

Е.Ф.Винокуров
А.Г.Петрович
Л.И.Шевчук

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

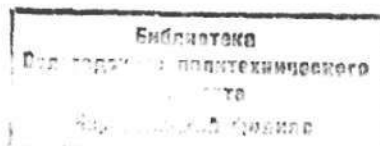
Расчетно- проектировочные работы

Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования БССР
в качестве учебного пособия для студентов
строительных специальностей вузов

Минск "Вышэйшая школа"
1987

30.1
ББК 30.121я73
В49
УДК 6 20.1 (075.8)

Рецензенты: кафедра "Сопротивление материалов" Ленинградского инженерно-строительного института; А.С. Сахаров, д-р техн. наук, проф. кафедры "Сопротивление материалов" Киевского инженерно-строительного института



115.992

Винокуров Е.Ф. и др.

В49 Сопротивление материалов: Расчет.-проектировоч. работы: Учеб. пособие для вузов/ Е.Ф. Винокуров, А.Г. Петрович, Л.И. Шевчук. — Мн.: Выш. шк., 1987. — 227 с.: ил.

Излагаются теоретические сведения, приводятся примеры расчетов, расчетные схемы и числовые данные для выполнения расчетно-проектировочных работ по курсу "Сопротивление материалов". Пособие соответствует стандарту СЭВ 1565-79 на новые буквенные обозначения физических величин в курсе сопротивления материалов. Предназначено для студентов строительных специальностей вузов.

В 2105000000 — 110 31-87
М304 (03) — 87

ББК 30.121я73

© Издательство "Вышэйшая школа", 1987

ПРЕДИСЛОВИЕ

Наука о сопротивлении материалов, рассматривающая вопросы прочности, жесткости и устойчивости элементов инженерных конструкций, изучается во всех высших и средних технических учебных заведениях.

Программой курса сопротивления материалов предусматривается чтение лекций, проведение практических и лабораторных занятий, а также самостоятельная работа студентов, связанная с выполнением расчетно-проектировочных заданий. Данная книга посвящена только той части курса, которая имеет непосредственное отношение к выполнению студентами расчетно-проектировочных работ.

В учебное пособие включено 16 расчетно-проектировочных работ, охватывающих все основные разделы курса сопротивления материалов. Это позволяет в одном задании объединять несколько работ или выбирать отдельные из них в зависимости от объема курса и специальности студентов.

Отличительная особенность данного пособия заключается в том, что в нем в комплексе излагается теоретический материал, даны примеры расчетов и приведены задания по выполнению студентами расчетно-проектировочных работ.

С целью более широкого использования ЭВМ при выполнении расчетно-проектировочных работ по сопротивлению материалов, а также для контроля решения некоторых наиболее трудоемких задач приводятся программы для микрокалькулятора БЗ-34.

При подготовке данного пособия авторами учтен многолетний опыт преподавания курса сопротивления материалов сотрудниками кафедры "Сопротивление материалов и теория упругости" Белорусского политехнического института, используется материал разработанных на кафедре методических пособий и рекомендаций для студентов.

Теоретические разделы данной книги и примеры расчетов подготовил доктор технических наук профессор Е.Ф. Винокуров, расчетные схемы и числовые данные заданий составил кандидат технических наук доцент А.Г. Петрович, программы для микрокалькулятора разработал Л.И. Шевчук.

Авторы выражают глубокую признательность заведующему кафедрой "Сопротивление материалов" Ленинградского инженерно-строительного института доктору технических наук профессору В.П. Ильину и профессору кафедры "Сопротивление материалов" Киевского инженерно-строительного института доктору технических наук А.С. Сахарову за ценные советы и пожелания по улучшению содержания учебного пособия.

Отзывы и замечания просим направлять по адресу: 220027, Минск, Ленинский пр., 65. БПИ, кафедра СМ и ТУ.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

Пособие преследует цель помочь студенту овладеть методикой выполнения расчетно-проектировочных работ и освободить преподавателя от трудоемкой работы по подбору индивидуальных вариантов заданий.

Процесс выдачи задания ограничивается сообщением студенту двух цифр: номера расчетной схемы и номера строки из таблицы исходных данных к работе. Цифровые данные могут быть использованы для расчета любой схемы.

Число работ, подлежащих выполнению, устанавливается решением кафедры в зависимости от количества часов, отводимых на изучение курса учебными планами.

Предлагаемый набор расчетных схем и исходных данных позволяет скомпоновать различные варианты заданий, что способствует индивидуализации обучения.

При выполнении расчетно-проектировочной работы необходимо руководствоваться следующими рекомендациями:

- приступать к ней лишь после предварительного изучения соответствующего теоретического раздела курса сопротивления материалов;

- перед ее выполнением выписать ее условие с числовыми данными, аккуратно вычертить расчетную схему и указать на чертеже числовые значения величин, необходимых для расчета;

- все вычисления производить в десятичных дробях, количество значащих цифр после запятой должно соответствовать необходимой точности расчета (обычно достаточно трех-четырех цифр);

- заранее продумать план размещения чертежей и расчетов на каждом листе ватмана формата А4 (210 × 297 мм); эпюры усилий, напряжений, перемещений и т.д. строить на одном листе с расчетной схемой, при этом на эпюрах указывать числовые значения характерных ординат и единицы конечных расчетных величин;

- проверять результаты решения задач. Для некоторых, наиболее трудоемких из них это может быть осуществлено с помощью микрокалькулятора МК БЗ-34;

- при защите расчетно-проектировочной работы ответить на вопросы, связанные с ее выполнением, уметь решать контрольные задачи по ее тематике.

Для самопроверки рекомендуется ответить на контрольные вопросы, которые даны к каждой расчетно-проектировочной работе.

В приложении к настоящему учебному пособию приведен необходимый справочный материал. Для удобства пользования пособием все основные формулы пронумерованы.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Латинский алфавит

A	— площадь поперечного сечения брутто
A_{nt}	— площадь поперечного сечения нетто
A_{con}	— площадь смятия
a	— расстояние между параллельными осями по вертикали
b	— ширина элемента
b	— расстояние между параллельными осями по горизонтали
c	— центр тяжести сечения
D_{xy}	— центробежный момент инерции
E	— модуль упругости
e	— индекс внешних сил
F	— сила
F_{cr}	— критическая сила
f_{tot}	— суммарный (полный) прогиб
G	— модуль сдвига
G	— собственный вес элемента
h	— высота элемента
I_x, I_y	— осевые моменты инерции
I_p	— полярный момент инерции
I_{max}, I_{min}	— главные моменты инерции сечения
J_t	— момент инерции сечения при кручении
i	— индекс внутренних сил
l	— длина стержня
M_e	— сосредоточенный изгибающий момент (внешний)
M_x, M_y	— изгибающий момент относительно соответствующей оси (внутренний)
M_{tot}	— суммарный изгибающий момент
m	— изгибающий момент на единицу длины
N	— продольная сила
n	— индекс нормативной нагрузки (F^n, q^n)
n_s	— коэффициент запаса при расчете на устойчивость
P	— полное напряжение
p	— давление (нагрузка, распределенная по площади)
Q	— поперечная сила
q	— погонная нагрузка
R	— расчетное сопротивление материала
R_t	— расчетное сопротивление материала растяжению
R_p	— то же, смятию
R_c	— то же, сжатию
R_s	— то же, сдвигу
S	— усилие (обобщенное)
S_x, S_y	— статический момент площади сечения

S'	— статический момент площади отсеченной части сечения относительно его нейтральной оси
T_e	— крутящий момент
T	— крутящий момент (внутренний)
t_e	— крутящий момент на единицу длины
U	— потенциальная энергия деформаций
u	— удельная потенциальная энергия деформации
u	— перемещение в направлении оси x
v	— перемещение в направлении оси y
w	— перемещение в направлении оси z
W	— работа внешних сил
W_i	— работа внутренних сил
W_p	— полярный момент сопротивления
W_t	— момент сопротивления сечения при кручении
x	— горизонтальная поперечная ось
x_1, y_1	— центральные оси простых фигур в сложном сечении
x, y	— центральные оси сложного сечения
x_0, y_0	— главные центральные оси сечения
x_{dan}, y_{dan}	— координаты опасной точки
x_c, y_c	— координаты центра тяжести сечения
y	— вертикальная поперечная ось
z	— продольная ось

Греческий алфавит

α_0	— угол, определяющий положение главных осей
γ	— удельный вес
γ	— угол сдвига, относительное угловое перемещение
γ_c	— коэффициент условий работы (зависит от назначения и конструктивных особенностей элемента, свойств материала), принимаемый в курсе сопротивления материалов условно равным 1
γ_n	— коэффициент надежности, учитывающий степень ответственности зданий и сооружений и принимаемый в курсе сопротивления материалов условно равным 1
Δl_e	— абсолютная упругая деформация
Δl_r	— абсолютная остаточная деформация
ΔS	— абсолютный сдвиг
ϵ	— относительная линейная деформация
ϵ_r	— относительное остаточное удлинение при разрыве
ϑ	— угол поворота сечения
λ	— гибкость стержня
μ	— коэффициент приведенной длины
ν	— коэффициент Пуассона
σ_e	— предел упругости материала
σ_{pr}	— предел пропорциональности

σ_y	— предел текучести
σ_u	— предел прочности (временное сопротивление)
σ_{ut}	— предел прочности при растяжении
σ_{uc}	— предел прочности при сжатии
σ_{adm}	— допускаемое напряжение
σ	— нормальное напряжение
σ_{loc}	— местное напряжение
σ_{cr}	— критическое напряжение
τ	— касательное напряжение
φ	— коэффициент продольного изгиба
ψ	— относительная поперечная деформация
ψ_r	— относительное остаточное сужение при разрыве

1. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ

РАБОТА 1. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОГО ПРЯМОГО СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ

Общие сведения

Под растяжением или сжатием понимается такой вид нагружения стержня (бруса), при котором возникают только внутренние нормальные (продольные) силы, направленные вдоль его продольной оси.

При растяжении продольная сила направлена по внешней нормали к сечению и принимается положительной, а при сжатии — по внутренней и считается отрицательной.

Значение продольной силы в любой отсеченной части стержня находится методом сечений на основе уравнений статики из условия равновесия этой части стержня.

Вычислив значения продольных сил в характерных сечениях стержня, строят эпюру продольных сил, представляющую собой диаграмму изменения значения продольной силы по длине стержня при заданных внешних нагрузках.

Нормальные напряжения в любом поперечном сечении стержня, достаточно удаленном от места приложения нагрузки, принимаются равномерно распределенными по сечению, а их значение определяется по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (1.1)$$

При растяжении нормальные напряжения принимаются положительными, при сжатии — отрицательными.

Если стержень имеет отверстия, выточки и т.п., то среднее нормальное напряжение по ослабленному поперечному сечению

$$\sigma = \frac{N}{A_{nt}} \quad (1.2)$$

Фактическая площадь поперечного сечения в месте ослабления вычисляется следующим образом:

$$A_{nt} = A - A_{op}$$

где A_{op} — площадь отверстий, выточек и т.п. в сечении.

Под влиянием внешних нагрузок стержень изменяет свою первоначальную длину. Абсолютное удлинение (укорочение) участка стержня

$$\Delta l = l_1 - l$$

где l_1 — длина участка стержня после приложения нагрузки.

Относительное удлинение (укорочение) участка бруса

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (1.3)$$

Эту величину называют также относительной продольной деформацией или линейной деформацией.

При упругой работе материала имеет место линейная зависимость между напряжениями и деформациями, называемая законом Гука:

$$\sigma = E \epsilon. \quad (1.4)$$

Подставляя выражения (1.1) и (1.3) в формулу (1.4), можно вычислить изменение длины участка стержня

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \quad (1.5)$$

Полное удлинение (укорочение) ступенчатого стержня, а также стержня с несколькими участками, в пределах которых E , N и A не изменяются, определяется алгебраическим суммированием удлинений (укорочений) всех его участков:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{E_i A_i}. \quad (1.6)$$

Если, например, N и A переменны по длине участков стержня, то полное удлинение стержня

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} \int \frac{N(z)}{A(z)} dz. \quad (1.7)$$

В уравнении (1.7) интегрирование производится в пределах каждого участка, а суммирование — по всем участкам стержня.

При вычислении полного удлинения (укорочения) стержня, а также отдельных его участков не следует отождествлять понятия линейной деформации и перемещения, ибо в некоторых случаях участок стержня может перемещаться, но находится в недеформированном состоянии.

Стержни, работающие на сжатие или растяжение, испытывают, помимо продольных деформаций, и поперечные, которые определяются следующим образом:

$$\Delta b = b - b_1,$$

где b_1 — ширина стержня после деформации.

Тогда относительная поперечная деформация

$$\epsilon' = \frac{\Delta b}{b}.$$

Абсолютная величина отношения относительной поперечной деформации ϵ' к относительной продольной деформации ϵ называется коэффициентом Пуассона:

$$\nu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right|. \quad (1.8)$$

Значение этого коэффициента для различных изотропных материалов изменяется в пределах $0 \leq \nu \leq 0,5$.

Если известен коэффициент Пуассона, можно вычислить изменение объема стержня при растяжении или сжатии и найти относительное изменение объема:

$$\Delta V = A l \epsilon (1 - 2\nu);$$

$$\epsilon_v = \frac{\Delta V}{V} = \epsilon (1 - 2\nu), \quad (1.9)$$

где $A l$ — первоначальный объем стержня до деформации.

Пример 1.1. Для двухступенчатого стержня (рис. 1.1, а) построить эпюры продольных сил, напряжений, перемещений и дать оценку прочности материала. Внешние силы приложены в средней части стержней.

Дано: $F_1 = 60 \text{ кН}$; $F_2 = 120 \text{ кН}$; $A_1 = 12 \text{ см}^2$; $A_2 = 6 \text{ см}^2$; $l_1 = 80 \text{ см}$; $l_2 = 50 \text{ см}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\nu = 0,210 \text{ МПа}$.

Решение. С целью определения значений продольных сил в различных сечениях выделим характерные сечения двухступенчатого стержня, в которых найдем продольные силы. Последовательность вычислений приводится на рис. 1.1, б.

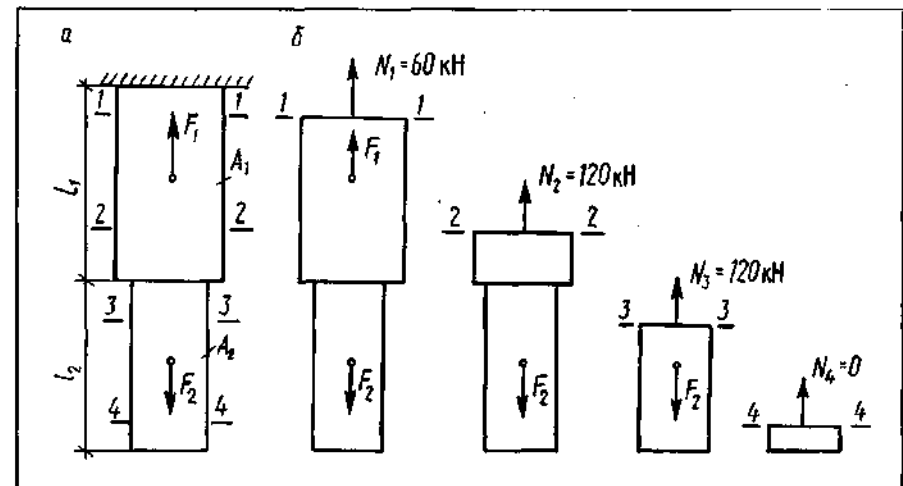


Рис. 1.1. Использование метода сечений для определения продольных сил в некоторых сечениях ступенчатого стержня

На основании найденных значений продольных сил в характерных сечениях стержня строим эпюру продольных сил (рис. 1.2). Нормальные напряжения в тех же сечениях определим по формуле (1.1):

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{60 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} = 50 \cdot 10^6 \text{ Па} = 50 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{120 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{120 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 200 \cdot 10^6 \text{ Па} = 200 \text{ МПа}.$$

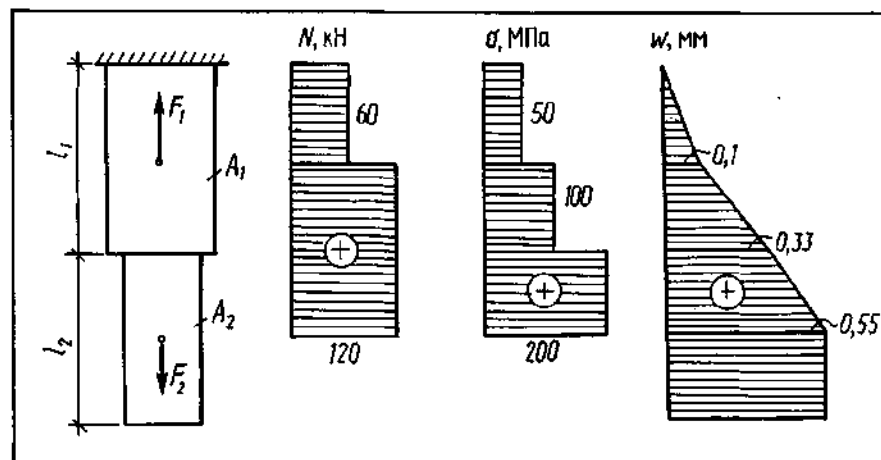


Рис. 1.2. Эпюры продольных сил, напряжений и перемещений для ступенчатого стержня

По этим данным строим эпюру напряжений (см. рис. 1.2).

Для определения перемещений отдельных сечений двухступенчатого стержня по формуле (1.5) вычислим абсолютные деформации отдельных участков стержня:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1 / 2}{EA_1} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 0,8 / 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} = 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,1 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2 / 2}{EA_1} = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 0,8 / 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,2 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_2 / 2}{EA_2} = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 0,5 / 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,25 \text{ мм};$$

$$\Delta l_4 = 0.$$

Найдем перемещения характерных сечений стержня:

$$w_1 = \Delta l_1 = 0,1 \text{ мм};$$

$$w_2 = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0,3 \text{ мм};$$

$$w_3 = w_2 + \Delta l_3 = 0,55 \text{ мм}.$$

Сечение 4—4 ступенчато перемещается на 0,55 мм.

На основании результатов этих расчетов построим эпюру перемещений (см. рис. 1.2).

Прочность материала стержня проверим в сечении, где напряжение наибольшее (в сечении 3—3):

$$\sigma_{\max} = \frac{N_3}{A_2} = 200 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Следовательно, недонапряжение материала стержня составляет

$$\frac{210 - 200}{210} \cdot 100 = 4,8 \, \%.$$

Исходные данные к работе

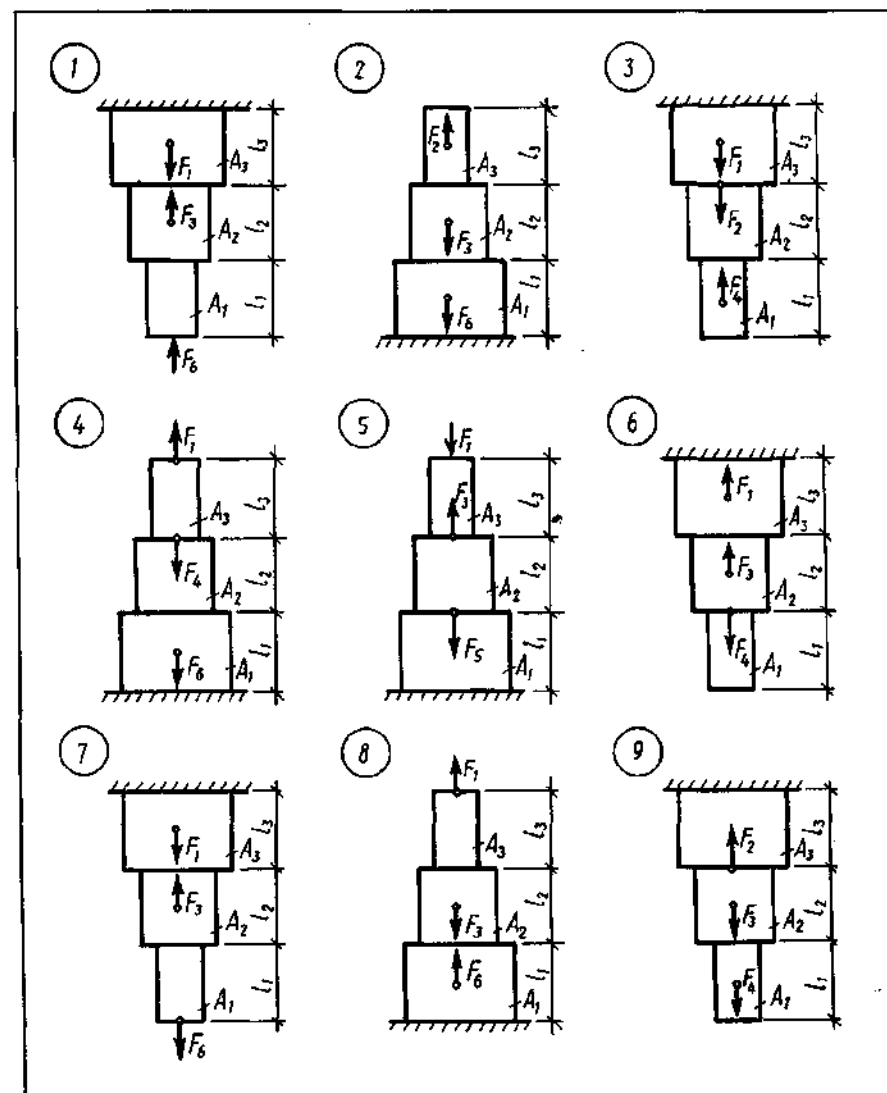
Ступенчатый стержень находится под действием продольных расчетных сил F , приложенных по концам или в центре соответствующего участка стержня. Материал стержня — сталь с расчетным сопротивлением $R = 210$ МПа.

Требуется:

- 1) построить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений;
- 2) оценить прочность стержня.

Схемы для расчета приведены ниже, числовые данные — в табл. 1.1.

СХЕМЫ К РАБОТЕ



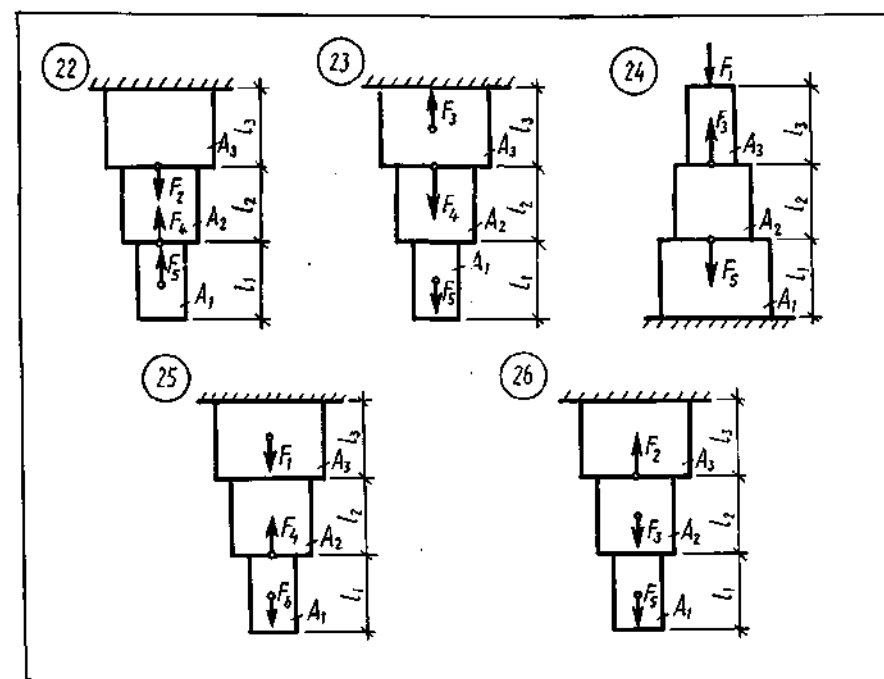
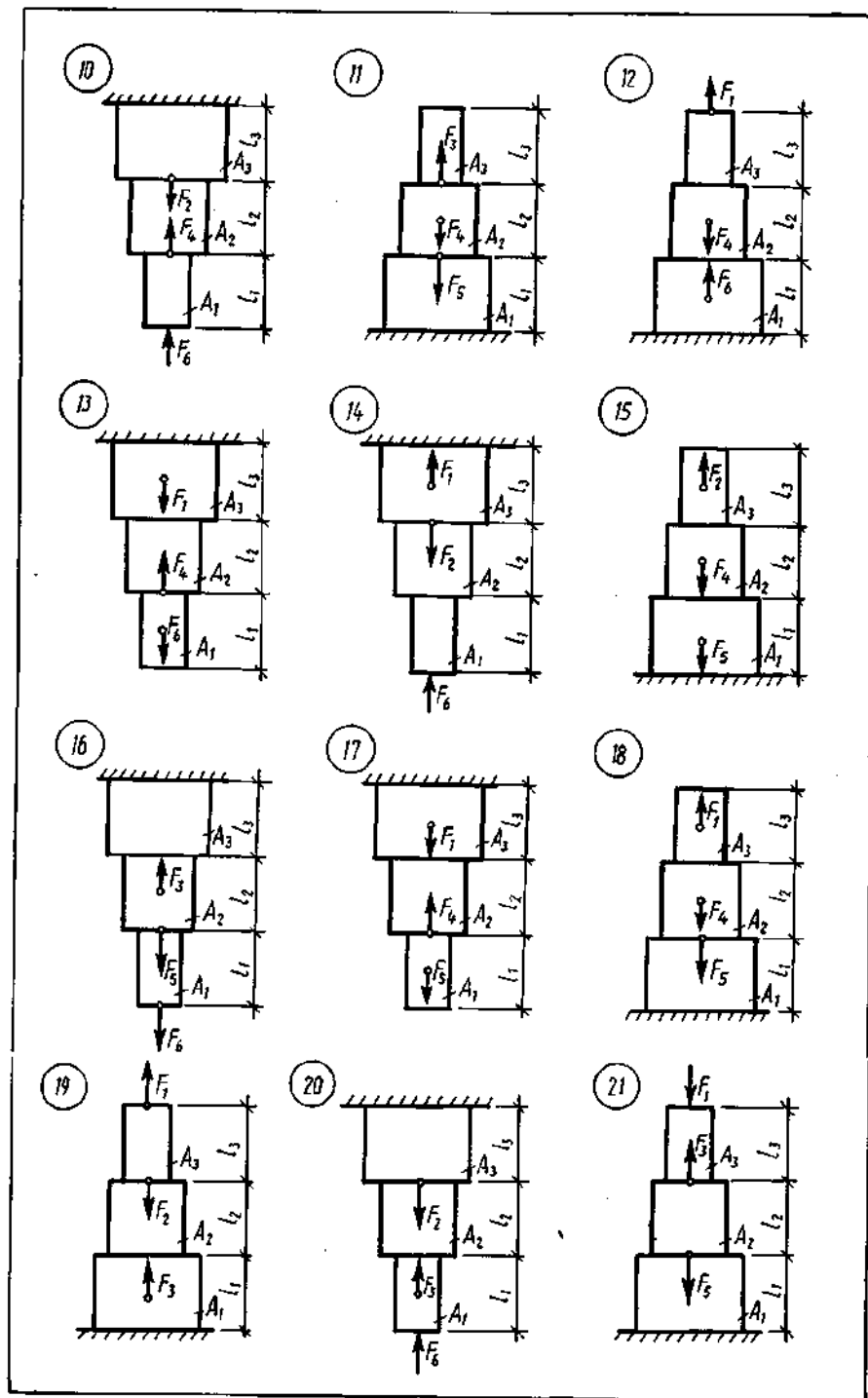


Табл. 1.1. Числовые данные к работам 1 и 2

Номер задания	Длина участка, см			Площадь поперечного сечения, см ²			Нагрузка, кН					
	l_1	l_2	l_3	A_1	A_2	A_3	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	40	80	50	8	4	6	60	180	160	140	100	80
2	60	46	70	10	4	4	120	80	200	160	120	60
3	80	40	30	14	4	8	80	140	160	60	60	80
4	42	60	80	12	8	6	100	140	100	120	40	60
5	52	42	62	12	16	8	60	120	160	80	100	40
6	78	50	60	8	4	16	120	80	140	100	60	120
7	30	80	42	10	12	6	80	100	120	80	60	80
8	42	62	50	6	12	4	120	140	100	60	80	60
9	60	30	48	10	4	8	140	80	60	100	120	40
10	70	50	60	6	8	4	100	120	100	140	40	80
11	62	36	72	12	6	6	120	100	80	60	120	100
12	64	40	64	10	4	4	140	100	120	80	140	80
13	74	48	62	6	8	6	40	120	80	160	200	60
14	54	68	48	4	8	12	180	200	140	100	80	100
15	40	64	72	8	12	8	60	40	140	160	180	60
16	36	80	70	6	10	4	140	100	160	180	120	80
17	50	40	62	4	12	8	60	160	80	120	100	60

Окончание табл. 1.1.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
18	80	80	40	4	8	10	180	100	140	160	120	120
19	56	46	32	12	6	8	60	160	80	120	100	60
20	60	74	42	6	12	4	140	100	160	180	200	80
21	70	30	40	4	12	6	60	80	160	140	100	80
22	80	40	62	10	4	4	180	140	100	160	140	100
23	44	62	42	6	8	10	140	80	60	180	160	80
24	38	70	60	12	4	6	120	140	120	100	160	140
25	64	30	44	8	6	4	160	120	80	60	160	100
26	70	60	50	4	8	10	180	160	80	100	120	140
27	28	48	80	12	8	6	80	140	60	120	100	160
28	34	70	60	8	10	4	140	200	100	120	80	120
29	62	40	50	6	12	6	60	180	160	140	100	80
30	50	60	48	8	10	8	180	100	140	120	80	80

Программа для МК БЗ-34

Программа предназначена для вычисления продольных сил, нормальных напряжений, абсолютных деформаций и перемещений в ступенчатом стержне. Ступени стержня могут быть из различных материалов, что учитывается в расчете соответствующими модулями упругости. Число характерных участков n не должно превышать девяти.

При подготовке данных необходимо пронумеровать расчетные участки стержня, силы, площади сечений и модули упругости, начиная от заземления как показано на рис. 1.3.

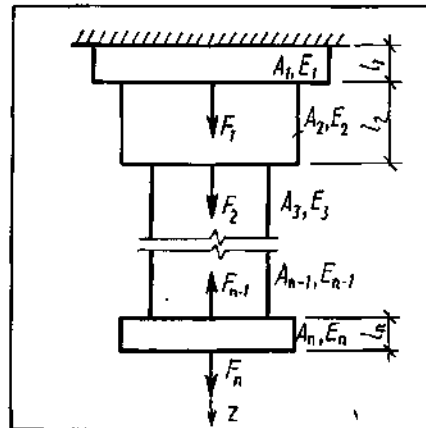


Рис. 1.3. Нумерация характерных участков ступенчатого стержня, сил, площадей сечений и модулей упругости

В характерных сечениях стержня, где сосредоточенная внешняя сила отсутствует, ее считают равной нулю (при вводе данных заносят нуль). Силы, на-

Табл. 1.2. Текст программы

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
	БП23							
	ФПРГ		33	÷	13	44	ИП1	61
23	ПО	40	34	С/П	50	45	—	11
24	П1	41	35	÷	13	46	П4	44
25	1	01	36	×	12	47	0	00
26	4	04	37	КП2	12	48	КИП4	Г4
27	П2	42	38	С/П	50	49	+	10
28	0	00	39	Ф	25	50	С/П	50
29	С/П	50	40	FL0	5Г	51	FL1	5L
30	+	10	41	29	29	52	48	48
31	↑	0E	42	1	01	53	С/П	50
32	С/П	50	43	3	03		F АВТ	

Табл. 1.3. Последовательность ввода данных и результаты расчета

Вводимая величина	Операция на МК	Результат	Вводимая величина	Операция на МК	Результат
n	БП23			С/П	
F_n	С/П	N_n	F_1	С/П	N_1
A_n	С/П	σ_n	A_1	С/П	σ_1
l_n	↑		l_1	↑	
E_n	С/П	Δl_n	E_1	С/П	Δl_1
F_{n-1}	С/П	N_{n-1}		С/П	w_1
A_{n-1}	С/П	σ_{n-1}		С/П	w_2
l_{n-1}	↑			...	...
E_{n-1}	С/П	Δl_{n-1}		С/П	w_n
...	...	...			

правленные в сторону незакрепленного конца стержня, считаются положительными, а в сторону заземления — отрицательными.

Для расчета стержня по программе необходимо выполнить следующие действия:

- 1) ввести программу, набирая команды на клавиатуре калькулятора согласно табл. 1.2;
- 2) выполнить расчет по программе, последовательно занося данные и фиксируя результаты в порядке, приведенном в табл. 1.3.

Результаты расчета ступенчатого стержня (см. пример 1.1) представлены в табл. 1.4.

Т а б л. 1.4. Расчет ступенчатого стержня по программе (см. пример 1.1)

Вводимая величина		Операция на МК	Результат	
обозначение	значение		обозначение	значение
БП23				
n	4	С/П		
F_4	0	С/П	N_4	0
A_4	$6 \cdot 10^{-4}$	С/П	σ_4	0
l_4	0,25	↑		
E_4	$200 \cdot 10^9$	С/П	Δl_4	0
		С/П		
F_3	$120 \cdot 10^3$	С/П	N_3	$120 \cdot 10^3$
A_3	$6 \cdot 10^{-4}$	С/П	σ_3	$200 \cdot 10^6$
l_3	0,25	↑		
E_3	$200 \cdot 10^9$	С/П	Δl_3	$0,25 \cdot 10^{-3}$
		С/П		
F_2	0	С/П	N_2	$120 \cdot 10^3$
A_2	$12 \cdot 10^{-4}$	С/П	σ_2	$100 \cdot 10^6$
l_2	0,4	↑		
E_2	$200 \cdot 10^9$	С/П	Δl_2	$0,2 \cdot 10^{-3}$
		С/П		
F_1	$-60 \cdot 10^3$	С/П	N_1	$60 \cdot 10^3$
A_1	$12 \cdot 10^{-4}$	С/П	σ_1	$50 \cdot 10^6$
l_1	0,4	↑		
E_1	$200 \cdot 10^9$	С/П	Δl_1	$0,1 \cdot 10^{-3}$
		С/П	w_1	$0,1 \cdot 10^{-3}$
		С/П	w_2	$0,3 \cdot 10^{-3}$
		С/П	w_3	$0,55 \cdot 10^{-3}$
		С/П	w_4	$0,55 \cdot 10^{-3}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие силы называются поверхностными и объемными, активными и реактивными, постоянными и временными, статическими и динамическими?
2. Дайте определения понятий: стержень (брус), пластинка, оболочка, массивное тело.
3. Охарактеризуйте основные свойства твердого деформируемого тела: упругость, пластичность и ползучесть.
4. Дайте определение полного, нормального и касательного напряжений.
5. Какие внутренние силы возникают в поперечном сечении стержня?
6. Дайте определение простейших деформаций стержня: сжатия, сдвига, кручения и изгиба.

7. В чем различие между реальным объектом и его расчетной схемой?

8. В чем заключается сущность метода сечений?

9. Что называется модулем продольной упругости, как он влияет на деформации стержня?

10. Сформулируйте закон Гука.

11. Дайте определение абсолютной и относительной поперечных деформаций стержня.

12. Дайте определения коэффициента поперечной деформации (коэффициента Пуассона), назовите пределы изменения его значений.

РАБОТА 2. ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОГО ПРЯМОГО СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ

Общие сведения

Статически неопределимыми называются такие стержни (рис. 1.4, а), нахождение усилий в которых методами статики невозможно.

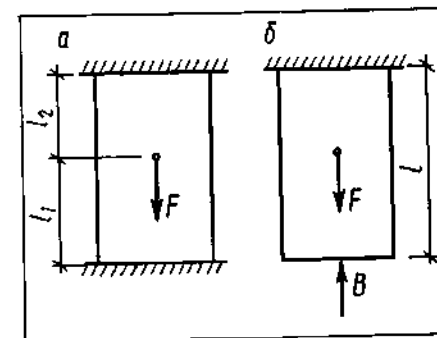


Рис. 1.4. Расчетная схема стержня, заделанного по концам

Для раскрытия статической неопределимости стержня отбрасывают одну заделку и заменяют ее неизвестной опорной реакцией B (рис. 1.4, б). Значение этой реакции определяется из условия, что сечение в отброшенной заделке не перемещается:

$$\Delta l = \frac{F l_2}{EA} - \frac{B l}{EA} = 0. \quad (1.10)$$

Аналогичным образом находится и опорная реакция в верхней заделке. Равенство нулю суммы проекций на вертикальную ось внешних нагрузок и опорных реакций свидетельствует о правильности вычисления последних.

После нахождения опорных реакций анализ напряженно-деформированного состояния стержня производится как для статически определимого (см. работу 1).

Если между концом стержня и опорой имеется зазор (рис. 1.5, а), то вначале производится проверка возможности перекрытия этого зазора при удлинении стержня под действием внешних сил. С этой целью отбрасывается ниж-

няя опора (рис. 1.5, б) и находится удлинение стержня как статически определимого:

$$\Delta l = \frac{F l_2}{EA}$$

Если это удлинение меньше зазора Δ , стержень рассматривается как статически определимый. В противном случае стержень является статически неопределимым (рис. 1.5, в) и необходимо найти опорные реакции. С этой целью используется уравнение (1.10), но в его правую часть подставляется величина зазора:

$$\frac{F l_2}{EA} - \frac{B l}{EA} = \Delta. \quad (1.11)$$

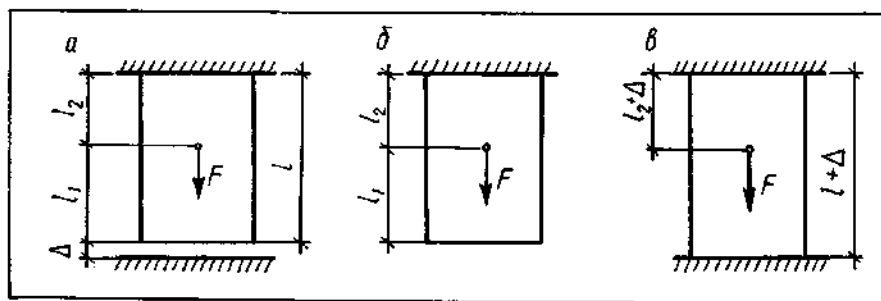


Рис. 1.5. Расчетная схема стержня с зазором

Таким же образом находится опорная реакция в верхней заделке и в дальнейшем при анализе напряженно-деформированного состояния стержень рассматривается как статически определимый.

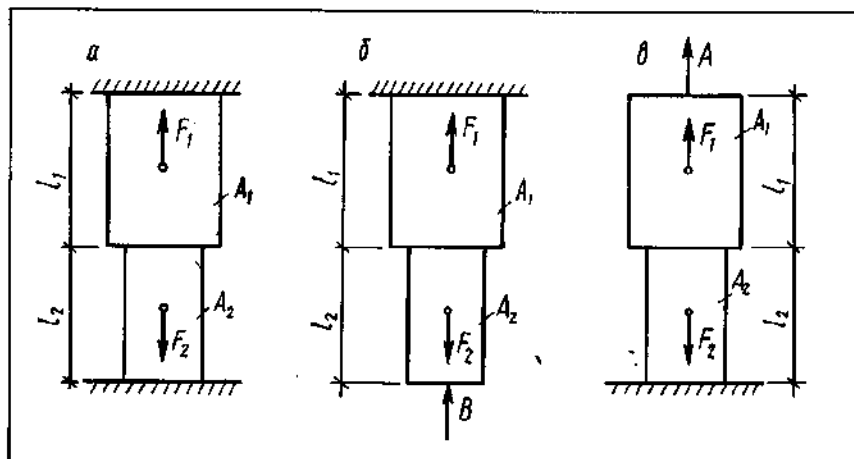


Рис. 1.6. Расчетная схема статически неопределимого стержня

Пример 1.2. Для двухступенчатого статически неопределимого стержня (рис. 1.6, а) найти опорные реакции, построить эпюры продольных сил, напряжений, перемещений и оценить прочность стержня. Внешние силы приложены в средней части стержней.
Дано: $F_1 = 120 \text{ кН}$; $F_2 = 160 \text{ кН}$; $A_1 = 10 \text{ см}^2$; $A_2 = 8 \text{ см}^2$; $l_1 = 60 \text{ см}$; $l_2 = 80 \text{ см}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $R = 210 \text{ МПа}$.

Решение. Для определения значения нижней опорной реакции отбрасываем нижнее защемление и заменяем его неизвестной опорной реакцией B (рис. 1.6, б), значение которой находим из уравнения (1.10):

$$\Delta l_B = - \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} + \frac{160 \cdot 10^3 \cdot 0,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} + \frac{160 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 8 \cdot 10^{-4}} -$$

$$- \frac{B \cdot 0,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} - \frac{B \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 0.$$

После этого вычисляем значение реакции $B = 87,5 \text{ кН}$.

Реакцию в верхней заделке определяем аналогичным образом, т.е. отбрасываем защемление и заменяем его неизвестной опорной реакцией A (рис. 1.6, в), вычисляемой из условия

$$\Delta l_A = \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 0,3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} + \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 8 \cdot 10^{-4}} - \frac{160 \cdot 10^3 \cdot 0,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 8 \cdot 10^{-4}} +$$

$$+ \frac{A \cdot 0,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} + \frac{A \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 0.$$

Решив уравнение, получаем $A = -47,5 \text{ кН}$. В данном случае знак минус означает, что направление верхней опорной реакции A нужно изменить на обратное.

Для проверки правильности вычисления опорных реакций составляем уравнение проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\Sigma Y = F_1 + B - F_2 - A = 120 + 87,5 - 160 - 47,5 = 0.$$

Далее на основе метода сечений находим значения продольных сил в характерных сечениях стержня (рис. 1.7) и строим эпюру продольных сил (рис. 1.8).

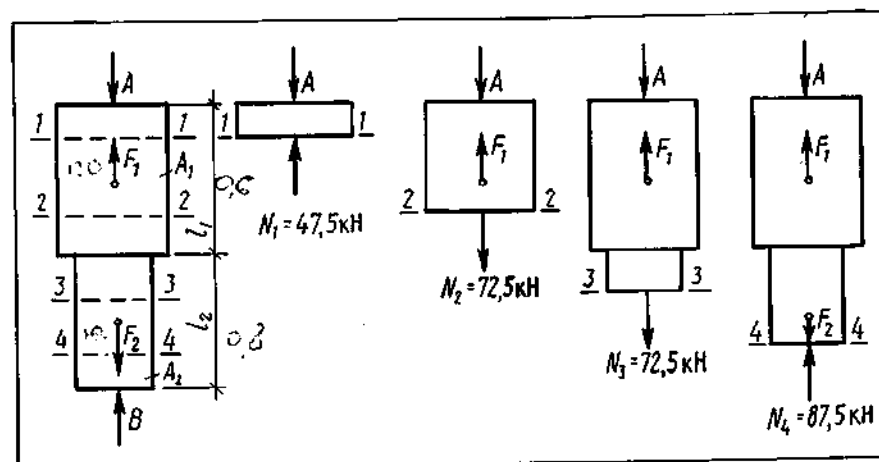


Рис. 1.7. Определение значений продольных сил в характерных сечениях статически неопределимого стержня

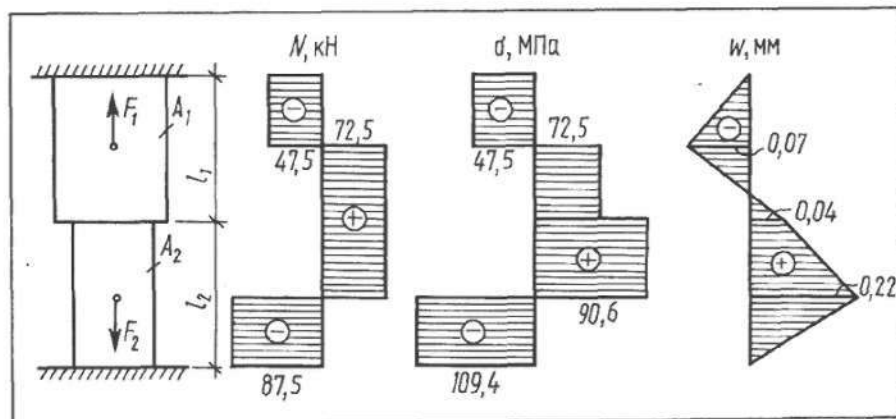


Рис. 1.8. Эпюры продольных сил, напряжений и перемещений для статически неопределимого стержня

Нормальные напряжения в характерных сечениях стержня вычисляем по формуле (1.1):

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{47,5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -47,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{72,5 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 72,5 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{72,5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}} = 90,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_2} = -\frac{87,5 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^{-4}} = -109,4 \text{ МПа}.$$

На основании полученных значений нормальных напряжений строим эпюру σ (см. рис. 1.8).

Для определения перемещений отдельных сечений стержня вычисляем абсолютные деформации отдельных его участков:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1 / 2}{EA_1} = \frac{-47,5 \cdot 10^3 \cdot 0,6 / 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -0,07 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,07 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_1 / 2}{EA_1} = \frac{72,5 \cdot 10^3 \cdot 0,6 / 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 0,11 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,11 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_2 / 2}{EA_2} = \frac{72,5 \cdot 10^3 \cdot 0,8 / 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = 0,18 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,18 \text{ мм};$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 l_2 / 2}{EA_2} = \frac{-87,5 \cdot 10^3 \cdot 0,8 / 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 8 \cdot 10^{-4}} = -0,22 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,22 \text{ мм}.$$

Перемещения характерных сечений стержня находим суммированием абсолютных деформаций отдельных участков стержня:

$$w_1 = \Delta l_1 = -0,07 \text{ мм};$$

$$w_2 = w_1 + \Delta l_2 = -0,07 + 0,11 = 0,04 \text{ мм};$$

$$w_3 = w_2 + \Delta l_3 = 0,04 + 0,18 = 0,22 \text{ мм};$$

$$w_4 = w_3 + \Delta l_4 = 0,22 + (-0,22) = 0.$$

По результатам этих расчетов строим эпюру перемещений (см. рис. 1.8).

Прочность материала стержня проверим в сечении, где напряжение наибольшее по модулю, т.е. в сечении 4-4:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{|N_4|}{A_2} = 109,5 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

В этом случае недонапряжение материала стержня составляет

$$\left| \frac{210 - 109,5}{210} \right| 100 = 47,9 \text{ \%}.$$

Пример 1.3. Двухступенчатый стержень зашлеплен в верхнем конце. Зазор между нижним концом стержня и опорой $\Delta = 0,2 \text{ мм}$ (рис. 1.9, а). Требуется построить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений.

Дано: $F_1 = 60 \text{ кН}$; $F_2 = 120 \text{ кН}$; $A_1 = 12 \text{ см}^2$; $A_2 = 6 \text{ см}^2$; $l_1 = 80 \text{ см}$; $l_2 = 50 \text{ см}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Решение. Отбрасываем зашлепление в нижнем сечении (рис. 1.9, б) и определяем удлинение стержня как статически определимого:

$$\begin{aligned} \Delta l &= \frac{F_1 l_1 / 2}{EA_1} + \frac{F_2 l_1}{EA_1} + \frac{F_2 l_2 / 2}{EA_2} = -\frac{60 \cdot 10^3 \cdot 0,8 / 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} + \\ &+ \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} + \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 0,5 / 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,55 \text{ мм}. \end{aligned}$$

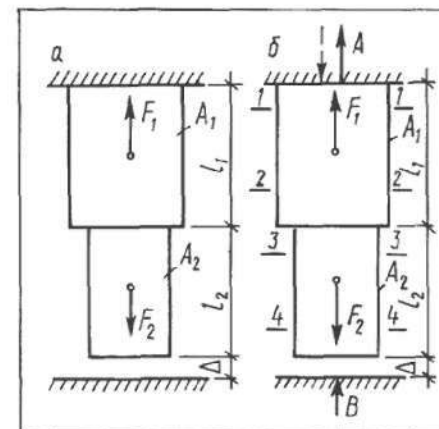


Рис. 1.9. Расчетная схема статически неопределимого стержня с зазором

Так как удлинение стержня больше $\Delta = 0,2$ мм, то зазор в процессе деформирования стержня закрывается, т.е. система становится статически неопределимой.

Для определения нижней опорной реакции составим уравнение

$$\Delta l_F - \Delta l_B = \Delta,$$

где Δl_F и Δl_B — абсолютные удлинения от внешней нагрузки F и от опорной реакции B .

Подставляя числовые данные, получаем

$$-\frac{60 \cdot 10^3 \cdot 0,8/2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} + \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} + \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 0,5/2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} -$$

$$-\frac{B \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} - \frac{B \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 0,0002.$$

После вычислений находим, что $B = 46,67$ кН.

Аналогичным образом, отбрасывая верхнее заземление, определяем значение реакции A :

$$\frac{60 \cdot 10^3 \cdot 0,8/2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} + \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} - \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 0,5/2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} -$$

$$-\frac{A \cdot 0,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} - \frac{A \cdot 0,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 0,0002.$$

Решив это уравнение, получаем $A = -13,33$ кН. На расчетной схеме меняем направление реакции A .

С целью проверки точности вычислений опорных реакций проецируем все силы на вертикальную ось:

$$\Sigma Y = F_1 - F_2 + B + A = -60 + 120 - 46,67 - 13,33 = 0.$$

Используя метод сечений, находим продольные силы в характерных сечениях (рис. 1.9, б): $N_1 = 13,33$ кН; $N_2 = 73,33$ кН; $N_3 = 73,33$ кН; $N_4 = -46,67$ кН. Эпюра продольных сил приведена на рис. 1.10.

Нормальные напряжения в характерных сечениях стержня определяем по формуле (1.1) следующим образом:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{13,33 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} = 11,11 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_1} = \frac{73,33 \cdot 10^3}{12 \cdot 10^{-4}} = 61,11 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_2} = \frac{73,33 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 122,22 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A_2} = \frac{-46,7 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = -77,78 \text{ МПа}.$$

Эпюру нормальных напряжений см. на рис. 1.10.

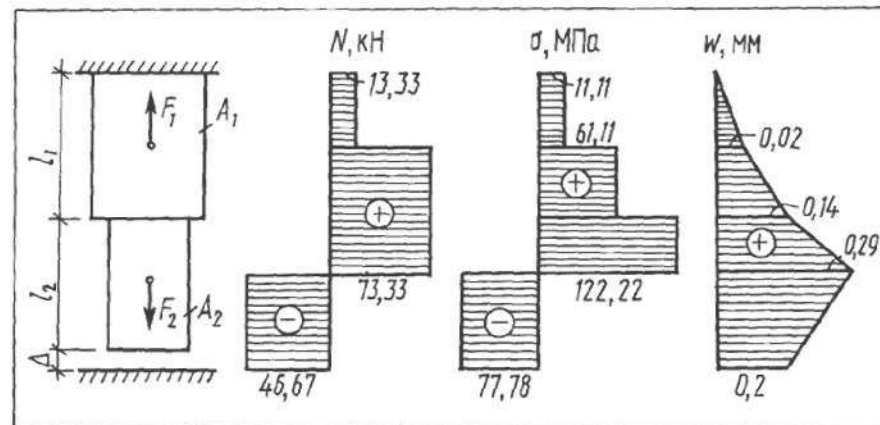


Рис. 1.10. Эпюры продольных сил, нормальных напряжений и вертикальных перемещений для статически неопределимого стержня

Абсолютные деформации отдельных участков стержня:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1/2}{EA_1} = \frac{13,33 \cdot 10^3 \cdot 0,8/2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} = 0,02 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,02 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_1/2}{EA_1} = \frac{73,33 \cdot 10^3 \cdot 0,8/2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} = 0,12 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,12 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_2/2}{EA_2} = \frac{73,33 \cdot 10^3 \cdot 0,5/2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 0,15 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,15 \text{ мм};$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 l_2/2}{EA_2} = \frac{-46,67 \cdot 10^3 \cdot 0,5/2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = -0,09 \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,09 \text{ мм}.$$

Перемещения характерных сечений стержня находим следующим образом:

$$w_1 = \Delta l_1 = 0,02 \text{ мм};$$

$$w_2 = w_1 + \Delta l_2 = 0,02 + 0,12 = 0,14 \text{ мм};$$

$$w_3 = w_2 + \Delta l_3 = 0,14 + 0,15 = 0,29 \text{ мм};$$

$$w_4 = w_3 + \Delta l_4 = 0,29 - 0,09 = 0,2 \text{ мм}.$$

Эпюра вертикальных перемещений отдельных участков стержня приведена на рис. 1.10.

Исходные данные к работе

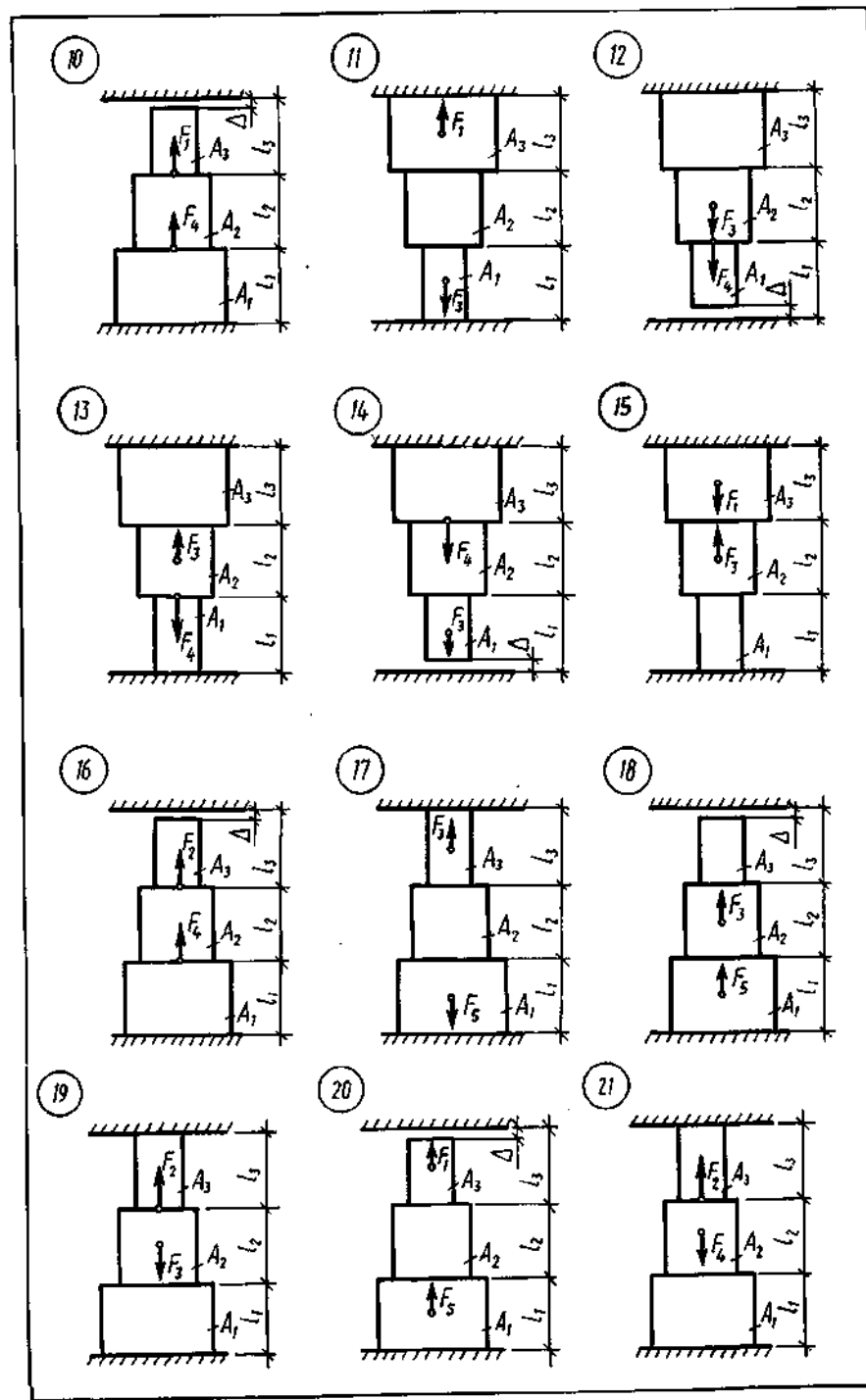
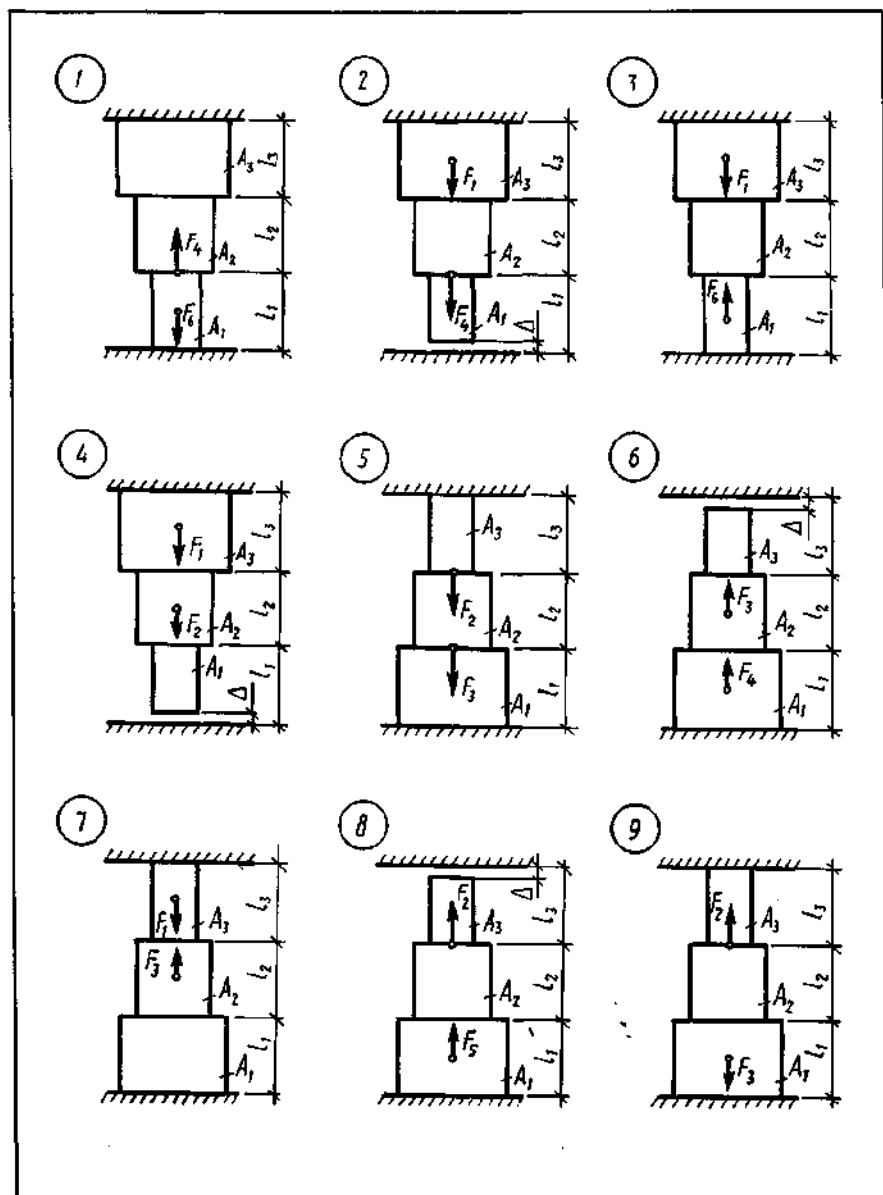
Ступенчатый стержень нагружен продольными расчетными силами F_i . Материал стержня — сталь с расчетным сопротивлением $R = 210$ МПа, зазор $\Delta = 0,1$ мм. Внешние силы приложены к участкам на концах элементов стержня или в его средней части.

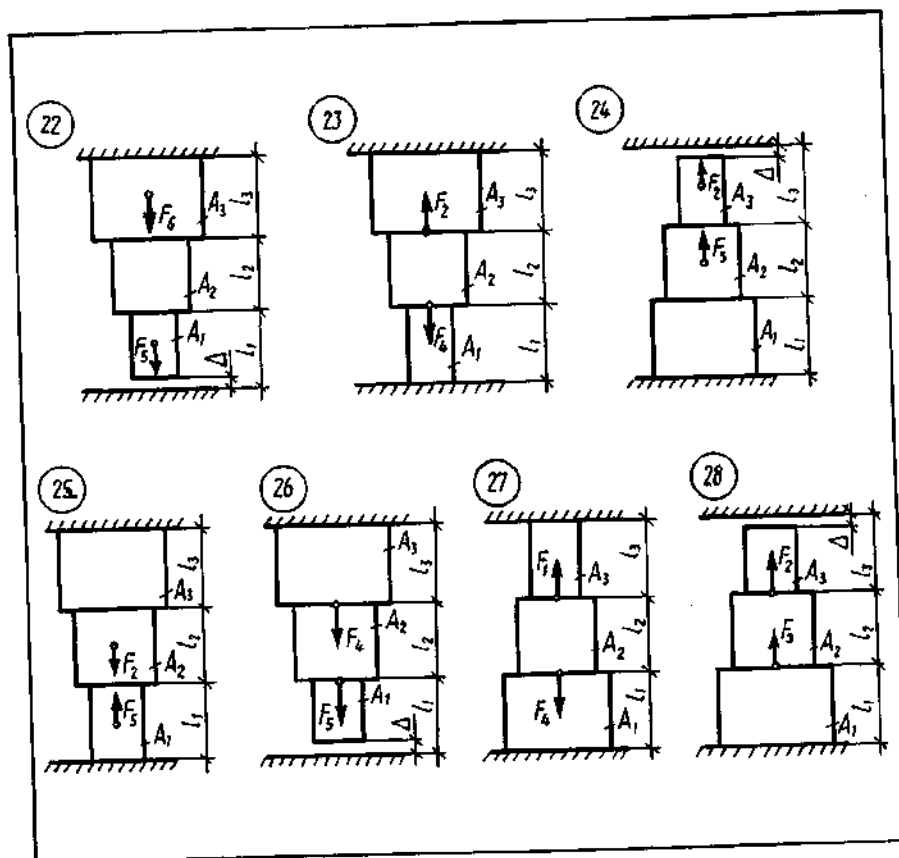
Требуется:

- 1) определить опорные реакции;
- 2) построить эпюры продольных сил, напряжений и перемещений;
- 3) оценить прочность стержня.

Схемы для расчета приведены ниже, числовые данные — в табл. 1.1.

СХЕМЫ К РАБОТЕ





Программа для МК БЗ-34

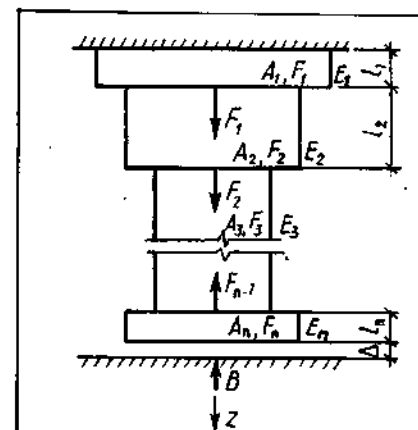
Программа предназначена для вычисления опорной реакции при расчете статически неопределимого ступенчатого стержня. Модули упругости ступеней стержня могут быть различными. Число характерных участков не ограничивается.

При подготовке данных необходимо:

- 1) нумерацию участков стержня, сил, площадей сечений и модулей упругости начинать с конца стержня, противоположного тому, где вычисляется реакция (рис. 1.11);
- 2) силы, направленные в сторону опоры, где вычисляется реакция, считать положительными;
- 3) если на какой-либо границе между характерными участками сила отсутствует, ее следует принимать равной нулю (при вводе данных занести нуль);
- 4) если расстояние между опорами больше суммарной длины стержня, зазор следует считать положительным;
- 5) в случае отсутствия зазора он принимается равным нулю (при вводе данных занести нуль).

Для вычисления реакции опоры при расчете статически неопределимого ступенчатого стержня необходимо:

Рис. 1.11. Нумерация характерных участков статически неопределимого стержня с зазором, сил, площадей сечений и модулей упругости



- 1) ввести программу согласно табл. 1.5;
- 2) выполнить расчет по программе, заноса данные в порядке, указанном в табл. 1.6.

По окончании выполнения программы индицируется значение реакции B .

Если реакция получается отрицательной, это означает, что общая деформация стержня меньше величины зазора и стержень работает как статически определимый. Вычисление продольных сил, нормальных напряжений и перемещений осуществляется так же, как и для статически определимого стержня по программе, приведенной в табл. 1.2. При этом, если $B \geq 0$, следует принять $F_n = -B$, если $B < 0$, то $F_n = 0$.

Табл. 1.5. Текст программы

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
	ФПРГ		08	С/П	50	17	С/П	50
00	ПО	40	09	х	12	18	—	11
01	0	00	10	ИП2	62	19	XY	14
02	П2	42	11	+	10	20	÷	13
03	С/П	50	12	П2	42	21	С/П	50
04	х	12	13	FC	25		FAST	
05	÷	13	14	FLO	5Г			
06	+	10	15	03	03			
07	↑	0E	16	ИП2	62			

Табл. 1.6. Последовательность ввода данных при работе по программе

Вводимая величина	Операция на МК	Вводимая величина	Операция на МК
n	В/О	l_n	↑
l_1	С/П	E_n	↑
E_1	↑	A_n	С/П
A_1	С/П	F_n	С/П
F_1	С/П	Δ	С/П
...	...	...	...

Т а б л. 1.7. Вычисление опорной реакции ступенчатого стержня по программе (см. пример 1.2)

Вводимая величина		Операция на МК	Вводимая величина		Операция на МК
обозначение	значение		обозначение	значение	
n	4	В/О	l_3	0,4	$\uparrow$
l_1	0,3	С/П	E_3	$200 \cdot 10^9$	$\uparrow$
E_1	$200 \cdot 10^9$	$\uparrow$	A_3	$8 \cdot 10^{-4}$	С/П
A_1	$10 \cdot 10^{-4}$	С/П	F_3	$160 \cdot 10^3$	С/П
F_1	$-120 \cdot 10^3$	С/П	l_4	0,4	$\uparrow$
l_2	0,3	$\uparrow$	E_4	$200 \cdot 10^9$	$\uparrow$
E_2	$200 \cdot 10^9$	$\uparrow$	A_4	$8 \cdot 10^{-4}$	С/П
A_2	$10 \cdot 10^{-4}$	С/П	F_4	0	С/П
F_2	0	С/П	Δ	0	С/П

Т а б л. 1.8. Расчет ступенчатого стержня по программе (см. пример 1.2)

Вводимая величина		Операция на МК	Результат	
обозначение	значение		обозначение	значение
1	2	3	4	5
n	4	БП23		
F_4	-87500	С/П	N_4	-87500
A_4	$8 \cdot 10^{-4}$	С/П	σ_4	$-109,375 \cdot 10^6$
l_4	0,4	$\uparrow$		
E_4	$200 \cdot 10^9$	С/П	Δl_4	$-0,21875 \cdot 10^{-3}$
F_3	$160 \cdot 10^3$	С/П	N_3	72500
A_3	$8 \cdot 10^{-4}$	С/П	σ_3	$90,625 \cdot 10^6$
l_3	0,4	$\uparrow$		
E_3	$200 \cdot 10^9$	С/П	Δl_3	$0,18125 \cdot 10^{-3}$
F_2	0	С/П	N_2	72500
A_2	$10 \cdot 10^{-4}$	С/П	σ_2	$72,50 \cdot 10^6$
l_2	0,3	$\uparrow$		
E_2	$200 \cdot 10^9$	С/П	Δl_2	$0,10875 \cdot 10^{-3}$
F_1	$-120 \cdot 10^3$	С/П	N_1	-47500

О к о н ч а н и е т а б л. 1.8.

1	2	3	4	5
A_1	$10 \cdot 10^{-4}$	С/П	σ_1	$-47,5 \cdot 10^6$
l_1	0,3	$\uparrow$		
E_1	$200 \cdot 10^9$	С/П	Δl_1	$-0,07125 \cdot 10^{-3}$
		С/П	w_1	$-0,07125 \cdot 10^{-3}$
		С/П	w_2	$0,0375 \cdot 10^{-3}$
		С/П	w_3	$0,21875 \cdot 10^{-3}$
		С/П	w_4	0

Т а б л. 1.9. Вычисление опорной реакции ступенчатого стержня по программе (см. пример 1.3)

Вводимая величина		Операция на МК	Вводимая величина		Операция на МК
обозначение	значение		обозначение	значение	
	4	В/О	l_3	0,25	$\uparrow$
		С/П	E_3	$200 \cdot 10^9$	$\uparrow$
l_1	0,4	$\uparrow$	A_3	$6 \cdot 10^{-4}$	С/П
E_1	$200 \cdot 10^9$	$\uparrow$	F_3	$120 \cdot 10^3$	С/П
A_1	$12 \cdot 10^{-4}$	С/П	l_4	0,25	$\uparrow$
F_1	$-60 \cdot 10^3$	С/П	E_4	$200 \cdot 10^9$	$\uparrow$
l_2	0,4	$\uparrow$	A_4	$6 \cdot 10^{-4}$	С/П
E_2	$200 \cdot 10^9$	$\uparrow$	F_4	0	С/П
A_2	$12 \cdot 10^{-4}$	С/П	Δ	$0,2 \cdot 10^{-3}$	С/П
F_2	0	С/П			

Выполним по программе (см. табл. 1.5) расчет ступенчатого стержня, рассмотренного в примере 1.2. Вначале используем программу для вычисления опорной реакции (табл. 1.7).

По окончании расчета индицируется значение реакции $B = 87,5 \cdot 10^3$ Н.

Для определения продольных сил, напряжений и перемещений используем программу, представленную в табл. 1.2 (расчет см. в табл. 1.8).

Аналогичный расчет проводим для стержня из примера 1.3 (табл. 1.9 и 1.10).

В результате расчета по программе индицируется значение реакции $B = 46,667 \cdot 10^3$ Н. Реакция получилась со знаком плюс. Следовательно, деформация стержня равна величине зазора и стержень работает как статически неопределимый. По программе вычисляем значения продольных сил, напряжений и перемещений. При этом $F_n = -B = -46,667 \cdot 10^3$.

