = 0$). Будем считать, что потеря устойчивости сопровождается появлением системы волн $m = 1$, $n \gg 1$. Тогда угол поворота нормали ω_y можно приближенно определить как $\omega_y = -dw/dy$.

Для толстых слоистых оболочек, расчет которых проводится с учетом изменения метрических характеристик по толщине пакета и с учетом деформаций поперечного сдвига, получим аналогично (4.106)

$$q_{\text{кр}}R =$$

$$= \min_{(m=1);\ n} \left\{ \frac{1}{\lambda_n^2} \left[k_{11} + \right.\right.$$

$$+ \frac{1}{\Delta_{11}} (-k_{12}\Delta_{12} +$$

$$\left.\left. + k_{13}\Delta_{13} - k_{14}\Delta_{14} + k_{15}\Delta_{15}) \right] \right\}. \quad (4.108)$$

Для тонких слоистых оболочек [аналогично (4.114)]

$$q_{\text{кр}}R =$$

$$= \min_{(m=1;\ n)} \left\{ \frac{1}{\lambda_n^2} \left[d_{33} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{d_{11}d_{23}^2 + d_{22}d_{13}^2 - - 2d_{12}d_{13}d_{23}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2} \right] \right\}. \quad (4.109)$$

В случае пропорционального нагружения осевой силой и боковым внешним давлением для определения критического параметра нагружения можно воспользоваться выражениями

$$\Lambda_{\text{кр}} = \min_{(m,\ n)} \left\{ \frac{F_{mn}}{T\lambda_m^2 + qR\lambda_n^2} \right\},$$

где для расчета толстых оболочек

$$F_{mn} = k_{11} + \frac{1}{\Delta_{11}} (-k_{12}\Delta_{12} + k_{13}\Delta_{13} -$$

$$- k_{14}\Delta_{14} + k_{15}\Delta_{15});$$

для расчета тонких оболочек

$$F_{mn} = d_{33} -$$

$$- \frac{d_{11}d_{23}^2 + d_{22}d_{13}^2 - 2d_{12}d_{13}d_{23}}{d_{11}d_{22} - d_{12}^2};$$

T, q — силовые факторы, определенные при параметре нагружения $\Lambda = 1$. Критические нагрузки будут вычисляться как $T_{\text{кр}} = T\Lambda_{\text{кр}}$; $q_{\text{кр}} = q\Lambda_{\text{кр}}$.

При выполнении проектировочных расчетов удовлетворительные оценки критического параметра нагружения можно получить, используя результаты обобщенной полубезмоментной теории [4]:

$$\Lambda_{\text{кр}} = \min_{\substack{(m,\ n)\\ n\geqslant 2}} \left\{\frac{F_{mn}}{T\lambda_m^2 + qR\left(\lambda_n^2 - \frac{1}{R^2}\right)}\right\}, \tag{4.110}$$

где

$$F_{mn} = \lambda_m^2 D_m + \frac{D_n}{R^2}(n^2-1) + $$

$$+ \frac{\lambda_m^4}{n^2\left(\frac{\lambda_n^2}{B_x} + \frac{\lambda_m^2}{B_{33}}\right)}; \quad B_x = I_{11}^{(0)};$$

$$D_m = \frac{D_x}{1 + \frac{\lambda_m^2 D_x}{K_x}};$$

$$D_n = \frac{D_y(n^2-1)}{R^2\left(1 + \frac{\lambda_n^2 D_y}{K_y}\right)}; \quad B_{33} = I_{33}^{(0)};$$

$$D_x = I_{11}^{(2)} - \frac{[I_{11}^{(1)}]^2}{I_{11}^{(0)}};$$

$$D_y = I_{22}^{(2)} - \frac{[I_{22}^{(1)}]^2}{I_{22}^{(0)}}.$$

При $B_{33} \to \infty$; $K_y \to \infty$; $T = 0$; $\lambda_m = \pi/l$, используя приближенную минимизацию по n, получим

$$n^2 \approx \frac{\pi R}{l}\sqrt[4]{\frac{3B_xR^2}{D_y}};$$

$$q_{\text{кр}}R \approx \frac{4\pi}{l}\sqrt[4]{\frac{B_xD_y^3}{27R^2}}.$$

Приведенные жесткости B_x, D_x, D_y приближенно учитывают несимметричность в расположении слоев по толщине. Жесткостями стенки при кручении, растяжением контура, а также эффектами Пуассона пренебрегают.

4.4. КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ МНОГОСЛОЙНОЙ КОМПОЗИТНОЙ ОБОЛОЧКИ

На основании принципа возможных перемещений вариационную формулировку задачи статики для тонкой многослойной композитной оболочки можно записать в следующем виде:

$$\iint_S \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathcal{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,dS - \iint_S \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\,dS = 0, \tag{4.111}$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{u}; \tag{4.112}$$

$dS = A_1A_2\,d\alpha\,d\beta$; $\boldsymbol{u}$ — обобщенные перемещения; $\boldsymbol{f}$ — вектор распределенных сил. В такой формулировке задачи подразумевается, что обобщенные деформации $\boldsymbol{\varepsilon}$ определены через обобщенные перемещения $\boldsymbol{u}$ [см. (4.112)]. $\boldsymbol{L}$ — матрица связи деформаций с перемещениями. Если уравнение (4.112) использовать в качестве дополнительного условия связи: $\boldsymbol{Lu} - \boldsymbol{\varepsilon} = 0$, то, потребовав равенства нулю интегральной невязки

$$\left(\iint_S \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathcal{D}(\boldsymbol{Lu} - \boldsymbol{\varepsilon})\,dS = 0\right)$$

для любых допустимых деформаций $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$, получим вариационную формулировку смешанного типа:

$$\iint_S (\boldsymbol{L}\,\delta\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}\mathcal{D}\boldsymbol{\varepsilon}\,dS - \iint_S \delta\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}\,dS = 0; \tag{4.113}$$

$$\iint_S \delta\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\mathcal{D}(\boldsymbol{Lu} - \boldsymbol{\varepsilon})\,dS = 0. \tag{4.114}$$

Таким образом, задачу о деформировании многослойной композитной оболочки удалось свести к следующей. Требуется определить такую пару вектор-функций $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ из соответствующих множеств допустимых функций, для которых уравнения (4.113), (4.114) выполняются при любых $\delta\boldsymbol{u}$ и $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$, принадлежащих тем же множествам.

При решении задачи статики многослойных оболочек общего вида методом конечных элементов (МКЭ) на основе вариационных формулировок смешанного вида (4.113) и (4.114) требования к выбору функций формы остаются такими же, как и в методе перемещений. В качестве функций формы конечного элемента наиболее часто используются алгебраические полиномы, порядок которых должен обеспечивать требуемую гладкость функций и их производных. В МКЭ важным требованием к функциям формы является требование воспроизводить в элементе однородное напряженно-деформированное состояние и, в частности, описывать смещение элемента как жесткого целого. Наиболее распространенный способ удовлетворения указанным требованиям состоит в повышении порядка аппроксимирующих полиномов. При этом используются полиномы значительно более высокого порядка, чем это требуется, исходя из структуры вариационных уравнений, что приводит к уменьшению экономичности использования ЭВМ и к необходимости использования мощных ЭВМ. Применение смешанных вариационных формулировок позволяет с помощью независимой аппроксимации деформаций и перемещений улучшить свойства конечных элементов и тем самым повысить эффективность ЭВМ при расчете многослойных оболочечных конструкций [3].

В общем виде для конечного элемента аппроксимация перемещений выбирается в виде

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Phi q}; \qquad (4.115)$$

аппроксимация обобщенных деформаций записывается следующим образом:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\omega\alpha}, \qquad (4.116)$$

где $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\omega}$ — матрицы форм; $\boldsymbol{q}$ — вектор-столбец обобщенных узловых перемещений элемента; $\boldsymbol{\alpha}$ — вектор-столбец коэффициентов аппроксимации обобщенных деформаций. Условия (4.113), (4.114) с учетом (4.115), (4.116) позволяют получить уравнения

$$\delta \boldsymbol{q}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{P}) = 0;$$

$$\delta \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{G q} - \boldsymbol{H \alpha}) = 0.$$

Отсюда, учитывая произвольность коэффициентов $\delta \boldsymbol{q}$, $\delta \boldsymbol{\alpha}$, следует, что

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{P} = \boldsymbol{0}; \qquad (4.117)$$

$$\boldsymbol{G q} - \boldsymbol{H \alpha} = \boldsymbol{0}, \qquad (4.118)$$

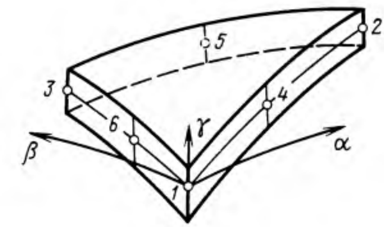


Рис. 4.6. Треугольный конечный элемент для расчета оболочек

где

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{G} &= \iint_S \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \mathcal{D} \mathcal{B}\, dS; \\ \boldsymbol{H} &= \iint_S \boldsymbol{\omega}^{\mathrm{T}} \mathcal{D} \boldsymbol{\omega}\, dS; \\ \boldsymbol{P} &= \iint_S \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{f}\, dS; \quad \mathcal{B} = \boldsymbol{L \Phi}. \end{aligned} \right\} \qquad (4.119)$$

После исключения из уравнения (4.118) коэффициентов $\boldsymbol{\alpha}$ уравнение (4.117) примет вид

$$\mathcal{K} \boldsymbol{q} = \boldsymbol{P},$$

где

$$\mathcal{K} = \boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{H}^{-1} \boldsymbol{G} \qquad (4.120)$$

определяет матрицу жесткости конечного элемента. Число независимых смещений конечного элемента как твердого тела равно шести, и ранг матрицы жесткости $\mathcal{K}$ должен равняться n_q—6, где n_q — размерность вектора обобщенных узловых перемещений элемента. Это условие будет выполняться при выборе аппроксимации $\boldsymbol{\varepsilon}$ (4.116), такой, что $n_\alpha = n_q - 6$, где n_α — размерность вектор-столбца коэффициентов аппроксимации $\boldsymbol{\alpha}$.

Для согласованной аппроксимации перемещений и деформаций подходит треугольный элемент с шестью узлами (*1*—*6*) (рис. 4.6). Суммарное число обобщенных узловых перемещений $n_q = 30$. Матрица жесткости конечного элемента $\mathcal{K}$ (4.120) имеет размерность (30×30).

Вектор-столбец обобщенных узловых перемещений элемента [см. (4.115)] представим в виде

$$\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{q}_{[1]}^{\mathrm{T}}, \ \boldsymbol{q}_{[2]}^{\mathrm{T}}, \ \ldots, \ \boldsymbol{q}_{[6]}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$$

где $q_{[i]} = [u^{[i]},\ v^{[i]},\ w^{[i]},\ \theta_\alpha^{[i]},\ \theta_\beta^{[i]}]^{\mathrm{T}}$ — вектор-столбец обобщенных перемещений i-го узла (индексом, заключенным в квадратные скобки, обозначается номер узла).

Матрица функций формы $\boldsymbol{\Phi}$ [см. (4.115)] имеет размерность (5×30) и в блочном матричном виде записывается следующим образом:

$$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\Phi}_{[1]},\ \boldsymbol{\Phi}_{[2]},\ \ldots,\ \boldsymbol{\Phi}_{[6]}], \qquad (4.121)$$

где $\boldsymbol{\Phi}_{[i]} = \phi_i E_{(5\times5)}$; $E_{(5\times5)}$—единичная матрица размерности (5×5); ϕ_i ($\phi_i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6$) — квадратичные функции формы. Для представления ϕ_i удобно воспользоваться естественными безразмерными (барицентрическими) координатами [6]

$$\begin{gathered} \phi_1 = L_1(2L_1 - 1); \\ \phi_2 = L_2(2L_2 - 1); \\ \phi_3 = L_3(2L_3 - 1); \\ \phi_4 = 4L_1L_2; \\ \phi_5 = 4L_2L_3;\ \phi_6 = 4L_3L_1. \end{gathered} \qquad (4.122)$$

Нумерация функций формы соответствует нумерации узлов элемента (см. рис. 4.6). Естественные координаты L_i определяются через координаты α, β следующим образом:

$$L_i = \frac{1}{2\Delta}(a_i + b_i\alpha + c_i\beta) \quad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

где

$$\begin{gathered} a_1 = \alpha_{[2]}\beta_{[3]} - \alpha_{[3]}\beta_{[2]}; \\ b_1 = \beta_{[2]} - \beta_{[3]}; \quad c_1 = \alpha_{[3]} - \alpha_{[2]} \\ (1,\ 2,\ 3); \quad \Delta = (b_1c_2 - b_2c_1)/2. \end{gathered}$$

Остальные коэффициенты получаются круговой перестановкой индексов 1, 2, 3. Для обратных соотношений

$$\alpha = \alpha_{[1]}L_1 + \alpha_{[2]}L_2 + \alpha_{[3]}L_3;$$
$$\beta = \beta_{[1]}L_1 + \beta_{[2]}L_2 + \beta_{[3]}L_3,$$

где $\alpha_{[i]}$ и $\beta_{[i]}$ — координаты α и β i-го узла.

В развернутом виде аппроксимация любой компоненты вектора обобщенных перемещений $\boldsymbol{u}$ имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} \Phi(\alpha,\ \beta) = L_1(2L_1 - 1)\,\Phi^{[1]} + \\ + L_2(2L_2 - 1)\,\Phi^{[2]} + \\ + L_3(2L_3 - 1)\,\Phi^{[3]} + 4L_1L_2\Phi^{[4]} + \\ + 4L_2L_3\Phi^{[5]} + 4L_3L_1\Phi^{[6]}, \end{gathered}$$

где

$$\Phi = (u,\ v,\ w,\ \theta_\alpha,\ \theta_\beta).$$

Размерность вектора $\boldsymbol{\alpha}$ согласно сделанным выше замечаниям должна равняться $n_\alpha = n_q - 6 = 24$. Размерность вектор-столбца $\boldsymbol{\varepsilon}$ (4.32) равна 8, и на конечном элементе можно принять аппроксимации всех компонентов $\boldsymbol{\varepsilon}$ в виде полных линейных полиномов, т. е.

$$\Phi(\alpha,\ \beta) = \Phi^{(1)}L_1 + \Phi^{(2)}L_2 + \Phi^{(3)}L_3,$$

где

$$\Phi = (\varepsilon_\alpha,\ \varepsilon_\beta,\ \gamma_{\alpha\beta},\ \varkappa_\alpha,\ \varkappa_\beta,\ \chi_{\alpha\beta},\ \psi_\alpha,\ \psi_\beta);$$
$$\gamma_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha}; \qquad \chi_{\alpha\beta} = \varkappa_{\alpha\beta} + \varkappa_{\beta\alpha}.$$

В качестве компонент вектора $\boldsymbol{\alpha}$ выступают

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\alpha} = [\varepsilon_\alpha^{(1)},\ \varepsilon_\alpha^{(2)},\ \varepsilon_\alpha^{(3)},\ \varepsilon_\beta^{(1)},\ \varepsilon_\beta^{(2)},\ \varepsilon_\beta^{(3)}, \\ \gamma_{\alpha\beta}^{(1)},\ \gamma_{\alpha\beta}^{(2)},\ \gamma_{\alpha\beta}^{(3)},\ \varkappa_\alpha^{(1)},\ \varkappa_\alpha^{(2)},\ \varkappa_\alpha^{(3)},\ \varkappa_\beta^{(1)}, \\ \varkappa_\beta^{(2)},\ \varkappa_\beta^{(3)},\ \chi_{\alpha\beta}^{(1)},\ \chi_{\alpha\beta}^{(2)},\ \chi_{\alpha\beta}^{(3)},\ \psi_\alpha^{(1)},\ \psi_\alpha^{(2)}, \\ \psi_\alpha^{(3)},\ \psi_\beta^{(1)},\ \psi_\beta^{(2)},\ \psi_\beta^{(3)}]^{\mathrm{T}}. \end{gathered}$$

Матрица $\boldsymbol{\omega}$ (8×24) [см. (4.116)] имеет блочную диагональную структуру:

$$\boldsymbol{\omega} = \lceil \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{F},\ \boldsymbol{F} \rfloor, \qquad (4.123)$$

где

$$\boldsymbol{F} = [L_1,\ L_2,\ L_3].$$

Для вычисления матрицы жесткости $\mathscr{K}$ конечного элемента многослойной оболочки (4.120) необходимо располагать информацией о матрицах $\mathscr{B}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{G}$ [см. (4.119)].

Матрицу $\mathscr{B}$ (8×30) с учетом блочной структуры матрицы функций формы $\boldsymbol{\Phi}$ (4.121) можно представить в следующем виде:

$$\mathscr{B} = [\mathscr{B}_{[1]},\ \mathscr{B}_{[2]},\ \ldots,\ \mathscr{B}_{[6]}], \qquad (4.124)$$

где матричные блоки $\mathscr{B}_{[i]}$ ($i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6$) определяются соотношением

$$\mathscr{B}_{[i]} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{\Phi}_{[i]} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6)$$

или в развернутом виде

$$\mathscr{B}_{[i]} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_{11}^i & \boldsymbol{0}_{(3\times2)} \\ \boldsymbol{0}_{(3\times3)} & \boldsymbol{b}_{22}^i \\ \boldsymbol{b}_{31}^i & \boldsymbol{b}_{32}^i \end{bmatrix};$$

$$b_{11}^{i} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{i,1} & \varphi_1\phi_i & k_1\phi_i \\ \varphi_2\phi_i & \bar{\phi}_{i,2} & k_2\phi_i \\ (\bar{\phi}_{i,2}-\varphi_1\phi_i) & (\bar{\phi}_{i,1}-\varphi_2\phi_i) & 0 \end{bmatrix};$$

$$b_{22}^{i} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{i,1} & \varphi_1\phi_i \\ \varphi_2\phi_i & \bar{\phi}_{i,2} \\ (\bar{\phi}_{i,2}-\varphi_1\phi_i) & (\bar{\phi}_{i,1}-\varphi_2\phi_i) \end{bmatrix};$$

$$b_{31}^{i} = \begin{bmatrix} -k_1\phi_i & 0 & \bar{\phi}_{i,1} \\ 0 & -k_2\phi_i & \bar{\phi}_{i,2} \end{bmatrix};$$

$$b_{32}^{i} = \begin{bmatrix} \phi_i & 0 \\ 0 & \phi_i \end{bmatrix},$$

где

$$\bar{\phi}_{i,1} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\phi_i}{\partial\alpha}; \quad \bar{\phi}_{i,2} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial\phi_i}{\partial\beta};$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\beta}; \quad \varphi_2 = \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha}.$$

При вычислении производных $\bar{\phi}_{i,1}$, $\bar{\phi}_{i,2}$ от квадратичных функций аппроксимации (4.122) следует воспользоваться правилом дифференцирования сложных функций.

Учитывая блочную структуру матриц $\mathscr{B}$ (4.124), $\mathscr{D}$ (4.38), ω (4.123), матрицу G (24×30) удобно представить в следующем виде:

$$G = [G_1,\ G_2,\ \ldots,\ G_6],$$

где матрицы G_i (24×5) состоят из блоков

$$G_i = \begin{bmatrix} g_{11}^{i} & g_{12}^{i} \\ g_{21}^{i} & g_{22}^{i} \\ g_{31}^{i} & g_{32}^{i} \end{bmatrix} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ 6);$$

$$\underset{(9\times3)}{g_{11}^{i}} = \iint_S t_B b_{11}^{i}\,dS;$$

$$\underset{(9\times2)}{g_{12}^{i}} = \iint_S t_C b_{22}^{i}\,dS;$$

$$\underset{(9\times3)}{g_{21}^{i}} = \iint_S t_C b_{11}^{(i)}\,dS;$$

$$\underset{(9\times2)}{g_{22}^{i}} = \iint_S t_D b_{22}^{i}\,dS;$$

$$\underset{(6\times3)}{g_{31}^{i}} = \iint_S t_K b_{31}^{i}\,dS;$$

$$\underset{(6\times2)}{g_{32}^{i}} = \iint_S t_K \phi_i\,dS;$$

$$\underset{(9\times3)}{t_\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_{11}F^{\mathrm{T}} & \Phi_{12}F^{\mathrm{T}} & 0 \\ \Phi_{12}F^{\mathrm{T}} & \Phi_{22}F^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{33}F^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

$$(\Phi = B,\ C,\ D);$$

$$\underset{(6\times2)}{t_K} = \begin{bmatrix} K_1F^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & K_2F^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}.$$

Для случая постоянных жесткостей в пределах конечного элемента матрица H обращается достаточно просто. В блочном виде матрицу H^{-1} (24×24) можно представить следующим образом:

$$H^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{H}_B^{11} & \bar{H}_B^{12} & 0 & \bar{H}_C^{11} & \bar{H}_C^{12} & 0 & 0 & 0 \\ & \bar{H}_B^{22} & 0 & \bar{H}_C^{12} & \bar{H}_C^{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & \bar{H}_B^{33} & 0 & 0 & \bar{H}_C^{33} & 0 & 0 \\ & & & \bar{H}_D^{12} & \bar{H}_D^{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \bar{H}_D^{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \bar{H}_D^{33} & 0 & 0 \\ & & & & & & \bar{H}_K^{11} & 0 \\ & \text{сим.} & & & & & & \bar{H}_K^{22} \end{bmatrix},$$

где

$$\overline{H}_{\Phi}^{ij} = \overline{\Phi}_{ij} \left(\int\limits_S \int F^{\mathrm{T}} F \, dS \right)^{-1}$$

$$(\Phi = B,\ C,\ D,\ K); \qquad (4.125)$$

$ij = 11,\ 12,\ 22,\ 33$; $\overline{\Phi}_{ij}$ — коэффициенты матрицы податливости $\overline{\mathscr{D}} = \mathscr{D}^{-1}$:

$$\overline{\mathscr{D}} = \begin{bmatrix} \overline{B} & \overline{C} & 0 \\ & \overline{D} & 0 \\ \text{сим.} & & \overline{K} \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} &\overline{D} = (D - CB^{-1}C)^{-1}; \quad \overline{C} = -B^{-1}C\overline{D}; \\ &\overline{B} = B^{-1} - B^{-1}C\overline{C}^{\mathrm{T}}; \quad \overline{K} = K^{-1}; \\ &\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & 0 \\ & \Phi_{22} & 0 \\ \text{сим.} & & \Phi_{33} \end{bmatrix} \\ &(\Phi = B,\ C,\ D); \quad K = \lceil K_1,\ K_2 \rfloor. \end{aligned}\right\} \qquad (4.126)$$

Таким образом удается заменить обращение матрицы H (24×24) операциями (4.125), (4.126) с матрицами меньшей размерности, что приводит к существенному снижению вычислительных затрат. Для интегрирования по треугольной области удобно использовать известные квадратурные формулы [6].

Список литературы

1. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 264 с.
2. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
3. Быков Е. В., Попов Б. Г. Конечный элемент многослойной оболочки// Известия ВУЗов. Машиностроение. 1984. № 10. С. 14—17.
4. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
5. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. Киев: Наукова думка, 1973. 228 с.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
7. Мяченков В. И., Григорьев И. В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник. М.: Машиностроение, 1981. 216 с.

Глава 5

КОМПОЗИТНЫЕ ПАНЕЛИ И ПЛАСТИНЫ

Панелями в строительной механике называют тонкостенные конструкции, имеющие форму незамкнутых оболочек с плавными, как правило, пологими поверхностями, ограниченными контурами различных очертаний. Композитная многослойная панель изготавливается прессованием, вакуумным или автоклавным формованием заготовки в виде пакета уложенных с определенной ориентацией слоев из препрегов, что позволяет получать материал с заданными свойствами, обеспечивающими высокую эффективность изделия по массе. Композитные панели — силовые элементы—широко используются в качестве несущих плоскостей различных конструкций, обтекателей, обшивок летательных аппаратов и др.

5.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим панель, представляющую пологую слоистую оболочку (рис. 5.1). Допущение о пологости позволяет считать одинаковыми метрические свойства элемента поверхности панели и его проекции на плоскость Oxy.

Геометрические характеристики

$$A_1 = A_2 = H_1 = H_2 = 1;$$

$$k_1 = 1/R_1;\ k_2 = 1/R_2;$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0, \qquad (5.1)$$

где R_1, R_2 — главные радиусы кривизны считаются постоянными в пределах панели. Для плоских панелей (пластин) кривизны $k_1 = k_2 = 0$. Рапределение перемещений по толщине панели

$$\left.\begin{aligned} u_x &= u + z\theta_x; \\ u_y &= v + z\theta_y; \\ u_z &= w, \end{aligned}\right\} \qquad (5.2)$$

где u, v, w — перемещения начальной поверхности; θ_x, θ_y — углы поворота сечений.

Углы поворота нормали:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= -\partial w/\partial x; \\ \omega_y &= -\partial w/\partial y. \end{aligned}\right\} \qquad (5.3)$$

Связь деформаций с перемещениями:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + k_1 w;$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + k_2 w;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\varkappa_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \qquad (5.4)$$

$$\varkappa_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2};$$

$$\chi_{xy} = \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}; \quad \psi_x = \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x};$$

$$\psi_y = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y},$$

где ψ_x, ψ_y — средние деформации поперечного сдвига.

Физические соотношения:

$$\left.\begin{aligned} N_x &= B_{11}\varepsilon_x + B_{12}\varepsilon_y + C_{11}\varkappa_x + C_{12}\varkappa_y; \\ N_y &= B_{12}\varepsilon_x + B_{22}\varepsilon_y + C_{12}\varkappa_x + B_{22}\varkappa_y; \\ N_{xy} &= B_{33}\gamma_{xy} + C_{33}\chi_{xy}; \\ M_x &= C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y + D_{11}\varkappa_x + D_{12}\varkappa_y; \\ M_y &= C_{12}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y + D_{12}\varkappa_x + D_{22}\varkappa_y; \\ M_{xy} &= C_{33}\gamma_{xy} + D_{33}\chi_{xy}; \\ Q_x &= K_x\psi_x; \quad Q_y = K_y\psi_y. \end{aligned}\right\} \qquad (5.5)$$

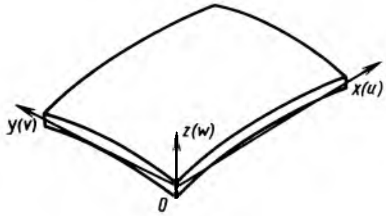


Рис. 5.1. Элемент панели

Приведенные жесткостные характеристики панели определяются выражениями

$$B_{mn} = I_{mn}^{(0)}; \quad C_{mn} = I_{mn}^{(1)} - eI_{mn}^{(0)};$$

$$D_{mn} = I_{mn}^{(2)} - 2eI_{mn}^{(1)} + e^2 I_{mn}^{(0)};$$

$$I_{mn}^{(r)} = \int_0^h A_{mn} t^r\,dt = \frac{1}{r+1}\sum_{i=1}^{\text{к}} A_{mn}^{(i)} \times \left(t_i^{r+1} - t_{i-1}^{r+1}\right) \quad (r = 0,\ 1,\ 2); \qquad (5.6)$$

$$(mn = 11,\ 12,\ 22,\ 33);$$

$$K_x = h^2\left[\sum_{i=1}^{\text{к}} \frac{t_i - t_{i-1}}{G_{xz}^{(i)}}\right]^{-1};$$

$$K_y = h^2\left[\sum_{i=1}^{\text{к}} \frac{t_i - t_{i-1}}{G_{yz}^{(i)}}\right]^{-1},$$

где h — суммарная толщина многослойной панели; к — число слоев; e — расстояние от нижней поверхности панели до базовой поверхности (рис. 5.2); t_{i-1}, t_i — расстояния от

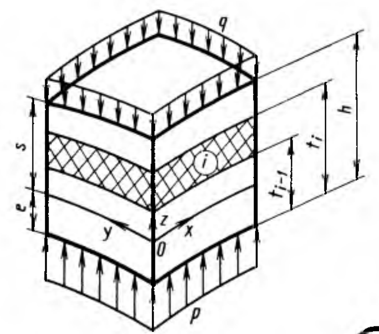


Рис. 5.2. Геометрические параметры слоистой панели

нижней поверхности панели до нижней и верхней поверхностей i-го слоя (для $i = 1$ $t_0 = 0$; для $i = k$ $t_к = h$); $A_{mn}^{(i)}$ — жесткостные характеристики i-го слоя (см. соотношения упругости для i-го слоя в п. 1.2.3); $G_{xz}^{(i)}$, $G_{yz}^{(i)}$ — модули на поперечный сдвиг i-го слоя.

Уравнения равновесия для случая действия нормального давления имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - \\ &- Q_x = 0; \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0; \\ &\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - k_1 N_x - k_2 N_y + \bar{p} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.7}$$

где $\bar{p} = p - q$, p и q — давления на внутренней и внешней поверхностях (см. рис. 5.2).

Силовые граничные условия предполагают задание на краю $x = \text{const}$ усилий и моментов N_x; N_{xy}; Q_x; M_x; M_{xy}, а на краю $y = \text{const}$ — N_y, N_{xy}, Q_y, M_y, M_{xy}.

Геометрические граничные условия записываются для перемещений u, v, w начальной поверхности ($z = 0$) и углов поворота сечений θ_x, θ_y.

Математическая формулировка принципа возможных перемещений имеет следующий вид:

$$\int_0^a \int_0^b (\delta\varepsilon_x N_x + \delta\varepsilon_y N_y + \delta\gamma_{xy} N_{xy} + \\ + \delta\varkappa_x M_x + \delta\varkappa_y M_y + \delta\chi_{xy} M_{xy} + \\ + \delta\psi_x Q_x + \delta\psi_y Q_y - \delta w \bar{p})\, dx\, dy = 0, \tag{5.8}$$

где a, b — габаритные размеры панели вдоль осей ox и oy; возможные деформации $\delta\varepsilon_x$, $\delta\varepsilon_y$, ..., $\delta\psi_y$ определяются через возможные перемещения δu, δv, δw и углы поворота $\delta\theta_x$, $\delta\theta_y$ выражениями, аналогичными (5.4).

5.2. ИЗГИБ СЛОИСТОЙ СВОБОДНО ОПЕРТОЙ ПАНЕЛИ

Рассмотрим слоистую прямоугольную панель, свободно опертую по контуру и нагруженную внутренним давлением p, внешним давлением q и сосредоточенными нормальными силами P_i. Решение получим на основе метода Рэлея—Ритца. Для этого воспользуемся принципом возможных перемещений [см. (5.8)], который для рассматриваемого случая запишем в следующем векторном виде:

$$\int_0^a \int_0^b (\delta\varepsilon^{\mathrm{T}} \mathscr{N} - \delta X^{\mathrm{T}} p)\, dy\, dx - \\ - \sum_{i=1}^{N} \delta X_i^{\mathrm{T}} Q_i = 0. \tag{5.9}$$

Здесь $\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \varkappa_x, \varkappa_x, \chi_{xy}, \psi_x, \psi_y]^{\mathrm{T}}$;

$$\mathscr{N} = [N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y]^{\mathrm{T}};$$

$$X = [w, \psi_x, \psi_y, u, v]^{\mathrm{T}};$$

$$p = [\bar{p}, 0, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}};$$

$$Q_i = [P_i, 0, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}};$$

$$X_i = X(x_i, y_i),$$

где x_i, y_i — координаты приложения силы P_i.

Внутренние силовые факторы $\mathscr{N}$ связаны с обобщенными деформациями ε соотношениями (5.5):

$$\mathscr{N} = \mathscr{D}\varepsilon, \tag{5.10}$$

где

$$\mathscr{D} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & B_{22} & 0 & C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & B_{33} & 0 & 0 & C_{33} & 0 & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & D_{33} & 0 & 0 \\ & & & & & & K_x & 0 \\ \text{сим.} & & & & & & & K_y \end{bmatrix}.$$

С использованием представлений деформаций через перемещения (5.4) запишем

$$\varepsilon = LX, \qquad (5.11)$$

где

$$L = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \partial/\partial x & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & 0 & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \\ -\partial^2/\partial x^2 & \partial/\partial x & 0 & 0 & 0 \\ -\partial^2/\partial y^2 & 0 & \partial/\partial y & 0 & 0 \\ -2\partial^2/\partial x\,\partial y & \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение будем искать в виде двойных тригонометрических рядов:

$$\begin{pmatrix} w \\ \varepsilon_x, \ \varepsilon_y \\ \varkappa_x, \ \varkappa_y \\ N_x, \ N_y \\ M_x, \ M_y \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} w_{mn} \\ \varepsilon_{xmn}, \ \varepsilon_{ymn} \\ \varkappa_{xmn}, \ \varkappa_{xmn} \\ N_{xmn}, \ N_{ymn} \\ M_{xmn}, \ M_{ymn} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \sin\lambda_m x \sin\lambda_n y;$$

$$\begin{pmatrix} u \\ \psi_x, \ Q_x \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} u_{mn} \\ \psi_{xmn}, \ Q_{xmn} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \cos\lambda_m x \sin\lambda_n y;$$

$$\begin{pmatrix} v \\ \psi_y, \ Q_y \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} v_{mn} \\ \psi_{ymn}, \ Q_{ymn} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \sin\lambda_m x \cos\lambda_n y;$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_{xy}, & \chi_{xy} \\ N_{xy}, & M_{xy} \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \gamma_{xymn}, & \chi_{xymn} \\ N_{xymn}, & M_{xymn} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \cos\lambda_m x \cos\lambda_n y$$

или в матричном виде

$$\varepsilon = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{n} \beta_{\varepsilon mn}\varepsilon_{mn};$$

$$\mathscr{N} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{Nmn}\mathscr{N}_{mn}; \qquad (5.12)$$

$$X = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{xmn}X_{mn},$$

где $\beta_{\varepsilon mn}$, β_{Nmn}, β_{xmn}—диагональные матрицы;

$$\beta_{\varepsilon mn} = \beta_{Nmn} = \lceil s_{mx}s_{ny}, \ s_{mx}s_{ny}, \ c_{mx}c_{ny}, \ s_{mx}s_{ny}, \ s_{my}s_{ny}, \ c_{mx}c_{ny}, \ c_{mx}s_{ny}, \ s_{mx}c_{ny}\rfloor;$$

$$\beta_{xmn} = \lceil s_{mx}s_{ny}, \ c_{mx}s_{ny}, \ s_{mx}c_{ny}, \ c_{mx}s_{ny}, \ s_{mx}c_{ny}\rfloor;$$

$$s_{mx} = \sin\lambda_m x; \qquad c_{mx} = \cos\lambda_m x;$$

$$s_{ny} = \sin\lambda_n y; \qquad c_{ny} = \cos\lambda_n y;$$

$$\lambda_m = m\pi/a; \qquad \lambda_n = n\pi/b.$$

С учетом (5.10)—(5.12) формулировка задачи (5.9) приводит к системе алгебраических уравнений

$$\mathscr{K}_{mn}X_{mn} = \mathscr{P}_{mn} \quad (m, \ n = 1, 2, \ldots), \qquad (5.13)$$

где

$$\mathscr{K}_{mn} = \frac{ab}{4} L^{\mathrm{T}}_{mn}\mathscr{D}L_{mn};$$

$$\mathscr{P}_{mn} = [p_{mn}, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0]^{\mathrm{T}};$$

$$L_{mn} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & -\lambda_m & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_n \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n & \lambda_m \\ \lambda_m^2 & -\lambda_m & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_m & 0 & -\lambda_n & 0 & 0 \\ -2\lambda_n\lambda_m & \lambda_n & \lambda_m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$p_{mn} = \int_0^a \int_0^b \bar{p} \sin \lambda_m x \sin \lambda_n y \, dy \, dx + \\ + \sum_{i=1}^{N} P_i \sin \lambda_m x_i \sin \lambda_n y_i. \quad (5.14)$$

Для случая равномерного давления ($\bar{p} = \text{const}$)

$$p_{mn} = \bar{p} \frac{ab}{\pi^2 mn} (1 - \cos m\pi) \times \\ \times (1 - \cos n\pi) + \sum_{i=1}^{N} P_i \sin \lambda_m x_i \times \\ \times \sin \lambda_n y_i.$$

После решения системы алгебраических уравнений (5.13) для каждой гармоники волнообразования проводится вычисление амплитудных значений обобщенных деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_{mn} = \boldsymbol{L}_{mn} \boldsymbol{X}_{mn}$, далее определяются обобщенные деформации в точках вывода ($x_\text{к}$, $y_\text{к}$) $\boldsymbol{\beta}_{\varepsilon mn} (x_\text{к}, y_\text{к}) \, \boldsymbol{\varepsilon}_{mn}$ и проводится суммирование результатов. После окончания набора обобщенных деформаций в точках вывода можно вычислить деформации в любом слое в системе координат x, y, z и определить деформации в системе координат, связанной со слоем. С использованием соотношений упругости для однонаправленного слоя вычисляются напряжения вдоль, поперек армирования и на сдвиг в плоскости слоя. Средние напряжения поперечного сдвига можно оценить отношением перерезывающей силы к толщине панели.

При расчете тонких композитных панелей, которые не содержат слоев, обладающих низкой сдвиговой жесткостью, учет деформаций поперечного сдвига не вносит существенных уточнений. В этом случае для формулировки задачи (5.9), (5.13) принимается

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \ \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \varkappa_x, \varkappa_y, \chi_{xy}]^\text{T}; \\
&\mathcal{N} = [N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}]^\text{T}; \\
&\boldsymbol{X} = [w, \ u, \ v]^\text{T}; \quad \boldsymbol{p} = [\bar{p}, \ 0, \ 0]^\text{T}; \\
&\boldsymbol{Q}_i = [P_i, \ 0, \ 0]^\text{T}; \\
&\mathcal{D} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ & B_{22} & 0 & C_{12} & C_{22} & 0 \\ & & B_{33} & 0 & 0 & C_{33} \\ & & & D_{11} & D_{12} & 0 \\ & & & & D_{22} & 0 \\ \text{сим.} & & & & & D_{33} \end{bmatrix}; \\
&\boldsymbol{L}_{mn} = \begin{bmatrix} k_1 & -\lambda_m & 0 \\ k_2 & 0 & -\lambda_n \\ 0 & \lambda_n & \lambda_m \\ \lambda_m^2 & 0 & 0 \\ \lambda_n^2 & 0 & 0 \\ -2\lambda_n\lambda_m & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\
&\mathcal{P}_{mn} = [p_{mn}, \ 0, \ 0]^\text{T},
\end{aligned}\right\} \quad (5.15)$$

где p_{mn} вычисляется согласно (5.14).

Разрешающая система алгебраических уравнений будет соответствовать (5.13); решением системы будут амплитудные значения разложения перемещений

$$\left.\begin{aligned}
w_{mn} &= \frac{p_{mn}}{K} \left(k_{22} k_{33} - k_{33}^2\right); \\
u_{mn} &= \frac{p_{mn}}{K} (k_{23} k_{13} - k_{12} k_{33}); \\
v_{mn} &= \frac{p_{mn}}{K} (k_{12} k_{23} - k_{13} k_{22}),
\end{aligned}\right\} \quad (5.16)$$

где

$$k_{11} = [\lambda_m^4 D_{11} + 2\lambda_m^2 \lambda_n^2 (D_{12} + 2D_{33}) + \\ + \lambda_n^4 D_{22} + k_1^2 B_{11} + k_2^2 B_{22} + \\ + 2k_1 k_2 B_{12} + 2 (k_1 C_{11} + k_2 C_{12}) \lambda_m^2 + \\ + 2 (k_1 C_{12} + k_2 C_{22}) \lambda_n^2] \frac{ab}{4};$$

$$k_{12} = [-(k_1 B_{11} + k_2 B_{12}) \lambda_m - \lambda_m^3 C_{11} - \\ - \lambda_m \lambda_n^2 (C_{12} + 2C_{33})] \frac{ab}{4};$$

$$k_{13} = [-(k_1 B_{12} + k_2 B_{22}) \lambda_n - \lambda_n^3 C_{22} - \\ - \lambda_n \lambda_m^2 (C_{12} + 2C_{33})] \frac{ab}{4};$$

$$k_{22} = \left(\lambda_m^2 B_{11} + \lambda_n^2 B_{33}\right) \frac{ab}{4};$$

$$k_{23} = \lambda_m \lambda_n \left(B_{12} + B_{33}\right) \frac{ab}{4};$$

$$k_{33} = \left(\lambda_n^2 B_{22} + \lambda_m^2 B_{33}\right) \frac{ab}{4};$$

$$K = k_{11}k_{22}k_{33} + 2k_{12}k_{23}k_{13} - k_{13}^2 k_{22} - \\ - k_{23}^2 k_{11} - k_{12}^2 k_{33}.$$

Полученное решение (5.16) выглядит достаточно громоздко. В случае использования ЭВМ целесообразно получать решение на основе (5.13) при исходной информации в виде (5.15) с использованием стандартных матричных операций.

5.3. ИЗГИБ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН С СИММЕТРИЧНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ СЛОЕВ

Слоистые пластины с симметричным расположением слоев обладают двумя характерными особенностями: могут иметь наибольшие жесткости D_{mn} (среди пластин с аналогичным набором схем армирования); изгиб не сопровождается деформированием срединной поверхности. В этом случае решением (5.13) будет $u_{mn} = v_{mn} = 0$.

5.3.1. Изгиб пластин с учетом деформаций поперечного сдвига. В качестве начальной поверхности выбирается срединная плоскость пластины ($e = h/2$). При подсчете изгибных жесткостей [(см. (5.6)] можно воспользоваться выражением

$$D_{mn} = \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)} \left(z_i^3 - z_{i-1}^3\right)$$

$$(mn = 11,\ 12,\ 22,\ 33),$$

где координата z отсчитывается от срединной плоскости. Смешанные жесткости $C_{mn} = 0$.

Для формулировки задачи (5.9), (5.13) принимается

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon = [\varkappa_x,\ \varkappa_y,\ \chi_{xy},\ \psi_x,\ \psi_y]^{\mathrm{T}}; \\
&\mathscr{N} = [M_x,\ M_y,\ M_{xy},\ Q_x,\ Q_y]^{\mathrm{T}}; \\
&X = [w,\ \psi_x,\ \psi_y]^{\mathrm{T}}; \\
&p = [\bar{p},\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}; \qquad Q_i = [P_i,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}}; \\
&\mathscr{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 \\ & & & K_x & 0 \\ \text{сим.} & & & & K_y \end{bmatrix}; \\
&L_{mn} = \begin{bmatrix} \lambda_m^2 & -\lambda_m & 0 \\ \lambda_n^2 & 0 & -\lambda_n \\ -2\lambda_n\lambda_m & \lambda_n & \lambda_m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
&\mathscr{P}_{mn} = [p_{mn},\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}},
\end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

где p_{mn} вычисляется согласно (5.14).

Решением системы линейных алгебраических уравнений (5.13), сформированной с исходными данными (5.17), будет

$$\left.\begin{aligned}
w_{mn} &= \frac{p_{mn}}{K}\left(k_{22}k_{33} - k_{23}^2\right); \\
\psi_{xmn} &= \frac{p_{mn}}{K}\left(k_{23}k_{13} - k_{12}k_{33}\right); \\
\psi_{ymn} &= \frac{p_{mn}}{K}\left(k_{12}k_{23} - k_{13}k_{22}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

где

$$K = k_{11}k_{22}k_{13} + 2k_{12}k_{23}k_{13} - k_{13}^2 k_{22} - \\ - k_{23}^2 k_{11} - k_{12}^2 k_{33};$$

$$k_{11} = \left[\lambda_m^4 D_{11} + 2\lambda_m^2 \lambda_n^2 \left(D_{12} + 2D_{33}\right) + \\ + \lambda_n^4 D_{22}\right] \frac{ab}{4};$$

$$k_{12} = \left[-\lambda_m^3 D_{11} - \\ - \lambda_n^2 \lambda_m \left(D_{12} + 2D_{33}\right)\right] \frac{ab}{4};$$

$$k_{13} = [-\lambda_n^3 D_{22} - \lambda_m^2 \lambda_n (D_{12} + 2D_{33})] \frac{ab}{4};$$

$$k_{22} = \left(\lambda_m^2 D_{11} + \lambda_n^2 D_{33} + K_x\right) ab/4;$$

$$k_{23} = \lambda_m \lambda_n (D_{12} + D_{33})\, ab/4;$$

$$k_{33} = \left(\lambda_n^2 D_{22} + \lambda_m^2 D_{33} + K_y\right) ab/4.$$

Отличительной особенностью полученной матрицы $\mathcal{K}_{mn}$ является то, что жесткости на поперечный сдвиг K_x и K_y входят только в диагональные коэффициенты k_{22}, k_{33}. В этом случае решение системы допускает устойчивый предельный переход к решению тонких пластин. При $K_x \to \infty$; $K_y \to \infty$ получим $\psi_x = \psi_y = 0$.

5.3.2. Изгиб свободно опертых тонких пластин. Исходными данными для формулировки задачи (5.9), (5.13) являются:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon = [\varkappa_x,\ \varkappa_y,\ \chi_{xy}]^{\mathrm{T}};\\
&\mathcal{N} = [M_x,\ M_y,\ M_{xy}]^{\mathrm{T}};\\
&X = [w]; \quad p = [\bar{p}]; \quad Q_i = [P_i];\\
&\mathcal{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ & D_{22} & 0 \\ \text{сим.} & & D_{33} \end{bmatrix};\\
&L_{mn} = \begin{bmatrix} \lambda_m^2 \\ \lambda_n^2 \\ -2\lambda_n\lambda_m \end{bmatrix}; \quad \mathcal{P}_{mn} = [p_{mn}].
\end{aligned}\right\} \qquad (5.19)$$

Решением алгебраического уравнения (5.13) [размерность матрицы $\mathcal{K}_{mn}$ (1×1)], сформулированного с учетом исходных данных (5.19), будет

$$w_{mn} = \frac{p_{mn}}{k_{11}}, \qquad (5.20)$$

где

$$k_{11} = [\lambda_m^4 D_{11} + 2\lambda_m^2 \lambda_n^2 (D_{12} + 2D_{33}) + \lambda_n^4 D_{22}] \frac{ab}{4};$$

p_{mn} вычисляется согласно (5.14). Решение (5.20) соответствует решению (5.18) при $K_x \to \infty$; $K_y \to \infty$, а также (5.16) при $C_{ij} = 0$; $k_1 = k_2 = 0$.

5.3.3. Решение задачи об изгибе тонкой пластины методом приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Рассмотрим пластину, которой $a \geqslant b$. Для получения приближенного решения воспользуемся методом приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям [1, 2]. Представим прогиб пластины и кривизны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&w = W(x)\, f(y);\\
&\varkappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -W'' f;\\
&\varkappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -W f^{**};\\
&\chi_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} = -2W' f^{*},
\end{aligned}\right\} \qquad (5.21)$$

где $(\cdot)' = \dfrac{d}{dx}(\cdot)$; $(\cdot)^* = \dfrac{d}{dy}(\cdot)$;

$f(y)$ — функция, выбранная так, чтобы были удовлетворены по крайней мере геометрические граничные условия на продольных краях.

