Учебно-методическое объединение рекомендует

Учебник

Сопротивление материалов

М. Х. Ахметзянов, И. Б. Лазарев

2-е издание

основы наук

ЮРАЙТ

М. Х. Ахметзянов, И. Б. Лазарев

Сопротивление материалов

УЧЕБНИК

2-е издание, переработанное и дополненное

Рекомендовано УМО вузов Российской Федерации по образованию в области строительства в качестве учебника для студентов, обучающихся по направлению «Строительство»

МОСКВА • ЮРАЙТ • 2011

УДК 539.3/8(07)
ББК 30.121я73
А95

Авторы:

Ахметзянов Марат Халикович – доктор технических наук, профессор, с 1983 по 2005 гг. – заведующий кафедрой строительной механики Сибирского государственного университета путей сообщения;

Лазарев Илья Борисович – доктор технических наук, профессор, крупный специалист в области строительной механики.

Рецензенты:

Гребенюк Г. И. – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительной механики Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета;

Ляхович Л. С. – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой строительной механики Томского государственного архитектурно-строительного университета.

Ахметзянов, М. Х.

А95 Сопротивление материалов : учебник / М. Х. Ахметзянов, И. Б. Лазарев. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2011. – 300 с. – Серия : Основы наук.

ISBN 978-5-9916-1253-1

Книга охватывает основные вопросы прочности, жесткости и устойчивости стержня при статических и динамических воздействиях. Рассмотрены простые (растяжение-сжатие, сдвиг, плоский изгиб и кручение) и сложные деформации стержня (косой изгиб, растяжение или сжатие с изгибом, кручение и изгиб), а также продольно-поперечный изгиб. Отдельная глава посвящена экспериментальным методам определения напряжений и деформаций.

Для студентов технических вузов.

УДК 539.3/8(07)
ББК 30.121я73

ISBN 978-5-9916-1253-1

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Большинство учебников и учебных пособий по сопротивлению материалов ориентировано на определенные инженерные специальности. Известны учебники для строительных, машиностроительных, сельскохозяйственных и других вузов. Многие из них имеют достаточно большой объем и в этом смысле не вполне соответствуют новым общеобразовательным стандартам, где повсеместно сокращено аудиторное учебное время на изучение курса сопротивления материалов. Некоторые сведения о наиболее распространенных учебниках и другой учебной литературе по курсу "Сопротивление материалов" даны в приложении.

В последнее время многие вузы, приобретая статус академий и университетов, получают лицензии на обучение по новым специальностям и становятся в этом смысле широкопрофильными. В этих условиях в учебных библиотеках приходится накапливать комплекты учебников по нескольким специальностям, что вызывает определенные финансовые проблемы и проблемы размещения этой литературы. Между тем, в этих учебниках большая доля материала однотипна для многих специальностей и излагается одинаково. Отметим также, что современная компьютерная техника позволяет оперативно издавать малые серии учебных материалов для внутреннего использования в вузе.

Учитывая эти обстоятельства, авторы предлагают курс сопротивления материалов, включающий только основные разделы, общие для всех технических специальностей. При этом предполагается, что другие разделы курса, более тесно связанные с конкретной специальностью (направлением), будут излагаться отдельно в учебных пособиях, которые можно издать гораздо меньшим тиражом как дополнение к этому основному курсу.

Главы 1, 3, 6, 9, 13, 14, а также разделы 7.5; 10.3 написаны М.Х.Ахметзяновым, главы 4, 5, 7, 8, 10-12 (без разделов 7.5; 10.3) написаны И.Б.Лазаревым. Глава 2 написана авторами совместно.

Авторы выражают глубокую благодарность коллективу ОАО "Сибмост" за спонсорскую поддержку издания этой книги, а также доценту П.В. Гресу, внимательно прочитавшему рукопись и сделавшему много ценных замечаний.

ГЛАВА 1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

1.1. Введение

Курс "Сопротивление материалов" является первым разделом науки о прочности и надежности частей сооружений, механизмов и машин, которая получила название "Механика деформируемого твердого тела" (МДТТ). Если в теоретической механике рассматривается равновесие и движение абсолютно твердого тела, то в курсе сопротивления материалов используется модель деформируемого тела. Это тело под нагрузкой меняет свою форму и размеры, а также может разрушиться или получить недопустимые по условиям эксплуатации деформации и смещения отдельных точек.

Расчет на прочность и надежность предполагает такой выбор материала и размеров частей сооружений, механизмов и машин (в дальнейшем элементов), при котором обеспечивается с определенной гарантией неразрушаемость этих элементов в пределах заданного срока эксплуатации, а также удовлетворяются требования по жесткости и устойчивости. Требования по жесткости часто сводятся к ограничению максимальных перемещений точек конструкции при ее нагружении. Некоторые конструкции, особенно тонкостенные, при нагружении могут потерять устойчивость, что связано с резким нарастанием перемещений отдельных зон и может также привести к разрушению. Эти вопросы рассмотрены в гл. 11.

Расчетам обычно предшествуют экспериментальные исследования, в которых при помощи специально созданных испытательных машин определяются механические характеристики материалов.

Большинство сооружений, механизмов и машин можно расчленить на отдельные расчетные элементы, которые в зависимости от особенностей геометрической формы делятся на три типа.

1. *Стержни* (стойка, вал, балка) – элементы, длина l которых значительно больше поперечных размеров (рис. 1.1). Поперечные сечения образуются при разрезе стержня плоскостью, перпендикулярной продольной оси, а продольная ось является линией, соединяющей центры тяжести поперечных сечений. Стержни могут иметь различную форму поперечного сечения (круг, прямоугольник, двутавр, швеллер, уголок и т.п.), они бывают сплошными или полыми (например, труба), прямолинейными и криволинейными с продольной осью в виде плоской или пространственной

(например, цилиндрическая пружина) кривой, с постоянными или переменными по длине размерами поперечного сечения.

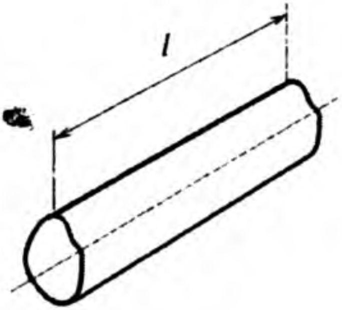


Рис. 1.1

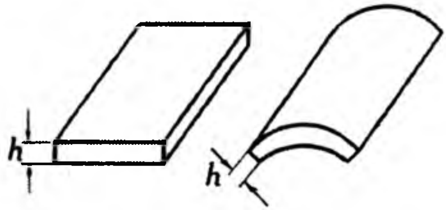


Рис. 1.2

2. *Пластины и оболочки* (рис. 1.2). В элементах этой группы только один размер – толщина h – намного меньше двух других размеров. Пластины могут иметь в плане различную форму (прямоугольные, круглые, эллиптические и т.д.), а оболочки могут быть цилиндрическими, сферическими, коническими и т.п.

3. *Массивные тела*, у которых размеры во всех трех направлениях одного порядка (шарик подшипника, фундаментные блоки и т.п.).

В курсе сопротивления материалов основное внимание уделяется расчету на прочность в широком смысле (включающим в это понятие собственно прочность, жесткость и устойчивость) тел первого типа: стержней – на растяжение (см. гл. 2); балок – на изгиб (см. гл. 6 и 7); валов – на кручение (см. гл. 8); стоек – на сжатие и устойчивость (см. гл. 11).

Расчеты элементов типа пластин и оболочек, массивных тел представляют существенно более сложную задачу и рассматриваются в других разделах МДТТ, в частности в теории упругости.

В инженерной практике встречаются сложные многоэлементные конструкции и механизмы. Расчет этих конструкций рассматривается в таких учебных курсах, как "Строительная механика", "Динамика и устойчивость сооружений" и др.

Таким образом, в сопротивлении материалов излагаются основные принципы расчета элементов на прочность, жесткость и устойчивость и закладывается фундамент для грамотного проектирования и эксплуатации конструкций, механизмов и машин. Поэтому курс "Сопротивление материалов" является важнейшим в инженерном образовании, на нем базируется вся последующая техническая подготовка будущего инженера.

Проектируя любой технический объект, инженер стремится получить оптимальное решение, удовлетворяющее определенным требованиям. Для транспортных средств (самолет, вагон, автомашина, судно и т.п.), это требование сводится к тому, чтобы получить объект минимального собственного веса при заданной грузоподъемности, для строительных конструкций – желательно иметь проект минимальной стоимости. Так называемые критерии оптимальности могут быть различными (вес, стоимость и т.п.), но все они, как правило, вступают в противоречие с требованиями прочности и надежности. Научной основой для решения этих противоречивых вопросов и служит механика деформируемого твердого тела – одна из самых древних, но постоянно развивающихся наук.

Начало науки о сопротивлении материалов относят к 1638 году, когда Г.Галилей опубликовал свой труд "Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых отраслей науки, относящихся к механике и местному движению". Это была первая попытка научного подхода к задаче расчета сооружения на прочность.

В дальнейшем проблемами поведения конструкций под нагрузкой занимались Кулон, братья Бернулли, Эйлер, Лагранж, Гук. Однако их работы касались, в основном, математической стороны задачи и не получили в то время практического применения.

Действительное сближение теории и техники произошло лишь в начале XIX века, когда сопротивление материалов становится фактической базой для расчетов сооружений и машин, постепенно приобретая современный вид. В 1826 г. во Франции инженером и математиком Навье был издан первый курс сопротивления материалов, в котором суммировался весь накопленный в то время объем знаний по этой науке и рассматривались практические приложения. С этого времени за рубежом и в России появляются механические лаборатории для испытания материалов с целью определения их механических свойств и проверки теоретических выводов.

Особенно большие успехи в сопротивлении материалов были достигнуты в период становления железнодорожного транспорта, судостроения и авиации. Эти отрасли поставили перед инженерами много новых задач и благодаря этому наука о сопротивлении материалов получила сильное развитие. В последнее время методы МДТТ усиленно развиваются на базе использования мощных быстродействующих ЭВМ и достижений в области физики твердого тела.

1.2. Модель деформируемого твердого тела

В сопротивлении материалов, как и в других естественных науках, реальный материал заменяется *расчетной моделью*. Она наделяется рядом свойств, имеющих существенное значение для анализа прочности тела, при этом отбрасываются несущественные свойства реального материала. В нашем курсе будет, в основном, использоваться модель *сплошного, однородного, изотропного, упругого и относительно жесткого тела*. Рассмотрим эти понятия.

Сплошность. Как известно, все тела имеют атомарное дискретное (т.е. прерывистое) строение. В МДТТ предполагается непрерывность пространства тела, что позволяет использовать основные положения механики сплошной среды, а также дифференциальное и интегральное исчисления. Такое упрощение является естественным, так как межатомные расстояния ничтожно малы по сравнению с размерами рассчитываемых элементов.

Однородность материала – независимость механических свойств от координат точек тела. Иначе говоря, образцы, взятые из разных мест материала, должны иметь практически одинаковые механические характеристики. Изменчивость свойств материала обычно определяется разбросом результатов испытаний одинаково изготовленных образцов и учитывается в расчетах при помощи специальных коэффициентов (типа коэффициента однородности материала) или методик теории надежности. Многие материалы имеют гетерогенную, т.е. неоднородную по составу структуру. Например, сталь представляет собой плотную упаковку зерен-кристаллитов с различной случайной ориентацией кристаллографических осей. В таких случаях размеры образцов для испытаний должны быть такими, чтобы количество зерен было достаточно большим и их случайное расположение не оказывало влияния на результаты испытаний.

Изотропность – одинаковость механических свойств во всех направлениях. Материалы, свойства которых в различных направлениях различны, называются *анизотропными*. В расчетах обычно учитывается лишь существенная анизотропия, которая присуща дереву, композитным материалам, монокристаллам.

Упругость – способность материала полностью восстанавливать начальную форму и размеры тела после снятия нагрузки. Это свойство зависит от уровня нагруженности материала. При малых нагрузках материал ведет себя как упругое тело, а при больших – в теле после снятия нагрузки могут остаться деформации, которые называются остаточными и являются следствием *пластичности* материала (см. гл. 2).

Относительная жесткость. В большинстве случаев деформации и перемещения, которые возникают в элементах при действии рабочих нагрузок, невелики, что позволяет для нахождения реакций связей и внутренних усилий использовать методы теоретической механики. При больших деформациях и перемещениях (в так называемых геометрически нелинейных задачах) это может привести к существенным ошибкам.

1.3. Внешние и внутренние силы

Если расчетный элемент (стержень, пластина и т.д.) выделяется из окружающих его тел и рассматривается изолированно, то их действие на него заменяется силами, которые называются *внешними*. Эти силы могут быть сосредоточенными, объемными, поверхностными и линейными.

К сосредоточенным относятся силы, которые можно условно считать приложенными в точке. Например, на рис. 1.3 показано воздействие вагонного колеса на рельс. При расчете рельса как балки на изгиб, можно принять, что сила F приложена в точке, так как размеры площадки контакта малы по сравнению с длиной рельса. В то же время, при определении контактных напряжений в головке рельса необходимо учитывать фактическое распределение нагрузки на рельс по площадке контакта, размеры которой зависят от величины силы F. Сосредоточенная сила измеряется в ньютонах (H – единица СИ) или килограмм- силах (*кгс*-единица в технической системе).

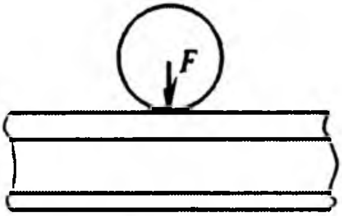


Рис. 1.3

Объемные силы приложены к каждой частице объема (собственный вес, так называемые силы инерции), их единица измерения – $H/м^3$, т.е. размерность равна $[F]/[L^3]$ (квадратными скобками обозначены соответствующие размерности).

Поверхностные силы – давление жидкости или газа, другого тела на поверхность расчетного элемента (рис. 1.4). Они имеют размерность $[f] = [F]/[L^2]$, единицу измерения $Н/м^2$ и определяются как предел отношения равнодействующей силы на рассматриваемой элементарной площадке к ее площади, стремящейся к нулю, т.е.

$$f = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} . \qquad (1.1)$$

Линейно распределенная нагрузка (рис. 1.5) имеет размерность $[q] = [F] / [L]$, измеряется в $Н/м$ и определяется выражением

$$q = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} . \qquad (1.2)$$

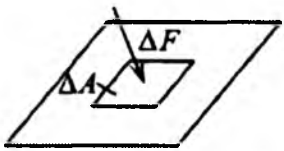


Рис. 1.4

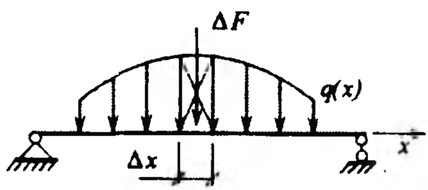


Рис. 1.5

По характеру воздействия на сооружение внешние силы делятся на *статические и динамические*.

Быстро изменяющуюся во времени нагрузку называют *динамической* и в этом случае выполняется динамический расчет (см. гл. 12).

При медленном изменении нагрузки скоростями и ускорениями, возникающими вследствие деформации тела, можно пренебречь. Такую нагрузку называют *статической*.

По времени действия на сооружение нагрузки различаются на *постоянные и временные*. Например, для пролетного строения моста нагрузка от собственного веса пролетного строения, веса мостового полотна является *постоянной*, а нагрузка от проходящего по мосту поезда – *временной*. К временным также относится воздействие ветра, снега, льда и т.п.

При составлении расчетной схемы приходится определять все виды внешних нагрузок. Это непростая задача, так как часть нагрузок имеет случайную природу. Вопросы определения расчетных нагрузок излагаются в специальных курсах (строительные конструкции, проектирование мостов и др.). В нашем курсе в большинстве задач мы будем считать нагрузки заданными. К внешним силам относятся и реакции связей, наложенных на расчетный элемент. Для их нахождения используются методы теоретической механики. Подробнее эти вопросы будут рассмотрены в соответствующих разделах.

В деформируемых телах под воздействием внешних сил расстояния между атомами, а следовательно и силы их взаимодействия, изменяются. В результате возникают так называемые *внутренние силы*. Для нахождения внутренних сил используется *метод сечений*.

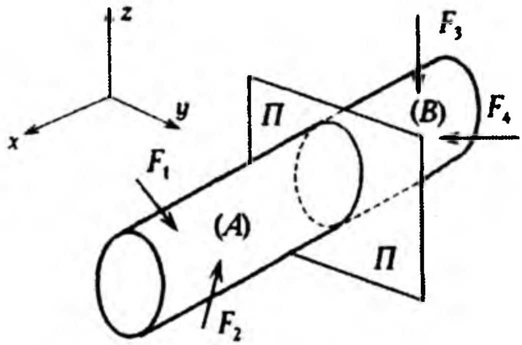


Рис. 1.6

Пусть стержень, изображенный на рис. 1.6, находится в равновесии под воздействием приложенных внешних сил. Для пространственной произвольной системы сил уравнения равновесия запишутся в виде

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \qquad \sum_{1}^{n} F_{ky} = 0; \qquad \sum_{1}^{n} F_{kz} = 0;$$
$$\sum_{1}^{n} m_x(\overline{F}_k) = 0; \qquad \sum_{1}^{n} m_y(\overline{F}_k) = 0; \qquad \sum_{1}^{n} m_z(\overline{F}_k) = 0. \tag{1.3}$$

Здесь n – число внешних сил, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$.

Первая строка содержит три уравнения, в левой части которых записана сумма проекций всех сил на оси координат x, y, z. Во второй строке записаны три уравнения в виде суммы моментов всех сил относительно осей координат x, y, z.

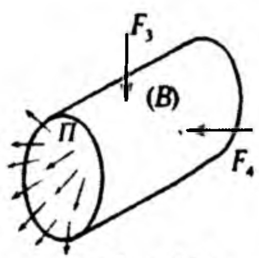


Рис. 1.7

Предположим, нас интересуют внутренние силы в поперечном сечении стержня. Проведем плоскость $П–П$ перпендикулярно продольной оси x в этом сечении и мысленно отбросим одну из частей стержня, например часть (A). Оставшаяся часть стержня показана на рис. 1.7. В поперечном сечении стержня выявились внутренние силы, непрерывно распределеные по нему. Закон распределения этих сил мы не знаем, но из курса теоретической механики нам известно, что любую систему сил можно привести к главному вектору и главному моменту, выбрав некоторый центр приведения. В качестве центра приведения удобно использовать центр тяжести поперечного сечения O, в нем же расположим начало локальной системы координат (рис. 1.8).

Обозначим проекции главного вектора R на оси координат через $N = R_x$, $Q_y = R_y$, $Q_z = R_z$, а проекции главного момента M через M_x, M_y, M_z.

Напомним, что проекция вектора главного момента некоторой системы сил на координатную ось равна сумме моментов всех этих сил относительно данной оси. Поэтому проекции M_x, M_y, M_z можно рассматривать как сумму моментов всех внутренних сил относительно осей x, y, z соответственно.

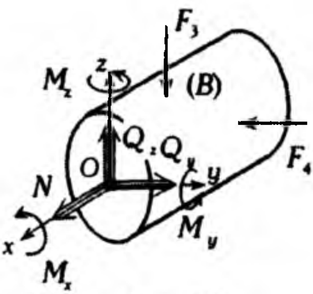


Рис. 1.8

Проекцию N в дальнейшем будем называть *продольной силой*, проекции Q_y, Q_z – *поперечными силами*, момент M_x – *крутящим моментом*, а моменты M_y и M_z – *изгибающими моментами*, а все вместе – внутренними силовыми факторами.

Так как часть (B), находящаяся под воздействием сил F_3, F_4 и внутренних силовых факторов, должна быть в состоянии равновесия, то для нее также можно записать уравнения равновесия в виде (1.3). Сделаем это, выделив отдельно внутренние силовые факторы:

$$N + \sum_1^r F_{kx} = 0; \quad Q_y + \sum_1^r F_{ky} = 0; \quad Q_z + \sum_1^r F_{kz} = 0;$$

$$M_x + \sum_1^r m_x(\overline{F}_k) = 0; \quad M_y + \sum_1^r m_y(\overline{F}_k) = 0; \tag{1.4}$$

$$M_z + \sum_1^r m_z(\overline{F}_k) = 0.$$

Здесь r – число внешних сил, оставшихся на части (B). Если на часть (B) действуют нагрузки в виде пар сил, то их моменты войдут в соответствующие уравнения. Таким образом, из уравнений (1.4) можно определить составляющие главного вектора и главного момента внутренних сил. Эти внутренние усилия представляют воздействие отброшенной части (A) на оставшуюся часть (B). Так как действие равно противодействию, то на часть (A) действуют такие же, но противоположно направленные внутренние силы.

В дальнейшем, при изучении каждого вида деформации стержня, на технике вычисления внутренних усилий остановимся более детально.

1.4. Напряжения, перемещения, деформации

Мерой, характеризующей интенсивность распределения внутренних сил по сечению, является *напряжение*. Для его нахождения выполним все операции метода сечений, т.е. разрежем тело на две части, отбросим одну из частей, заменим воздействие отброшенной части внутренними усилиями, которые мы считаем (на основе предположения о сплошности тела) непрерывно распределенными по всей площади поперечного сечения. Выделим после этого на поперечном сечении малую площадку (рис. 1.9). Обозначим внутреннее усилие, приходящиеся на эту площадку, через ΔF. Отношение $\Delta F/\Delta A$ называют *средним полным напряжением* на этой площадке. Размерность этого напряжения совпадает с размерностью поверхностной нагрузки, давления $[F]/[L^2]$. Обычно напряжения измеряются в паскалях ($1\ Па = 1\ Н/м^2$), в килопаскалях ($1\ кПа = 10^3\ Па$), в мегапаскалях ($1\ МПа = 10^6\ Па$), в гигапаскалях ($1\ ГПа = 10^9\ Па$); встречаются еще другие единицы, например $1\ кГ/см^2 \cong 0{,}1\ МПа$; $1\ кГ/мм^2 \cong 10\ МПа$.

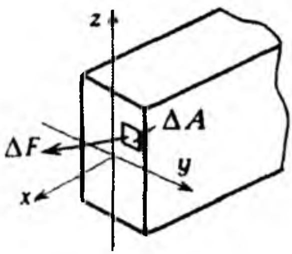


Рис. 1.9

Полное напряжение f определяется выражением

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = f.$$

Вектор полного напряжения разложим на две составляющие: *нормальную* к площадке (*нормальное напряжение*) и *касательную*, лежащую в плоскости площадки (*касательное напряжение*) (рис. 1.10). Касательное напряжение, в свою очередь, может быть разложено на две составляющие, направленные вдоль координатных осей.

Нормальные напряжения будем обозначать символом σ (сигма) с индексом, указывающим параллельно какой оси оно направлено. *Касательные напряжения* τ вводим с двумя индексами: первый характеризует направление напряжения, а второй – площадку, нормаль к которой совпадает с направлением соответствующей оси.

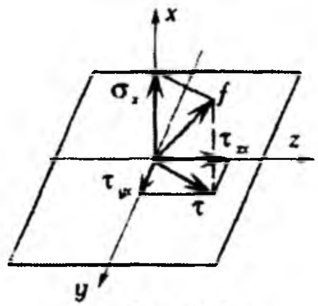


Рис. 1.10

Запишем связь этих напряжений с внутренними силовыми факторами (рис. 1.11). Пусть координаты площадки dA, на которой действуют напряжения $\sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx}$, равны y, z. Продольная сила N, действующая вдоль оси x, равна сумме проекций всех элементарных внутренних усилий $\sigma_x dA$ на ось x. Заменяя суммирование интегрированием, получим

$$N = \int_A \sigma_x dA, \tag{1.5}$$

аналогично

$$Q_y = \int_A \tau_{yx} dA, \quad Q_z = \int_A \tau_{zx} dA. \tag{1.6}$$

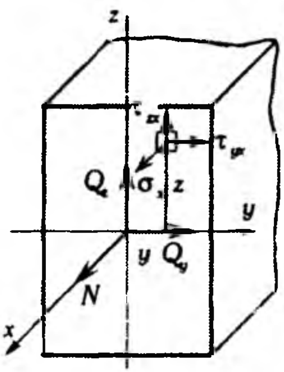


Рис. 1.11

Изгибающие моменты M_z и M_y (они на рис. 1.11 не показаны) определим через сумму моментов элементарных внутренних усилий $\sigma_x dA$ (усилия $\tau_{yx} dA$ и $\tau_{zx} dA$ моментов относительно осей y и z не создают):

$$M_z = \int_A \sigma_x y dA, \quad M_y = \int_A \sigma_x z dA. \tag{1.7}$$

Крутящий момент относительно продольной оси (также не показан)

$$M_x = \int_A (\tau_{zx} y - \tau_{yx} z) dA. \tag{1.8}$$

Если из нагруженного внешними силами тела произвольной формы мысленно вырезать в окрестности заданной точки бесконечно малый параллелепипед с размерами ребер dx, dy, dz, то на гранях этого элемента буде действовать система напряжений, показанная на рис. 1.12 и состоящая из трех нормальных и шести касательных напряжений. Аналогичная система напряжений действует и на невидимых гранях элемента. Совокупность всех этих напряжений определяет *напряженное состояние* в точке.

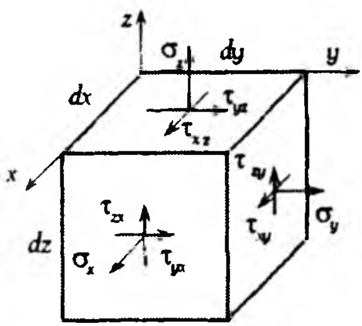


Рис.1. 12

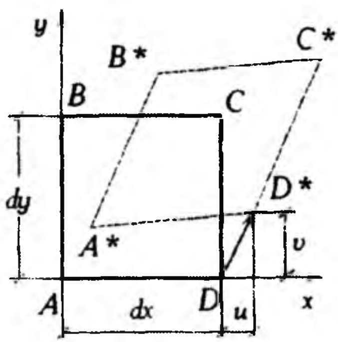


Рис. 1.13

Понятие о напряженном состоянии в точке является важнейшим в курсе сопротивления материалов, более детально этот вопрос изложен в главе 3.

Рассмотрим теперь *деформации* элементарного параллелепипеда от воздействия напряжений.

Пусть грань $ABCD$ имеет размеры dx на dy до деформации (рис. 1.13). При нагружении элемента точки A, B, C, D получат перемещения и займут, соответственно положения A^*, B^*, C^*, D^* в некоторой неподвижной системе координат. Полное перемещение любой точки (например D) в плоскости xy разложим на две составляющие u и v по направлению осей x и y, соответственно. Стороны AD и AB изменят свою длину и станут равными A^*D^* и A^*B^*, соответственно. Так как элемент $ABCD$ бесконечно малый, то кривизной этих сторон, возникающей при деформировании, можно пренебречь.

Разности $\Delta(dx) = A^*D^* - AD$ и $\Delta(dy) = A^*B^* - AB$ называются *удлинениями* в направлении осей x и y, соответственно.

Линейные деформации определим по формулам

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx} \quad \text{и} \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta(dy)}{dy}. \tag{1.9}$$

Угол BAD до деформации был прямым, после деформации он исказился и стал острым. Величина, равная искажению прямого угла при деформации, называется *угловой деформацией* или *углом сдвига*

$$\gamma_{xy} = \angle BAD - \angle B^* A^* D^* .$$

Индексы здесь характеризуют плоскость, в которой происходит сдвиг. Аналогичным образом можно рассмотреть деформации двух других граней параллелепипеда. В результате мы получим перемещения точек u, v, w вдоль координатных осей, три линейные деформации ε_x, ε_y, ε_z и три угловые деформации γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}, которые и характеризуют деформированное состояние в точке.

1.5. Линейные системы. Принцип независимости действия сил

Еще в 1676 году Р.Гук опубликовал предположение о линейной, прямо пропорциональной зависимости перемещения от прилагаемой к телу силы.

Пусть, например, на закрепленное связями тело действует сила F (рис. 1.14). Под воздействием этой силы тело деформируется (см. пунктир) и точка M получает перемещение $\Delta\bar{r}$, вектор которого имеет три проекции u, v, w на оси координат x, y, z, соответственно.

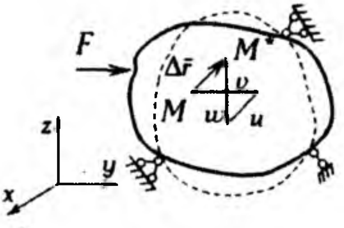


Рис. 1.14

По Гуку любое из этих перемещений связано линейной зависимостью с силой F:

$$u = \delta_x \cdot F,$$
$$v = \delta_y \cdot F, \qquad (1.10)$$
$$w = \delta_z \cdot F.$$

Коэффициенты пропорциональности δ_x, δ_y, δ_z зависят не только от физических свойств материала, но и от взаимного расположения точки M и точки приложения силы, а также от конфигурации тела и особенностей его закрепления. Таким образом, зависимости (1.10) следует рассматривать как закон Гука для *системы*. Закон Гука в современной трактовке, определяющей линейную связь между напряжениями и деформациями для каждого *материала*, будет рассмотрен позднее.

В (1.10) коэффициенты δ_x, δ_y, δ_z не зависят от величины приложенной силы F, т.е. если, например, сила F увеличивается в два раза, то и соответствующие перемещения также возрастут в два раза.

Системы, поведение которых описывается зависимостями в форме (1.10), называются *линейными*, они подчиняются *принципу суперпозиции* или *принципу независимости действия сил*. В соответствии с этим принципом перемещения (а также внутренние усилия) считаются независящими от порядка приложения внешних сил: если к системе приложено несколько сил, то можно определить перемещения (внутренние силы, напряжения) от каждой силы в отдельности, а затем просто суммировать результаты.

Докажем это. Пусть, например, на некоторое тело действуют две силы F_1 и F_2. Для нахождения перемещения некоторой точки A по заданному направлению x от сил F_1 и F_2 в отдельности используем зависимость в форме (1.10):

$$\begin{aligned} u_1 &= \delta_{x_1} \cdot F_1, \\ u_2 &= \delta_{x_2} \cdot F_2. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Коэффициенты δ_{x_1} и δ_{x_2} конечно различны, так как силы F_1 и F_2 приложены к разным точкам системы, но они не зависят от величины этих сил. Рассмотрим теперь совместное действие сил F_1 и F_2. Пусть в начале действует сила F_1, затем F_2. Тогда перемещение точки A можно представить в виде

$$u_A = \delta_{x_1} \cdot F_1 + \delta^*_{x_2} \cdot F_2 . \tag{1.12}$$

Коэффициент δ_{x_1} здесь остается без изменений, так как сила F_1 действует вначале одна, без силы F_2, что и предполагалось в выражении (1.11). Коэффициент $\delta^*_{x_2}$ соответствует воздействию силы F_2 при наличии силы F_1. Если $\delta^*_{x_2} \neq \delta_{x_2}$, то это означает, что коэффициент δ_{x_2} зависит от силы F_1, что противоречит закону (1.10). Следовательно $\delta^*_{x_2} = \delta_{x_2}$, так как выражение (1.12) должно переходить во второе уравнение (1.11) при $F_1 = 0$. Таким образом, принцип независимости действия сил для линейных систем доказан.

В заключение первого раздела отметим следующее.

1. Рассмотренные в этой главе понятия о модели твердого деформированного тела, о внутренних силовых факторах в стержне, напряжениях, деформациях и перемещениях являются основополагающими для всего курса и

на них будет базироваться все последующее изложение. Поэтому желательно при рассмотрении этих вопросов в последующих главах возвращаться каждый раз к первой главе.

2. Инженер при оценке прочности конструкции или механизма должен составить соответствующую расчетную схему. При переходе от реального объекта к его расчетной схеме проводится неизбежная идеализация геометрической формы, опорных устройств и закреплений, механического поведения материала, расположения и характера действия внешних нагрузок и принимаются некоторые предположения о распределении деформаций и напряжений. Здесь мы не затрагиваем эти весьма непростые вопросы перехода к расчетной схеме, полагая, что студенту на первом этапе задан не реальный объект, а его расчетная схема.

ГЛАВА 2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

2.1. Продольная сила

Если внутренние силы в поперечном сечении стержня статически эквиваленты равнодействующей, направленной вдоль продольной оси, то этот стержень испытывает деформацию растяжения или сжатия. Эту равнодействующую мы условились называть *продольной силой*.

Продольную силу будем считать положительной при растяжении, когда она направлена от сечения, и отрицательной при сжатии. Для ее определения используется метод сечений.

Вычислим, например, продольную силу в некотором произвольном

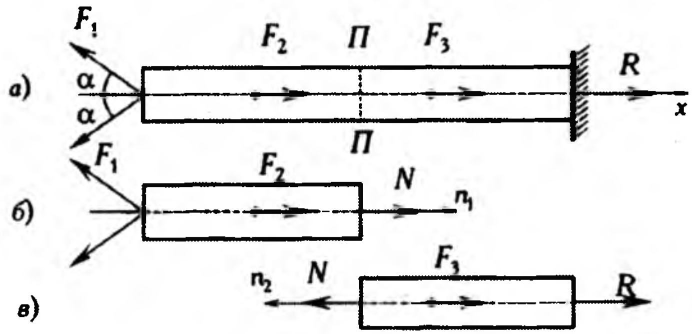


Рис. 2.1

сечении $П–П$ стержня, изображенного на рис. 2.1. Разделим стержень сечением $П–П$ на две части, к каждой из которых, кроме соответствующих внешних сил, приложим продольную силу N, как результат действия одной части стержня на другую (рис. 2.1, *б*, *в*). Предположим, что продольная сила N положительная. Тогда на рис. 2.1, *б* и рис. 2.1, *в* она должна быть направлена от сечения, и вектор N на этих рисунках должен совпадать с направлением внешней нормали к сечению. Если же в результате расчета получим значения N со знаком минус, то это будет означать, что фактически стержень в сечении $П–П$ не растянут, а сжат.

Запишем уравнения равновесия для каждой из частей стержня, спроецировав все силы на соответствующую нормаль к сечению. Для левой части:

$$\sum F_{n_1} = 0; \quad N - 2F_1\cos\alpha + F_2 = 0.$$

Откуда найдем

$$N = 2F_1\cos\alpha - F_2. \tag{2.1, а}$$

Для правой части: $\sum F_{n_2} = 0; \quad N - F_3 - R = 0$. Откуда

$$N = F_3 + R. \tag{2.1, б}$$

Выражения (2.1, *а*) и (2.1, *б*) дают, конечно, совершенно одинаковые значения продольной силы, так как из условия равновесия для всего стержня следует, что $2F_1\cos\alpha - F_2 = F_3 + R$.

Нетрудно заметить, что в первой формуле (2.1, *а*) продольная сила связана с суммой проекций на продольную ось всех внешних сил, приложенных только к левой части бруса (рис. 2.1, *б*), а во второй (2.1, *б*) – к правой (рис. 2.1, *в*). Эти проекции можно подсчитать, не записывая уравнения равновесия для каждой из частей бруса. Отсюда вытекает следующее правило для определения продольной силы.

Продольная сила равна алгебраической сумме проекций на продольную ось всех внешних сил, лежащих по одну сторону от сечения.

Сокращенно это правило запишем так:

$$N = \sum F_{x.пр} = \sum F_{x.лев}, \tag{2.2}$$

где $\sum F_{x.пр}$ – алгебраическая сумма внешних сил, лежащих правее, а $\sum F_{x.лев}$ – левее сечения (рис. 2.1, *а*). Знак слагаемых в формулах (2.2) определяется направлением действия внешних сил и положителен, если сила направлена от сечения, т.е. вызывает в нем растяжение.

Часто необходимо знать продольную силу во всех поперечных сечениях стержня. Для этого строится график, показывающий изменение продольной силы по длине стержня, который называется *эпюрой продольных сил* (эпюра N).

Построение эпюры N рассмотрим на примере (рис. 2.2). Разобъем стержень на участки. Границами участков служат сечения, в которых приложены внешние силы или реакции опор. Таких участков в данном примере будет три. Вначале вычислим продольную силу в сечении 1–1:

$$N_1 = \sum F_{x.лев} = +2F_1\cos\alpha = 480 \ кН \text{ (растяжение)}.$$

Очевидно, такое же значение продольная сила будет иметь в любом сечении на первом участке длиной l_1.

Для построения эпюры N на других участках вычислим продольную силу в сечениях 2–2 и 3–3.

$$N_2 = \sum F_{x.\text{лев}} = +2F_1\cos\alpha - F_2 = -520 \text{ кН (сжатие)};$$

$$N_3 = \sum F_{x.\text{лев}} = +2F_1\cos\alpha - F_2 + F_3 = +280 \text{ кН (растяжение)}.$$

По этим значениям строим эпюру N по длине стержня, откладывая полученные значения N на каждом участке вверх (для положительных N) или вниз (для отрицательных N) от оси стержня в выбранном масштабе.

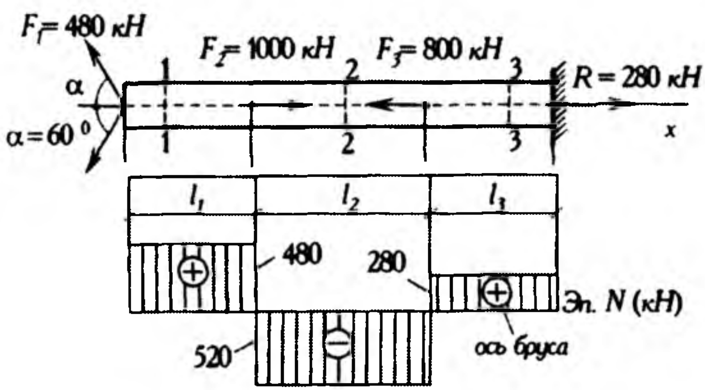


Рис. 2.2

Отметим, что мы построили эпюру N не вычисляя реакцию опоры R. Эту реакцию можно было определить как обычно, составив уравнение равновесия для всего бруса. Проецируя все силы на ось x, получим $-2F_1\cos\alpha + F_2 - F_3 + R = 0$, отсюда найдем $R = 280$ кН. Однако после того, как продольная сила около опоры была найдена, можно легко найти и реакцию R, если учесть, что продольная сила N_3 равна также сумме проекций внешних сил справа от третьего сечения, т.е. реакции R.

2.2. Напряжения в поперечных сечениях

Для вычисления нормальных напряжений σ_x, характеризующих интенсивность внутренних сил в поперечном сечении, запишем интегральное соотношение (1.5)

$$N = \int_A \sigma_x dA. \qquad (2.3)$$

Интегральное соотношение (2.3) позволяет вычислить среднее напряжение по площади поперечного сечения A.

Для проверки прочности необходимо знать напряжение в каждой точке, т.е. закон распределения напряжений σ_x по поперечному сечению. Для этого привлечем дополнительные условия, связанные с особенностями деформирования бруса. Они были предложены Д.Бернулли в виде допущения – гипотезы плоских сечений: *поперечные сечения плоские до нагружения остаются плоскими и перпендикулярными продольной оси при действии нагрузки*.

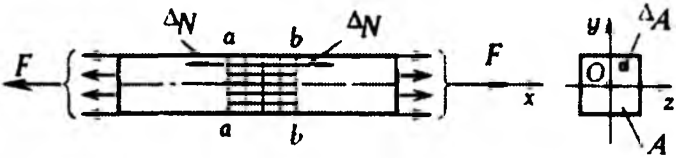


Рис. 2.3

Представим, что стержень (рис. 2.3) на участке *a–b* состоит из продольных волокон, каждое из которых имеет одну и ту же площадь ΔA. Согласно гипотезе плоских сечений удлинения этих волокон, заключенных между сечениями *a–a* и *b–b*, будут одинаковы. Естественно, одинаковы будут и усилия в каждом из волокон и на каждой площадке ΔA.

Следовательно, *нормальное напряжение в поперечном сечении при осевом растяжении или сжатии одинаково во всех точках поперечного сечения*. Поэтому из (2.3) найдем $N = \sigma_x \int_A dA = \sigma_x \cdot A$, откуда

$$\sigma_x = \frac{N}{A}. \qquad (2.4)$$

Знак нормального напряжения в поперечном сечении σ определяется знаком продольной силы N. Оно положительно при растяжении и отрицательно при сжатии.

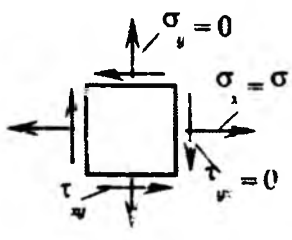


Рис. 2.4

Обратим внимание, что при нагружении стержня не нарушается ортогональность сетки, образованной поперечными и продольными линиями (рис. 2.3). Это означает, что угловые деформации в продольных и поперечных сечениях отсутствуют. Поэтому можно предположить, что касательные напряжения в поперечных и продольных сечениях равны нулю $(\tau_{xy} = \tau_{yx} = 0)$.

Поскольку все продольные волокна деформируются одинаково и не нагружены в поперечном направлении, то можно считать, что нормальные напряжения в продольных сечениях равны нулю ($\sigma_y = 0$). Элементарный объем, выделенный продольными и поперечными сечениями (рис. 2.4), будет испытывать действие только нормальных напряжений в поперечном сечении. Такое напряженное состояние будем называть линейным. Несмотря на простоту, оно встречается довольно часто и не только при растяжении бруса.

Следует заметить, что поперечные сечения могут искривляться около мест приложения нагрузки. Поэтому на этих участках гипотеза плоских сечений неприменима. Здесь напряжения, называемые местными, будут зависеть от способа приложения нагрузки. Как показывают расчеты, выполненные без использования гипотезы плоских сечений, зона, в которой местные напряжения меняются от точки к точке (неоднородное напряженное состояние) занимают область примерно равную большему размеру поперечного сечения. Это положение, известное как принцип Сен-Венана, позволяет определять напряжения при помощи формулы (2.4) в сечениях, несколько удаленных от мест приложения нагрузок и опорных устройств, независимо от конкретных условий передачи нагрузок.

Это же выражение используется для вычисления нормальных напряжений в стержне, сечения которого монотонно изменяются по длине. Однако для такого стержня гипотеза плоских сечений не выполняется, и такой расчет будет лишь приближенным.

2.3. Деформации. Закон Гука

Рассмотрим прямой стержень постоянного сечения из однородного изотропного материала, во всех сечениях которого действует одна и та же продольная сила $N = F$ (рис. 2.5).

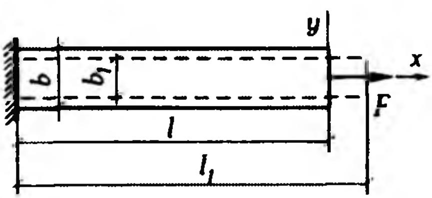


Рис. 2.5

При положительной продольной силе длина стержня l увеличивается до значения l_1, а поперечный размер b уменьшается до b_1.

Удлинение стержня

$$\Delta l = l_1 - l. \qquad (2.5)$$

Сужение стержня $$\Delta b = b_1 - b. \tag{2.6}$$

Для однородно деформированного стержня, когда деформации во всех точках стержня одинаковы, продольная деформация

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}, \tag{2.7}$$

поперечная деформация

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta b}{b}. \tag{2.8}$$

Закон Гука для материала имеет вид

$$\sigma_x = E\varepsilon_x. \tag{2.9}$$

Эта зависимость записана для линейного напряженного состояния и является фундаментальной в сопротивлении материалов.

Коэффициент пропорциональности E в формуле закона Гука (2.9) называют *модулем продольной упругости*, используют иногда и другие названия: модуль упругости, модуль Юнга, модуль упругости 1-го рода.

Модуль продольной упругости E – физическая постоянная материала, характеризующая его жесткость. Поскольку деформация ε_x безразмерна, модуль упругости имеет размерность напряжения и измеряется, обычно, в *МПа*, *ГПа*.

Значение E для некоторых конструкционных материалов приведено в таблице 2.1. Для сталей разных марок модуль упругости практически не зависит от термической обработки и химического состава стали. Большинство материалов следует закону Гука до тех пор, пока нормальные напряжения не превысят некоторого порогового значения, называемого *пределом пропорциональности* $\sigma_{пц}$.

Поперечная деформация ε_y зависит от продольной ε_x. Опытным путем установлено, что при растяжении или сжатии отношение поперечной деформации к продольной – величина постоянная для каждого материала. Абсолютная величина этого отношения (для $\sigma < \sigma_{пц}$) называется *коэффициентом Пуассона*

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}. \tag{2.10}$$

При более высоких напряжениях $\left(\sigma > \sigma_{пц}\right)$ это отношение изменяется, и его иногда называют коэффициентом поперечной деформации.

Ниже приводятся ориентировочные значения E, ν, $\sigma_{пц}$ для некоторых материалов. Заметим, что в отличие от E и ν, предел пропорциональности

$\sigma_{пц}$ для металлов зависит от химического состава и термической обработки, что определяет широкий диапазон его изменения.

Зная упругие постоянные E, ν, можно вычислить изменение размеров однородно деформированного стержня. Из (2.7) найдем $\Delta l = \varepsilon_x l$, но по закону Гука (2.9) $\varepsilon_x = \sigma / E = N / (AE)$. Отсюда удлинение или укорочение равно

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}. \tag{2.11}$$

Здесь N – продольная сила на участке стержня длиной l; A – площадь поперечного сечения; E – модуль упругости.

Модуль продольной упругости E, коэффициент Пуассона ν и предел пропорциональности $\sigma_{пц}$ некоторых материалов

Таблица 2.1

Материал	$E \times 10^{-5}$, *МПа*	ν	$\sigma_{пц}$, *МПа*
Сталь углеродистая	2÷2,1	0,24÷0,33	200÷700
Сталь легированная	~2,1	0,25÷0,32	250÷800
Чугун	0.8÷1,0	0,23÷0,27	~180 (сжатие)
Медные сплавы	1,0÷1,3	0,31÷0,34	180÷350
Алюминиевые сплавы	0,69÷0,7	0,32÷0,36	80÷300
Дерево вдоль волокон	0,08÷0,16	–	~10
Текстолит	0,06÷0,1	–	~20
Резина техническая	$\sim 8\cdot 10^{-5}$	~0,5	–

Зависимость (2.11) используется в тех случаях, когда на участке стержня длиной l значения N и A постоянны. Произведение EA называют *жесткостью стержня при растяжении (сжатии) или осевой жесткостью стержня.*

Сужение стержня

$$\Delta b = \varepsilon_y b = -\nu \frac{\sigma b}{E} = -\nu \frac{Nb}{EA}. \tag{2.12}$$

Как и все зависимости, куда входит модуль упругости E, данная справедлива только в случае, если напряжения в поперечном сечении не превышают предела пропорциональности.

2.4. Перемещения сечений

Пусть стержень AB (рис. 2.6) закреплен в сечении, проходящем через точку A на продольной оси. После нагружения стержень будет деформирован, и все сечения, за исключением A, получат некоторые перемещения вдоль оси x. Перемещение u вдоль оси x будем считать положительным, если оно совпадает с направлением оси. Очевидно, что перемещение некоторого сечения, проходящего через точку K, будет определяться изменением длины участка $AK = x$. Используя (2.11), запишем

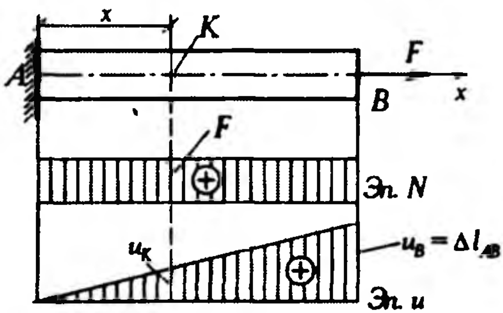


Рис. 2.6

$$u_K = \Delta l_x = \frac{Nx}{EA}. \qquad (2.13)$$

Таким образом, при однородном деформировании стержня $(\sigma = \text{const})$ смещение сечения пропорционально расстоянию от места закрепления. Эпюра u, отражающая смещения сечений стержня, показана на рис. 2.6 внизу. Для ее построения удобно вычислить наибольшее перемещение, которое получит сечение B, равное удлинению всего стержня

$$u_B = \Delta l_{AB} = \frac{Nl}{EA}.$$

В случае необходимости следует учесть и перемещения, связанные с изменением температуры

$$\overset{*}{u}_K = \alpha x \Delta T; \qquad \overset{*}{u}_B = \alpha l \Delta T. \qquad (2.14)$$

Здесь α – коэффициент линейного расширения; ΔT – изменение температуры. Как было отмечено, формула (2.11) действительна при однородном деформировании стержня, т.е. когда $N = \text{const}$, $A = \text{const}$, $E = \text{const}$. В случае ступенчатого изменения одной (или нескольких) из этих величин, стержень следует разделить на участки однородного деформирования, а изменение длины или смещение получить суммированием удлинений, вычисленных для отдельных участков. Другими словами, изменение длины стержня $\Delta l_{общ}$, состоящего из m участков, на каждом из которых N_i, A_i, E_i постоянны, будет равно

$$\Delta l_{общ} = \sum_{i=1}^{i=m} \frac{N_i l_i}{E_i A_i} + \sum_{i=1}^{i=m} \alpha_i l_i \Delta t_i \ . \qquad (2.15)$$

П р и м е р. Для стержня, рассмотренного ранее (см. рис. 2.2), построить эпюры σ, u и вычислить удлинение всего стержня.

Д а н о: $A = 40$ $см^2$; $E = 2 \cdot 10^5$ *МПа*; $l_1 = 2$ *м*; $l_2 = 3$ *м*; $l_3 = 1{,}5$ *м* (рис. 2.7, *а*).

Вычислим нормальные напряжения в поперечных сечениях на 1-м, 2-м и 3-м участках. Продольные силы принимаем по рис. 2.2.

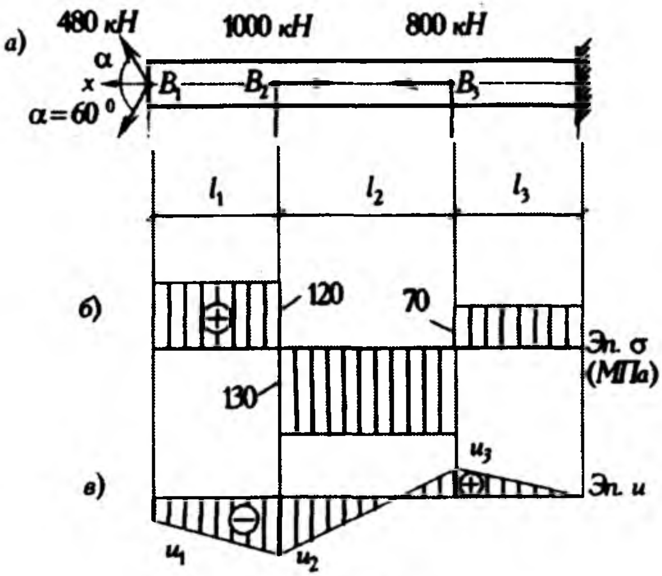


Рис. 2.7

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A} = \frac{480 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^{-4}} = 120 \ МПа;$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A} = \frac{-520 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^{-4}} = -130 \ МПа;$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{N_3}{A} = \frac{280 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^{-4}} = 70 \ МПа.$$

Эпюра σ показана на рис. 2.7, *б*. Определим удлинения каждого участка:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA} = \frac{480 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 40 \cdot 10^{-4}} = 12 \cdot 10^{-4} \ м = 1{,}2 \ мм;$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA} = \frac{-520 \cdot 10^3 \cdot 3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 40 \cdot 10^{-4}} = -19{,}5 \cdot 10^{-4}\ м = -1{,}95\ мм;$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA} = \frac{280 \cdot 10^3 \cdot 1.5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 40 \cdot 10^{-4}} = 5{,}25 \cdot 10^{-4}\ м = 0{,}525\ мм.$$

Вычислим перемещения точек приложения сил:

$$u_3 = \Delta l_3 = 0{,}525\ мм;$$

$$u_2 = \Delta l_3 + \Delta l_2 = -1{,}425\ мм;$$

$$u_1 = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = -0{,}225\ мм.$$

Эпюра перемещений показана на рис. 2.7, *в*. Перемещения сечений влево приняты за положительные. Полное удлинение стрежня $\Delta l_{общ} = u_1 = -0{,}225$ *мм*.

2.5. Влияние собственного веса

Допустим, что вертикальный стержень постоянного сечения находится под воздействием собственного веса и силы F (рис. 2.8). Пусть длина стержня равна l, площадь поперечного сечения A, плотность материала ρ, модуль упругости E.

Каждая единица объема такого бруса будет нагружена объемным весом $\gamma = \rho g$, где ускорение свободного падения $g = 9{,}81\ м/с^2$.

Вычислим продольную силу в произвольном сечении *а–а*:

$$N = \sum F_{x\,ниж} = F + P_x = F + \gamma x A.$$

Здесь P_x – вес отсеченной части бруса.

Продольная сила изменяется по длине по линейному закону. Для построения эпюры N вычислим продольную силу в двух сечениях:

при $x = 0$ $N = F$; при $x = l$ $N_{max} = F + \gamma l A = F + P$, где P – полный вес стержня (рис. 2.8).

Нормальное напряжение σ также изменяется по длине стержня по линейному закону

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} + \gamma x. \tag{2.16}$$

Оно достигает наибольшего значения в месте закрепления стержня, при $x = l$:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} + \gamma l. \tag{2.17}$$

Из выражения (2.16) видно, что учет собственного веса сводится к суммированию напряжений от внешних воздействий (здесь сосредоточенная сила F) и напряжений от собственного веса. Напряжения от собственного веса стержня постоянного сечения $\left(\sigma_{св} = \gamma x\right)$ зависят только от материала и длины стержня и не зависят от площади поперечного сечения. Следовательно, изменением площади сечения невозможно обеспечить прочность стержня, нагруженного собственным весом. При малой длине стержня напряжения от собственного веса малы и могут не учитываться какова бы ни была площадь и общий вес элемента.

Подсчитаем, например, напряжения только от собственного веса в свободно подвешанном стальном тросе длиной $l = 1000$ *м* ($\rho = 7800$ *кг/м*^{3}, $g = 9{,}81$ *м/с*^{2})

$$\gamma = \rho g = 7{,}6 \;\; кН/м^3 \; ; \;\; \sigma_{max} = \gamma l = 76{,}6 \cdot 10^3 \cdot 1000 = 76{,}6 \; МПа.$$

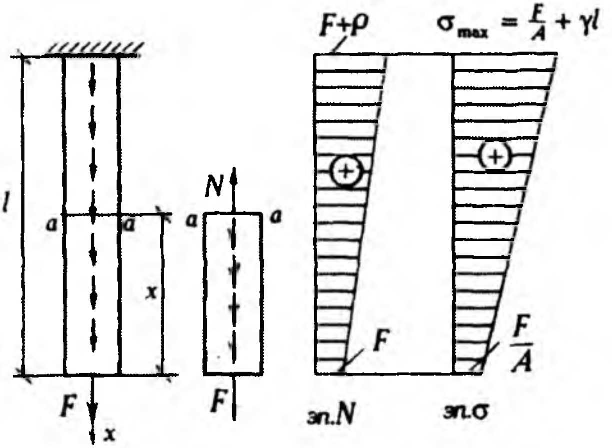


Рис. 2.8

Уменьшить эти напряжения за счет изменения диаметра троса невозможно.

При подсчете деформаций растянутых или сжатых стержней от собственного веса следует учитывать, что деформации, как и напряжения, переменны по длине. На участке длиной dx этим изменением можно пренебречь, и тогда абсолютное удлинение участка длиной dx будет равно

$$\Delta(dx) = \varepsilon_x \cdot dx = \frac{\sigma_x \cdot dx}{E} = \frac{F}{EA}dx + \frac{\gamma x}{E}dx. \tag{2.18}$$

Полное удлинение бруса получим, интегрируя по длине l

$$\Delta l = \int_0^l \left(\frac{F}{EA}dx + \frac{\gamma x}{E}dx \right) = \frac{Fl}{EA} + \frac{\gamma l^2}{2E}. \tag{2.19}$$

Так как собственный вес стержня равен $P = \gamma l A$, то последнюю формулу приведем к виду

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} + \frac{P\,l}{2EA}. \tag{2.20}$$

Таким образом, удлинение от собственного веса в 2 раза меньше удлинения от такой же внешней силы, приложенной к концу стержня.

Выражение (2.19) показывает, что полное удлинение можно определить отдельно от внешних сил и отдельно от собственного веса, а затем просуммировать результаты.

2.6. Механические характеристики материалов

Методы определения механических характеристик материалов регламентированы государственными стандартами. В частности, ГОСТом определены форма и размеры образцов для испытания металла на растяжение. Один из таких круглых образцов показан на рис. 2.9. Концы образца имеют специальную форму для закрепления в захватах испытательной машины. Испытывается собственно лишь средняя (рабочая) часть образца. Длина, на которой измеряется деформация, отмечается рисками (A, B на рис. 2.9).

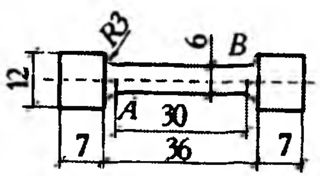


Рис. 2.9

Испытания проводят на разрывных или универсальных машинах с механическим или гидравлическим приводом. Почти все испытательные машины снабжены устройством для записи *диаграммы растяжения* – зависимости между прикладываемой к образцу растягивающей силой F и удлинением образца Δl. В процессе испытания на растяжение нагрузка на образец возрастает достаточно медленно от нуля до своего конечного значения. Такое нагружение можно считать *статическим*. При этом возрастает и удлинение образца. Диаграмма растяжения для низкоуглеродистой строительной стали типа Ст 3 показана на рис. 2.10.

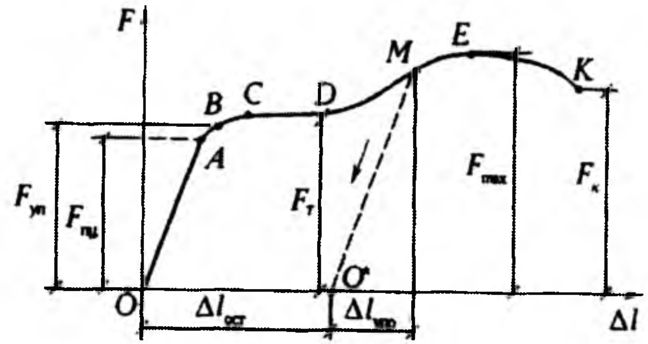


Рис. 2.10

В начальной стадии нагружения наблюдается линейная зависимость между нагрузкой F и удлинением Δl, что соответствует закону Гука в виде (2.11). Эта прямо пропорциональная зависимость сохраняется до точки A, соответствующей *пределу пропорциональности* материала. Сам предел

пропорциональности – это нормальное напряжение в поперечном сечении при силе $F = F_{пц}$

$$\sigma_{пц} = \frac{F_{пц}}{A_0}. \tag{2.21}$$

Таким образом, закон Гука можно использовать только в тех случаях, если напряжения в поперечном сечении стержня меньше предела пропорциональности.

Если нагрузка, приложенная к образцу, меньше значения $F_{уп}$ (точка B), то процессы нагружения и разгрузки идут по одной и той же линии OB. Поэтому при разгрузке образца в нем не возникают остаточные деформации. Если нагрузить образец нагрузкой $F > F_{уп}$ (см., например, точку M на диаграмме), а затем произвести разгрузку, то этот процесс будет идти по прямой MO^* (пунктир на рисунке) параллельной OA. После полного снятия нагрузки (точка O^*) в образце исчезнет удлинение $\Delta l_{упр}$ и сохранится остаточное пластическое удлинение $\Delta l_{ост}$.

Нормальное напряжение, соответствующее точке B на диаграмме, называется *пределом упругости*, он равен

$$\sigma_{уп} = \frac{F_{уп}}{A_0}. \tag{2.22}$$

Если в растягиваемом стержне нормальные напряжения в поперечном сечении меньше предела упругости, то материал стержня можно считать упругим. У большинства материалов предел упругости незначительно отличается от предела пропорциональности и их часто принимают равными.

При дальнейшем повышении нагрузки от $F_{уп}$ (точка B) до $F_т$ (точка C на диаграмме) наступает стадия *текучести* материала, когда деформации образца нарастают при постоянной нагрузке $F_т$. На этой стадии происходит резкое увеличение деформаций образца и развиваются значительные пластические деформации. Поэтому часто образование зон текучести в элементах конструкций считается опасным. Нормальное напряжение в момент текучести образца называют *пределом текучести* и определяют его как

$$\sigma_т = \frac{F_т}{A_0}. \tag{2.24}$$

Предел текучести является одной из основных характеристик прочности мягкой стали. Легированные стали и многие цветные металлы не имеют свойства текучести. В этих случаях определяют условный предел текучести. Существуют несколько предложений по его определению. Одно из них заключается в том, что за условный предел текучести принимают нормальное напряжение в поперечном сечении образца, которое после полного снятия нагрузки дает определенную относительную остаточную пластическую деформацию, например, равную 0,002 (см. рис. 2.13).

На стадии текучести меняется механизм деформирования металла: если при упругих деформациях изменение *длины образца происходит* за счет увеличения расстояний между атомами в кристаллической решетке, то при пластических деформациях доминирующую роль играет скольжение (сдвиги) в кристаллах. На поверхности полированного образца при развитии пластических деформаций можно заметить систему тонких так называемых линий Людерса – Чернова, наклоненных под углом около 45^0 к оси образца. В дальнейшем покажем, что при растяжении образца по этим направлениям возникают максимальные касательные напряжения. Наблюдаемые на поверхности линии скольжения представляют следы кристаллографических плоскостей, по которым происходит сдвиг. Физическая картина деформирования и разрушения материалов (металлов, кристаллов, бетонов, полимеров, композитов) является весьма сложной и изучается в специальных курсах физики твердого тела.

После того, как стадия текучести материала на линии CD заканчивается (эта линия называется площадкой текучести), наступает вторая стадия упрочнения, при которой для дальнейшего роста удлинения образца требуется увеличение нагрузки. По максимальной нагрузке F_{max} подсчитывается *предел прочности* или временное сопротивление

$$\sigma_в = \frac{F_{max}}{A_0} . \qquad (2.25)$$

Таким образом, *пределом прочности называют нормальное напряжение, соответствующее максимальной нагрузке, предшествующей разрушению.* Это вторая очень важная характеристика прочности материала.