Т а б л. 1.10. Расчет ступенчатого стержня по программе (см. пример 1.3)

Вводимая величина		Операция на МК	Результат	
обозначение	значение		обозначение	значение
n	4	БП23		
F_4	$-46,667 \cdot 10^3$	С/П	N_4	$-46,667 \cdot 10^3$
A_4	$6 \cdot 10^{-4}$	С/П	σ_4	$-77,778 \cdot 10^6$
l_4	0,25	↑		
E_4	$200 \cdot 10^9$	С/П	Δl_4	$-0,0972 \cdot 10^{-3}$
F_3	$120 \cdot 10^3$	С/П	N_3	$73,333 \cdot 10^3$
A_3	$6 \cdot 10^{-4}$	С/П	σ_3	$122,22 \cdot 10^6$
l_3	0,25	↑		
E_3	$200 \cdot 10^9$	С/П	Δl_3	$0,1528 \cdot 10^{-3}$
F_2	0	С/П	N_2	$73,333 \cdot 10^3$
A_2	$12 \cdot 10^{-4}$	С/П	σ_2	$61,11 \cdot 10^6$
l_2	0,4	↑		
E_2	$200 \cdot 10^9$	С/П	Δl_2	$0,1222 \cdot 10^{-3}$
F_1	$-60 \cdot 10^3$	С/П	N_1	$13,333 \cdot 10^3$
A_1	$12 \cdot 10^{-4}$	С/П	σ_1	$11,111 \cdot 10^6$
l_1	0,4	↑		
E_1	$200 \cdot 10^9$	С/П	Δl_1	$0,0222 \cdot 10^{-3}$
		С/П	w_1	$0,0222 \cdot 10^{-3}$
		С/П	w_2	$0,1444 \cdot 10^{-3}$
		С/П	w_3	$0,2972 \cdot 10^{-3}$
		С/П	w_4	$0,2 \cdot 10^{-3}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как раскрывается статическая неопределимость прямого ступенчатого стержня?
2. Как проводится проверка возможности перекрытия зазора при удлинении ступенчатого стержня?
3. Что представляет собой эпюра продольных сил и как она строится?
4. Как распределены нормальные напряжения в поперечных сечениях центрально растянутого или сжатого стержня и чему они равны?
5. Как строится эпюра нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня?
6. Что представляет собой эпюра продольных перемещений?
7. Дайте определение жесткости стержня в поперечном сечении при растяжении или сжатии.
8. Как проводится проверка прочности материала стержня при растяжении или сжатии?

РАБОТА 3. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СТЕРЖНЕВЫЕ СИСТЕМЫ

Общие сведения

Стержневая система, в которой все или часть внутренних силовых факторов не могут быть вычислены только при помощи уравнений статики, называется статически неопределимой.

Степень статической неопределимости системы характеризуется числом неизвестных усилий, превышающим число уравнений статики для твердого тела. Для определения этих усилий составляются дополнительные уравнения на основе рассмотрения схемы деформирования системы. Уравнения статики и дополнительные уравнения деформирования системы позволяют найти все неизвестные усилия в стержневой статически неопределимой системе.

Метод решения статически неопределимых задач продемонстрируем на примере.

Пример 1.4. Для системы, расчетная схема которой приведена на рис. 1.12, а, определить напряжения в стержнях при заданных значениях нагрузки. Исходя из условий прочности наиболее нагруженного стержня, найти предельную нагрузку.

Дано: $F = 100 \text{ кН}$; $A_1 = 10 \text{ см}^2$; $A_2 = 15 \text{ см}^2$; $l_1 = 1 \text{ м}$; $l_2 = 2 \text{ м}$; $R = 210 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $a = 3 \text{ м}$; $b = 1 \text{ м}$; $c = 0,5 \text{ м}$; $\alpha_1 = 90^\circ$; $\alpha_2 = 60^\circ$.

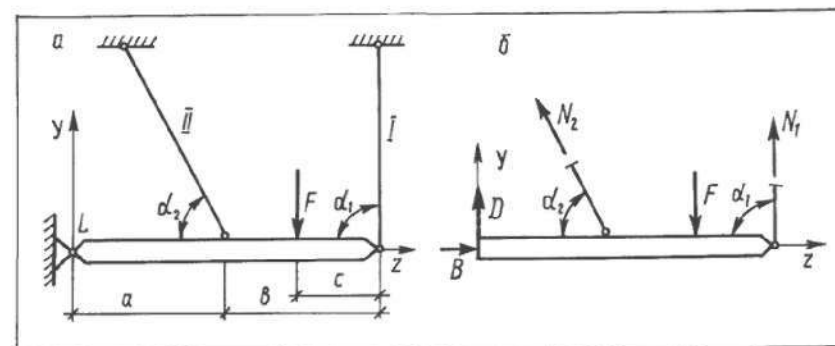


Рис. 1.12. Расчетная схема статически неопределимой стержневой системы

Решение. Для определения неизвестных опорных реакций (рис. 1.12, б) записываем уравнения статики:

$$\begin{cases} \sum Z = B - N_2 \cdot 0,5 = 0; \\ \sum Y = D - 100 \cdot 10^3 + N_1 + N_2 \cdot 0,866 = 0; \\ \sum M_L = 100 \cdot 10^3 \cdot 3,5 - N_1 \cdot 4 - N_2 \cdot 3 \cdot 0,866 = 0. \end{cases}$$

В этих уравнениях четыре неизвестных: B , N_1 , D , N_2 . Поэтому необходимо составить еще одно уравнение.

С этой целью рассмотрим схему деформирования системы (рис. 1.13). Из треугольника sab находим

$$ab = \frac{cb}{\sin 60^\circ} = \frac{\Delta l_2}{\sin 60^\circ}.$$

Из подобия треугольников dLl и aLb следует зависимость между Δl_1 и Δl_2 :

$$\frac{\Delta l_1}{Ld} = \frac{\Delta l_2}{\sin 60^\circ L a}$$

Учитывая, что

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1}, \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2}$$

получаем уравнение деформации системы — четвертое уравнение для определения неизвестных опорных реакций.

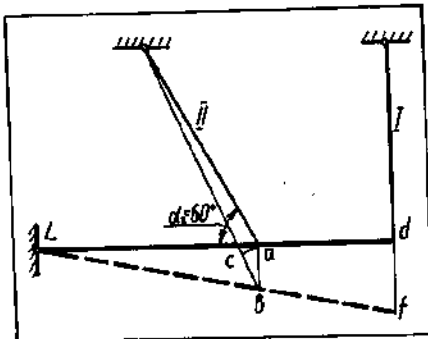


Рис. 1.13. Схема деформирования статически неопределимой стержневой системы

Задачу по вычислению опорных реакций системы можно упростить, если находить лишь продольные силы в ее стержнях. Эти силы определяем в результате решения уравнений

$$\begin{cases} \Sigma M_L = 100 \cdot 10^3 \cdot 3,5 - N_1 \cdot 4 - N_2 \cdot 3 \cdot 0,866 = 0, \\ \frac{N_1 l_1}{EA_1 L d} = \frac{N_2 l_2}{EA_2 L a \sin 60^\circ} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 4N_1 + 2,6N_2 = 350 \cdot 10^3, \\ 250N_1 - 513,32N_2 = 0. \end{cases}$$

Получаем: $N_1 = 66,47$ кН; $N_2 = 32,38$ кН.

Находим напряжения в стержнях:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{66,47 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = 66,47 \text{ МПа} < R;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{32,38 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^{-4}} = 21,59 \text{ МПа} < R;$$

Определяем предельную нагрузку F_{adm} на стержневую систему. Для этого вычисляем отношение

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{66,47 \cdot 10^3}{32,38 \cdot 10^3} = 2,05.$$

Находим предельные продольные силы в стержнях:

$$RA_1 N_{1adm} = 210 \cdot 10^6 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 210 \cdot 10^3 \text{ Н} = 210 \text{ кН};$$

$$RA_2 N_{2adm} = 210 \cdot 10^6 \cdot 15 \cdot 10^{-4} = 315 \cdot 10^3 \text{ Н} = 315 \text{ кН}.$$

Принимаем $N_1 = N_{1adm} = 210$ кН. Тогда

$$N_2 = \frac{N_1}{2,05} = \frac{210 \cdot 10^3}{2,05} = 102,44 \text{ кН} < N_{2adm}.$$

Значения N_1 и N_2 подставляем в уравнение $\Sigma M_L = 0$:

$$\Sigma M_L = F_{adm} \cdot 3,5 - 210 \cdot 10^3 \cdot 4 - 102,44 \cdot 10^3 \cdot 3 \cdot 0,866 = 0.$$

Решив которое, находим $F_{adm} = 316,04$ кН. Следовательно, нагрузку на стержневую систему можно увеличить в

$$\frac{F_{adm}}{F} = \frac{316,04 \cdot 10^3}{100 \cdot 10^3} = 3,16 \text{ раз}.$$

Исходные данные к работе

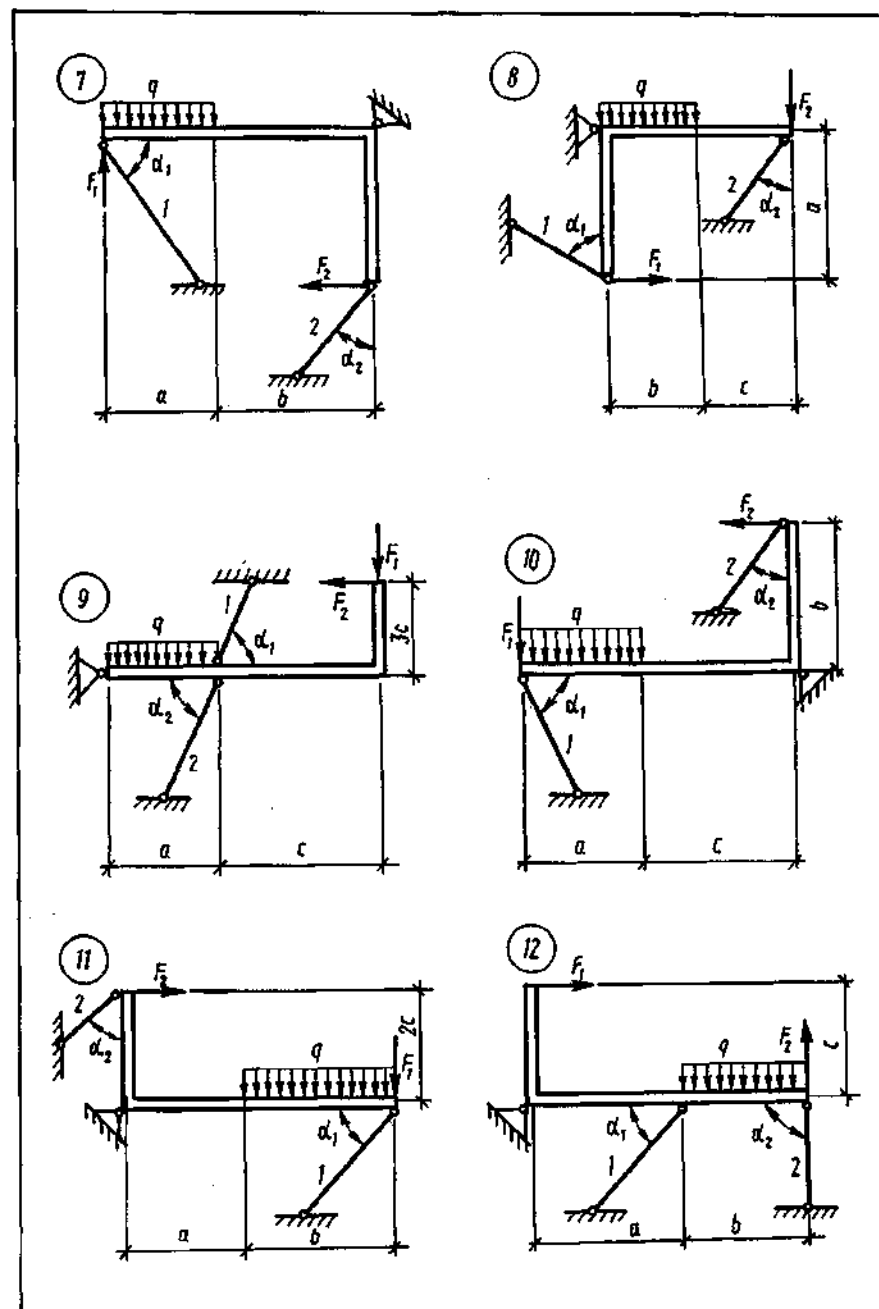
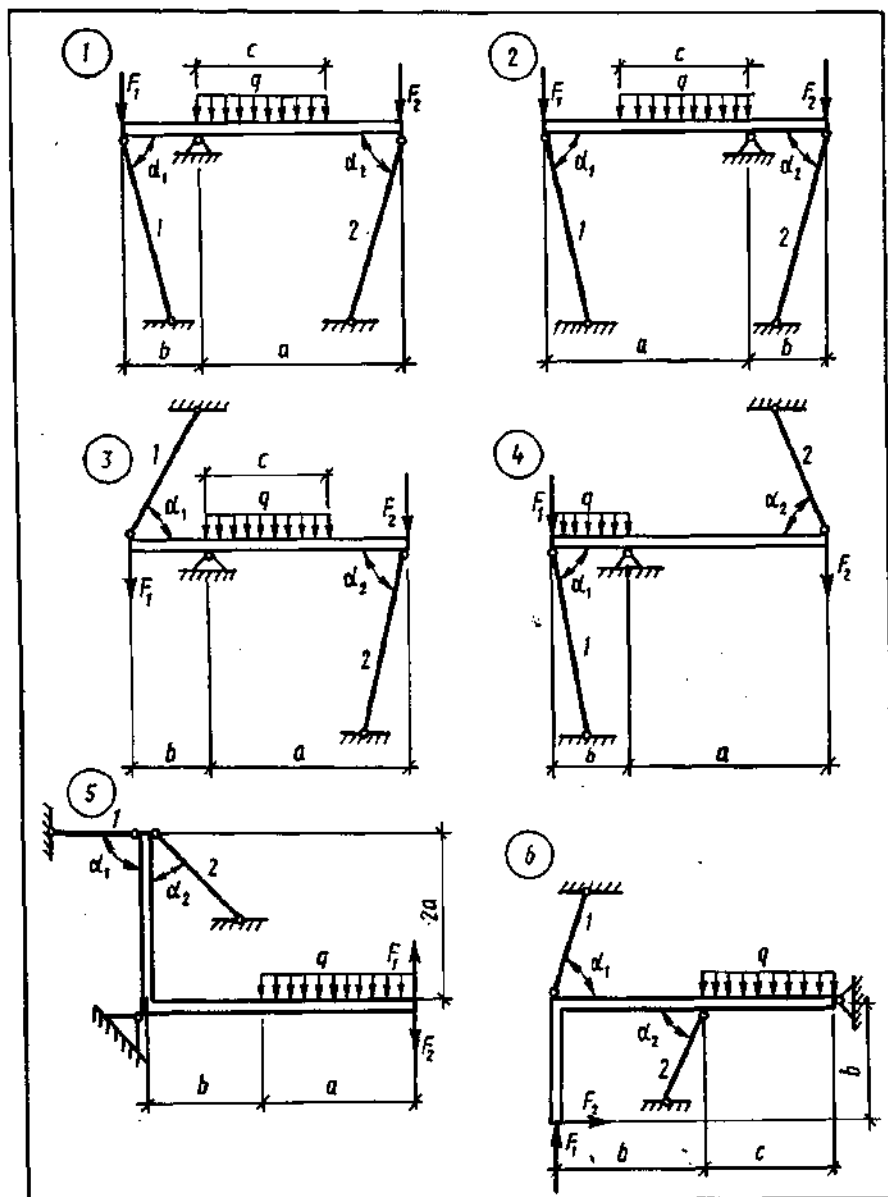
На систему, состоящую из элемента большой жесткости и двух стальных стержней, действует расчетная нагрузка. Расчетное сопротивление стали $R = 210$ МПа.

Требуется:

- 1) определить напряжения в стержнях при заданных значениях нагрузки и площадях сечений стержней;
- 2) исходя из условия прочности наиболее нагруженного стержня, определить предельную нагрузку.

Схемы для расчета приведены ниже, числовые данные — в табл. 1.11.

СХЕМЫ К РАБОТЕ



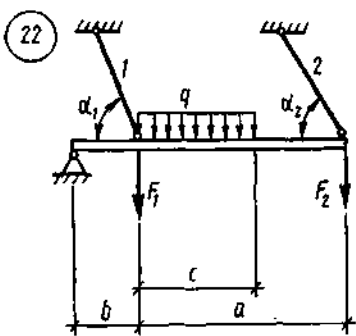
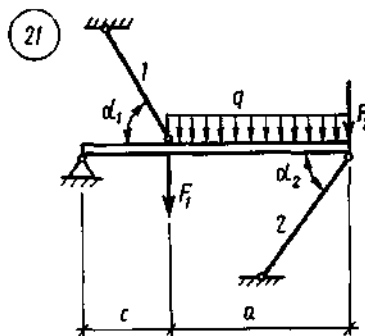
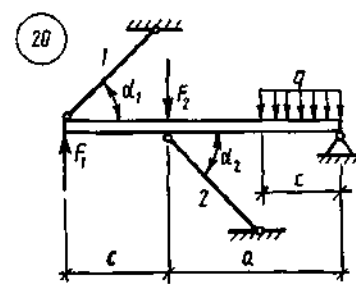
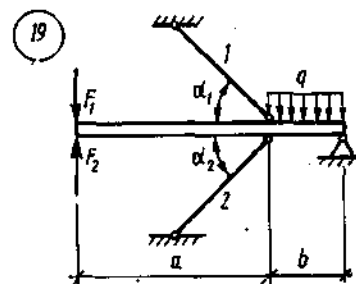
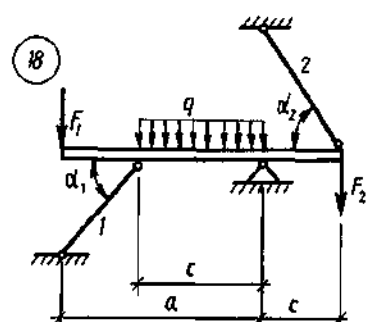
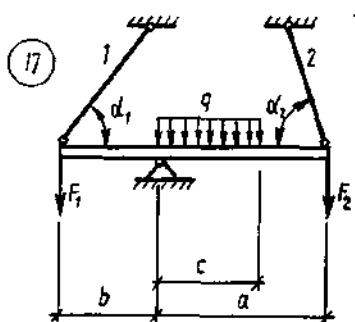
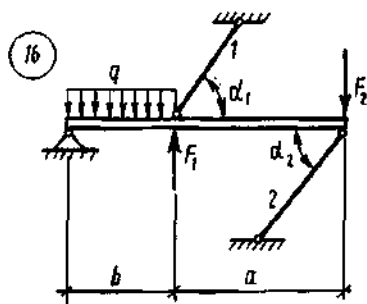
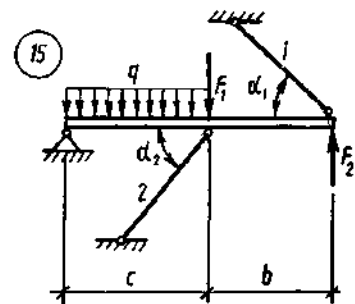
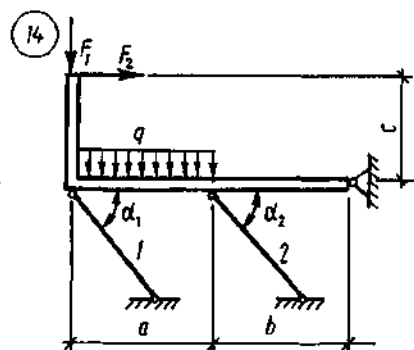
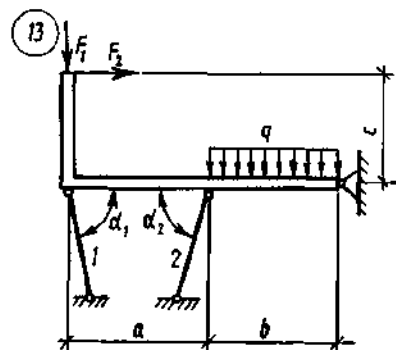


Табл. 1.11. Числовые данные

Номер зада- ния	Нагрузка			Длина участков элемента и створней, м					Площадь сечения, см ²		Угол, град	
	кН	кН	кН/м	a	b	c	l ₁	l ₂	A ₁	A ₂	alpha ₁	alpha ₂
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	—	50	—	5,4	2,6	0,8	1,0	1,2	6	12	90	45
2	30	—	—	4,8	2,8	1,2	1,4	1,0	8	10	45	90
3	12	—	—	4,6	2,4	1,4	1,0	1,4	6	8	90	30
4	—	—	10	4,4	2,8	0,6	1,2	1,4	6	6	60	90
5	—	25	—	4,8	2,6	1,4	1,4	1,6	10	8	90	120
6	—	20	—	4,6	2,6	1,0	1,2	1,4	6	10	135	90
7	50	—	—	5,2	2,4	0,8	1,4	1,0	8	12	90	135
8	—	—	12	4,8	3,2	1,4	1,6	1,2	6	6	60	90
9	—	—	10	4,8	2,6	1,2	1,0	1,2	8	8	90	45
10	—	40	—	4,6	2,4	1,0	1,2	1,0	12	8	45	90

Окончание табл. 1.11

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
11	25	—	—	5,0	2,0	1,6	1,4	1,2	6	7	30	90
12	—	50	—	4,8	2,6	1,4	1,2	1,0	8	12	150	90
13	—	—	16	4,6	2,8	1,2	1,4	1,2	6	12	90	150
14	—	45	—	5,2	3,2	1,4	1,6	1,0	8	10	90	60
15	—	—	14	4,0	2,8	1,2	1,2	1,4	6	8	45	60
16	80	—	—	5,2	2,6	1,6	1,4	1,0	8	12	90	150
17	—	—	8	4,0	3,2	1,4	1,6	1,0	6	10	90	60
18	—	40	—	5,0	2,8	0,8	1,0	1,2	10	6	120	90
19	60	—	—	5,2	3,2	1,2	1,6	1,0	6	10	30	90
20	—	—	8	5,0	2,8	1,4	1,2	1,4	8	6	120	90
21	20	—	—	5,4	2,6	0,8	1,0	1,2	10	6	90	120
22	—	60	—	5,2	3,0	1,0	1,6	1,2	6	8	150	90
23	40	—	—	4,8	2,8	1,2	1,4	1,0	6	12	90	45
24	—	—	14	5,0	3,0	1,0	0,8	1,2	12	6	90	120
25	—	50	—	5,4	2,8	1,2	1,6	1,2	6	8	150	90
26	30	—	—	4,8	3,0	1,0	1,8	1,4	5	10	60	90
27	—	—	16	5,2	3,2	1,2	1,0	0,8	10	4	90	30
28	—	40	—	5,0	3,0	1,0	1,2	1,4	7	8	30	90
29	60	—	—	5,2	2,8	0,8	1,4	1,2	6	4	60	90
30	—	50	—	4,8	3,2	1,0	1,0	1,6	8	10	90	30

Программа для МК БЗ-34

Программа предназначена для вычисления усилий в стержнях один раз статически неопределимых стержневых систем.

Для подготовки данных необходимо:

1) пронумеровать все шарниры и стержни, как это показано на рис. 1.14: неподвижный шарнир диска — 0; шарниры, прикрепляющие первый и второй

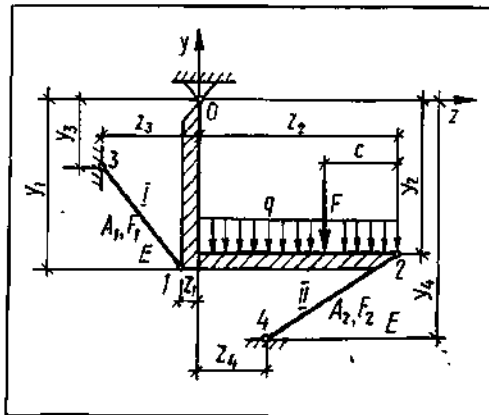


Рис. 1.14. Нумерация шарниров и стержней статически неопределимой стержневой системы

Табл. 1.12. Текст программы

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
	F ПРГ		32	F x ²	22	65	F L0	5Г
00	Cx	0Г	33	+	10	66	09	09
01	2	02	34	F √	21	67	C/П	50
02	ПО	40	35	П8	48	68	П9	49
03	1	01	36	X	12	69	6	06
04	2	02	37	÷	13	70	П1	41
05	П1	41	38	F arccos	1—	71	2	02
06	1	01	39	ИПА	6—	72	ПО	40
07	4	04	40	ИП4	64	73	ИПА	6—
08	П2	42	41	X	12	74	/—/	0L
09	C/П	50	42	ИПС	6C	75	ИПС	6C
10	—	11	43	ИП3	63	76	ИПД	6Г
11	ПА	4—	44	X	12	77	÷	13
12	ИП3	63	45	—	11	78	КП1	L1
13	X	12	46	F x < 0	5C	79	ИПВ	6L
14	ИП6	66	47	52	52	80	X	12
15	ИП4	64	48	F 0	25	81	—	11
16	—	11	49	/—/	0L	82	КП1	L1
17	ПС	4C	50	БП	51	83	0	00
18	ИП4	64	51	53	53	84	ИП9	69
19	X	12	52	F 0	25	85	F L0	5Г
20	+	10	53	ИП9	69	86	76	76
21	/—/	0L	54	X̄Y	14	87	ИП2	62
22	ИПА	6—	55	ИП8	68	88	ИП4	64
23	F x ²	22	56	X̄Y	14	89	÷	13
24	ИПС	6C	57	F sin	1C	90	C/П	50
25	F x ²	22	58	X	12	91	ИП5	65
26	+	10	59	КП2	L2	92	X	12
27	F √	21	60	C/П	50	93	ИП3	63
28	П9	49	61	X	12	94	X̄Y	14
29	ИП3	63	62	X	12	95	—	11
30	F x ²	22	63	÷	13	96	C/П	50
31	ИП4	64	64	КП1	L1		F АВТ	

стержни к диску — 1 и 2; шарниры, прикрепляющие первый и второй стержни к земле — 3 и 4;

2) выбрать правую систему декартовых координат с началом в шарнире 0;

3) вычислить координаты всех шарниров системы;

4) определить момент внешних сил относительно шарнира 0, учитывая, что момент, направленный против хода часовой стрелки, считается положительным

Для расчета по программе стержневой системы следует:

1) ввести программу (табл. 1.12);

2) выполнить расчет по программе согласно табл. 1.13.

Табл. 1.13. Последовательность ввода данных при расчете по программе

Вводимая величина	Операция на МК	Вводимая величина	Операция на МК
	В/О	y_4	П6
	С/П	y_2	П4
y_3	П6	z_4	П5
y_1	П4	z_2	П3
z_3	П5		С/П
z_1	П3		
	С/П	A_2	↑
A_1	↑	E_2	С/П
E_1	С/П	M_0	С/П

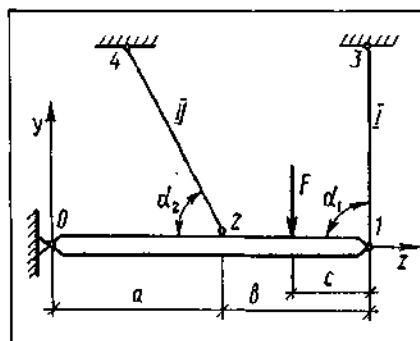


Рис. 1.15. Схема стержневой системы с нумерацией узлов и стержней

После выполнения программы индицируется значение продольной силы во втором стержне (N_2), при нажатии клавиши С/П — в первом (N_1).

Выполним расчет стержневой системы, рассмотренной в примере 1.4 (рис. 1.15).

Выбираем систему координат xyz , вычисляем координаты шарниров и момент внешних сил относительно неподвижного шарнира:

$$z_1 = a + b = 3 + 1 = 4 \text{ м}; y_1 = 0;$$

$$z_2 = a = 3 \text{ м}; y_2 = 0;$$

$$z_3 = z_1 = 4 \text{ м}; y_3 = l_1 = 1 \text{ м};$$

$$z_4 = a - l_2 \cos \alpha = 3 - 2 \cos 60^\circ = 2 \text{ м}; y_4 = l_2 \sin \alpha = 2 \sin 60^\circ = 1,732 \text{ м};$$

$$M_0 = -F(a + b - c) = -100 \cdot 10^3 (3 + 1 - 0,5) = -350 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м} = -350 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Вводим эти данные в память микрокалькулятора и выполняем расчет по программе (табл. 1.14).

После окончания расчета индицируется значение продольной силы во втором стержне: $N_2 = 32380 \text{ Н}$. Для индикации значения продольной силы в первом стержне необходимо нажать на клавишу С/П (результат $N_1 = 66468,7 \text{ Н}$).

Табл. 1.14. Расчет стержневой системы по программе (см. пример 1.4)

Вводимая величина		Операция на МК	Вводимая величина		Операция на МК
обозначение	значение		обозначение	значение	
		В/О	y_4	1,732	П6
		С/П	y_2	0	П4
y_3	1	П6	z_4	2	П5
y_1	0	П4	z_2	3	П3
z_3	4	П5			С/П
z_1	4	П3	A_2	$15 \cdot 10^{-4}$	↑
		С/П	E_2	$200 \cdot 10^9$	С/П
A_1	$10 \cdot 10^{-4}$	↑	M_0	$-350 \cdot 10^3$	С/П
E_1	$200 \cdot 10^9$	С/П			

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие системы называются статически неопределимыми?
2. Объясните сущность дополнительных уравнений для решения статически неопределимых систем.
3. Как отражается изменение жесткости отдельных элементов статически неопределимых систем на усилиях в этих и других элементах?
4. Как определяются предельные нагрузки на статически неопределимые системы?
5. В чем заключается сущность методов расчета по допускаемым напряжениям, допускаемым нагрузкам и предельным состояниям?
6. Как определяются коэффициенты запаса при расчете по допускаемым напряжениям и допускаемым нагрузкам?
7. От каких факторов зависит переход конструкции в предельное состояние?
8. Что такое коэффициент безопасности по материалу, коэффициент перегрузки, коэффициент условий работы и коэффициент надежности при расчетах по предельным состояниям?
9. Как решаются основные виды задач в сопротивлении материалов: определение напряжений, подбор сечения, определение допускаемой нагрузки по разным методам?

II. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ

РАБОТА 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Общие сведения

Напряженным состоянием в точке называется совокупность напряжений, действующих по всевозможным площадкам, проведенным через эту точку. Если из тела, находящегося в плоском напряженном состоянии, мысленно выделить в окрестности какой-либо точки весьма малый прямоугольный элемент $dx dy$, то по граням этого элемента будут действовать нормальные и касательные напряжения (рис. 2.1, а). Правило знаков для этих напряжений принимается следующим: растягивающие нормальные напряжения считаются поло-

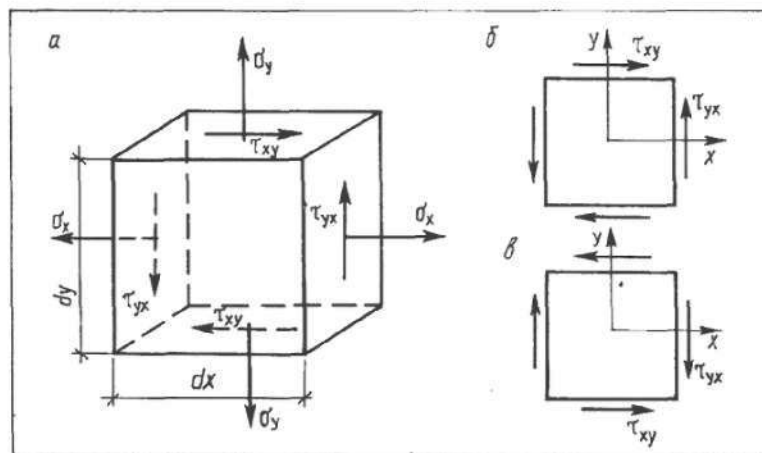


Рис. 2.1. Напряжения, действующие по граням плоского элемента:
а — схема; б — $\tau_{xy} > 0$; в — $\tau_{xy} < 0$

жительными, сжимающие — отрицательными. Знак касательных напряжений связан с направлением осей координат. Если внешняя нормаль к данной площадке совпадает с направлением соответствующей координатной оси или противоположна ему, а касательные напряжения совпадают с направлением другой оси или противоположны ему, то касательное напряжение считается положительным (рис. 2.1, б). Обратное направление касательных напряжений на рассматриваемой площадке считается отрицательным (рис. 2.1, в).

При анализе плоского напряженного состояния в точке напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} и τ_{yx} считаются заданными. Причем на основании закона парности касательных напряжений принимается $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$.

На рис. 2.2 показан бесконечно малый элемент, выделенный в точке и ориентированный по осям x' , y' . Нормальные и касательные напряжения по граням этого элемента вычисляются по формулам:

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha; \quad (2.1)$$

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha; \quad (2.2)$$

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \quad (2.3)$$

Если вращать оси x' , y' и прямоугольный элемент, меняя угол α (см. рис. 2.2), то при каком-то угле α_0 нормальное напряжение σ_{α_0} в данной точке максимально, а на перпендикулярной площадке минимально. Такие нормальные напряжения и соответствующие им площадки называются главными. Касательные напряжения по главным площадкам равны нулю.

Главные напряжения, действующие по главным площадкам, вычисляются следующим образом:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (2.4)$$

Направления главных напряжений определяются из выражения

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}. \quad (2.5)$$

При пользовании формулой (2.5) нужно учитывать следующее правило знаков для угла α_0 (рис. 2.3):

- а) $-\alpha_0$ при $\tau_{xy} > 0, \sigma_x > \sigma_y$;
- б) $+\alpha_0$ при $\tau_{xy} > 0, \sigma_x < \sigma_y$;
- в) $+\alpha_0$ при $\tau_{xy} < 0, \sigma_x > \sigma_y$;
- г) $-\alpha_0$ при $\tau_{xy} < 0, \sigma_x < \sigma_y$.

Направления главных напряжений можно также вычислить по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_{1,2} - \sigma_y}, \quad (2.6)$$

где $\alpha_{1,2}$ — угол между осью x и осью 1 и 2.

При известных значениях составляющих или главных напряжений в точке можно найти максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (2.7)$$

или

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad (2.8)$$

действующие на площадках, наклоненных под углом 45° к главным напряжениям (рис. 2.4). По этим площадкам действуют также нормальные напряжения

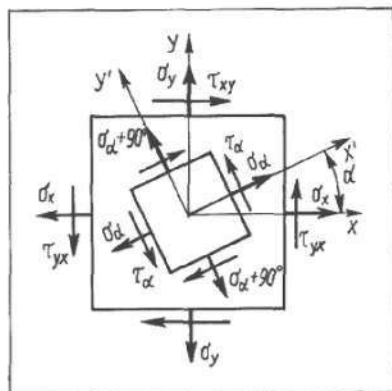


Рис. 2.2. Напряжения по граням элемента при повороте осей координат

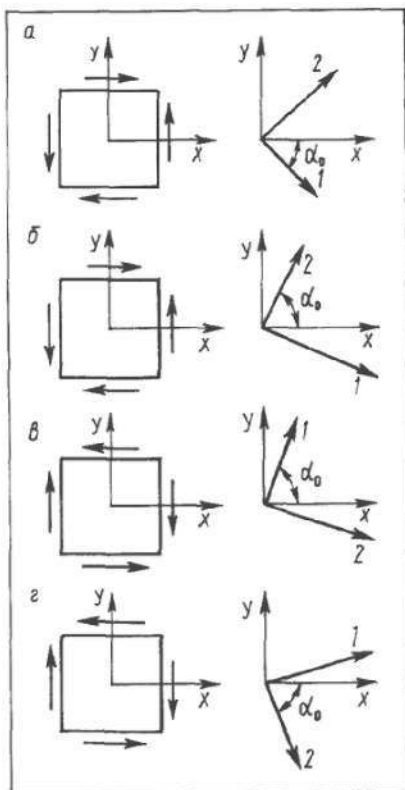


Рис. 2.3. Направления главных напряжений в плоском элементе

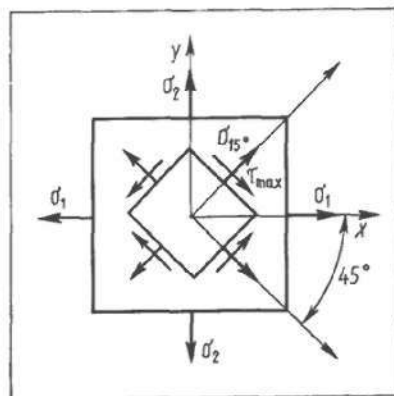


Рис. 2.4. Экстремальные касательные напряжения в плоском элементе

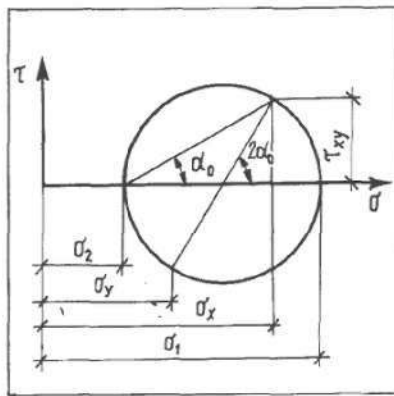


Рис. 2.5. Круг Мора

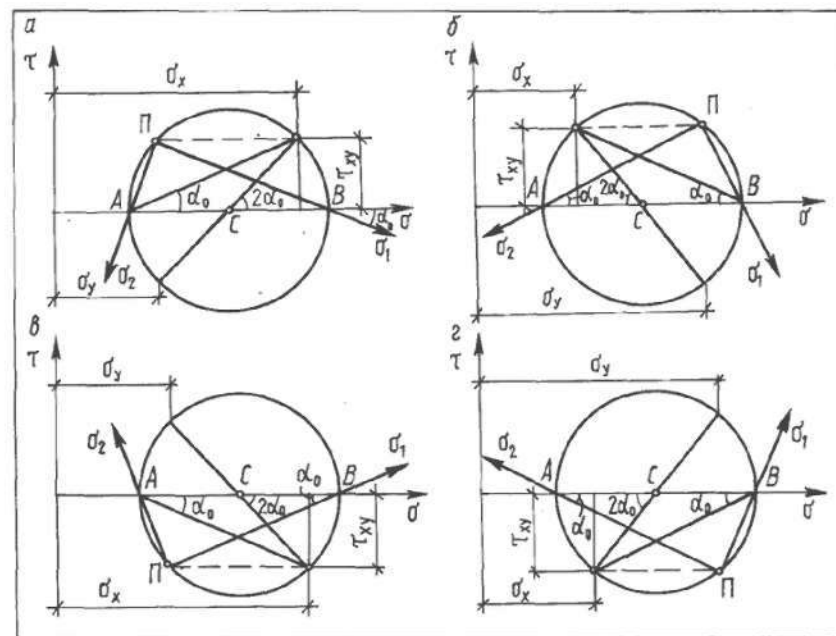


Рис. 2.6. Определение направления главных напряжений с помощью круга Мора: а - $\tau_{xy} > 0, \sigma_x > \sigma_y$; б - $\tau_{xy} > 0, \sigma_x < \sigma_y$; в - $\tau_{xy} < 0, \sigma_x > \sigma_y$; г - $\tau_{xy} < 0, \sigma_x < \sigma_y$

$$\sigma_{45^\circ} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \quad (2.9)$$

Зависимости между составляющими напряжений в точке $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и главными напряжениями σ_1, σ_2 можно представить в виде круговой диаграммы, называемой кругом Мора или кругом напряжений (рис. 2.5).

Круг Мора позволяет определять главные напряжения и главные площадки при известных значениях составляющих напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ или находить составляющие напряжения в точке при заданных главных напряжениях σ_1, σ_2 и их направления, характеризуемые углами α_1 и α_2 (рис. 2.6).

Для определения положения главных площадок при заданных значениях $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ находят положение полюса, т.е. точку П (см. рис. 2.6), и, соединяя ее с точками А и В, получают направления главных напряжений σ_1 и σ_2 . Положение главных площадок будет перпендикулярно к направлению главных напряжений.

Если в заданной точке известны значения составляющих напряжений, то можно на основании обобщенного закона Гука найти линейные и угловые деформации. В случае плоского напряженного состояния формулы для их вычислений имеют вид:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y); \quad \epsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y);$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x); \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}.$$

Главные деформации определяются следующим образом:

$$\epsilon_{1,2} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\epsilon_x - \epsilon_y)^2 + 4\gamma_{xy}^2}. \quad (2.10)$$

Относительное изменение объема материала в окрестностях данной точки находится по формуле

$$\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z \text{ или } \theta = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (2.11)$$

Для проверки прочности материала наиболее часто используются третья, четвертая теории прочности и теория прочности Мора.

Третья теория прочности основывается на критерии наибольших касательных напряжений, в соответствии с которым предполагается, что опасное состояние нагруженного тела характеризуется значением максимального касательного напряжения.

Условие прочности по этой теории записывается следующим образом:

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq R_y. \quad (2.12)$$

Выражение (2.12) для плоского напряженного состояния принимает вид

$$\sigma_{red} = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \leq R_y. \quad (2.13)$$

Условие прочности по четвертой теории прочности, называемой также энергетической теорией формоизменения, может быть выражено в следующей форме:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2]} \leq R_t. \quad (2.14)$$

В случае плоского напряженного состояния выражение (2.14) принимает вид

$$\sigma_{red} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + 3\tau_{xy}^2} \leq R_t. \quad (2.15)$$

Если $\sigma_y = 0$, то, полагая $\sigma_x = \sigma$ и $\tau_{xy} = \tau$, получим

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R_t. \quad (2.16)$$

По теории прочности Мора, которая основывается на предположении, что прочность материала в общем случае напряженного состояния зависит главным образом от значения и знака наибольшего σ_1 и наименьшего σ_3 главных напряжений, условие прочности записывается в виде

$$\sigma_{red} = \sigma_1 - k\sigma_3 \leq R_t(c). \quad (2.17)$$

где $k = \sigma_{ut} / \sigma_{uc}$.

Для плоского напряженного состояния выражение (2.17) принимает вид

$$\sigma_{red} = \frac{1-k}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1+k}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (2.18)$$

Пример 2.1. Для расчетной схемы, указанной на рис. 2.7, а, вычислить значения главных напряжений, найти их направления и построить круг напряжений Мора. Определить относительные линейные деформации элемента и относительную объемную деформацию.

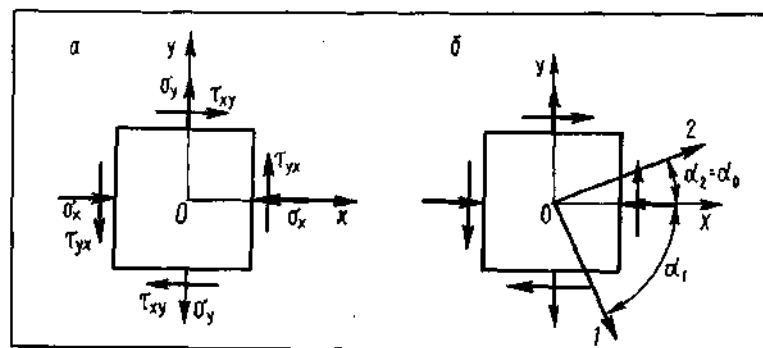


Рис. 2.7. Расчетная схема и направления главных напряжений в плоском элементе

Дано: $\sigma_x = 30$ МПа; $\sigma_y = 70$ МПа; $\tau_{xy} = 40$ МПа; $\nu = 0,3$; $E = 2 \cdot 10^4$ МПа.

Решение. Вычисляем значения главных напряжений

$$\sigma_{1,2} = \frac{-30 \cdot 10^6 + 70 \cdot 10^6}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(-30 \cdot 10^6 - 70 \cdot 10^6)^2 + 4(40 \cdot 10^6)^2},$$

откуда $\sigma_1 = 84,03$ МПа; $\sigma_2 = -44,03$ МПа.

Определяем направления главных напряжений:

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2 \cdot 40 \cdot 10^6}{-30 \cdot 10^6 - 70 \cdot 10^6} = 0,8;$$

$$2\alpha_0 = 38^\circ 40'; \alpha_0 = 19^\circ 20'.$$

Находим углы между осью x и главными осями 1 или 2:

$$\tan \alpha_1 = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_y} = \frac{-40 \cdot 10^6}{84,03 \cdot 10^6 - 70 \cdot 10^6} = -2,851;$$

$$\alpha_1 = -70^\circ 40'.$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_2 - \sigma_y} = \frac{-40 \cdot 10^6}{-44,03 \cdot 10^6 - 70 \cdot 10^6} = 0,351;$$

$$\alpha_2 = 19^\circ 20'.$$

Направления главных осей 1 и 2 указаны на рис. 2.7, б. Главные напряжения можно вычислить и на основании круга Мора, построенного по заданным значениям составляющих напряжений в точке (рис. 2.8).

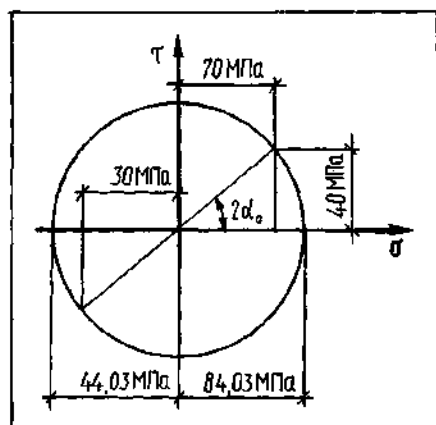


Рис. 2.8. Круг Мора (пример 2.1).

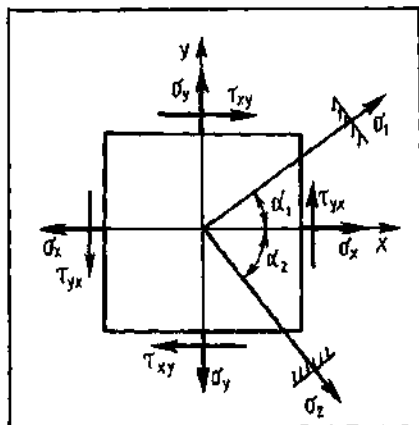


Рис. 2.9. Направления главных напряжений при плоском напряженном состоянии

Находим линейные и угловые деформации для рассматриваемого элемента:

$$\epsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^{11}} (-30 \cdot 10^6 - 0,3 \cdot 70 \cdot 10^6) = -0,000255;$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{2 \cdot 10^{11}} (70 \cdot 10^6 + 0,3 \cdot 30 \cdot 10^6) = 0,000395;$$

$$\epsilon_z = -\frac{0,3}{2 \cdot 10^{11}} (-30 \cdot 10^6 + 70 \cdot 10^6) = -0,00006;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + 0,3) 40 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{11}} = 0,00052.$$

Относительное изменение объема материала в рассматриваемой точке $\theta = -0,000255 + 0,000395 - 0,00006 = 0,00008$.

Пример 2.2. Напряжения на гранях элемента (рис. 2.9) равны. Проверить прочность материала по теории Мора.

Дано: $\sigma_x = 12 \text{ МПа}$; $\sigma_y = -30 \text{ МПа}$; $\tau_{xy} = 25 \text{ МПа}$; $R_t = 40 \text{ МПа}$; $R_c = 130 \text{ МПа}$.

Решение. В данном случае имеет место плоское напряженное состояние. Главные напряжения вычисляем по формуле (2.4):

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{12 - 30}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(12 + 30)^2 + 4 \cdot 25^2}.$$

Откуда $\sigma_1 = 23,65 \text{ МПа}$; $\sigma_3 = -41,65 \text{ МПа}$.

Проводим проверку прочности материала по теории Мора:

$$\sigma_{\text{ред}} = \sigma_1 - k \sigma_3 = 23,65 - \frac{40}{130} (-41,65) = 36,46 \text{ МПа} < R_t = 40 \text{ МПа}.$$

Следовательно, прочность материала обеспечена.

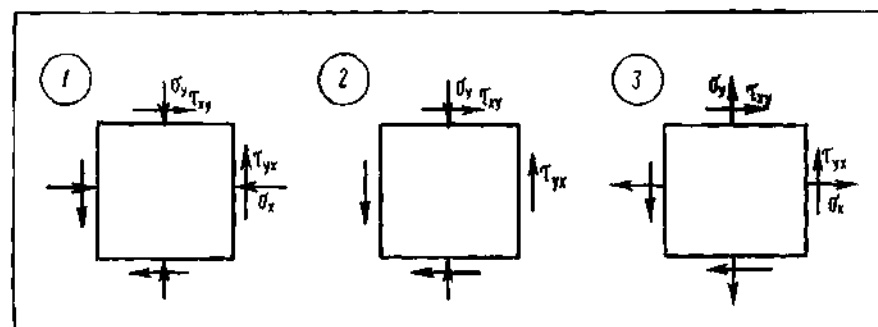
Исходные данные к работе

В опасной точке упругодеформированной конструкции выделен бесконечно малый прямоугольный элемент, по граням которого действуют нормальные и касательные напряжения. Материал конструкции — сталь, $R = 210 \text{ МПа}$. Требуется:

- 1) вычислить значения главных напряжений и их направления аналитическим способом и при помощи круговой диаграммы Мора;
- 2) показать на чертеже положение главных площадок и направления главных напряжений;
- 3) вычислить максимальные касательные напряжения и определить положение площадок, на которых они действуют;
- 4) показать на чертеже положение площадок с максимальными касательными напряжениями;
- 5) при помощи круга Мора определить нормальное напряжение, действующее на площадке с максимальным касательным напряжением;
- 6) используя одну из гипотез прочности, проверить прочность материала в рассматриваемой точке;
- 7) определить относительные линейные деформации элемента в направлении осей x , y , z ;
- 8) определить относительную объемную деформацию элемента.

Схемы для расчета приведены ниже, числовые данные — в табл. 2.1.

СХЕМЫ К РАБОТЕ



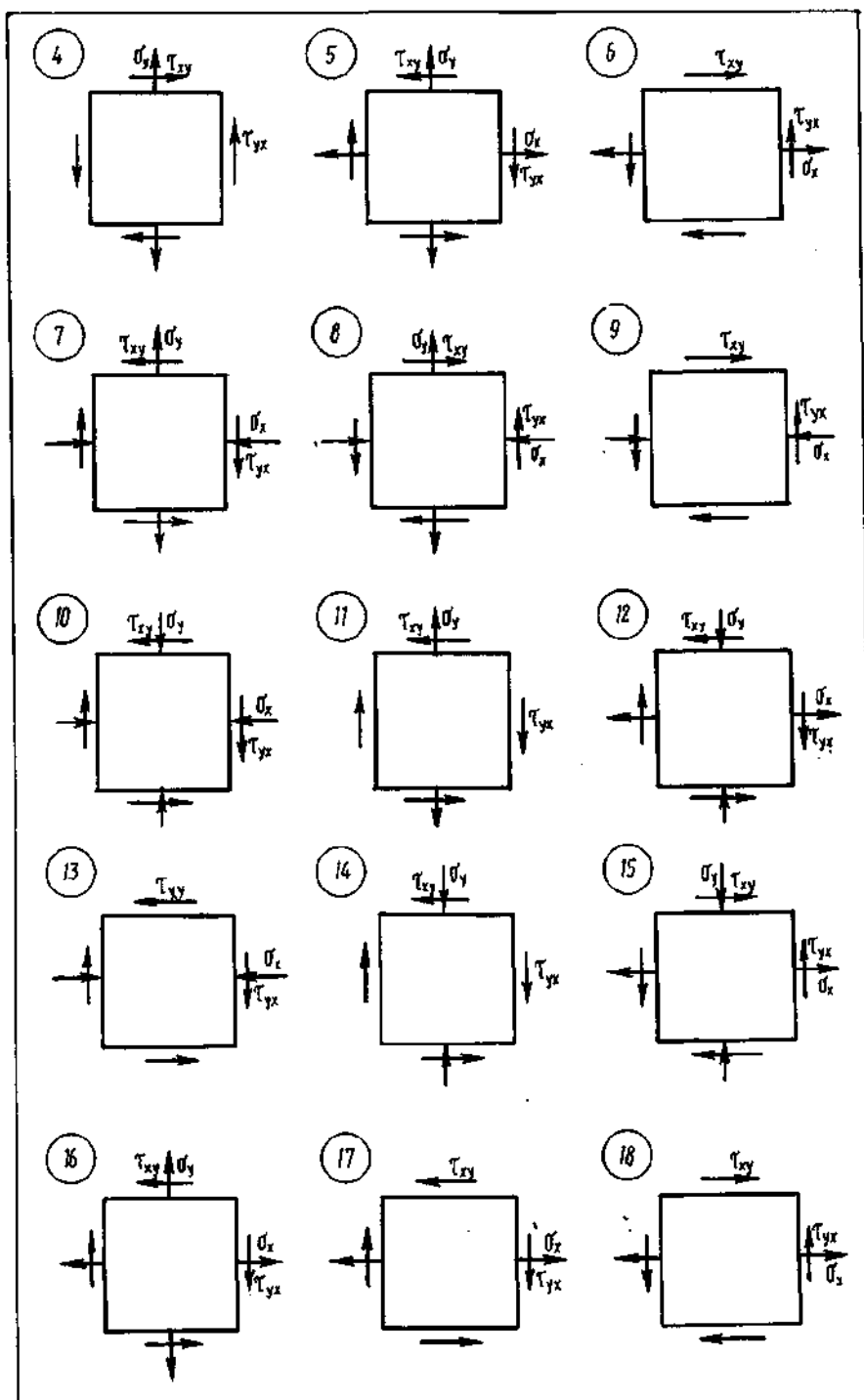


Табл. 2.1. Числовые данные

Номер задания	σ_x , МПа	σ_y , МПа	τ_{xy} , МПа	Номер задания	σ_x , МПа	σ_y , МПа	τ_{xy} , МПа
1	40	130	40	16	130	50	40
2	70	70	80	17	40	120	60
3	30	120	40	18	120	70	20
4	80	50	70	19	110	50	40
5	90	40	60	20	70	80	60
6	40	140	40	21	140	40	50
7	50	120	60	22	150	50	20
8	110	30	70	23	120	60	60
9	60	40	60	24	40	150	40
10	90	40	60	25	80	70	50
11	130	60	30	26	50	110	60
12	80	70	60	27	60	80	70
13	120	40	50	28	40	120	60
14	150	30	40	29	80	90	40
15	100	20	60				

Программа для МК БЗ-34

Программа предназначена для вычисления главных напряжений σ_1 и σ_2 ; углов наклона главных площадок α_1 и α_2 ; относительных линейных деформаций ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z ; угла сдвига γ_{xy} и относительной объемной деформации θ при плоском напряженном состоянии.

Для выполнения расчета необходимо ввести программу (табл. 2.2), установить переключатель "Г-Р" в положение "Г", ввести исходные данные и дать команду на выполнение (табл. 2.3).

После окончания работы МК по программе результаты индицируются в порядке, указанном в табл. 2.4.

Табл. 2.2. Текст программы

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	Ф ПРГ		09	—	11	19	П5	45
00	ИП0	60	10	2	02	20	Ф↺	25
01	ИП1	61	11	÷	13	21	ИП9	69
02	+	10	12	$F x^2$	22	22	—	11
03	ПД	4Г	13	ИП2	62	23	П6	46
04	2	02	14	$F x^2$	22	24	ИП2	62
05	÷	13	15	+	10	25	ИП1	61
06	↑	0E	16	$F \sqrt{\quad}$	21	26	ИП5	65
07	ИП0	60	17	П9	49	27	—	11
08	ИП1	61	18	+	10	28	÷	13

Окончание табл. 2.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
29	F arctg	1L	47	ИП0	60	64	+	10
30	П7	47	48	ИП4	64	65	X	12
31	ИП2	62	49	X	12	66	2	02
32	ИП1	61	50	—	11	67	X	12
33	ИП6	66	51	ИП3	63	68	ИП3	63
34	—	11	52	÷	13	69	÷	13
35	÷	13	53	ПА	4—	70	ПС	4С
36	F arctg	1L	54	ИПД	6Г	71	ИП9	69
37	П8	48	55	ИП4	64	72	ИПА	6—
38	ИП0	60	56	X	12	73	ИПВ	6L
39	ИП4	64	57	ИП3	63	74	+	10
40	ИП1	61	58	÷	13	75	+	10
41	X	12	59	/—/	0L	76	ПД	4Г
42	—	11	60	ПВ	4L	77	С/П	50
43	ИП3	63	61	ИП2	62		F ABT	
44	÷	13	62	ИП4	64			
45	П9	49	63	1	01			
46	ИП1	61						

Табл. 2.3. Последовательность ввода данных при расчете по программе

Вводимая величина	Операция на МК	Вводимая величина	Операция на МК
σ_x	П0	E	П3
σ_y	П1	v	П4
τ_{xy}	П2		В/О
			С/П

Табл. 2.4. Последовательность вывода результатов расчета

Операция на МК	Результат	Операция на МК	Результат
ИП5	σ_1	ИПА	ϵ_y
ИП6	σ_2	ИПВ	ϵ_z
ИП7	α_1	ИПС	γ_{xy}
ИП8	α_2	ИПД	θ
ИП9	ϵ_x		

Выполним по программе расчет примера 2.1. Для этого запишем в память микрокалькулятора исходные данные (табл. 2.5). Результаты расчета приведены в табл. 2.6.

Видно, что результаты расчетов, полученные в примере 2.1, совпадают с данными расчетов по программе.

Табл. 2.5. Ввод исходных данных (см. пример 2.1)

Вводимая величина	Операция на МК	Вводимая величина	Операция на МК
обозначение	значение	обозначение	значение
σ_x	$-30 \cdot 10^6$	П0	0,3
σ_y	$70 \cdot 10^6$	П1	В/О
τ_{xy}	$40 \cdot 10^6$	П2	С/П
E	$2 \cdot 10^{11}$	П3	

Табл. 2.6. Вывод результатов расчета (см. пример 2.1)

Операция на МК	Результат	Операция на МК	Результат
	обозначение	обозначение	значение
ИП5	σ_1	ИПА	ϵ_y
ИП6	σ_2	ИПВ	ϵ_z
ИП7	α_1	ИПС	γ_{xy}
ИП8	α_2	ИПД	θ
ИП9	ϵ_x		

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите виды напряженного состояния тел.
2. Сформулируйте закон парности касательных напряжений.
3. Как определяются нормальные и касательные напряжения на наклонных площадках?
4. Как находятся главные напряжения?
5. На каких площадках возникают наибольшие и наименьшие нормальные напряжения?
6. Как определить значение наибольших касательных напряжений и на каких площадках они действуют?
7. Напишите закон Гука при плоском напряженном состоянии.
8. Как определяются нормальные и касательные напряжения на любых площадках при помощи круга Мора?
9. Как определяются направления главных напряжений с помощью круга Мора?
10. Чему равны линейные и угловые деформации в точке?
11. Напишите выражение для определения относительного изменения объема материала в рассматриваемой точке.

III. РАСЧЕТЫ НА СРЕЗ И СМЯТИЕ

РАБОТА 5. РАСЧЕТ БОЛТОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Общие сведения

Болтовые соединения (рис. 3.1) используются в фермах, металлических балочных конструкциях, колоннах и других конструкциях для крепления двух или трех отдельных элементов между собой. При соединении элементов на каждый болт передаются две равные и противоположно направленные силы от первого и второго элементов (рис. 3.1, а). Болт перерезается в плоскости соединения двух элементов, силы от которых образуют пару, уравновешиваемую другой парой сил — реакцией со стороны головки и гайки болта. Однако эти реакции не опасны, ибо для изготовления болтов используется высококачественная сталь.

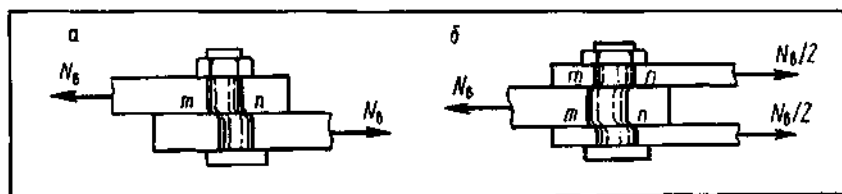


Рис. 3.1. Болтовые соединения двух и трех элементов

Два элемента могут также соединяться с использованием одной или двух накладок. Схема распределения усилий при наличии двух накладок указана на рис. 3.1, б. В этом случае болт перерезается в двух плоскостях.

Расчетное усилие, которое может быть воспринято одним болтом при работе его на срез, определяется по формуле

$$N_b = R_{bs} \gamma_b A n_s, \quad (3.1)$$

где γ_b — коэффициент условий работы болта; A — расчетная площадь сечения стержня болта, принимаемая равной $\pi d^2/4$; n_s — количество плоскостей среза.

Условие прочности болтового соединения на срез записывается в виде

$$\tau = N_b / \left(\frac{\pi d^2}{4} n n_s \right) \leq R_{bs} \gamma_b, \quad (3.2)$$

где N_b — расчетное усилие в соединении; n — количество болтов.

Используя формулу (3.2), можно определить количество болтов в соединении или их диаметр d , проверить прочность соединения и т.д. Например, расчетное усилие, которое может выдержать болтовое соединение, находится следующим образом:

$$N_b = \frac{\pi d^2}{4} n n_s R_{bs} \gamma_b. \quad (3.3)$$

При относительно тонких соединяемых элементах возможно разрушение болтового соединения за счет смятия листов или болтов в зоне их контакта. Поэтому необходимо проверить прочность болтового соединения на смятие. Фактическое распределение напряжений на поверхности контакта болта и листа весьма сложное. Приблизительно опасность смятия оценивается не по фактическим значениям контактных напряжений, а по средним, отнесенным к площади проекции поверхности контакта на диаметрально плоскость, называемую условной площадью смятия (рис. 3.2).

Условные площади смятия: под средним листом (рис. 3.2, б) $A_{con} = t_1 d$, под крайними листами $A_{con} = 2 t_2 d$. На эти площади приходится одна и та же сила N_b , поэтому за расчетную следует принимать минимальную из указанных площадей.

При проверке прочности болтового соединения на смятие расчетное усилие, которое может быть воспринято одним болтом, определяется по формуле

$$N_b = R_{bp} \gamma_b d \Sigma t. \quad (3.4)$$

Условие прочности болтового соединения на смятие имеет вид

$$\sigma = \frac{N_b}{A_{con}} = \frac{N_b}{n d \Sigma t} \leq R_{bp} \gamma_b. \quad (3.5)$$

Используя формулу (3.5), можно вычислить количество болтов, их диаметр, наименьшую суммарную толщину элементов, сминающихся в одном направлении, и т.д. Например, расчетное усилие для болтового соединения определяется следующим образом:

$$N_b = n d \Sigma t R_{bp} \gamma_b.$$

При расчетах на срез и смятие находятся два значения расчетных усилий для болтовых соединений, но в качестве основного принимается меньшее из них.

Кроме расчетов на срез и смятие, необходимо проверить прочность на растяжение (сжатие) соединяемых элементов, ослабленных болтовыми отверстиями. Расчетное усилие для этих элементов вычисляется по формуле

$$N_b = R_{bt} A_{nt} \gamma_b. \quad (3.6)$$

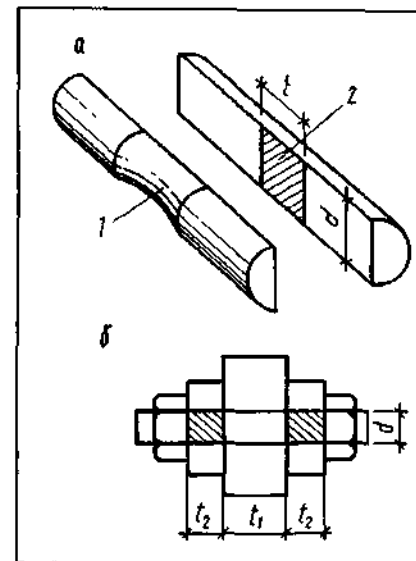


Рис. 3.2. Условные площади смятия болта (а) и листов (б): 1, 2 — фактическая и условная поверхности смятия

Условие прочности соединяемых элементов на растяжение (сжатие) по ослабленному сечению

$$\sigma = \frac{N_b}{A_{nt}} \leq R_{bt} \gamma_b. \quad (3.7)$$

Пример 3.1. Вилка и проушина из стали марки Ст3 (рис. 3.3) соединяются болтом диаметром d , поставленным плотно, без зазора. Соединение растягивается расчетным усилием. Определить диаметр болта из условия прочности его на срез и смятие, а также нормальные напряжения в проушине и вилке.

Дано: $N_b = 500 \text{ кН}$; $\gamma_b = 0,9$; $R_{bs} = 200 \text{ МПа}$; $R_{bp} = 380 \text{ МПа}$; $R_{bt} = 210 \text{ МПа}$.

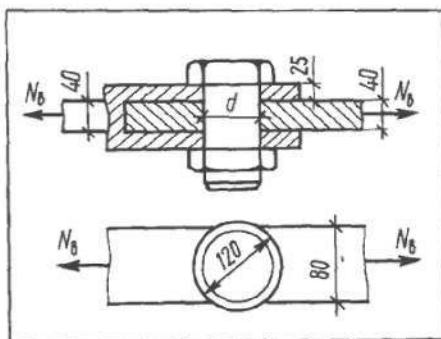


Рис. 3.3. Схема вилки и проушины (пример 3.1)

Решение. Определяем диаметр болта из условия прочности его на срез (3.3):

$$d^2 = N_b / (n_s n \frac{\pi}{4} R_{bs} \gamma_b).$$

Подставляя числовые данные, получим

$$d = \sqrt{500 \cdot 10^3 / (2 \cdot 1 \cdot \frac{3,14}{4} \cdot 200 \cdot 10^6 \cdot 0,9)} = 0,04206 \text{ м} = 42 \text{ мм}.$$

Вычисляем диаметр болта из условия его смятия:

$$d = \frac{N_b}{n t R_{bp} \gamma_b} = \frac{500 \cdot 10^3}{1 \cdot 0,04 \cdot 380 \cdot 10^6 \cdot 0,9} = 0,03655 \text{ м} = 36,55 \text{ мм}.$$

Следовательно, диаметр болта принимаем из условия работы его на срез с учетом сортамента болтов, т.е. $d = 42 \text{ мм}$.

Нормальное напряжение в проушине определяется следующим образом:

$$\sigma = \frac{N_b}{t_1 (D - nd)} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,04 (0,12 - 1 \cdot 0,042)} = 160 \text{ МПа} < R_{bt} \gamma_b =$$

$$= 210 \cdot 0,9 = 189 \text{ МПа}.$$

Нормальное напряжение в вилке

$$\sigma = \frac{N_b}{t_2 (D - nd)} = \frac{500 \cdot 10^3}{0,05 (0,12 - 1 \cdot 0,042)} = 86,4 \text{ МПа}.$$

Исходные данные к работе

Два элемента конструкции, нагруженные расчетной нагрузкой, соединяются при помощи болтов по схеме "внахлестку" или "встык" с накладками. Расчетное сопротивление для материала соединения $R_{bt} = 210 \text{ МПа}$; $R_{bs} = 160 \text{ МПа}$; $R_{bp} = 420 \text{ МПа}$.

Требуется:

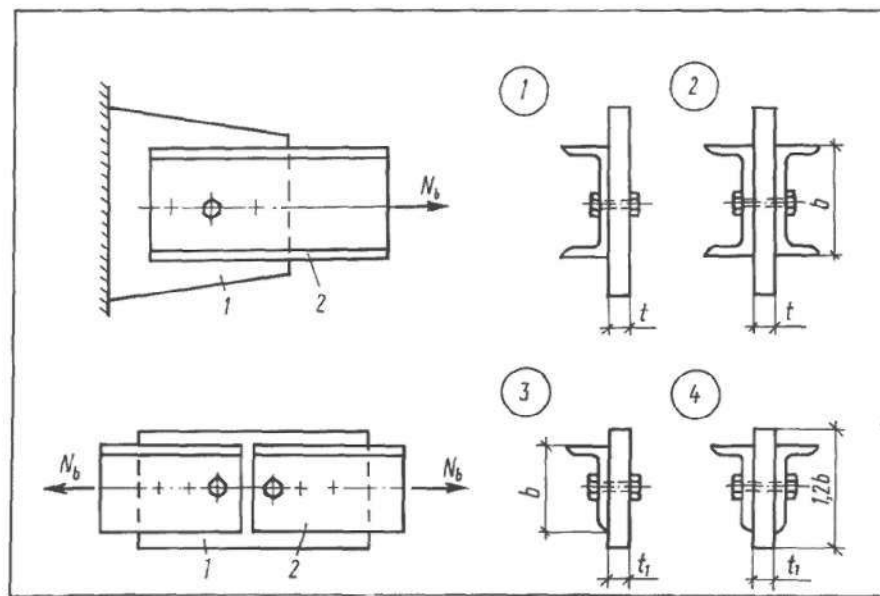
- 1) для элемента 2 определить номер прокатного профиля или толщину листа t ;
- 2) определить номер профиля накладки или ее толщину t_1 ;
- 3) определить количество болтов диаметром d ;
- 4) проверить прочность элемента 2 и накладок, учитывая наличие отверстий под болты;
- 5) вычертить соединение в удобном масштабе и показать расположение болтов.