Для определения функции $W(x)$ получим разрешающее уравнение на основе формулировки принципа возможных перемещений. Для случая отсутствия внешних сосредоточенных сил и силовых факторов на контуре запишем

$$\int_0^a \int_0^b (\delta\varkappa_x M_x + \delta\varkappa_y M_y + \delta\chi_{xy} M_{xy} - \delta w \bar{p})\, dy\, dx = 0, \qquad (5.22)$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&M_x = -D_{11} f W'' - D_{12} f^{**} W;\\
&M_y = -D_{12} f W'' - D_{22} f^{**} W;\\
&M_{xy} = -2D_{33} f^{*} W'.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.23)$$

С учетом (5.21) формулировку задачи (5.22) представим в следующем виде:

$$\int_0^a (-\delta W'' \overline{M}_x - \delta W \overline{M}_y - 2\delta W' \overline{M}_{xy} - \delta W c_p)\, dx = 0. \qquad (5.24)$$

В (5.24) введены обозначения

$$\left.\begin{aligned} \overline{M}_x &= \int_0^b f M_x\,dy; \\ \overline{M}_y &= \int_0^b f^{**} M_y\,dy; \\ \overline{M}_{xy} &= \int_0^b f^* M_{xy}\,dy; \\ c_p &= \int_0^b f\bar{p}\,dy. \end{aligned}\right\} \quad (5.25)$$

После интегрирования (5.24) по частям получим

$$\int_0^a \delta W\left(\overline{M}_x'' + \overline{M}_y - 2\overline{M}_{xy}' + c_p\right)dx + \\ + [\delta W' \overline{M}_x]_0^a + \\ + \left[\delta W\left(2\overline{M}_{xy} - \overline{M}_x'\right)\right]_0^a = 0. \quad (5.26)$$

Из (5.26) с учетом (5.23), (5.25) следует разрешающее дифференциальное уравнение

$$W^{\mathrm{IV}} - 2k_1^2 W'' + k_2^4 W = k_p, \quad (5.27)$$

где

$$k_1^2 = \frac{2D_{33}c_4 - D_{12}c_2}{D_{11}c_1};$$

$$k_2^4 = \frac{D_{22}c_3}{D_{11}c_1}; \quad k_p = \frac{c_p}{D_{11}c_1}.$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \int_0^b f^2\,dy; \quad c_2 = \int_0^b f^{**} f\,dy; \\ c_3 &= \int_0^b (f^{**})^2\,dy; \\ c_4 &= \int_0^b (f^*)^2\,dy. \end{aligned}\right\} \quad (5.28)$$

Граничные условия для уравнения (5.27) записываются при $x = 0$, $x = a$ следующим образом.

Если запрещен прогиб w, то

$$W = 0.$$

Если прогиб w разрешается, то

$$(-4D_{33}c_4 + D_{12}c_2)\,W' + D_{11}c_1 W''' = 0.$$

Если запрещен угол поворота w', то

$$W' = 0.$$

Если угол поворота разрешается, то

$$D_{11}c_1 W'' + D_{12}c_2 W = 0.$$

Решение уравнения (5.27) можно записать в виде

$$W = W_0 + \sum_{m=1}^{4} C_m \Phi_m. \quad (5.29)$$

Здесь W_0 — частное решение. Функции Φ_m определяются так:

если $k_1^2 < k_2^2$,

$$\Phi_1 = \operatorname{ch} rx \cos tx;$$
$$\Phi_2 = \operatorname{sh} rx \sin tx;$$
$$\Phi_3 = \operatorname{ch} rx \sin tx;$$
$$\Phi_4 = \operatorname{sh} rx \cos tx,$$

где $$r = \sqrt{\frac{1}{2}\left(k_2^2 + k_1^2\right)};$$

$$t = \sqrt{\frac{1}{2}\left(k_2^2 - k_1^2\right)};$$

если $k_1^2 > k_2^2$,

$$\Phi_1 = \operatorname{ch} r_1 x; \quad \Phi_2 = \operatorname{ch} r_2 x;$$
$$\Phi_3 = \operatorname{sh} r_1 x; \quad \Phi_4 = \operatorname{sh} r_2 x,$$

где $$r_{1,2} = \sqrt{k_1^2 \mp \sqrt{k_1^4 - k_2^4}}.$$

Постоянные C_1—C_4 находятся из граничных условий.

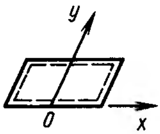
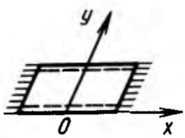
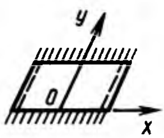
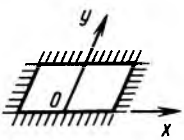
Для случая равномерного давления частное решение

$$W_0 = p_0 c/(D_{22}c_3),$$

где

$$c = \int_0^b f\,dy. \quad (5.30)$$

5.1. **Вид функций**

Граничные условия	$f(y)$	$F(x)$
	$y^4 - 2by^3 + b^3y$	$\dfrac{\Phi_1\overline{\Phi}{}_2'' - \Phi_2\overline{\Phi}{}_1''}{\overline{\Phi}_1\overline{\Phi}{}_2'' - \overline{\Phi}_2\overline{\Phi}{}_1''}$
	$y^4 - 2by^3 + b^3y$	$\dfrac{\Phi_1\overline{\Phi}{}_2' - \Phi_2\overline{\Phi}{}_1'}{\overline{\Phi}_1\overline{\Phi}{}_2' - \overline{\Phi}_2\overline{\Phi}{}_1'}$
	$y^2(b-y)^2$	$\dfrac{\Phi_1\overline{\Phi}{}_2'' - \Phi_2\overline{\Phi}{}_1''}{\overline{\Phi}_1\overline{\Phi}{}_2'' - \overline{\Phi}_2\overline{\Phi}{}_1''}$
	$y^2(b-y)^2$	$\dfrac{\Phi_1\overline{\Phi}{}_2' - \Phi_2\overline{\Phi}{}_1'}{\overline{\Phi}_1\overline{\Phi}{}_2' - \overline{\Phi}_2\overline{\Phi}{}_1'}$

Примечание. Штриховой линией отмечены стороны свободно опертые, штриховкой — защемленные. Верхней чертой для функций ϕ_i, ϕ_i', ϕ_i'' отмечены значения соответствующих функций и их производных, вычисленных при $x = a/2$. Вид функций ϕ_i приводится в пояснениях к (5.29).

Если продольные края свободно оперты, аппроксимирующую функцию $f(y)$ можно выбрать в виде

$$f = y^4 - 2by^3 + b^3y.$$

Соответствующие константы c_i (5.28) и c (5.30) будут равны

$$c_1 = 0{,}0492b^9;$$
$$c_4 = -c_2 = -0{,}486b^7;$$
$$c_3 = 4{,}66b^5;\ c = 0{,}2b^5.$$

Для защемленных продольных краев аппроксимирующую функцию $f(y)$ можно задать в форме

$$f = y^2(b - y)^2,$$

соответствующие ей константы c_i (5.28) и c (5.30) будут равны

$$c_1 = 0{,}00159b^9;$$
$$c_4 = -c_2 = 0{,}019b^7;$$
$$c_3 = 0{,}8b^5;\ c = 0{,}0333b^5.$$

Для приближенного определения прогиба тонкой слоистой пластины симметричного строения, нагруженной равномерным давлением p_0, с закрепленными сторонами по контуру можно воспользоваться формулой

$$w(x,\ y) = 0{,}0417\frac{p_0}{D_{22}}[1 - F(x)]\,f(y),$$

где вид функций $F(x)$, $f(y)$ зависит от граничных условий (табл. 5.1). Координата x отсчитывается от середины пластины.

5.4. УСТОЙЧИВОСТЬ СЛОИСТЫХ СВОБОДНО ОПЕРТЫХ ПЛАСТИН

Одним из распространенных видов нагружения слоистых пластин, работающих в качестве силовых элементов конструкций, является воздействие нормальных сжимающих или касательных усилий, которые могут привести к потере устойчивости плоской формы равновесия.

Вариационная формулировка задачи устойчивости прямоугольной пластины записывается следующим образом:

$$\int_0^a\int_0^b (\delta\varepsilon^{\mathrm{T}}\mathscr{N} - \Lambda\delta\theta^{\mathrm{T}}\mathscr{N}_0\theta)\,dy\,dx = 0, \tag{5.31}$$

где ε — вектор-столбец обобщенных деформаций; $\mathscr{N}$ — вектор-столбец обобщенных внутренних силовых факторов; Λ — параметр нагружения;

$$\theta = \begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\end{bmatrix};\quad \mathscr{N}_0 = \begin{bmatrix}N_x^0 & N_{xy}^0\\ N_{xy}^0 & N_y^0\end{bmatrix};$$

N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0 — начальные погонные усилия в пластине, определяющиеся решением задачи статики при $\Lambda = 1$ (нагружение предполагается пропорциональным).

С использованием соотношений

$$\varepsilon = LX;$$
$$\mathscr{N} = \mathscr{D}\varepsilon = \mathscr{D}LX; \tag{5.32}$$
$$\rho = RX,$$

где X — вектор-столбец обобщенных независимых перемещений; L — матрица связи деформаций с перемещениями; $\mathscr{D}$ — матрица соотношений упругости; R — матрица связи углов поворота с перемещением, формулировку задачи устойчивости (5.31) можно записать через перемещения

$$\int_0^a\int_0^b \big((L\delta X)^{\mathrm{T}}\,\mathscr{D}LX - \Lambda(R\delta X)^{\mathrm{T}}\,\mathscr{N}_0RX\big)\,dy\,dx = 0. \tag{5.33}$$

Полученное уравнение в вариациях (5.33) соответствует условию стационарности функционала изменений полной потенциальной энергии

$$\Delta Э = \frac{1}{2}\int_0^a\int_0^b \big((LX)^{\mathrm{T}}\,\mathscr{D}LX - \Lambda(RX)^{\mathrm{T}}\,\mathscr{N}_0RX\big)\,dy\,dx,$$

т. е. $\delta(\Delta Э) = 0$, и может использоваться как для точного решения, так и для построения приближенного решения задач устойчивости пластин.

5.4.1. Устойчивость толстой пластины. Рассмотрим последовательность решения задачи определения критических нагрузок свободно опертой слоистой пластины несимметричного строения при двухосном равномерном сжатии. Расчет проведем с учетом деформаций поперечного сдвига. В этом случае для формулировки (5.31) будем иметь

$$\varepsilon = [\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \gamma_{xy},\ \varkappa_x,\ \varkappa_y,\ \chi_{xy},\ \psi_x,\ \psi_y]^{\mathrm{T}};$$

$$\mathcal{N} = [N_x,\ N_y,\ N_{xy},\ M_x,\ M_y,\ M_{xy},\ Q_x,\ Q_y]^T;$$

$$N_x^0 = -T_x^0; \quad N_y^0 = -T_y^0; \quad N_{xy}^0 = 0.$$

В качестве компонент вектор-столбца X примем

$$X = [w,\ \psi_x,\ \psi_y,\ u,\ v]^{\mathrm{T}}.$$

Матрица соотношений упругости $\mathcal{D}$ соответствует (5.10). Матрица связи деформаций с перемещениями соответствует (5.11) при $k_1 = k_2 = 0$. Матрица R имеет следующий вид:

$$R = \begin{bmatrix} -\partial/\partial x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\partial/\partial y & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Воспользовавшись разложением решений в двойные тригонометрические ряды (5.12), получим для m,n-й гармоники волнообразования следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений:

$$(\mathcal{K}_{mn} - \Lambda S_{mn})\, X_{mn} = 0, \quad (5.34)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{K}_{mn} &= \frac{ab}{4}\, L_{mn}^{\mathrm{T}} \mathcal{D} L_{mn}; \\ S_{mn} &= \frac{ab}{4}\, R_{mn}^{\mathrm{T}} \mathcal{N}_0 R_{mn}. \end{aligned}\right\} \quad (5.35)$$

В этом случае

$$L_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\lambda_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_n \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n & \lambda_m \\ \lambda_m^2 & -\lambda_m & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_n^2 & 0 & -\lambda_n & 0 & 0 \\ -2\lambda_n\lambda_m & \lambda_n & \lambda_m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$R_{mn} = \begin{bmatrix} -\lambda_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{N}_0 = \begin{bmatrix} T_x^0 & 0 \\ 0 & T_y^0 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_m = m\pi/a; \quad \lambda_n = n\pi/b.$$

Матрица системы (5.34) имеет следующую структуру:

$$\mathcal{K}_{mn} - \Lambda S_{mn} = \begin{bmatrix} (k_{11} - \Lambda s_{11}) & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ & & & k_{44} & k_{45} \\ \text{сим.} & & & & k_{55} \end{bmatrix}, \quad (5.36)$$

где $s_{11} = (T_x^0\lambda_m^0 + T_y^0\lambda_n^0)\, ab/4$ — единственный ненулевой коэффициент матрицы S_{mn}; k_{ij} — коэффициент матрицы K_{mn}. Определитель матрицы (5.36) будет линейно зависеть от параметра нагружения Λ, т. е.

$$\det(\mathcal{K}_{mn} - \Lambda S_{mn}) = d_0 - \Lambda d_1, \quad (5.37)$$

где

$$d_0 = \det(\mathcal{K}_{mn});$$

$$d_1 = s_{11} \det \begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \\ & k_{33} & k_{34} & k_{35} \\ & & k_{44} & k_{45} \\ \text{сим.} & & & k_{55} \end{bmatrix}.$$

Из (5.37) находится значение параметра нагружения $\Lambda = \Lambda_{mn}$, при котором определитель равен нулю:

$$\Lambda_{mn} = d_0/d_1. \quad (5.38)$$

Параметр нагружения, соответствующий критической комбинации нагрузок, определяется минимизацией по всем гармоникам волнообразования:

$$\Lambda_{\text{кр}} = \min_{(m,\ n)} \Lambda_{mn} \quad (5.39)$$

$$T_{x\,\text{кр}} = T_x^0 \Lambda_{\text{кр}}; \quad T_{y\,\text{кр}} = T_y^0 \Lambda_{\text{кр}}.$$

Соответствующие $\Lambda_{\text{кр}}$ номера гармоник m и n будут характеризовать форму потери устойчивости.

Основная трудоемкость расчета заключается в вычислении определителей высокого порядка. Необходимость использования ЭВМ здесь очевидна. Приближенные оценки критических нагрузок можно получить, используя метод минимальных жесткостей, т. е. положить

$$D_{mn} = I_{mn}^{(2)} - \frac{\left[I_{mn}^{(1)}\right]^2}{I_{mn}^{(0)}}; \quad C_{mn} = 0 \tag{5.40}$$

(здесь $mn = 11,\ 12,\ 22,\ 33$) и выполнить расчет как для пластины с симметричной структурой.

Рассмотрим последовательность решений задачи определения критических нагрузок свободно опертой слоистой пластины, имеющей симметричное строение многослойного пакета. В этом случае при потере устойчивости деформации срединной поверхности и ее перемещения u, v будут равны нулю. Поэтому для формулировки задачи (5.31) достаточно воспользоваться следующими переменными:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varkappa_x,\ \varkappa_y,\ \chi_{xy},\ \psi_x,\ \psi_y]^{\mathrm{T}};$$

$$\mathcal{N} = [M_x,\ M_y,\ M_{xy},\ Q_x,\ Q_y]^{\mathrm{T}};$$

$$\boldsymbol{X} = [w,\ \psi_x,\ \psi_y]^{\mathrm{T}}.$$

Матрица соотношений упругости $\mathcal{D}$ будет содержать следующие жесткостные характеристики:

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & D_{33} & 0 & 0 \\ & & & K_x & 0 \\ \text{сим.} & & & & K_y \end{bmatrix}, \tag{5.41}$$

где $D_{mn} = \dfrac{2}{3}\sum\limits_{i=1}^{k/2} A_{mn}^{(i)}\left(z_i^3 - z_{i-1}^3\right)$

[для метода минимальных жесткостей см. (5.40)]; координата z отсчитывается от срединной плоскости; k — число слоев.

Разрешающая система однородных линейных алгебраических уравнений будет иметь вид (5.34). Матрицы $\mathcal{K}_{mn}$, S_{mn}, формирующие обобщенную задачу на собственные значения, определяются согласно (5.35) при

$$L_{mn} = \begin{bmatrix} \lambda_m^2 & -\lambda_m & 0 \\ \lambda_n^2 & 0 & -\lambda_n \\ -2\lambda_n\lambda_m & \lambda_n & \lambda_m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$R_{mn} = \begin{bmatrix} -\lambda_m & 0 & 0 \\ -\lambda_n & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Структура матрицы системы уравнений (5.34) будет иметь следующий вид:

$$\mathcal{K}_{mn} - \Lambda S_{mn} = \begin{bmatrix} (k_{11} - \Lambda S_{11}) & k_{12} & k_{13} \\ & k_{22} & k_{23} \\ \text{сим.} & & k_{33} \end{bmatrix}, \tag{5.42}$$

где коэффициенты k_{ij} определены ранее для (5.18), а s_{11} — для (5.36). Значение критического параметра нагружения будет определяться согласно (5.38), (5.39) путем минимизации по гармоникам m и n:

$$\Lambda_{\text{кр}} = \min_{m,\ n} (d_0/d_1), \tag{5.43}$$

где $d_0 = K$; $d_1 = s_{11}\,(k_{22}k_{33} - k_{23}^2)$ [см. обозначения к (5.18)].

Для случая равномерного одноосного сжатия свободно опертой толстой слоистой пластины симметричного строения значение критического погонного усилия можно определить, воспользовавшись выражением [2]

$$T_{x\,\text{кр}} = \min_{(m,\ n)} \left\{ \frac{l_{mn} + \left(\dfrac{\lambda_m^2}{K_y} + \dfrac{\lambda_n^2}{K_x}\right)\left(d_{mn}d_{nm} - d_{\text{к}}^2\lambda_m^2\lambda_n^2\right)}{\lambda_m^2\left[1 + \dfrac{1}{K_xK_y}\left(d_{mn}d_{nm} - d_{\text{к}}^2\lambda_m^2\lambda_n^2\right) + \dfrac{d_{mn}}{K_x} + \dfrac{d_{nm}}{K_y}\right]} \right\},$$

где

$$d_{mn} = D_{11}\lambda_m^2 + D_{33}\lambda_n^2;$$

$$d_{nm} = D_{22}\lambda_n^2 + D_{33}\lambda_m^2;$$

$$d_{\text{к}} = D_{12} + D_{33};$$

$$l_{mn} = d_{mn}\lambda_m^2 + d_{nm}\lambda_n^2 + 2d_{\text{к}}\lambda_m^2\lambda_n^2,$$

что соответствует (5.39), (5.38) при $d_0 = d_1$ (5.43) и $T_x^0 = 1$.

5.4.2. Устойчивость тонкой пластины. Рассмотрим последовательность решения задачи устойчивости тонкой свободно опертой слоистой пластины несимметричного строения при двухосном равномерном сжатии. Для тонких пластин, которые не содержат слоев с низкой трансверсальной сдвиговой жесткостью, учет деформаций поперечного сдвига не вносит существенных уточнений. Поэтому при расчете можно сразу положить $\psi_x = \psi_y = 0$. В этом случае в формулировке задачи (5.31) будут участвовать следующие переменные:

$$\varepsilon = [\varepsilon_x,\ \varepsilon_y,\ \gamma_{xy},\ \varkappa_x,\ \varkappa_y,\ \chi_{xy}]^{\text{T}};$$

$$\mathcal{N} = [N_x,\ N_y,\ N_{xy},\ M_x,\ M_y,\ M_{xy}]^{\text{T}};$$

$$X = [w,\ u,\ v]^{\text{T}}.$$

Разрешающая система однородных линейных алгебраических уравнений (5.34) будет формироваться согласно (5.35) с помощью исходных матриц

$$L_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda_m & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_n \\ 0 & \lambda_n & \lambda_m \\ \lambda_m^2 & 0 & 0 \\ \lambda_n^2 & 0 & 0 \\ -2\lambda_m\lambda_n & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ & B_{22} & 0 & C_{12} & C_{22} & 0 \\ & & B_{33} & 0 & 0 & C_{33} \\ & & & D_{11} & D_{12} & 0 \\ & & & & D_{22} & 0 \\ \text{сим.} & & & & & D_{33} \end{bmatrix};$$

$$R_{mn} = \begin{bmatrix} -\lambda_m & 0 & 0 \\ -\lambda_n & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{N}_0 = \begin{bmatrix} T_x^0 & 0 \\ 0 & T_y^0 \end{bmatrix}.$$

Структура матрицы системы уравнений (5.34) будет аналогична (5.42). Коэффициенты k_{ij} определяются выражениями:

$$\left.\begin{aligned} k_{11} &= [\lambda_m^4 D_{11} + 2\lambda_m^2\lambda_n^2 (D_{12} + \\ &\quad + 2D_{33}) + \lambda_n^4 D_{22}]\, ab/4; \\ k_{12} &= [-\lambda_m^3 C_{11} - \lambda_m\lambda_n^2 (C_{12} + \\ &\quad + 2C_{33})]\, ab/4; \\ k_{13} &= [-\lambda_n^3 C_{22} - \lambda_n\lambda_m^2 (C_{12} + \\ &\quad + 2C_{33})]\, ab/4; \\ k_{22} &= (\lambda_m^2 B_{11} + \lambda_n^2 B_{33})\, ab/4; \\ k_{23} &= \lambda_m\lambda_n (B_{12} + B_{33})\, ab/4; \\ k_{33} &= (\lambda_n^2 B_{22} + \lambda_m^2 B_{33})\, ab/4. \end{aligned}\right\} \quad (5.44)$$

Критический параметр нагружения вычисляется согласно (5.43) при коэффициентах k_{ij} (5.44).

Для тонкой пластины симметричной структуры ($C_{mn} = 0$) решение задачи значительно упрощается ($u_{mn} = v_{mn} = 0$), поскольку вместо системы (3×3) получаем одно уравнение

$$k_{11} - \Lambda s_{11} = 0,$$

отсюда $\Lambda_{mn} = k_{11}/s_{11}$. В развернутом виде критический параметр нагружения определяется минимизацией выражения

$$\Lambda_{\text{кр}} = \min_{(m,\,n)} \left\{ \frac{\lambda_m^4 D_{11} + 2\lambda_m^2\lambda_n^2 \times (D_{12} + 2D_{33}) + \lambda_n^4 D_{22}}{T_x^0\lambda_m^2 + T_y^0\lambda_n^2} \right\}, \quad (5.45)$$

где $\lambda_m = m\pi/a$; $\lambda_n = n\pi/b$.

Выражения (5.45) можно использовать также для оценки критических нагрузок тонких пластин несимметричного строения при жесткостных характеристиках D_{mn} (5.40).

Список литературы

1. Бидерман В. Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. М.: Машиностроение, 1977. 488 с.
2. Васильев В. В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.

Глава 6

ИНЕРЦИОННЫЕ НАКОПИТЕЛИ ЭНЕРГИИ (МАХОВИКИ) ИЗ КОМПОЗИТОВ

Типичные характеристики композитов, применяемых для маховиков, представлены в табл. 1. Они обладают двумя достоинствами: высокой удельной прочностью при нагружении вдоль волокон, что приводит к потенциальной возможности аккумулирования больших количеств энергии на единицу массы и относительно безопасным, безосколочным разрушением в правильно спроектированной конструкции. Разрыв у композитов сочетается с расслаиванием, послойной размоткой и трением отделившихся слоев о корпус защиты. Меньшая опасность разрушения приводит к уменьшению массы защиты, которая может составлять лишь 15—30% от массы защиты для металлических маховиков.

Анализ исследований [19—22] свидетельствует о том, что «абсолютно лучшей» конструкции маховика из композита типа равнонапряженного диска для металлов не существует. В зависимости от назначения и условий работы (маховики для стационарных или подвижных установок, работающие в условиях плавного или импульсного съема мощности, маховики для бытовых нужд или для изделий новой техники и т. д.) конструкция маховика и используемый тип композита могут быть самыми разнообразными. Кроме того, проектирование по энергоемкости не укладывается в рамки традиционных методов расчета деталей машин. Поэтому рассмотрим общие принципы проектирования энергоемких элементов маховиков, затем основные их типы, характерные для композитов, и методы повышения их энергоемкости.

6.1. Характеристики однонаправленных композитов [13, 14]

Характеристики	Значение характеристики для стеклопластика	углепластика	боропластика	органопластика
v_f	0,72	0,70	0,50	0,54
$\rho_V \cdot 10^{-3}$, кг/м^3	2,13	1,61	2,02	1,36
$E_\theta \cdot 10^{-4}$, МПа	6,07	18,14	20,13	8,43
E_θ/E_r	2,44	17,53	9,27	17,43
$E_\theta/G_{r\theta}$	5,07	26,43	37,43	29,66
$\Pi_\theta^+ \cdot 10^{-2}$, МПа	12,90	14,94	13,73	11,86
Π_θ^+/ρ_V, кДж/кг	606	928	680	872
Π_θ^+/Π_r^+	28,0	37,3	24,6	108,2
$\Pi_\theta^+/\Pi_{r\theta}$	28,0	22,1	21,8	43,0
$\nu_{r\theta}$	0,23	0,28	0,17	0,32
$\alpha_\theta \cdot 10^6$, градус$^{-1}$	3,78	0,02	6,12	−2,88
α_θ/α_r	0,02	0,001	0,02	−0,05

Примечание. Принятые обозначения: v_f — объемное содержание армирующих волокон; E_θ, E_r — модули упругости соответственно вдоль и поперек волокон; Π_θ^+, Π_r^+ — прочности на растяжение соответственно вдоль и поперек волокон; $\Pi_{r\theta}$ — прочность на сдвиг; $\nu_{r\theta}$ — коэффициент Пуассона; α_θ, α_r — температурные коэффициенты расширения соответственно вдоль и поперек волокон; ρ_V — плотность материала.

6.1 ПРЕДЕЛЬНАЯ ЭНЕРГОЕМКОСТЬ И МОЩНОСТЬ ВРАЩАЮЩИХСЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Оптимальное проектирование вращающихся конструкций по энергоемкости ставит своей целью достижение максимальных значений удельной массовой энергоемкости $W^M = \frac{W}{M}$ (где W — предельная кинетическая энергия, запасаемая вращающейся конструкцией; M — масса конструкции) и (или) удельной объемной энергоемкости $W^V = \frac{W}{V_0}$ (где V_0 — объем, необходимый для размещения вращающейся конструкции). Эти характеристики являются комплексными: они зависят от предельной скорости вращения конструкции, ее геометрической формы и плотности материала.

Среди подходов, позволяющих обнаружить общие закономерности в накапливании вращающимися деформируемыми телами кинетической энергии, можно выделить анализ связи между кинетической энергией, накапливаемой в объеме тела, и напряженным состоянием этого объема [9]. Результатом явилось следующее соотношение между кинетической энергией W, накопленной во вращающемся деформируемом теле, интегралом по его объему от первого инварианта тензора напряжений $I_1(T_\sigma) = \sigma_{ij}\delta_{ij}$ (где δ_{ij} — символ Кронекера) и вириалом поверхностной нагрузки $\iint_S pr\,ds$ (где r — радиус-вектор; p — распределенная по поверхности s сила), который может трактоваться как работа, совершаемая поверхностными силами при переносе точек их приложения в начало координат:

$$\iiint_V I_1(T_\sigma)\,dV = 2W + \iint_s pr\,ds. \tag{6.1}$$

Для вращающегося однородного тела, свободного от поверхностных нагрузок, получим следующее значение его массовой энергоемкости:

$$W^M = \frac{W}{V\rho_V} = \frac{\iiint_V I_1(T_\sigma)\,dV}{2V\rho_V} = \frac{I_{1m}(T_\sigma)}{2\rho_V}, \tag{6.2}$$

где ρ_V — плотность материала; I_{1m} — среднее по объему значение первого инварианта тензора напряжений.

Из анализа соотношений (6.1) и (6.2) вытекают приведенные ниже следствия.

1. Заданному значению кинетической энергии и вириала нагрузки вращающегося тела должно соответствовать одно и то же значение интеграла от первого инварианта тензора напряжений по объему этого тела, не зависящее от его формы, объема и свойств материала.

2. Разность между интегралом по объему от первого инварианта напряжений и вириалом нагрузки, поделенная на квадрат скорости, равна полярному моменту инерции вращающегося тела: поскольку $W = \frac{1}{2} J_p\omega^2$, где J_p — полярный момент инерции вращающегося тела; ω — угловая скорость вращения, то

$$J_p = \frac{1}{\omega^2}\left[\iiint_V I_1(T_\sigma)\,dV - \iint_s pr\,ds\right].$$

3. Чем выше отношение среднего значения первого инварианта тензора напряжений по объему вращающегося тела к плотности его материала при том же вириале нагрузки, тем выше удельная массовая энергоемкость этого тела.

4. Максимально возможное значение массовой энергоемкости конструкций из однородного материала достигается, когда обеспечивается максимальное значение $I_1(T_\sigma)$ в каждой точке материала конструкции.

Следствие 4 требует уточнения величины $\max I_1(T_\sigma)$. Естественно, что $\max I_1(T_\sigma)$ должна удовлетворять критерию прочности $\Phi(\sigma_{ij}) = 0$, однако требование достижения $\max I_1(T_\sigma)$ в каждой точке является более узким, чем условие равнопрочности конструкции (одновременного разрушения конструкции по всему объему). Напряженное состояние в каждой точке должно быть не просто предельным, а соответствовать вполне определенному сочетанию напряжений на предельной поверхности $\Phi(\sigma_{ij}) = 0$. Это сочетание определяется точкой касания предельной поверхности плоскостью первого инварианта ($\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \mathrm{const}$), наиболее удаленной от начала координат. В случае плоского напряженного состояния это поясняется рис. 6.1, *а*. Максимально возможная массовая энергоемкость будет достигаться в конструкции с напряжениями σ_1^*, σ_2^* в каждой ее точке. К конструкциям такого типа можно отнести равнонапряженный вращающийся диск переменной толщины из изотропного материала, в котором $\sigma_1 = \sigma_2 = \mathrm{const}$. Такой диск будет обладать максимально возможной массовой энергоемкостью. Вид предельной кривой $\Phi(\sigma_{ij})$ изотропного материала при этом несуществен, поскольку для любого выпуклого критерия прочности $\max I_1(T_\sigma)$ будет достигаться вследствие симметрии на направлении $\sigma_1 = \sigma_2$ (см. рис. 6.1, *б*). Для анизотропного материала профиль должен выбираться из условия создания в каждой точке σ_1^*, σ_2^* (см. рис. 6.1, *а*).

Таким образом, эффективность вращающейся конструкции при оптимальном проектировании по энергоемкости может оцениваться следующим функционалом:

$$W = \frac{1}{2}\left[\iiint_V I_1(T_\sigma)\,dV - \iint_S pr\,ds\right]. \qquad (6.3)$$

В случае проектирования по W^M функционал (6.3) необходимо относить к массе конструкции (M), при проектировании по W^V — к объему (V_0), необ-

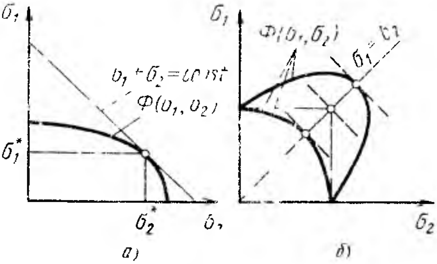


Рис. 6.1. Схема определения компонент однородного напряженного состояния, обеспечивающего максимальную массовую энергоемкость вращающегося тела (оптимальные сочетания σ_1, σ_2):

а — анизотропный материал, *б* — изотропный материал

ходимому для размещения конструкции.

Представляет интерес исследование некоторых свойств конструкций с однородным напряженным состоянием ($I_1(T_\sigma) = \max\ I_1\ (T_\sigma) = \mathrm{const}$). Из анализа (6.3) для равнонапряженных конструкций следуют выводы.

5. Если равнонапряженные конструкции нагружены поверхностной нагрузкой, имеющей положительный вириал $\left(\iint_s pr ds > 0\right)$, то их массовая энергоемкость $\left(W_p^M\right)$ меньше, чем W_0^M у свободных от внешней нагрузки (самоуравновешенных) равнонапряженных конструкций из того же материала:

$$W_p^M = \frac{\max I_1(T_\sigma)}{2\rho_V} - \frac{\iint_s pr\,ds}{2\rho_V V} < W_0^M = \frac{\max I_1(T_\sigma)}{2\rho_V}.$$

6. В случае, когда поверхностные нагрузки на равнонапряженную конструкцию создаются присоединенными массами (балластом), общая энергоемкость конструкции с учетом энергоемкости балласта равна энергоемкости (W_0) равнонапряженной конструкции того же объема без балласта:

$$p = m\omega^2 r_0;$$

$$I_1(T_\sigma) = \mathrm{const} = \max I_1(T_\sigma);$$

$$2W_0 = \max I_1(T_\sigma) V = 2W_p + \iint\limits_s m\omega^2 r_0 r\, ds = 2(W_p + W_m),$$

где m — масса, распределенная по цилиндрической поверхности s радиусом r_0; W_p — энергия, накапливаемая самой конструкцией; W_m — энергия, накапливаемая присоединенной массой. При $V = \text{const}$ и $W_p + W_m = \text{const}$ (сами W_p и W_m могут меняться).

Таким образом, использование балласта в равнонапряженных конструкциях, свободных от иной поверхностной нагрузки, не увеличивает предельной величины запасаемой ими энергии (при сохранении объема равнонапряженной конструкции) и, следовательно, уменьшает их массовую энергоемкость. Использование балласта в равнонапряженных конструкциях может оказаться целесообразным лишь для уменьшения предельной скорости их вращения.

7. Если вращающаяся конструкция образована из набора i элементов с однородным напряженным состоянием, то ее массовая энергоемкость меньше или равна среднему взвешенному из массовых энергоемкостей ее элементов. Поскольку $I_{1i}(T_\sigma)$ постоянен по объему каждого из элементов, то общая энергоемкость конструкции

$$W = \frac{1}{2}\sum_i V_i I_{1i} \leqslant \frac{1}{2}\sum_i V_i \max I_{1i},$$

где $\max I_{1i}$ — предельные значения первого инварианта, обеспечивающие максимальную массовую энергоемкость в i-м элементе. Отсюда получаем

$$W^M = \frac{W}{M} = \frac{W}{\sum\limits_i V_i \rho_{Vi}} \leqslant \frac{\sum\limits_i V_i \rho_{Vi}\left(\dfrac{V_i \max I_{1i}(T_\sigma)}{2V_i \rho_{Vi}}\right)}{\sum V_i \rho_{Vi}} = \frac{\sum\limits_i M_i W_i^M}{M},$$

где M_i, W_i^M — соответственно массы и предельные массовые энергоемкости элементов конструкции.

Полученные результаты позволяют в ряде случаев получить оценки энергоемкости маховиков, не прибегая к громоздким расчетам, сопоставить эффективность различных способов повышения энергоемкости, проверить (с помощью следствия 2) точность расчетов напряженного состояния вращающихся конструкций. Использование функционала (6.3) при оптимизации конструкции маховика может оказаться более удобным, чем прямое вычисление ее предельной энергоемкости.

Рассмотрим общий подход к оценке возможности реализации с помощью маховика данной конструкции, требуемого импульса мощности, заданного в форме $\dot W = \dot W(t)$ и преобразованного интегрированием к виду $\dot W(W)$. Решение этой задачи заключается в определении предельно возможных сочетаний мощности $\dot W$ и энергии W маховика и основывается на расчете предельных напряженных состояний в элементах маховика под воздействием центробежной силы и силы инерции вращения. Определяя эти состояния с помощью линейных критериев прочности и полагая, что угловая скорость ω и ускорение $\dot\omega$ постоянны во всем объеме маховика, получим, что любая допустимая пара значений ω и $\dot\omega$ должна удовлетворять неравенству

$$\rho_V \omega^2 b^2 k_1 \bar\sigma_1 + \rho_V \dot\omega b^2 k_2 \bar\sigma_2 \leqslant \Pi, \qquad (6.4)$$

где $\bar\sigma_1$, $\bar\sigma_2$ — безразмерные напряжения от центробежных сил и сил инерции; k_1, k_2, Π — параметры, зависящие от прочностных характеристик материала; b — характерный радиус маховика. Пусть $v_{пр} = \omega_{пр} b$ — предельная окружная скорость при $\dot\omega = 0$. Предельная окружная скорость маховика данной конструкции определяется прочностью и плотностью его материала и не зависит (при сохранении подобия), от размера маховика. Введем характерное время соотношением $T = \dfrac{1}{\omega_{пр}}$ и безразмерное время $\bar t = \dfrac{t}{T} = t\omega_{пр}$.

Тогда $\omega = \bar{\omega}\omega_{пр}$ и $\dot{\omega} = \bar{\dot{\omega}}\omega_{пр}^2$ и критерий разрушения (6.4) принимает вид

$$\bar{\omega}^2 k_1 \bar{\sigma}_1 + \bar{\dot{\omega}} k_2 \bar{\sigma}_2 = \frac{\Pi}{\rho_V v_{пр}^2} = \bar{\Pi}.$$

Так как $v_{пр}$ не зависит от b, то, следовательно, от b не зависят и $\bar{\Pi}$, $\bar{\omega}$, $\bar{\dot{\omega}}$. Подставив эти значения в выражение для текущей массовой энергоемкости $W^M = \frac{\omega^2 b^2 \bar{J}_p}{2}$ и массовой мощности $\dot{W}^M = \omega\dot{\omega} b^2 \bar{J}_p$ $\left(\text{где } \bar{J}_p = \frac{J_p}{b^2 M}\right.$ — безразмерный момент инерции), получим

$$W^M = \bar{\omega}^2 W^M_{пр}; \qquad (6.5)$$

$$b\dot{W}^M = \bar{\omega}\bar{\dot{\omega}}\omega^3_{пр} b^3 \bar{J}_p = 2\bar{\omega}\bar{\dot{\omega}}\omega_{пр} b W^M_{пр}, \qquad (6.6)$$

где

$$W^M_{пр} = \frac{\omega^2_{пр} b^2 \bar{J}_p}{2}.$$

Из (6.5), (6.6) следует, что W^M и $b\dot{W}^M$ являются инвариантными характеристиками по отношению к изменению радиуса маховика. Таким образом, следующие системы координат фазовых плоскостей не зависят от абсолютных размеров маховика: $(\bar{\omega}, \bar{\dot{\omega}})$, $(\omega b, \dot{\omega} b^2)$, $(W^M, b\dot{W}^M)$. Предельные режимы разгона-торможения, описанные в этих координатах, могут быть использованы для характеристики маховика данной конструкции независимо от его размеров. Любой режим торможения или разгона, не выходящий за предельную кривую, может быть реализован (рис. 6.2).

Из инвариантности характеристик W^M и $b\dot{W}^M$ следует, что при k-кратном увеличении размеров маховика, сопровождающемся увеличением массы в k^3 раз, его предельная энергоемкость увеличивается в k^3 раз, а предельно достижимая мощность лишь в k^2 раз.

Положив k^3 целым числом, рассмотрим агрегат, реализующий мощность $\dot{W}$ и состоящий из $n = k^3$ маховиков с массой каждого M_0, радиусом b_0. Для маховика, входящего в агрегат, получим

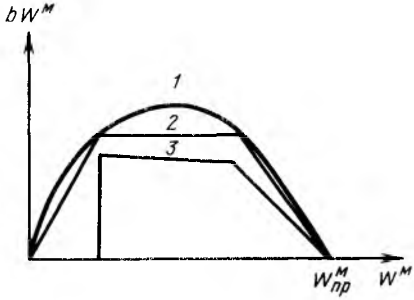


Рис. 6.2. Предельная мощность при подводе и съеме энергии:

1 — предельная кривая, *2*, *3* — допустимые кривые при разгоне и торможении

$$b\dot{W}^M = \frac{b_0\dot{W}/n}{M_0} = \frac{b_0\dot{W}}{k^3 M_0}.$$

Для одного маховика того же типа, эквивалентного по массе и мощности агрегату, получим

$$b\dot{W}^M = \frac{k b_0 \dot{W}}{k^3 M_0} = \frac{b_0\dot{W}}{k^2 M_0}.$$

Следовательно, при реализации одной и той же абсолютной мощности $\dot{W}$ фазовая траектория агрегата на плоскости $(W^M, b\dot{W}^M)$ лежит ниже фазовой траектории одного маховика такой же массы $\left(\frac{b_0\dot{W}}{k^3 M_0} < \frac{b_0\dot{W}}{k^2 M_0}\right)$. Из этого следует, например, что в импульсе постоянной мощности у агрегата реализуется больше энергии, чем в одном маховике той же массы (рис. 6.3), т. е. время торможения при той же постоянной мощности у агрегата будет больше. Следовательно, в случае, когда нужно обеспечить заданную мощность в течение заданного интервала времени, для уменьшения массы накопителя выгоднее использовать агрегат из нескольких маховиков, чем один маховик.

При использовании нелинейных критериев прочности, например квадратичных, будет изменяться форма предельных кривых, однако основные

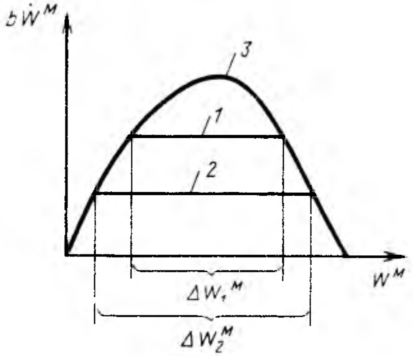


Рис. 6.3. Графики торможения с постоянной мощностью одного маховика (1) и агрегата из нескольких подобных маховиков (2) с одинаковой общей массой (3 — предельная кривая для маховика данного типа)

чественные результаты, связанные с подобием, останутся в силе (см. разд. 6.4).

6.2. НИТЯНЫЕ ОБОЛОЧКИ И ДИСКИ

Одним из основных методов оптимального проектирования слоистых конструкций из волокнистых композитов является подход, основанный на сетевом анализе. При таком подходе направления армирования в каждом слое совпадают с траекториями главных напряжений; принимается, что композит обладает нулевой жесткостью в направлении, поперечном армированию, и работает лишь на растяжение вдоль волокон. В этом случае вычисление интеграла по объему от первого инварианта в зависимости (6.3) упрощается, так как $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Очевидно, что максимальная массовая энергоемкость достигается в равнонапряженных конструкциях с $\sigma_1 = \text{const} = \Pi_0^+$ (Π_0^+ — прочность однонаправленного композита на растяжение вдоль волокон).

Массовая энергоемкость вращающихся равнонапряженных нитяных конструкций из композитов не зависит от их формы и объема, а также от типов траекторий и схем армирования. Если армирующие волокна в самоуравновешенной (свободной от поверхностных сил) конструкции равнонапряжены, то ее предельная массовая энергоемкость

$$W^M = \frac{\iiint_V \sigma_1\, dV}{2V\rho_V} = \frac{\Pi_0^+}{2\rho_V}. \qquad (6.7)$$

К числу таких конструкций относятся тонкие кольца и равнонапряженные стержни переменного сечения, равнонапряженные нитяные диски, равнонапряженные диски переменного сечения с радиально-окружным армированием. Совпадающие результаты, полученные при исследовании их массовой энергоемкости,—это частные иллюстрации описанного выше общего свойства равнонапряженных нитяных вращающихся конструкций.

Если конструкция массой M образуется из i нитяных элементов, находящихся в однородном напряженном состоянии, то ее массовая энергоемкость, как следует из следствия 7 (см. разд. 6.1), не превосходит следующей величины:

$$W^M_{\Sigma i} \leqslant \frac{1}{2} \sum_i \frac{M_i}{M} \frac{\Pi_{0i}^+}{\rho_{Vi}}.$$

Таким образом, свободновращающийся тонкий обод, например, нецелесообразно делать составным; тонкий обод и соединяющие его с валом равнонапряженные спицы целесообразно изготавливать из материала с наибольшей удельной прочностью.

Присоединение масс (балласта) к равнонапряженным стержням и тонким кольцам, как следует из следствия 6, не повышает их энергоемкостей. Использование балласта приводит лишь к понижению предельной угловой скорости конструкции:

$$\frac{\omega_m}{\omega_0} = \sqrt{\frac{J_{p_0}}{J_{p_0} + J_{p_m}}},$$

где ω_m, ω_0— предельные угловые скорости кольца с балластом и без балласта; J_{p_0} — момент инерции кольца; J_{p_m} — момент инерции балласта.

Нитяные оболочки. К числу наиболее распространенных нитяных конструкций, рассчитываемых методом тевого анализа, относятся оболочки. Рассмотрение с помощью функционала (6.3) энергоемкости, симметричной относительно экваториальной плоскости вращающейся нитяной оболочки (рис. 6.4), с использованием уравнений равновесия приводит к следующему выражению для кинетической энергии вращающейся оболочки [9] (индексом 1 обозначены значения параметров на экваторе оболочки, индексом «0» — у полюсного отверстия):

$$W = 2\pi a h_1 \left[\int_0^{z_0} \frac{\sigma^2}{\sigma_1} dz - \right.$$

$$\left. - \cos^2\varphi_1 \sigma_1 \left(z_0 - \frac{r_0}{\operatorname{tg}\alpha_0} \right) \right].$$

Массовая энергоемкость нитяной оболочки [9]

$$W^M = \frac{1}{2} \frac{\int_0^{z} \frac{\sigma^2}{\sigma_1} dz - \sigma_1 \cos^2\varphi_1 \left(z_0 - \frac{r_0}{\operatorname{tg}\alpha_0} \right)}{\rho_V \int_0^{z_0} \frac{\sigma}{\sigma_1} dz}.$$

Для равнонапряженной оболочки с $\sigma = \Pi_0^+$ получим

$$W_c^M = \frac{1}{2} \frac{\Pi_0^+}{\rho_V} \times$$

$$\times \left(\sin^2\varphi_1 + \frac{r_0 \cos^2\varphi_1}{z_0 \operatorname{tg}\alpha_0} \right). \qquad (6.8)$$

Из (6.8) следует, что массовая энергоемкость равнонапряженных замкнутых ($r_0 = 0$) или с плавным сопряжением на полюсе $\left(\alpha_0 = \frac{\pi}{2}\right)$ оболочек в $\sin^2\varphi_1$ меньше массовой энергоемкости тонкого кольца.

Значение $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ возможно лишь при $\varphi \equiv \frac{\pi}{2}$ или при $z \equiv 0$. В первом случае оболочка должна иметь форму цилиндра, во втором случае она вы-

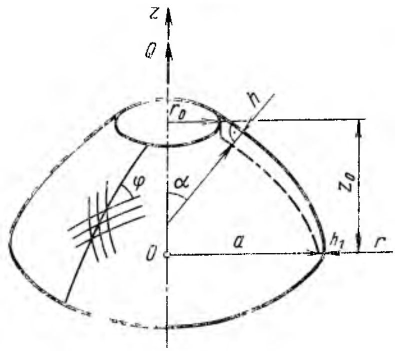


Рис. 6.4. Параметры тонкостенной оболочки, симметричной относительно экваториальной плоскости

рождается в плоский равнонапряженный диск. Для цилиндра и самоуравновешенного диска с волокнами, касающимися полюсного отверстия $\left(\varphi_0 = \frac{\pi}{2}\right)$, массовая энергоемкость равна и соответствует (6.7).

Траектории армирования и формы меридианов пустотелых равнонапряженных оболочек определяются зависимостями

$$\sin\varphi = \frac{1}{\bar r} \sqrt{\sin^2\varphi_1 - \frac{\lambda}{2}(1 - \bar r^4)};$$

$$\bar z = \frac{\cos\varphi_1}{\sqrt{2\lambda}} \times$$

$$\times \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\lambda \bar r^2 - \sin^2\varphi_1}{\lambda - \sin^2\varphi_1} \right), \qquad (6.9)$$

где $\bar r = \frac{r}{a}$, $\bar z = \frac{z}{a}$ — соответственно приведенные текущий радиус и осевая координата (a — радиус экватора оболочки): $\lambda = \frac{\rho_V \omega^2 a^2}{\sigma}$ (σ — заданное напряжение в направлении армирования).