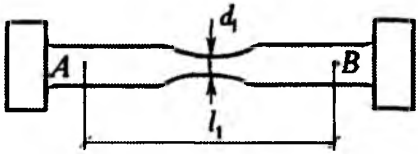


Рис. 2.11

Падение нагрузки на участке EK диаграммы объясняется появлением в образце местного уменьшения площади поперечного сечения, так называемой шейки (рис. 2.11). До точки E диаграммы образец деформировался так, что рабочая часть сохраняла цилиндрическую форму, а площадь поперечного сечения равномерно уменьшалась по всей длине его.

В момент разрыва (точка K на рис. 2.10) подсчитывается истинное напряжение

$$\sigma_и = \frac{F_к}{A_1}. \qquad (2.25)$$

Здесь A_1 – площадь поперечного сечения, подсчитанная по диаметру d_1 в самом узком месте шейки (см. рис. 2.11). Это напряжение существенно больше временного сопротивления, хотя нагрузка в момент разрыва меньше максимальных значений. Подсчитанное по формуле (2.25) напряжение $\sigma_и$ является средним в сечении шейки. После образования шейки напряжения в поперечном сечении диаметром d_1 уже не распределяются равномерно.

По замеренным после испытания размерам l_1 и d_1 (см. рис. 2.11) вычисляются *характеристики пластичности* материала после разрыва: относительное удлинение

$$\delta = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100\% \qquad (2.26)$$

и относительное сужение

$$\psi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} \cdot 100\%. \qquad (2.27)$$

Здесь l_0 и l_1 – длины рабочей части; A_0 и A_1 – площади поперечного сечения образца до нагружения и после разрыва, соответственно.

На рис. 2.10 был показан процесс разгрузки образца по линии MO^* (пунктир). Если теперь начать повторное нагружение образца от точки O^*, то этот процесс нагружения будет идти примерно по линии O^*M, а затем по кривой MEK. При втором нагружении образец уже не будет иметь зоны текучести, а его пределы пропорциональности и упругости (около точки M на диаграмме) станут заметно выше. Таким образом, предварительная пластическая деформация существенно изменяет механическое поведение материала и его характеристики. Это явление получило название *наклепа*.

Если ординаты диаграммы растяжения (нагрузка) разделить на начальную площадь поперечного сечения, а ее абсциссы (удлинения) на начальную длину рабочей части образца, то мы получим условную диаграмму напряжений в координатах $\sigma - \varepsilon$ (рис. 2.12), которая отличается от диаграммы растяжения только масштабами, так как A_0 и l_0 – постоянные величины. На участке OA $\sigma = E\varepsilon$, следовательно, $\operatorname{tg}\alpha = E$.

В процессе растяжения площадь поперечного сечения образца все время уменьшается. Подсчитывая прочностные характеристики материала по начальной площади, мы совершаем определенные ошибки. Они будут незначительны для напряжений $\sigma_{пц}$, $\sigma_{уп}$ и $\sigma_т$, но могут быть существенны при нахождении предела прочности и напряжения в момент разрыва. В связи с этим, строится *истинная* диаграмма напряжений, в которой напряжения подсчитываются по площади, определенной в соответствующий момент нагружения образца. Такая диаграмма показана на рис. 2.12 пунктиром.

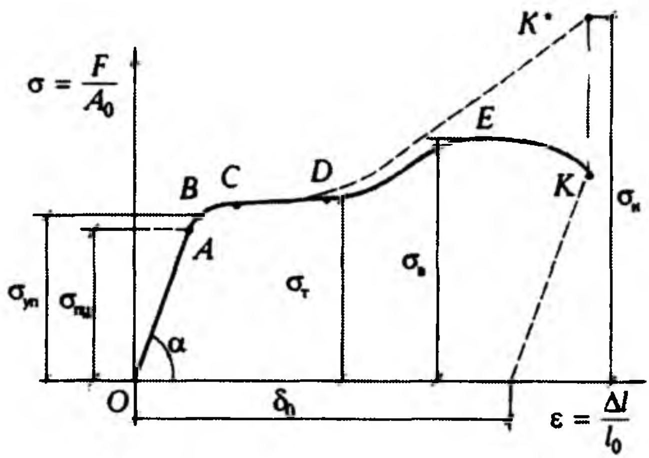


Рис. 2.12

Типичный вид диаграммы напряжений для материалов, не имеющих площадки текучести, показан на рис. 2.13. Здесь предел пропорционально-

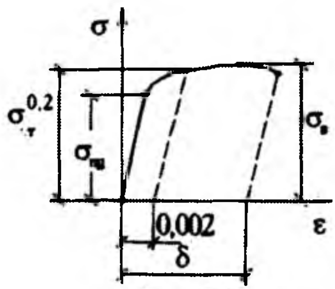


Рис. 2.13

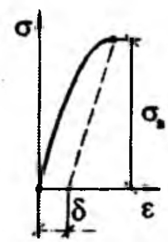


Рис. 2.14

сти и условный предел текучести могут заметно отличаться друг от друга. Для хрупких материалов разрушение происходит без образования шейки, поэтому в этих случаях диаграмма напряжений не имеет ниспадающей ветви (рис. 2.14).

Для испытаний материала на сжатие изготавливают короткие цилиндрические образцы, у которых высота $h \leq 3d$ (сталь, чугун, цветные металлы). При большей высоте может произойти искривление. Образцы из дерева, бетона, цементного камня и др. изготавливают в виде кубиков, размер ребер которых определяется ГОСТом. Типичные диаграммы сжатия некоторых материалов и вид разрушенных образцов показаны на рис. 2.15.

Мягкая сталь, а также медь, мягкий алюминий при сжатии не разрушаются, на их диаграмме сжатия отмечается площадка, соответствующая пределу текучести $\sigma_т$, который примерно совпадает с соответствующим пределом при растяжении. После появления пластических деформаций образец приобретает бочкообразную форму, площадь его поперечного сечения и нагрузка возрастают. Хрупкие материалы (чугун, бетон) при сжатии разрушаются, при этом пределы прочности их существенно выше, чем при растяжении.

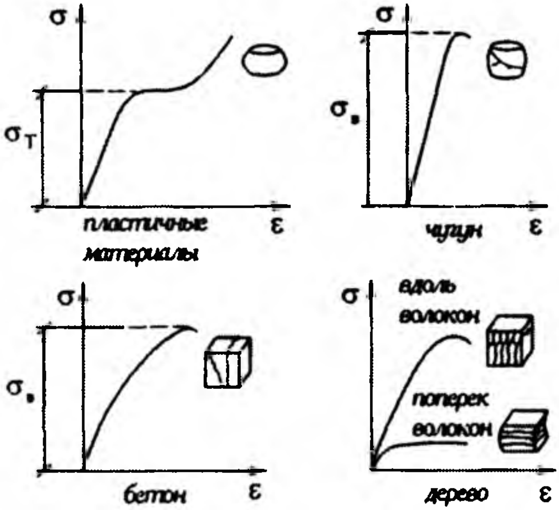


Рис. 2.15

Дерево при сжатии вдоль волокон выдерживает существенно большие нагрузки, чем при сжатии поперек волокон, и разрушается с образованием складок на поверхности. При сжатии поперек волокон дерево прессуется и выдерживает большие деформации. Поэтому за условный предел прочности принимается напряжение в момент, когда образец укоротился на $1/3$ своей начальной высоты. Дерево является ярким примером анизотропного материала.

Механические характеристики на растяжение и сжатие не являются неизменными параметрами материала, они зависят от температуры, термической и механической обработки, радиоактивного облучения, скорости деформирования и некоторых других факторов.

Как правило, при повышенных по сравнению с комнатной температурах характеристики прочности (пределы пропорциональности, упругости, текучести, прочности) понижаются, а характеристики пластичности (относительные остаточные удлинения и сужения) увеличиваются. При очень низких температурах появляется повышенная хрупкость, которая называется хладноломкостью. Термическая обработка – закалка – дает эффект, аналогичный понижению температуры: прочностные характеристики возрастают, но характеристики пластичности уменьшаются. При ускоренном нагружении возрастают предел текучести и временное сопротивление; механическая обработка приводит к наклепу. Влияние радиоактивного облучения аналогично понижению температуры и зависит от дозы. Более подробно эти вопросы рассматриваются в курсах материаловедения.

Многие материалы (полимеры, бетон, свинец – при комнатной температуре; стали различных марок, цветные металлы – при повышенных температурах) обладают *ползучестью, под которой понимается рост деформаций во времени при постоянных напряжениях*. Типичные кривые ползучести образцов показаны на рис. 2.16. Для их построения образцы материала нагружают постоянной нагрузкой, фиксируют сразу же после нагружения "мгновенную" деформацию ε_0, которая может быть упругой или упруго-пластической, а затем в течении длительного времени (от нескольких часов до нескольких лет) замеряют постепенно увеличивающиеся деформации ползучести. Кривые ползучести часто имеют три характерных участка: AB – стадия неустановившейся ползучести, когда скорость роста деформаций $d\varepsilon / dt = \dot{\varepsilon}$ постепенно уменьшается; BC – стадия установившейся ползучести, здесь $\dot{\varepsilon} = \text{const}$, CD – стадия, предшествующая разрушению, на этом участке скорость деформаций ползучести возрастает.

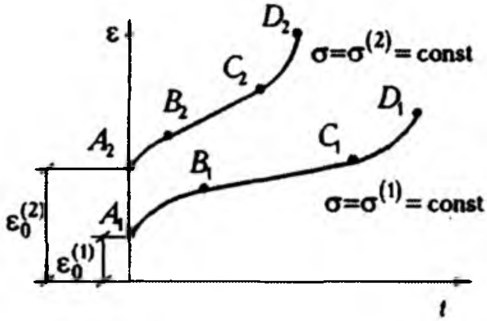


Рис. 2.16

Если провести серию испытаний на ползучесть при равных значениях напряжений и зафиксировать время, по истечению которого образец разрушится, то можно постро ить кривую длительной прочности материала (рис. 2.17). Эта кривая на оси σ_t – отсекает отрезок σ_B, равный пределу прочности материала при кратковременных, т.е. обычных испытаниях. Пределом длительной прочности σ_t называют напряжение, при котором материал разрушается не ранее заданного времени. Это понижение предела прочности материала за время работы сооружения необходимо учитывать в расчетах.

Если деформировать образец так, чтобы его деформация ε_0 оставалась постоянной во времени, то в образце будут постепенно уменьшаться напряжения. Результаты таких опытов оформляются в виде кривой *релаксации* (рис. 2.18). *Под релаксацией*

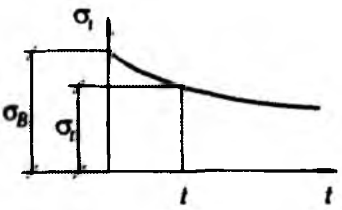


Рис. 2.17

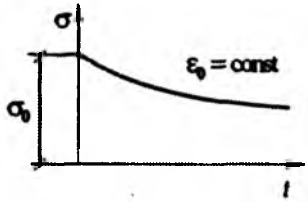


Рис. 2.18

понимается уменьшение напряжений с течением времени при постоянной деформации. С этим явлением связано, например, ослабление натяжения болтов.

В загруженных конструкциях приходит перераспределение усилий, напряжений, перемещений и деформаций, связанное с ползучестью и релаксацией материала. Поэтому необходимо вести расчет с учетом этих временных факторов. Методы таких расчетов рассматриваются в курсе "Теория ползучести".

2.7. Методики расчета на прочность элементов машин и сооружений

Под методикой расчета на прочность понимают набор необходимых условий, обеспечивающих надежное функционирование конструкции. В настоящее время нормами проектирования узаконены две методики расчета на прочность: в машиностроении – *расчет по допускаемым напряжениям*, в строительстве – *расчет по предельным состояниям*. Эти методики детально рассматриваются в курсах специальных дисциплин. Здесь приведем их краткое описание.

А. Методика расчета по допускаемым напряжениям

Расчет производится от нагрузок и воздействий, возникающих в стадии эксплуатации конструкции. Условие прочности, записанное для стержня в условиях деформации растяжения в виде

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \le [\sigma] , \qquad (2.28)$$

требует, чтобы действующее максимальное напряжение было ограничено величиной допускаемого напряжения $[\sigma]$; при этом N_{max} вычисляется от предусмотренных нормами эксплуатационных нагрузок, то есть

$$N_{max} = \sum N_i \ ,$$

где N_i – продольная сила от каждой из действующих нагрузок.

Допускаемое напряжение определяется составителями норм по формуле

$$[\sigma] = \sigma_{оп} / n \ ,$$

где $\sigma_{оп}$ – опасное напряжение (для хрупких материалов $\sigma_{оп} = \sigma_в$, для пластичных $\sigma_{оп} = \sigma_т$); n – коэффициент запаса ($n > 1$), учитывающий возможное отклонение исходных данных и результатов расчета от действительного состояния конструкции. Коэффициент запаса связан с необходимостью учета следующих факторов: неполное соответствие принятой расчетной схемы и действительного состояния конструкции; отклонение действительных нагрузок от принятых в расчете; разброс механических характеристик реального материала и связанная с этим неточность определения $\sigma_{оп}$, возможные случайные отклонения размеров конструкции от принятых в расчете; влияние степени ответственности сооружения и т.п.

Недостатком методики расчета по допускаемым напряжениям является попытка использования одного числа – коэффициента запаса – для учета многочисленных факторов расчетной неопределенности.

Б. Методика расчета по предельным состояниям

При проектировании строительных конструкций методика расчета по предельным состояниям применяется с 1955 года. В ней единый коэффициент запаса заменен системой из нескольких коэффициентов, раздельно и более гибко учитывающих условия возведения и эксплуатации конструкций, изменчивость нагрузок, прочностных характеристик материалов и др.

Предельным называется такое состояние конструкции, при котором она перестает удовлетворять заданным требованиям эксплуатации или изготовления.

Строительные нормы и правила (СНиП) предусматривают две группы предельных состояний:

1) по потере несущей способности или полной непригодности к эксплуатации;

2) по непригодности к нормальной эксплуатации.

Расчеты по второй группе предельных состояний включают в себя деформационные ограничения конструкции (ограничения перемещений, амплитуд колебаний, трещинообразования в железобетонных конструкциях и т.п.). Эти расчеты учитывают действие так называемых *нормативных на-*

грузок (т.е. возникающих при нормальной эксплуатации) и принципиально не отличаются от аналогичных расчетов по методике допускаемых напряжений.

Целью расчетов по первой группе предельных состояний является ограждение конструкции от возможного разрушения при действии *расчетных нагрузок*, учитывающих возможное случайное отклонение (в неблагоприятную сторону) от их нормативных значений. Если P – расчетная нагрузка на сооружении, а $P^{н}$ – соответствующая нормативная, то

$$P = P^{н}\gamma_f , \tag{2.29}$$

где γ_f – *коэффициент надежности по нагрузке* (старое название – коэффициент перегрузки). Обычно $\gamma_f > 1$. Важным обстоятельством является то, что для нагрузок различного происхождения (например, собственный вес, вес оборудования, снеговая, ветровая нагрузки и т.д.) нормами предусмотрены *разные* значения коэффициента γ_f. Поэтому при расчете на растяжение стержня условие прочности записывается так:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \le R\gamma_c . \tag{2.30}$$

Здесь $N_{max} = \sum N_i^{н}\gamma_{fi}$; $N_i^{н}$ – продольная сила от i-й нормативной нагрузки; γ_{fi} – коэффициент надежности по нагрузке для i-й нагрузки.

Расчетное сопротивление R выражается по формуле

$$R = R^{н} / \gamma_m ,$$

где $R^{н}$ – *нормативное сопротивление* (для пластичных материалов $R^{н} = \sigma_т$, для хрупких $R^{н} = \sigma_в$); γ_m – коэффициент надежности по материалу, учитывающий случайные отклонения свойств материала и ряд других факторов, γ_c – коэффициент условий работы, отражающий влияние температуры, агрессивности среды, степени отличия расчетной схемы от реальной конструкции и др.

В некоторых нормативных документах на проектирование конструкций вместо условия прочности в форме (2.30) используется более общая запись

$$N_{max} \le N_{пред} . \tag{2.30, а}$$

Здесь $N_{пред}$ – предельное усилие, которое может воспринять рассчитываемый элемент.

Если материал стержня однородный (металл, дерево, неармированные пластмассы и др.), то

$$N_{пред} = AR\gamma_c.$$

В этом случае выражения (2.30) и (2.30, *а*) ничем не отличаются друг от друга.

В дальнейших расчетах будем считать $\gamma_c = 1$. Если материал стержня неоднородный (железобетон, армированные пластики), то используется условие прочности в форме (2.30, *а*), а для нахождения $N_{пред}$ (или других внутренних усилий при иных деформациях стержня) применяются методы механики неоднородных сплошных сред, излагаемых в специальных курсах. Эти вопросы здесь не рассматриваются.

Отметим, что важнейшим отличием расчетов по первой группе предельных состояний от расчетов по методике допускаемых напряжений является различие значений γ_f для каждой нагрузки.

Действительно, если принять все γ_f одинаковыми, то $N_{max} = \gamma_f \sum N_i^н$. Подставляя это выражение в формулу (2.30), получим

$$\gamma_f \frac{\sum N_i^н}{A} \le \frac{R^н}{\gamma_m}\gamma_c$$

или

$$\frac{\sum N_i^н}{A} \le \frac{R^н}{\gamma_f \gamma_m}\gamma_c,$$

то есть формулу (2.28), так как $R^н = \sigma_{оп}$, а $\gamma_f\,\gamma_m/\gamma_c$ можно заменить одним коэффициентом n.

Условия прочности в виде (2.28) или (2.30) используются при решении следующих задач.

1. *Проектная задача или подбор сечения.* В этом случае по заданным внешним воздействиям определяется N_{max}, подбирается материал, т.е. устанавливаются $[\sigma]$ или R. Затем из условия прочности определяются размеры поперечного сечения. Если задача решается с учетом собственного веса, то из выражений (2.17) и (2.30) следует, что

$$A \ge \frac{F}{R - \gamma l}.$$

2. *Эксплуатационная задача или определение грузоподъемности.* Конструкция реально существует, значит известны $[\sigma]$ или R, размеры поперечного сечения, т.е. A. Требуется определить максимально допускаемые нагрузки. В этом случае по формулам (2.28) или (2.30) вначале определяется N_{max}, а затем устанавливают связь N_{max} с внешними силами на основе уравнений равновесия для соответствующей системы.

3. *Поверочный расчет*. При известных нагрузках, площади поперечного сечения определяется напряжение σ_{max}, которое сравнивается с допускаемым напряжением или расчетным сопротивлением, после чего делается вывод о состоянии конструкции.

2.8. Потенциальная энергия деформации

При нагружении тела точки приложения внешних сил перемещаются. Так, например, на рис. 2.19 точка приложения силы F переместится вправо на величину Δ, равную абсолютному удлинению стержня Δl. На этом перемещении сила F совершает работу W. В результате этой работы в стержне накапливается упругая энергия деформирования U. При статическом действии нагрузки кинетической энергией K можно пренебречь. Тогда при упругом деформировании баланс энергии будет иметь вид

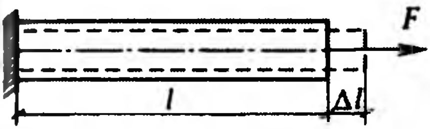


Рис. 2.19

$$W = U\ , \tag{2.31}$$

т.е. работа внешних сил целиком преобразуется в потенциальную энергию деформации. При разгрузке тела работа производится за счет освобождения потенциальной энергии. Так, например, потенциальная энергия заводной пружины часового механизма используется для работы часов.

В процессе возрастания силы F от нуля до заданного значения стержень удлиняется от нуля до значения Δl, т.е. в процессе перемещения сила F не постоянна.

Известно, что в пределах пропорциональности справедлив закон Гука

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA}\ .$$

Связь усилия $F = N$ и абсолютного удлинения стержня определяется законом прямой линии (рис. 2.20). Поскольку на пути Δl сила F не остается постоянной, работу определим интегрированием по элементарным участкам пути $d(\Delta l)$. На этом участке элементарная работа будет равна $dW = F^* \cdot d(\Delta l) = dS$ – площади заштрихованной трапеции. Полная работа W, очевидно будет равна площади треугольника OBC, т.е.

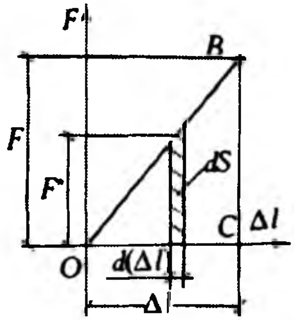


Рис. 2.20

$$W = \frac{F \cdot \Delta l}{2}. \quad (2.32)$$

При упругом деформировании стержня можно воспользоваться законом Гука, тогда из (2.31) и (2.32) получим

$$U = \frac{N^2 l}{2EA}. \quad (2.33)$$

Удельная потенциальная энергия, накапливаемая в единице объема стержня,

$$u = \frac{N^2 l}{2EA \cdot V} = \frac{N^2}{2EA^2} = \frac{\sigma_z^2}{2E} = \frac{\sigma_z \varepsilon_z}{2}. \quad (2.34)$$

Таким образом, при линейном напряженном состоянии удельная потенциальная энергия равна половине произведения нормального напряжения на продольную деформацию.

Если продольная сила (или площадь A) меняется по длине стержня, то для нахождения потенциальной энергии используется интегральное соотношение

$$U = \int_0^l \frac{N^2 dx}{2EA}. \quad (2.35)$$

Если рассмотреть растяжение образца вплоть до разрушения, то очевидно, что затраченная работа будет равна площади диаграммы растяжения, заключенной между осью удлинения и самой диаграммой. Разделив эту полную работу на объем рабочей части образца $V = A_0 l_0$, получим удельную работу разрушения, которая характеризует способность материала аккумулировать энергию разрушения.

2.9. Расчет статически неопределимых систем с растянутыми (сжатыми) элементами

Рассмотрим несколько стержневых систем, изображенных на рис. 2.21: двухстержневую ферму-кронштейн (рис. 2.21, *а*), абсолютно жесткий брус, поддерживаемый стержнем-подвеской (рис. 2.21, *б*) и ферму с треугольной решеткой (рис. 2.21, *в*).

Несмотря на различие этих систем, их объединяют два общих свойства. Во-первых, все они *геометрически неизменяемые*, то есть перемещения

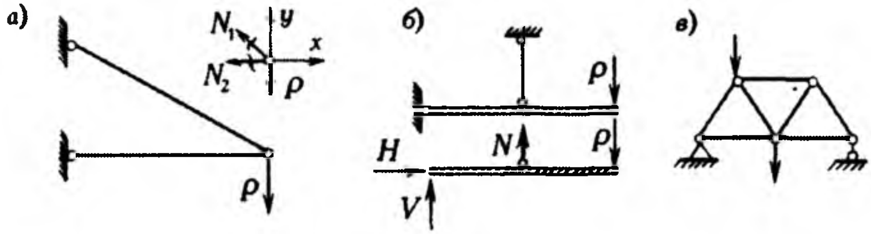


Рис. 2.21

любых точек систем под влиянием внешних воздействий (например, под действием изображенных сил) происходят *только* за счет деформаций элементов. Во-вторых, показанные системы являются *статически определимыми*. Это значит, что для определения *всех* неизвестных внутренних усилий и реакций необходимо и достаточно использовать *только* условия равновесия (то есть уравнения статики) всего сооружения в целом или отдельных его частей. Действительно, два усилия в элементах кронштейна можно найти, решая систему двух уравнений равновесия узла; усилие в подвеске, удерживающей абсолютно жесткий брус – из условия равновесия этого бруса; усилия в стержнях фермы – поочередно рассматривая равновесие узлов (способ вырезания узлов) либо равновесие части фермы по одну сторону от разреза (способ проекций и моментной точки).

Наряду со статически определимыми, широкое применение в строительстве и машиностроении находят и *статически неопределимые системы*. Последние характеризуются тем, что для определения внутренних усилий и реакций использования одних лишь уравнений равновесия оказывается недостаточно.

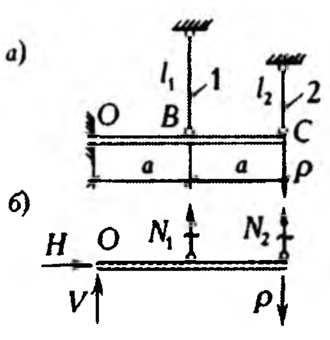


Рис. 2.22

Пример статически неопределимой системы показан на рис. 2.22, *а*. В ее составе – горизонтальный абсолютно жесткий брус (рис. 2.22, *б*), находящийся под действием заданной силы, а также четырех неизвестных сил:

опорные реакции в шарнире (V и H) и усилия в двух подвесках (N_1 и N_2). В данном случае можно записать только три независимых уравнений статики (например, $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum m_0(F) = 0$), из которых невозможно найти все четыре неизвестных усилия (можно найти одну силу $H = 0$ из уравнения $\sum F_x = 0$, остается два уравнения с тремя неизвестными). Если представляет интерес лишь усилия в подвесках, то можно ограничиться одним уравнением $\sum m_0(F_x) = 0$, содержащим два неизвестных: N_1 и N_2.

Количество схем различных статически неопределимых систем бесконечно велико. На рис. 2.23 представлено несколько возможных схем. Трехстержневая плоская ферма (рис. 2.23, *а*) позволяет составить два уравнения равновесия узла ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$) с тремя неизвестными N_1, N_2, N_3. Стержень, защемленный по концам (рис. 2.23, *б*) – одно уравнение ($\sum F_{kx} = 0$) с двумя неизвестными $H_в$ и H_c. Абсолютно жесткая плита, поддерживаемая четырьмя подвесками (рис. 2.23,*в*) – три уравнения равновесия для пространственной системы параллельных сил ($\sum F_z = 0, \sum m_x(F) = 0, \sum m_y(F) = 0$) с четырьмя неизвестными N_1, N_2, N_3 и N_4.

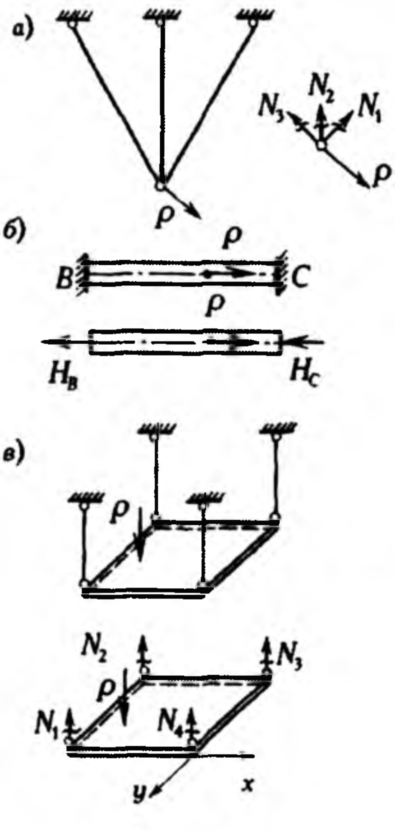


Рис. 2.23

Для сложных стержневых систем применяется понятие внешней и внутренней статической неопределимости. Например, ферма, изображенная на рис. 2.24, *а* внешне статически неопределима в связи с наличием четырех опорных стержней, а значит и четырех неизвестных реакций при трех уравнениях статики. Если опорные реакции будут найдены, то расчет усилий во всех стержнях можно произвести как в обычной статически определимой ферме. Наоборот, ферма на рис. 2.24, *б* внутренне статически неопределима, так как реакции находятся из уравнений статики, а для определения усилий в стержнях одних лишь уравнений статики недостаточно. Очевидно, что могут существовать системы одновременно внешне и внутренне статически неопределимые.

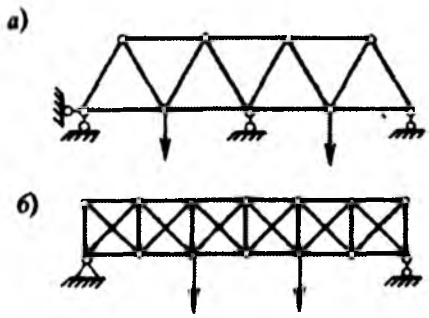


Рис. 2.24

Обратим внимание на то, что все статически неопределимые системы, изображенные на рис. 2.22 и 2.23 обладают одним общим качеством: у каждой из них число всех неизвестных на единицу превышает число возможных уравнений статики. О таких системах говорят, что их *степень статической неопределимости* равна единице или что системы *один раз статически неопределимы*. Кроме них существуют системы, степень статической неопределимости которых равна двум, трем и т.д. Здесь рассматриваются лишь один раз статически неопределимые системы.

Вернемся к системе, изображенной на рис. 2.22, *а*. Единственное уравнение равновесия, содержащее только неизвестные N_1 и N_2:

$$\sum m_0(F) = N_1 a + N_2 \cdot 2a - P \cdot 2a = 0$$

или

$$N_1 + 2N_2 = 2P. \qquad (a)$$

Теперь поставим вопрос: какое уравнение необходимо добавить к уравнению (a), чтобы затем, решая систему двух уравнений, найти искомые неизвестные усилия N_1 и N_2? Для ответа на этот вопрос проведем следующее рассуждение: назначим одно из усилий (например, N_1) произвольно, а второе усилие найдем из уравнения (a). Но для N_1 можно было принять другое значение и получить другую силу N_2. Очевидно, что таких сочетаний сил N_1 и N_2 возможно составить бесконечно много и каждое из них удовлетворяет уравнению равновесия (a). Как из этого множества сочетаний выявить то единственное, которое фактически реализуется в нашей конструкции?

Сначала покажем, почему не может реализоваться, скажем, такое сочетание: $N_1 = 0$, $N_2 = P$? Оно невозможно по следующей очевидной причине: при $N_1 = 0$ удлинение стержня $\Delta l_1 = 0$, а при $N_2 = P$ $\Delta l_2 \neq 0$. Значит первый стержень не удлинится и точка B должна остаться на месте. Второй стержень удлинится, поэтому точка C опустится. Но это невозможно, поскольку брус OBC абсолютно жесткий и при любых возможных поворотах его относительно точки O три точки (O, B и C)должны лежать на единой наклонной прямой. Тогда становится понятен смысл условия, которым следует дополнить уравнение (a): оно должно обеспечивать определенную увязку или совместность деформаций двух стержней, диктуемую схемой сооружения. Поэтому искомое дополнительное уравнение называется уравнением совместности деформаций или просто деформационным уравнением.

Итак, чтобы рассчитать любую статически неопределимую систему (решить статически неопределимую задачу) необходимо составить деформационное уравнение, выражающее связь между деформациями отдельных элементов системы (или их удлинениями или перемещениями точек системы).

Так как в первоначальном виде деформационное уравнение выражается через перемещения (или деформации, удлинения), то для возможности его использования при решении статически неопределимой задачи уравнение должно быть преобразовано и выражено через усилия. Для выполнения этого преобразования нужно обратиться к физической стороне задачи и принять во внимание определенную аналитическую связь между напряжениями и деформациями, выраженную графически диаграммой напряжений. Истинную диаграмму (см., например, рис. 2.12) представить в аналитической форме $\sigma = f(\varepsilon)$ затруднительно. Поэтому, для упрощения расчетов часто используют идеализированную *диаграмму Прандтля*, изображенную на рис. 2.25. Эта диаграмма, состоящая всего из двух прямолинейных участков, проста и в то же время достаточно хорошо отражает действительное поведение пластичного материала в реальных конструкциях. Как видно, диаграмма Прандтля распространяет зону

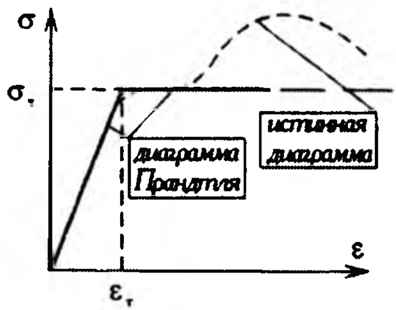


Рис. 2.25

действия закона Гука до $\sigma = \sigma_т$ после чего предполагается, что материал испытывает текучесть при любой деформации $\varepsilon > \varepsilon_т$.

Использование диаграммы Прандтля позволяет производить расчет статически неопределимых систем в двух возможных постановках.

А. Чисто упругая стадия работы материала – ни в одной из точек конструкции напряжения не достигают предела текучести, т.е. закон Гука остается справедливым всюду на протяжении всего загружения.

Б. Упруго-пластическая стадия работы материала, при которой в начальный период загружения материал работает в упругой стадии, а затем, по мере роста внешних сил, в отдельных или во всех элементах конструкции развивается текучесть при $\sigma = \sigma_т$.

Далее рассмотрим по отдельности каждую из двух указанных постановок.

А. Расчет статически неопределимых систем при упругой работе материала

Запишем деформационное уравнение для системы, изображенной на рис. 2.22, *а*. Положение абсолютно жесткого бруса до и после загружения показано на рис. 2.26. Ввиду малости перемещений, считаем что точки B и C смещаются перпендикулярно оси бруса, то есть вертикально вниз. Так как $BB_1 = \Delta l_1$, а $CC_1 = \Delta l_2$, то деформационное уравнение в данной случае имеет вид

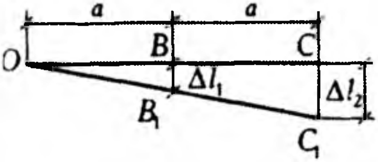


Рис. 2.26

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1$$

или, с учетом работы материала обеих подвесок в зоне только упругих деформаций,

$$\frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = 2\frac{N_1 l_1}{E_1 A_1}, \qquad (6)$$

где l_1, l_2 и $E_1 A_1$, $E_2 A_2$ – заданные длины и жесткости первой и второй подвесок, соответственно.

Таким образом, получаем деформационное уравнение, выраженное через неизвестные усилия N_1 и N_2.

Далее, решая совместно уравнения (a) и ($б$), находим искомые значения усилий N_1 и N_2:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= 2P \Big/ \left(1 + 4\frac{l_1}{l_2}\cdot\frac{E_2A_2}{E_1A_1}\right) \\ N_2 &= 4P\frac{l_1}{l_2}\cdot\frac{E_2A_2}{E_1A_1} \Big/ \left(1 + 4\frac{l_1}{l_2}\cdot\frac{E_2A_2}{E_1A_1}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (в)$$

По сравнению со статически определимыми все статически неопределимые системы обладают рядом отличительных свойств. Укажем три важнейших свойства на примере рассмотренной конструкции.

1-е свойство. *Усилия в стержнях статически неопределимой системы зависят не только от внешней нагрузки и расчетной схемы сооружения, но и от соотношения их жесткостей.*

Для данного примера это свойство иллюстрируется формулами (*в*). Как видно, при изменении соотношения жесткостей $E_2A_2/(E_1A_1)$ или площадей A_2/A_1 (при $E_2/E_1 = \text{const}$) происходит перераспределение усилий между двумя стержнями, поддерживающими горизонтальный брус. Отсюда следует, что для определения усилий в элементах статически неопределимой системы нужно знать соотношение между площадями сечений этих элементов или, при решении проектной задачи, предварительно задаться этим соотношением.

Если обе части первого равенства (*в*) поделить на A_1, а второго на A_2, то окажется, что $\sigma_{(1)} = N_1 / A_1 \neq \sigma_2 = N_2 / A_2$. Иначе говоря, какие бы отношения жесткостей не принимались, напряжения в первом и втором стержнях всегда будут разными. Таким образом, приходим к следующему важному выводу: *при проектировании статически неопределимой системы в общем случае невозможно образовать равнонапряженную конструкцию.*

В связи со сказанным возникает особенность при подборе сечений элементов статически неопределимой системы. Дело в том, что определяя площади A_i и ориентируясь на условие прочности $N_i/A_i \le R$, нельзя для *всех стержней* использовать выражение $A_i = N_i/R$, как это делалось для статически определимой системы. Необходимо обеспечить, чтобы полученные площади A_i удовлетворяли соотношениям, принятым заранее при вычислении N_i – в противном случае усилия N_i будут другими. Поэтому при подборе сечений в элементах статически неопределимой системе нужно найти площадь по формуле $A_i = N_i/R$ только для одного, наиболее напряженного стержня (он выявляется достаточно просто), а в остальных, менее напряженных стержнях площади вычисляются по заданным соотношениям.

2-е свойство. *В элементах статически неопределимой системы появляются усилия и напряжения, вызванные изменением температуры хотя бы одного из элементов* (температурные усилия и напряжения).

Прежде чем обратиться к статически неопределимым системам, поставим вопрос: как влияет изменение температуры какого-либо элемента на напряженное состояние статически определимой системы (к примеру рассмотрим ненагруженную конструкцию на рис. 2.21, *б*). Если температуру стержня-подвески изменить на $\pm\Delta t^0$, то в этом стержне не может появиться каких-либо усилий и напряжений, т.к. ничто не мешает ему удлиняться или укорачиваться, ведь связанный с ним горизонтальный брус свободно поворачивается вокруг своего опорного шарнира. Так же и в любой другой статически определимой системе: повышение (или понижение) температуры приводит лишь к небольшому изменению геометрической схемы сооружения, но не изменяет напряженного состояния.

Теперь обратимся к рассмотрению статически неопределимой системы, изображенной на рис. 2.22, *а*. При изменении температуры одного из стержней он сможет удлиняться или укорачиваться только преодолевая сопротивление другого стержня. Поэтому один из стержней окажется сжатым, а другой – растянутым температурными усилиями N_{1t} и N_{2t}, связанными уравнениями равновесия (*а*) при $P = 0$. Подобная ситуация, когда один стержень не может свободно деформироваться ввиду наличия других стержней, характерна для любой статически неопределимой системы

3-е свойство. *В элементах статически неопределимой системы появляются усилия и напряжения, вызванные сборкой конструкции из неточно изготовленных (по длине) элементов* (монтажные усилия и напряжения).

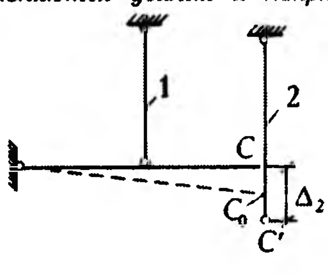


Рис. 2.27

Проиллюстрируем это свойство на примере статически неопределимой системы, изображенной на рис. 2.22, *а*. Пусть второй стержень был изготовлен длиннее проектного размера на Δ_2 (рис. 2.27). Для присоединения этого стержня к горизонтальному брусу сделаем так: к точке C' приложим направленную вверх силу P, сжимающую второй стержень, а к точке C бруса – такую же, но противоположно направленную силу, растягивающую первый стержень. Благодаря деформации первого и второго стержней зазор

CC' будет уменьшаться. Подберем такую величину силы P, чтобы полностью ликвидировать зазор, то есть соединить точки C и C' в некотором промежуточном положении C_0. Теперь второй стержень может быть соединен шарнирно с горизонтальным брусом, то есть завершена сборка конструкции. Созданные при сборке усилия в стержнях ($N_1 = 2P$, $N_2 = -P$ – см. уравнение (а)) и будут так называемыми монтажными усилиями.

Расчет статически неопределимой системы с учетом действующих внешних сил, изменения температуры и неточного изготовления стержней целесообразно проводить в следующем порядке:

1) изобразить на одном чертеже проектное положение системы и ее возможное деформированное состояние, указать (произвольно) направление искомых внутренних усилий;

2) составить необходимые уравнения равновесия с учетом принятых направлений внутренних усилий;

3) составить деформационное уравнение;

4) преобразовать деформационное уравнение с использованием выражения

$$\Delta l = \pm\left(\pm\frac{Nl}{EA} \pm \alpha l \Delta t^0 \pm \Delta\right).$$

Здесь знак плюс соответствует следующему:

перед скобками – увеличению длины стержня по принятой схеме деформирования.

перед Nl/EA – растягивающей силе N, принятой для данного стержня,

перед $\alpha l \Delta t^0$ – увеличению температуры стержня,

перед Δ – завышению длины изготовленного стержня против проектного значения.

В противоположных случаях ставится знак минус.

Б. Расчет статически неопределимых систем при упруго-пластической работе материала

Будем рассматривать состояние статически неопределимой системы (рис. 2.22, а) при изменении внешней силы P от нуля до P_{max} – силы, при которой будет исчерпана несущая способность конструкции. Материал подвесок считаем одинаковым и подчиняющимся диаграмме Прандтля (см. рис. 2.25). Также примем $l_1 = l_2 = l$. Тогда, при упругой работе материала, из формул (в) получим напряжения в подвесках

$$\sigma_{(1)} = \frac{2P}{A_1} \Big/ \left(1 + 4\frac{A_2}{A_1}\right).$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{4P}{A_1} \Big/ \left(1 + 4\frac{A_2}{A_1}\right).$$

Как видно, $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)}/2$, то есть вторая подвеска при любом значении силы P более напряжена. Следовательно, по мере увеличения силы P наступит момент, при котором $\sigma_{(2)}$ достигает предела текучести $\sigma_т$. Состояние конструкции, при котором в некоторой ее части напряжения достигают предела текучести, обычно считают опасным. Поэтому внешнюю силу P, вызвавшую такое состояние, назовем *опасной* – $P^{оп}$. Найдем $P^{оп}$ из формулы (a), учитывая, что $N_2 = \sigma_{(2)} A_2 = \sigma_т A_2$, а $\sigma_{(1)} = \sigma_т/2$, то есть $N_{(1)} = \sigma_т A_1/2$. Тогда

$$P^{оп} = \sigma_т (A_1/2 + 2A_2)/2. \qquad (г)$$

Определим $\alpha^{оп}$ – наклон абсолютно жесткого бруса, вызванный деформациями подвесок при силе $P = P^{оп}$. Так как при $P \le P^{оп}$ $\sigma_{(2)} \le \sigma_т$, для вычисления удлинений можно пользоваться формулой, основанной на законе Гука:

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA_2} = \frac{\sigma_т l}{E}. \qquad \text{Тогда} \quad \alpha^{оп} = \frac{\Delta l_2}{2a} = \frac{\sigma_т l}{2Ea}.$$

Поставим вопрос: можно ли продолжать увеличивать силу P после достижения значения $P^{оп}$? Иными словами, способна ли конструкция воспринимать силу $P > P^{оп}$ в условиях, когда материал второй подвески уже находится в состоянии текучести, то есть при максимально достижимом напряжении?

Так как при $P = P^{оп}$ $\sigma_{(1)} = \sigma_т/2$, то дальнейший рост напряжения и усилия в первой подвеске возможен до значений $\sigma_{(1)} = \sigma_т$ и $N_1 = \sigma_т A_1$. За счет возрастания усилия N_1 от $0{,}5\sigma_т A_1$ до $\sigma_т A_1$ силу P можно увеличить до максимального *предельного* значения $P^{пр}$, достигаемого при $\sigma_{(1)} = \sigma_{(2)} = \sigma_т$.

Таким образом, по формуле (a) имеем

$$P^{пр} = \sigma_т (A_1 + 2A_2)/2. \qquad (д)$$

Обратим внимание на то, что для расчета этой конструкции при $P \ge P^{оп}$ результат ($P^{пр}$) был получен без использования деформационного уравнения – только с помощью уравнения равновесия (a). Это объясняется тем, что при $P \ge P^{оп}$ $N_2 = \sigma_т A_2 = \text{const}$, то есть одно из внутренних усилий известно, а значит конструкция превратилась в статически определимую.

Для вычисления наклона бруса $\alpha^{пр}$, вызванного предельной силой, учтем, что при $P^{оп} < P \le P^{пр}$ в стадии действия закона Гука продолжал работать только материал первой подвески.

Тогда, при $P = P^{пр}$ имеем:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA_1} = \frac{\sigma_т l}{E};$$

$$\alpha^{пр} = \frac{\Delta l_1}{a} = \frac{\sigma_т l}{Ea} = 2\alpha^{оп}.$$

При действии предельной нагрузки грузоподъемность сооружения достигает максимума, наступает так называемое *состояние предельного равновесия* между внешними и внутренними силами. Это означает, что при малейшем превышении силой P значения $P^{пр}$ деформация подвесок начинает возрастать неограниченно, и сооружение теряет присущую ему геометрическую неизменяемость, превращаясь в механизм.

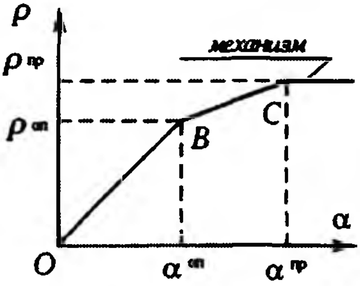


Рис. 2.28

Пусть, для примера, $A_1 = A_2 = A$. Тогда $P^{оп} = 1{,}25\sigma_т A$, а $P^{пр} = 1.5\sigma_т A$. Таким образом, грузоподъемность данной конструкции при расчете ее по предельной стадии повышается на 20% по сравнению с расчетом по опасной стадии.

Отметим, что для статически определимой системы опасная стадия работы совпадает с предельной, появление напряжений $\sigma = \sigma_т$ хотя бы в одной точке такой конструкции приводит к исчерпанию ее грузоподъемности и превращению в механизм. Поэтому изложенный расчет в упруго-пластической стадии имеет смысл лишь для статически неопределимых систем.

График связи действующей силы P с углом наклона бруса α изображен на рис. 2.28. Линия OB соответствует упругой работе обеих подвесок, а точка B – опасному состоянию конструкции. Линия BC отвечает работе левой подвески в упругой стадии и текучести правой подвески. Достижение предельного состояния, то есть невозможность дальнейшего увеличения силы P отражает точка C.

Для оценки прочности конструкции по опасному или предельному состояниям действующую силу P сравнивают с некоторыми допускаемыми значениями, заниженными по сравнению с $P^{оп}$ или $P^{пр}$ в связи с неоднородностью материала и неточностью определения его механических характеристик. Обычно вычисляют $P^{оп}_{доп}$ и $P^{пр}_{доп}$ также по формулам, подобным (г) и (д), но с заменой напряжения $\sigma_т$ на R. Тогда условия прочности имеют вид:

при расчете по опасному состоянию:

$$P \le P^{оп}_{доп} = P^{оп} \cdot \frac{R}{\sigma_т},$$

при расчете по предельному состоянию

$$P \le P^{пр}_{доп} = P^{пр} \cdot \frac{R}{\sigma_т}.$$

ГЛАВА 3. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ

3.1. Плоское напряженное состояние

В первой главе было отмечено, что напряженное состояние в точке в общем случае характеризуется тремя нормальными и шестью касательными напряжениями, действующими на гранях бесконечно малого параллелепипеда, мысленно вырезанного в окрестности исследуемой точки (см. рис. 1.12). Этот параллелепипед можно по разному ориентировать в пространстве, т.е. наклонять его грани по отношению к некоторой исходной системе координат. Очевидно, при этом на наклонных гранях будут новые значения нормальных и касательных напряжений, нахождение которых сводится к проблеме анализа напряженного состояния в точке. Рассмотрим эту проблему вначале для более простого случая – *плоского напряженного состояния*.

Это напряженное состояние возникает в тонких пластинках, лицевые поверхности которых свободны от нагрузок, на свободной (ненагруженной) поверхности любого тела, в балках при изгибе, при кручении валов и во многих других случаях.

При плоском напряженном состоянии две параллельные грани параллелепипеда свободны от напряжений, т.е. на них отсутствуют нормальные и касательные напряжения (рис. 3.1). Позднее будет показано, что в этом случае (когда свободная от напряжений грань перпендикулярна оси z) напряжения τ_{zx} и τ_{zy} на двух других гранях также должны отсутствовать.

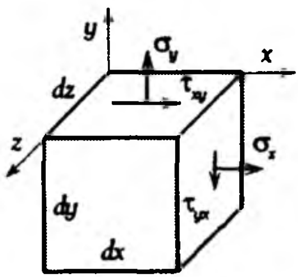


Рис. 3.1

Будем считать, что положительные нормальные напряжения направлены в сторону внешней нормали к соответствующей грани, т.е. они вызывают деформацию растяжения, а положительные касательные напряжения вращают элемент по часовой стрелке (при взгляде с положительного направления оси z). В дальнейшем будем изображать проекцию параллелепипеда на плоскость xy, параллельную свободной от напряжений грани (рис. 3.2). Здесь принимается, что напряжения на противоположно расположенных гранях попарно равны друг другу и по величине и по знаку. В общем случае напряжения в деформированном теле меняются от точки к точке, т.е. являются функциями координат точек тела, поэтому напряжения

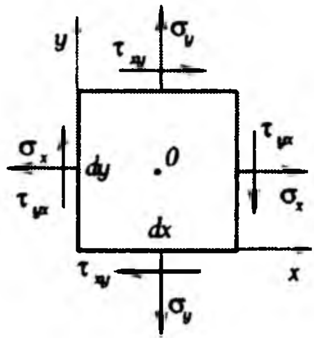


Рис. 3.2

(например, σ_x) при переходе от левой грани к правой получит некоторое приращение и будет отличаться от своего значения на левой грани. Но так как рассматривается бесконечно малый элемент, то можно считать в этом анализе напряженное состояние элемента однородным и не учитывать этих изменений.

Под воздействием этой системы нагрузок элемент (см. рис. 3.2) должен находиться в состоянии равновесия. Запишем только одно уравнение равновесия в виде

$$\sum m_0(F_k)=0. \qquad (a)$$

Подчеркнем, что в уравнение (a) входят силы, а не напряжения. Для получения усилий необходимо умножить напряжения на площади соответствующих граней.

Получим

$$\sum m_0(F_k) = \tau_{yx}dydz\frac{dx}{2} + \tau_{yx}dydz\frac{dx}{2} + \\ + \tau_{xy}dxdz\frac{dy}{2} + \tau_{xy}dxdz\frac{dy}{2} = 0. \qquad (б)$$

При записи (б) учтено, что усилия от нормальных напряжений σ_x и σ_y проходят через центр O и не дадут момента относительно него.

Из (б) получим

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}. \qquad (3.1)$$

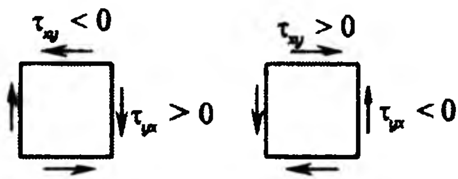


Рис. 3.3

Эта зависимость носит название *закона парности касательных напряжений*. Он утверждает, что *касательные напряжения на двух взаимноперпендикулярных площадках равны друг другу по величине и противоположны по знаку*.

Вообще говоря, касательные напряжения на рис. 3.1 и 3.2. изображены неправильно: на обеих гранях они положительны, чего при принятом правиле знаков не может быть. Два возможных варианта показаны на рис. 3.3.

Очевидно, что стрелки касательных напряжений должны либо сходиться, либо расходиться в углах.

3.2. Напряжения по наклонным площадкам

Поставим теперь задачу определения напряжений на наклонной плоскости $ABCD$, параллельной оси z (рис. 3.4).

Для этого воспользуемся методом сечений: мысленно разрежем элемент по этой плоскости на две части, отбросим правую часть и рассмотрим равновесие оставшейся левой части, проекция которой на плоскость xy показана на рис. 3.5. Положение наклонной площадки будем определять углом α, отсчитываемым против часовой стрелки от направления оси x к нормали n наклонной грани элемента. С этой нормалью совместим ось x_1 повернутой системы координат. Будем считать, что на исходных гранях элемента действуют положительные напряжения, закон (3.1) учтем позже. Воздействие отброшенной части на оставшуюся определим полным напряжением f, которое разложим на две составляющие, параллельные координатным осям x и y. Запишем уравнения равновесия для пирамиды с основанием AKC. Пусть размер $AC = ds$, тогда $AK = ds\cos\alpha$ и $KC = ds\sin\alpha$. Размер ребра AB примем равным единице.

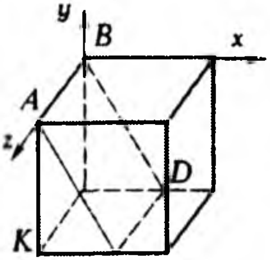


Рис. 3.4

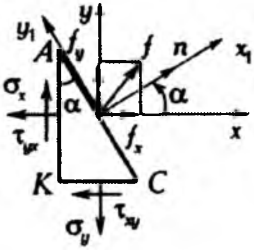


Рис. 3.5

С учетом ранее сделанных замечаний получим:

$$\sum F_x = -\,\sigma_x ds\cos\alpha - \tau_{xy} ds\sin\alpha + f_x ds = 0;$$
$$\sum F_y = -\,\sigma_y ds\sin\alpha + \tau_{yx} ds\cos\alpha + f_y ds = 0,$$

или

$$\begin{aligned} f_x &= \sigma_x\cos\alpha + \tau_{xy}\sin\alpha; \\ f_y &= \sigma_y\sin\alpha - \tau_{yx}\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Разложим f_x и f_y на нормальное и касательное напряжения, а затем просуммируем соответствующие компоненты (см. рис. 3.6). Получим

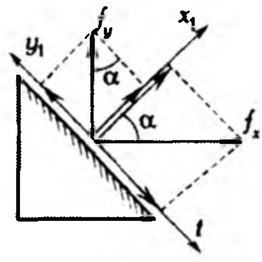


Рис. 3.6

$$\begin{aligned} \sigma_{x_1} &= f_x\cos\alpha + f_y\sin\alpha; \\ \tau_{y_1x_1} &= f_x\sin\alpha - f_y\cos\alpha. \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Здесь при записи второй строки учтено, что проекция f_x на направление t дает положительное касательное напряжение, а проекция f_y – отрицательное.

Подставив в уравнения (3.3) выражения (3.2), получим

$$\sigma_{x_1} = (\sigma_x\cos\alpha + \tau_{xy}\sin\alpha)\cos\alpha + (\sigma_y\sin\alpha - \tau_{yx}\cos\alpha)\sin\alpha;$$
$$\tau_{y_1x_1} = (\sigma_x\cos\alpha + \tau_{xy}\sin\alpha)\sin\alpha - (\sigma_y\sin\alpha - \tau_{yx}\cos\alpha)\cos\alpha.$$

или, используя известные выражения

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx};$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

получим после раскрытия скобок:

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\sin^2\alpha - \tau_{yx}\sin 2\alpha; \qquad (3.4)$$

$$\tau_{y_1x_1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{yx}\cos 2\alpha. \qquad (3.5)$$

Определим теперь нормальное и касательное напряжение на второй площадке, которая перпендикулярна первой наклонной грани (рис. 3.7). Для этого воспользуемся выражениями (3.4) и (3.5), заменив в них α на β.

Получим

$$\sigma_{y_1} = \sigma_x \cos^2\beta + \sigma_y \sin^2\beta - \tau_{yx} \sin 2\beta ;$$

$$\tau_{x_1 y_1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\beta + \tau_{yx} \cos 2\beta .$$

Но, так как $\beta = \alpha + 90^0$, то

$$\sigma_{y_1} = \sigma_x \sin^2\alpha + \sigma_y \cos^2\alpha + \tau_{yx} \sin 2\alpha ; \tag{3.6}$$

$$\tau_{x_1 y_1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_{yx} \cos 2\alpha . \tag{3.7}$$

Таким образом, получены выражения для напряжений на гранях параллелепипеда, который повернут по отношению к исходному на угол α вокруг оси z. Из формул видно, что при изменении ориентации параллелепипеда будут изменяться нормальные и касательные напряжения. Поэтому говорить о напряжениях в точке, не указывая положения площадок

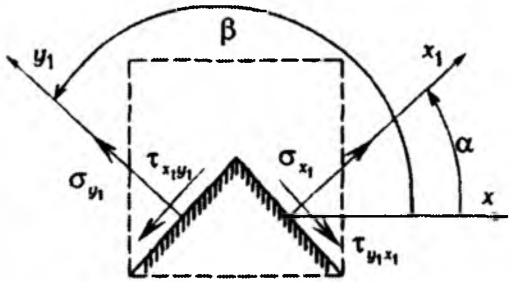


Рис. 3.7

их действия не имеет смысла. При анализе напряженного состояния стержней (балок, валов) обычно в качестве исходных площадок принимают площадки, совпадающие с поперечными и с продольными сечениями стержня.

Из сравнения выражений (3.5) и (3.7) видно, что $\tau_{y_1x_1} = -\tau_{x_1y_1}$, т.е. закон парности касательных напряжений подтверждается.

Этот закон имеет место и в случае пространственного напряженного состояния, поэтому из шести касательных напряжений независимыми будут только три, так как

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}; \qquad \tau_{yz} = -\tau_{zy}; \qquad \tau_{zx} = -\tau_{xz}. \tag{3.8}$$

Следовательно, в общем случае напряженное состояние в точке характеризуется шестью независимыми компонентами напряжений.

Возвращаясь к рис. 3.1, видим, что на свободной грани при плоском напряженном состоянии касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} отсутствуют, следовательно, по закону парности касательных напряжений,

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0.$$

Складывая выражения (3.4) и (3.6), получим

$$\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_x + \sigma_y , \tag{3.9}$$

т.е. сумма нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках не зависит от угла α и является в данной точке тела величиной постоянной. Такие величины, которые не меняются при повороте координатных осей, называют *инвариантами*.

3.3. Главные напряжения

Выражение (3.4) показывает, что с изменением угла α, т.е. при повороте координатных осей, меняется значение нормального напряжения на соответствующей площадке. Естественно поставить вопрос о нахождении экстремальных значений нормальных напряжений и ориентации соответствующих площадок, на которых они действуют. В соответствии с правилами нахождения экстремальных значений определим первую производную от нормального напряжения, считая переменным угол α, и приравняем эту производную нулю.

Получим из (3.4)

$$\frac{d\sigma_{x_1}}{d\alpha} = \sigma_x \cdot 2\cos\alpha(-\sin\alpha) + \sigma_y \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha - \tau_{yx} \cdot 2\cos2\alpha$$

и

$$-(\sigma_x - \sigma_y)\sin2\alpha_0 - 2\tau_{yx}\cos2\alpha_0 = 0, \tag{3.10}$$

откуда найдем

$$\operatorname{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x - \sigma_y}. \tag{3.11}$$

Из выражения (3.11) следует, что имеется два угла α_0 и $\alpha_0 + 90^0$, при которых нормальные напряжения принимают экстремальные значения. Если на одной из этих площадок нормальное напряжение становится максимальным, то на другой, перпендикулярной первой, оно, в силу (3.9), становится минимальным. Эти экстремальные нормальные напряжения называются *главными напряжениями*. Так как выражение (3.10) в левой своей части пропорционально касательному напряжению на наклонной площадке (см. уравнения 3.5 или 3.7), а в правой имеет нуль, то отсюда следует, что на тех площадках, где действуют главные напряжения, касательные напряжения отсутствуют. Эти *площадки* также называются *главными*.

Таким образом, при плоском напряженном состоянии в любой точке всегда можно определить положение двух (как минимум) главных площадок, на которых действуют главные напряжения и отсутствуют касательные напряжения. Главные напряжения будем обозначать пока через σ_{max} (максимальное) и σ_{min} (минимальное). Для вычисления их значений необходимо в выражении (3.4) вместо угла α ввести углы α_0 и $\alpha_0 + 90^0$, определенные из (3.11). Позднее получим выражения, не требующие предварительного отыскания положения главных площадок. На рис. 3.8 показаны главные площадки и главные напряжения. При выборе направления σ_{max} руководствуются следующим правилом.

Направление σ_{max} всегда проходит через те четверти координатной плоскости, где сходятся стрелки касательных напряжений.

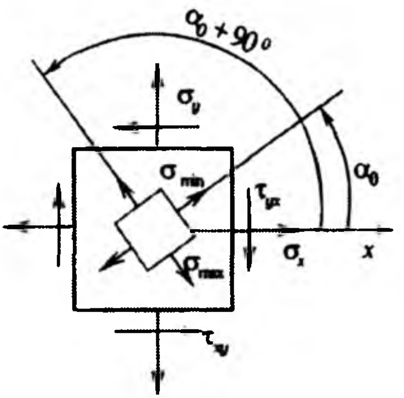


Рис. 3.8

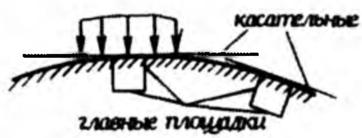


Рис. 3.9

Во многих случаях положение главных площадок можно указать сразу. Так, на участках свободного от внешних касательных нагрузок (рис. 3.9), главные площадки будут совпадать с касательной к контуру плоскостью и в силу закона парности – с ортогональными этой плоскости площадками.

Рассмотрим элемент, вырезанный по направлению главных площадок (рис. 3.10). Тогда выражения (3.4) и (3.5) для напряжений по наклонной площадке запишутся в виде

$$\sigma_{x_1} = \sigma_{max}\cos^2\alpha + \sigma_{min}\sin^2\alpha; \tag{3.12}$$

$$\tau_{y_1x_1} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}\sin 2\alpha. \tag{3.13}$$

Из выражения (3.13) видно, что касательные напряжения $\tau_{y_1x_1}$ достигают максимальных значений при $\sin 2\alpha = 1$, т.е.при $\alpha = 45^0$. Следовательно, максимальные касательные напряжения равны

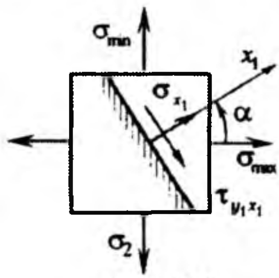


Рис. 3.10

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}, \qquad (3.14)$$

Действуют они на площадке, расположенной под углом 45^0 к главной площадке. На второй площадке, перпендикулярной первой, будут минимальные касательные напряжения

$$\tau_{min} = -\frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}.$$

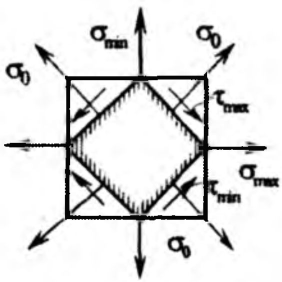


Рис. 3.11

Положение площадок с максимальными и минимальными касательными напряжениями показаны на рис. 3.11, причем на них действуют одинаковые нормальные напряжения (см. 3.12) при $\alpha = \pm 45^0$)

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}.$$

3.4. Крут Мора

Зависимости нормальных и касательных напряжений от угла наклона площадки имеют наглядную геометрическую интерпретацию, предложенную немецким ученым О.Мором. Пусть задано исходное плоское напряженное состояние (рис. 3.12). Построим для него крут Мора. Для этого выберем координатные оси σ и τ (рис. 3.13) параллельно осям x и y. Нормальные и касательные напряжения, действующие на одной площадке, дадут нам изображающую точку в этой плоскости: M_x с координатами σ_x и τ_{yx}, а M_y – σ_y и τ_{xy}. Соединим эти точки прямой линией и построим крут диаметром M_xM_y с центром C на оси σ. Проведя из изображающих точек M_x и M_y прямые, параллельные соответствующим нормалям, получим в их пересечении *полюс* S.