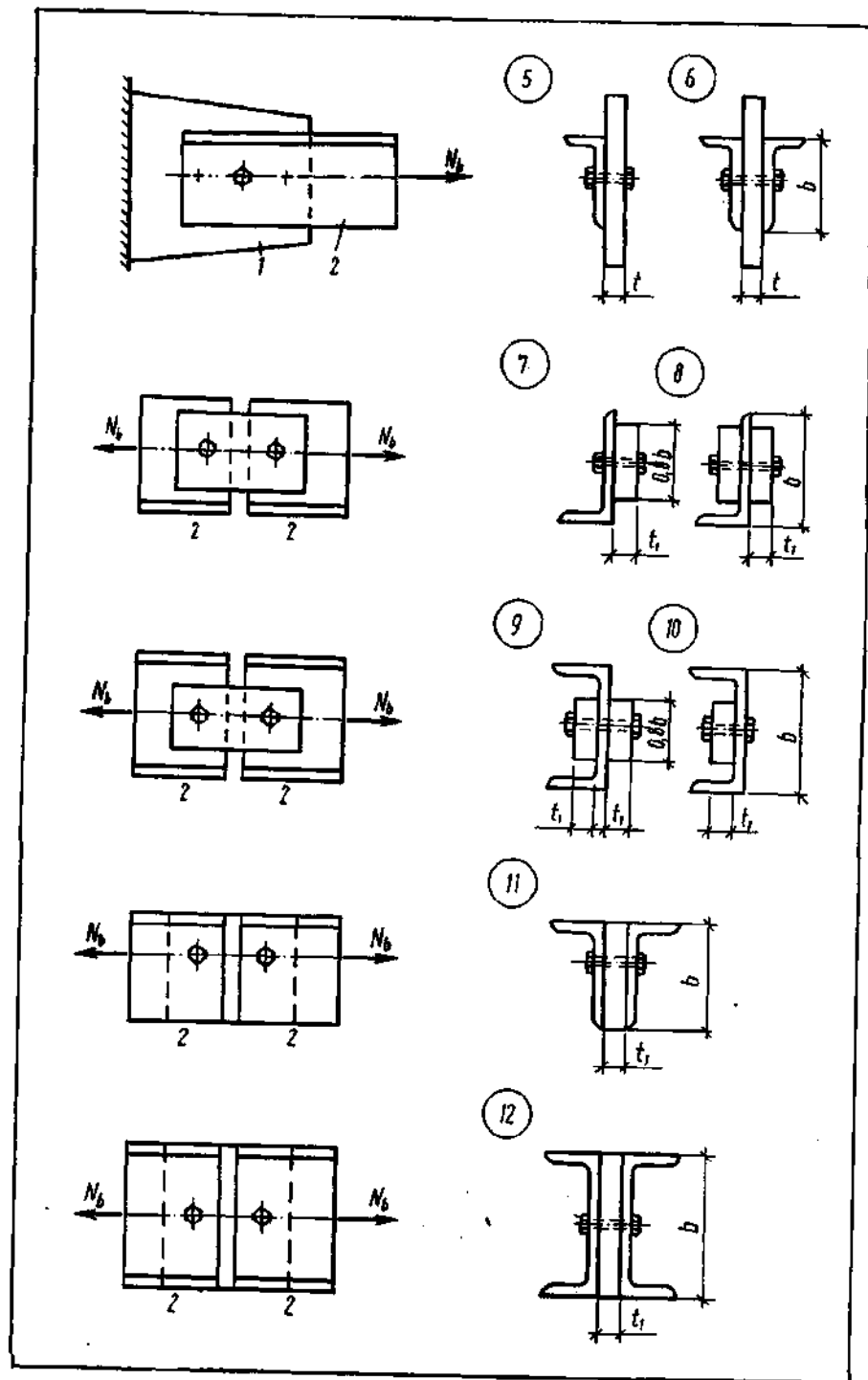
Указания:

- 1) учесть, что площадь сечения уменьшается за счет отверстий под болты для прокатных профилей примерно на 10 %, для листов — на 20 %;
- 2) окончательно толщину листа и накладки принять в соответствии с сортаментом ($t = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 25, 28, 30 \text{ мм}$);
- 3) минимальное расстояние от края элемента до центра болта равно $1,5d$, между центрами болтов — $3d$.

Схемы для расчета приведены ниже, числовые данные — в табл. 3.1.

СХЕМЫ К РАБОТЕ





Т а б л. 3.1. Числовые данные

Номер задания	$N, \text{кН}$	$d, \text{мм}$	Номер задания	$N, \text{кН}$	$d, \text{мм}$	Номер задания	$N, \text{кН}$	$d, \text{мм}$	Номер задания	$N, \text{кН}$	$d, \text{мм}$
1	470	16	6	320	27	11	350	27	16	410	24
2	380	18	7	400	30	12	400	42	17	380	16
3	410	22	8	500	48	13	470	30	18	440	30
4	350	20	9	320	20	14	380	22	19	340	18
5	300	24	10	260	24	15	360	20	20	460	42

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Из каких условий определяются количество болтов и размеры болтового соединения?
2. Как определить условную площадь смятия болта?
3. Запишите условие прочности болтового соединения на растяжение (сжатие) по ослабленному сечению.
4. Какой случай плоского напряженного состояния называется чистым сдвигом?
5. Что называется абсолютным и относительным сдвигом?
6. По какой формуле определяют касательные напряжения при сдвиге?
7. Как формулируется закон Гука при сдвиге?
8. Какова зависимость между модулями упругости E и сдвига G ?

РАБОТА 6. РАСЧЕТ СВАРНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Общие сведения

Наибольшее распространение в строительной практике получили соединения встык (рис. 3.4, а) с угловыми швами. В зависимости от расположения по отношению к линии действия силы различают лобовые (рис. 3.4, б), фланговые (рис. 3.4, в) и косые (рис. 3.4, г) соединения.

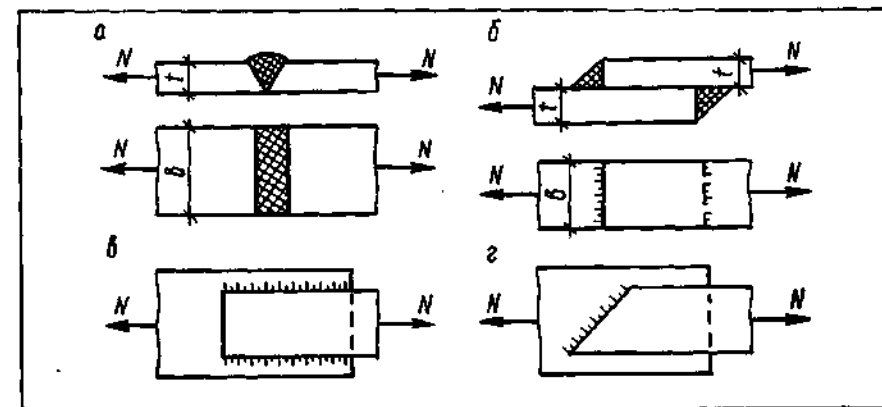


Рис. 3.4. Основные типы сварных соединений

Расчет сварных стыковых соединений на центральное растяжение или сжатие производится по формуле

$$\sigma = \frac{N}{t l_w} \leq R_{wf} \gamma_c \quad (3.8)$$

где t — наименьшая толщина соединяемых элементов; l_w — расчетная длина шва, равная его полной длине, уменьшенной на $2t$.

На основании формулы (3.8) можно решить ряд задач по определению значения максимальной продольной силы для конкретного шва, вычислить толщину соединяемых элементов и расчетную длину шва, а также проверить прочность соединения встык.

Сварные соединения с угловыми швами (рис. 3.5) при действии продольной и поперечной сил рассчитываются на условный срез по металлу шва. Условие прочности такого шва имеет вид

$$\tau = \frac{N}{l_w k_f \beta_f} \leq R_{wf} \gamma_{wf} \gamma_c \quad (3.9)$$

где l_w — расчетная длина шва, которая меньше его полной длины на 10 мм; k_f — катет углового шва ($k_f = 3 \dots 10$ мм, $k_f = 12$ мм); β_f — коэффициент, зависящий от технологических, конструктивных и геометрических факторов ($\beta_f = 0,7; 0,8; 0,9; 1,1$); R_{wf} — расчетное сопротивление угловых швов срезу по металлу шва ($R_{wf} = 180, 200, 215, 280, 340$ МПа); γ_{wf} — коэффициент условий работы шва, равный 1,0; γ_c — коэффициент условий работы конструкции ($\gamma_c = 0,7 \dots 1,1$).

Формула (3.9) позволяет вычислить расчетную нагрузку на сварное соединение, определить геометрические размеры шва и проверить прочность сварного соединения.

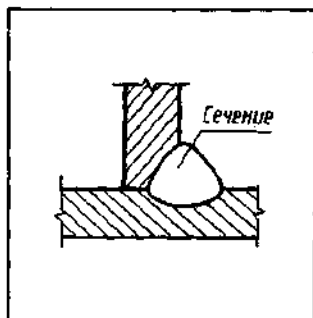


Рис. 3.5. Угловой шов

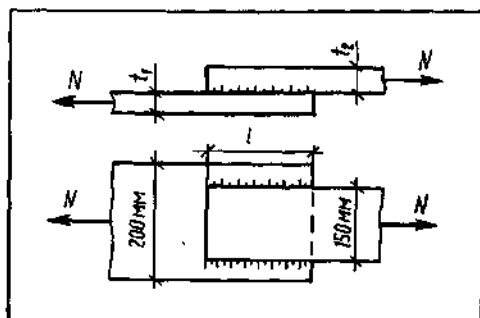


Рис. 3.6. Схема сварного соединения (пример 3.2)

Пример 3.2. Две полосы из стали Ст3 соединены внахлестку двумя сварными угловыми швами (рис. 3.6). Проверить прочность сварных швов.

Дано: $N = 340$ кН; $l = 105$ мм; $t = 95$ мм; $k_f = 12$ мм; $\beta_f = 0,9$; $R_{wf} = 200$ МПа; $\gamma_{wf} = 1,0$; $\gamma_c = 1,0$.

Решение. Прочность сварного соединения из двух фланговых швов проверяется по формуле (3.9):

$$\tau = \frac{340 \cdot 10^3}{2,9,5 \cdot 10^{-2} \cdot 1,2 \cdot 10^{-2} \cdot 0,9} = 165,7 \text{ МПа} < R_{wf} = 200 \text{ МПа}.$$

Следовательно, прочность сварного шва обеспечивается, ибо фактические напряжения в шве меньше расчетного сопротивления срезу по металлу шва.

Пример 3.3. К фасонному листу приварен элемент фермы, состоящий из двух неравнобоких уголков из стали марки Ст3, которые соединены широкими полками (рис. 3.7) и растягиваются расчетной силой. Определить расчетную длину сварных швов.

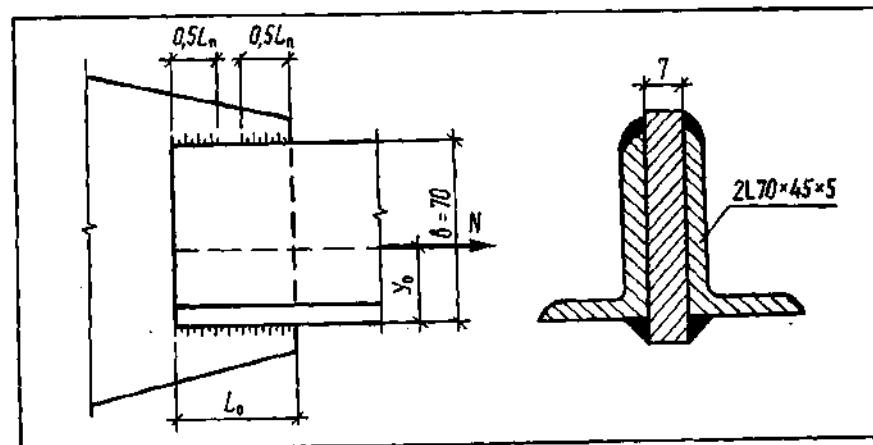


Рис. 3.7. Расчетная схема элемента фермы (пример 3.3)

Дано: $N = 200$ кН; катет углового шва и пера уголка $k_f = 4$ мм; $\gamma_{wf} = 1,0$; $\gamma_c = 0,7$; $R_{wf} = 180$ МПа; $\beta_f = 0,9$; $\gamma_{wf} = 1,0$; $\gamma_c = 0,7$.

Решение. Расчетное усилие на элемент фермы воспринимается сварными швами у пера и у обушки уголка. Определим усилие, воспринимаемое двумя швами пера уголка и двумя швами обушки уголка:

$$N_n = \frac{N y_0}{b} = 200 \cdot 10^3 \frac{2,28 \cdot 10^{-2}}{7 \cdot 10^{-2}} = 65,143 \text{ кН};$$

$$N_o = \frac{N(b - y_0)}{b} = 200 \cdot 10^3 \frac{7 \cdot 10^{-2} - 2,28 \cdot 10^{-2}}{7 \cdot 10^{-2}} = 134,857 \text{ кН}.$$

Расчетная длина двух швов у пера уголка и двух швов у обушки уголка находится следующим образом:

$$l_n = \frac{N_n}{k_f \beta_f R_{wf} \gamma_{wf} \gamma_c} = \frac{65,143 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,4 \cdot 10^{-2} \cdot 180 \cdot 10^6 \cdot 0,7 \cdot 0,9} = 0,0718 \text{ м} = 7,18 \text{ см};$$

$$l_0 = \frac{N_0}{k_f \beta_f R_{\omega f} \gamma_{\omega t} \gamma_c} = \frac{134,857 \cdot 10^3}{2,0 \cdot 10^{-2} \cdot 180 \cdot 10^6 \cdot 0,7 \cdot 0,9} = 0,0991 \text{ м} = 9,91 \text{ см.}$$

Полная длина швов у пера и у обушка уголка:

$$L_n = L_0 + 10 \text{ мм} = 8,18 \text{ см}; L_o = L_0 + 10 \text{ мм} = 10,91 \text{ см.}$$

Исходные данные к работе

Элемент конструкции 1 (лист, швеллер, уголок) присоединяется внахлестку или впритык с помощью накладки (накладок) к заведомо прочному элементу 2 (см. схемы к работе). Задана продольная сила N , действующая на один элемент.

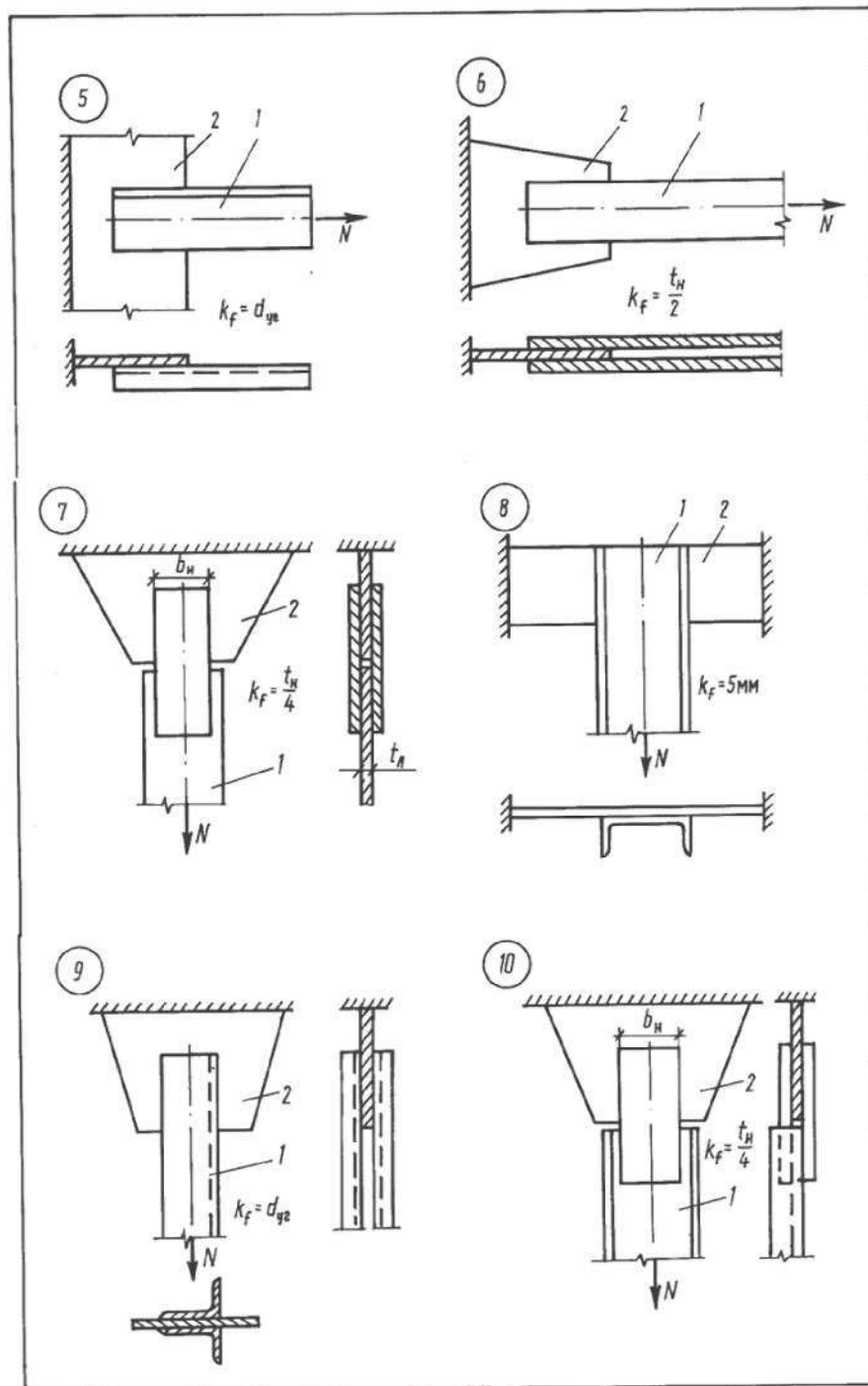
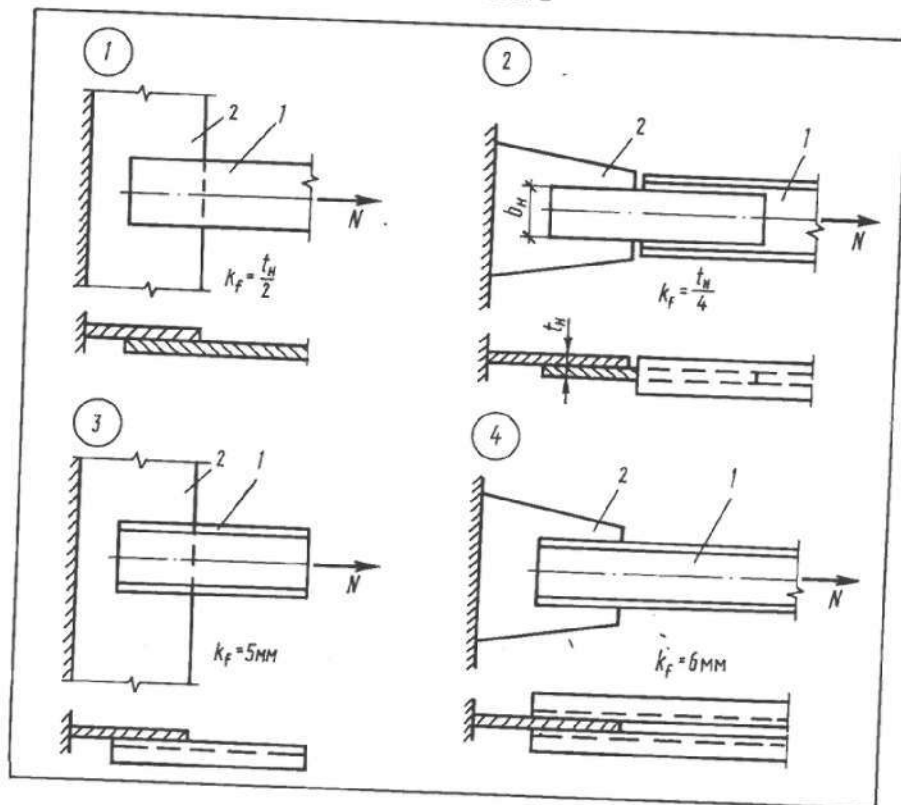
Требуется:

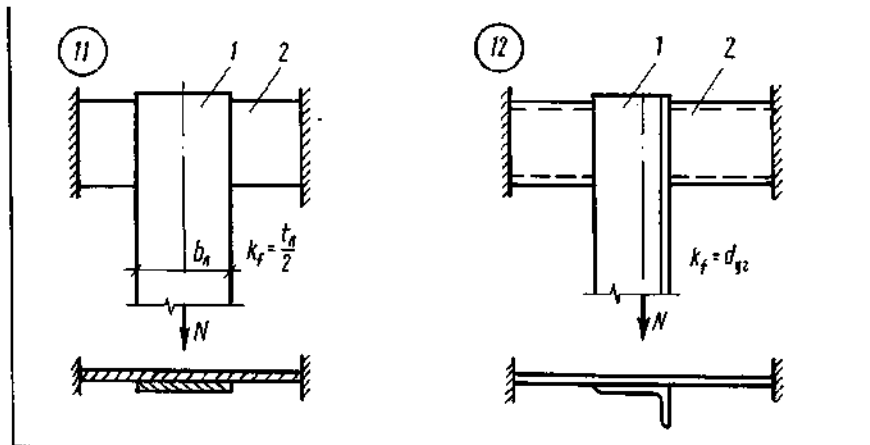
1) определить необходимую длину фланговых швов при расчетном сопротивлении $R_{\omega f} = 180 \text{ МПа}$, $\gamma_{\omega f} = 1$. Катет углового шва k_f указан на расчетных схемах. Коэффициенты β_f и γ_c даны в табл. 3.2;

2) вычертить соединение, показав расположение и размеры швов.

Схемы для расчета приведены ниже, числовые данные — в табл. 3.2.

СХЕМЫ К РАБОТЕ





Т а б л. 3.2. Числовые данные

Номер задания	Размеры					Номер швеллера	N, кН	β_f	γ_c
	листа, мм		уголка, см	накладки, мм					
	b	t		b _н	t _н				
1	140	16	16X10X0,9	120	24	14	246	0,7	1,0
2	160	20	14X9X0,8	140	20	16	300	0,8	0,7
3	110	16	12,5X8X1	80	16	14a	200	0,9	0,8
4	120	12	14X9X1	100	16	18	250	1,1	0,9
5	150	20	16X10X1	130	24	16	350	0,9	1,1
6	180	24	12,5X8X1,2	160	20	18a	260	0,8	0,7
7	100	16	18X11X1	80	20	16a	320	0,7	0,8
8	190	12	14X9X1	170	24	22	280	1,1	0,9
9	100	16	16X10X1,2	80	16	20	300	0,7	1,0
10	140	16	18X11X1,2	120	20	20a	260	0,8	0,9
11	160	24	20X12,5X1,1	140	24	16	280	0,9	0,8
12	120	18	16X10X1,2	100	16	16a	300	1,1	0,7
13	150	16	18X11X1	130	16	22a	320	0,9	1,0
14	160	24	16X10X1	140	24	18	250	0,8	0,9
15	180	20	16X10X1,2	160	20	16a	250	0,7	0,8
16	140	12	18X11X1,2	120	16	14a	240	1,1	1,0

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите типы сварных соединений.
2. Как проверить прочность сварного соединения встык?
3. Как определить длину фланговых сварных швов?
4. Как вычислить расчетную нагрузку на сварное соединение?
5. Какой случай плоского напряженного состояния называется чистым сдвигом?

IV. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ФИГУР

РАБОТА 7. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ПЛОСКИХ ФИГУР

Общие сведения

Статическими моментами S_x и S_y площади плоской фигуры относительно осей x и y (рис. 4.1) называются интегралы вида:

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA. \quad (4.1)$$

Статические моменты сечения равны алгебраической сумме статических моментов всех частей фигуры:

$$S_x = S_{x1} + S_{x2} + \dots + S_{xn} = \sum_{i=1}^n A_i y_i; \quad (4.2)$$

$$S_y = S_{y1} + S_{y2} + \dots + S_{yn} = \sum_{i=1}^n A_i x_i.$$

В зависимости от положения сечения относительно осей статические моменты могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Если оси проходят через центр тяжести фигуры, они называются центральными и относительно их статические моменты равны нулю:

$$S_x = A y_c = 0; \quad S_y = A x_c = 0. \quad (4.3)$$

Формулы (4.3) используются для нахождения координат центра тяжести плоского сечения:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad (4.4)$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}.$$

Если фигура имеет ось симметрии, то центр тяжести находится на этой оси и его положение определяется одной координатой. При наличии двух и более осей симметрии центр тяжести совпадает с точкой пересечения этих осей.

Осевыми моментами инерции плоской фигуры относительно осей x и y (см. рис. 4.1) называются интегралы

$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA. \quad (4.5)$$

Полярным моментом инерции относительно начала координат (см. рис. 4.1) является интеграл вида

$$I_p = \int_A \rho^2 dA, \quad (4.6)$$

а центробежным моментом инерции относительно осей x и y — интеграл

$$D_{xy} = \int_A xy dA. \quad (4.7)$$

Все моменты инерции выражаются в единицах длины в четвертой степени (см⁴, м⁴). Осевые и полярный моменты инерции всегда положительны, а центробежный момент может быть положительным, отрицательным или равным нулю в зависимости от положения осей координат.

При определении момента инерции сложного сечения его рекомендуется разбивать на части, для которых моменты инерции легко определяются. В этом случае момент инерции всего сечения

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n = \sum_{i=1}^n I_i. \quad (4.8)$$

Суммирование должно выполняться относительно одних и тех же осей, т.е. нельзя суммировать моменты инерции частей фигуры относительно различных осей.

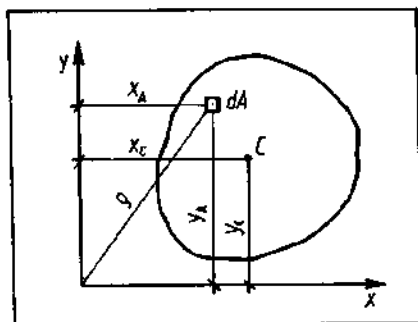


Рис. 4.1. Расположение элементарной площадки относительно осей координат

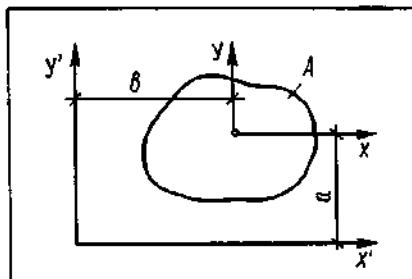


Рис. 4.2. Параллельный перенос осей координат

Полярный момент инерции равен сумме осевых моментов инерции относительно координатных осей, проходящих через полюс, т.е.

$$I_p = I_x + I_y. \quad (4.9)$$

При параллельном переносе осей координат (рис. 4.2) осевые моменты инерции вычисляются следующим образом:

$$I_{x'} = I_x + Aa^2; \quad I_{y'} = I_y + Ab^2. \quad (4.10)$$

Центробежный момент инерции относительно произвольной системы координат (см. рис. 4.2) равен центробежному моменту инерции относительно центральных осей, им параллельным, сложенному с произведением площади на координаты центра тяжести относительно произвольных осей x и y :

$$D_{x'y'} = D_{xy} + Aab. \quad (4.11)$$

В формулу (4.11) координаты центра тяжести необходимо подставить с учетом их знаков.

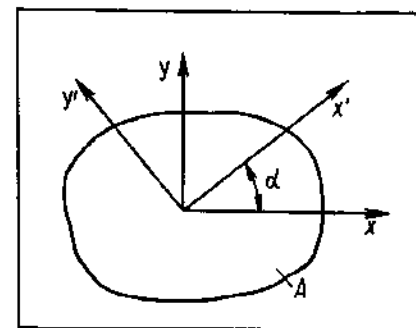


Рис. 4.3. Поворот осей координат

При повороте осей координат на угол α (рис. 4.3) моменты инерции вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} I_{x'} &= I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - D_{xy} \sin 2\alpha; \\ I_{y'} &= I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + D_{xy} \sin 2\alpha; \\ D_{x'y'} &= D_{xy} \cos 2\alpha + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Главными осями инерции называются две взаимно перпендикулярные оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю. Осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными моментами инерции.

Главные оси можно всегда провести через любую точку сечения, но практическое значение имеют оси, проходящие через центр тяжести сечения, — главные центральные оси. Соответствующие им моменты инерции называются главными центральными моментами инерции.

Главные оси характерны тем, что относительно их моменты инерции имеют максимальное и минимальное значения по сравнению с моментами инерции относительно любых других осей, проходящих через данную точку.

Угол наклона между главными и исходными осями вычисляется из соотношения

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2D_{xy}}{I_y - I_x}. \quad (4.13)$$

При пользовании формулой (4.13) нужно учитывать следующее правило знаков для угла α_0 (рис. 4.4):

- а) $-\alpha_0$ при $D_{xy} > 0, I_x > I_y$;
- б) $+\alpha_0$ при $D_{xy} > 0, I_x < I_y$;
- в) $+\alpha_0$ при $D_{xy} < 0, I_x > I_y$;
- г) $-\alpha_0$ при $D_{xy} < 0, I_x < I_y$.

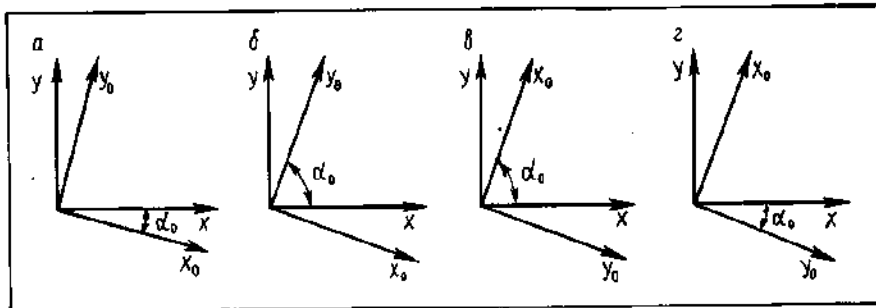


Рис. 4.4. Направления главных осей

Направление главных осей можно найти на основании соотношения

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = - \frac{D_{xy}}{I_{\max, \min} - I_y}, \quad (4.14)$$

где α_1, α_2 — углы, определяющие положение осей, относительно которых момент инерции равен соответственно $I_{\max}$ и $I_{\min}$.

Значения главных моментов инерции определяются по формуле

$$I_{\max, \min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4D_{xy}^2}. \quad (4.15)$$

Пользуясь формулами (4.13) — (4.15), необходимо знать центробежный момент инерции фигуры, который равен нулю, если фигура имеет ось симметрии, совпадающую с осью x или y . Центробежный момент инерции уголков вычисляется по одной из формул:

$$\begin{aligned} D_{x_1 y_1} &= \pm \sqrt{I_{x_1} I_{y_1} - I_{\max} I_{\min}}; \\ D_{x_1 y_1} &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{\max} - I_{\min})^2 - (I_{x_1} - I_{y_1})^2}; \\ D_{x_1 y_1} &= \pm \sqrt{(I_{x_1} - I_{\min})(I_{y_1} - I_{\min})}; \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$D_{x_1 y_1} = \pm \sqrt{(I_{\max} - I_{x_1})(I_{\max} - I_{y_1})};$$

$$D_{x_1 y_1} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \sin 2\alpha.$$

При этом в зависимости от положения уголка применяется и правило знаков (рис. 4.5).

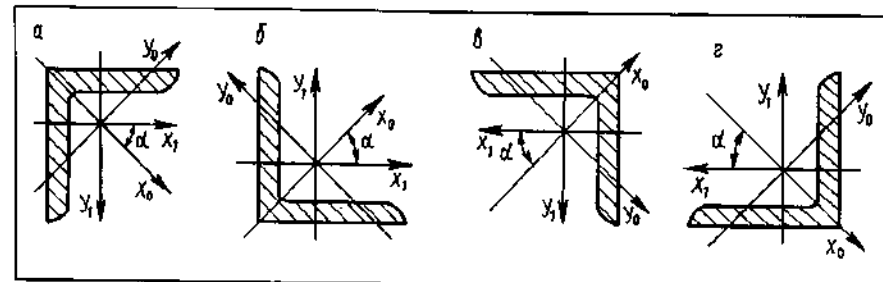


Рис. 4.5. Правило знаков при вычислении центробежного момента инерции:

а, г — $D_{x_1 y_1} > 0$; б, в — $D_{x_1 y_1} < 0$

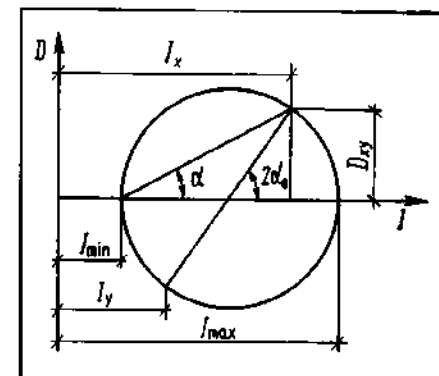


Рис. 4.6. Круг инерции

Связь между моментами инерции I_x, I_y, D_{xy} и главными моментами инерции $I_{\max}, I_{\min}$ наглядно можно представить в виде круга инерции (рис. 4.6). С его помощью можно определять главные моменты инерции и направления главных осей при известных значениях I_x, I_y, D_{xy} (рис. 4.7) или находить значения I_x, I_y, D_{xy} при заданных главных моментах инерции и направлениях главных осей.

Величины

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}; \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (4.17)$$

называются радиусами инерции относительно осей x и y и имеют размерность длины. Радиусы инерции относительно главных осей называются главными радиусами инерции:

$$i_{\max} = \sqrt{\frac{I_{\max}}{A}}; \quad i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}. \quad (4.18)$$

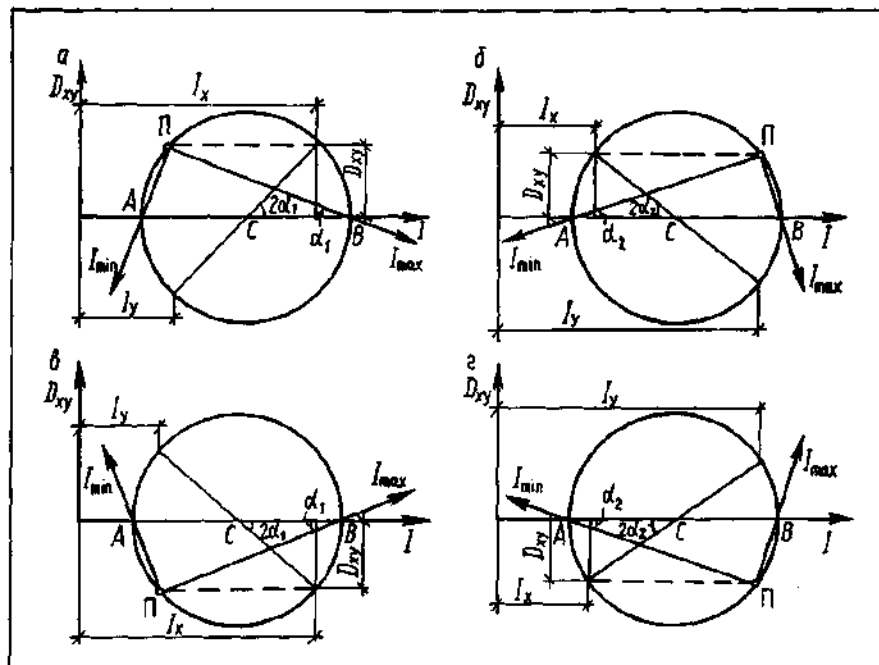


Рис. 4.7. Определение направления главных осей с помощью круга инерции
а — $D_{xy} > 0, I_x > I_y$; б — $D_{xy} > 0, I_x < I_y$; в — $D_{xy} < 0, I_x > I_y$; г — $D_{xy} < 0, I_x < I_y$

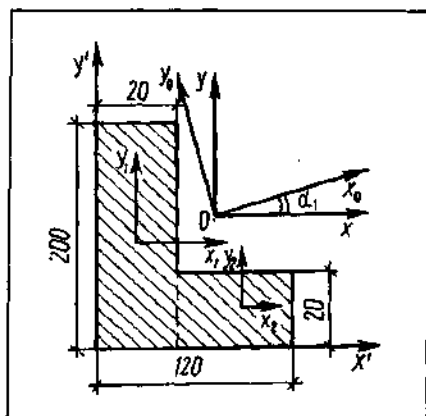


Рис. 4.8. Расчетная схема (пример 4.1)

Пример 4.1. Для составного сечения, приведенного на рис. 4.8, определить положение центра тяжести, вычислить значения центробежного и осевых моментов инерции относительно осей, проходящих через его центр тяжести. Найти положение главных центральных осей и вычислить значения главных центральных моментов инерции.

Дано: $A_1 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ см}^2$; $A_2 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ см}^2$; $I_{x_1} = \frac{2 \cdot 20^3}{12} = 1333 \text{ см}^4$; $I_{y_1} = \frac{2^3 \cdot 20}{12} = 13 \text{ см}^4$; $I_{x_2} = \frac{10 \cdot 2^3}{12} = 7 \text{ см}^4$; $I_{y_2} = \frac{10^3 \cdot 2}{12} = 167 \text{ см}^4$.

Решение. Найдем положение центра тяжести сечения:

$$S_{x'} = A_1 y_1 + A_2 y_2 = 20 \cdot 2 \cdot 10 + 10 \cdot 2 \cdot 1 = 420 \text{ см}^3;$$

$$S_{y'} = A_1 x_1 + A_2 x_2 = 20 \cdot 2 \cdot 1 + 10 \cdot 2 \cdot 7 = 180 \text{ см}^3;$$

$$y_c = \frac{S_{x'}}{A} = \frac{420}{60} = 7 \text{ см}; \quad x_c = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{180}{60} = 3 \text{ см}.$$

Вычислим значения осевых и центробежного моментов инерции относительно центральных осей x и y :

$$I_x = \Sigma (I_{x_i} + A_i a_i^2) = 1333 + 3^2 \cdot 40 + 7 + 6^2 \cdot 20 = 2420 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \Sigma (I_{y_i} + A_i b_i^2) = 13 + 2^2 \cdot 40 + 167 + 4^2 \cdot 20 = 660 \text{ см}^4;$$

$$D_{xy} = \Sigma (D_{x_i y_i} + A_i a_i b_i) = 0 + 3 \cdot (-2) \cdot 40 + 0 + (-6) \cdot 4 \cdot 20 = -720 \text{ см}^4.$$

Определим положение главных центральных осей инерции по формуле (4.13):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2D_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{-2 \cdot 720}{660 - 2420} = 0,818;$$

$$2\alpha_0 = 39^\circ; \quad \alpha_0 = 19^\circ 39'.$$

Находим значения главных центральных моментов инерции по формуле (4.15):

$$I_{\max/\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4D_{xy}^2} =$$

$$= \frac{2420 + 660}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(2420 - 660)^2 + 4 \cdot 720^2};$$

$$I_{\max} = 2677 \text{ см}^4; \quad I_{\min} = 403 \text{ см}^4.$$

Определим положение главных центральных осей через моменты инерции $I_{\max}$ и $I_{\min}$. По формуле (4.14)

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{-D_{xy}}{I_{\max} - I_y} = \frac{720}{2677 - 660} = 0,357; \quad \alpha_1 = 19^\circ 39'.$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{-D_{xy}}{I_{\min} - I_y} = \frac{720}{403 - 660} = -2,802; \quad \alpha_2 = -70^\circ 9'.$$

Пример 4.2. Для составного сечения из прокатных профилей, приведенного на рис. 4.9, определить положение центра тяжести, вычислить значения центробежного и осевых моментов инерции, найти положение главных центральных осей инерции и определить значения главных центральных моментов инерции.

Дано: а) швеллер № 30, $A_1 = 40,5 \text{ см}^2$, $I_{x_1} = 5810 \text{ см}^4$, $I_{y_1} = 327 \text{ см}^4$, $z_0 = 2,52 \text{ см}$;

б) уголок 25/16, $A_2 = 48,3 \text{ см}^2$, $I_{x_2} = 1032 \text{ см}^4$, $I_{y_2} = 3147 \text{ см}^4$, $I_{min}^{пр} = 604 \text{ см}^4$; $x_0 = 7,97 \text{ см}$; $y_0 = 3,53 \text{ см}$.

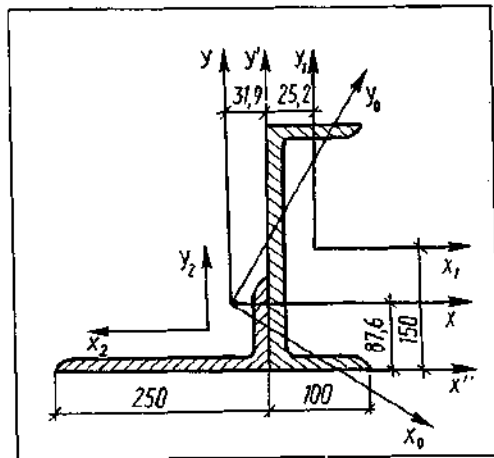


Рис. 4.9. Расчетная схема (пример 4.2)

Решение. Найдем положение центра тяжести составного сечения из прокатных профилей:

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 = 40,5 \cdot 15 + 48,3 \cdot 3,53 = 778 \text{ см}^3;$$

$$S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 = 40,5 \cdot 2,52 + 48,3 \cdot (-7,97) = -282,9 \text{ см}^3;$$

$$x_c = \frac{S_y}{\Sigma A} = \frac{-282,9}{88,8} = -3,19 \text{ см}; y_c = \frac{S_x}{\Sigma A} = \frac{778}{88,8} = 8,76 \text{ см}.$$

Вычислим значения осевых и центробежного моментов инерции относительно центральных осей:

$$I_x = \Sigma (I_{x_i} + A_i a_i^2) = 5810 + 40,5 \cdot 6,24^2 + 1032 + 48,3 \cdot 5,23^2 = 9740,1 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \Sigma (I_{y_i} + A_i b_i^2) = 327 + 40,5 \cdot 5,71^2 + 3147 + 48,3 \cdot 4,78^2 = 5898 \text{ см}^4;$$

$$D_{xy} = \Sigma (D_{x_i y_i} + A_i b_i a_i) = 0 + 6,24 \cdot 5,71 \cdot 40,5 + 1043,27 + 48,37 \cdot (-5,23) \cdot$$

$$x \cdot (-4,78) = 3693,74 \text{ см}^4,$$

где $D_{xy}^{пр} = \sqrt{(I_{x_2} - I_{min}^{пр})(I_{y_2} - I_{min}^{пр})} = \sqrt{(1032 - 604)(3147 - 604)} = 1043,27 \text{ см}^4.$

Определим положение главных центральных осей инерции. По формуле (4.13)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2D_{xy}}{I_y - I_x} = \frac{2 \cdot 3693,74}{5898 - 9740,1} = -1,923;$$

$$2\alpha_0 = -62^\circ 30'; \alpha_0 = -31^\circ 15'.$$

Вычислим значения главных центральных моментов инерции:

$$I_{\max/\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4D_{xy}^2};$$

$$I_{\max} = 11982,48 \text{ см}^4; I_{\min} = 3655,62 \text{ см}^4.$$

Определим положение главных центральных осей через моменты инерции $I_{\max}$ и $I_{\min}$ по формуле (4.14):

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{-D_{xy}}{I_{\max} - I_y} = \frac{-3693,74}{11982,48 - 5898} = -0,607; \alpha_1 = -31^\circ 15';$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{-D_{xy}}{I_{\min} - I_y} = \frac{3693,74}{3655,62 - 5898} = 1,647; \alpha_2 = 58^\circ 45'.$$

Следовательно, направление главных центральных осей инерции определено по формулам (4.13) и (4.14) правильно.

Исходные данные к работе 7А

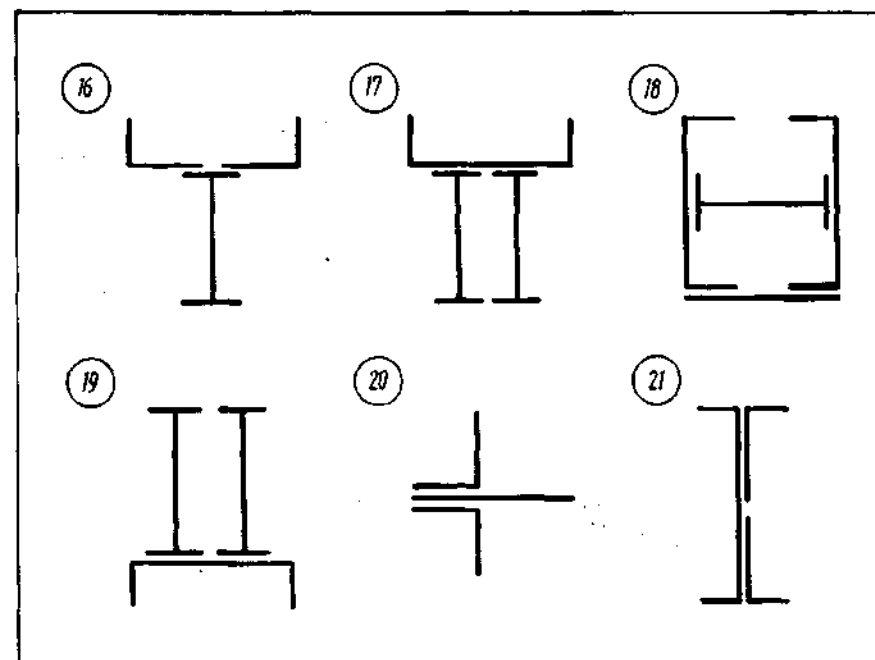
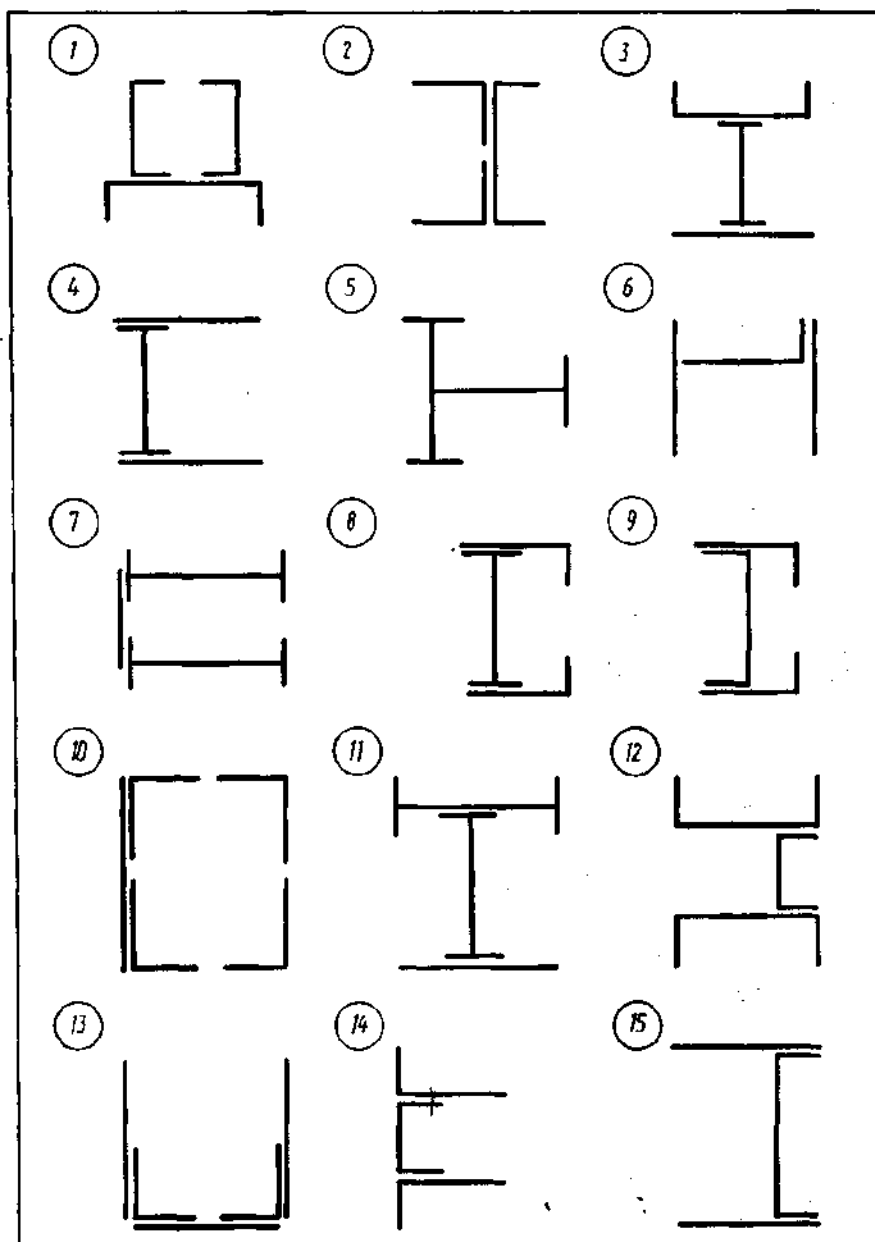
Задано сечение, состоящее из прямоугольников и прокатных профилей.

Требуется:

- 1) определить положение центра тяжести;
- 2) вычислить значения главных центральных моментов инерции;
- 3) вычертить сечение в удобном масштабе, показав все оси и необходимые размеры.

Схемы сечений приведены ниже, числовые данные — в табл. 4.1.

СХЕМЫ К РАБОТЕ 7А



Исходные данные к работе 7Б

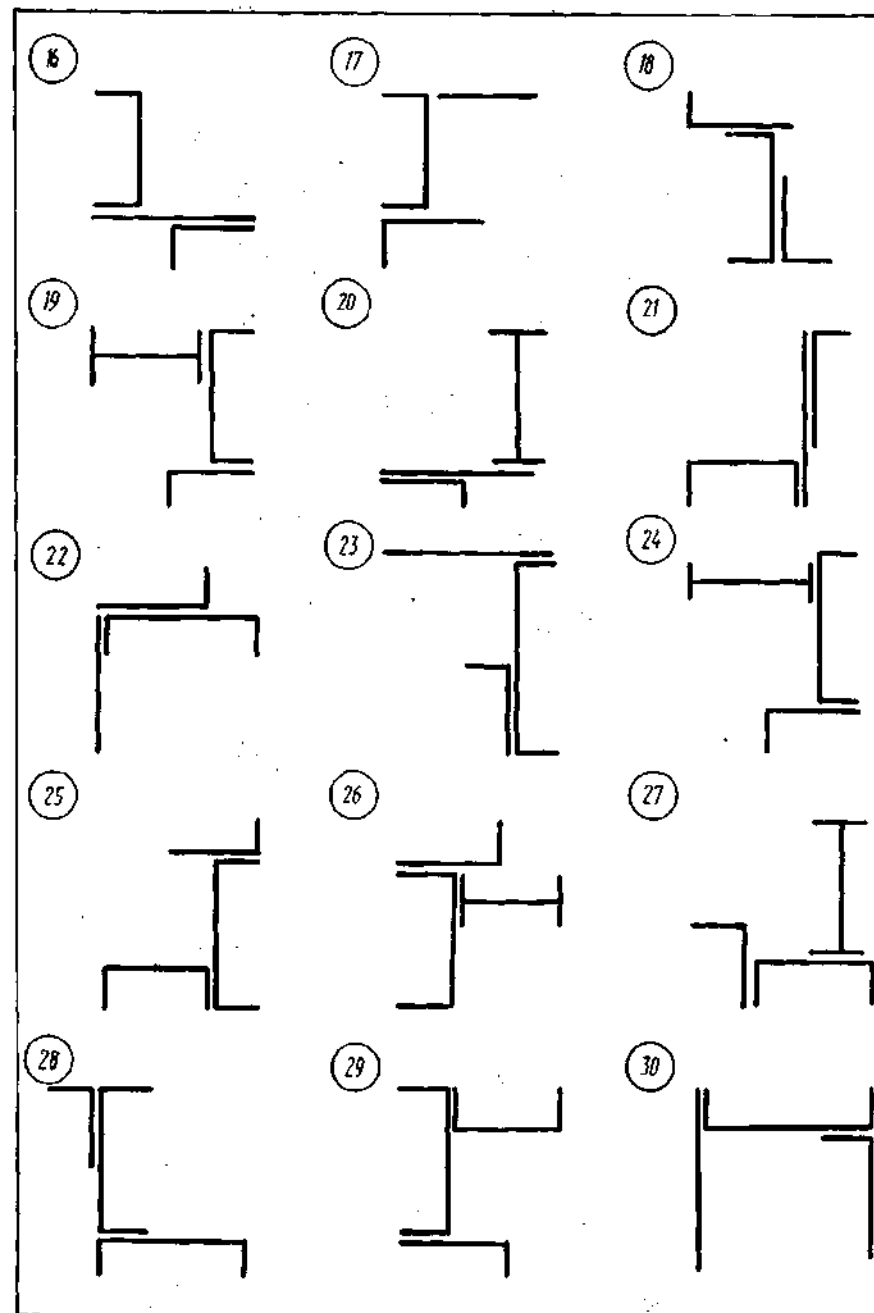
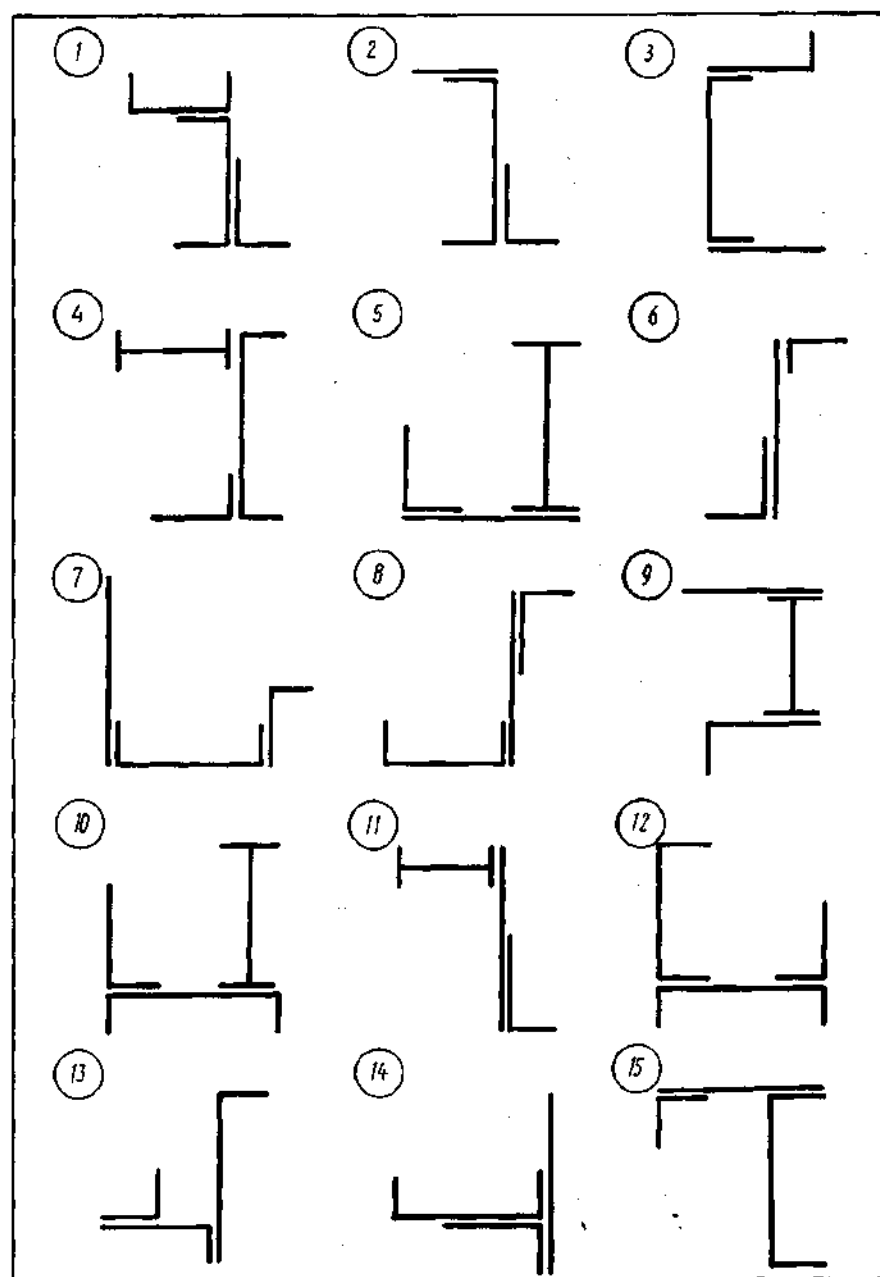
Задано сечение, состоящее из прямоугольников (листов) и прокатных профилей.

Требуется:

- 1) определить положение центра тяжести;
- 2) определить осевые и центробежные моменты инерции относительно центральных осей;
- 3) определить положение главных центральных осей;
- 4) вычислить значения главных центральных моментов инерции;
- 5) построить круг инерции и по нему проверить положение главных центральных осей и значения главных центральных моментов инерции;
- 6) вычертить сечение в удобном масштабе и показать все необходимые оси и размеры.

Схемы сечений приведены ниже, числовые данные — в табл. 4.1.

СХЕМЫ К РАБОТЕ 7 Б



Т а б л. 4.1. Числовые данные к работам 7А и 7Б

Номер задания	Размеры					Номер	
	листа, см		уголка, мм		двутавра (ГОСТ 8239—72)	швеллера (ГОСТ 8240—72)	
	h	b	равнобокого (ГОСТ 8509—72)	неравнобокого (ГОСТ 8510—72)			
1	16	1,8	80×80×8	—	18а	22	
2	16	2,2	80×80×7	—	18	20а	
3	16	1,4	80×80×6	—	16	22	
4	18	2,0	—	100×63×6	20	22а	
5	18	2,4	—	110×70×7	18а	22	
6	18	1,6	—	90×56×6	18	22а	
7	20	2,2	110×110×7	—	20а	24	
8	20	2,4	—	110×70×7	18а	22	
9	20	1,8	100×100×8	—	18а	20	
10	22	2,4	—	125×80×12	22	24а	
11	22	1,6	—	125×80×12	20а	24	
12	22	2,0	—	125×80×8	20	20а	
13	24	1,4	125×125×12	—	22а	22	
14	24	1,8	125×125×16	—	22	24а	
15	24	2,2	125×125×10	—	20а	18	
16	16	1,6	—	100×63×10	24	22а	
17	16	2,0	—	90×56×8	22а	16	
18	16	2,4	—	100×63×7	22	18а	
19	18	1,8	90×90×9	—	24а	20	
20	18	2,2	90×90×8	—	24	18	
21	18	1,4	90×90×7	—	22	18а	
22	20	2,0	—	125×80×7	18	20а	
23	18	2,2	90×90×8	—	24	18	
24	20	1,6	—	110×70×8	24	18	
25	22	2,2	—	125×80×7	18	20а	
26	20	2,4	—	110×63×10	24а	18а	
27	20	1,6	—	110×70×8	24	18	
28	22	2,2	100×100×16	—	20	18	
29	18	2,2	90×90×8	—	24	18	
30	22	1,8	110×110×8	—	24а	18а	

Программа для МК БЗ-34

Программа предназначена для вычисления координат центра тяжести x_c, y_c ; площади сечения A_0 ; осевых и центробежных моментов инерции I_x, I_y, D_{xy} ; главных моментов инерции $I_{\max}, I_{\min}$; угла поворота α главных осей сечения по отношению к вспомогательным осям.

Для расчета по программе необходимо выполнить следующие действия:

1) произвольным образом пронумеровать простые фигуры, составляющие заданное сечение;

Т а б л. 4.2. Текст программы

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
	F ПРГ		32	+	10	65	ИП4	64
00	С/П	50	33	П5	45	66	ИП5	65
01	ИП3	63	34	ИП6	66	67	+	10
02	ИП9	69	35	ИПС	6С	68	2	02
03	X	12	36	+	10	69	÷	13
04	ИП3	63	37	ИПА	6—	70	П8	48
05	ИП9	69	38	ИПВ	6L	71	ИП4	64
06	+	10	39	X	12	72	ИП5	65
07	ПО	40	40	ИПД	6Г	73	—	11
08	÷	13	41	X	12	74	2	02
09	ПД	4Г	42	+	10	75	÷	13
10	ИП4	64	43	П6	46	76	F x ²	22
11	ИПА	6—	44	ИП1	61	77	ИП6	66
12	+	10	45	ИП3	63	78	F x ²	22
13	ИП2	62	46	X	12	79	+	10
14	ИП8	68	47	ИП7	67	80	F √	21
15	—	11	48	ИП9	69	81	П9	49
16	ПА	4—	49	X	12	82	+	10
17	F x ²	22	50	+	10	83	П7	47
18	ИПД	6Г	51	ИПО	60	84	ИП8	68
19	X	12	52	÷	13	85	ИП9	69
20	+	10	53	П1	41	86	—	11
21	П4	44	54	ИП2	62	87	П8	48
22	ИП5	65	55	ИП3	63	88	ИП6	66
23	ИПВ	6L	56	X	12	89	ИП5	65
24	+	10	57	ИП8	68	90	ИП8	68
25	ИП1	61	58	ИП9	69	91	—	11
26	ИП7	67	59	X	12	92	÷	13
27	—	11	60	+	10	93	F arctg	1L
28	ПВ	4L	61	ИПО	60	94	П9	49
29	F x ²	22	62	П3	43	95	БП	51
30	ИПД	6Г	63	÷	13	96	00	00
31	X	12	64	П2	42		F АВТ	

2) выбрать вспомогательную систему координат и найти координаты центра тяжести каждой простой фигуры x_i, y_i (рис. 4.10);

3) определить площадь, осевые и центробежные моменты инерции каждой из простых фигур, входящих в состав сложного сечения, относительно их собственных центральных осей $A_i, I_{x_i}, I_{y_i}, D_{x_i y_i}$;

4) ввести программу (табл. 4.2);

5) ввести исходные данные в порядке, указанном в табл. 4.3;

6) после окончания выполнения программы для индикации результатов произвести действия, указанные в табл. 4.4.

Всякий раз после нажатия клавиши С/П необходимо выдержать паузу для выполнения вычислений, предусмотренных программой.

Если в процессе вычислений по программе появится признак переполнения ЕГГОГ, то для продолжения вычислений необходимо выполнить действия C_x П9 С/П.

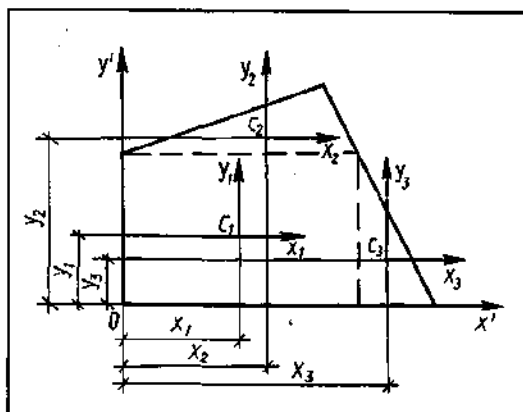


Рис. 4.10. Обозначение осей координат и центров тяжести на сложном сечении

С целью апробации программы вычислим геометрические характеристики сечения, приведенного в примере 4.1. Введем данные и выполним расчет (табл. 4.5).

В результате расчета по программе получим значения геометрических характеристик всего сечения (табл. 4.6).

С помощью программы определим геометрические характеристики сечения, приведенного в примере 4.2. Введем данные (табл. 4.7) и получим результаты расчета (табл. 4.8).

Т а б л. 4.3. Последовательность ввода данных при расчете по программе

Вводимая величина	Операция на МК	Вводимая величина	Операция на МК	Вводимая величина	Операция на МК
Фигура 1		Фигура 2		Фигура 3	
x_1	В/О П1	x_2	П7	x_3	П7
y_1	П2	y_2	П8	y_3	П8
A_1	П3	A_2	П9	A_3	П9
I_{x_1}	П4	I_{x_2}	ПА	I_{x_3}	ПА
I_{y_1}	П5	I_{y_2}	ПВ	I_{y_3}	ПВ
$D_{x_1 y_1}$	П6	$D_{x_2 y_2}$	ПС	$D_{x_3 y_3}$	ПС
С/П		С/П		С/П	

Т а б л. 4.4. Последовательность вывода результатов расчета

Операция на МК	Результат	Операция на МК	Результат	Операция на МК	Результат
ИП1	x_c	ИП4	I_{x_c}	ИП7	$I_{\max}$
ИП2	y_c	ИП5	I_{y_c}	ИП8	$I_{\min}$
ИП3	A_0	ИП6	$D_{x_c y_c}$	ИП9	α^*

* α — это угол между осью X и направлением главной оси, относительно которой момент инерции минимален.

Т а б л. 4.5. Ввод исходных данных (см. пример 4.1)

Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию
	В/О		
1	П1	7	П7
10	П2	1	П8
40	П3	20	П9
1333	П4	7	ПА
13	П5	167	ПВ
0	П6	0	ПС
	С/П		С/П

Т а б л. 4.6. Вывод результатов расчета (см. пример 4.1)

Операция на МК	Результат	Операция на МК	Результат	Операция на МК	Результат
	обозна- значение		обозна- значение		обозна- значение
ИП1	x_c 3	ИП4	I_{x_c} 2420	ИП7	$I_{\max}$ 2677
ИП2	y_c 7	ИП5	I_{y_c} 660	ИП8	$I_{\min}$ 403
ИП3	A_0 60	ИП6	$D_{x_c y_c}$ -720	ИП9	α -70.36°

Т а б л. 4.7. Ввод исходных данных (см. пример 4.2)

Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию
	В/О		
2,52	П1	-7,97	П7
15,0	П2	3,53	П8
40,5	П3	48,3	П9
5810	П4	1032	ПА
327	П5	3147	ПВ
0	П6	1043,27	ПС
	С/П		С/П

Т а б л. 4.8. Вывод результатов расчета (см. пример 4.2)

Опера- ция на МК	Результат		Опера- ция на МК	Результат		Опера- ция на МК	Результат	
	обоз- начение	значе- ние		обоз- начение	значе- ние		обозна- чение	значение
ИП1	x_c	-3,186	ИП4	$I_{x/c}$	9740,12	ИП7	$I_{\max}$	11982,53
ИП2	y_c	8,761	ИП5	$I_{y/c}$	5898,04	ИП8	$I_{\min}$	3655,63
ИП3	A_0	88,8	ИП6	$D_{x_c y_c}$	3693,77	ИП9	α	58,74°

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется статическим моментом площади фигуры?
2. Какова зависимость между статическими моментами относительно двух параллельных осей, чему равен статический момент относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения?
3. Что называется осевым, полярным и центробежным моментами инерции, что они характеризуют и какова их размерность?
4. Чему равна сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей?
5. Запишите формулы для осевых моментов инерции прямоугольника, треугольника, круга относительно осей, проходящих через их центр тяжести.
6. Какова зависимость между осевыми моментами инерции относительно двух параллельных осей, одна из которых проходит через центр тяжести сечения?
7. Запишите формулы, выражающие изменение осевых и центробежного моментов инерции сечения при повороте осей.
8. Какие оси называются главными центральными осями инерции сечения?
9. Запишите формулу для вычисления положения главных осей инерции сечения?
10. Как определяется момент инерции сложной фигуры?
11. Чему равны радиус инерции и момент инерции сечения?
12. Каким образом с помощью круга инерции и по значениям осевых и центробежного моментов инерции можно найти главные моменты инерции сечения и направления главных осей?

V. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

РАБОТА 8. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

Общие сведения

Кручением называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникают только крутящие моменты. Крутящий момент, приложенный в торцевом сечении стержня, считается положительным, если при взгляде на сечение со стороны его внешней нормали момент направлен по ходу часовой стрелки.

Характер изменения внутренних крутящих моментов по длине стержня обычно изображают графически в виде эпюры, которую строят по участкам. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние сосредоточенные моменты или на которых начинаются, а также оканчиваются распределенные моментные нагрузки.

Расчет стержней круглого поперечного сечения на прочность при кручении производится по формуле

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_p} = \frac{T r}{I_p} \leq R_s \gamma_c, \quad (5.1)$$

где r — радиус круглого стержня; γ_c — коэффициент условий работы; $W_p = I_p / r$ — полярный момент сопротивления сечения.

Расчет на жесткость стержней круглого сечения при кручении производится по формуле

$$\theta = \frac{T}{G I_p} \leq \theta_{adm}, \quad (5.2)$$

где θ — относительный угол закручивания на единицу длины; θ_{adm} — допустимый угол закручивания, принимаемый обычно в пределах 0,0026...0,035 рад/м или 0,15...2,0 град/м.

Подставляя в выражения (5.1) и (5.2) значение полярного момента инерции для пустотелого стержня

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4),$$

где $\alpha = d/D$; D — наружный диаметр трубы; d — внутренний диаметр трубы.

Получим зависимости для определения диаметра трубы по условию прочности и жесткости:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 T_{\max}}{\pi R_s \gamma_c (1 - \alpha^4)}}, \quad (5.3)$$

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{32 T_{\max}}{G \theta_{adm} (1 - \alpha^4)}}, \quad (5.4)$$

Если в формулах (5.3) и (5.4) принять $\alpha = 0$, эти зависимости могут быть использованы при расчете сплошных стержней круглого поперечного сечения.

Угол закручивания, или угол относительного поворота концевых сечений какого-либо стержня, при постоянных значениях крутящего момента для этого участка и полярного момента инерции сечения находится следующим образом:

в радианах

$$\nu = \frac{\pi l}{GI_p}; \quad (5.5)$$

в градусах

$$\nu = \frac{180}{\pi} \frac{\pi l}{GI_p}. \quad (5.6)$$

Относительный угол закручивания вычисляется по формулам:

в радианах на метр

$$\theta = \frac{\nu}{l} = \frac{T}{GI_p}; \quad (5.7)$$

в градусах на метр

$$\theta = \frac{180}{\pi} \frac{T}{GI_p}. \quad (5.8)$$

Пример 5.1. Стальной вал круглого поперечного сечения нагружен внешними крутящими моментами (рис. 5.1, а). Требуется определить диаметр вала и построить эпюры внутренних крутящих моментов, наибольших касательных напряжений, абсолютных и относительных углов поворота поперечных сечений. На участке вала с максимальным крутящим моментом вычислить в точке, расположенной на поверхности вала, главные напряжения и определить их направление.

Дано: $T_{e1} = 29 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $T_{e2} = 12 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $T_{e3} = 18 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $l_1 = 1,2 \text{ м}$; $l_2 = 1,6 \text{ м}$; $l_3 = 0,7 \text{ м}$; $R_s = 130 \text{ МПа}$; $\theta_{adm} = 2 \text{ град/м}$; $G = 0,8 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Решение. Из условия равновесия $\sum T_e = 0$ находим реактивный момент в защемлении

$$T_{e0} + T_{e1} + T_{e3} - T_{e2} = 0$$

или

$$T_{e0} + 29 + 18 - 12 = 0,$$

откуда $T_{e0} = -35 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Пользуясь методом сечений, вычисляем внутренние крутящие моменты в сечениях на участке 1

$$0 \leq z < l_1; T_0 = T_{e0} = -35 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

на участке 2

$$l_1 \leq z < (l_1 + l_2); T_1 = T_{e0} + T_{e1} = -35 + 29 = -6 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

на участке 3

$$(l_1 + l_2) \leq z < (l_1 + l_2 + l_3); T_3 = T_{e0} + T_{e1} + T_{e2} = -35 + 29 - 12 = -18 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$\text{При } z = l_1 + l_2 + l_3 \quad T_4 = T_{e0} + T_{e1} + T_{e2} - T_{e3} = 0.$$

Эпюра крутящих моментов приведена на рис. 5.1, б.