Полный анализ условий существования решений при различных значениях параметра λ приведен в [1]. Практический интерес могут представлять лишь оболочки из семейств, определяемых соотношением $\sin^2\varphi_1 < \lambda \leqslant 2\sin^2\varphi_1$. В случае выполнения неравенств оболочки имеют полюсные отверстия определенного радиуса $\bar{r}_0 = \sqrt{\frac{2\sin^2\varphi_1}{\lambda} - 1}$, по контуру которого распределены осевые усилия с равнодействующей $Q = 2\pi h_1 a\sigma \cos^2\varphi_1$. Случай $\lambda = 2\sin^2\varphi_1$ определяет замкнутые оболочки с образующими, зависящими от параметра φ_1, и траекториями армирования, проходящими через ось вращения. При $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ оболочки вырождаются в плоские диски.

В равнонапряженных оболочках связующее нагружено межслоевыми касательными напряжениями. Траектории армирования таких оболочек существенно отличаются от геодезических и при реальных значениях коэффициента трения ленты о поверхность оправки намоткой можно изготовить лишь очень пологие оболочки ($\bar{r}_0 \geqslant 0{,}75$). В остальных случаях необходимо применять выкладку по расчетным траекториям. Результаты исследований вращающихся оболочек, проведенных под руководством С. Б. Черевацкого, приведены ниже.

Форму и траектории армирования равнонапряженных оболочек можно определять не заданием λ и φ_1, а при помощи эквивалентного λ параметра $c_1 = \frac{Aa^2}{nT}$ ($A = m\omega^2 an$, где m — масса единицы длины нити; n — число нитей в поперечном сечении оболочки, T — натяжение нити) и параметра $c_2 = \frac{Q}{nT}$ (где $Q = nT\cos\varphi\sin\alpha$), равного относительной величине осевой силы:

$$\sin^2\varphi = \frac{c_1}{2}\bar{r}^2 + \frac{\bar{r}_0^2}{\bar{r}^2}\left(1 - \frac{c_1}{2}\bar{r}_0^2\right);$$

$$\sin\alpha = \frac{c_2}{\cos\varphi};$$

$$\bar{z} = \int_{\bar{r}}^{1} \operatorname{tg}\alpha\, d\bar{r}.$$

В связи со сложностью технологической реализации равнопрочных оболочек целесообразно рассмотрение вращающихся оболочек, намотка которых не сопряжена с технологическими трудностями, т. е. оболочек, намотанных по геодезическим и линиям предельного отклонения (ЛПО). Натяжение нити в таких оболочках неравномерно, в выражения для c_1 и c_2 подставляются предельно допустимые его значения. Для геодезических оболочек

$$\sin\varphi = \frac{\bar{r}_0}{\bar{r}};$$

$$\sin\alpha = \frac{c_2}{\sin\varphi}.$$

Для оболочек ЛПО траектории армирования и формы меридианов определяются из решения системы

$$\frac{d}{d\bar{r}}(\sin\varphi) = \pm\frac{c_1}{c_2}\bar{r}k \times \frac{\sin^2\alpha\cos\varphi}{\cos\alpha} - \frac{\sin\varphi}{\bar{r}};$$

$$\frac{d}{d\bar{r}}(\sin\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos^2\varphi} \times \left(\frac{c_1}{c_2}\bar{r}\cos\varphi\sin\alpha - \frac{\sin^2\varphi}{r}\right),$$

где k — коэффициент трения между нитью и поверхностью. Знак коэффициента трения определяет расположение траектории укладки нити по отношению к геодезической, большая энергоемкость соответствует $k > 0$.

Наличие осевой силы и неравномерность натяжения нитей приводят согласно изложенному в разд. 6.2 к существенному падению массовой энергоемкости по сравнению с предельной, равной $\frac{\Pi_0^+}{2\rho_V}$. Максимальные значения массовой энергоемкости геодезических оболочек не превышают 55%, а оболочек ЛПО — 65% от предельной, достигаемой в свободновращающемся тонком кольце или цилиндре, изготовленном окружной намоткой. Поэтому более целесообразно использовать оболочки не в качестве накопителей энергии, а для связи энергоемкого обода

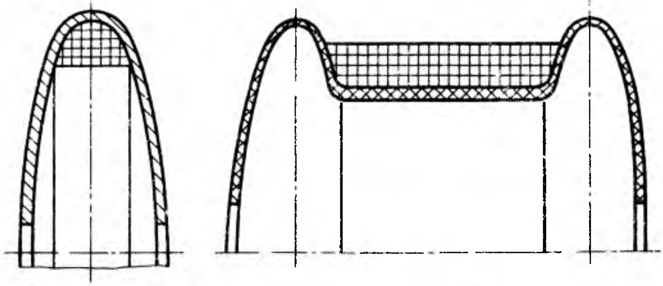


Рис. 6.5. Маховики в виде оболочек с внутренним (*а*) и внешним (*б*) ободами

в виде кольца или цилиндра с валом. Сочетая оболочку, намотанную по геодезической или по линиям постоянного отклонения, с расположенным внутри нее ободом (рис. 6.5, *а*), можно достигнуть массовой энергоемкости, составляющей 0,865 от предельной. Увеличивая осевую ширину обода и располагая его снаружи, можно уменьшить относительный вклад в энергоемкость малоэффективных в энергетическом отношении оболочек.

Такой маховик (рис. 6.5, *б*) будет состоять из энергоемкого обода-цилиндра, изготовленного окружной намоткой, расположенного под ним тонкостенного цилиндра со спиральной намоткой, сочетающегося с двумя плавно переходящими друг в друга оболочками, намотанными по линиям постоянного отклонения. Расчет составного маховика, приведенный в [11], показывает, что в такой конструкции можно достичь массовой энергоемкости, близкой к предельной.

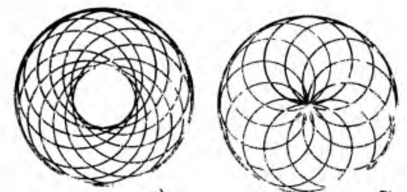
Вращающиеся оболочки обладают низкой объемной энергоемкостью. Использование балласта в виде жидкости, заполняющей внутренний объем равнонапряженной оболочки, рассмотрено в [2]. Оболочки с балластом имеют меньший осевой размер и в соответствии со следствием 6 (см. разд. 6.1) меньшую угловую скорость. Траектории их армирования совпадают с траекториями равнонапряженных пустотелых оболочек.

Практически оценивая целесообразность использования оболочек в качестве энергоемких элементов маховиков, можно отметить следующее: основным достоинством маховиков-оболочек является возможность использования намотки для их изготовления и простота соединения с валом; удельная массовая энергоемкость даже равнонапряженных оболочек меньше, чем у колец (неравнонапряженные оболочки уступают им еще более существенно); в полюсных отверстиях вращающихся оболочек возникают существенные усилия, для восприятия которых могут понадобиться массивные ступицы, что еще более понизит массовую энергоемкость оболочек; оболочки требуют для своего размещения значительного объема и, следовательно, обладают низкой объемной энергоемкостью; их трудно балансировать, динамические характеристики вращающихся оболочек практически не исследованы.

Нитяные диски. Методы сетевого анализа можно распространить и на проектирование равнонапряженных вращающихся дисков [11, 12]. Расчетные зависимости получаются из (6.9) при углах армирования на полюсе и экваторе, равных $\frac{\pi}{2}$:

$$\sin^2 \varphi = \frac{\lambda}{2} \bar{r}^2 + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \bar{r}^{-2}.$$

Практический интерес представляют траектории армирования, соответствующие $1 \leqslant \lambda \leqslant 2$ (рис. 6.6, *а*, *б*). При $\lambda = 1$ диск вырождается в тонкое кольцо, при $\lambda = 2$ армирующие нити образуют сплошной диск — в соответ-



а) б)

Рис. 6.8. Схема укладки волокон в равнонапряженном диске:
а — при $1,0 < \lambda < 2$; *б* — при $\lambda = 2$

ствии с выражением для радиуса внутреннего отверстия

$$\bar{r}_0 = \sqrt{\frac{2}{\lambda} - 1}\,.$$

При застильной укладке нити по периферии диска его текущая толщина h связана с радиусом зависимостью

$$h = \frac{Nf}{2\pi r \cos\varphi}\,,$$

где N — число нитей, проходящих через круговое сечение диска; f — площадь поперечного сечения нити.

Максимальные касательные напряжения, возникающие между монотропными слоями $+\varphi$ и $-\varphi$, определяются по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{\rho_V N f \omega^2}{4\pi}\sqrt{\frac{1+\bar{r}_0^2}{2\bar{r}_0}}. \quad (6.10)$$

Как видно из (6.10), касательные напряжения тем больше, чем меньше внутреннее отверстие, а в сплошном диске они стремятся к бесконечности. Предельное число оборотов $\omega_{\text{пр}}$ диска, определяемое по прочности нити Π_0^+, больше, чем у тонкого кольца, его можно определить из выражения

$$\omega_{\text{пр}} = \sqrt{\frac{2\Pi_0^+}{\rho_V\left(1+\bar{r}_0^2\right)}}\,.$$

Массовая энергоемкость равнонапряженного свободновращающегося диска, как следует из (6.7),

$$W^M = \frac{\Pi_0^+}{2\rho_V}\,.$$

Используя для характеристики осевого размера среднеинтегральную толщину диска, получим следующее выражение для его объемной энергоемкости

$$W^V = \frac{\Pi_0^+}{2}\left(1 - \bar{r}_0^2\right).$$

Таким образом, теоретически равнонапряженный свободновращающийся диск является наилучшим типом маховика из композитов. Реализуя максимально возможные значения массовой и объемной энергоемкостей, он служит эталоном, по которому можно оценивать эффективность других типов композитных маховиков.

Однако изготовление такого маховика связано со сложностью реализации расчетных траекторий укладки нити [10]. К настоящему времени не существует способов изготовления равнонапряженных дисков. Реализация этого проекта предъявляет особые требования к деформативным свойствам волокон связующего и связана с рядом трудностей, которые к настоящему времени не преодолены. При торможении на равнонапряженный диск действует дополнительная нагрузка и оценка его несущей способности требует дополнительного решения прямой задачи.

6.3. АНИЗОТРОПНЫЕ ДИСКИ

Оценка энергоемкости. Диски, изготавливаемые окружной намоткой или прессованием, будем считать цилиндрически-ортотропными. При расчете напряженного состояния таких вращающихся дисков можно без существенных погрешностей использовать формулы плоского напряженного состояния. Это дает возможность выразить функционал (6.3) через радиальные (σ_r) и окружные (σ_θ) напряжения, постоянные по толщине диска:

$$W = \pi\int_a^b rh\,(\sigma_r + \sigma_\theta)\,dr - \pi\left[p(a)\,h(a)\,a^2 + p(b)\,h(b)\,b^2\right], \quad (6.11)$$

где h — осевая толщина диска; a, b — соответственно внутренний и внешний радиусы диска; $p(a)$, $p(b)$ — поверхностная нагрузка, действующая соответственно в отверстии и на периферии диска.

При заданной поверхностной нагрузке наибольшая энергоемкость достигается в равнонапряженном диске с $\sigma_r = \sigma_r^* = \text{const}$, $\sigma_\theta = \sigma_\theta^* = \text{const}$, где σ_r^*, σ_θ^* — координаты касания предельной кривой, описывающей прочность материала диска, линией $\sigma_r + \sigma_\theta = \text{const}$ (см. следствие 4 разд. 6.1 и рис. 6.1, *а*). Из соотношений $\sigma_r = \text{const} = \sigma_r^*$, $\sigma_\theta = \text{const} = \sigma_\theta^*$ следует $\varepsilon_r = \text{const}$, $\varepsilon_\theta = \text{const}$, а из условия совместности деформаций — требование $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta$. Этому условию удается удовлетворить (для линейно-упругого материала) лишь в случае, когда

$$\frac{\sigma_\theta^*}{\sigma_r^*} = \frac{E_\theta (1 + \nu_{\theta r})}{E_r (1 + \nu_{r\theta})} = \alpha. \qquad (6.12)$$

В случае выполнения (6.12) теоретически возможен диск с $\sigma_\theta = \sigma_\theta^* = \text{const}$ и $\sigma_r = \sigma_r^* = \text{const}$; его толщина должна изменяться по закону

$$h = kr^{-(1-\alpha)} e^{-\lambda r^2}, \qquad (6.13)$$

где k, λ — константы (k определяется из граничного условия).

Как видно из (6.13), случаи $\alpha \leqslant 1$ реализовать нельзя. Представляющему практический интерес случаю $\alpha = 1$ соответствуют изотропные материалы, а также полярно-ортотропные и квазиизотропные композиты с $E_r = E_\theta$, т. е. материалы с $\sigma_r^* = \sigma_\theta^* = \sigma^*$. Массовая энергоемкость профилированного в соответствии с (6.13) диска, свободного от поверхностной нагрузки,

$$W^M = \frac{\sigma_r^* + \sigma_\theta^*}{2\rho_V} = \frac{\sigma^*}{\rho_V}.$$

Таким образом, выигрыш в массовой энергоемкости при переходе от нитяных конструкций к профилированным сплошным слоистым дискам из композитов с симметричным радиально-окружным армированием или с квазиизотропной укладкой слоев возможен лишь в случаях, когда сопротивление этих материалов, характеризуемое величиной σ^* (определяемой согласно следствию 4 из разд. 6.1), удовлетворяет требованию

$$\sigma^* > \frac{\Pi_0^+}{2},$$

где Π_0^+ — прочность однонаправленного слоя из исследуемого композита на растяжение вдоль волокон.

Изготовление и использование маховиков из композитов в виде слоистых сплошных профильных дисков сопряжено с рядом технических трудностей. К их числу относятся невозможность точной реализации теоретического профиля ($b \to \infty$), технологические сложности изготовления дисков, потери в несущей способности, связанные с креплением дисков, возможности преждевременного расслоения по радиальным плоскостям из-за концентрации напряжений у кромок слоев и т. д. Результаты исследований, представленные в [19—22], также свидетельствуют о том, что профилирование вращающихся дисков из композитов является малоэффективным с точки зрения их энергоемкости. Поэтому в дальнейшем будут рассматриваться лишь диски постоянной толщины.

Используем для оценки энергоемкости дисков постоянной толщины (с неоднородным напряженным состоянием) критерий максимальных напряжений

$$\sigma_r \leqslant \Pi_r^+, \quad \sigma_\theta \leqslant \Pi_\theta^+. \qquad (6.14)$$

Используя для подстановки в (6.11) выражения $\sigma_\theta = \Pi_\theta^+ - \left(\Pi_\theta^+ - \sigma_\theta\right)$;

$$\sigma_r = \Pi_r^+ - \left(\Pi_r^+ - \sigma_r\right);$$

$\bar r = \dfrac{r}{b}$; $m = \dfrac{a}{b}$, получим для диска с однородными свойствами

$$W^M = \frac{\Pi_\theta^+ + \Pi_r^+}{2\rho_V} -$$

$$- \frac{1}{\rho_V (1 - m^2)} \left[\int_m^1 \left(\Pi_\theta^+ - \sigma_\theta\right) \bar r \, d\bar r + \right.$$

$$+\int_m^1 \left(\Pi_r^+ - \sigma_r\right)\bar r\,dr + $$
$$+ p(m)\,m^2 + p(1)\Bigg]. \quad (6.15)$$

Для объемной энергоемкости (энергоемкости, отнесенной к объему сплошного диска) получим

$$W^V = \frac{(\Pi_\theta^+ + \Pi_r^+)(1-m^2)}{2} - $$
$$-\Bigg[\int_m^1 (\Pi_\theta^+ - \sigma_\theta)\,\bar r\,d\bar r + $$
$$+\int_m^1 (\Pi_r^+ - \sigma_r)\,\bar r\,d\bar r + $$
$$+p(m)\,m^2 + p(1)\Bigg]. \quad (6.16)$$

Таким образом, верхней оценкой массовой энергоемкости дисков можно считать величину $W^M_{\text{пр}} = \left(\Pi_\theta^+ + \Pi_r^+\right)/2\rho_V$, а верхней оценкой объемной энергоемкости — $W^V_{\text{пр}} = \left(\Pi_\theta^+ + \Pi_r^+\right)/2$. Определение оптимальных размеров диска, обеспечивающих $\max W^M$ и $\max W^V$, сводится к поиску минимума от m вторых слагаемых в выражениях (6.15), (6.16).

Удельные энергоемкости. В общем случае $\max W^M$ и $\max W^V$ достигаются в дисках (ободах) различных относительных размеров. В то же время создание маховика, в котором обе эти характеристики, если и не максимальны, то имеют приемлемые значения, представляет существенный интерес. Результаты анализа удельной массовой энергоемкости дисков из анизотропных материалов и сопоставления ее с объемной энергоемкостью приведены в [7, 8] для диапазона параметров $1 \leqslant \beta = \sqrt{\dfrac{E_\theta}{E_r}} \leqslant 10$ и $0{,}1 \leqslant m \leqslant 0{,}9$. Определение максимальных энергоемкостей диска проводилось в соответствии с условием прочности (6.14). Таким образом, необходимо было определить и сравнить две энергоемкости, соответствующие разрушению от радиальных W_r и от окружных W_θ напряжений.

Рассмотрим приведенные удельные массовые $\overline{W}^M_{r,\,\theta}$ и объемные $\left(\overline{W}^V_{r,\,\theta}\right)$ энергоемкости *:

$$\overline{W}^M_{r,\,\theta} = \frac{\rho_V(3+\nu_{r\theta})}{\Pi^+_{r,\,\theta}}\,W^M_{r,\,\theta};$$

$$\overline{W}^V_{r,\,\theta} = \rho_V\,(1-m^2)\,W^M_{r,\,\theta} = $$
$$= \frac{(3+\nu_{r\theta})}{\Pi^+_{r,\,\theta}}\,W^V_{r,\,\theta}.$$

Зависимости $\overline{W}^M_{r,\,\theta}$ от m при различной анизотропии материалов β для двух случаев граничных условий — свободновращающегося и жестко закрепленного на валу дисков — представлены на рис. 6.7. Экстремумы в зависимостях $\overline{W}^M_\theta(m)$ и $\overline{W}^M_r(m)$ соответствуют дискам с такими m, при которых средние по толщине значения безразмерных окружных и радиальных напряжений максимальны, т. е. дискам интегрально наиболее напряженным.

Для определения максимальной приведенной массовой энергоемкости, достижимой при условии (6.14) в диске оптимальных размеров из материала с заданной анизотропией свойств β, $\dfrac{\Pi_\theta^+}{\Pi_r^+}$, необходимо сопоставить зависимости $\overline{W}^M_\theta(m)$ и $\overline{W}^M_r(m)$, приведенные к одинаковому масштабу вдоль оси ординат. С этой целью нужно преобразовать $\overline{W}^M_\theta(m)$ в $\overline{\overline{W}}{}^M_\theta = \overline{W}^M_\theta \Pi_\theta^+/\Pi_r^+$ и определить максимальную ординату $\overline{W}^M_{\max}$ в области, ограниченной кривыми $\overline{W}^M_r(m)$ и $\overline{\overline{W}}{}^M_\theta(m)$, и соответствующее ей значение $m_{\text{опт}}$. Величина

* Введение коэффициента $(3+\nu_{r\theta})$ уменьшает зависимость полученных результатов от коэффициента Пуассона, который при расчетах был принят постоянным и равным 0,3.

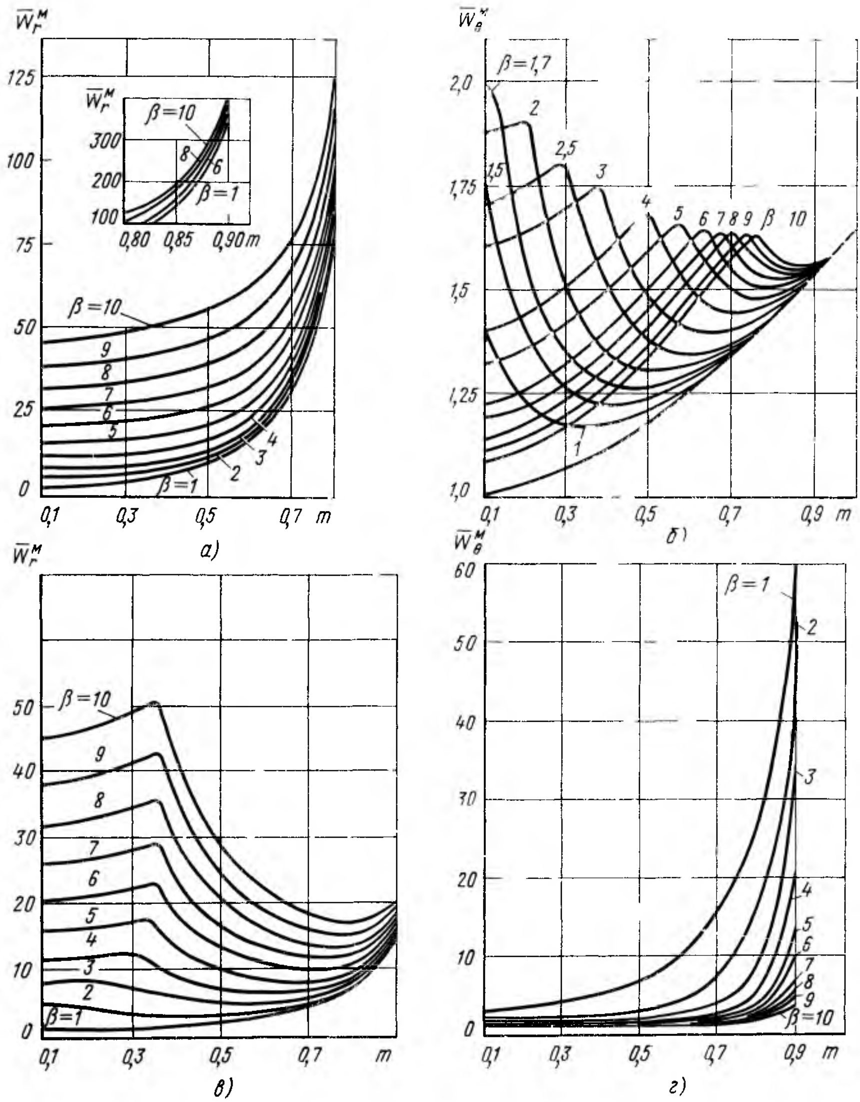


Рис. 6.7. Зависимости приведенных удельных массовых энергоемкостей дисков $\overline{W}^{M}_{r,\theta}$ от их относительных размеров m и степени анизотропии материала β (цифры у кривых): *а*, *б* — свободная посадка, *в*, *г* — жесткая посадка

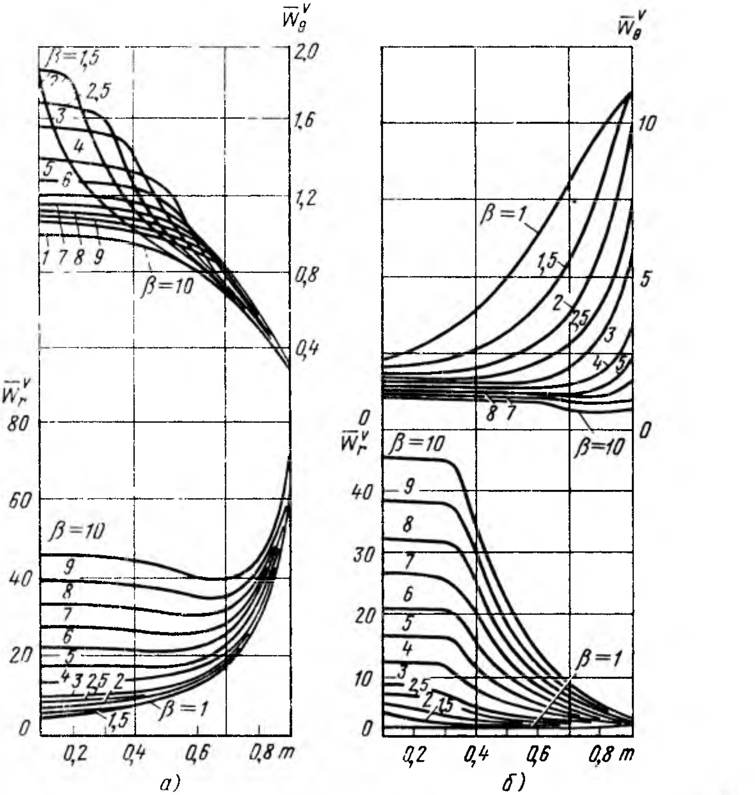


Рис. 6.8. Зависимости приведенных удельных объемных энергоемкостей дисков $\overline{W}^V_{r,\theta}$ от их относительных размеров m и степени анизотропии материала β:
а — свободная посадка; *б* — жесткая посадка

$\overline{\overline{W}}{}^M_{max}$ имеет ту же структуру, что и $\overline{W}^M_r$, т. е. $\overline{\overline{W}}{}^M_{max} = W^M_{max}\rho_V(3 + \nu_{r\theta})/\Pi^+_r$.

Зависимости $\overline{W}^V_{r,\theta}$ от m при различных значениях β, необходимые для исследования объемной энергоемкости, приведены на рис. 6.8.

Для определения максимальной приведенной объемной энергоемкости, достижимой при условии (6.14) в диске оптимальных размеров из материала с заданной анизотропией свойств β, Π^+_θ/Π^+_r, необходимо сопоставить зависимости $\overline{W}^V_r$ и $\overline{\overline{W}}{}^V_\theta = \overline{W}^V_\theta \Pi^+_\theta/\Pi^+_r$ и определить максимальную ординату $\overline{\overline{W}}{}^V_{max}$ в области, ограниченной кривыми $\overline{W}^V_r(m)$ и $\overline{\overline{W}}{}^V_\theta(m)$, и соответствующее $m_{опт}$.

Подробное исследование зависимостей $\overline{\overline{W}}{}^M_{max}$, $\overline{\overline{W}}{}^V_{max}$ от параметров анизотропии [7, 8] показало, что свободновращающиеся диски в большинстве случаев намного эффективнее дисков с жесткой посадкой. Проектированию маховиков, обладающих предельными или достаточно близкими к предельным обеими удельными характеристиками энергоемкости, могут способствовать данные для дисков со свободной посадкой, представленные на рис. 6.9. Область *I* соответствует значениям β и

$П^+_\theta/П^+_r$, при которых обе максимальные удельные характеристики энергоемкости достигаются при одновременном разрушении от радиальных и окружных напряжений, т. е. совмещаются в одном и том же диске с $m = m_{опт}$. Верхняя граница области *I* зависит от ограничений на максимальные значения m. При их увеличении область I сужается (штриховая линия на рис. 6.9 соответствует $m = 0{,}95$).

В области *II* максимальной массовой энергоемкостью обладает обод минимальной толщины ($m = 0{,}9$). Диски с одновременным разрушением являются «почти оптимальными», так как обеспечивают максимальную объемную энергоемкость, а потери в массовой энергоемкости по сравнению с ободом с $m = 0{,}9$ незначительны. Расширение диапазона относительных толщин до $m = 0{,}95$ увеличивает массовую энергоемкость лишь на 3%.

В области *III* максимальной энергоемкостью обладают диски с $m = 0{,}9$ и с разрушением от окружных напряжений. Оптимальные размеры дисков с максимальной объемной и массовой энергоемкостями для этой области параметров могут существенно отличаться. Максимальные удельные энергоемкости и соответствующие им оптимальные относительные размеры дисков, образованных окружной намоткой однонаправленных композитов (свойства их приведены в табл. 6.1), представлены в табл. 6.2. При свободной посадке максимальной удельной объемной энергоемкостью обладают сравнительно тонкие диски-ободы с одновременным разрушением от радиальных и окружных напряжений. Оптимальные относительные размеры находятся в диапазоне $m = 0{,}7 \div 0{,}8$, т. е. эффективно используется лишь небольшая часть конструкционного объема. И массовая, и объемная энергоемкости свободновращающихся дисков, образованных намоткой, больше, чем у дисков с жесткой посадкой. Поэтому в дальнейшем рассматриваются лишь диски со свободной посадкой.

Влияние начальных термонапряжений. При намотке дисков с малыми усилиями натяжения начальные напряжения определяются, в основном, ре-

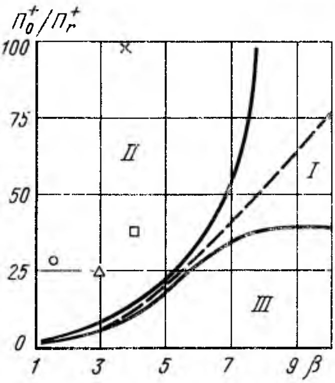


Рис. 6.9. Области параметров β и $П^+_\theta/П^+_r$, соответствующие различным способам определения оптимальных относительных размеров свободно вращающихся дисков с максимальной массовой и объемной энергоемкостями:

○ — стеклопластик; △ — боропластик; □ — углепластик; × — органопластик

6.2. Удельные энергоемкости дисков, образованных окружной намоткой однонаправленных композитов

Материал диска	W^V_{max}, МДж/м³	W^M_{max}, МДж/кг	W^V_{max}, МДж/м³	W^M_{max}, МДж/кг
	Диск со свободной посадкой		Диск с жесткой посадкой	
Стеклопластик	$\frac{266{,}3}{0{,}717}$	$\frac{0{,}284}{0{,}9}$	$\frac{50{,}7}{0{,}1}$	$\frac{0{,}097}{0{,}9}$
Углепластик	$\frac{296{,}6}{0{,}742}$	$\frac{0{,}436}{0{,}9}$	$\frac{153{,}4}{0{,}1}$	$\frac{0{,}121}{0{,}9}$
Боропластик	$\frac{319{,}2}{0{,}692}$	$\frac{0{,}321}{0{,}9}$	$\frac{146{,}2}{0{,}1}$	$\frac{0{,}130}{0{,}9}$
Органопластик	$\frac{149{,}2}{0{,}852}$	$\frac{0{,}409}{0{,}9}$	$\frac{41{,}2}{0{,}1}$	$\frac{0{,}039}{0{,}9}$

Примечания: 1. Предельное значение m равно 0,9.

2. В знаменателях приведены значения оптимального относительного размера диска, при котором достигаются приведенные значения удельной энергоемкости.

6.3. Влияние начальных термических напряжений на удельные энергоемкости дисков, образованных намоткой композитов

$\Delta T°$, C	Стеклопластик		Углепластик		Боропластик		Органопластик	
	$\widetilde{W}^V$	$\widetilde{W}^M$	$\widetilde{W}^V$	$\widetilde{W}^M$	$\widetilde{W}^V$	$\widetilde{W}^M$	$\widetilde{W}^V$	$\widetilde{W}^M$
—30	$\frac{0,99}{0,717}$	$\frac{1,00}{0,9}$	$\frac{0,86}{0,711}$	$\frac{0,92}{0,9}$	$\frac{0,85}{0,660}$	$\frac{0,95}{0,9}$	$\frac{0,87}{0,844}$	$\frac{0,90}{0,9}$
—50	$\frac{0,98}{0,717}$	$\frac{0,99}{0,9}$	$\frac{0,71}{0,664}$	$\frac{0,87}{0,9}$	$\frac{0,71}{0,622}$	$\frac{0,91}{0,9}$	$\frac{0,77}{0,832}$	$\frac{0,83}{0,9}$
—70	$\frac{0,98}{0,716}$	$\frac{0,99}{0,9}$	$\frac{0,53}{0,770}$	$\frac{0,82}{0,9}$	$\frac{0,56}{0,717}$	$\frac{0,87}{0,9}$	$\frac{0,65}{0,823}$	$\frac{0,76}{0,9}$
—150	$\frac{0,96}{0,716}$	$\frac{0,99}{0,9}$	$\frac{0,28}{0,9}$	$\frac{0,62}{0,9}$	$\frac{0,31}{0,830}$	$\frac{0,73}{0,9}$	$\frac{0,34}{0,9}$	$\frac{0,49}{0,9}$

Примечания: 1. $\widetilde{W}^{V,\,M} = W_T^{V,\,M}/W_0^{V,\,M}$, где $W_T^{V,\,M}$ — удельные энергоемкости дисков с термическими напряжениями; $W_0^{V,\,M}$ — без термических напряжений.

2. В знаменателе приведены оптимальные относительные размеры дисков с термическими напряжениями, соответствующие максимальным удельным энергоемкостям.

жимом термообработки, а их величина достаточно хорошо оценивается решением задачи линейной термоупругости. Оценка их влияния для дисков, образованных намоткой четырех типов композитов (см. табл. 6.1), приведена в табл. 6.3. Для каждого случая вычислялись максимальные удельные энергоемкости и соответствующие им оптимальные относительные размеры диска. Рассчитанные с учетом начальных температурных напряжений величины $\overline{W}_{T\,\max}^M$ и $\overline{W}_{T\,\max}^V$ были поделены на соответствующие значения удельных энергоемкостей дисков без начальных напряжений. Температура полимеризации $T_п$ эпоксидного связующего варьировалась в расчетах от 50 до 170 °C (теплофизические и упругие свойства материалов при этом считались неизменными). Полученные результаты позволяют сделать вывод о существенном влиянии термических начальных напряжений на характеристики маховиков из высокомодульных композитов. Учет начальных термических напряжений может изменить первоначальный выбор композита для маховика, сделанный лишь на основании данных о его механических свойствах.

Методы повышения объемной энергоемкости. Вращающиеся диски, образованные намоткой современных композитов, обладают максимальной удельной объемной энергоемкостью в случае одновременного разрушения их от окружных и радиальных напряжений. Существенная анизотропия прочности приводит к тому, что соответствующие оптимальные отношения радиусов дисков лежат в пределах 0,7—0,8, т. е. используется лишь небольшая часть конструкционного объема. Дальнейшее повышение удельной объемной энергоемкости, связанное с увеличением их радиальной толщины, требует дополнительных мер, повышающих сопротивление композита растягивающим радиальным напряжениям. Далее рассмотрены некоторые конструктивные и технологические способы повышения max $\overline{W}^V$ применительно к дискам, изготовленным намоткой современных композитов (их свойства см. в табл. 6.1).

При исследовании дисков с балластом были рассмотрены два способа создания балластной нагрузки на несущий диск. Первый — при помощи «чистого» балласта в виде кольца с $E_\theta = 0$, не связанного с валом; соединение несущего диска с валом осуществляется через периферию диска (например, хордовой намоткой). Второй — при помощи диска из низкомодульного материала, связанного как с ободом, так и с валом и выполняющего одновременно функции и балласта и крепления несущего обода к валу. При использовании «чистого» балласта энергоемкость оптимальной конструкции практически не зависит от плотности балласта. Если балласт связан с валом, то максимальная энергоемкость достигается, когда удельная плотность обода и балласта близки.

Выигрыш в объемной энергоемкости оказался существенным лишь у дисков из наиболее анизотропного композита — органопластика, у которых напряженное состояние существенно неоднородно. Чем ближе напряженное состояние к однородному, тем меньше влияние балласта (при однородном напряженном состоянии балласт в соответствии со следствием 6 из разд. 6.1 не увеличивает запасаемой энергии). Использование балласта сопровождается, как и следовало ожидать, существенными потерями в массовой энергоемкости.

Способ повышения max W^V при использовании многослойных дисков основан на ограничении уровня радиальных напряжений. Он заключается в заполнении всего объема между периферией маховика и валом системой концентрических колец, толщина которых достаточно мала, чтобы избежать преждевременного их расслоения. Кольца разделены податливыми прослойками, практически не стесняющими радиальных перемещений поверхностей колец. Задача состоит в выборе такой последовательности толщин концентрических колец, образующих многослойный диск заданного относительного размера, чтобы число колец было минимальным, а допустимая угловая скорость диска максимальной.

Чтобы обеспечить максимальную угловую скорость, необходимо внешнее кольцо выбрать оптимального относительного размера (см. табл. 6.2) из условия одновременного разрушения от радиальных и окружных напряжений, а для обеспечения минимального числа слоев последующие слои выбирать из условия разрушения по радиальным напряжениям. Результаты расчета последовательности толщин колец из современных композитов, образующих многослойные диски с $m = 0{,}1$, показали что минимальное число композитных слоев, необходимое для заполнения всего конструкционного объема, невелико. Расчет показал, что уровень допустимых радиальных напряжений в последнем кольце допускает осуществление жесткой посадки его на вал. Эффективное использование всего конструкционного объема диска-маховика приводит к значительному увеличению удельной объемной энергоемкости.

Интересно оценить, насколько эффективным может оказаться переход от окружной схемы армирования дисков к радиально-окружной, когда повышение прочности в радиальном направлении, получаемое перераспределением арматуры, достигается лишь за счет потерь в окружной. Анализ показывает, что эффект от перераспределения арматуры может быть значительным. Для достижения максимального уровня W^V достаточно перенести в радиальное направление 15—20% армирующих волокон. Отказ от чисто окружного армирования сопровождается уменьшением массовой энергоемкости.

В дисках, образованных намоткой композитов, возможно создание благоприятной эпюры начальных напряжений за счет программированной и послойной намотки. Для оценки эффективности этого способа может быть рассмотрен случай создания системы напряжений σ_r^0 и σ_θ^0, компенсирующей радиальные растягивающие напряжения в диске $\left(\sigma_r^c\right)$ при некоторой угловой скорости $\bar\omega$. При $\bar\omega$ напряжения в диске

$$\sigma_r = \sigma_r^0 + \sigma_r^c = 0;$$
$$\sigma_\theta = \sigma_\theta^0 + \sigma_\theta^c = \rho_V \bar\omega^2 r^2.$$

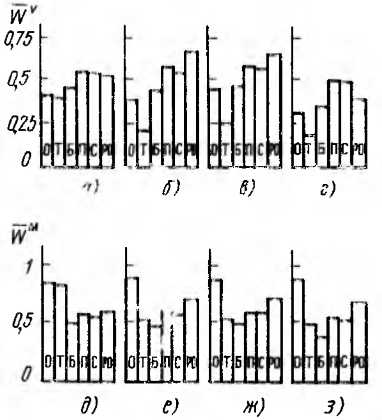


Рис. 6.10. Относительные значения объемной ($\overline{W}^V$) и массовой ($\overline{W}^M$) энергоемкостей дисков оптимальных размеров, разрушающихся одновременно от σ_r и σ_θ:

О — окружное армирование; *Т* — с учетом температурных напряжений; *Б* — балласт; *П* — предварительное напряжение; *С* — многослойный диск; *РО* — радиально-окружное армирование; *а*, *д* — стеклопластик; *б*, *е* — углепластик; *в*, *ж* — боропластик; *г*, *з* — органопластик

Определенность эпюры начальных напряжений хотя и сужает задачу, но позволяет провести анализ и оценить эффективность предварительного напряжения для маховиков. Уровень начальных напряжений определялся параметром $\varkappa = \rho\bar{\omega}^2 b^2 (3 + \nu_{r\theta})/\Pi_r^+$. Чем он выше, тем выше угловая скорость, при которой радиальные напряжения в диске равны нулю. Как и следовало ожидать, максимальная массовая энергоемкость достигается по-прежнему в предельно тонких ободах (в рассмотренном диапазоне этому соответствует кольцо с $m = 0{,}9$). Однако при оптимальном $\varkappa$ к этой энергоемкости приближается и энергоемкость более толстых ободов, в которых разрушение происходит одновременно по обоим направлениям. Максимальные значения массовой и объемной энергоемкостей достигаются при различных уровнях начальных напряжений. Увеличивать начальные напряжения выше этого уровня нецелесообразно; при достаточно больших $\varkappa$ энергоемкость предварительно напряженных маховиков ниже, чем у маховиков без начальных напряжений.

Объемную энергоемкость ободов-дисков можно существенно повысить, делая их составными — из материала с разными свойствами. Различные попарные сочетания колец из композитов рассмотрены в [12, 17]. Более жесткий и более прочный в окружном направлении материал использовался во внешнем кольце. Сжимающее радиальное напряжение на поверхности раздела позволило повысить несущую способность колец по радиальным напряжениям, что и обеспечило прирост энергоемкости. Наибольшее увеличение объемной энергоемкости по сравнению с $W_{\max}^V$ у однородных колец (на 40%) было достигнуто при сочетании угле- и органопластика со стеклопластиком. Массовая энергоемкость при этом по сравнению с максимальной уменьшилась на 20%.

Сравним эффективность рассмотренных методов. Отношение $\widetilde{W}^M$ и $\widetilde{W}^V$ максимальных значений W^M и W^V, достигаемое при $m = m_{\text{опт}}$, к теоретическим предельным значениям $W_{\text{пр}}^M$ и $W_{\text{пр}}^V$ в рассмотренных выше задачах (за исключением составного обода) представлено на рис. 6.10. На рис. 6.10, *а* видно, что наибольший прирост объемной энергоемкости в результате рассмотренных мер достигается у существенно анизотропных композитов (угле- и органопластиков), наиболее близкие к предельным значения достигаются при использовании радиально-окружного армирования. Рассмотренные приемы позволяют существенно повысить объемную энергоемкость дисков из композитов. Повышение объемной энергоемкости сопровождается значительными потерями в массовой энергоемкости (рис. 6.10, *б*), которая в рассмотренных методах составляет примерно 0,5 от предельной.

6.4. ХОРДОВЫЕ МАХОВИКИ

Наиболее эффективным энергоемким элементом маховика из современных композитов является свободновращающийся толстостенный обод, образованный окружной намоткой. Простота его изготовления сочетается с высокими значениями массовой и с достаточно высокой объемной энергоемкостями. Трудность соединения его с валом преодолена в конструкции хордового маховика — кольцевой системы из обода и ступицы, соединенных спицами-хордами из однонаправленного композита, охватывающими обод по периферии (рис. 6.11). Успешные результаты испытаний хордовых маховиков доказывают перспективность этого типа конструкций. Большое число легко регулируемых параметров — рисунок звездчатых многоугольников-спиц и их относительная толщина, относительная толщина обода, возможность использования различных сочетаний материалов — открывает широкие возможности для оптимизации конструкции. Хорды могут концентрироваться в дискретные спицы, образующие звездчатые многоугольники (см. рис. 6.11), или образовывать сплошные диски по каждую сторону обода. Для конструкции первого типа существенно облегчаются балансировка маховика и контроль за его состоянием в процессе эксплуатации.

Напряженное состояние. Расчеты напряженного состояния маховика с хордами-спицами при равномерном вращении и торможении приведены в работах [5, 3].

При анализе системы из n хорд-спиц на каждой стороне маховика принималось, что в точках пересечения хорды скреплены жестко и не поворачиваются относительно друг друга. Система обладает центральной симметрией; точки пересечения хорд при равномерном вращении в процессе деформации перемещаются только в радиальном направлении, а при ускорении — только в окружном. В такой постановке задачу о системе хорд можно привести к задаче об одном многоопорном стержне (хорде) с заданным направлением перемещений в опорах (точках пересечения с другимих ордами). Многоопорный стержень нагружен собственными инерционными силами от вращения с угловой скоростью ω и ускорения $\dot{\omega}$ и силой на внешнем конце, определяемой из условий совместности перемещения стержня и обода-диска. Стержень находится в условиях продольно-

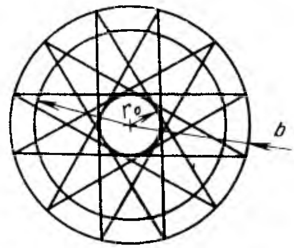


Рис. 6.11. Схема хордового маховика

поперечного изгиба с растяжением. По крайней мере, при малых $\bar{r}_0 = \frac{r_0}{b}$ (см. рис. 6.11) можно отказаться от учета продольного изгиба и решать задачи расчета напряженно-деформированного состояния хордовых маховиков в линейной постановке.

Система разрешающих уравнений для многоопорного стержня имеет вид

$$T' + \rho_V \omega^2 S x + \rho_V \dot{\omega} S r_0 = 0;$$

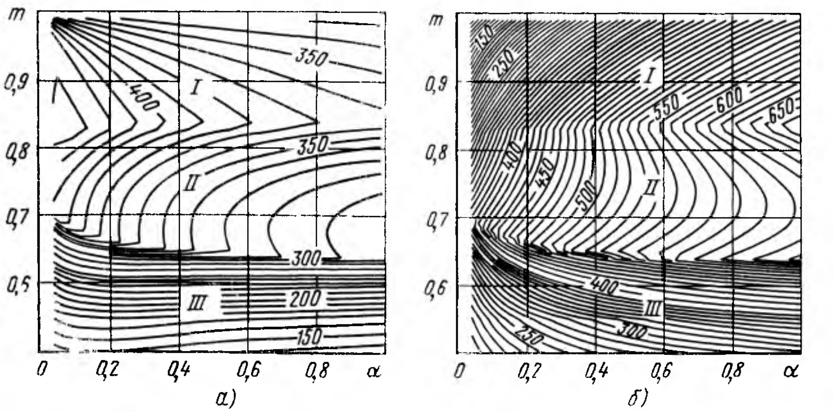
$$P' + \rho_V \omega^2 S r_0 - \rho_V \dot{\omega} S x = 0; \quad (6.17)$$

$$P = -EJv'''; \quad T = ESu',$$

где T, P — соответственно продольные и поперечные усилия в стержне; u, v — соответственно продольные и поперечные перемещения стержня; x — координата вдоль оси стержня, отсчитываемая от его середины; S, J — соответственно площадь и момент инерции поперечного сечения стержня; ρ_V, E — соответственно удельная плотность и модуль упругости материала стержня.

Ввиду линейности системы (6.17) можно рассматривать отдельно задачи о стационарном вращении и плавном ускорении. Обе эти задачи сведены к решению на ЭВМ замкнутой системы алгебраических уравнений для определения констант интегрирования. Экспериментальная проверка подтвердила работоспособность предложенных методов расчета хордовых маховиков [5, 3].

Анализ энергоемкости. Энергоемкость хордовых маховиков, спицы и ободы которых изготовлены из стекло-, боро- и органопластиков, проанализи-



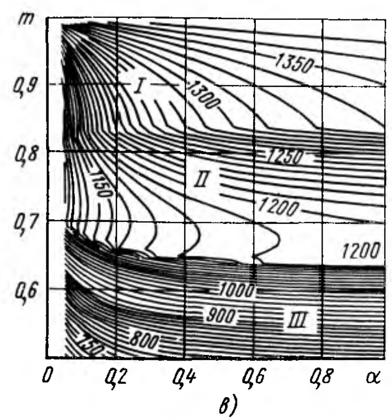


Рис. 6.12. Картины линии уровня для маховиков из углепластика:

а — W^M (кДж/кг); *б* — W^V (МДж/м³); *в* — $v_{\text{пр}}$ (м/с)

рована в [4]. Поскольку максимальные значения W^M и W^V соответствуют маховикам с различными m и α (m — отношение внутреннего радиуса обода к внешнему; $\alpha = \dfrac{S_c}{S_o}$ — отношение площади поперечного сечения всех спиц S_c к площади наружной цилиндрической поверхности обода S_o), то целесообразно было представить данные численного анализа W^M, W^V, а также предельной скорости $v_{\text{пр}}$ в виде линий уровня этих характеристик. Оказалось, что для маховиков со спицами и ободом из одного и того же материала характер линий уровня не зависит от типа композита.

На рис. 6.12 приведены линии уровня для маховика из углепластика. Изломы на кривых соответствуют смене типа разрушения маховика. При использовании ободов малой относительной толщины спицы существенно разгружают обод от растягивающих напряжений и разрушаются первыми — область *I*. С ростом относительной радиальной толщины обода при сохранении той же величины $\alpha = \dfrac{S_c}{S_o}$ в области *I* массовая энергоемкость маховика растет, а предельная скорость маховика изменяется довольно мало (см. рис. 6.12, *а*, *в*) — до излома на линиях уровня. Этот излом соответствует переходу от разрушения спиц к разрушению обода от окружных напряжений — область *II*. В этой области рост толщины обода связан уже с некоторым падением массовой энергоемкости и заметным падением предельной скорости — вплоть до второго излома на линиях уровня, когда разрушение обода от окружных напряжений сменяется разрушением от радиальных — область *III*. В этой области рост толщины вызывает катастрофическое уменьшение массовой энергоемкости и предельной скорости.