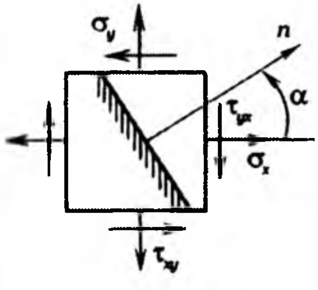


Рис. 3.12

Для нахождения напряжений на заданной наклонной площадке достаточно из полюса S провести луч, параллельный перпендикуляру к этой площадке. Тогда координаты точки (M_α) пересечения этого луча с кругом дадут искомые нормальные и касательные напряжения на наклонной площадке. Докажем это. Получим выражения для σ_{x_1} и $\tau_{y_1x_1}$ из чисто геометрических соображений. Если они окажутся тождественными (3.4) и (3.5), то теорема будет доказана. Для доказательства соединим точки C и

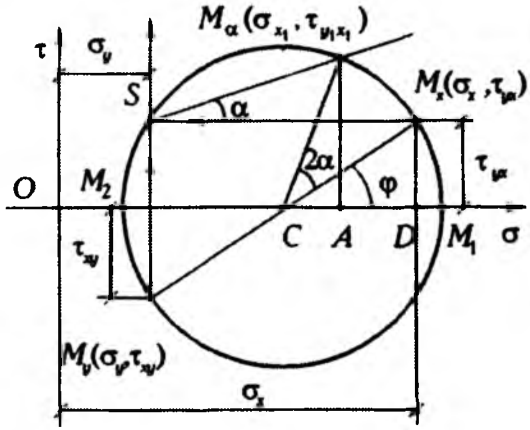


Рис. 3.13

M_α; отметим, что $\angle M_\alpha C M_x = 2\alpha$, как центральный угол, опирающийся на дугу $M_\alpha M_x$, на которую опирается вписанный угол $M_\alpha S M_x$. Тогда

$$\sigma_{x_1} = OA = OC + CA.$$

По построению

$$OC = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \qquad (a)$$

определим

$$CA = R\cos(2\alpha + \varphi).$$

Здесь R – радиус круга Мора, $R = CM_\alpha = CM_x$.

Используя известное выражение для $\cos(2\alpha + \varphi)$, получим

$$CA = R\cos\varphi\cos 2\alpha - R\sin\varphi\sin 2\alpha. \qquad (a)$$

Из треугольника CM_xD найдем

$$R\cos\varphi = CD = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}. \qquad (c)$$

$$R\sin\varphi = M_xD = \tau_{yx}. \qquad (d)$$

Из выражений (a)–(d) следует

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_{yx}\sin 2\alpha. \qquad (3.15)$$

Так как $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$, то из (3.15) получим

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x\cos^2\alpha + \sigma_y\sin^2\alpha - \tau_{yx}\sin 2\alpha,$$

что тождественно (3.4). Аналогичным образом представим $\tau_{y_1x_1}$:

$$\tau_{y_1x_1} = AM_\alpha = R\sin(2\alpha + \varphi) = R\cos\varphi\sin 2\alpha + R\sin\varphi\cos 2\alpha =$$

$$= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_{yx}\cos 2\alpha,$$

что совпадает с (3.5). Таким образом, тождественность определения напряжений по кругу Мора и по формулам (3.4), (3.5) доказана.

Необходимо подчеркнуть следующее.

1. *Круг Мора является геометрическим образом напряженного состояния в точке при плоском напряженном состоянии. При изменении наклона площадки изображающая точка движется по кругу Мора, все время оставаясь на нем. Каждой площадке соответствует своя точка на круге Мора с координатами σ и τ; справедливо и обратное.*

2. *Напряжения на взаимно перпендикулярных площадках соответствуют изображающим точкам, лежащим на противоположных концах диаметра круга Мора.*

3. *Точки, соответствующие главным площадкам и главным напряжениям, лежат на оси σ в точках ее пересечения с кругом Мора (рис. 3.14).*

Для нахождения направлений главных напряжений, соединим полюс S с точками M_1 и M_2. Главные площадки окажутся перпендикулярными прямыми SM_1 и SM_2 соответственно.

Из рис. 3.14 следует, что

$$\mathrm{tg}\,\alpha_0 = -\frac{\tau_{yx}}{\sigma_{max} - \sigma_y}. \qquad (3.16)$$

Так как $\sigma_{max} + \sigma_{min} = \sigma_x + \sigma_y$, то $\sigma_{max} - \sigma_y = \sigma_x - \sigma_{min}$, что может быть использовано для иной записи формулы (3.16). Выражение (3.16) определяет угол наклона главной площадки с максимальным главным напряжением сразу, в отличие от выражения (3.11), где мы имеем два корня.

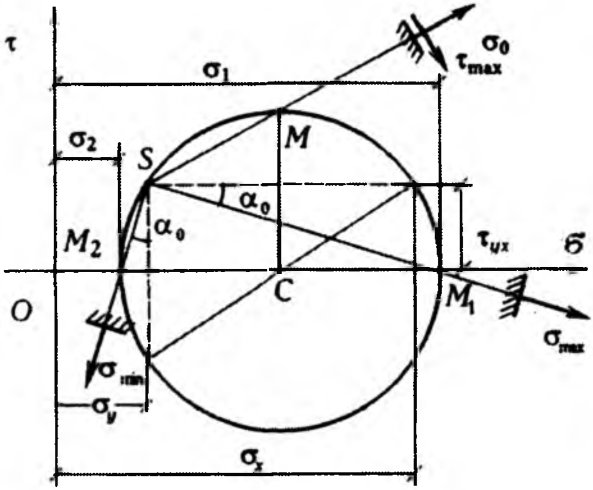


Рис. 3.14

Из рис. 3.14 следует также, что

$$\sigma_{max} = OC + CM_1 = OC + R;$$

$$\sigma_{min} = OC - CM_2 = OC - R.$$

Так как $OC = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$, а $R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2}$, то

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2}. \qquad (3.17)$$

Выражение (3.17) позволяет определять значения главных напряжений σ_{max} (знак + перед корнем) и σ_{min} (знак – перед корнем) до нахождения направлений главных напряжений, а затем воспользоваться формулами (3.16) для отыскания последних.

Из рис. 3.14 следует, что точки круга Мора, соответствующие максимальным и минимальным касательным напряжениям лежат на вертикальном диаметре круга. Значения τ_{max} и τ_{min} численно равны радиусу круга, т.е.

$$\tau_{\substack{max \\ min}} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2}, \qquad (3.18)$$

Рассмотрим несколько частных видов плоского напряженного состояния.

1. *Чистый сдвиг.* В этом случае бесконечно малый элемент находится под воздействием только касательных напряжений τ_0 (рис. 3.15, *а*). Изображающие точки M_x и M_y на круге Мора (рис. 3.15, *б*) располагаются на оси τ, а центр круга Мора совпадает с началом координат. Полюс S находится в точке M_x. Из круга Мора видно, что главные площадки расположены под углом 45^0 к исходным, а главные напряжения равны по величине τ_0, при этом $\sigma_{max} = -\sigma_{min} = \tau_0$. Аналогичный результат можно получить из формул (3.17) и (3.16) при $\sigma_x = \sigma_y = 0$. Из условия $\sigma_{max} + \sigma_{min} = \sigma_x + \sigma_y = 0$ следует, что на любой паре взаимно перпендикулярных площадок при чистом сдвиге нормальные напряжения равны по величине, но противоположны по знаку, что и является характерным признаком наличия чистого сдвига.

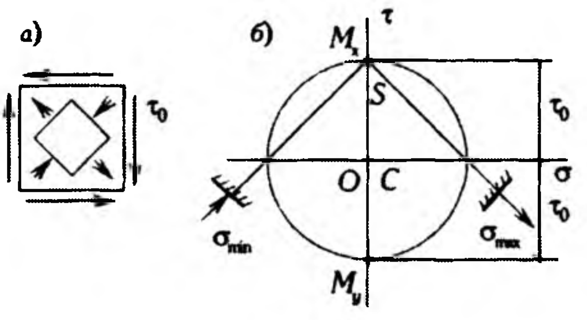


Рис. 3.15

2. *Линейное напряженное состояние.* Вырежем из растянутого (сжатого) стержня бесконечно малый элемент так, чтобы его грани совпадали по направлению с поперечными и продольными сечениями стержня (см. рис. 3.16, *а*).

В этом случае (см. гл. 2) будем иметь только одно нормальное напряжение σ_x в поперечном сечении, т.е. эти площадки являются главными и при растяжении $\sigma_x = \sigma_{max}$, при сжатии $\sigma_x = \sigma_{min}$ (рис. 3.16, *б*). Изображающие точки на круге Мора расположатся на оси σ, а круг коснется начала координат, где окажется полюс S. Проведя из полюса луч под углом α, получим в месте его пересечения с кругом Мора изображающую точку M_α с координатами σ_{x_1} и $\tau_{y_1x_1}$ – напряжениями на наклонной площадке. Из построения круга Мора (рис. 3.16, *б*) видно, что $M_yM_\alpha = \sigma_x\cos\alpha$, а $\sigma_{x_1} = M_yM_\alpha\cos\alpha$, следовательно

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2\alpha \quad , \tag{3.19, а}$$

$$\tau_{y_1 x_1} = \sigma_x \cos\alpha \sin\alpha = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\alpha . \tag{3.19, б}$$

Эти выражения легко получить из формул (3.4) и (3.5) при $\sigma_y = \tau_{yx} = 0$.

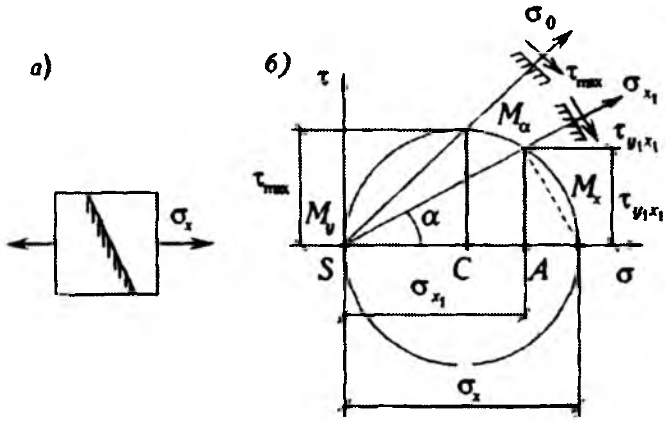


Рис. 3.16

При растяжении (сжатии) стержней максимальные касательные напряжения возникают на площадках, расположенных под углом 45^0 к продольной оси (см. выражение 3.19, б и круг Мора). При этом $\tau_{max} = \frac{\sigma_x}{2}$.

3. *Всестороннее растяжение (сжатие).* Это напряженное состояние возникает в том случае, если $\sigma_{max} = \sigma_{min} = \sigma_0$ (см. рис. 3.17). При этом круг Мора вырождается в точку. Из выражения (3.13) следует, что касательные напряжения $\tau_{y_1x_1}$ равны нулю на всех площадках, независимо от угла α. Следовательно, любая площадка, перпендикулярная плоскости чертежа (рис. 3.17), является в этом случае главной. Нормальное напряжение на этой площадке также равно σ_0 (см. формулу (3.12)).

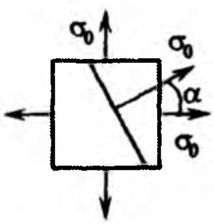


Рис. 3.17

3.5. Пространственное напряженное состояние

Ранее установлено, что при плоском напряженном состоянии можно всегда выделить две главные площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения. Очевидно, что этих площадок (граней параллелепипеда) не две, а три, так как площадка, свободная от напряжени (перпендикулярная оси z на рис. 3.1) тоже являются главной (на ней о сутствуют касательные напряжения). Таким образом, в общем случае любой точке напряженного тела можно выделить три взаимно ортогональные главные площадки.

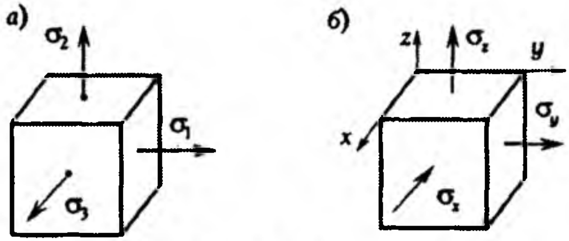


Рис. 3.18

Если на всех трех главных площадках имеются отличные от нуля главные напряжения, то такие напряженные состояния называются пространственными, а иногда трехмерными или объемными.(см. рис. 3.18).

Главные напряжения обозначаются в общем случае через σ_1, σ_2, σ_3 и нумеруют так, чтобы выполнялось алгебраическое неравенство

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3. \tag{3.20}$$

Очевидно, что $\sigma_1 = \sigma_{max}$; $\sigma_3 = \sigma_{min}$.

Например, на рис. 3.18, *б* показаны напряжения $\sigma_x = -250$, $\sigma_y = 100$, $\sigma_z = 200$ *МПа*. В этом случае следует принять $\sigma_1 = \sigma_z$; $\sigma_2 = \sigma_y$; $\sigma_3 = \sigma_x$.

Пространственное напряженное состояние может возникнуть в основаниях зданий и сооружений, в зоне контакта двух тел, например, рельса и колеса, в местах, где имеются концентраторы напряжений в виде выкружек, канавок, вырезов.

Если одно из главных напряжений равно нулю, то соответствующее напряженное состояние будет называться *плоским* (см. п. 3.4). И наконец, если только одно главное напряжение отлично от нуля, то в этом случае реализуется линейное напряженное состояние, которое имелось при растяжении или сжатии стержней.

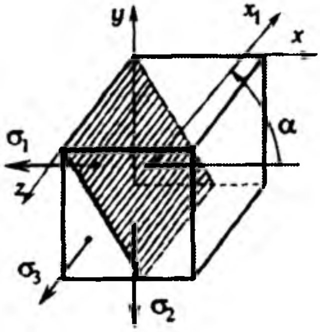


Рис. 3.19

При анализе напряжений по наклонным площадкам при пространственном напряженном состоянии ограничимся случаями, когда эти наклонные площадки параллельны одному из главных напряжений. Проведем, например, наклонную площадку, параллельную главному напряжению σ_3 (рис. 3.19). Для определения на ней нормальных и касательных напряжений необходимо, как и в п. 3.2, спроецировать все силы на оси x и y. В эти уравнения главное напряжение σ_3 не войдет, поэтому для вычисления искомых напряжений можно воспользоваться выражениями (3.12) и (3.13).

$$\sigma_{x_1} = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha \ , \tag{3.12}$$

$$\tau_{y_1 x_1} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \ . \tag{3.13}$$

Аналогичным образом, проведя наклонные площадки, параллельные σ_2 и σ_1, получим формулы для нормальных и касательных напряжений на этих площадках круговой перестановкой индексов в выражениях (3.12) и (3.13). Для каждого случая можно построить свой круг Мора (рис. 3.20).

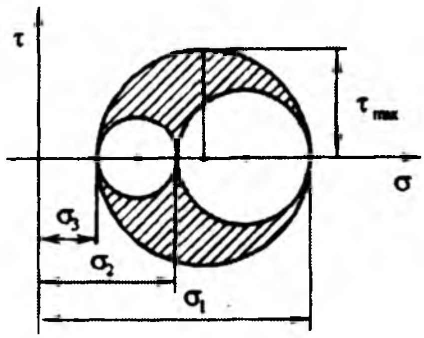


Рис. 3.20

Из этого построения видно, что максимальные касательные напряжения будут возникать на площадке, расположенной под углом 45^0 к площадкам σ_1 и σ_3 и параллельной главному напряжению σ_2, при этом

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} . \tag{3.21}$$

Если наклонная площадка не параллельна ни одному из главных напряжений, то нормальное и полное касательное напряжение на этой площадке дадут изображающую точку, лежащую на рис. 3.20 в заштрихованной области.

3.6. Деформированное состояние в точке

Как было отмечено в главе 1, деформированное состояние в точке характеризуется тремя деформациями в направлении осей x, y, z и тремя угловыми деформациями в плоскостях xy, yz и zx элементарного параллелепипеда, мысленно вырезанного в окрестности исследуемой точки (рис. 1.12). Деформации этого элемента в плоскости xy показаны на рис. 1.13 и соответственно равны ε_x, ε_y и γ_{xy}.

При повороте координатных осей и граней параллелипипеда будут изменяться значения линейныхдеформаций ε и углов сдвига γ.

Совокупность линейных и угловых деформаций для всевозможных направлений осей, проведенных через исследуемую точку, определяет деформированное состояние в точке.

Подобно тому, как определялись напряжения на наклонных площадках, можно получить выражения и для деформаций в новой системе координатных осей, повернутой относительно начальной на некоторый угол α. Оказывается, что эти выражения аналогичны, если в них вместо нормальных напряжений подставить линейные деформации ε_x, ε_y, ε_z, а вместо касательных напряжений – половины углов сдвига $\frac{1}{2}\gamma_{xy}$, $\frac{1}{2}\gamma_{yz}$, $\frac{1}{2}\gamma_{zx}$.

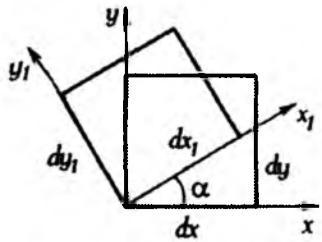


Рис. 3.21

Так, например, при повороте осей x и y на угол α вокруг оси z (рис. 3.21) линейные и угловые деформации определятся выражениями (см. формулы (3.4); (3.5)

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{x_1} &= \varepsilon_x\cos^2\alpha + \varepsilon_y\sin^2\alpha - \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\alpha; \\ \varepsilon_{y_1} &= \varepsilon_x\sin^2\alpha + \varepsilon_y\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\sin 2\alpha; \end{aligned}\right\} \qquad (3.22)$$

$$\gamma_{x_1y_1} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\cos 2\alpha. \qquad (3.23)$$

По этой аналогии можно указать такие три ортогональных направления *1, 2, 3*, для которых отсутствуют углы сдвига, а линейные деформации ε_1 и ε_3 приобретают максимальные и минимальные значения. Эти направления и линейные деформации называются *главными*. Для их нахождения используются следующие выражения, записанные по аналогии с соответствующими формулами для плоского напряженного состояния:

$$\varepsilon_{\substack{max\\min}} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}. \qquad (3.24)$$

$$\operatorname{tg}\alpha_0 = -\frac{\gamma_{xy}}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_y)} . \qquad (3.25)$$

В точках изотропного упругого тела направления главных напряжений и главных деформаций всегда совпадают, в других случаях (анизотропия, неупругость) этого может и не быть.

Для графического представления деформаций можно также воспользоваться кругом Мора, заменив ось σ на ось линейных деформаций, а ось τ – на ось половины углов сдвига.

3.7. Обобщенный и объемный законы Гука

Вырежем из изотропного упругого тела бесконечно малый элемент, грани которого совпадают с главными площадками (рис. 3.24). Предположим, что элемент растягивается только напряжениями σ_x, т.е. находится в условиях линейного напряженного состояния. В соответствии с законом Гука для этого случая (см. гл. 2) определим линейные деформации элемента в направлении осей x, y, z:

$$\varepsilon_x^x = \frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_y^x = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E}; \quad \varepsilon_z^x = -\nu\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E}. \qquad (3.26)$$

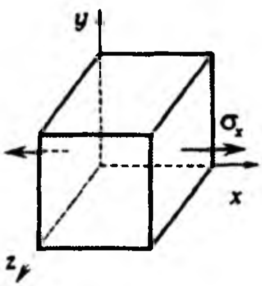


Рис. 3.24

При записи выражений (3.26) учтено, что ось x для направления растяжения является продольной, а оси y и z – поперечными.

Если этот же элемент будет растягиваться в направлении оси y напряжениями σ_y, то соответствующие деформации окажутся равными

$$\varepsilon_x^y = -\nu\frac{\sigma_y}{E}; \quad \varepsilon_y^y = \frac{\sigma_y}{E}; \quad \varepsilon_z^y = -\nu\frac{\sigma_y}{E}. \qquad (3.27)$$

Аналогично, при растяжении в направлении оси z напряжением σ_z

$$\varepsilon_x^z = -\nu\frac{\sigma_z}{E}; \quad \varepsilon_y^z = -\nu\frac{\sigma_z}{E}; \quad \varepsilon_z^z = \frac{\sigma_z}{E}. \qquad (3.28)$$

Используя для линейно деформируемых систем принцип независимости действия сил, просуммируем деформации каждого ребра от воздействия напряжений σ_x, σ_y и σ_z.

Получим $\varepsilon_x = \varepsilon_x^x + \varepsilon_x^y + \varepsilon_x^z$ или

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] .$$

Аналогично

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right].\end{aligned} \qquad (3.29)$$

Выражения (3.29) представляют *обобщенный закон Гука* для изотропного упругого тела.

Если использовать принятые обозначения для главных напряжений и главных деформаций, то этот закон запишется в виде

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)\right]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right].\end{aligned}\right\} \qquad (3.30)$$

Возникает вопрос: как записать закон Гука для случая, когда грани элемента не совпадают с главными площадками? В этом случае на гранях элемента помимо нормальных напряжений σ_x, σ_y и σ_z будут действовать и касательные напряжения τ_{xy}, τ_{yz}, и τ_{zx} , которые вызывают сдвиговые деформации γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}. Но при малых деформациях в изотропном теле эти сдвиги не изменяют длины сторон элемента, поэтому можно рассматривать линейные и угловые деформации как независимые. А это означает, что обобщенный закон Гука в форме (3.29) можно использовать и в том случае, когда грани элемента не совпадают с главными площадками. При этом зависимости (3.29) дополняются уравнениями, выражающими связь касательных напряжений и угловых деформаций, которые мы рассмотрим позднее (см. гл. 4).

Определим относительное изменение объема деформированного упругого изотропного тела. Вырежем из тела кубик с единичными размерами ребер. После деформации эти размеры окажутся равными $(1+\varepsilon_x)$, $(1+\varepsilon_y)$ и $(1+\varepsilon_z)$. Следовательно, объем этого элемента станет равным $V_1 = (1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)$. Раскрывая скобки, получим $V_1 = 1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x + \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$. Упругие деформации большинства конструкционных материалов являются малыми величинами порядка $10^{-3} \div 10^{-5}$ (за исключением резиноподобных материалов), поэтому их произведениями можно пренебречь.

Тогда $V_1 = 1+ \varepsilon_x+ \varepsilon_y+ \varepsilon_z$, а $\Delta V = V_1 - V_0 = \varepsilon_x+ \varepsilon_y+ \varepsilon_z$. Следовательно, относительное изменение объема равно

$$\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z . \tag{3.31}$$

Используя (3.29), получим объемный закон Гука

$$\varepsilon_v = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) . \tag{3.32}$$

Обозначим $\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \sigma_0$ – среднее напряжение. Тогда

$$\varepsilon_v = \frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_0 . \tag{3.33}$$

Величина $\frac{E}{3(1-2\nu)}$ называется *объемным модулем упругости*. Так как знак ε_v должен совпадать со знаком σ_0, то из выражения (3.33) видно, что для изотропных материалов предельное значение коэффициента Пуассона $\nu_{пред} = 0,5$.

Удельная потенциальная энергия в случае линейного напряженного состояния вычислялась по формуле (2.34):

$$u = \frac{\sigma_x \varepsilon_x}{2} .$$

Обобщая это выражение для случая пространственного напряженного состояния, получим

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2} . \tag{3.34}$$

Используя обобщенный закон Гука (3.30), запишем удельную потенциальную энергию через главные напряжения

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right]. \tag{3.35}$$

ГЛАВА 4. СДВИГ

4.1. Основные положения

В отличие от рассмотренной в главе 2 деформации осевого растяжения (сжатия), деформация сдвига характерна не только для стержня. Всевозможные соединения, объединяющие отдельные элементы в единую конструкцию, как правило, испытывают деформацию сдвига. На рис. 4.1, *а*, *б*, *в*, изображены некоторые из таких устройств: *а*) склейка двух растягиваемых листов; *б*) соединение с помощью заклепки, *в*) сварное соединение листов.

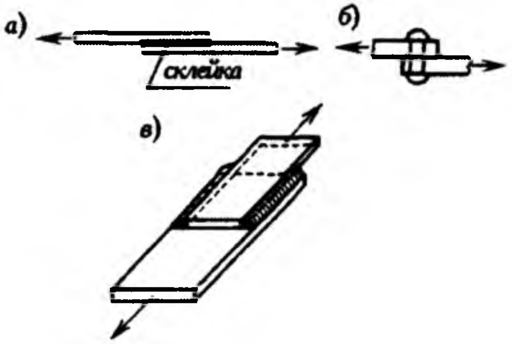


Рис. 4.1

Рассмотрим нагружение стержня силой P (см. рис. 4.2, *а*), при этом поперечная сила Q сопровождается другим внутренним усилием – нагибающим моментом M. Выделяя условно из совместного действия Q и M влияние только поперечной силы получим *деформацию чистого сдвига* стержня, изображаемую на рис. 4.2, *б*.

Сначала, для упрощения, введем допущение о равномерном распреде-

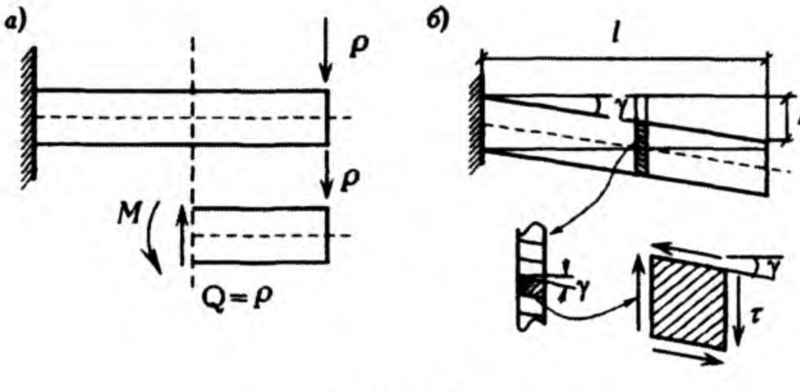


Рис. 4.2

лении касательных напряжений по поперечному сечению стержня. Тогда

$$\tau = Q / A \ . \tag{4.1}$$

Так как в рассматриваемом стержне поперечная сила во всех сечениях постоянна ($Q = P$), то с учетом принятого допущения приходим к выводу, что все прямоугольные элементы, образующие стержень, находятся под действием одинаковых касательных напряжений τ, вызывающих также одинаковые углы сдвига γ. При этом деформированный вид стержня будет таким, как это показано на рис. 4.2, *б*.

Тогда получим значение абсолютного сдвига для всего стержня в виде

$$\Delta s = \gamma l \ . \tag{4.2}$$

Для определения γ необходимо установить его связь с величиной касательного напряжения, полученного по формуле (4.1).

4.2. Закон Гука при сдвиге. Полная форма записи обобщенного закона Гука

Рассмотрим квадратный элемент со стороной a, находящийся в условиях чистого сдвига в плоскости xy (рис. 4.3). Материал элемента считаем линейно деформируемым, то есть подчиняющимся обобщенному закону Гука (3.30). Сделаем предположение, что при чистом сдвиге этого элемента между касательными напряжениями τ_{yx} и углом сдвига γ_{yx} также существует линейная зависимость, то есть

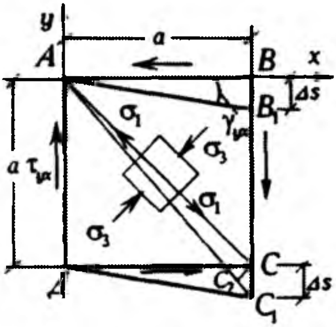


Рис. 4.3

$$\tau_{yx} = G\gamma_{yx} . \tag{4.3}$$

В связи со сказанным возникают два вопроса: 1) действительно ли имеет место закон Гука (4.3) для деформации сдвига и 2) если да, то что представляет собой коэффициент пропорциональности G?

Ответы на поставленные вопросы дает следующий анализ деформаций элемента. Удлинение диагонали элемента при чистом сдвиге выразим двумя способами:

$$\Delta d = C_2C_1 = \Delta s\cos 45^0 = a\gamma\sqrt{2}/2;$$
$$\Delta d = \varepsilon_d AC = \varepsilon_d a\sqrt{2}.$$

Здесь ε_d – линейная деформация материала вдоль диагонали AC; индексы при γ опущены.

Как известно (см. главу 3), при чистом сдвиге главные площадки наклонены под углом 45^0 к площадкам чистого сдвига, а главные напряжения $\sigma_1 = \tau$, $\sigma_3 = -\tau$. Значит в данном случае главные площадки перпендикулярны и параллельны диагонали AC.

Тогда из (3.30) при $\sigma_2 = 0$ получим

$$\varepsilon_d = \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_3 = \frac{\tau}{E}(1+\nu),$$

следовательно,

$$a\gamma\sqrt{2}\Big/2 = \frac{\tau}{E}(1+\nu)a\sqrt{2},$$

откуда

$$\tau = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma \quad . \tag{4.4}$$

Сопоставляя выражения (4.3) и (4.4), видим, что: во-первых, для рассматриваемого материала действительно имеет место закон Гука при чистом сдвиге в форме (4.3); во-вторых, коэффициент пропорциональности G не является независимой упругой характеристикой материала, а выражается через уже известные характеристики E и ν по формуле

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad . \tag{4.5}$$

Коэффициент G носит название *модуля сдвига* или *модуля второго рода*. Как и модуль упругости, модуль сдвига G имеет размерность напряжений (γ – величина безразмерная). Так как коэффициент Пуассона для различных материалов находится в пределах от 0 до 0,5, то $G = \left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{2}\right)E$. Например, для стали, принимая $E = 2 \cdot 10^5\ МПа$ и $\nu = 0{,}25$, получим $G = 0{,}4E = 0{,}8 \cdot 10^5\ МПа$.

Далее вернемся к определению величины абсолютного сдвига Δs стержня, показанного на рис. 4.2, *б*. Введя в формулу (4.2) γ, полученное по выражению (4.3), и τ – по (4.1), будем иметь

$$\Delta s = \frac{Ql}{GA} \quad . \tag{4.6}$$

Обратим внимание на сходство вида формул (4.6) и (2.11), определяющей удлинение Δl при осевом растяжении (сжатии). По аналогии с осевой жесткостью EA произведение GA называется *сдвиговой жесткостью*.

Напомним, что при выводе формулы (4.6) использовалось предположение о равномерном распределении касательных напряжений по сечению стержня. В этом случае все поперечные сечения остаются плоскими. На самом деле, как это будет показано в главе 6, распределение напряжений τ по сечению неравномерно, что приводит к искривлению сечений. Поэтому формула (4.6) становится неверной. Исследованиями установлено, что влияние неравномерности касательных напряжений на величину абсолютного сдвига можно учесть путем введения в формулу (4.6) корректирующего коэффициента k, зависящего только от формы поперечного сечения стержня, т.е.

$$\Delta s = k\frac{Ql}{GA}, \tag{4.7}$$

где k имеет значения: для прямоугольника – 1,20; для круга – 1,11; для прокатных двутавров – 2,0 ÷ 2,5 и т.д.

Для стержней, длина которых существенно превышает их высоту (в 6 и более раз), перемещения сечений, вызванных сдвигом, обычно незначительны по сравнению с изгибными перемещениями.

Возвращаясь к записи закона Гука для элемента, изображенного на рис. 1.12, на гранях которого действуют одновременно нормальные и касательные напряжения и используя принцип суперпозиции, получим полную сводку уравнений закона Гука для пространственно напряженного состояния:

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]\ ;\\
&\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right]\ ;\\
&\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]\ ;\\
&\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}\ ;\quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}\ ;\quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Закон Гука для плоского напряженного состояния получим из (4.8) при $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x); \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}. \qquad (4.9)$$

При линейном напряженном состоянии, когда σ_x – главное напряжение, а $\sigma_z = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$, получим известное выражение закона Гука

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x. \qquad (4.10)$$

Для анизотропных материалов закон Гука записывается также в линейной форме, однако в этом случае число независимых упругих коэффициентов материала достаточно велико (до 21) и зависит от характера анизотропии.

4.3. Практические расчеты на сдвиг

Ниже рассмотрены основные положения расчетов заклепочных (болтовых) и сварных соединений металлических элементов.

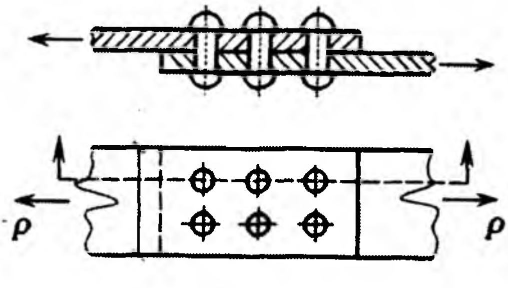


Рис. 4.4

А. Заклепочные (болтовые) соединения. На рис. 4.4 и 4.5 изображены два типа заклепочных соединений листов, подвергающихся растяжению силой P: соединение листов внахлестку (рис. 4.4) и встык с применением накладок (рис. 4.5). Назначение заклепок (или болтов) – препятствовать взаимному смещению соединяемых элементов и, тем самым, объединять отдельные элементы в единую конструкцию. При этом внутреннее усилие с одного элемента передается на другой через заклепки.

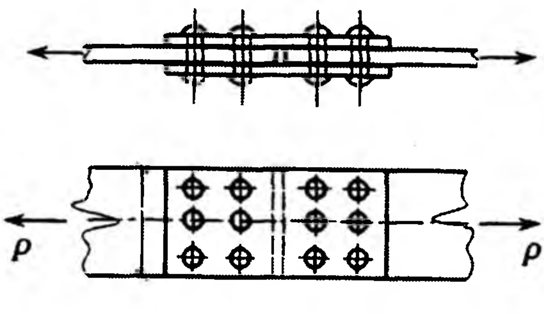


Рис. 4.5

Расчет заклепочного соединения имеет целью определить необходимое количество заклепок и проверить прочность соединяемых элементов в пределах стыка. При расчете принимается допущение о равномерном распределении воспринимаемого усилия на все заклепки. Это значит, что если в соединении имеется n заклепок, то каждая заклепка воспринимает и передает с элемента на элемент силу $P_1 = P/n$.

Рассмотрим работу одной заклепки при действии P_1 (рис. 4.6, *а*) на примере соединения внахлестку. Под воздействием сил P_1 верхняя половина заклепки стремится сдвинуться *относительно нижней*. При этом в стержне заклепки по плоскости контакта между элементами (*плоскость среза*) возникают касательные усилия. Принимая распределение касательных напряжений по плоскости возможного среза заклепки равномерным, получим

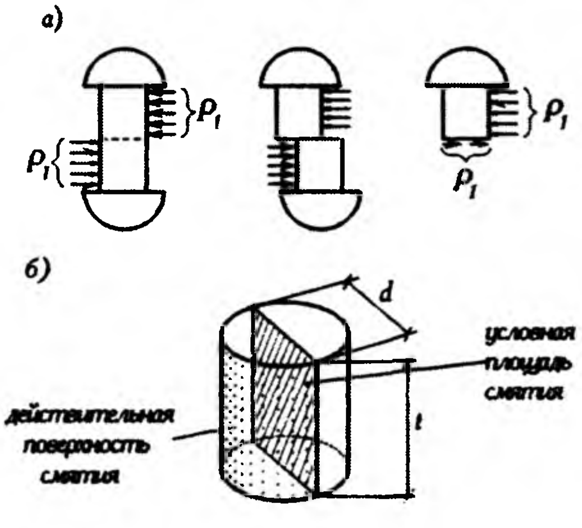


Рис. 4.6

$$\tau = \frac{P_1}{A_{ср}} = \frac{P}{n\frac{\pi d^2}{4}} ,$$

где d – диаметр заклепки.

Тогда условие, обеспечивающее прочность заклепки по срезу, запишется так:

$$\frac{4P}{n\pi d^2} \le R_{ср}^{з} ,$$

где $R_{ср}^{з}$ – расчетное сопротивление срезу заклепки. Отсюда, задавая диаметр заклепки по конструктивным соображениям, получим необходимое по условию среза число заклепок

$$n_{ср} \ge \frac{4P}{\pi d^2 R_{ср}^{з}} . \qquad (4.11)$$

Помимо возможного среза нормальной работе заклепки угрожает *смятие* материала заклепки и соединяемого элемента в результате их взаимного нажатия по цилиндрической поверхности контакта. Если нормальные напряжения смятия окажутся недопустимыми, то будет происходить искажение первоначальной формы стержня и отверстия, расшатывание заклепки и снижение несущей способности заклепочного соединения.

Так как определение нормальных напряжений, возникающих на цилиндрической поверхности контакта, затруднительно, действительная поверхность смятия заменяется условной, получаемой в результате сечения заклепки диаметральной плоскостью (рис. 4.6, *б*). В пределах условной площади смятия напряжения $\sigma_{см}$ предполагаются распределенными равномерно.

Тогда условие прочности по смятию

$$\sigma_{см} = \frac{P}{ndt} \le R^{з}_{см},$$

где t – наименьшая из толщин двух соединяемых элементов.

Необходимое по условию смятия число заклепок

$$n_{см} \ge \frac{P}{dtR^{з}_{см}}. \qquad (4.12)$$

Таким образом, необходимое число заклепок в соединении определяется наибольшим из чисел, вычисляемых по формулам (4.11) и (4.12):

$$n = \max\left\{n_{ср};\ n_{см}\right\}. \qquad (4.13)$$

При расчете заклепочного соединения необходимо также проверить прочность основных элементов, поперечное сечение которых ослаблено заклепочными отверстиями. Для соединения, изображенного на рис. 4.4 проверяется прочность поперечного сечения верхнего листа по первому слева ряду заклепок, и прочность нижнего листа по первому справа ряду заклепок (в обоих случаях продольная сила в сечениях $N = P$). Как видно на рис. 4.7, площадь сечения, ослабленного заклепочными отверстиями (площадь нетто),

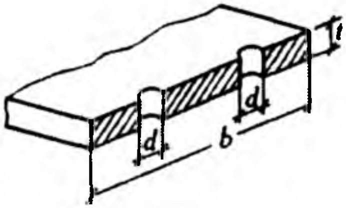


Рис. 4.7

$$A_н = t(b - md)\ ,$$

где m –число заклепок в одном ряду (на рис. 4.7 $m = 2$).

Тогда формула для проверки прочности основного элемента будет иметь вид:

$$\sigma = \frac{N}{A_н} = \frac{P}{t\,(b - md)} \le R \qquad (4.14)$$

В случае соединения листов с помощью накладок (см. рис.4.5) формулы для вычисления $n_{ср}$ и $n_{см}$ изменяются. Применяемые в таком соединении заклепки называются *двухсрезными*, так как усилие с листа на две накладки и дальше на лист передается через две плоскости среза (а не через одну, как это было при соединении листов внахлестку). Поэтому $A_{ср} = 2 \cdot \pi d^2 / 4$, и вместо формулы (4.11) будем иметь

$$n_{ср} \ge \frac{4P}{2\pi d^2 R^*_{ср}} = \frac{2P}{\pi d^2 R^*_{ср}} \qquad (4.11, a)$$

Формула (4.12) не изменится, но t следует определить так:

$$t = \min \left\{ t_л; \sum t_н \right\}. \qquad (4.15)$$

где $t_л$ – толщина листа; $t_н$ – толщина накладок.

Выражение (4.15) определяет суммарную минимальную толщину листов, сминаемых в одном направлении, т.е. для нашего примера (рис. 4.5) необходимо подсчитать сумму толщин двух накладок, сравнить ее с толщиной листа и выбрать для расчета меньшую величину. При этом будет обеспечена прочность по смятию как в соединяемом листе, так и в накладках.

Отметим, что при расчете соединения с накладками формула (4.13) определяет необходимое число заклепок лишь на одну половину соединения, то есть на присоединение одного листа к двум накладкам. На вторую половину необходимо установить столько же заклепок.

Расчет соединений на болтах, оси которых перпендикулярны направлению усилий в соединяемых элементах, принципиально не отличается от рассмотренного расчета заклепочных соединений. Необходимое количество болтов определяется также по формуле (4.13), обеспечивающей прочность болтов по условиям среза и смятия. Прочность соединяемых элементов, ослабленных болтовыми отверстиями, также проверяется по формуле (4.14).

Особый вид представляет фрикционное соединение на высокопрочных болтах, изготовленных из специальных сталей. Гайки таких болтов затягиваются ключами, обеспечивающими контроль усилия натяжения в стержне болта. При этом соединяемые элементы оказываются плотно прижатыми друг к другу и расчетное усилие P, в отличие от соединений на обычных болтах или заклепках, воспринимается не за счет работы болта на срез и смятие, а исключительно за счет сил трения, развивающихся по плоскостям контакта между элементами. При этом стержень болта воспринимает только растягивающее усилие, созданное при затягивании гайки.

Необходимое количество болтов фрикционного соединения определяется по формуле

$$n \geq \frac{P}{R_б A_б \; \mu \; k} \quad , \tag{4.16}$$

где $R_б$ – расчетное сопротивление растяжению высокопрочного болта; $A_б$ – площадь поперечного сечения болта; μ – коэффициент трения, принимаемый по нормам в зависимости от шероховатости поверхностей соприкасающихся элементов (обычно $\mu = 0{,}25 \div 0{,}58$); k – количество поверхностей трения, определяемое так же, как число срезов заклепки. Знаменатель правой части неравенства (4.16) представляет собой усилие, воспринимаемое фрикционным соединением при наличии *одного* натянутого болта.

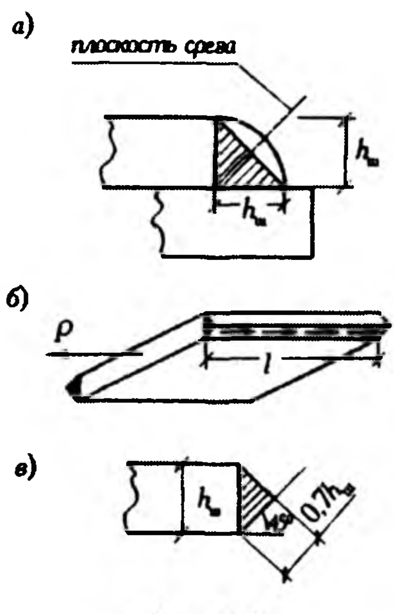


Рис. 4.8

Б. Сварные соединения. В настоящее время сварка является наиболее распространенным способом соединения элементов металлических конструкций.

Расчет сварных соединений сводится к расчету прочности швов, основным видом деформации которых является сдвиг.

В качестве примера рассмотрим работу фланговых швов, соединяющих два листа (см. рис.4.1, в). Расчетное сечение шва принимается в виде прямоугольного равнобедренного треугольника (рис. 4.8, *а*) с катетом – высотой шва – $h_ш$. Если два соединяемых листа стремятся сдвинуться, то во всех продольных сечениях шва возникают касательные напряжения, выражающие влияние одной части шва на другую (рис. 4.8, *б*). Наибольшими будут касательные напряжения в продольном сечении шва, разделяющем шов на две равные части, – в плоскости среза (рис. 4.8, *в*).

Для двух фланговых швов общая площадь расчетных сечений (каждая в виде прямоугольника $0{,}7h_ш \times l_0$) составляет $A_ш = 1{,}4h_ш\, l_0$.

Распределение касательных напряжений в пределах расчетного сечения шва условно принимается равномерным, т.е. $\tau = P/A_ш$. Тогда условие прочности сварного соединения имеет вид

$$\tau = \frac{P}{1{,}4h_ш\, l_0} \le R^{св} \quad , \tag{4.17}$$

где $R^{св}$ – расчетное сопротивление срезу материала сварного шва.

Обычно размером катета $h_ш$ задаются, и по формуле (4.17) вычисляют расчетную длину l_0 сварных швов, которая принимается на 1 см меньше фактической длины шва (учитываются возможные непровары на концах).

В заключение этого раздела необходимо отметить следующее. Действительное распределение касательных напряжений по плоскости среза заклепок и сварных швов при воздействии эксплуатационных нагрузок отличается от равномерного. В основном металле листа в районе отверстий также наблюдается концентрация, т.е. местное повышение напряжений. Однако на предшествующей разрушению стадии в мягких пластичных сталях происходит перераспределение напряжений за счет развития пластических деформаций, и их распределение приближается к равномерному, что и отражают приведенные здесь расчетные формулы.

ГЛАВА 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

5.1. Основные понятия

Как было показано в главе 2, величина нормальных напряжений в поперечном сечении растянутого (сжатого) стержня зависит от площади этого сечения. Поэтому можно сказать, что площадь поперечного сечения является той его геометрической характеристикой, которая определяет напряжения при растяжении (сжатии). Что касается других видов простых деформаций стержня (например, изгиб и кручение), то в этих случаях напряжения зависят не от площади, а от некоторых других геометрических характеристик поперечных сечений стержней. Цель данной главы – изучение этих новых геометрических характеристик, их свойств и способов вычисления.

Рассмотрим изображенную на рис. 5.1 плоскую фигуру произвольной формы, представляющую собой поперечное сечение некоторого стержня.

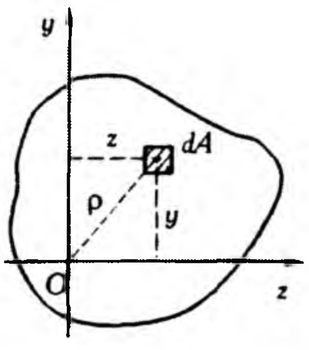


Рис. 5.1

Введем систему прямоугольных координат zOy. Далее проделаем следующее:

а) мысленно расчленим всю заданную фигуру на бесконечное множество бесконечно малых площадок площадью dA;

б) для каждой из площадок составим произведение $z^m y^n dA$, где z, y – координаты центра тяжести элементарной площадки в принятой системе координат, m, n – целые положительные числа;

в) просуммируем полученные произведения по всем площадкам, образующим фигуру. Указанные операции выражают собой вычисление по площади A определенного интеграла

$$\int_A z^m y^n dA, \tag{5.1}$$

называемого моментом заданной фигуры $m + n$-го порядка. Рассмотрим моменты фигуры нулевого, первого и второго порядков.

При $m = n = 0$ имеем $\int\limits_A dA = A$, то есть площадь фигуры представляет собой момент нулевого порядка.

При $m = 1$, $n = 0$ или $m = 0$, $n = 1$ получаем моменты первого порядка, называемые *статическими моментами* фигуры относительно осей z и y:

$$S_z = \int\limits_A y\,dA; \qquad S_y = \int\limits_A z\,dA.$$

Как видно, размерность статических моментов – длина в третьей степени. Представим S_z и S_y в таком виде:

$$S_z = Ay_c; \qquad S_y = Az_c.$$

Отсюда имеем

$$\left.\begin{aligned} y_c &= S_z/A; \\ z_c &= S_y/A. \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

Формулы (5.2), известные из курса теоретической механики, выражают координаты центра тяжести данной фигуры. Для определения координат центра тяжести необходимо выполнить следующие действия:

а) назначить некоторую вспомогательную систему координатных осей z, y;

б) разбить заданную фигуру на *конечное* число более простых фигур, центры тяжести и площади которых легко находятся (прямоугольники, треугольники, окружности и т.п.);

в) вычислить статические моменты по формулам $S_z = \sum A_i y_i$; $S_y = \sum A_i z_i$, где A_i – площади простых фигур, составляющие заданную; y_i, z_i – координаты центров тяжести этих фигур в принятой системе вспомогательных осей; вычислить $A = \sum A_i$;

г) по формулам (5.2) определить искомые координаты центра тяжести фигуры.

Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называются центральными.

Из формул (5.2) следует, что если в качестве осей координат принять центральные оси, то статические моменты относительно этих осей равны нулю. И наоборот, если статический момент фигуры относительно некоторой оси равен нулю, то данная ось является центральной. Очевидно, что у фигур, имеющих ось симметрии, центр тяжести расположен на этой оси, а у фигур, имеющих две или более осей симметрии (прямоугольник, равносторонний треугольник, симметричный двутавр, круг и т.п.), центр тяжести лежит на пересечении этих осей.

Далее рассмотрим моменты фигуры (5.1) второго порядка, то есть варианты, когда $m = 2$, $n = 0$ или $m = 0$, $n = 2$ или $m = n = 1$. При этом образуются выражения

$$J_y = \int_A z^2 dA; \qquad J_z = \int_A y^2 dA, \tag{5.3}$$

называемые *осевыми моментами инерции сечения* относительно осей y и z соответственно, а также – *центробежный момент инерции сечения относительно осей* z, y

$$J_{zy} = \int_A yz dA. \tag{5.4}$$

Отметим некоторые основные свойства указанных геометрических характеристик. Размерность моментов инерции (как осевых, так и центробежного) – длина в четвертой степени. Как видно из выражений (5.3), осевые моменты инерции при любом расположении осей z и y относительно фигуры могут быть только положительными. Так как по определению (5.4) центробежный момент есть результат суммирования величин $zydA$ (координаты z и y в первой степени), то в зависимости от расположения фигуры относительно осей координат центробежный момент может равняться положительному числу, отрицательному числу или нулю. Обратим внимание на очевидное, важное для понимания дальнейшего, свойство моментов инерции: они зависят не только от формы и размеров сечения, но и от положения в принятой системе координатных осей. Наконец, подчеркнем, что J_z, J_y и J_{zy} являются независимыми геометрическими характеристиками фигуры, то есть ни одна из них не может быть выражена через две другие.

Далее рассмотрим еще одну геометрическую характеристику специального вида. Пусть ρ – длина полярного радиуса (рис. 5.1), проведенного из начала координат O в центр тяжести произвольной площадки (то есть в точку с координатами z, y). Составляя произведение $\rho^2 dA$ и суммируя его по всей площади, получим *полярный момент инерции* фигуры относительно начала координат O

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA \quad , \tag{5.5}$$

Легко показать, что J_ρ не является независимой (от J_z, J_y, J_{zy}) геометрической характеристикой. Действительно,

$$J_\rho = \int\limits_A \left(z^2 + y^2\right) dA = \int\limits_A z^2 dA + \int\limits_A y^2 dA = J_y + J_z \ . \qquad (5.6)$$

Таким образом, *полярный момент инерции сечения относительно любой точки равен сумме двух осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей координат, пересекающихся в этой точке.* Отсюда вытекает следующее свойство осевых моментов инерции: если при неизменной фигуре исходную систему координатных осей z, y повернуть на произвольный угол и образовать новую систему перпендикулярных осей z_1, y_1, то имеет место выражение

$$J_z + J_y = J_{z_1} + J_{y_1} \, . \qquad (5.7)$$

то есть *при повороте координатных осей сумма осевых моментов инерции фигуры остается постоянной.*

5.2. Моменты инерции простейших и составных фигур

Рассмотрим порядок вычисления моментов инерции простейших фигур относительно центральных осей с помощью определенных интегралов (5.3).

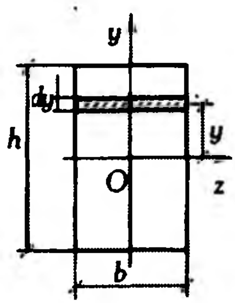


Рис. 5.2

Прямоугольник (рис. 5.2). Для вычисления осевого момента инерции J_z примем элементарную площадку в виде бесконечно тонкой полоски параллельной оси z. Тогда $dA = bdy$ и

$$J_z = \int\limits_A y^2 dA = \int\limits_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = \left. \frac{by^3}{3} \right|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12} \, .$$

Рассуждая аналогично, можно получить $J_y = \dfrac{hb^3}{12}$.

Заметим, что в обоих случаях в куб возводится та сторона, которая пересекается осью.

Треугольник (рис. 5.3). Для вычисления J_z (z – центральная ось параллельная основанию треугольника) примем элементарную площадку также в виде полоски высотой dy, но с переменной шириной b_y. Из подобия треугольников получим

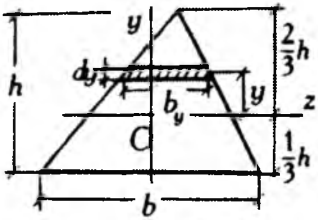


Рис. 5.3

$$b_y = \frac{b}{h}\left(\frac{2}{3}h - y\right).$$

Тогда $dA = b_y dy = \dfrac{b}{h}\left(\dfrac{2}{3}h - y\right) dy$ и

$$J_z = \int\limits_{-h/3}^{2/3h} y^2 \cdot \frac{b}{h}\left(\frac{2}{3}h - y\right) dy = \frac{bh^3}{36}.$$

Круг (рис. 5.4). Так как для круга $J_z = J_y$ (а $J_z + J_y = J_\rho$, т.е. $J_z = J_\rho / 2$) предварительно вычислим полярный момент инерции J_ρ. Для этого примем элементарную площадку в виде кольца радиусом ρ и толщиной $d\rho$. При этом $dA = 2\pi\rho \cdot d\rho$, отсюда

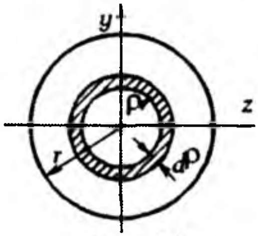


Рис. 5.4

$$J_\rho = \int\limits_0^r \rho^2 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32};$$

$$J_z = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Порядок вычисления момента инерции фигуры сложной формы, состоящей из нескольких простых, рассмотрим на примере симметричного двутавра, образованного тремя прямоугольниками (рис. 5.5). Пусть требуется определить J_z, где z – центральная ось двутавра. Будем производить интегрирование по всей площади в таком порядке: сначала суммируем выражения y^2dA, относящиеся *только* к прямоугольнику *1*, а затем *только* к прямоугольнику *2*, и наконец – к прямоугольнику *3*.

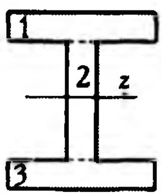


Рис. 5.5

Тогда

$$J_z = \int\limits_A y^2 dA = \int\limits_{A_1} y^2 dA + \int\limits_{A_2} y^2 dA + \int\limits_{A_3} y^2 dA.$$

Каждый из трех указанных интегралов есть осевой момент инерции соответствующей простой фигуры относительно оси z.

Таким образом, приходим к формуле

$$J_z = J_z^{(1)} + J_z^{(2)} + J_z^{(3)}.$$

В общем случае при расчленении составной фигуры на n простейших получим

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} J_z^{(i)} \; . \tag{5.8}$$

В связи с использованием формулы (5.8) обратим внимание на следующие два важных обстоятельства.

1. Иногда составные фигуры можно образовать из простых так, что некоторые из них будут не прибавляться, а вычитаться. Это относится к составным фигурам, имеющим пустоты, прорези и т.п. (например, поперечное сечение трубы можно представить как разность двух кругов). Соответствующие моменты инерции в правой части формулы (5.8) должны учитываться со знаком минус.

2. Моменты инерции $J_z^{(i)}$ должны вычисляться относительно одной и той же оси z, которая может и не быть центральной для каждой простейшей фигуры. Например, для двутавра (см. рис. 5.5) центральная ось всей фигуры также центральная для фигуры *2*, но не является таковой для фигур *1* и *3*. Поэтому для вычисления $J_z^{(1)}$ и $J_z^{(3)}$ неправомерно использовать выведенную выше формулу осевого момента инерции прямоугольника относительно его центральной оси. Возникает вопрос – как, зная момент инерции фигуры относительно собственной центральной оси, определить момент инерции этой фигуры относительно некоторой оси, параллельной центральной и отстоящей от нее на заданное расстояние. Решение такого вопроса приводится ниже.

5.3. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

Пусть требуется определить моменты инерции J_{z_1}, J_{y_1}, $J_{z_1 y_1}$ заданной фигуры (рис. 5.6) относительно осей z_1, y_1, не являющихся для этой фигуры центральными.

Обозначим z_c и y_c координаты центра тяжести фигуры C в осях z_1, y_1 и проведем центральные оси z, y, параллельные осям z_1, y_1. Будем рассматривать оси z_1, y_1 как полученные в результате параллельного смещения центральных осей z, y на величины y_c, z_c соответственно. Моменты инерции относительно указанных центральных осей J_z, J_y, J_{zy} считаем известными. Они равны

$$J_z = \int_A y^2 dA; \quad J_y = \int_A z^2 dA;$$

$$J_{zy} = \int_A yzdA.$$

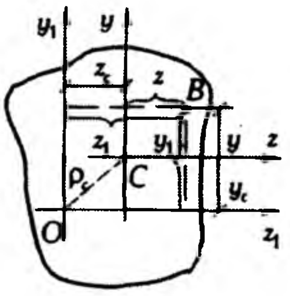


Рис. 5.6

Координаты произвольной точки B в смещенных осях выражаются через координаты этой точки в центральных осях следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= z + z_c, \\ y_1 &= y + y_c. \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

Тогда

$$J_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + y_c)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2y_c \int_A ydA + y_c^2 A.$$

Так как ось z – центральная, то $\int_A ydA = S_z = 0.$

Окончательно получим

$$J_{z_1} = J_z + y_c^2 A . \tag{5.10}$$

Выражение для J_{y_1} получается аналогично

$$J_{y_1} = J_y + z_c^2 A . \tag{5.11}$$

Таким образом, *осевой момент инерции сечения относительно любой оси равен моменту инерции относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.*

Для вычисления центробежного момента $J_{z_1 y_1}$ запишем, учитывая $S_z = S_y = 0$,

$$\begin{aligned} J_{z_1 y_1} &= \int_A (z + z_c)(y + y_c) dA = \int_A zydA + z_c \int_A ydA + \\ &+ y_c \int_A zdA + z_c y_c \int_A dA = J_{zy} + z_c y_c A. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Следовательно, *центробежный момент инерции сечения относительно любых взаимно перпендикулярных осей равен центробежному моменту относительно центральных осей, параллельных заданным,* *плюс произведение площади фигуры на координаты ее центра тяжести в заданных осях.*

Обратим внимание на то, что в отличие от формул (5.10) и (5.11), где величины y_c и z_c в квадратах, в (5.12) они в первой степени. Поэтому при вычислении $J_{z_1y_1}$ знаки координат центра тяжести имеют существенное значение.

Подчеркнем, что формулы (5.10), (5.11) и (5.12) позволяют переходить к произвольным осям *только от центральных осей* – это следует из их вывода. Если же заданы моменты инерции относительно осей, не являющихся центральными, то переходить к другим параллельным осям по указанным формулам нельзя. В таких случаях следует сначала вычислить моменты относительно *центральных осей*, параллельных заданным, и только затем использовать формулы (5.10)–(5.12). Схемы правильного и неправильного перехода от оси z_1 к оси z_2 показана на рис. 5.7.

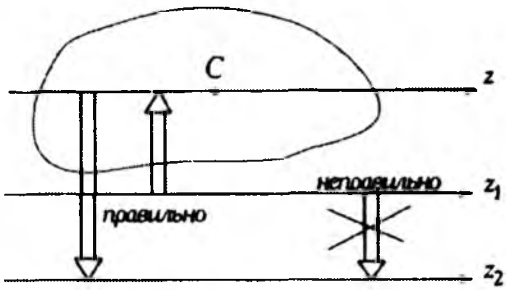


Рис. 5.7

Полученные формулы перехода к параллельным осям позволяют решить задачу вычисления моментов инерции составной фигуры, в частности двутавра, показанного на рис. 5.5.

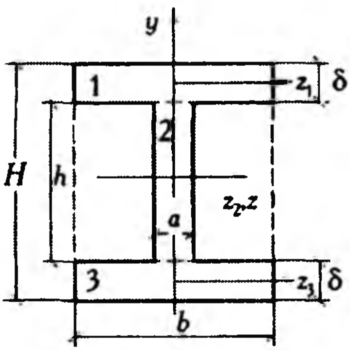


Рис. 5.8

Этот двутавр можно разбить на три прямоугольника (см. рис. 5.8), каждый из которых имеет свою центральную ось.

Определим моменты инерции относительно собственных осей

$$J_{z_1} = J_{z_3} = \frac{b\delta^3}{12}; \; J_{z_2} = \frac{ah^3}{12}.$$

Суммарный момент инерции всей фигуры относительно оси z определим, используя выражение (5.10):

$$J_z = 2\left[J_{z_1} + \left(\frac{h+\delta}{2}\right)^2 b\delta\right] + J_{z_2}.$$

Этот же результат можно получить, используя иную схему разбивки сечения. Двутавр можно рассматривать как прямоугольник размером $b \times H$, из которого вырезаны два прямоугольника высотой h, расположенные справа и слева от стенки двутавра. Очевидно, что в этом случае центры тяжести всех прямоугольников будут лежать на общей центральной оси. И тогда

$$J_z = \frac{bH^3}{12} - \frac{(b-a)h^3}{12},$$

что проще.

Первая схема разбивки удобнее при вычислении моментов инерции относительно оси y, на которой расположены центры тяжести всех трех прямоугольников

$$J_y = 2\frac{\delta b^3}{12} + \frac{ha^3}{12}.$$

5.4. Понятие о главных осях инерции

Выяснив характер изменения моментов инерции при параллельном переносе осей координат, необходимо исследовать влияние поворота этих осей на произвольный угол. Это и будет сделано в дальнейшем. Предварительно рассмотрим некоторые новые понятия теории моментов инерции, используемые в дальнейшем изложении.

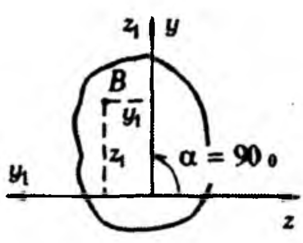


Рис. 5.9

Поставим вопрос – что произойдет с центробежным моментом инерции фигуры, если оси координат (не обязательно центральные) повернуть на 90^0 против хода часовой стрелки (такой поворот будем считать положительным)? На рис. 5.9 изображены первоначальные оси z, y и повернутые на 90^0 оси координат z_1, y_1.