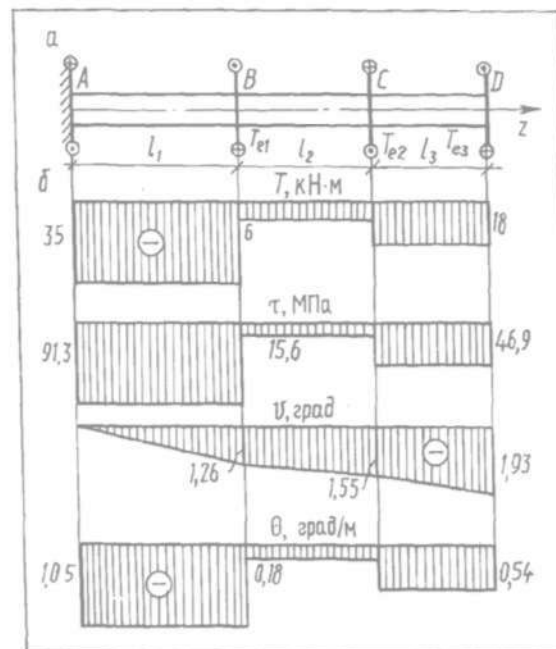


Рис. 5.1. Расчетная схема вала (а), эпюры внутренних крутящих моментов, наибольших касательных напряжений, абсолютных и относительных углов поворота поперечных сечений (б) (пример 5.1)

Определяем диаметр вала из условия прочности и жесткости:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 T_{\max}}{\pi R_s}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 35 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 130 \cdot 10^6}} = 0,111 \text{ м} = 11,1 \text{ см};$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{180 \cdot 32 T_{\max}}{\pi^2 G \theta_{adm}}} = \sqrt[4]{\frac{180 \cdot 32 \cdot 35 \cdot 10^3}{3,14^2 \cdot 0,8 \cdot 10^{11} \cdot 2}} = 0,106 \text{ м} = 10,6 \text{ см}.$$

Окончательно принимаем большее из полученных значений, но с учетом стандартных диаметров вала, т.е. $d = 125 \text{ мм}$.

При этом

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 12,5^3}{16} = 383,3 \text{ см}^3 = 383,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 12,5^4}{32} = 2395,63 \text{ см}^4 = 2395,63 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4.$$

Вычисляем значения наибольших касательных напряжений на отдельных участках вала:
на участке 1

$$\tau_1 = \frac{T_1}{W_p} = \frac{-35 \cdot 10^3}{383,3 \cdot 10^{-6}} = -91,31 \text{ МПа};$$

на участке 2

$$\tau_2 = \frac{T_2}{W_p} = \frac{-6 \cdot 10^3}{383,3 \cdot 10^{-6}} = -15,65 \text{ МПа};$$

на участке 3

$$\tau_3 = \frac{T_3}{W_p} = \frac{-18 \cdot 10^3}{383,3 \cdot 10^{-6}} = -46,96 \text{ МПа}.$$

Эпюра наибольших касательных напряжений приведена на рис. 5.1, б.

Находим углы поворота отдельных сечений вала и с этой целью определяем жесткость его поперечного сечения

$$GI_p = 0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 2395,63 \cdot 10^{-8} = 1916504 \text{ Н} \cdot \text{м}^2.$$

Угол поворота сечения B относительно сечения A

$$\vartheta_{BA} = \frac{T_1 l_1}{GI_p} = \frac{-35 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{1916504} = -0,0219 \text{ рад} = -1,26^\circ.$$

Угол поворота сечения C относительно сечения B

$$\vartheta_{CB} = \frac{T_2 l_2}{GI_p} = \frac{-6 \cdot 10^3 \cdot 1,6}{1916504} = -0,005 \text{ рад} = -0,29^\circ.$$

Угол поворота сечения C относительно сечения A

$$\vartheta_{CA} = \vartheta_{BA} + \vartheta_{CB} = -1,26 - 0,29 = -1,55^\circ.$$

Угол поворота сечения D относительно сечения C

$$\vartheta_{DC} = \frac{T_3 l_3}{GI_p} = \frac{18 \cdot 10^3 \cdot 0,7}{1916504} = -0,00657 \text{ рад} = -0,38^\circ.$$

Угол поворота сечения D относительно сечения A

$$\vartheta_{DA} = \vartheta_{CA} + \vartheta_{DC} = -1,55 - 0,38 = -1,93^\circ.$$

Определяем относительные углы закручивания на отдельных участках вала:

$$\theta_1 = \frac{\vartheta_{BA}}{l_1} = \frac{-1,26}{1,2} = -1,05 \text{ град/м};$$

$$\theta_2 = \frac{\vartheta_{CB}}{l_2} = \frac{-0,29}{1,6} = -0,18 \text{ град/м};$$

$$\theta = \frac{\vartheta_{DC}}{l_3} = \frac{-0,38}{0,7} = -0,54 \text{ град/м}.$$

Строим эпюры абсолютных и относительных углов поворота поперечных сечений вала (см. рис. 5.1, в).

На участке 1, где действует максимальный крутящий момент, в точке на поверхности вала находим значения главных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{\max/\min} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \pm \sqrt{\tau_{xy}^2} = \\ &= \pm \sqrt{(91,3 \cdot 10^6)^2}, \end{aligned}$$

откуда $\sigma_{\max} = 91,3 \text{ МПа}$; $\sigma_{\min} = -91,3 \text{ МПа}$.

Направления главных напряжений определяются по формуле (2.5):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{-2 \cdot 91,3 \cdot 10^6}{0} = -\infty;$$

$$2\alpha_0 = -90^\circ; \alpha_0 = -45^\circ.$$

Следовательно, главные напряжения действуют под углом 45° к осям x, y .

Исходные данные к работе

Стальной вал круглого поперечного сечения нагружен внешними крутящими моментами. Расчетное сопротивление сдвигу $R_s = 130 \text{ МПа}$.

Требуется:

1) построить эпюру внутренних крутящих моментов (в схемах 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 предварительно определить T_{e0});

2) определить диаметр вала из условия прочности и жесткости, приняв окончательное значение его согласно стандарту ($d = 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 125, 140, 160, 170, 200 \text{ мм}$);

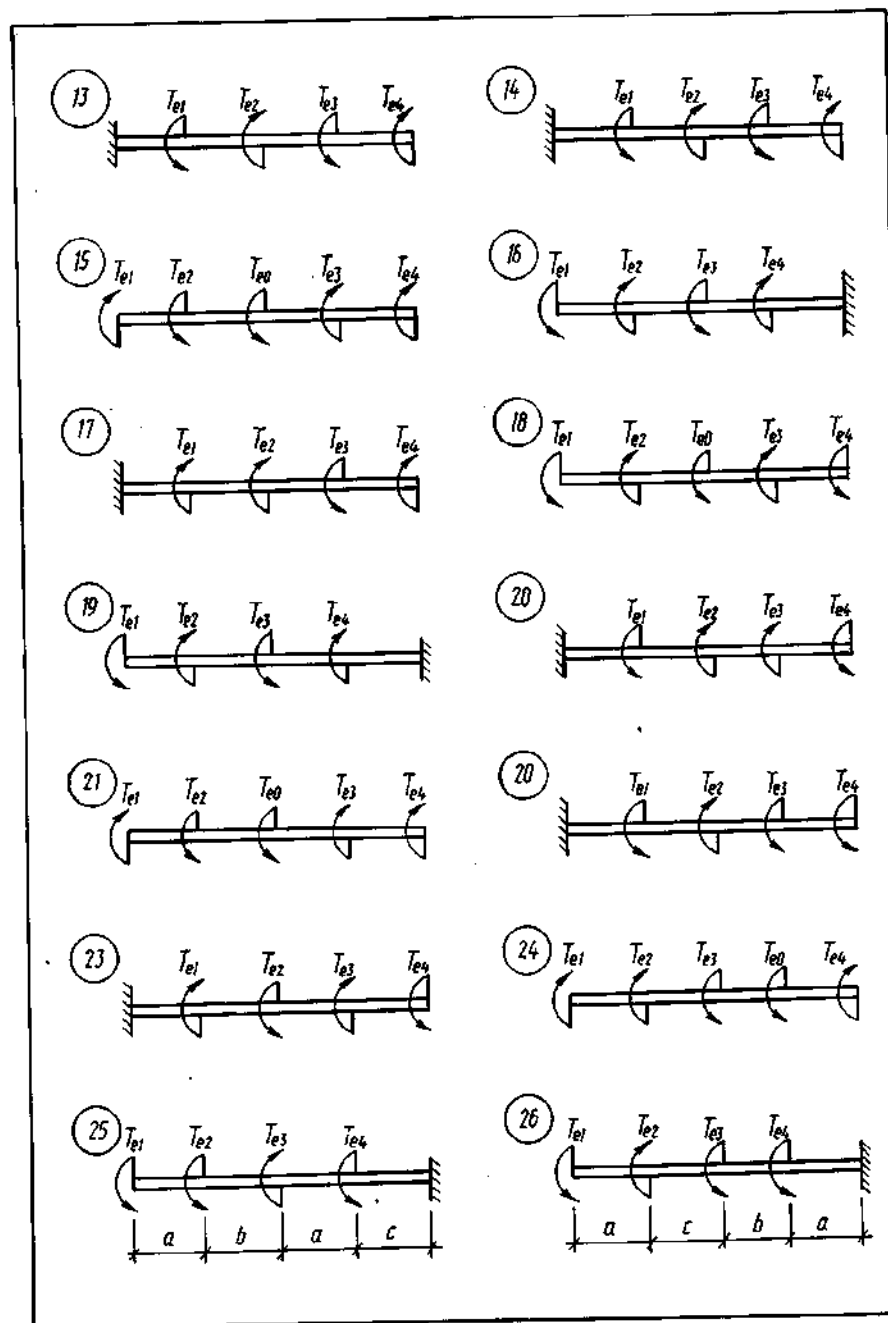
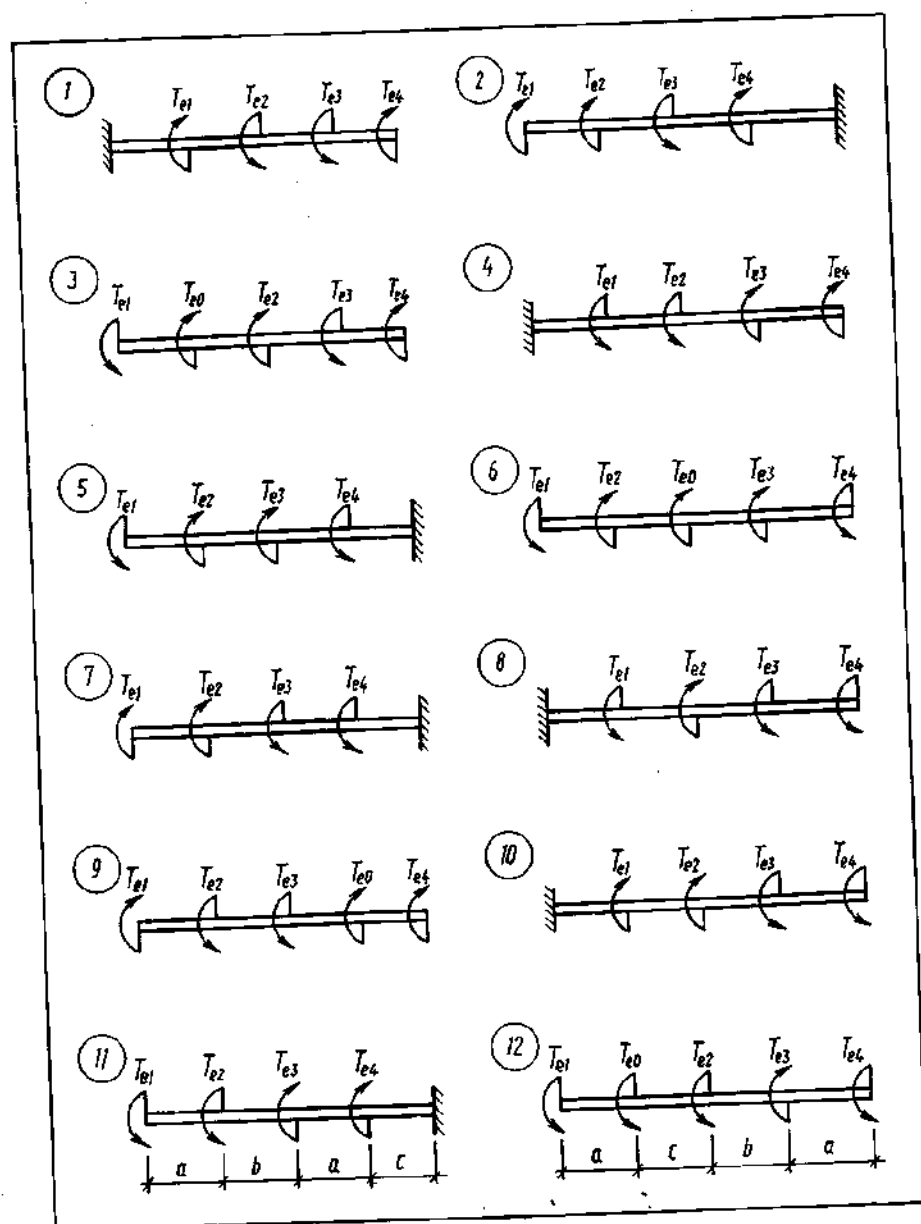
3) построить эпюру углов закручивания;

4) вычислить наибольшее касательное напряжение в поперечном сечении вала и построить эпюру напряжений;

5) вычислить наибольший относительный угол закручивания.

Схемы для расчета приведены ниже, числовые данные — в табл. 5.1.

СХЕМЫ К РАБОТЕ



Т а б л. 5.1. Числовые данные

Номер задания	Длина участка, м			Момент, кН·м				θ_{adm} град/м
	a	b	c	T_{θ_1}	T_{θ_2}	T_{θ_3}	T_{θ_4}	
1	1,0	0,8	1,7	28	14	23	6	3,0
2	1,3	0,8	1,4	5	22	10	26	3,0
3	1,1	1,7	0,4	10	17	9	28	2,0
4	1,1	0,9	0,6	7	24	11	21	1,4
5	1,3	0,8	1,4	5	22	10	26	3,0
6	1,2	1,0	0,9	33	8	25	8	1,5
7	1,2	1,1	0,8	14	10	24	12	2,4
8	1,4	0,5	1,1	27	12	22	6	2,6
9	1,3	0,8	1,1	5	18	8	25	1,0
10	1,3	0,6	1,5	19	11	10	22	1,8
11	1,5	1,0	0,6	6	22	11	30	2,2
12	1,4	1,6	0,8	4	9	24	8	2,5
13	1,6	1,2	0,7	9	24	12	30	3,0
14	1,5	1,0	0,6	8	22	11	28	2,2
15	1,6	0,9	0,7	6	20	10	24	3,0
16	1,4	1,2	0,8	9	24	12	30	3,0
17	0,6	1,2	1,5	26	11	20	8	2,8
18	0,8	1,4	1,2	32	9	24	8	1,6
19	0,7	0,9	1,8	10	15	26	10	2,5
20	0,6	1,2	1,5	26	10	20	10	2,8
21	0,8	1,4	1,2	32	9	23	8	1,6
22	0,9	0,7	1,6	24	18	28	7	1,9
23	0,6	1,1	1,5	28	10	20	6	2,8
24	0,7	1,7	0,9	6	18	10	28	2,7
25	0,9	0,8	1,6	24	18	28	8	1,8
26	0,7	1,5	0,9	8	20	12	30	1,6
27	0,8	0,5	2,0	14	10	22	8	3,0
28	1,0	0,7	1,8	24	18	28	10	2,0
29	0,8	1,2	1,6	25	10	20	8	1,4
30	1,1	1,0	1,4	6	20	10	28	2,0

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. При каком нагружении прямой стержень испытывает деформации чистого кручения?
2. Что представляют собой эпюры крутящих моментов и как они строятся?
3. Как найти напряжения в произвольной точке поперечного сечения круглого стержня?
4. В каких точках стержня круглого поперечного сечения при кручении возникают максимальные напряжения и как их вычислить?
5. Как определить главные напряжения и направления главных площадок?
6. Как найти относительный угол закручивания при кручении круглого стержня?
7. Объясните методику решения трех основных видов задач при кручении: определение напряжений или углов закручивания, подбор сечений и вычисление допустимого крутящего момента из условия прочности и жесткости стержня.
8. Как рассчитать сплошные и полые валы на прочность и жесткость?

9. В каких случаях стержень круглого поперечного сечения при кручении является статически неопределимым?

10. Напишите формулу для вычисления потенциальной энергии деформации при кручении стержня.

VI. ИЗГИБ БАЛОК

РАБОТА 9. ПРОВЕРКА ПРОЧНОСТИ БАЛОК ПРИ ИЗГИБЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Общие сведения

Прямой стержень, работающий преимущественно на изгиб, принято называть балкой. Изгибом называется такая деформация балки, при которой изменяется кривизна ее продольной оси.

Плоскость, проходящая через продольную ось стержня и одну из главных центральных осей его поперечного сечения, называется главной плоскостью. Считается, что все внешние силы, действующие на балку, лежат в одной плоскости, проходящей через ось балки. Такая плоскость называется силовой, а линия пересечения силовой плоскости с плоскостью поперечного сечения — силовой линией. Внешние силы, вызывающие изгиб балки, перпендикулярны к оси стержня.

При плоском поперечном изгибе балки ее ось располагается в силовой плоскости, продольные волокна на выпуклой части балки растягиваются, на вогнутой — сжимаются. Слой промежуточных волокон, не изменяющих своей длины, называется нейтральным. Нейтральный слой пересекается с плоскостью поперечного сечения по так называемой нулевой линии или нейтральной оси.

Под влиянием внешних сил, действующих на балку, возникают опорные реакции, для определения которых используются уравнения статики:

$$\sum Z = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum M_x = 0. \quad (6.1)$$

Уравнения (6.1) можно использовать применительно к балке в целом или к каждому ее участку. Если уравнений равновесия достаточно для того, чтобы вычислить опорные реакции, балку называют статически определимой, в противном случае она статически неопределима.

При плоском поперечном изгибе балки внутренние напряжения, возникающие в поперечном сечении, приводятся к поперечной силе, совпадающей с осью y , и изгибающему моменту, действующему в плоскости yoz (рис. 6.1).

Поперечной силой в сечении балки является равнодействующая внутренних касательных напряжений, возникающих в нем. Изгибающим моментом называется результирующий момент внутренних нормальных сил относительно нейтральной оси поперечного сечения.

Если в поперечных сечениях балки действуют изгибающий момент и поперечная сила, изгиб называется поперечным. При действии только изгибающего момента изгиб называется чистым.

Значения поперечной силы и изгибающего момента находятся методом сечений. Поперечная сила в рассматриваемом сечении балки равна алгебраической сумме проекций на ось y всех внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения:

$$Q = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad (6.2)$$

Изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении балки равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения относительно нейтральной оси этого сечения:

$$M_x = \sum_{i=1}^n M_{ix} \quad (6.3)$$

Вычислив по формулам (6.2) и (6.3) значения поперечной силы и изгибающего момента в различных сечениях балки, строят эпюры поперечных сил

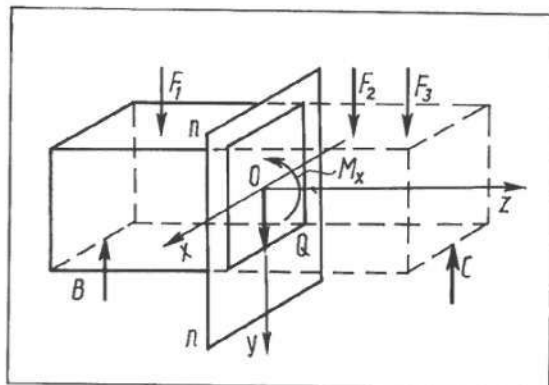


Рис. 6.1. Внутренние усилия, действующие в поперечном сечении балки

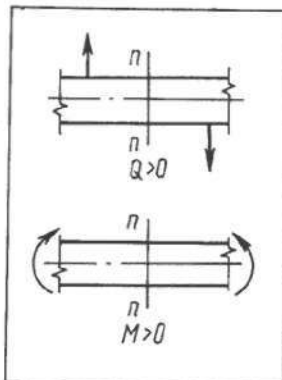


Рис. 6.2. Правило знаков для поперечных сил и изгибающих моментов (сечение $N-N$)

и изгибающих моментов, являющиеся диаграммами изменения указанных усилий вдоль балки. При этом положительные ординаты эпюры поперечных сил откладываются вверх от оси эпюры, а эпюра изгибающих моментов строится со стороны растянутых волокон балки.

Внешние силы, направленные в левой части балки вверх относительно проведенного сечения $n-n$ (рис. 6.2), а в правой — вниз, характеризуют положительную поперечную силу. Если внешние силы стремятся вращать рассматриваемую часть балки относительно центра тяжести проведенного сечения $n-n$ по часовой стрелке в левой части балки и против — в правой, изгибающий момент принимается положительным (см. рис. 6.2). Противоположное направление внешних сил предопределяет отрицательное значение поперечной силы и изгибающего момента в сечении балки.

Указанное правило знаков учитывается при построении эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.

Построение эпюр внутренних силовых факторов для плоских статически определимых рам производится в основном по тем же правилам, что и для балок.

Внутренние усилия, возникающие в любом поперечном сечении стержня плоской рамы, в общем случае приводятся к трем силовым факторам: поперечной силе Q , изгибающему моменту M_x и продольной силе N . При этом ось z направлена вдоль оси каждого стержня рамы, оси x и y совпадают с главными центральными осями поперечного сечения, ось x перпендикулярна к силовой плоскости.

Поперечная сила в произвольном сечении рамы равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на нормаль к оси стержня. Положительный знак поперечной силы принимается, если она вызывает сдвиг по часовой стрелке относительно рассматриваемого сечения.

Изгибающий момент в любом сечении рамы численно равен алгебраической сумме моментов внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, относительно нейтральной оси стержня. Эпюры моментов строят со стороны растянутых волокон рамы и в этом случае отпадает необходимость в постановке знаков на этих эпюрах. Продольная сила в каком-либо сечении рамы численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на ось стержня. Обычно для построения эпюры продольных сил рассматриваются условия равновесия узлов рамы. При растяжении стержней продольная сила принимается со знаком плюс, а при сжатии — минус.

Если найдены значения внутренних силовых факторов для плоских статически определимых рам и балок, можно определить нормальные и касательные напряжения в любой точке рамы или балки, вычислить главные напряжения, проверить прочность материала и подобрать размеры поперечного сечения.

Условие прочности балки по нормальным напряжениям имеет вид

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x^{\max}}{I_x} y_{\text{дан}} \leq R \quad (6.4)$$

Для сечений, симметричных относительно нейтральной оси, формула (6.4) может быть записана следующим образом:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} \leq R \quad (6.5)$$

Выражение (6.5) используется для определения осевого момента сопротивления изгибу

$$W_x \geq \frac{M_x^{\max}}{R}$$

а затем находятся размеры поперечного сечения выбранной формы.

Условие прочности балки по касательным напряжениям

$$\tau_{\max} = \frac{QS'}{I_x b} \leq R_s. \quad (6.6)$$

Для определения нормальных и касательных напряжений в любой точке балки используются формулы:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y; \quad \tau = \frac{QS'}{I_x b}. \quad (6.7)$$

Зная значения нормальных и касательных напряжений в любой точке балки, можно найти главные напряжения:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2};$$

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (6.8)$$

и определить их направления по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = - \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_y} = - \frac{2\tau}{\sigma}. \quad (6.9)$$

Выражения (6.4), (6.5) и (6.6) позволяют проверять прочность материала балки и подбирать размеры поперечных сечений. Однако весьма прочные балки могут быть непригодны к эксплуатации из-за недостаточной жесткости. Поэтому наряду с проверкой на прочность материала балки проводится расчет ее на жесткость и с этой целью вычисляются прогибы балки и углы поворота сечений.

Перемещение центра тяжести сечения в направлении, перпендикулярном к оси балки, называется прогибом балки в данной точке. Угол, на который сечение поворачивается по отношению к своему первоначальному положению, называется углом поворота сечения.

Прогиб балки можно вычислить, например, методом начальных параметров, используя для этого уравнение оси изогнутого стержня

$$EIv = EIv_0 + EI\vartheta_0 z + \sum_{i=1}^n \frac{M_i(z_i - a_i)^2}{2} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{F_i(z_i - b_i)^3}{6} + \sum_{i=1}^n \frac{q_i(z_i - c_i)^4}{24}, \quad (6.10)$$

где b_i , a_i , c_i — расстояния от начала координат соответственно до сечений, в которых приложены силы, моменты, и до начала участка, загруженного равномерно распределенной нагрузкой (рис. 6.3).

Дифференцируя уравнение (6.10) по dz , получим выражение для определения углов поворота поперечных сечений:

$$EIv' = EI\vartheta_0 + \sum_{i=1}^n M_i(z_i - a_i) + \sum_{i=1}^n \frac{F_i(z_i - b_i)^2}{2} +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{q_i(z_i - c_i)^3}{6}. \quad (6.11)$$

В уравнениях (6.10) и (6.11) v_0 , ϑ_0 — начальные параметры, определяемые из граничных условий на опорах балки.

Если начало координат совпадает с защемлением балки, оба начальных параметра равны нулю. При выборе начала координат на опоре с шарниром $v_0 = 0$, а ϑ_0 находится из условия, что прогиб балки на другой опоре равен нулю.

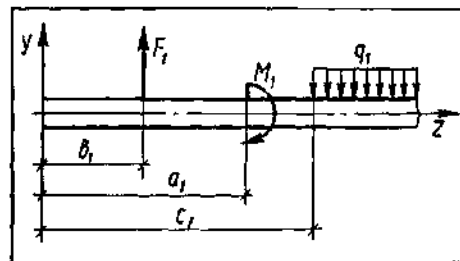


Рис. 6.3. Нагрузки, действующие на балку

Вычислив таким образом значения начальных параметров v_0 , ϑ_0 и подставляя их в уравнения (6.10) и (6.11), можно далее определять прогибы балки и углы поворота ее любых поперечных сечений. При этом в уравнение включаются только нагрузки, приложенные к балке между рассматриваемым сечением и началом координат.

Все силовые факторы подставляются в уравнения с учетом их знаков, т.е. со знаком плюс, если они вызывают в рассматриваемом сечении положительный изгибающий момент.

Универсальную формулу нельзя использовать, если жесткость сечения EI на различных участках балки различна. В этом случае рекомендуется пользоваться методом Мора-Верещагина для определения перемещений балочных и рамных конструкций.

Пример 6.1. Для расчетной схемы, указанной на рис. 6.4, а, построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Подобрать двутавровое сечение и вычислить наибольшее касательное напряжение.

Дано: $F = 30$ кН; $M = 40$ кН·м; $q = 20$ кН/м; $R = 210$ МПа; $R_s = 130$ МПа.

Решение. Определяем опорные реакции:

$$\sum M_B = 0; 2F - 40 + 7D - 3 \cdot 8,5q = 0; D = 70 \text{ кН};$$

$$\sum M_D = 0; 9F - 7B - 40 - 3 \cdot 1,5q = 0; B = 20 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum y = 0; F - B - D + 3q = 0; 30 - 20 - 70 + 60 = 0.$$

Находим значения поперечных сил и изгибающих моментов в характерных сечениях балки:

- а) $z = 0$; $Q = -F = 30 \text{ кН}$; $M_x = 0$;
 б) $z = 2 \text{ м}$; $Q_n = -F = -30 \text{ кН}$; $Q_n = -F + B = -30 + 20 = -10 \text{ кН}$; $M_x = -F \cdot 2 = -30 \cdot 2 = -60 \text{ кН} \cdot \text{м}$;
 в) $z = 5 \text{ м}$; $Q = -30 + 20 = -10 \text{ кН}$; $M_{xn} = -30 \cdot 5 + 20 \cdot 3 = -90 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $M_{xn} = -30 \cdot 5 + 20 \cdot 3 + 40 = -50 \text{ кН} \cdot \text{м}$;
 г) $z = 9 \text{ м}$; $Q_n = -30 + 20 = -10 \text{ кН}$; $Q_n = -30 + 20 + 70 = 60 \text{ кН}$; $M_x = -30 \cdot 9 + 20 \cdot 7 + 40 = -90 \text{ кН} \cdot \text{м}$;
 д) $z = 12 \text{ м}$; $Q = -30 + 20 + 70 - 20 \cdot 3 = 0$;
 $M_x = -30 \cdot 12 + 20 \cdot 10 + 40 + 70 \cdot 3 - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 = 0$.

По этим данным строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 6.4, б).

Далее определяем необходимый момент сопротивления сечения балки, используя формулу (6.5):

$$W_x = \frac{90 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,000428 \text{ м}^3 = 428 \text{ см}^3.$$

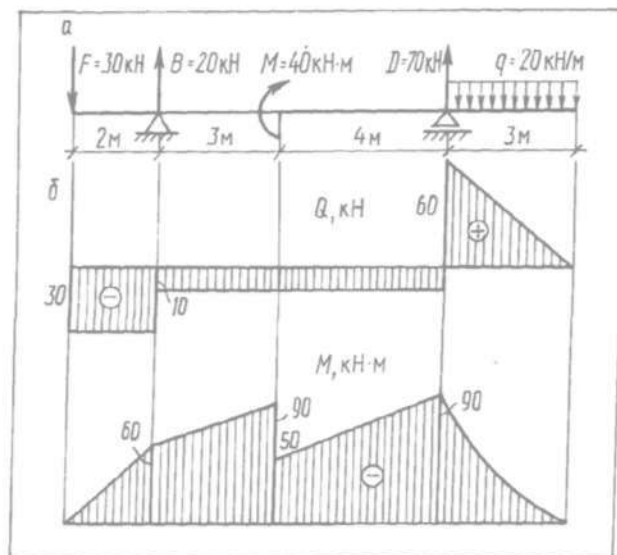


Рис. 6.4. Расчетная схема (а), эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (б) (пример 6.1)

По сортаменту (табл. 6 приложения) выбираем двутавр № 30, для которого $W_x = 472 \text{ см}^3$; $S_x = 268 \text{ см}^3$; $I_x = 7080 \text{ см}^4$; $d = 0,65 \text{ см}$.

Вычисляем наибольшее касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 268 \cdot 10^{-6}}{7080 \cdot 10^{-8} \cdot 0,65 \cdot 10^{-2}} = 45 \text{ МПа} < R_s = 130 \text{ МПа}$$

Следовательно, выбранное поперечное сечение удовлетворяет условию прочности по касательным напряжениям.

Пример 6.2. Для рамы, расчетная схема которой показана на рис. 6.5, а, построить эпюры поперечных сил, изгибающих моментов и продольных сил.

Дано: $M = 10 \text{ кН} \cdot \text{м}$; $F = 20 \text{ кН}$; $a = 2 \text{ м}$; $b = 3 \text{ м}$.

Решение. Определяем опорные реакции:

$$\Sigma x = 0; -20 + H = 0; H = 20 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0; 10 - 20 \cdot 2 + D \cdot 3 = 0; D = 10 \text{ кН};$$

$$\Sigma y = 0; B - 10 = 0; B = 10 \text{ кН}.$$

Строим эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил (рис. 6.5, б).

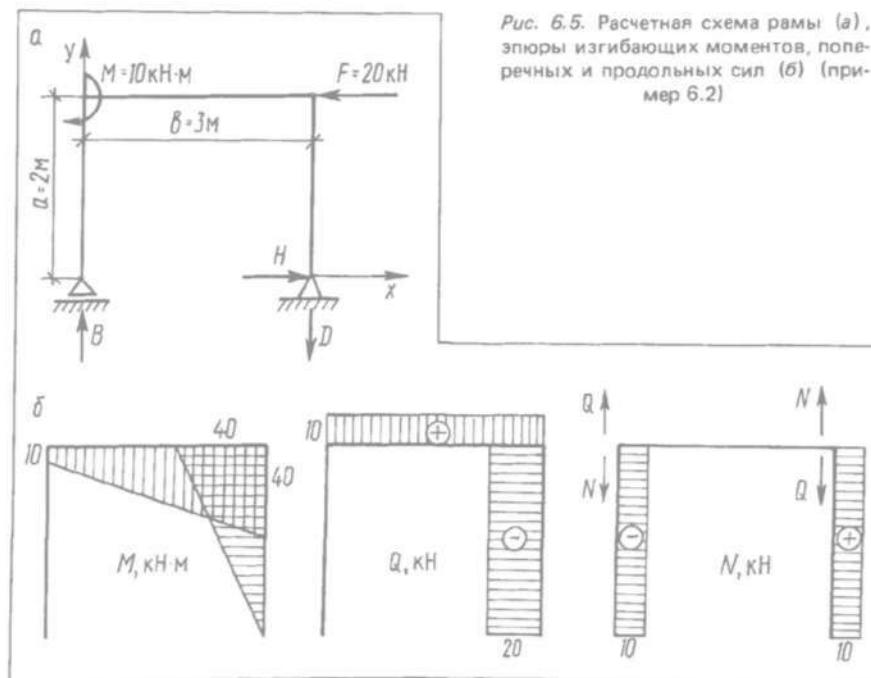


Рис. 6.5. Расчетная схема рамы (а), эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил (б) (пример 6.2)

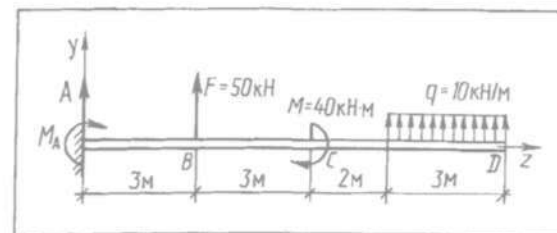


Рис. 6.6. Расчетная схема балки (пример 6.3)

Пример 6.3. Определить прогибы балки и углы поворота сечений в точках В, С и D (рис. 6.6).

Дано: $F = 50 \text{ кН}$; $M = 40 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $q = 10 \text{ кН/м}$.

Решение. Определяем опорные реакции в защемлении балки:

$$\Sigma Y = 0; A - 50 + 10 \cdot 3 = 0; A = 20 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_A = 0; -50 \cdot 3 - 40 + 10 \cdot 3 \cdot 1,5 - M_A = 0; M_A = 95 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Находим прогибы балки в точках B, C, D по формуле (6.10):

а) $z = 3 \text{ м}$:

$$EI v_B = \frac{95 \cdot 10^3 (3-0)^2}{2} + \frac{20 \cdot 10^3 (3-0)^3}{6} - \frac{50 \cdot 10^3 (3-3)^3}{6} =$$

$$= 427,5 \cdot 10^3 + 90 \cdot 10^3 = 517,5 \cdot 10^3 \text{ кН}\cdot\text{м}^3; v_B = \frac{517,5 \cdot 10^3}{EI};$$

б) $z = 6 \text{ м}$:

$$EI v_C = \frac{95 \cdot 10^3 (6-0)^2}{2} + \frac{20 \cdot 10^3 (6-0)^3}{6} - \frac{50 \cdot 10^3 (6-3)^3}{6} =$$

$$= (1710 + 720 - 225) \cdot 10^3 = 2205 \cdot 10^3; v_C = \frac{2205 \cdot 10^3}{EI};$$

в) $z = 11 \text{ м}$:

$$EI v_D = \frac{95 \cdot 10^3 (11-0)^2}{6} + \frac{20 \cdot 10^3 (11-0)^3}{6} - \frac{50 \cdot 10^3 (11-3)^3}{6} +$$

$$+ \frac{40 \cdot 10^3 (11-6)^2}{2} + \frac{10 \cdot 10^3 (11-8)^4}{24} = (5747,5 + 4436,7 - 4266,7 +$$

$$+ 500 + 33,7) \cdot 10^3 = 6451,2 \cdot 10^3 \text{ кН}\cdot\text{м}^3; v_D = \frac{6451,2 \cdot 10^3}{EI}$$

Вычисляем углы поворота сечений в точках B, C, D по формуле (6.11):

а) $z = 3 \text{ м}$:

$$EI v'_B = 95 \cdot 10^3 (3-0) + \frac{20 \cdot 10^3 (3-0)^2}{2} = (285 + 90) \cdot 10^3 \text{ кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$v'_B = \frac{375 \cdot 10^3}{EI};$$

б) $z = 6 \text{ м}$:

$$EI v'_C = 95 \cdot 10^3 (6-0) + \frac{20 \cdot 10^3 (6-0)^2}{2} - \frac{50 \cdot 10^3 (6-3)^2}{2} =$$

$$= (570 + 360 - 225) \cdot 10^3 = 705 \cdot 10^3 \text{ кН}\cdot\text{м}^2;$$

$$v'_C = \frac{705 \cdot 10^3}{EI};$$

в) $z = 11 \text{ м}$:

$$EI v'_D = 95 \cdot 10^3 (11-0) + \frac{20 \cdot 10^3 (11-0)^2}{2} - \frac{50 \cdot 10^3 (11-3)^2}{2} +$$

$$+ 40 \cdot 10^3 (11-6) + \frac{10 \cdot 10^3 (11-8)^3}{6} = (1045 + 1210 - 1600 + 200 +$$

$$+ 45) \cdot 10^3 = 900 \cdot 10^3 \text{ кН}\cdot\text{м}^2; v'_D = \frac{900 \cdot 10^3}{EI}.$$

Пример 6.4. Найти нормальное и касательное напряжения в точке на расстоянии $y = 2 \text{ см}$ выше нейтрального слоя в сечении балки на расстоянии 30 см от левой опоры балки, загруженной силой посередине пролета. Проверить прочность материала в этой же точке, используя четвертую теорию прочности.

Дано: Высота балки $h = 16 \text{ см}$, ширина $b = 8 \text{ см}$, пролет $l = 80 \text{ см}$, $F = 200 \text{ кН}$ (рис. 6.7, а); $R_c = 140 \text{ МПа}$.

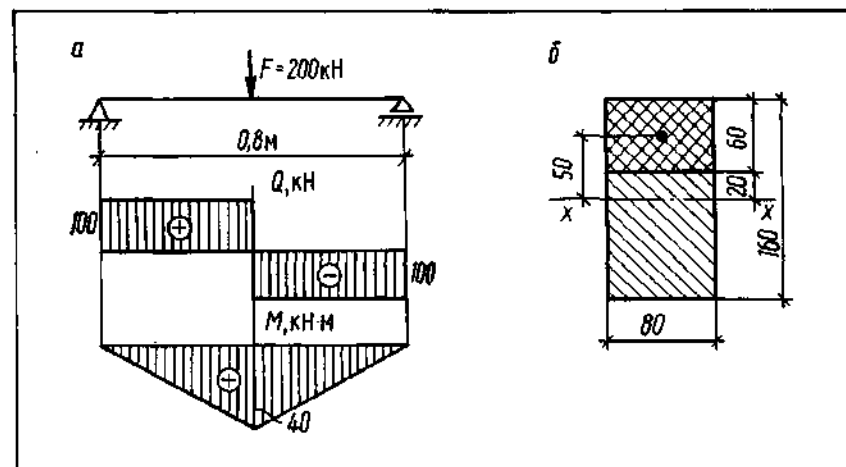


Рис. 6.7. К расчету однопролетной балки (пример 6.4)

Решение. Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 6.7, а) и находим значения поперечной силы $Q = 100 \text{ кН}$ и изгибающего момента $M = 30 \text{ кН}\cdot\text{м}$ в сечении на расстоянии 30 см от левой опоры.

Момент инерции поперечного сечения (рис. 6.7, б)

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{8 \cdot 16^3}{12} = 2730 \text{ см}^4.$$

Статический момент площади отсеченной части сечения выше уровня $y = 2 \text{ см}$ вверх от нейтрального слоя вычисляется следующим образом:

$$S'_x = A' y_c = 8 \cdot 6 \cdot 5 = 240 \text{ см}^3.$$

Нормальное и касательное напряжения в рассматриваемой точке определяются по формулам (6.7):

$$\sigma = - \frac{My}{I_x} = - \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0,02}{2730 \cdot 10^{-8}} = -21,97 \text{ МПа};$$

$$\tau = \frac{Q S_x^I}{I_x b} = \frac{100 \cdot 10^3 \cdot 240 \cdot 10^{-6}}{2730 \cdot 10^{-8} \cdot 0,08} = 10,99 \text{ МПа.}$$

На основании четвертой теории прочности проверяем прочность материала в рассматриваемой точке:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} < R_c;$$

$$\sigma_{red} = \sqrt{21,97^2 + 3 \cdot 10,99^2} = 29,07 \text{ МПа} < R_c = 140 \text{ МПа.}$$

Следовательно, прочность материала обеспечена.

Исходные данные к работе 9А

Для заданных схем балок требуется:

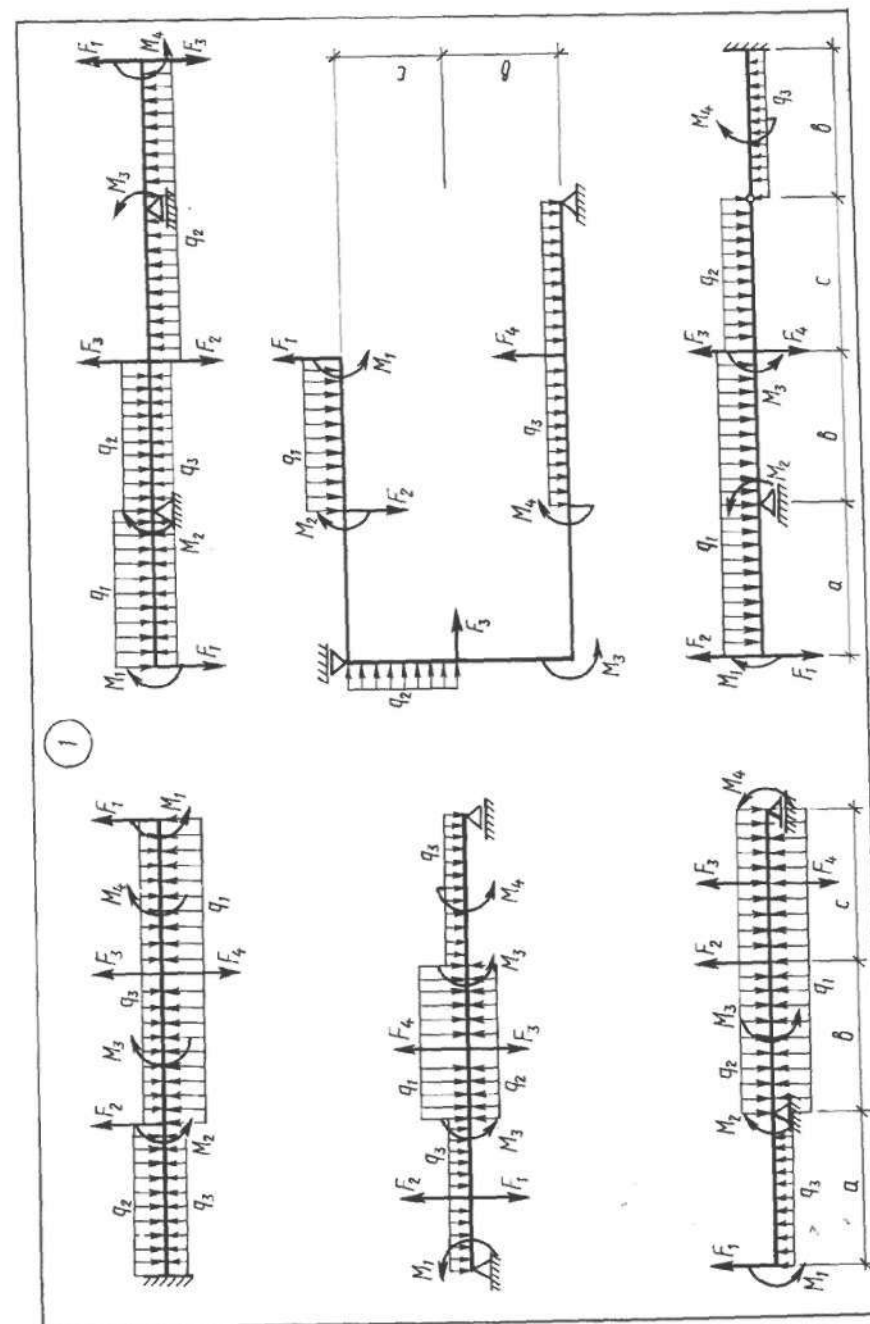
- 1) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;
- 2) подобрать необходимые размеры поперечных сечений (форма сечений — по указанию преподавателя).

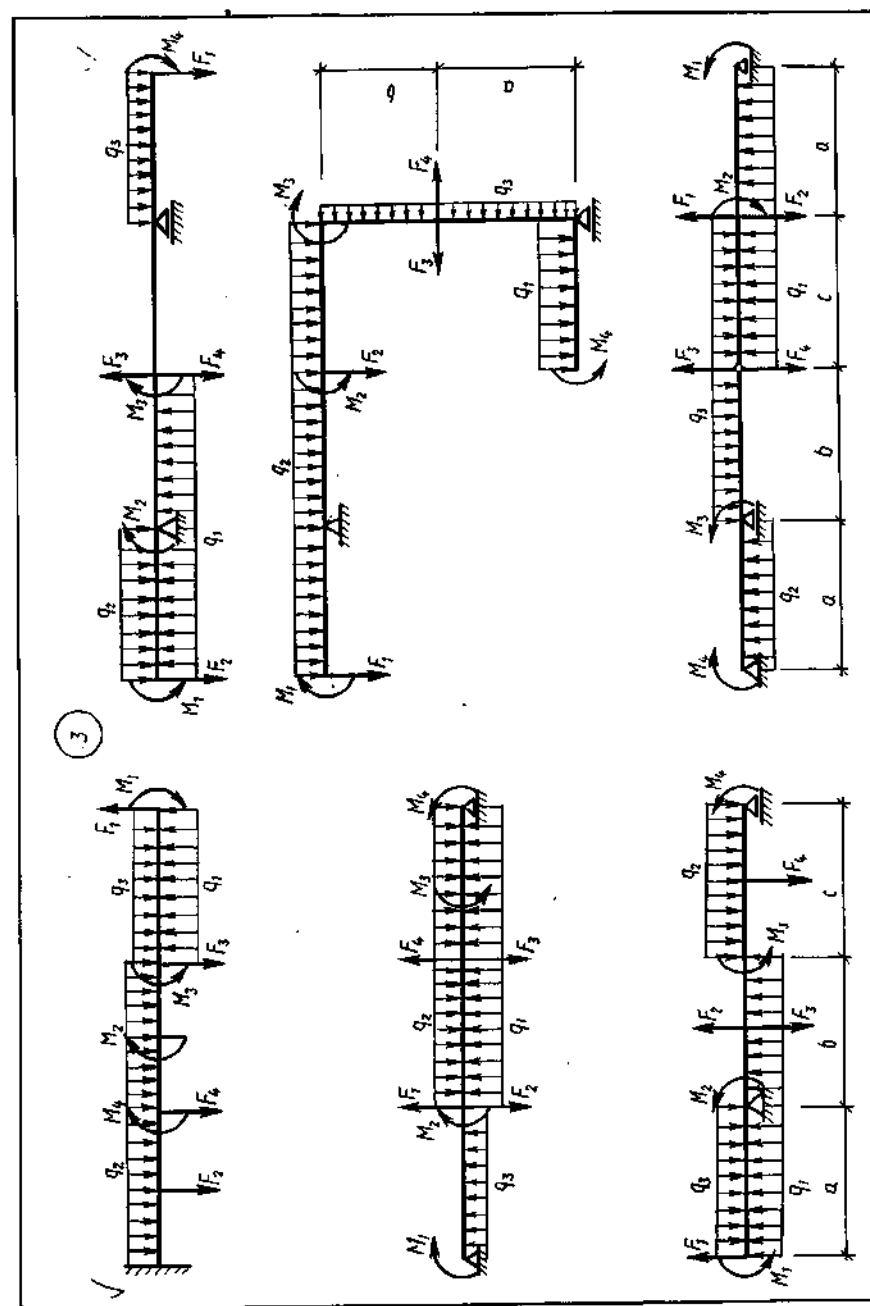
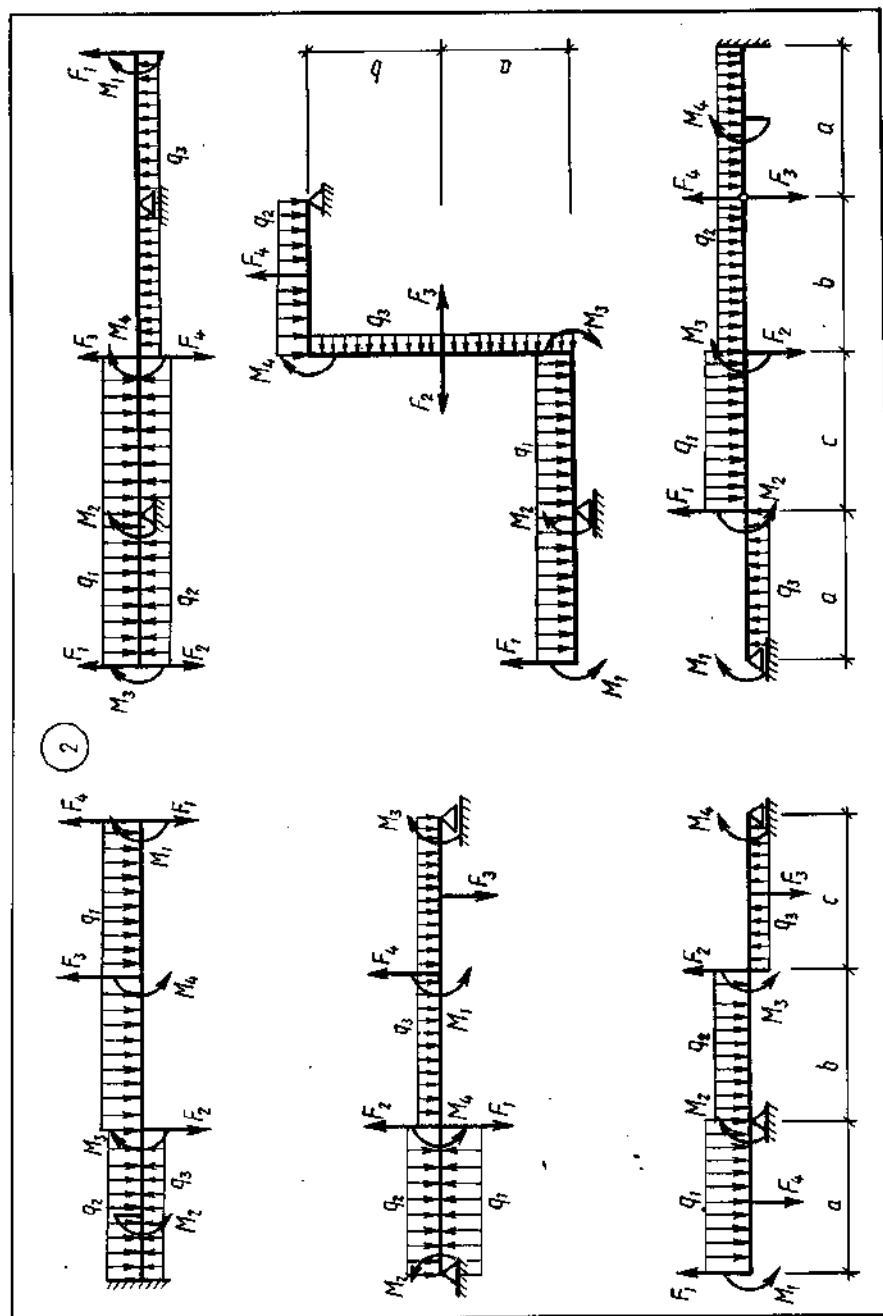
Схемы для расчетов приведены ниже, числовые данные — в табл. 6.1.

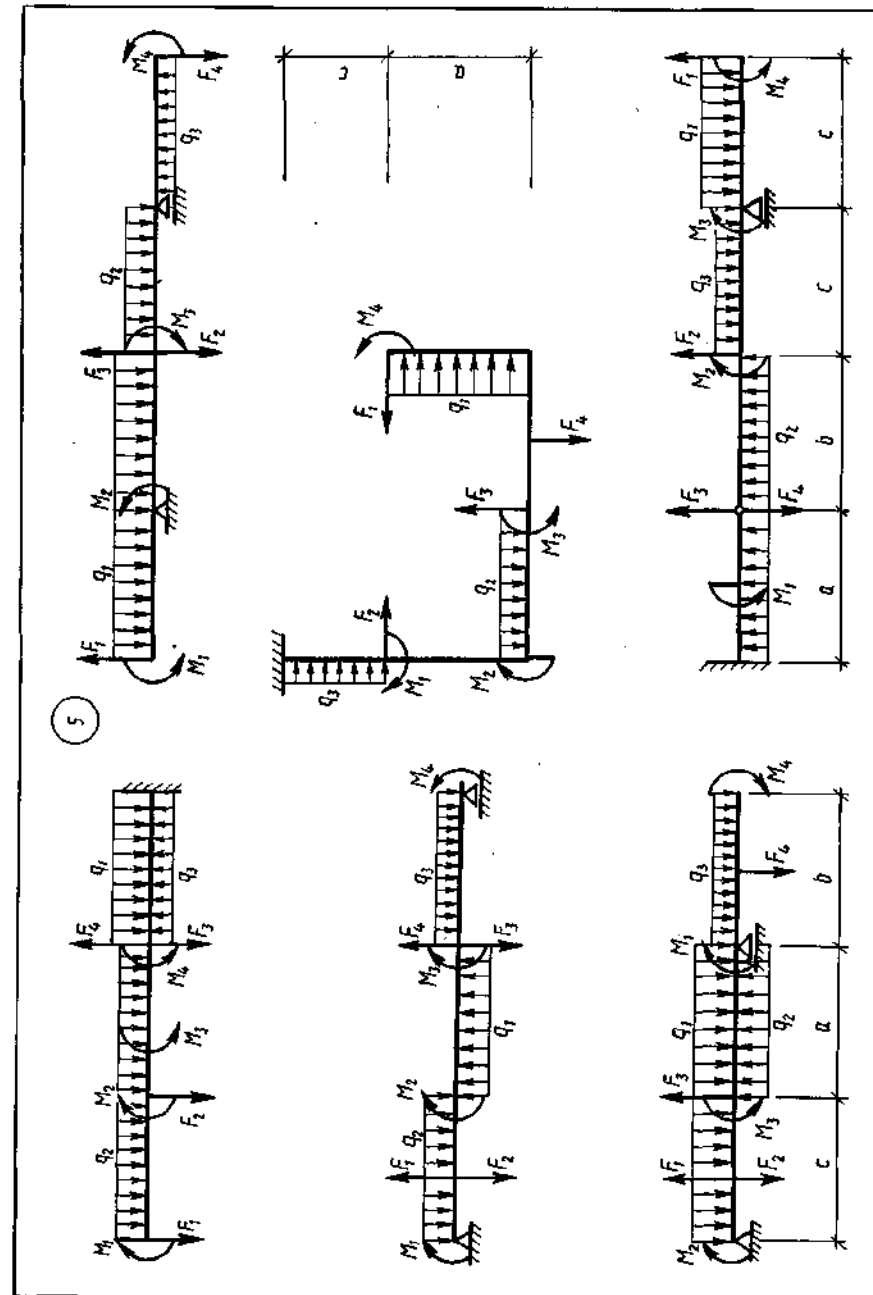
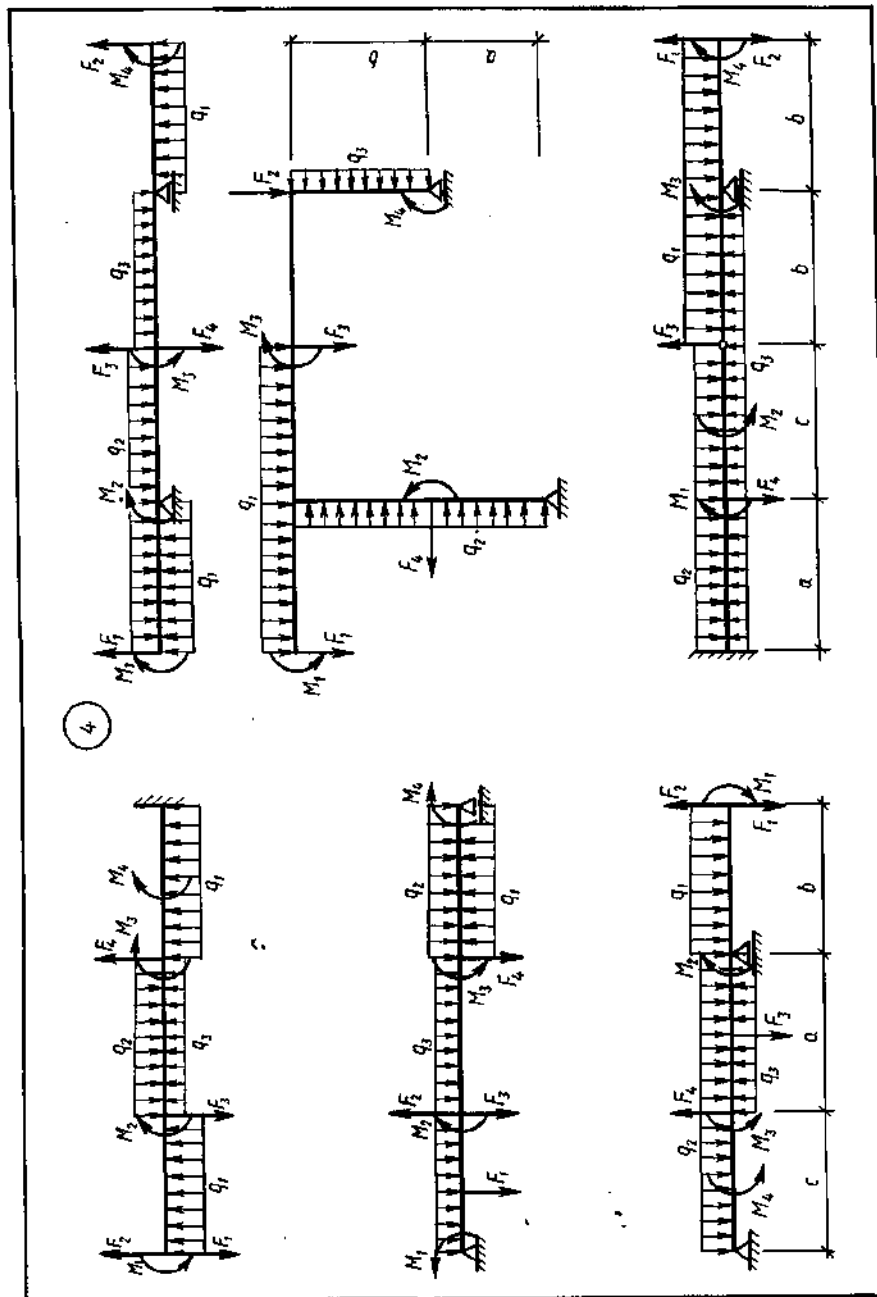
Т а б л. 6.1. Числовые данные

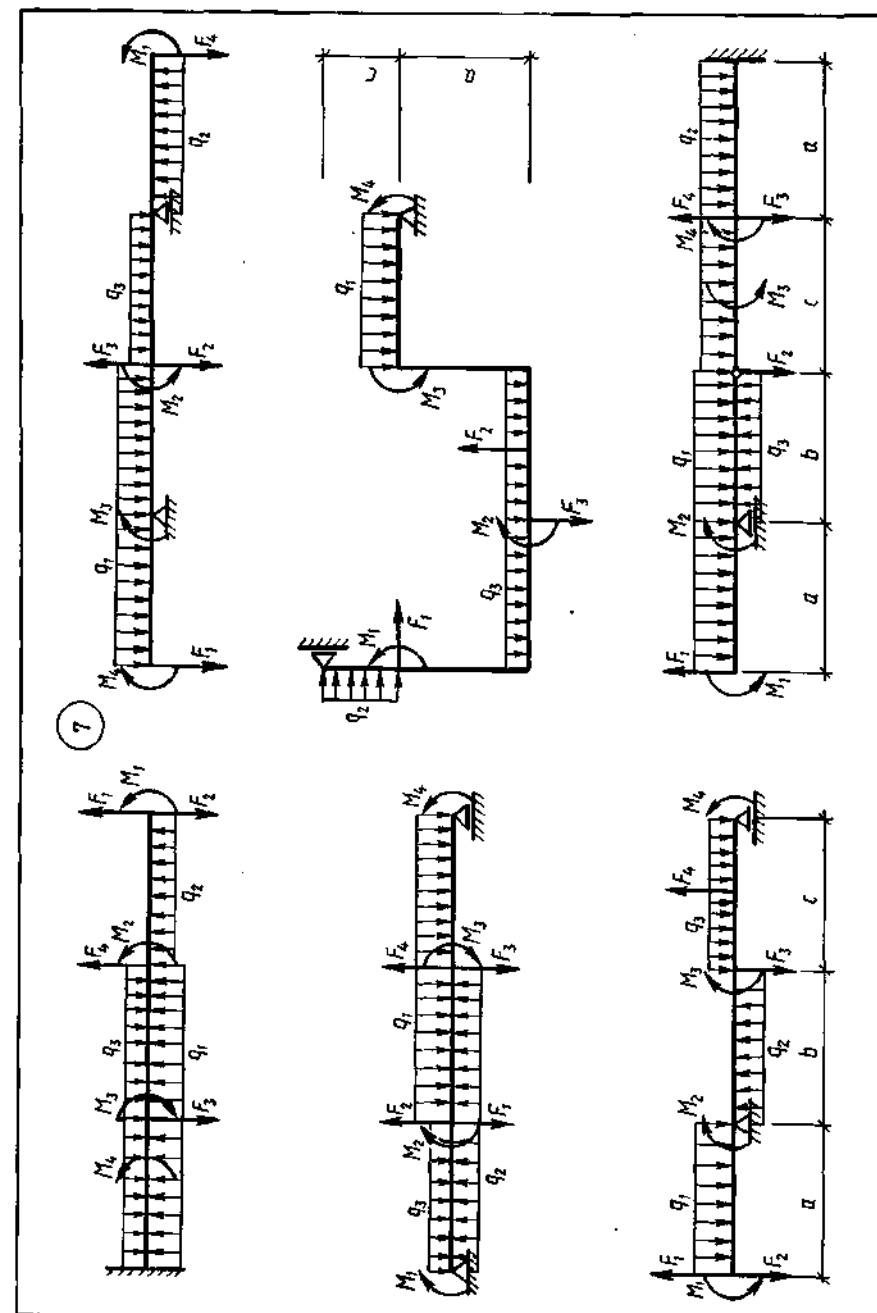
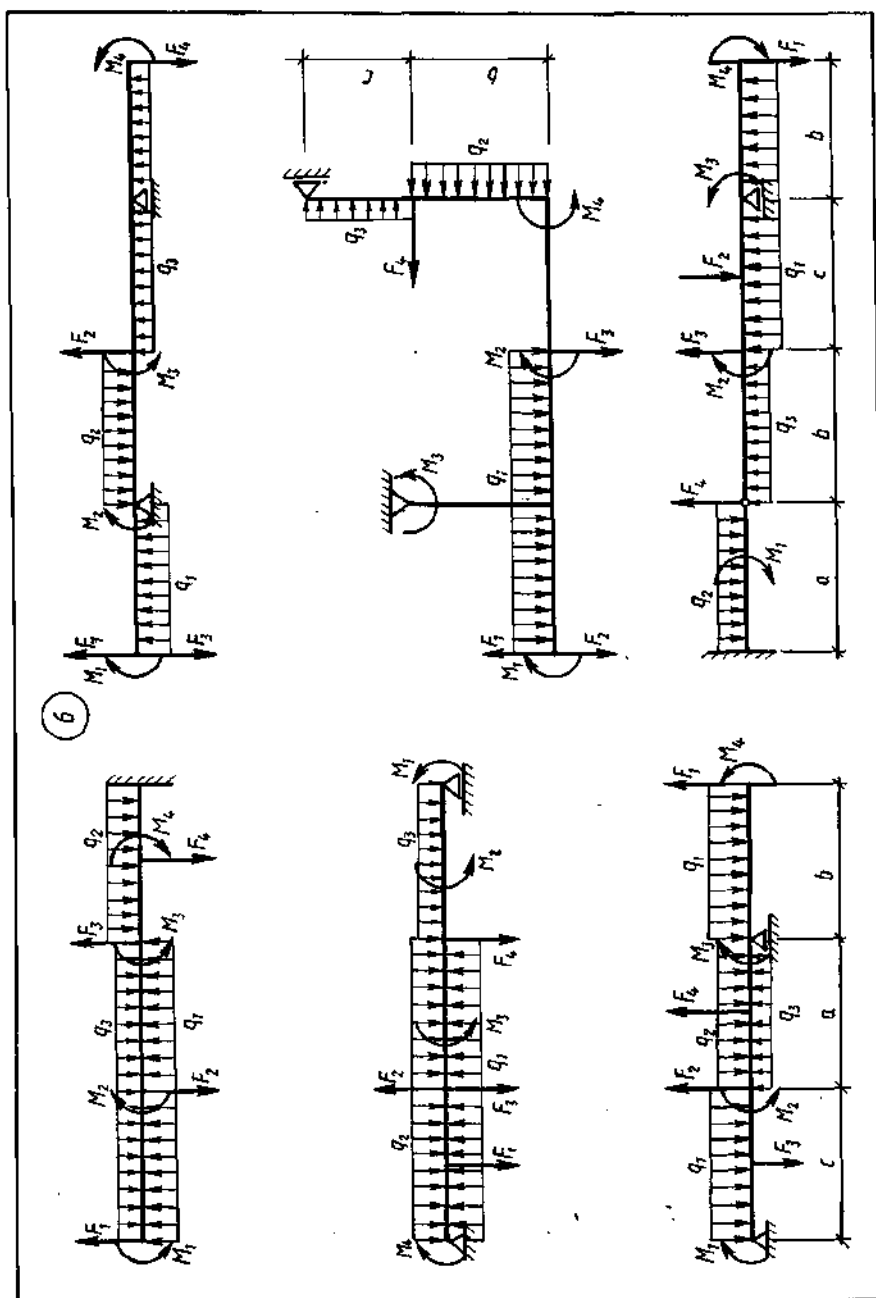
Номер задания	Размеры, м			Нагрузки			Индекс нагрузки		
	a	b	c	q, кН/м	F, кН	M, кН·м	q	F	M
1	2	2	1,6	12	10	24	3	1	1
2	2	1,6	2	6	20	12	1	1	3
3	2,4	1,6	2	16	10	32	1	3	3
4	2	1,6	2,4	14	12	30	1	4	2
5	2,4	2,0	2	12	16	24	2	4	1
6	1,6	2,0	2	8	18	16	2	1	1
7	2,4	2	1,6	10	20	20	1	2	1
8	2	2,4	2	12	16	24	1	4	4
9	2	2	1,6	12	10	24	3	1	3
10	2	1,6	2	8	16	16	3	1	4
11	1,6	2	2,4	12	16	24	1	4	1
12	2,4	2	2	10	20	20	3	4	2
13	1,6	2	2,4	12	16	18	1	3	2
14	2	2,4	2	16	10	30	1	3	4
15	2,4	2	2,4	18	12	24	1	4	3
16	1,6	2	2	8	16	16	2	1	2
17	2	2,4	2	12	18	24	3	3	1
18	2	2,4	1,6	10	24	16	2	2	1
19	2	2	2,4	8	24	18	1	2	3
20	2	2	1,6	6	20	12	1	1	1
21	1,6	2	2,4	10	20	20	2	3	1
22	2	1,6	2	8	24	12	2	1	4
23	2,4	2	2	16	10	30	1	3	1
24	2	2,4	1,6	8	24	16	1	2	2
25	1,6	2	1,6	12	10	24	3	1	2