Объемная энергоемкость интенсивно увеличивается с ростом толщины обода в области *I* (см. рис. 6.12, *б*); в области *II* W^V примерно до $\alpha = 0{,}3 \div 0{,}4$ увеличивается с ростом толщины обода, но менее существенно, чем в области *I*; при $\alpha > 0{,}3 \div 0{,}4$ W^V в области *II* имеется слабовыраженный максимум. В области *III* W^V интенсивно уменьшается.

Таким образом, область *III* соответствует малым значениям и W^M и W^V и при проектировании маховиков ее следует избегать. При проектировании однородных маховиков целесообразно, очевидно, придерживаться «гребня» — полосы раздела между областями *I* и *II*, продвигаясь вдоль которой в сторону увеличения α можно существенно выиграть в W^V, немного потеряв в W^M (см. рис. 6.12, *а*, *б*). Относительные размеры обода, соответствующие «гребню», очень близки к оптимальному размеру $m_{\text{опт}}$ свободновращающегося обода, обеспечивающего его максимальную объемную энергоемкость (см. табл. 6.2). Следовательно, можно спроектировать удовлетворительный по своим энергетическим характеристикам хордовый маховик, если определить при помощи результатов из разд. 6.3 $m_{\text{опт}}$ для свободновращающегося диска и принять его за размер обода, а затем назначить толщину спиц из конструктивных соображений или требований к объемной энергоемкости, поскольку в окрестности $m = m_{\text{опт}}$ W^M весьма мало чувствительно к относительной толщине спиц.

При использовании для спиц и обода хордового маховика различных материалов на картинах линий уровня в исследуемом диапазоне параметров происходит смещение, а иногда и исчезновение отмеченных выше характерных областей [4].

Анализ предельной мощности. Для анализа предельной мощности в процессе разгона и торможения хордовых маховиков в [3] было предложено использовать зависимость предельной приведенной массовой мощности $b\dot{W}^M_{\text{пр}}$ (b — внешний радиус маховика) от его массовой энергоемкости W^M. Предельно допустимые сочетания $b\dot{W}^M$ и W^M характеризуют маховик данной конструкции вне зависимости от его размеров (см. разд. п. 6.1).

Решение задачи с помощью разработанных в [3] методов расчета напряженного состояния свелось к следующему. Задаваясь значениями v в диапазоне $0 \leqslant v \leqslant v_{\text{пр}}$ ($v_{\text{пр}}$ — предельная окружная скорость равномерного вращения маховика исследуемой конструкции), можно найти W^M. Затем, определив соответствующее данному v предельное значение приведенного ускорения $\dot{\omega}_{\text{пр}}b^2$, вычислить предельное значение приведенной мощности $b\dot{W}^M_{\text{пр}}$, согласующееся с заданным значением W^M. Построенная таким образом предельная кривая и лежит в основе оценки возможности реализации требуемого импульса, заданного в форме $\dot{W}_{\text{и}} = \dot{W}_{\text{и}}(W_{\text{и}})$.

Для проведения такой оценки необходимо, задавшись радиусом маховика b, перестроить зависимость $(b\dot{W}^M)_{\text{пр}}$ от W^M в зависимость $\dot{W}_{\text{пр}}$ от W. Требуемый импульс энергии в форме $\dot{W}_{\text{и}}(W)$ [при торможении — в форме зависимости $W_{\text{и}}$ $(W_{\text{пр}} - W_{\text{и}})$, где $W_{\text{пр}}$ — предельная энергоемкость маховика, соответствующая $v_{\text{пр}}$] сопоставляется с зависимостью $\dot{W}_{\text{пр}}(W)$. Если импульс не выходит за предельную кривую, то он может быть реализован. Если он выходит за эту кривую, то следует либо увеличить размер маховика, либо изменить его конструкцию.

По изложенному в [3] способу были построены предельные кривые $(b\dot{W}^M)_{\text{пр}} - W^M$ для двух типов хордовых маховиков, существенно различающихся характером изменения удельной массовой энергоемкости при изменении толщины обода и спиц; для одного из типов маховиков результаты представлены на рис. 6.13. Несущая способность при разгоне-торможении у всех рассмотренных маховиков определялась прочностью спиц, поэтому несмотря на количественные различия форма предельных кривых была одинаковой. Максимальные зна-

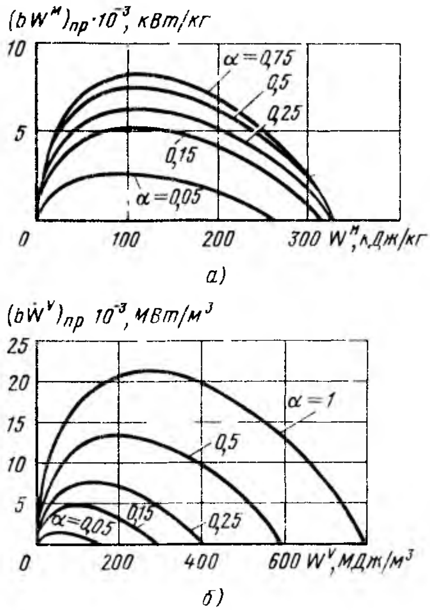


Рис 6.13. Зависимости удельных приведенных массовой (*а*) и объемной (*б*) мощностей от массовой энергоемкости для хордовых маховиков со спицами из углепластика и ободом из органопластика при различных значениях α

чения предельной мощности у рассмотренных маховиков незначительно различаются в области малых α (малой площади спиц). В области больших α эта разница увеличивается. Как следует из полученных результатов, мощность, которую способен развить хордовый маховик, оцениваемая по прочности спиц и обода, может быть весьма значительной. Поэтому, практически, предельная мощность определяется несущей способностью узла соединения спиц со ступицей, которую целесообразно определять экспериментально и вводить в расчеты способом, аналогичным приведенному выше.

Уточненные методы расчета. Учет вязкоупругих свойств композитов при расчете хордовых маховиков показывает, что наиболее чувствительно к реономным свойствам напряжение $\sigma_{r\,max}$ в ободе. Сочетанием обода из органопластика и спиц из композитов, не проявляющих существенной ползучести вдоль волокон (стекло-, угле-, боропластиками), можно добиться уменьшения во времени $\sigma_{r\,max}$. Это обстоятельство должно учитываться при проектировании маховика, рассчитанного на длительную эксплуатацию.

Увеличением числа хорд можно добиться застильной укладки армирующих волокон по периферии обода. При этом по торцовым плоскостям образуются сплошные неоднородные диски переменной толщины.

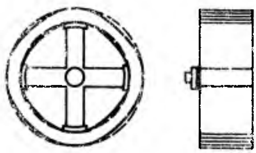
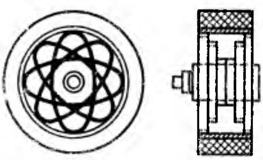
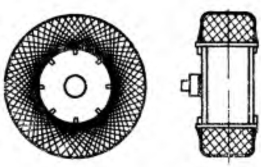
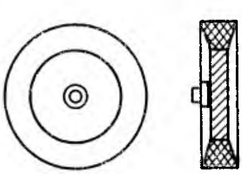
В маховиках со сплошной хордовой обмоткой затрудняется балансировка и контроль за состоянием маховика в процессе его эксплуатации.

6.5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

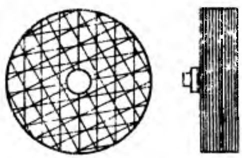
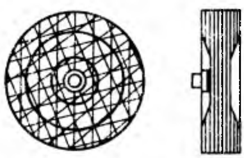
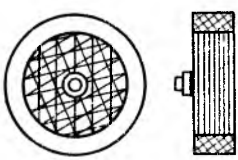
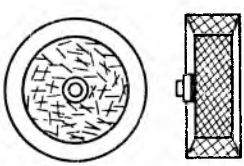
Уровень энергоемкости, экспериментально достигнутый на маховиках из композитов, можно охарактеризовать данными табл. 6.4 [16]. Наивысшую массовую энергоемкость 286 кДж/кг (объемная энергоемкость 137 МДж/м³) имеет маховик с энергоемким элементом в виде обода (фирма Garret AiResearch). Обод маховика (с диаметрами внешним и внутренним соответственно 584 и 490 мм, с осевой толщиной 110 мм) состоял из 15 тонких колец, разделенных фторопластовыми прокладками. Обод растягивался в четырех точках и насаживался с натягом на спицы из углепластика, изготовленные прессованием. Использование составного обода из несвязанных колец увеличило его гибкость и уменьшило напряжение от изгиба. Стремясь к круговой форме при вращении, обод сжимал спицы, этим обеспечивалась связь с ними и уменьшались растягивающие напряжения в спицах. В центре к спицам через эластомерную прокладку приклеивалась небольшая алюминиевая ступица, которой маховик соединялся с гибким валом.

Все испытанные модели маховиков соединялись с гибким валом склейкой через эластомерную прокладку, не стесняющую деформаций маховика в месте его крепления. Эта прокладка позволяет избежать необходимости в образовании отверстий для крепления маховиков к валу и допускает допол-

9.4. Результаты испытаний моделей маховиков

Конструкция маховиков с различными энергоемкими элементами	Материал элементов конструкции	Предельная энергоемкость	
		массовая, кДж/кг	общая, МДж
Обод 	Обод: Кевлар-49/Кевлар-29/S2-стекло Ступица: углепластик/Al	286	4,43
	Обод: Кевлар-49/S2-стекло Спицы: Кевлар-29 Ступица: Кевлар-49	229	2,55
	Обод: углеволокно Обмотка обода: углеволокно Ступица: два диска из Al	130	6,98
	Обод переменной толщины: углеволокно на полисульфонном связующем Ступица: из Al	135	3,06

Продолжение табл. 6.4

Конструкция маховиков с различными энергоемкими элементами	Материал элементов конструкции	Предельная энергоемкость	
		массовая, кДж/кг	общая, МДж
Диск			
	Слоистый сплошной диск постоянной толщины: углепластик Ступица: Al	182	0,558
	Слоистый сплошной диск постоянной толщины: S2-стекло Ступица: Al	241	0,565
	Слоистый сплошной диск переменной толщины: углепластик Ступица: Al	225	1,116
Диск с ободом			
	Слоистый сплошной диск: S2-стекло Обод: углепластик Ступица: Al	245	2,376
	Сплошной диск: S2-стекломат Обод переменной толщины: углепластик Ступица: Al	116	1,508

нительное самоцентрирование маховика. При изготовлении маховиков был использован контроль их качества с помощью неразрушающих методов.

Потенциальные возможности композитов характеризуются результатами [18], полученными при испытании тонких колец, посаженных с натягом на профилированную алюминиевую ступицу (табл. 6.5), и существенно превышают характеристики, полученные на моделях с толстостенными ободами.

Условия работы маховиков в системах накопления энергии существенно отличаются от условий испытания их в разгонных установках. Эти отличия обусловлены, в первую очередь, процессами разгона и торможения, свя-

6.5. Результаты разгонных испытаний колец из композитов на эпоксидном связующем

Тип волокон	Предельная удельная массовая энергоемкость, кДж/кг	Предельная окружная скорость, м/с
Кевлар-49	630	1156
Кевлар-29	560	1193
S2-стекло	460	986
E стекло	250	733

Примечание. При испытаниях тонкое кольцо крепилось на профилированную алюминиевую ступицу

заны с требованиями, предъявляемыми к мощности системы.

Существенные проблемы могут быть порождены вибрациями. Особенность состоит в необходимости обеспечения устойчивой работы системы в широком диапазоне угловых скоростей. Рабочий диапазон может располагаться до первой критической угловой скорости или между критическими скоростями. Проектирование системы, работающей в докритическом режиме, предъявляет высокие требования к жесткости как самого маховика, так и других элементов системы. В системе, работающей в закритическом режиме, необходимо считаться с возможными источниками неустойчивости вращения, т. е. появления колебаний (прецессии) с нарастающей амплитудой с частотой, отличной от частоты вращения. Одним из таких источников является внутреннее трение в маховиках, которое в составных конструкциях может оказаться значительным.

Вопросы, связанные с проектированием защиты, рассмотрены в [15]. Маховики, изготавливаемые намоткой, разрушаются без крупных осколков и основная проблема заключается не в выборе достаточно прочной брони, а в восприятии крутящего момента, которым разрушающийся маховик нагружает стенки камеры. Для маховика с малой осевой толщиной основным элементом защиты может служить кольцо, изготовленное для уменьшения массы из композита и имеющее возможность расширяться в радиальном направлении и проворачиваться вокруг оси. В такой конструкции реактивный момент ограничивается величиной трения между кольцом и корпусом специальной конструкции.

Список литературы

1. **Боков Ю. В., Васильев В. В., Портнов Г. Г.** Оптимальные формы и траектории армирования вращающихся оболочек из композитов//Механика композитных материалов. 1981. № 5. С. 846—854.

2. **Васильев В. В., Поляков В. А., Портнов Г. Г.** и др. Оптимальная вращающаяся оболочка из композита, наполненная жидкостью//Механика композитных материалов. 1982. № 2. С. 301—306.

3. **Моорлат П. А., Портнов Г. Г., Ромашко В. И.** и др. Анализ предельной мощности при подводе и съеме энергии в процессе разгона и торможения хордовых маховиков//Механика композитных материалов. 1985. № 4. С. 665—673.

4. **Моорлат П. А., Портнов Г. Г.** Анализ энергоемкости хордовых маховиков//Механика композитных материалов. 1986. № 5. С. 881—887.

5. **Моорлат П. А., Портнов Г. Г.** Расчет напряженно-деформированного состояния хордового маховика со спицами//Механика композитных материалов. 1983. № 5. С. 853—862.

6. **Моорлат П. А., Портнов Г. Г., Селезнев М. Н.** Равновесие нити с учетом трения при хордовой намотке дисков из композитов//Механика композитных материалов. 1982. № 5. С. 859-864.

7. **Портнов Г. Г., Кулаков В. Л.** Исследование энергоемкости маховиков из композитов, изготовленных намоткой//Механика полимеров. 1978. № 1. С. 73—81.

8. **Портнов Г. Г., Кулаков В. Л.** Удельная массовая энергоемкость дисковых маховиков из композитов//Механика композитных материалов. 1980. № 5. С. 888—894.

9. **Портнов Г. Г.** Оценка энергоемкости вращающихся тел по интегральной характеристике их напряженного состояния//Проблемы прочности. 1987. № 2. С. 7—12.

10. **Ромашов Ю. П., Череваций С. Б.**, Проектирование маховиков, изготовленных из волокнистых материалов//Проблемы прочности. 1983. № 4. С. 13—17.

11. **Череваций С. Б., Ромашов Ю. П., Сидорин С. Г.** Об одном проекте накопителей механической энергии//Механика композитных материалов. 1983. № 6. С. 1116—1119.

12. Allred R. E., Foral R. F., Dick W. E. Improved Performance for Hoop—Wound Composite Flywheel Rotors//1977 Flywheel Technology Symposium Proceedings. Oct. 5—7. 1977. San Francisco. P. 377—392.

13. Chiao T. T. Fiber Composite Materials Development for Flywheel Applications//Proc. of the 1980 Flywheel Technol. Sympos., Scottsdale. Arizona. 1980. P. 22—32.

14. Chamis C. C., Kiraly H. I Rim—Spoke Composite Flywheels: Detailed Stress and Virbration Analyses//Proc. of the 1975 Flywheel Technol. Symp. Berkley. California. 1976. P. 110—116

15. Coppa A. P. New Developments in Composite Flywheel Containment//II European Symposium of Flywheel Energy Storage Proceedings, Torino. May 9—13. 1983. P. 207—222.

16. Coppa A. P., Kulkarni S. V. Composite Flywheels: Status and Performance Assessment and Projections//II European Symposium of Flywheel Energy Storage Proceedings, Torino May 9—13. 1983. P. 223—242.

17 Foral R. F., Newhouse N. et al. On the Performance of Hoop Wound Composite Flywheel Rotors//1980 Flywheel Technology Symposium. Oct. Scottsdale. P. 121—129.

18. Lynn S. Penn. Comparative Properties of Fiber Composites for Energy-Storage Flywheels//1977 Flywheel Technology Simposium Proceedings. Oct. 5 -7. 1977. San. Francisco. P 265—306.

19 Proceeding of the 1975 Flywheel Technology Symposium. California. Nov. 10—12. 1976 294 p.

20. 1977 Flywheel Technology Symposium Proceedings. San Francisco. Oct. 5—7 1977. 495 p.

21. 1980 Flywheel Technology Symposium Proceedings. Oct., 1980. Scottsdale. Arizona. 459 p.

22 II European Symposium of Flywheel Energy Storage Proceedings, Torino, May 9—13, 1983. 261 p.

Глава 7

ТОЛСТОСТЕННЫЕ ТРУБЫ И КОЛЬЦА ИЗ КОМПОЗИТОВ

Толстостенные цилиндрические оболочки и кольца, образуемые методом намотки, находят широкое применение в конструкциях самого разнообразного назначения. Основная особенность расчета и проектирования толстостенных композитных элементов связана с необходимостью анализа их напряженного состояния на этапе изготовления, так как возникающие при этом начальные технологические напряжения оказывают существенное (а иногда и решающее) влияние на несущую способность.

Первым этапом изготовления является намотка полуфабриката с заданным усилием натяжения. После завершения намотки в общем случае следуют стадии разогрева, полимеризации при повышенной температуре, охлаждения, снятия с оправки (если оправка не является составной частью готового изделия). Разогрев сопровождается совместным термическим расширением изделия и оправки, падением радиальной жесткости, фильтрацией, релаксацией части напряжений, созданных при намотке. При полимеризации растет радиальная жесткость и прочность, происходит физико-химическая усадка. Толстостенные изделия производятся с применением преимущественно смол горячего отверждения, так как полимеризация смол холодного отверждения связана с выделением тепла, приводящим к неконтролируемому саморазогреву и, как правило, к большей физико-химической усадке. Охлаждение сопровождается совместной термической усадкой изделия и оправки, ростом радиальной жесткости и прочности. В процессе охлаждения изделие может само при некоторой температуре отделиться от оправки. Если это не происходит, то производится удаление оправки.

На протяжении всего технологического процесса происходят существенные изменения физико-механических свойств материала и напряженно-деформированного состояния. Поэтому применение к такому материалу единой (но очень сложной) реологической модели, характеризующейся большим набором экспериментально определенных констант, практически исключено, хотя теоретические попытки такого рода делались. Инженерный подход к решению состоит в том, что история нагружения изделия разбивается на

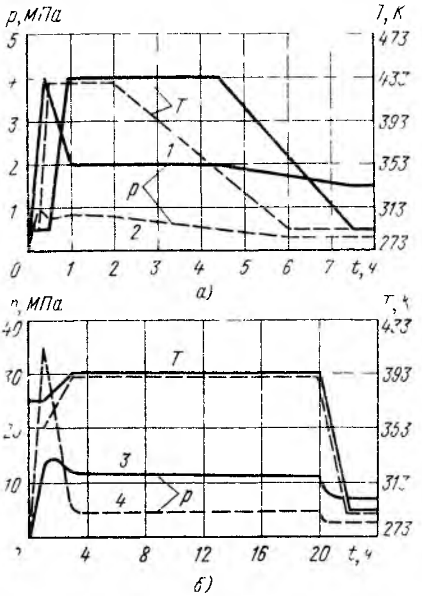


Рис. 7.1. Изменение давления на тензометрическую оправку на всех технологических стадиях процесса:
а — намотка без подогрева: *1* — холодная лента на холодную оправку (———); *2* — намотка пропитанной нитью на холодную оправку (— — —); *б* — намотка с подогревом [5]: *3*, *4* — намотка подогретой ленты ($T = 393$ К) на подогретую (———) и холодную (— — —) оправки

ряд стадий, соответствующих технологическим (к ним добавлялась эксплуатационная стадия), на каждой из которых материал характеризуется своим реологическим законом. При этом на стыках стадий происходит скачкообразное изменение свойств, для учета которых могут быть приняты различные упрощающие гипотезы, например гипотеза о наследовании напряженного состояния (в этом случае пренебрегают невязками в деформациях) или какая-то более сложная гипотеза, которую в общем случае называют гипотезой о наследовании напряженно-деформированного состояния. Разбивка на стадии удобна и тем, что для каждой из них возможно использование ряда упрощений, неприемлемых для описания всего процесса в целом.

Отправной точкой в развитии инженерной теории послужили эксперименты с применением тензометрических оправок, которые позволили проследить за кинетикой изменения давления на всех технологических стадиях процесса (рис. 7.1). Особый интерес представляет постоянство давления на оправку в процессе полимеризации. Это позволило создать различные варианты теории начальных напряжений, в которых при применении гипотезы суммирования напряженных состояний по стадиям полимеризационная стадия игнорируется.

Разработаны методы и приемы, позволяющие рассчитать кинетику изменения напряженно-деформированного состояния в процессе изготовления изделия и сопоставить ее с кинетикой изменения прочности, определить начальные технологические напряжения, учесть их и другие особенности, связанные с намоткой, а затем, исходя из прочностных данных и особенностей работы конструкций под эксплуатационной нагрузкой, найти оптимальные технологические режимы, способствующие повышению качества изделий и несущей способности конструкций.

7.1. АНИЗОТРОПИЯ НАМОТОЧНЫХ КОМПОЗИТОВ

Для аналитического описания процесса намотки необходимо знать деформативные свойства наматываемого полуфабриката. Свойства вдоль наматываемой ленты или жгута определяются свойствами арматуры; при использовании жесткой арматуры и сохранении предварительного натяжения в процессе переработки они с достаточной точностью описываются законом Гука. Деформативные свойства полуфабриката поперек волокон характеризуются высокой податливостью. Обычно эти свойства исследуются путем испытания на статическое сжатие поперек волокон пакета из слоев полуфабриката (рис. 7.2).

Приведенные данные, несмотря на их некоторую условность, связанную с отсутствием единой отработанной методики, убедительно свидетельствуют о существенной нелинейности диаграмм $\sigma_3 - \varepsilon_3$, обусловленной процессом ла-

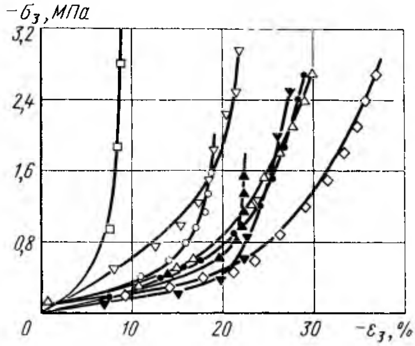


Рис. 7.2. Диаграммы $\sigma_3 - \varepsilon_3$ при поперечном сжатии пакетов слоев стеклопластика с разной структурой армирования [18]:
□ — эпокситиокольный стеклотекстолит, $T = 293$ К; ○ — полиэфирный стеклотекстолит, $T = 293$ К; ▽ — однонаправленный полиэфирный стеклопластик, $T = 293$ К; ▲ — полиэфирный стеклотекстолит, $T = 373$ К; ▼ — однонаправленный полиэфирный стеклопластик, $T = 373$ К; ● — сатиновый полиэфирный стеклотекстолит $T = 293$ К; △ — полиэфирный стекломат, $T = 293$ К; ◇ — полотняный полиэфирный стеклотекстолит, $T = 293$ К

емного уплотнения пакета и образования монолитного материала.

Степень анизотропии, характеризуемая параметром $\kappa = \sqrt{E_1/E_3}$ (E_1 — модуль упругости вдоль волокон и E_3 — касательный модуль упругости

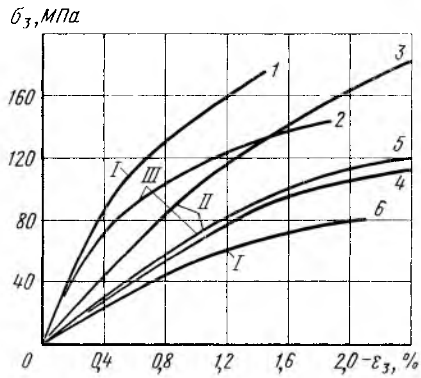


Рис. 7.3. Диаграммы поперечного сжатия при температурах 293 К (*1*, *2*, *3*) и 373 К (*4*, *5*, *6*) для трех (*I—III*) типов однонаправленных стеклопластиков

при поперечном сжатии слоев полуфабриката), меняется в широких пределах в зависимости от состояния связующего, его состава, температуры, свойств арматуры, уровня нагрузки: $4 < \kappa < 200$. Таким образом, полуфабрикаты композитов могут быть охарактеризованы как материалы с исключительно ярко выраженной анизотропией и существенной нелинейностью в направлении, перпендикулярном армирующим волокнам. Именно свойства в этом направлении необходимы для построения количественной теории.

Для описания стадии намотки важное значение имеют прочности при растяжении вдоль волокон Π_1^+ и сжатии поперек них Π_3^-. Эти характеристики по порядку величин не отличаются от соответствующих значений для отвержденных композитов. При переходе в зону сжатия при нагружении вдоль волокон происходит их искривление, поэтому в расчетах можно считать, что прочность Π_1^- полуфабриката композита при сжатии в этом направлении равна нулю.

На этапе разогрева происходит падение жесткости полуфабриката при сжатии поперек волокон. Представление о количественной оценке этого явления можно получить из сопоставления кривых (см. рис. 7.2) для одних и тех же материалов, но при разных температурах испытаний. Кроме того, при разогреве происходит термическое расширение материала. Величина температурного коэффициента линейного расширения α_1 вдоль волокон примерно та же, что и у отвержденного материала. Температурный коэффициент линейного расширения поперек волокон α_3 весьма изменчив и существенно зависит от степени предварительного уплотнения. Для уплотненного полуфабриката коэффициент α_3 примерно равен или несколько превышает соответствующий коэффициент отвержденного композита.

При полимеризации происходит рост жесткости и прочности в направлении поперек волокон и физико-химическая усадка в этом же направлении. В результате полимеризации характер диаграммы поперечного сжатия (рис. 7.3) меняется на противоположный;

том сжимающего напряжения материал не ужесточается, как это наблюдалось в случае полуфабриката (см. рис. 7.2), а становится более податливым. После полимеризации у материала возрастает жесткость при сжатии в трансверсальном направлении и появляется сопротивление на поперечный отрыв.

Объемная изотермическая физико-химическая усадка даже у эпоксидных связующих согласно экспериментальным данным составляет около 6%, что соответствует 2%-ной линейной усадке композита в поперечном направлении. Большое значение имеет изучение кинетики усадки, так же как и роста упругих, вязкоупругих и прочностных свойств.

В процессе охлаждения происходит ужесточение материала, о чем свидетельствует сравнение диаграмм поперечного сжатия σ_3 — ε_3 одних и тех же композитов при различных температурах (см. рис. 7.3). Диаграммы поперечного растяжения σ_3 — ε_3 практически линейны, кроме тех случаев, когда применяются податливые связующие с большими предельными деформациями. Модуль упругости при растяжении поперек волокон E_3 нелинейно возрастает с понижением температуры, особенно при температуре ниже температуры стеклования связующего. Зависимость прочности при поперечном отрыве Π_3^+ от температуры также характеризуется существенной нелинейностью, как и температурные коэффициенты линейного расширения материала в продольном α_1 и поперечном α_3 направлениях. Сопоставление температурной кинетики прочности и соответствующих напряжений в изделии — основной вопрос изучения процесса охлаждения.

Анализ технологической механики процессов намотки, отверждения цилиндрических изделий, а также их расчета на эксплуатационную нагрузку во многом базируется на решении плоской осесимметричной задачи механики твердого деформируемого тела.

7.2. ПЛОСКАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА

7.2.1. Постановка задачи. Исходная система уравнений в цилиндрической системе координат r, θ, z включает в себя одно нетривиальное уравнение равновесия квазистатической задачи:

$$\sigma_\theta = \sigma_r + r\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + Q_r, \qquad (7.1)$$

где Q_r — радиальная проекция объемной силы, не зависящей от координат θ и z. Из шести соотношений Коши в данной задаче (в рамках малых деформаций) понадобятся только два:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \qquad (7.2)$$

из которых следует уравнение совместности

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta + r\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}. \qquad (7.3)$$

Уравнения состояния цилиндрически ортотропного тела можно записать в одной из следующих весьма общих форм, выражающих либо деформации в виде функционала*

$$\varepsilon_i = \underset{-\infty}{\overset{t}{\varepsilon_i}}\left(\sigma_j,\ T,\ \chi^{(n)},\ S^{(m)}_{ij\ldots}\right), \qquad (7.4)$$

либо напряжения в виде функционала

$$\sigma_i = \underset{-\infty}{\overset{t}{\sigma_i}}\left(\varepsilon_j,\ T,\ \chi^{(n)},\ C^{(m)}_{ij}\right). \qquad (7.5)$$

Здесь индексы i, j пробегают значения, соответствующие r, θ, z; T — температура; $\chi^{(n)}$ — совокупность n скалярных параметров, таких, как, например, структурные параметры нестабильных сред, степень конверсии, химический потенциал и т. д.; $S^{(m)}_{ij\ldots}$, $C^{(m)}_{ij\ldots}$ — совокупность m тензоров различных рангов, записанных в матричных обозначениях, характеризующих свойства среды. В общем случае σ_j, ε_j, T, $\chi^{(n)}$, $S^{(m)}_{ij\ldots}$, $C^{(m)}_{ij\ldots}$ —функции радиуса r, кроме того, $S^{(m)}_{ij\ldots}$, $C^{(m)}_{ij\ldots}$ — функции температуры T, структурных и других скалярных параметров $\chi^{(n)}$.

---

* Функционал $\overset{t}{y}(x)$ означает, что величина y определяется не $-\infty$ текущим значением x в момент времени t, а всей временной историей $x(t)$ от $t=-\infty$ до $t'=t$.

Плоская задача характеризуется одной из трех следующих упрощающих гипотез:

1) осевые напряжения равны нулю (кольцо):

$$\sigma_z = 0; \tag{7.6}$$

2) осевые деформации равны нулю (цилиндр с зафиксированными торцами):

$$\varepsilon_z = 0; \tag{7.7}$$

3) осевые деформации равны константе (бесконечный цилиндр либо цилиндр, сопряженный по торцовым плоскостям с днищами):

$$\varepsilon_z = \text{const}, \tag{7.8}$$

которая находится из интегрального условия равновесия (интегрального граничного условия на торцах) для осевого направления

$$2\pi \int_{r_\text{в}}^{r_\text{н}} \sigma_z r\, dr = F_z, \tag{7.9}$$

где F_z — осевая сила, зависящая в общем случае от времени; $r_\text{в}$ и $r_\text{н}$ — соответственно внутренний и наружный радиусы цилиндра.

Система уравнений (7.1)—(7.5) вместе с одним из трех упрощающих предположений (7.6)—(7.8) сводится к уравнению второго порядка относительно напряжения σ_r, перемещения u_r или функции напряжений, имеющей в данном случае вид $r\sigma_r$. При рассмотрении, например, варианта задачи для плоского напряженного состояния подстановка (7.6) и уравнения равновесия (7.1) в уравнения состояния в форме (7.4), а затем результата в уравнение совместности деформаций (7.3) приводит к

$$r^2 \frac{\partial \overset{t}{\underset{-\infty}{\varepsilon_\theta}}}{\partial \sigma_\theta} \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + 2r \frac{\partial \overset{t}{\underset{-\infty}{\varepsilon_\theta}}}{\partial \sigma_\theta} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} +$$

$$+ r \frac{\partial \overset{t}{\underset{-\infty}{\varepsilon_\theta}}}{\partial \sigma_r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + r^2 \frac{\partial \overset{t}{\underset{-\infty}{\varepsilon_\theta}}}{\partial \sigma_\theta} \frac{\partial Q_r}{\partial r} +$$

$$+ r \frac{\partial \overset{t}{\underset{-\infty}{\varepsilon_\theta}}}{\partial \sigma_\theta} Q_r + r \frac{\partial \overset{t}{\underset{-\infty}{\varepsilon_\theta}}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial r} +$$

$$+ r \sum_{S=1}^{n} \frac{\partial \overset{t}{\underset{-\infty}{\varepsilon_\theta}}}{\partial \chi^{(S)}} \frac{\partial \chi^{(S)}}{\partial r} +$$

$$+ r \sum_{S=1}^{m} \frac{\partial \overset{t}{\underset{-\infty}{\varepsilon_\theta}}}{\partial \bar{S}^{(S)}_{ij\ldots}} \frac{\partial S^{(S)}_{ij\ldots}}{\partial r} +$$

$$+ \overset{t}{\underset{-\infty}{\varepsilon_\theta}} - \overset{t}{\underset{-\infty}{\varepsilon_r}} = 0. \tag{7.10}$$

Это в общем случае аналог нелинейного дифференциального уравнения второго порядка относительно напряжения σ_r, в котором коэффициенты, выраженные в виде функционалов, зависят от радиального напряжения σ_r и от его первой производной по радиусу $\partial\sigma_r/\partial r$. Граничные условия могут быть заданы либо в напряжениях

$$\sigma_r \big|_{r=r_\text{в}} = -p_\text{в}(t);$$

$$\sigma_r \big|_{r=r_\text{н}} = -p_\text{н}(t) \tag{7.11}$$

(где $p_\text{в}(t)$ и $p_\text{н}(t)$ — внутреннее и наружное давления, изменяющиеся в общем случае во времени), либо в радиальных перемещениях

$$u_r \big|_{r=r_\text{в}} = u_\text{в}(t); \; u_r \big|_{r=r_\text{н}} = u_\text{н}(t). \tag{7.12}$$

Кроме того, одно из условий может быть задано в напряжениях, а другое в перемещениях (смешанная задача), либо одно из условий может быть задано в виде функциональной связи между напряжением σ_r и перемещением u_r, характеризующей жесткостные свойства элемента конструкции, с которым контактирует рассматриваемое кольцо на данном радиусе. Вводя дискретизацию процесса по времени, можно получить для каждого момента времени $-\infty < \tau_i \leqslant \leqslant t$ нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение относительно σ_r при постоянных для данного малого отрезка времени граничных условиях. Решая эту краевую задачу одним из численных методов («пристрелки», методом последованых приближений, квазилинеаризации и т. д.), можно найти значения σ_r для данного момента времени, через них с помощью уравнения равновесия (7.1) — значения σ_θ, далее с помощью уравнений состояния (7.4) — деформации и радиальные перемещения согласно (7.2), после чего можно перейти к следующему моменту времени τ_{i+1} и т. д.

В случае плоского деформированного состояния [гипотеза (7.7) или (7.8)] есть два пути. Можно воспользоваться формулами (7.5), подставить в них уравнения совместности деформаций (7.3) и результат — в уравнение равновесия (7.1), после чего получится уравнение второго порядка в перемещениях, аналогичное уравнению (7.10) в напряжениях. Также можно выразить σ_z с помощью соотношения (7.4) и выбранной гипотезы (7.7) или (7.8) и подставить его в остальные соотношения (7.4), получив таким образом

$$\varepsilon_i = \mathop{\varepsilon_i}_{-\infty}^{t}\left(\sigma_r, \sigma_\theta, \varepsilon_z, T, \chi^{(n)}, S_{ij..}^{(m)}\right);$$

$$i \leftrightarrow r,\ \theta. \qquad (7.13)$$

Дальнейшие выкладки полностью аналогичны приведенным для кольца; в итоге получается то же самое уравнение (7.10) с несколько иным смыслом входящих в него функционалов деформаций.

7.2.2. Линейно-упругое решение. В случае линейной упругости соотношение (7.4) можно переписать в виде

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{\Phi} + \alpha_i\,\Delta T + S_{ir}\sigma_r + S_{i\theta}\sigma_\theta + S_{iz}\sigma_z; \quad i \leftrightarrow r,\ \theta,\ z, \qquad (7.14)$$

где ε_i^{Φ} — деформации, связанные со структурными измерениями, такими, как физико-химическая усадка; α_i — температурные коэффициенты линейного расширения; ΔT — изменение температуры от начального состояния до конечного.

Подстановка (7.14) в уравнение (7.10) для случая плоского напряженного состояния (7.6) дает с учетом симметрии матрицы податливостей $S_{ij} = S_{ji}$ линейное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$r^2\frac{d^2\sigma_r}{dr^2} + \left(3 + \frac{r}{S_{\theta\theta}}\frac{dS_{\theta\theta}}{dr}\right) r\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{r}{S_{\theta\theta}}\sigma_r\frac{d}{dr}\left(S_{\theta\theta} + S_{\theta r}\right) + \left(1 - \frac{S_{rr}}{S_{\theta\theta}}\right)\sigma_r + r^2\frac{dQ_r}{dr} + \left(2 + \frac{r}{S_{\theta\theta}}\frac{dS_{\theta\theta}}{dr} - \frac{S_{\theta r}}{S_{\theta\theta}}\right) rQ_r + \frac{r}{S_{\theta\theta}}\frac{d\varepsilon_\theta^{\Phi}}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta^{\Phi} - \varepsilon_r^{\Phi}}{S_{\theta\theta}} + \frac{r\alpha_\theta}{S_{\theta\theta}}\frac{dT}{dr} + \frac{r\,\Delta T}{S_{\theta\theta}}\frac{d\alpha_\theta}{dr} + (\alpha_\theta - \alpha_r)\,\Delta T = 0; \quad S_{\theta\theta} \neq 0. \qquad (7.15)$$

Уравнение (7.15) характеризует плоскую осесимметричную неоднородную линейно-термоупругую задачу для кольца. Уравнение для цилиндра имеет аналогичный вид, если заменить входящие в него термоупругие константы на термоупругие константы для плоского деформированного состояния по схеме

$$S_{ij} \leftrightarrow A_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{iz}S_{jz}}{S_{zz}}; \qquad (7.16)$$

$$\alpha_i \leftrightarrow \beta_i = \alpha_i - \alpha_z\frac{S_{iz}}{S_{zz}}$$

и дополнить левую часть (7.15) слагаемыми

$$\frac{\varepsilon_z - \varepsilon_z^{\Phi}}{A_{\theta\theta}S_{zz}}\left(S_{\theta z} - S_{rz} + r\frac{dS_{\theta z}}{dr} - r\frac{S_{\theta z}}{S_{zz}}\frac{dS_{zz}}{dr}\right) - \frac{S_{\theta z}}{A_{\theta\theta}S_{zz}} r\frac{d\varepsilon_z^{\Phi}}{dr}; \qquad (7.17)$$

$$\text{при } A_{\theta\theta} \neq 0 \quad S_{zz} \neq 0.$$

Таким образом, рассматриваемая неоднородная задача теории термоупругости свелась к краевой задаче для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. В общем случае ее решение проще всего получить численными методами с мощью стандартных процедур на ЭЦВМ. Для нескольких частных зависимостей свойств от радиуса задача решается аналитически, в том числе и для однородной цилиндрически-ортотропной упругой среды

$$\sigma_r = \frac{r^{k-1}}{2k} \times \left[\int_{r_в}^{r} r_i^{-k} V(r_i)\, dr_i + C_1 \right] + \frac{r^{-k-1}}{2k} \left[\int_{r_в}^{r} r_i^{k} V(r_i)\, dr_i + C_2 \right], \quad (7.18)$$

где в случае кольца

$$k = \sqrt{S_{rr}/S_{\theta\theta}}; \quad (7.19)$$

$$V(r) = r^2 \frac{dQ_r}{dr} + \left(2 - \frac{S_{\theta r}}{S_{\theta\theta}}\right) rQ_r + \frac{r}{S_{\theta\theta}} \frac{d\varepsilon_\theta^ф}{dr} + \frac{\varepsilon_\theta^ф - \varepsilon_r^ф}{S_{\theta\theta}} + \frac{r\alpha_\theta}{S_{\theta\theta}} \frac{dT}{dr} + \frac{r\,\Delta T}{S_{\theta\theta}} \frac{d\alpha_\theta}{dr} + (\alpha_\theta - \alpha_r)\,\Delta T, \quad (7.20)$$

а в случае цилиндра в формулах (7.19), (7.20) производится замена констант по схеме (7.16) и в (7.20) добавляется слагаемое (7.17) с учетом, что $dS_{ij}/dr = 0$. Рассмотренные далее частные решения, непосредственно вытекающие из приведенных выше зависимостей, представляют собой важнейшие примеры для расчета толстостенных изделий.

7.2.3. Кольцо под внутренним и наружным давлениями. Подстановкой граничных условий (7.11) в соотношения (7.18)—(7.20) при отсутствии объемных сил, а также структурно-усадочных составляющих деформаций можно получить

$$\sigma_r = A^p r^{k-1} + B^p r^{-k-1};$$

$$\sigma_\theta = A^p k r^{k-1} - B^p k r^{-k-1}; \quad (7.21)$$

$$u_r = k(S_{\theta\theta} + S_{\theta r}) A^p r^k - (kS_{\theta\theta} - S_{\theta r}) B^p r^{-k},$$

где

$$A^p = \frac{p_в r_в^{k+1} - p_н r_н^{k+1}}{r_н^{2k} - r_в^{2k}};$$

$$B^p = -\frac{p_в r_в^{k+1} r_н^{2k} - p_н r_в^{2k} r_н^{k+1}}{r_н^{2k} - r_в^{2k}}. \quad (7.22)$$

Приведенные выше формулы — это известные формулы Митинского—Лехницкого [15]. Для других граничных условий (в перемещениях (7.12) или в виде связи между радиальными напряжениями и перемещениями) применимы те же формулы (7.21), но тогда внутреннее ($p_в$) и (или) наружное ($p_н$) давления находят из соответствующих линейных соотношений. В частности, пусть кольцо посажено на упругую оправку, свойства которой характеризуются параметром $\varepsilon_{оп}$, равным отношению радиального перемещения ее наружной поверхности (или внутреннего радиуса $r_в$ насаженного кольца) к наружному давлению, вызвавшему это перемещение, или же относительной податливостью оправки

$$\gamma_{оп} = \frac{\xi_{оп}}{r_в S_{\theta\theta}} = \frac{u_r(r_в)}{r_в \sigma_r(r_в) S_{\theta\theta}} = \frac{\varepsilon_\theta}{\sigma_r(r_в) S_{\theta\theta}}, \quad (7.23)$$

где $r_в$ — радиус оправки; $S_{\theta\theta}$ — податливость.

Действие наружного давления $p_н$ на кольцо, посаженное на оправку, приведет к напряжениям и перемещениям в нем, вычисляемым по формулам (7.21), (7.22), где на границе раздела между кольцом и оправкой давление

$$p_в = p_н \frac{\eta + 1}{\eta c^{1-k} + c^{1+k}}, \quad (7.24)$$

где $c = r_в/r_н$;

$$\eta = \frac{k + \gamma_{оп} + \nu_{r\theta}}{k - \gamma_{оп} - \nu_{r\theta}};$$

$$\nu_{r\theta} = -\frac{S_{r\theta}}{S_{\theta\theta}}. \quad (7.25)$$

7.2.4. Термоупругая задача для кольца. Подстановка нулевых граничных условий (7.11) в напряжениях при отсутствии объемных сил, но сохранении температурных и структурно-усадочных составляющих деформаций в соотношения (7.18)—(7.20) дает решение термоупругой задачи. В частном случае однородных теплофизических и структурных характеристик и однородного температурного поля [8]:

$$\sigma_r = A^T r^{k-1} + B^T r^{-k-1} + D^T;$$

$$\sigma_\theta = A^T k r^{k-1} - B^T k r^{-k-1} + D^T; \tag{7.26}$$

$$u_r = (S_{\theta\theta} k + S_{\theta r})\, A^T r^k -$$

$$- (S_{\theta\theta} k - S_{\theta r})\, B^T r^{-k} +$$

$$+ (S_{\theta\theta} + S_{\theta r})\, D^T,$$

где

$$D^T = \frac{(\alpha_\theta - \alpha_r)\,\Delta T + \varepsilon_\theta^{\text{ф}} - \varepsilon_r^{\text{ф}}}{S_{rr} - S_{\theta\theta}};$$

$$S_{rr} \neq S_{\theta\theta}; \tag{7.27}$$

$$A^T = D^T \frac{\left(r_\text{в}^{2k} - r_\text{н}^{k+1} r_\text{в}^{k-1}\right)}{\left(r_\text{н}^{2k} - r_\text{в}^{2k}\right)} r_\text{в}^{1-k},$$

$$B^T = D^T \frac{\left(r_\text{в}^{k-1} r_\text{н}^{k+1} - r_\text{н}^{2k}\right)}{\left(r_\text{н}^{2k} - r_\text{в}^{2k}\right)} r_\text{в}^{1+k}. \tag{7.28}$$

При совместном нагреве (охлаждении) кольца с оправкой должны выполняться условия

$$\sigma_r = 0 \quad \text{при } r = r_\text{н};$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r (\gamma_\text{оп} - \nu_{r\theta}) +$$

$$+ (\alpha_\text{оп} - \alpha_\theta) \frac{\Delta T}{S_{\theta\theta}} \quad \text{при } r = r_\text{в}. \tag{7.29}$$

Здесь $\alpha_\text{оп}$ — комплексный коэффициент, учитывающий теплофизические, упругие свойства и размеры оправки. Он равен отношению перемещения наружной поверхности оправки (в долях ее наружного радиуса) к перепаду температур, вызвавшему это перемещение. В случае изотропной кольцевой оправки $\alpha_\text{оп}$ совпадает с температурным коэффициентом линейного расширения материала оправки при условии однородности в ней поля температур. Напряжения и перемещения определяются теми же формулами (7.26), (7.27), но константы A^p и B^p будут иметь иной смысл:

$$A^p = \frac{D^T\,[\Psi + \eta b^{k+1}] + Y}{\eta b^{2k} + 1}; \tag{7.30}$$

$$B^p = \frac{[D^T\,(\Psi - b^{1-k}) + Y]\, b^{2k}}{\eta b^{2k} + 1},$$

где η определяется по формуле (7.25),

$$\Psi = \frac{1 - \gamma_\text{оп} - \nu_{r\theta}}{S_{\theta\theta}\,(k - \gamma_\text{оп} - \nu_{r\theta})};$$

$$Y = \frac{(\alpha_\theta - \alpha_\text{оп})\,\Delta T}{S_{\theta\theta}\,(k - \gamma_\text{оп} - \gamma_{r\theta})};$$

$$b = r_\text{н}/r_\text{в}. \tag{7.31}$$

7.2.5. Вращающийся диск. При объемной силе $Q_r = \gamma\omega^2 r$ и при отсутствии температурных и структурно-усадочных деформаций, а также при нулевых граничных условиях в напряжениях σ_r из (7.18)—(7.20) получаются формулы [25, 26]:

$$\sigma_r = -\frac{(3 + \nu_{r\theta})\,\gamma\omega^2}{2k} \times$$

$$\times \left\{ r^{k-1}\,[\Omega(r) + A^\omega] - \right.$$

$$\left. - \frac{r^2}{3+k} - r^{-k-1}\left(B^\omega - \frac{r_\text{в}^{3+k}}{3+k}\right)\right\}; \tag{7.32}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{2}(3 + \nu_{r\theta})\,\gamma\omega^2 \times$$

$$\times \left\{ r^{k-1}\,[\Omega(r) + A^\omega] + \frac{r^2}{3+k} + \right.$$

$$\left. + r^{-k-1}\left(B^\omega - \frac{r_\text{в}^{3+k}}{3+k}\right)\right\} + \gamma\omega^2 r^2;$$

$$u_r = -\frac{1}{2k}(3 + \nu_{r\theta})\,\gamma\omega^2 \times$$

$$\times \left\{ (S_{\theta\theta} k + S_{\theta r})\, r^k\,[\Omega(r) + A^\omega] + \right.$$

$$+ r^3 \frac{k S_{\theta\theta} - S_{\theta r}}{3+k} +$$

$$+ (S_{\theta\theta} k - S_{\theta r})\, r^{-k} \times$$

$$\times\left(B^{\omega}-\frac{r_{\text{в}}^{3+k}}{3+k}\right)\Bigg\}+S_{\theta\theta}\gamma\omega^{2}r^{3},$$

где
$$\Omega(r)=\int\limits_{r_{\text{в}}}^{r} r_i^{2-k}\,dr_i=\begin{cases}\dfrac{r^{3-k}-r_{\text{в}}^{3-k}}{3-k} & \text{при } k\neq 3,\\[2mm] \ln r/r_{\text{в}} & \text{при } k=3,\end{cases}\qquad(7.33)$$

$$A^{\omega}=\frac{1}{\left(r_{\text{н}}^{2k}-r_{\text{в}}^{2k}\right)}\times$$
$$\times\left[\frac{r_{\text{н}}^{3+k}-r_{\text{в}}^{3+k}}{3+k}-r_{\text{н}}^{2k}\Omega\left(r_{\text{н}}\right)\right];\qquad(7.34)$$
$$B^{\omega}=r_{\text{в}}^{2k}A^{\omega}.$$

Реально диск имеет упругую связь с центральным валом или ступицей либо по внутренней поверхности (за счет предварительного натяга или других методов соединения), либо по наружной поверхности (за счет радиальной обмотки и т. д.), либо по торцовой поверхности (хордовая обмотка), т. е. граничные условия могут отличаться от соответствующих (7.32)—(7.34). Может встретиться и комбинированный случай. Упругая связь диска с осью через его торцовую поверхность практически не укладывается в расчетную схему плоской осесимметричной задачи. При упругой связи диска с осью по его внутренней цилиндрической поверхности в расчете необходимо учитывать две характеристики этой связи: относительную податливость $\gamma_{\text{оп}}$ согласно формуле (7.23) и относительные перемещения на радиусе $r_{\text{в}}$ свободной (без диска) упругой связи под действием центробежных сил

$$\varkappa_{\text{оп}}=\frac{u_r^{\omega}\left(r_{\text{в}}\right)}{S_{\theta\theta}\gamma\omega^{2}r_{\text{в}}^{3}}.\qquad(7.35)$$

Тогда напряжения и перемещения будут определяться как суперпозиция решений (7.21), (7.22) и (7.32)—(7.34), где наружное давление $p_{\text{н}}=0$, а внутреннее давление $p_{\text{в}}$ находится из равенства на радиусе $r_{\text{в}}$ суммы перемещений диска от действия давления и от действия центробежной силы сумме перемещений вала (оправки), вызванных теми же причинами [т. е. в соответствии с (7.23), (7.35)]:

$$p_{\text{в}}=\frac{\gamma\omega^{2}r_{\text{в}}^{2}}{\left(k-\gamma_{\text{оп}}-\nu_{r\theta}\right)}\times$$
$$\times\frac{\left\{\varkappa_{\text{оп}}\left(r_{\text{н}}^{2k}-r_{\text{в}}^{2k}\right)+\left(3+\nu_{r\theta}\right)r_{\text{в}}^{k-3}\times\left[\dfrac{r_{\text{н}}^{3+k}-r_{\text{в}}^{3+k}}{3+k}+r_{\text{н}}^{2k}\Omega\left(r_{\text{н}}\right)\right]\right\}}{\left(r_{\text{н}}^{2k}\eta+r_{\text{в}}^{2k}\right)}.\qquad(7.36)$$

Аналогично характеристикам упругой связи по внутренней поверхности диска (7.23), (7.35) можно ввести характеристики упругой связи по наружной поверхности диска, рассчитать аналогично (7.36) наружное давление $p_{\text{н}}$ и определить напряжения и перемещения в диске как суперпозицию решений (7.21), (7.22) и (7.32)—(7.34). Подробности расчета вращающихся дисков рассмотрены в гл. 6.