Координаты произвольной точки B в повернутых осях выражаются через координаты в первоначальных осях так:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= y, \\ y_1 &= -z. \end{aligned}\right\} \qquad (5.13)$$

Тогда, используя определение центробежного момента (5.4), получим

$$J_{z_1y_1} = \int\limits_{(A)} z_1y_1dA = \int\limits_{(A)} y(-z)dA = -\int\limits_{(A)} zydA = -J_{zy}. \qquad (5.14)$$

Таким образом, *при повороте осей координат на* 90^0 *центробежный момент любой фигуры изменяет свой знак.* С другой стороны, очевидно, что при изменении угла поворота осей от $\alpha = 0$ до $\alpha = 90^0$ центробежный момент будет меняться непрерывно. Следовательно, зависимость $J_{z_1y_1}(\alpha)$ графически выражается непрерывной линией, как это показано на рис. 5.10, пересекающей ось α в некоторой точке α_0 $(0 \le \alpha_0 \le 90^\circ)$.

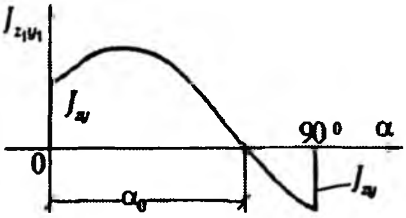


Рис. 5.10

Это значит, что при любом положении начала координат относительно заданной фигуры всегда существует такая пара взаимно перпендикулярных осей, относительно которых центробежный момент равен нулю. Такие координатные оси называются *главными осями инерции* (или, короче, *главными осями*). *Осевые моменты инерции относительно главных осей также называются главными моментами инерции.* В дальнейшем особый интерес будут представлять главные центральные оси, то есть те из центральных осей координат, относительно которых центробежный момент равен нулю. Порядок определения главных центральных осей для фигур произвольной формы будет изложен в конце данной главы. Здесь рассмотрим частный случай – *фигуры симметричные.*

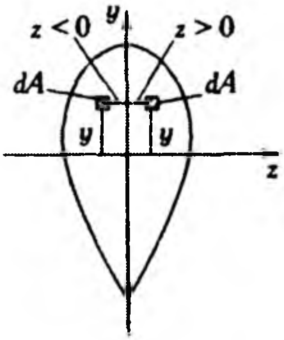


Рис. 5.11

Теорема об оси симметрии. *Для симметричной фигуры одна из главных осей совпадает с осью симметрии.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если принять за ось координат y ось симметрии (рис. 5.11), а за ось z – ей перпендикулярную любую ось, то всякой элементарной площадке dA с координатами z, y будет соответствовать такая же симметрично расположенная площадка с координатами $-z, y$. Поэтому в составе интеграла $J_{zy} = \int\limits_{A} zydA$ сумма положительных слагаемых вида $zydA$ и сумма отрицательных будут различаться только знаком. Следовательно, $J_{zy} = \int\limits_A zydA = 0$, то есть оси y и z – главные.

Далее рассматриваются вопросы, связанные с определением положения главных осей и величины главных моментов инерции для фигур произвольной формы.

5.5. Изменение моментов инерции при повороте осей

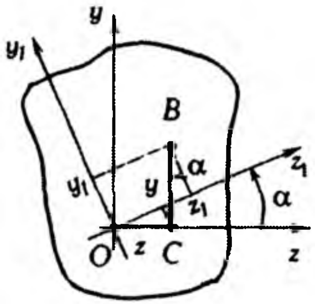


Рис. 5.12

Рассмотрим произвольное сечение (рис. 5.12) и связанную с ним систему координат zOy (не обязательно центральных). Повернем оси координат на угол $\alpha > 0$, образовав новую систему координат z_1Oy_1. Выразим координаты любой точки B в новой системе (z_1, y_1) через координаты той же точки в старой системе (z, y). Для этого найдем проекции ломаной BCO на оси z_1 и y_1. В результате получим

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= y\sin\alpha + z\cos\alpha; \\ y_1 &= y\cos\alpha - z\sin\alpha\ . \end{aligned}\right\} \qquad (5.15)$$

Отметим, что ранее записанные формулы (5.13) получаются из (5.15) как частный случай ($\alpha = 90^0$).

Искомые моменты $J_{z_1}, J_{y_1}, J_{z_1y_1}$ определим с использованием выражений (5.15)

$$J_{z_1} = \int\limits_A y_1^2 dA = \int\limits_A (y\cos\alpha - z\sin\alpha)^2 dA = \int\limits_A y^2 dA \cdot \cos^2\alpha +$$
$$+ \int\limits_A z^2 dA \cdot \sin^2\alpha - \int\limits_A zydA \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha.$$

Таким образом, получим

$$J_{z_1} = J_z\cos^2\alpha + J_y\sin^2\alpha - J_{zy}\sin 2\alpha\ . \qquad (5.16)$$

Выражая аналогичным образом J_{y_1} и $J_{z_1y_1}$, будем иметь

$$J_{y_1} = J_z\sin^2\alpha + J_y\cos^2\alpha + J_{zy}\sin 2\alpha\ ; \qquad (5.17)$$

$$J_{z_1y_1}=\frac{J_z-J_y}{2}\sin2\alpha+J_{zy}\cos2\alpha\ . \qquad (5.18)$$

Формулы (5.16)–(5.18) показывает, что два осевых и центробежный моменты инерции относительно произвольных взаимно перпендикулярных координатных осей определяют осевые и центробежный моменты относительно других координатных осей, повернутых на угол α.

5.6. Основные свойства моментов инерции

Анализируя формулы (5.16)–(5.18), можно установить все свойства моментов инерции фигуры, связанные с поворотом осей координат (положение главных осей, величины главных моментов инерции, т.е. экстремальные значения моментов инерции). Решение этой задачи существенно упрощается, если воспользоваться следующим обстоятельством. Сравнение (5.16)–(5.18) с формулами теории плоского напряженного состояния (3.4)–(3.6) указывает на полную идентичность их структуры. Это значит, что моменты инерции относительно повернутой системы координатных осей выражаются через моменты инерции относительно исходной системы точно так же, как и напряжения на повернутых площадках через напряжения на некоторых исходных взаимно перпендикулярных площадках.

Тождественность связей между величинами, взятыми из разных разделов или проблем науки, называется аналогией, а сами величины, попарно соответствующие друг другу, – аналогами.

Воспользуемся обнаруженной аналогией для упрощения решения поставленной задачи – выявить свойства моментов инерции в связи с поворотом осей координат.

Таблица величин-аналогов

Теория ПНС	σ_x	σ_y	τ_{yx}	σ_{x_1}	σ_{y_1}	$\tau_{y_1x_1}$	σ_{max}	σ_{min}
Теория МИ	J_z	J_y	J_{zy}	J_{z_1}	J_{y_1}	$J_{z_1y_1}$	J_v	J_u

Для этой цели составим таблицу величин-аналогов, связывающих теорию плоского напряженного состояния (ПНС) и теорию моментов инерции (МИ).

Таблица составляется путем сопоставления формул (5.16) –(5.18) с формулами (3.4) –(3.6), при этом аналогом поворота площадок в теории ПНС является поворот осей координат в теории МИ.

Далее поступим таким образом: основные определения, свойства и формулы, полученные в главе 3 при анализе ПНС, с помощью приведенной таблицы аналогов переведем на язык теории МИ. Таким образом, необходимые результаты получаются сразу, без анализа и выводов, подобных проведенным в главе 3. Сопоставление свойств и формул двух теорий удобно провести в табличной форме.

Теория ПНС	Теория МИ
1. Сумма нормальных напряжений при повороте взаимно перпендикулярных площадок остается постоянной: $\sigma_{x_1}+\sigma_{y_1}=\sigma_x+\sigma_y=\mathrm{const}$.	1. Сумма осевых моментов инерции при повороте взаимно перпендикулярных осей остается постоянной $J_{z_1}+J_{y_1}=J_z+J_y=\mathrm{const}$.
2. Существование двух взаимно перпендикулярных главных площадок, на которых $\tau_{y_1x_1}=-\tau_{x_1y_1}=0$.	2. Существование двух взаимно перпендикулярных главных осей, относительно которых $J_{z_1y_1}=0$. (Принято обозначать главные оси v и u).
3. Свойства экстремальности главных напряжений σ_{max}, σ_{min} по сравнению с нормальными напряжениями на всех остальных площадках.	3. Свойства экстремальности главных моментов инерции $J_v=J_{max}$, $J_u=J_{min}$ по сравнению с осевыми моментами инерции относительно остальных осей.
4. Главные напряжения: $\sigma_{\substack{max\\min}}=\dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{yx}^2}$.	4. Главные моменты инерции: $J_{v/u}=\dfrac{J_z+J_y}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{J_z-J_y}{2}\right)^2+J_{zy}^2}$.
5. Наклон главных площадок $\mathrm{tg}2\alpha_0=-\dfrac{2\tau_{yx}}{\sigma_x-\sigma_y}$; $\mathrm{tg}\alpha_0=-\dfrac{\tau_{yx}}{\sigma_{max}-\sigma_y}$.	5. Наклон главных осей: $\mathrm{tg}2\alpha_0=-\dfrac{2J_{zy}}{J_z-J_y}$; $\mathrm{tg}\alpha_0=-\dfrac{J_{zy}}{J_v-J_y}$.
6. Использование круга Мора для графического определения напряжений на наклонных площадках.	6. Использование круга Мора для графического определения моментов инерции относительно наклонных осей.

Примечания к таблице.

1. Свойства 1 и 2 теории МИ были получены ранее без использования аналогии с теорией ПНС. Здесь они приведены в качестве иллюстрации возможности метода аналогий.

2. Приведенные в пп. 3–6 свойства и формулы теории МИ имеют важное значение и широко используются при расчете геометрических характеристик плоских сечений стержней.

3. Построение круга Мора (круга инерции) производится в осях $J_z(J_y)-J_{zy}$ аналогично построению круга напряжений, но вместо линий, параллельных нормалям к площадкам, проводятся линии, параллельные координатным осям. Так как для любой фигуры осевые моменты не могут быть отрицательными, круг инерции всегда располагается правее начала координат (что не обязательно для круга напряжений).

ГЛАВА 6. ИЗГИБ БАЛОК

6.1. Внешние и внутренние силовые факторы при изгибе. Реакции связей

Различают несколько видов изгиба стержней (балок). Начнем изучени с простейшего – с плоского изгиба. В этом случае все внешние силы лежат в одной главной плоскости (рис. 6.1), проходящей через одну из главных центральных осей поперечного сечения балки. При этом направления линий действия сил и распределенных нагрузок перпендикулярны продольной оси Выясним, какие внутренние силовые факторы могут возникать в поперечных сечениях балок, испытывающих плоский изгиб. Для этого воспользуемся методом сечений. Мысленно разделим балку на две части, отбросим одну из них и рассмотрим равновесие оставшейся. Эта часть и показана на рис. 6.1. Пусть на нее действуют внешние сила P, распределенная нагрузка q, пара сил с моментом m, а также реакция связи R_B. Главный вектор внутренних сил в общем случае имеет три составляющие, направленные по осям x, y, z. Записывая уравнения равновесия в виде суммы проекций всех внешних и внутренних сил на эти оси координат (см. уравнения (1.4)), можно легко убедиться, что в нашем случае внешние силы не дают проекций на ось z (так как они лежат в плоскости xy) и на ось x (так как они перпендикулярны этой оси). Следовательно, здесь возможна единственная составляющая главного вектора внутренних сил, направленная вдоль оси y, которую условились называть поперечной силой и обозначать символом Q_y .Так как второй поперечной силы Q_z здесь нет, то в дальнейшем индекс "y" можно опустить. Аналогичным образом, записывая уравнения равновесия для оставшейся части в виде суммы моментов внешних и внутренних сил относительно осей x, y, z, можно легко убедиться, что при принятом характере нагружения балки в поперечном сечении будет отличным от нуля только

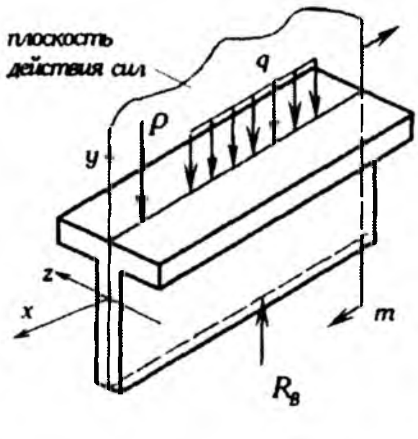


Рис. 6.1

внутренний изгибающий момент относительно оси z, который будем обозначать символом M_z. Внешние силы не дают моментов относительно осей y (параллельны ей) и x (пересекают ее), поэтому в дальнейшем индекс у момента также можно опустить.

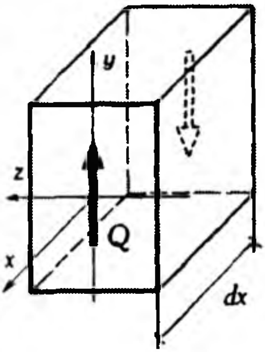


Рис. 6.2

Таким образом, в поперечных сечениях балки при плоском изгибе могут возникать только одна поперечная сила и только один изгибающий момент. При этом, поперечная сила находится в плоскости действия внешних нагрузок, а изгибающий момент вычисляется относительно центральной главной оси, перпендикулярной плоскости действия сил. Подчеркнем, что в поперечных сечениях балки в общем случае действуют нормальные и касательные напряжения, с которыми связаны поперечная сила и изгибающий момент интегральными соотношениями (1.5)–(1.8), то есть

$$Q_y = \int_A \tau_{yx} dA \quad \text{и} \quad M_z = \int_A \sigma_x y dA. \tag{6.1}$$

Из этих соотношений следует, что правила знаков для поперечной силы и изгибающего момента (которые находим методом сечений) должны быть согласованы с правилами знаков для касательных и нормальных на-

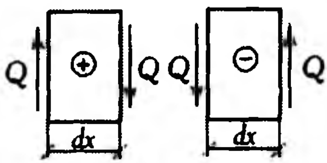


Рис. 6.3

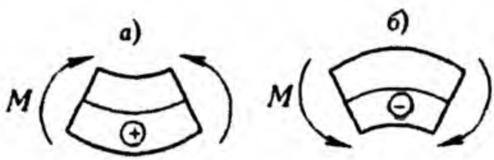


Рис. 6.4

пряжений. Поперечная сила считается положительной, если она вращает выделенный из балки двумя близкими сечениями элемент по часовой стрелке (как и касательное напряжение). На рис. 6.2 показана положительная поперечная сила в двух близких поперечных сечениях балки. В проекции на плоскость xy эта картина приведена на рис. 6.3 как для положительной, так и для отрицательной поперечной силы.

Изгибающий момент считают положительным, если растягиваются нижние волокна балки. На рис. 6.4 показан деформированный при изгибе вид элемента с положительными (*а*) и отрицательными (*б*) изгибающими моментами.

Наиболее распространенными типами связей для балок являются шарнирно-подвижная, шарнирно-неподвижная опора и жесткая заделка, условное изображение которых дано на рис. 6.5, *а*, *б*, *в* соответственно.

Рис. 6.5

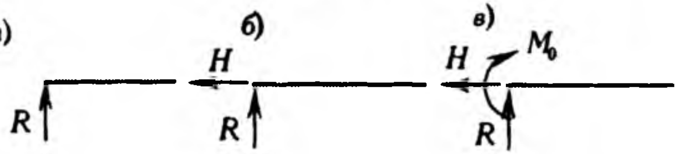


Рис. 6.6

Первый тип опор (*а*) препятствует только линейному перемещению балки по направлению опорного стержня – реакция в опоре направлена вдоль него (рис. 6.6, *а*). Второй тип опоры (*б*) не допускает линейных перемещений вообще, поэтому в общем случае реакция этой опоры произвольно ориентирована в плоскости изгиба и представляется обычно в виде двух составляющих R и H(рис. 6.6, *б*). Жесткая заделка не допускает ни линейных, ни угловых (поворот опорного сечения) перемещений: к реакциям H и R добавляется опорный момент M_0 (рис. 6.6, *в*). Для нахождения этих реакций используются уравнения равновесия. При этом связи отбрасываются, и их воздействие заменяется соответствующими реакциями, как это показано на рис. 6.6. Однако обычно эти реакции изображаются на чертеже вместе со связями, этот условный прием для сокращения чертежной работы также будем использовать в дальнейшем.

Пример 1. Определить опорные реакции в балке, изображенной на рис. 6. 7.

Решение

1. Мысленно отбросим связи и заменим их воздействие на балку соответствующими реакциями.

2. Зафиксируем систему координат: x вдоль продольной оси балки, а y – перпендикулярно к x – вверх.

3. Составим уравнения равновесия для плоской произвольной системы сил. Из статики известно, что для нее можно записать три уравнения равновесия в трех различных формах. В данном случае целесообразно записать эти уравнения в следующем виде

$$\sum F_x = 0; \quad \sum m_A(F) = 0 \quad \text{и} \quad \sum m_B(F) = 0.$$

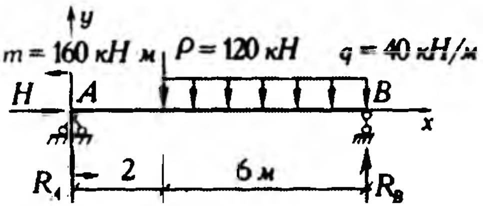


Рис. 6.7

Из уравнения $\sum F_x = 0$ найдем $H = 0$. Запишем сумму моментов всех сил относительно центра A. Здесь следует руководствоваться определенным правилом для момента силы или пары сил относительно центра. Примем, как и в теоретической механике, следующее правило: *момент силы или пары сил считается положительным, если сила или пара сил стремится повернуть тело против часовой стрелки, и отрицательным – по часовой стрелке* . Не следует путать это правило с правилом знаков для изгибающего момента (см. рис.6.4). В первом случае речь идет об определении реакций с помощью обычного аппарата статики, а во-втором – правило знаков для изгибающего момента связано с деформированным видом балки.

Итак, $\sum m_A(F) = R_B \cdot 8 - q \cdot 6 \cdot 5 - P \cdot 2 + m = 0.$

При записи этого уравнения равномерно распределенную нагрузку интенсивностью q заменили ее равнодействующей, приложенной в середине участка. Из этого уравнения определим R_B:

$$R_B = \frac{1}{8}(40 \cdot 6 \cdot 5 + 120 \cdot 2 - 160) = 160\,кН.$$

Аналогично $\sum m_B(F) = -R_A \cdot 8 + m + P \cdot 6 + q \cdot 6 \cdot 3 = 0;$

$$R_A = \frac{1}{8}(160 + 120 \cdot 6 + 40 \cdot 6 \cdot 3) = 200\,кН.$$

Полезно записать уравнение в виде суммы проекций всех сил на ось y, при этом можно обнаружить случайную ошибку вычислений:

$$\sum F_y = -P - q \cdot 6 + R_A + R_B = -120 - 40 \cdot 6 + 160 + 200 = 0.$$

То, что эта сумма оказалась равной нулю является необходимым, но недостаточным условием отсутствия ошибок при вычислении реакций. Если, например, не учитывать в соответствующих уравнениях момент от пары сил m, то также получим $\sum F_y = 0$, хотя реакции будут найдены неверно.

В нашем примере обе реакции R_A и R_B со знаком плюс, а это означает, что ранее принятое их направление совпадает с действительным. Если в ходе решения какая-либо реакция найдется со знаком минус, то для дальнейшего расчета необходимо изменить направление реакции на обратное.

Пример 2. Рассмотрим теперь определение реакций в консольной балке (рис. 6.8).

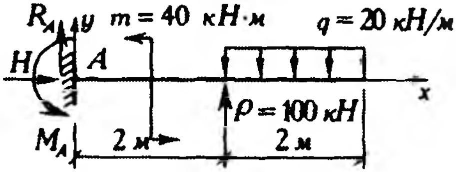


Рис. 6.8

Как и в первом примере, покажем реакции в заделке, выберем оси координат и запишем уравнения равновесия балки в виде

$$\sum F_x = 0 \ (a);$$

$$\sum F_y = 0 \ (b); \quad \sum m_A(F) = 0 \ (c).$$

Из (a) найдем $H = 0$; из (b)

$R_A + P - q\cdot 2 = 0$ получим $R_A = 20\cdot 2 - 100 = -60$ кН.

Из (c)

$$-q\cdot 2\cdot 3 + P\cdot 2 + m + M_A = 0;$$

$$M_A = 20\cdot 2\cdot 3 - 100\cdot 2 - 40 = -120 \ \text{кН·м}.$$

В данном примере и R_A, и M_A получились со знаком минус, поэтому направления соответствующих реакций надо заменить на обратные.

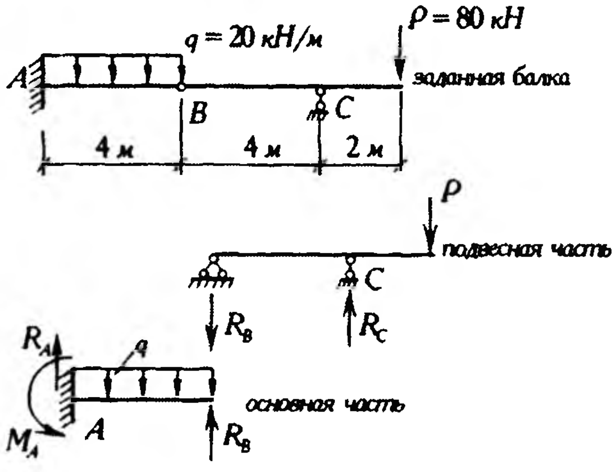


Рис. 6.9

Пример 3. Если балка – составная (рис. 6.9) с одним или несколькими врезанными шарнирами, то необходимо выяснить, какая часть балки является основной, а какая – подвесной. Для этого следует мысленно убрать врезанные шарниры. Та часть балки, которая сохранит свое равновесие, будет основной. Расчет необходимо начинать с подвесной части. При этом вместо шарнира устанавливается шарнирная опора. Порядок расчета показан на простом примере (см. рис. 6.9).

Для подвесной части определим реакции

$$R_B = 40 \ \text{кН} \quad \text{и} \quad R_C = 120 \ \text{кН}.$$

Затем загружаем основную часть заданной на ней нагрузкой и реакцией R_B обратного направления. Для этой балки получим

$$R_A = 40\ кН \text{ и } M_A = 0.$$

6.2. Дифференциальные зависимости при изгибе. Построение эпюр в балках

Вырежем из загруженной балки двумя близкими поперечными сечениями бесконечно малый элемент длиной dx (рис. 6.10). Пусть по длине верхней грани балки действует распределенная нагрузка q, которую на бесконечно малом участке длиной dx будем считать постоянной.

В левом поперечном сечении балки система внутренних усилий сводится к поперечной силе Q и изгибающему моменту M. Эти внутренние силовые факторы обычно меняются от сечения к сечению, т.е. являются функциями координат точек продольной оси балки x. Поэтому при переходе от левой грани к правой, т.е. при изменении аргумента x на величину dx, поперечная сила и изгибающий момент получат приращения dQ и dM. Так как любая часть балки находится в состоянии равновесия, то запишем для показанной на рис. 6.10 системы сил уравнения равновесия в виде

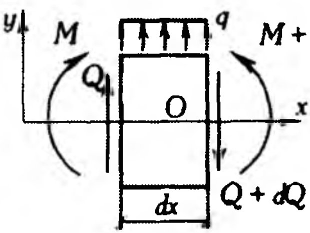


Рис. 6.10

$$\sum F_y = 0 \quad (a) \quad \text{и} \quad \sum m_0(F) = 0 \quad (b).$$

Из (a): $Q - (Q + dQ) + q dx = 0$ найдем

$$q = \frac{dQ}{dx}. \tag{6.2}$$

Интенсивность распределенной по балке нагрузки равна первой производной от поперечной силы по продольной координате.

Распишем (b):

$$-Q\frac{dx}{2} - (Q + dQ)\frac{dx}{2} - M + (M + dM) = 0.$$

При записи выражения (b) учтем, что линия действия равнодействующей нагрузки q проходит через центр O, а произведение $dQ\frac{dx}{2}$ является бесконечно малой величиной более высокого порядка малости, которую можно отбросить. Поэтому после раскрытия скобок получим

$$Q = \frac{dM}{dx}. \tag{6.3}$$

Поперечная сила равна первой производной от изгибающего момента по продольной координате.

Дифференцируя (6.3) по x, получим

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}$$

или с учетом (6.2) имеем

$$q = \frac{d^2M}{dx^2}, \tag{6.4}$$

интенсивность распределенной нагрузки равна второй производной от изгибающего момента по продольной координате.

Выражения (6.2)–(6.4) носят название дифференциальных зависимостей при изгибе. Эти зависимости оказываются полезными при построении эпюр изгибающих моментов и поперечных сил, т.е. графиков изменения M и Q по длине балки.

Так, например:

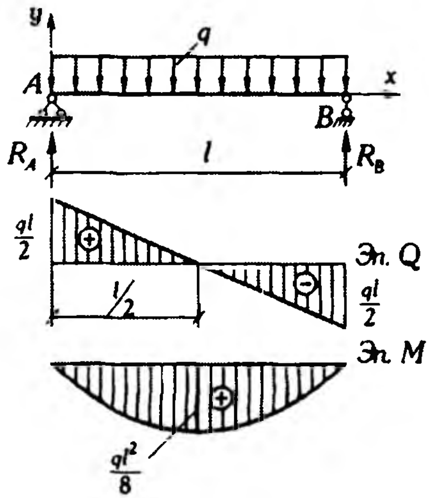


Рис. 6.11

– если на участке балки отсутствует распределенная нагрузка, т.е. $q = 0$, то поперечная сила на этом участке будет постоянна (см. (6.2)) или состоять из участков с различными значениями $Q = \text{const}$ (кусочно-постоянная). Изгибающий момент при этом будет меняться по линейному закону (см.6.3) или (6.4);

– если в какой-либо точке на оси балки $Q = 0$, то изгибающий момент в соответствующем поперечном сечении принимает экстремальное значение (см. (6.3));

– если на участке балки $Q > 0$, то изгибающий момент при увеличении x возрастает и наоборот.

Рассмотрим общий порядок построения эпюр изгибающих моментов и поперечных сил в балках при изгибе.

Вначале необходимо определить реакции опор. В некоторых случаях, например, в консольной балке, этого можно не делать. В качестве примера рассмотрим балку пролетом l на двух опорах, загруженную равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 6.11).

В общем случае необходимо разбить балку на участки. Границами участков являются начало и конец балки, места приложения сил и реакций, пар сил, начало и конец распределенной нагрузки. В этом примере участок один.

Выберем начало координат в точке A и направим ось x вправо. Для нахождения M и Q используем метод сечений. Для этого проведем поперечное сечение на растоянии x от опоры A и отбросим правую часть балки (рис. 6.12). Покажем в полученном поперечном сечении положительные направления поперечной силы и изгибающего момента. Отсеченная левая часть балки должна находиться в состоянии равновесия. Запишем для нее уравнения равновесия.

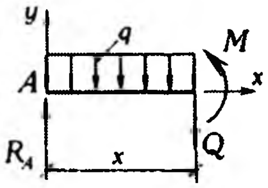


Рис. 6.12

$$\sum F_y = R_A - qx - Q = 0 \quad \text{или}$$

$$Q = R_A - qx, \quad 0 \le x \le l\,. \qquad (a)$$

Сумму моментов будем вычислять относительно точки, лежащей на продольной оси в проведенном сечении (т.е. относительно оси z в рассматриваемом сечении):

$$\sum m_z(F) = 0, \quad -R_A x + qx\frac{x}{2} + M = 0.$$

Откуда

$$M = R_A x - \frac{qx^2}{2}, \quad 0 \le x \le l. \qquad (b)$$

Построим графики полученных зависимостей, считая x переменным.

Уравнение (a) для поперечной силы – уравнение прямой линии. Для ее построения достаточно вычислить поперечную силу в двух точках:

в начале участка при $x = 0$, $Q_A = R_A = \frac{ql}{2}$;

в конце участка при $x = l$, $Q_B = -\frac{ql}{2}$.

Соответствующий график – эпюра Q – показан на рис. 6.11. Здесь ось отсчета – продольная ось балки, а ординаты характеризуют значения поперечных сил в соответствующих сечениях. Положительные ординаты откладываются вверх, отрицательные – вниз. Отметим, что в середине пролета поперечная сила оказалась равной нулю: здесь следует ожидать экстремального значения изгибающего момента.

Эпюра изгибающих моментов M представляет квадратную параболу (см. выражение (b)). При $x = 0$ $M_A = 0$, а при $x = l$ $M_B = 0$, т.е. на концах балки изгибающие моменты отсутствуют. Это будет выполняться всегда, если к концам балки не приложены пары сил, что можно использовать для проверки правильности построения эпюр M. Эпюра M строится на растянутых волокнах балки. Это означает, что в соответствии с принятым правилом знаков (см. рис.6.4) положительные ординаты M откладываются вниз, а отрицательные, когда растягиваются верхние волокна балки, – вверх.

Из эпюры Q видно, что M достигает экстремального значения при $x = l/2$. Определим в этом сечении M:

$$M_{x=l/2} = R_A \frac{l}{2} - \frac{q(l/2)^2}{2} = \frac{ql^2}{8}.$$

Соответствующая эпюра M показана на рис. 6.11.

Если проанализировать выражения для поперечной силы и изгибающего момента, то нетрудно заметить, что в выражении (a) справа записана сумма проекций всех внешних сил, взятых по одну сторону от сечения, а в выражении (b) правая часть представляет сумму моментов внешних сил (и пар сил), взятых по одну сторону от сечения, относительно центра тяжести рассматриваемого сечения. Это позволяет сразу записывать выражения для поперечной силы и изгибающего момента в любом поперечном сечении, если руководствоваться следующими правилами.

Поперечная сила равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, взятых по одну сторону от сечения, на плоскость поперечного сечения.

Изгибающий момент равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, взятых по одну сторону от сечения, относительно центра тяжести рассматриваемого сечения.

Правила знаков совпадают с уже принятыми ранее правилами для Q и M (см. рис. 6.3 и 6.4), но теперь они относятся к внешним силам. Таким образом: если внешняя сила вращает отсеченный элемент балки по часовой стрелке, то она положительна и наоборот; если внешние силы (реакции, пары сил) вызывают при изгибе растяжение нижних волокон балки, то они положительны и наоборот. При построении эпюр M и Q полезно иметь перед собой рис. 6.13, где показаны положительные направления Q и M. Если Q и M определяются от нагрузки слева, то руководствоваться следует левыми стрелками, если от сил справа, то правыми.

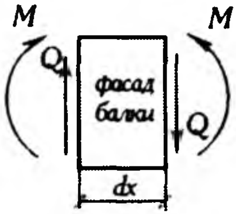


Рис. 6.13

Построим теперь эпюры M и Q в балке (см. рис. 6.7), где реакции уже определены. Данная балка имеет два участка: участок I длиной 2 *м* и участок II длиной 6 *м*.

Сделаем сечение на первом участке и определим Q и M от сил слева. Получим

$Q = R_A$ (см. левую стрелку на рис. 6.13);

$M = R_A x_1 - m; \quad 0 \le x_1 \le 2.$

Таким образом на первом участке $Q = \text{const}$, а M меняется по линейному закону. Определим M в начале и конце участка.

$$M_{x=0} = -m = -160 \text{ кН·м}; \qquad M_{x=2} = 200 \cdot 2 - 160 = 240 \text{ кН·м}.$$

На втором участке проще определить Q и M от сил справа. Поэтому координату произвольного сечения будем отсчитывать от опоры B. С учетом правых стрелок на рис. 6.13 получим

$$Q = -R_B + qx_2 \ ; \quad M = R_B x_2 - \frac{qx_2^2}{2} \ ; \quad 0 \le x_2 \le 6.$$

Построим прямую Q по двум точкам

$$Q_{x=0} = -R_B = -160 \text{ кН} \quad \text{и} \quad Q_{x=6} = -R_B + q \cdot 6 = 80 \text{ кН}.$$

Определим x_0, приравняв $Q = 0$. Получим

$$Q = -R_B + qx_0 = 0; \qquad x_0 = \frac{R_B}{q} = \frac{160}{40} = 4 \text{ м}.$$

Подсчитаем M в трех точках:

$$M_{x=0} = 0; \quad M_{x=6} = 160 \cdot 6 - \frac{40 \cdot 6^2}{2} = 240 \text{ кН·м}, \quad M_{x=4} = 320 \text{ кН·м}.$$

Построим эпюры Q и M на обоих участках (рис. 6.14) и проанализируем результаты.

Нетрудно заметить, что скачки на эпюре Q должны равняться приложенным сосредоточенным силам. В данном случае на стыке 1-го и 2-го участков имеется скачок, величина которого равна 200–80 = 120 *кН*. В этом месте к балке приложена сила P = 120 *кН*. На эпюре M скачки могут быть только в местах приложения пар сил, тогда они равны по величине моменту приложенной пары. *Например* на левом конце балки эпюры M

и Q начинаются со значений $M_0 = -160$ $кН \cdot м$ и $Q_0 = 200$ $кН$, так как в крайнем левом сечении балки имеется пара сил с моментом $m = 160$ $кН \cdot м$ и реакция $R_A = 200$ $кН$.

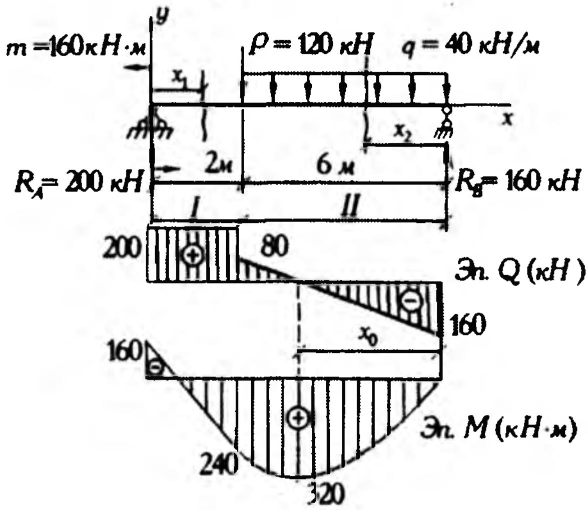


Рис. 6.14

На стыке первого и второго участка пары сил нет, поэтому моменты, полученные от сил слева и от сил справа, должны быть одинаковыми, что и получилось.

Аналогичным образом постоим эпюры Q и M в балке, изображенной на рис. 6.8. Здесь будем определять Q и M от сил справа, а затем сравним эти значения в заделке с соответствующими реакциями. Балка имеет три участка. Координаты сечений будем отсчитывать от правого конца балки.

Участок I. $0 \le x_1 \le 2$ *м*.

$$Q = qx_1; \quad M = -\frac{qx_1^2}{2}.$$

Участок II. $2 \le x_2 \le 3$.

$$Q = q \cdot 2 - P; \qquad M = -q \cdot 2(x_2 - 1) + P(x_2 - 2).$$

Участок III. $3 \le x_3 \le 4$.

$$Q = q \cdot 2 - P; \quad M = -q \cdot 2(x_3 - 1) + P(x_3 - 2) + m.$$

Соответствующие эпюры изображены на рис. 6.15.

При построении эп. M на первом участке парабола изображена выпуклостью вниз по следующим соображениям. Во-первых, на правом конце балки $Q = 0$ и, следовательно, здесь момент должен иметь экстремальное значение, т.е. касательная к графику M в этом сечении должна быть горизонтальна. Во-вторых, из зависимости (6.4) следует так называемое "правило паруса", т.е. эпюра изгибающих моментов в принятых условиях должна выгибаться подобно парусу от нагрузки q, которая условно принимается за ветер.

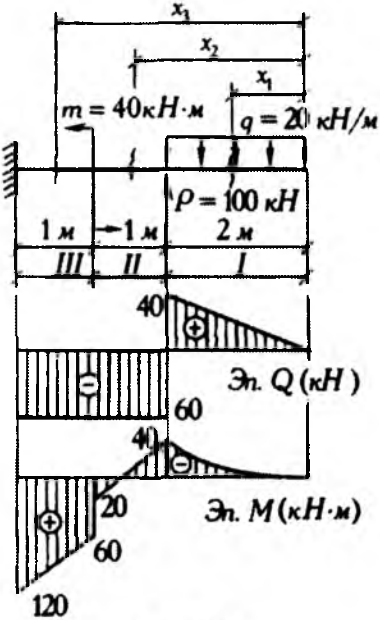


Рис. 6.15

Как и в первом случае, видно, что скачок на эпюре Q равен приложенной силе P, а ордината в заделке равна реакции $R_A = 60$ $кН$; скачок на эпюре M равен моменту приложенной паре сил m, а ордината эпюры в заделке равна опорному моменту $M_A = 120$ кН·м.

Рассмотрим особенности построения эпюр в составной балке (см рис. 6.9). При построении эпюр в подвесной балке (рис. 6.16) можно воспользоваться тем обстоятельством, что на ней распределенная нагрузка отсутствует, следовательно эпюра Q состоит из участков с постоянными значениями Q, а эпюра M из линейных участков. В данном случае участков будет два.

Причем на первом участке от сил слева

$$Q_I = -R_B = -40 \ кН,$$

кстати, от сил справа

$$Q_I = P - R_C = 80 - 120 = -40 \, кН.$$

Конечно, получено одно и то же значение Q.

На втором участке

$$Q_{II} = P = 80 \ кН (\text{от сил справа})$$

или от сил слева

$$Q_{II} = -R_B + R_C = -40 + 120 = 80 \ кН.$$

На стыке первого и второго участков обнаруживается скачок на эп. Q, равный 120 $кН$, т.е. реакции R_C.

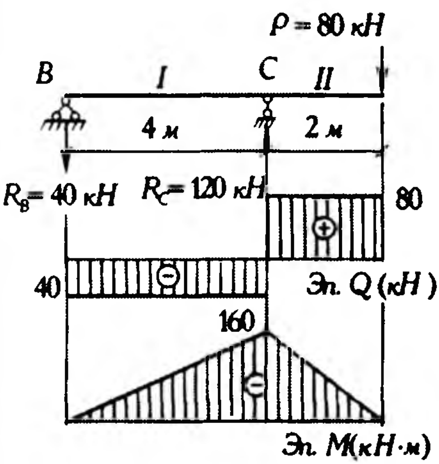


Рис. 6.16

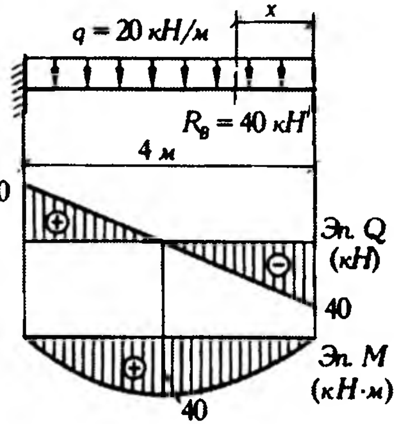


Рис. 6.17

При построении эпюры M учтем следующее: на концах балки моменты отсутствуют – там нет пар сил (только они могут дать моменты на концах). Над опорой C момент $M_C = -P \cdot 2 = -160$ $кН \cdot м$ (от сил справа или $M_C = -R_B \cdot 4 = -160$ $кН \cdot м$ (от сил слева). Имея по две точки на каждом участке нетрудно построить линейные эпюры M.

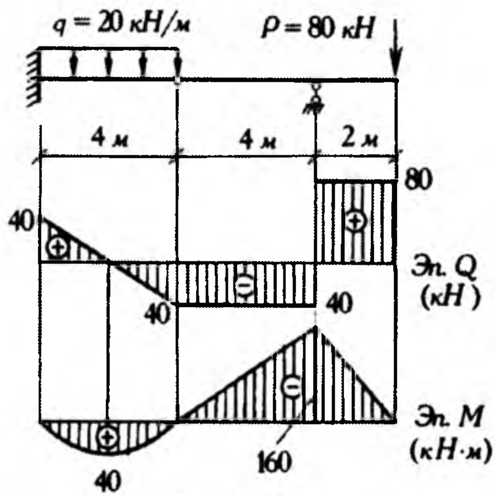


Рис. 6.18

Основная часть балки загружается своей нагрузкой и реакцией R_B, направленной в противоположную сторону (рис. 6.17). Здесь один участок $0 \le x \le 4$, а Q и M определим от сил справа: $Q = -R_B + qx$; $M = R_B x - \dfrac{qx^2}{2}$.

Построим по этим выражениям эпюры и проверим их аналогично предыдущим. Окончательные эпюры Q и M для всей балки получим, состыковав рис. 6.16 и 6.17. Видим, что в шарнире изгибающий момент равен нулю, а на эпюре Q здесь нет скачка (рис. 6.18). Так и должно быть, если рядом с этим сечением нет сосредоточенных сил или пар сил.

Из выражений (6.1) следует, что нормальные напряжения в поперечном сечении связаны с изгибающим моментом, а касательные напряжения – с поперечной силой. Очевидно, что в балках с постоянным сечением наиболее опасными поперечными сечениями будут те, где поперечная сила или изгибающий момент принимают наибольшие значения. Построением эпюр M и Q и определяют потенциально опасные сечения. Теперь нужно научиться определять напряжения в поперечных сечениях.

6.3. Нормальные напряжения при чистом изгибе балки

Чистым изгибом называется такой случай сопротивления балки, когда на некотором ее участке отсутствует поперечная сила. Из уравнения $Q = dM/dx = 0$ следует, что на этом участке изгибающий момент должен иметь постоянное значение. В качестве примера на рис. 6.19 изображена двухконсольная балка, средний участок которой испытывает чистый изгиб. Попутно заметим, что в балках, имеющих ось симметрии схемы и нагрузки (см. рис. 6.11 и 6.19), эпюра изгибающих моментов тоже имеет ось симметрии, а эпюра поперечных сил кососимметрична, т.е. в соответствующих сечениях поперечные силы равны по модулю, но противоположны по

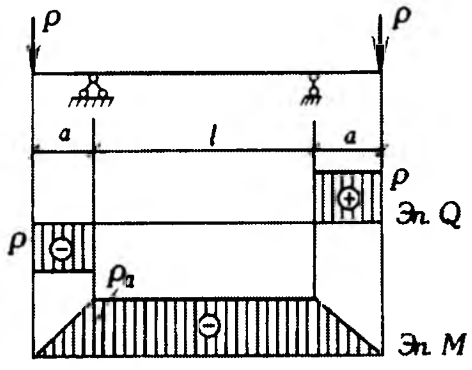


Рис. 6.19

знаку. Нанесем на боковую поверхность балки, испытывающей чистый из гиб сетку, состоящую из продольных и поперечных линий (рис. 6.20, *а*), затем приложим к крайним поперечным сечениям одинаковые моменты, ко торые и вызывают чистый изгиб балки (рис. 6.20, *б*). При этом продоль ные линии станут кривыми, а поперечные линии останутся прямыми.

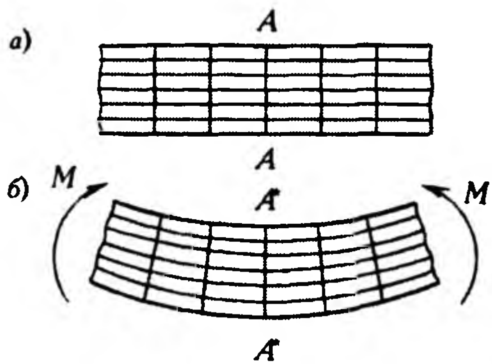


Рис. 6.20

Продольные линии можно рассматривать как продольные волокна балки на ее фасаде. Поперечные линии можно считать следами поперечных сечений балки, полученными от пересечения плоскостей поперечных сечений с плоскостью боковой грани балки. Таким образом, *поперечные сечения балки при чистом изгибе остаются плоскими*. Это утверждение носит название гипотезы Бернулли, которая использовалась при растяжении стержня. При чистом изгибе это положение можно легко доказать путем следующих рассуждений. Заметим, что при чистом изгибе все поперечные сечения находятся в одинаковых условиях, так как изгибающий момент по длине этого участка балки не меняется. Поэтому сечение *А–А* на рис. 6.20 можно трактовать как плоскость симметрии балки и нагрузки. В силу этого точки, лежащие в этом сечении, не могут сместиться ни вправо, ни влево – следовательно они останутся в плоскости *А–А* и после деформации. Но поскольку любая из половин этой балки также имеет плоскость симметрии, то и эта плоскость не искривится при деформировании. Продолжая процесс деления балки на участке чистого изгиба дальше, придем к выводу, что все сечения балки должны остаться плоскими и после деформации.

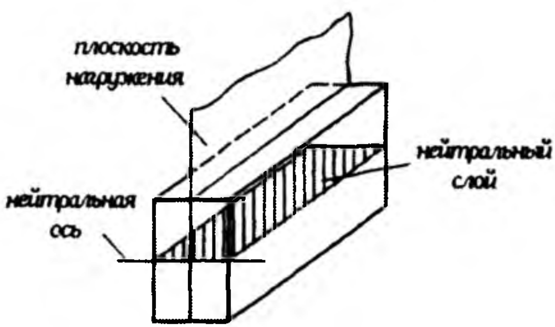


Рис. 6.21

Рассматривая деформации продольных волокон, на рис. 6.20 видим, что верхние волокна укорачиваются, а нижние – удлиняются. Следовательно, между этими волокнами должно находится волокно, которое не меняет своей длины. Слой балки, перпендикулярный плоскости изгиба, который содержит это волокно, называется нейтральным слоем (н.с.). В поперечном сечении след нейтрального слоя образует нейтральную ось (н.о.) (рис. 6.21). При отождествлении следов поперечных сечений на фасаде балки с самими поперечными сечениями неявно предполагается, что деформации волокон, расположенных на одинаковом расстоянии от нейтрального слоя, одинаковы, т.е. считается, что деформации волокон балки по ее ширине не меняются. В тех случаях, когда плоскость изгиба совпадает с осью симметрии поперечного сечения балки, это в большинстве случаев выполняется, но не всегда. Так, например, деформации волокон в сечениях типа тавра или двутавра с широкими полками по ширине полки могут отличаться.

С учетом сделанных замечаний рассмотрим деформации элемента балки длиной dx. (рис. 6.22). Волокна AB и CD до деформации имели длину dx. Примем левое сечение условно за неподвижное. Правое сечение

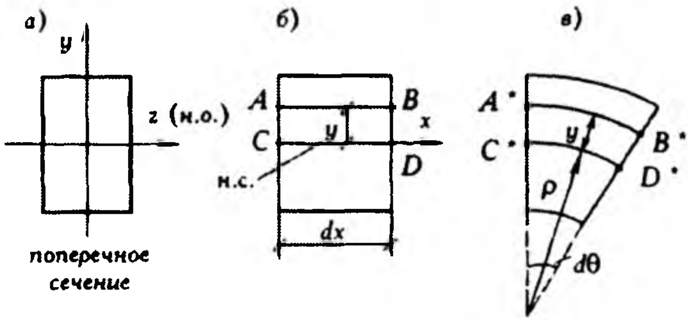


Рис. 6.22

при нагружении балки повернется на угол $d\theta$. Тогда длина волокна AB станет равной длине дуги $A^*B^* = (\rho + y)d\theta$. В тоже время длина дуги CD, расположенной на уровне нейтрального слоя, не изменится, т.е. $C^*D^* = \rho d\theta = dx$.

Следовательно, удлинение волокна AB окажется равным

$$\Delta l = A^*B^* - AB = (\rho + y)d\theta - dx = y d\theta. \tag{6.5}$$

Деформация этого волокна

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l} = \frac{y d\theta}{dx} = \frac{y}{\rho} . \tag{6.6}$$

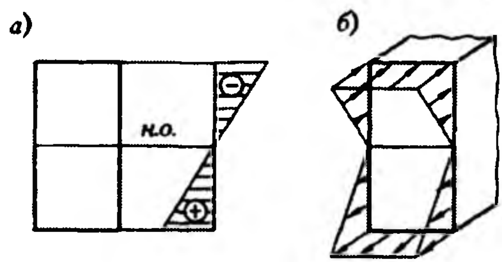


Рис. 6.23

Видно, что деформации по высоте поперечного сечения меняются (при изменении y) по линейному закону.

Полагая, что продольные волокна балки испытывают деформацию растяжения или сжатия, запишем закон Гука для линейного напряженного состояния. С учетом (6.6) получим

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{y}{\rho} . \tag{6.7}$$

Эпюра нормальных напряжений в поперечном сечении при $M > 0$ показана на рис. 6.23. По высоте балки они меняются по линейному закону, достигая наибольших значений в крайних, наиболее удаленных от нейтральной оси точках поперечного сечения, а по ширине поперечного сечения они распределяются равномерно (см. рис. 6.23, *б*).

Используя выражения (6.1) и (6.7), определим

$$M = \int_A E\frac{y^2}{\rho} dA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} J_{н.о.} . \tag{6.8}$$

Интеграл $\int_A y^2 dA$ представляет момент инерции площади поперечного сечения относительно нейтральной оси.

Из (6.8) определим кривизну балки

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_{н.о.}} . \tag{6.9}$$

Выражение (6.9) будет использовано в последующем для нахождения перемещений балки при изгибе.

Подставляя в (6.7) выражение (6.9), получим

$$\sigma_x = \frac{M}{J_{н.о.}} y . \tag{6.10}$$

Таким образом, получена формула для нахождения при чистом изгибе нормальных напряжений – они пропорциональны изгибающему моменту, расстоянию от нейтральной оси до тех точек, где определяются эти напряжения, и обратно пропорциональны моменту инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси.

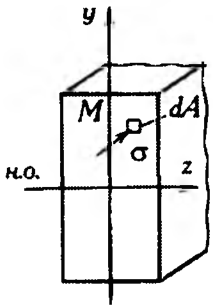


Рис. 6.24

Однако воспользоваться этим выражением для конкретных вычислений пока нельзя, так как неизвестно положение нейтральной оси. В поперечном сечении при изгибе балок отсутствует продольная сила, поэтому можно (см. рис. 6.24) записать

$$N = \int_A \sigma_x dA = 0 \quad \text{или, с учетом (6.7),}$$

$$\frac{E}{\rho}\int_A y dA = 0. \tag{6.11}$$

В (6.11) возможны два варианта: либо $\frac{E}{\rho} = 0$, либо $\int_A y dA = 0$. Первый случай соответствует $\rho = \infty$, т.е. балка не изгибается, этот случай отбрасываем. Следовательно, нейтральная ось должна проходить через центр тяжести поперечного сечения, так как интеграл $\int_A y dA$ представляет собой статический момент относительно нейтральной оси. Но он равен нулю, а это свойство центральных осей. Итак, положение точки в поперечном сечении будем определять каждый раз в локальной системе центральных осей.

Запишем выражение для изгибающего момента относительно оси y:

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA = \frac{E}{\rho}\int_A yz dA . \tag{6.12}$$

Так как $M_y = 0$, то из (6.12) следует, что оси y и z должны быть главными центральными осями поперечного сечения (так как центробежный момент инерции $J_{yz} = \int_A yz dA$ относительно главных осей равен нулю), что не противоречит ранее (см. раздел 6.1) сделанному допущению о положении плоскости изгиба.

Как было отмечено, наибольших значений нормальные напряжения достигают в наиболее удаленных от нейтральной оси точках поперечного сечения, т.е. в крайних волокнах балки, когда ординаты y достигают экстремальных значений. Если нейтральная ось является осью симметрии поперечного сечения, то расстояния от нейтральной оси до крайних волокон, расположенных выше и ниже нейтрального слоя, будут одинаковы. Обозначим их через $|y_{max}|$. Тогда напряжения в крайних волокнах будут равны

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \pm \frac{M}{J_{н.о.}} \cdot |y_{max}|. \tag{6.13}$$

Здесь и в дальнейшем индекс x у напряжения σ опущен.

Отношение

$$\frac{J_{н.о.}}{|y_{max}|} = W_{н.о.} \tag{6.14}$$

носит название *момента сопротивления сечения* балки относительно нейтральной оси. Эта величина имеет размерность $[L]^3$, а $см^3$ и $м^3$ ее единицы измерения. Для прямоугольного поперечного сечения (рис. 6.25, *а*)

$$W_{н.о.} = \frac{bh^3}{12 \cdot h/2} = \frac{bh^2}{6}.$$

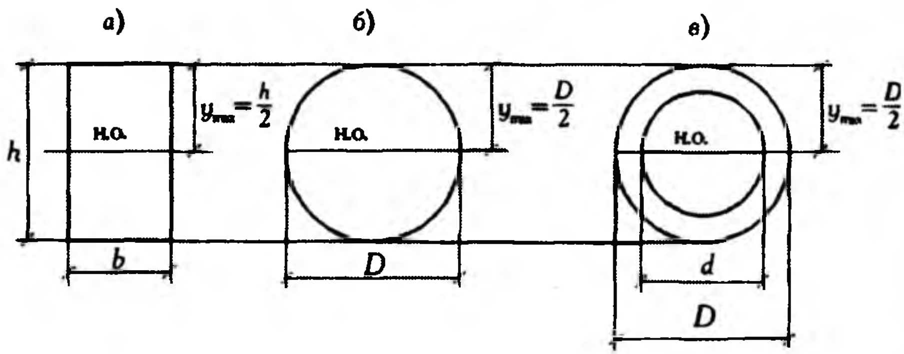


Рис. 6.25

Для круглого сплошного сечения $W_{н.о.} = \frac{\pi D^4}{64 \cdot D/2} = \frac{\pi D^3}{32}$.

Для круглого полого сечения

$$W_{н.о.} = \left(\frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64}\right)\frac{1}{D/2} = \frac{\pi D^3}{32}\left(1 - \alpha^4\right),$$

где $\alpha = d/D$.

Подчеркнем, что нельзя вычислять момент сопротивления полого сечения вычитанием из момента сопротивления большого круга момента сопротивления меньшего. Необходимо вначале вычислить момент инерции всего сечения, а только затем при помощи выражения (6.14) – момент сопротивления. Для прокатных сечений типа двутавра и швеллера моменты сопротивления приведены в таблицах сортамента.

Наибольшее и наименьшее нормальные напряжения в поперечном сечении с использованием момента сопротивления определяются по формуле

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \pm \frac{M}{W_{н.о.}} . \qquad (6.15)$$

При положительном изгибающем моменте максимальное (растягивающее) напряжение будет в нижнем волокне балки, а минимальное (сжимающее) – в верхнем волокне и наоборот – при отрицательном значении изгибающего момента. Таким образом, при использовании формулы (6.15) изгибающий момент подставляется по абсолютной величине, а знаки напряжений определяются с учетом приведенных соображений.

Однако в поперечных сечениях балок в большинстве случаев одновременно присутствуют как изгибающий момент, так и поперечная сила. В этих условиях, вообще говоря, положение о плоских поперечных сечениях, не имеет место, более того, продольные волокна балки не находятся в условиях линейного напряженного состояния. Тем не менее, в большинстве случаев для нахождения нормальных напряжений в поперечных сечениях балки используют формулу (6.10). Расчеты, выполненные более строгими методами теории упругости, показывают, что выражение (6.10) обеспечивает достаточную для инженерных расчетов точность, если отношение длины балки к ее высоте больше 10, т.е. $l/h > 10$. При этом выражением (6.10) нельзя пользоваться в сечениях, где приложены нагрузки или реакции опор, сосредоточенные на малых участках балки. Однако в соответствии с принципом Сен-Венана распределение нормальных напряжений по высоте сечения приближается к линейному в сечениях, удаленных от таких мест на расстояние, примерно равное высоте поперечного сечения.

Таким образом, в балках при плоском поперечном изгибе для нахождения нормальных напряжений будем использовать формулу (6.10).

Очевидно, что наиболее опасным по нормальным напряжениям будет то поперечное сечение, где изгибающий момент достигает наибольшего по абсолютной величине значения. Следовательно, условие прочности балки по нормальным напряжениям можно записать в виде

$$\sigma = \frac{M_{max}}{J_{н.о.}} y_1 \le R_1 \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{M_{max}}{J_{н.о.}} y_2 \le R_2. \tag{6.16}$$

Здесь y_1 – расстояние от нейтральной оси до наиболее удаленной точки в растянутой зоне балки; y_2 – то же в сжатой зоне; R_1 – расчетное сопротивление материала при растяжении; R_2 – при сжатии.

Если поперечное сечение симметрично относительно нейтральной оси, то $y_1 = y_2 = y_{max}$ и, следовательно, условие прочности будет иметь вид

$$\sigma = \frac{M_{max}}{W_{н.о.}} \le R\ . \tag{6.17}$$

Выражение (6.17) чаще используется в тех случаях, когда требуется подобрать поперечное сечение балки. При решении этой задачи использовать выражения (6.16) неудобно, так как здесь неизвестны ни $J_{н.о.}$, ни y_1 или y_2.

Пример. Балка на двух опорах, загруженная равномерно распределенной нагрузкой (см. рис. 6.11). Пусть $q = 40$ *кН/м*; $l = 4$ *м*; $R_1 = R_2 = R = 250$ *МПа*. Требуется подобрать сечение в виде двутавра.

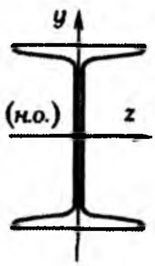


Рис. 6.26

Так как двутавр (см. рис. 6.26) имеет ось симметрии z, то воспользуемся выражением (6.17) и найдем требуемый момент сопротивления:

$$W_{н.о.} \ge \frac{M_{max}}{R}.$$

Значение M_{max} возьмем с эпюры M на рис. 6.11. Получим

$$W_{н.о.} = \frac{40 \cdot 10^3 \cdot 4^2}{8 \cdot 250 \cdot 10^6} = 320 \cdot 10^{-6}\ м^3 = 320\ см^3.$$

По сортаменту ГОСТ 8239–89 выбираем двутавр №27, у которого $W_z = 371$ $см^3$. При этом нормальные напряжения в крайних волокнах будут равны

$$\sigma = \pm \frac{M_{max}}{W_z} = \frac{40 \cdot 4^2 \cdot 10^3}{8 \cdot 371 \cdot 10^{-6}} = \pm 215\ МПа.$$

Если размеры и форма поперечного сечения заданы, а требуется определить допускаемую на балку нагрузку, то эта задача также решается при помощи условия прочности.

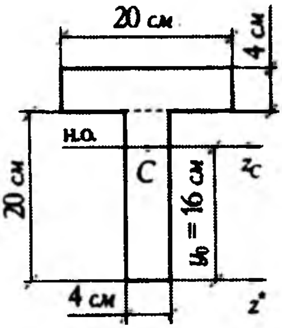


Рис. 6.27

Пример. Схема балки изображена на рис. 6.11. Пусть $l = 4$ *м*; поперечное сечение – тавр (см. рис. 6.27); $R_1 = 40$ *МПа*; $R_2 = 200$ *МПа*. Определить допускаемую нагрузку q для двух вариантов балки:

а) полка тавра вверху;

б) полка тавра внизу.

Определим положение центра тяжести (y_0), выбрав положение вспомогательной оси z^*. Разбив сечение на два прямоугольника, получим

$$y_0 = \frac{20 \cdot 4 \cdot 22 + 20 \cdot 4 \cdot 10}{20 \cdot 4 \cdot 2} = 16 \text{ см}.$$

Вычислим момент инерции $J_{н.о.}$:

$$J_{н.о.} = \left(\frac{20 \cdot 4^3}{12} + 6^2 \cdot 80\right) + \left(\frac{4 \cdot 20^3}{12} + 6^2 \cdot 80\right) = 8534 \text{ см}^4 =$$

$$= 8{,}534 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4.$$

Вариант (*а*). Запишем условия прочности: максимальный момент в среднем сечении положительный, следовательно нижние волокна растянуты, а верхние – сжаты. Используем условия прочности в виде (6.16). Для растянутого волокна получим

$$\sigma = \frac{M_{max}}{J_{н.о.}} y_1 \le R_1 \quad \text{или} \quad \frac{q_1 l^2}{8 J_{н.о.}} y_1 \le R_1 ,$$

откуда найдем

$$q_1 \le \frac{8 J_{н.о.} R_1}{l^2 y_1} = \frac{8 \cdot 8{,}534 \cdot 10^{-5} \cdot 40 \cdot 10^6}{4^2 \cdot 0{,}16} = 10{,}7 \text{ кН/м}.$$

Записывая условие прочности для сжатого волокна, получим

$$q_2 \le \frac{8 \cdot 8{,}537 \cdot 10^{-5} \cdot 200 \cdot 10^6}{4^2 \cdot 0{,}08} = 107 \text{ кН/м}.$$

Следовательно, допускаемая нагрузка для варианта (*а*) равна 10,7 *кН/м*.

Вариант (*б*). Из условия прочности для растянутого волокна в полке

$$q_1 = \frac{8 \cdot 8{,}534 \cdot 10^{-5} \cdot 40 \cdot 10^6}{4^2 \cdot 0{,}08} = 21{,}4 \;\; кН/м.$$

Аналогично

$$q_2 = \frac{8 \cdot 8{,}534 \cdot 10^{-5} \cdot 200 \cdot 10^6}{4^2 \cdot 0{,}16} = 53{,}5 \;\; кН/м.$$

Таким образом, вариант (*б*) обеспечивает более высокую допускаем нагрузку $q = 21{,}4$ *кН/м* за счет рационального расположения материала сечении. В варианте (*а*) растягивающие напряжения по абсолютной велич не в 2 раза больше сжимающих при отношении R_1/R_2 равном 1/5 (р 6.28, *а*); в варианте (*б*) $\dfrac{|\sigma_{max}|}{|\sigma_{min}|} = \dfrac{1}{2}$, что ближе к R_1/R_2 (рис. 6.28,*б*).

Выясним рациональные типы поперечных сечений при изгибе.