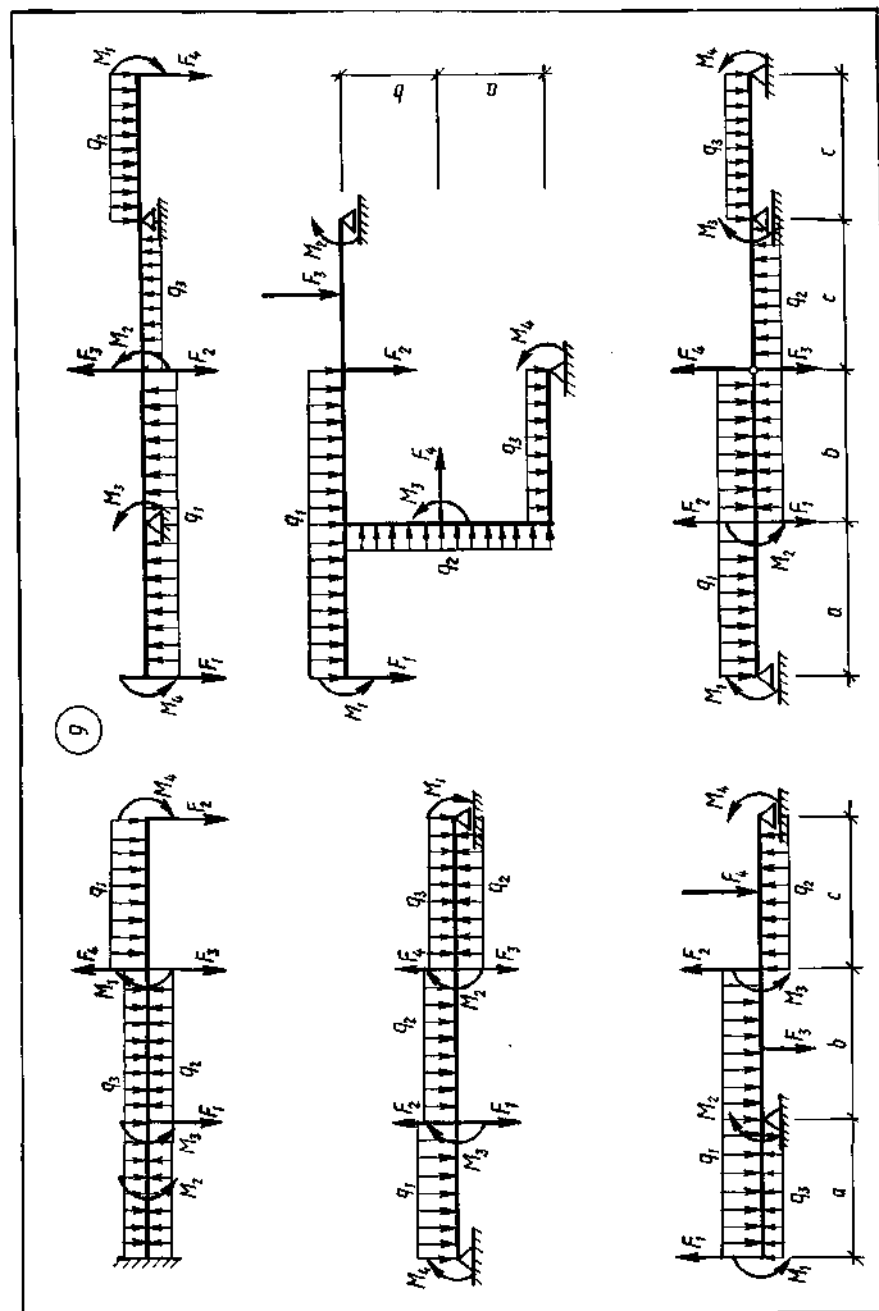
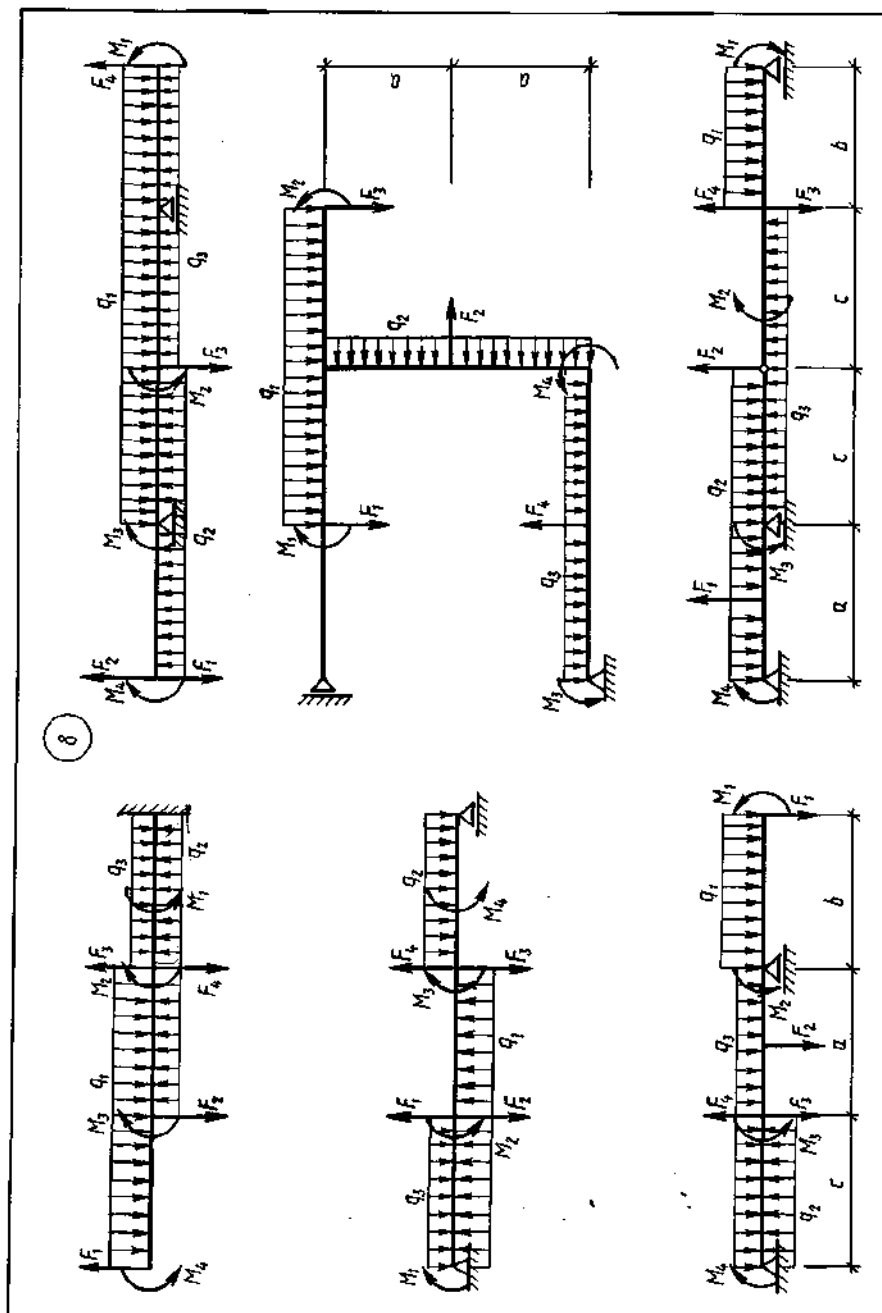
СХЕМЫ К РАБОТЕ











Исходные данные к работе 9Б

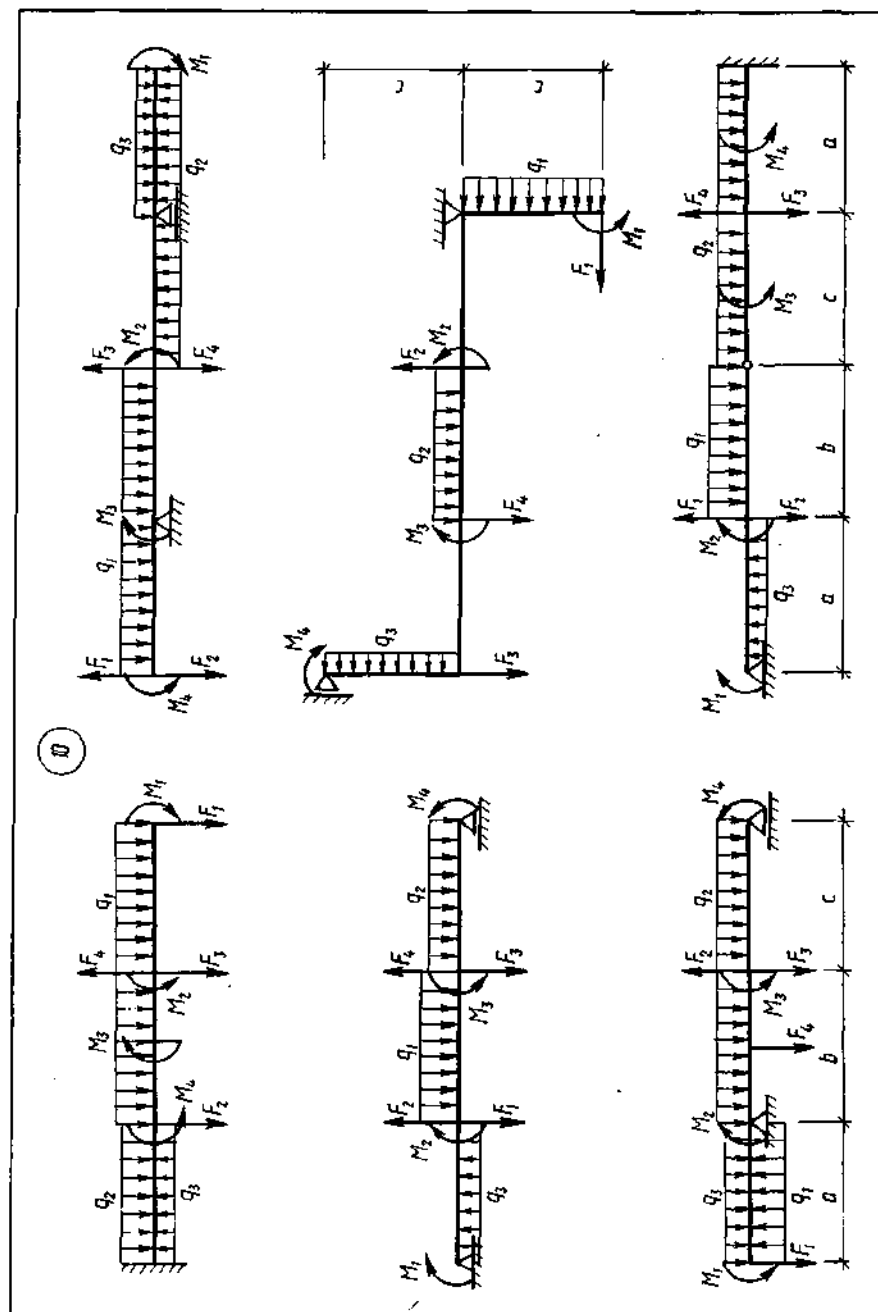
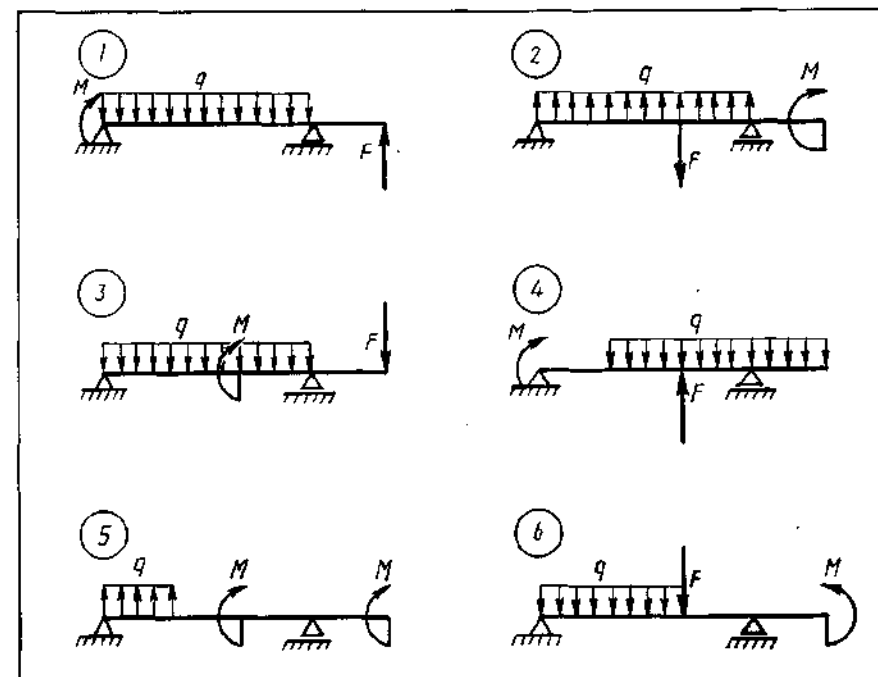
Однопролетная балка с консолью загружена системой сил. Материал балки — Ст3 с расчетным сопротивлением $R = 210 \text{ МПа}$; $R_s = 130 \text{ МПа}$.

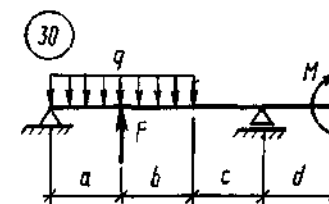
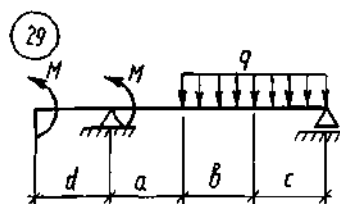
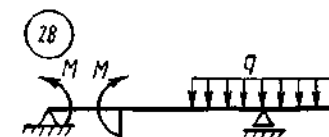
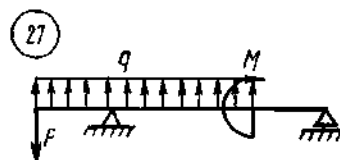
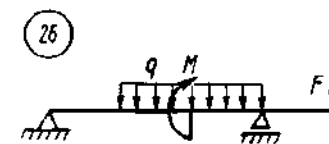
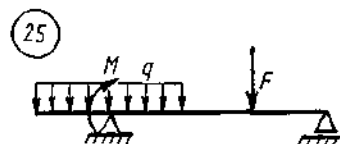
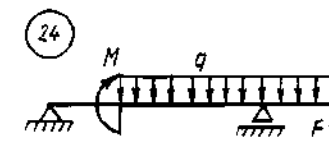
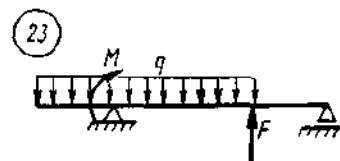
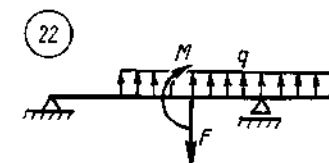
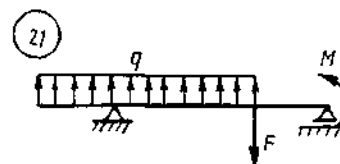
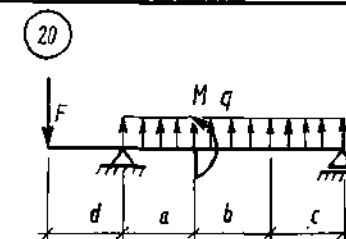
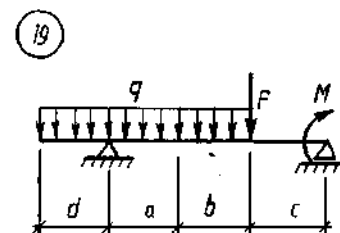
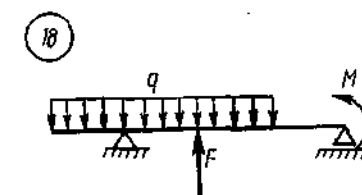
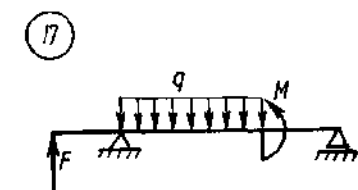
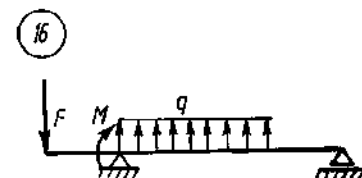
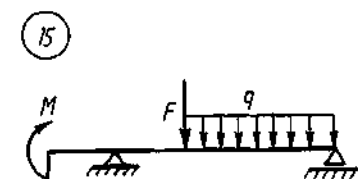
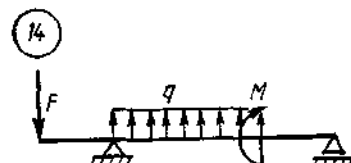
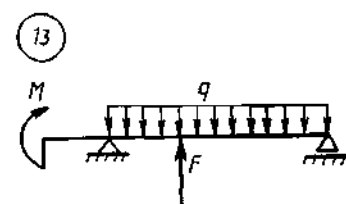
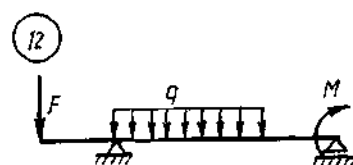
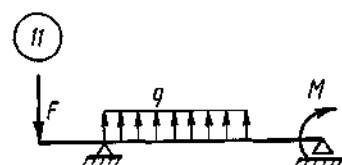
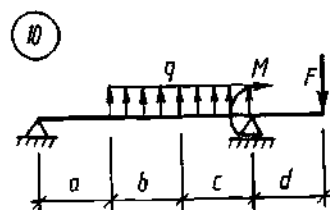
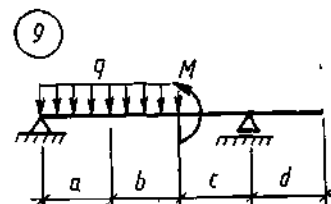
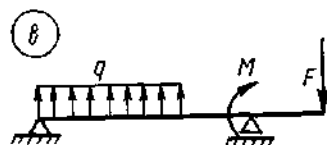
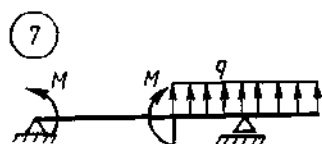
Требуется:

- 1) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;
- 2) подобрать сечение балки двутаврового профиля и проверить прочность принятого сечения по нормальным напряжениям с учетом собственного веса балки;
- 3) вычислить наибольшее касательное напряжение в сечении с максимальным значением поперечной силы;
- 4) в одном из сечений балки, где имеют Q и M большие значения, определить главные напряжения на уровне примыкания полки к стенке и проверить прочность материала по энергетической теории прочности;
- 5) построить эпюры нормальных, касательных, главных и максимальных касательных напряжений в сечении, указанном в п. 4;
- 6) определить аналитическим путем прогибы посередине пролета и на конце консоли и углы поворота сечений на опорах;
- 7) с учетом вычисленных значений прогибов показать на схеме балки очертание ее изогнутой оси;
- 8) проверить жесткость балки при допуске значения прогиба $v = l/500$ и модуле упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Схемы для расчета приведены ниже, числовые данные — в табл. 6.2.

СХЕМЫ К РАБОТЕ





Т а б л. 6.2. Числовые данные

мер а- 1	Размер, м				Нагрузки		
	a	b	c	d	F, кН	q, кН/м	M, кН·м
1	3	2	2	1	20	10	40
2	4	2	4	1	10	20	30
3	3	4	2	2	30	20	10
4	3	3	4	1	40	30	10
5	2	4	3	1	20	40	10
6	4	3	2	2	30	20	40
7	3	3	3	1	40	30	30
8	2	4	2	1	40	20	10
9	2	3	4	2	20	30	10
10	3	4	2	1	30	40	10
11	4	3	2	2	20	20	40
12	4	2	2	1	30	40	20
13	2	4	2	1	30	30	10
14	2	3	3	2	30	40	20
15	3	3	2	2	20	10	30
16	4	3	3	1	10	40	30
17	3	2	3	2	40	10	20
18	4	2	2	2	40	20	30
19	4	3	2	1	10	30	40
20	3	4	3	2	20	40	20
21	2	4	2	2	10	30	20
22	2	3	4	1	10	40	20
23	4	3	3	1	40	20	10
24	2	2	3	2	40	30	20
25	2	3	3	1	30	10	20
26	3	3	4	2	20	30	40
27	2	2	4	1	10	20	30
28	3	3	2	2	20	40	30
29	4	2	2	1	10	20	40
30	3	2	3	1	20	10	40

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение поперечного и чистого изгиба.
2. Какие внутренние силовые факторы возникают в поперечном сечении стержня в общем случае действия на него плоской системы сил?
3. Какие правила знаков приняты для внутренних усилий?
4. Как вычисляются изгибающий момент и поперечная сила в поперечном сечении стержня?
5. В чем заключается проверка правильности построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов?
6. Сформулируйте гипотезу плоских сечений.
7. Что представляют собой нейтральный слой и нейтральная ось балки и как они расположены?
8. Как вычислить нормальные и касательные напряжения в поперечном сечении балки?
9. Напишите условие прочности балки при изгибе по методу предельных состояний.

10. Запишите формулу касательных напряжений при изгибе балки.
11. Постройте эпюры нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении прямоугольной и двутавровой балки.
12. Как проверить прочность балки по главным напряжениям?
13. Напишите уравнение метода начальных параметров. Почему оно так называется?
14. Как определяются значения неизвестных начальных параметров?
15. В каком порядке определяются углы поворота сечений и прогибы балок методом начальных параметров?
16. Как производится расчет на жесткость при изгибе балки?

VII. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

РАБОТА 10. РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

Общие сведения

Балки, воспринимающие внешние нагрузки, должны быть закреплены таким образом, чтобы они не могли перемещаться как жесткое тело. Поэтому для закрепления балки в одной плоскости необходимо как минимум три связи. Удаление хотя бы одной из них превращает балку в геометрически изменяемую систему, перемещения которой могут происходить без деформации стержней.

Для определения реакций в трех связях плоской системы используются три уравнения равновесия. Подобные балки являются статически определимыми. Однако на практике часто встречаются балки, у которых число наложенных связей больше, чем нужно для обеспечения их геометрической неизменяемости, т.е. имеются так называемые лишние связи, хотя в действительности они необходимы по условиям прочности и жесткости балки.

Число лишних связей определяет степень статической неопределимости системы. Для вычисления усилий в этих связях составляются условия деформации системы или так называемые уравнения совместности деформаций, которые базируются на использовании какого-либо метода вычисления перемещений. В качестве такого метода наиболее часто применяется общий метод определения перемещений, называемый методом Максвелла—Мора.

Для балок постоянной жесткости формула Мора, позволяющая находить линейные и угловые перемещения, имеет вид

$$\Delta_{1F} = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \frac{M_{1i} M_{Fi}}{EI} dz, \quad (7.1)$$

где Δ_{1F} — перемещения по заданному направлению при действии внешних нагрузок F ; M_{Fi} — изгибающий момент от действия внешних нагрузок в сечениях i -го участка балки; M_{1i} — то же, от единичных нагрузок, приложенных в сечениях, где определяются перемещения: при вычислении линейного перемещения прикладывается единичная сила, углового — единичный момент.

Интеграл

$$\int_0^{l_i} M_{1i} M_{Fi} dz = \omega_i \eta_i \quad (7.2)$$

может быть вычислен графоаналитическим способом. Такой прием перемножения эпюр называют правилом Верещагина.

Если подставить интеграл (7.2) в формулу (7.1), получим формулу для определения перемещений

$$\Delta_{1F} = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i \eta_i}{EI} \quad (7.3)$$

По правилу Верещагина, интеграл Мора в пределах заданного участка длиной l_i равен произведению площади нелинейной (криволинейной или ломаной) эпюры на ординату линейной эпюры, но взятую под центром тяжести нелинейной, деленному на жесткость сечения участка.

Произведение $\omega_i \eta_i$ принимается со знаком плюс, если эпюры M_{Fi} и M_{1i} расположены с одной стороны оси стержня, со знаком минус — с разных сторон.

Метод расчета статически неопределимых балок заключается в том, что вначале отбрасываются лишние связи и их действие заменяется неизвестными усилиями. Заданная балка таким образом превращается в статически определимую, называемую основной системой. Для вычисления лишних неизвестных составляют условия деформации системы, заключающиеся в том, что основная система под действием приложенной нагрузки и лишних неизвестных деформируется таким же образом, как и заданная статически неопределимая балка.

В случае, если лишних неизвестных много, для их вычисления наиболее целесообразно воспользоваться каноническими уравнениями метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \dots + \delta_{1n} X_n + \Delta_{1F} = 0; \\ \dots \\ \delta_{m1} X_1 + \delta_{m2} X_2 + \dots + \delta_{mn} X_n + \Delta_{mF} = 0, \end{cases} \quad (7.4)$$

где $\delta_{mn} = \int_l \frac{M_n M_m}{EI} dz$; $\Delta_{mF} = \int_l \frac{M_m M_F}{EI} dz$.

Число используемых канонических уравнений равно степени статической неопределимости системы, а за неизвестные в них принимаются реактивные усилия или моменты в отброшенных связях.

При определении перемещений δ_{mn} и Δ_{mF} строятся эпюры моментов для основной системы при единичных значениях неизвестных $X_1 = 1, X_2 = 1, \dots, X_n = 1$ и от внешних нагрузок. Далее путем перемножения соответствующих эпюр находят единичные δ_{mn} и грузовые Δ_{mF} коэффициенты канонических уравнений. Затем решается система канонических уравнений и определяются неизвестные $X_1, X_2, \dots, X_n$. После вычисления неизвестных балка рассчитывается как статически определимая.

Пример 7.1. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для неразрезной балки (рис. 7.1).

Дано: $F = 50 \text{ кН}$; $q = 20 \text{ кН/м}$; $a = 7 \text{ м}$; $b = 3 \text{ м}$; $c = 3 \text{ м}$; $d = 10 \text{ м}$.

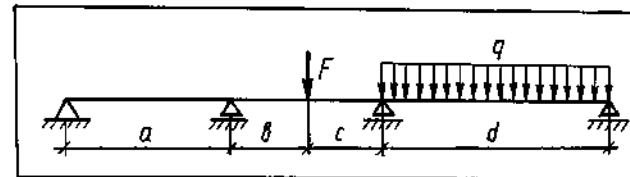


Рис. 7.1. Расчетная схема балки (пример 7.1)

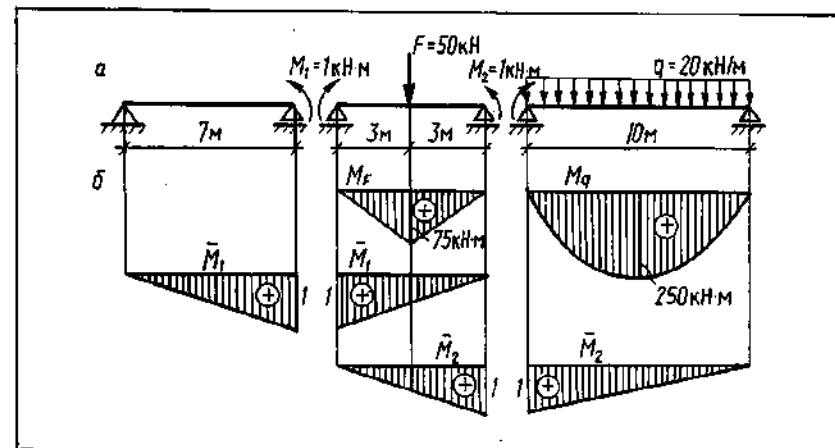


Рис. 7.2. Основная система (а), эпюры моментов от внешних нагрузок и единичных моментов (б) (пример 7.1)

Решение. В качестве основной системы для расчета неразрезной балки целесообразнее всего принять ряд статически определимых двухопорных балок, получаемых после постановки шарниров на всех промежуточных опорах заданной балки. При такой основной системе лишними неизвестными будут парные моменты в опорных сечениях неразрезной балки, заменяющие отброшенные связи между соседними пролетами (рис. 7.2, а).

Опорные моменты определяются из уравнений перемещений, составленных таким образом, чтобы изогнутая ось неразрезной балки представляла собой плавную кривую (взаимный угол поворота опорных сечений однопролетных балок эквивалентной системы равен нулю).

Неизвестные опорные моменты определяются из системы канонических уравнений метода сил:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2F} = 0, \end{cases}$$

где $X_1 = M_1, X_2 = M_2$.

Эпюры моментов от нагрузок, действующих на однопролетные балки, и от единичных моментов $M_1 = 1$ и $M_2 = 1$ приведены на рис. 7.2, б. Коэффициенты канонических уравнений находим по правилу Верещагина:

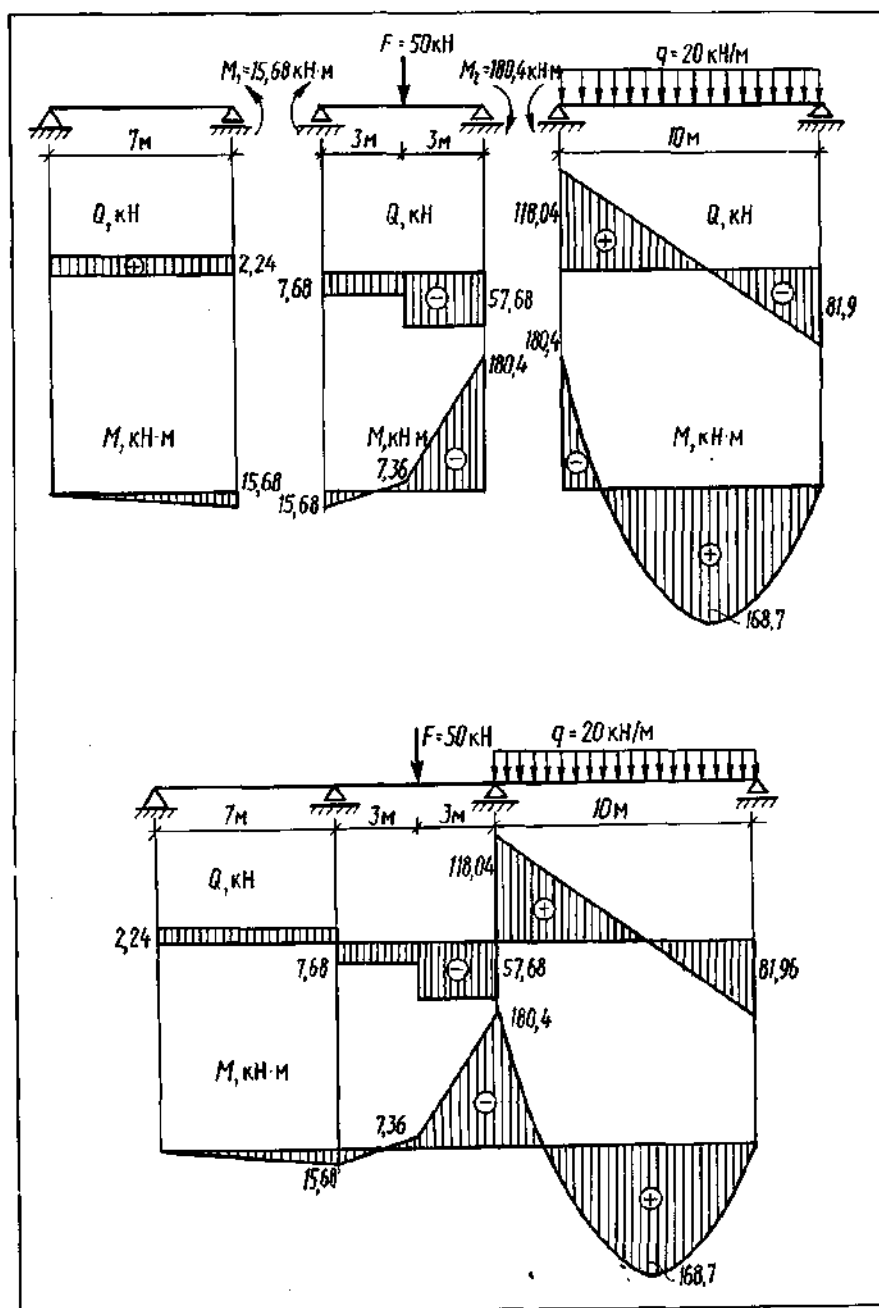


Рис. 7.3. Эпюры для однопролетных статически определимых балок и общие эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для неразрезной балки

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left(\frac{7 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{6 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{4,33}{EI};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{EI} \left(\frac{6 \cdot 1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 1}{3} \right) = \frac{1}{EI};$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI} \left(\frac{6 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{3} + \frac{10 \cdot 1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{3} \right) = \frac{5,33}{EI};$$

$$\Delta_{1F} = \frac{1}{EI} \left(\frac{75 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{112,5}{EI};$$

$$\Delta_{2F} = \frac{1}{EI} \left(\frac{75 \cdot 6}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot 250 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{945,83}{EI}.$$

Подставляя значения коэффициентов в канонические уравнения, получим:

$$\begin{cases} 4,33X_1 + X_2 + 112,5 = 0; \\ X_1 + 5,33X_2 + 945,83 = 0, \end{cases}$$

откуда $X_1 = 15,68 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $X_2 = -180,39 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Окончательную суммарную эпюру изгибающих моментов можно построить, воспользовавшись формулой

$$M = M_F + \bar{M}_1 X_1 + \bar{M}_2 X_2.$$

где M_F — моменты от внешних нагрузок; $\bar{M}_1, \bar{M}_2$ — то же, от единичных моментов.

Можно также рассматривать балки как однопролетные статически определимые и для них построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рис. 7.3). Затем, соединяя балки, а также эпюры поперечных сил и изгибающих моментов, получим общие эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

Исходные данные к работе

Неразрезная балка находится под действием системы сил. Материал стержня — сталь с расчетным сопротивлением $R = 210 \text{ МПа}$.

Требуется:

- 1) определить опорные реакции;
- 2) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов;
- 3) подобрать сечение из прокатного двутавра;
- 4) проверить прочность материала по касательным напряжениям (расчетное сопротивление стали срезу $R_s = 130 \text{ МПа}$);
- 5) определить перемещение посередине одного из средних пролетов и показать общий вид изогнутой оси балки.

Схемы для расчета приведены ниже, числовые данные — в табл. 7.1.

122



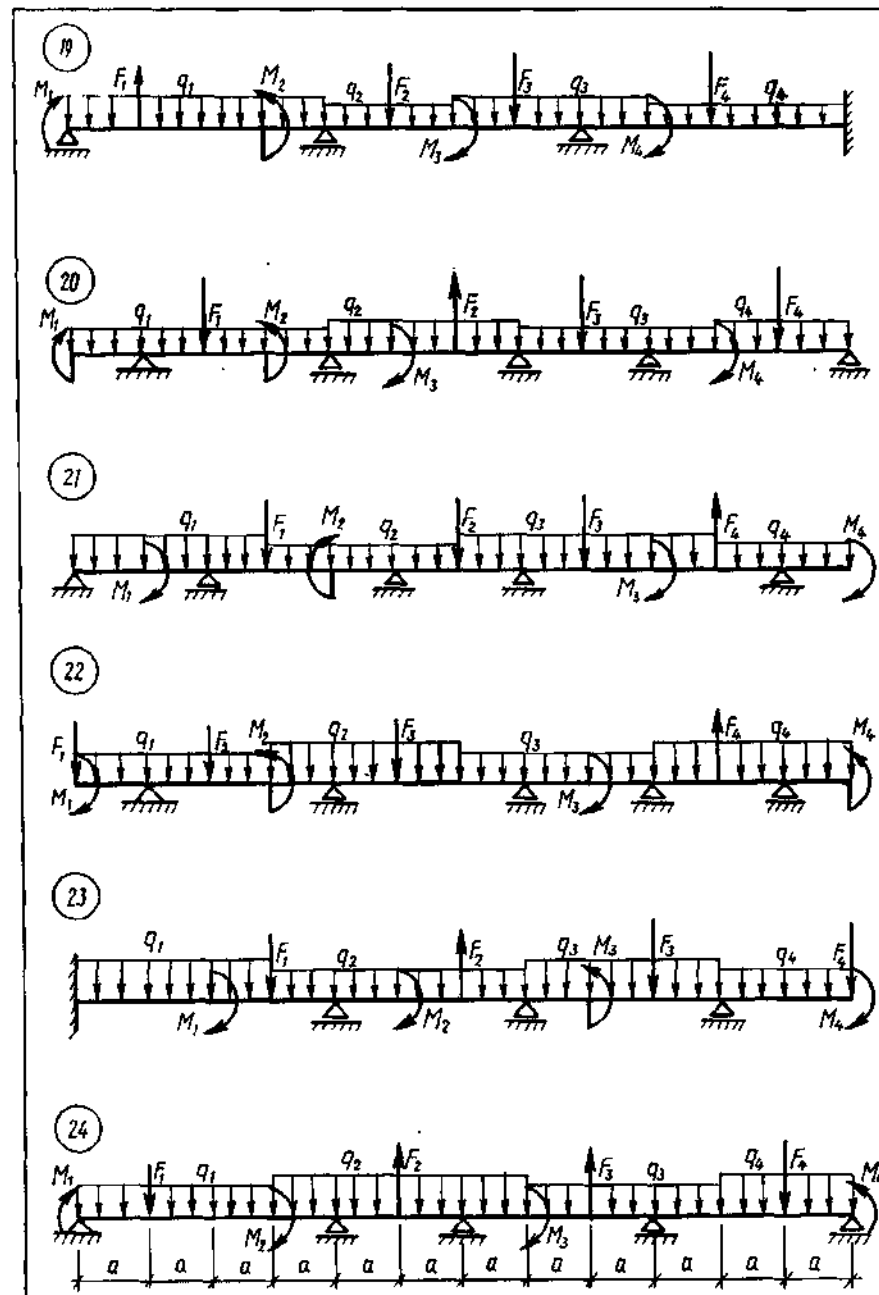
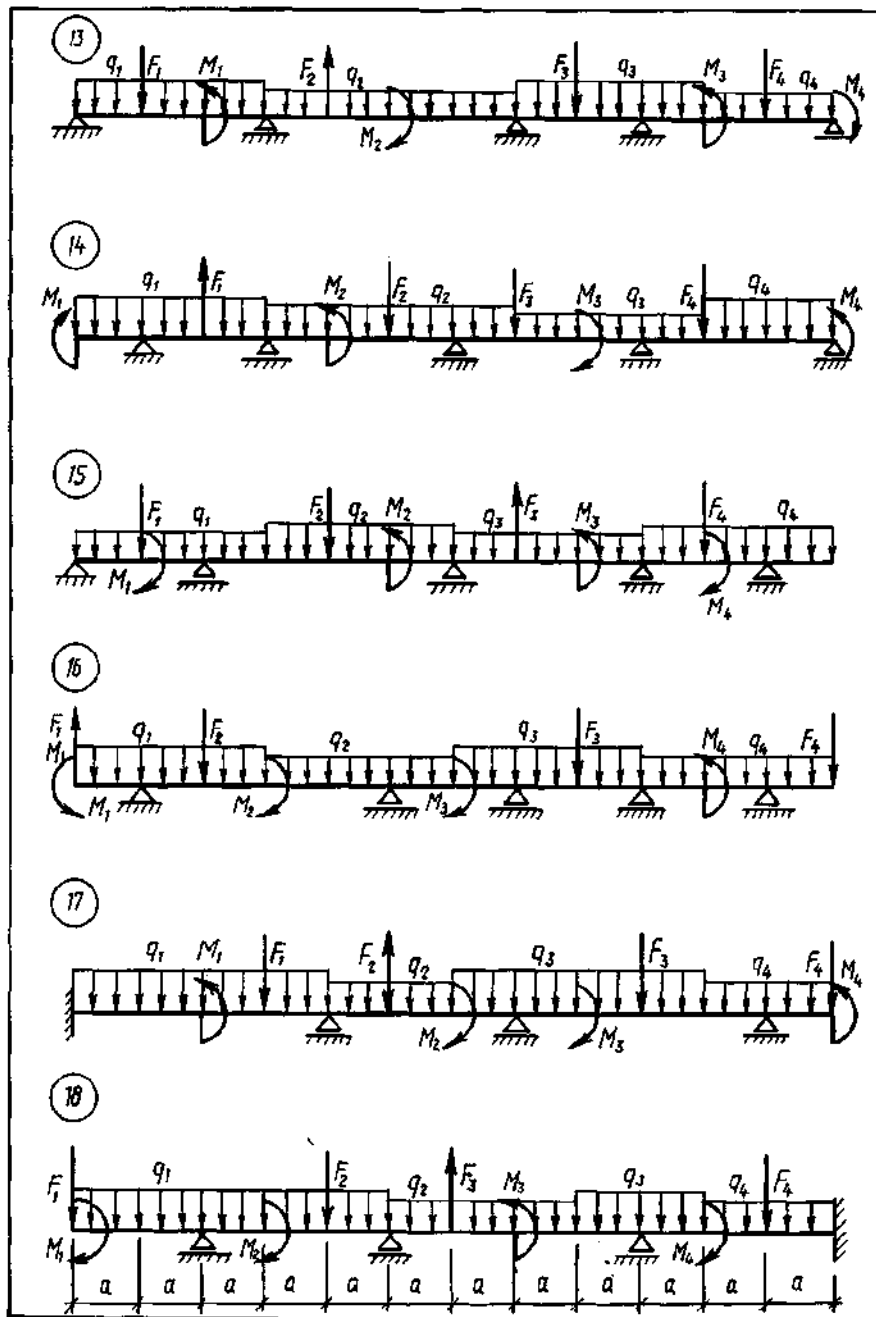


Табл. 7.1. Числовые данные

Номер задания	Размер	Нагрузка			Индекс нагрузки		
	a, м	q, кН/м	F, кН	M, кН·м	q	F	M
1	2	20	30	18	2	4,3	1
2	1,2	28	28	20	3,1	2	4
3	1,4	26	32	24	4	3	1,2
4	1,6	24	40	30	2	4,1	3
5	1,8	30	42	32	1,2	4	3
6	1	32	36	24	2	3	4,1
7	1,2	34	48	20	3	2,1	4
8	1,4	28	42	26	3,2	4	1
9	1,6	20	36	32	2	3	1,4
10	1,8	30	28	34	3,4	1	2
11	2	40	32	36	2,4	1	3
12	1	38	50	22	2	4	1,3
13	1,2	36	42	24	4	2,1	1
14	1,4	34	40	26	4	3	2,1
15	1,6	32	46	28	3,2	4	1
16	1,8	42	34	30	1	4,3	2
17	2	46	30	32	4	1	2,3
18	1	48	50	20	1	3	2,4
19	1,2	32	28	24	3	1	4,2
20	1,4	30	26	30	4	3	1,2

Программа для МК БЗ-34

По программе (табл. 7.2) осуществляется перемножение эпюр (рис. 7.4), одна из которых (первая) должна быть линейной, вторая — может быть линейной либо квадратной параболой.

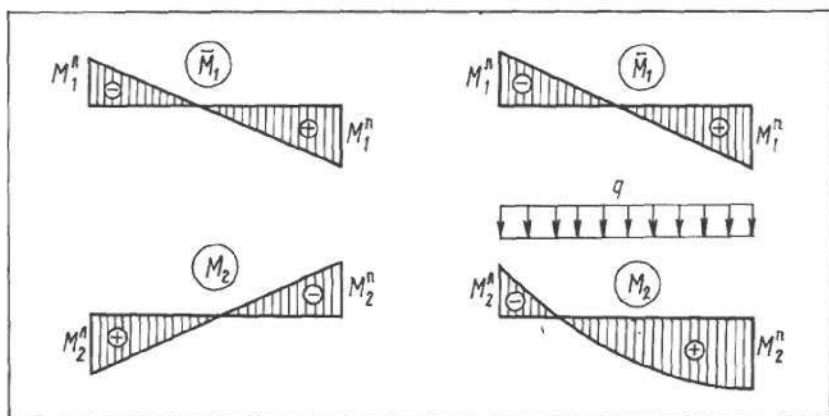


Рис. 7.4. Вид перемножаемых эпюр

Табл. 7.2. Текст программы

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
	F ПРГ		16	ИП1	61	33	4	04
00	0	00	17	X	12	34	÷	13
01	ПД	4Г	18	ИП7	67	35	X	12
02	0	00	19	ИП7	67	36	+	10
03	ПЗ	43	20	ИП2	62	37	ИПЗ	63
04	П5	45	21	+	10	38	X	12
05	ИП1	61	22	+	10	39	6	06
06	П6	46	23	ИП6	66	40	÷	13
07	ИП2	62	24	X	12	41	ИП4	64
08	П7	47	25	+	10	42	÷	13
09	ИПД	6Г	26	ИП1	61	43	ИПД	6Г
10	С/П	50	27	ИП6	66	44	+	10
11	ИП2	62	28	+	10	45	ПД	4Г
12	ИП2	62	29	ИПЗ	63	46	БП	51
13	ИП7	67	30	F x ²	22	47	02	02
14	+	10	31	ИП5	65		F АВТ	
15	+	10	32	X	12			

Используется расчетная формула

$$\sum \int \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_2}{EI_x} dz = \sum \frac{1}{6EI_x} [2(M_1^n M_2^n + M_1^n M_2^n) + M_1^n M_2^n + M_1^n M_2^n + \frac{ql^2}{4} (M_1^n + M_1^n)],$$

где l — длина участка балки; EI_x — изгибная жесткость балки на рассматриваемом участке; M_1^n, M_1^n — значения изгибающих моментов эпюры $\bar{M}_1$ соответственно на левом и на правом концах участка; $\bar{M}_2^n, M_2^n$ — то же для эпюры $\bar{M}_2$; q — интенсивность распределенной нагрузки.

Для расчета необходимо ввести программу и исходные данные (табл. 7.2, 7.3) в память микрокалькулятора.

Ввод данных по каждому участку должен заканчиваться нажатием клавиши "С/П". Результат индицируется после выполнения всех операций (см. табл. 7.3).

При вводе данных нагрузка q принимается положительной, если она направлена в сторону положительных ординат эпюры моментов.

Если на участке балки нет распределенной нагрузки, пункт 5 не выполняется.

Если участок эпюры M_2 начинается со скачка, перед выполнением действий пункта 1 нужно занести значение M_2 в ячейку "2" и нажать клавишу "С/П".

Если жесткость балки EI_x постоянна по всей длине, действия пункта 4 выполняются только для первого участка.

Т а б л . 7.3. Последовательность ввода данных
при расчете по программе

Номер пункта	Вводимая величина	Операция на МК	Номер пункта	Вводимая величина	Операция на МК
Для первого участка			Для второго участка		
	M_1^n	В/О	1	M_1^n	П1
		П1	2	M_2^n	П2
	M_2^n	П2	3	l_2	П3
		С/П			
1	M_1^n	П1	4	EI_{x_2}	П4
2	M_2^n	П2	5	q_2	П5
3	l_1	П3			С/П
4	EI_{x_1}	П4		...	
5	q_1	П5			
		С/П			

Вычислим коэффициенты канонических уравнений для неразрезной балки, приведенной в примере 7.1 (табл. 7.4—7.8).

Т а б л . 7.4. Коэффициент $\delta_{12} (\bar{M}_1 \times \bar{M}_2)$

Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию
	В/О	0	П1
1	П1	1	П2
0	П2	6	П3
	С/П	1	П4
			С/П

Индицируется результат $\delta_{12} = 1$.

Т а б л . 7.5. Коэффициент $\delta_{11} (\bar{M}_1 \times \bar{M}_1)$

Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию
	В/О	1	П1	0	П1
	П1		П2		П2
	П2	7	П3	6	П3
	С/П	1	П4		С/П
			С/П		

Индицируется результат $\delta_{11} = 4,33$.

Т а б л . 7.6. Коэффициент $\delta_{22} (\bar{M}_2 \times \bar{M}_2)$

Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию
	В/О	1	П1	0	П1
0	П1		П2		П2
	П2	6	П3	10	П3
	С/П	1	П4		С/П
			С/П		

Индицируется результат $\delta_{22} = 5,33$.

Т а б л . 7.7. Коэффициент $\Delta_{1F} (\bar{M}_1 \times \bar{M}_F)$

Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию
	В/О	0,5	П1	0	П1
1	П1	75	П2		П2
0	П2	3	П3	3	П3
	С/П	1	П4		С/П
			С/П		

Индицируется результат $\Delta_{1F} = 112,5$.

Т а б л . 7.8. Коэффициент $\Delta_{2F} (\bar{M}_2 \times \bar{M}_F)$

Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию
	В/О	0,5	П1	1	П1	0	П1
0	П1	75	П2	0	П2		П2
	П2	3	П3	3	П3	10	П3
	С/П	1	П4		С/П	20	П5
			С/П				С/П

Индицируется результат $\Delta_{2F} = 945,83333$.

Для проверки результатов расчета в примере 7.1 перемножим окончательную эпюру изгибающих моментов на единичные эпюры (табл. 7.9, 7.10).

Т а б л . 7.9. Проверка правильности построения эпюры изгибающих моментов $(\bar{M}_1 \times M)$

Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию
	В/О	1	П1	0,5	П1	0	П1
0	П1	15,68	П2	-7,36	П2	-180,4	П2
	П2	7	П3	3	П3	3	П3
	С/П	1	П4		С/П		С/П
			С/П				

Индицируется результат $\bar{M}_1 \times M = 0,046666 \approx 0$.

Т а б л . 7.10. Проверка правильности построения эпюры изгибающих моментов ($\overline{M}_2 \times M$)

Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию
0	В/О	0,5	П1	1	П1	0	П1
15,68	П1	-7,36	П2	-180,4	П2		П2
	П2	3	П3	3	П3	10	П3
	С/П	1	П4		С/П	20	П5
			С/П				С/П

Индицируется результат $\overline{M}_2 \times M = -0,62 \approx 0$.

При расчете неразрезных балок необходимо решать систему канонических уравнений (7.4). Ниже приведена программа (табл. 7.11) для решения на МК БЗ-34 системы линейных уравнений, содержащих три уравнения с тремя неизвестными при симметричной матрице коэффициентов.

Т а б л . 7.11. Текст программы

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
00	Ф ПРГ	23	÷	13	47	ПД	4Г	
01	ИП2	62	24	ПС	4С	48	ИПА	6—
02	ИП4	64	25	ИП3	63	49	ИПВ	6L
03	Х	12	26	ИП4	64	50	÷	13
04	ИП1	61	27	Х	12	51	ИПС	6С
05	ИП7	67	28	ИП1	61	52	ИПД	6Г
06	Х	12	29	ИП9	69	53	Х	12
07	—	11	30	Х	12	54	—	11
08	ПА	4—	31	—	11	55	ПС	4С
09	ИП1	61	32	ИПС	6С	56	ИП2	62
10	ИП6	66	33	ИПА	6—	57	Х	12
11	Х	12	34	Х	12	58	ИПД	6Г
12	ИП2	62	35	—	11	59	ИП3	63
13	ИП3	63	36	ИП1	61	60	Х	12
14	Х	12	37	ИП8	68	61	+	10
15	—	11	38	Х	12	62	ИП4	64
16	ПД	4Г	39	ИП3	63	63	+	10
17	ИП1	61	40	Ф x^2	22	64	ИП1	61
18	ИП5	65	41	—	11	65	÷	13
19	Х	12	42	ИПС	6С	66	/—/	0L
20	ИП2	62	43	ИПД	6Г	67	ПВ	4L
21	Ф x^2	22	44	Х	12	68	С/П	50
22	—	11	45	—	11		Ф АВТ	
	ПВ	4L	46	÷	13			

Т а б л . 7.12. Последовательность ввода данных при расчете по программе

Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию
δ_{11}	П1	Δ_{1F}	П4	Δ_{2F}	П7
δ_{12}	П2	δ_{22}	П5	δ_{33}	П8
δ_{13}	П3	δ_{23}	П6	Δ_{3F}	П9

Т а б л . 7.13. Ввод исходных данных

Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию
3	П1	14	П4	-25	П7
2	П2	4	П5	5	П8
-7	П3	-1	П6	2	П9
					В/О
					С/П

Т а б л . 7.14. Вывод результатов расчета

Операция на МК	Результат	
	обозначение	значение
ИПВ	X_1	3
ИПС	X_2	6
ИПД	X_3	5

Для выполнения расчета по программе требуется:

- 1) ввести программу (см. табл. 7.11);
- 2) занести значения коэффициентов и свободных членов уравнений построчно, начиная с ячейки "1" (табл. 7.12);
- 3) дать команду на выполнение программы, нажав клавиши "В/О" и "С/П";
- 4) по окончании расчета индицируется значение X_1 ; для индикации значений X_2 и X_3 необходимо нажать клавиши соответственно "ИП", "С" и "ИП", "Д".

До решения системы уравнений необходимо убедиться в выполнении условий

$$\delta_{11} \neq 0; \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{vmatrix} \neq 0; \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Покажем на примере решение системы трех уравнений с тремя неизвестными (табл. 7.13, 7.14):

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 - 7X_3 + 14 = 0; \\ 2X_1 + 4X_2 - X_3 - 25 = 0; \\ -7X_1 - X_2 + 5X_3 + 2 = 0. \end{cases}$$

Программу, записанную в табл. 7.11, можно использовать и для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1F} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2F} = 0. \end{cases}$$

В этом случае данные вводятся согласно табл. 7.15.

Табл. 7.15. Последовательность ввода данных при расчете по программе

Вводимая величина	Операция на МК	Вводимая величина	Операция на МК	Вводимая величина	Операция на МК
δ_{11}	П1	Δ_{1F}	П4	Δ_{2F}	П7
δ_{12}	П2	δ_{22}	П5	1	П8
0	П3	0	П6	1	П9
					В/О
					С/П

Покажем применение программы (см. табл. 7.11) для решения системы двух уравнений с двумя неизвестными, полученной в примере 7.1 (табл. 7.16, 7.17)

Табл. 7.16. Ввод исходных данных (см. пример 7.1)

Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию	Набрать число	Выполнить операцию
4,33	П1	112,5	П4	945,83	П7
1	П2	5,33	П5	1	П8
0	П3	0	П6	1	П9
					В/О
					С/П

Табл. 7.17. Вывод результатов расчета (см. пример 7.1)

Операция на МК	Результат	
	обозначение	значение
ИПВ	X_1	15,680353
ИПС	X_2	-180,39593

Если требуется решить систему четырех уравнений, можно воспользоваться соответствующей программой для МК БЗ-34, приведенной в работе [13].

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие балки называются неразрезными?
2. Как рассчитывается степень статической неопределимости неразрезной балки?
3. В каком порядке производится расчет неразрезной балки?
4. Как выбирается основная система при расчете статически неопределимых балок?
5. Запишите систему канонических уравнений метода сил.
6. Что означают величины, входящие в канонические уравнения?
7. В каком порядке производится расчет статически неопределимых систем?
8. Сформулируйте теоремы о взаимности работ и взаимности перемещений.
9. Напишите и объясните формулу перемещений Максвелла—Мора.
10. В чем сущность графоаналитического способа определения перемещений (способа Верещагина)?

VIII. КОНСТРУКЦИИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

РАБОТА 11. РАСЧЕТ КОРОТКИХ БАЛОК

Общие сведения

В настоящее время разработано значительное количество методов расчета балок на упругом основании. Их можно подразделить на три группы в зависимости от расчетной модели. Первая группа методов базируется на теории местной упругих деформаций, вторая — на теории общих упругих деформаций, третья использует комбинированные модели упругого основания.

Каждая из указанных групп методов расчета балок на упругом основании имеет свои достоинства и недостатки. Однако наибольшее распространение в строительной практике получили методы, использующие теорию общих упругих деформаций и, в частности, метод М.И. Горбунова-Посадова, который применительно к случаю плоской задачи излагается ниже.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки записывается в виде

$$\frac{EI}{(1-\nu^2)} \frac{d^4 y}{dz^4} = b [p(z) - \sigma(z)] \quad (8.1)$$

где b — ширина балки; E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала балки.

Поместив начало координат в середине балки (рис. 8.1), перейдем к безразмерным координатам $\xi = z/l$. Тогда уравнение (8.1) будет иметь вид

$$\frac{EI}{(1-\nu^2) b l^4} \frac{d^4 y}{d\xi^4} = p(\xi) - \sigma(\xi) \quad (8.2)$$

Второе уравнение, определяющее осадку точки B (см. рис. 8.1) с координатой z_0 в случае распределенной нагрузки, можно записать на основании формулы Фламана следующим образом:

$$\nu = \frac{2b(1-\nu_0)}{\pi E_0} \int_{-(l-z_0)}^{(l-z_0)} \sigma(z) \ln(z-z_0) dz + c, \quad (8.3)$$

где ν_0 , E_0 — коэффициент Пуассона и модуль деформации грунта.

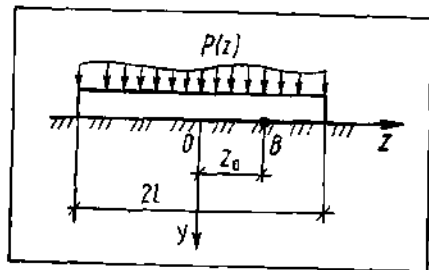


Рис. 8.1. Расчетная схема балки на упругом основании

Переходя к безразмерным координатам $\xi = z_0/l$, получим

$$\nu = \frac{2b(1-\nu_0)}{\pi E_0} \int_{-(1-\xi)}^{(1-\xi)} \sigma(\xi) \ln(\xi-\xi_0) d\xi + c. \quad (8.4)$$

Искомый закон распределения реактивных давлений представляют в виде степенного ряда

$$\sigma(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + a_n \xi^n, \quad (8.5)$$

где a_i — неизвестные коэффициенты, которые определяются из условия равенства осадок грунта и прогибов балки, а также из уравнений равновесия.

Решение дифференциального уравнения (8.1) можно записать следующим образом:

$$\nu(\xi) = m_0 + m_1 \xi + m_2 \xi^2 + \dots + m_n \xi^n. \quad (8.6)$$

Интегралом уравнения (8.4) будет выражение

$$\nu(\xi) = s_0 + s_1 \xi + s_2 \xi^2 + \dots + s_n \xi^n. \quad (8.7)$$

Постоянные, входящие в зависимости (8.6) и (8.7), представляют собой функции коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

Так как $\nu(\xi) = \nu(\xi)$, коэффициенты при одинаковых степенях ξ должны быть равны. Поэтому можно составить систему уравнений $m_0 = s_0, m_1 = s_1, m_2 = s_2, \dots, m_n = s_n$ относительно коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$.

Решая полученную систему уравнений, находят искомый закон распределения реактивных давлений под балкой, после чего строят эпюры изгибающих моментов и поперечных сил.

Основное достоинство метода М.И.Горбунова-Посадова заключается в том, что решения задачи на его основе табулированы. Это позволяет произво-

дить расчет балок на упругом основании по таблицам, не прибегая к помощи ЭВМ. С этой целью вначале определяется расчетная категория балки (полосы) в зависимости от показателя гибкости t :

$$t = \frac{\pi(1-\nu^2) E_0 b l^3}{4(1-\nu^2) EI}, \quad (8.8)$$

где l — полудлина балки (полосы); h — толщина балки.

Если $t < 1$, балка считается абсолютно жесткой. При $1 \leq t \leq 10$ она имеет конечную длину и конечную жесткость и относится к категории коротких балок (полос). В случае $t > 10$ балка считается бесконечно длинной.

Ниже рассматривается методика расчета коротких балок с помощью таблиц. Эти же таблицы при $t = 0$ используются и для расчета абсолютно жестких балок.

При расчете балок относительные расстояния от их середины до точки приложения нагрузки и до рассматриваемых сечений заменяются безразмерными приведенными расстояниями

$$a_i = \frac{z_i}{l},$$

где a_i — расстояние от середины балки (полосы) до точки приложения i -й нагрузки.

Полученные значения a_i округляются до целого числа. Эпюры реактивных давлений, поперечных сил и изгибающих моментов строятся по 21 точке, что расположены на расстоянии $l/10$ одна от другой, с приведенными абсциссами

$$\xi_i = z_i/l,$$

где z_i — абсцисса i -й точки (начало координат в середине балки, ось направлена вправо).

Для выбора таблицы, по которой должен производиться расчет, значения показателя гибкости t округляются до ближайшего числа из ряда 0, 1, 2, 3, 5, 7, 10. Например, вместо значения $t = 6,3$ берется $t = 7$.

Балки рассчитываются в зависимости от вида нагрузки (равномерно распределенная нагрузка, сосредоточенные силы и изгибающие моменты).

Если на балку действует равномерно распределенная по балке нагрузка q , ординаты эпюр реактивных давлений, поперечных сил и изгибающих моментов вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma &= \bar{p}q; \\ Q &= \bar{Q}btq; \\ M &= \bar{M}b^2q, \end{aligned} \quad (8.9)$$

где b — ширина балки (полосы), равная 1 м; l — полудлина балки; $\bar{p}, \bar{Q}, \bar{M}$ — безразмерные величины, определяемые в зависимости от показателя гибкости t по таблицам [2].

Следует иметь в виду, что с помощью таблиц определяются ординаты эпюр σ, Q и M для правой половины балки (для левой половины они такие же, но значения Q имеют обратный знак).

В случае действия на полосу сосредоточенной силы F ординаты эпюр σ , Q и M находятся при помощи следующих равенств:

$$\begin{aligned}\sigma &= \bar{\rho} \frac{F}{bt}; \\ Q &= \pm \bar{Q} F; \\ M &= \bar{M} F l,\end{aligned}\quad (8.10)$$

где $\bar{\rho}$, $\bar{Q}$, $\bar{M}$ — безразмерные величины, определяемые по таблицам [2].

Если балка нагружена несколькими сосредоточенными силами, рекомендуется строить эпюры внутренних усилий от каждой из них с последующим их суммированием.

Для случая действия на балку внешнего изгибающего момента формулы для вычисления ординат эпюр реактивных давлений, поперечных сил и изгибающих моментов имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}\sigma &= \pm \bar{\rho} \frac{M_e}{bt^2}; \\ Q &= \bar{Q} \frac{M_e}{l}; \\ M &= \pm \bar{M} M_e.\end{aligned}\right\} \quad (8.11)$$

где M_e — момент (считается положительным, если направлен по часовой стрелке); $\bar{\rho}$, $\bar{Q}$, $\bar{M}$ — безразмерные величины, находятся по таблицам [2].

При построении эпюр реактивных давлений, поперечных сил и изгибающих моментов необходимо помнить следующее правило знаков:

- а) реактивное давление p считается положительным;
- б) поперечная сила Q считается положительной, если она стремится поднять вверх часть балки, находящуюся слева от рассматриваемого сечения;
- в) изгибающий момент M_e считается положительным, если он стремится изогнуть балку вниз.

Методику расчета балок с помощью таблиц продемонстрируем на примерах.

Пример 8.1. Балка опирается на упругое основание (рис. 8.2). Построить эпюры реактивных давлений, поперечных сил и изгибающих моментов. Вычислить нормальное и касательное напряжения в слое, расположенном на расстоянии 6 м от правого конца балки и на 0,5 м ниже ее нейтральной оси. Определить значения главных напряжений в указанных точках, а также их направления.

Дано: $F = 250$ кН; $L = 20$ м; $l = 10$ м; $b = 1$ м; $h = 2$ м; $E_0 = 10$ МПа; $\nu_0 = 0,35$; $E = 21\,000$ МПа; $\nu = 0,167$.

Решение. По формуле (8.8) находим значение показателя гибкости при $I = bh^3/12 = 1 \cdot 2^3/12$:

$$\tau = \frac{3,14(1-0,167^2)10 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^3 \cdot 12}{4(1-0,35^2)21\,000 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 2^3} = 0,62.$$

Итак, $\tau = 0,62 > 0,5$, поэтому принимаем $\tau = 1$.

Расстояние от точки приложения силы F до середины балки равно 2 м. Следовательно, $\alpha = a/l = 2/10 = 0,2$.

Для $\tau = 1$ и $\alpha = 0,2$ по табл. 15, 16, 17 приложения находим значения $\bar{\rho}$, $\bar{Q}$, $\bar{M}$ и вычисляем по формулам (8.10) ординаты эпюр σ , Q , M (табл. 8.1). Эпюры реактивных давлений, поперечных сил и изгибающих моментов приведены на рис. 8.2, б.

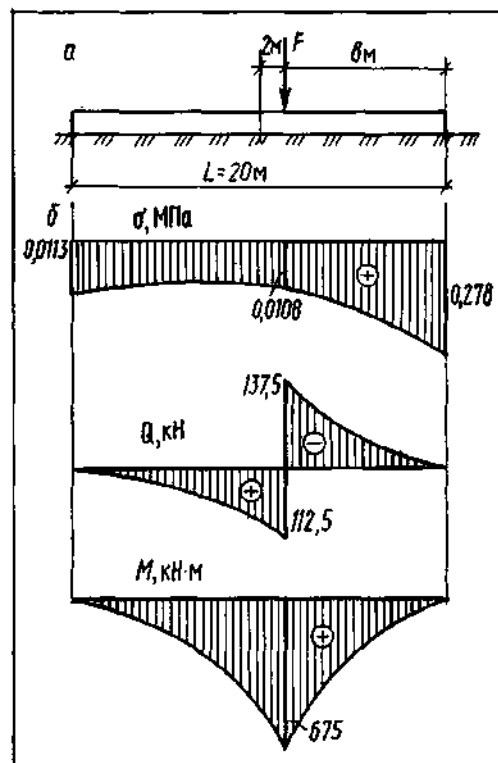


Рис. 8.2 Расчетная схема балки на упругом основании (а), эпюры реактивных давлений, поперечных сил и изгибающих моментов (б) (пример 8.1)

В сечении на расстоянии 6 м от правого конца балки действует изгибающий момент $M = 425$ кН·м и поперечная сила $Q = -117,5$ кН.

Вычисляем нормальное и касательное напряжения в этом сечении на расстоянии 0,5 м ниже нейтральной оси балки по формулам:

$$\sigma = \frac{M}{I} y = \frac{425 \cdot 10^3 \cdot 12}{1 \cdot 2^3} 0,5 = 0,3188 \text{ МПа};$$

$$\tau = \frac{QS'}{Ib} = \frac{-117,5 \cdot 10^3 \cdot 0,375 \cdot 12}{1 \cdot 2^3 \cdot 1} = -0,0661 \text{ МПа},$$

где $S' = A'y = 0,5 \cdot 1 \cdot 0,75 = 0,375 \text{ м}^3$.

Т а б л . 8.1. Ординаты эпюр реактивных давлений, поперечных сил и изгибающих моментов

$\xi = z/l$	$\bar{p}$	σ , МПа	$\bar{Q}$	Q , кН	$\bar{M}$	M , кН·м
-1.0	—	—	0	0	0	0
-0.9	0.49	0,0113	0,05	12,5	0	0
-0.8	0.37	0,0093	0,09	22,5	0,01	25
-0.7	0.33	0,0083	0,13	32,5	0,02	50
-0.6	0.31	0,0078	0,16	40,0	0,04	100
-0.5	0.31	0,0078	0,19	47,5	0,05	125
-0.4	0.32	0,0080	0,22	55,0	0,08	200
-0.3	0.33	0,0083	0,25	62,5	0,10	250
-0.2	0.35	0,0088	0,29	72,5	0,13	325
-0.1	0.37	0,0093	0,33	82,5	0,16	400
0	0.38	0,0095	0,36	90,0	0,19	475
0.1	0.40	0,0100	0,40	100,0	0,23	575
0.2	0.43	0,0108	0,45	112,5	0,27	675
0.3	0.45	0,0113	-0,51	-127,5	0,22	550
0.4	0.47	0,0118	-0,47	-117,5	0,17	425
0.5	0.50	0,0125	-0,42	-105,0	0,12	300
0.6	0.56	0,0140	-0,36	-90,0	0,09	225
0.7	0.65	0,0163	-0,30	-75,0	0,05	125
0.8	0.82	0,0205	-0,23	-57,5	0,03	75
0.9	1.11	0,0278	-0,14	-35,0	0,01	25
1.0	—	—	0	0	0	0

Главные напряжения в указанной точке определяются следующим образом:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \frac{3188 \cdot 10^2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{3188 \cdot 10^4 + 4 \cdot 661 \cdot 10^4},$$

откуда $\sigma_1 = 0,3319$ МПа; $\sigma_2 = -0,0131$ МПа.

Направления главных напряжений находятся на основе выражения (6.9):

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{-2\tau}{\sigma} = \frac{2 \cdot 661 \cdot 10^2}{3188 \cdot 10^2} = 0,414.$$

т. е. $2\alpha_0 = 22^\circ 20'$; $\alpha_0 = 11^\circ 10'$.

Пример 8.2. На балку, лежащую на упругом основании, действуют равномерно распределенная нагрузка и внешний изгибающий момент (рис. 8.3, а). Построить обобщенные эпюры реактивных давлений, поперечных сил и изгибающих моментов.

Дано: $p = 0,4$ МПа; $M = 300$ кН·м; $L = 8$ м; $l = 4$ м; $h = 0,68$ м; $b = 1$ м; $E = 34\,000$ МПа; $\nu = 0,15$; $E_0 = 50$ МПа; $\nu_0 = 0,28$.

Решение: Определяем значение показателя гибкости по формуле (8.8):

$$\epsilon = \frac{3,14 (1 - 0,15^2) 50 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 4^3 \cdot 12}{4 (1 - 0,28^2) 34\,000 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 0,68^3} = 2,99.$$

Принимаем $\epsilon = 3$ и по таблицам [2] находим безразмерные величины $\bar{p}$, $\bar{Q}$, $\bar{M}$, а по формулам (8.9) вычисляем ординаты эпюр давлений, поперечных сил и изгибающих моментов при действии на балку только равномерно распределенной нагрузки p (табл. 8.2).

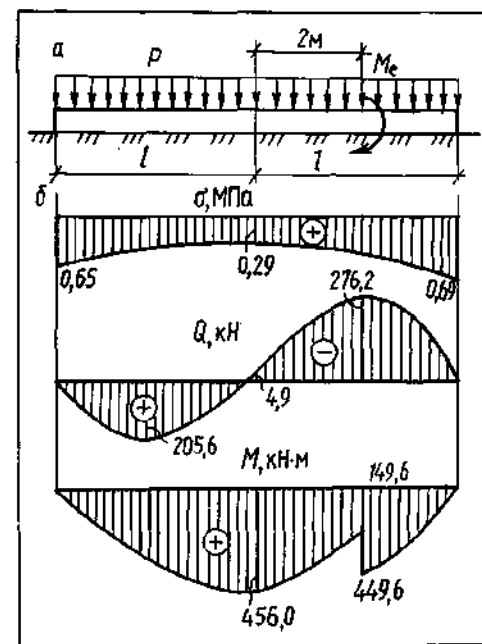


Рис. 8.3. Расчетная схема балки на упругом основании (а), обобщенные эпюры реактивных давлений, поперечных сил и изгибающих моментов (б) (пример 8.2).

Т а б л . 8.2. Ординаты эпюр реактивных давлений, поперечных сил и изгибающих моментов

$\xi = z/l$	$\bar{p}$	σ , МПа	$\bar{Q}$	Q , кН	$\bar{M}$	M , кН·м
0	0.74	0,296	0	0	0,090	576,0
0.1	0.74	0,296	-0,026	-41,0	0,089	569,6
0.2	0.75	0,300	-0,052	-83,2	0,083	531,2
0.3	0.76	0,304	-0,076	-121,6	0,079	505,6
0.4	0.78	0,312	-0,099	-158,4	0,070	448,0
0.5	0.81	0,324	-0,120	-192,0	0,059	377,6
0.6	0.87	0,348	-0,136	-217,6	0,046	294,4
0.7	0.99	0,396	-0,144	-230,4	0,032	204,8
0.8	1.19	0,476	-0,136	-217,6	0,018	115,2
0.9	1.61	0,644	-0,099	-158,4	0,006	38,4

Расстояние от сечения, в котором приложен внешний изгибающий момент $M_0 = 300 \text{ кН} \cdot \text{м}$, до середины балки равно 2 м. Следовательно, отношение $a = a/l = 2/4 = 0,5$.

Для $\eta = 3$ и $a = 0,5$ по таблицам [2] определяем значения безразмерных величин $\bar{p}$, $\bar{Q}$, $\bar{M}$ и по формулам (8.11) вычисляем ординаты эпюр реактивных давлений, поперечных сил и изгибающих моментов (табл. 8.3).