7.2.6. Цилиндр под действием осевой силы. Для случая нагружения цилиндра только осевой силой F_z на основании формул (7.9), (7.16)—(7.20) можно получить [16]

$$\sigma_r=\varepsilon_z\varkappa\left\{1+\frac{1}{r_{\text{н}}^{2k}-r_{\text{в}}^{2k}}\times\right.$$
$$\times\left[\left(r_{\text{в}}^{k+1}-r_{\text{н}}^{k+1}\right)r^{k-1}+\right.$$
$$\left.\left.+\left(r_{\text{в}}^{2k}r_{\text{н}}^{1+k}-r_{\text{в}}^{k+1}r_{\text{н}}^{2k}\right)r^{-k-1}\right]\right\};$$

$$\sigma_\theta=\varepsilon_z\varkappa\left\{1+\frac{k}{r_{\text{н}}^{2k}-r_{b}^{2k}}\times\right.$$
$$\times\left[\left(r_{\text{в}}^{k+1}-r_{\text{н}}^{k+1}\right)r^{k-1}-\right.$$
$$\left.\left.-\left(r_{\text{в}}^{2k}r_{\text{н}}^{1+k}-r_{\text{в}}^{k+1}r_{\text{н}}^{2k}\right)r^{-k-1}\right]\right\};$$

(7.37)

$$\sigma_z = \frac{\varepsilon_z}{S_{zz}} - \frac{\varepsilon_z \varkappa}{S_{zz}} \times \left\{ S_{rz} + S_{\theta z} + \frac{1}{r_{\text{н}}^{2k} - r_{\text{в}}^{2k}} \times \left[\left(r_{\text{в}}^{k+1} - r_{\text{н}}^{k+1}\right)\left(kS_{\theta z} + S_{rz}\right) r^{k+1} - \left(r_{\text{в}}^{2k} r_{\text{н}}^{1+k} - r_{\text{в}}^{k+1} r_{\text{н}}^{2k}\right) r^{-k-1} \times \left(kA_{\theta z} - A_{rz}\right)\right]\right\};$$

$$\varkappa = \frac{S_{\theta z} - S_{rz}}{A_{rr} - A_{\theta\theta}} \frac{1}{S_{zz}},$$

где осевая деформация ε_z связана с осевым усилием соотношением

$$F_z = \frac{\pi\left(r_{\text{н}}^2 - r_{\text{в}}^2\right)\varepsilon_z}{S_{zz}} \quad \text{при } k = 1;$$

$$F_z = \pi\left(r_{\text{н}}^2 - r_{\text{в}}^2\right)\frac{\varepsilon_z}{S_{zz}} \times \left\{1 - \varkappa\left\{S_{rz} - S_{\theta z} - \frac{1}{\left(r_{\text{н}}^{2k} - r_{\text{в}}^{2k}\right)\left(r_{\text{н}}^2 - r_{\text{в}}^2\right)} \times \left[\frac{kS_{\theta z} + S_{rz}}{k+1}\left(r_{\text{н}}^{k+1} - r_{\text{в}}^{k+1}\right)^2 + \frac{kS_{\theta z} - S_{rz}}{1-k} \times \left(r_{\text{н}}^{1-k} - r_{\text{в}}^{1-k}\right)^2 r_{\text{н}}^{2k} r_{\text{в}}^{2k}\right]\right\}\right\}$$

$$\text{при } k \neq 1. \qquad (7.38)$$

Здесь, как указывалось выше,

$$k = \left(\frac{A_{rr}}{A_{\theta\theta}}\right)^{1/2} = \left(\frac{S_{rr} - S_{rz}^2/S_{zz}}{S_{\theta\theta} - S_{\theta z}^2/S_{zz}}\right)^{1/2}. \qquad (7.39)$$

Остальные случаи нагружения цилиндра находятся методом суперпозиции. Некоторые частные решения получают с помощью аналогии между плоским напряженным и плоским деформируемым состояниями.

7.2.7. Слоистые кольца, диски, цилиндры. Основываясь на решениях задач, приведенных в пп. 7.2.2—7.2.6, можно построить решение задачи для многослойных цилиндрических изделий. Пусть r_i, r, r_{i+1} — соответственно внутренний, текущий и наружный радиусы i-го слоя; p_i — давление, действующее на радиусе r_i; k_i — степень анизотропии i-го слоя из однородного линейно-упругого материала, $k_i = \left[S_{rr}^{(i)}/S_{\theta\theta}^{(i)}\right]^{1/2}$, тогда

$$\sigma_r^{(i)} = -r^{k_i-1}\left\{\Phi_1^{(i)}(r) + \frac{1}{r_{i+1}^{2k_i} - r_i^{2k_i}} \times \left[p_{i+1} r_{i+1}^{k_i+1} - p_i r_i^{k_i+1} + \Phi_2^{(i)}(r_{i+1}) - r_{i+1}^{2k_i}\Phi_1^{(i)}(r_{i+1})\right]\right\} + r^{-k_i-1} \times \left\{\Phi_2^{(i)}(r) + \frac{r_i^{2k_i}}{r_{i+1}^{2k_i} - r_i^{2k_i}} \times \left[p_{i+1} r_{i+1}^{k_i+1} - p_i r_i^{1-k_i} r_{i+1}^{2k_i} + \Phi_2^{(i)}(r_{i+1}) - r_{i+1}^{2k_i}\Phi_1^{(i)}(r_{i+1})\right]\right\};$$

$$\sigma_\theta^{(i)} = rQ_r^{(i)} - k_i r^{k_i-1} \times \left\{\Phi_1^{(i)}(r) + \frac{1}{r_{i+1}^{2k_i} - r_i^{2k_i}} \times \left[p_{i+1} r_{i+1}^{k_i+1} - p_i r_i^{k_i+1} + \Phi_2^{(i)}(r_{i+1}) - r_{i+1}^{2k_i}\Phi_1^{(i)}(r_{i+1})\right]\right\} - k_i r^{-k_i-1}\left\{\Phi_2^{(i)}(r) + \frac{r_i^{2k_i}}{r_{i+1}^{2k_i} - r_i^{2k_i}} \times + \left[p_{i+1} r_{i+1}^{k_i+1} - p_i r_i^{1-k_i} r_{i+1}^{2k_i} + \right.\right.$$

$$+ \Phi_2^{(i)}(r_{i+1}) - r_{i+1}^{2k_i}\Phi_1^{(i)}(r_{i+1})\Big]\Big\};$$

$$u_r^{(i)} = S_{\theta\theta}^{(i)} r^2 Q_r^{(i)} - \left(kS_{\theta\theta}^{(i)} + S_{\theta r}^{(i)}\right) r^{k_i} \times \left\{ \Phi_1^{(i)}(r) + \frac{1}{r_{i+1}^{2k_i} - r_i^{2k_i}} \times \left[p_{i+1} r_{i+1}^{k_i+1} - p_i r_i^{k_i+1} + \Phi_2^{(i)}(r_{i+1}) - r_{i+1}^{2k_i}\Phi_1^{(i)}(r_{i+1})\right]\right\} - \left(kS_{\theta\theta}^{(i)} - S_{\theta r}^{(i)}\right) r^{-k_i} \times \left\{ \Phi_2^{(i)}(r) + \frac{r_{i+1}^{2k_i}}{r_{i+1}^{2k_i} - r_i^{2k_i}} \times \left[p_{i+1} r_{i+1}^{k_i+1} - p_i \times r_i^{(1-k_i)} r_{i+1}^{2k_i} + \Phi_2^{(i)}(r_{i+1}) - r_{i+1}^{2k_i}\Phi_1^{(i)}(r_{i+1})\right]\right\}, \quad (7.40)$$

где

$$r_i \leqslant r \leqslant r_{i+1}; \quad \Phi_1^{(i)}(r) = \frac{1}{2k_i}\int_{r_i}^{r} r_j^{-k_i} V(r_j)\, dr_j; \quad \Phi_2^{(i)}(r) = \frac{1}{2k_i}\int_{r_i}^{r} r_j^{k_i} V(r_j)\, dr_j. \quad (7.41)$$

На границах между слоями должны выполняться условия непрерывности радиальных перемещений u_r (или окружных деформаций $\varepsilon_\theta = u_r/r$), так для радиуса $r = r_i$

$$p_{i-1} r_{i-1} P_{i-1} + p_i\left(G_{i-1} - S_{\theta r}^{(i-1)}\right) r_i + p_i\left(G_i + S_{\theta r}^{(i)}\right) r_i + p_{i+1} P_i r_{i+1} = r_i^2\left(S_{\theta\theta}^{(i)} Q_r^{(i)} - S_{\theta r}^{(i-1)} Q_r^{(i-1)}\right) + \left(\Phi_2^{(i-1)}(r_i) - \Phi_1^{(i-1)}(r_i) r_{i-1}^{2k_{i-1}}\right) \times r_{i-1}^{-k_{i-1}-1} P_{i-1} - \left[\Phi_2^{(i)}(r_{i+1}) - \Phi_1^{(i)}(r_{i+1}) r_{i+1}^{2k_i}\right] P_i r_{i+1}^{-k_i}, \quad (7.42)$$

где

$$P_i = 2\left(\frac{r_i}{r_{i+1}}\right)^{k_i+1} \frac{k_i S_{\theta\theta}^{(i)}}{1 - (r_i/r_{i+1})^{2k_i}};$$

$$G_i = -k_i S_{\theta\theta}^{(i)}\left(r_{i+1}^{2k_i} + r_i^{2k_i}\right)/\left(r_{i+1}^{2k_i} - r_i^{2k_i}\right); \quad (7.43)$$

$i = 2, 3, \ldots, N$ (N — число слоев в пакете).

Кроме $N - 1$-го уравнения (7.42) относительно $N + 1$ давления p_i используются два граничных условия на радиусах r_1 и r_{N+1}, выраженных через давления или перемещения (т. е. в виде линейных форм от пар давлений p_1 и p_2 или от p_N и p_{N+1}). В результате система $N + 1$ линейных уравнений относительно p_i замыкается. Решение системы уравнений производится стандартными численными методами на ЭЦВМ.

При плоском деформированном состоянии производится замена констант по схеме (7.16), в правую часть (7.20) добавляется слагаемое (7.17), а степень анизотропии (7.19) заменяется на (7.39). Число неизвестных, если задана осевая сила, а не деформация, увеличивается еще на одно неизвестное $\varepsilon_z = \text{const}$. Система линейных уравнений дополняется еще одним (7.9):

$$2\pi \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{S_{zz}^{(i)}} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \left(\varepsilon_z - \alpha_z^{(i)} \Delta T_i - \varepsilon_z^{\text{ф}\,(i)} - S_{zr}^{(i)}\sigma_r - S_{\theta z}^{(i)}\sigma_\theta\right) r\, dr = F_z, \quad (7.44)$$

где S_{ij} в (7.44) имеют тот же смысл, что и в (7.14); в σ_r и σ_θ войдут константы плоского деформированного состояния согласно (7.16). Результаты подстановки (7.40) в (7.44) с учетом перечисленных выше видоизменений при переходе от кольца к цилиндру ввиду громоздкости здесь не выписаны, однако линейность (7.44) по ε_z, p_i, p_{i+1} очевидна.

7.2.8. Кусочно-линейная аппроксимация диаграмм деформирования. Расчетная схема может отражать не только структурную слоистость конструкции, но и включать в себя дискретизацию как удобный прием для численного анализа. Поэтому слоистость можно рассматривать как механический аналог разностной схемы. При решении конкретной задачи система узлов сетки по радиусу может оставаться неизменной, может наращиваться (намотка) или сокращаться. Возможен еще один вариант — когда узлы сетки по радиусу могут перемещаться в вычислительном процессе, соответствующем процессу нагружения. Такая ситуация возникает, в частности, при использовании кусочно-линейной аппроксимации закона деформирования [18]. Например, для качественного анализа влияния нелинейности диаграмм деформирования $\sigma_r - \varepsilon_r$ (см. разд. 7.1) можно воспользоваться аппроксимацией диаграмм в виде ломаной, состоящей из двух прямолинейных отрезков, причем после точки перелома σ_r^* может произойти либо ужесточение материала (полуфабриката), либо увеличение его податливости (отвержденный материал).

Применительно к задаче для кольца закон деформирования (7.4) можно записать в следующем виде: при $|\sigma_r| \leqslant |\sigma_r^*|$ выполняются соотношения (7.14), а при $|\sigma_r| \geqslant |\sigma_r^*|$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^{\Phi} + \alpha_r\,\Delta T + S_{rr}\sigma_r^* + S_{r\theta}\sigma_\theta + \tilde{S}_{rr}\left(\sigma_r - \sigma_r^*\right); \qquad (7.45)$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^{\Phi} + \alpha_\theta\,\Delta T + S_{\theta r}\sigma_r + S_{\theta\theta}\sigma_\theta,$$

где $\tilde{S}_{rr}$ — податливость на втором участке диаграммы $\sigma_r - \varepsilon_r$.

Выражение (7.45) можно переписать в виде, аналогичном (7.14), если ввести обозначение

$$\tilde{\varepsilon}_r^{\Phi} = \varepsilon_r^{\Phi} + S_{rr}\sigma_r^* - \tilde{S}_{rr}\sigma_r^*, \qquad (7.46)$$

где величина деформации $\tilde{\varepsilon}_r^{\Phi} - \varepsilon_r^{\Phi} = (S_{rr} - \tilde{S}_{rr})\,\sigma_r^*$, отсекаемая продолжением до нулевого напряжения σ_r второго участка диаграммы $\sigma_r - \varepsilon_r$, выступает как аналог дополнительной усадочной деформации. При нагружении внутренним давлением до величины $p_{\text{в}} = p_{\text{в}}^* = -\sigma_r^*$ связь между $p_{\text{в}}$, с одной стороны, и напряжениями σ_r, σ_θ, а также перемещением u_r, с другой стороны, будет выражаться формулами (7.21), (7.22). При дальнейшем наращивании давления $p_{\text{в}}$ кольцо можно рассматривать как составное, причем радиус границы раздела r_* будет перемещаться от внутреннего радиуса $r_{\text{в}}$ в сторону наружного радиуса $r_{\text{н}}$. Для внутреннего кольца закон деформирования записывается в виде (7.45), а для наружного в виде (7.14). На границе раздела $r = r_*$ соблюдаются условия непрерывности радиальных напряжений $\sigma_r = \sigma_r^*$ и радиальных перемещений, которые с учетом (7.46), (7.42), (7.43) можно переписать в виде

$$p_{\text{в}} r_{\text{в}} \left(\frac{r_{\text{в}}}{r_*}\right)^{\bar{k}+1} \frac{2\bar{k}}{1 - \left(\dfrac{r_{\text{в}}}{r_*}\right)^{2\bar{k}}} + \sigma_r^* \left(\bar{k}\,\frac{r_*^{2\bar{k}} + r_{\text{в}}^{2\bar{k}}}{r_*^{2\bar{k}} - r_{\text{в}}^{2\bar{k}}} + k\,\frac{r_{\text{н}}^{2k} + r_*^{2k}}{r_{\text{н}}^{2k} - r_*^{2k}}\right) \times$$

$$\times\, r_* = \left[W_2(r_*) - W_1(r_*)\, r_{\text{в}}^{2\bar{k}}\right] r_{\text{в}}^{-\bar{k}} \times \left(\frac{r_{\text{в}}}{r_*}\right)^{\bar{k}+1} \frac{2\bar{k}}{1 - \left(\dfrac{r_{\text{в}}}{r_*}\right)^{2\bar{k}}}, \qquad (7.47)$$

где

$$W_1(r_*) = \frac{(k^2 - \bar{k}^2)\,\sigma_r^*}{2\bar{k}} \int_{r_{\text{в}}}^{r_*} r^{-\bar{k}}\,dr;$$

$$W_2(r_*) = \frac{(k^2 - \bar{k}^2)\,\sigma_r^*}{2\bar{k}}\, \frac{r_*^{\bar{k}+1} - r_{\text{в}}^{\bar{k}+1}}{\bar{k}+1}. \qquad (7.48)$$

Соотношения (7.47), (7.48) связывают между собой внутреннее давление $p_{\text{в}}$ и радиус r_* границы раздела. Подставив эту взаимосвязь в выражения для напряжений и перемещений (7.40), (7.41) с учетом (7.20) и (7.46), можно получить искомую зависимость характеристик напряженно-деформирополучим следующее приближение напряженного состояния. Далее итерационный процесс можно продолжать вплоть до достижения некоторой заданной максимальной разности между итерациями. Сходимость (или расходимость) данного итерационного метода определяется, прежде всего, тем, насколько удачно выбрано первое приближение $\bar{\sigma}_j$.

2. Метод касательных модулей (см. рис. 7.4, *а*). В этом методе также нужно иметь некоторое первое приближение $\bar{\sigma}_j$. Тогда закон деформирования (7.49) можно приближенно записать в виде (7.14), где под податливостями подразумеваются касательные податливости, например,

$$S_{rr}^{(k)} = \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \sigma_r}(\bar{\sigma}_j);$$

$$S_{r\theta}^{(k)} = \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \sigma_\theta}(\bar{\sigma}_j) \quad \text{и т. д.,}$$

а под структурными деформациями

$$\varepsilon_i^{\text{ф}\,(k)} = \varepsilon_i^{\text{ф}} + \varepsilon_i^{(k)} = \varepsilon_i(\bar{\sigma}_j,\ T) -$$

$$- S_{ir}^{(k)}\bar{\sigma}_r - S_{i\theta}^{(k)}\bar{\sigma}_\theta - S_{iz}^{(k)}\bar{\sigma}_z - \alpha_i^{(a)}\,\Delta T.$$

Далее используется итерационный процесс, аналогичный описанному выше.

3. Метод теории течения. Дифференциал деформации (7.49) можно записать как дифференциал функции нескольких переменных:

$$d\varepsilon_i = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial T}(\sigma_j,\ T,\ \chi^{(n)})\,dT +$$

$$+ \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \sigma_j}(\sigma_j,\ T,\ \chi^{(n)})\,d\sigma_j +$$

$$+ \sum_n \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \chi^{(n)}}(\sigma_j,\ T,\ \chi^{(n)})\,d\chi^{(n)}. \tag{7.50}$$

Здесь коэффициент при dT имеет смысл касательного (по температуре) температурного коэффициента линейного расширения, коэффициенты при $d\sigma_j$ — касательных податливостей при данных напряжении, температуре и состоянии структуры, а последний член эквивалентен $d\varepsilon_i^{\text{ф}}$. Таким образом, соотношения (7.50) полностью аналогичны (7.14), но записаны в дифференциалах. Пусть имеются некоторые начальные данные для рассматриваемого далее процесса: система напряжений, распределение температуры, состояние структуры. Если задать малые конечные приращения граничных условий Δp или Δu, аналогичные (7.11) или (7.12), а также приращения температуры и структурной деформации в каждой точке, то, используя готовое решение задачи для многослойного цилиндрического тела, описанное в п. 7.2.7, можно получить приращение напряжений и перемещений, а сложив их с предшествующими соответствующими величинами — конечное напряженно-деформированное состояние. Это конечное состояние будет начальным для следующего шага в расчетах. Метод удобен, в частности, для расчета температурной или химической кинетики роста напряжений, когда приращения температуры и структурной деформации определяются из решения задач теплопроводности и термохимической кинетики при заданном приращении времени Δt. Этот метод, напоминающий метод Эйлера при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений, обладает одним существенным недостатком: поскольку итоговое напряженно-деформированное состояние формируется при расчете путем суммирования большого числа малых приращений, то могут накапливаться немалые ошибки. Частично их можно уменьшить, прибегая на каждом шаге к двойному пересчету: вначале определить податливости в каждом слое, исходя из напряжений, предшествующих данному шагу, а затем исходя из средних арифметических между напряжениями, предшествующими этому шагу и полученными перед повторным пересчетом. Метод теории течения в общем случае полезно сочетать с описанными выше (пп. 7.2.1, 7.2.7, 7.2.8) итерационными методами уточнения решения. Метод теории течения можно перенести и на решение задачи для нелинейно-вязкоупругого материала. В этом случае закон состояния можно получить дифференцированием по времени t функционалов (7.4) и (7.5), на мер, (7.50) может быть записан в виде

$$d\varepsilon_i = \hat{\alpha}_i(\sigma_j,\ T,\ \chi^{(n)})\,\frac{\partial T}{\partial t}\,dt + S_{ij}(\sigma_j,\ T,\ \chi^{(n)})\,\frac{\partial \sigma_j}{\partial t}\,dt + \sum_n \frac{\partial \varepsilon_i^{\Phi}}{\partial \chi^{(n)}}(\sigma_j,\ T,\ \chi^{(n)}) \times \frac{\partial \chi^{(n)}}{\partial t}\,dt + \underset{-\infty}{\overset{t}{e_i}}(\sigma_j,\ \dot{\sigma}_j,\ T,\ \chi^{(n)})\,dt, \qquad (7.51)$$

где функционал $\underset{-\infty}{\overset{t}{e_i}}$ характеризует наследственную скорость ползучести.

Совокупность двух последних слагаемых (7.51) можно трактовать как дифференциальный аналог структурно-усадочной деформации в соотношениях (7.14). Таким образом, если заданы начальные условия, изменение граничных условий во времени, а также система уравнений с соответствующими начальными и граничными условиями для процессов теплопроводности и термохимической кинетики, то можно, в принципе, с помощью теории течения в сочетании с итерационным уточнением (см. в п. 7.2.1) численно решить плоскую осесимметричную задачу механики твердого деформируемого тела. Причем наращивание числа слоев во времени (намотка) естественным образом включается в алгоритм. В численном решении задачи для тела с произвольным законом деформирования центральным звеном алгоритма является решение однородной линейно-упругой задачи.

7.3. АНАЛИЗ ПРОЦЕССА НАМОТКИ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

7.3.1. Основные проблемы. Знание зависимости между параметрами силовой намотки (или дополнительного уплотнения) и полями напряжений и деформаций позволяет оценивать и эффективно управлять:

распределением межвиткового давления, которое в свою очередь определяет степень монолитности и качество изделия;

давлением на оправку, которое не должно превышать критического давления потери устойчивости в случае тонкостенных оправок или прочности толстостенных оправок; это давление является основной характеристикой предварительно напряженных неразъемных соединений;

распределением натяжения арматуры внутри намотанного тела; как правило, нежелательно, чтобы из области предварительного натяжения арматура при намотке последующих слоев переходила в область сжатия до критических напряжений потери устойчивости в виде искривлений, так как при этом образуются зоны провалов прочности;

распределением начальных напряжений после этапа намотки, которые составляют одну из главных частей начальных технологических напряжений;

конечной (деформированной) конфигурацией изделия.

Задачи силовой намотки более специфичны, чем задачи о дополнительном уплотнении (которые представляют чаще всего контактные задачи, задачу Ляме и т. д.), поэтому в дальнейшем внимание будет сосредоточено на анализе силовой намотки.

7.3.2 Линейно-упругая модель. В кольцевой модели процесс намотки представляется в виде последовательного надевания тонких кольцевых слоев вначале на оправку, а затем друг на друга с натягом, соответствующим натяжению наматываемой ленты. Линейно-упругая кольцевая модель намотки учитывает важнейший фактор — анизотропию деформативных свойств полуфабриката. Эта модель качественно, а в некоторых случаях (намотка с малым или очень большим натяжением) количественно описывает процесс.

В момент, когда на текущем радиусе r находится наружный радиус очередного наматываемого витка, напряжения на этом радиусе

$$\sigma_r = 0;\ \sigma_\theta = \sigma_\theta^0, \qquad (7.52)$$

где σ_θ^0 — напряжение, заданное натяжным устройством. Эти напряжения изменяются от давления каждого из последующих витков:

$$\Delta\sigma_r(r_i) = -p_н = -\frac{h_{i+1}}{r_i}\,\sigma_\theta^0(r_{i+1})$$

при $r_i = r_{i+1} - \Delta r_{i+1}$, (7.53)

где $h_i = \Delta r_i$, r, r_i — соответственно толщина слоя, радиус и текущий наружный радиус. При определении приращений напряжений $\Delta\sigma_r$ и $\Delta\sigma_\theta$ уже намотанное кольцо считается квазиоднородным цилиндрически-ортотропным телом, а на границе с кольцевой или сплошной оправкой (той же ширины) выполняются условия непрерывности радиальных напряжений и перемещений или, что то же самое, для композитного кольца задаются условия (7.23).

Согласно (7.24) получим

$$\Delta\sigma_r(r_в, r_i) = -p_в = -\sigma_\theta^0(r_i)\times$$
$$\times\frac{(\eta+1)\dfrac{\Delta r_i}{r_i}}{\eta\rho_i^k+\rho_i^{-k}};\quad \rho_i = r_i/r_в \qquad (7.54)$$

и в соответствии с (7.21), (7.22) напряжения и перемещения будут пропорциональны $\sigma_\theta^0(r_i)\,\Delta r_i$. Для полностью намотанного кольца они суммируются следующим образом:

$$\sigma_j(r, r_i) = \Delta\sigma_j(r, r+\Delta r) +$$
$$+\Delta\sigma_j(r, r+2\Delta r) + \ldots +$$
$$+\Delta\sigma_j(r, r_i); \qquad (7.55)$$
$$u_r(r, r_i) = \Delta u_r(r, r+\Delta r) +$$
$$+\Delta u_r(r, r+2\Delta r) + \ldots +$$
$$+\Delta u_r(r, r_i); \quad j = r,\ \theta.$$

Так как Δr очень мало, то целесообразно при большом числе витков суммирование заменить интегрированием:

$$\sigma_r(r, r_н) = -(\eta\rho^{k-1}+\rho^{-k-1})J(\rho, b);$$
$$\sigma_\theta(r, r_н) = \sigma_\theta^0 - k\times$$
$$\times(\eta\rho^{k+1}-\rho^{-k-1})J(\rho, b); \qquad (7.56)$$
$$u_r(r, r_н) = -S_{\theta\theta}[(k-\nu_{r\theta})\eta\rho^k -$$
$$-(k+\nu_{r\theta})\rho^{-k}]J(\rho, b),$$

где

$$J(\rho, b) = \int_\rho^b \frac{\sigma_\theta^0(y)\,dy}{\eta y^k + y^{-k}};\quad \rho = r/r_в. \qquad (7.57)$$

При этом по мере приближения r к наружному радиусу $r_н$ число слагаемых в (7.55) уменьшается и ошибка от замены суммы интегралом возрастает.

Интеграл (7.57) для отдельных программ намотки $\sigma_\theta^0(r)$ может быть взят аналитически в замкнутом виде либо в быстросходящихся рядах. В общем случае он берется численно, тогда эффективно прямое использование дискретного варианта (7.54), (7.55).

Согласно энергетическому подходу к расчету процесса намотки принимается, что напряжение $\sigma_\theta(r_i, r_i)$ в текущем наружном i-м витке не равно напряжению $\sigma_\theta^0(r_i)$, создаваемому натяжным устройством. Величина $\sigma_\theta(r_i, r_i)$ находится из баланса энергии:

$$W_0 = W_1 + W_2, \qquad (7.58)$$

где W_0 — потенциальная энергия растянутой напряжением σ_θ^0 ленты длиной с очередной виток; W_1 — приращение энергии деформирования в системе: намотанные ранее витки + + оправка; W_2 — энергия, оставшаяся в последнем витке. Выражения для W_0 и W_2 тривиальны, W_1 находится как $W_1 = -\pi\,\Delta r\,\Delta u(r_i, r_i)\,\sigma_\theta(r_i, r_i)$ с использованием (7.54), куда вместо $\sigma_\theta^0(r_i)$ подставлено $\sigma_\theta(r_i, r_i)$. В итоге из (7.58) получим

$$\sigma_\theta(r_i, r_i) = \frac{\sigma_\theta^0(r_i)}{\left[1+\dfrac{\Delta r}{r_i}\left(k\dfrac{\eta\rho_i^{2k}-1}{\eta\rho_i^{2k}+1}-\nu_{r\theta}\right)\right]^{1/2}}. \qquad (7.59)$$

Порядок отклонения $\sigma_\theta(r_i, r_i)$ от $\sigma_\theta^0(r_i)$ определяется порядком величины $k\,\Delta r/r_i$, которая может достигать $\sim 10^{-3}$—10^{-1}. Физическая природа отличия подходов состоит в том, что силовой подход соответствует намотке без трения последнего слоя о п

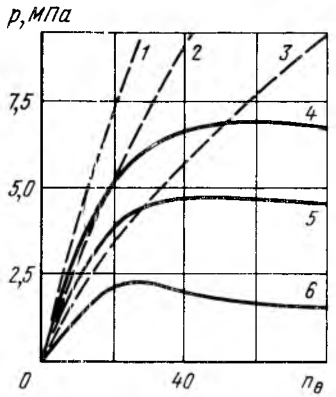


Рис. 7.5. Зависимость давления на оправку p от числа витков n_θ материала ленты и усилия натяжения N_0:

— — — — никелевая лента; ——— — стеклолента (полуфабрикат); 1, 4 — $N_0 = 5\cdot 10^{-2}$ Н/м; 2, 5 — $N_0 = 3{,}7\cdot 10^{-2}$ Н/м; 3, 6 — $N_0 = 2{,}5\cdot 10^{-2}$ Н/м

последний, а энергетический — намотке с бесконечно большим коэффициентом трения. Реальная ситуация, очевидно, соответствует промежуточному случаю. Из (7.59) следует, что намотка с постоянным натяжением в энергетическом подходе соответствует намотке с медленно убывающим натяжением в силовом подходе. При $\Delta r_i \to 0$ оба подхода совпадают, поэтому в дальнейшем будет использован силовой подход.

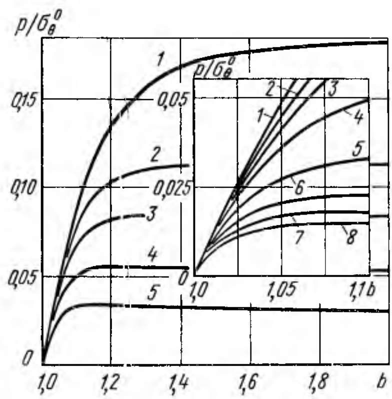


Рис. 7.6. Зависимость давления p на жесткую оправку (в долях от напряжения σ_θ^0 в наматываемой ленте) от текущего относительного наружного радиуса $b = r_н/r_в$ кольца при различных значениях степени анизотропии k:

кривые 1—8 для k, равного соответственно 10; 15; 20; 30; 50; 70; 90; 110

Перемещения каждого элементарного кольца начинаются неодновременно и отсчитываются с момента надевания его на ранее надетые и уже просевшие кольца. Это обстоятельство не позволяет представить предварительное натяжение аналогом некоторой объемной силы, а деформацию, связанную с ним, — аналогом некоторой усадочной (например, термоупругой) деформации. Точнее, можно воспользоваться и аналогией с термоупругостью, но при условии, что свободная деформация ε_θ^Φ, входящая в соотношение Коши $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^\Phi + \dfrac{u_r}{r}$, учитывает просадку ранее надетых колец:

$$\varepsilon_\theta^\Phi(r) = S_{\theta\theta}\sigma_\theta^0(r) - \frac{1}{r}\int_{r_в}^{r} \varepsilon_r(y, r)\,dy.$$

При этом решение задачи не облегчается. Поэтому можно считать, что задачи механики растущих тел представляют собой самостоятельный класс задач механики твердого деформируемого тела.

Отличие намотки полуфабрикатов композитов от намотки изотропной металлической ленты отчетливо проявляется на зависимостях давления на оправку от числа намотанных в одинаковых условиях витков (рис. 7.5): значительная часть давления от вновь накладываемых витков не передается на оправку, а расходуется на процесс деформирования ранее надетых колец, что связано с существенной анизотропией материала и, в частности, с высокой податливостью полуфабриката при сжатии поперек волокон.

Зависимость относительного давления на оправку $p/\sigma_\theta^0 = -\sigma_r(r_в, r_н)/\sigma_\theta^0$ при намотке с постоянным натяжением от относительных размеров кольца представлена на рис. 7.6.

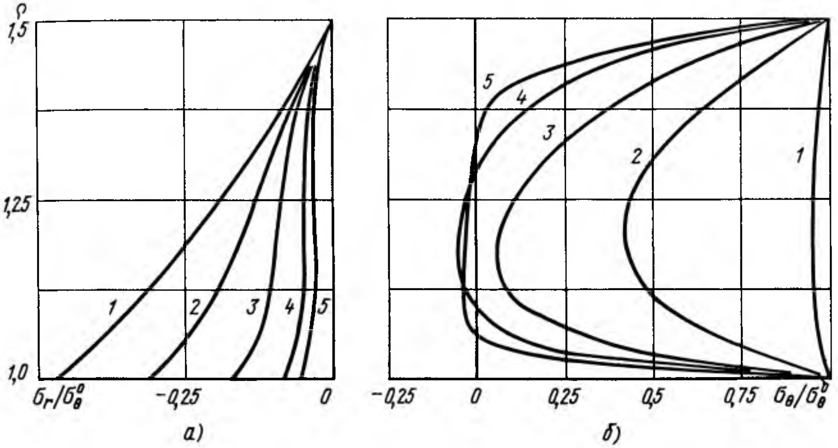


Рис. 7.7. Эпюры радиальных (*а*) и окружных (*б*) напряжений при намотке с постоянным натяжением N_0 на жесткую оправку для колец относительных размеров $b = 1,5$ при различных степенях анизотропии k полуфабриката ($\rho = r/r_в$):

кривые *1—5* для k, равного соответственно 1; 5; 10; 20; 30

С ростом толщины наматываемого изделия давление на оправку растет нелинейно, асимптотически приближаясь к некоторому предельному значению. Таким образом, простейшая линейно-упругая кольцевая модель хорошо описывает основной качественный эффект при намотке полуфабрикатов композитов, отмеченный в эксперименте (см. рис. 7.5). В рамках этой модели доказано, что основная причина того, что давление на оправку составляет лишь небольшую долю от теоретической величины $\sigma^0_\theta (b - 1) = \sigma^0_\theta \dfrac{n\,\Delta r}{r_в}$ (выведенной при условии недеформируемости наматываемой ленты), — существенная анизотропия деформативности полуфабриката. Предельная величина давления на оправку $p_\infty = -\sigma_r$ ($r_в$, $r_н \to \infty$) и толщина кольца, при которой уже практически достигается предельное давление, резко уменьшаются с ростом показателя анизотропии материала k.

Оценки давления имеют вид:
на податливую оправку

$$\frac{\eta + 1}{(k-1)\sqrt{\eta}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\eta}\right) < \frac{p_\infty}{\sigma^0_\theta} < \frac{\eta + 1}{(k-1)\,\eta} \quad \text{при } k > 1; \tag{7.60}$$

на абсолютно жесткую оправку

$$\frac{\pi}{2(k-1)} < \frac{p_\infty}{\sigma^0_\theta} < \frac{2}{k-1} \quad \text{при } k > 1. \tag{7.61}$$

Рассмотрим напряжения, образующиеся в результате намотки с натяжением. Поскольку намотка с постоянным натяжением наиболее распространена, то детальный анализ напряженно-деформированного состояния, возникающего в этом случае, представляет значительный практический интерес. На рис. 7.7 приведены эпюры напряжений σ_r и σ_θ в долях от σ^0_θ. Окружные напряжения существенно неравномерны по сечению, более того, имеется область, где они меняют знак.

Так как в условиях переработки арматура может нести только растягивающую нагрузку, то переход из состояния предварительного натяжения в состояние сжатия чреват возникновением искривлений. При этом свойства материала в направлении

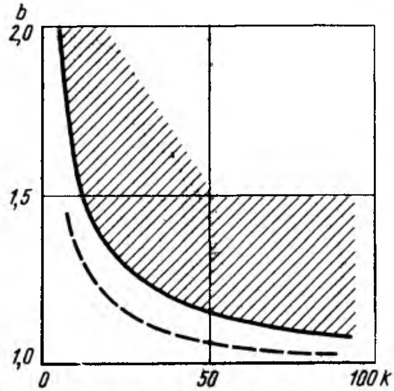


Рис. 7.8. Зависимость от степени анизотропии k относительных размеров кольца, при которых предварительное натяжение еще сохраняется (————) или достигается давление $p = 0,9\ p_{\infty}$ (— — —)

и особенно θ меняются и описанная расчетная методика становится неработоспособной. Практический интерес представляет определение границ параметров, при которых намотка с постоянным натяжением может привести к искривлению витков. Условно уровень $\sigma_\theta = 0$ может быть принят в качестве предельного. Пользуясь расчетными зависимостями (7.56) и (7.57), можно определить минимальные значения $\sigma_{\theta\,\min}$ для любой заданной толщины, степени анизотропии полуфабриката и податливости оправки. Для жесткой оправки те сочетания b и k, при которых первоначально заданное натяжение падает до нуля, приведены на рис. 7.8. Если намотка производится при сочетании параметров, попадающих в заштрихованную область, то возможно искривление волокон, и расчет напряжений и перемещений по рассмотренной выше модели становится некорректным.

Рассмотрим намотку с несколькими характерными законами изменения натяжения: постоянным, возрастающим, убывающим и т. д. Сравним распределение напряжений в витках при различных программах $\sigma_\theta^0(r)$, обеспечивающих одно и то же давление на оправку. На рис. 7.9, *а* приведены такие программы намотки, а на рис. 7.9, *б* — соответствующие эпюры радиальных и окружных напряжений. Здесь же представлен вклад напряжений намотки в начальные, т. е. учтены напряжения от снятия давления на оправку для отвержденного материала с $k = 2$.

Программа намотки с убывающим усилием натяжения, а также проходящим через минимум, как следует из рис. 7.9, *в*, приводит к нежелательным растягивающим радиальным начальным напряжениям, которые вместе с термоупругими начальными напряжениями того же знака могут вызвать растрескивание намоточного изделия. Кроме того, при намотке по программе, имеющей минимум, может произойти (рис. 7.9, *г*) искривление витков. Намотка с возрастающим усилием натяжения позволяет в большей степени компенсировать радиальные термоупругие напряжения, а намотка по программе, имеющей максимум, — предотвратить искривления.

Экспериментальное варьирование закона натяжения в процессе намотки показало, что экстремальные значения начальных радиальных напряжений (рис. 7.10, *б*) в кольцах, намотанных по различным характерным программам (рис. 7.10, *а*), меняются в той же последовательности, что и в приведенном расчете (см. рис. 7.9, *д*).

Так как вследствие больших радиальных деформаций толщина реального кольца меньше величины nh, то может возникнуть вопрос: какова зависимость реальных размеров кольца при намотке его с натяжением от числа витков (или от размеров кольца, содержащего то же количество витков, но намотанного без натяжения). Интегрируя ε_r по толщине кольца с использованием формул (7.54), (7.56), (7.57) и складывая с выражением для $u_r(r_в, r_н)$, можно получить зависимость

$$\Delta r_н(r_н) = -kS_{\theta\theta} r_в \int\limits_1^b \sigma_\theta^0(g) \times$$

$$\times \frac{\eta g^{2k}-1}{\eta g^{2k}+1}\, dg. \qquad (7.62)$$

В случае больших значений k для $b > 1,1$ с погрешностью порядка одного

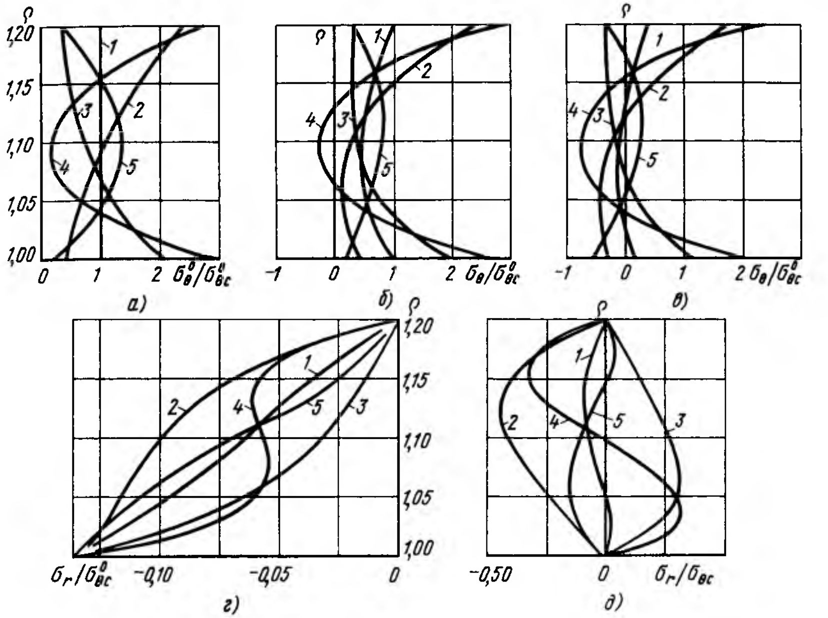


Рис. 7.9. Программы намотки (1—5) (а) и соответствующие эпюры окружных (б, в) и радиальных (г, д) напряжений в кольцах, намотанных по разным программам:

б, г — после этапа намотки ($k = 10$); в, д — после снятия с оправки для отвержденного материала ($k = 2$); $\sigma^0_{\theta c}$ — константа, характеризующая уровень натяжения

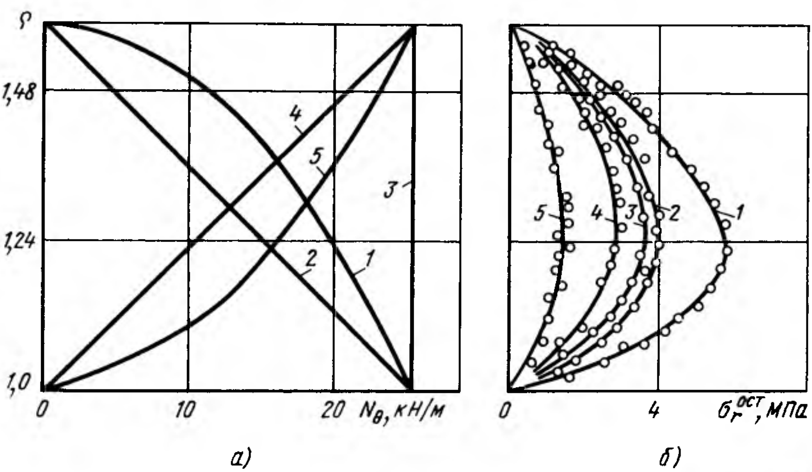


Рис. 7.10. Влияние закона изменения усилия натяжения (а) на эпюру $\sigma_r^{ост}$ (б) [1

Кривые 1—5 соответствуют программам намотки 1—5

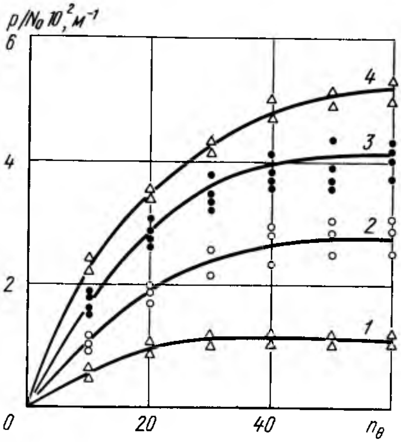


Рис. 7.11. Зависимости относительного давления на оправку p/N_0 от числа витков h_θ при намотке с различными усилиями натяжения N_0:

кривые *1—4* для N_0, равного соответственно 1,0; 2,0; 3,0; 4,0 МПа см

процента формула (7.62) для намотки с постоянным усилием натяжения может быть аппроксимирована следующим простым выражением:

$$\Delta r_{\text{н}}(r_{\text{н}}) = -S_{\theta\theta}\sigma_\theta^0 r_{\text{в}} \times$$
$$\times \left(k\frac{nh}{r_{\text{в}}} - \ln\frac{\eta+1}{\eta+b^{2k}}\right). \quad (7.63)$$

Из (7.63) следует, что при намотке с натяжением, близким к разрывному ($S_{\theta\theta}\sigma_\theta^0 \sim 0{,}01$), изменение наружного радиуса может быть сопоставимо с толщиной кольца. В этом случае применение аппарата, использованного выше и основанного на теории малых деформаций, становится не вполне корректным.