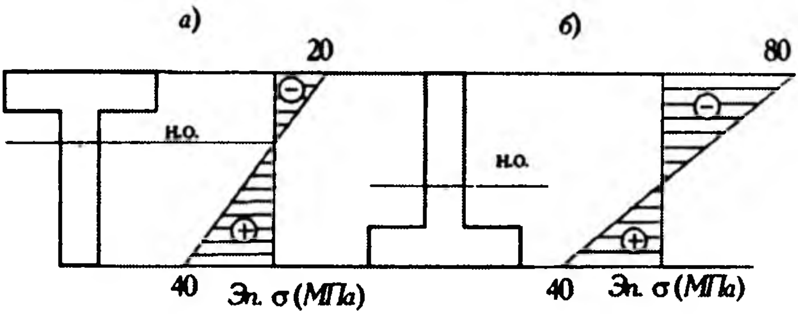


Рис. 6.28

Если материал балки имеет одинаковые расчетные сопротивления при растяжении и сжатии, то сечение должно быть симметричным относительно центральной главной оси, перпендикулярной плоскости изгиба. Для увеличения момента сопротивления необходимо увеличивать момент инерции сечения без существенного увеличения y_{max}, т.е. сосредоточить материал в районе крайних волокон и убрать его из средней части сечения, где нормальные напряжения малы. Эти рассуждения приводят к мысли, что наиболее рациональным типом сечения является двутавр с одинаковыми полками. Если же материал имеет различные значения расчетных сопротивлений на растяжение и сжатие, то рациональным будет сечение в виде двутавра с различными по площади полками или тавр. Поэтому поперечные сечения балок в мостовых пролетных строениях, хребтовых балок в вагонах, поперечные сечения рельса приближаются к двутавру, так как изгиб является основным видом деформации этих элементов.

6.4. Касательные напряжения при изгибе

Впервые задачу об определении нормальных напряжений при изгибе еще в 1638 г. поставил Г.Галилей. Однако ему и ряду последующих ученых (Мариотт, Яков Бернулли, Кулон и др.) не удалось получить правильный результат. Только в 1826 г. (спустя 188 лет!) правильное решение задачи было изложено Навье в его учебнике "Сопротивление материалов".

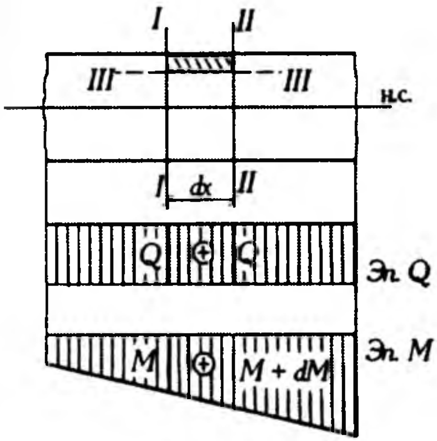


Рис. 6.29

Формула для касательных напряжений была получена в 1855 г. выдающимся русским инженером-мостовиком Д.И.Журавским в ходе разработки методов расчета деревянных пролетных строений при проектировании и строительстве железной дороги Петербург-Москва. При выводе этой формулы Д.И.Журавский считал, что касательные напряжения распределяются равномерно по ширине поперечного сечения, а их направления параллельны поперечной силе. Следуя вначале этим допущениям, рассмотрим участок балки (рис. 6.29), где поперечная сила остается постоянной, а изгибающий момент меняется, следовательно, по линейному закону (см. (6.3)). Вырежем из этого участка тремя сечениями заштрихованный на фасаде балки элемент и рассмотрим его равновесие (рис. 6.30). В сечениях I–I и II–II возникают нормальные напряжения

$$\sigma = \frac{M}{J_{н.о.}} y \quad \text{и} \quad \sigma^* = \frac{M + dM}{J_{н.о}} y .$$

От каждого из этих напряжений, действующих на площадке dA отсеченной части поперечного сечения, возникнет элементарное продольное усилие $dN = \sigma dA$ и $dN^* = \sigma^* dA$. Главные векторы этих усилий определим взяв интегралы по отсеченной части (рис. 6.30):

$$N = \int\limits_{A_{отс}} \sigma dA \quad и \quad N^* = \int\limits_{A_{отс}} \sigma^* dA.$$

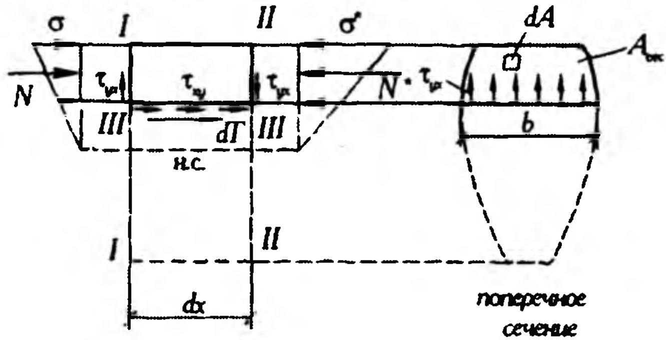


Рис. 6.30

Подставляя вместо нормальных напряжений их выражения, получим

$$N = \int\limits_{A_{отс}} \frac{M}{J_{н.о.}} y dA = \frac{M}{J_{н.о.}} \int\limits_{A_{отс}} y dA = \frac{M}{J_{н.о.}} S_{н.о.}^{отс}.$$

Интеграл $\int\limits_{A_{отс}} y dA$ представляет собой статический момент отсеченной части площади поперечного сечения балки.

Аналогично

$$N^* = \frac{(M + dM)}{J_{н.о.}} S_{н.о.}^{отс}.$$

Разность этих сил должна уравновешиваться касательными усилиями в продольном сечении III–III элемента балки. Главный вектор этих касательных усилий будет равен

$$dT = \tau_{xy} b dx.$$

Здесь b – ширина поперечного сечения в том месте, где определяются касательные напряжения.

Проецируя все полученные усилия на ось x, найдем

$$N + dT - N^* = 0.$$

Откуда

$$dT = \frac{M + dM}{J_{н.о.}} S_{н.о.}^{отс} - \frac{M}{J_{н.о.}} S_{н.о.}^{отс} .$$

или

$$\tau_{xy} b dx = \frac{dM}{J_{н.о.}} S_{н.о.}^{отс} .$$

Так как $\frac{dM}{dx} = Q$, то

$$\tau_{xy} = \frac{Q S_{н.о.}^{отс}}{J_{н.о.} b} . \qquad (6.18)$$

Касательные напряжения τ_{xy} в продольных сечениях балки обеспечивают совместную работу всех продольных слоев балки как в сплошном монолитном теле.

По закону парности касательных напряжений такие же по абсолютной величине касательные напряжения будут действовать и в поперечных сечениях балки. Следовательно, можно записать формулу Журавского для касательных напряжений в поперечном сечении в следующем виде:

$$\tau_{yx} = \frac{Q S_{н.о.}^{отс}}{J_{н.о.} b} . \qquad (6.19)$$

При этом знак касательного напряжения τ_{yx} в поперечном сечении совпадает со знаком поперечной силы, а статический момент отсечений части $S^{отс}$ будем считать всегда положительным независимо от того, какая часть сечения принимается за отсеченную (рис. 6.31). Предположим, требуется определить касательные напряжения в поперечном сечении на уровне M–M. В качестве отсеченной можно взять заштрихованную на рис. 6.31 часть и вычислить $S_{1,н.о.}^{отс.} = A_{отс} y_1$ (y_1 – расстояние от нейтральной оси до центра тяжести отсеченной части). Но можно принять за отсеченную оставшуюся незаштрихованную часть сечения.

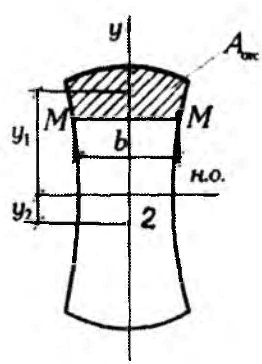


Рис. 6.31

Определим положение центра тяжести этой части (точка 2) и подсчитаем $S_{2,н.о.}^{отс} = \left(A - A_{отс}\right) y_2$. Очевидно, что $S_{1,н.о.}^{отс} + S_{2,н.о.}^{отс} = 0$, так как для всего сечения нейтральная ось является центральной. Следовательно, за отсеченную часть можно принять любую из двух частей, но при этом подставлять всегда в формулу (6.19) положительное значение статическог момента.

Рассмотрим распределение касательных напряжений по высот поперечного сечения. Оно зависит от вида поперечного сечения

Прямоугольное сечение (рис. 6.32).

Определим τ_{yx} в точках на расстоянии y от нейтральной оси Статический момент отсеченной части

$$S_{н.о.}^{отс} = b\left(\frac{h}{2}-y\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+y\right).$$

Здесь $y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}+y\right)$ – расстояние от нейтральной оси до центр тяжести отсеченной части.

Следовательно

$$\tau_{yx} = \frac{Q\frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)}{bh^3/12\cdot b} = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh}\left(1-\frac{4y^2}{h^2}\right).$$

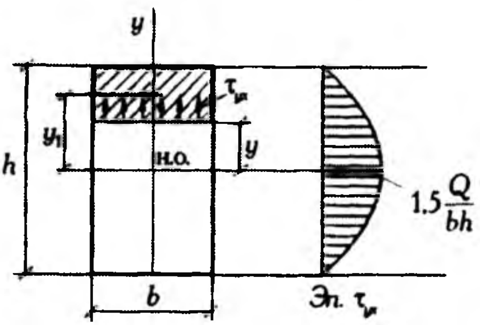


Рис. 6.32

Если принять, что $\frac{Q}{bh} = \tau_{ср}$ – среднее напряжение в поперечном сечении, то

$$\tau_{yx} = 1{,}5\tau_{ср}\left(1-\frac{4y^2}{h^2}\right).$$

Эпюра касательных напряжений в виде параболы показана справа от прямоугольного сечения. Во всех точках поперечного сечения касательные напряжения вертикальны, т.е. параллельны поперечной силе.

Толстостенный двутавр. (рис. 6.33). В районе полки, т.е. при $\frac{h}{2} \le y \le \frac{H}{2}$, статический момент отсеченной части

$$S_{н.о.}^{отс} = B\left(\frac{H}{2} - y\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{H}{2} + y\right)$$

а ширина сечения будет равна B. На этом участке эпюра касательных напряжений ничем не будет отличаться от эпюры для прямоугольного сечения. При переходе от полки к стенке ширина поперечного сечения меняется скачком от значения B до значения b. Поэтому эпюра τ_{yx}, полученная по формуле Журавского, также будет иметь скачки на этом уровне (рис. 6.33). В действительности в таких местах касательные напряжения по ширине поперечного сечения распределяются уже неравномерно и местные значения этих напряжений могут существенно отличаться от тех, которые получаются по формуле Журавского. Эти местные напряжения можно определить на основе более строгих методов теории упругости.

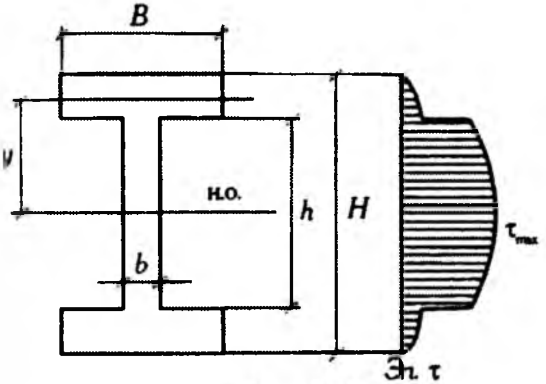


Рис. 6.33

Круглое сечение. Заметим, что при изгибе балок, когда боковая поверхность балок свободна от нагрузок, параллельных продольной оси (изгиб поперечный), касательные напряжения на контуре поперечного сечения всегда направлены по касательной к контуру. Действительно, если в точке A касательное напряжение τ имеет показанное на рис. 6.34 направление, то его всегда можно разложить на две составляющие, направленные по касательной t и по нормали к контуру n. Так как боковая поверхность балки свободна от касательных нагрузок, то по закону парности касательных напряжений $\tau_n = 0$ и, следовательно, касательное напряжение на контуре поперечного сечения направлено по касательной к этому контуру.

Рис. 6.34

Поэтому в круглом поперечном сечении касательные напряжения уровне $M–M$ имеют различные направления (рис. 6.35). При эт

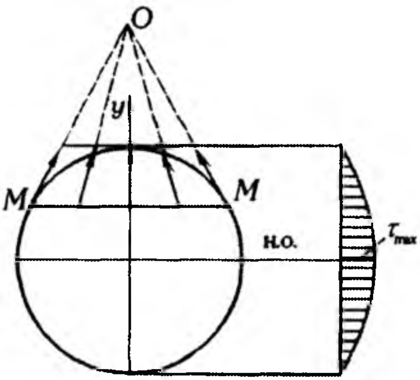


Рис. 6.35

считается, что линии действия эт напряжений пересекаются в точке а по формуле Журавско вычисляются их проекции на ось которые считаются равномер распределенными по шири поперечного сечения. Э предположение оправдывается достаточной для инженерных расчет точностью.

На уровне нейтральной оси, ког $A^{\text{отс}} = \dfrac{\pi D^2}{8}$, а $y_{\text{ц.т.}} = \dfrac{2D}{3\pi}$

касательные напряжения параллельны поперечной силе и равны

$$\tau_{max} = \frac{Q\dfrac{\pi D^2}{8}\cdot\dfrac{2}{3}\dfrac{D}{\pi}}{\pi D^4/64D} = \frac{4}{3}\frac{Q}{A}.$$

Тонкостенное сечение. Рассмотрим в качестве примера сечение балки в виде тонкостенного швеллера (рис. 6.36). Вертикальные касательные напряжения в полках тонкостенного швеллера (или двутавра) обычно невелики и ими пренебрегают. Действительно, в продольных сечениях на уровне AB и CD касательных напряжений нет из-за отсутствия такой внешней нагрузки на балке. Следовательно, по закону парности такие напряжения должны отсутствовать и в поперечном сечении на этих уровнях. В средних по высоте полки точках на участке CD вертикальные напряжения весьма незначительны (см. рис. 6.36, *б*), где показана эпюра τ_{yx} в сечении $I–I$. Эпюра касательных напряжений в стенке показана на рис. 6.36, *а* и она по своему характеру не отличается от эпюры τ_{yx} в прямоугольном сечении.

Особенностью данного сечения является то, что в полках возникают касательные напряжения, направленные горизонтально. Действительно, если рассмотреть сечение $I–I$, (см. рис. 6.36, *б*), отсекающее часть полки с площадью $A_{\text{отс}}$ (она заштрихована на этом рисунке), то нетрудно установить (аналогично тому, как это делалось при выводе формулы Журавского), что в этом продольном сечении действуют касательные напряжения τ_{xz},

$$\tau_{xz} = \frac{QS_{н.о.}^{отс}}{J_{н.о.} \cdot \delta}. \qquad (6.21)$$

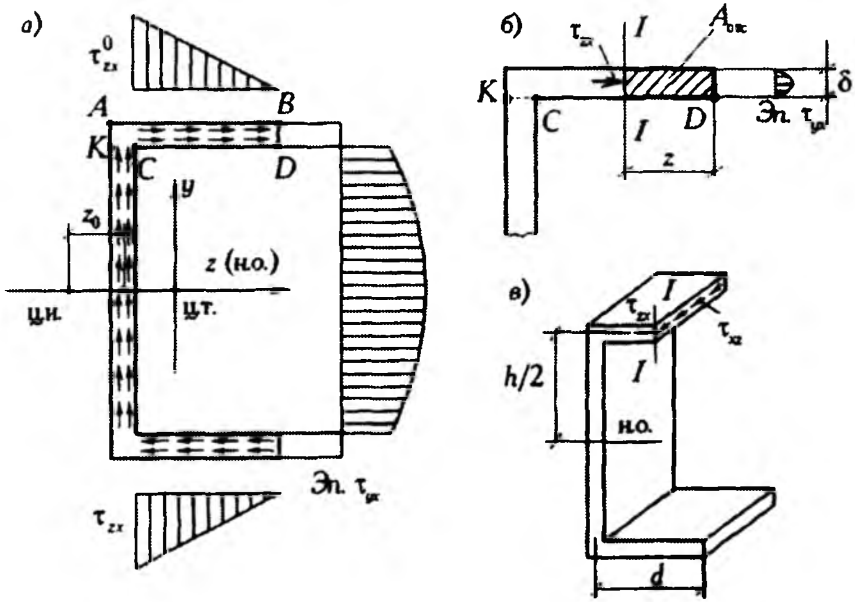


Рис. 6.36

которые равны по модулю касательным напряжениям τ_{zx} в поперечном сечении (рис. 6.36, *в*). Так как $S_{н.о.}^{отс} = \delta z \dfrac{h}{2}$, то напряжения τ_{zx} по ширине полки меняются по линейному закону, что и показано на рис. 6.36. Усилия связанные с этими напряжениями в полках приводятся к паре сил с моментом относительно продольной оси балки.

Если плоскость действия внешней нагрузки будет проходить через центр тяжести поперечного сечения (точка ц.т. на рис. 6.36, *а*), то сечение в виде швеллера будет скручиваться этим моментом. Для того, чтобы избежать этого, плоскость действия сил переносят в центр изгиба (точка ц.и. на этом рисунке). Расстояние z_0 от середины стенки до ц.и. определяется

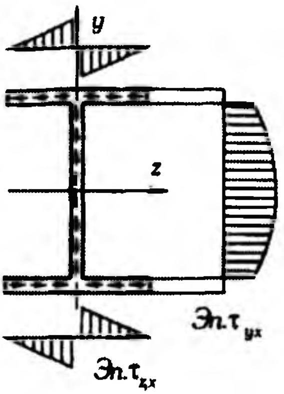


Рис. 6.37

из условия равенства нулю суммы моментов усилий от всех касательных напряжений в поперечном сечении относительно центра изгиба.

В наиболее часто используемом поперечном сечении балки в виде двутавра распределение касательных напряжений имеет те же особенности, что и в сечении типа швеллер (см. рис. 6.37). Однако в этом случае касательные напряжения в полках взаимно уравновешиваются и не создают крутящего момента. Поэтому здесь центр изгиба совпадает с центром тяжести поперечного сечения.

6.5. Анализ напряженного состояния балки. Главные напряжения

Рассмотрим напряженное состояние бесконечно малого элемента балки, вырезанного так, как показано на рис. 6.38. Вертикальные грани этого элемента совпадают с участками поперечных сечений балки, а горизонтальные – с участками продольных сечений. На рис. 6.39 этот элемент изображен отдельно, в виде призмы размером $dx \times dy \times b$.

На площадках, совпадающих с поперечным сечением, действуют нормальные σ_x и касательные τ_{yx} напряжения, которые распределяются равномерно по ширине поперечного сечения b и определяются следующими формулами:

$$\sigma_x = \frac{My}{J_{н.о.}}; \qquad \tau_{yx} = \frac{QS_{н.о.}^{отс}}{J_{н.о.}b}.$$

По закону парности в продольных сечениях вырезанного элемента будут действовать касательные напряжения

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}.$$

Нормальными напряжениями в продольных сечениях обычно пренебрегают, считая, что продольные волокна не давят друг на друга. Поэтому имеем здесь частный случай плоского напряженного состояния, когда одно из нормальных напряжений $\sigma_y = 0$. Главные напряжения найдем при помощи формул (3.17), полагая в них $\sigma_y = 0$,

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} \quad . \tag{6.22}$$

Направление первой главной площадки (см. выражение (3.16)) определим по формуле

$$tg\alpha_0 = -\frac{\tau_{yx}}{\sigma_1}. \tag{6.23}$$

Используя полученные выражения, построим эпюры напряжений по высоте сечения, расположенного на расстоянии x от левого конца балки (см. рис. 6.38). Фрагмент фасада этого сечения балки и ее поперечное сечение показано на рис. 6.40. Рассмотрим напряженные состояния в трех характерных точках балки 1, 3, 5. Подсчитаем нормальные и касательные напряжения в этих трех точках, и построим эпюры напряжений σ_x и τ_{yx} по высоте поперечного сечения. Определим главные напряжения в тех же точках.

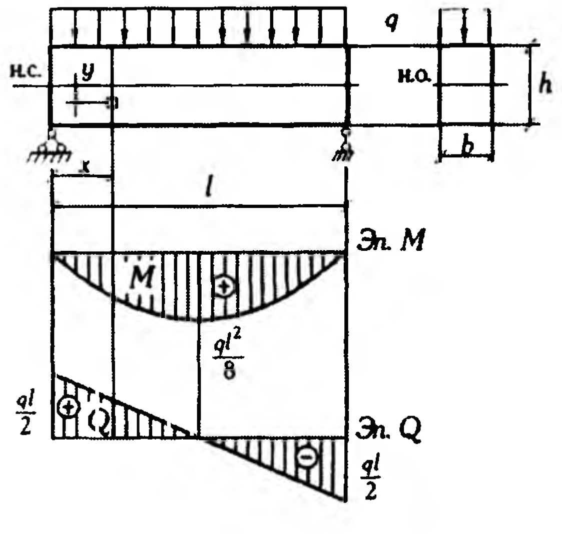


Рис. 6.38

Т о ч к а 5. Здесь $\sigma_x = \sigma > 0$, а $\tau_{yx} = 0$. Следовательно (см. 6.22) $\sigma_1 = \sigma$, а $\sigma_3 = 0$. Поперечные и продольные сечения являются главными площадками.

Т о ч к а 1. Здесь $\sigma_x = -\sigma$, а $\tau_{yx} = 0$. Следовательно, $\sigma_1 = 0$, а $\sigma_3 = -\sigma$. Главные площадки также совпадают с продольными и поперечными сечениями.

Т о ч к а 3. Здесь $\sigma_x = 0, \tau_{yx} = \tau$. Следовательно, из выражений (6.22) получим $\sigma_1 = \tau$, а $\sigma_3 = -\tau$. Это напряженное состояние чистого сдвига. Из (6.23) получим, что $\alpha_0 = -45^0$, т.е. главные напряжения наклонены под углом 45^0 к продольной оси балки. На рис. 6.40 помимо эпюр главных напряжений σ_1 и σ_3 показана также эпюра максимальных касательных напряжений, которые, как известно, определяются из выражения

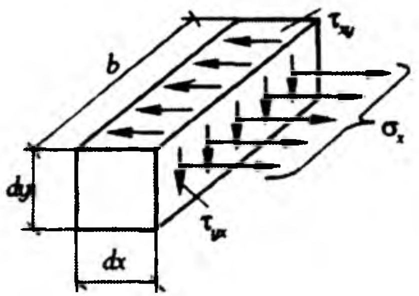


Рис. 6.39

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Проведенный анализ показывает, что главные напряжения в балках с прямоугольным поперечным сечением достигают наибольших значений в

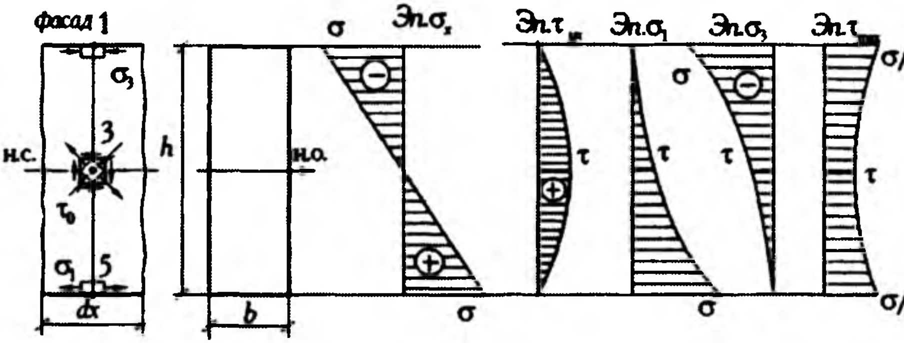


Рис. 6.40

крайних, наиболее удаленных от нейтральной оси точках, где реализуется линейное напряженное состояние типа простого растяжения или сжатия. Поэтому здесь и используются условия прочности в виде (6.16) и (6.17), где максимальные нормальные напряжения (равные в этих точках главным) сравниваются с расчетным сопротивлением для случаев простого растяжения или сжатия.

Несколько иная картина может наблюдаться в балках двутаврового или коробчатого поперечного сечения (рис. 6.41). Используя эпюры нормальных и касательных напряжений, построим эпюры главных напряжений, вычислив их в пяти точках поперечного сечения двутавра.

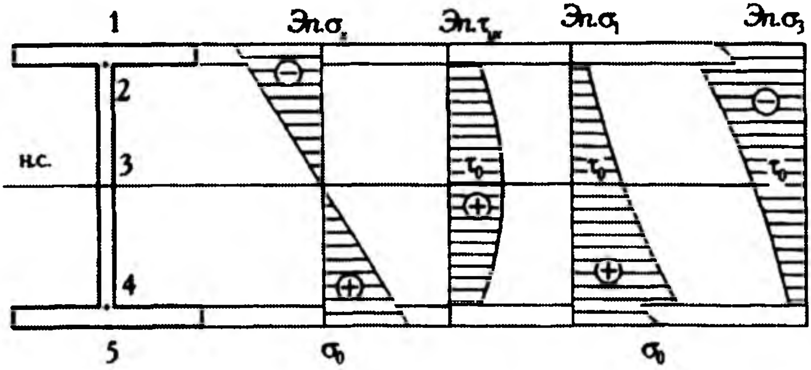


Рис. 6.41

Здесь в точках *2* и *4*, принадлежащих вертикальной стенке, главные напряжения могут оказаться выше напряжений σ_0 в крайних волокнах балки. Поэтому в этих точках проводится дополнительная проверка прочности по главным напряжениям:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2} \le R. \qquad (6.24)$$

Проверка проводится в тех сечениях, где изгибающий момент и поперечная сила одновременно достигают достаточно больших, хотя может быть и не самых максимальных для каждого внутреннего силового фактора значений. Нормальные и касательные напряжения, входящие в условие прочности, вычисляются, естественно, в точках *2* или *4* по соответствующим формулам.

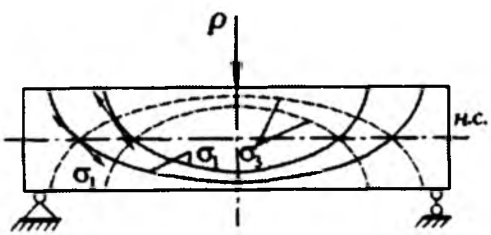


Рис. 6.42

При помощи выражения (6.23) можно подсчитать углы наклонов главных напряжений в любой точке балке. Если показать стрелками на боковой поверхности балки векторы главных напряжений во множестве точек, то можно построить *траектории главных напряжений* –

линии, касательные к которым определяют направления главных напряжений в соответствующих точках. Такие траектории σ_1 (сплошные линии) и σ_3 (пунктир) показаны на рис. 6.42 для балки, загруженной силой P. В железобетонных балках арматура укладывается примерно вдоль траекторий σ_1.

6.6. Потенциальная энергия деформации балки при плоском изгибе

Рассмотрим вначале случай чистого изгиба, когда в поперечных сечениях балки возникает только изгибающий момент. Вырежем из такой балки участок длиной dx, и рассмотрим его деформированный вид (рис. 6.43).

Примем условно левое поперечное сечение балки за неподвижное, тогда правое при изгибе повернется на угол $d\theta$ по отношению к левому.

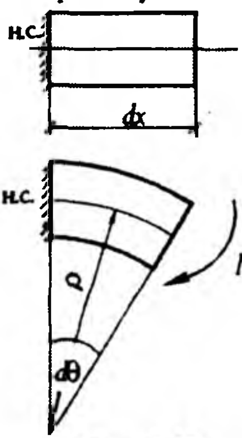


Рис. 6.43

Радиус кривизны нейтрального слоя связан с изгибающим моментом зависимостью (6.9)

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ}.$$

Так как волокна на уровне нейтрального слоя не меняют своей длины, то можно записать, что $dx = \rho d\theta$ и, следовательно,

$$d\theta = \frac{M}{EJ}dx. \qquad (6.25)$$

Таким образом, зависимость между $d\theta$ и изгибающим моментом при упругой работе материала – линейная (рис. 6.44). Поэтому работа изгибающего момента при повороте сечения на угол $d\theta$ будет равна площади треугольника OAB (см. раздел 2.8)

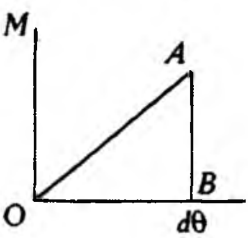


Рис. 6.44

$$dW = \frac{1}{2}Md\theta. \qquad (6.26)$$

Следовательно, потенциальная энергия участка балки длиной dx, равная работе изгибающего момента dW, определяется выражением

$$dU = \frac{M^2 dx}{2EJ} .$$

Полную энергию определим интегрированием по длине балки

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} . \quad (6.27)$$

Выражение (6.27) часто используется для определения потенциальной энергии балки и при наличии поперечной силы Q, вклад которой в общую потенциальную энергию обычно невелик. Эта потенциальная энергия может быть определена по формуле, вытекающей из выражения (4.7)

$$U_Q = \int_0^l \frac{kQ^2}{2GA} dx, \quad (6.28)$$

где коэффициент k зависит от формы поперечного сечения балки и учитывает неравномерное распределения касательных напряжений по высоте сечения (см. главу 4);G – модуль сдвига; A – площадь поперечного сечения. Обычно в расчетах энергией U_Q пренебрегают.

6.7. Упруго-пластический изгиб

До сих пор предполагалось, что напряжения в балке не превышают предела пропорциональности и поэтому считалось, что материал балки при деформировании следует закону Гука.

Что будет происходить в балке, если нагрузка, действующая на нее, вызовет напряжения, превышающие предел пропорциональности и близкий к нему по значению предел упругости? Очевидно, в балке появятся пластические деформации, что вызовет соответствующее перераспределение напряжений. Поведение балки в этой области ее деформирования будет зависеть от формы диаграммы растяжения–сжатия материала. Для последующего анализа примем (как и в главе 2) диаграмму Прандтля (рис. 6.45). Будем считать, что пределы текучести при растяжении и сжатии одинаковы и равны $\sigma_т$.

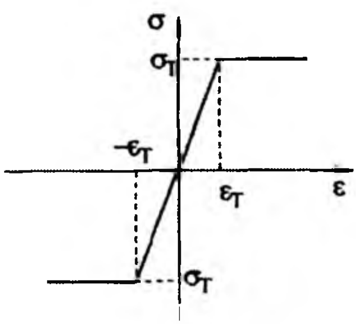


Рис. 6.45

Рассмотрим поведение балки прямоугольного поперечного сечения, изображенной на рис. 6.46. В среднем поперечном сечении касательные напряжения отсутствуют, а нормальные напряжения при упругой работе балки будут равны

$$\sigma_x = \frac{M_{max}}{J_{н.о}} y .$$

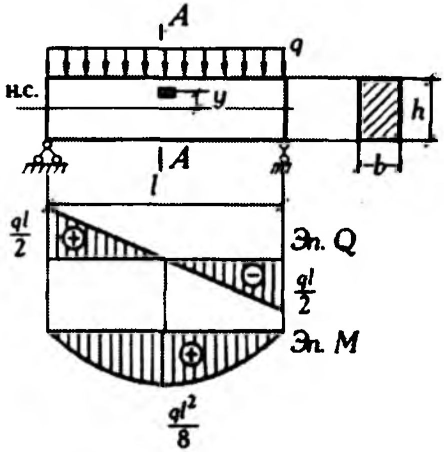


Рис. 6.46

Бесконечно малый элемент в этом сечении находится в условиях простого растяжения–сжатия. Определим нагибающий момент $M^{оп}$, при котором напряжения в крайних волокнах достигнут предела текучести материала:

$$M^{оп} = \sigma_т \frac{J_{н.о.}}{y_{max}} = \sigma_т W_{н.о.} = \sigma_т \frac{bh^2}{6} .$$

При этом соответствующая нагрузка на балку $q^{оп}$ будет равна $8M^{оп}/l^2$. Эпюры напряжений и деформаций для этого момента показаны на рис. 6.47, *а*. При нагрузке $q > q^{оп}$ в балке появляются пластические деформации. Из гипотезы плоских сечений следует, что продольные деформации балки по высоте сечения распределяются по линейному закону (см. уравнение 6.6 и эпюру ε_x на рис. 6.47, *а*). Опыты и исследования методами теории пластичности показывают, что такой характер распределения деформаций сохранится и при упруго-пластическом деформировании балки. Поэтому при возрастании нагрузки q рост напряжений в крайних точках прекратится (по диаграмме Прандтля напряжения не могут превышать предела текучести $\sigma_т$), но при

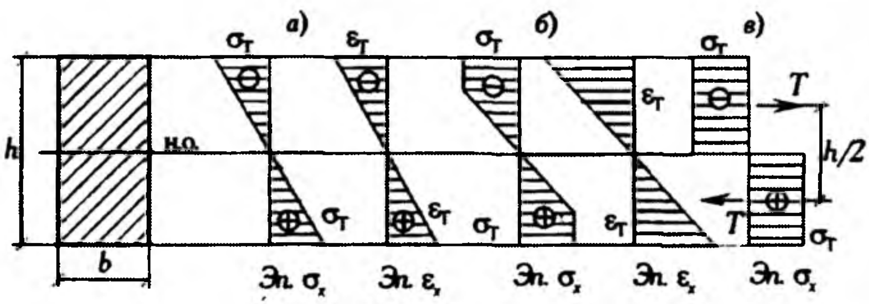


Рис. 6.47

этом продолжится рост напряжений в других внутренних точках сечения. Эпюра нормальных напряжений при некотором значении $q > q^{оп}$ показана на рис. 6.47, *б*. Около нейтрального слоя балки еще сохранится упругая зона. Если продолжить увеличение нагрузки q, то пластические зоны будут распространяться внутрь, по направлению к нейтральному слою, и в предельном случае распределение напряжений примет вид, показанный на рис. 6.47, *в*. Вблизи нейтрального слоя останется очень тонкая прослойка упругой работы материала, которую не будем учитывать в расчетах. Поскольку упругая зона исчезла, теперь ничто не ограничивает рост деформаций. В этом случае говорят о появлении *пластического шарнира*, и статически определимая балка становится механизмом. Соответствующий этой эпюре напряжений предельный момент $M^{пр}$ определим через момент внутренних сил. В нашем примере сила T – равнодействующая внутренних сил в сжатой и растянутой зонах балки – равна

$$T = \int\limits_{A/2} \sigma_т dA = \sigma_т \frac{bh}{2}.$$

Момент, создаваемый этой парой сил будет равен

$$M^{пр} = T\frac{h}{2} = \sigma_т \frac{bh^2}{4}.$$

Отношение $M^{пр}/M^{оп}$ для балки прямоугольного сечения равно 1,5, т.е. нагрузка q на балку от момента появления пластических деформаций ($q^{оп}$) до полного исчерпания несущей способности ($q^{пр}$) должна вырасти в 1,5 раза.

В заключении этого раздела отметим следующее.

1. Равенство равнодействующих внутренних сил в сжатой и растянутой зоне означает, что нейтральная ось делит поперечное сечение на две одинаковые по площади части. В сечениях, где нейтральная ось является осью симметрии, положение этой оси при развитии пластических деформаций остается неизменным. Если нейтральная ось не является осью симметрии (например, сечение типа тавра), то при упругой работе материала она проходит через центр тяжести поперечного сечения, а при образовании пластического шарнира она должна разделить сечение на две равновеликие по площади части, т.е. в процессе развития пластических деформаций нейтральная ось смещается.

2. В поперечных сечениях, где рассматривается образование пластического шарнира, могут присутствовать и касательные напряжения (если $Q \neq 0$). Однако в крайних волокнах, где начинается рост пластических деформаций, эти напряжения отсутствуют, а в средней части сечения они обычно невелики по сравнению с $\sigma_т$. Поэтому влиянием касательных напряжений на образование пластического шарнира обычно пренебрегают.

3. В реальных материалах после стадии текучести наступает стадия упрочнения материла, поэтому фактический предельный момент окажется больше, чем $M^{пр}$, что идет в запас прочности при расчетах.

4. Соотношение $M^{пр}/M^{оп}$ зависит от формы поперечного сечения и должно находиться каждый раз так же, как это было сделано для прямоугольного сечения. Для двутавров это соотношение находится в пределах 1,1÷1,2.

6.8. Особенности расчета составных балок

Поперечные сечения наиболее распространенных типов клеевых, сварных и кл[...]паных составных балок показаны на рис. 6.48. Обычно составные балки используют[...]ся в тех случаях, когда требуемые по условиям прочности размеры поперечного сече[...]

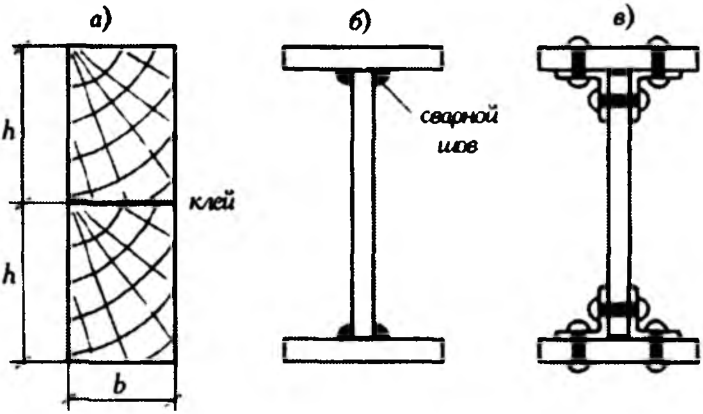


Рис. 6.48

ния не обеспечиваются одним стандартным стержнем (деревянный брус на рис. 6.48, *а* или двутавр, максимальная высота которого обычно не превышает 60 см). В составных балках соединительные элементы (клеевые, сварные швы и заклепки) должны обеспечивать работу всего сечения как единого целого. Поэтому в этих балках необходимо дополнительно проверить прочность соединительных элементов.

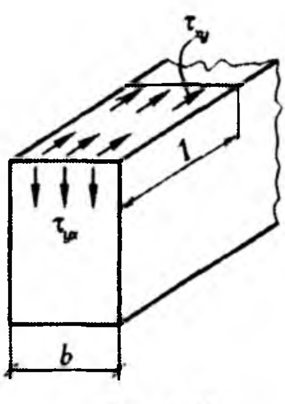


Рис. 6.49

Выясним – какие усилия воспринимает клеевой шов в составной деревянной балке (рис. 6.48, *а*). Для этого разделим балку по клеевому шву, отбросим верхнюю половину и рассмотрим оставшуюся часть (рис. 6.49). Известно, что в продольных сечениях монолитной балки возникают касательные напряжения τ_{xy}, которые можно определить по формуле Д.И.Журавского

$$\tau_{xy} = \frac{Q S_{н.о}^{отс}}{J_{н.о} b}.$$

Эти напряжения и воспринимает клеевой шов. Поэтому условие прочности для продольного клеевого шва балки, изображенной на рис. 6.48, запишется в виде

$$\tau_{xy} = \frac{Q_{max} S_{н.о.}^{1/2сеч}}{J_{н.о.} b} \le R_{ср} .$$

где $R_{ср}$ – расчетное сопротивление на срез для клеевого шва.

Прежде чем рассмотреть особенности расчета соединительных элементов других балок, выясним, что дает объединение двух одинаковых балок с прямоугольными поперечным сечением размерами $b \times h$ в одну монолитную балку? Если просто положить одну балку на другую, не соединяя их, то каждая балка будет работать отдельно, воспринимая половину общей нагрузки. Нейтральные оси этих балок будут проходить через центр тяжести каждого отдельного сечения (рис. 6.50, *а*). По плоскости контакта будет

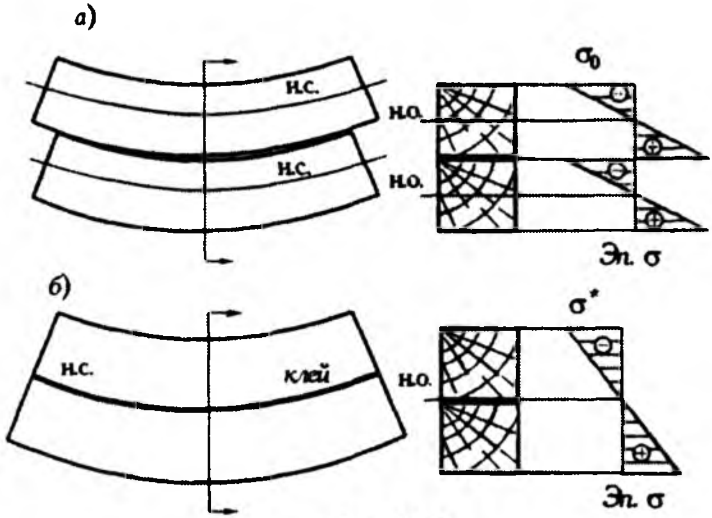


Рис. 6.50

иметь место проскальзывание. При положительном изгибающем моменте нижние растянутые волокна верхней балки окажутся длиннее сжатых верхних волокон нижней балки. Нормальные напряжения в крайних волокнах каждой балки будут равны

$$\sigma_0 = \frac{M}{2W_{н.о.}} = \frac{M \cdot 6}{2bh^2} . \qquad (а)$$

где M – суммарный изгибающий момент, воспринимаемый двумя балками сечением $b \times h$ каждая.

Если же склеить обе балки, то есть сделать ее монолитной, нейтральная ось будет проходить уже через центр тяжести объединенного сечени (рис. 6.50, *б*), а напряжения в крайних волокнах окажутся равными

$$\sigma^* = \frac{M}{W^*_{н.о.}} = \frac{M \cdot 6}{b(2h)^2} = \frac{\sigma_0}{2}. \qquad (б)$$

Таким образом, объединение двух отдельных балок в одну монолитную позволяет в рассмотренном случае увеличить грузоподъемность балки ровно в 2 раза.

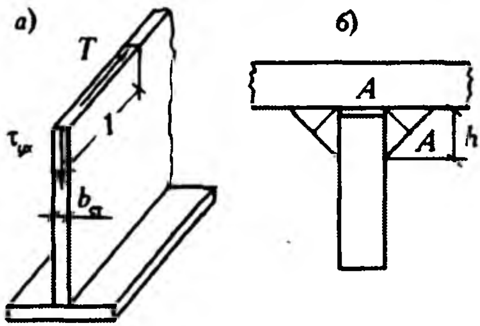


Рис. 6.51

При расчете сварных швов (рис. 6.48, *б*) определяют вначале погонную сдвигающую силу *T*, которая возникла бы в продольном сечении на уровне соединения стенки с полкой, если бы балка была сплошной. Эту силу *T* (рис. 6.51, *а*)определим

$$T = \tau_{xy.max} \cdot b_{ст} \cdot 1.$$

Используя формулу (6.18), получим

$$T = \frac{Q_{max} S^{полки}_{н.о.}}{J_{н.о.}}. \qquad (6.29)$$

В составной балке стенка с полкой соединяются не непосредственно, а через боковые сварные швы (рис. 6.51, *б*) высотой *h*. Поэтому касательные напряжения среза в плоскостях *A–A* сварного шва (см. главу 4) окажутся равными

$$\tau_{ср} = \frac{T}{2 \cdot 0{,}7h \cdot 1}.$$

Из выражение (6.29) получим теперь условие прочности сварных швов по срезу

$$\tau_{ср} = \frac{Q_{max} \cdot S^{полки}_{н.о.}}{J_{н.о.} \cdot 1{,}4h} \le R_{ср}. \qquad (6.30)$$

В клепаной балке вертикальные и горизонтальные заклепки одинакового диаметра располагаются по длине балки на одном расстоянии *a* (рис. 6.52), который называется шагом заклепки. Поэтому горизонтальные двухсрезные заклепки (см. рис.6.48, *б*) оказываются в более тяжелых условиях, так как "отсекаемая" для них часть сечения состоит не только из полки, но и двух уголков, т.е. $S^{пояса}_{н.о.} = S^{полки}_{н.о.} + 2S^{уг.}_{н.о.}$. Сила, приходящаяся на одну заклепку, будет равна $T \cdot a$. Поэтому условие прочности для заклепки по срезу запишется в виде

$$\tau_{ср} = \frac{Ta}{A_{ср}} \le R_{ср}. \qquad (6.31)$$

где T – определяется выражением (6.29) при $S_{н.о.}^{отс} = S_{н.о.}^{пояса}$, а $A_{ср} = 2 \cdot \pi d^2 / 4$.

Аналогично по смятию

$$\tau_{см} = \frac{Ta}{A_{см}} \le R_{см}. \qquad (6.32)$$

где $A_{см} = d\sum t_{min}$ (см. гл. 4).

Обычно диаметром заклепки задаются по конструктивным соображениям, а из условий прочности определяют шаг заклепок.

Для клепаных балок проводится также проверка прочности основного металла с учетом ослаблений, вызванных отверстиями под заклепки. Для этого из общего момента инерции всего сечения вычитается момент инерции ослаблений (черные прямоугольники на рис. 6.48, *в*) относительно нейтральной оси

$$J_{нт} = J_{бр} - J_{осл}.$$

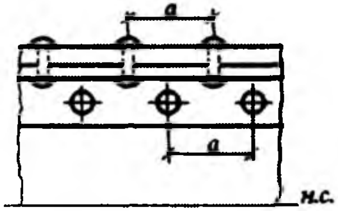


Рис. 6.52

Из рис. 6.52 следует, что в ослабленном поперечном сечении присутствуют либо вертикальные, либо горизонтальные заклепки. Однако на рис. 6.48, *в* они показаны в одном сечении, таким образом $J_{осл}$ искусственно завышается, что идет в запас прочности.

Нормальные напряжения определяют по формуле

$$\sigma = \frac{M}{J_{нт}} y.$$

а затем записывается соответствующее условие прочности.

Касательные напряжения обычно вычисляются без учета ослаблений.

ГЛАВА 7. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПРИ ИЗГИБЕ

7.1. Общие понятия

Предыдущая глава посвящена анализу напряженного состояния стержня, находящегося в условиях плоского поперечного изгиба, то есть такого изгиба, при котором все внешние силы располагаются в одной из главных плоскостей стержня (балки) и направлены перпендикулярно его продольной оси. При такой деформации продольная ось балки искривляется, образуя *плоскую кривую*, плоскость которой совпадает с той же главной плоскостью балки. Эта искривленная ось носит название *изогнутой* оси или *упругой линии балки*.

В данной главе рассматриваются вопросы определения перемещений сечений балки в связи с искривлением ее продольной оси.

На рис. 7.1 показано положение балки-консоли до и после действия внешней силы P. Обратим внимание на то, что произвольное сечение балки с координатой x при изгибе совершает два движения: перемещается на величину υ в направлении, перпендикулярном первоначальной продольной оси, и поворачивается на угол θ. Так как отрезок OB лежит в плоскости нейтрального слоя и не меняет своей длины при изгибе, действительное положение точки B' окажется несколько левее ее положения, показанного на рис. 7.1. Однако можно показать, что при малых вертикальных перемещениях смещение центра тяжести сечения вдоль оси x оказывается величиной второго порядка малости и им можно пренебречь. Перемещение υ называется *прогибом*, а угол θ – *углом поворота* сечения балки. Уравнение кривой $\upsilon = \upsilon(x)$ называют *уравнением изогнутой оси балки*. С учетом принятого на рис. 7.1 направления осей координат, прогиб и угол поворота указанного сечения отрицательны.

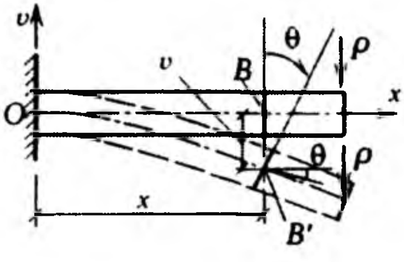


Рис. 7.1

Искомые перемещения υ и θ не являются независимыми. Действительно, так как при изгибе поперечное сечение балки поворачивается на угол θ

(но остается ортогональным изогнутой оси), то угол наклона касательной к изогнутой оси в точке B' также равен θ. Отсюда следует, что

$$\theta \cong \operatorname{tg}\theta = \frac{dv}{dx} = v'(x), \tag{7.1}$$

то есть уравнение углов поворота $\theta(x)$ можно получить дифференцированием уравнения изогнутой оси балки.

7.2. Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

Чтобы определить уравнение изогнутой оси $v(x)$ воспользуемся зависимостью (6.9), связывающей радиус кривизны нейтрального слоя балки ρ с изгибающим моментом $M(x)$ в том же сечении:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EJ}\ , \tag{7.2}$$

где EJ – нагибная жесткость балки.

Так как продольная ось балки как геометрическое место центров тяжести поперечных сечений совпадает с нейтральным слоем, ρ является также и радиусом кривизны изогнутой оси балки.

Из математики известно следующее выражение кривизны кривой:

$$\frac{1}{\rho} = \pm\frac{v''}{\left[1 + (v')^2\right]^{3/2}}\ , \tag{7.3}$$

где $v = v(x)$ – уравнение кривой (в данном случае – изогнутой оси балки).

Сопоставляя выражения (7.2) и (7.3), получаем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки:

$$\pm\frac{v''}{\left[1 + (v')^2\right]^{3/2}} = \frac{M(x)}{EJ}\ . \tag{7.4}$$

Уравнение (7.4) достаточно сложное (уравнение нелинейное с переменными коэффициентами), поэтому решение его связано со значительными математическими трудностями. Так как $v' = \theta$, а при малых прогибах $\theta << 1$, то в знаменателе левой части уравнения (7.4) можно пренебречь величиной $(v')^2$ по сравнению с 1.

Тогда уравнение (7.4) упрощается и приобретает вид

$$\pm v'' = \frac{M(x)}{EJ}$$

или

$$\pm EJv'' = M(x). \qquad (7.5)$$

Знак + или − зависит от принятого направления оси v. На рис. 7.2, *а* показано направление оси v вверх, при этом знаки v'' и $M(x)$ совпадают при любом направлении выпуклости изогнутой оси. Следовательно, если ось прогибов v направлена вверх, то в уравнении (7.5) принимается знак +. Если направить ось v вниз (рис. 7.2, *б*) знаки v'' и $M(x)$ будут всегда противоположными, поэтому, в уравнении (7.5) необходимо удержать знак −.

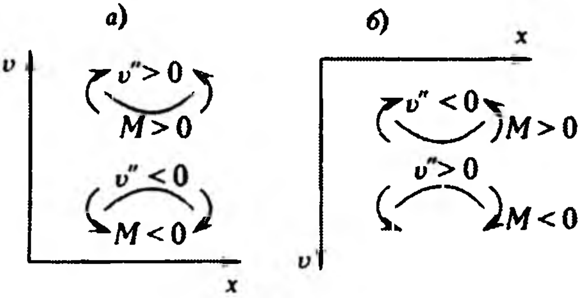


Рис. 7.2

Таким образом, для направления оси v, представленного на рис. 7.1, приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси имеет вид

$$EJv'' = M(x)\ , \qquad (7.5,\ a)$$

где $M(x)$ − выражение изгибающего момента в произвольном сечении балки.

Далее рассмотрим порядок определения $v(x)$ с помощью решения дифференциального уравнения (7.5, *а*).

7.3. Способ непосредственного интегрирования

Если изгибная жесткость EJ во всех сечениях балки принята постоянной, то решение приближенного дифференциального уравнения (7.5, *а*) производится путем двукратного интегрирования этого уравнения с последующим определением двух постоянных интегрирования при помощи граничных условий − условий закрепления балки.

Для примера рассмотрим определение уравнения $v(x)$ для балки, изображенной на рис. 7.1.

В принятой системе координат имеем:

$$M(x) = -P(l - x) = -Pl + Px,$$

следовательно, уравнение (7.5,*а*) запишется так:

$$EJv'' = -Pl + Px.$$

После первого интегрирования получим:

$$EJv' = -Plx + \frac{Px^2}{2} + C.$$

После второго интегрирования:

$$EJv = -\frac{Plx^2}{2} + \frac{Px^3}{6} + Cx + D.$$

Так как в заделке отсутствуют угол поворота сечения и прогиб, то граничные условия будут такими:

1) при $x = 0$ $v' = 0$, то есть $0+0+C = 0$,

2) при $x = 0$ $v = 0$, то есть $0+0+0+D = 0$.

Итак, в данном случае $C = 0$ и $D = 0$. Окончательный вид изогнутой оси:

$$v(x) = \frac{1}{EJ}\left(-\frac{Plx^2}{2} + \frac{Px^3}{6}\right).$$

Максимальный (по абсолютному значению) прогиб на конце консоли ($x = l$):

$$v_{max} = -\frac{Pl^3}{3EJ}.$$

Максимальный угол поворота в том же сечении:

$$\theta_{max} = -\frac{Pl^2}{2EJ}.$$

Последняя формула позволяет оценить погрешность, допускаемую при замене точного дифференциального уравнения (7.4) на приближенное (7.5). Из условия прочности (6.17) определим требуемый минимальный момент сопротивления

$$W_{min} = Pl / R$$

и соответствующий момент инерции

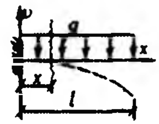
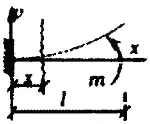
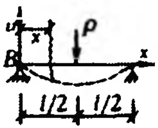
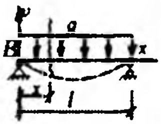
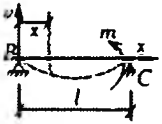
$$J_{min} = Plh / 2R,$$

где h – высота сечения, симметричного относительно горизонтальной оси.

Подставляя выражение J_{min} в формулу θ_{max}, получим

$$\theta_{max} = -\frac{Pl^2 \cdot 2R}{2E \cdot Plh} = -\frac{R}{E}\frac{l}{h}.$$

Таблица 7.1

Схема балки с нагрузкой	$M(x)$	EJv'	EJv	Граничные условия	Значения C и D	Окончательные уравнения $EJv(x)$	v и θ в характерных сечениях
	$-\frac{q(l-x)^2}{2} =$ $= -\frac{ql^2}{2} + qlx - \frac{qx^2}{2}$	$-\frac{ql^2x}{2} + \frac{qlx^2}{2} -$ $-\frac{qx^3}{6} + C$	$-\frac{ql^2x^2}{4} + \frac{qlx^3}{6} -$ $-\frac{qx^4}{24} + Cx + D$	$x = 0 \quad v' = 0$ $x = 0 \quad v = 0$	$C = 0$ $D = 0$	$-\frac{ql^2x^2}{4} + \frac{qlx^3}{6} -$ $-\frac{qx^4}{24}$	при $x = l$ $v_{max} = -\frac{ql^4}{8EJ}$ $\theta_{max} = -\frac{ql^3}{6EJ}$
	m	$mx + C$	$\frac{mx^2}{2} + Cx + D$	$x = 0 \quad v' = 0$ $x = 0 \quad v = 0$	$C = 0$ $D = 0$	$\frac{mx^2}{2}$	при $x = l$ $v_{max} = \frac{ml^2}{2EJ}$ $\theta_{max} = \frac{ml}{EJ}$
	$\frac{P}{2}x$ (левый участок)	$\frac{Px^2}{4} + C$	$\frac{Px^3}{12} + Cx + D$	$x = 0 \quad v = 0$ $x = \frac{l}{2} \quad v' = 0$	$D = 0$ $C = -\frac{Pl^2}{16}$	$\frac{Px^3}{12} - \frac{Pl^2x}{16}$ (левый участок)	при $x = l/2$ $v_{max} = -\frac{Pl^3}{48EJ}$ при $x = 0$ $\theta_B = -\frac{Pl^2}{16EJ}$
	$\frac{qlx}{2} - \frac{qx^2}{2}$	$\frac{qlx^2}{4} - \frac{qx^3}{6} + C$	$\frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} +$ $+Cx + D$	$x = 0 \quad v = 0$ $x = l \quad v = 0$	$D = 0$ $C = -\frac{ql^3}{24}$	$\frac{qlx^3}{12} - \frac{qx^4}{24} -$ $-\frac{ql^3x}{24}$	при $x = l/2$ $v_{max} = -\frac{5ql^4}{384EJ}$ при $x = 0$ $\theta_B = -\frac{ql^3}{24EJ}$
	$\frac{m}{l}x$	$\frac{mx^2}{2l} + C$	$\frac{mx^3}{6l} + Cx + D$	$x = 0 \quad v = 0$ $x = l \quad v = 0$	$D = 0$ $C = -\frac{ml}{6}$	$\frac{mx^3}{6l} - \frac{mlx}{6}$	при $x = l/\sqrt{3}$ $v_{max} = -\frac{ml^2}{9\sqrt{3}EJ}$ $\theta_C = \frac{ml}{3EJ}$

Для стали $R / E \approx 10^{-3}$; l/h обычно не превышает 10. Отсюда $\theta^2_{max} \cong 10^{-4} << 1$, что подтверждает допустимость пренебрежения величиной $(v')^2$ по сравнению с 1.

В дополнение к рассмотренному примеру применения способа непосредственного интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси, в таблице 7.1 показаны основные этапы решения для наиболее часто встречающихся задач. В последнем случае (балка на двух опорах, загруженная парой сил с моментом m на правой опоре) значение наибольшего (по абсолютной величине) прогиба определялось по следующей схеме. Вначале из уравнения $EJv' = 0$ определялось значение x_0, при котором прогиб v достигает экстремального значения. Оказалось, что $x_0 = l / \sqrt{3}$. Затем из уравнения изогнутой оси при $x = x_0$ определялось значение наибольшего прогиба. Во всех примерах, представленных в таблице, кроме примера с силой, действующей посредине балки на двух опорах, на балке имелся всего один участок с одним выражением изгибающего момента $M(x)$ для любого сечения балки. В примере балки с силой посредине имеется два участка, но, благодаря симметрии балки и нагрузки, можно рассматривать только один из участков с учетом отсутствия поворота в среднем сечении балки.

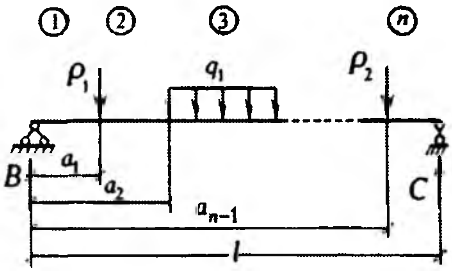


Рис. 7.3

Если на балке несколько участков (рис. 7.3), то использование способа непосредственного интегрирования существенно осложняется. Это связано с тем, что на всех участках выражения изгибающих моментов будут различными. Например, для первого участка балки на рис. 7.3 $M_1(x) = Bx$, для второго участка $M_2(x) = Bx - P_1(x - a_1)$ и т.д. Поэтому дифференциальных уравнений изогнутой оси (7.5, a) будет столько же, сколько и участков, т.е. n.

При интегрировании из этих уравнений будут получаться выражения для прогибов, содержащие $2n$ постоянных интегрирования. Для определения всех постоянных можно записать следующие условия:

два условия закрепления балки;

$n-1$ условия неразрывности изогнутой оси балки на каждой из грани между участками:

$$\text{при } x = a_1 \quad \upsilon_1 = \upsilon_2 \,,$$
$$\text{при } x = a_2 \quad \upsilon_2 = \upsilon_3 ,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\text{при } x = a_{n-1} \quad \upsilon_{n-1} = \upsilon_n ;$$

$n-1$ условия плавности изогнутой оси, т.е. отсутствие переломов оси н каждой из границ:

$$\text{при } x = a_1 \quad \upsilon_1' = \upsilon_2' \,,$$
$$\text{при } x = a_2 \quad \upsilon_2' = \upsilon_3' \,,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\text{при } x = a_{n-1} \quad \upsilon_{n-1}' = \upsilon_n' \,.$$

Перечисленные условия образуют систему $2n$ уравнений с $2n$ неизвестными постоянными C_i, D_i. Решая составленную систему уравнений, можно определить все $2n$ неизвестных.

Как видно, наличие на балке нескольких участков может сильно увеличить объем вычислительных работ за счет составления и решения большой системы уравнений. Поэтому способ непосредственного интегрирования целесообразно применять лишь тогда, когда на балке всего один участок. В более сложных случаях нагружения для получения уравнений изогнутой оси на участках можно использовать метод начальных параметров.

7.4. Метод начальных параметров. Универсальная формула

Для вывода формулы метода начальных параметров проведем следующие рассуждения. Предположим, что ось балки после действия нагрузки на участке вблизи начала координат представляет собой прямую линию, показанную на рис. 7.4, *а*. Прогиб сечения с координатой x в этом случае выражается формулой

$$\upsilon = \upsilon_0 + \theta_0 x \,,$$

где υ_0 и θ_0 – прогиб и угол поворота балки в начале координат – начальные параметры балки.

Если допустить, что ось балки представляет собой ломаную из двух отрезков (рис.7.4, *б*), то сечение в пределах второго отрезка имеет прогиб

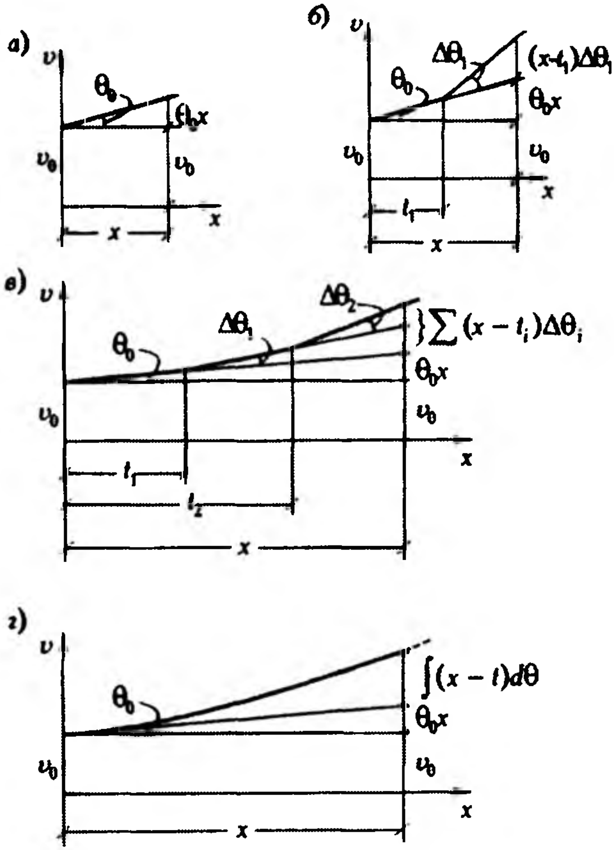


Рис. 7.4

$$v = v_0 + \theta_0 x + (x - t_1)\Delta\theta_1,$$

где t_1 – координата точки пересечения отрезков ломаной оси; $\Delta\theta_1$ – угол поворота второго отрезка относительно первого.