Табл. 8.3. Ординаты эпюр реактивных давлений, поперечных сил и изгибающих моментов

$\xi = z/l$	$\bar{p}$	σ , МПа	$\bar{Q}$	Q , кН	$\bar{M}$	M , кН·м
-1	0	0	0	0	0	0
-0,9	-1,16	-0,022	-0,14	-10,5	-0,01	-3
-0,8	-0,84	-0,016	-0,22	-16,5	-0,02	-6
-0,7	-0,81	-0,015	-0,33	-24,8	-0,05	-15
-0,6	-0,63	-0,012	-0,39	-29,3	-0,09	-27
-0,5	-0,52	-0,009	-0,44	-33,0	-0,13	-39
-0,4	-0,48	-0,009	-0,49	-36,8	-0,17	-51
-0,3	-0,45	-0,008	-0,54	-40,5	-0,23	-69
-0,2	-0,43	-0,008	-0,58	-43,5	-0,28	-84
-0,1	-0,39	-0,007	-0,62	-46,5	-0,34	-102
0	-0,35	-0,006	-0,66	-49,5	-0,40	-120
0,1	-0,2	-0,004	-0,69	-51,8	-0,47	-141
0,2	-0,22	-0,004	-0,72	-54,0	-0,54	-162
0,3	-0,11	-0,002	-0,73	-54,8	-0,61	-183
0,4	-0,06	-0,001	-0,74	-55,5	-0,69	-207
0,5	0,31	0,006	-0,72	-54,0	-0,76	-228
0,6	0,63	0,012	-0,67	-50,3	0,17	51
0,7	1	0,019	-0,61	-45,8	0,11	33
0,8	1,47	0,027	-0,47	-35,3	0,06	18
0,9	2,22	0,042	-0,29	-21,8	0,02	6
1	-	-	0	0	0	0

Суммируя ординаты, приведенные в табл. 8.2 и 8.3, получим значения ординат обобщенных эпюр реактивных давлений, поперечных сил и изгибающих моментов (табл. 8.4) при действии на балку равномерно распределенной нагрузки и внешнего изгибающего момента. Обобщенные эпюры реактивных давлений, поперечных сил и изгибающих моментов приведены на рис. 8.3.

Табл. 8.4. Ординаты обобщенных эпюр реактивных давлений, поперечных сил и изгибающих моментов

$\xi = z/l$	σ , МПа	Q , кН	M , кН·м
1	2	3	4
-1,0	0,644	0	0
-0,9	0,622	147,9	35,4
-0,8	0,460	201,1	111,2
-0,7	0,381	205,6	189,8
-0,6	0,336	188,3	267,4

Окончание табл. 8.4

1	2	3	4
-0,5	0,315	159,0	338,6
-0,4	0,303	121,6	397,0
-0,3	0,296	81,1	436,6
-0,2	0,292	39,7	447,2
-0,1	0,289	-4,9	467,6
0	0,290	-49,5	466,0
0,1	0,292	-93,4	428,6
0,2	0,296	-137,2	369,2
0,3	0,302	-176,4	322,6
0,4	0,311	-213,9	241,0
0,5	0,330	-246,0	149,6
0,6	0,360	-267,9	345,4
0,7	0,415	-276,2	237,8
0,8	0,503	-262,9	133,2
0,9	0,686	-180,2	44,4
1	-	0	0

Исходные данные к работе

Балка постоянного сечения опирается на упругое основание и нагружена в главных плоскостях. Материал балки — железобетон.

Требуется:

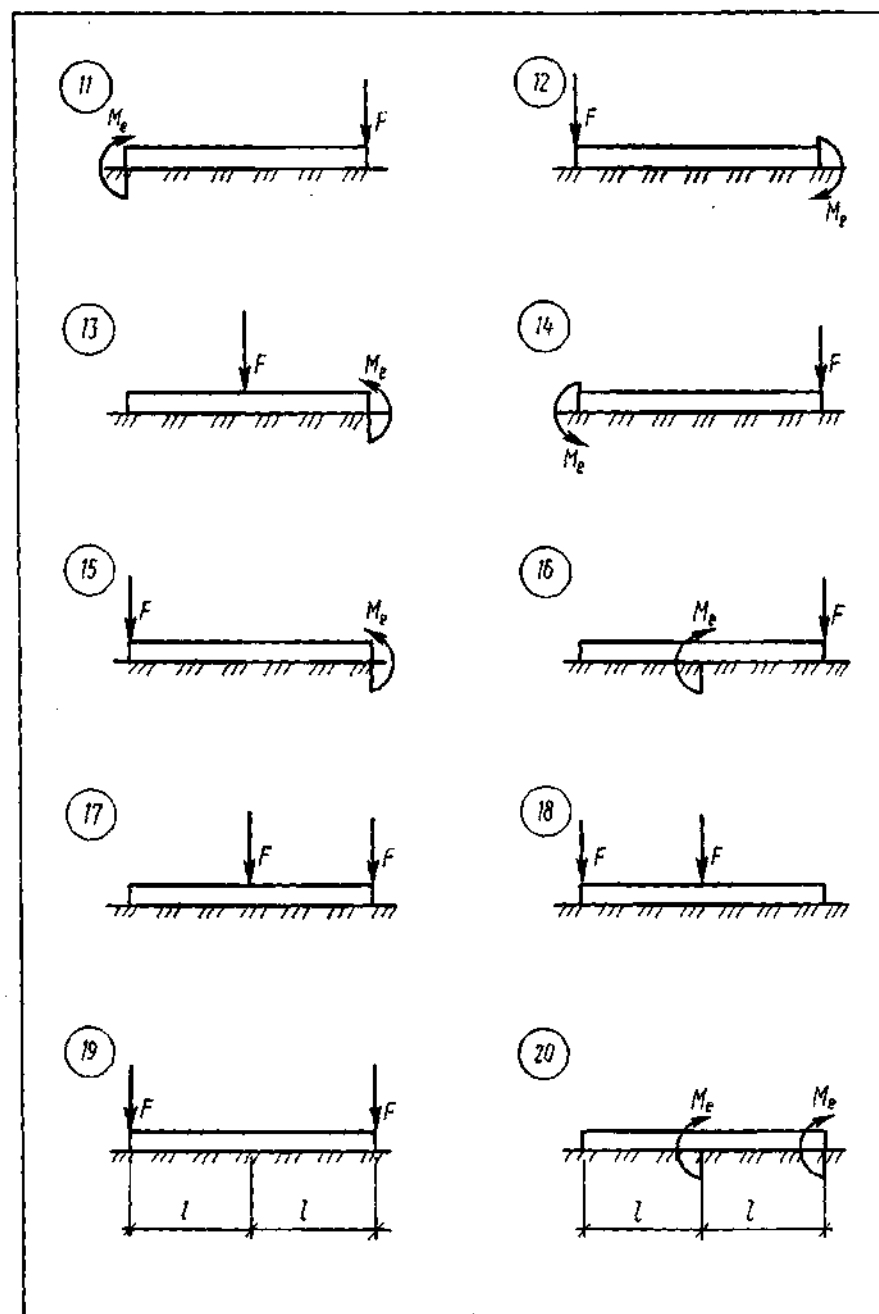
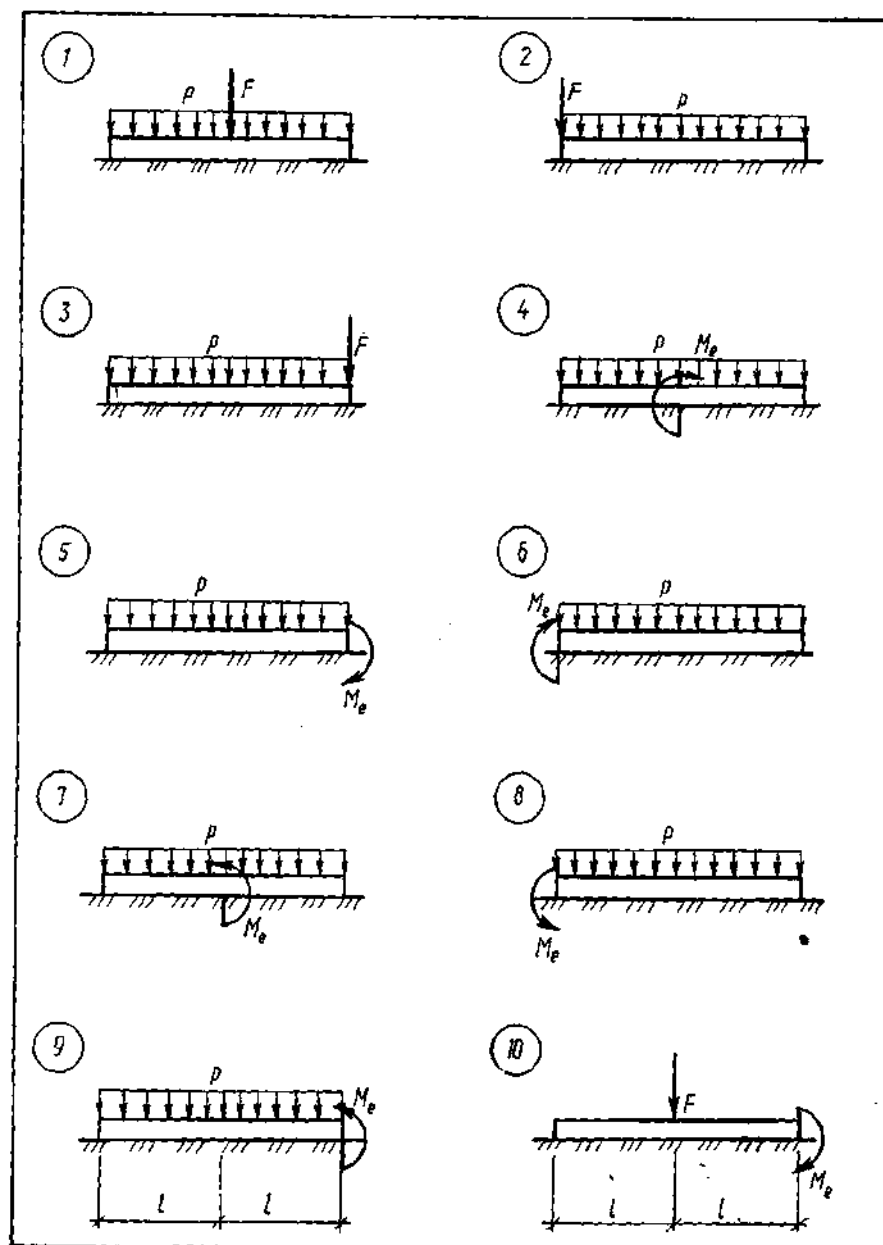
1) построить эпюры реактивных давлений, поперечных сил и изгибающих моментов;

2) в сечении, где действует максимальная поперечная сила, на расстоянии $h/4$ ниже нейтральной оси определить значения нормальных и касательных напряжений, вычислить главные напряжения и их направления, а также найти максимальное касательное напряжение;

3) показать на чертеже положение главных площадок, направление главных напряжений, положение площадок с максимальными касательными напряжениями.

Схемы для расчета приведены ниже, числовые данные — в табл. 8.5.

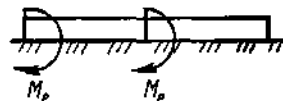
СХЕМЫ К РАБОТЕ



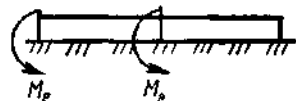
21



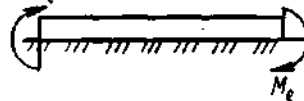
22



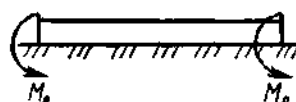
23



24



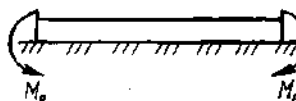
25



26



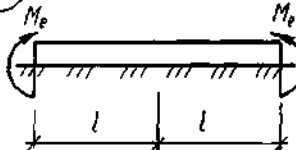
27



28



29



30



Табл. 8.5. Числовые данные

Номер задания	E , МПа	ν	E_0 , МПа	ν_0	b , м	h , м	I , м	ρ , МПа	F , кН	M_e , кН·м
1	24 000	0,15	40	0,28	1	0,5	2	0,1	300	100
2	29 000	0,15	30	0,28	1	0,52	3	0,2	200	200
3	34 000	0,15	50	0,28	1	0,68	4	0,3	400	300
4	38 000	0,15	45	0,28	1	0,72	5	0,4	600	50
5	13 000	0,15	35	0,28	1	1	6	0,5	500	100
6	15 000	0,15	25	0,28	1	0,98	7	0,4	700	140
7	24 000	0,16	40	0,28	1	0,8	6	0,3	800	200
8	29 000	0,16	25	0,28	1	0,52	5	0,2	900	250
9	38 000	0,16	20	0,28	1	0,36	4	0,1	800	300
10	13 000	0,16	15	0,28	1	0,38	3	0,2	700	250
11	15 000	0,16	30	0,3	1	0,32	2	0,3	600	200
12	21 000	0,16	25	0,3	1	0,58	4	0,4	500	150
13	25 000	0,16	20	0,3	1	0,7	5	0,5	400	100
14	28 000	0,17	25	0,35	1	1	6	0,6	300	150
15	30 000	0,17	20	0,35	1	1,32	7	0,7	200	100
16	35 000	0,17	18	0,35	1	0,96	8	0,6	400	150
17	28 000	0,17	15	0,35	1	0,34	3	0,5	600	200
18	21 000	0,17	20	0,4	1	0,5	4	0,4	700	250
19	27 000	0,17	18	0,4	1	0,52	5	0,3	800	300
20	32 000	0,17	15	0,4	1	0,54	6	0,2	900	200

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Назовите три группы методов расчета балок на упругом основании.
2. В чем заключается различие между механическими моделями основания – винклеровским основанием и основанием в виде упругого полупространства?
3. Напишите дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, лежащей на упругом основании.
4. Назовите условия контакта подошвы балки и упругого основания.
5. В чем заключается основное достоинство метода М.И.Горбунова-Посадова расчета балок на упругом основании?
6. Как классифицируются балки в зависимости от значения показателя гибкости?
7. Какие виды нагрузок учитываются при расчете балок на упругом основании с использованием таблиц?
8. Как определяются ординаты эпюр реактивных давлений, поперечных сил и изгибающих моментов по методу М.И.Горбунова-Посадова?
9. Объясните структуру таблиц, используемых для определения безразмерных величин $\bar{p}$, $\bar{Q}$, $\bar{M}$.
10. Какова точность расчета балок, лежащих на упругом основании, по методу М.И. Горбунова-Посадова?

IX. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

РАБОТА 12. КОСОЙ ИЗГИБ

Общие сведения

Косым изгибом называется такой случай изгиба стержня, при котором плоскость действия суммарного изгибающего момента в поперечном сечении стержня не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции стержня. Обычно различают два случая косоугольного изгиба: плоский и пространственный.

Плоский косоугольный изгиб (рис. 9.1, а) характерен тем, что все нагрузки расположены в силовой плоскости и углы между плоскостью действия изгибающего момента и главными центральными осями во всех поперечных сечениях одинаковы. Упругая линия стержня является плоской кривой, но плоскость, в которой она расположена, не совпадает с силовой плоскостью.

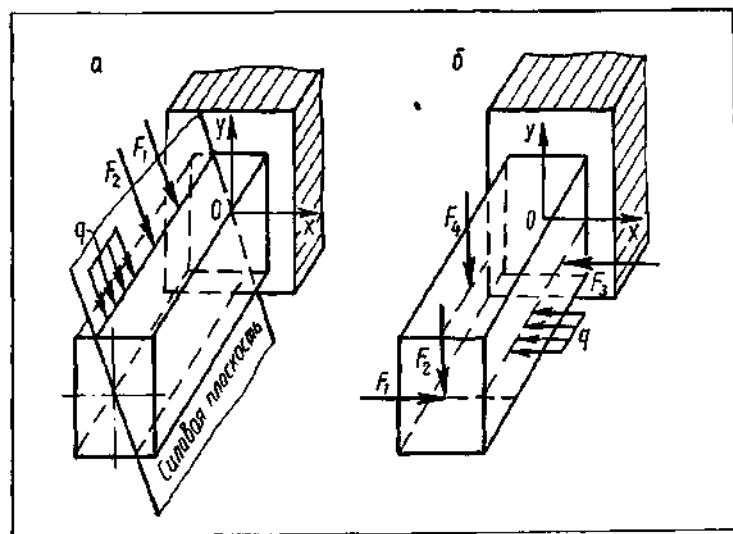


Рис. 9.1. Косой изгиб: плоский (а), пространственный (б)

Пространственный косоугольный изгиб (рис. 9.1, б) возникает при действии на стержень нагрузок, расположенных в разных плоскостях. Поэтому углы между силовыми линиями и главными центральными осями инерции не постоянны по длине стержня, а упругая линия стержня является пространственной кривой.

При расчете стержней на прочность и жесткость при косом изгибе внешние нагрузки, действующие в различных плоскостях, проходящих через центр тяжести сечения, заменяются их составляющими, приложенными в главных плоскостях, т. е. косоугольный изгиб заменяется поперечным изгибом в этих двух плоскостях. Изгибающие моменты M_x и M_y относительно главных центральных осей x и y могут быть вычислены в любом поперечном сечении стержня, но наиболее опасным является сечение, в котором эти моменты достигают своих наибольших значений.

Нормальное напряжение в произвольной точке любого поперечного сечения стержня вычисляется следующим образом:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x, \quad (9.1)$$

где I_x, I_y — главные центральные моменты инерции сечения; x, y — координаты точки в системе главных центральных осей.

В формулу (9.1) следует подставлять абсолютные значения M_x, M_y, x, y , устанавливая знак слагаемых по характеру деформации стержня (при растяжении принимается знак плюс).

Если поперечное сечение стержня имеет произвольную форму, находится положение нулевой линии, проходящей через центр тяжести наиболее опасного поперечного сечения стержня. Тангенс угла наклона нулевой линии с осью x определяется из выражения

$$|\operatorname{tg} \varphi| = \left| \frac{M_y I_x}{M_x I_y} \right|, \quad (9.2)$$

где φ — угол, характеризующий положение нулевой линии, откладывается от оси x в ту же сторону, что и угол β от оси y , который определяет положение силовой линии (рис. 9.2).

В общем случае нулевая линия не перпендикулярна к силовой. Угол между этими линиями зависит от степени различия главных моментов инерции I_x и I_y . В случае их равенства нулевая и силовая линии пересекаются под углом 90° .

Максимальные растягивающие и сжимающие напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нулевой линии. Для проверки прочности материала стержня в этих точках используются условия прочности:

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y_{dan} + \frac{M_y}{I_y} x_{dan} \leq R_t; \quad (9.3)$$

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y_{dan} + \frac{M_y}{I_y} x_{dan} \leq R_c.$$

где x_{dan}, y_{dan} — координаты опасных точек в системе главных центральных осей.

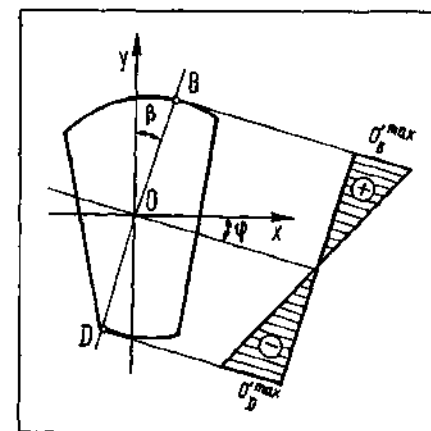


Рис. 9.2. Положение нулевой линии и эпюра нормальных напряжений для опасного поперечного сечения стержня

Условия прочности для сечений, симметричных относительно главных центральных осей и имеющих выступающие угловые точки (прямоугольники, двутавры и др.), записываются в виде:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq R_t; \quad \sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq R_c. \quad (9.4)$$

Для круглого поперечного сечения условие прочности таково:

$$\sigma = \frac{M_{tot}}{W_x} \leq R_t (R_c), \quad (9.5)$$

где

$$M_{tot} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

Полный прогиб, т. е. линейное перемещение центра тяжести какого-либо поперечного сечения стержня, равен геометрической сумме его перемещений в направлении главных центральных осей:

$$f_{tot} = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad (9.6)$$

где u — прогиб в направлении оси x ; v — то же, в направлении оси y .

Направление прогибов при плоском косом изгибе перпендикулярно к нулевой линии, но в общем случае не совпадает с направлением силовой плоскости. При действии на стержень пространственной системы сил ось стержня представляет собой пространственную кривую линию.

Пример 9.1. Проверить прочность балки, расчетная схема которой представлена на рис. 9.3. Определить максимальный прогиб.

Дано: $F = 60 \text{ кН}$; $\alpha = 90^\circ$; $\beta = 40^\circ$; $l = 2,4 \text{ м}$; $h = 16 \text{ см}$; $b = 8 \text{ см}$; $R = 210 \text{ МПа}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Решение. Разложим силу F по главным центральным осям поперечного сечения балки, определим опорные реакции и построим эпюры изгибающих моментов M_x и M_y (рис. 9.4, а). Наибольшие нормальные напряжения возникают в середине пролета балки в точках B и D поперечного сечения (рис. 9.4, б) и вычисляются следующим образом:

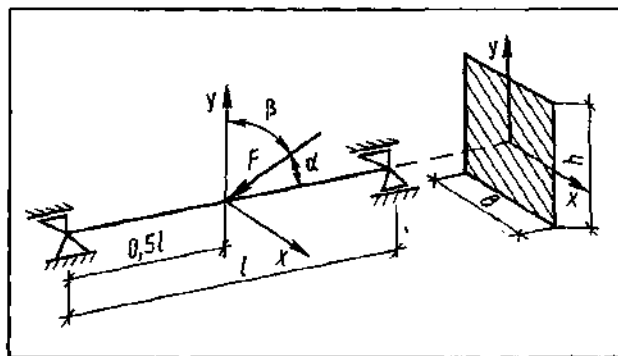


Рис. 9.3. Расчетная схема (пример 9.1)

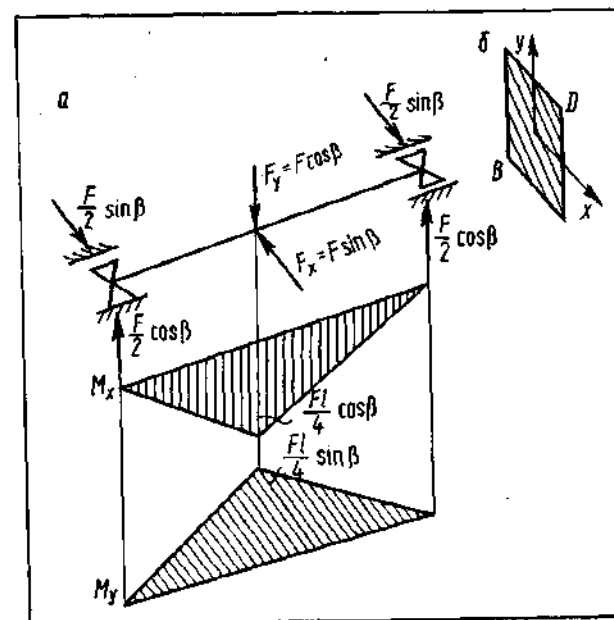


Рис. 9.4. Усилия, действующие на балку, и эпюры моментов (пример 9.1)

$$\begin{aligned} \sigma_B^{\max} = |\sigma_D^{\max}| &= \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{F \cos \beta \cdot 6}{4bh^2} + \frac{F \sin \beta \cdot 6}{4b^2h} = \\ &= \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 2,4 \cdot 0,766 \cdot 6}{4 \cdot 8 \cdot 10^2 \cdot 10^{-6}} + \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 2,4 \cdot 0,6428 \cdot 6}{4 \cdot 8^2 \cdot 16 \cdot 10^{-6}} = 216,4 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Очевидно, что напряжение лишь на 3 % выше расчетного сопротивления, т. е. прочность материала балки вполне достаточная.

Максимальный прогиб возникает посередине пролета балки. Прогибы в направлении осей x и y :

$$\begin{aligned} u &= \frac{F_x l^3}{48EI} = \frac{F \sin \beta l^3 \cdot 12}{48Eb^3h} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 0,6428 \cdot 2,4^3 \cdot 12}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 8^3 \cdot 16 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 0,00813 \text{ м} = 0,813 \text{ см}; \\ v &= \frac{F_y l^3}{48EI} = \frac{F \cos \beta l^3 \cdot 12}{48Eb^3h} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 0,766 \cdot 2,4^3 \cdot 12}{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 8 \cdot 16^3 \cdot 10^{-8}} = \\ &= 0,00242 \text{ м} = 0,242 \text{ см}. \end{aligned}$$

Полный прогиб сечения посередине пролета

$$f_{tot} = \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{0,813^2 + 0,242^2} = 0,848 \text{ см}.$$

Пример 9.2. Определить максимальное значение силы F для каждого из двух заданных брусьев (рис. 9.5), если $R_c = 140$ МПа; $R_t = 40$ МПа.

Дано: 1-й брус (рис. 9.5, а): $h = 9$ см; $b = 6$ см; $\beta = 30^\circ$; $d = 4$ см; $l = 90$ см; 2-й брус (рис. 9.5, б): $D = 9$ см; $l = 90$ см; $\beta = 30^\circ$; $h = 5,4$ см; $b = 3,6$ см.

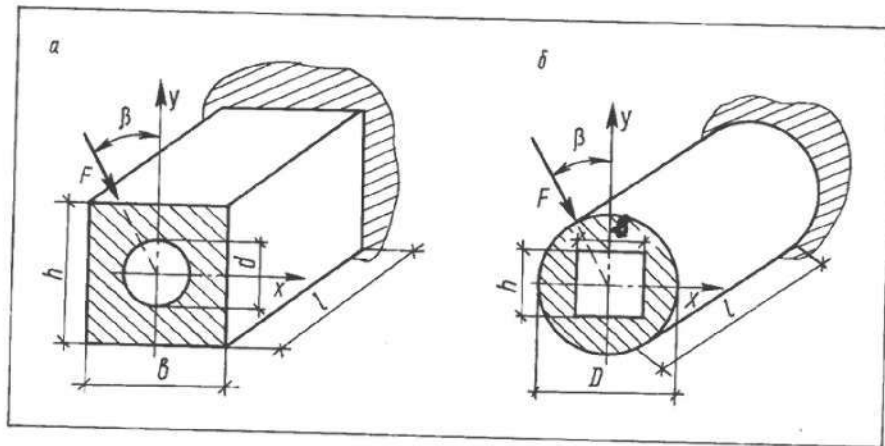


Рис. 9.5. Расчетные схемы (пример 9.2).

Решение. Для обоих брусьев опасное сечение — в заделке. Максимальные изгибающие моменты относительно главных центральных осей:

$$M_x^{\max} = F_y l = F \cos \beta \cdot l; \quad M_y^{\max} = F_x l = F \sin \beta \cdot l.$$

Эпюры нормальных напряжений для первого бруса приведены на рис. 9.6. Опасное сечение — точка В, в которой возникает наибольшее напряжение растяжения. Условие прочности для материала в точке В имеет вид

$$\sigma_B = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq R_t.$$

Находим значения осевых моментов сопротивления сечения:

$$W_x = \frac{\frac{bh^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64}}{0,5h} = \frac{\frac{6 \cdot 9^3}{12} - \frac{3,14 \cdot 4^4}{64}}{0,5 \cdot 9} = 78,2 \text{ см}^3,$$

$$W_y = \frac{\frac{b^3 h}{12} - \frac{\pi d^4}{64}}{0,5b} = \frac{\frac{6^3 \cdot 9}{12} - \frac{3,14 \cdot 4^4}{64}}{0,5 \cdot 6} = 49,8 \text{ см}^3.$$

Максимальное значение силы F находится из условия

$$\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = R_t; \quad \frac{F \cdot 0,866 \cdot 0,9}{78,2 \cdot 10^{-6}} + \frac{F \cdot 0,5 \cdot 0,9}{49,8 \cdot 10^{-6}} = 40 \cdot 10^6,$$

откуда $F = 2100 \text{ Н} = 2,1 \text{ кН}$.

Для второго бруса по эпюрам нормальных напряжений невозможно установить положение опасной точки. Поэтому для нахождения опасной точки определяется положение нулевой линии.

Тангенс угла наклона нулевой линии к оси x вычисляется из выражения (9.2), где

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bh^3}{12} = \frac{3,14 \cdot 9^4}{64} - \frac{3,6 \cdot 5,4^3}{12} = 275 \text{ см}^4;$$

$$I_y = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{b^3 h}{12} = \frac{3,14 \cdot 9^4}{64} - \frac{3,6^3 \cdot 5,4}{12} = 301 \text{ см}^4.$$

Учитывая, что $\tan \beta = M_y / M_x$, получаем:

$$\tan \varphi = \frac{\tan \beta I_x}{I_y} = \tan 30^\circ \frac{275}{301} = 0,528; \quad \varphi = 27^\circ 50'.$$

Нулевая линия проходит через первый и третий квадранты сечения (рис. 9.7). Проведя к сечению касательные, параллельные нулевой линии, находим точки В и D, в которых возникают наибольшие напряжения растяжения и сжатия. Опасной является точка В, так как для рассматриваемого материала $R_t < R_c$.

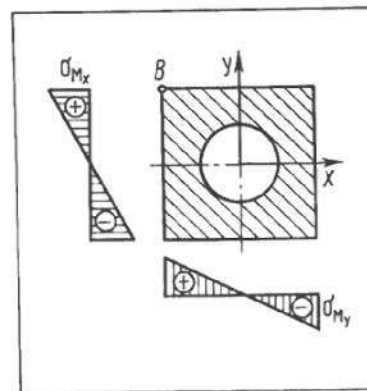


Рис. 9.6. Эпюры нормальных напряжений для первого бруса (пример 9.2)

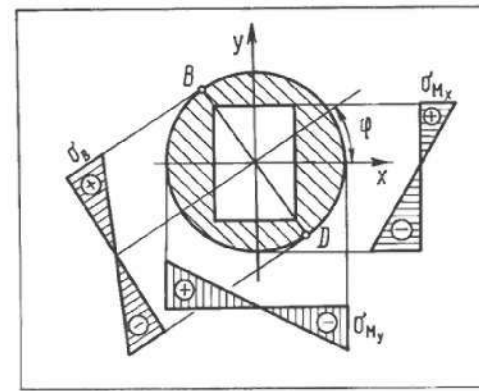


Рис. 9.7. Эпюры нормальных напряжений для второго бруса (пример 9.2)

Условие прочности материала в точке В имеет вид (9.3), где $y_{\text{дан}} = \frac{D}{2} \cos \varphi$, $x_{\text{дан}} = \frac{D}{2} \sin \varphi$.

Подставляя цифровые данные, получим

$$\sigma_B = \frac{F \cos 30^\circ \cdot 0,9}{275 \cdot 10^{-8}} + \frac{0,09}{2} \cos 27^\circ 50' + \frac{F \sin 30^\circ \cdot 0,9}{301 \cdot 10^{-8}} + \frac{0,09}{2} \sin 27^\circ 50' <$$

$$< 40 \cdot 10^6,$$

откуда $F = 2770 \text{ Н} = 2,77 \text{ кН}$.

Исходные данные к работе

Балка постоянного сечения нагружена в главных плоскостях. Материал балки — сталь, $R = 210 \text{ МПа}$.

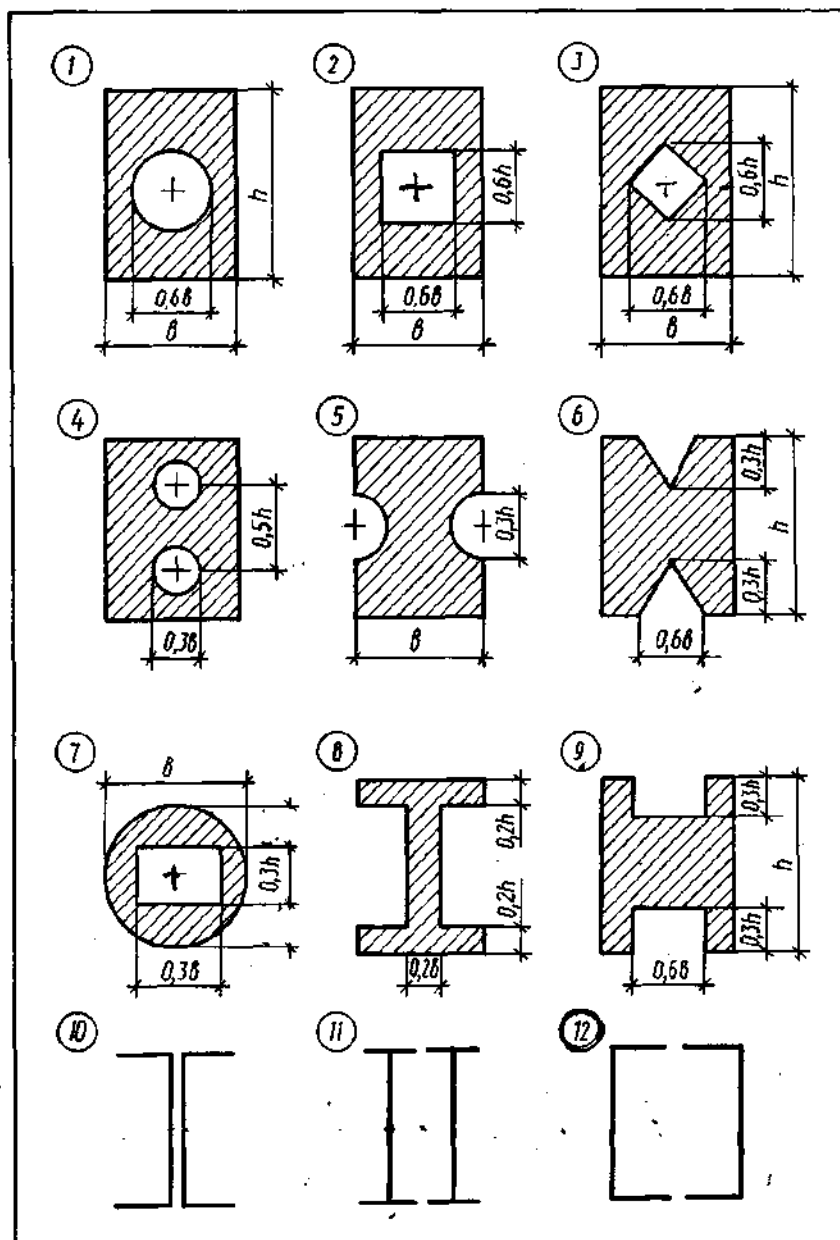


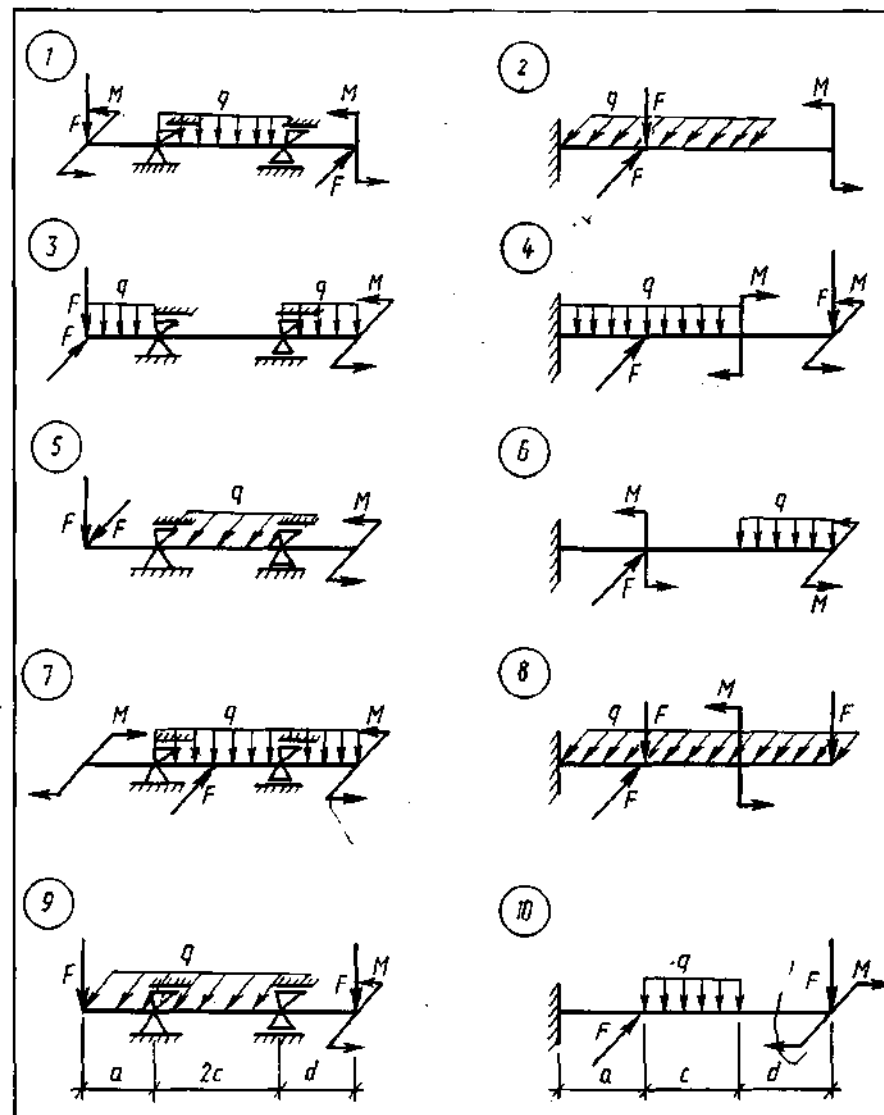
Рис. 9.8. Рекомендуемые формы поперечных сечений балки

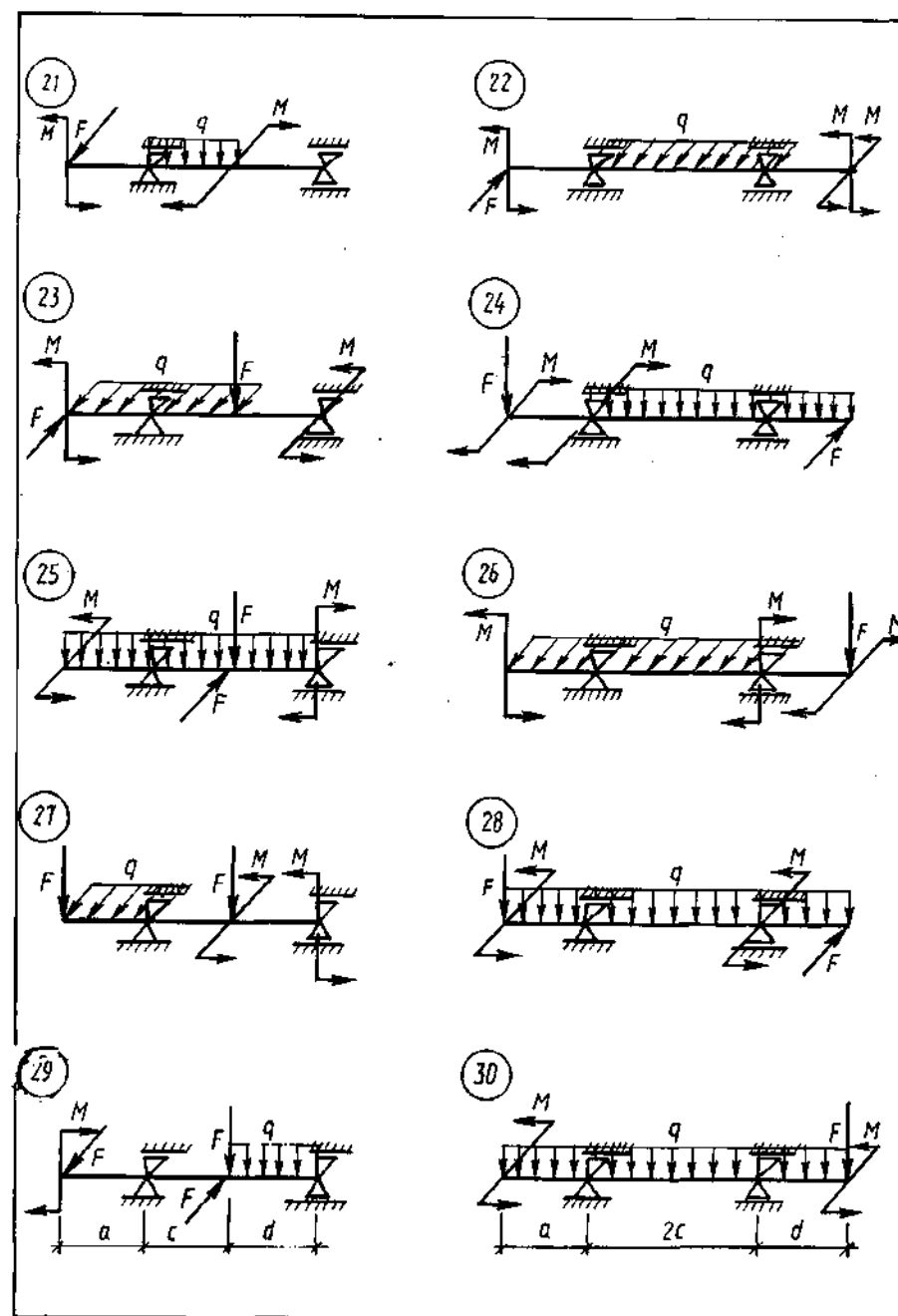
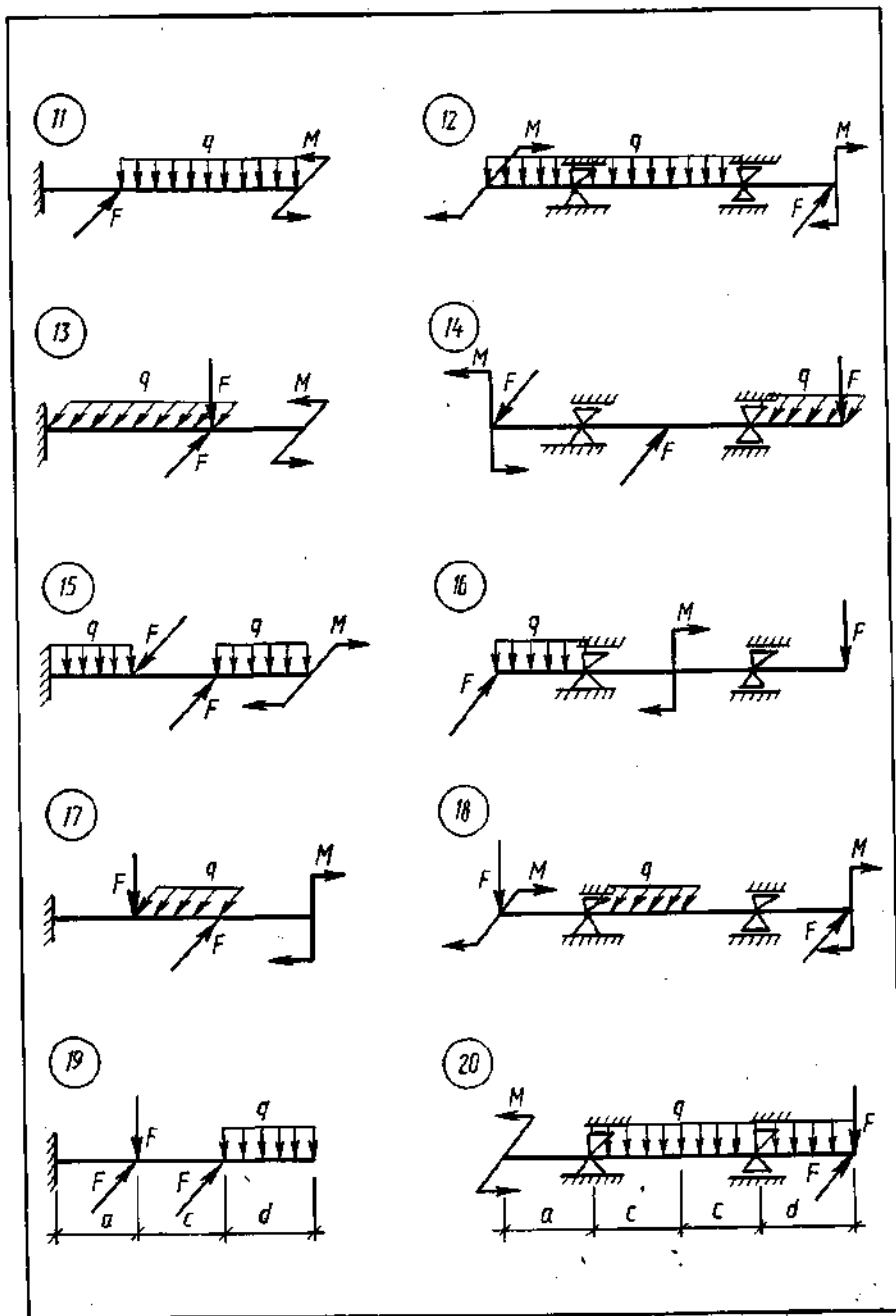
Требуется:

- 1) построить эпюры изгибающих моментов;
- 2) вычислить расчетный момент и проверить прочность балки;
- 3) определить положение нулевой линии в опасном сечении и построить эпюру нормальных напряжений.

Схемы для расчета приведены ниже, числовые данные — в табл. 9.1. Форма сечения балки указывается при выдаче задания. Рекомендуемые формы поперечных сечений балки приведены на рис. 9.8.

СХЕМЫ К РАБОТЕ





Т а б л. 9.1. Числовые данные

Номер зада- ния	a, м	c, м	d, м	F, кН	q, кН/м	M, кН·м	h, см	b, см	Номер	
									дву- тав- ра	швел- лера
1	1	3	2	30	20	10	20	15	18	14
2	2	2	2	10	20	30	24	12	16	16
3	1	3	2	20	20	20	30	15	36	14а
4	2	2	2	20	20	30	24	18	18	16а
5	1	3	2	10	20	10	28	12	18а	18
6	2	2	2	10	10	30	18	16	16	20
7	1	3	2	20	30	10	24	12	20	18а
8	2	2	2	20	10	20	20	12	30	20а
9	1	3	2	20	10	20	27	16	27	22
10	2	2	2	10	30	10	21	12	27а	22а
11	1	3	2	10	30	10	20	12	24	24
12	2	2	2	10	30	10	18	12	24а	24а
13	1	3	2	20	10	30	24	16	27	14
14	2	2	2	20	10	30	24	16	24	16
15	1	3	2	10	20	30	30	18	24а	16а
16	2	2	2	20	20	10	30	18	30	27
17	1	3	2	10	30	10	30	18	30а	18
18	2	2	2	20	20	20	28	12	20	16
19	1	3	2	20	20	20	28	15	20а	20
20	2	2	2	10	30	10	24	18	18	22
21	1	3	2	10	30	10	30	18	20	18
22	2	2	2	20	20	30	24	16	20а	16
23	1	3	2	20	10	40	28	20	16	14
24	2	2	2	20	10	30	24	12	18	20
25	1	3	2	20	10	30	18	12	20	24

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какой изгиб называется косым?
2. Сочетанием каких видов изгиба является косой изгиб?
3. Что такое силовая и нулевая линии для балки при косом изгибе?
4. По каким формулам определяются нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня при косом изгибе, как устанавливаются знаки этих напряжений?
5. Как находится положение нулевой линии при косом изгибе балки?
6. Какие точки в сечении балки являются опасными и как определяется их положение при косом изгибе?
7. Объясните, как подбирается поперечное сечение балки при косом изгибе.
8. Как строятся эпюры нормальных напряжений при косом изгибе балки?
9. Как определяются перемещения точек оси балки при косом изгибе?

РАБОТА 13. РАСЧЕТ КОЛОННЫ НА ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ

Общие сведения

При действии на стержень двух равных и прямо противоположных сил (рис. 9.9, а), направленных по прямой $B-B'$, параллельной оси стержня, он работает на внецентренное сжатие или растяжение. Расстояние от точки B до центра тяжести сечения называется эксцентриситетом.

Внецентренно приложенная нагрузка в любом сечении стержня, обладающего большой жесткостью, вызывает в общем случае нормальную силу $N = F$ и изгибающие моменты $M_x = Fy_F$, $M_y = Fx_F$ относительно главных осей инерции (рис. 9.9, б).

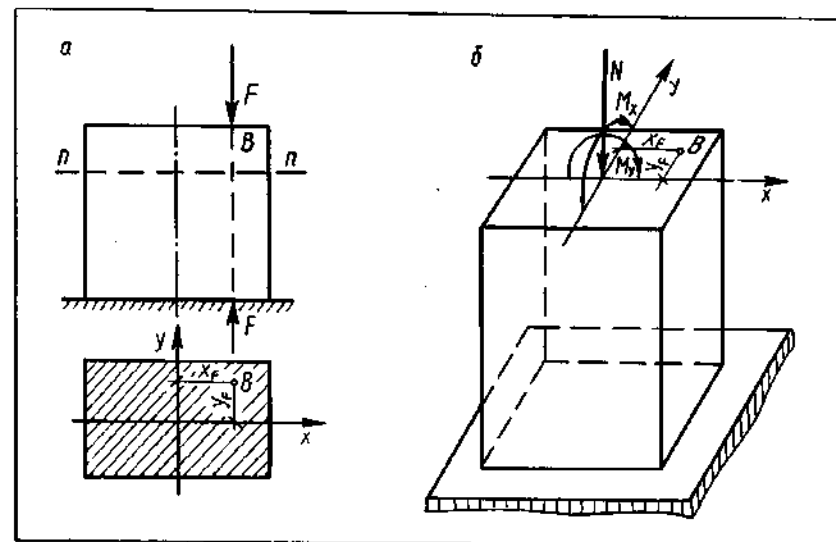


Рис. 9.9. Внецентренное сжатие:

а — схема приложения внешних сил; б — усилия в поперечном сечении стержня

Нормальное напряжение в любой точке поперечного сечения стержня находится по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x. \quad (9.7)$$

Если поперечное сечение имеет сложную форму, то для определения нормальных напряжений предварительно нужно найти положение нулевой линии, уравнение которой имеет вид

$$1 + \frac{x_F x_N}{i_y^2} + \frac{y_F y_N}{i_x^2} = 0, \quad (9.8)$$

где x_N , y_N — координаты любой точки нулевой линии.

При $x_N = 0$, $y_N = y_0$ и при $y_N = 0$, $x_N = x_0$ отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат (рис. 9.10), определяются следующим образом:

$$x_0 = -\frac{i_y^2}{x_F}; \quad y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F}. \quad (9.9)$$

Если эти значения даны, можно решить обратную задачу, т. е. найти координаты точки приложения силы F :

$$x_F = -\frac{i_y^2}{x_0}; \quad y_F = -\frac{i_x^2}{y_0}. \quad (9.10)$$

Нулевая линия делит сечение на две части — сжатую и растянутую. Проводя к контуру сечения касательные, параллельные нулевой линии (см. рис. 9.10), получим две точки C и D , в которых будут действовать наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения.

Для проверки прочности материала в этих точках используются следующие условия прочности:

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y_{dan} + \frac{M_y}{I_y} x_{dan} \leq R_c; \\ \sigma_t &= \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y_{dan} + \frac{M_y}{I_y} x_{dan} \leq R_t, \end{aligned} \quad (9.11)$$

где x_{dan} , y_{dan} — координаты опасной точки.

Для сечения типа прямоугольник, двутавр и т. п. выражения (9.11) могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq R_c; \\ \sigma_t &= \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq R_t. \end{aligned} \quad (9.12)$$

В формулы (9.11) и (9.12) следует подставлять абсолютные значения N , M_x , M_y , x_{dan} , y_{dan} , а знак принимать для всего слагаемого в целом, устанавливая его по характеру деформации стержня (напряжение растяжения принимается со знаком плюс, сжатия — минус).

Нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения стержня с координатами x , y определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_F y}{i_x^2} + \frac{x_F x}{i_y^2} \right), \quad (9.13)$$

где x_F , y_F — координаты точки приложения продольной силы.

Если материал стержня плохо работает на растяжение, желательно, чтобы все сечение работало лишь на сжатие. С этой целью необходимо ограничить эксцентриситет приложения силы некоторой областью вокруг центра тяжести

сечения, называемой ядром сечения, характерной тем, что всякая продольная сила, приложенная внутри этой области или на ее контуре, вызывает во всех точках поперечного сечения напряжения одного знака.

Чтобы получить очертание ядра сечения (рис. 9.11), необходимо рассмотреть все возможные положения касательных к контуру сечения и, предполагая, что эти касательные являются нулевыми линиями, вычислить по формулам (9.10) координаты граничных точек ядра относительно главных осей сечения. Соединяя затем эти точки, получим очертание ядра сечения.

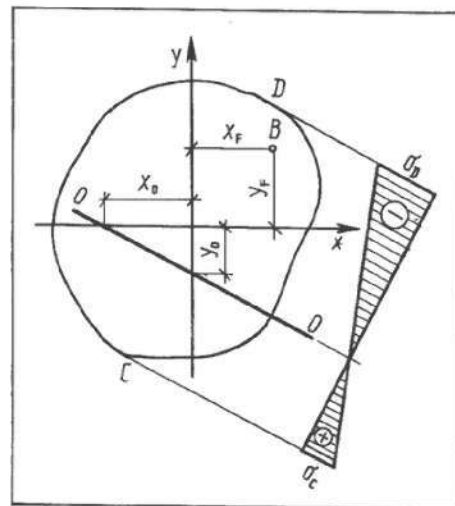


Рис. 9.10. Точка приложения силы F и положение нулевой линии

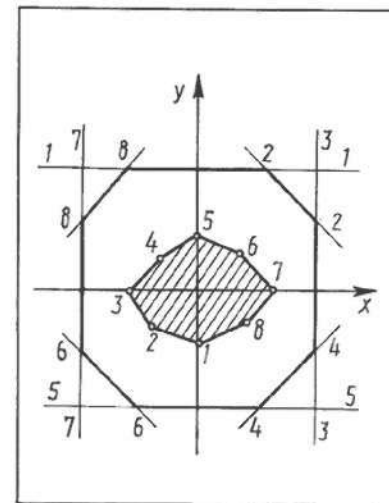


Рис. 9.11. Ядро сечения

Пример 9.3. Короткая колонна (рис. 9.12) сжимается продольной силой F , приложенной в точке B . Определить положение нулевой линии и построить эпюру нормальных напряжений в поперечном сечении колонны.

Дано: $F = 200$ кН; $a = 40$ см; $b = 50$ см; $x_F = -14$ см; $y_F = 15$ см; $M_x = -200 \cdot 10^3 \cdot 15 \cdot 10^{-2} = -30$ кН·м; $M_y = -200 \cdot 10^3 \cdot (-14 \cdot 10^{-2}) = 28$ кН·м.

Решение. Определяем геометрические характеристики поперечного сечения колонны и квадраты главных радиусов инерции:

$$A = ab = 40 \cdot 50 = 2000 \text{ см}^2;$$

$$I_x = \frac{ab^3}{12} = \frac{40 \cdot 50^3}{12} = 416666,6 \text{ см}^4; \quad I_y = \frac{a^3 b}{12} = \frac{40^3 \cdot 50}{12} = 266666,6 \text{ см}^4;$$

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{416666,6}{2000} = 208 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A} = \frac{266666,6}{2000} = 133 \text{ см}^2.$$

Находим положение нулевой линии и с этой целью определяем длину отрезков, отсекаемых нулевой линией на главных осях инерции x и y :

$$x_0 = -\frac{i_y^2}{x_F} = -\frac{133}{-14} = 9,5 \text{ см}; \quad y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{208}{15} = -13,9 \text{ см}.$$

Положение нулевой линии показано на рис. 9.13. Для построения эпюры нормальных напряжений найдем точки, которые наиболее удалены от нулевой линии: $D(-20; 25)$ $C(20; -25)$.

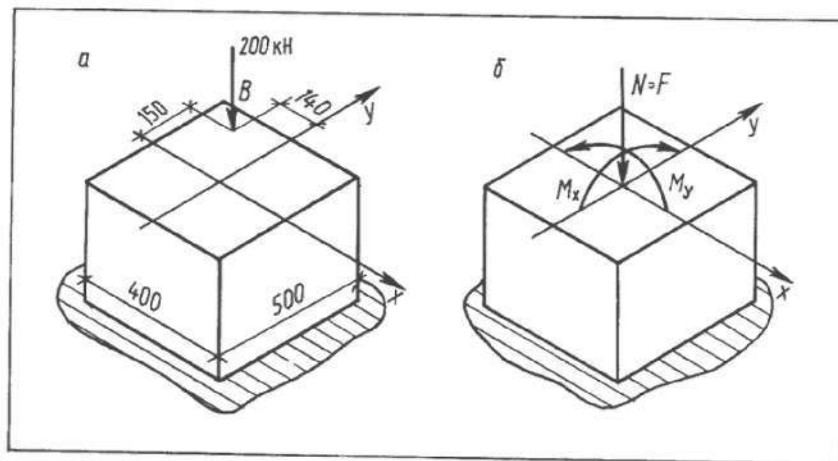


Рис. 9.12 Короткая колонна (пример 9.3):
а — схема приложения нагрузки; б — усилия в поперечном сечении колонны

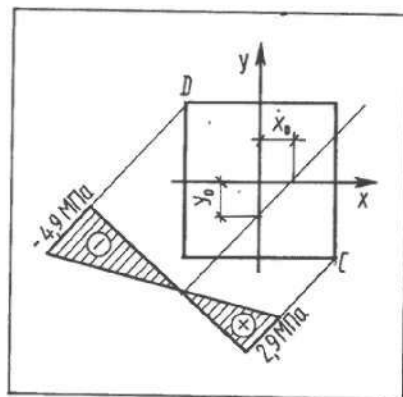


Рис. 9.13. Положение нулевой линии и эпюра нормальных напряжений (пример 9.3)

Нормальные напряжения в точках D и C вычисляются по формулам:

$$\sigma_D = -\frac{N}{A} \left(1 + \frac{y_F y}{i_x^2} + \frac{x_F x}{i_y^2} \right) = \frac{-200 \cdot 10^3}{0,2} \left(1 + \frac{15 \cdot 10^{-2} \cdot 25 \cdot 10^{-2}}{208 \cdot 10^{-4}} + \frac{(-14) \cdot 10^{-2} \cdot (-20) \cdot 10^{-2}}{133 \cdot 10^{-4}} \right) = -4,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = -4,9 \text{ МПа};$$

$$\sigma_C = -\frac{200 \cdot 10^3}{0,2} \left(1 + \frac{15 \cdot 10^{-2} \cdot (-25) \cdot 10^{-2}}{208 \cdot 10^{-4}} + \frac{(-14) \cdot 10^{-2} \cdot 20 \cdot 10^{-2}}{133 \cdot 10^{-4}} \right) = 2,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 2,9 \text{ МПа}.$$

Эпюра нормальных напряжений приведена на рис. 9.13.

Пример 9.4. Построить ядро сечения для внецентренно сжатой колонны, поперечное сечение которой, положение центральных и главных центральных осей, а также значения моментов инерции относительно главных центральных осей указаны на рис. 9.14.

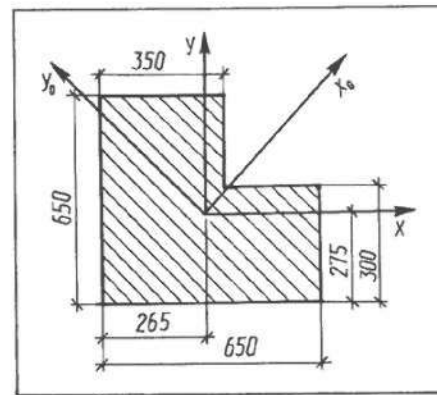


Рис. 9.14. Поперечное сечение колонны (пример 9.4)

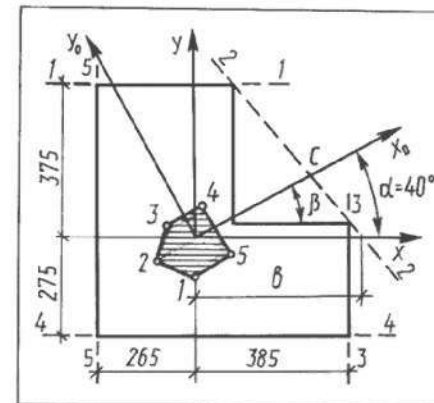


Рис. 9.15. Ядро сечения (пример 9.4)

Дано: $I_{x_0} = 1069 \cdot 10^3 \text{ см}^4$; $I_{y_0} = 949 \cdot 10^3 \text{ см}^4$; $A = 3175 \text{ см}^2$.

Решение. Вычисляем квадраты главных радиусов инерции и координаты точки приложения силы F :

$$i_x^2 = \frac{I_{x_0}}{A} = \frac{1069 \cdot 10^3}{3175} = 336,7 \text{ см}^2; \quad y_F = -\frac{336,7}{y_0};$$

$$i_y^2 = \frac{I_{y_0}}{A} = \frac{949 \cdot 10^3}{3175} = 298,9 \text{ см}^2; \quad x_F = -\frac{298,9}{x_0}.$$

Проводим касательную 1-1 к контуру поперечного сечения колонны (рис. 9.15), находим значения отрезков, отсекаемых этой касательной на главных центральных осях инерции, и координаты точки приложения продольной силы:

$$x_0 = \frac{37,5}{\sin 40^\circ} = \frac{37,5}{0,647} = 57,95 \text{ см}; \quad y_0 = \frac{37,5}{\cos 40^\circ} = \frac{37,5}{0,762} = 49,21 \text{ см};$$

$$x_F = -\frac{i_y^2}{x_0} = -\frac{298,9}{57,95} = -5,16 \text{ см}; \quad y_F = -\frac{i_x^2}{y_0} = -\frac{336,7}{49,21} = -6,84 \text{ см}.$$

Проводим касательную 2-2 к контуру поперечного сечения колонны и записываем уравнение этой линии $y = x \operatorname{tg} \alpha$, а также уравнение линии $y = (b-x) \operatorname{tg} \beta$. Точка пересечения этих линий — С (23,7; 19,9). Следовательно, отрезки, отсекаемые касательной 2-2 на главных центральных осях инерции: $x_0 = 30,8$ см; $y_0 \approx \infty$.

Находим координаты точки приложения продольной силы:

$$x_F = -\frac{i_y^2}{x_0} = -\frac{298,9}{30,8} = -9,7 \text{ см}; \quad y_F = -\frac{i_x^2}{y_0} = -\frac{336,7}{\infty} = 0.$$

Проводим касательную 3-3 и вычисляем длину отрезков, отсекаемых этой касательной на главных центральных осях инерции, и координаты приложения продольной силы:

$$x_0 = \frac{-38,5}{\cos 40^\circ} = \frac{38,5}{0,762} = 50,6 \text{ см}; \quad x_F = -\frac{298,9}{50,6} = -5,9 \text{ см};$$

$$y_0 = \frac{-38,5}{\sin 40^\circ} = \frac{-38,5}{0,647} = -59,5 \text{ см}; \quad y_F = \frac{336,7}{59,5} = 5,66 \text{ см}.$$

Далее проводим касательную 4-4 и повторяем вычисления:

$$x_0 = -\frac{27,5}{\sin 40^\circ} = -\frac{27,5}{0,647} = -42,5 \text{ см}; \quad x_F = \frac{298,9}{42,5} = 7,03 \text{ см};$$

$$y_0 = -\frac{27,5}{\cos 40^\circ} = -\frac{27,5}{0,762} = -36,1 \text{ см}; \quad y_F = \frac{336,7}{36,1} = 9,32 \text{ см}.$$

Аналогично проводим касательную 5-5 и выполняем расчеты:

$$x_0 = -\frac{26,5}{\cos 40^\circ} = -\frac{26,5}{0,762} = -34,8 \text{ см}; \quad x_F = \frac{298,9}{34,8} = 8,6 \text{ см};$$

$$y_0 = \frac{26,5}{\sin 40^\circ} = \frac{26,5}{0,647} = 41,0 \text{ см}; \quad y_F = -\frac{336,7}{41,0} = -8,2 \text{ см}.$$

Соединяя вычисленные точки приложения продольной силы, находим очертание ядра сечения (см. рис. 9.15).

Исходные данные к работе

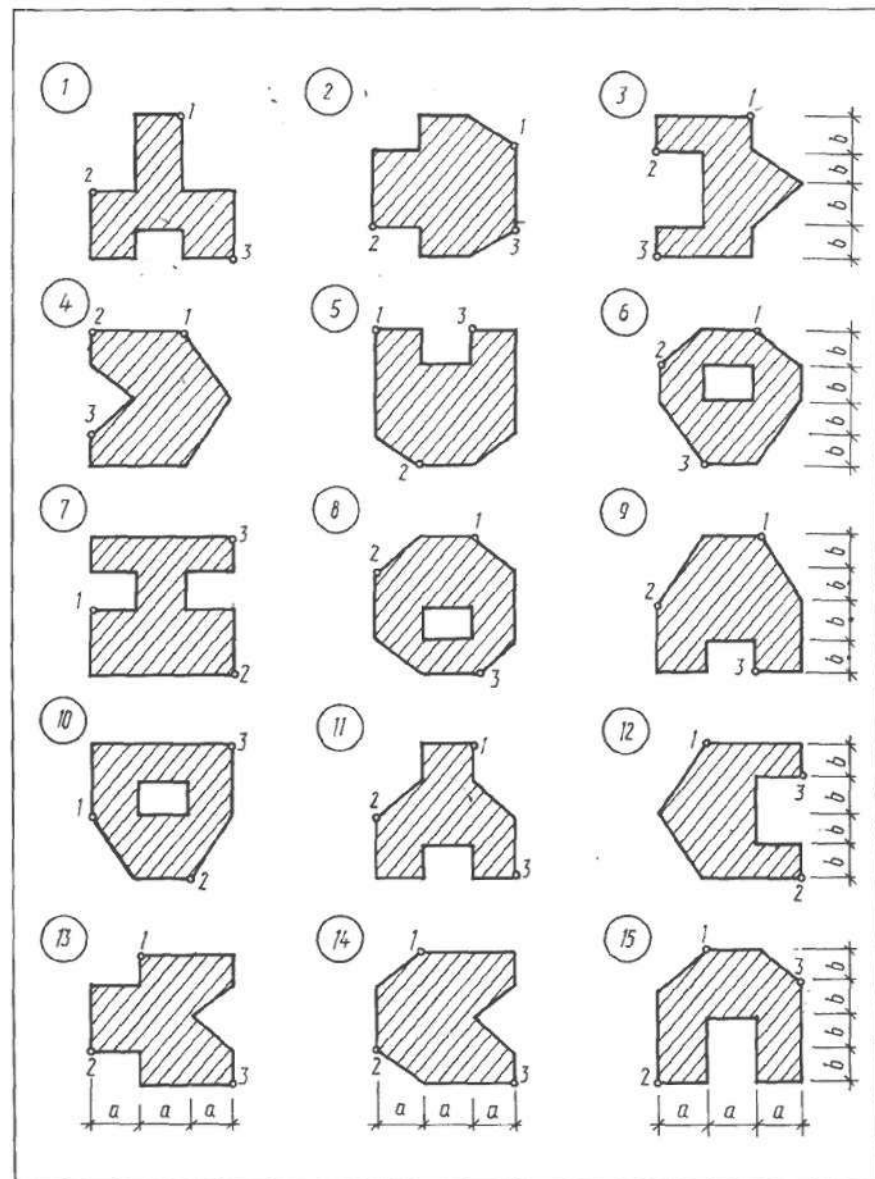
Жесткая колонна заданного поперечного сечения сжимается силой F , параллельной оси колонны и приложенной в точке, показанной на схеме сечения. Расчетное сопротивление материала на растяжение $R_t = 3$ МПа, на сжатие $R_c = 30$ МПа.

Требуется:

- 1) найти положение нулевой линии;
- 2) вычислить наибольшие сжимающее и растягивающее напряжения и построить эпюру напряжений. Дать заключение о прочности колонны;
- 3) найти допускаемую нагрузку F_{adm} при заданных размерах сечения;
- 4) построить ядро сечения.

Схемы к работе приведены ниже, числовые данные — в табл. 9.2.