7.3.3. Нелинейно-упругая и нелинейно-вязкоупругая модели. Линейно-упругая кольцевая модель правильно предсказывает ряд основных особенностей намотки композитов, в частности, существенную нелинейность зависимости давления на оправку от числа витков. Однако эта модель не учитывает нелинейность диаграммы поперечного сжатия $\sigma_r - \varepsilon_r$. Экспериментально неоднократно подтверждался эффект нелинейности зависимости давления на оправку от усилия натяжения при намотке. При этом во всех случаях относительное давление на оправку (т. е. в долях от усилия натяжения) не оставалось постоянным, как это получается в рамках линейно-упругой модели, а увеличивалось с ростом усилия натяжения (рис. 7.11).

Обнаруженный эффект может быть объяснен только характерным ужесточением полуфабриката (см. рис. 7.2) в поперечном направлении с ростом уровня радиальных напряжений. Нелинейная диаграмма сжатия пакета слоев полуфабриката в первом приближении может быть аппроксимирована кусочно-линейной зависимостью (см. рис. 7.4). Эта аппроксимация, хотя и вносит некоторую погрешность, зато позволяет, пользуясь минимальным числом параметров, описывать широкий спектр диаграмм. Для полуфабрикатов конструкционных композитов ориентировочные диапазоны характеристик следующие: предел пропорциональности $\sigma_r^* = 0{,}5 \div 2$ МПа, степень анизотропии $k = \sqrt{E_\theta/E_r}$ (определяемая через касательный модуль E_r) составляет 30—200 ($k = \lambda$) до предела пропорциональности и 4—50 ($k = \omega$) после него. Напряжения порядка σ_r^* соответствуют средним напряжениям при намотке крупногабаритных конструкций, что косвенно указывает на необходимость использования при расчете нелинейной теории.

В начале процесса намотки радиальные напряжения малы и процесс описывается линейно-упругой моделью со степенью анизотропии $k = \lambda$, соответствующей начальному участку диаграммы $\sigma_r - \varepsilon_r$. При намотке с малым натяжением может оказаться, что радиальные напряжения во всем процессе так и не достигнут предела пропорциональности. Так как давление на оправку равно максимальному значению абсолютной величины радиальных напряжений в кольце, то при $|\sigma_r^*| > p_\infty$ намотка изделия любой толщины описывается линейно-упругой теорией с показателем анизотропии, соответствующим начальному участку диаграммы $\sigma_r - \varepsilon_r$. Второй вариант, при котором не достигается предел пропорциональности, — на ка тонкостенных изделий. Давление на оправку в этом случае оценивается сверху как $\sigma_\theta^0 \frac{nh}{r_{\text{в}}}$. Если эта величина меньше $|\sigma_r^*|$, то следует пользоваться линейно-упругой моделью с $k = \lambda$.

В намоточном кольце радиальные напряжения должны монотонно убывать по абсолютной величине от оправки к наружному радиусу. В противном случае (появление локального экстремума или участка плато) на эпюре σ_θ, связанной с эпюрой σ_r уравнением равновесия, имеется область сжимающих напряжений, что недопустимо вследствие искривлений. Если диаграмма сжатия полуфабриката $\sigma_r - \varepsilon_r$ аппроксимируется кусочно-линейной зависимостью, то кольцо может быть либо однородным по деформативности (если напряжения вблизи оправки не превысили предела пропорциональности), либо неоднородным (если $|\sigma_r(r_{\text{в}}, r_{\text{н}})| > |\sigma_r^*|$). Если внутренняя кольцевая область с анизотропией $k = \omega$ сопоставима по размерам с наружной областью, характеризуемой анизотропией $k = \lambda$, то линейно-упругая модель неприменима. Если же эти области значительно отличаются по размерам, то можно использовать линейно-упругую модель с показателем анизотропии соответственно $k = \lambda$ или $k = \omega$.

Пусть в момент, когда граница раздела двух областей в композитном кольце находится на относительном радиусе $\rho = \rho_*$, приложено бесконечно малое изменение наружного давления $dp_{\text{н}}$, тогда приращения напряжений, например $d\sigma_r$, могут быть формально записаны для этого случая так:

$$\frac{d\sigma_r}{dp_{\text{н}}} = \left.\frac{\partial\sigma_r}{\partial p_{\text{н}}}\right|_{\rho_*=\text{const}} + \left.\frac{\partial\sigma_r}{\partial\rho_*}\right|_{p_{\text{н}}=\text{const}} \frac{d\rho_*}{dp_{\text{н}}}. \quad (7.64)$$

Эта запись означает, что при нагружении кольца давлением, сопровождающимся движением границы раздела в сторону наружного радиуса, приращение напряжения может быть представлено как сумма приращений напряжений в составном кольце при неподвижной границе и приращении напряжения от замены материала в тонкой полоске между предыдущим и последующим положениями границы при конечных напряжениях и неизменных граничных условиях. В силу непрерывности деформаций и напряжений в точке перелома второе слагаемое в (7.64) пренебрежимо мало.

Расчет напряжений в составном анизотропном кольце приведен в пп. 7.2.7, 7.2.8. В данном случае задача отличается только тем, что записывается в приращениях и удовлетворяет несколько иным граничным условиям, аналогичным (7.53) и (7.23):

$$d\sigma_r = -\sigma_\theta^0 \frac{dr_{\text{н}}}{r} \quad \text{при } r = r_{\text{н}}; \quad (7.65)$$

$$d\varepsilon_\theta = \gamma_{\text{оп}} S_{\theta\theta}\, d\sigma_r \text{ при } r = r_{\text{в}}.$$

Переходя к малым конечным разностям, можно для данного конкретного шага воспользоваться приведенными в пп. 7.2.7, 7.2.8 соотношениями с положением границы раздела $r_1 = \rho_* r_{\text{в}}$, унаследованными от предыдущего шага. Приращение положения границы $\Delta\rho_*$ определяется из следующих соображений. На движущейся границе раздела напряжения σ_r постоянны и равны пределу пропорциональности. Математически это означает, что производная σ_r по направлению $\rho = \rho_*$ равна нулю, откуда, переходя к конечным разностям, можно получить

$$\Delta\rho_* = -\frac{\Delta\sigma_r|_{\rho=\rho_*}}{\left.\frac{\partial\sigma_r}{\partial\rho}\right|_{\rho=\rho_*}} = \frac{\Delta\sigma_r|_{\rho=\rho_*}\rho_*}{\sigma_\theta|_{\rho=\rho_*} - \sigma_r^*}. \quad (7.66)$$

Последовательность вычислений следующая. До некоторого значения $r_{\text{н}} = r_{\text{н}}^*$ намотка ведется при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности. Величина $r_{\text{н}}^*$ определяется при использовании дискретной формы кольцевой модели (7.54), (7.55) непосредственно или методом последовательных приближений при непрерывной форме (7.56)—(7.57). Затем после определения напряжений и перемещений при $r_{\text{н}} = r_{\text{н}}^*$ и $\rho_* = 1$ по формуле (7.66) вычисляется первое

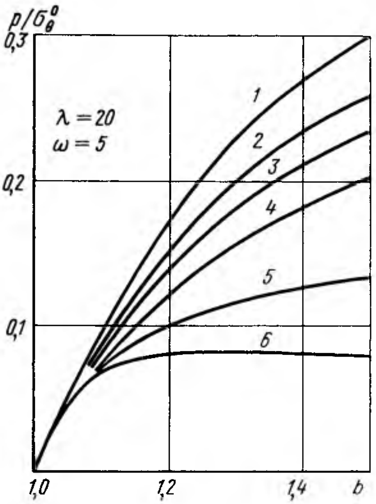


Рис. 7.12. Зависимости относительного давления на оправку p/σ_θ^0 от относительных размеров кольца b при различных усилиях натяжения, заданных параметром $\sigma_r^*/\sigma_\theta^0$:

кривые *1—6* для $\sigma_r^*/\sigma_\theta^0$, равных соответственно 0, —0,02; —0,03; —0,04; —0,05; ∞

положение границы раздела, а по соотношениям многокольцевой модели — приращения напряжений и перемещений. При суммарных напряжениях рассчитывается новое положение границы и т. д.

Идея метода напоминает метод Эйлера численного решения дифференциальных уравнений; то же сопо тавление возникает и при анализе его точности. Точность может быть повышена двойным пересчетом; вначале напряжения определяются при предшествующем положении границы, затем вычисляются $\Delta\rho_*$ и новое положение границы, далее пересчитываются напряжения при среднем арифметическом из двух крайних положений границы, а затем при уточненных напряжениях уточняется и $\Delta\rho_*$. Можно воспользоваться и более точными методами, например, аналогом метода Адамса—Башфорта с построением начального отрезка аналогично методу Крылова. Другой способ решения задачи намотки с кусочно-линейной диаграммой σ_r — ε_r рассмотрен в [18]. Эти методы соотносятся друг с другом аналогично методам теории течения и деформационной теории пластичности. Сопоставление численных результатов подтвердило эквивалентность этих двух методов.

Рассмотрим некоторые численные результаты по намотке с постоянным натяжением. На рис. 7.12 приведены зависимости давления на оправку (в долях от напряжения σ_θ^0) от наружного радиуса, рассчитанные по линейной теории с показателями анизотропии $k = \lambda$ и $k = \omega$ и по нелинейной теории при различных усилиях натяжения. При малых усилиях натяжения, пока диапазон радиальных напряжений в изделии не выходит за пределы первого участка кусочно-линейной диаграммы σ_r — ε_r, рост усилия натяжения не сопровождается изменением p/σ_θ^0. При выходе за этот диапазон относительное давление на оправку p/σ_θ^0 возрастает с ростом усилия натяжения. При значительных усилиях натяжения рост этой характеристики замедляется, а затем вообще прекращается, т. е. становится возможным переход к расчету по линейной модели с анизотропией $k = \omega$. В случае намотки с переменным натяжением с ростом уровня натяжения при неизменном законе его изменения наблюдается аналогичная картина.

Расчет окружных напряжений при намотке с постоянным усилием натяжений показал, что усилие натяжения существенно влияет на эти эпюры. На рис. 7.13 приведен пример распределений окружных напряжений (в долях от напряжения σ_θ^0) в одинаковых кольцах, намотанных с различными усилиями натяжения. При малых натяжениях наматываемой ленты (в области применения линейной модели намотки с $k = \lambda$) эпюра напряжений σ_θ в долях от σ_θ^0 не зависит от σ_θ^0. При увеличении натяжения эпюра относительных окружных напряжений искажается, причем становится равномернее по сечению. При очень больших значениях σ_θ^0 влияние этой величины на распределение нарактеристики $\sigma_\theta/\sigma_\theta^0$ ослабляется, а затем и вовсе прекращается. Это соответствует переходу в область применения линейной модели намотки с анизотропией $k = \omega$.

Таким образом, при намотке с большими усилиями натяжения предварительное натяжение, в основном, сохраняется, а при намотке с малыми значениями σ_θ^0 происходит потеря значительной его части, а в некоторых случаях и появление сжимающих окружных напряжений, что связано с опасностью искривления волокон. Аналогичная картина наблюдается и при намотке с переменным натяжением.

Сопоставим вклады напряжений намотки в начальные напряжения при различных условиях натяжения. Для этого из напряжений намотки надо вычесть напряжения, возникающие при снятии с оправки отвержденного изделия. Расчет показывает, что вклад в начальные радиальные отрывные напряжения растет с увеличением усилия натяжения. Экспериментальные исследования влияния усилия натяжения на начальные напряжения обнаружили, что уровень начальных напряжений при намотке холодной лентой на холодную оправку растет, а при намотке подогретой лентой на холодную оправку падает.

Для случая гладкой зависимости между напряжениями и деформациями применима многокольцевая модель. Пусть напряжения и деформации во всех точках уже намотанного кольца известны. Это значит, что известны и касательные модули и другие упругие характеристики в каждой точке кольца. Если приращения, возникающие при намотке очередного витка, малы, то для расчета можно воспользоваться указанными характеристиками. Это означает, что для приращений напряжений кольцо рассматривается как линейно-упругое неоднородное. Гладкая неоднородность при большом числе слоев может быть заменена кусочной неоднородностью, т. е. используются зависимости (7.40)—(7.44). После суммирования приращений напряжений и деформаций с предшествующими вновь определяются касательные упругие характеристики в каждой точке и т. д. Точность может быть повышена путем двойного пересчета, аналогично тому, как это делалось в кусочно-линейной модели.

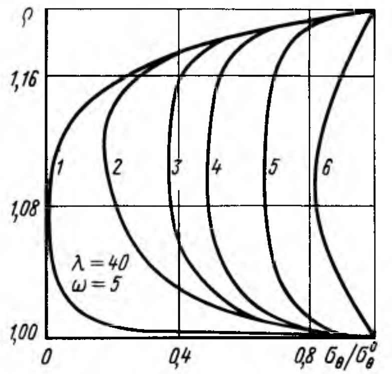


Рис. 7.13. Эпюры относительных окружных напряжений при намотке с различными усилиями натяжения:

кривые *1—6* для $\sigma_r^*/\sigma_\theta^0$, равных соответственно $-\infty$, $-0{,}0250$; $-0{,}0225$; $-0{,}0200$; $-0{,}015$; 0 ($\lambda = 40$, $\omega = 5$)

В работе [1] приведен пример результатов расчета при следующей аппроксимации закона деформирования:

$$\sigma_r = E_r\varepsilon_r - B_r\varepsilon_r^2 + C_{r\theta}\varepsilon_\theta;$$
$$\sigma_\theta = C_{r\theta}\varepsilon_r + E_\theta\varepsilon_\theta. \qquad (7.67)$$

Данные расчетов, представленные в [6] и на рис. 7.12, аналогичны экспериментальным (см. рис. 7.11): с ростом усилия натяжения давление на оправку, отнесенное к напряжению в наматываемой ленте, увеличивается.

Большие деформации допустимы только в радиальном направлении, в окружном они не должны превышать малых деформаций предварительного растяжения, в противном случае произойдет искривление арматуры.

Приращения деформаций, возникающие при намотке одного текущего витка, малы. Они относятся к текущему деформированному состоянию, что приводит к естественному обращению к мере Генки для ε_r при описании конечного деформированного состояния.

Так как практически всю нагрузку в окружном направлении несут арматуры, толщины которых меняются мало, то знание усилий натяжения $N = \sigma_\theta h$ представляется более полезным, чем осредненных по толщине витка значений σ_θ. Численные расчеты показывают, что геометрически-линейная теория дает несколько заниженные значения давления на оправку и минимального усилия натяжения; однако это отличие незначительно.

Учет ползучести при сжатии в поперечном направлении осуществляется следующим образом. Используя запись закона деформирования для поперечного сжатия в виде дифференциального уравнения нелинейной реологической модели типичного тела, получим уравнение осесимметричной задачи, в котором левая часть, записанная через $\dot{\sigma}_r$, аналогична соответствующему уравнению относительно σ_r нелинейно-упругой задачи намотки, а правая часть, выраженная через σ_r, может для данного момента времени t считаться заданной. Таким образом, непрерывный процесс намотки заменяется мгновенным наложением витка толщиной Δr_i и выдержкой в стационарном состоянии в течение времени Δt, соответствующему реальному времени непрерывной намотки этого витка. Вычисленные значения $\dot{\sigma}_r$ методом, аналогичным использованному при построении дискретно-кольцевой модели намотки нелинейно-упругих материалов, умноженные на приращение времени Δt, позволяют определить новое напряженное состояние, предшествующее намотке уже следующего витка и т. д. Полученное распределение напряжений после намотки с конечной скоростью и последующей релаксацией (ускоряемой при разогреве) находится «в вилке» между распределением напряжений при мгновенной намотке (мгновенная изохрона $\sigma_r - \varepsilon_r$) и последующей релаксацией бесконечно медленной намотки (изохрона $\sigma_r - \varepsilon_r$ при $t \to \infty$).

Другим проявлением вязкотекучего состояния связующего является фильтрация. Решение задачи с учетом фильтрации проводится с помощью модели, аналогичной дискретно-кольцевой модели намотки нелинейно-упругих материалов, которая позволяет учесть деформационную неоднородность, вызванную фильтрацией. Численное решение показывает, что для обычных условий роль фильтрации несущественна. Еще одна возможность проявления вязкотекучих эффектов связана со структурой намоточных изделий. Особенность спирального расположения слоев состоит в том, что деформации от витка к витку передаются не только через сжимаемую прослойку связующего, но и непосредственно по спирали от витка к витку. Вязкость прослойки является фактором, противодействующим этому механизму. При намотке витков, образующих спиральную структуру, существует тенденция к выравниванию натяжения, что сказывается на снижении опасности возникновения искривления. После окончания намотки конец ленты важно жестко закреплять, в противном случае возможна релаксация напряжений, связанная с движением последнего витка.

7.4. НАМОТКА ЦИЛИНДРОВ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

Окружная намотка цилиндров может быть описана с помощью кольцевых моделей при некоторой их модификации. В зависимости от конкретного технологического способа изготовления изделий возможны различные варианты граничных условий. В тех случаях, когда деформации торцов цилиндра не стеснены, а межслойная сдвиговая податливость S_{rzrz} велика, напряженное состояние с некоторой погрешностью можно считать плоским. Расчет напряжений σ_r, σ_θ и деформаций ε_r и ε_θ проводится с помощью кольцевых моделей, а деформации ε_z — через вычисленные напряжения σ_r и σ_θ и закон состояния. В этом случае с ростом длины цилиндра растет искажение профиля торца.

Более часто встречается технологический вариант намотки цилиндров, в котором осевые деформации стеснены $\varepsilon_z = 0$. Переход от моделей с плоским напряженным состоянием к моделям с плоским деформированным состоянием осуществляется простым преобразованием постоянных по (7.16).

Для полуфабрикатов композитов, особенно однонаправленных, коэфциент Пуассона ν_{rz} не столь уж мал, поэтому степень анизотропии $k = \left[\frac{E_\theta(1-\nu_{rz}\nu_{zr})}{E_r(1-\nu_{\theta z}\nu_{z\theta})}\right]^{1/2}$ при плоском деформированном состоянии меньше, чем степень анизотропии k при плоском напряженном. Отчасти с этим может быть связан экспериментально наблюдаемый факт, что рост давления на оправку с ростом числа витков затухает при намотке цилиндров не так быстро, как при намотке колец. Расчет напряжений для модели намотки, когда на каждом шаге $\Delta\varepsilon_z = \text{const}$ и осевая сила равна нулю, осуществляется с использованием решения задачи о нагружении бесконечного составного (композит-оправка) цилиндра наружным давлением при нулевой осевой силе.

В случаях намотки цилиндров, отличной от окружной, вместо величины σ_θ^0 в формулы (7.52), (7.53) и далее следует подставлять $\sigma^0 \cos^2\varphi$, где φ — угол между касательной к наматываемой ленте и плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра. При этом степень анизотропии k_i отдельных слоев определяется с помощью формул преобразования тензоров упругих постоянных при плоском повороте системы координат на угол φ, а степень анизотропии k пакета в целом — с помощью формул теории слоистых сред. Степень анизотропии k пакета можно определить также экспериментально при поперечном сжатии и продольном растяжении пакета соответствующей структуры.

При продольно-поперечной намотке натяжение слоев, укладываемых вдоль образующей, не вносит никакого вклада в нормальную компоненту реакции. Необходимо учитывать лишь усилие натяжения $N_\theta^0 = \sigma_\theta^0 h_\theta$ окружных слоев. При этом возникает особенность в формулах предельного перехода (7.55): вместо Δr_i надо подставлять наименьшее среднее расстояние $\min \Delta r_i$ между повторяющимися элементами пакета (например, при укладке 1 : 1 получится $\min \Delta r_i = 2\Delta r_i$; при укладке n_z: n_θ $\min \Delta r = (\Delta r_z n_z + \Delta r_\theta n_\theta)$, где n_z — число слоев, уложенных вдоль образующей, а n_θ — в окружном направлении, Δr_z и Δr_θ — толщины соответствующих слоев). Таким образом, продольно-поперечная намотка ведется как бы с натяжением $\sigma_\theta^0 \Delta r / \min \Delta r^2$, а не $\sigma_\theta^0 \Delta r$. При этом надо учитывать изменение анизотропии пакета слоев. В общем случае намотки тел сложной структуры применим лишь дискретный вариант (7.55) построения решения.

7.5. ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ ЭТАПЫ, СЛЕДУЮЩИЕ ЗА НАМОТКОЙ

7.5.1. Начальные напряжения. В результате силовой намотки в изделии образуется система радиальных сжимающих и окружных растягивающих напряжений. Эти напряжения изменяются на последующих технологических стадиях, причем во многих случаях меняется их знак. Качественная картина перестройки эпюр напряжений приведена на рис. 7.14.

При разогреве происходят, главным образом, такие явления, как микро- и макрофильтрация связующего, термическое расширение и одновременное снижение жесткости в направлении, перпендикулярном волокнам, релаксация части напряжений, созданных при намотке, изменение давления на оправку, вызванное разностью температурных коэффициентов линейного расширения оправки и изделия. Различное термическое расширение полуфабриката и оправки должно приводить к повышению давления на оправку. Снижение жесткости и интенсификация диссипационных явлений должны привести к противоположному эффекту. В конкуренции этих двух механизмов чаще побеждает второй.

При полимеризации происходит рост прочности и жесткости в направлении, перпендикулярном волокнам, и физико-химическая усадка преимущественно в этом же направлении. Кроме того, продолжается небольшая релаксация намоточных напряжений. В этом случае также возникают конкурирующие механизмы, которые, по-видимому, и приводят к тому, что давление на оправку в процессе полимеризации не изменяется (см. рис. 7.1).

При охлаждении происходит термическая усадка и рост жесткости в н

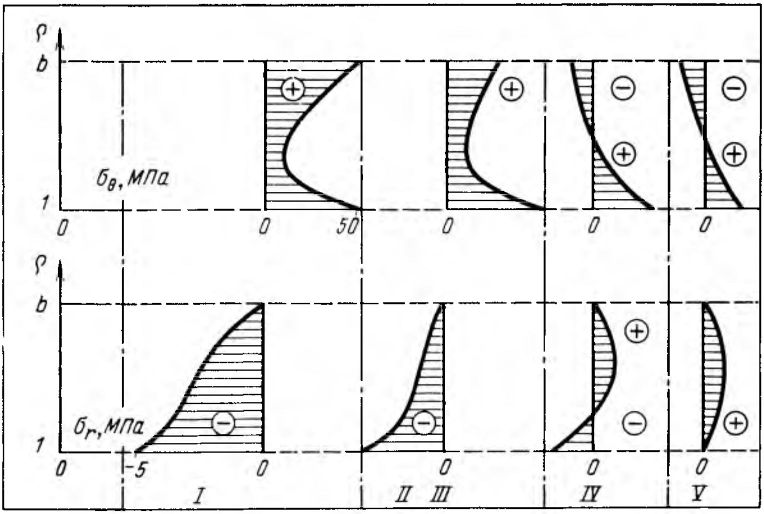


Рис. 7.14. Диаграмма изменения эпюр радиальных и окружных напряжений на этапах намотки:

I — намотка; *II*, *III* — разогрев и отверждение; *IV* — охлаждение; *V* — удаление оправки

правлении, перпендикулярном волокнам. Продолжаются процессы ползучести и релаксации напряжений. Изменяется давление на оправку из-за разности температурных коэффициентов термического расширения оправки и изделия (но теперь уже отвержденного). Ситуация оказывается аналогичной (но противоложной) ситуации при разогреве. Но конкурентная способность двух механизмов оказывается неодинаковой. Свободная деформация, вызванная изменением жесткости отвержденного материала при охлаждении в условиях действия конечных напряжений, меньше термоусадочной деформации. Поэтому роль термической усадки более существенна и при охлаждении радиальные сжимающие напряжения уменьшаются, давление на оправку падает, а во многих случаях появляются области растягивающих радиальных напряжений.

В процессе охлаждения возможно, что при некоторой температуре произойдет освобождение от оправки, так как давление на нее падает до нуля. Однако возможен (причем более часто встречается) вариант, когда изделие после охлаждения все еще сохраняет некоторый натяг. Снятие с оправки (механическим путем с помощью разрушения или растворения оправки, охлаждением оправки и т. д.) эквивалентно приложению некоторого отрицательного внутреннего давления к изделию, приводящему к росту растягивающих радиальных напряжений. В тех случаях, когда оправкой служат обматываемые детали, образующие с намоточным композитным телом неразъемное соединение (например, при намотке бандажей), оправка не удаляется и давление на границе с ней не снимается.

Рассмотрим в качестве примера эпюры начальных напряжений (рис. 7.15), действующих в толстостенных кольцах из стеклопластика и углепластика. Эти напряжения опасны, так как имеют порядок прочности на поперечный отрыв. С ростом относительной толщины изделий начальные напряжения резко возрастают (рис. 7.16). Это приводит к тому, что изделия с толщиной стенки, сопоставимой с внутренним радиусом изделия, как правило, растрескиваются.

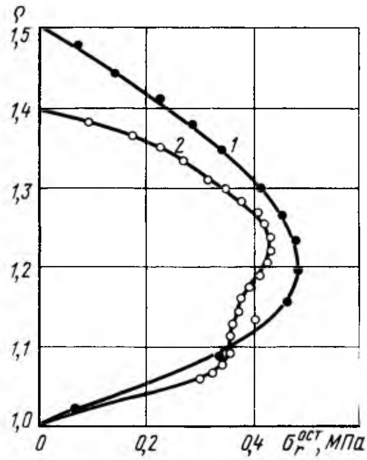


Рис. 7.15. Эпюры начальных технологических напряжений в кольцах из стеклопластика (1) [19] и углепластика (2) [23]

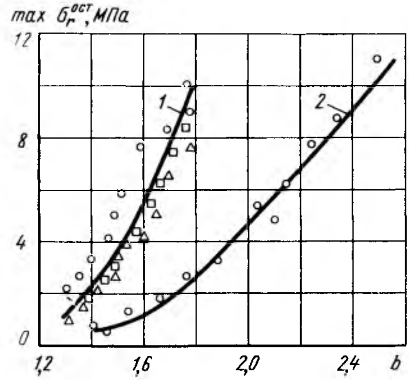


Рис. 7.16. Влияние относительных размеров колец b на начальные технологические напряжения $\sigma_r^{\text{ост}}$:

1 — при постоянном усилии натяжения; 2 — при возрастающем усилии [10]

7.5.2. Линейный термоупругий анализ охлаждения анизотропного кольца. Основная причина появления термоупругих напряжений заключается в том, что если деформации термического расширения не удовлетворяют кинематическим ограничениям, то появляются дополнительные деформации, уже связанные с напряжениями, такие, что суммарные деформации удовлетворяют этим ограничениям. Для кольца таким ограничением служит уравнение совместности деформаций (7.3). Как правило, температурное поле в начале и конце процесса однородно, т. е. $\Delta T = \text{const}$. Решение уравнения совместности деформаций, записанного в напряжениях σ_r, для однородного перепада температур приведено в п. 7.2.4. Проанализируем полученные зависимости. При свободном охлаждении ($\Delta T < 0$) максимальные радиальные напряжения достигаются на радиусе

$$r_{\text{м}} = r_{\text{в}} \left(\frac{b^k - b}{b^{k+1} - 1} \; \frac{k+1}{k-1} \right)^{1/2k}; \qquad k \neq 1. \qquad (7.68)$$

Уровень термоупругих напряжений растет с увеличением толщины. В очень толстых кольцах (при $r_{\text{н}} \to \infty$) максимальные напряжения

$$\sigma_r = D^I; \; \sigma_\theta (r_{\text{в}}) = D^I (1 + k); \quad \sigma_\theta (r_{\text{н}}) = D^I (1 - k). \qquad (7.69)$$

В отличие от изотропных колец однородное изменение температуры вызывает появление напряжений. При охлаждении радиальные напряжения растягивающие, а при нагревании — сжимающие. Уровень радиальных растягивающих напряжений, как следует из (7.69), (7.27), может превысить предел прочности на поперечный отрыв. В толстостенных кольцах перемещения внутренней и наружной поверхностей кольца при свободном охлаждении-нагревании имеют противоположные знаки.

Аналогичные предельные оценки для случая совместного термоупругого деформирования с оправкой имеют вид

$$\sigma_r (r_{\text{в}}) = \frac{E_\theta (\alpha_\theta - \alpha_{\text{оп}}) \Delta T}{k + \gamma_{\text{оп}} + \nu_{r\theta}} + \frac{D^I (1 + k)}{k + \gamma_{\text{оп}} + \nu_{r\theta}}; \qquad (7.70)$$

$$\sigma_\theta (r_{\text{в}}) = \frac{k E_\theta (\alpha_\theta - \alpha_{\text{оп}}) \Delta T}{k + \gamma_{\text{оп}} + \nu_{r\theta}} + \frac{D^I (1 + k)(\gamma_{\text{оп}} + k)}{k + \gamma_{\text{оп}} + \nu_{r\theta}};$$

$$\sigma_\theta (r_{\text{н}}) = D^I (1 - k).$$

Отметим существенную роль слагаемого, связанного с разностью температурных коэффициентов линейного расширения.

Эксперименты полностью подтвердили основные качественные выводы теории. Уменьшение температуры отверждения и использование оправок с меньшим температурным коэффициентом линейного расширения приводит к снижению начальных напряжений.

7.5.3. Вариант линейной теории начальных напряжений. Если намотка производится подогретой лентой на подогретую оправку, то стадия разогрева исключается из расчетной схемы. Неизменность давления на оправку в процессе полимеризации (см. рис. 7.1) позволила высказать предположение, что напряженное состояние на этой стадии не изменяется. Тогда, если принять гипотезу о наследовании напряженного состояния, напряжения складываются из трех составляющих: напряжений, возникающих при намотке, напряжений от совместного охлаждения изделия и оправки и напряжений от снятия конечного давления на оправку, вычисляемых по формулам (7.21), (7.22), где $p_{\text{н}} = 0$ и $p_{\text{в}} = \bar{p}$ — отрицательное давление, равное сумме напряжения σ_r ($r_{\text{в}}$, $r_{\text{н}}$) после намотки и напряжения σ_r ($r_{\text{в}}$), вызванного совместным охлаждением изделия и оправки и вычисляемого по формулам (7.26)—(7.31).

Для расчета более распространенного в производстве варианта намотки неподогретой лентой на холодную оправку необходимо учесть стадию разогрева. Основная сложность при построении теоретического описания процесса разогрева заключается в том, что учет только эффектов упругости и термического расширения приводит к результатам, прямо противоположным эксперименту: при разогреве ввиду большого значения температурного коэффициента линейного расширения у оправки по сравнению с композитами, а также вследствие анизотропии линейного расширения композитов (с ростом температуры в толстостенных кольцах наружный радиус должен увеличиваться, а внутренний уменьшаться) давление на оправку должно увеличиваться, практически же наблюдается существенное его падение (см. рис. 7.1).

Это противоречие можно объяснить только тем, что не учитывается резкий рост деформативности композитов с повышением температуры. В работе [3] был предложен прием, позволяющий учесть влияние изменения радиального модуля упругости E_r (радиальной податливости S_{rr}) на напряженно-деформированное состояние. Свободная деформация $\varepsilon_r^{\text{ф}}$ записывается в виде суммы деформации термической и вызванной изменением S_{rr} от начального значения S_{rr} (T_1) до конечного S_{rr} (T_2):

$$\varepsilon_r^{\text{ф}} = \alpha_r (T_2 - T_1) + \sigma_r (T_1) [S_{rr} (T_2) - S_{rr} (T_1)], \qquad (7.71)$$

где σ_r (T_1) — напряжения после намотки (перед скачком S_{rr}).

Использование закона состояния типа (7.14), но для приращений напряжений, вызванных разогревом, с учетом решения задачи о нагреве кольца (п. 7.2.4), связанного с оправкой, позволяет получить зависимости:

$$\Delta\sigma_r = \frac{(\alpha_{\text{оп}} - \alpha_\theta)\, \Delta T}{S_{\theta\theta} (k_2 - \gamma - \nu_{r\theta})} \times \frac{(\rho^{k_2 - 1} - b^{2k_2} \rho^{-k_2 - 1})}{(\eta b^{2k_2} + 1)} + \frac{L (b)\, (\eta \rho^{k_2 - 1} + \rho^{-k_2 - 1})}{2k_2 (\eta b^{2k_2} + 1)} - \frac{L (\rho)}{2k_2 \rho^{k_2 + 1}};$$

$$\Delta\sigma_\theta = \frac{(\alpha_{\text{оп}} - \alpha_\theta)\, \Delta T k_2}{S_{\theta\theta} (k - \gamma - \nu_{r\theta})} \times \frac{(\rho^{k_2 + 1} + b^{2k_2} \rho^{-k_2 - 1})}{(\eta b^{2k_2} + 1)} + \frac{L (b)\, (\eta b^{k_2 - 1} - \rho^{-k_2 - 1})}{2 (\eta b^{2k_2} + 1)} + \frac{\Omega_1 (\rho)}{2\rho^{k_2 + 1}}, \qquad (7.72)$$

где

$$k_2 = k\,(T_2);$$

$$\eta = \eta\,(k_2);$$

$$L(b) = \int_1^{\rho} \left[(\alpha_r - \alpha_\theta) \frac{\Delta T}{S_{\theta\theta}} + \right.$$

$$\left. + \left(k_2^2 - k_1^2\right) \sigma_r(y) \right] \times$$

$$\times \left(y^{k_2} - \rho^{2k_2} y^{-k_2}\right) dy;$$

здесь $k_1 = k(T_1)$;

$$\Omega_1(\rho) = \int_1^{\rho} \left[(\alpha_r - \alpha_\theta) \frac{\Delta T}{S_{\theta\theta}} + \right.$$

$$\left. + \left(k_2^2 - k_1^2\right) \sigma_r(y) \right] \times$$

$$\times \left(y^{k_2} + \rho^{2k_2} y^{-k_2}\right) dy.$$

Процессы полимеризации и охлаждения могут быть описаны теми же зависимостями, что и процесс разогрева, только вместо деформаций термической усадки $\alpha_i \Delta T$ в соотношения для полимеризации войдут деформации физико-химической усадки $\varepsilon_i^{\text{ф}}$. Использование описанного приема позволяет удовлетворить требованию непрерывного изменения не только напряжений, но и деформаций и модели технологического процесса.

Описанный инженерный вариант теории начальных напряжений позволяет проанализировать методы управления начальными напряжениями. Он является научной основой таких распространенных приемов, как программированная намотка, опрессовка, намотка с послойным отверждением, метод искусственных температурных градиентов, управление анизотропией и неоднородностью изделий.

7.5.4. Уточненные варианты теории начальных напряжений. Для более полного описания термореологических особенностей композитов предложено несколько вариантов теории начальных напряжений. Влияние температуры и структурных параметров на изменение упругих, теплофизических и прочностных характеристик учтено в рамках гипоупругой модели, предложенной В. В. Болотиным [9]. Исходные соотношения гипоупругой модели в данном изложении можно рассматривать как частный случай теории течения (7.50), а именно — как линейный ее вариант:

$$d\varepsilon_i = \alpha_i\left(T, \chi^{(n)}\right) dT + $$
$$+ S_{ij}\left(T, \chi^{(n)}\right) d\sigma_j + $$
$$+ \sum_n \frac{\partial \varepsilon_i^{\text{ф}}\left(T, \chi^{(n)}\right)}{\partial \chi^{(n)}} d\chi^{(n)}. \quad (7.73)$$

Для стадии разогрева и охлаждения получаются такие же формулы, что и при решении соответствующей линейной термоупругой задачи, но с заменой напряжений, деформаций и перемещений на их дифференциалы и с заменой ΔT на dT (упругогипоупругая аналогия). В итоге искомые величины выражаются как интегралы по температуре, причем температурные зависимости характеристик входят в подынтегральные выражения. Для стадии охлаждения важно сопоставление температурной кинетики радиальных напряжений и трансверсальной прочности.

Более строгий переход от (7.50) к выражению типа (7.73) позволяет получить следующие выражения:

$$d\varepsilon_i = \alpha_i\left(T, \chi^{(n)}\right) dT + $$
$$+ \sum_n \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \chi^{(n)}} \left(T, \chi^{(n)}\right) d\chi^{(n)} + $$
$$+ S_{ij}\left(T, \chi^{(n)}, \sigma_k\right) d\sigma_j + $$
$$+ \frac{\partial S_{ij}}{\partial T} \sigma_j \, dT + $$
$$+ \sum_n \frac{\partial S_{ij}}{\partial \chi^{(n)}} \sigma_j \, d\chi^{(n)}. \quad (7.74)$$

Здесь первый член отражает изменяющееся с температурой и степенью отверждения линейное термическое расширение, второй — физико-химическую усадку, третий — упругие эффекты. Появление четвертого и пятого слагаемых формально связано с тем, что в отличие от податливости, которая может быть функцией не только температуры и текущего структурного состояния, но и функцией напряженного состояния (в нелинейно-упругой теории), такие понятия, как линейное термическое расширен физико-химическая усадка, относятся исключительно к ненапряженному состоянию. Четвертое слагаемое можно рассматривать как дифференциальный аналог (7.71). Важный физический смысл имеет в данном случае пятое слагаемое в (7.74). Отверждение связующего должно вызвать сжимающие отрицательные радиальные деформации, что находит свое отражение во втором слагаемом.

Из-за усадочных деформаций при отверждении должно существенно упасть давление на оправку, ибо свободные сжимающие радиальные деформации, как показано выше на примере задачи об однородном охлаждении, приводят в кольцах и цилиндрах к появлению растягивающих радиальных напряжений, причем бóльших в кольце, посаженном на оправку (при условии, что $\alpha_{\text{оп}} > \alpha_\theta$), чем в свободном кольце. Неучтенные факторы, такие, как ползучесть в радиальном направлении во время отверждения, также должны приводить к падению давления на оправку.

Однако снижение податливости в радиальном направлении при отверждении материала при конечных сжимающих напряжениях должно приводить согласно пятому слагаемому в (7.74) к дополнительным растягивающим деформациям, возможно частично компенсирующим усадку. Тогда становится объяснимым постоянство давления на оправку во время отверждения.

7.6. МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ НАЧАЛЬНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

7.6.1. Программированная намотка. По заданным после намотки или в готовом изделии эпюрам напряжений можно найти закон изменения натяжения при намотке, обеспечивающий эти эпюры, что составляет предмет программированной намотки.

На основе линейно-упругой кольцевой модели, используя соотношения (7.56), можно непосредственно получить формулу, связывающую искомые (после этапа намотки) эпюры окружных σ_θ и радиальных σ_r напряжений с программой намотки:

$$\sigma_\theta^0(r) = \sigma_\theta(r, r_{\text{н}}) - \sigma_r(r, r_{\text{н}})\, k \times \times \frac{\eta\rho^{2k} - 1}{\eta\rho^{2k} + 1}. \tag{7.75}$$

При этом должны быть удовлетворены следующие ограничения: напряжения σ_θ ни в одном из витков не должны оказаться сжимающими (во избежание искривлений арматуры); натяжение σ_θ^0 не должно превзойти предел прочности наматываемого материала. Этими требованиями ограничивается сверху область относительных и абсолютных размеров намоточных изделий, в которых можно эффективно пользоваться натяжением для регулирования начальных напряжений.

Следующий шаг состоит в переходе к готовому изделию. Связь между напряжениями после намотки и результирующими эпюрами начальных напряжений в изделии устанавливается с помощью соотношений, приведенных в разд. 7.5 Из (7.1), (7.3), (7.71) можно получить уравнение

$$r^2 \frac{d^2\sigma_\theta}{dr^2} + 3r\frac{d\sigma_\theta}{dr} + \left(1 - k_1^2\right)\sigma_\theta = = \rho^2 \frac{d^2\sigma_\theta^T}{d\rho^2} + 3\rho\frac{d\sigma_\theta^T}{d\rho} + \left(1 - k_2^2\right)\sigma_\theta^T, \tag{7.76}$$

которое связывает между собой эпюры окружных напряжений до (σ_θ) и после $\left(\sigma_\theta^T\right)$ разогрева, где k_1 и k_2— степени анизотропии соответственно до и после разогрева. Принимая, что эффекты, связанные с ужесточением композита в поперечном направлении при конечных напряжениях, и физико-химическая усадка в процессе полимеризации уравновешивают друг друга, напряжение σ_θ^T можно отождествить с окружным напряжением после полимеризации.

Построение программ завершается учетом термоупругих слагаемых. Разработанный подход позволяет рекомендовать программу намотки, предусматривающую реализацию не...

наперед заданной системы начальных напряжений $\sigma_r^{ост}$ и $\sigma_\theta^{ост}$. Наиболее часто применяются следующие программы. Программа, обеспечивающая равномерное натяжение в витках после намотки (рис. 7.17, кривая *2*), полезна, когда необходимо избежать искривлений слоев. Особый интерес эта программа представляет для намотки традиционных материалов: тканей, бумаги, пленок, магнитофонных и видеомагнитофонных лент, а также при производстве препрегов. Намотка по программе, обеспечивающей равномерное натяжение в витках после разогрева (см. рис. 7.17, кривая *3*), позволяет избежать искривлений в витках намотанных полуфабрикатов композитов после разогрева.

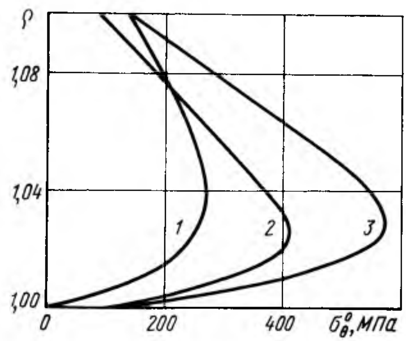


Рис. 7.17. Программы намотки, обеспечивающие:

1 — $\sigma_r^{ост} = \sigma_\theta^{ост} = 0$ в изделии; *2* — $\sigma_\theta = 100$ МПа = const после намотки; *3* — $\sigma_\theta = 100$ МПа после разогрева ($k = 50$; $kE_r\,\Delta T\,(\alpha_\gamma - \alpha_\theta) = 7500$)

Намотка по программе, обеспечивающей постоянное натяжение в витках после термообработки изделия, не снятого с оправки, наиболее целесообразна для изготовления изделия с гарантированным натягом (бандажи, металлокомпозитные элементы конструкций и т. д.). Наиболее часто используется отнамка по программе, обеспечивающей отсутствие начальных напряжений (рис. 7.17, кривая *1*). Экспериментальное исследование намотки с переменным натяжением (рис. 7.18) подтвердило, что при законе изменения усилия натяжения (подобном показанному на рис. 7.17, кривая *1*) с максимумом в точке, отстоящей от внешнего радиуса примерно на 25 % от толщины кольца, начальные напряжения в изделии близки к нулю (рис. 7.18, *б*).

Расчет программы намотки в рамках нелинейно-упругой или вязкоупругой модели основан на том, что при намотке любого материала окружное напряжение на наружном радиусе

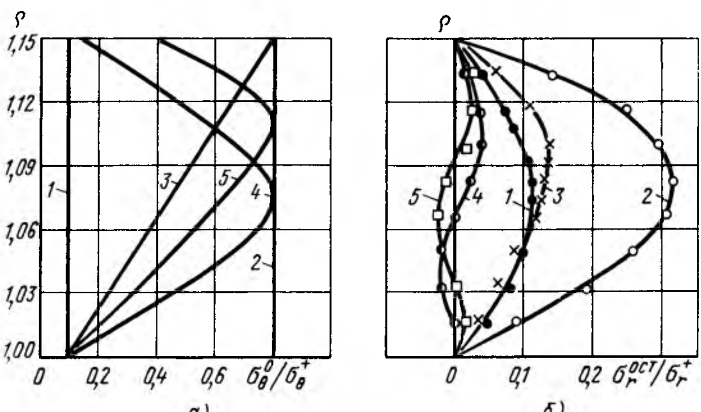


Рис. 7.18. **Программы (1—5) намотки (*а*) и эпюры начальных напряжений $\sigma_r^{ост}$ в кольцах из стеклопластика (*б*), намотанного по соответствующим программам [20]**

$\sigma_\theta = \sigma^0 \cos^2 \varphi$, где σ^0 — напряжение в наматываемой ленте, φ — угол намотки. Мысленно проводя процесс, обратный намотке, можно последовательно получить, исходя из конечного напряженного состояния, значения окружного напряжения на текущем наружном радиусе, а из него — напряжение в наматываемлй ленте.

7.6.2. Опрессовка полуфабриката и прикатка роликом. При изготовлении изделий больших размеров создаваемого силовой намоткой давления недостаточно для формирования монолитного материала. Дополнительное уплотнение создается различными способами, в частности, опрессовкой после этапа намотки и послойной прикаткой роликом. Процесс уплотнения представляет собой совокупность активного нагружения с разгрузкой; схематически диаграмма нагрузки-разгрузки показана на рис. 7.4. При этом следует различать два случая, когда в процессе нагрузки достигается напряжение выше или ниже σ_r^*, соответствующее точке перелома на кусочно-линейной диаграмме σ_r — ε_r.

Уже из рассмотрения этой диаграммы следует, что создавать радиальные напряжения в изделии, существенно превышающие σ_r^*, нерационально, так как при этом не достигается бо́льшая степень уплотнения, чем при напряжении σ_r^*, зато появляется опасность перехода волокон из области предварительного растяжения в область сжатия, что связано с возникновением искривлений. Если после намотки радиальные напряжения внутри изделия не достигают σ_r^* и прикладывается наружное давление, меньшее или равное — σ_r^*, то в ряде случаев (например, при больших λ) максимальное суммарное радиальное напряжение будет на наружном радиусе. В этом случае процесс нагрузки описывается линейно-упругим вариантом теории с анизотропией λ, а процесс разгрузки — тем же линейным вариантом с анизотропией ω. Давление опрессовки связано с приращением радиальных и окружных напряжений посредством (7.24), (7.25).

Линейная модель опрессовки описывает при больших $p_н$ лишь часть процесса, когда суммарные радиальные напряжения от намотки и опрессовки не превосходят σ_r^*. Но после достижения этого предела характер передачи сил меняется и для ее описания необходимо привлечь нелинейную модель, аналогичную примененной при анализе намотки. Методика расчета процесса намотки в такой постановке включает, по существу, расчет опрессовки, так как намотка от предыдущего наружного радиуса до последующего рассматривалась как способ создания определенного давления на предыдущем радиусе.

Опрессовка — это процесс с повышенной опасностью возникновения искривления. Поэтому кроме расчета степени уплотнения для опрессовки важен расчет окружных напряжений. Максимальное допустимое давление должно быть меньше такого, при котором минимум суммарных окружных напряжений (от намотки и от приложения давления $p_н$) равен нулю. При больших степенях анизотропии λ этот минимум достигается практически всегда на наружном радиусе, где окружные напряжения от намотки равны $\sigma_\theta^0\ (r_н)$. Следовательно, приращение окружных напряжений в этой точке $\max \Delta\sigma_\theta$ от приложения давления не должно превышать $\sigma_\theta^0\,(r_н)$. На рис. 7.19 приведены подсчитанные по линейно-упругой теории зависимости приращений окружных напряжений на наружном радиусе в долях от $p_н k$ и приращений давления на оправку $p_в$ в долях $p_н$ от соотношения b наружного радиуса к внутреннему и от показателя анизотропии $k = \lambda$.