Очевидно, что если от начала координат до сечения x ломаная имеет две вершины (рис. 7.4, *в*) или вообще n вершин, то прогиб v в сечении x выразится так:

$$v = v_0 + \theta_0 x + (x - t_1)\Delta\theta_1 + (x - t_2)\Delta\theta_2 \quad \text{при } n = 2,$$

$$v = v_0 + \theta_0 x + \sum_{i=1}^{n}(x - t_i)\Delta\theta_i \qquad \text{при любом } n.$$

Далее произведем предельный переход от ломаной к изогнутой оси. Для этого устремим длину каждого из отрезков к нулю, а общее их количество к бесконечности. Очевидно, что в этом случае, по аналогии с последней формулой, прогиб в сечении x будет иметь такое выражение:

$$v = v_0 + \theta_0 x + \int_0^x (x - t) d\theta \ , \tag{7.6}$$

где определенный интеграл вычисляется по длине балки от начала координат до сечения с фиксированной координатой x; t — вспомогательная переменная, изменяющаяся от нуля до заданного значения x.

Так как в сечении с координатой t $v'' = d\theta / dt$, то из формулы (7.5, a) получим $d\theta = M(t)dt / EJ$, и формула (7.6) после умножения на EJ преобразуется к такому виду:

$$EJv = EJv_0 + EJ\theta_0 x + \int_0^x M(t)(x - t)dt. \tag{7.7}$$

Последний интеграл зависит от выражений $M(t)$ на участках балки от $t = 0$ до $t = x$, а следовательно и от нагрузок в этом интервале. На рис. 7.5 показан случай действия наиболее распространенных нагрузок. Выражения моментов $M(t)$ на участках будут такими:

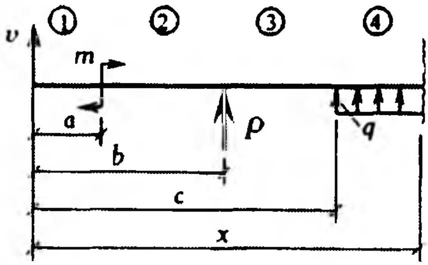


Рис. 7.5

на 1–м участке при $0 \le t \le a$ $M(t) = 0$;

на 2–м участке при $a < t \le b$ $M(t) = m$,

на 3–м участке при $b < t \le c$ $M(t) = m + P(t - b)$,

на 4–м участке при $c < t \le x$ $M(t) = m + P(t - b) + \dfrac{q(t - c)^2}{2}$.

Тогда

$$\int_0^x M(t)(x-t)dt = \int_a^b m(x-t)dt + \int_b^c [m + P(t-b)](x-t)dt +$$

$$+ \int_c^x \left[m + P(t-b) + \frac{q(t-c)^2}{2} \right](x-t)dt =$$

$$= \int_a^x m(x-t)dt + \int_b^x P(t-b)(x-t)dt + \int_c^x \frac{q(t-c)^2}{2}(x-t)dt \ .$$

Вычисляя эти интегралы, получим следующие выражения:

$$\int_a^x m(x-t)dt = \frac{m(x-a)^2}{1\cdot 2};$$

$$\int_b^x P(t-b)(x-t)dt = \frac{P(x-b)^3}{1\cdot 2\cdot 3};$$

$$\int_c^x \frac{q(t-c)^2}{2}(x-t)dt = \frac{q(x-c)^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Подставляя полученные результаты в формулу (7.7), окончательно будем иметь:

$$EJv = EJv_0 + EJ\theta_0 x + \frac{m(x-a)^2}{2!} + \frac{P(x-b)^3}{3!} + \frac{q(x-c)^4}{4!} \ . \qquad (7.8)$$

Выражение (7.8) называется *универсальной формулой* или *универсальным уравнением* изогнутой оси балки. Это название объясняется тем, что формула указывает, каким образом отражается в записи уравнения изогнутой оси на данном участке любая возможная нагрузка, расположенная между началом координат и сечением x.

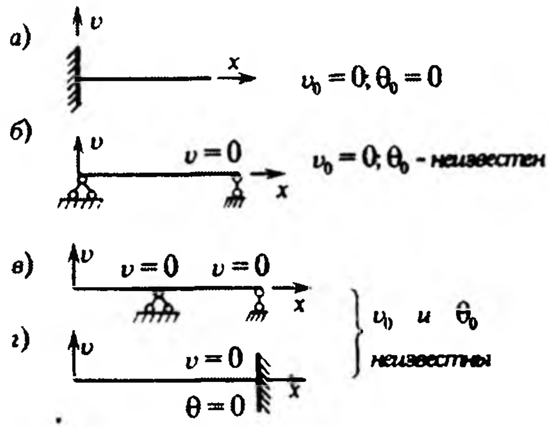


Рис. 7.6

Для составления уравнения изогнутой оси на произвольном участке балки необходимо выполнить следующие действия.

1) Записать два первых слагаемых универсальной формулы, содержащих начальные параметры, то есть $EJv_0 + EJ\theta_0 x$. В зависимости от положения начала координат значе-

ния υ_0 и θ_0 определяются либо сразу (рис. 7.6, *а*) либо после записи уравнений изогнутой оси на участках, граничащих с опорами с учетом условий закрепления балки (рис. 7.6, *б*, *в*, *г*).

2) Мысленно передвигая сечение вдоль балки от начала координат до произвольного участка, последовательно записывать в уравнение слагаемые, соответствующие всем силовым воздействиям, через которое сечение проходит в процессе движения, в том числе и расположенные в начале координат. Каждое слагаемое должно приниматься со знаком, соответствующим знаку изгибающего момента в сечении x от этого силового воздействия (см. вывод универсальной формулы (7.8)).

3) Особый случай возникает, когда сечение в своем движении вдоль балки переходит через *конец* участка распределенной нагрузки. В универсальной формуле соответствующего слагаемого нет, поэтому необходимо применить искусственный прием эквивалентного преобразования нагрузки, показанный на рис. 7.7. Здесь заданная нагрузка продолжается дальше, но появляется компенсирующая ее нагрузка той же интенсивности, но противоположного направления. Следовательно, переходя через конец участка нагрузки, необходимо отразить новую нагрузку в уравнении изогнутой оси слагаемым $q(x-d)^4/24$ со знаком, противоположным знаку слагаемого, записанного для начала участка нагрузки q.

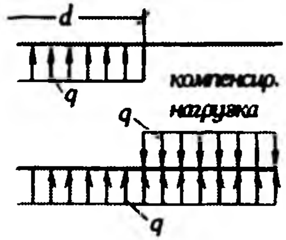


Рис. 7.7

Действуя в соответствии с указанными рекомендациями, будем получать на каждом последующем участке уравнение изогнутой оси, содержащее уравнение на предыдущем участке плюс грузовые члены, соответствующие силовым факторам на границе этих участков. Так, например, для балки, изображенной на рис. 7.8, уравнения изогнутой оси имеют такой вид:

на участке *1*: $EJ\upsilon_1 = EJ\theta_0 x + \dfrac{R_B x^3}{6} - \dfrac{q_1 x^4}{24}$;

на участке *2*: $EJ\upsilon_2 = EJ\upsilon_1 + \dfrac{q_1(x-a_1)^4}{24} + \dfrac{m(x-a_1)^2}{2}$;

на участке *3*: $EJ\upsilon_3 = EJ\upsilon_2 - \dfrac{P(x-a_2)^3}{6} - \dfrac{q_2(x-a_2)^4}{24}$.

Неизвестный параметр θ_0 можно найти из условия: при $x = l$ $\quad EJv_3 = \theta$.

Отметим достоинства метода начальных параметров по сравнению с непосредственным интегрированием дифференциальных уравнений. Во-первых, в методе начальных параметров постоянные интегрирования имеют всегда один и тот же смысл: $C_1 = EJ\theta_0$; $D_1 = EJv_0$. что в ряде случаев делает очевидным их значения (см., например, рис. 7.6, *а* и 7.6, *б*). Во-вторых, и это наиболее существенно, с помощью универсальной формулы уравнения на участках формируются таким образом, что постоянные интегрирования на всех участках оказываются одинаковыми, то есть $C_1 = C_2 = ... = C_n = EJ\theta_0$, $D_1 = D_2 = ... = D_n = EJv_0$. Таким образом, число неизвестных, подлежащих вычислению уменьшается с $2n$ до двух (см. рис. 7.6, *в*, *г*) или до одного (см. рис. 7.6, *б*) или даже до нуля (см. рис. 7.6, *а*). Поэтому метод начальных параметров получил широкое распространение при определении перемещений в балках с большим числом участков.

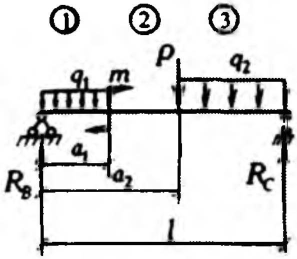


Рис. 7.8

7.5. Метод единичных нагрузок. Интеграл Мора

Предположим, что требуется определить прогиб в точке *1* балки от силы P (рис. 7.9). Обозначим это перемещение Δ_{1p}. Здесь и в дальнейшем будем использовать двухиндексовую систему обозначений. Первый индекс (буква или номер) определяет рассматриваемую точку, ее адрес; второй индекс – причину – например силу, вызвавшую искомое перемещение; перемещение под силой P обозначим через Δ_{pp} .

Сила P на перемещении Δ_{pp} совершает работу W_p, которая переходит в потенциальную энергию изгиба балки (см. (6.27))

$$U_p = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_p^2 dx}{EJ}$$

(влиянием поперечной силы пренебрегаем). Изменение изгибающего момента по длине балки показано на эпюре M_p (рис. 7.9, *а*).

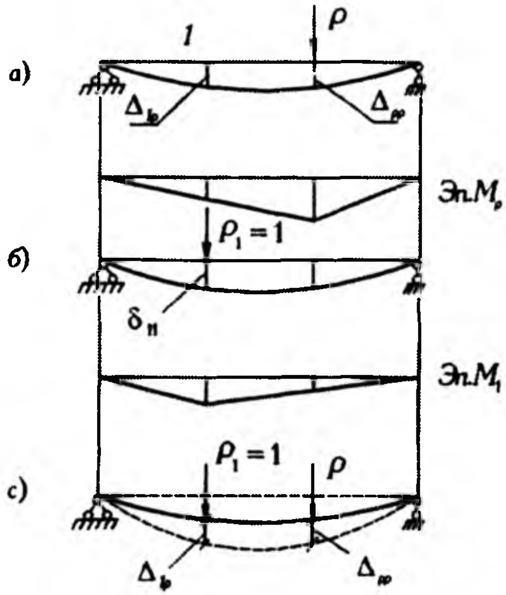


Рис. 7.9

Рассмотрим теперь второе состояние балки. Снимем нагрузку P и загрузим балку силой $P_1 = 1$ (единичная сила) в том сечении, где нас интересует прогиб Δ_{1p}. Направление единичной силы должно совпадать с направлением искомого перемещения (рис. 7.9, *б*). Единичная сила - это абстрактное понятие неимеющее размерности. Под "воздействием" этой силы балка изогнется, и точка приложения силы получит перемещение δ_{11}. В дальнейшем перемещения от единичных нагрузок будем обозначать этой буквой с двумя индексами, характеризующими "адрес" точки и причину перемещения. Сила $P_1 = 1$ совершит работу W_1, которая переходит в потенциальную энергию изгиба,

$$U_1 = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_1^2 dx}{EJ} .$$

Не снимая единичной нагрузки, приложим теперь к балке заданную нагрузку P (рис. 7.9, с), которая вызовет дополнительный прогиб балки. Для упругих линейных систем справедлив принцип независимости действия сил. Поэтому дополнительные прогибы в точках *1* и P будут такими же, как и при первом загружении балки силой P (рис. 7.9, *а*).

При этом работа силы P будет равна W_p, а работа силы $P_1 = 1$ окажется равной $W_{1p} = 1 \cdot \Delta_{1p}$, так как при загружении силой P в процессе деформирования балки сила $P_1 = 1$ *оставалась постоянной*.

Таким образом, при поочередном действии нагрузок P_1 и P суммарная работа определится выражением

$$W = W_1 + W_p + 1 \cdot \Delta_{1p}.$$

Каждой из этих работ соответствует своя доля потенциальной энергии. Общую потенциальную энергию найдем, загрузив балку сразу силами P и $P_1 = 1$ одновременно, так как потенциальная энергия линейно-деформированных систем не зависит от порядка приложения нагрузок. При этом изгибающий момент будет равен $M = M_p + M_1$, а потенциальная энергия определится выражением

$$U_{p+1} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{\left(M_p + M_1\right)^2}{EJ}dx,$$

или, раскрывая скобки, получим

$$U_{p+1} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_p^2 dx}{EJ} + \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_1^2 dx}{EJ} + \int_0^l \frac{M_p M_1}{EJ}dx .$$

Очевидно, что первый и второй интегралы соответствуют работе, которую совершали силы P и $P_1 = 1$ при их отдельном воздействии на балку; тогда на долю третьего интеграла остается работа, которую совершает сила $P_1 = 1$ при воздействии силы P на систему, уже нагруженную этой единичной силой. Таким образом,

$$W_{1p} = 1 \cdot \Delta_{1p} = \int_0^l \frac{M_p M_1}{EJ}dx. \tag{7.9}$$

Выражение (7.9) носит название *интеграла Мора*. Оно позволяет определить искомое перемещение путем интегрирования. В подинтегральное выражение входят *как функции* продольной координаты изгибающие моменты, полученные от воздействия заданной нагрузки и единичного загружения. При этом для отыскании линейного перемещения прикладывается единичная сила, а при отыскании угла поворота – "единичная пара", т.е. пара сил с моментом, $m = 1$.

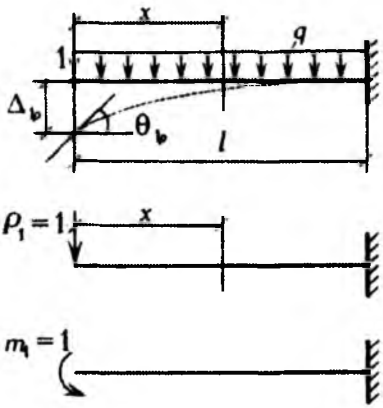


Рис. 7.10

Порядок определения перемещений с помощью интеграла Мора проследим на примере (рис. 7.10). Требуется определить прогиб и угол поворота на конце консоли постоянно поперечного сечения.

Составим выражение для M_p от нагрузки q:

$$M_p = -\frac{qx^2}{2} \qquad 0 \le x \le l.$$

Приложим к балке единичную силу, и составим выражение для M_1:

$$M_1 = -x \qquad 0 \le x \le l\ .$$

Определим прогиб Δ_{1p}:

$$\Delta_{1p} = \int_0^l \frac{M_p M_1}{EJ} dx = \int_0^l \frac{\left(-\frac{qx^2}{2}\right)(-x)}{EJ} dx = \frac{qx^4}{8EJ}\bigg|_0^l = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

Если на балке имеется несколько участков с разными выражениями дл изгибающих моментов, то в пределах каждого участка берется свой инте грал, а затем результат суммируется. Аналогично, загрузив балку единич ной парой сил, получим $M_1 = -1$ следовательно

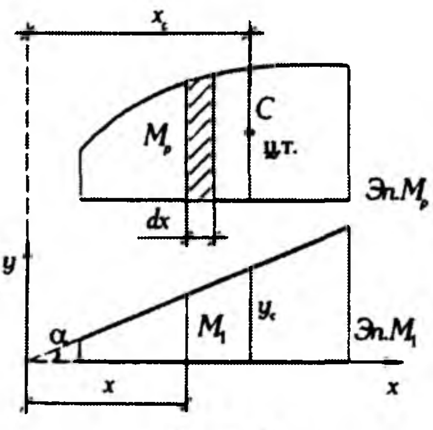


Рис. 7.11

$$\theta_{1p} = \int_0^l \frac{\left(-\frac{qx^2}{2}\right)(-1)}{EJ} = \frac{ql^3}{6EJ}\ .$$

Необходимо отметить, что мы получили результаты, точно соответствующие тем, которые следуют из дифференциального уравнения изогнутой оси балки (см. таблицу 7.1 прогибов и углов поворота).

Во многих случаях эпюра изгибающих моментов от единичных воздействий является линейной. Это свойство использовано в так называемом *правиле Верещагина*, которое позволяет вычислить интеграл Мора путем "перемножения" эпюр M_p и M_1. Продолжим эпюру M_1 (рис. 7.11) до пересечения с осью отсчета, и в полученной точке проведем ось y.

Тогда $M_1 = x\mathrm{tg}\alpha$. Следовательно

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ}\int_0^l M_p x\mathrm{tg}\alpha dx = \frac{1}{EJ}\mathrm{tg}\alpha\int_0^l M_p x dx\ .$$

Произведение $M_p dx$ представляет заштрихованную площадь трапеции, умножая эту площадь на x, получаем статический момент этой площади относительно оси y. Таким образом, $\int\limits_0^l M_p x dx$ представляет статический момент площади эпюры M_p относительно оси y. Этот момент как известно равен $S_y = \omega x_c$, где ω – площадь эпюры M_p; x_c – расстояние от оси y до центра тяжести этой площади.

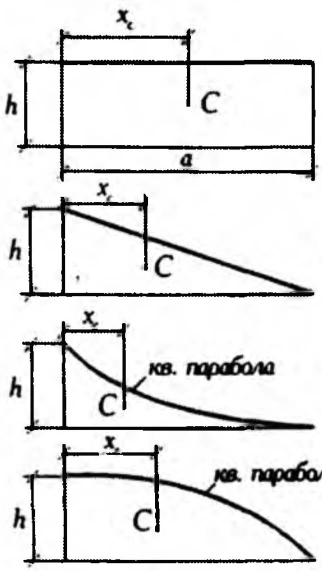
Тогда

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ}\operatorname{tg}\alpha \cdot \omega x_c = \frac{1}{EJ}\omega y_c . \tag{7.10}$$

Здесь y_c – ордината на эпюре M_1 под точкой C эпюры M_p.

Таким образом, на участках с постоянным поперечным сечением интеграл Мора равен *произведению площади криволинейной эпюры моментов на ординату прямолинейной эпюры*, взятой под центром тяжести криволинейной эпюры, поделенному на жесткость участка балки. Если обе эпюры находятся по одну сторону от оси отсчета, то результат перемножения берется со знаком "плюс", а в противном случае – "минус".

Приведем справочные данные о площадях и положении центра тяжести характерных эпюр (рис. 7.12).



$\omega = ah;\quad x_c = \frac{a}{2}.$

$\omega = \frac{ah}{2};\quad x_c = \frac{a}{3}.$

$\omega = \frac{ah}{3};\quad x_c = \frac{a}{4}.$

$\omega = \frac{2}{3}ah;\quad x_c = \frac{3}{8}a$

Рис. 7.12

Воспользуемся этим правилом для вычислений перемещений в балке показанной на рис. 7.10. Построим эпюры M_p, M_1 (см. рис. 7.13).

Вычислим площадь криволинейной эпюры

$$\omega = \frac{1}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{2} = \frac{ql^3}{6}.$$

Тогда

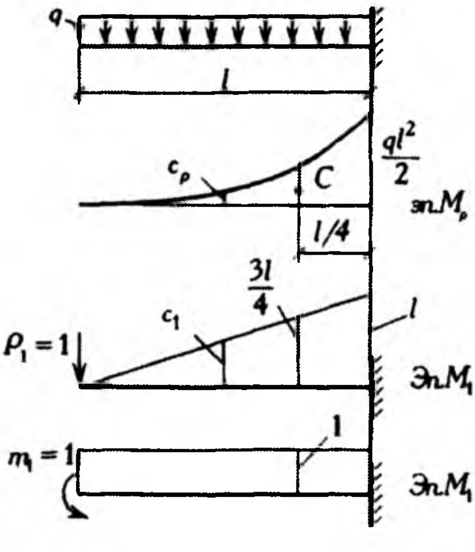


Рис. 7.13

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ}\frac{ql^3}{6}\cdot\frac{3}{4}l = \frac{ql^4}{8EJ};$$

$$\theta_{1p} = \frac{1}{EJ}\frac{ql^3}{6}\cdot 1 = \frac{ql^3}{6}.$$

Правило Симпсона. Это правило основано на приближенном представлении результата "перемножения" эпюр M_p и M_1 квадратной параболой. Оно является строгим, когда "перемножаются" линейные эпюры, а также для случая, когда одна из эпюр – квадратная парабола, а вторая – линейная. В других случаях это правило дает приближенный результат. Итак, пусть $(M_p \cdot M_1)$ – квадратная парабола с ординатами a и b на концах и c – в центре (рис. 7.14).

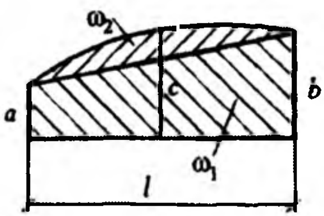


Рис. 7.14

Тогда интеграл $\int_0^l M_p M_1 dx$ будет равен площади, ограниченной этой кривой, которую представим в виде суммы двух площадей ω_1 и ω_2. При этом площадь трапеции $\omega_1 = \frac{a+b}{2}l$, а площадь, ограниченная параболой, будет равна (см. рис. 7.12) $\omega_2 = \frac{2}{3}l\left(c - \frac{a+b}{2}\right)$.

Складывая ω_1 и ω_2, получим $\omega = \frac{l}{6}(a + 4c + b)$.

Следовательно (см. рис. 7.15) $\int_0^l M_p M_1 dx = \frac{l}{6}(a_1 a_2 + 4c_1 c_2 + b_1 b_2)$.

Таким образом, для вычисления интеграла необходимо перемножить крайние ординаты обеих эпюр и прибавить к этим произведениям учетверенное произведение средних ординат. Если соответствующие ординаты находятся по одну сторону от оси отсчета, то результат "перемножения" берется со знаком"плюс" (левые ординаты на рис. 7.15), если по разные стороны, то "минус" (средние и правые ординаты на рис. 7.15).

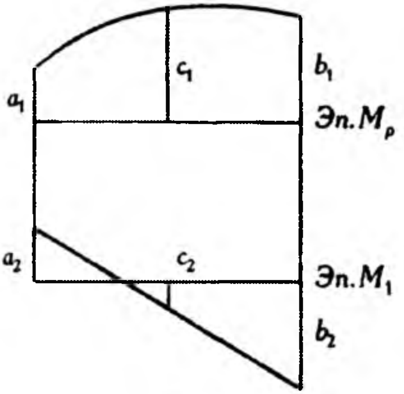


Рис. 7.15

Определим, пользуясь этим правилом, прогиб на левом конце консоли (см. рис. 7.13). Вычислим средние ординаты на эпюрах M_p и M_1.

Получим $c_p = \dfrac{ql^2}{8}$ и $c_1 = \dfrac{l}{2}$. Тогда

$$\Delta_{1p} = \frac{1}{EJ}\cdot\frac{l}{6}\left(0\cdot 0 + 4\frac{ql^2}{8}\frac{l}{2} + \frac{ql^2}{2}l\right) = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

7.6. Балки переменного сечения

Для определения размеров поперечного сечения балки, используется условие прочности в виде

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_{н.о.}} \le R.$$

Понятно, что в балке постоянного поперечного сечения максимальные нормальные напряжения будут реализоваться только в сечении, где изгибающий момент максимален. Во всех остальных сечениях нормальные напряжения в крайних волокнах будут меньше. Это указывает на то, что балку можно запроектировать более экономичной по расходу материала и менее массивной, если допустить возможность изменения ее сечений по длине.

Балка, у которой максимальные нормальные напряжения во всех поперечных сечениях одинаковы, называется *балкой равного сопротивления изгибу*. Установим правило, по которому можно определить закон изменения размеров по длине балки равного сопротивления.

Пусть $M(x)$ и $W(x)$ – изгибающий момент от заданной нагрузки и момент сопротивления в произвольном сечении балки равного сопротивления; M_0 и W_0 – то же для некоторого определенного сечения. Так как в балке равного сопротивления $\sigma_{max} = \text{const}$, то имеем

$$\frac{M(x)}{W(x)}=\frac{M_0}{W_0},$$

откуда

$$W(x)=M(x)\frac{W_0}{M_0}. \tag{7.11}$$

Полученное выражение, называемое *уравнением балки равного сопротивления* определяет закон изменения момента сопротивления в балке равного сопротивления. Как видно, в балке равного сопротивления момент сопротивления $W(x)$ должен быть пропорционален изгибающему моменту $M(x)$.

При проектировании балки равного сопротивления требуемый закон изменения $W(x)$ можно обеспечить разными способами. Например, в случае прямоугольного сечения можно изменять только ширину b при h = const или изменять только высоту h при b = const или соответствующим образом изменять оба размера.

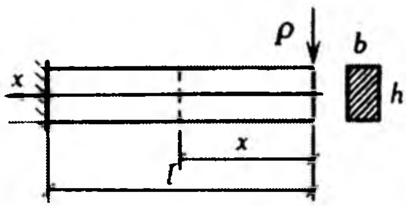


Рис. 7.16

Рассмотрим пример проектирования балки равного сопротивления, показанной на рис. 7.16, в случае постоянной высоты h = const и переменной ширины $b(x)$. Обозначим: b_0 – ширина балки в заделке; x – расстояние от свободного конца до произвольного сечения балки. Тогда уравнение (7.11) в развернутом виде:

$$\frac{b(x)h^2}{6}=(-Px)\cdot\frac{b_0h^2}{6(-Pl)},$$

откуда

$$b(x)=b_0\frac{x}{l}.$$

Итак, в рассмотренном примере балка равного сопротивления имеет форму клина с нулевой шириной под силой на свободном конце. Но так как балка должна также удовлетворять условию прочности по касательным напряжениям, ширина ее не может быть меньше, чем b_{min}. Размер b_{min} можно определить (для прямоугольного сечения)из равенства

$$\tau_{max}=\frac{3}{2}\frac{P}{hb_{min}}=R_{cp},$$

откуда

$$b_{min}=\frac{3P}{2hR_{cp}}.$$

Окончательный вид балки равного сопротивления показан на рис. 7.17. Отметим, что на левом участке балки, где ширина меняется, имеем

$\sigma_{max} = R$, $\tau_{max} \le R_{cp}$, на правом $\sigma_{max} \le R$, $\tau_{max} = R_{cp}$, а на границе участков $\sigma_{max} = R$, $\tau_{max} = R_{cp}$.

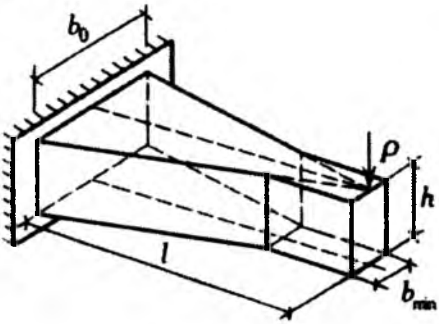


Рис. 7.17

Очевидно, что балка равного сопротивления является таковой лишь для той нагрузки, под действие которой она запроектирована. Иными словами, форма балки равного сопротивления есть функция схемы нагружения.

По сравнению с балками постоянного сечения балки равного сопротивления не только экономичны по расходу материала, но и более деформативны. Рассмотрим проектирование балки равного сопротивления, схема которой показана на рис. 7.18, *а*. Если выполнить балку из листа постоянной толщины (то есть h = const) и переменной ширины, то закон изменения ее ширины, как и в рассматриваемом выше примере, будет следовать эпюре моментов (рис. 7.18, *б*), то есть вид балки в плане (с учетом требо вания $\tau_{max} \le R_{cp}$) окажется таким, как он изображен на рис. 7.18, *в*. Не изменяя грузоподъемности этой балки, можно разрезать ее на полоски, показанные на рис. 7.18, *в* штриховыми линиями, и поочередно уложить полоски друг на друга, исключая трение между ними. Полученная таким образом многослойная балка (рис. 7.18, *г*) представляет собой так называемую листовую рессору, применяемую благодаря ее повышенной деформативности, в технических устройствах для смягчения ударных воздействий,.

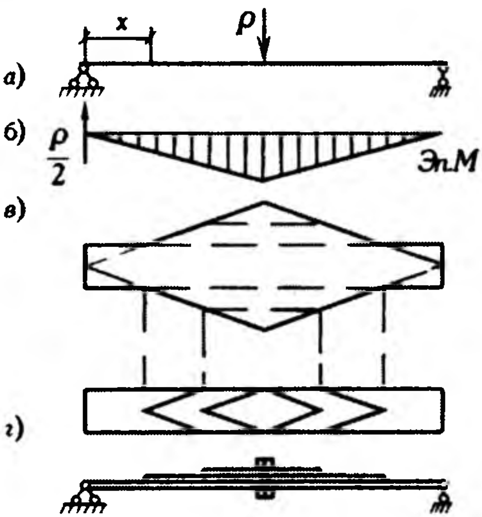


Рис. 7.18

По сравнению с балками постоянного сечения определение перемещений в балках переменного сечения (в том числе и в балках равного сопротивления) обладает некоторыми особенностями.

Дифференциальное уравнение изогнутой оси (7.5, *а*) для балки переменного сечения имеет вид

$$\upsilon'' = \frac{M(x)}{EJ(x)}. \quad (7.12)$$

Его можно преобразовать к такой форме:

$$EJ_0\upsilon'' = M(x)\frac{J_0}{J(x)}, \quad (7.13)$$

где J_0 – некоторый принятый постоянным момент инерции. Например, для балки равного сопротивления на рис. 7.16 можно принять в качестве J_0 момент инерции в заделке, то есть $J_0 = b_0h^3/12$. Тогда

$$M(x)\frac{J_0}{J(x)} = (-Px)\frac{b_0h^3 \cdot 12}{12b(x)h^3} = -Pl,$$

так как $b(x) = b_0x/l$ (без учета постоянства сечения на конце балки).

Дифференциальное уравнение (7.13) будет таким:

$$EJ_0\upsilon'' = -Pl.$$

Решая это уравнение, получим

$$EJ_0\upsilon' = -Plx + C; \qquad EJ_0\upsilon = -\frac{1}{2}Plx^2 + Cx + D.$$

Граничные условия: при $x = l$ $\upsilon' = 0$ и $\upsilon = 0$, отсюда $C = Pl^2$; $D = -\frac{1}{2}Pl^3$.

Окончательно

$$EJ_0\upsilon = -\frac{1}{2}Plx^2 + Pl^2x - \frac{1}{2}Pl^3.$$

Прогиб конца консоли (при x = 0) $\upsilon_{max} = -\frac{Pl^3}{2EJ_0}$. В балке постоянного сечения при $J = J_0$ прогиб конца консоли $\upsilon_{max} = -\frac{Pl^3}{3EJ}$ (см. пример расчета в начале главы). Таким образом, как и ожидалось, по сравнению с балкой постоянного сечения балка равного сопротивления оказалась более податливой (в данном примере – в 1,5 раза).

Для балок переменного сечения метод начальных параметров и универсальную формулу непосредственно использовать нельзя, так как при рассмотрении этих способов предполагалась постоянная по длине балки жесткость EJ.

Для нахождения перемещений в балках переменного сечения можно использовать интеграл Мора

$$\Delta_{1p} = \sum\int_0^l \frac{M_pM_1}{EJ(x)}dx.$$

Этот интеграл вычисляется либо непосредственно, либо путем "перемножения" эпюр по правилу Верещагина или Симпсона, но в этом случае необходима корректировка одной из эпюр, ординаты которой умножаются на коэффициент, равный $k = \frac{J_0}{J(x)}$.

Вычислим, например, при помощи интеграла Мора прогиб в центре рессоры (см. рис. 7.18). На левом участке уравнение изгибающего момента $M_p(x) = \frac{P}{2}x$. Изгибающий момент на этом же участке от единичной силы, приложенной в центре, $M_1 = \frac{1}{2}x$; момент инерции на левом участке $J(x) = J_0 \frac{x \cdot 2}{l}$, где $J_0 = \frac{b_0 h_0^3}{12}$ – момент инерции среднего сечения. Так как балка симметрична, то

$$\Delta_{1p} = 2\int_0^{l/2} \frac{\frac{P}{2}x \cdot \frac{1}{2}x \cdot l}{EJ_0 \cdot 2x}\,dx = \frac{Pl^3}{32EJ_0}.$$

Если бы балка имела постоянное поперечное сечение, то ее прогиб в центре (см. таблицу 7.1) $v_{max} = Pl^3/48EJ$, т.е. был бы в полтора раза меньше.

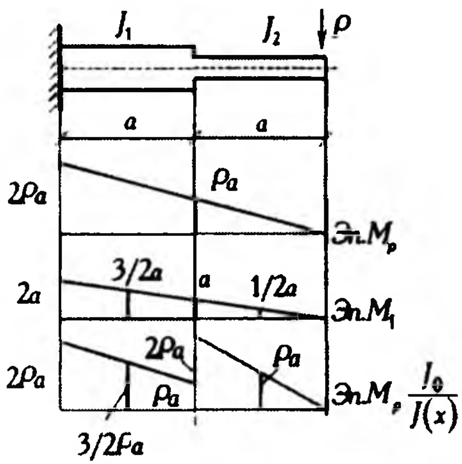


Рис. 7.19

Рассмотрим балку, у которой поперечное сечение меняется ступенчато, т.е. "скачком" (рис. 7.19). Определим прогиб под силой P. Построим эпюры M_p и M_1 от единичной силы $P_1 = 1$, приложенной вместо силы P. Примем $J_1 = J_0$. Тогда коэффициент k_1 на участке, где $J_1 = J_0$ будет равен единице, а на втором (правом) участке $k_2 = \frac{J_1}{J_2}$. Умножим ординаты эпюры M_p на этот коэффициент и получим эпюру $M_p \cdot \frac{J_0}{J(x)}$.

Пусть, например, $k_2 = 2$; осталось "перемножить" полученную эпюру на единичную M_1. Здесь 2 участка. "Перемножая" по правилу Симпсона, получим

$$EJ_1\Delta_{pp} = \frac{a}{6}\left(2Pa \cdot 2a + 4 \cdot \frac{3}{2}Pa \cdot \frac{3}{2}a + Pa \cdot a\right) +$$

$$+\frac{a}{6}\left(2Pa \cdot a + 4 \cdot Pa \cdot \frac{1}{2}a + 0\right) = 3Pa^3.$$

Следовательно,

$$\Delta_{pp} = \frac{3Pa^3}{EJ_1}.$$

При расчете балок переменного сечения предполагалось, что можно использовать полученные для балок постоянного сечения основные формулы, считая переменными лишь геометрические характеристики сечений. Расчеты, выполненные методами теории упругости, показывают, что при плавном изменении размеров поперечного сечения формулы сопротивления материалов для нормальных напряжений дают результаты, близкие к действительным. Распределение же касательных напряжений может существенно отличаться от того, каким оно получается по формуле Журавского.

7.7. Статически неопределимые балки

В главе 2 рассматривались статически неопределимые стержневые системы с элементами, работающими на растяжение (сжатие). Наряду с ними в строительстве и машиностроении нашли широкое применение аналогичные системы с изгибаемыми элементами, в частности, статически неопределимые балки.

В этих балках число опорных реакций превышает число возможных уравнений равновесия для данной системы сил на параметр m, который называется степенью статической неопределимости. В таких случаях говорят, что в данной конструкции имеется m лишних связей.

Так же, как и в случае статически неопределимых систем с растянутыми (сжатыми) элементами, при расчете статически неопределимых балок необходимо использовать деформационные уравнения. Составление этих уравнений основано на использовании *метода сил* (иногда называемого *методом сравнения перемещений*), общего для расчета любых статически неопределимых систем, в том числе и тех, которые рассматривались в главе 2.

Метод сил предполагает разделение всего расчета на два этапа:

1. Путем отбрасывания лишних связей из заданной системы образуется так называемая *основная система*. Так как число лишних связей равно степени статической неопределимости, их удаление делает основную систему статически определимой. Основная система загружается заданными внешними силами и реакциями отброшенных лишних связей – *лишними неизвестными*, также выступающими в роли внешних сил. Далее записываются условия того, что основная система, загруженная указанным образом; эквивалентна по перемещениям (а значит и по деформациям, напряжениям) исходной системе. Запись этих условий эквивалентности и представляет собой деформационные уравнения, число которых всегда будет равно числу лишних неизвестных, то есть степени статической неопределимости исходной системы. Решая деформационные уравнения, определяют значения лишних неизвестных.

Этот этап называется *раскрытием статической неопределимости*.

2. Имея вычисленные на первом этапе значения лишних неизвестных, а также заданные внешние силы, производят расчет статически определимой основной системы. В силу выполненных на первом этапе расчета условий эквивалентности основной системы и заданной конструкции полученные результаты (деформации, напряжения, внутренние усилия и т.п.) относятся к исходной статически неопределимой системе.

Так как второй этап выполняется по обычным правилам расчета статически определимых систем, интерес представляет первый этап – применение метода сил для раскрытия статической неопределимости систем.

Порядок расчета статически неопределимой системы проиллюстрируем на примере статически неопределимой балки, показанной на рис. 7.20, *а*.

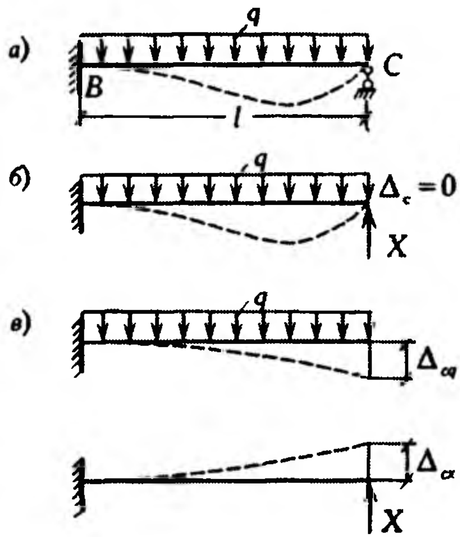


Рис. 7.20

Принимая в качестве лишней связи правый опорный стержень, получим основную систему, нагруженную заданными силами и лишней неизвестной (рис. 7.20, *б*). Далее, используя метод сил, запишем деформационное уравнение, выражающее эквивалентность заданной статически неопределимой балки и нагруженной основной системы. На рис.7.20,*в* показаны деформированные виды основной системы от воздействия заданной нагрузки и лишней неизвестной X – реакции отброшенной связи. Очевидно, что эквивалентность статически неопределимой балки и основной системы будет достигнута тогда, когда результирующий прогиб в основной системе на конце консоли от внешней нагрузки q и лишней неизвестной X будет равен прогибу в том же сечении заданной балки, то есть равен нулю. Поэтому деформационное уравнение имеет вид: $\Delta_c = 0$. Обозначая: Δ_{cq} – прогиб в точке C основной системы от внешних сил; Δ_{cx} – то же от лишней неизвестной X и принимая $\Delta_{cx} = \delta_{11} X$, где δ_{11} – прогиб от единичного значения лишней неизвестной, получим деформационное уравнение в развернутом виде:

$$\delta_{11}X + \Delta_{cq} = 0,$$

откуда $X = -\Delta_{cq} / \delta_{11}$.

Используя таблицу прогибов 7.1 и данные примера (см. рис. 7.1), получим $\Delta_{cq} = -\dfrac{ql^4}{8EJ}$, $\delta_{11} = \dfrac{l^3}{3EJ}$, следовательно

$$X = \frac{3}{8}ql \ .$$

Итак, при использовании метода сил каждое деформационное уравнение выражает мысль, что *в основной системе перемещение по направлению лишнего неизвестного (от всех заданных сил и лишних неизвестных) равно перемещению в той же точке заданной системы.*

Заметим, что статически определимую основную систему можно образовать путем отбрасывания не только внешних опорных связей, но и так называемых внутренних связей. На рис. 7.21, *а* изображен фрагмент балки, на котором указано произвольное сечение *1–1*. Если балку разрезать по этому сечению, то как это видно на рис. 7.21. *б*, одна часть балки относительно другой будет обладать тремя степенями свободы. Следовательно, можно считать, что сплошность балки обеспечивается в сечении *1–1* условным наличием трех связей между частями балки (рис. 7.21, *в*). Эти связи называются внутренними. Отбрасывание одной внутренней связи приводит к тому же результату, что и отбр. сывание внешней – снижает степень статической неопределимости на единицу. Например, отбрасывание одной связи, препятствующей взаимному повороту двух смежных сечений, делает такой поворот возможным так же, как при шарнирном соединении двух частей балки(рис. 7.21, *г*). Следовательно, введение шарнира в любом месте оси балки (рис. 7.21, *д*) соответствует отбрасыванию одной связи и снижает степень статической неопределимости балки на единицу. В этом случае лишней неизвестной, то есть реакцией отброшенной связи, является изгибающий момент, прикладываемый к обеим частям балки в сечениях по

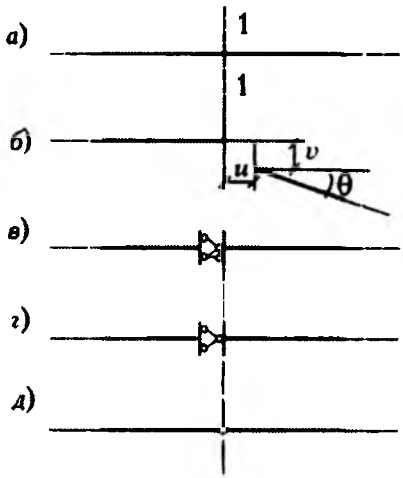
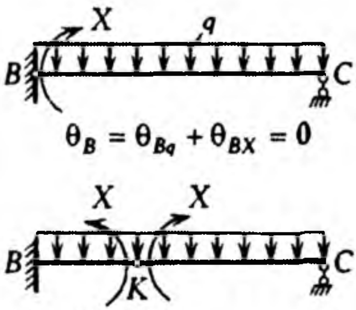


Рис. 7.21

обе стороны от шарнира, а смысл деформационного уравнения состоит в равенстве углов поворота сечений слева и справа от шарнира (то есть в отсутствии угла взаимного поворота этих сечений, что и имело место в исходной балке до введения шарнира).

На рис. 7.22 показаны образованные введением шарнира два варианта основной системы для ранее рассмотренной балки (см. рис. 7.20, *а*) и приведены соответствующие деформационные уравнения.

Если степень статической неопределимости балки равна двум или более, то основная система образуется отбрасыванием такого же количества лишних связей, и лишние неизвестные определяются путем решения системы деформационных уравнений. Например, для дважды статически неопределимой балки, изображенной на рис. 7.23, *а*, возможный вариант основной системы показан на рис. 7.23, *б*, а деформационные уравнения имеют вид:



$\theta_B = \theta_{Bq} + \theta_{BX} = 0$

$\theta_K^{лев} = \theta_K^{пр}$

Рис. 7.22

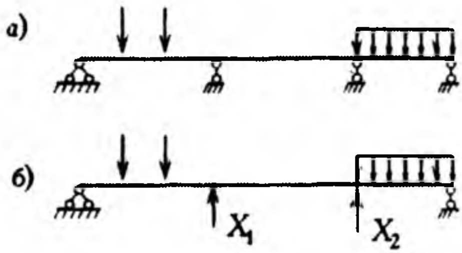


Рис. 7.23

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} = 0;$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} = 0.$$

где δ_{ij} – перемещение (прогиб) в точке i (i = 1 или 2) от силы $X_j = 1$, приложенной в точке j; Δ_{iP} – перемещение в точке i от всех заданных внешних сил. Значения δ_{ij} и Δ_{iP} могут быть определены методом начальных параметров или методом Мора.

ГЛАВА 8. КРУЧЕНИЕ

8.1. Крутящий момент

Кручением называется такой случай простой деформации стержня, при которой внутренние усилия в поперечном сечении статически эквивалентны паре сил с моментом относительно продольной оси стержня. Этот момент называют крутящим.

Прежде чем перейти к вопросам определения крутящих моментов, обратим внимание на два следующих положения.

1. В реальных технических устройствах деформация кручения стержней, как правило, сопровождается другими деформациями (например, изгибом). Поэтому деформация, связанная с действием только крутящего момента иногда называется *чистым кручением* (вспомним термины "чистый сдвиг", "чистый изгиб").

2. Несмотря на кажущуюся близость следует различать два понятия, выражаемых терминами "вращение" и "кручение". Первый из них является кинематическим, определяющим движение твердого тела. Второй описывает деформированное состояние, не зависящее от того, находится ли данный стержень в состоянии вращения или покоя. Важно, чтобы рассматриваемый стержень под действием всех приложенных к нему сил находился в равновесном состоянии.

Установим правило вычисления крутящих моментов в сечениях стержня. Общий метод определения любых внутренних усилий в сечении нагруженного стержня – метод сечений – изложен в главе 1. Применим его для вычисления крутящего момента $M_{кр}$ в указанном поперечном сечении на примере (рис. 8.1, *а*). Примем для определенности следующее правило знаков для крутящих моментов: будем считать их положительными, если они направлены против часовой стрелки при взгляде со стороны внешней нормали к поперечному сечению.

Мысленно разрежем сечением стержень на две части и рассмотрим равновесие каждой из них под действием приложенных к ним внешних моментов (т.е. моментов внешних пар) и положительного крутящего момента (рис. 8.1, *б* и 8.1, *в*). Из условия равновесия левой части стержня имеем:

$$-m_1-m_2+M_{кр}=0,$$

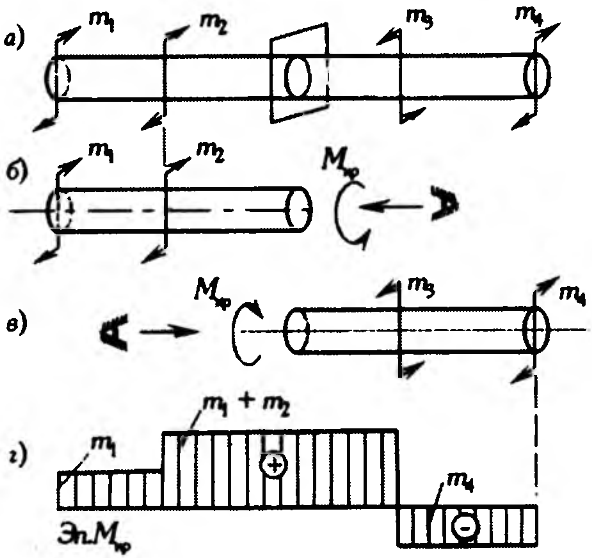


Рис. 8.1

откуда

$$M_{кр}=m_1+m_2. \quad (а)$$

Из условия равновесия правой части стержня:

$$M_{кр}-m_3+m_4=0,$$

откуда

$$M_{кр}=m_3-m_4. \quad (б)$$

Легко показать, что выражения (*а*) и (*б*) дают одинаковые значения крутящего момента. Действительно, условие равновесия целиком всего стержня имеет вид:

$$m_1+m_2-m_3+m_4=0,$$

следовательно,

$$m_1+m_2=m_3-m_4,$$

что и доказывает одинаковый результат вычисления крутящего момента слева или справа от сечения. Отметим, что такое же положение справедливо для любых внутренних силовых факторов.

Из рассмотренного примера видно, что деформация чистого кручения возникает только под влиянием пар сил, действующих в плоскостях перпендикулярных продольной оси стержня. Любое иное силовое воздействие вызовет в сечениях стержня дополнительно усилия N, Q или M, то есть кручение уже не будет чистым.

Выражения (*а*) и (*б*) показывают, что для вычисления крутящего момента в сечениях стержня нет необходимости каждый раз записывать уравнения равновесия. Достаточно использовать следующее правило.

Крутящий момент в произвольном сечении стержня равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, взятых по одну сторону от сечения, относительно продольной оси. При этом моменты внешних сил должны учитываться положительными или отрицательными в зависимости от их направления, каким оно видится, если смотреть на оставшуюся часть стержня со стороны отброшенной части. При принятом правиле знаков для крутящего момента внешние моменты считаются положительными, если они направлены по ходу часовой стрелки (см. выражения (*а*) и (*б*)).

Таким образом, если известны моменты внешних пар $m_1, m_2, \ldots$, то, используя приведенное правило, в любом сечении стержня можно вычислить крутящий момент и построить эпюру $M_{кр}$ (рис. 8.1, *г*).

При расчете вращающихся валов машин моменты внешних пар бывают неизвестны, но заданы мощности, передаваемые на вал в определенных сечениях и снимаемые с него, а также угловая скорость вращения вала $\omega = \frac{\pi n}{30}$, где n – число оборотов вала в минуту. Пусть в некотором сечении вала передается мощность W *кВт*. Так как работа, совершаемая парой сил, равна произведению момента пары на угол поворота, то получим:

$$1000\ W = 1000 m \cdot \frac{\pi n}{30} ,$$

где m – момент пары в *кН·м*. Тогда формула момента внешней пары, приложенной к стержню, имеет вид:

$$m = 9{,}55 \frac{W}{n} , \tag{8.1}$$

где мощность W выражена в *кВт*, n – в *об/мин*.

8.2. Кручение стержней круглого поперечного сечения. Напряжения и деформации

В курсе сопротивления материалов основное внимание уделяется кручению стержней с поперечным сечением в форме сплошного круга или кольца, очерченного двумя концентрическими окружностями. Объясняется это тем, что, во-первых, среди стержней, подверженных кручению, наиболее широко распространены именно круглые стержни (валы). Во-вторых, только для круглых стержней оказываются справедливыми следующие положения, облегчающие решение задачи анализа напряженно-деформированного состояния стержня при кручении:

1) все поперечные сечения круглого стержня при кручении остаются плоскими и только поворачиваются вокруг продольной оси;

2) радиусы поперечных сечений не искривляются;

3) расстояния между поперечными сечениями не изменяются.

Представим круглый стержень в виде совокупности множества продольных волокон. Тогда, на основании третьей гипотезы, можно сделать вывод об отсутствии линейных деформаций этих волокон и, как следствие, равенстве нулю нормальных напряжений в сечениях этих волокон, а значит и в поперечных сечениях стержня. Итак, приходим к важному выводу: *при чистом кручении круглого стержня в его поперечных сечениях отсутствуют нормальные напряжения*.

Касательные напряжения в поперечном сечении стержня – есть; далее рассматривается задача нахождения закона их распределения по сечению.

На рис. 8.2. показано поперечное сечение стержня с крутящим моментом $M_{кр}$. Внутренние касательные силы τdA непрерывно распределены по сечению и направлены перпендикулярно радиусу-вектору ρ, проведенному из центра в данную точку. Учитывая, что $M_{кр}$ – результирующий момент всех распределенных по сечению внутренних сил, выразим $M_{кр}$ в таком виде:

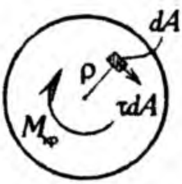


Рис. 8.2

$$M_{кр} = \int_A \tau\rho dA . \qquad (8.2)$$

Равенство (8.2) является тем условием, которому должен удовлетворять искомый закон $\tau = \tau(\rho)$. Однако найти выражение $\tau = \tau(\rho)$, используя только уравнение (8.2), невозможно, поскольку это интегральное выражение можно тождественно удовлетворить при многих различных законах $\tau = \tau(\rho)$. Но выражение (8.2) есть статическое уравнение равновесия отсеченной части стержня, поэтому определение закона $\tau = \tau(\rho)$ представляет собой статически неопределимую задачу, требующую для своего решения составления деформационных уравнений. Для этой цели проведем анализ деформаций при кручении всего стержня и его отдельных элементов.

На рис 8.3, *а* изображен фрагмент стержня, испытывающего деформацию чистого кручения. Нижнее сечение стержня неподвижно, а к верхнему приложен крутящий момент, передаваемый от верхней, непоказанной на рисунке части стержня. На боковой поверхности стержня до начала деформации кручения проведены следующие линии: две образующие, расположенные очень близко одна от другой, и два следа поперечных сечений

I–I и II–II, расстояние между которыми бесконечно мало. Можно счита отрезки ab и cd прямыми, а прямоугольник $abcd$ – плоским.

После того, как на показанный фрагмент стержня воздействует крут щий момент, происходит следующее (рис. 8.3, *б*):

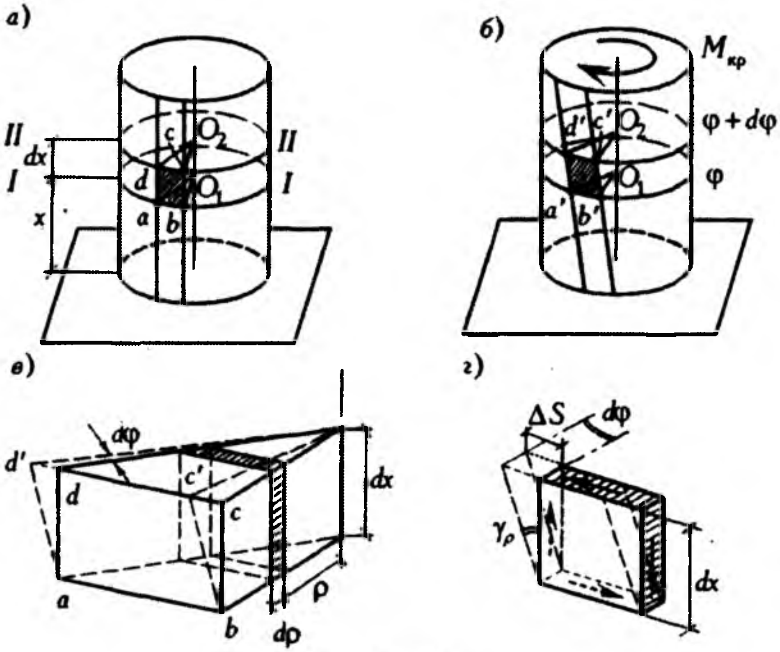


Рис. 8.3

1) все поперечные сечения, оставаясь плоскими, поворачиваются на некоторые углы (*углы закручивания*) вокруг продольной оси: если угол закручивания сечения I–I равен φ, тогда сечение II–II повернется на $\varphi + d\varphi$;

2) выделенные образующие искривляются, превращаясь в винтовые линии.

Рассмотрим деформацию элемента, образованного прямоугольником $abcd$ и радиусами aO_1, bO_1 в сечении I–I и cO_2, dO_2 в сечении II–II (см. рис. 8.3, *а*). До деформации этот элемент имеет форму клина; после деформации клин перекашивается таким образом, что относительно нижней грани верхняя грань поворачивается вокруг продольной оси на угол $d\varphi$ (рис. 8.3, *в*). При этом ребра клина, совпадающие с радиусами

$a'O_1$, $b'O_1$, $c'O_2$ и $d'O_2$, остаются прямыми. Также прямыми принимаются отрезки винтовой линии $a'd'$ и $b'c'$ длиной dx каждый.

Наконец, двумя бесконечно близкими плоскостями, параллельными плоскости $abcd$, выделим из клина элемент на расстоянии ρ от оси стержня. Этот элемент будем считать прямоугольным параллелепипедом, так как две его грани, лежащие в плоскостях bcO_2O_1 и adO_2O_1, можно полагать параллельными.

Рассмотрим деформацию этого элемента при кручении стержня (рис. 8.3, *г*). Как видно, элемент испытывает деформацию чистого сдвига в направлении, перпендикулярном радиусу-вектору ρ, проведенному в плоскости поперечного сечения. Так как цилиндрический стержень состоит из бесконечного множества подобных элементов, то приходим к заключению, что деформация кручения стержня тождественна совокупности чистых сдвигов составляющих стержень элементарных прямоугольных параллелепипедов. При этом для любых точек сечений направления сдвигов, а следовательно и вызывающих их касательных напряжений, перпендикулярны соответствующим радиусам-векторам, что и было учтено на рис. 8.2.

Далее обратимся к количественной оценке деформации элемента, изображенного на рис. 8.3, *г*. Абсолютный сдвиг его можно выразить двояким образом: 1) $\Delta s = \rho d\varphi$ – из рассмотрения поворота сечения *II–II* по отношению к сечению *I–I*; 2) $\Delta s = \gamma_\rho dx$, где γ_ρ – угол сдвига данного элемента.

Следовательно, искомое деформационное уравнение имеет вид: $\rho d\varphi = \gamma_\rho dx$, откуда

$$\gamma_\rho = \frac{d\varphi}{dx}\rho.$$

Используя закон Гука при сдвиге, получим

$$\tau = G\gamma_\rho = G\frac{d\varphi}{dx}\rho. \qquad (a)$$

Так как в последнем выражении $\dfrac{d\varphi}{dx}$ неизвестно, этой формулой невозможно пользоваться для нахождения τ. Подставляя полученную формулу (a) в уравнение (8.2), найдем

$$M_{кр} = \int_A G\frac{d\varphi}{dx}\,\rho^2 dA = G\frac{d\varphi}{dx}\int_A \rho^2 dA.$$

Поскольку $\int\limits_A \rho^2 dA = J_\rho$ – полярный момент инерции сечения, окончательно получим

$$G\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{кр}}{J_\rho} \tag{8.3}$$

и, подставляя $Gd\varphi / dx$ в выражение τ, будем иметь

$$\tau = \frac{M_{кр}}{J_\rho}\rho. \tag{8.4}$$

Полученная формула описывает закон распределения касательных напряжений в поперечном сечении круглого стержня при кручении. Вид эпюр касательных напряжений вдоль радиусов для сплошного и кольцевого сечений показан на рис. 8.4. Стрелки указывают направление напряжений в точках сечений.

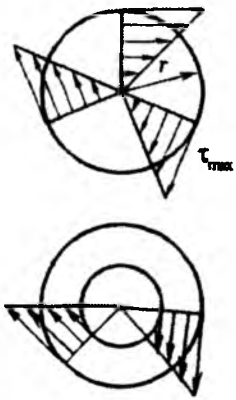


Рис. 8.4

Как видно, наибольших значений касательные напряжения достигают при $\rho = r$, т.е. в точках на контуре. При этом

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{J_\rho} r = \frac{M_{кр}}{\left(\frac{J_\rho}{r}\right)}.$$

Обозначая $J_\rho / r = W_\rho$ – полярный момент сопротивления сечения, получим

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_\rho}. \tag{8.5}$$

Для сплошного круга диаметром D $J_\rho = \frac{\pi D^4}{32}$ и $W_\rho = \frac{\pi D^3}{16}$. Для кольцевого сечения $J_\rho = \frac{\pi}{32}\left(D^4 - d^4\right) = \frac{\pi D^4}{32}\left(1 - \alpha^4\right)$, где $\alpha = d / D$. Тогда $W_\rho = \frac{\pi D^3}{16}\left(1 - \alpha^4\right)$. Отметим, что также, как это было с осевыми моментами сопротивления, полярный момент сопротивления составной фигуры не равен сумме (или разности) полярных моментов сопротивления отдельных составляющих фигур.

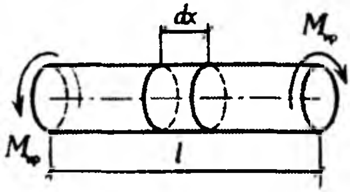


Рис. 8.5

Для определения взаимного угла закручивания φ между двумя сечениями, отстоящими на расстоянии l одно от другого, проделаем следующее: весь участок стержня разделим на множество бесконечно коротких элементов длиной dx каждый (рис. 8.5); вычислим углы закручивания $d\varphi$ для каждого элемента, а затем их суммируем, т.е.

$$\varphi = \int_l d\varphi .$$

Для нахождения $d\varphi$ воспользуемся формулой (8.3):

$$d\varphi = \frac{M_{кр}\, dx}{GJ_\rho},$$

откуда при постоянных G и J_ρ по длине l:

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_{кр}\, dx}{GJ_\rho} = \frac{1}{GJ_\rho}\int_0^l M_{кр} dx .$$

Если по длине l крутящий момент постоянный, то $M_{кр}$ также можно вынести за интеграл. Тогда

$$\varphi = \frac{M_{кр}\, l}{GJ_\rho} \qquad (8.6)$$

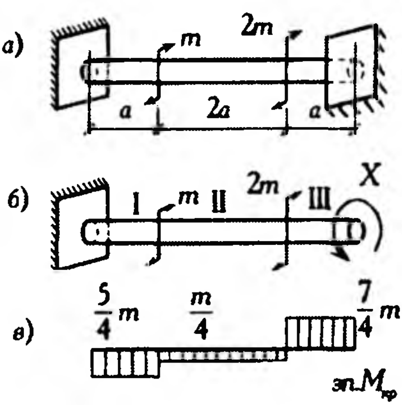


Рис. 8.6

Эта формула может быть использована и в том случае, когда на интересующем участке стержня эп. $M_{кр}$ состоит из нескольких участков, в каждом из которых $M_{кр}$=const (см., например, рис. 8.1, г). В этом случае формулу (8.6) можно применить для каждого отдельного участка, а затем результаты алгебраически сложить.

Обратим внимание, что по своей структуре формула (8.6) напоминает формулы удлинения Δl при растяжении (сжатии), а также абсолютного сдвига Δs при чистом сдвиге и прогиба балки v при изгибе. Произведение GJ_ρ называется *жесткостью при кру*чении или *крутильной жесткостью*.

Формула угла закручивания (8.6) может использоваться при решени статически неопределимых задач, связанных с кручением круглых стерж ней. Рассмотрим в качестве примера следующую задачу. Стержень, посто янного сечения, показанный на рис. 8.6, *а* один раз статически неопреде лим, поскольку при двух неизвестных опорных моментах имеется тольк одно уравнение равновесия – равенство нулю суммы моментов всех сил от носительно продольной силы. Для записи деформационного уравнения об разуем основную систему, отбросив одно из опорных закреплений (рис 8.6, *б*) и заменив его влияние действием реактивного момента X. Дефор мационное уравнение будет выражать мысль, что в принятой статическ определимой системе суммарный угол закручивания на правом конц стержня от всех действующих сил (от моментов m, $2m$ и X) равен нулю.

Крутящие моменты на участках:

$$M^{\mathrm{I}}_{\text{кр}} = -m - 2m + X = -3m + X;$$

$$M^{\mathrm{II}}_{\text{кр}} = -2m + X; \qquad M^{\mathrm{III}}_{\text{кр}} = +X.$$

Тогда угол закручивания на правом конце:

$$\varphi = \frac{M^{\mathrm{I}}_{\text{кр}}\, a}{GJ_\rho} + \frac{M^{\mathrm{II}}_{\text{кр}}\, 2a}{GJ_\rho} + \frac{M^{\mathrm{III}}_{\text{кр}}\, a}{GJ_\rho} = \frac{a}{GJ_\rho}\left[-3m + X - 2(2m - X) + X\right] = 0,$$

откуда $X = \dfrac{7}{4}m$.

После определения опорного момента X строится эпюра крутящих моментов, показанная на рис. 8.6, *в*.