СХЕМЫ К РАБОТЕ



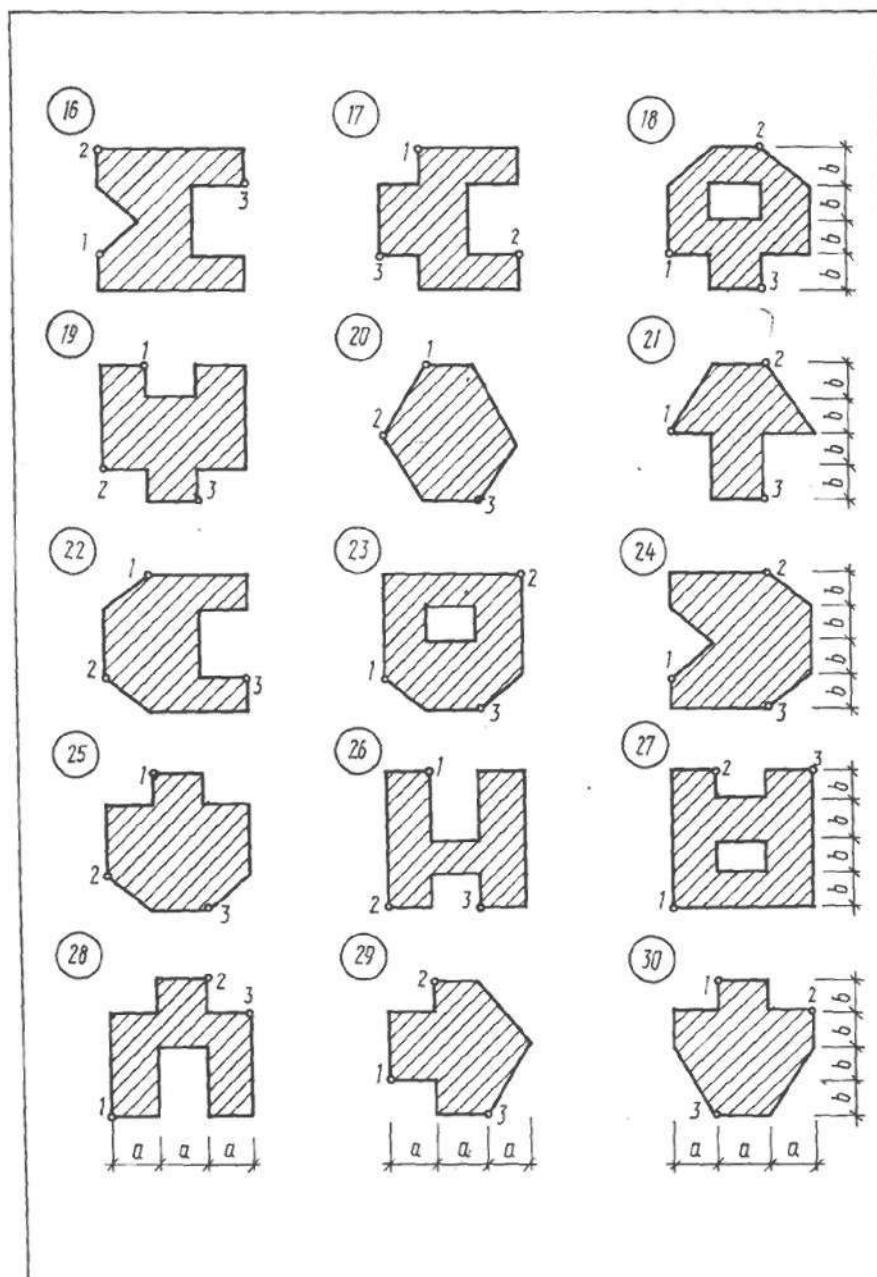


Табл. 9.2. Числовые данные

Номер задания	$F, \text{кН}$	Размеры сечения, см		Точка приложения силы
		a	b	
1	120	30	12	1
2	100	24	10	2
3	160	30	12	3
4	100	24	14	1
5	180	36	15	2
6	200	40	18	3
7	320	50	20	1
8	220	28	16	2
9	240	36	18	3
10	260	40	16	1
11	280	30	14	2
12	100	24	10	3
13	120	30	12	1
14	160	40	16	2
15	120	34	12	3
16	160	36	14	1
17	200	40	16	2
18	240	34	18	3
19	260	40	20	1
20	280	38	16	2
21	160	24	18	3
22	220	30	14	1

Программа для МК БЗ-34

Программа предназначена для вычисления нормальных напряжений в поперечном сечении внецентренно сжатой колонны. С помощью этой программы может быть определено положение нулевой линии либо точки приложения силы, вызывающей внецентренное сжатие колонны.

Для вычисления напряжения в произвольной точке поперечного сечения колонны необходимо выполнить следующие действия:

- 1) ввести программу (табл. 9.3);
- 2) занести данные и дать команду на выполнение (табл. 9.4);

Табл. 9.3. Текст программы

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
1	2	3	4	5	6	7	8	9
	F ПРГ		06	ПП	53	13	÷	13
00	ИП2	62	07	40	40	14	ИП5	65
01	ИП1	61	08	÷	13	15	F x=0	5E
02	÷	13	09	/-/	0L	16	19	19
03	ИП6	66	10	ПВ	4L	17	ПП	53
04	F x=0	5E	11	ИП3	63	18	40	40
05	08	08	12	ИП1	61	19	÷	13

Окончание табл. 9.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9
20	/-/	0L	29	÷	13	38	БП	51
21	ПА	4-	30	/-/	0L	39	23	23
22	С/П	50	31	1	01	40	8П	0С
23	ИПВ	6L	32	+	10	41	1	01
24	÷	13	33	ИП4	64	42	2	02
25	ИПА	6-	34	х	12	43	/-/	0L
26	х	12	35	ИП1	61	44	В/О	52
27	+	10	36	÷	13		F АВТ	
28	ИПА	6-	37	С/П	50			

Табл. 9.4. Последовательность ввода данных при расчете по программе

Вводимая величина	Операция на МК	Вводимая величина	Операция на МК
A	П1	F	П4
I_{x0}	П2	x_F	П5
I_{y0}	П3	y_F	П6
			В/О
			С/П

3) после остановки счета индицируется длина отрезка x_0 ; для индикации значения y_0 выполнить операции "ИП" и "В";

4) занести значения координат точки, в которой требуется вычислить напряжение, и дать команду на выполнение:

х ↑

у С/П

После выполнения расчета индицируется значение напряжения.

Для вычисления напряжений в других точках сечения этой же колонны выполнять действия, начиная с п. 4. Если положение нулевой линии определять не требуется, п. 3 можно не выполнять.

Для вычисления координат точки приложения силы относительно соответствующей нулевой линии (такая задача возникает при построении ядра сечения) необходимо выполнить действия, предусмотренные в пунктах 1, 2 и 3, но вместо координат точки приложения силы x_F и y_F (см. табл. 9.4) занести длину отсекаемых отрезков x_0 , y_0 . По окончании вычислений индицируется значение x_F ; для индикации значения y_F требуется выполнить операции "ИП" и "В".

При вводе данных значения координат x_F , y_F и x , y заносят со своим знаком, а значение сжимающей силы F — со знаком минус. В случае, если длина какого-либо отсекаемого отрезка стремится к бесконечности, ее следует принимать равной $1 \cdot 10^{99}$.

Определим положение нулевой линии и значения напряжений в точках А и В поперечного сечения внецентренно сжатой колонны, приведенной в примере 9.3 (табл. 9.5).

Проверим результаты расчета, полученные в примере 9.4 (табл. 9.6).

По результатам расчета строим ядро сечения (см. рис. 9.15).

Табл. 9.5. Расчет внецентренно сжатой колонны по программе (см. пример 9.3)

Вводимая величина		Операция на МК	Результат	
обозначение	значение		обозначение	значение
A	$2000 \cdot 10^{-4}$	П1		
I_{x0}	$416666,6 \cdot 10^{-8}$	П2		
I_{y0}	$266666,6 \cdot 10^{-8}$	П3		
F	$-200 \cdot 10^3$	П4		
x_F	$-14 \cdot 10^{-2}$	П5		
y_F	$15 \cdot 10^{-2}$	П6		
		В/О		
		С/П		
		ИПА	x_0	$9,5238 \cdot 10^{-2}$
		ИПВ	y_0	$-13,8888 \cdot 10^{-2}$
		↑		
x_a	$-20 \cdot 10^{-2}$	С/П	σ_A	$-4,9 \cdot 10^6$
y_a	$25 \cdot 10^{-2}$	↑		
x_b	$20 \cdot 10^{-2}$	С/П	σ_B	$2,9 \cdot 10^6$
y_b	$-25 \cdot 10^{-2}$			

Табл. 9.6. Расчет внецентренно сжатой колонны по программе (см. пример 9.4)

Вводимая величина		Операция на МК	Результат	
обозначение	значение		обозначение	значение
1	2	3	4	5
A	$3175 \cdot 10^{-4}$	П1		
I_{x0}	$1069 \cdot 10^{-5}$	П2		
I_{y0}	$949 \cdot 10^{-5}$	П3		
x_0	$57,95 \cdot 10^{-2}$	П5		
y_0	$49,21 \cdot 10^{-2}$	П6		
		В/О		
		С/П		

Окончание табл. 9.6

1	2	3	4	5
		ИПА	x_F	$-5,1579 \cdot 10^{-2}$
		ИПВ	y_F	$-6,8420 \cdot 10^{-2}$
x_0	$30,8 \cdot 10^{-2}$	П5		
y_0	ВП99	П6		
		В/О		
		С/П		
		ИПА	x_F	$-9,7045 \cdot 10^{-2}$
		ИПВ	y_F	0
x_0	$50,6 \cdot 10^{-2}$	П5		
y_0	$-59,5 \cdot 10^{-2}$	П6		
		В/О		
		С/П		
		ИПА	x_F	$-5,9071 \cdot 10^{-2}$
		ИПВ	y_F	$5,6587 \cdot 10^{-2}$
x_0	$-42,5 \cdot 10^{-2}$	П5		
y_0	$-36,1 \cdot 10^{-2}$	П6		
		В/О		
		С/П		
		ИПА	x_F	$7,0329 \cdot 10^{-2}$
		ИПВ	y_F	$9,3267 \cdot 10^{-2}$
x_0	$-34,8 \cdot 10^{-2}$	П5		
y_0	$41,0 \cdot 10^{-2}$	П6		
		В/О		
		С/П		
		ИПА	x_F	$8,5890 \cdot 10^{-2}$
		ИПВ	y_F	$-8,2120 \cdot 10^{-2}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какой случай сложного сопротивления называется внецентренным растяжением (сжатием)?
2. Что такое нулевая и силовая линии при внецентренном сжатии?
3. Какие напряжения возникают при внецентренном растяжении (сжатии) колонны и как они вычисляются?
4. Как строится эпюра нормальных напряжений?
5. Как определяется положение нулевой линии при внецентренном сжатии (растяжении) колонны? Напишите формулу.
6. Что такое ядро сечения?
7. Как определить контур ядра сечения?
8. Укажите форму и размеры ядра сечения для поперечных сечений простейших форм.
9. Как изменяется положение нулевой линии при внецентренном сжатии (растяжении) колонны в зависимости от положения точки приложения силы?

10. Напишите формулу нормальных напряжений для случая, когда полюс находится на одной из главных центральных осей инерции сечения. Где при этом расположена нулевая линия?

РАБОТА 14. РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО СТЕРЖНЯ

Общие сведения

Большинство скручиваемых элементов машин работают на совместное действие крутящего и изгибающего моментов и при этом нередко растягиваются или сжимаются продольными силами N . Расчет таких элементов производится на основе использования принципа суперпозиции, отдельно на действие крутящего, изгибающего моментов и продольной силы с последующим суммированием соответствующих напряжений и деформаций.

Если в вале машины от действия внешней нагрузки возникает продольная сила N , нормальные напряжения в поперечном сечении вала определяются по формуле

$$\sigma_N = \pm \frac{N}{A} \quad (9.14)$$

При действии на вал внешнего изгибающего момента M , наибольшее нормальное напряжение вычисляется следующим образом:

$$\sigma_M = \pm \frac{M}{W} \quad (9.15)$$

где для вала круглого поперечного сечения $W = \pi d^3 / 32$; d — диаметр вала.

Нормальное напряжение в центре тяжести поперечного сечения вала при его изгибе равно нулю, а максимальные растягивающие и сжимающие нормальные напряжения действуют в противоположных точках, расположенных на поверхности вала. Поэтому при одновременном действии на вал продольной силы N и изгибающего момента M в наиболее напряженном состоянии будут находиться точки, расположенные на поверхности вала, максимальные нормальные напряжения в которых суммируются, т. е.

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} \quad (9.16)$$

или

$$\sigma = -\sigma_N - \sigma_M = -\frac{N}{A} - \frac{M}{W}$$

При действии на вал внешнего крутящего момента T , наибольшие касательные напряжения находятся в противоположных точках, расположенных на поверхности вала,

$$\tau = \pm \frac{T}{2W_x} \quad (9.17)$$

Для проверки прочности элемента, расположенного на поверхности вала, используется какая-либо теория прочности. Например, условие прочности по энергетической теории изменения формы можно записать следующим образом:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R. \quad (9.18)$$

Если на вал действует только продольная сила N и крутящий момент T , выражение (9.18) принимает вид

$$\frac{4}{\pi d^2} \sqrt{N^2 + \frac{48T^2}{d^2}} \leq R. \quad (9.19)$$

В случае действия на вал изгибающего момента M и крутящего момента T условие прочности (9.18) записывается в форме

$$\sigma_{max} = \frac{M_{red}}{W} \leq R, \quad (9.20)$$

где $M_{red} = \sqrt{M^2 + 0,75T^2}$.

Методику расчета вала при действии продольной силы N , изгибающего момента M и крутящего момента T покажем на примере.

Пример 9.5. Рассчитать пространственный стержень круглого поперечного сечения с ломаной осью, изображенный на рис. 9.16.

Дано: $F = 10$ кН; $q = 30$ кН/м; $l = 1$ м; $d = 10$ см; $R = 210$ МПа.

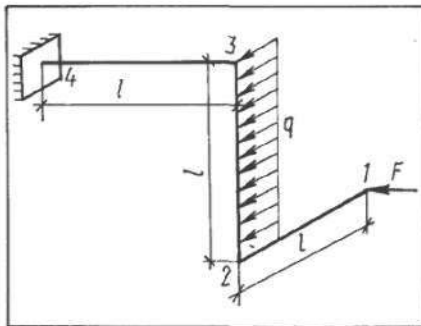


Рис. 9.16. Расчетная схема (пример 9.5)

Решение. Строим эпюры продольных и поперечных сил, крутящих и изгибающих моментов (рис. 9.17).

Напряженное состояние пространственного стержня рассматриваем по участкам (см. рис. 9.16):

Участок 1–2. Наиболее опасным является сечение 2, где наибольшее нормальное напряжение

$$\sigma_{max} = \frac{M_2}{W} = \frac{32M_2}{\pi d^3} = \frac{32 \cdot 10 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}} = 101,91 \cdot 10^6 \text{ Па} =$$

$$= 101,91 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Участок 2–3. Имеют место изгиб в двух плоскостях и кручение. Наиболее опасным является сечение 3, где изгибающие моменты, действующие в двух плоскостях, суммируются, т. е.

$$M_{tot} = \sqrt{15^2 + 10^2} = 18,028 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На основании энергетической теории изменения формы проверяем условие прочности:

$$\sigma = \frac{M_{red}}{W} = \frac{20,0 \cdot 10^3}{9,8125 \cdot 10^{-5}} = 203,82 \text{ МПа} < R,$$

где $M_{red} = \sqrt{M_{tot}^2 + 0,75T^2} = \sqrt{18,028^2 + 0,75 \cdot 10^2} = 20,0 \text{ кН} \cdot \text{м}.$

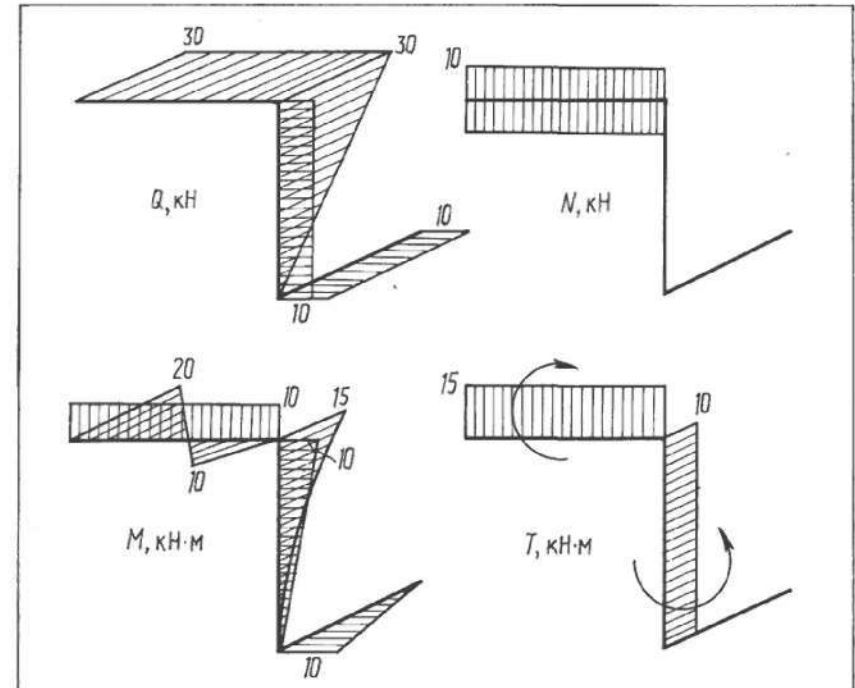


Рис. 9.17. Эпюры поперечных и продольных сил, крутящих и изгибающих моментов (пример 9.5)

Участок 3–4. Имеют место изгиб в двух плоскостях, кручение, сжатие. Опасным является сечение 4.

Суммарный изгибающий момент

$$M_{tot} = \sqrt{20^2 + 10^2} = 22,36 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Нормальное напряжение от действия силы F и изгибающего момента

$$\sigma = \sigma_F + \sigma_M = \left| \frac{N}{A} + \frac{M}{W} \right| = \frac{10 \cdot 10^3 \cdot 4}{3,14 \cdot 10^2 \cdot 10^{-4}} + \frac{22,36 \cdot 10^3}{9,8125 \cdot 10^{-5}} =$$

$$= 1,274 \cdot 10^6 + 227,872 \cdot 10^6 = 229,146 \text{ МПа}.$$

Касательное напряжение

$$\tau = \left| \frac{T_e}{2W} \right| = \frac{15 \cdot 10^3}{2 \cdot 9,8125 \cdot 10^{-5}} = 76,433 \text{ МПа.}$$

Условие прочности

$$\sigma_{red} = \sqrt{\left(\frac{N}{A} + \frac{M}{W}\right)^2 + 3\left(\frac{T_e}{2W}\right)^2} = \sqrt{229,146^2 + 3 \cdot 76,433^2} = 264,64 \text{ МПа} > R.$$

Напряжение σ_{red} больше расчетного сопротивления материала, поэтому прочность материала не обеспечивается.

Для определения необходимого из условия прочности диаметра стержня принимаем, что $\sigma_F = N/A = 0$, так как $\sigma_N \ll \sigma_M$.

Тогда

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_{red}}{\pi R}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 25,86 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 210 \cdot 10^6}} = 0,108 \text{ м} = 10,8 \text{ см,}$$

$$\text{где } M_{red} = \sqrt{M^2 + 0,75T_e^2} = \sqrt{22,36^2 + 0,75 \cdot 15^2} = 25,86 \text{ кН.}$$

Проверяем условие прочности при диаметре стержня 10,8 см:

$$\sigma_{red} = \sqrt{\left(\frac{10 \cdot 10^3 \cdot 4}{3,14 \cdot 10,8^2 \cdot 10^{-4}} + \frac{22,36 \cdot 10^3}{1,236 \cdot 10^{-4}}\right)^2 + 3\left(\frac{15 \cdot 10^3}{2 \cdot 1,236 \cdot 10^{-4}}\right)^2} = \sqrt{33123,272 + 11046,187} = 210,16 \text{ МПа.}$$

В этом расчете

$$W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 10,8^3}{32} = 1,236 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3.$$

Перенапряжение материала стержня

$$\frac{210,16 - 210}{210} \cdot 100 = 0,076\% < 3\%.$$

Следовательно, прочность материала обеспечена.

Исходные данные к работе

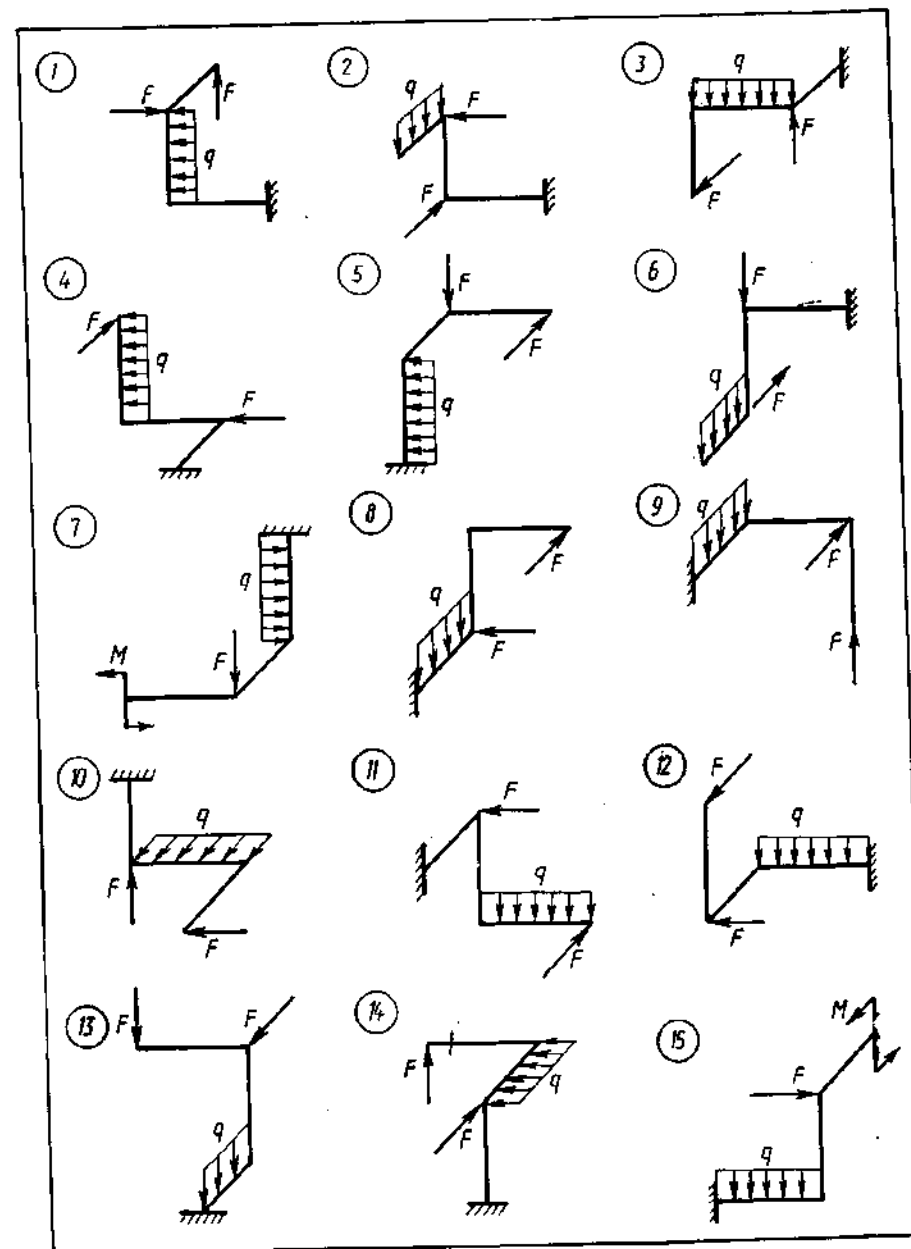
Пространственная система состоит из трех жестко соединенных под прямыми углами стержней круглого поперечного сечения одинаковой длины. Стержень нагружен силами, расположенными в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Материал стержня — сталь с расчетными сопротивлениями $R_y = 210 \text{ МПа}$, $R_s = 130 \text{ МПа}$.

Требуется:

- 1) построить в аксонометрии эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил;
- 2) установить вид сопротивления для каждого участка стержня;
- 3) определить положение опасного сечения и дать заключение о прочности конструкции.

Схемы для расчета приведены ниже, числовые данные — в табл. 9.7.

СХЕМЫ К РАБОТЕ



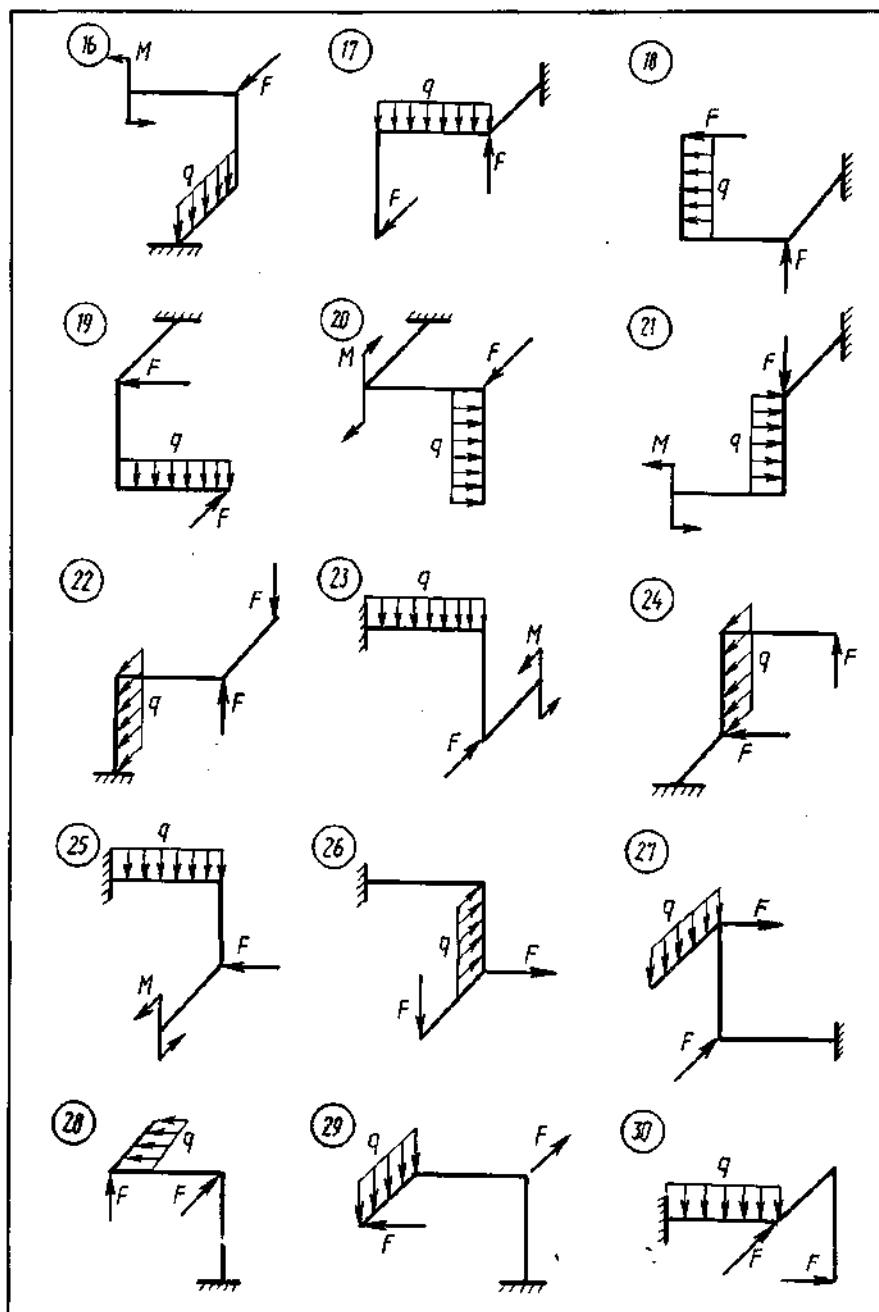


Табл. 9.7. Числовые данные

Номер задания	F , кН	q , кН/м	M , кН·м	l , м	d , см
1	8	6	4	0,6	5
2	10	4	1	0,4	6
3	6	10	2	0,5	8
4	4	10	6	0,6	6
5	4	6	8	0,4	8
6	8	10	8	0,6	5
7	4	4	4	0,5	8
8	6	4	6	0,4	7
9	6	8	4	0,6	8
10	5	6	4	0,4	10
11	5	6	4	0,5	8
12	6	8	5	0,6	6
13	10	6	6	0,5	8
14	8	4	5	0,4	7
15	5	10	8	0,8	10
16	6	8	4	0,6	8
17	4	10	1	0,8	7
18	6	8	2	0,4	5
19	10	10	6	0,6	10
20	8	6	4	0,8	8
21	6	8	6	0,4	6
22	4	10	4	0,6	6
23	6	8	2	0,8	8
24	8	4	1	0,8	10
25	6	6	6	0,4	5
26	6	6	8	0,6	6
27	6	4	6	0,8	7
28	6	8	6	0,4	10
29	8	6	4	0,6	8
30	10	6	4	0,8	6

Программа для МК БЗ-34

Программа предназначена для вычисления эквивалентного напряжения σ_{red} в стержне сплошного круглого сечения, подвергнутого совместному действию продольной силы N , двух изгибающих моментов M_x , M_y и крутящего момента T . Поперечные силы Q_x и Q_y в расчете не учитываются. Расчетная формула имеет вид

$$\sigma_{red} = \frac{4}{\pi d^3} \sqrt{(d|N| + 8\sqrt{M_x^2 + M_y^2})^2 + k(4T)^2}.$$

Если используется третья теория прочности, коэффициент k должен быть равен 4, в случае использования четвертой (энергетической) теории прочности $k = 3$.

Т а б л . 9.8. Текст программы

Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код	Адрес	Команда	Код
	F ПРГ		12	F x^2	22	25	F x^2	22
00	4	04	13	+	10	26	ИП6	66
01	ИП1	61	14	F $\sqrt{\quad}$	21	27	X	12
02	F x^2	22	15	8	08	28	+	10
03	ИП1	61	16	X	12	29	F $\sqrt{\quad}$	21
04	X	12	17	ИП2	62	30	ИП0	60
05	F π	20	18	ИП1	61	31	X	12
06	X	12	19	X	12	32	С/П	60
07	÷	13	20	+	10	33	БП	51
08	ПО	40	21	F x^2	22	34	00	00
09	ИП3	63	22	ИП5	65		F АВТ	
10	F x^2	22	23	4	04			
11	ИП4	64	24	X	12			

Т а б л . 9.9. Последовательность ввода данных при расчете по программе

Вводимая величина	Операция на МК	Вводимая величина	Операция на МК
d	П1	T	П5
$ N $	П2	K	П6
M_x	П3		В/О
M_y	П4		С/П

Для расчета по программе необходимо выполнить действия:

- 1) ввести программу (табл. 9.8);
- 2) занести данные — абсолютное значение продольной силы N , значения изгибающих моментов M_x , M_y , крутящего момента T , диаметра стержня d и коэффициента k согласно табл. 9.9;
- 3) после окончания вычислений индицируется значение эквивалентного напряжения σ_{red} ; исходные данные сохраняются.

С помощью программы (см. табл. 9.8) вычислим эквивалентные напряжения в пространственном стержне, приведенном в примере 9.5 (табл. 9.10—9.13).

Т а б л . 9.10. Определение эквивалентного напряжения на участке 1—2 (см. пример 9.5)

Вводимая величина		Операция на МК	Вводимая величина		Операция на МК
обозначение	значение		обозначение	значение	
d	$10 \cdot 10^{-2}$	П1	T	0	П5
$ N $	0	П2	K	3	П6
M_x	$10 \cdot 10^3$	П3			В/О
M_y	0	П4			С/П

По окончании вычислений индицируется значение эквивалентного напряжения $\sigma_{red} = 101,85916 \cdot 10^6$ Па.

Т а б л . 9.11. Определение эквивалентного напряжения на участке 2—3 (см. пример 9.5)

Вводимая величина		Операция на МК
обозначение	значение	
M_y	$15 \cdot 10^3$	П4
T	$10 \cdot 10^3$	П5
		В/О
		С/П

Индицируется $\sigma_{red} = 203,7183 \cdot 10^6$ Па.

Т а б л . 9.12. Определение эквивалентного напряжения на участке 3—4 (см. пример 9.5)

Вводимая величина		Операция на МК
обозначение	значение	
$ N $	$10 \cdot 10^3$	П2
M_y	$20 \cdot 10^3$	П4
T	$15 \cdot 10^3$	П5
		В/О
		С/П

Индицируется $\sigma_{red} = 264,51153 \cdot 10^6$ Па.

Для подбора размеров сечения стержня на участке 3—4 используется метод проб. Задавая различные значения диаметра, вычисляем эквивалентные напряжения σ_{red} . Сравниваем σ_{red} с расчетным сопротивлением R и выбираем диаметр, при котором σ_{red} и R различаются не более чем на 3%.

Т а б л . 9.13. Определение диаметра стержня сплошного круглого сечения на участке 3—4 (см. пример 9.5)

Вводимая величина		Операция на МК	Результат	
обозначение	значение		обозначение	значение
d	$10 \cdot 10^{-2}$	П1 В/О С/П	σ_{red}	$264,51 \cdot 10^6$
d	$12 \cdot 10^{-2}$	П1 В/О С/П		
d	$11 \cdot 10^{-2}$	П1 В/О С/П	σ_{red}	$153,20 \cdot 10^6$
d	$10,8 \cdot 10^{-2}$	П1 В/О С/П	σ_{red}	$198,81 \cdot 10^6$
			σ_{red}	$210,05 \cdot 10^6$

Принимаем $d = 108$ мм.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие напряжения возникают в стержне круглого поперечного сечения при изгибе с кручением?
2. Как определяется приведенный момент по различным теориям прочности в случае изгиба с кручением стержня круглого поперечного сечения?
3. Как определяются внутренние усилия, действующие в поперечных сечениях пространственного бруса с ломаной осью, как строятся эпюры этих усилий?
4. Напишите выражение для определения диаметра стержня при его изгибе с кручением.
5. Как определяются главные напряжения при изгибе и кручении стержня с круглым поперечным сечением?
6. Напишите выражения для предельного напряжения по некоторым гипотезам прочности.
7. Как учитываются продольные силы при расчете пространственного стержня?
8. Какова методика расчета на изгиб с кручением стержня прямоугольного поперечного сечения?

Х. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

РАБОТА 15. РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Общие сведения

При центральном сжатии прямого стержня силой F его прямолинейная форма равновесия является устойчивой до достижения указанной силой так называемого критического значения, превышение которого влечет за собой изгиб (выпучивание) стержня.

Значение критической силы, соответствующее переходу сжатого элемента из одного состояния равновесия в другое, находят по формуле Эйлера, которую с учетом различных случаев закрепления концов сжатого стержня можно записать в виде

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2} \quad (10.1)$$

где μ — коэффициент приведенной длины стержня, принимаемый в зависимости от характера закрепления концов стержня (рис. 10.1).

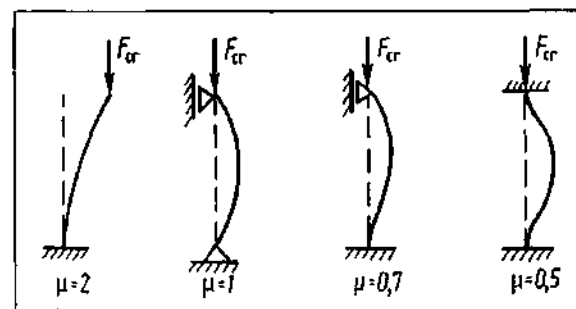


Рис. 10.1. Значения коэффициентов приведенной длины стержня в зависимости от характера закрепления его концов

Анализируя формулу (10.1), можно сделать вывод, что критическая сила зависит от геометрических размеров стержня и модуля упругости материала, но не зависит от прочностных характеристик материала, из которого изготовлен стержень.

Формула Эйлера справедлива в предположении упругой работы материала стержня, характеризуемой законом Гука. Поэтому она может быть использована, когда критическое напряжение в материале не превышает предел пропорциональности. Соответствующее этому условию критическое напряжение находится следующим образом:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu l)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (10.2)$$

где $i = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$ — радиус инерции; $\lambda = \frac{\mu l}{i}$ — гибкость стержня.

Приравняв это напряжение пределу пропорциональности, найдем предельное значение гибкости

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} \quad (10.3)$$

Если $\lambda \geq \lambda_0$, можно применять формулу Эйлера, при $\lambda < \lambda_0$ пользоваться этой формулой нельзя. Если стержень работает за пределом упругих деформаций, то для расчета критической силы формула Эйлера неприменима и в этом случае используется эмпирическая формула Ф.С. Ясинского:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda, \quad (10.4)$$

где a, b — постоянные, зависящие от вида материала стержня.

Если λ не превышает 40...50 (короткий стержень), потеря устойчивости исключена; принимается, что напряжения в стержне не превышают предел текучести (в пластичных материалах) или предел прочности (в хрупких материалах). Если гибкость стержня находится в пределах $50 \leq \lambda \leq \lambda_0$, стержень теряет устойчивость в результате упругопластических деформаций и критическое напряжение находится по формуле (10.4). При $\lambda > \lambda_0$ для расчета критической силы применяется формула (10.1).

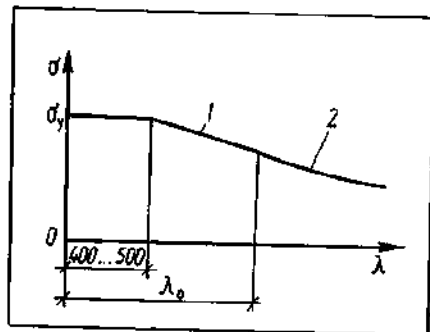


Рис. 10.2 График критических напряжений:
1 — прямая Ясинского; 2 — гипербола Эйлера

На рис. 10.2 приведен график критических напряжений, свидетельствующий о том, что, используя в определенных пределах формулы Эйлера и Ясинского, можно решать задачи устойчивости сжатых стержней при любых гибкостях стержней, допускаемых СНиПом.

При выборе размеров сжатых стержней обычно используется так называемый практический метод расчета, гарантирующий устойчивость сжатых стержней в процессе их эксплуатации.

Условие устойчивости для таких стержней имеет следующий вид:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi R, \quad (10.5)$$

где $R = R_{cy}$ — для сталей; $R = R_{cm}$ — для хрупких материалов (R_{cy}, R_{cm} — расчетные сопротивления, характеризующие пределы текучести и прочности).

Коэффициент продольного изгиба φ , входящий в формулу (10.5), зависит от размеров и формы поперечного сечения. С другой стороны, площадь поперечного сечения A также зависит от размеров сечения. Поэтому подбор сечения при использовании формулы (10.5) обычно проводят путем итераций. Вначале задаются примерным значением коэффициента предельного изгиба и для этого сечения находят площадь, момент и радиус инерции сечения, а затем гибкость стержня λ . На основании полученной гибкости по табл. 11 (см.

приложение) определяют коэффициент φ и по формуле (10.5) вычисляют напряжение, которое обычно значительно отличается от расчетного сопротивления материала. Во втором приближении изменяют размеры поперечного сечения и повторяют расчет. Процесс последовательных попыток продолжается до тех пор, пока разница между σ и R составит не более 5%.

Пример 10.1. Определить размеры поперечного сечения стойки, указанной на рис. 10.3.

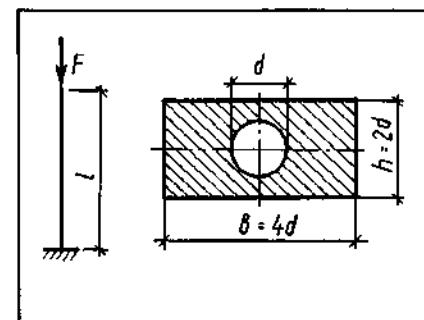


Рис. 10.3 Расчетная схема и поперечное сечение стойки (пример 10.1)

Дано: $F = 200 \text{ кН}$, $l = 3 \text{ м}$, $R = 16 \text{ МПа}$ (материал — дерево).

Решение. Определяем геометрические характеристики сечения и гибкость стойки:

$$A = 4d \cdot 2d - \frac{\pi d^2}{4} = 7,22d^2; \quad I_{\min} = \frac{4d(2d)^3}{12} - \frac{\pi d^4}{64} = 0,618d^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0,618d^4}{7,22d^2}} = 0,293d;$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 300}{0,293d} = \frac{717}{d}.$$

Находим размеры поперечного сечения стойки исходя из условия устойчивости

$\sigma = \frac{N}{A} \leq \varphi R$. Расчет ведем методом последовательных приближений.

Приближение 1.

Задаемся $\varphi_1^* = 0,3$, тогда

$$A = \frac{200 \cdot 10^3}{0,3 \cdot 16 \cdot 10^6} = 0,0417 \text{ м}^2 = 417 \text{ см}^2; \quad d = \sqrt{\frac{A}{7,22}} = \sqrt{\frac{417}{7,22}} = 7,6 \text{ см}.$$

При $d = 7,6 \text{ см}$ $\lambda = \frac{717}{7,6} = 94,4$. По табл. 11 приложения

$$\varphi_1 = 0,38 - \frac{0,38 - 0,31}{10} \cdot 4,4 = 0,349;$$

$$\varphi R = 0,349 \cdot 16 \cdot 10^6 = 5,59 \text{ МПа}; \quad \sigma = \frac{N}{A} = \frac{200 \cdot 10^3}{0,0417} = 4,8 \text{ МПа}.$$

Надонапряжение материала составляет

$$\frac{5,59 - 4,8}{5,59} 100 = 14,1 \% > 5 \%$$

Приближение 2

Задан $\varphi_2^* = \frac{\varphi_1^* + \varphi_1}{2} = \frac{0,3 + 0,349}{2} = 0,324$, тогда

$$A = \frac{200 \cdot 10^3}{0,324 \cdot 16 \cdot 10^6} = 386 \text{ см}^2; d = \sqrt{\frac{386}{7,22}} = 7,3 \text{ см.}$$

При $d = 7,3 \text{ см}$ $\lambda = \frac{717}{7,3} = 98,3$. По табл. 11 приложения

$$\varphi_2 = 0,38 - \frac{0,38 - 0,31}{10} 98,3 = 0,322;$$

$$\varphi_2 R = 0,322 \cdot 16 \cdot 10^6 = 5,16 \text{ МПа}; \sigma = \frac{200 \cdot 10^3}{0,0386} = 5,2 \text{ МПа.}$$

Перенапряжение материала составляет

$$\frac{5,2 - 5,16}{5,16} 100 = 0,78 \% < 5 \%, \text{ что допустимо.}$$

Окончательно при $d = 7,3 \text{ см}$ принимаем следующие размеры поперечного сечения деревянной стойки: $b = 29,2 \approx 29,5 \text{ см}$; $h = 14,6 \approx 15 \text{ см}$; $d = 7,3 \approx 7,5 \text{ см}$.

Пример 10.2. Определить несущую способность сжатой стойки и установить значение коэффициента запаса устойчивости для расчетной схемы, приведенной на рис. 10.4.

Дано: уголок $50 \times 50 \times 4$; $l = 2,8 \text{ м}$; $R = 210 \text{ МПа}$.

Решение. Определяем геометрические характеристики сечения и гибкость стойки. Для уголка $A_1 = 3,89 \text{ см}^2$; $b = 5 \text{ см}$; $z_0 = 1,38 \text{ см}$; $I_{\max} = 14,6 \text{ см}^4$; $I_{\min} = 3,8 \text{ см}^4$ (рис. 10.5).

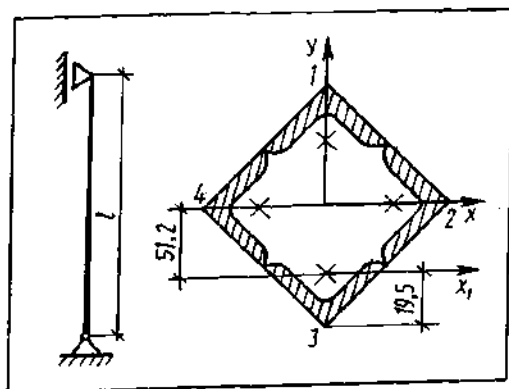


Рис. 10.4. Расчетная схема и поперечное сечение стойки (пример 10.2)

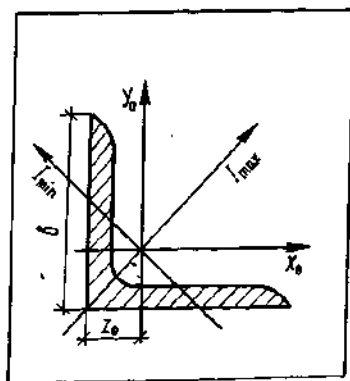


Рис. 10.5. Расчетная схема уголка (пример 10.2)

Для всего сечения

$$A = 4A_1 = 4 \cdot 3,89 = 15,56 \text{ см}^2;$$

$$I_{\min} = I_x = 2I_{2,4} + 2I_{1,3} = 2I_{2,4\max} + 2(I_{1,3\min} + A_1 a^2) = 2 \cdot 14,6 + 2[3,8 + 3,89(5,12)^2] = 241 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{241}{15,56}} = 3,94 \text{ см}; \lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1 \cdot 280}{3,94} = 71,2.$$

По табл. 11 приложения

$$\varphi = 0,81 - \frac{0,81 - 0,73}{10} 71,2 = 0,803.$$

Определяем несущую способность сжатой стойки исходя из условия устойчивости

$$\sigma = \frac{N}{A} < \varphi R. \text{ Получаем}$$

$$F = N = \varphi R A = 0,803 \cdot 1556 \cdot 10^{-6} \cdot 210 \cdot 10^6 = 262 \text{ кН.}$$

Принимаем $F_{\max} = 262 \text{ кН}$. Определяем коэффициент запаса устойчивости. Так как $\lambda = 71,2 < \lambda_0 = 100$, критическое напряжение находим по формуле (10.4), при $a = 310 \text{ МПа}$; $b = 1,14 \text{ МПа}$. Тогда

$$\sigma_{cr} = 310 \cdot 10^6 - 1,14 \cdot 10^6 \cdot 71,2 = 228,8 \text{ МПа.}$$

Критическая сила

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = 228,8 \cdot 10^6 \cdot 1556 \cdot 10^{-6} = 356 \text{ кН.}$$

Находим значение коэффициента запаса устойчивости:

$$n_s = \frac{F_{cr}}{F_{\max}} = \frac{356 \cdot 10^3}{262 \cdot 10^3} = 1,36.$$

Исходные данные к работе

Стальной стержень длиной l сжимается осевой нагрузкой F . Расчетное сопротивление материала $R = 210 \text{ МПа}$.

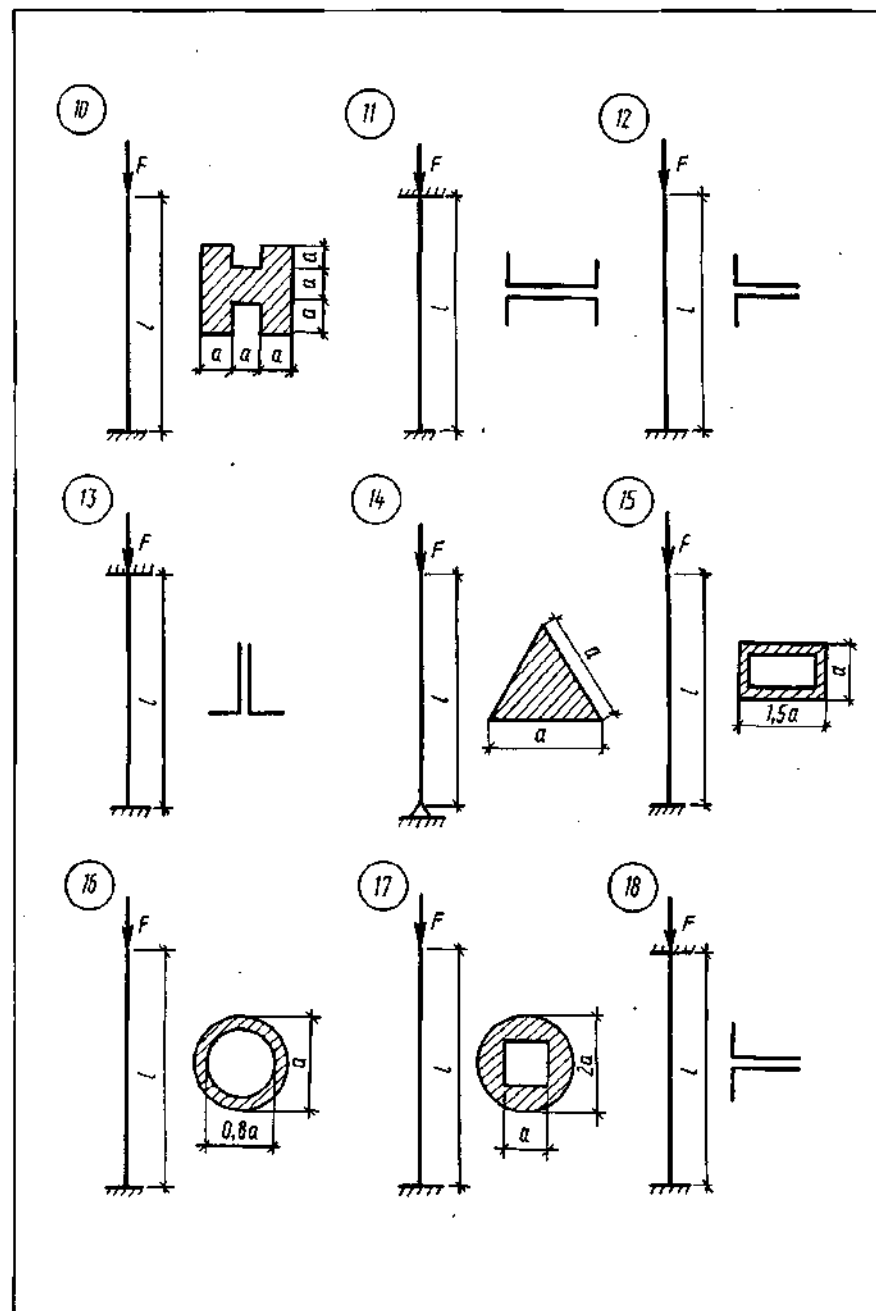
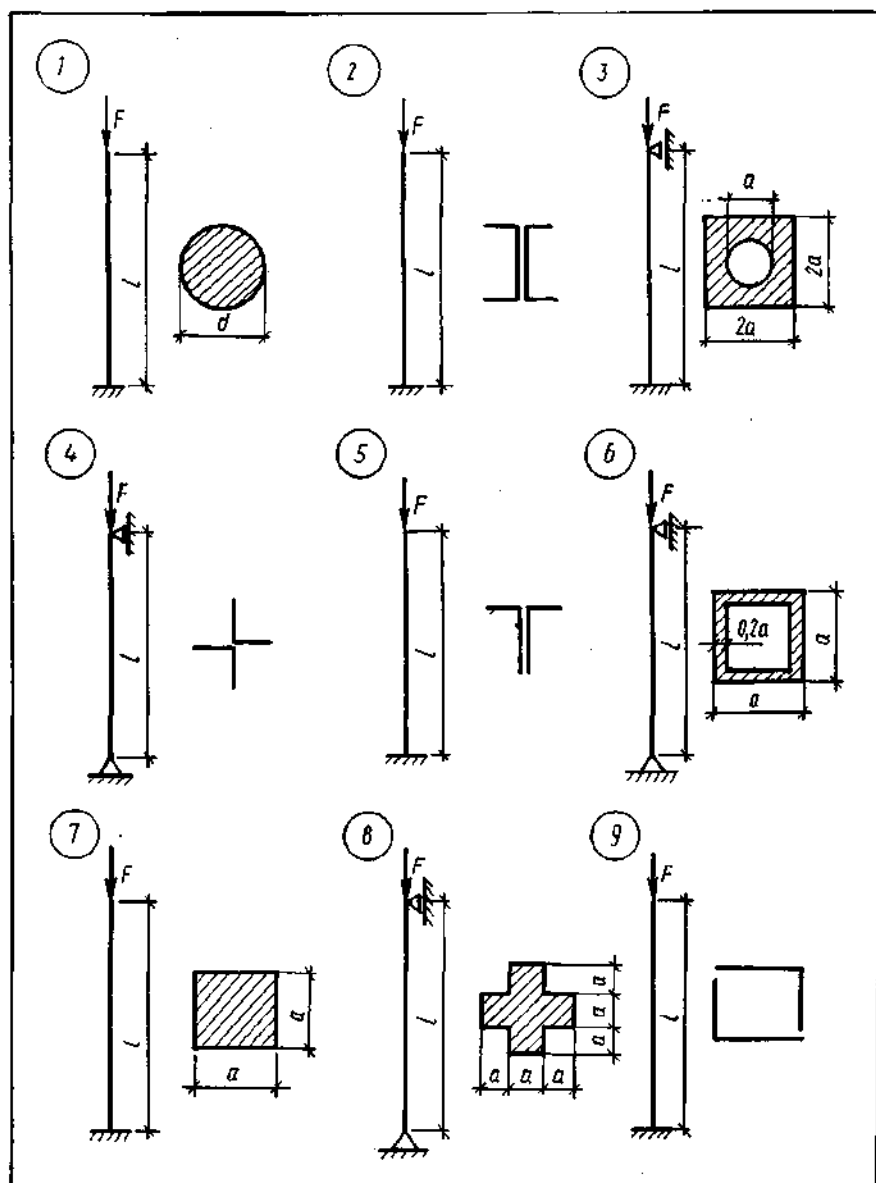
Требуется:

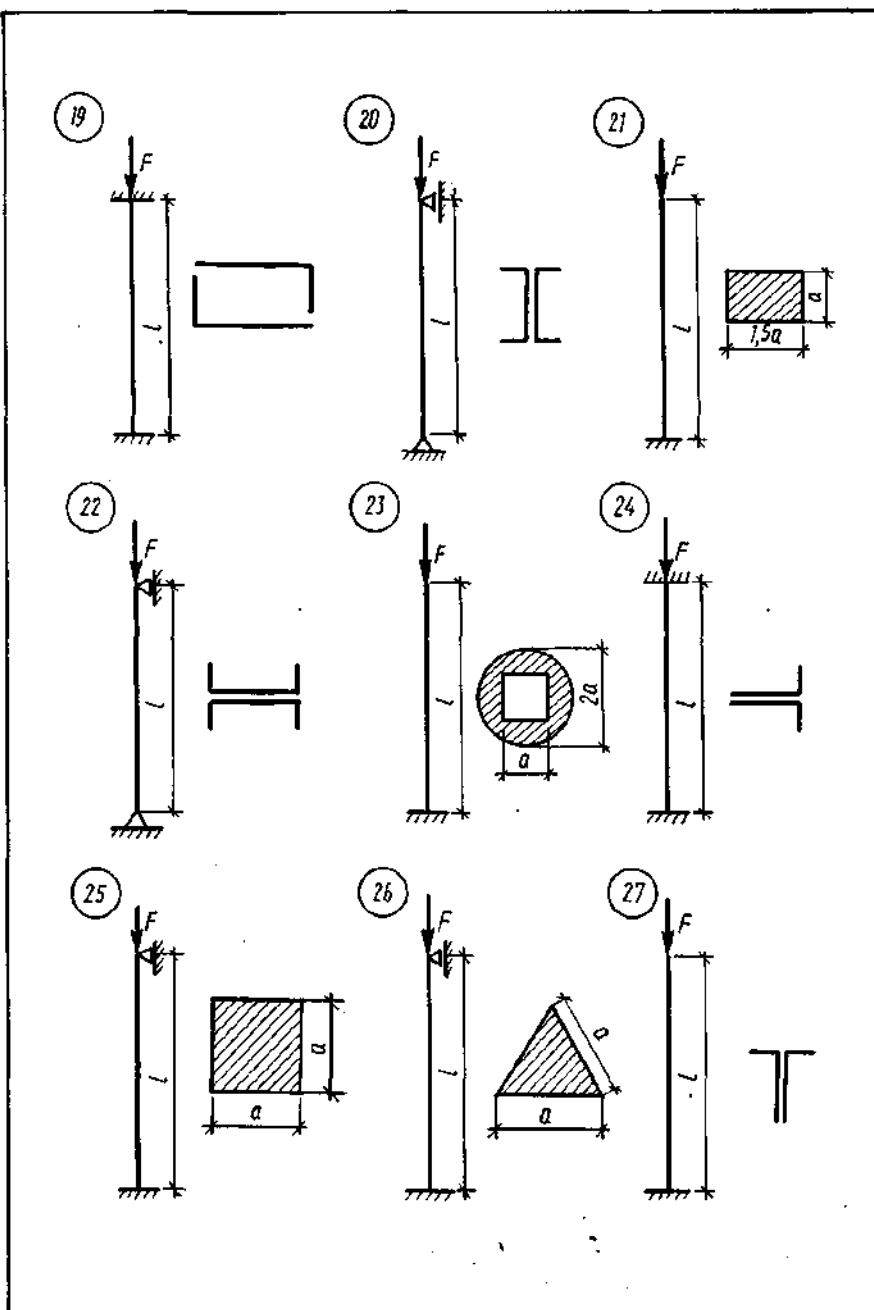
- 1) подобрать размеры поперечного сечения стойки из условия устойчивости, пользуясь таблицей коэффициентов продольного изгиба φ ;
- 2) определить критическую силу для заданного стержня и найти запас устойчивости как отношение критической силы к заданной¹.

Схемы для расчета приведены ниже, числовые данные — в табл. 10.1.

¹ Считать условия закрепления концев стержня во всех направлениях одинаковыми. В связи с этим учитывать возможность потери устойчивости в плоскости, где радиус инерции сечения наименьший.

СХЕМЫ К РАБОТЕ





Т а б л . 10.1. Числовые данные

Номер задания	F , кН	l , м	Номер задания	F , кН	l , м	Номер задания	F , кН	l , м
1	160	3,5	11	186	3,0	21	110	3,0
2	216	3,0	12	150	3,2	22	160	4,0
3	176	3,4	13	180	3,4	23	170	3,4
4	124	3,6	14	224	4,0	24	190	3,6
5	110	4,0	15	282	3,4	25	100	3,0
6	210	3,2	16	144	2,8	26	120	3,5
7	172	2,8	17	110	2,6	27	164	4,2
8	140	3,6	18	220	2,4	28	195	3,2
9	100	4,0	19	280	3,4	29	120	3,8
10	200	3,5	20	140	3,2	30	130	3,0

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Объясните процесс потери устойчивости сжатого стержня.
2. Что называется критической силой и критическим напряжением?
3. Как определяется критическая сила при расчете сжатых стержней?
4. Что представляет собой коэффициент приведенной длины и чему он равен при различных условиях закрепления концов сжатых стержней?
5. В каких случаях при расчете на устойчивость используется формула Эйлера? Что называется предельной гибкостью стержня?
6. Напишите условие устойчивости сжатого стержня.
7. Как подбираются размеры сечения стержня при расчете на устойчивость?
8. Что представляет собой коэффициент продольного изгиба, как определяется его значение и производится проверка стержней на устойчивость с его помощью?
9. Как определяется критическая сила по формуле Ф.С. Ясинского?
10. Какой вид имеет график зависимости критических напряжений от гибкости стального стержня?
11. Как рассчитываются составные стержни?

XI. ПРОЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ

РАБОТА 16. РАСЧЕТ НА УДАРНУЮ НАГРУЗКУ

Общие сведения

Инженерные конструкции нередко подвергаются действию динамической нагрузки, характеризующейся большой скоростью ее приложения, в результате чего возникают значительные ускорения, влияющие на напряженно-деформированное состояние конструкций. В расчетах влияние динамической нагрузки обычно учитывается с помощью динамического коэффициента, зависящего от вида динамической нагрузки, размеров конструкции, ее массы, жесткости сооружения и других факторов. При этом имеет место сложное взаимодействие нагрузки с сооружением, которое не представляется возможным выявить в полном объеме, поэтому часто используются различные вспомогательные гипотезы, значительно облегчающие расчет.

Ниже, в соответствии с профилем данной расчетно-проектировочной работы, рассматриваются только расчеты на удар, при которых принимаются следующие предположения:

1) деформации конструкций от воздействия ударяющего тела подчиняются закону Гука и подобны деформациям, возникающим при статическом приложении той же нагрузки, т.е. связь между динамическими силами и перемещениями аналогична связи между статическими силами и перемещениями;

2) ударяющее тело является абсолютно жестким и с момента соприкосновения с конструкцией остается связанным с ней во время всего дальнейшего ее перемещения;

3) масса конструкции считается малой по сравнению с массой ударяющего тела и не учитывается, сопротивлением перемещению пренебрегают;

4) работа, совершаемая падающим телом, полностью преобразуется в энергию деформации конструкции.

В зависимости от направления удара по отношению к оси стержня и характера возникающих деформаций удар может быть: продольным (растягивающим или сжимающим), поперечным (изгибающим) и крутящим.

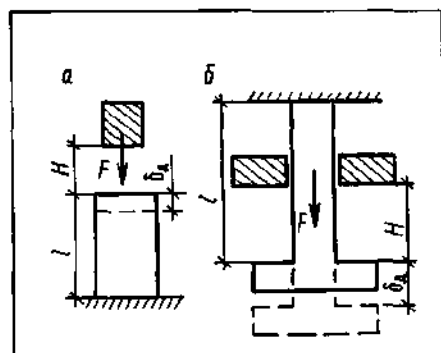


Рис. 11.1. Расчетная схема стержня при продольном ударе:
а — сжатие; б — растяжение

При продольном ударе принимается, что груз падает с высоты H , ударяется о стержень и вызывает в нем сжатие или растяжение (рис. 11.1). Влияние ударного действия нагрузки на напряжения или деформации стержня оценивается коэффициентом динамичности

$$k_d = \frac{\sigma_d}{\sigma_{ст}} \quad \text{или} \quad k_d = \frac{\delta_d}{\delta_{ст}}, \quad (11.1)$$

где $\sigma_{ст}$, $\delta_{ст}$ — напряжение и деформация упругого стержня при статическом приложении нагрузки; σ_d , δ_d — то же, при ударном приложении нагрузки.

Работа, совершаемая грузом при его падении с высоты H и при прохождении пути $H + \delta_d$, определяется по формуле

$$V = F(H + \delta_d), \quad (11.2)$$

где F — сила тяжести груза.

Энергия деформации стержня выражается зависимостью

$$U_d = \frac{1}{2} F_d \delta_d = \frac{c \delta_d^2}{2}, \quad (11.3)$$

где F_d — динамическая нагрузка, действующая на стержень; $c = EA/l$ — жесткость стержня.

Приравняв выражения (11.2) и (11.3), на основании закона сохранения энергии получим

$$\frac{c \delta_d^2}{2} = F(H + \delta_d). \quad (11.4)$$

Проведя соответствующие преобразования, выражение (11.4) можно представить в виде

$$\delta_d = \delta_{ст} k_d = \delta_{ст} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} \right), \quad (11.5)$$

где $\delta_{ст} = Fl/(EA)$ — удлинение или укорочение стержня, вызванное статической нагрузкой.

Скорость падения груза в момент удара определяется по формуле $v = \sqrt{2gH}$, откуда $H = v^2/(2g)$ (g — ускорение свободного падения).

Подставляя значение H в выражение (11.5), получим

$$\delta_d = \delta_{ст} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \delta_{ст}}} \right). \quad (11.6)$$

Если нагрузка к стержню приложена мгновенно, т.е. $H = v = 0$, то из выражений (11.5) и (11.6) коэффициент динамичности равен 2. Следовательно, напряжения и деформации в этом случае вдвое больше, чем при статическом нагружении, т.е. $\sigma_d = 2\sigma_{ст}$, $\delta_d = 2\delta_{ст}$.

При большой высоте падения груза $H \gg \delta_{ст}$ или большой скорости удара единицей под радикалом в выражениях (11.5) и (11.6) можно пренебречь, тогда

$$k_d = 1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст}}} \quad \text{или} \quad k_d = 1 + \sqrt{\frac{v^2}{g \delta_{ст}}}.$$

Если значения $2H/\delta_{ст} = v^2/(g \delta_{ст})$ очень велики, то можно пренебречь единицей и перед знаком радикала. В этом случае

$$k_d = \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст}}} \quad \text{или} \quad k_d = \sqrt{\frac{v^2}{g \delta_{ст}}}.$$

При значительной массе стержня по сравнению с массой ударяющего тела коэффициент динамичности

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст} (1 + kQ/Q_r)}}$$

где Q — масса стержня; Q_r — масса ударяющего тела; k — коэффициент приведения, равный 0,333 при растяжении материала.

При учете массы ударяемого тела динамический коэффициент уменьшается.

При поперечном ударе, например по балке (рис. 11.2), последняя изгибается под действием падающего груза. Динамический прогиб находится по формуле

$$\delta_d = \delta_{ст} k_d = \delta_{ст} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{ст}}} \right), \quad (11.7)$$

где $\delta_{ст}$ — стрела прогиба балки.

Следовательно, коэффициент динамичности выражается сходными формулами как при продольном, так и при поперечном ударе.

Если масса балки велика по сравнению с массой падающего груза, формула для динамического коэффициента записывается в виде

$$k_d = 1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст} [1 + 17Q/(35Q_r)]}} \quad (11.8)$$

При падении груза не на середину балки или на конец консоли формулы для динамического коэффициента таковы:

$$k_d = 1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_{ст} \left\{ 1 + \frac{1}{105} \cdot \left[1 + 2 \left[1 + \frac{l^2}{(ab)^2} \right] \right] Q/Q_r \right\}}}, \quad (11.9)$$

$$k_d = 1 + \sqrt{\frac{2H}{Fl^3/3EI \cdot [1 + 33Q/(140Q_r)]}}$$

где a, b — расстояния от силы F_d соответственно до левой и правой опор балки.

Ударное кручение наблюдается при внезапном снижении угловой скорости вала с маховиком в результате резкого торможения конца вала (рис. 11.3).

На основании закона сохранения энергии выводятся зависимости для динамического угла закручивания вала φ_d , динамического крутящего момента M_d и максимального динамического напряжения τ_d :

$$\varphi_d = \sqrt{\frac{I_m l}{GI_p} (\omega_0^2 - \omega)^2};$$

$$M_d = \frac{GI_p}{l} \varphi_d; \quad \tau_d = \frac{M_d}{W_p}. \quad (11.10)$$

где I_m — момент инерции массы маховика; I_p — полярный момент инерции сечения вала; ω_0, ω — угловые скорости вала до и после торможения; l — длина вала.

Методику расчета при ударном действии нагрузки продемонстрируем на примерах.

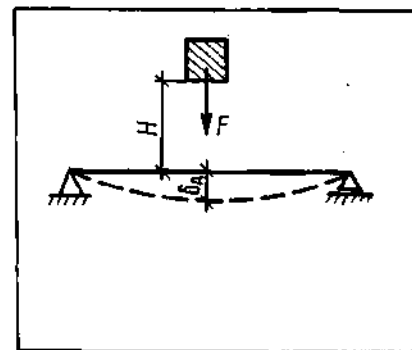


Рис. 11.2. Расчетная схема стержня при поперечном ударе

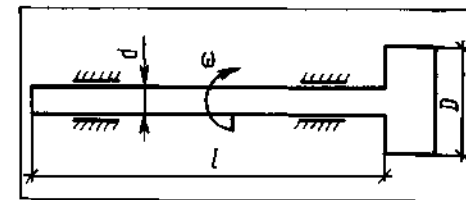


Рис. 11.3. Расчетная схема стержня при ударном кручении

Пример 11.1. Груз F падает на приваренную к стальному стержню жесткую пластинку (рис. 11.4). Площадь поперечного сечения стержня A , высота падения H . Требуется определить наибольшее динамическое напряжение в стержне и насколько оно изменится, если площадь сечения стержня увеличить до A_1 , а высоту падения груза принять равной нулю.

Дано: $F = 3 \text{ кН}$; $H = 3 \text{ см}$; $A = 6 \text{ см}^2$; $A_1 = 9 \text{ см}^2$; $l = 2 \text{ м}$.

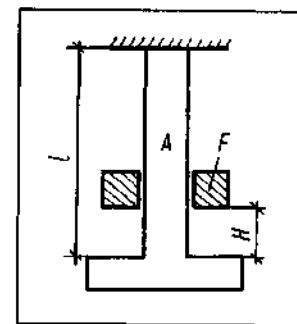


Рис. 11.4. Расчетная схема (пример 11.1)

Решение. Вычисляем статическое перемещение $\Delta l_{ст}$ стержня при статическом приложении силы F :

$$\Delta l_{ст} = \frac{Fl}{EA} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 6 \cdot 10^{-4}} = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,005 \text{ см}.$$

Находим значение динамического коэффициента

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta l_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{0,5 \cdot 10^{-4}}} = 35,65.$$

Напряжение в стержне при статическом действии силы

$$\sigma_{ст} = \frac{F}{A} = \frac{3 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 5 \text{ МПа}.$$

Максимальное напряжение в стержне при динамической нагрузке

$$\sigma_d = \sigma_{ст} k_d = 5 \cdot 10^6 \cdot 35,65 = 1,7825 \cdot 10^8 \text{ Па} = 178,25 \text{ МПа}.$$

Определяем наибольшее динамическое напряжение в стержне при увеличении его площади до 9 см^2 . С этой целью вычисляем статическое перемещение

$$\Delta l_{ст} = \frac{Fl}{EA} = \frac{3 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 9 \cdot 10^{-4}} = 0,33 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,0033 \text{ см}.$$

Находим динамический коэффициент

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{0,33 \cdot 10^{-4}}} = 43,65.$$

Напряжение в стержне при действии статической нагрузки

$$\sigma_{ст} = \frac{F}{A} = \frac{3 \cdot 10^3}{9 \cdot 10^{-4}} = 3,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 3,3 \text{ МПа}.$$

Максимальное напряжение в стержне при действии динамической нагрузки

$$\sigma_d = \sigma_{ст} k_d = 3,3 \cdot 10^6 \cdot 43,65 = 1,4405 \cdot 10^8 \text{ Па} = 144,05 \text{ МПа}.$$

Следовательно, при увеличении площади стержня с A до A_1 , т. е. на 50 %, динамическое напряжение снизилось только на

$$\frac{178,25 - 144,05}{178,25} \cdot 100 = 19,2 \, \%$$

Если сила приложена мгновенно ($H = 0$),

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{0,2}{\Delta l_{ст}}} = 1 + 1 = 2.$$

В этом случае динамическое напряжение в два раза больше, чем при статической нагрузке, т. е.

$$\sigma_d = \sigma_{ст} k_d = 2 \sigma_{ст}.$$

Пример 11.2. Груз падает с высоты H на конец консоли двутавровой балки № 20 (рис. 11.5). Проверить прочность материала балки, определить перемещение точки C от динамической нагрузки. Массу балки не учитывать.

Дано: $F = 1,2 \text{ кН}$; $H = 6 \text{ см}$; $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $R = 210 \text{ МПа}$; $l = 2 \text{ м}$; $a = 1 \text{ м}$.

Решение. Балка подвергается действию поперечного (изгибающего) удара. Перемещение точки C при действии статической силы F может быть вычислено, например, на основе способа Верещагина (см. работу 9) или как

$$\begin{aligned} v_{ст} &= \frac{F a^2}{3 E I_x} (l + a) = \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} (2 + 1) = \\ &= 3,26 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,0326 \text{ см}, \end{aligned}$$

где $I_x = 1840 \text{ см}^4$ принят по ГОСТу для двутавра № 20.