При рассмотрении задачи опрессовки кольца из материала с кусочно-линейной диаграммой σ_r — ε_r наружным давлением необходимо учитывать, что в зависимости от эпюры напряжений после намотки и величины приложенного давления возможны три варианта движения границы $\sigma_r = \sigma_r^*$: от внутреннего радиуса к наружному, от наружного к внутреннему, от наружного и внутреннего одновременно к середине. Два последних случая означают, что окружные напряжения хотя бы в некоторой области — сжимающие, в чем нетрудно убедиться, рассмотрев уравнения равновесия. Следовательно, эти случаи должны быть исключены, что может быть достигнуто только путем применения давления опрессовки, меньшего $\sigma_\theta^0(r_н)/\lambda$. Таким образом, опрессовка наружным давлением имеет практическое значение только для изделий с малой относительной толщиной, намотанных на жесткую оправку, причем изделия, которые будут опрессовываться, надо мотать с максимально возможным усилием натяжения (особенно наружные витки), а опрессовывать давлением не более $\sigma_\theta^0(r_н)/\lambda$.

С целью уплотнения намотанного полуфабриката возможно применение внутреннего давления, создаваемого с помощью оправок специальной конструкции. Давление, прикладываемое при опрессовке, должно быть небольшим, так как внутренние витки сильно растягиваются и могут быть разорваны. В тонкостенных кольцах это связано с тем, что средние окружные напряжения $\bar{\sigma}_\theta = p_в r_в/H_r$ (H_r — толщина кольца) велики, а в толстостенных кольцах при меньших средних окружных напряжениях значительна их неоднородность, в частности, на внутренней поверхности кольца они приближаются к $\sigma_\theta = p_в k$. Кроме того, при разгрузке происходит падение в средних и наружных витках предварительного натяжения ниже уровня, созданного в результате намотки, что увеличивает опасность возникновения искривлений. При применении внутреннего давления дополнительное уплотнение материала происходит в очень ограниченном объеме, основная же часть объема практически не уплотняется.

Комбинирование внутреннего давления с наружным при опрессовке может дать положительный эффект в тонкостенных изделиях, в толстостенных же этот эффект сводится к тому, что вблизи внутренней поверхности получается картина, соответствующая действию только внутреннего давления, а вблизи наружной поверхности — только наружного давления. Существуют способы уплотнения, в которых задаются перемещения, например, с

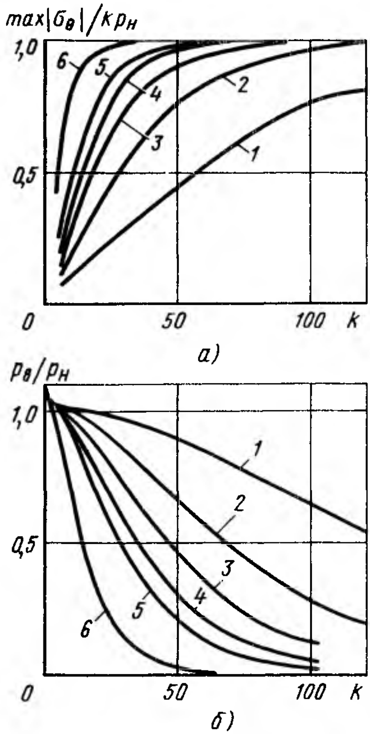


Рис. 7.19. Зависимость максимальных приращений окружных напряжений max $|\sigma_\theta|$ (*а*) и давления на оправку $p_в$ (*б*) при опрессовке кольца, намотанного на жесткую оправку, давлением $p_н$ от показателя анизотропии k при различных значениях b:

кривые *1—6* для b, равного соответственно 1,01; 1,02; 1,03; 1,04; 1,05; 1,1

помощью разжимных и обжимных разъемных оправок

Основные ограничения силовой намотки как эффективного средства управления начальными напряжениями связаны с большой анизотропией полуфабриката. Уплотнение материала при опрессовке ведет к уменьшению анизотропии, поэтому объединение опрессовки с намоткой в один процесс представляется весьма перспективным. В зависимости от периодичности чередования намотки с опрессовкой можно выделить два случая: послойную опрессовку, когда после намотки группы слоев производится опрессовка, а затем возобновляется намотка, и непрерывную опрессовку, когда оба процесса совмещены, при этом опрессовка производится непрерывно наматываемой—сматываемой металлической лентой. Непрерывная опрессовка приводит к тому, что намотка как бы ведется линейно-упругой лентой с анизотропией $k = \omega$, соответствующей второму участку диаграммы σ_r — ε_r (см. рис. 7.4).

Неучет нелинейности может привести лишь к бо́льшей (по сравнению с расчетной) степени уплотнения и к уменьшению реальной опасности возникновения искривлений.

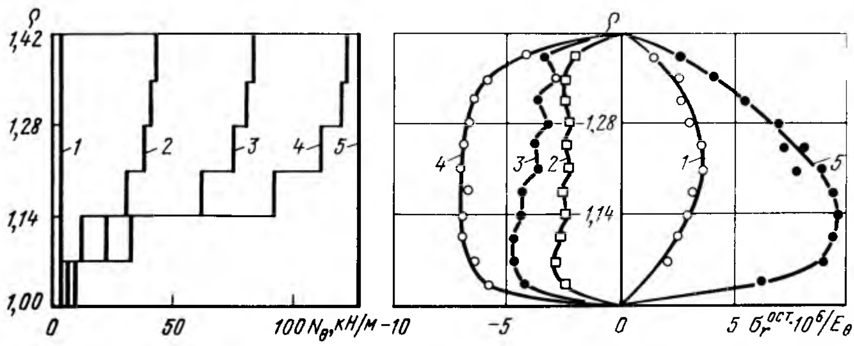
Кроме способов непрерывного осесимметричного уплотнения, при намотке существуют способы локального уплотнения, например прикатка роликом и т. д. Так как давление в зоне контакта практически всегда превышает σ_r^*, то намотка с одновременной прикаткой ведется как линейно-упругая с анизотропией $k = \omega$. Кроме того, большой локальный градиент давления способствует более однородному распределению коэффициента армирования по объему и меньшей релаксации заданного усилия натяжения. Решение контактной задачи, а также эксперимент [4] указывают на слабую зависимость эффектов от радиуса прикатывающего ролика в реальных пределах его изменения. Основными факторами, определяющими процесс намотки с прикаткой роликом, являются усилие натяжения и усилие прижима ролика. Усилие прижима не должно быть слишком большим, чтобы не возникало повреждения арматуры или чрезмерное удаление смолы. Поэтому наилучший результат достигается при убывающей программе изменения усилия прижима ролика с ростом текущего радиуса изделия.

7.6.3. Намотка с послойным отверждением. Основная идея метода — та же, что и в послойной опрессовке — уменьшением податливости намотанных витков добиться меньшей просадки последующих витков и тем самым меньшей потери предварительного натяжения. Достигается уменьшение податливости в послойной намотке частичным или полным отверждением группы намотанных слоев, после чего производится намотка следующей группы слоев. По мере роста числа слоев (ступеней отверждения), на которые разбивается изделие, процесс послойной намотки приближается к некоторому идеализированному предельному процессу, представляющему собой намотку отвержденного материала. Послойную намотку целесообразно совмещать с программированной. Программа изменения натяжения от слоя к слою при большом числе слоев рассчитывается по формуле (7.75), в которую подставляется степень анизотропии k отвержденного материала. Задача оптимизации послойной намотки [22] — компенсация температурных напряжений путем создания на границах слоев (на которые разбивалось все изделие в периодическом процессе) нулевых начальных радиальных напряжений. При достаточно тонких слоях это означает и низкий уровень напряжений σ_r внутри слоев.

Экспериментальные исследования намотки с послойным отверждением показали высокую эффективность данного метода управления начальными напряжениями. Методом послойной намотки удается получать изделия с сжимающими радиальными начальными напряжениями (рис. 7.20), что важно в случаях, когда необходимо избежать растрескивания.

7.6.4. Управление на стадиях полимеризации и охлаждения. К технологическим приемам управления $\sigma_r^{ост}$ и $\sigma_\theta^{ост}$ относят выбор температуры опрессовки, управление скоростью охлаждения, послойное отверждение при переменных температурах, метод температурных градиентов.

Сопоставляя температурную кинетику трансверсальной прочности с кинетикой роста термоупругих напряжений, в некоторых случаях можно выделить температурный интервал, в котором либо прочность ниже значений напряжений, либо их отношение меньше допустимого значения коэффициента запаса прочности [9, 21], тогда как при конечной температуре охлаждения имеется избыточный запас прочности. Для такой



а) б)

Рис. 7.20. Программы (1—5) намотки с послойным отверждением (а) и эпюры начальных радиальных напряжений в кольцах (б), намотанных по соответствующим программам [22]

ситуации предложено проводить опрессовку при критических температурах, с тем чтобы суммарная эпюра напряжений достигла желаемых величин. Снятие же давления опрессовки производится при температурах, когда сумма дополнительных растягивающих (от такого снятия) и термоупругих радиальных напряжений окажется ниже предела прочности с учетом заданного коэффициента запаса прочности.

На основании теоретического изучения процесса релаксации термоупругих напряжений [17] был сделан вывод о том, что, замедляя процесс охлаждения либо проводя его ступенчато с длительной выдержкой на каждой температурной ступени, можно добиться снижения термовязкоупругих напряжений.

Метод послойного отверждения при переменных температурах дополняет метод намотки с послойным отверждением. Он заключается в том, что температура полимеризации для каждого слоя выбирается так, чтобы в результате охлаждения каждого последующего слоя от одной и той же конечной температуры возникал некоторый натяг, частично компенсирующий растягивающие термические напряжения. Очевидно, что при этом температура полимеризации (перепад температур при охлаждении) должна возрастать от внутренних слоев к наружным. Эксперимент показывает, что уровень начальных напряжений при рекомендуемой технологии ниже [24].

Метод температурных градиентов заключается в том, что создавая в процессах полимеризации и охлаждения градиенты температур, можно существенно изменить эпюру напряжений. В частности, в идеализированном случае, когда при однородных упругих и теплофизических характеристиках распределение температур T (r) в кольце описывается выражением

$$T(r) = T(r_{\text{в}})\, \rho^{(\alpha_r/\alpha_\theta - 1)}, \quad (7.77)$$

уравнение совместности деформаций удовлетворяется тождественно и термоупругие напряжения отсутствуют. Разумеется, такая ситуация практически не может быть создана, ибо распределение температур в теле определяется уравнением теплопроводности и не может быть задана произвольно. Величина начального градиента определяется допустимым интервалом температур полимеризации и в толстостенных изделиях не может быть большой. Метод температурных градиентов позволяет отыскать такое сочетание кинетики охлаждения различных поверхностей, при котором напряжения σ_r не превышали бы $\Pi_r^+ n$ (n — коэффициент запаса) и время охлаждения было бы минимальным.

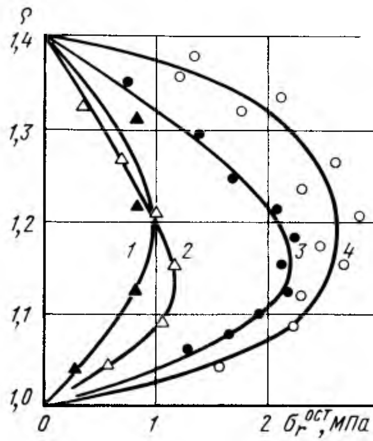


Рис. 7.21. Эпюры начальных радиальных напряжений $\sigma_r^{ост}$ в кольцах из стеклопластика с компенсаторами (*1*, *2*) и без них (*3*, *4*). Структура армирования — продольно-поперечная намотка с разным числом окружных и осевых слоев стеклопластика в повторяющемся элементе: *1*, *3* — $[0^\circ, 90^\circ]_m$, *2*, *4* — $[0^\circ_5, 90^\circ_5]_m$

7.6.5. Укладка арматуры. Управлять начальными напряжениями и исключать опасность возникновения трещин можно путем изменения схемы армирования В зависимости от закона укладки арматуры изменяется не только сопротивление поперечному отрыву, но и эпюры термоупругих напряжений вследствие изменения анизотропии упругих и теплофизических свойств изделия. Различные законы укладки арматуры определяются введением податливых прослоек, дополнительным радиальным армированием, составными конструкциями, методом переменно-угловой намотки.

Из анализа простейшей формулы термических радиальных напряжений [8] следует, что уменьшение E_r сказывается на σ_r гораздо больше, чем соответствующее увеличение k. На этом построен метод снижения температурных напряжений путем введения между группами слоев тонких податливых прослоек [14] (при этом E_θ тоже снижается, так что анизотропия k меняется не столь уж резко). Метод введения термокомпенсационных прослоек равноценен тому, что кольцо разбивается на ряд тонких колец со слабой кинематической связью. Так как снижение толщины кольца резко уменьшает начальные напряжения, то может быть достигнут определенный эффект. На рис. 7.21 приведены эпюры начальных радиальных напряжений в двух кольцах одинаковых размеров, одно из которых содержит прослойки компенсаторов. Таким образом, эксперимент подтверждает вывод теории. Недостатком метода является некоторое снижение несущей способности конструкций (особенно при действии сосредоточенных сил).

Уменьшить отношение между термическими напряжениями и радиальной прочностью можно и в случае, если при изменении схемы армирования рост прочности в радиальном направлении Π_r^+ более существен, чем увеличение модуля упругости E_r. Подобный эффект реализуется при дополнительном радиальном армировании короткими иглами, ориентируемыми по радиусу электростатическим или магнитным полем [13]. Так как воздействие этих полей само по себе улучшает прочностные характеристики, то применение небольших объемных долей игл проводит к существенному росту прочности. Кроме того, уменьшается анизотропия намотанного полуфабриката, что приводит к более благоприятному распределению радиальных напряжений после намотки.

Чтобы на границе раздела между внутренней и наружной частями составного изделия образовывались сжимающие напряжения, нормальные к границе, можно использовать не только полимеризацию их при разной температуре, но и изготовлять эти части из разных композитов, отличающихся температурным коэффициентом линейного расширения α_θ [6, 11].

Радиальные термоупругие напряжения могут равняться нулю не только при идеализированном неоднородном температурном поле, при котором термические деформации удовлетворяют уравнению совместности деформаций (7.3), но и при однородном изменении температуры, если в цилиндрическом ортотропном кольце коэффициенты линейного расширения α_r и α_θ меняются по радиусу так, чтобы удовлетворялось это уравнение.

В работе [2] предложено требуемое изменение температурных коэффициентов линейного расширения осуществлять за счет легко реализуемого технологически изменения угла намотки $\varphi(r)$ по радиусу наматываемого изделия. Считая α_r и α_θ функциями от угла намотки φ (угла между окружной координатой и одним из направлений симметричной укладки), уравнение совместности деформаций (7.3) можно для $\Delta T = \text{const}$ переписать в виде

$$\alpha_r(\varphi) - \alpha_\theta(\varphi) = r\,\frac{d\alpha_\theta(\varphi)}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dr}. \tag{7.78}$$

Для монотонно возрастающей зависимости $\alpha_\theta(\varphi)$, используя начальное условие при $\rho = 1$, $\varphi = \varphi_\text{в}$, можно получить

$$\rho = \exp\left\{\int_{\varphi_\text{в}}^{\varphi}\frac{d\alpha_\theta}{dy}\,\frac{1}{[\alpha_r(\varphi) - \varphi_\theta(\varphi)]}\,dy\right\}. \tag{7.79}$$

Эта формула определяет функцию $r(\varphi)$, обратную искомой $\varphi(r)$.

Численный анализ показывает, что намотку в этом случае следует вести с возрастающим углом намотки φ по мере роста толщины. В ряде случаев зависимость $\alpha_\theta(\varphi)$ имеет минимум. Тогда есть различные варианты того, как вести намотку, чтобы избежать термоупругих напряжений при охлаждении. Можно вести намотку с убывающим углом φ по мере роста толщины, если φ меняется в диапазоне $0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_{\min}$, и с возрастающим углом φ укладки по толщине, если φ меняется в диапазоне $\varphi_{\min} < \varphi < \frac{\pi}{2}$,

7.1. Методы управления начальными напряжениями в намоточных изделиях

Метод	Технологическая реализация
Силовой	Программированная намотка Опрессовка и прикатка роликами в процессе намотки и после нее
Химико-технологический	Отверждение в режиме распространения фронта реакции Отверждение в неоднородном температурном поле Варьирование рецептуры связующего по толщине изделия Промежуточное непрерывное или периодическое (послойное) отверждение при намотке
Управление физическими полями	Метод температурных градиентов Воздействие электромагнитными полями при отверждении
Управление схемой армирования	Дополнительное радиальное армирование Введение термокомпенсационных прослоек Изменение коэффициента армирования Применение гибридных композитов Создание искусственной неоднородности Создание составных конструкций

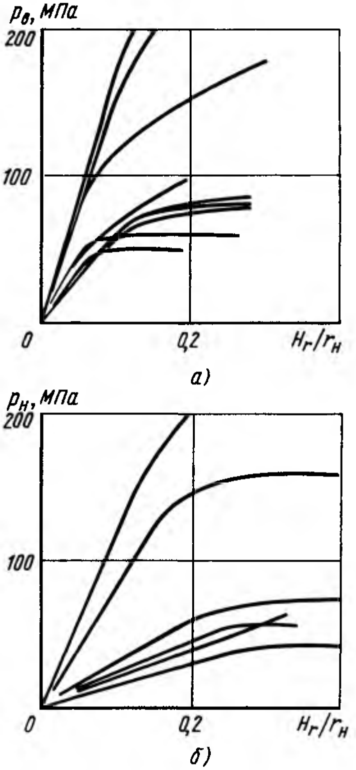


Рис. 7.22. Зависимости разрушающего внутреннего (*а*) и наружного (*б*) давления от относительной толщины колец из различных стеклопластиков

где $\varphi_{\min}$ — угол, соответствующий минимальному значению температурного коэффициента линейного расширения α_θ в окружном направлении. Возможно и сочетание, когда часть цилиндра наматывается с убывающим углом φ, затем угол скачком меняется так, чтобы при этом не изменялось значение α_θ, и далее намотка продолжается с возрастающим углом φ по толщине. Эта свобода выбора угловой программы намотки позволяет одновременно управлять несущей способностью изделия при заданной схеме нагружения.

Кроме перечисленных методов управления начальными напряжениями, существует еще несколько методов, суть которых близка к перечисленным, но имеется отличие в способах создания либо неоднородности полей переменных, либо управления анизотропией свойств композитов и их полуфабрикатов, либо силового воздействия в процессе изготовления изделий (табл. 7.1).

7.7. НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ПРИ НАГРУЖЕНИИ ДАВЛЕНИЕМ

7.7.1. О понятии толстостенности. Из уравнения равновесия (7.1) цилиндрического элемента следует формула для средних окружных напряжений

$$\bar{\sigma}_\theta = \frac{p_в r_в - p_н r_н}{r_н - r_в} + \frac{1}{3}\gamma\omega^2 \times \times (r_в^2 + r_в r_н + r_н^2). \qquad (7.80)$$

Для разрушающего внутреннего давления, приложенного к тонкостенному цилиндрическому элементу, из (7.80) следует классическая инженерная формула

$$p_в^{\max} = \Pi_\theta^+ \frac{H_r}{r_в}. \qquad (7.81)$$

Однако для изделий из композитов необходимо особо оговорить пределы применимости этой формулы. Эксперименты показывают (рис. 7.22, *а*), что уже при толщине стенки, составляющей несколько сотых долей от внутреннего радиуса (т. е. для элементов конструкций, традиционно относящихся к тонкостенным), нарушается пропорциональность роста разрушающего давления с толщиной, а затем этот рост и вовсе прекращается. Аналогичная картина (с несколькими оговорками) наблюдается и при наружном давлении (рис. 7.22, *б*). Существуют, по крайней мере, две причины, приводящие к этой аномалии.

Во-первых, формула (7.81) получена из формулы (7.80) в предположении, вполне естественном для тонкостенных элементов конструкций, что напряжения σ_θ в поперечном сечении незначительно уклоняется от их среднего интегрального значения $\bar{\sigma}_\theta$. Однако анизотропия деформативных свойств композитов вносит в это предположение свои коррективы. Для однородного линейно-упругого кольца из (7.15) и (7.1) или из (7.21) нетрудно получить соотношение

$$\frac{d\sigma_\theta}{dr} = \frac{\overset{2}{k}\sigma_r - \sigma_\theta}{r}, \qquad (7.82)$$

откуда следует, что неоднородность распределения напряжений по сечению увеличивается с толщиной и что анизотропия деформативных свойств усиливает эту неоднородность в случае внутреннего давления и ослабляет ее в случае наружного давления. При малой степени анизотропии ($k \sim 1$) из формулы (7.82) следует, что относительная погрешность в определении напряжений, а следовательно, относительная погрешность формулы (7.81) равна $H_r/r_в$ (аналогичная оценка возникает и в задачах изгиба элементов конструкций из материалов со слабой анизотропией). Отсюда следует распространенное инженерное правило, что при допустимой 10%-ной погрешности тонкостенными считают элементы конструкций с $H_r/r_в \leqslant 0{,}1$. Таким образом, для внутреннего давления изделия с относительной толщиной стенки $H_r/r_в$, сопоставимой с величиной $E_r/E_в$, не могут считаться тонкостенными.

Во-вторых, переход от (7.80) к (7.81) возможен, если в критерии прочности поправки, связанные с влиянием радиального напряжения, малы. Для композитов вопрос о критериях прочности остается в значительной степени все еще открытым. Но каков бы ни был этот критерий, в него применительно к данной задаче обязательно войдут величины $\sigma_\theta/\Pi_\theta^+$ (или $\sigma_\theta/\Pi_\theta^-$) и σ_r/Π_r^-, где $\Pi_i^\pm$ — прочности на одноосное растяжение (+) или сжатие (—) при нагружении в i-м направлении. Критерии, по существу, будут в данном случае отличаться только способом учета указанных безразмерных величин, например степенями, в которые они возводятся, и наличием тех или иных членов, отражающих совместное влияние σ_r и σ_θ. Но в любом случае соизмеримость величин $\sigma_\theta/\Pi_\theta^+$ и σ_r/Π_r^- указывает на неправомерность перехода от (7.80) к (7.81). Отсюда следует, что изделия с относительной толщиной стенки $H_r/r_в$,

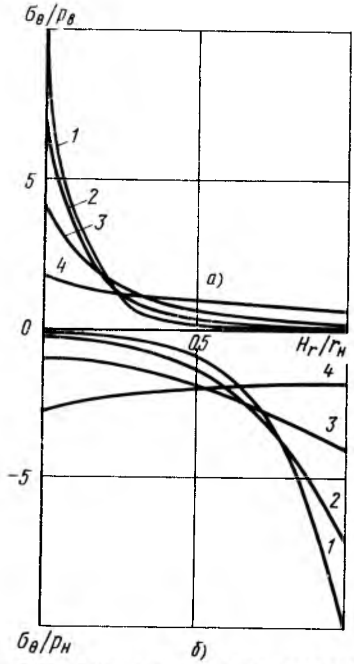


Рис. 7.23. Эпюры окружных напряжений σ_θ при действии внутреннего (*а*) или наружного (*б*) давления:

кривые *1—4* для k, равных соответственно 1; 4; 7; 10

сопоставимой с величинами $|\Pi_r^-/\Pi_\theta^+|$, не могут относиться к тонкостенным. Дальнейшее уточнение критерия тонкостенности требует, очевидно, более детального анализа распределения напряжений и углубления в механизмы разрушения и критерии прочности.

7.7.2. Анализ напряжений. Зависимости, необходимые для расчета полей напряжений, а также описания схем построения численных алгоритмов приведены в разд. 7.2. Рассмотрим некоторые результаты расчетов. На рис. 7.23 приведены эпюры окружных напряжений в кольцах при действии внутреннего и наружного давлений. При неограниченной толщине кольца (цилиндра) из формул (7.21), (7.22) следует предельная оценка окружных напряжений

$$|\sigma_\theta| = pk, \qquad (7.83)$$

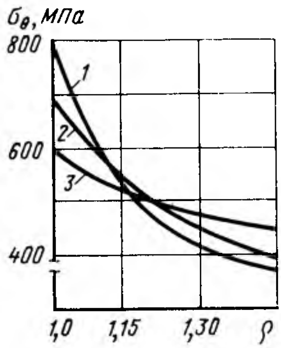


Рис. 7.24. Эпюры окружных напряжений σ_θ в кольцах линейно-упругих (2), с нелинейностью только в радиальном направлении (1), в радиальном и окружном направлениях (3). Константы материала:

$S_{rr} = 0{,}06$ ГПа$^{-1}$, $S_{\theta\theta} = 0{,}014$ ГПа$^{-1}$, $S_{rrrr} = 2{,}4$ ГПа$^{-3}$, $S_{\theta\theta\theta\theta} = 0{,}04$ ГПа$^{-3}$

действующих в точке приложения давления (внутреннего или наружного). Эти предельные значения практически достигаются при весьма умеренных толщинах (см. рис. 7.23). В случае внутреннего давления указанные в (7.83) напряжения являются максимальными. При наружном давлении в зависимости от степени анизотропии k наибольшие по абсолютной величине значения σ_θ могут достигаться либо на внутреннем, либо на наружном радиусе. При $k < 1$ и неограниченной толщине кольца на внутреннем радиусе окружные напряжения при действии наружного давления стремятся к бесконечности.

Нелинейность композитов в радиальном направлении усиливает анизотропию деформативности, вследствие чего на радиусе приложения давления окружные напряжения резко возрастают по абсолютной величине (рис. 7.24). Это может стать одной из причин раннего прекращения роста разрушающего давления с толщиной. С помощью подбора рецептуры полимерной матрицы, а также путем перехода к перекрестной укладке можно уменьшить радиальную нелинейность и связанные с ней отрицательные последствия. Расчеты показывают, что незначительная нелинейность диаграммы $\sigma_\theta - \varepsilon_\theta$ приводит к существенному выравниванию эпюры окружных напряжений по сечению и полной компенсации влияния нелинейности в радиальном направлении. Для инженерной оценки влияния нелинейной ползучести на распределение напряжений в цилиндрах из композитов можно рекомендовать «вилку» между результатами расчетов в нелинейно-упругой постановке с использованием мгновенной диаграммы деформирования и экстраполированной изохроны ползучести, отвечающей $t \to \infty$.

7.7.3. Особенности разрушения. В зависимости от характера критерия прочности (рис. 7.25) возможно как прекращение роста разрушающего давления с толщиной, так и снижение его после некоторой оптимальной толщины. Характер разрушения, наблюдающийся в эксперименте, различен: при внутреннем давлении тонкостенные кольца разрушаются так же, как и плоские образцы, испытываемые на растяжение; толстостенные кольца разрушаются по характерной плоскости среза под некоторым углом к оси θ. При наружном давлении у толстотенных колец наблюдается аналогичная плоскость кооперативной потери устойчивости волокон.

К альтернативным вариантам исчерпания несущей способности относятся: потеря устойчивости тонкостенными кольцами при наружном давлении, разрушение «размоткой», связанное с особенностями напряженного состояния первого и последнего витков, разрушение путем отщелкивания внутреннего слоя при наружном давлении, неограниченная ползучесть кольца при внутреннем давлении вследствие межслойной сдвиговой ползучести в спиральной прослойке связующего.

7.7.4. Методы управления несущей способностью. Воздействуя тем или иным способом на распределение полей напряжений и сопротивлений, можно добиться увеличения несущей способности либо снижения массы элемента конструкции. Общие тенденции всех методов управления направлены на снижение анизотропии деформативных свойств, повышение радиальной прочности и создание

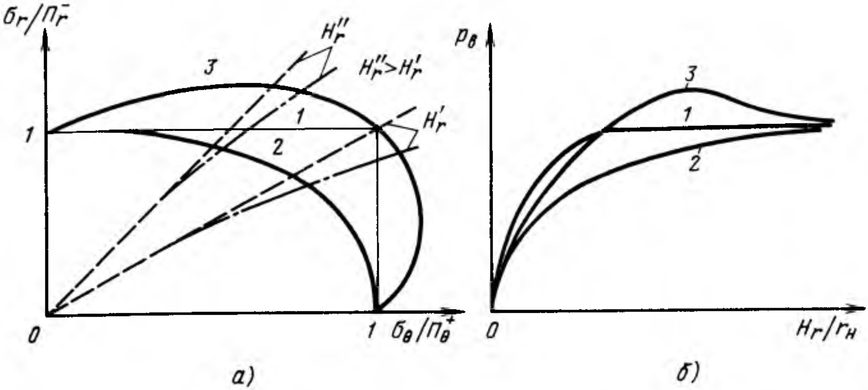


Рис. 7.25. Взаимосвязь между видом (1—3) критерия прочности (а) и зависимостью разрушающего внутреннего давления $p_в$ (б) от толщины колец H_r [пути нагружения подсчитаны по линейно-упругой (— — —) и нелинейно-упругой (— — —) теориям]

ственной неоднородности (с целью более равномерного перераспределения по объему элемента конструкции соотношения между напряженным состоянием и сопротивлением материала).

Для волокнистых композитов характерны две их высокие прочностные характеристики: прочности при одноосном растяжении $П_1^+$ и сжатии $П_1^-$ вдоль волокон. На их использовании построена вся стратегия управления схемой армирования в тонкостенных элементах конструкций. Однако волокнистые однонаправленные композиты имеют еще одну не менее высокую прочностную характеристику — прочность при двухосном симметричном поперечном сжатии. В этом случае исключается сдвиг по слабым плоскостям, параллельным волокнам, а плоскость разрушения обязательно пересекает волокна. Аналогичная картина возникает и при сжатии поперек плоскости укладки перекрестно-армированных материалов, а также тканых материалов. На использовании указанных особенностей построены многие методы управления несущей способностью толстостенных изделий из композитов.

Для тонкостенных колец вплоть до значений их толщин и давлений, при которых нарушается соотношение (7.81), целесообразно использовать окружную намотку однонаправленным материалом максимальной прочности. Это обеспечивает наибольшую надежность и наименьшую массу конструкции. При дальнейшем росте толщины или давления следует воспользоваться одним из следующих методов.

Можно перейти от окружной намотки к продольно-поперечной намотке того же материала, подбирая оптимальное соотношение между числом слоев, укладываемых в осевом направлении и по окружности [12]. Можно перейти от окружной к симметричной косоугольной ($\pm\varphi$) намотке, подбирая наилучшим образом угол φ между соседними слоями волокон.

Можно заменить однонаправленный материал на тканый или подматывать тканый материал между слоями однонаправленного. При этих методах одновременно повышается сопротивление поперечному сжатию и снижается анизотропия упругих свойств, а следовательно, и выравниваются эпюры окружных напряжений по сечению. Падение же окружной прочности компенсируется снижением уровня окружных напряжений за счет толщины, поскольку при этих трех методах расширяется диапазон толщин, в котором применима формула (7.81). Максимальное разрушающее давление достигается в цилиндрах с одинаковым числом окружных и осевых слоев, чередующихся между собой [12] или же в цилиндрах с углами перекрестной намотки $\pm45°$.

Еще больших значений разрушающего внутреннего давления можно достичь в трансверсально изотропных цилиндрах со звездной укладкой арматуры, поскольку, как показывают расчеты, в этом случае обеспечивается максимальная прочность при поперечном сжатии. Подчеркнем на примере приведенных методов различие в стратегии управления несущей способностью тонкостенных и толстостенных изделий; с точки зрения традиционного приема оптимизации тонкостенных оболочек указанные методы выглядят бессмысленными — ведь арматура «забирается» из направления действия одного из главных напряжений и перераспределяется в направлении, где нет главных напряжений. Тем не менее эти приемы позволяют поднять допустимый уровень внутреннего давления в несколько раз.

Другим направлением в развитии методов управления несущей способностью толстостенных конструкций является перераспределение части арматуры в радиальное направление. Среди этих методов можно выделить применение пространственно-армированных материалов (тканых и нетканых), дополнительное радиальное армирование короткими иглами, ориентируемыми в электростатическом или магнитном поле [13]. В любом из этих приемов происходит снижение объемного коэффициента армирования в окружном направлении, снижается анизотропия упругих и прочностных свойств, повышается прочность в радиальном направлении. Однако эти методы несколько менее технологигичны.

Прочность в радиальном направлении можно также несколько повысить за счет подбора рецептуры матрицы, ее наполнения, обработки материала физическими полями (электроманитное поле, ультразвук и т. д.).

Важным направлением в снижении толщины изделий является применение неоднородных материалов. Так, например, при внутреннем давлении внутренние витки находятся под действием больших радиальных напряжений и больших окружных напряжений. Наружные витки работают под меньшим внутренним давлением. Если изготовить наружную половину витков из материала с большей окружной жесткостью, то того давления, которое наружная половина витков оказывает на внутреннюю половину витков, можно достичь при меньшей толщине наружной части цилиндра и меньшей общей массе конструкции. Эта идея реализуется в различных конструкционных решениях: изготовлении цилиндров из двух композитов (стеклопластик—углепластик) или из одного композита, с двумя схемами укладки арматуры (внутренний цилиндр звездной укладки обматывается окружной намоткой) или с изменяющимся непрерывным образом углом перекрестной намотки и постепенным переходом к окружной намотке наружных слоев. Методы повышения несущей способности приведены в табл. 7.2.

Осесимметричные намоточные изделия предназначены, в первую очередь, для работы при осесимметричных нагрузках. Помимо давления и осевой силы это могут быть нагрузки, вызванные действием осесиметричных физических полей: температуры, электромагнитного поля, ионизирующего излучения и т. д.

При различных схемах нагружения по-разному сказывается влияние системы начальных напряжений и обусловленных ею дефектов на эксплуатационные характеристики изделий. Так, например, кольцевые трещины от начальных напряжений недопустимы при действии центробежных сил, тепловых нагрузок, ионизирующего излучения; трещины резко (на несколько десятков процентов) снижают сопротивление действию сосредоточенных сил и наружного давления, незначительно влияют на сопротивление внутреннему давлению. Управляя эпюрами начальных напряжений, можно в ряде случаев существенно влиять на несущую способность. Например, создавая сочетанием послойного отверждения с программированной намоткой сжимающую эпюру радиальных напряжений, можно существенно повысить энергоемкость вращающихся дисков.

Таким образом, можно сделать общий вывод о том, что для элеме

7.2. Методы управления несущей способностью колец и цилиндров из композитов

Методы	Способ реализации
Технологические	Устранение технологических дефектов Предотвращение специфических видов разрушения
Силовые	Создание системы предварительных напряжений
Выбор матрицы	Повышение модуля упругости Снижение нелинейности Повышение прочности при растяжении и адгезионной прочности Повышение модуля межслойного сдвига Повышение прочности при межслойном сдвиге
Выбор волокон	Повышение продольной прочности Повышение нелинейности
Управление укладкой арматуры: в плоскости r—θ	Радиальное армирование короткими волокнами и иглами Введение прямолинейной арматуры в радиальном направлении Пространственно-сшитые материалы
в плоскости θ—z	Звездная укладка Продольно-поперечная намотка Косоугольное симметричное армирование Применение тканых материалов и комбинирование тканых и однонаправленных материалов
Комбинированные и сложные укладки арматуры	Применение гибридных композитов Создание искусственной неоднородности Создание составных конструкций

конструкций из композитов, изготавливаемых методом намотки, необходимо соединить стадии проектного и технологического расчетов.

Список литературы

1. **Бейль А. И., Мансуров А. Р., Портнов Г. Г.** и др. Модели для силового анализа намотки композитов//Механика композитных материалов. 1983. № 2. С. 303—313.

2. **Бейль А. И., Портнов Г. Г., Санина И. В.** и др. Устранение начальных термических напряжений в намоточных изделиях из композитов изменением угла намотки по толщине//Механика композитных материалов. 1980. № 6. С. 1068—1075.

3. **Бидерман В. Л., Димитриенко И. П., Поляков В. И.** и др. Определение остаточных напряжений при изготовлении колец из стеклопластика//Механика полимеров. 1965. № 5. С. 892—898.

4. **Благонадежин В. Л., Мезенцев Н. С.** Экспериментальное исследование влияния технологического фактора прикатки на физико-механические свойства стеклопластика//Механика полимеров. 1976. № 6. С. 1043—1047.

5. **Благонадежин В. Л., Мишенков Г. В., Перевозчиков В. Г.** Исследование давления на оправку в процессе изготовления намоточных изделий методом тензометрической оправки//Тр. Московского энергетического института. 1970. Вып. 74. С. 133—138.

6. Благонадежин В. Л., Перевозчиков В. Г., Меркулов В. Д. и др. Механические свойства углепластика и остаточные напряжения в намоточных изделиях из комбинированных композитов//Механика полимеров. 1975. № 6. С. 996—1004.
7. Болотин В. В. К теории вязкоупругости для структурно-неустойчивых материалов//Тр. Московского энергетического института. 1972. Вып. 101. С. 7—14.
8. Болотин В. В., Болотина К. С. Термоупругая задача для кругового цилиндра из армированного слоистого материала//Механика полимеров. 1967. № 1. С. 136—141.
9. Болотин В. В., Болотина К. С. Технологические напряжения и трансверсальная прочность армированных пластиков//Прочность материалов и конструкций. Киев: Техника. 1975. С. 231—239.
10. Варушкин Е. М., Поляков В. И., Лапин Ю. Л. Экспериментальное исследование влияния технологических параметров на остаточные напряжения в толстостенных намоточных изделиях//Механика полимеров. 1972. № 1. С. 75—80.
11. Димитриенко И. П., Филипенко А. А., Протасов В. Д. Исследование оптимальных схем армирования цилиндрических стеклопластиковых оболочек при действии температурного поля//Механика полимеров. 1976. № 4. С. 681—686.
12. Жмудь Н. П., Панфилов Н. А. Влияние схемы армирования на механические характеристики и несущую способность колец ППН//Технология судостроения. 1977. Вып. I. С. 70—75.
13. Жмудь Н. П., Петров В. Ю., Шалыгин В. Н. Слоистые кольца из стеклопластиков с дополнительным армированием стальными иглами//Механика полимеров. 1978. № 2. С. 226—230.
14. Инденбаум В. М. Расчет остаточных напряжений в многослойных цилиндрах из комбинированных композитов//Тр. Московского энергетического института. 1973. Вып. 164. С. 81—86.
15. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1957. 463 с.
16. Лехницкий С. Г. Теория упругости. М.: Наука, 1977. 416 с.
17. Огилько Т. Ф. Влияние режима охлаждения на усадочные напряжения в цилиндрических оболочках из стеклопластиков//Механика полимеров. 1974. № 5. С. 949—951.
18. Портнов Г. Г., Бейль А. И. Модель для учета нелинейных свойств полуфабриката при силовом анализе намотки композитов//Механика полимеров. 1977. № 2. С. 231—240.
19. Портнов Г. Г., Горюшкин В. А., Тилюк А. Г. Начальные напряжения в кольцах из стеклопластика, изготовленных намоткой//Механика полимеров. 1969. № 3. С. 505—511.
20. Портнов Г. Г., Спридзанс Ю. Б. Намотка колец из стеклопластика с изменением усилия натяжения по программе//Механика полимеров. 1971. № 2. С. 361—364.
21. Работнов Ю. Н., Екельчик В. С. Об одном способе предотвращения трещин при термообработке толстостенных оболочек из стеклопластика//Механика полимеров. 1975. № 6. С. 1095—1098.
22. Тарнопольский Ю. М., Портнов Г. Г., Спридзанс Ю. Б. Компенсации температурных напряжений в изделиях из стеклопластика методом послойной намотки//Механика полимеров. 1972. № 4. С. 640—645.
23. Тарнопольский Ю. М., Портнов Г. Г., Спридзанс Ю. Б. и др. Несущая способность колец, образованных намоткой композитов, армированных высокомодульными анизотропными волокнами//Механика полимеров. 1973. № 4. С. 673—683.
24. Шалыгин В. Н., Наумов В. Н. Метод регулирования технологических температурных напряжений в толстостенных оболочках из стеклопластиков//Сб. трудов Пермского политехн. ин-та. 1973. № 127. С. 127—135.
25. Reddy T. Y., Srinath H. Elastic Stress in a Rotating Anisotropic Annular Disk of Variable Thickness and Variable Density//Intern. Journ. Mechan. Sci., 1974. Vol. 16. N 2. P. 85—89.
26. Tang R. C., Adams S. F. Stress in a Rotating Cylinder and Variable Thickness Disk of Anisotropic Materials//Journal of Composite Materials. 1970. Vol. 4. P. 419—421.

Глава 8

СОЕДИНЕНИЕ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ КОМПОЗИТОВ

Процесс изготовления конструкций с применением композитов состоит из операций, содержанием которых является соединение различных элементов (листов, профилей, балок, стержней, панелей, отсеков и т. д.) в узлы и агрегаты. Соединение элементов — одна из важнейших проблем при создании конструкций из композитов вследствие специфических свойств этих материалов. Существенные отличия физико-механических свойств композитов от аналогичных свойств традиционных металлов и сплавов (в частности, резкая анизотропия упругих и прочностных свойств, гетерогенность структуры, низкая межслоевая прочность и т. д.) обусловили тот факт, что эти материалы хуже, чем металлы, приспособлены к пере усилий (особенно сосредоточенных) с одного элемента на другой [2, 4].

Прочность наиболее распространенных (клепаных, болтовых, резьбовых) соединений металлических элементов значительно превосходят прочность аналогичных соединений конструкций из композитов. Из-за невысокой прочности на смятие и срез может быть сведен на «нет» весь выигрыш в массе от применения в конструкции композитов. Если для металлов соотношение характеристик прочности при растяжении $\sigma_в$, смятии $\sigma_{см}$ и срезе $\tau_{ср}$ составляет соответственно 1,0; 1,3; 0,7, то для композитов однонаправленной структуры оно равно 1,0 : 0,4 : 0,15.

Малое относительное удлинение ряда композитов (например, для углепластиков $\bar{\varepsilon} = 0{,}5 \div 1{,}5\%$) может привести к местному локальному разрушению композита уже в процессе клепки. Слоистость структуры композитов приводит к перегрузке прилегающих к клеевым швам слоев и часто вызывает их отрыв или расслоение.

Для полимерных композитов специфической проблемой является сохранение плотности стыка и обеспечение стабильности затяжки болтовых соединений из-за ползучести и релаксации напряжений в соединении.

Эти и другие особенности следует учитывать при проектировании и выборе вида соединений и оценке их прочности.

Конструктивное оформление соединений композитных элементов отличается большим разнообразием и зависит как от назначения и предъявляемых требований, так и от технологических операций, с помощью которых они выполняются.

Каждое соединение обладает своими особенностями, преимуществами и недостатками и выбор того или иного из них при проектировании изделий зависит от ряда факторов — характера и величины нагрузки, размеров деталей, физико-механических свойств материалов, условий эксплуатации, стоимости, технологической реализуемости, а также от специальных требований, например, по герметичности.

Условно факторы, определяющие конструктивно-технологический облик проектируемого соединения, можно объединить в три группы: эксплуатационные, технологические и конструктивные. Взаимосвязь перечисленных факторов требует комплексного подхода к проблеме проектирования соединений композитов и необходимости вести этот процесс одновременно с процессом проектирования всей конструкции.

Любую конструкцию можно рассматривать как комбинацию листов, балок, стержней, оболочек, труб и других элементов, соединенных воедино. Комбинируя эти элементы, можно получить большое количество различных по геометрии соединений. Их можно свести к нескольким основным видам: стыковым, нахлесточным и угловым. В конструкциях из композитов соединительные узлы могут быть образованы с применением как одного из перечисленных видов соединений, так и их комбинации.

Элементы, образующие агрегат или изделие, могут быть соединены между собой с помощью клеевой прослойки, механического крепежа (болтов, заклепок и т. д.), выступов и углублений, имеющихся на поверхностях соединяемых деталей (например, резьбовые и клиновые соединения), а также сочетанием названных соединительных элементов (например, клей совместно с болтами, заклепками, резьбой).

Особую группу составляют соединения, образуемые непосредственно в в процессе формования композитных изделий. В качестве примера можно привести соединения фланцев, фитингов, окантовок с такими композитными деталями, как баллоны давления, стержни, трубы.

8.1. ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СОЕДИНЕНИЙ

Выбор и обоснование целевой функции, с помощью которой возможно оценивать эффективность различных видов соединений, представляют известные трудности ввиду многоплановости задачи.

Используются различные показатели качества: теоретический $k_т$ и эффективный $k_{эф}$ коэффициенты кон...

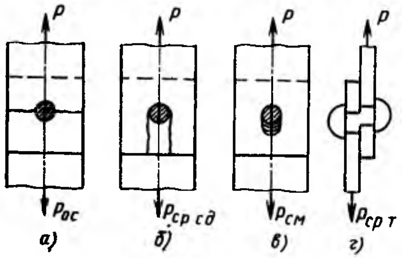


Рис. 8.1. Формы разрушения механических соединений композитных элементов:
а — разрушение по ослабленному сечению; *б* — срез—сдвиг композита; *в* — смятие композита; *г* — срез «силовой точки»

ции напряжений, коэффициенты прочности шва $\varphi_{шв}$, приведенные затраты. Наиболее общую оценку эффективности соединений проводят с помощью экспертных «балльных» оценок [2]. Их применение, эффективное лишь на самой ранней стадии выбора видов соединений, не позволяет сделать точный количественный анализ.

В практической реализации процедуры выбора вида соединений КМ и определения их оптимальных параметров наиболее целесообразным является применение методики, основанной на использовании экспериментально-теоретических подходов.

На первом этапе определяются экспериментально основные константы прочности композитов на смятие $\sigma_{см\alpha}$, срез $\tau_{ср\alpha}$ и разрыв $\sigma_{в\alpha}$ с учетом направления действия внешней нагрузки по отношению к осям симметрии упругих характеристик материала.

На втором этапе проводится теоретический анализ распределения нанагрузок и напряжений в соединении и выполняется процедура выбора оптимальных параметров соединений, исходя из условия равнопрочности (рис. 8.1). Так как условие равнопрочности соединения

$$P_с = P_{о.с} = P_{см} = P_{ср} = P_{ср.т} \tag{8.1}$$

(где $P_{о\cdot с}$, $P_{см}$, $P_{ср}$, $P_{ср\cdot т}$—нагрузки, разрушающие образец соответственно по ослабленному сечению, в результате смятия, среза и среза силовой точки) реализуется неоднозначно, то для выбора наилучшего варианта необходимо задавать целевую функцию и искать ее экспериментальное значение.

Для наиболее распространенных видов соединений клеевых, клее-клепаных, клепаных, болтовых и штифтоболтовых в качестве целевой функции целесообразно принять функцию

$$k_{эф}(W_s) = \frac{\psi(W_s)\,F_М}{\dfrac{\bar n_{cs}}{\bar n_{с.\,М}}\,G_{cs} + C_{пр.\,s}(\eta \bar N_Г)^{-1}} \to \max. \tag{8.2}$$

Здесь $\psi(W_s)$ — коэффициент прочности s-го вида соединения; $\psi(W_s) = P_с/P_{КМ}$ ($P_с$ — прочность соединения; $P_{КМ}$ — прочность материала); G_{cs} — увеличение массы конструкций от соединения; $C_{пр\,s} = C_{тs} + E_н k_s$ — приведенные затраты на выполнение всего объема s-вида соединения ($C_{тs}$ — технологическая себестоимость; k_s— капитальные затраты на оборудование для выполнения s-вида соединения; $E_н = 0{,}12 \div 0{,}15$ — нормативный коэффициент эффективности капитальных затрат); $\bar n_{cs}$ — среднее значение коэффициента запаса прочности соединения; $\bar n_{с.\,М}$— среднее значение коэффициента запаса прочности для материала; η — коэффициент, учитывающий стоимость увеличения массы конструкции на 1 кг, руб/кг; $\bar N_г = \sum\limits_{1}^{k} G_{cs}/G_{cs}$ — относительный годовой объем выполнения соединений s-вида для всех конструкций (k — количество конструкций с s-видом соединений); $F_М$ — коэффициент, учитывающий масштабный фактор при переходе от расчета прочности образца к прочности всех соединений s-го вида конструкции:

$$F_М = \left(1 - \frac{\sigma_n}{\sigma_1}\right)\left(\frac{F_s}{\hat F_s}\right)^{\frac{1}{m}} + \frac{\sigma_n}{\sigma_1} < 1,$$

где $\sigma_п$ и m — параметры распределения Вейбулла, полученные при пытании образцов; σ_1 — предел прочности образца соединения на разрыв; $\widehat{F}_s$ — площадь зоны соединения образца; F_s — площадь зоны соединения всей конструкции.