Для проверки условия прочности необходимо иметь прочностные характеристики материала: допускаемое касательное напряжение $[\tau]$ при расчете по методике допускаемых напряжений (в машиностроении) или расчетное сопротивление срезу $R_{\text{ср}}$ при расчете по предельным состояниям (в строительстве).

Условие прочности имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\text{кр. max}}}{W_\rho} \le [\tau] \qquad (\text{или} \quad R_{\text{ср}}), \tag{8.7}$$

где $M_{\text{кр. max}}$ – максимальный крутящий момент по длине стержня постоянного сечения.

Для проверки условия жесткости стержня задается допускаемое значение относительного угла закручивания $[\varphi / l]$, то есть угла закручивания участка вала единичной длины.

Условие жесткости записывается в виде:

$$\left(\frac{\varphi}{l}\right)_{max} = \frac{M_{кр\ max}}{GJ_\rho} \le \left[\frac{\varphi}{l}\right]. \tag{8.8}$$

8.3. Напряженное состояние круглого стержня при кручении. Потенциальная энергия

Установив распределение касательных напряжений в поперечном сечении стержня, рассмотрим далее продольное сечение, пересекающее стержень по любому его диаметру (рис. 8.7). На основании закона парности касательных напряжений можно заключить, что касательное напряжение в любой точке этого продольного сечения равно по модулю напряжению в той же точке, но в плоскости поперечного сечения. Это положение иллюстрируется на рис. 8.3, г, где горизонтальные площадки принадлежат поперечному сечению, а вертикальные — продольному диаметральному сечению. Следовательно, распределение касательных напряжений вдоль радиуса в плоскости продольного диаметрального сечения также подчиняется формуле (8.4).

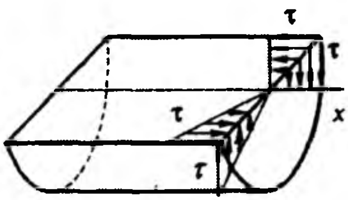


Рис. 8.7

Как известно, при чистом сдвиге главные площадки наклонены под углом 45^0 к площадкам чистого сдвига (см. главы 3 и 4). На рис. 8.8 показан один из элементов, образованный на поверхности закручиваемого стержня главными площадками. Так как во всех точках поверхности стержня ориентация главных площадок будет аналогичной, то траектории главных напряжений при кручении круглого стержня представляют собой

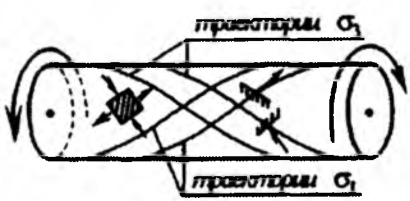


Рис. 8.8

два взаимно ортогональных друг другу семейства винтовых линий, каждая из которых пересекает образующую цилиндра под углом 45^0.

При деформации кручения стержня внешние силы совершают работу, при этом в материале стержня накапливается потенциальная энергия упругих деформаций U, запас которой числено равен работе внешних сил. Для вычисления работы рассмотрим стержень (или участок стержня), один конец которого закреплен от поворота, а ко второму (подвижному) концу приложен крутящий момент $M_{кр}$, увеличивающийся от нуля до конечного значения. В этих условиях работа, совершаемая моментом $M_{кр}$ на угловом перемещении φ, равна $W = 0{,}5 M_{кр} \varphi$ (см. разделы 2.8 и 6.6). Тогда

$$U = \frac{1}{2} M_{кр} \varphi = \frac{1}{2} M_{кр} \frac{M_{кр} l}{G J_\rho} = \frac{M_{кр}^2 l}{2 G J_\rho}. \tag{8.9}$$

Запас потенциальной энергии упругих деформаций при кручении круглого стержня пропорционален квадрату внутренних усилий. Отметим, что аналогичное положение имеет место и для других простых деформаций.

8.4. Кручение стержней при упруго-пластической работе материала

Рассмотрим распределение касательных напряжений в поперечном сечении круглого стрежня, выполненного из упруго-пластического материала, подчиняющегося идеализированной диаграмме Прандтля (рис. 8.9). При углах сдвига $\gamma \le \gamma_т$ материал следует закону Гука, то есть $\tau = G\gamma$; при $\gamma = \gamma_т$ касательное напряжение достигает значения предела текучести $\tau_т$; при $\gamma > \gamma_т$ материал "течет" при постоянном напряжении $\tau = \tau_т$.

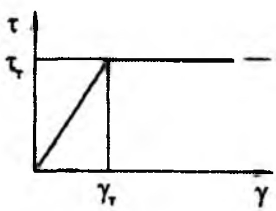


Рис.8.9

Пусть круглый стержень подвергается кручению увеличивающимся моментом $M_{кр}$. На начальной стадии деформации, пока $\gamma_{max} \le \gamma_т$ (γ_{max} – угол сдвига элементов у поверхности стержня), материал всюду испытывает только упругую деформацию, и распределение касательных напряжений по поперечному сечению (рис. 8.10, *а*) отвечает формуле (8.4). Чисто упругая стадия работы стержня заканчивается при $\tau_{max} = \tau_т$ (рис. 8.10, *б*), а соответствующий крутящий момент достигает опасного значения

$$M_{кр}^{оп} = \tau_т W_\rho$$

или – для стержня сплошного круглого сечения

$$M_{кр}^{оп} = \tau_т \frac{\pi D^3}{16} \ . \qquad (8.10)$$

где D – диаметр стержня.

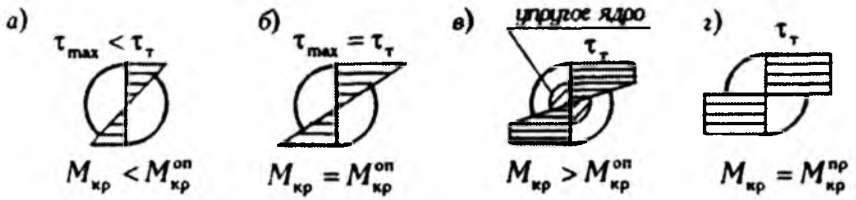


Рис. 8.10

При дальнейшем увеличении крутящего момента $M_{кр}^{оп} < M_{кр} < M_{кр}^{пр}$. ($M_{кр}^{пр}$ – предельный, разрушающий момент) эпюра касательных напряжений в сечении приобретает вид, изображенный на рис. 8.10, *в*. При этом кольцеобразная часть поперечного сечения с $\tau = \tau_т$ образует зону пластических деформаций, а в центральной круговой части находится *упругое ядро*. С увеличением крутящего момента упругое ядро уменьшается, а пластические деформации охватывают все большую часть сечения. Наконец, при $M_{кр} = M_{кр}^{пр}$ текучесть материала происходит по всему сечению (рис. 8.10, *г*), наступает состояние предельного равновесия, соответствующее максимуму несущей способности стержня.

Определим для сплошного круглого сечения значение предельного момента $M_{кр}^{пр}$, учитывая, что при этом во всех точках сечения $\tau = \tau_т$. Используя формулу (8.2), получим

$$M_{кр}^{пр} = \int\limits_A \tau_т \rho dA = \tau_т \int\limits_A \rho dA \ .$$

Для вычисления интеграла примем элементарную площадку в виде кольца радиусом ρ и толщиной $d\rho$ (см. рис. 5.4). Тогда $dA = 2\pi\rho d\rho$ и

$$M_{кр}^{пр} = \tau_т \cdot 2\pi \int\limits_0^{D/2} \rho^2 d\rho = \tau_т \cdot 2\pi (D/2)^3 / 3 = \tau_т \frac{\pi D^3}{12} . \qquad (8.11)$$

Величину $\frac{\pi D^3}{12}$ обозначим $W_\rho^{пл}$ и назовем пластическим моментом сопротивления при кручении. Тогда выражение (8.11) можно представить в виде

$$M_{кр}^{пр} = \tau_т W_\rho^{пл} \ .$$

Коэффициент эффективности $\eta = M_{кр}^{пр} / M_{кр}^{оп} = W_\rho^{пл} / W_\rho$ показывает во сколько раз грузоподъемность стержня, определенная расчетом по стадии разрушения, превышает грузоподъемность, вычисленную при расчете по опасной стадии, соответствующей появлению точек с $\tau = \tau_т$.

Для круглого стержня сплошного сечения

$$\eta = \frac{\pi D^3}{12} : \frac{\pi D^3}{16} = 1{,}33,$$

то есть грузоподъемность повышается на 33%.

Можно показать, что для стержня с кольцевым сечением $1 < \eta < 1{,}33$.

В заключение отметим, что изложенная теория кручения стержней из упруго пластического материала является приближенной, так как диаграмма Прандтля отличается от действительной отсутствием зоны упрочнения.

8.5. Цилиндрические пружины с малым шагом витка

Одним из примеров практического применения теории кручения круглых стержней является расчет пружин. Здесь рассмотрены пружины, у которых ось стержня образует винтовую линию на поверхности цилиндра диаметром D (рис. 8.11, *а*), а витки имеют малый (по сравнению с D) шаг. Из условий равновесия отсеченной части (рис. 8.11, *б*) нетрудно установить, что в поперечном сечении стержня пружины возникает крутящий момент $M_{кр}$ и поперечная сила Q.

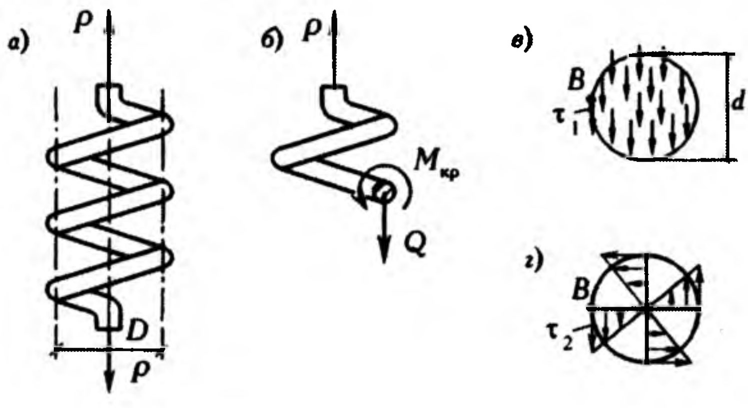


Рис. 8.11

Обычно при расчете пружин принимаются два рабочих допущения:

1) распределение касательных напряжений от действия поперечной силы считается равномерным по площади сечения стержня (т.е. так как, при расчете заклепок на срез (см. рис. 8.11, *в*));

2) распределение касательных напряжений при кручении, полученное для прямолинейного стержня, распространяются на пружину с осью в виде винтовой линии (см. рис. 8.11, *г*).

Очевидно, что наиболее опасное место сечения, где результирующее касательное напряжение достигает максимального значения, находится на внутреннем контуре в точке B. Здесь напряжения: от сдвига силой $Q = P$

$$\tau_1 = \frac{Q}{A} = \frac{P}{\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)}$$

и от кручения моментом $M_{кр} = \dfrac{PD}{2}$

$$\tau_2 = \frac{M_{кр}}{W_\rho} = \frac{PD}{2\left(\frac{\pi d^3}{16}\right)} ,$$

где d – диаметр стержня пружины.

В точке B напряжения τ_1 и τ_2 направлены в одну сторону, поэтому результирующее напряжение

$$\tau_{max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{8PD}{\pi d^3} = \frac{8PD}{\pi d^3}\left(\frac{d}{2D} + 1\right) .$$

Так как $d << 2D$, то первым слагаемым можно пренебречь. Это значит, что $\tau_1 << \tau_2$, то есть *основной деформацией стержня пружины является кручение*.

Поэтому можно принять, что

$$\tau_{max} \approx \tau_2 = \frac{8PD}{\pi d^3} .$$

Тогда условие прочности стержня пружины, по принятой в машиностроении методике допускаемых напряжений имеет вид:

$$\tau_{max} = \frac{8PD}{\pi d^3} \le [\tau] . \qquad (8.12)$$

Важной характеристикой пружины является ее удлинение (или укорочение) от действия заданной силы P. Определим удлинение λ, приравнивая работу внешней силы, совершаемую на удлинении пружины, и значение потенциальной энергии упругих деформаций, накопленной в пружине от начала нагружения. Используя формулу (8.9) и учитывая, что общая длина стержня пружины $l = \pi D n$, где n – число витков пружины, будем иметь:

$$\frac{1}{2} P\lambda = \frac{M_{кр}^2}{2GJ_\rho} \cdot \pi D n .$$

Так как $M_{кр} = PD/2$, а $J_\rho = \pi d^4/32$, то

$$\lambda = \frac{8PD^3 n}{Gd^4} . \qquad (8.13)$$

С помощью формулы (8.13) можно выразить две следующие характеристики пружины:

1) *жесткость пружины* c – сила, необходимая для получения единичного удлинения:

$$c = Gd^4 / \left(8D^3 n\right);$$

2) *податливость пружины* δ – удлинение, образуемое при действии единично силы:

$$\delta = 8D^3 n / \left(Cd^4\right) .$$

Как видно, характеристики c и δ связаны зависимостью: $c = 1/\delta$.

8.6. Понятие о кручении стержней некруглого поперечного сечения

В отличие от рассмотренных ранее круглых стержней, кручение стержней с произвольной неосесимметричной формой поперечного сечения обладает особенностями, в большинстве случаев исключающими возможность

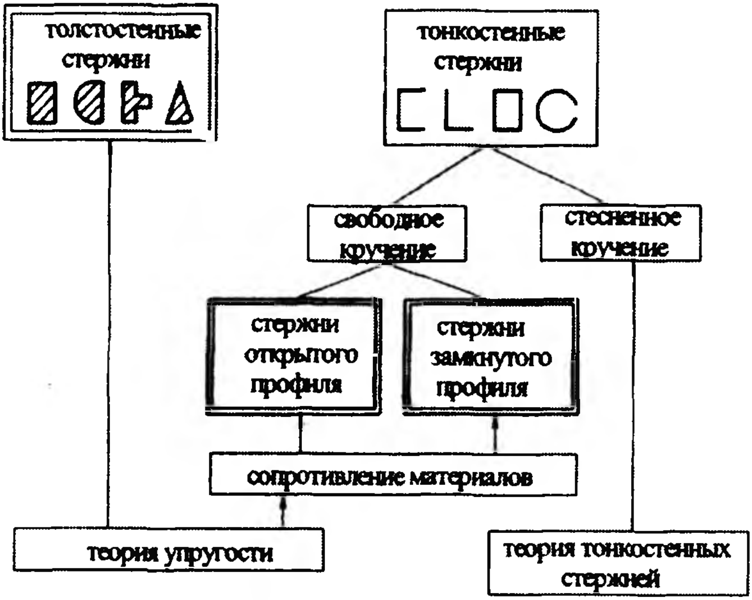


Рис. 8.12

использования методов сопротивления материалов для анализа напряженно-деформированного состояния стержня. Основная из этих особенностей состоит в том, что при кручении таких стержней поперечные сечения не остаются плоскими, а превращаются в некоторые криволинейные поверхности. Это искривление поперечных сечений называется *депланацией*. Формулы, основанные на гипотезе плоских сечений, для некруглых стержней теряют силу.

На рис. 8.12 представлена схематическая классификация задач кручения некруглых стержней с указанием разделов механики твердого деформируемого тела, применяемых при решении этих задач.

Толстостенными называются стержни, у которых толщины различных элементов сечения соизмеримы с размерами самого сечения. Так как деформация кручения толстостенных стержней имеет сложный характер и не может быть даже приближенно описана с помощью простых деформационных гипотез, задача о кручении таких стержней решается аналитическими или численными методами *теории упругости*. Результаты некоторых решений приводятся к форме, присущей сопротивлению материалов.

Другую группу составляют широко распространенные тонкостенные стержни замкнутого или открытого профиля (стандартные прокатные элементы; стержни, скомпанованные из стальных листов, и т.п.). При расчете тонкостенных стержней различают два типа кручения: *свободное* (*чистое*) и *стесненное* (*изгибное*). Если расчетная схема стержня и нагрузки таковы, что во всех сечениях отсутствуют препятствия для свободной депланации, (например, отсутствуют заделки) кручение называется *свободным*. В противном случае происходит стесненное кручение, сопровождаемое появлением в сечениях внутреннего усилия особого вида – *бимомента*, влияющего на распределение нормальных и касательных напряжений по сечению.

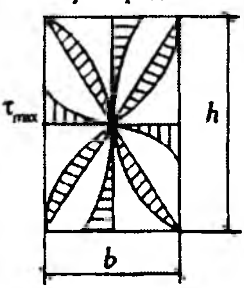


Рис. 8.13

Расчет тонкостенных стержней открытого и замкнутого профиля на стесненное кручение изучается в выделившейся из сопротивления материалов *теории тонкостенных стержней*, разработанной нашим соотечественником проф. В.З. Власовым. Эти вопросы выходят за пределы данного курса.

При изучении свободного кручения стержней открытого и замкнутого профилей допустимы подходы, свойственные сопротивлению материалов, но с использованием на начальной стадии результатов, полученных с помощью теории упругости.

Приведем краткое описание результатов некоторых решений (на рис 8.12 группы, содержащие рассмотренные стержни, показаны в двойной рамке).

Прямоугольное сечение

На рис. 8.13 изображены эпюры касательных напряжений вдоль осей симметрии и диагоналей сечения в форме прямоугольника. Наибольшее напряжение возникает посредине длинной стороны контура. Для вычисления τ_{max} следует использовать формулу

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_{кр}}, \tag{8.14}$$

где $W_{кр}$ – условная величина, называемая моментом сопротивления при кручении прямоугольного стержня и определяемая по формуле

$$W_{кр} = \alpha h b^2,$$

где коэффициент $\alpha = \alpha(h/b)$; h – всегда размер длинной стороны прямоугольника.

Угол закручивания находится по формуле

$$\varphi = \frac{M_{кр} l}{G J_{кр}}, \tag{8.15}$$

где $J_{кр}$ – величина, называемая моментом инерции при кручении и определяемая для прямоугольного стержня как

$$J_{кр} = \beta h b^3,$$

где коэффициент β также зависит от отношения h/b.

Числовые значения коэффициентов α и β для некоторых отношений h/b приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1.

h/b	1,0	1,5	2,0	3,0	6,0	10,0	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,299	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,229	0,263	0,299	0,313	0,333

Из таблицы следует, что при больших отношениях h/b коэффициенты α и β приближаются к 1/3. Поэтому для узких прямоугольников (при $h/b \geq 10$) можно принимать $W_{кр} = hb^2/3$ и $J_{кр} = hb^3/3$.

Исследованиями установлено, что последние формулы, а также формулы (8.14) и (8.15) могут приближенно использоваться для фигур, представляющих собой узкую полоску, искривленную по некоторой незамкнутой кривой. В этом случае b – толщина полоски, а h – ее длина по средней линии.

Тонкостенный стержень открытого профиля при свободном кручении.

Стержни указанного типа можно рассматривать как совокупность соединенных между собой узких прямоугольников. На рис. 8.14, *а* изображен пример такого стержня. Пусть $M_{кр}$ – крутящий момент, воспринимаемой всем стержнем; $M_{кр(i)}$ – доля общего момента, воспринимаемая i-ом участком.

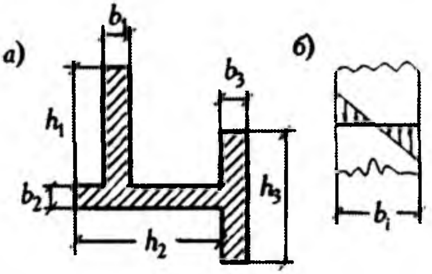


Рис. 8.14

Тогда имеем

$$M_{кр} = \sum_{i=1}^{n} M_{кр(i)} \, . \qquad (8.16)$$

где n – общее число участков, образующих стержень.

Предполагая неизменной форму поперечного сечения стержня при кручении, приходим к заключению о равенстве углов закручивания каждого из составляющих элементов

$$\frac{M_{кр(1)} l}{G J_{кр(1)}} = \frac{M_{кр(2)} l}{G J_{кр(2)}} = \ldots = \frac{M_{кр(n)} l}{G J_{кр(n)}} \, . \qquad (8.17)$$

Равенства (8.17) представляют собой $n-1$ независимое уравнение относительно неизвестных $M_{кр(i)}$. Учитывая также выражение (8.16) и решая полученную систему уравнений, найдем:

$$M_{кр(i)} = M_{кр} \frac{J_{кр(i)}}{\sum J_{кр(i)}} \, ,$$

или, после подстановки $J_{кр(i)} = h_i b_i^3 / 3$,

$$M_{кр(i)} = M_{кр}\frac{h_i b_i^3}{\sum h_i b_i^3}. \qquad (8.18)$$

Используя формулу (8.14) и принимая $\left(W_{кр(i)} = h_i b_i^2 / 3\right)$ получим

$$\tau_i = \frac{3M_{кр} b_i}{\sum h_i b_i^3}, \qquad (8.19)$$

где τ_i – максимальное касательное напряжение на i – м участке, возникающее посредине длинной стороны элемента.

Сравнивая между собой выражения (8.19) для всех участков, устанав ливаем. что $\tau_{i\ max}$ возникает на участке, имеющем наибольшую толщин b_i:

$$\tau_{max} = \frac{3M_{кр} b_{max}}{\sum h_i b_i^3}. \qquad (8.20$$

Отметим, что по толщине каждого участка касательные напряжени изменяются по величине и направлению (рис. 8.14, *б*).

Для определения угла закручивания φ в любое из выражений (8.17 подставим значение $M_{кр(i)}$ по формуле (8.18):

$$\varphi = \frac{3M_{кр} l}{G\sum h_i b_i^3}. \qquad (8.21$$

При экспериментальной проверке на кручение прокатных профиле было установлено, что формулы (8.19)–(8.21) дают завышенный резуль тат. Это объясняется рядом факторов, в том числе неучетом закруглений местах сопряжения элементов сечения. Поэтому для повышения точност расчетов рекомендовано в знаменатели формул (8.19)–(8.21) вводить по правочный множитель k, принимающий значения: для швеллера – 1,12; дл двутавра – 1,20 (для уголка k = 1,0).

Тонкостенный стержень замкнутого профиля при свободном кручении.

Пример такого стержня показан на рис. 8.15, *а*. Методами теории уп ругости установлены два следующих положения:

1) при малых толщинах стенок касательные напряжения в любом месте можно считать распределенными равномерно по толщине сечения (в отли-

чие от стержней открытого профиля) и направленными в одну сторону параллельно средней линии контура;

2) поток касательных усилий τb (τ – напряжение в любой точке сечения; b – толщина стенки в этом же месте) не изменяется вдоль контура сечения: так, например, для четырех линий, показанных на рис. 8.15, *а*, имеем:

$$\tau_1 b_1 = \tau_2 b_2 = \tau_3 b_3 = \tau_4 b_4 \quad \text{и т.д.}$$

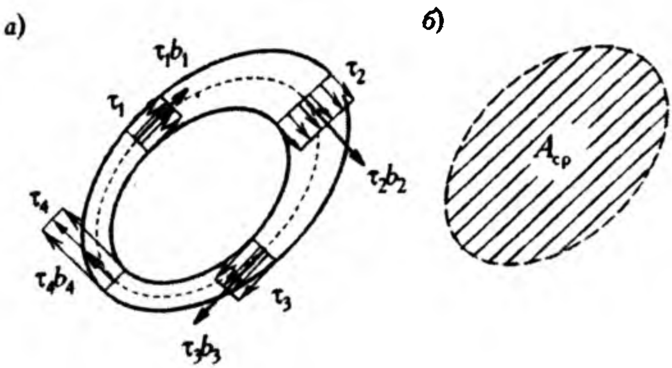


Рис. 8.15

Очевидно, что заданный крутящий момент $M_{кр}$ можно представить в виде суммы моментов потоков касательных усилий, взятых по всей длине средней линии контура стержня. Из этого условия получается величина потока касательных усилий

$$\tau b = \frac{M_{кр}}{2A_{ср}},$$

где $A_{ср}$ – площадь фигуры, заключенной внутри средней линии контура (рис. 8.15, *б*).

Отсюда

$$\tau = \frac{M_{кр}}{2A_{ср} b}, \tag{8.22}$$

тогда

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{2A_{ср} b_{min}}. \tag{8.23}$$

Таким образом, в отличие от стержней открытого профиля в стержнях замкнутого профиля максимальное напряжение возникает в местах наименьшей толщины (например, в стержне на рис. 8.15, *а* – по линии *4*).

В заключение отметим, что при равных площадях сечения и крутящих моментах в стержнях замкнутого профиля возникают существенно меньшие напряжения и углы закручивания по сравнению со стержнями открытого профиля. Сказанное проиллюстрируем на следующем примере (рис. 8.16). Требуется выразить и сравнить τ_{max} для квадратной трубы замкнутого профиля (*а*) и трубы (*б*) такого же сечения, но с продольным разрезом, т.е. открытого профиля; крутящие моменты одинаковы.

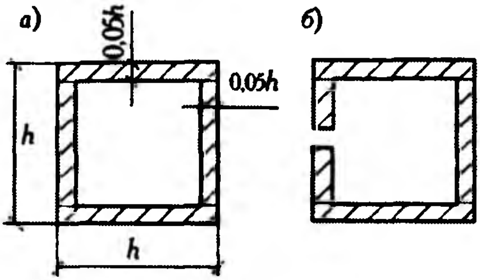


Рис. 8.16

а). *Замкнутый профиль.*

$$A_{cp} = (0{,}95h)^2 = 0{,}9025h^2.$$

Используя формулу (8.23), получим

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{2 \cdot 0{,}9025h^2 \cdot 0{,}05h} = 11{,}08\frac{M_{кр}}{h^3}.$$

б). *Открытый профиль.*

Разобъем сечение на прямоугольные полоски, как показано на рис. 8.16. Тогда

$$\sum h_i b_i^3 = (2h + 2 \cdot 0{,}9h)(0{,}05h)^3 = 0{,}000475h^4,$$

и по формуле (8.20) получим

$$\tau_{max} = \frac{3M_{кр} \cdot 0{,}05h}{0{,}000475h^4} = 315{,}8\frac{M_{кр}}{h^3},$$

что в 28,5 раза превышает τ_{max} в сечении замкнутого профиля.

ГЛАВА 9. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ МАТЕРИАЛА (ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ)

9.1. Предварительные замечания

Механические испытания различных материалов (см. главу 2) показывают, что образцы из этих материалов в зависимости от условий нагружения могут находится в различных механических состояниях. При небольших нагрузках большинство материалов деформируется *упруго*, т.е. находится в упругом состоянии. С ростом нагрузок могут появиться заметные пластические деформации, т.е. материал переходит в *пластическое* состояние. Условия, при которых материал переходит из упругого в пластическое состояние, получили название *критериев пластичности*. При дальнейшем увеличении нагрузок происходит образование трещин и наступает состояние *разрушения*. Условия, при которых наступает это состояние, получили название *критериев прочности*. В хрупких материалах разрушение наступает, минуя стадию пластического состояния. Критерии пластичности и прочности получили обобщающие их название – *критерии предельных состояний*. Необходимо подчеркнуть, что деление материалов на пластические и хрупкие проводят, в основном, по результатам их механического поведения при простом растяжении или сжатии образцов в условиях линейного напряженного состояния. Известно, что некоторые "хрупкие" материалы в условиях всестороннего давления (пространственное напряженное состояние) проявляют заметные пластические деформации. Так ведет себя чугун, лед и другие материалы. Поэтому в одних условиях материал может разрушаться хрупко, без заметных пластических деформаций, а в других – иметь стадию пластичности.

В опытах на растяжение установлено, что пластические деформации начинают возникать тогда, когда нормальное напряжение в поперечном сечении образца достигает значения предела упругости, который близок по своей величине пределу текучести материала. Таким образом за критерий пластичности в условиях линейного напряженного состояния может быть взят предел текучести материала $\sigma_{т.р}$. Аналогичным образом можно установить величину нормального напряжения, когда возникают пластические деформации при сжатии $\sigma_{т.с}$. Можно также произвести испытания на чистый сдвиг и определить касательное напряжение, при котором появляются пластические деформации ε_T. Однако в опасной точке конструкции в общем случае реализуется пространственное напряженное состояние, которое характеризуется не одним параметром, а тремя – главными напряжениями σ_1 σ_2, σ_3. Как определить, при каких соотношениях между этими напряжениями наступает состояние пластичности? Казалось бы, ответ прост: необходимо создать в образце материала такое же напряженное состояние и определить – является ли оно упругим или пластическим.

Однако практически это сделать невозможно, т.к. нет способов создания в образце однородного пространственного напряженного состояния Чаще всего проводятся опыты на тонкостенных трубчатых образцах, которые подвергаются растяжению (сжатию), кручению с одновременной подачей внутреннего давления, что позволяет реализовать некоторые частные случаи однородного плоского напряженного состояния. Требование однородности связано с тем, что только в этом случае по внешним нагрузкам можно подсчитать напряжения в материале, не зная законов его деформирования. Эти опыты проводятся в исследовательских целях. Для расчета конструкций приходится обращаться к критериям предельного состояния, так как число возможных напряженных состояний практически неисчерпаемо. Эти критерии будут рассмотрены позднее, а здесь введем некоторые понятия, которые потребуются в дальнейшем.

Обобщим понятие о коэффициенте запаса для пространственного напряженного состояния. Пусть задано некоторое пространственное напряженное состояние с главными напряжениями σ_1, σ_2, σ_3. Будем пропорционально увеличивать эти напряжения, не меняя ориентации главных площадок, т.е. осуществлять *простое нагружение* до тех пор, пока не наступит предельное состояние: либо появятся пластические деформации, либо начнется разрушение. Число, показывающее во сколько раз необходимо увеличить все компоненты напряжений до наступления предельного состояния, будем называть коэффициентом запаса. Если в двух напряженных состояниях коэффициенты запаса равны, то такие напряженные состояния называют *равноопасными*. В качестве эталонного напряженного состояния обычно выбирают напряженное состояние при растяжении, характеризуемое одним напряжением, которое принято называть *эквивалентным* (или *приведенным*).

Эквивалентное напряжение – это такое напряжение, которое следует создать в растянутом образце, чтобы его состояние было равноопасно заданному напряженному состоянию (рис. 9.1).

В этом приеме, по существу, заложено допущение о том, что критерий предельного состояния может быть записан в виде одного числа. При этом расчет на прочность в сложном напряженном состоянии A (см. рис. 9.1) заменяется расчетом на осевое растяжение B, где коэффициент запаса определяется, как обычно,

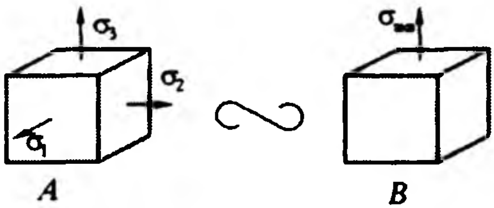


Рис. 9.1

$$n = \frac{\sigma_{оп.р}}{\sigma_{экв}}. \qquad (9.1)$$

Необходимо теперь выразить $\sigma_{экв}$ через главные напряжения, что и устанавливают теории предельных состояний.

9.2. Теории предельных состояний

Первая теория. По этой теории принимается, что предельное состояние наступает тогда, когда наибольшее по абсолютной величине главное напряжение достигает предельного значения, равного опасному значению при простом растяжении $\sigma_{оп.р}$ или сжатии $\sigma_{оп.с}$.

Если $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$, то условие наступления предельного состояния запишется в виде

$$\sigma_{экв} = \sigma_1^{оп} = \sigma_{оп.р} \quad . \qquad (9.2)$$

Если $0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, то

$$\sigma_{экв} = \left|\sigma_3^{оп}\right| = \sigma_{оп.с} \quad . \qquad (9.3)$$

И наконец, если $\sigma_1 > 0$, а $\sigma_3 < 0$, то записываются оба условия (9.2) и (9.3).

Таким образом, по первой теории прочности эквивалентное напряжение равно максимальному или минимальному значению главного напряжения в исследуемой точке. Поэтому условия прочности по этой теории запишутся в виде:

$$\sigma_1 \leq R_p \text{ или } [\sigma]_p \qquad (9.4)$$

$$|\sigma_3| \leq R_c \text{ или } [\sigma]_c \qquad (9.5)$$

Здесь $R_р$, $R_с$ и $[\sigma]_р$, $[\sigma]_с$ – расчетные сопротивления и допускаемые напряжения при растяжении и сжатии.

Очевидно, что по первой теории прочности только одно главное напряжение влияет на величину эквивалентного напряжения. Однако опыты показывают, что влияние двух других напряжений на наступление предельного состояния в общем случае весьма существенно. Поэтому первая теория практически не используется в расчетах и имеет чисто историческое значение. Эту теорию иногда используют в тех случаях, когда напряженное состояние близко к одноосному, т.е. если два главных напряжения по абсолютному значению существенно меньше третьего, основного напряжения.

Вторая теория. По этой теории принимается, что предельное состояние наступает тогда, когда максимальная главная деформация достигает опасного предельного значения, которое определяется из опыта на простое растяжение.

Таким образом, условие наступления предельного состояния запишется здесь в виде

$$\varepsilon_{экв} = \varepsilon^{оп} = \varepsilon_{1,оп.р}\,. \tag{9.6}$$

Так как в случае простого растяжения опасное состояние наступает тогда, когда нормальное напряжение равно пределу текучести $\sigma_{т.р}$, которое близко по величине к пределу пропорциональности $\sigma_{пц}$ при наличии пластических деформаций или пределу прочности $\sigma_{в.р}$ при хрупком разрушении, то в обоих случаях $\varepsilon_{1,оп.р}$ можно определить, используя закон Гука:

$$\varepsilon_{1,оп.р} = \frac{\sigma_{оп.р}}{E}\,. \tag{9.7}$$

Аналогично при пространственном напряженном состоянии:

$$\varepsilon_1^{оп} = \frac{1}{E}\left[\sigma_1^{оп} - \nu\left(\sigma_2^{оп} + \sigma_3^{оп}\right)\right].$$

Следовательно, условие (9.6) запишется в виде

$$\left[\sigma_1^{оп} - \nu\left(\sigma_2^{оп} + \sigma_3^{оп}\right)\right] = \sigma_{оп.р}\,. \tag{9.8}$$

Таким образом, эквивалентное напряжение по второй теории прочности запишется в виде

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right),$$

а условие прочности получим аналогично в виде

$$\sigma_1 - \nu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right) \le R \quad \text{или} \quad [\sigma]. \tag{9.9}$$

Здесь σ_1, σ_2, σ_3 – напряжения в допускаемом состоянии.

Во второй теории учитывается влияние всех трех главных напряжений и она лучше соответствует экспериментальным данным, особенно в тех случаях, когда в условиях сложного напряженного состояния предельным состоянием является хрупкое разрушение путем отрыва. Опытные данные по наступлению предельного состояния пластичности не соответствуют этой теории, что резко ограничивает область ее применения.

Третья теория прочности или критерий максимального касательного напряжения. При описании механических испытаний на простое растяжение образца было отмечено, что пластические деформации проявляются в виде следов плоскостей скольжения (линии Людерса–Чернова), расположенных под углом около 45^0 к направлению растяжения образца. На этих площадках действуют максимальные касательные напряжения, которые в опыте на растяжение в момент появления пластических деформаций равны $\tau_{max} = \tau_{on} = \dfrac{\sigma_{т.р}}{2}$. Естественно предположить, что и в пространственном напряженном состоянии пластические деформации появляются тогда, когда максимальные касательные напряжения достигнут опасного для материала значения.

Так как

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

то критерий пластичности по этой теории запишется в виде

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1^{on} - \sigma_3^{on}}{2} = \frac{\sigma_{т.р}}{2}. \tag{9.10}$$

Из (9.10) получим

$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3. \tag{9.11}$$

Следовательно, по третьей теории эквивалентное напряжение равно разности максимальных и минимальных значений главных напряжений, а равноопасными будут считаться напряженные состояния с одинаковыми максимальными касательными напряжениями. Эта гипотеза связана с именами Треска и Сен-Венана, ее экспериментальная проверка показала, что она удовлетворительно описывает наступления состояния пластичности для большинства материалов. К недостатку относится то, что она не учитывает влияние промежуточного главного напряжения σ_2.

Условие прочности по этой теории:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq R \quad \text{или} \quad [\sigma]. \tag{9.12}$$

Для плоского напряженного состояния главные напряжения равны

$$\sigma_{1,3}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{yx}^2}\ .$$

Следовательно, условие (9.12) запишется в виде

$$\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau_{yx}^2}\le[\sigma]\quad \text{или } R\ . \qquad (9.1\!\!:$$

Четвертая или энергетическая теория пластичности. Вначале бы высказана гипотеза о том, что переход к пластическому состоянию связан уровнем удельной потенциальной энергии деформации, которая определяе ся выражением (3.35):

$$u=\frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)\right]\ .$$

При простом растяжении в опасном состоянии при $\sigma_1=\sigma_{т.р}$ буде иметь

$$u_{оп}=\frac{\sigma_{т.р}^2}{2E}\ .$$

Считая эти два напряженных состояния равноопасными, в том случа когда они имеют одинаковые значения удельных потенциальных энерги получим критерий пластичности по этой теории в следующем виде

$$\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)\right]_{оп}=\sigma_{т.р}^2\ . \qquad (9.1\!\!:$$

Однако в таком виде эта теория не получила экспериментального по твержден ия. Хубер и Мизес предложили из общей удельной потенциал

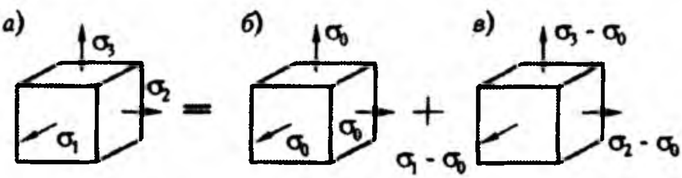


Рис. 9.2

ной энергии исключить энергию, связанную только с изменением объем элемента, а в качестве критерия пластичности принять энергию, связанну с изменением формы элемента. Рассмотрим этот вариант.

Напряженное состояние в опасной точке конструкции (рис. 9.2, *а*) можно представить в виде суммы двух напряженных состояний — всесто-роннего растяжения (рис. 9.2, *б*) и состояния, дополняющего первое до за-данного (рис. 9,2, *в*).

Напряженное состояние при всестороннем растяжении вызывает одинаковые деформации во всех трех направлениях, поэтому энергия этого состояния связана только с изменением объема материала, т.к. форма элемента не меняется (кубик остается кубиком с новым размером ребер). Энергию изменения объема u_v вычислим по формуле (3.35), полагая $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$. Получим

$$u_v = \frac{(1-2\nu)3\cdot\sigma_0^2}{2E} . \qquad (9.15)$$

Примем

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} , \qquad (9.16)$$

тогда

$$u_v = \frac{(1-2\nu)}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 . \qquad (9.17)$$

Вторую часть энергии, связанную с формоизменением, найдем, вычитая из u энергию u_v. Используя выражения (3.35) и (9.17), получим

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{3E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right),$$

или

$$u_\phi = \frac{1+\nu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right] . \qquad (9.18)$$

Для простого растяжения в предельном состоянии, когда $\sigma_1 = \sigma_{т.р}$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, получим

$$u_\phi^{оп} = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_{тр}^2 . \qquad (9.19)$$

Считая эти два состояния равноопасными и приравнивая энергии формоизменения, получим выражение для эквивалентного напряжения

$$\sigma_{экв} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} . \qquad (9.20)$$

Условие прочности по этой теории, которую иногда называют также четвертой теорией прочности, имеет вид

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \le R \text{ или } [\sigma]. \qquad (9.21)$$

Для частного случая плоского напряженного состояния, когда $\sigma_y = 0$, получим

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{yx}^2} \le [\sigma] \text{ или } R. \qquad (9.22)$$

Сравнивая выражения (9.22) и (9.13) при $\sigma_y = 0$, видим, что разн ца между этими двумя критериями пластичности невелика. Хотя критер Хубера–Мизеса записывается сложнее, чем критерий Треска – Се Венана, он обладает тем преимуществом, что перестановка местами инде сов 1, 2 и 3 у главных напряжений не влияет на величину эквивалентно напряжения, то есть здесь не надо следить за положением первой и треть площадок, как это делается при использовании критерия максимального к сательного напряжения.

Оба этих критерия хорошо согласуются с опытными данными и и пользуются в практических расчетах для материалов одинаково сопроти ляющихся растяжению и сжатию.

9.3. Теория Мора

В соответствии с этой теорией считается, что предельное состояние н ступает тогда, когда на некоторой площадке с нормалью n величина кас

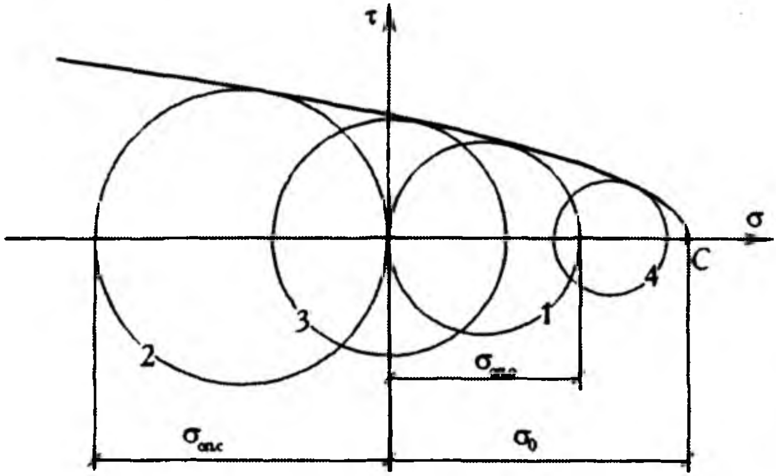


Рис. 9.3

тельного напряжения достигает опасного значения, зависящего от дейст вующего на этой площадке нормального напряжения $\tau_{n.оп} = f(\sigma_n)$.

В теории Мора используется графическое представление результатов испытаний с помощью кругов Мора. Допустим, проведено испытание на растяжение, определено предельное напряжение $\sigma_{оп.р}$ и для этого опасного напряженного состояния построен круг Мора *1* (рис. 9.3). Затем проведем испытания этого же материала на сжатие, определим $\sigma_{оп.с}$ и построим круг Мора *2*. Можно провести испытания и при других видах напряженного состояния, построив соответствующие предельные круги Мора. На рис. 9.3 показаны предельные круги Мора при чистом сдвиге *3* и при некотором произвольном виде напряженного состояния *4*.

Построим теперь огибающую кругов Мора, которая определит сочетание нормальных и касательных напряжений, при которых наступает предельное состояние, т.е. найдем графически зависимость $\tau_{n,оп} = f(\sigma_n)$. Точка C на этой огибающей соответствует разрушению при всестороннем растяжении $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$, однако такое напряженное состояние экспериментально создать практически невозможно.

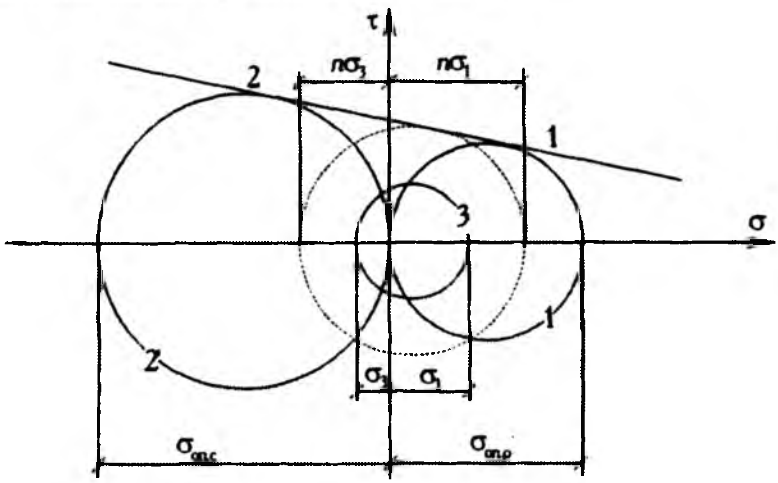


Рис. 9.4

Часто используют упрощенную методику построения огибающей. Эту огибающую строят по результатам двух испытаний: на растяжение (круг *1*) и сжатие (круг *2*). Тогда роль огибающей будет играть общая касательная *2–1* к этим двум кругам (рис. 9.4). Если материал имеет одинаковые характеристики прочности при растяжении и сжатии ($\sigma_{оп.р} = \sigma_{оп.с}$), то огибающая окажется параллельной оси нормальных напряжений.

Предположим теперь, что в исследуемой точке конструкции реализуется пространственное напряженное состояние с напряжениями

σ_1, σ_2 и σ_3. Построим для этого напряженного состояния круг Мора 3 по напряжениям σ_1 и σ_3 (см. рис. 9.4). Путем пропорционального увеличения напряжений σ_1 и σ_3 в n раз добьемся того, чтобы соответствующий круг напряжений коснулся огибающей, т.е. стал предельным (пунктирный круг на рис. 9.4). Очевидно, что $n\sigma_1$ и $n\sigma_3$ будут представлять предельные значения для исследуемого напряженного состояния, а величина n характеризует степень удаленности исследуемого напряженного состояния от предельного, т.е. является коэффициентом запаса.

На основе рис.9.4 можно получить, что в этом случае условие прочности запишется в виде

$$\sigma_1 - k\sigma_3 \le R \text{ или } [\sigma], \tag{9.23}$$

где $k = \dfrac{\sigma_{оп.р}}{\sigma_{оп.с}}$ – отношение пределов текучести или прочности при растяжении и сжатии.

Выражение (9.23) получено в предположении, что огибающая является прямой линией, что необязательно для теории Мора, которая полностью базируется на экспериментальных данных; положение самой огибающей может при необходимости уточняться на основе испытаний на прочность для различных напряженных состояний. Основным недостатком теории Мора является то, что здесь, как и в III-й теории прочности, не учитывается влияние на прочность второго (промежуточного) главного напряжения. Из выражения (9.23) видно, что при $k = 1$ критерий по Мору совпадает с критерием теории максимальных касательных напряжений.

В заключении этого раздела отметим следующее. При рассмотрении понятия о двух видах предельных состояний (переход в пластическое состояние и разрушение), не уточнялся объект, для которого эти состояния считаются предельными. Рассмотренные критерии предельных состояний являются локальными, т.е. относятся к некоторой наиболее напряженной зоне (точке) конструкции.

Но появление пластических деформаций в некоторой точке конструкции часто не означает потерю ее несущей способности. Конструкция может воспринимать увеличенные нагрузки, при этом общие перемещения и деформации оказываются ограниченными. Это было показано в главе 2 на примере стержневой статически неопределимой конструкции, а также при рассмотрении пластического шарнира при изгибе и кручении круглого вала. Таким образом, предельные пластические состояния для материала (представляемого однородным образцом) и для конструкции из этого материала отличны: между началом пластического деформирования и наступлением предельного состояния для конструкции в целом лежит значительная область упруго-пластического деформирования конструкции. Соответствующие методы расчета изучаются в теории пластичности.

Если же в опасной точке конструкции обнаружится трещина, то это часто также не означает катастрофического разрушения. Поведение конструкций с трещинами изучается в механике разрушения, которая получила в последние годы существенное развитие.

ГЛАВА 10. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ СТЕРЖНЯ

Рассмотренные ранее случаи сопротивления прямого стрежня, когда в его сечениях возникает только один вид внутреннего усилия, называются простыми деформациями стержня: осевое растяжение (сжатие), чистый сдвиг, чистый изгиб, чистое кручение. В данной главе рассматриваются более сложные виды сопротивления стержня, представляющие собой сочетание нескольких простых деформаций, происходящих одновременно. Из множества всех возможных видов сложного сопротивления обычно уделяется внимание трем основным: косому изгибу, совместному действию растяжения (сжатия) и изгиба, совместному действию кручения и изгиба. При этом рассмотрение основывается на принципе независимости действия сил.

10.1. Косой изгиб

Косым изгибом называется такой вид изгиба, при котором все внешние силы не лежат в одной главной плоскости стержня. На

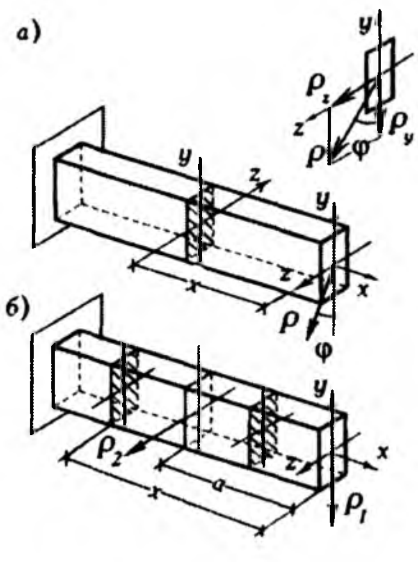


Рис. 10.1

рис. 10.1, *а* показан пример косого изгиба под действием заданной силы P, расположенной в плоскости поперечного сечения и наклоненой под углом φ к вертикальной главной оси. Эта сила вместе с опорными реакциями образует плоскость внешних сил, не совпадающую ни с одной из главных плоскостей стержня. Очевидно, что вместо действующей силы P можно рассматривать две ее составляющие по главным осям координат: $P_z = P\sin\varphi$ и $P_y = P\cos\varphi$. Каждая из них вызывает деформацию плоского изгиба в соответствующей главной плоскости. Следовательно, в произвольном сечении стержня возникают два изгибающих момента относительно главных осей: $M_z = P_y x = Px\cos\varphi$ и $M_y = P_z x = Px\sin\varphi$. Таким образом, приходим к важному заключению: *косой изгиб можно рассмат* *ривать как одновременное действие двух плоских изгибов в главных плоскостях стержня.* Соответствующие изгибающие моменты M_z и M_y являются проекциями результирующего момента $M = Px$ на оси координат.

На рис. 10.1, б изображена балка, правый участок которой (между силами P_1 и P_2) находится в условиях плоского поперечного изгиба – в сечениях участка действует только один изгибающий момент M_z, вызванный силой P_1. На левом участке этой балки имеет место косой изгиб, так как в сечениях участка $M_z \neq 0$ и $M_y \neq 0$. Заметим, что между случаями косого изгиба приведенными на рис. 10.1 имеются различия: в первом случае во всех сечениях балки наклон линии действия результирующего момента не меняется ($M_y : M_z = \operatorname{tg}\varphi = \mathrm{const}$); во втором случае этот наклон от сечения к сечению изменяется, так как отношение $M_y : M_z = P_2(x-a) : P_1 x$, то есть зависит от координаты сечения.

Для определения нормального напряжения в точке поперечного сечения с координатами z, y (рис. 10.2) воспользуемся принципом независимости действия сил, заменяя косой изгиб двумя плоскими изгибами. Получаем формулу

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z, \tag{10.1}$$

где M_z и M_y – изгибающие моменты относительно координатных (главных) осей сечения; J_z и J_y – моменты инерции сечения относительно тех же осей. Для пользования формулой (10.1) необходимо следовать очевидному правилу знаков для изгибающих моментов: момент считается положительным, если он вызывает положительное (растягивающее) напряжение в точках первого квадранта (то есть при $z > 0$ и $y > 0$). На рис. 10.2 действующие моменты M_z и M_y положительны.

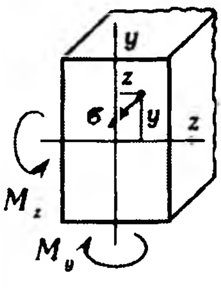


Рис. 10.2

Заметим, что если вычисленные по формуле (10.1) напряжения σ, откладывать в виде отрезков из соответствующих точек перпендикулярно плоскости поперечного сечения, то концы всех отрезков расположатся на некоторой плоскости, уравнение которой выражается формулой (10.1). Для косого изгиба эта плоскость (плоскость напряжений) представляет пространственное обобщение эпюры напряжений, изображаемой для плоского изгиба прямой линии. Примерный вид плоскости напряжений показан на рис. 10.3.

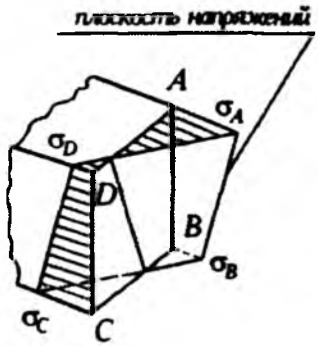


Рис. 10.3

Для записи условия прочности в балке при косом изгибе необходимо определить опасную точку сечения, то есть точку, где нормальное напряжение наибольшее. Так как формула напряжений (10.1) двучленная, положение опасной точки не всегда очевидно. Поэтому опасную точку определяют по признаку ее наибольшего удаления от нейтральной оси. Уравнение нейтральной оси, т.е. прямой где $\sigma = 0$ получим из (10.1)

$$\frac{M_z}{J_z} y_0 + \frac{M_y}{J_y} z_0 = 0. \qquad (10.2)$$

Здесь z_0, y_0 – координаты произвольной точки нейтральной оси. Как видно, нейтральная ось – прямая линия, проходящая через начало координат (центр тяжести сечения) и не совпадающая ни с одной из главных осей. На рис. 10.4 показано положение нейтральной оси при $M_z > 0$ и $M_y > 0$, определяемое углом α. Направления векторов $\overline{M}_z$ и $\overline{M}_y$ соответствует "правилу буравчика".При этом

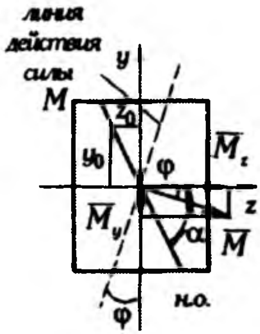


Рис. 10.4

$$\mathrm{tg}\alpha = \left|\frac{y_0}{z_0}\right| = \frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{J_z}{J_y}. \qquad (10.3)$$

Если в рассматриваемом сечении линия действия результирующего момента наклонена к вертикали под углом φ, то, раскладывая вектор $\overline{M}$ по осям z и y (рис. 10.4), получим

$$M_y = M\sin\varphi; \qquad M_z = M\cos\varphi.$$

Подставив выражения M_y и M_z в формулу (10.3), будем иметь

$$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\varphi \frac{J_z}{J_y}. \qquad (10.4)$$

Если $J_z = J_y$, то все центральные оси сечения являются главными (см. главу 5), а значит и результирующий момент всегда лежит в одной из главных плоскостей. В этом случае изгиб является плоским. Следовательно, косой изгиб может возникнуть только тогда, когда $J_z \neq J_y$. Как видно из формулы (10.4), при этом $\operatorname{tg}\alpha \neq \operatorname{tg}\varphi$ и $\alpha \neq \varphi$. Это указывает, что при *косом изгибе* (в отличие от плоского) *нейтральная ось не перпендикулярна линии* (или плоскости) *действия результирующего момента*.

На рис. 10.5, *а* изображено сечение, у которого $J_z > J_y$. По формуле (10.4) получим $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\varphi$, то есть $\alpha > \varphi$. Это значит, что нейтральная ось отклоняется от перпендикуляра к линии действия результирующего момента в сторону оси y. На рис. 10.5,*б* показано сечение, для которого $J_z < J_y$. При этом $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\varphi$, $\alpha < \varphi$, следовательно нейтральная ось отклоняется от перпендикуляра к линии действия результирующего момента в сторону оси z. Таким образом, в любом случае косого изгиба нейтральная ось отклоняется от указанного перпендикуляра к линии (или плоскости) результирующего момента в направлении главной оси с минимальным моментом инерции.

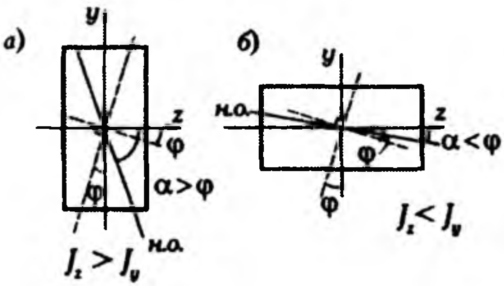


Рис. 10.5

После определения положения нейтральной оси по формуле (10.3) или (10.4) опасная точка сечения находится как наиболее удаленная от нейтральной оси. Однако если сечение имеет форму прямоугольника, двутавра, швеллера или любой другой подобной фигуры, то положение опасной точки определяется независимо от наклона нейтральной оси. Как видно по рис. 10.6, при любом из трех положений нейтральных осей опасной является наиболее удаленная от осей z и y точка B с координатами $z = z_{max}$ и $y = y_{max}$. Подставляя координаты опасной точки в формулу (10.1), получим

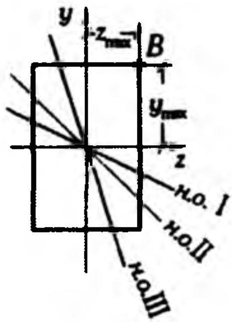


Рис. 10.6

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{J_z} y_{max} + \frac{M_y}{J_y} z_{max} = \frac{M_z}{J_z / y_{max}} + \frac{M_y}{J_z / z_{max}} .$$

Так как $J_z / y_{max} = W_z$; $J_y / z_{max} = W_y$, то условие прочности примет вид

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \le R \ . \qquad (10.5)$$

Этой формулой следует пользоваться для проверки прочности стержня, испытывающего косой изгиб.

Для подбора сечения балки при косом изгибе формулу (10.5) преобразуют к такому виду:

$$\sigma = \frac{1}{W_z}\left(M_z + M_y \frac{W_z}{W_y}\right) \le R \quad ,$$

откуда

$$W_z \ge \frac{1}{R}\left(M_z + M_y \frac{W_z}{W_y}\right) \ . \qquad (10.6)$$

Если подбираются размеры прямоугольного сечения, то $W_z / W_y = h / b$ – это отношение обычно задается, что позволяет вычислить W_z, а затем размеры b и h. При подборе номера стандартного прокатного профиля (двутавр, швеллер) учитывается, что отношение W_z / W_y для всей совокупности профилей изменяется в достаточно узких пределах: для двутавров $W_z / W_y \approx 5 \div 15$; для швеллеров – $3 \div 10$. Поэтому, подставляя в формулу (10.6) отношение W_z / W_y из указанных интервалов, вычисляют W_z и для соответствующего профиля принимают по таблице уточненное отношение W_z / W_y для выполнения следующего приближения. Этот процесс заканчивается, когда в результате последующей итерации расчет по формуле (10.6) приводит к тому же номеру профиля. Обычно процесс подбора заканчивается за 2–3 итерации.

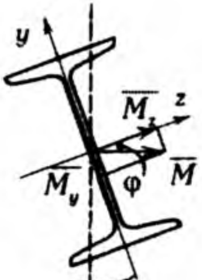


Рис. 10.7

Рассмотрим особенность сопротивления косому изгибу балки с большим соотношением W_z / W_y. Такие балки обычно применяют для работы в условиях плоского изгиба. Если при монтаже балка установлена неточно с небольшим наклоном оси z к вертикали (рис. 10.7), то возникает косой изгиб с моментами $M_z = M\cos\varphi \approx M$ и $M_y = M\sin\varphi$. В этом случае на основе формулы (10.5), получим $\sigma_{max} = \frac{M}{W_z}\left(1 + \sin\varphi \frac{W_z}{W_y}\right)$. Если, например, $\varphi = 1^\circ$, а $W_z / W_y = 10$ (среднее отношение для двутавров), то

$$\sigma_{max} = 1{,}174\frac{M}{W_z} ,$$

то есть отклонение оси балки от вертикального положения всего на 1° увеличивает σ_{max} на 17,4%. Отсюда следует, что при использовании балок с большим отношением W_z / W_y должны быть приняты специальные меры по увеличению точности монтажа и недопущению изгиба в плоскости наименьшей жесткости.

При определении касательных напряжений также следует исходить из представления косого изгиба как совокупности двух плоских изгибов. Например, для сечения, изображенного на рис. 10.8, наличие двух поперечных сил Q_z и Q_y приводит к появлению в произвольной точке сечения двух касательных напряжений

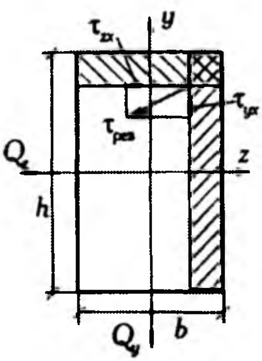


Рис. 10.8

$$\tau_{zx} = \frac{Q_z S_y^{отс}}{hJ_y} \quad \text{и} \quad \tau_{yx} = \frac{Q_y S_z^{отс}}{bJ_z} ,$$

действующих параллельно осям координат. Геометрически складывая эти напряжения, получим в данной точке результирующее касательное напряжение

$$\tau_{рез} = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{yx}^2} .$$

Так как при косом изгибе балка изгибается одновременно в двух главных плоскостях, ось балки в общем случае становится пространственной кривой. Каждое сечение балки имеет два прогиба: v – вдоль оси y; w – вдоль оси z. Полный прогиб сечения f (рис. 10.9) определяется по формуле

$$f = \sqrt{v^2 + w^2} . \tag{10.7}$$

В частном случае косого изгиба, когда все внешние силы лежат в одной, но не главной плоскости, изогнутая ось будет плоской кривой, лежащей также в некоторой наклонной плоскости. Например, балка, изображенная на рис. 10.1, *а* находится под действием вертикальной силы

$P_y = P\cos\varphi$ и горизонтальной силы $P_z = P\sin\varphi = P_y\operatorname{tg}\varphi$. Так как схемы загружения в обеих главных плоскостях одинаковы и различие только в величине сил, действующих на свободном конце балки (P_y и $P_z = P_y\operatorname{tg}\varphi$), то, обозначая $EJ_z v = f(x)$ – уравнение изогнутой оси в вертикальной плоскости, будем иметь

$$EJ_y w = f(x)\frac{P_z}{P_y} = f(x)\operatorname{tg}\varphi .$$

Отсюда

$$w = v\operatorname{tg}\varphi\cdot\frac{J_z}{J_y} ,$$

и угол β наклона полного прогиба в произвольном сечении балки (см. рис. 10.9) определяется формулой

$$\operatorname{tg}\beta = w / v = \operatorname{tg}\varphi\cdot\frac{J_z}{J_y} . \qquad (10.8)$$

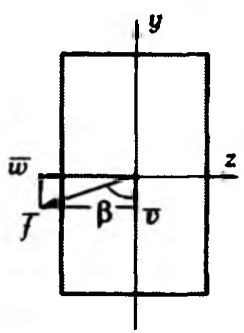


Рис. 10.9

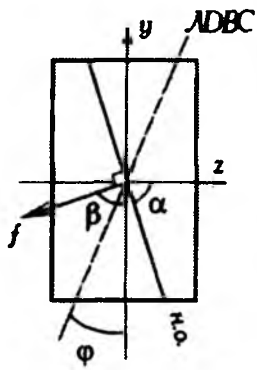


Рис. 10.10

Из формулы (10.8) видно, что β не зависит от координаты сечения x; отсюда следует, что изогнутая ось является плоской кривой. Сопоставляя формулы (10.8) и (10.4), устанавливаем, что $\beta = \alpha$, следовательно, в каждом сечении балки полный прогиб перпендикулярен нейтральной оси. Так как при косом изгибе нейтральный слой не перпендикулярен плоскости внешних сил, то плоскость изгиба, содержащая изогнутую ось балки не совпадает с плоскостью действия внешних сил. Для данного случая взаимное расположение линии действия внешних сил (*ЛДВС*), нейтральной оси (н.о.) и полного прогиба f показано на рис. 10.10.