Динамический коэффициент

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{v_{ст}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10^{-2}}{0,0326 \cdot 10^{-2}}} = 20,21.$$

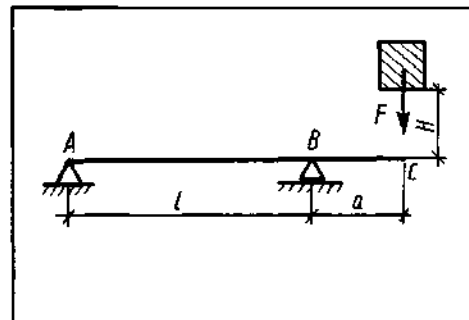


Рис. 11.5. Расчетная схема балки (пример 11.2)

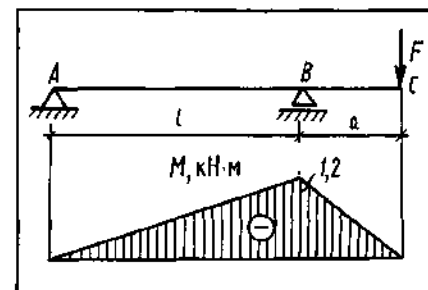


Рис. 11.6. Эпюра моментов (пример 11.2)

Вычисляем наибольшее напряжение от статической силы F . С этой целью строим эпюру изгибающих моментов (рис. 11.6). Согласно этой эпюре, наибольший момент действует на опоре B . Следовательно, наибольшее напряжение в сечении B при статической нагрузке

$$\sigma_{ст} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{1,2 \cdot 10^3}{184 \cdot 10^{-6}} = 6,52 \cdot 10^6 \text{ Па} = 6,52 \text{ МПа},$$

где $W_x = 184 \text{ см}^3$ принимается согласно ГОСТу для двутавра № 20.

Наибольшее напряжение в сечении B при динамической нагрузке

$$\sigma_d = \sigma_{ст} k_d = 6,52 \cdot 20,21 = 131,8 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Следовательно, прочность материала балки обеспечена.

Из этого примера можно сделать вывод о том, насколько опасными являются динамические нагрузки по сравнению со статическими.

Прогиб балки в точке C

$$v_d = v_{ст} k_d = 0,0326 \cdot 20,21 = 0,659 \text{ см}.$$

Таким образом, при динамическом действии нагрузки прогиб балки в точке C увеличивается в 20,21 раза.

Исходные данные к работе

На упругую систему падает груз с высоты H . Материал стержня — сталь. Расчетное сопротивление ее при статической нагрузке $R = 210$ МПа.

Требуется:

- 1) определить значения максимальных динамических напряжений в элементах системы;
 - 2) определить динамическое перемещение точки приложения груза.
- Схемы для расчета приведены ниже, числовые данные — в табл. 11.1.

СХЕМЫ К РАБОТЕ

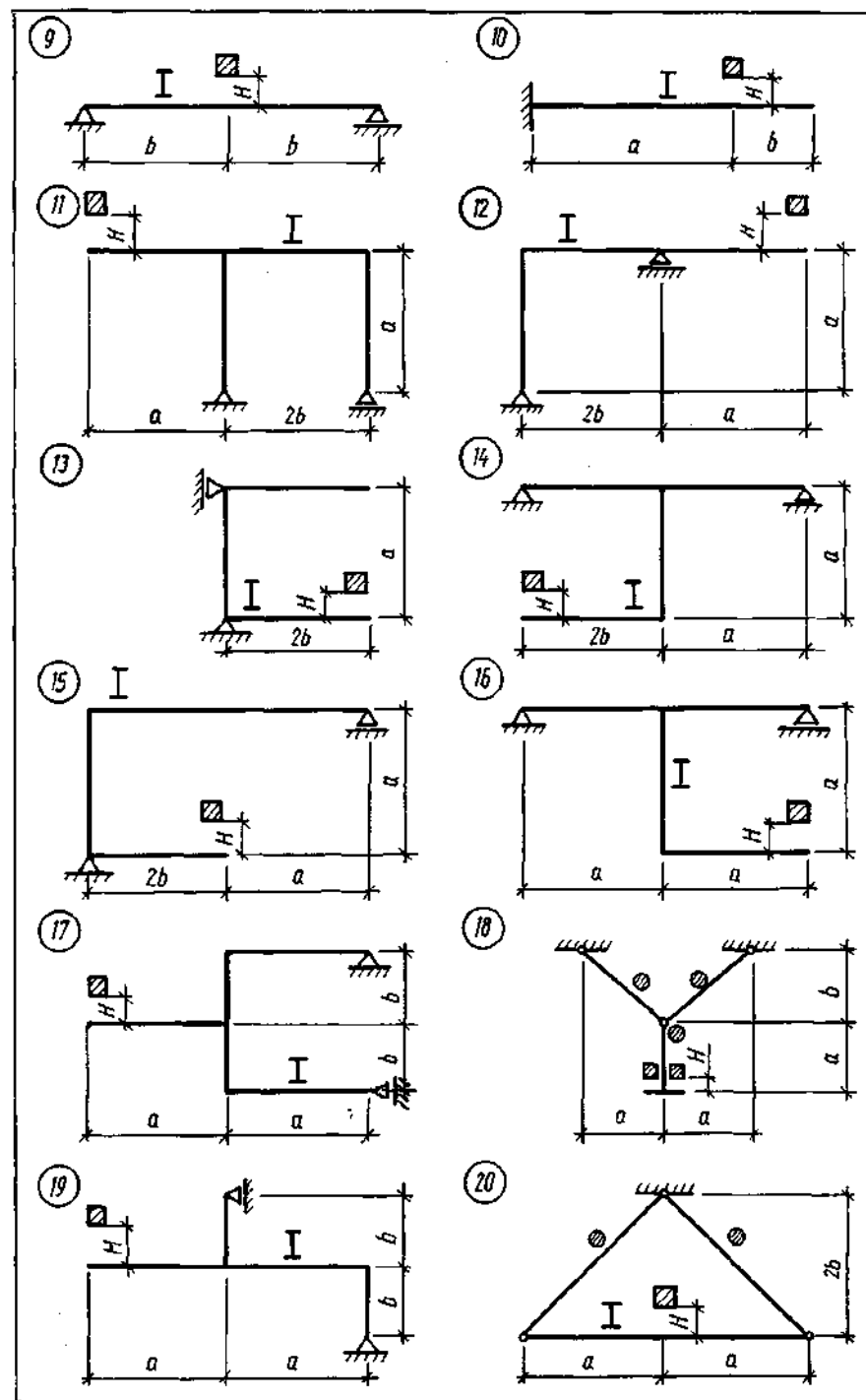
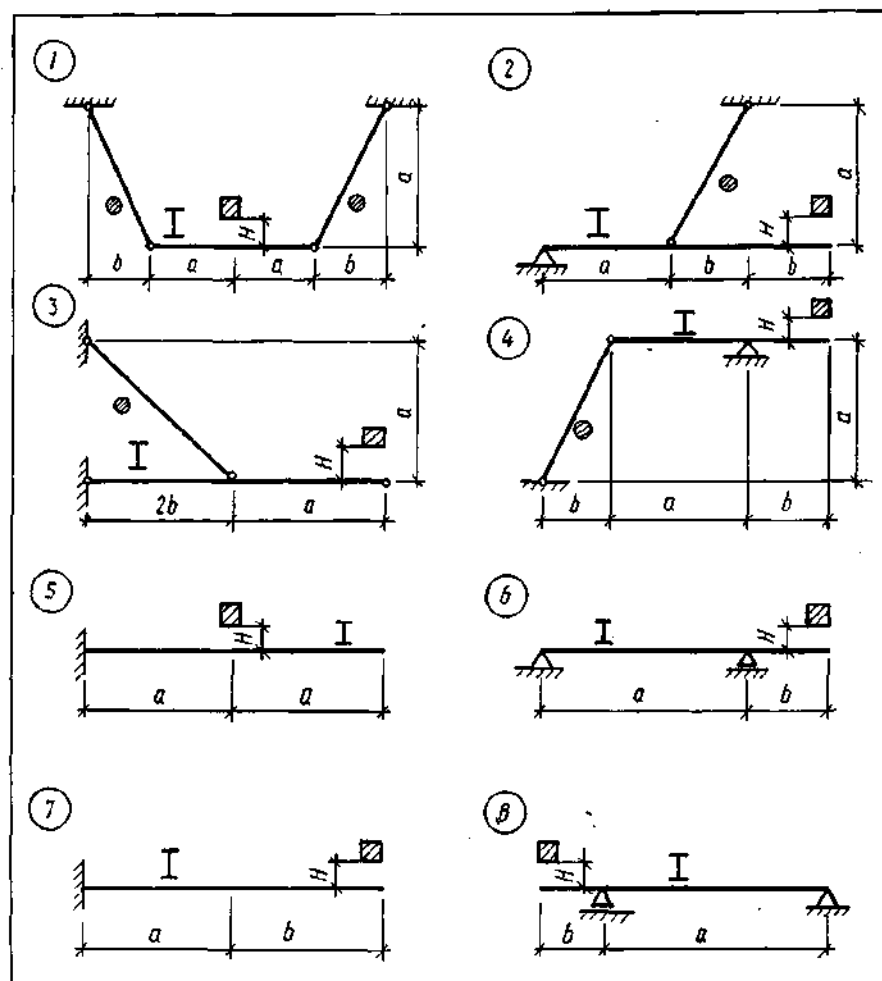


Табл. 11.1. Числовые данные

Номер задания	F, Н	H, см	a, м	b, м	Номер двутавра	d, см
1	500	6	4,0	1,2	27	1,4
2	450	4	3,8	1,0	24а	1,6
3	600	7	3,4	1,4	24	1,8
4	650	6,2	3,2	1,6	22а	2,0
5	700	5	3,4	1,8	22	2,2
6	740	6	2,6	1,2	20а	2,4
7	600	4	3,4	3,0	20	2,6
8	400	4,6	3,2	2,6	18а	2,8
9	460	4,2	3,0	2,2	18	3,0
10	700	5,2	2,6	2,4	16	3,2
11	640	6,4	2,6	2,0	18	3,4
12	660	6,2	2,4	1,8	18а	3,6
13	680	6,8	3,0	1,6	20	3,8
14	620	7	4,0	1,4	20а	4,0
15	700	4	3,8	1,2	22	1,2
16	720	5	3,6	1,0	22а	1,4
17	740	4,6	3,4	1,0	24	1,6
18	560	4,4	3,2	1,2	24а	1,8
19	580	4,8	3,0	1,4	27	2,0
20	540	5	1,8	2,2	16	2,2
21	560	6	2,0	2,0	18	2,4
22	600	6,2	1,6	2,4	18а	2,6
23	620	6,4	2,6	2,2	20	2,8
24	640	4	2,8	2,0	20а	3,0
25	680	4,6	3,0	1,8	22	3,2
26	660	4,8	2,0	1,4	22а	3,4
27	700	5	2,4	1,2	24	3,6
28	720	4	2,8	1,0	24а	2,4
29	740	4,2	3,0	1,6	27	2,8
30	500	6	3,2	1,4	16	3,0

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие нагрузки называются статическими, какие — динамическими?
2. Какое явление называется ударом и результатом чего оно является?
3. Какие предпосылки лежат в основе теории удара, рассматриваемой в курсе сопротивления материалов?
4. Какой удар называется продольным, поперечным, крутящим?
5. Что такое динамический коэффициент при ударе?
6. Какой закон положен в основу вывода формулы для динамического коэффициента в случае, когда массой системы, подвергающейся удару, можно пренебречь?
7. Как записывается выражение для определения динамического коэффициента с учетом массы системы?
8. Как определяются напряжения и перемещения конструкций при ударе?
9. От каких факторов зависят напряжения в конструкции?
10. Применение каких конструктивных мероприятий позволит уменьшить напряжения при ударном действии нагрузки?
11. Как рассчитываются конструкции при ударном кручении?

ПРИЛОЖЕНИЕ

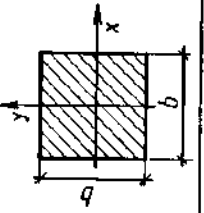
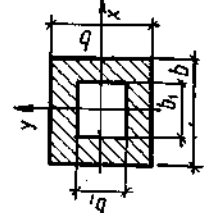
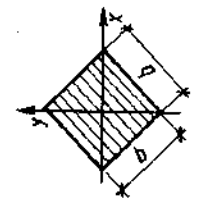
Табл. 1. Основные характеристики материалов

Материал	Модуль		Коэффициент Пуассона ν	Температурный коэффициент $\alpha \cdot 10^6, 1/^\circ\text{C}$	Плотность $\rho, \text{кг/м}^3$
	нормальной упругости $E, \text{ГПа}$ (МПа)	сдвига $G \cdot 10^{-5}, \text{МПа}$			
Сталь	200 ($2 \cdot 10^5$)	0,8	0,30	12	7850
Чугун	100 ($1 \cdot 10^5$)	0,4	0,25	10	7200
Алюминий и дюраль	70 ($0,7 \cdot 10^5$)	0,3	0,30	23	2700
Медь	100 ($1 \cdot 10^5$)	0,4	0,32	16	6500
Дерево (сосна)	10 ($0,1 \cdot 10^5$)	—	—	—	550

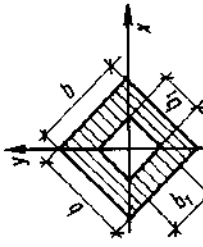
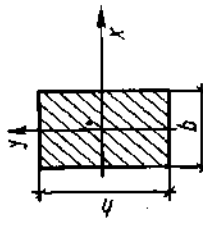
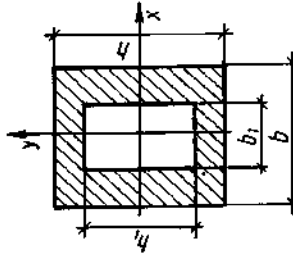
Табл. 2. Соотношения между единицами физических величин

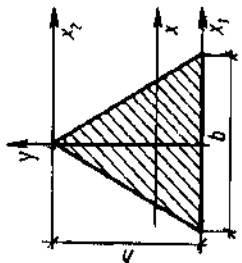
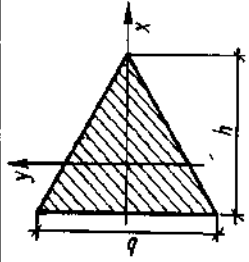
Наименование величины	Единица		Соотношение единиц
	наименование	обозначение	
Сила, нагрузка, вес	ньютон	Н	1 Н = 0,1 кгс/см ²
Линейная нагрузка	ньютон на метр	Н/м	1 Н/м = 0,1 кгс/м
Поверхностная нагрузка, механическое напряжение, модуль упругости	паскаль	Па	1 Па = 0,1 кгс/м ²
	(ньютон на квадратный метр)		1 кПа = 0,1 тс/м ²
			1 МПа = 10 кгс/см ²
Момент силы	ньютон-метр	Н·м	1 Н·м = 0,1 кгс·м
			1 кН·м = 0,1 тс·м
Работа (энергия)	джоуль	Дж	1 Дж = 0,1 кгс·м
Мощность	ватт (джоуль в секунду)	Вт	1 Вт = 0,1 кгс·м/с

Т а б л. 3. Площади, координаты центров тяжести, осевые моменты инерции, моменты сопротивления и радиусы инерции некоторых плоских фигур

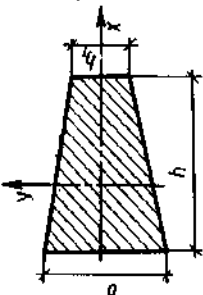
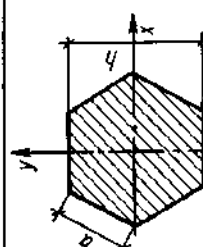
Форма поперечного сечения	Площадь сечения	Осевой момент инерции	Момент сопротивления	Радиус инерции
1	2	3	4	5
	b^2	$I_x = I_y = \frac{b^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^3}{6}$	$i_x = i_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$
	$b^2 - b_1^2$	$I_x = I_y = \frac{b^4 - b_1^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^4 - b_1^4}{6b}$	$i_x = i_y = 0,289\sqrt{b^2 + b_1^2}$
	b^2	$I_x = I_y = \frac{b^4}{12}$	$W_x = W_y = 0,118b^3$	$i_x = i_y = 0,289b$

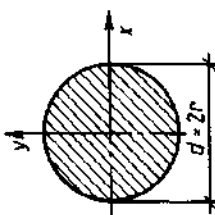
Продолжение табл. 3

1	2	3	4	5
	$b^2 - b_1^2$	$I_x = I_y = \frac{b^4 - b_1^4}{12}$	$W_x = W_y = \frac{b^4 - b_1^4}{6\sqrt{2} \cdot b}$	$i_x = i_y = 0,289\sqrt{b^2 + b_1^2}$
	bh	$I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_y = \frac{b^3h}{12}$	$W_x = \frac{bh^2}{6}$ $W_y = \frac{b^2h}{6}$	$i_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$ $i_y = \frac{b}{\sqrt{12}}$
	$bh - b_1h_1$	$I_x = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12}$ $I_y = \frac{b^3h - b_1^3h_1}{12}$	$W_x = \frac{bh^3 - b_1h_1^3}{6h}$ $W_y = \frac{b^3h - b_1^3h_1}{6b}$	$i_x = \sqrt{\frac{bh^3 - b_1h_1^3}{12(bh - b_1h_1)}}$ $i_y = \sqrt{\frac{b^3h - b_1^3h_1}{12(bh - b_1h_1)}}$

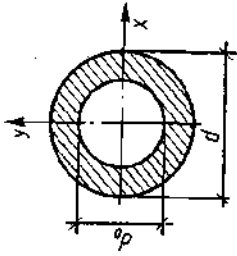
1	2	3	4	5
	$\frac{1}{2} b h$	$I_x = \frac{b h^3}{36}; I_{x1} = \frac{b h^3}{12}$	При вычислении напряжений в вершине треугольника $W_x = \frac{b h^2}{24}$ При вычислении напряжений в точке основания $W_x = \frac{b h^2}{12}$	$i_x = 0,236 h$
	$\frac{1}{2} b h$	$I_x = \frac{b h^3}{48}$	$W_x = \frac{b h^2}{24}$	$i_x = 0,204 b$

	$\frac{b+b_1}{2} h$	$I_x = \frac{h^3 (b^2 + 4bb_1 + b_1^2)}{36 (b + b_1)}$	При вычислении напряжений в точках верхнего основания $W_x = \frac{h^2 (b^2 + 4bb_1 + b_1^2)}{12 (b + b_1)}$ При вычислении напряжений в точках нижнего основания $W_x = \frac{h^2 (b^2 + 4bb_1 + b_1^2)}{12 (b + 2b_1)}$	$i_x = \frac{h}{6(b+b_1)} \times \sqrt{2(b^2+4bb_1+b_1^2)}$
--	---------------------	--	--	---

1	2	3	4	5
	$\frac{b+b_1}{2} \cdot h$	$I_x = \frac{h}{48} \frac{b^4 - b_1^4}{b - b_1}$	$W_x = \frac{h}{24} \frac{b^4 - b_1^4}{b^2 - bb_1}$	$i_x = \sqrt{\frac{b^2 + b_1^2}{24}}$
	$2,598 a^2$	$I_x = I_y = 0,541 a^4$	$W_x = 0,625 a^3$ $W_y = 0,541 a^3$	$i_x = i_y = 0,4565 a$

	$\frac{\pi d^2}{4}$	$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}$ $= \frac{\pi r^4}{4}$	$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32}$ $= \frac{\pi r^3}{4}$	$i_x = i_y = \frac{d}{4} = \frac{r}{2}$
---	---------------------	---	---	---

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---



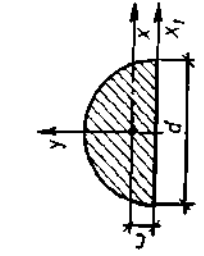
$$\frac{\pi(d-d_0)}{4}$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4) \quad W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} (1 - c^4)$$

$$i_x = i_y = \frac{1}{4} \sqrt{d^2 + d_0^2}$$

$$C = \frac{d_0}{d}$$

$$c = d_0/d$$



$$\frac{\pi d^2}{8}$$

$$I_x = 0,00686 d^4$$

$$I_y = \frac{\pi d^4}{128}$$

Для нижних волокон

$$W_x = 0,0324 d^3$$

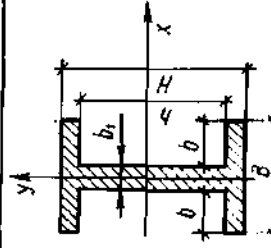
Для верхних волокон

$$W_x = 0,0239 d^3$$

$$W_y = \frac{\pi d^3}{64}$$

$$i_x = 0,132 d$$

$$i_y = \frac{d}{4}$$



$$I_x = \frac{2bh_1^3 - 2bh^3}{12}$$

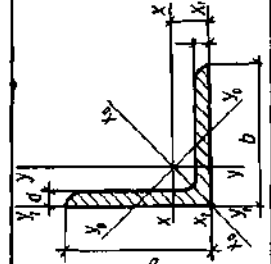
$$W_x = \frac{bh_1^3 - 2bh^3}{6h_1}$$

$$W_y = \frac{hb^3 + 2h_1b^3}{6h_1}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

Табл. 4. Сталь прокатная угловая равнополочная (по ГОСТ 8509-72)



Обозначения:

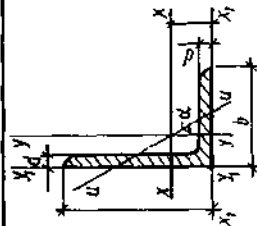
- b — ширина полки;
- d — толщина полки;
- I — момент инерции;
- i — радиус инерции;
- z_0 — расстояние от центра тяжести до наружной грани полки

Номер профиля	Размеры, мм b d	Площадь сечения A , см ²	I_x , см ⁴	I_y , см ⁴	I_{x_0} , см ⁴	I_{y_0} , см ⁴	$I_{x_0 \max}$, см ⁴	$I_{y_0 \min}$, см ⁴	$I_{x_0 \min}$, см ⁴	$I_{y_0 \max}$, см ⁴	z_0 , см	Масса 1 м, кг
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	50	3	2,96	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1	12,4	1,33	2,32
		4	3,89	9,21	1,54	14,6	1,94	3,8	0,99	16,6	1,38	3,05
		5	4,8	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42	3,77
5,6	56	4	4,38	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52	3,44
		5	5,41	16	1,72	25,4	2,16	6,59	1,1	29,2	1,57	4,25
6,3	63	4	4,96	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69	3,9
		5	6,13	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74	4,81
		6	7,28	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50	1,78	5,72
		4,5	6,2	29	2,16	46	2,72	12	1,39	51	1,86	4,87
		5	6,86	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,9	5,38
7	70	6	8,15	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94	6,39
		7	9,42	43	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99	7,39
		8	10,7	48,2	2,13	76,4	2,68	20	1,37	91,9	2,02	8,37
		5	7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,8
		6	8,78	46,6	2,3	73,9	2,9	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
7,5	75	7	10,1	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,1	7,96
		8	11,5	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113	2,15	9,02
		9	12,8	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18	10,1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
8	80	5,5	8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9,38	57	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102	2,19	7,36
		7	10,8	65,3	2,45	104	3,09	27	1,58	119	2,23	8,51
		8	12,3	73,4	2,44	116	3,08	30,3	1,57	137	2,27	9,65
9	90	6	10,6	82,1	2,78	130	3,5	34	1,79	145	2,43	8,33
		7	12,3	94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47	9,64
		8	13,9	106	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51	10,9
		9	15,6	118	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55	12,2
10	100	6,5	12,8	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68	10,1
		7	13,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71	10,8
		8	15,6	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75	12,2
		10	19,2	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83	15,1
11	110	12	22,8	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91	17,9
		14	26,3	237	3	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99	20,6
		16	29,7	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06	23,3
		7	15,2	176	3,4	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96	11,9
12,5	125	8	17,2	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3	13,5
		8	19,7	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36	15,5
		9	22	327	3,85	520	4,86	135	2,48	582	3,4	17,3
		10	24,3	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45	19,1
14	140	12	28,9	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53	22,7
		14	33,4	482	3,8	764	4,78	200	2,45	916	3,61	26,2
		16	37,8	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68	29,6
		9	24,7	466	4,34	739	5,47	192	2,79	888	3,78	19,4
14	140	10	27,3	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82	21,5
		12	32,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,9	25,5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
16	160	10	31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,3	24,7
		11	34,4	844	4,95	1341	6,24	346	3,18	1494	4,35	27
		12	37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
		14	43,3	1046	4,92	1662	6,2	431	3,16	1911	4,47	34
20	200	16	49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	4,14	2191	4,55	38,5
		18	54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43
		20	60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,7	47,4
		11	38,8	1216	5,6	1933	7,05	500	3,59	2128	4,85	30,5
22	220	12	42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1
		12	47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,98	3182	5,37	37
		13	50,9	1981	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14	54,6	2097	6,2	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
26	260	16	62	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20	76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,7	60,1
		25	94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74
		30	111,5	4020	6	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
22	220	14	60,4	2814	6,83	4470	8,6	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16	68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
		16	78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18	87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
26	260	20	97	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
		22	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7	83,3
		25	119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94
		28	133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
206		30	142	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31	111,4

Т а б л. 5. Сталь прокатная угловая неравнополочная (по ГОСТ 8510—72)



Обозначения:

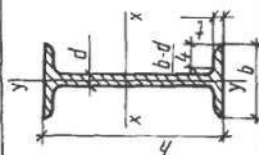
- B — ширина большей полки;
 b — ширина меньшей полки;
 d — толщина полки;
 I — момент инерции;
 I_0 — радиус инерции;
 x_0, y_0 — расстояние от центра тяжести до наружных граней полки

Номер про- филя	Размеры, мм			Площадь сечения		Угол на- клона осей										Масса	
	B	b	d	A, см ²	I _x см ⁴	I _x см ⁴	I _y см ⁴	I _y см ⁴	i _x см	i _y см	i _{min} см	α, град	I _{x1} см ⁴	I _{y1} см ⁴	x ₀ см	y ₀ см	Масса т, кг
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
5,6/3,6	56	36	4	3,58	11,4	1,78	3,7	1,02	2,19	0,78	0,406	23,2	6,25	0,84	1,82	2,81	
			5	4,41	13,8	1,77	4,48	1,01	2,66	0,78	0,404	29,2	7,91	0,88	1,86	3,46	
6,3/4	63	40	4	4,04	16,3	2,01	5,16	1,13	3,07	0,87	0,397	33	8,51	0,91	2,03	3,17	
			5	4,98	19,9	2	6,26	1,12	3,72	0,86	0,396	41,4	10,8	0,95	2,08	3,91	
			6	5,9	23,3	1,99	7,28	1,11	4,36	0,86	0,393	49,9	13,1	0,99	2,12	4,63	
			8	7,68	29,6	1,96	9,15	1,09	5,58	0,85	0,386	66,9	17,9	1,07	2,20	6,03	
7/4,5	70	45	5	5,59	27,8	2,23	9,05	1,27	5,34	0,98	0,406	56,7	15,2	1,05	2,28	4,39	
			5	6,11	34,8	2,39	12,5	1,43	7,24	1,09	0,436	69,7	20,8	1,17	2,39	4,79	
7,5/5	75	50	6	7,25	40,9	2,38	14,6	1,42	8,48	1,08	0,435	83,9	25,2	1,21	2,44	5,69	
			8	9,47	52,4	2,35	18,5	1,4	10,9	1,07	0,43	112	34,2	1,29	2,52	7,43	
8/5	80	50	5	6,36	41,6	2,56	12,7	1,41	7,58	1,09	0,387	84,6	20,8	1,13	2,6	4,99	
			6	7,55	49	2,55	14,8	1,4	8,88	1,08	0,386	102	25,2	1,17	2,65	5,92	
9/5,6	90	56	5,5	7,86	65,3	2,88	19,7	1,58	11,8	1,22	0,384	132	32,2	1,26	2,92	6,17	
			6	8,54	70,6	2,88	21,2	1,58	12,7	1,22	0,384	145	36,2	1,28	2,95	6,7	
			8	11,18	90,9	2,85	27,1	1,56	16,3	1,21	0,38	194	47,8	1,36	3,04	8,77	

Окончание табл. 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	
10/6,3	100	63	6	9,59	98,3	3,2	30,6	1,79	18,2	1,38	0,393	198	49,9	1,42	3,23	7,53	
			7	11,1	113	3,19	35	1,78	20,8	1,37	0,392	232	58,7	1,46	3,28	8,7	
			8	12,6	127	3,18	39,2	1,77	23,4	1,36	0,391	266	67,6	1,5	3,32	9,87	
			10	15,5	154	3,15	47,1	1,75	28,3	1,35	0,387	333	85,8	1,58	3,4	12,1	
11/7	110	70	6,5	11,4	142	3,53	45,6	2	26,9	1,63	0,402	286	74,3	1,58	3,55	8,98	
			8	13,9	172	3,51	54,6	1,98	32,3	1,52	0,4	353	92,3	1,64	3,61	10,9	
12/5/8	125	80	7	14,1	227	4,01	73,7	2,29	43,4	1,76	0,407	452	119	1,8	4,01	11	
			8	16	256	4	83	2,28	48,8	1,75	0,406	518	137	1,84	4,05	12,5	
			10	19,7	312	3,98	100	2,26	59,3	1,74	0,404	649	173	1,92	4,14	15,5	
			12	23,4	365	3,95	117	2,24	69,5	1,72	0,4	781	210	2	4,22	18,3	
14/9	140	90	8	18	364	4,49	120	2,58	70,3	1,98	0,411	727	194	2,03	4,49	14,1	
			10	22,2	444	4,47	146	2,56	86,5	1,96	0,409	911	246	2,12	4,58	17,5	
			9	22,9	606	5,15	186	2,85	110	2,2	0,391	1212	300	2,23	5,19	18	
			10	25,3	667	5,13	204	2,84	121	2,19	0,39	1359	335	2,28	5,23	19,8	
16/10	160	100	12	30	784	5,11	239	2,82	142	2,18	0,388	1634	405	2,36	5,32	23,6	
			14	34,7	897	5,08	272	2,8	162	2,16	0,385	1910	477	2,43	5,4	27,3	
18/11	180	110	10	28,3	952	5,8	276	3,12	165	2,42	0,375	1933	444	2,44	5,88	22,2	
			12	33,7	1123	5,77	324	3,1	194	2,4	0,374	2324	537	2,52	5,97	26,4	
			11	34,9	1449	6,45	446	3,58	264	2,75	0,392	2920	718	2,79	6,5	27,4	
20/12,5	200	125	12	37,9	1568	6,43	482	3,57	285	2,74	0,392	3189	786	2,83	6,54	29,7	
			14	43,9	1801	6,41	551	3,54	327	2,73	0,39	3726	922	2,91	6,62	34,4	
			16	49,8	2026	6,38	617	3,52	367	2,72	0,388	4264	1061	2,99	6,71	39,1	
26/16	250	160	12	48,3	3147	8,07	1032	4,62	604	3,54	0,41	6212	1634	3,53	7,97	37,9	
			16	62,6	4091	8,02	1333	4,58	781	3,5	0,408	8308	2200	3,69	8,14	49,9	
			18	71,7	4545	7,99	1475	4,56	866	3,49	0,407	9358	2487	3,77	8,23	55,8	
			20	78,5	4987	7,97	1613	4,53	949	3,48	0,405	10410	2776	3,85	8,31	61,7	

Т а б л. 6. Сталь горячекатаная. Балки двутавровые (по ГОСТ 8239-72)

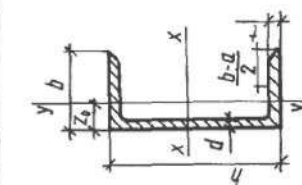


Обозначения:

h — высота балки; I — момент инерции;
 b — ширина полки; W — момент сопротивления;
 d — толщина стенки; i — радиус инерции;
 t — средняя толщина S — статистический момент полу-
 полки; сечения

Номер профи- ля	Размеры, мм			Площадь сечения $A, \text{см}^2$	I_{x^4} см ⁴	W_{x^3} см ³	i_{x^2} см	S_{x^3} см ³	I_{y^4} см ⁴	W_{y^3} см ³	i_{y^2} см	Масса 1 м, кг
	h	b	d									
10	100	55	4,5	12	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22	9,46
12	120	64	4,8	14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38	11,5
14	140	73	4,9	17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55	13,7
16	160	81	5	20,2	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70	15,9
18	180	90	5,1	23,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88	18,4
18a	180	100	5,1	25,4	1430	159	7,51	89,8	114	22,8	2,12	19,9
20	200	100	5,2	26,8	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07	21
20a	200	110	5,2	28,9	2030	203	8,37	114	155	28,2	2,32	22,7
22	220	110	5,4	30,6	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27	24
22a	220	120	5,4	32,8	2790	254	9,22	143	206	34,3	2,5	25,8
24	240	115	5,6	34,8	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37	27,3
24a	240	125	5,6	37,5	3800	317	10,1	178	260	41,6	2,63	29,4
27	270	125	6	40,2	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54	31,5
27a	270	135	6	43,2	5500	407	11,3	229	337	50	2,8	33,9
30	300	135	6,5	46,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69	36,5
30a	300	145	6,5	49,9	7780	518	12,5	292	436	60,1	2,95	39,2
33	330	140	7	53,8	9840	597	13,5	338	419	59,9	2,79	42,2
36	360	145	7,5	61,9	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89	48,6
40	400	155	8,3	71,6	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03	57
45	450	160	9	84,7	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09	66,5
50	500	170	10	100	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23	78,5
55	550	180	11	118	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39	92,6
60	600	190	12	138	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54	108

Т а б л. 7. Сталь горячекатаная. Швеллеры (по ГОСТ 8240-72)



Обозначения:

h — высота швеллера; W — момент сопротив-
 ления
 b — ширина полки; i — радиус инерции;
 d — толщина стенки; S — статистический мо-
 мент полусечения;
 t — средняя толщина z_0 — расстояние от оси
 полки; до наружной гра-
 ни стенки
 I — момент инерции;

Номер профиля	Размеры, мм				Площадь сечения $A, \text{см}^2$	I_{x^4} см ⁴	W_{x^3} см ³	$i_{x'}$ см	S_{x^3} см ³	I_{y^4} см ⁴	W_{y^3} см ³	$i_{y'}$ см	$z_0, \text{см}$	Масса 1 м, кг
	h	b	d	t										
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	50	32	4,4	7	6,16	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16	4,84
6,5	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24	5,9
8	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31	7,05
10	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44	8,59
12	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54	10,4
14	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67	12,3
14a	140	62	4,9	8,7	17	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87	13,3
16	160	64	5	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,6	13,8	1,87	1,8	14,2
16a	160	68	5	9	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2	15,3
18	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94	16,3
18a	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13	17,4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
20	200	76	5,2	9	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07	18,4
20a	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28	19,8
22	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21	21
22a	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,99	121	187	30	2,55	2,46	22,6
24	240	90	5,6	10	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42	24
24a	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67	25,8
27	270	95	6	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47	27,7
30	300	100	6,5	11	40,5	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52	31,8
33	330	105	7	11,7	46,5	7990	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59	36,5
36	360	110	7,6	12,6	53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68	41,9
40	400	115	8	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75	48,3

Табл. 8. Площади и координаты центра тяжести некоторых элементарных фигур

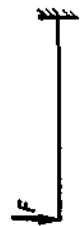
Нагрузка	Эпора M	Площадь ω	Расстояние центра тяжести	
			z_c	$l - z_c$
1	2	3	4	5



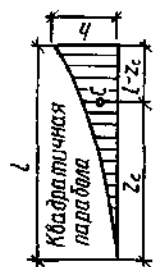
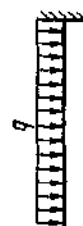
$$\frac{l}{2} \quad \frac{1}{2} l$$

Продолжение табл. 8

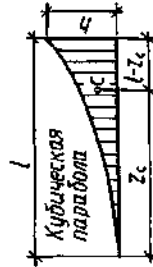
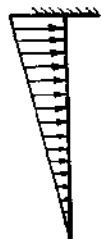
1	2	3	4	5
---	---	---	---	---



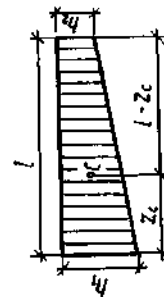
$$\frac{bh}{2} \quad \frac{2}{3} l \quad \frac{1}{3} l$$



$$\frac{bh}{3} \quad \frac{3}{4} l \quad \frac{1}{4} l$$



$$\frac{bh}{4} \quad \frac{4}{5} l \quad \frac{1}{5} l$$



$$\frac{(b_1 + b_2)l}{2} \quad \frac{(b_1 + 2b_2)l}{3(b_1 + b_2)} \quad \frac{(b_2 + 2b_1)l}{3(b_1 + b_2)}$$

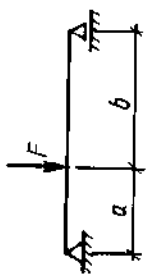
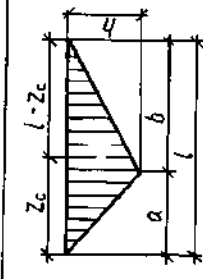
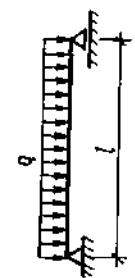
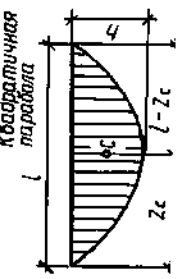
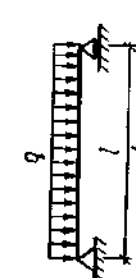
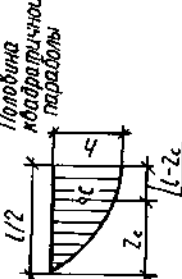
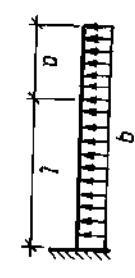
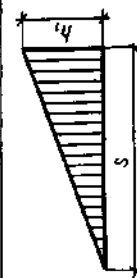
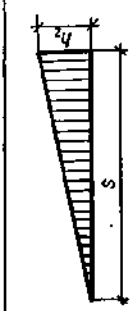
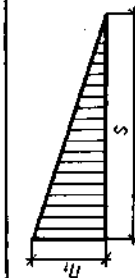
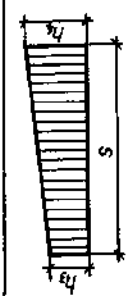
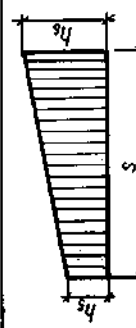
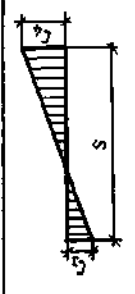
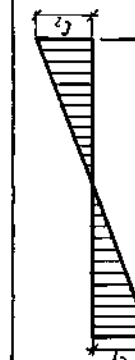
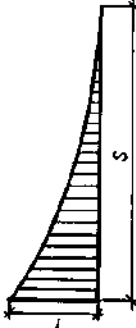
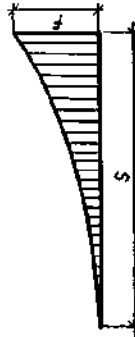
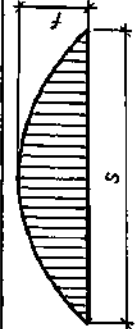
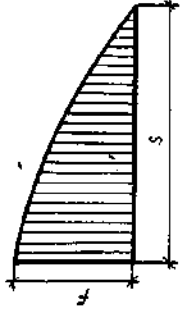
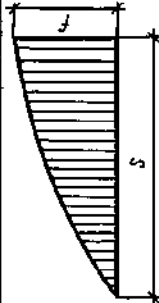
1	2	3	4	5
		$\frac{qh}{2}$	$\frac{a+l}{3}$	$\frac{b+l}{3}$
		$\frac{2qh}{3}$	$\frac{1}{2}l$	$\frac{1}{2}l$
		$\frac{qh}{3}$	$\frac{5}{16}l$	$\frac{3}{16}l$
		$\frac{ql}{6} \left[l^2 + 3a(l+l) \right] + \frac{1}{4} \frac{6a^2l + 8al^2 + 3l^3}{4} - \frac{1}{4} \frac{6a^2l + 4al^2 + l^3}{4} - \frac{3a^2l + 3al^2 + l^3}{4}$		

Табл. 9. Формулы для подсчета интеграла Мора $\int M'_k ds$ (s — основание элора)

Элора M'_1	Элора M'_k
	
$\frac{sh_1 h_2}{3}$	$\frac{sh_1}{6} (2h_4 + h_3)$
	
$\frac{sh_1 h_2}{6}$	$\frac{sh_1}{6} (2h_3 + h_4)$
	
$\frac{sh_2}{6} (2h_6 + h_5)$	$\frac{s}{6} [h_5 (2h_3 + h_4) + h_6 (2h_4 + h_3)]$
	$\frac{s}{6} [c_2 (2c_4 - c_3) - c_1 (c_4 - 2c_3)]$

1	2	3	4
	$\frac{sfh_2}{12}$	$\frac{sf}{12} (3h_3 + h_4)$	$\frac{sf}{12} (c_4 - 3c_3)$
	$\frac{sfh_2}{4}$	$\frac{sf}{12} (3h_4 + h_3)$	$\frac{sf}{12} (3c_4 - c_3)$
	$\frac{sfh_2}{3}$	$\frac{sf}{3} (h_3 + h_4)$	$\frac{sf}{3} (c_4 - c_3)$
	$\frac{sfh_2}{4}$	$\frac{sf}{12} (5h_3 + 3h_4)$	$\frac{sf}{12} (3c_4 - 5c_3)$
	$\frac{sfh_2}{12}$	$\frac{sf}{12} (5h_4 + 3h_3)$	$\frac{sf}{12} (5c_4 - 3c_3)$

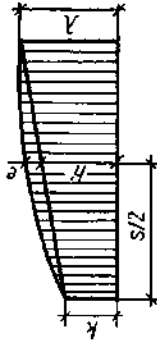
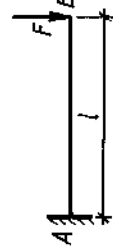
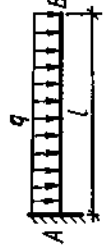
1	2	3	4
	$\frac{sh_2 (2h' + \lambda)}{6}$	$\frac{s}{6} (h_3 k + 4h' a + h_4 \lambda)$	$\frac{s}{6} k_4 \lambda - 4h' a - c_3 k$

Табл. 10. Расчетные данные для некоторых статически определенных балок постоянного сечения

Схема нагружения балки	M_x		$EJv_{\max}$		EJv_A		EJv_B	
	Формула	z	Формула	z	Формула	z	Формула	z
1 	M	от 0 до l	$-\frac{Ml^2}{2}$	l	0	0	-Ml	
2 	Fl	0	$-\frac{Fl^3}{3}$	l	0	0	$-\frac{Fl^2}{2}$	
3 	$\frac{ql^2}{2}$	0	$-\frac{ql^4}{8}$	l	0	0	$-\frac{ql^2}{6}$	

1	2	3	4	5	6	7
	$\frac{qa(l+b)}{2}$	l	$-\frac{ql^4}{24}(3-\frac{4b^3}{l^2}-\frac{b^4}{l^3})$	0	$\frac{ql^3}{6}(1-\frac{b^3}{l^3})$	0
	M	l	$-0,0641Ml^2$	$\frac{l}{\sqrt{3}}$	$-\frac{Ml}{6}$	$\frac{Ml}{3}$
	$\frac{Fl}{4}$	$\frac{l}{2}$	$-\frac{Fl^3}{48}$	$\frac{l}{2}$	$-\frac{Fl^2}{16}$	$\frac{Fl^2}{16}$
	$\frac{Fab}{l}$	a	$-\frac{Fb}{3l}(\frac{a^2+2ab}{3})^{\frac{3}{2}}$	$\sqrt{\frac{a^2+2ab}{3}}$	$-\frac{Fab(l+b)}{6l}$	$\frac{Fab(l+a)}{6l}$
	Fa	$\frac{OT\theta}{20l-a}$	$-\frac{Fa}{24}(3l^2-4a^2)$	$\frac{l}{2}$	$-\frac{Fa(l-a)}{2}$	$\frac{Fa(l-a)}{2}$

1	2	3	4	5	6	7
	$\frac{Mb}{l}$	a	$\frac{Mb}{6}(2-\frac{6a}{l}+\sqrt{2}\frac{a}{l}-\frac{2a^2}{3l^2})$	$1\sqrt{2}\frac{a}{l}-\frac{2a^2}{3l^2}$	$-\frac{Ma}{6}(6-\frac{21}{a}-\frac{Mb}{6})$	$-\frac{2l}{b}-\frac{3b}{l}$
	$\frac{ql^2}{8}$	$\frac{l}{2}$	$-\frac{5ql^4}{384}$	$\frac{l}{2}$	$-\frac{ql^3}{24}$	$\frac{ql^3}{24}$
	$\frac{q}{8}(l^2-4a^2)$	$\frac{l}{2}$	$-\frac{ql^4}{24}(\frac{5}{16}-\frac{3a^2}{2l^2}+\frac{a^4}{l^4})$	$\frac{l}{2}$	$-\frac{qb(l^2+2al-2a^2)}{24}$	$\frac{qb(l^2+2al-2a^2)}{24}$

Т а б л. 11. Значения коэффициента φ в зависимости от гибкости λ стержней из различных материалов

λ	Сталь			Чугун		Дерево (независимо от породы)	Бетон	
	Ст0 Ст2 Ст3 Ст4	Ст5 НЛ-1	НЛ-2	СЧ 15-30 СЧ 15-15 СЧ 15-36 СЧ 41-40	СЧ 21-14 СЧ 28-48		тяжелый	легкий
0	1	1	1	1	1	1	1	1
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95	0,99	1	1
20	0,97	0,95	0,95	0,91	0,87	0,97	0,96	0,96
30	0,95	0,93	0,93	0,81	0,75	0,92	0,90	0,86
40	0,92	0,90	0,90	0,69	0,60	0,87	0,84	0,73
50	0,89	0,84	0,83	0,57	0,43	0,80	0,76	0,68
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32	0,71	0,70	0,59
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23	0,61	0,63	0,52
80	0,75	0,66	0,63	0,26	0,18	0,49	0,57	0,46
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14	0,38	0,51	—
100	0,60	0,50	0,45	0,16	0,12	0,31	0,45	—
110	0,52	0,43	0,39	—	—	0,26	—	—
120	0,45	0,38	0,33	—	—	0,22	—	—
130	0,40	0,32	0,29	—	—	0,18	—	—
140	0,36	0,28	0,26	—	—	0,15	—	—
150	0,32	0,27	0,23	—	—	0,14	—	—
160	0,29	0,24	0,21	—	—	0,12	—	—
170	0,26	0,21	0,19	—	—	0,11	—	—
180	0,23	0,19	0,17	—	—	0,10	—	—
190	0,21	0,17	0,15	—	—	—	—	—
200	0,19	0,16	0,14	—	—	—	—	—

Т а б л. 12. Значения безразмерной величины $\bar{\rho}$ в случае действия равномерно распределенной нагрузки q

$\bar{\rho}$	ξ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,64	0,64	0,65	0,67	0,69	0,74	0,80	0,80	1,06	1,46	
1	0,69	0,70	0,71	0,72	0,75	0,80	0,87	0,99	1,23	1,69	
2	0,72	0,72	0,74	0,74	0,77	0,81	0,87	0,99	1,21	1,65	
3	0,74	0,74	0,75	0,76	0,78	0,81	0,87	0,99	1,19	1,61	
5	0,77	0,78	0,78	0,79	0,80	0,83	0,88	0,97	1,16	1,55	
7	0,80	0,80	0,81	0,81	0,82	0,84	0,88	0,96	1,13	1,50	
10	0,84	0,84	0,84	0,84	0,84	0,85	0,88	0,95	1,11	1,44	
15	0,88	0,88	0,87	0,87	0,87	0,87	0,89	0,94	1,07	1,37	
20	0,90	0,90	0,90	0,90	0,89	0,88	0,89	0,93	1,05	1,32	
30	0,94	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90	0,90	0,92	1,01	1,26	
50	0,97	0,97	0,96	0,95	0,94	0,92	0,91	0,92	0,99	1,18	

Т а б л. 13. Значения безразмерной величины $\bar{\sigma}$ в случае действия равномерно распределенной нагрузки q

$\bar{\sigma}$	ξ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0	-0,036	-0,072	-0,106	-0,138	-0,167	-0,190	-0,206	-0,210	-0,217	-0,187
1	0	-0,030	-0,060	-0,089	-0,115	-0,138	-0,155	-0,163	-0,153	-0,153	-0,110
2	0	-0,028	-0,056	-0,082	-0,107	-0,128	-0,145	-0,153	-0,144	-0,144	-0,104
3	0	-0,026	-0,052	-0,076	-0,099	-0,120	-0,136	-0,144	-0,136	-0,136	-0,099
5	0	-0,022	-0,045	-0,066	-0,087	-0,106	-0,121	-0,129	-0,124	-0,124	-0,090
7	0	-0,020	-0,039	-0,058	-0,077	-0,094	-0,108	-0,117	-0,113	-0,113	-0,084
10	0	-0,016	-0,033	-0,049	-0,065	-0,080	-0,094	-0,103	-0,101	-0,101	-0,075
15	0	-0,012	-0,025	-0,038	-0,051	-0,064	-0,076	-0,085	-0,085	-0,085	-0,065
20	0	-0,010	-0,019	-0,030	-0,041	-0,053	-0,064	-0,073	-0,075	-0,075	-0,060
30	0	-0,006	-0,012	-0,020	-0,026	-0,038	-0,048	-0,057	-0,061	-0,061	-0,050
50	0	-0,003	-0,006	-0,010	-0,015	-0,022	-0,031	-0,040	-0,045	-0,045	-0,039

Т а б л. 14. Значения безразмерной величины $\bar{M}$ в случае действия равномерно распределенной нагрузки q

$\bar{M}$	ξ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,137	0,135	0,129	0,120	0,108	0,093	0,075	0,054	0,014	0,014	0,006
1	0,103	0,101	0,097	0,089	0,079	0,068	0,062	0,036	0,006	0,006	0,006
2	0,096	0,095	0,091	0,084	0,074	0,063	0,049	0,019	0,006	0,006	0,006
3	0,090	0,089	0,085	0,079	0,070	0,059	0,046	0,018	0,006	0,006	0,006
5	0,080	0,079	0,076	0,070	0,063	0,053	0,042	0,015	0,006	0,006	0,006
7	0,072	0,071	0,068	0,063	0,057	0,048	0,034	0,013	0,004	0,004	0,004
10	0,063	0,062	0,059	0,055	0,050	0,042	0,028	0,011	0,003	0,003	0,003
15	0,051	0,050	0,049	0,046	0,041	0,036	0,025	0,009	0,002	0,002	0,002
20	0,043	0,043	0,041	0,039	0,035	0,031	0,021	0,007	0,002	0,002	0,002
30	0,033	0,033	0,032	0,030	0,028	0,024	0,014	0,007	0,002	0,002	0,002
50	0,022	0,021	0,021	0,020	0,019	0,017	0,014	0,007	0,002	0,002	0,002

Табл. 15. Значения безразмерной величины $\bar{p}$ при $t = 1$ в случае действия силы F

ξ α	-1,0	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	-
0,0	-	0,78	0,57	0,47	0,43	0,41	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,41	0,43	0,47	0,57	0,78	-	0,0
0,1	-	0,62	0,46	0,40	0,37	0,36	0,36	0,36	0,37	0,38	0,39	0,40	0,41	0,42	0,43	0,46	0,49	0,56	0,69	1,04	-	-0,1
0,2	-	0,45	0,37	0,33	0,31	0,31	0,32	0,33	0,35	0,37	0,38	0,40	0,43	0,45	0,47	0,50	0,56	0,65	0,82	1,11	-	-0,2
0,3	-	0,30	0,26	0,25	0,25	0,27	0,28	0,30	0,32	0,35	0,37	0,40	0,43	0,47	0,50	0,55	0,63	0,73	0,93	1,29	-	-0,3
0,4	-	0,15	0,15	0,17	0,20	0,22	0,24	0,27	0,30	0,33	0,36	0,40	0,44	0,48	0,53	0,59	0,68	0,80	1,03	1,48	-	-0,4
0,5	-	0,00	0,05	0,09	0,14	0,17	0,21	0,24	0,27	0,31	0,35	0,39	0,44	0,49	0,56	0,63	0,74	0,89	1,16	1,66	-	-0,5
0,6	-	-0,15	-0,04	0,02	0,08	0,12	0,17	0,21	0,25	0,29	0,34	0,39	0,44	0,50	0,58	0,67	0,80	0,98	1,25	1,85	-	-0,6
0,7	-	-0,30	-0,15	-0,05	0,02	0,08	0,13	0,18	0,22	0,27	0,32	0,38	0,44	0,51	0,60	0,70	0,85	1,07	1,42	2,05	-	-0,7
0,8	-	-0,45	-0,25	-0,13	-0,04	0,03	0,09	0,15	0,20	0,25	0,31	0,37	0,44	0,52	0,63	0,74	0,90	1,14	1,54	2,25	-	-0,8
0,9	-	-0,59	-0,32	-0,20	-0,09	-0,01	0,05	0,11	0,17	0,23	0,30	0,36	0,44	0,53	0,63	0,77	0,95	1,22	1,64	2,46	-	-0,9
1,0	-	-0,73	-0,45	-0,27	-0,15	-0,06	0,02	0,08	0,15	0,21	0,28	0,36	0,44	0,54	0,65	0,80	1,00	1,30	1,79	2,66	-	-1,0

Табл. 16. Значения безразмерной величины $\bar{Q}$ при $t = 1$ в случае действия силы F

ξ α	-1,0	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
0,0	0	0,10	0,16	0,22	0,26	0,30	0,34	0,38	0,42	0,46
0,1	0	0,08	0,13	0,17	0,21	0,25	0,28	0,32	0,35	0,39
0,2	0	0,05	0,09	0,13	0,16	0,19	0,22	0,25	0,29	0,33
0,3	0	0,03	0,06	0,08	0,10	0,14	0,17	0,20	0,23	0,26
0,4	0	0,02	0,03	0,05	0,07	0,09	0,11	0,14	0,16	0,20
0,5	0	0,00	0,00	0,01	0,02	0,03	0,05	0,08	0,10	0,13
0,6	0	-0,02	-0,03	-0,03	-0,03	-0,02	0,00	0,02	0,04	0,07
0,7	0	-0,04	-0,06	-0,07	-0,07	-0,07	-0,06	-0,04	-0,02	0,00
0,8	0	-0,06	-0,09	-0,11	-0,12	-0,12	-0,11	-0,10	-0,08	-0,06
0,9	0	-0,08	-0,12	-0,15	-0,17	-0,17	-0,17	-0,16	-0,14	-0,12
1,0	0	-0,10	-0,15	-0,19	-0,21	-0,22	-0,22	-0,22	-0,21	-0,19

Продолжение табл. 16.

ξ α	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	0,50	-0,46	-0,42	-0,38	-0,34	-0,30	-0,20	-0,26	-0,16	-0,10	0
0,1	0,43	-0,47	-0,49	-0,45	-0,40	-0,36	-0,31	-0,26	-0,20	-0,11	0
0,2	0,36	0,40	0,45	-0,51	-0,47	-0,42	-0,36	-0,30	-0,23	-0,14	0
0,3	0,30	0,34	0,38	0,42	-0,53	-0,48	-0,42	-0,35	-0,27	-0,16	0
0,4	0,23	0,27	0,31	0,36	0,41	-0,54	-0,47	-0,40	-0,31	-0,19	0
0,5	0,16	0,20	0,24	0,29	0,34	0,40	-0,53	-0,45	-0,36	-0,21	0
0,6	0,10	0,13	0,17	0,22	0,28	0,34	0,41	-0,50	-0,39	-0,23	0
0,7	0,03	0,07	0,11	0,16	0,21	0,28	0,35	0,45	-0,42	-0,26	0
0,8	-0,03	0,00	0,04	0,09	0,15	0,21	0,30	0,40	0,53	-0,28	0
0,9	-0,10	-0,07	-0,02	0,02	0,08	0,15	0,24	0,34	0,49	0,69	0
1,0	-0,16	-0,13	-0,09	-0,04	0,02	0,09	0,18	0,29	0,44	0,66	1,0

Т а б л. 17. Значения безразмерной величины $\bar{M}$

$\alpha \backslash \xi$	-1,0	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
0,0	0	0,01	0,02	0,04	0,06	0,09	0,12	0,16	0,20	0,24
0,1	0	0,00	0,01	0,03	0,05	0,07	0,10	0,13	0,16	0,20
0,2	0	0,00	0,01	0,02	0,04	0,05	0,08	0,10	0,13	0,16
0,3	0	0,00	0,01	0,01	0,02	0,04	0,05	0,07	0,09	0,11
0,4	0	0,00	0,00	0,01	0,01	0,02	0,03	0,04	0,06	0,07
0,5	0	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,01	0,02	0,03
0,6	0	0,00	-0,01	-0,01	-0,02	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	0,00
0,7	0	0,00	-0,01	-0,01	-0,02	-0,03	-0,03	-0,04	-0,04	-0,04
0,8	0	0,00	-0,01	-0,02	-0,03	-0,04	-0,06	-0,07	-0,08	-0,08
0,9	0	0,00	-0,01	-0,03	-0,04	-0,06	-0,08	-0,09	-0,11	-0,12
1,0	0	0,00	-0,02	-0,03	-0,05	-0,08	-0,10	-0,12	-0,14	-0,16

при $t = 1$ в случае действия силы F

	0,0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,29	0,24	0,20	0,16	0,12	0,09	0,06	0,04	0,02	0,01	0	
0,24	0,29	0,23	0,19	0,15	0,11	0,07	0,04	0,02	0,01	0	
0,19	0,23	0,27	0,22	0,17	0,12	0,09	0,06	0,03	0,01	0	
0,14	0,17	0,21	0,25	0,19	0,14	0,10	0,06	0,03	0,01	0	
0,10	0,12	0,15	0,18	0,22	0,16	0,11	0,07	0,03	0,01	0	
0,05	0,07	0,09	0,12	0,15	0,18	0,13	0,08	0,04	0,01	0	
0,00	0,01	0,03	0,05	0,07	0,11	0,14	0,09	0,04	0,01	0	
-0,04	-0,04	-0,03	-0,02	0,00	0,03	0,06	0,10	0,05	0,01	0	
-0,09	-0,09	-0,09	-0,08	-0,07	-0,06	-0,03	0,01	0,05	0,02	0	
-0,13	-0,14	-0,15	-0,15	-0,14	-0,33	-0,31	-0,08	-0,04	0,02	0	
-0,18	-0,20	-0,21	-0,21	-0,21	-0,21	-0,20	-0,17	-0,14	-0,08	0	

Т а б л. 18. Значения безразмерной величины $\bar{p}$ при

$\alpha \backslash \xi$	-1,0	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
0,0	-	-1,64	-1,24	-0,83	-0,62	-0,48	-0,38	-0,29	-0,21	-0,11
0,1	-	-1,49	-0,96	-0,70	-0,57	-0,46	-0,36	-0,28	-0,20	-0,13
0,2	-	-1,5	-1,00	-0,73	-0,57	-0,47	-0,37	-0,30	-0,22	-0,16
0,3	-	-1,52	-1,08	-0,81	-0,59	-0,47	-0,38	-0,31	-0,24	-0,18
0,4	-	-1,50	-1,08	-0,79	-0,59	-0,47	-0,39	-0,32	-0,25	-0,19
0,5	-	-1,48	-1,00	-0,79	-0,60	-0,47	-0,39	-0,32	-0,26	-0,19
0,6	-	-1,49	-1,00	-0,74	-0,58	-0,47	-0,38	-0,31	-0,25	-0,20
0,7	-	-1,47	-1,00	-0,72	-0,57	-0,46	-0,38	-0,31	-0,25	-0,20
0,8	-	-1,47	-1,00	-0,74	-0,57	-0,46	-0,38	-0,31	-0,25	-0,20
0,9	-	-1,47	-1,00	-0,74	-0,57	-0,46	-0,38	-0,31	-0,25	-0,20
1,0	-	-1,47	-1,00	-0,74	-0,57	-0,46	-0,38	-0,31	-0,25	-0,20

 $t = 1$ в случае действия момента M

	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,11	0,21	0,29	0,38	0,48	0,62	0,83	1,24	1,64	-	
-0,04	0,07	0,19	0,29	0,39	0,50	0,66	0,83	1,30	1,81	-	
-0,08	0,01	0,12	0,22	0,35	0,47	0,62	0,83	1,18	1,73	-	
-0,11	-0,04	0,05	0,16	0,30	0,44	0,57	0,75	1,04	1,84	-	
-0,13	-0,06	0,02	0,13	0,26	0,42	0,59	0,81	1,15	1,86	-	
-0,13	-0,06	0,01	0,13	0,23	0,39	0,60	0,87	1,25	1,80	-	
-0,14	-0,07	0,01	0,10	0,21	0,36	0,57	0,88	1,31	1,94	-	
-0,14	-0,07	0,00	0,08	0,19	0,32	0,51	0,78	1,25	2,01	-	
-0,14	-0,08	-0,01	0,08	0,19	0,31	0,50	0,78	1,23	2,03	-	
-0,14	-0,08	-0,01	0,08	0,18	0,31	0,50	0,78	1,23	2,03	-	
-0,14	-0,08	0,01	0,08	0,18	0,31	0,50	0,78	1,23	2,03	-	

Т а б л. 19. Значения безразмерной величины $\bar{Q}$

ξ	-1,0	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
0,0	0	-0,20	-0,34	-0,44	-0,51	-0,56	-0,61	-0,64	-0,66	-0,68
0,1	0	-0,24	-0,36	-0,44	-0,51	-0,56	-0,60	-0,63	-0,66	-0,67
0,2	0	-0,21	-0,34	-0,42	-0,49	-0,54	-0,58	-0,62	-0,64	-0,66
0,3	0	-0,18	-0,31	-0,40	-0,47	-0,52	-0,56	-0,60	-0,63	-0,65
0,4	0	-0,18	-0,31	-0,40	-0,47	-0,52	-0,56	-0,60	-0,63	-0,65
0,5	0	-0,18	-0,31	-0,40	-0,46	-0,52	-0,56	-0,60	-0,62	-0,65
0,6	0	-0,19	-0,31	-0,40	-0,46	-0,52	-0,56	-0,59	-0,62	-0,64
0,7	0	-0,18	-0,31	-0,39	-0,46	-0,51	-0,56	-0,59	-0,61	-0,64
0,8	0	-0,18	-0,30	-0,39	-0,46	-0,51	-0,55	-0,58	-0,61	-0,63
0,9	0	-0,18	-0,30	-0,39	-0,46	-0,50	-0,55	-0,58	-0,61	-0,63

Т а б л. 20. Значения безразмерной величины $\bar{M}$

ξ	-1,0	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
0,0	0	-0,01	-0,04	-0,08	-0,14	-0,19	-0,24	-0,30	-0,36	-0,43
0,1	0	-0,01	-0,04	-0,08	-0,13	-0,19	-0,25	-0,31	-0,37	-0,44
0,2	0	-0,01	-0,04	-0,08	-0,12	-0,18	-0,23	-0,29	-0,36	-0,42
0,3	0	-0,01	-0,03	-0,07	-0,11	-0,16	-0,22	-0,28	-0,33	-0,40
0,4	0	-0,01	-0,03	-0,07	-0,11	-0,16	-0,22	-0,27	-0,34	-0,40
0,5	0	-0,01	-0,03	-0,07	-0,11	-0,16	-0,21	-0,27	-0,33	-0,40
0,6	0	-0,01	-0,03	-0,07	-0,11	-0,16	-0,22	-0,27	-0,34	-0,40
0,7	0	-0,01	-0,03	-0,07	-0,11	-0,16	-0,21	-0,27	-0,33	-0,39
0,8	0	-0,01	-0,03	-0,07	-0,11	-0,16	-0,21	-0,27	-0,33	-0,39
0,9	0	-0,01	-0,03	-0,07	-0,11	-0,16	-0,21	-0,27	-0,33	-0,39
1,0	0	-0,01	-0,03	-0,07	-0,11	-0,16	-0,21	-0,27	-0,33	-0,39

 $t = 1$ в случае действия момента M

0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
-0,69	-0,68	-0,66	-0,64	-0,61	-0,56	-0,51	-0,44	-0,34	-0,20	0
-0,68	-0,68	-0,67	-0,64	-0,61	-0,57	-0,51	-0,43	-0,34	-0,17	0
-0,67	-0,68	-0,67	-0,65	-0,62	-0,58	-0,53	-0,46	-0,36	-0,21	0
-0,66	-0,67	-0,67	-0,66	-0,64	-0,60	-0,55	-0,49	-0,40	-0,26	0
-0,66	-0,67	-0,67	-0,67	-0,65	-0,61	-0,56	-0,49	-0,40	-0,25	0
-0,66	-0,67	-0,67	-0,67	-0,65	-0,63	-0,57	-0,50	-0,40	-0,24	0
-0,66	-0,67	-0,67	-0,67	-0,65	-0,63	-0,58	-0,51	-0,40	-0,24	0
-0,66	-0,67	-0,65	-0,66	-0,65	-0,63	-0,58	-0,52	-0,42	-0,27	0
-0,65	-0,66	-0,67	-0,66	-0,65	-0,63	-0,59	-0,52	-0,43	-0,27	0
-0,65	-0,66	-0,67	-0,66	-0,65	-0,63	-0,59	-0,52	-0,43	-0,27	0

при $t = 1$ в случае действия момента M

0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
-0,50	0,43	0,36	0,30	0,24	0,18	0,14	0,08	0,04	0,01	0
-0,51	-0,57	0,36	0,29	0,23	0,17	0,12	0,07	0,03	0,01	0
-0,49	-0,58	-0,62	0,31	0,25	0,19	0,13	0,08	0,04	0,01	0
-0,48	-0,53	-0,61	-0,67	0,27	0,20	0,16	0,09	0,05	0,02	0
-0,46	-0,53	-0,60	-0,67	-0,73	0,20	0,16	0,09	0,05	0,01	0
-0,46	-0,53	-0,60	-0,66	-0,73	-0,80	0,14	0,09	0,05	0,01	0
-0,46	-0,53	-0,60	-0,66	-0,73	-0,79	-0,86	0,09	0,04	0,01	0
-0,46	-0,52	-0,59	-0,66	-0,72	-0,79	-0,85	-0,90	0,05	0,01	0
-0,46	-0,52	-0,59	-0,66	-0,72	-0,79	-0,85	-0,90	-0,95	0,01	0
-0,46	-0,52	-0,59	-0,66	-0,72	-0,79	-0,85	-0,90	-0,95	0,99	0
-0,46	-0,52	-0,59	-0,66	-0,72	-0,79	-0,85	-0,90	-0,95	0,99	0

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1976. — 608 с.
2. Горбунов-Посадов М.И. Таблицы для расчета балок на упругом основании. — М.: Госстройиздат, 1939. — 160 с.
3. Дарков А.В., Широ Г.С. Сопротивление материалов. — М.: Высш. шк., 1975. — 742 с.
4. Никифоров С.Н. Сопротивление материалов. — М.: Высш. шк., 1966. — 360 с.
5. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. — Киев: Наук. думка, 1975. — 704 с.
6. Программа по сопротивлению материалов с основами теории упругости и пластичности. — М.: Высш. шк., 1983. — 13 с.
7. Рудицын М.Н., Артемьев П.Я., Любошиц М.И. Справочное пособие по сопротивлению материалов. — Минск: Выш. шк., 1970. — 628 с.
8. Сборник заданий расчетно-проектировочных работ по курсу сопротивления материалов / Под ред. А.Г. Петровича. — Минск: Изд-во БПИ, 1979. — Ч. I. — 89 с.
9. Сборник заданий расчетно-проектировочных работ по курсу сопротивления материалов / Под ред. А.Г. Петровича. — Минск: Изд-во БПИ, 1981. — Ч. II. — 57 с.
10. Терзугулов И.Г. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. — М.: Высш. шк., 1984. — 474 с.
11. Феофанов В.И. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1970. — 541 с.
12. Фесик С.П. Справочник по сопротивлению материалов. — Киев: Будівельник, 1983. — 280 с.
13. Цветков А.Н., Епанечников В.А. Прикладные программы для микроЭВМ "Электроника БЗ-34", "Электроника МК-56", "Электроника МК-54". — М.: Финансы и статистика, 19984. — 174 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Условные обозначения	6
I. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ.	9
Работа 1. Центральное растяжение и сжатие статически определимого прямого ступенчатого стержня	9
Работа 2. Центральное растяжение и сжатие статически неопределимого прямого ступенчатого стержня	19
Работа 3. Статически неопределимые стержневые системы.	33
II. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ	44
Работа 4. Исследование плоского напряженного состояния	44
III. РАСЧЕТЫ НА СРЕЗ И СМЯТИЕ.	56
Работа 5. Расчет болтовых соединений	56
Работа 6. Расчет сварных соединений	61
IV. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ФИГУР	67
Работа 7. Моменты инерции плоских фигур	67
V. КРУЧЕНИЕ СТЕРЖНЕЙ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ	85
Работа 8. Расчет стержней на прочность и жесткость при кручении	85
VI. ИЗГИБ БАЛОК	93
Работа 9. Проверка прочности балок при изгибе и исследование их деформаций	93
VII. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ	117
Работа 10. Расчет неразрезных балок	117
VIII. КОНСТРУКЦИИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ.	133
Работа 11. Расчет коротких балок	133
IX. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ	146
Работа 12. Косой изгиб.	146
Работа 13. Расчет колонны на внецентренное сжатие.	157
Работа 14. Расчет пространственного стержня	169
X. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ	178
Работа 15. Расчет сжатых стержней на устойчивость	178
XI. ПРОЧНОСТЬ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ	187
Работа 16. Расчет на ударную нагрузку	187
Приложение	197
Литература	226

*Евгений Федорович Винокуров,
Александр Григорьевич Петрович,
Леонид Иванович Шевчук*

**СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ.
РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫЕ РАБОТЫ**

Зав. редакцией *В.Г. Самарина*
Редактор *Л.Н. Козловская*
Мл. редактор *А.П. Берлина*
Худож. редактор *И.В. Демковский*
Техн. редактор *Г.А. Лакишик*
Корректор *Л.А. Шлыкович*
Операторы *А.И. Маль, И.В. Скубий*

ИБ № 2470

Подписано в печать 25.08.87г. Формат 60х90 1/16. Бумага офсетная. Гар-
нитура Универс. Печать офсет. Усл. печ. л. 14,25. Усл. кр.-отт. 14,375.
Уч.-изд.л. 15,83. Тираж 10100 экз. Зак. 6044. Цена 70 к.

Издательство "Вышэйшая школа" Государственного комитета БССР по
делам издательства, полиграфии и книжной торговли. 220048, Минск, про-
спект Машерова, 11.

Типография "Победа". 222310. г. Молодечно, ул. Тавлая, 11.

Отпечатано с оригинала-макета, подготовленного в издательстве "Вышэй-
шая школа".