С учетом введенной целевой функции (8.2) и условия равнопрочности соединения (8.1) на разрыв по ослабленному сечению $P_{о.с}$, прочности на смятие $P_{см}$, прочности на срез композита $P_{ср}$ и прочности на срез силовой точки $P_{ср.т}$, выраженные через геометрические и физико-механические параметры соединения, формируется неполная система уравнений для определения методом последовательных приближений оптимальных параметров соединений:

$$k_{эф}(\widehat{W}_s) = \frac{\psi(\widehat{W}_s)F_M}{\dfrac{\bar{n}_{cs}}{\bar{n}_M \cdot 1000d}\left\{\bar{t}\bar{c}(i+1)(\gamma_\alpha + \bar{\omega}\gamma_\alpha) - \dfrac{i\pi}{4}(\gamma_\alpha - \gamma) \times (1+\bar{\omega})]\right\} d^3 + 0{,}001 d^3 \gamma_{с.т} i + \dfrac{C_{пр\, s}\overline{N}_г^{-1}}{\eta}};$$

$$\bar{t} = 1 + i\frac{\sigma_{см\,\alpha}(1+\bar{\omega})}{\dfrac{\psi(\hat{W}_s)}{k_\alpha}\sigma_{в\alpha} + \bar{\omega}\dfrac{\sigma_{в\alpha}}{k_\alpha k_e}};$$

$$\bar{d} = \frac{4\psi(W_s)\sigma_{в\alpha}}{\pi\tau_{ср.т}}\,\frac{\bar{t}}{i};$$

$$\bar{c} = \frac{\psi(\hat{W}_s)\sigma_{в\alpha}k_e k_i}{2\tau_{ср\,\alpha}(1+\omega)}\,\frac{\bar{t}}{i} + 0{,}5;$$

$$\bar{\omega} = \psi(\hat{W}_s)\frac{\sigma_{в\alpha}}{\sigma_{см\,\alpha}} \mp \frac{k_i k_e}{i} - 1.$$

В этом случае $\bar{t} = t/d$; $\bar{d} = d/\delta$; $\bar{c} = c/d$; $\bar{\omega} = \delta_у/\delta$; t, d, c, δ, i — соответственно геометрические параметры — шаг, диаметр, расстояние до кромки, толщина и количество рядов; $\sigma_{в\alpha}$, $\sigma_{см\alpha}$, $\tau_{ср\alpha}$, $\tau_{ср.т}$ — константы прочности в направлениях α соответственно на разрыв, смятие, срез-сдвиг КМ и срез силовой точки соответственно; $\bar{\omega}$ — степень утолщения (усиления) краевой зоны; k_e, k_i, k_α — коэффициенты, учитывающие эксцентриситет приложения нагрузки e, неравномерность загрузки точек и концентрацию напряжений около отверстия; γ_α, $\gamma_{с.т}$ — удельная плотность соединяемого материала и силовой точки; $\psi(\widehat{W}_s)$ — коэффициент прочности образца.

Эффективность предлагаемой методики расчета оптимальных параметров соединений и выбора наилучшего вида соединений рассмотрим на примере болтовых и заклепочных соединений конструкций из углепластика.

На рис. 8.2 представлены результаты расчета по предлагаемому алгоритму. В зависимости от механических свойств КМ и крепежных элементов оптимальные параметры соединений меняются.

В рассмотренных примерах наибольшей эффективностью обладают заклепочные и болтозаклепочные соединения. Данная процедура оптимизации повторялась для различных геометрических и физических параметров соединений.

В диапазоне толщин 1—4 мм использование клепаных соединений эффективно, так как оптимальные решения находятся в зоне допустимых ограничений. С увеличением количества крепежных элементов эффективность соединений резко снижается вследствие роста трудоемкости изготовления и увеличения массы конструкции из-за возрастания толщины и эксцентриситета в передаче нагрузок соединений. Оптимальные геометрические параметры соединения находятся на пересечении вертикали, проходящей через точку экстремума, и кривых равнопрочности соединений для соответствующего вида разрушения.

Существенно повысить эффективность соединений при стыке сравнительно «толстых» оболочек ($\delta \geqslant 8$ мм) можно применением штифтоболтовых (ШБС) и штифтошпилечных (ШШС) соединений (рис. 8.3). Оценку эффективности и выбор оптима-

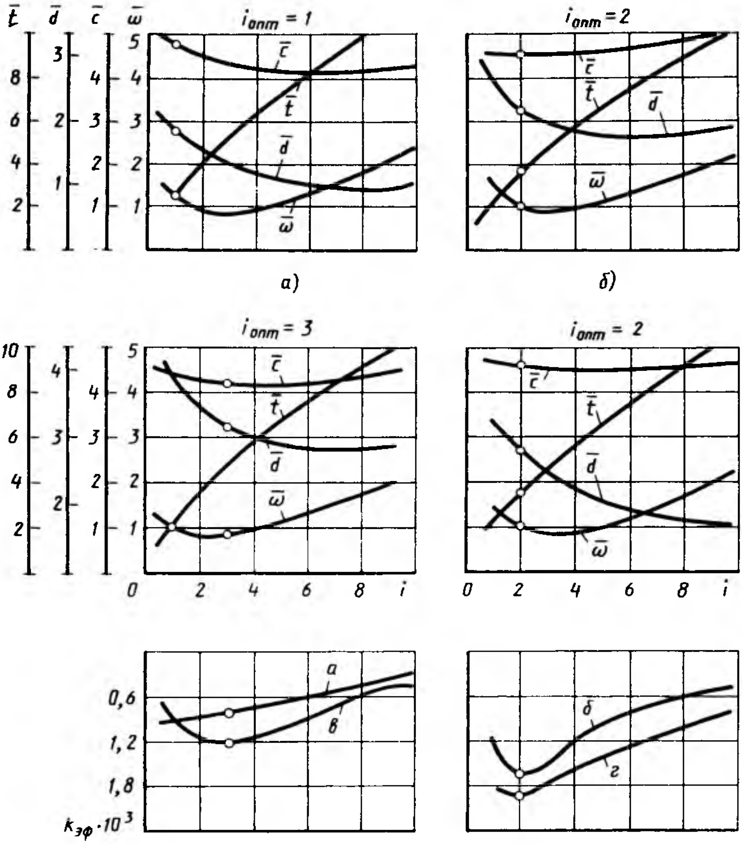


Рис. 8.2. Зависимость геометрических параметров соединений из КМ от количества силовых точек и вида соединения:
а — болтовые; *б* — болтозаклепочные; *в* — клепаные (заклепки из материала В-65); *г* — клепаные (заклепки из материала 1Х18Н9Т)

параметров осуществим с помощью системы уравнений:

$$k_{эф}(\overline{W}_{эф}) = \frac{\psi(\overline{W}_s)\, F_M}{\dfrac{\bar n_{cs}\delta_y}{\bar n_{Ms}}\left\{2\pi R L^* \gamma_\alpha - \dfrac{H}{\delta_y} n i \dfrac{\pi d_ш^2}{4}(\gamma_ш - \gamma_\alpha)\right\} + \dfrac{1}{+\dfrac{\pi d_б^2}{4} n \sum\limits_{i=1}^{k}\left(ic - \dfrac{d_ш}{2}\right)(\gamma_б - \gamma_c) + C_{пр\,s}(\eta \overline{N}_г)^{-1}}};$$

$$d_б = \frac{2 \times \left\{ Q_s + \dfrac{1}{1 + \dfrac{c_ф}{c_б} + \dfrac{c_ф}{c_{от}}}\left[\dfrac{N}{ni} + \dfrac{4M_{изг}}{Rni}\,\dfrac{(1-\cos\varphi_0)(\pi + \mathrm{tg}\,\varphi_0 - \varphi_0)}{2\mathrm{tg}\,\varphi_0 - \sin 2\varphi_0}\right]\right\}}{\pi\sqrt{\sigma_в^2 + 3\tau^2}}$$

$$d_{ш} = \frac{\sigma_{в\alpha} 2\pi R k_l}{n i \sigma_{см\,\alpha} k_e};$$

$$\delta_{у} = \frac{\pi d_{б}^2 \sqrt{\sigma_{в}^2 + 3\tau^2}}{4\sigma_{см} d_{ш}};$$

$$c = \frac{\pi d_{б}^2 \sqrt{\sigma_{в}^2 + 3\tau^2} + 4 d_{ш} \delta_{у} \tau_{ср\,\alpha}}{8\delta_y \tau_{ср\,\alpha}}.$$

Здесь $Q_з$ — усилие затяжки штифтов;

$$= \frac{1}{\frac{0{,}6 R_z}{N} + \frac{c}{E_{ф}^{*}\left(\xi_{т} 2\pi R \delta_{у} - \frac{n\pi d_{б}^2}{4}\right)}};$$

$$c_{от} = G_{см}/\Delta_{см}; \quad c_{б} = \frac{1}{\frac{i}{E_{б} F_{б}} + \lambda_{р}};$$

$$L^{*} = \pi \sqrt[4]{\frac{E_1}{E_2}} \sqrt[4]{\frac{R^2 \delta_{у}^2}{\xi(1 - \nu_{12}\nu_{21})}};$$

$$k_l = 1 + \frac{4M_{изг}}{NR} \times$$

$$\times \frac{(1 - \cos\varphi_0)(\pi + \operatorname{tg}\varphi_0 - \varphi_0)}{2\operatorname{tg}\varphi_0 - \sin 2\varphi_0},$$

где $c_{ф}$, $c_{от}$, $c_{б}$ — жесткость фланца, отверстия на смятие, болта на растяжение; L^* — краевая зона оболочки; $\xi_{т}$ — относительная площадь контакта фланца ($\xi_{т} = 0{,}8$); $M_{изг}$ — изгибающий момент, действующий на фланцевый стык; $E_{ф}^{*}$, E_1, E_2, ν_{12}, ν_{21}, $E_{б}$ — упругие постоянные пакета и болта; R_z — шероховатость поверхности стыка; φ_0 — угол, определяющий положение нейтральной оси; N — осевая сила; n — количество штифтов в одном ряду; $\lambda_{р}$ — податливость резьбы болтов $\left(\lambda_{р} \cong 0{,}8\,\frac{1}{dE_{б}}\right)$; i—количество рядов; c — приведенная длина болтов; $G_{см}$— модуль упругости при смятии; $\Delta_{см}$— смещение штифта в отверстии.

На рис. 8.4 представлены результаты расчетов однорядных и двухрядных ШБС, выполненных с предварительной затяжкой болтов и без нее.

Для оболочек, работающих на внутреннее давление и изгиб с автономным обеспечением герметичности, наиболее эффективно использование двухрядного шва: снижение массы составляет 16 кг. В том случае, когда плотность стыка и герметичность обеспечиваются за счет предварительной затяжки болтов, существенно возрастает масса изделия, так как возрастают абсолютные нагрузки на болт при некотором уменьшении амплитуды перемен-

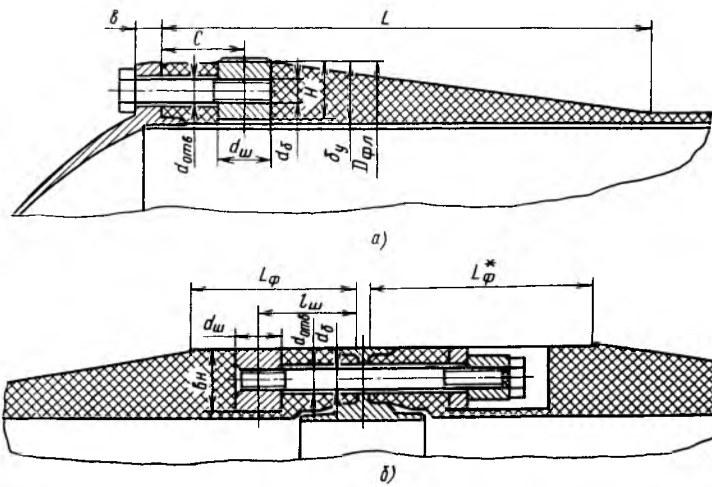


Рис. 8.3. Конструкции штифтоболтовых (*а*) и штифтошпилечных (*б*) соедине

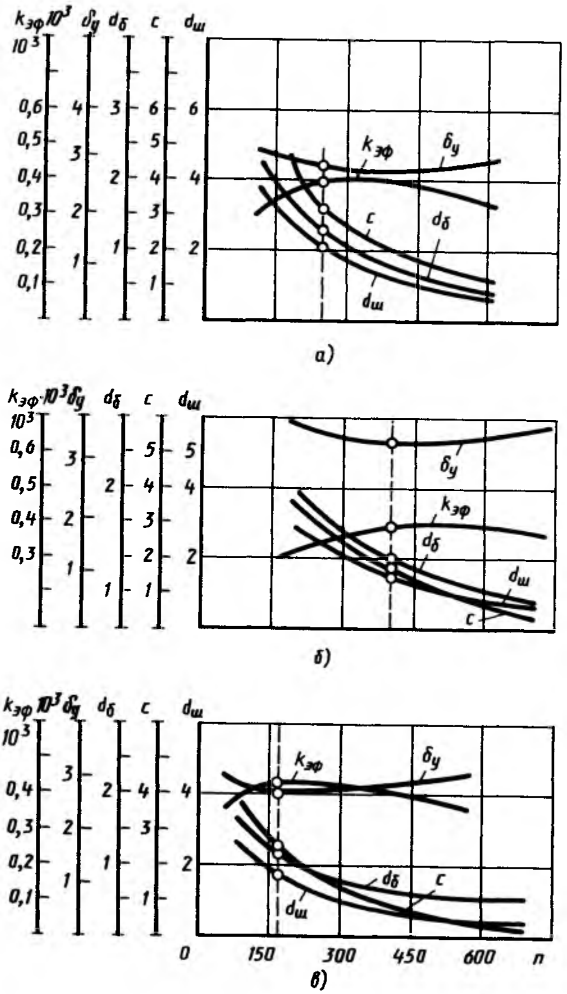


Рис. 8.4. Зависимости параметров ШБС от количества стыковых болтов:
а — однорядный шов (затяжка отсутствует); *б* — однорядный шов (затяжка моментом $M_{кр}$); *в* — двухрядный шов (затяжка отсутствует)

ных нагрузок. На рис. 8.5 показаны области эффективного использования различных видов соединений в зависимости от изменения толщины соединяемых материалов.

В целях сокращения трудоемкости расчетов эффективности различных видов соединений для материалов, отличающихся по физико-механическим свойствам от приведенных на рис. 8.2, 8.4, 8.5, необходимо произвести перерасчет жесткостных параметров материалов по формуле

$$k = \delta_1 E_1 / \delta_м E_м,$$

где k — относительный коэффициент пересчета; δ_1, E_1 — толщина и модуль упругости углепластика; $\delta_м$, $E_м$ — толщина и модуль упругости исследуемого материала. Для определения оптимальных параметров для вновь исследуемого материала необходимо

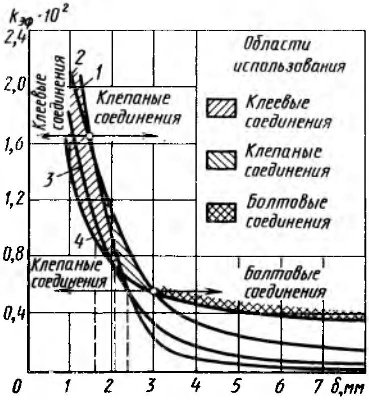


Рис. 8.5. Области эффективного использования различных видов соединений:
1 — клеевые; *2* — клепаные; *3* — клееклепаные; *4* — болтовые

найти исходную точку на графике с помощью «приведенной» толщины материала $\delta_{пр} = \delta_м k^{-1}$. Для значений $\delta_{пр}$ определяются показатели эффективности и сравниваются различные виды соединений.

С увеличением толщины соединяемых материалов всех видов соединений показатели эффективности снижаются. Это объясняется возрастанием коэффициента k_e и увеличением количества рядов в соединении. Для рассматриваемого материала область эффективного использования клеевых соединений находится в пределах до 1,6 мм толщины соединяемых деталей.

Для клепаных соединений эффективная область толщин 1,5—3,0 мм и для болтовых — более 3 мм. Для соединений оболочек с толщиной материала $\delta \geqslant 8$ мм целесообразно применять штифтоболтовые или штифтошпилечные соединения. Таким образом критерий эффективности соединений, дающий возможность оценить изменение прочности соединения на единицу изменения приведенной массы стыка, позволяет производить последовательный итерационный цикл оптимизации конструкторско-технологических параметров соединения и выбор вида соединения, обладающего большой эффективностью.

8.2. ПРОЕКТИРОВАНИЕ КЛЕЕВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

При изготовлении клеевых соединений композитных элементов основными этапами являются выбор силовой схемы (вида) соединения и определение его конструктивных параметров.

Наиболее распространенным видом клеевого соединения является соединение внахлестку (рис. 8.6) [5]. Приложение нагрузки в плоскости склеенных элементов вызывает появление напряжения сдвига в клеевом слое и на поверхности раздела. На напряженно-деформированное состояние, а следовательно, и на несущую способность соединения большое влияние оказывают его конструктивные параметры.

Распределение касательных напряжений τ_x по длине клеевого шва и усилий $N_{1,2x}$ в соединяемых элементах описывают следующие выражения:

$$\tau_x = Nk \times$$
$$\times \left[\frac{\psi \operatorname{ch} k(x-l) + (1-\psi)\operatorname{ch} kx}{\operatorname{sh} kl}\right];$$

$$N_{1x} = N \times$$
$$\times \left[\psi + \frac{\psi \operatorname{sh} x(x-l) + (1-\psi)\operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} kl}\right];$$

$$N_{2x} = N\left[1 - \psi - \right.$$
$$\left. - \frac{\psi \operatorname{ch} k(x-l) + (1-\psi)\operatorname{sh} kx}{\operatorname{sh} kl}\right],$$

где $k = \sqrt{\frac{G}{\delta}\left(\frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2}\right)}$

(B_1, B_2 — жесткости элементов при растяжении; G, δ — модуль сдвига и толщина клеевой прослойки).

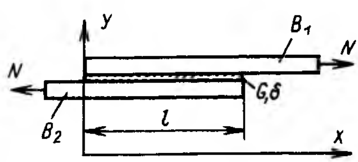


Рис. 8.6. Расчетная схема клеевого нахлесточного соединения

Для элементов одинаковой жесткости ($B_1 = B_2 = B$, $\psi = 1/2$) полученное решение принимает вид

$$\tau_x = \frac{Nk}{2} \, \frac{\operatorname{ch} k\,(x - l/2)}{\operatorname{sh} kl/2}; \quad (8.3)$$

$$N_{1x},\ N_{2x} = \frac{N}{2} \times$$

$$\times \left[1 \pm \frac{\operatorname{sh} k\left(x - \frac{l}{2}\right)}{\operatorname{sh} kl/2} \right],$$

где $k = \sqrt{2G/B\delta}$.

Из равенства (8.3) следует, что касательные напряжения по длине клеевого шва распределяются неравномерно и имеют максимальную величину τ_{max} на концах нахлестки, т. е. при $x = 0$ и $x = l$. Из (8.3) имеем

$$\tau_{max} = \frac{Nk}{2} \operatorname{cth} \frac{kl}{2}. \quad (8.4)$$

Величина τ_{max} зависит от параметра k, причем несущая способность соединения с увеличением k падает. Входящее в параметр k отношение G/δ характеризует способность клеевой прослойки влючать в работу присоединенный элемент. Чем выше жесткость клеевой прослойки, тем меньший ее объем оказывается нагруженным, тем выше максимальные напряжения.

Из формулы (8.4) следует, что при увеличении длины нахлестки напряжение τ_{max} снижается и, достигнув некоторого предела, остается постоянным. Величину нахлестки, при достижении которой перестает уменьшаться максимум касательных напряжений, обозначим через $l_{пр}$. Поскольку при $l \geqslant l_{пр}$ $\operatorname{cth} \frac{kl}{2} \approx 1$, получим

$$\tau_{max} = \frac{Nk}{2} = N\sqrt{G/2B\delta},$$

т. е. τ_{max} зависит только от нагрузки и от упругих характеристик элементов соединений.

Из формул (8.3) можно заключить, что с увеличением длины нахлестки касательные напряжения в ее средней части уменьшаются до нуля. При превышении длины нахлестки величины $l_{пр}$ в центре соединения начинает развиваться зона, которая не принимает участия в восприятии внешней нагрузки. Величину $l_{пр}$ можно определить из условия $\operatorname{cth}(kl_{пр}/2) \approx 1$. В результате с учетом $kl_{пр}/2$-3

$$l_{пр} \approx 6\sqrt{B\delta/2G}.$$

Неравномерность распределения напряжений в соединении обычно характеризуется коэффициентом концентрации напряжений n, представляющим собой отношение максимального напряжения в клеевом шве к среднему $\tau_{ср}$, рассчитанному как частное от деления растягивающей силы на площадь шва. Коэффициент концентрации напряжений в нахлесточном соединении двух одинаковых элементов.

$$n = \frac{kl}{2} \operatorname{cth} \frac{kl}{2}.$$

Анализ напряжений в нахлесточном клеевом соединении элементов различной жесткости выявляет еще большую неравномерность распределения касательных напряжений в клеевой прослойке. Напряжения сдвига имеют максимумы на концах нахлестки, причем больший из них расположен со стороны менее жесткого элемента.

При большой длине соединения $l \geqslant l_{пр}$ касательные напряжения на концах нахлестки определяются следующими приближенными асимптотическими зависимостями:

$$\tau_{x=0} = Nk\psi = N\sqrt{\frac{B_1}{B_1 + B_2} \, \frac{G}{\delta B_2}}; \quad (8.5)$$

$$\tau_{x=l} = Nk(1 - \psi) =$$

$$= N\sqrt{\frac{B_2}{B_1 + B_2} \, \frac{G}{\delta B_1}}.$$

Из равенств (8.5) видно, что увеличение жесткости только одного из соединяемых элементов уменьшает прочность соединения.

Напряжения, возникающие в клеевых соединениях при действии внешних нагрузок, накладываются на начальные (остаточные) напряжения, появившиеся в процессе склеивания. Наибольших величин эти остаточные напряжения достигают в случае ск...

вания при повышенных температурах разнородных элементов. Зависимости температурных напряжений в клеевой прослойке и усилий в соединяемых разнородных элементах имеют вид

$$\tau = \sqrt{\frac{GB_1B_2}{\delta(B_1+B_2)}}\, t\,(\alpha_2-\alpha_1)\, e^{-kx};$$

$$N_{1x} = N_{2x} = \frac{B_1B_2}{B_1+B_2}\, t \times$$

$$\times (\alpha_2-\alpha_1)\left(1-e^{-kx}\right), \qquad (8.6)$$

где $k = \sqrt{\frac{G}{\delta}\left(\frac{1}{B_1}+\frac{1}{B_2}\right)}$;

t — перепад температур при охлаждении после склеивания; B_1, B_2, α_1, α_2 — соответственно жесткости и температурный коэффициент линейного расширения первого и второго соединяемых элементов. Максимальные касательные напряжения возникают на концах нахлестки. Величина τ_{max} и степень изменяемости τ возрастают при увеличении параметра k. Максимальные остаточные напряжения тем выше, чем тоньше клеевая прослойка, выше ее модуль упругости и меньше различие в жесткостях соединяемых материалов. Необходимо учитывать также, что возникающие в соединяемых элементах напряжения могут вызвать изгибание (коробление) соединения и тем большее, чем больше различие жесткостей элементов. По сравнению с действительными расчетные остаточные напряжения, как правило, оказываются завышенными, что связано с неучетом высокоэластичных и пластических деформаций клеевых прослоек, которые особенно существенно проявляются на начальной стадии охлаждения клеевого соединения. Зависимости (8.6) можно использовать в основном для качественного анализа остаточных напряжений в клеевых соединениях.

Характерной особенностью углового соединения (рис. 8.7) является то, что клеевая прослойка в нем работает на отрыв. В случае, если параметры соединения по длине клеевого слоя не меняются, то, считая основание *2* абсолютно жестким, а клеевую прослойку и элемент *1* — линейно упругими и используя уравнение балки

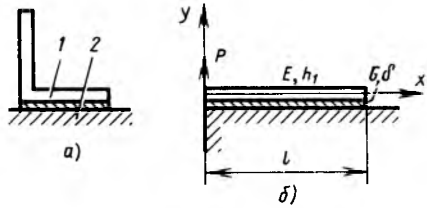


Рис. 8.7. Конструктивная (*а*) и расчетная (*б*) схемы углового соединения

на упругом основании, можно получить следующее выражение для распределения нормальных напряжений в клеевой прослойке:

$$\sigma = 2P\sqrt[4]{\frac{3E_к}{\delta E_1 h_1^3}}\, e^{-\alpha x}\cos\alpha x, \qquad (8.7)$$

где $E_к$ — модуль упругости клея.

Из равенства (8.7) следует, что максимальное напряжение реализуется при $x = 0$, т. е.

$$\sigma_{max} = 2P\sqrt[4]{\frac{3E_к}{\delta E_1 h_1^3}}.$$

При увеличении толщины присоединяемого элемента в 10 раз максимальное нормальное напряжение уменьшается в 5,7 раз и соответственно увеличивается несущая способность соединения. Влияние жесткости клеевой прослойки ($E_к/\delta$), входящей в выражение (8.7), в соединении рассматриваемого типа значительно меньше, чем в нахлесточном соединении.

Полученные выше результаты соответствуют случаю, когда жесткость элемента *2* (см. рис. 8.7) значительно превосходит изгибную жесткость полки *1*. В случае соединения элементов с соизмеримыми жесткостями распределение нормальных напряжений в клеевой прослойке и прочность соединения существенно зависят от жесткости элемента *2*. Уменьшение жесткости основания приводит к значительному снижению разрушающей нагрузки, что связано с изгибом элемента *2*, и появлению дополнительной концентрации отрывающих напряжений уже на другом конце соединения.

Рассмотренные теоретические зависимости распределения напряжений в различных соединениях позволяют определить пути создания соединений с уменьшенной концентрацией напряжений. Способы снижения концентрации напряжений могут быть основаны на изменении жесткости клеевой прослойки или соединяемых элементов по длине соединения, особенно на его начальных участках. Эффективным способом уменьшения концентрации напряжений в нахлесточном соединении может быть применение комбинации клеев: эластичного (по краям) и более жесткого (в средней части). Такое сочетание вызовет появление вторичных максимумов на участках, где изменяется модуль упругости клеевой прослойки, однако эти пики напряжения не столь велики и опасны, как напряжения, возникающие при склеивании с помощью одного клея. В некоторых случаях выравнивание напряжений в клеевой прослойке может быть осуществлено путем изменения ее толщины, например, в нахлесточных соединениях, имеющих у кромок утолщенную клеевую прослойку, прочность на сдвиг повышается на 10—15%.

Для снижения концентрации напряжений в нахлесточном соединении широко применяют способы срезания части материала, благодаря чему повышается деформативность оставшегося приклеиваемого элемента. Последнее обстоятельство приводит к тому, что включение элемента в работу происходит более плавно, т. е. снижается концентрация напряжений.

Считается, что в соединении «на ус» одинаковых элементов концентрация напряжений практически отсутствует ($n = 1$). При соединении листов, труб, изготовленных из материалов с различными упругими свойствами, распределение напряжений по длине скоса имеет неравномерный характер. Так, в клеевой прослойке, соединяющей «на ус» образцы из боропластика и алюминиевого сплава, наиболее нагруженной является часть клеевой прослойки у конца скоса более жесткого (борэпоксидного) элемента.

Задавая различные законы изменения жесткости соединяемых элементов, можно получить всевозможные картины распределения касательных напряжений в клеевой прослойке т. е. добиться положительных результатов по снижению неравномерности распределения касательных напряжений в соединении «на ус» разнородных элементов. Например, применение проточки на более жесткой металлической трубе в соединении ее «на ус» с трубой из стеклопластика привело к повышению прочности примерно на 30%. Оптимизацию соединения разнородных элементов все чаще производят с применением ЭВМ. Рассчитывая с помощью ЭВМ напряжения в любой точке соединения и варьируя толщиной соединяемых элементов, можно получить относительно равномерное распределение касательных напряжений по всей длине клеевого соединения.

При проектировании врезных нахлесточных соединений необходимо соблюдать требования, вытекающие из анализа соединений: длину ступеней делать переменной, наружные ступени делать длиннее, а внутренние — короче. Это приводит к тому, что максимум касательных напряжений будет находиться во внутренней части соединения.

В угловых соединениях концентрацию наиболее опасных отрывающих напряжений можно снизить, например, плавным уменьшением толщины приклеиваемой полки по ее длине. Более равномерное распределение напряжений в клее вследствие уменьшения жесткости склеиваемых кромок угольника повышает прочность соединения.

После выбора конфигурации соединения на следующем этапе проектирования следует провести предварительное определение размеров с последующим уточненным анализом напряженного состояния. Первое представление о размерах соединения можно получить, исходя из приближенно определенной площади клеевого шва, необходимой для передачи нагрузки $F = N/\tau_{ср}$ или $F = N/\sigma_{ср}$, где $\tau_{ср} = \tau_в/n_1$, $\sigma_{ср} = \sigma_в/n_2$; N — расчетное усилие; $\tau_в$, $\sigma_в$ — пределы прочности клеевой прослойки при сдвиге и растяжении соответственно; n_1, n_2 — ожидаемые коэффициенты концентрации напряжений.

Полученное таким образом первое приближение может быть улучшено путем последовательных уточнений

При этом для предварительного анализа используются соотношения, приведенные ранее, а окончательный расчет осуществляется на основе более точных методов. Целесообразно использовать энергетические методы, методы конечных элементов, конечных разностей и сеток, реализуемых на ЭВМ.

8.3. ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОМБИНИРОВАННЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Комбинированными называются соединения, образованные одновременно силовыми точками и непрерывным швом. К ним относятся такие соединения, как клееболтовые, клеезаклепочные, клеерезьбовые и т. п. Применение при сборке элементов одновременно двух методов соединения обусловлено стремлением иметь более прочный в механическом отношении шов, повысить его ударные и вибрационные характеристики и использовать герметизирующие свойства клеевых прослоек.

Например, в клепаных самолетных конструкциях клеевая пленка поглощает вибрации, ослабляет действие ударных нагрузок и снижает вероятность усталостного разрушения. При нагружении комбинированного соединения клеевая прослойка воспринимает часть нагрузки, разгружая силовую точку. Такое перераспределение напряжений уменьшает их концентрацию у границ силовой точки, что приводит к повышению прочности конструкции. В то же время наличие в клеевом шве жестких связей в виде болтов или заклепок устраняет серьезный недостаток клеевых соединений — низкую работоспособность при неравномерном отрыве.

Основной задачей при проектировании клеемеханических соединений является определение усилий в силовых точках, напряжений сдвига в клеевом шве и нормальных напряжений в соединяемых элементах. При этом необходимо определить и соотношение нагрузок, воспринимаемых силовыми точками и клеевым швом. Относительно невысокая прочность клеевых композиций при сдвиге и неравномерность распределения напряжений по длине клеевых швов приводят к тому, что клеевая прослойка, как правило, воспринимает сравнительно небольшую нагрузку. В связи с этим эффективность клеевой прослойки в комбинированных соединениях возрастает с уменьшением толщины соединяемых элементов.

При проектировании необходимо учитывать, что для эффективной работы комбинированного соединения деформативность его элементов должна быть примерно одинаковой, однако, как правило, податливость механических (например, клепаных) соединений значительно выше, чем клеевых. Для устранения этого недостатка можно увеличивать количество и жесткость заклепок и повышать эластичность клеев [1].

Главная цель применения клеевой прослойки в комбинированных соединениях заключается в повышении не столько статических, сколько динамических свойств соединений.

Особую группу составляют соединения различных композитных элементов, образуемые непосредственно в процессе изготовления последних. К этим соединениям относятся заформовка фланцев в различные оболочки и трубы, фитингов в стержневые трубчатые элементы, соединительных втулок в лонжероны лопастей вертолетов и т. п. Перечисленные переходные элементы (фланцы, фитинги и т. д.), предназначенные для передачи больших сосредоточенных нагрузок, обычно изготавливаются из металлов и соединяются с ответными металлическими изделиями традиционными способами.

Проектирование таких соединений заключается в обеспечении совместной работы металлического и композитного элементов. Обычно объединение композитной и металлической деталей осуществляется за счет выступов и впадин, имеющихся на сопрягаемых поверхностях элементов [4]. Например, конструкция соединения металлического фитинга со стержневым трубчатым композитным элементом показана на рис. 8.8 и представляет собой углубление трапециевидной формы, в котором уложены основные ориентированные вдоль оси трубы слои композита ($\varphi = 0$), закрепление кото

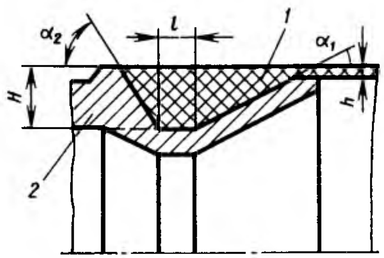


Рис. 8.8. Схема соединения трубчатого композитного стержня (*1*) с металлической законцовкой (*2*)

осуществлено с помощью кольцевых слоев, уложенных в оставшуюся незаполненной часть углубления. Боковые поверхности углубления передают на композитный элемент растягивающие и сжимающие усилия. Кольцевые слои препятствуют перемещению основных продольных слоев по фитингу и способствуют быстрому их включению в работу.

Расчеты показывают, что получение достаточно жесткого соединения стального фитинга с трубой из углепластика диаметром 0,15 м и толщиной 5×10^{-3} м обеспечивается следующими конструктивными параметрами (см. рис. 8.8): $H \approx 5h$, $\alpha_1 = 30 \div 45°$, $\alpha_2 = 50 \div 60°$; длина углубления l определяется из условий технологической реализуемости данного соединения.

Соединения, аналогичные рассмотренному, применяются и для пристыковки законцовок к тонкостенным композитным трубам малого диаметра. Трубы, обычно изготавливаемые намоткой тканого или ленточного препрега, соединяются с металлическими законцовками с помощью кольцевых слоев, материалом которых могут быть пропитанные связующие нити, жгуты или ленты. После отверждения собранной таким образом заготовки образуется достаточно прочное соединение металлического элемента с трубой.

Конструктивные параметры рассматриваемого соединения зависят от эксплуатационных и технологических факторов. На начальном этапе проектирования можно использовать следующие эмпирические соотношения: глубина канавки $H = (1 \div 1{,}5)\,h$, ее длина $l = (5 \div 6)\,h$, углы скоса $\alpha_1 = \alpha_2 = 45°$, общая толщина композита в месте заделки (2—2,5) h. Окончательные конструктивные параметры соединений определяются после их экспериментальной обработки.

8.4. ВЛИЯНИЕ ТЕХНОЛОГИИ НА ПРОЧНОСТЬ СОЕДИНЕНИЙ

Экспериментальные исследования прочности механических и комбинированных соединений углепластиков и

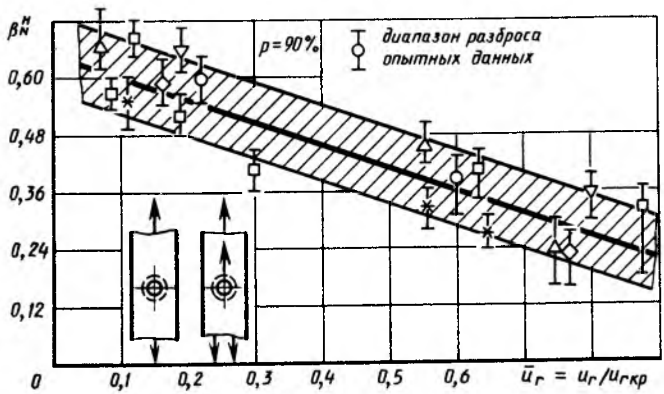


Рис. 8.9. Зависимость эффективного коэффициента усталостной прочности соединения $\beta^н_N$ от натяга $\bar{u}_г$ ($r_{1/2}$ — коэффициент корреляции, равный = 0,78):

болтовые соединения: □ — стеклопластик ВФТ-2СТ, ○ — стеклопластик СП-6; клепаные соединения: △ — углепластик КМУ-1У, □ — стеклопластик ВФТ-2СТ, ∗ — стеклопластик КАСТ-В, ◇ — стеклопластик СК-9А, ▽ — стеклопластик ТСУ-8/3-ВМ78

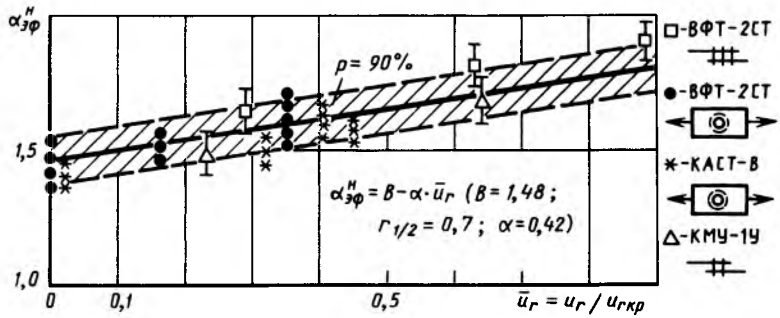


Рис. 8.10. Зависимость эффективного коэффициента концентрации напряжений $\alpha^{н}_{эф}$ от натяга $\bar{u}_r$ ($r_{1/2} = 0,7$)

стеклопластиков подтверждают влияние начальных технологических напряжений, возникающих от натяга и затяжки болтов и заклепок, на концентрацию напряжений около отверстий и прочность соединений.

Исследовалась прочность образцов в виде пластин с отверстиями, заполненными заклепками или болтами и односрезные нахлесточные соединения. В качестве материалов применялся углепластик марки КМУ-1у и стеклопластики различных марок ВФТ-2сТ; КАСТ-В; ТСУ-8/3-ВМ78.

Натяг изменялся за счет применения заклепок из различных материалов. Затяжка болтов осуществлялась тарированными ключами. Испытания проводили при статических и переменных нагрузках с частотой нагружения 600 и 2800 цикл/мин.

По результатам эксперимента строили корреляционные зависимости и определяли меру индивидуального рассеяния опытных данных (рис. 8.9, 81.0, 8.11). Анализ результатов испытаний показывает, что при статическом и переменном нагружении прочность соединений композитов с увеличением натяга $\bar{u}_r$ падает $\left(\beta^{н}_{N} = A - k\bar{u}_r\right)$, а эффективный коэффициент концентрации напряжений увеличивается $\left(\alpha^{н}_{эф} = B + \alpha\bar{u}_r\right)$.

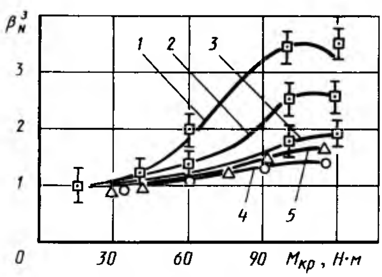


Рис. 8.11. Зависимость эффективного коэффициента прочности соединения $\beta^{з}_{N}$ от момента затяжки $M_{кр}$:

1, 2, 3 — долговечность при переменном нагружении [*1* — потайное соединение (материал пакета КМ+D16АТл3); *2* — обычное (КМ+D16АТл3); *3* — обычное (КМ+ +КМл5)]; *4, 5* — $\beta^{з}_{см}$ — прочность на смятие при статических нагрузках

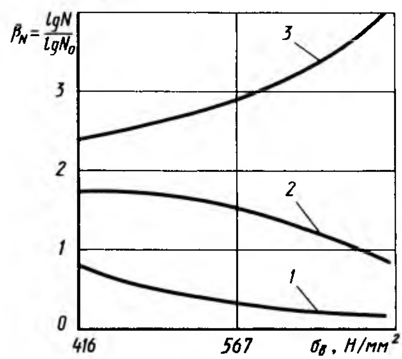


Рис. 8.12. Зависимость долговечности соединений от метода клепки и прочности материала заклепки:

1 — клепка прессовая (заклепки обычные); *2* — клепка прессовая (заклепки полупустотелые); *3* — клепка давлением с раскаткой (заклепки обычные)

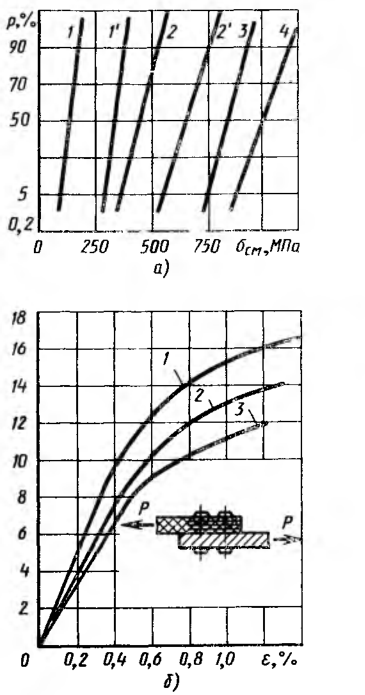


Рис. 8.13. Прочность и деформативность соединений КМ, усиленных высокопрочными прослойками:

а — прочность на смятие: *1* — углеродное волокно — ВМН-1+ЭДТ-10; *1'* — кордная стеклоткань № 156; *2* — углеродное волокно — ВМН-4+ЭДТ-10; *2'* — ткань № 156, усиленная фольгой; *3* — ВМН-4+ +ЭДТ-10+фольга; *4* — ткань ТСУ-8/3-ВМ78+ЭДТ-10+ боралюминиевая лента; *б* — влияние ускоренных климатических испытаний (УКИ) на деформативность соединений (углепластик КМУ-3У + фольга, $w = 6\%$): *1* — $t = 20$ °C; $P_р = 18\ 000$ Н; *2* — $t = 160$ °C; $P_р = 14\ 600$ Н; *3* — $t = 160$ °C; $P_р = 12\ 100$ Н; после УКИ, эквивалентных эксплуатации в 12 лет

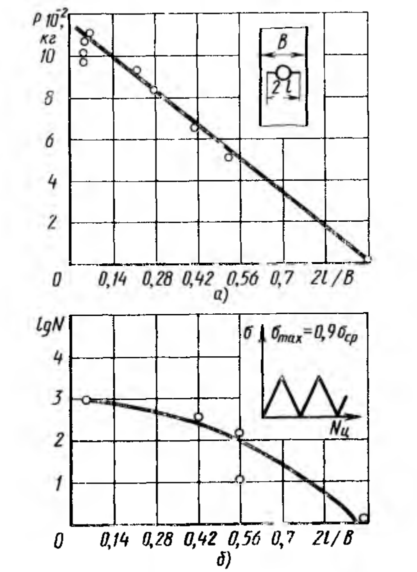


Рис. 8.14. Влияние длины трещины на остаточную прочность и долговечность пластины из КМУ-1У (с отверстием ⌀ 4 мм и $B = 72$ мм):

а — статические нагрузки ($V = 0,5$ м/с); *б* — повторно-статические нагрузки ($\sigma = 0,9\sigma_в$)

Для металлических соединений долговечность соединений с увеличением натяга растет. Это необходимо принимать во внимание при проектировании соединений из композитов. Пользуясь обобщенными зависимостями рис. 8.9 и 8.10, можно определить относительное изменение прочности и долговечности соединений конструкций из композитов, если известны данные по прочности и долговечности пластин с отверстием и известна величина натяга болтов или заклепок.

Исследование прочности болтовых соединений при статических и переменных нагрузках с различной величиной предварительной затяжки показывает существенное увеличение долговечности соединений и прочности на смятие. При выборе метода выполнения соединения композитных конструкций необходимо стремиться сохранять повышенную затяжку болтов или заклепок и снижать величину натяга. На рис. 8.12 представлены данные по изменению долговечности клепаных соединений углепластика марки КМУ-1у, полученных разными методами с использованием заклепки из материалов с разной прочностью. Наибольший эффект обеспечивает клепка давлением с раскаткой (кривая *3*) заклепок из стали марки 1Х18Н9Т с прочностью $\sigma_в = 720$ М

Одним из важных технологических способов повышения прочности соединений является армирование зон стыка высокопрочной фольгой из титановых сплавов и армирование бороалюминиевой лентой (рис. 8.13). Эффективность армирования зон стыка фольгой подтверждается и после ускоренных климатических испытаний, эквивалентных сроку эксплуатации 12 лет.

Проведенные исследования кинетики развития трещин около отверстий в соединениях углепластиков показывают линейную зависимость остаточной прочности от длины трещины (рис. 8.14) при статических нагрузках и нелинейную зависимость при переменных нагрузках. Нелинейность особенно проявляется при малых значениях начальной длины трещины. Некоторое увеличение (иа 40—60%) вязкости разрушения около отверстий в углепластиках достигается армированием зон стыка стеклотканью или тканью из органических волокон. Критическая длина трещин при этом составляет 2—2,5 мм.

Список литературы

1. **Белоус А. А., Хватан А. М.** Расчет клеемеханического соединения внахлестку//Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. М.: ЦАГИ, 1979. Вып. VII. 94 с.

2. **Воробей В. В., Сироткин О. С.** Соединения конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1985. 166 с.

3. **Основы** проектирования и изготовления конструкций летательных аппаратов из композиционных материалов/Под ред. В. В. Васильева. М.: МАИ, 1985. 287 с.

4. **Проектирование,** расчет и испытания конструкций из композиционных материалов. М.: ЦАГИ. 1979. Вып. VII. 87 с.

5. **Царахов Ю. С.** Конструирование соединений элементов ЛА из композиционных материалов. М.: МАТИ, 1980. 80 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Л

Н

О

СПРАВОЧНОЕ ИЗДАНИЕ

Васильев Валерий Витальевич, Протасов Виктор Дмитриевич, Болотин Владимир Васильевич и др.

КОМПОЗИЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Редактор *Т. Д. Онегина*
Переплет художника *В. Д. Епанешникова*
Художественный редактор *А. С. Вершинкин*
Технические редакторы *Т. С. Старых, Н. М. Харитонова*
Корректоры *Т. В. Багдасарян, Л. Я. Шабашова*

ИБ № 6070

Сдано в набор 12.12.89. Подписано в печать 14.06.90. Т-01845. Формат $60\times90^1/_{16}$.
Бумага офсетная № 1. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 32,0.
Усл. кр.-отт. 32,0. Уч. изд. л. 42,44. Тираж 32 300 экз. Заказ 912. Цена 2 р. 60 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Машиностроение»,
107076, Москва, Стромынский пер., д. 4

Ленинградская типография № 6 ордена Трудового Красного Знамени
издательства «Машиностроение» при Государственном комитете СССР по печати.
193144, Ленинград, ул. Моисеенко, 10.