10.2. Совместное действие растяжения (сжатия) и изгиба. Внецентренное растяжение (сжатие)

Рассмотрим состояние стержня, в поперечных сечениях которого возникают продольная сила N и изгибающие моменты M_z и M_y (рис. 10.11).

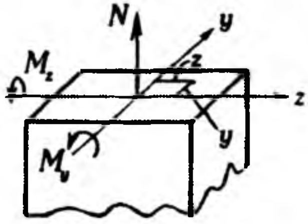


Рис. 10.11

Такой случай сопротивления стержня называется совместным действием растяжения (сжатия) и изгиба: в общем случае – косого изгиба, в частном случае (когда один из моментов равен нулю) – плоского.

Используя принцип независимости действия сил, получим формулу для нормального напряжения в точке поперечного сечения с координатами z, y:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z. \tag{10.9}$$

а)

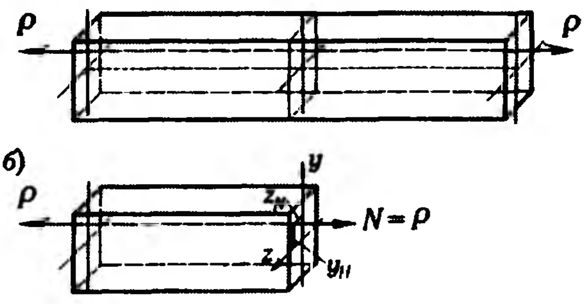


Рис. 10.12

Правила знаков для внутренних усилий в формуле (10.9): для N – как принималось при деформации осевого растяжения (сжатия); для M_z и M_y – как при косом изгибе. Оси координат z, y по-прежнему совпадают с главными центральными осями сечения.

Далее разберем случай растяжения (или сжатия) стержня, при котором внешние силы действуют не вдоль продольной оси, а вдоль некоторой прямой, параллельной продольной оси (рис. 10.12, а).

Такое действие нагрузки называется внецентренным растяжением (сжатием) – в отличие от описанного в главе 2 центрального или осевого растяжения (сжатия). Как видно из рис.10.12,б, при внецентренном растяжении (сжатии) в любом сечении стержня действующая продольная сила N, как и внешняя сила P, приложена не в центре тяжести сечения, а в некоторой так называемой *силовой точке* с координатами z_N, y_N. Покажем, что *внецентренное растяжение (сжатие) статически эквивалентно осевому растяжению (сжатию) и изгибу*, то есть случаю, рассмотренному выше. Действительно, силу N (рис. 10.13) допустимо переместить параллельно самой себе сначала на одну ось, а затем на другую (то есть в центр тяжести), одновременно прикладывая в сечении стержня два момента:

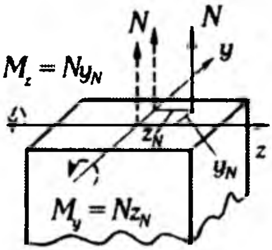


Рис. 10.13

$$\left.\begin{aligned} M_z &= Ny_N; \\ M_y &= Nz_N, \end{aligned}\right\} \tag{10.10}$$

что и доказывает эквивалентность двух упомянутых случаев работы стержня.

Подставим выражения (10.10) в формулу (10.9):

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{Ny_N}{J_z}y + \frac{Nz_N}{J_y}z = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{y_N y}{J_z / A} + \frac{z_N z}{J_y / A}\right). \tag{a}$$

Отношения J_z / A и J_y / A представляют собой так называемые *радиусы инерции сечения*, возведенные в квадрат:

$$J_z / A = i_z^2; \qquad J_y / A = i_y^2.$$

С учетом этих обозначений формула (*а*) получает такой вид:

$$\sigma = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{y_N y}{i_z^2} + \frac{z_N z}{i_y^2}\right). \tag{10.11}$$

Заметим, что формула (10.11) может использоваться не только в случае внецентренного растяжения (сжатия), но и при совместном действии осевого растяжения (сжатия) с изгибом. При этом координаты силовой точки y_N и z_N, необходимые для постановки в формулу (10.11), определяются с помощью формул (10.10).

Выражение (10.11) имеет простое геометрическое толкование: это уравнение плоскости напряжений в системе координат z, y – в плоскости сечения, а σ – перпендикулярно этой плоскости (рис. 10.14). Линия пересечения плоскости напряжений с плоскостью сечения определяет точки, в которых $\sigma = 0$, то есть представляет собой нейтральную ось. Так как нейтральная ось разграничивает зоны растяжения и сжатия, то положение нейтральной оси дает представление о характере распределения нормальных напряжений по сечению, в том числе – о положении наиболее напряженной (опасной) точки сечения.

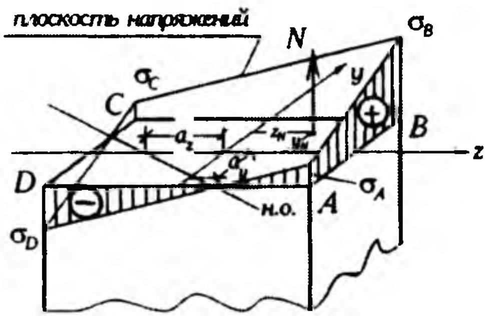


Рис. 10. 14

Обозначим: z_0, y_0 – координаты произвольной точки нейтральной оси. Тогда, учитывая, что в этих точках $\sigma = 0$, получим уравнение нейтральной оси при внецентренном растяжении (сжатии):

$$1 + \frac{y_N y_0}{i_z^2} + \frac{z_N z_0}{i_y^2} = 0, \tag{10.12}$$

или, представляя полученное выражение в форме уравнения прямой в отрезках на осях,

$$\frac{y_0}{a_y} + \frac{z_0}{a_z} = 1.$$

Здесь отрезки, отсекаемые нейтральной осью на осях координат, имеют следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} a_y &= -\frac{i_z^2}{y_N}; \\ a_z &= -\frac{i_y^2}{z_N}. \end{aligned}\right\} \tag{10.13}$$

Формулы (10.11)–(10.13) указывают на то, что характер распределения нормальных напряжений по поперечному сечению внецентренно растянутого (сжатого) стержня определяется величиной продольной силы N и координатами ее приложения. Отметим основные особенности распределения напряжений.

1. В центре тяжести сечения ($z=0$; $y=0$) $\sigma = \dfrac{N}{A} \neq 0$, то есть при внецентренном растяжении (сжатии) нейтральная ось *не проходит через центр тяжести сечения* (в отличие от плоского или косого изгиба). Если сила N, не изменяясь по величине, меняет точку своего приложения, то как это видно из формулы (10.11), напряжения изменяются во всех точках сечения, кроме центра тяжести, где по-прежнему $\sigma = N / A$. Это означает, что плоскость напряжений меняет свое расположение в пространстве (z, y, σ), вращаясь вокруг единственной неподвижной точки: $z=0$; $y=0$; $\sigma = N / A$.

2. Как следует из формул (10.13), положение нейтральной оси определяется координатами силовой точки и не зависит от величины силы N. Следовательно, если сила N изменяет свою величину, не меняя точки своего приложения, то плоскость напряжений вращается вокруг той же нейтральной оси. Из формул (10.13) также следует, что нейтральная ось всегда проходит через квадрант, противоположный тому, где находится силовая точка (a_y и y_N, а также a_z и z_N всегда имеют разные знаки).

3. Если силовая точка перемещается, приближаясь к центру тяжести, и в пределе совпадает с ним ($y_N \to 0$; $z_N \to 0$), то нейтральная ось при этом удаляется в бесконечность (см. (10.13)), то есть плоскость напряжений становится параллельной плоскости сечения, отстоящей от нее на расстоянии $\sigma = N / A$. Получаем случай осевого действия нагрузки с равномерным распределением напряжений по сечению.

В противоположном случае, при удалении силы N в бесконечность (с одновременным уменьшением величины силы – иначе, как следует из формулы (10.10), будут неограниченно увеличиваться моменты M_y, M_z), отрезки $a_y \to 0$ и $a_z \to 0$, то есть нейтральная ось приближается к центру тяжести и в пределе проходит через него. Это характерно для косого изгиба при наличии моментов M_z, M_y и отсутствии N.

Таким образом, как и следовало ожидать, внецентренное действие сил в качестве частных случаев включает осевое растяжение (сжатие) и косой (или плоский) изгиб.

Далее рассмотрим три теоремы, определяющие изменение положения нейтральной оси в связи с перемещением силовой точки в плоскости сечения стержня.

Теорема 1. *Если силовая точка перемещается по прямой, проходящей через центр тяжести, то нейтральная ось смещается параллельно самой себе в том же направлении*

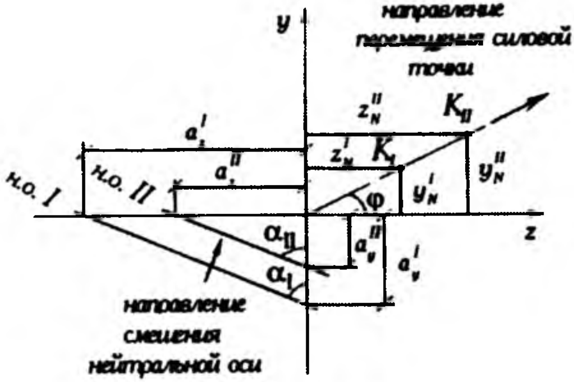


Рис. 10. 15

Доказательство. На рис. 10.15 показаны два произвольных положения силовой точки K_I и K_{II} на прямой, проходящей через центр тяжести (само сечение стержня не изображено), а также соответствующие нейтральные оси *I* и *II*. Необходимо доказать параллельность этих двух линий, то есть равенство углов α_I и α_{II}.

Имеем (с учетом формул (10.13):

$$\operatorname{tg}\alpha_I = \frac{a_z^{I}}{a_y^{I}} = \frac{i_y^2}{i_z^2}\cdot\frac{y_N^{I}}{z_N^{I}} = \frac{i_y^2}{i_z^2}\operatorname{tg}\varphi;$$

$$\operatorname{tg}\alpha_{II} = \frac{a_z^{II}}{a_y^{II}} = \frac{i_y^2}{i_z^2}\cdot\frac{y_N^{II}}{z_N^{II}} = \frac{i_y^2}{i_z^2}\operatorname{tg}\varphi.$$

Следовательно, $\operatorname{tg}\alpha_I = \operatorname{tg}\alpha_{II}$ то есть $\alpha_I = \alpha_{II}$, что и доказывает теорему.

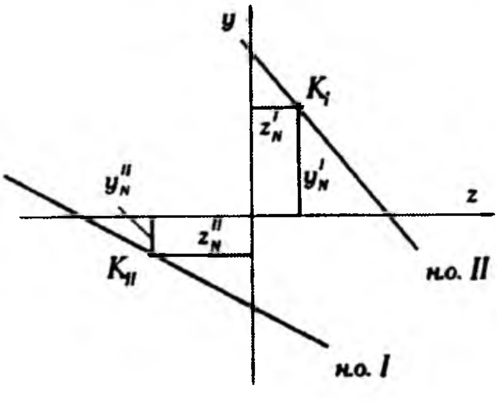


Рис. 10.16

Теорема 2. *Если силовую точку K_I (рис. 10.16) перенести в положение K_{II} на нейтральной оси I, то новая нейтральная ось II пройдет через первоначальную силовую точку K_I.*

Доказательство. Уравнение нейтральной оси *I*:

$$1 + \frac{y_N^{I} y_0}{i_z^2} + \frac{z_N^{I} z_0}{i_y^2} = 0.$$

Так как на этой линии располагается точка K_{II}, то имеет место следующее *тождество*:

$$1+\frac{y_N^{I} y_N^{II}}{i_z^2}+\frac{z_N^{I} z_N^{II}}{i_y^2}=0. \qquad (a$$

Уравнение нейтральной оси II:

$$1+\frac{y_N^{II} y_0}{i_z^2}+\frac{z_N^{II} z_0}{i_y^2}=0.$$

Если в последнее уравнение подставить координаты точки K_I (y_N^I; z_N^I) образу-ется выражение (a), являющееся тождеством. Это доказывает, что нейтральная ос II проходит через точку K_I. Теорема доказана.

Теорема 3. *Если силовая точка перемещается по прямой L, не проходящеі через центр тяжести сечения, то нейтральная ось поворачивается вокруг неко-торой точки K. При переносе силы в точку K соответствующая нейтральнаі ось будет совпадать с прямой L.*

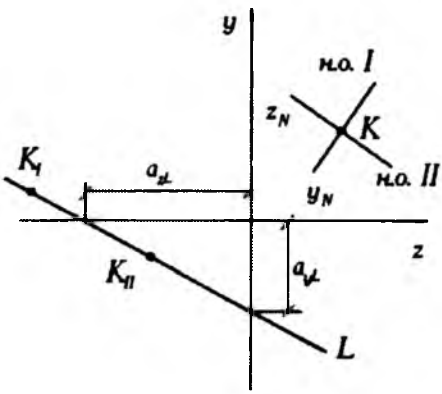


Рис. 10.17

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пуст a_{zL}, a_{yL} – отрезки, отсекаемые прямой L на осях координат (рис. 10.17). С по-мощью формул (10.13) определяются y_N и z_N – координаты силовой точки, дл которой нейтральной осью является ли-ния L. Последовательность точек на ли-нии L (K_I, K_{II} и т.д.), имитирующа перемещение силовой точки вдоль этоі линии можно толковать как результать неоднократных переносов силы из точк K: сначала в точку K_I, затем в точку K_{II} и т.д. Тогда на основании теоремы 2 можно утверждать, что все нейтральны оси, соответствующие силовым точкам K_I, K_{II}, на линии L, будут проходить чере точку K, то есть будет иметь место эффект поворота нейтральной оси вокруг точк K, что и доказывает теорему.

10.3. Ядро сечения

С помощью установленных теорем познакомимся с понятием *ядра сечения*. Рас-смотрим поперечное сечение стержня, изображенные на рис. 10.18. Если силовую точку, первоначально расположенную в центре тяжести сечения O, перемещать вдоль луча OI, то, согласно теореме 1, нейтральная ось, смещаясь параллельно самой себе, будет приближаться к центру тяжести с противоположной стороны. При таком ее смещении обязательно наступит момент, когда нейтральная ось коснется сечения. Пусть это произойдет при положении внецентренно приложенной силы в точке K_I.

Поскольку при этом по одну сторону от нейтральной оси находится все сечение, напряжения во всех его точках будут одного знака, а в точке касания $\sigma = 0$.

Проводя мысленно из центра тяжести O множеств других лучей и подобным образом найдя на каждом луче точки K_{II}, K_{III} и т.д., образуем из этих точек замкнутый контур, ограничивающий *вокруг центра тяжести область, обладающую тем свойством, что при действии силы внутри этой области (или на ее границе) во всем сечении возникают напряжения одного знака*. Эта область называется *ядром сечения*.

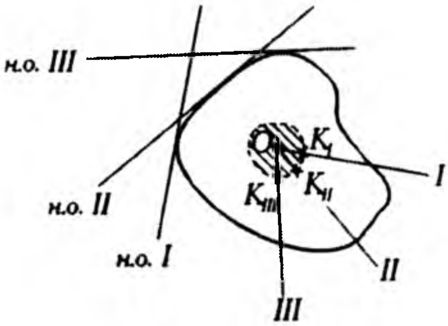


Рис. 10.18

На практике ядро сечения используется, например, при проектировании внецентренно сжатых колонн, выполненных из хрупкого материала (бетон, кирпич и т.п.). Как известно, хрупкие материалы обладают значительно меньшей прочностью на растяжение, чем на сжатие. Поэтому колонну стремятся запроектировать так, чтобы в поперечном сечении вообще не возникало бы растягивающих напряжений. Очевидно, что это достигается в том случае, если во всех сечениях колонны продольная сжимающая сила не выходит за пределы ядра сечения.

Из определения ядра сечения вытекает порядок его построения: если нейтральная ось касается сечения, то силовая точка находится на контуре ядра.

Формулы (10.13) перепишем в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} y_N &= -\frac{i_z^2}{a_y}; \\ z_N &= -\frac{i_y^2}{a_z}. \end{aligned}\right\} \tag{10.14}$$

Для любого положения нейтральной оси, определяемой отрезками a_y и a_z на осях y и z, можно найти соответствующую силовую точку (z_N, y_N). Поэтому, проведя необходимое количество нейтральных осей, касающихся сечения, для каждой из них находим по формулам (10.14) точку на контуре ядра. Соединяя последние линией, получаем контур ядра сечений. Минимальное количество касательных в виде нейтральных осей, которые необходимо проводить для определения контура ядра, зависит от формы поперечного сечения стержня.

Рассмотрим несколько примеров построения ядра сечения.

Прямоугольник (рис. 10.19). Квадраты радиусов инерции:

$$i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{hb^3}{12bh} = \frac{b^2}{12}; \qquad i_z^2 = \frac{J_z}{A} = \frac{h^2}{12}.$$

Проведем нейтральную ось по касательной к правой грани фигуры (н.о.I). Имеем $a_z = b/2$; $a_y = \infty$ (т.к. н.о.I параллельна оси y). По формуле (10.14) получим:

$$y_N = 0;$$

$$z_N = -\frac{b^2}{12}\cdot\frac{2}{b} = -\frac{b}{6}.$$

Соответствующая точка на контуре ядра – K_I.

Аналогичным образом, проведя нейтральные оси вдоль трех других граней фигуры (II, III и IV), получим еще три точки на контуре ядра – K_{II}, K_{III}, K_{IV}. Теперь возникает вопрос: как, имея только четыре полученных контурных точки ядра, построить ядро целиком? Докажем, что контур ядра образуется путем соединения точек K_I и K_{II}, K_{II} и K_{III}, K_{III} и K_{IV}, K_{IV} и K_I – отрезками прямых. Действительно, переход нейтральной оси из положения I в положение II можно представить как вращение вокруг вершины прямоугольника T_1. Но согласно теореме 3, вращение нейтральной оси вокруг точки связано с перемещением силовой точки по прямой – здесь это прямая L, проходящая через точки K_I и K_{II}. Итак, приходим к выводу о том, что при движении силовой точки по прямому участку K_I K_{II} контура ядра сечения соответствующая нейтральная ось будет "обкатывать" сечение, вращаясь вокруг вершины T_1. Рассуждая аналогичным образом по поводу вращения нейтральной оси вокруг точек T_2, T_3 и T_4, приходим к форме ядра, показанной на рис. 10.19.

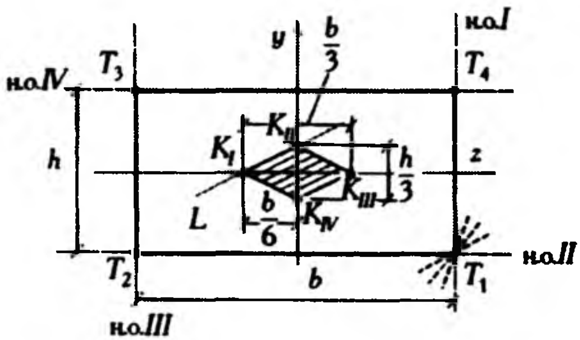


Рис. 10.19

Заметим, что ядро сечения – ромб с диагоналями длиной $b/3$ и $h/3$ – занимает всего 1/18 часть всей площади сечения стержня.

Рис. 10.20 показывает как меняется распределение напряжений по сечению прямоугольника при перемещении силовой точки по оси z. Для каждого положения силовой точки ($K_I \div K_V$) напряжения зависят только от z (см. формулу (10.11) при $z_N \neq 0$; $y_N = 0$). Эпюры этих напряжений приведены для пяти положений силовой точки. Обратим внимание на то, что, как и отмечалось ранее, перемещение силовой точки по сечению вызывает поворот эпюры σ вокруг неподвижной точки, отмеченной крестиком. С помощью формулы (10.11) можно показать, что при любом положении силы на оси z напряжения σ_{max} и σ_{min} в сечении имеют следующие значения:

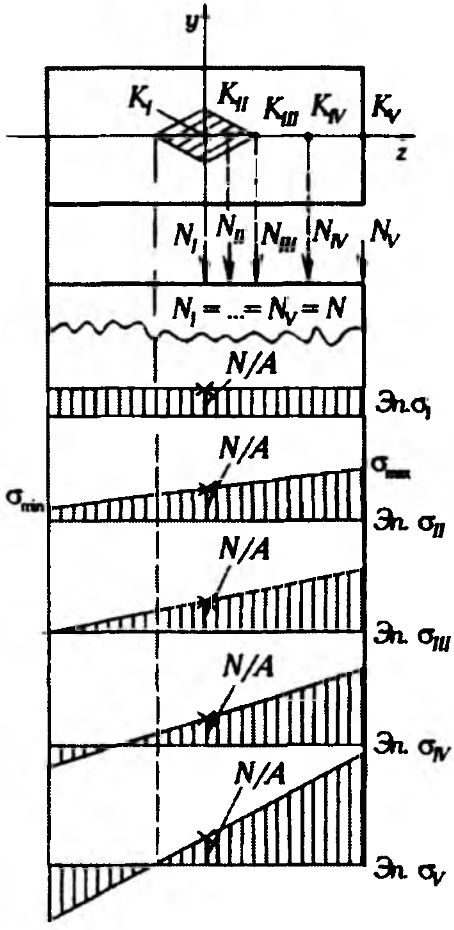


Рис. 10.20

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{6z_N}{b}\right);$$

$$\sigma_{min} = \frac{N}{A}\left(1 - \frac{6z_N}{b}\right).$$

Двутавр (рис. 10.21). Так как двутавр выпуклой фигурой не является, при построении ядра сечения касательные следует проводить только такие, при которых вся фигура оказывается по одну сторону от касательной (см. рис. 10.21). Таким образом, касательные к двутавру совпадают с касательными к прямоугольнику *abcd*. Поэтому ядро двутаврового сечения также имеет форму ромба. Однако размеры последнего не совпадают с размерами ядра сечения для прямоугольника, так как в формулах (10.14) i_z^2 и i_y^2 для двутавра и прямоугольника будут разными. На рис. 10.21 изображено ядро сечения двутавра (сплошная линия) и, для сравнения, ядро сечения прямоугольника (штриховая линия).

Если форма сечения такова, что касательные, определяющие ядро, параллельны осям z или y (прямоугольник, двутавр, швеллер, круг), то формулам (10.14) можно придать другой вид, представив $i_z^2 = J_z / A$ и $i_y^2 = J_y / A$. Так как в этих случаях $a_y = \pm y_{max}$ и $a_z = \pm z_{max}$, то

$$\left.\begin{aligned} y_N &= \pm\frac{J_z}{Ay_{max}} = \pm\frac{W_z}{A}; \\ z_N &= \pm\frac{J_y}{Az_{max}} = \pm\frac{W_y}{A}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.15)$$

где W_z, W_y – моменты сопротивления сечения относительно главных осей z и y.

Круг (рис. 10.22). Ядро сечения также представляет собой круг, для определения радиуса которого достаточно рассмотреть одну нейтральную ось, касающуюся

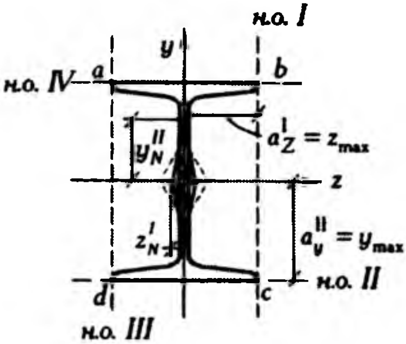


Рис. 10.21

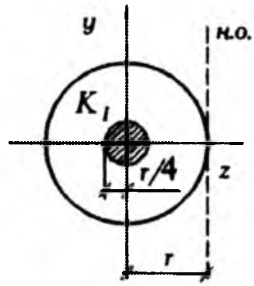


Рис. 10.22

сечения в произвольной точке контура. Для касательной н.о. I, изображенной на рис. 10.22, имеем $a_z = r$, $a_y = \infty$. Так как $i_y^2 = \dfrac{\pi r^4}{4} / \pi r^2 = r^2 / 4$, то по формуле (10.14) получим

$$z_N = -\frac{r^2}{4} / r = -\frac{r}{4} \ .$$

Рис. 10.23

Итак, для круга радиуса r ядро сечения представляет собой круг радиуса $r/4$, занимающий $1/16$ часть всей площади сечения стержня.

В заключении заметим, что с помощью теоремы 3 можно легко доказать следующее свойство ядра сечения: для сечения любой формы ядро всегда представляет собой выпуклую фигуру, то есть фигуру, целиком содержащую отрезок, соединяющий две любые ее точки (на рис. 10.23, *а* показан пример выпуклой фигуры, на рис. 10.23, *б* – невыпуклой).

10.4. Изгиб с кручением круглых валов

Совместное действие изгиба с кручением испытывают оси редукторов, валы двигателей, ведущие оси колесных пар локомотивов и многие другие элементы технических устройств. Рассмотрим, например, работу круглого стержня, показанного на рис. 10.24, находящегося под воздействием силы P.

Эпюры изгибающего момента $M_и$, поперечной силы Q_z и крутящего момента $M_к$ показаны справа от стержня. Видно, что участок стержня длиной a испытывает деформацию плоского изгиба, а второй участок длиной b – совместное действие изгиба и кручения. Рассмотрим напряженное

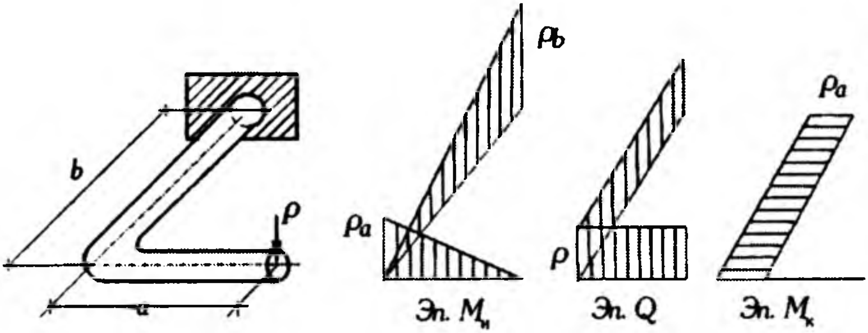


Рис. 10.24

состояние сечения в заделке, где имеется изгибающий момент $M_и = Pb$, крутящий момент $M_к = Pa$ и поперечная сила $Q = P$ (рис. 10.25). Здесь показаны эпюры нормальных и касательных напряжений, возникающих в

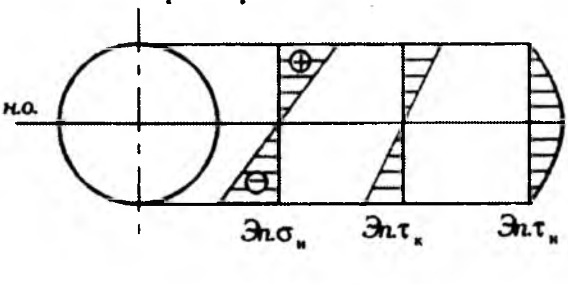


Рис. 10.25

этом сечении. Напомним, что

$$\sigma_и = \frac{M_и}{J_{н.о.}}y; \quad \tau_к = \frac{M_к}{J_\rho}\rho$$

и $$\tau_и = \frac{QS^{отс}_{н.о.}}{J_{н.о.}b}.$$

Взаимная ориентация этих напряжений, действующих в произвольной точке M поперечного сечения, показана на рис. 10.26.

Нормальное напряжение σ перпендикулярно плоскости поперечного сечения, касательное напряжение $\tau_к$ перпендикулярно радиусу ρ и лежит в плоскости сечения, а напряжение $\tau_и$ параллельно поперечной силе. Последние напряжения обычно невелики, поэтому опасные точки A и B лежат на контуре поперечного сечения в плоскости действия изгибающего момента где нормальные напряжения изгиба и касательные напряжения кручения одновременно достигают наибольших значений, а касательные напряжения, связанные с поперечной силой, отсутствуют.

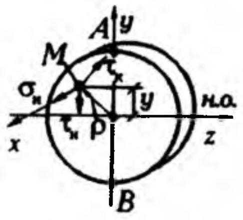


Рис. 10.26

В точках A и B

$$\sigma_и = \pm\frac{M_и}{W_{н.о.}} \quad , \text{ а } \quad \tau_к = \frac{M_к}{W_\rho} . \qquad (10.16)$$

Напряженное состояние элемента, вырезанного в окрестности точки A, показано на рис. 10.27.

Таким образом, в опасной точке мы имеем частный случай плоского напряженного состояния (когда одно из нормальных напряжений отсутствует), а главные напряжения определяются соотношениями

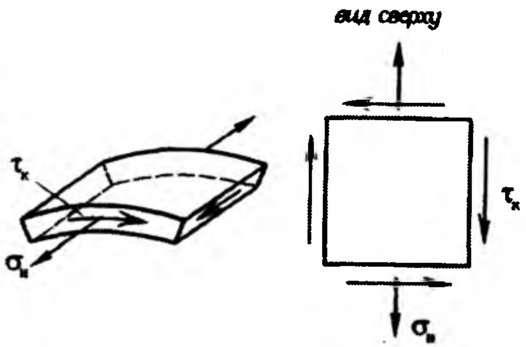


Рис. 10.27

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_и}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_и}{2}\right)^2 + \tau_к^2} . \qquad (10.17)$$

Поэтому в таких случаях для расчета необходимо воспользоваться теориями прочности. По III-й теории прочности, когда $\sigma_1 - \sigma_3 \le R$, из (10.17) получим

$$\sqrt{\sigma_и^2 + 4\tau_к^2} \le R . \qquad (10.18)$$

Аналогичным образом по IV-й теории прочности (см. главу 9) найдем

$$\sqrt{\sigma_и^2 + 3\tau_к^2} \le R . \qquad (10.19)$$

Используя (10.16) и учитывая, что для круглых сечений $W_\rho = 2W_{н.о.}$ из (10.18) и (10.19) получим

$$\frac{\sqrt{M_и^2 + M_к^2}}{W_{н.о.}} \le R \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{M_и^2 + 0{,}75M_к^2}}{W_{н.о.}} \le R . \qquad (10.20)$$

Числители этих выражений называют эквивалентными моментами по III и IV-й теориям прочности соответственно, т.е.

$$M_{экв}^{III} = \sqrt{M_и^2 + M_к^2} \quad \text{и} \quad M_{экв}^{IV} = \sqrt{M_и^2 + 0{,}75M_к^2} . \qquad (10.21)$$

Тогда условие прочности по третьей и четвертой теориям запишутся одинаково

$$\sigma_{экв}^{(i)} = \frac{M_{экв}^{(i)}}{W_{н.о.}} \le R . \qquad (10.22)$$

где индекс i приобретает соответственно значение III или IV.

Если исследуемое сечение одновременно испытывает воздействие изгибающих моментов в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях, то предварительно отыскивается суммарный изгибающий момент

$$M_и = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} .$$

Рассмотрим пример расчета вала, находящегося в состоянии равновесия (рис. 10.28). Пусть P = 10 $кН$; T = 20 $кН$; r = 10 $см$; R = 200 $МПа$; α = 45^0. Требуется определить диаметр вала по III-й теории прочности.

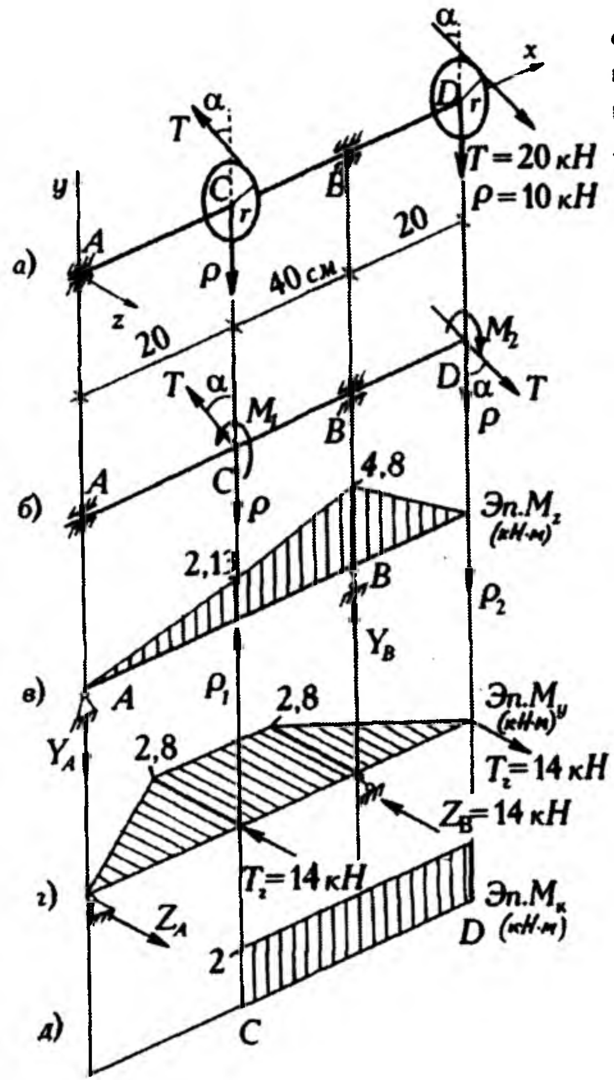


Рис. 10.28

Перенесем все силы на продольную ось вала, при этом учтем, что при параллельном переносе необходимо приложить пару сил с моментом, равным моменту переносимой силы относительно той точки, куда эта сила переносится. Очевидно, $M_1 = M_2 = Tr$. Полученная таким образом система нагрузок показана на рис. 10.28, *б*.

Рассмотрим вначале изгиб вала в вертикальной плоскости (рис. 10.28, *в*). В этом случае

$$P_1 = T\cos 45^0 - P = 20 \cdot 0{,}7 - 10 = 4 \ \ кН; \ P_2 = T\cos 45^0 + P = 24\,кН.$$

Определим реакции в опорах A и B ($Y_A = 10{,}7$; $Y_B = 30{,}7$ $кН$) и построим эпюры моментов $M_{верт} = M_z$. Рассмотрим теперь изгиб в горизонтальной плоскости усилиями $T_z = T\sin 45° \cong 14$ $кН$ (рис. 10.28, *г*). Аналогичным образом построим эпюру $M_{гор} = M_y$. Вал на участке CD (см. рис. 10.28, *б*) подвергается воздействию крутящего момента $M_к = M_1 = Tr = 20 \cdot 0{,}1 = 2$ $кН \cdot м$. Из анализа эпюр вытекает, что наиболее опасным является сечение B, где $M_y = 2{,}8$ $кН \cdot м$; $M_z = 4{,}8$ $кН \cdot м$; а $M_к = 2$ $кН \cdot м$.

Подсчитаем суммарный изгибающий момент

$$M_и = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{2{,}8^2 + 4{,}8^2} = 5{,}6 \ кН \cdot м \ .$$

Эквивалентный момент по третьей теории прочности

$$M_{экв}^{III} = \sqrt{M_и^2 + M_к^2} = \sqrt{5{,}6^2 + 2^2} = 5{,}9 \ \ кН \cdot м.$$

Запишем условие прочности $\left(W_{и.о.} = \dfrac{\pi d^3}{32} \right)$:

$$\sigma_{экв}^{III} = \frac{M_{экв}^{III}}{W_{и.о.}} = \frac{M_{экв}^{III} \cdot 32}{\pi d^3} \le R,$$

откуда найдем

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{32 M_{экв}^{III}}{\pi R}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 5{,}9 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 200 \cdot 10^6}} = 1{,}4 \cdot 10^{-2}\,м = 1{,}4\,см.$$

ГЛАВА 11. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

11.1. Общие понятия

При рассмотрении простых деформаций стержня (растяжение-сжатие, сдвиг, изгиб, кручение) и некоторых видов сложного сопротивления постоянно отмечалось, что надежность всей конструкции и ее элементов обеспечивается при выполнении условия прочности (ограничение напряжений и усилий) и, если это необходимо, условия жесткости (ограничения перемещений или деформаций). Однако бывают такие случаи работы стержней и целых конструкций, при которых выполнение указанных требований еще не гарантирует их надежность. Иными словами, может оказаться, что условия прочности и жесткости являются лишь необходимыми, но недостаточными критериями надежности: следует еще обеспечить выполнение *требования устойчивости* для сооружения в целом и отдельных его элементов.

Исследованию задач устойчивости различных сооружений посвящен специальный раздел механики твердого деформируемого тела – теория устойчивости. В курсе сопротивления материалов обычно рассматривается одна из простейших задач такого рода – *устойчивость центрально сжатого стержня*. Решение этой задачи составляет содержание настоящей главы.

Сначала познакомимся с некоторыми необходимыми понятиями и терминами.

Известно, что тела или системы тел могут находиться в *устойчивом* или *неустойчивом равновесии* в зависимости от их геометрии, характера внешнего воздействия и других причин. Пусть некоторое сооружение под действием внешних сил находится в состоянии равновесия. Приложим к нему *дополнительное*, так называемое *возмущающее воздействие*, отклоняющее сооружение от исходного состояния. Если после снятия этого воздействия сооружение будет стремиться к прежнему состоянию равновесия, то последнее считается устойчивым. При состоянии неустойчивого равновесия, несмотря на снятие возмущающего воздействия, в конструкции проявляется тенденция к еще большему отклонению от исходного состояния. Переход сооружения из устойчивого равновесия в неустойчивое называется *потерей устойчивости*, а соответствующее этому пограничное состояние – *критическим*. Часто критическое состояние может быть отождествлено с состоянием *безразличного равновесия*, при котором отклонения сооружения (или тела вообще), вызванные возмущающими воздействиями, сохраняются неизменными после снятия этих воздействий.

Сказанное выше проиллюстрируем на двух примерах. На рис. 11.1 показаны три совершенно очевидных качественно разных случая равновесия тяжелого шарика: устойчивое (рис. 11.1, *а*), неустойчивое (рис. 11.1, *б*) и безразличное (рис. 11.1, *в*). Ясно, что в каждом из этих случаев качество равновесия легко устанавливается с помощью приведенного выше критерия.

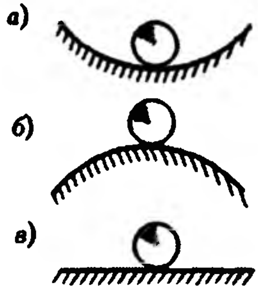


Рис. 11.1

Второй пример – равновесие сжатого силой P стержня (рис. 11.2, *а*). Стержень предполагается *идеализированным*: его ось – прямая линия, а внешняя сила приложена строго по этой оси. Исходное равновесное состояние стержня – осевое сжатие. Если с помощью весьма малых дополнительных поперечных нагрузок стержень искривить, то в его сечениях появятся изгибающие моменты, вызванные сжимающей силой P

$$M(x)=P\left(v_{max}-v(x)\right). \tag{11.1}$$

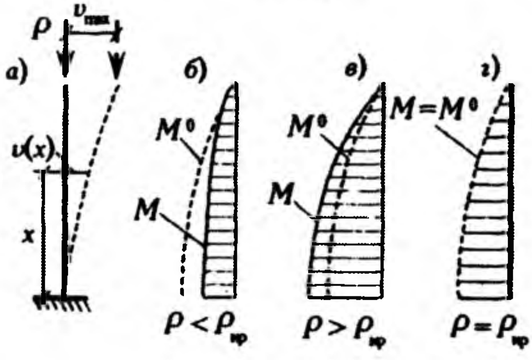


Рис. 11.2

Известно (см. главу 7), что при равновесии изогнутого стержня воспринимаемые изгибающие моменты $M^0(x)$ и уравнение изогнутой оси $v(x)$ связаны зависимостью

$$M^0(x) = EJv''(x) \quad .$$

На рис. 11.2, *б* эпюра $M^0(x)$ изображена штриховой линией.

Так как *фактические* изгибающие моменты $M(x)$, возникающие в сжатом стержне при его дополнительном изгибе по кривой $v(x)$, зависят от силы P (11.1), то возможны три следующих случая.

1. Сила P мала и поэтому $M(x) < M^0(x)$ (рис. 11.2, *б*). Так как моменты $M(x)$ недостаточны для удержания, то есть уравновешивания стержня в изогнутом состоянии, последний начинает выпрямляться. При этом уменьшаются и $M(x)$ и $M^0(x)$, а условие $M(x) < M^0(x)$ все время сохраняется. Так будет происходить до полного выпрямления стержня, при котором $M(x) = M^0(x) = 0$. Таким образом, при малых силах P сжатый стержень после искривления возвращается в исходное прямолинейное состояние.

2. Сила P велика и $M(x) > M^0(x)$ (рис. 11.2, *в*). Этот случай противоположен случаю 1: уже не возмущающие силы, а $M(x)$ начинают искривлять стержень еще сильнее. При этом моменты $M(x)$ и $M^0(x)$ увеличиваются при сохранении неравенства $M(x) > M^0(x)$, поэтому процесс изгиба продолжается дальше. Следовательно, при больших силах P сжатый стержень, будучи слегка искривленным, продолжает искривляться сам, удаляясь от исходного прямолинейного состояния.

3. Сила P такова, что $M(x) = M^0(x)$ (рис. 11.2, *г*). Стержень находиться в равновесии. Если теперь все прогибы изменить в K раз, то $v''(x)$ изменится аналогично, то есть равенство $M(x) = M^0(x)$ сохранится, а значит стержень опять будет в равновесии. Такую силу P назовем *критической*.

Таким образом, в зависимости от величины сжимающей силы возможны следующие виды равновесного состояния стержня:

при $P < P_{кр}$ – равновесие сжатого стержня устойчиво;

при $P > P_{пр}$ – равновесие сжатого стержня неустойчиво;

при $P = P_{кр}$ – безразличное равновесие сжатого стержня.

В условиях нормальной эксплуатации потеря устойчивости всего сооружения или любой его части, как правило, недопустима. Поэтому наряду с другими требованиями (прочности, жесткости и т.п.) обеспечение устойчивости является обязательным условием надежного существования сооружений.

Обратим внимание на следующее важное обстоятельство. Сказанное выше об устойчивом, неустойчивом и безразличном равновесии относится к идеализированному стержню или сооружению, составленному из таких стержней. Реальные стержни, в отличие от идеализированных, всегда имеют некоторое изначальное искривление оси, связанное с дефектами изготовления и монтажа. Внешние силы действуют также не точно по оси стержня. Поэтому реальный стержень с начала загружения находится под дейст вием не только продольных сжимающих сил, но и изгибающих моменто вызванных сжимающими силами. Такое состояние стержня называетс *продольным изгибом*.

Таким образом, реальный стержень при любой сжимающей силе нахо дится в *равновесном изогнутом* состоянии, а значит нет и проблемы ус тойчивости такого стержня, связанной со сменой форм равновесия. Тогд возникает вопрос: как согласовать сказанное выше с общепринятой провер

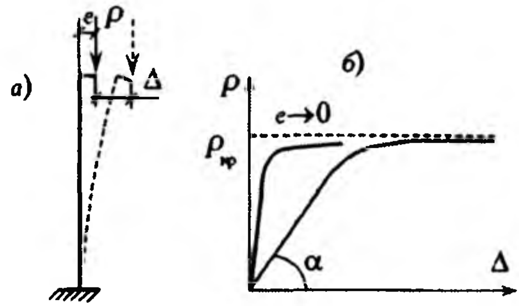


Рис. 11.3

кой сжатых элементов ре альных конструкций на ус тойчивость? Ответить н этот вопрос поможет анали следующего примера. Каче ственные особенности пове дения "реального" сжатог стержня можно установит рассматривая внецентренн сжатый стержень, показан ный на рис. 11.3, *а*. Иссле дованиями установлена зави симость между величиной сжимающей силы P и прогибом верхнего сечени стержня Δ (рис. 11.3, *б*). Как видно, на начальной стадии загружения су ществует практически прямая пропорциональность между P и Δ, а проги бы Δ невелики. Угол наклона этой прямой α зависит от e и приближаетс к $\pi/2$, когда $e \to 0$. При дальнейшем увеличении силы P график заметн искривляется, становиться более пологим и асимптотически приближается горизонтали, отмеченной штриховой линией. Существенным является т что ординаты точек асимптоты равны $P_{кр}$ для стержня такой же жесткост и расчетной схемы, но идеализированного. Таким образом, приближени силы P, сжимающей реальный стержень, к значению $P_{кр}$ ведет к практиче ски внезапному резкому искривлению оси, а значит и появлению больших изгибающих моментов в сечениях стержня (см. формулу (11.1)). Последнее недопустимо в связи с возникновением дополнительных нормальных напря- жений от изгиба, не учитываемых при расчете сжатого стержня.

Следовательно, проверка сжатого реального стержня на устойчивость должна состоять в сопоставлении величины фактической сжимающей силы с критической силой, соответствующей идеализированному стержню той же схемы и жесткости. Поэтому условие устойчивости сжатого стержня можно записать так:

$$P \le \frac{P_{кр}}{kk'} \,, \qquad (11.2)$$

где k – коэффициент надежности по материалу, учитывающий возможные отклонения характеристик прочности материала от нормативного значения; k' – дополнительный коэффициент запаса при расчетах на устойчивость, учитывающий снижение несущей способности сжатого стержня за счет случайных эксцентриситетов; исследованиями установлено, что k' зависит от отношения l/i (l – длина стержня; i – радиус инерции сечения) и меняется в пределах от 1,0 до 1,4.

Для использования условия устойчивости (11.2) необходимо знание величины $P_{кр}$, к определению которой переходим ниже.

11.2. Определение критической силы

Рассмотрим сжатый силой $P_{кр}$ идеализированный стержень, находящийся в состоянии безразличного равновесия, то есть в искривленном равновесном состоянии (рис. 11.4). Вертикальные реакции опор отсутствуют, и изгибающий момент в произвольном сечении этого стержня, испытывающего продольный изгиб, равен $-P_{кр}v$ (знак минус ставится потому, что момент отрицательный, а прогиб в принятой системе координат положительный). Тогда дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет вид

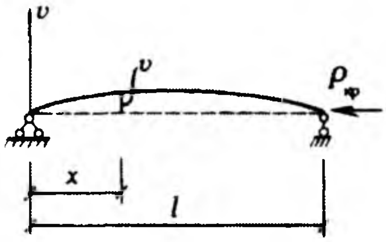


Рис. 11.4

$$EJv'' = -P_{кр}v$$

или, обозначая $P_{кр}/EJ = n^2$, получим

$$v'' + n^2 v = 0 \,. \qquad (11.3)$$

Решением этого линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами будет выражение

$$v = A\sin nx + B\cos nx \,.$$

Запишем два граничных условия, определяемые способом закреплени концов стержня:

$$1)\ \text{при}\ \ x = 0 \quad \upsilon = 0\ ;$$
$$2)\ \text{при}\ \ x = l \quad \upsilon = 0\ .$$

Из 1-го условия получаем $B = 0$, то есть тогда

$$\upsilon = A\sin nx\,, \tag{11.4}$$

следовательно, в состоянии продольного изгиба стержень изгибается по синусоиде.

Из 2-го условия имеем $A\sin nl = 0$, то есть либо $A = 0$, либо $\sin nl = 0$. Но величина A не может равняться нулю, так как в этом случае во всех сечениях стержня $\upsilon = 0$, что противоречит исходной предпосылке об изогнутом состоянии стержня. Следовательно, $\sin nl = 0$. Решением такого тригонометрического уравнения будет

$$nl = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots,\ m\pi\ \ldots,$$

где m – любое целое число; нуль – лишний корень, так как $n \neq 0$.

Тогда в общем случае $n = m\pi / l$; $n^2 = m^2\pi^2 / l^2$ и, учитывая, что $n^2 = P_{кр}/EJ$, получим

$$P_{кр} = \frac{m^2\pi^2 EJ}{l^2}\ . \tag{11.5}$$

Эта формула определяет множество критических сил, соответствующих $m = 1, 2, 3$ и так далее. Так как $n = m\pi/l$ и

$$\upsilon = A\sin nx = A\sin\frac{m\pi x}{l}\ ,$$

то каждой критической силе соответствует из указанного множества своя форма равновесного состояния или так называя *форма потери устойчивости*. На рис. 11.5 показаны формы потери устойчивости, соответствующие первой, второй и третьей критическим силам. Как видно, m есть число полуволн синусоиды в кривой потери устойчивости, отвечающей данной критической силе.

Очевидно, что с инженерной точки зрения интерес представляет наименьшая из множества (11.5) критическая сила то есть

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}\ . \tag{11.6}$$

Эта формула получена известным математиком Л. Эйлером (1707-1783) и носит его имя.

Заметим, что с помощью граничных условий была определена лишь одна постоянная интегрирования $B = 0$. Другая постоянная A осталась неопределенной. Это обстоятельство имеет простое механической объяснение. Под действием силы $P_{кр}$ стержень находится в состоянии безразличного равновесия, значит размер A (амплитуда синусоиды) может быть *любым*, то есть он неопределен.

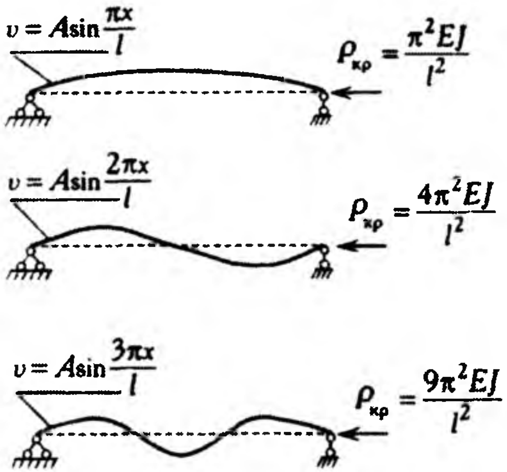


Рис. 11.5

При выводе формулы Эйлера учитывались особенности данной схемы закрепления стержня. Поэтому полученное выражение критической силы (11.6) применимо только для рассмотренной схемы стержня, шарнирно опертого по концам. Для стержней с другими опорными устройствами можно провести решения таким же образом. Результаты решения для трех других вариантов закрепления стержня приведены на рис. 11.6. Как видно, формулы критических сил отличаются друг от друга лишь коэффициентами. Поэтому можно придать всем формулам критической силы единообразный вид:

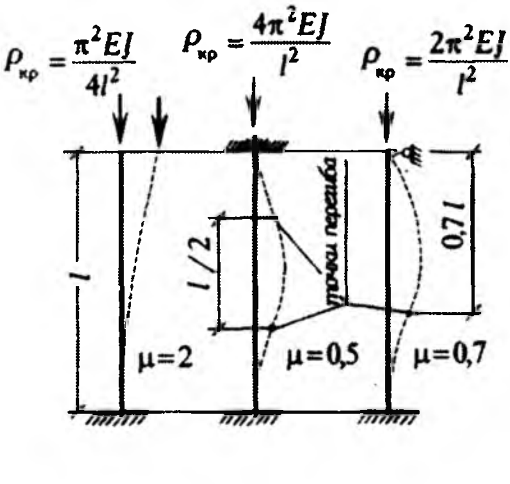


Рис. 11.6

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 EJ}{l_p^2}, \quad (11.7)$$

где μ — *коэффициент приведения длины*, зависящий от способа закрепления концов стержня; l — фактическая длина стержня; l_p — *расчетная* длина стержня.

Рассматривая формы потери устойчивости стержней, изображенных на рис. 11.6, и сопоставляя их со значениями μ, приведенными там же, видим, что коэффициент приведения длины для всех случаев есть отношение длины полуволны синусоиды, связанной с очертанием оси потерявшего устойчивость стержня, к фактической длине стержня.

Потеря устойчивости сжатого стержня и соответствующая деформация продольного изгиба могут происходить в одной из двух главных плоскостей. Если схемы закрепления стержня в обеих главных плоскостях одинаковы, то потеря устойчивости происходит в плоскости наименьшей жесткости , так как при прочих равных условиях меньший момент инерции определяет меньшую критическую силу (см. формулу (11.7)). При различных схемах закрепления стержня в главных плоскостях $\left(\mu_z \neq \mu_y\right)$ необходимо вычислить две критические силы:

$$P_{кр(z)} = \frac{\pi^2 E J_y}{(\mu_z l)^2} \qquad \text{и} \qquad P_{кр(y)} = \frac{\pi^2 E J_z}{(\mu_y l)^2} .$$

Здесь $P_{кр,z}$ и $P_{кр,y}$ — критические силы, соответствующие выпучиванию стержня в направлении осей z и y соответственно, когда поперечные сечения поворачиваются вокруг осей y и z.

Меньшая из этих сил определяет плоскость потери устойчивости и является критической силой для данного стержня.

11.3. Критическое напряжение, условие устойчивости

Критическим называется напряжение, возникающее в поперечном сечении прямого стержня при сжатии его критической силой. Для сжатых стержней критическое напряжение является опасным напряжением подобно тому, как для растянутых стержней из пластичного материала опасным является предел текучести. Выражение критического напряжения можно получить, используя формулу Эйлера:

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E J}{l_p^2 A} .$$

Так как $J/A = i^2$, где i – радиус инерции поперечного сечения, то

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E\, i^2}{l_\rho^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(l_\rho / i\right)^2}.$$

Безразмерная величина $\lambda = l_\rho / i$ называется *гибкостью стержня*. Следовательно

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \qquad (11.8)$$

Таким образом, критическое напряжение зависит от модуля продольной упругости материала стержня и его гибкости. В главе 2 было отмечено, что модули продольной упругости различных марок сталей практически не отличаются друг от друга. Поэтому для сжатых стоек нецелесообразно использовать высокопрочные легированные дорогие стали. Это не даст эффекта повышения несущей способности сжатых элементов.

Важным является и то, что формулу критического напряжения, как и формулу Эйлера можно использовать лишь тогда, когда $\sigma_{кр} < \sigma_{пц}$ ($\sigma_{пц}$ – предел пропорциональности материала стержня). Данное ограничение объясняется тем, что при выводе формулы Эйлера использовалось выражение $EJv'' = M$, основанное на применении закона Гука (см. главу 7). Поэтому все упомянутые выше выражения, в том числе формулы (11.7) и (11.8), справедливы лишь в зоне действия закона Гука. Так как с ростом гибкости критическое напряжение уменьшается, *наименьшая* гибкость λ_{min}, при которой справедлива формула Эйлера, соответствует $\sigma_{кр} = \sigma_{пц}$.

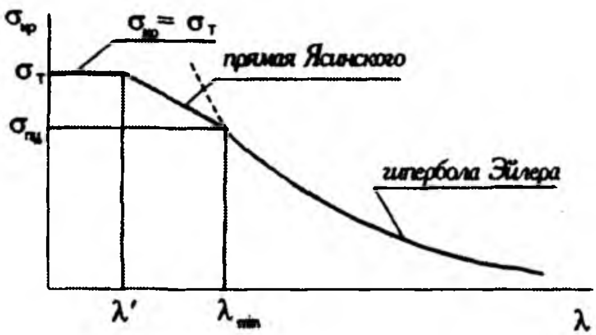


Рис. 11.7

Отсюда

$$\lambda_{min} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \qquad (11.9)$$

например, для стали, принимая $E = 2 \cdot 10^5$ *МПа*, $\sigma_{пц} = 200$ *МПа*, получаем $\lambda_{min} = 100$.

Итак, для длинных стержней с гибкостью $\lambda > \lambda_{min}$ использование формул (11.7) и (11.8) допустимо. Для коротких стержней ($\lambda < \lambda_{min}$) указанные две формулы дают неверный (завышенный) результат. В этих случаях величину критического напряжения можно найти, используя данные экспериментов. На рис. 11.7 показана зависимость $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ для строительной стали. Для $\lambda > 100$ график $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ построен с использованием формулы (11.8) (так называемая *гипербола Эйлера*). Как отмечалось выше, при $\lambda = \lambda_{min}$ имеем $\sigma_{кр} = \sigma_{пц}$. Эксперименты показали, что для очень коротких стержней с гибкостью λ от 0 до $\lambda' = 40$ можно принять $\sigma_{кр} = \sigma_T$, то есть для таких стержней определяющим является ограничение по прочности, не зависящим от λ. В интервале $40 \le \lambda \le 100$ критическое напряжение зависит от λ почти линейно. На основе обработки многочисленных экспериментов, проведенных в конце XIX века Л.Тетмайером, Ф.С.Ясинским и др., была предложена эмпирическая формула

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda, \tag{11.10}$$

где коэффициенты a и b определены для различных материалов, например, для Ст.3 $a = 310$ *МПа*, $b = 1{,}14$ *МПа*.

Итак, для всего диапазона изменения λ зависимость $\sigma_{кр} = f(\lambda)$ имеет вид

$$\sigma_{кр} = \begin{cases} \sigma_T & \text{для } \lambda \le \lambda', \\ a - b\lambda & \text{для } \lambda' \le \lambda \le \lambda_{min}, \\ \pi^2 E/\lambda^2 & \text{для } \lambda \ge \lambda_{min}. \end{cases} \tag{11.11}$$

Вернемся к записи условия устойчивости (11.2) и разделим обе его части на площадь стержня A.

Тогда получим

$$\sigma = \frac{P}{A} \le \frac{\sigma_{кр}}{kk'} = \frac{\sigma_T}{k} \cdot \frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T k'} .$$

Но $\sigma_T / k = R$ – расчетное сопротивление, а второй сомножитель есть безразмерный *коэффициент уменьшения расчетного сопротивления при продольном изгибе*, зависящий (через $\sigma_{кр}$ и k') от гибкости λ.

Обозначая

$$\frac{\sigma_{кр}}{\sigma_T k'} = \varphi ,$$

получим условие устойчивости сжатого стержня в виде

$$\sigma = \frac{P}{A} \le R\varphi . \tag{11.12}$$

Для стержней с $\lambda \approx 0$ $\sigma_{кр} = \sigma_T$ и $k' = 1$, поэтому $\varphi = 1$. При увеличении гибкости $\sigma_{кр}$ уменьшается, а k' возрастает. Следовательно, с ростом λ коэффициент φ уменьшается; интервал его изменения $0 \le \varphi \le 1$.

Для использования условия устойчивости (11.12) составлены таблицы коэффициента φ для различных материалов и для гибкостей $\lambda = 0, 10, 20, \ldots, 200$.

Далее рассмотрим вопросы использования условия устойчивости (11.12).

11.4. Использование условия устойчивости

Как видно, условие устойчивости сжатого стержня по внешнему виду напоминает запись условия прочности при растяжении (сжатии), рассмотренного в главе 2. Однако по смыслу эти ограничения различны. Условие прочности предохраняет стержень от разрушения материала при достижении нормальными напряжениями своего опасного значения (предел текучести для пластичных или предел прочности для хрупких материалов). Так как максимальные напряжения возникают в ослабленном сечении (если стержень имеет местные ослабления), то в условия прочности и при растяжении и при сжатии должна подставляться площадь "нетто". Следовательно, сжатый ослабленный стержень должен удовлетворять условию прочности

$$\sigma = \frac{P}{A_н} \le R \quad . \tag{11.13}$$

В отличие от условия прочности, условие устойчивости ограждает сжатый реальный стержень от продольного изгиба с большими прогибами и большими изгибающими моментами, которые не учитывались при расчете сжатого стержня. Как показано в примере на рис. 11.3, резкий рост прогибов реального сжатого стержня наступает при приближении действующей силы P к значению $P_{кр}$, зависящей от жесткости "брутто". Поэтому в условии устойчивости (11.12) $A = A_{бр}$. Таким образом, ослабленный сжатый стержень должен удовлетворять двум независимым условиям

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{P}{A_н} \le R; \\ \sigma &= \frac{P}{A_{бр}} \le R\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (11.14)$$

Если в сжатом стержне отсутствуют местные ослабления, то необходимость проверки условия прочности отпадает, поскольку $A_н = A_{бр}$ и выполнение второго условия (11.14) гарантирует выполнение и первого, так как $\varphi \le 1$.

При использовании условия устойчивости (11.12) возникает вопрос: в какой главной плоскости нужно производить проверку? Иными словами, важно знать, в каком из расчетов коэффициент φ будет меньше. Учитывая характер зависимости φ от λ, делаем вывод, что расчетной оказывается та из главных плоскостей, которой соответствует бо́льшая гибкость λ. Если способ опирания стержня в обеих плоскостях одинаков, то бо́льшая гибкость возникает в плоскости наименьшей жесткости.

Рассмотрим последовательность операций при проверке условия устойчивости сжатого стержня.

З а д а н ы: схема стержня, его длина, материал и размеры поперечного сечения, а также действующая сила P. Определим две гибкости стержня в его главных плоскостях: $\lambda_z = l_{pz} / i_z$; $\lambda_y = l_{py} / i_y$, где l_{pz} и l_{py} – расчетные длины в плоскостях, содержащих соответственно главные оси y и z. Для этого вычисляются главные моменты инерции сечения J_z, J_y, а затем радиусы инерции сечения $i_z = \sqrt{J_z / A}$; $i_y = \sqrt{J_y / A}$. Моменты инерции и площадь вычисляются без учета возможных местных ослаблений, то есть "брутто". Далее вычисляются гибкости λ_z, λ_y и по максимальной из них по таблице определяется соответствующий коэффициент φ. Теперь все необходимые величины подставляются в формулу (11.12), и решается вопрос о выполнении или невыполнении условия устойчивости.

Сходным образом решается задача по определению грузоподъемности заданного стержня, то есть максимальной допустимой нагрузки, при которой условие устойчивости выполняется в форме равенства. После нахождения φ сила P_{max} вычисляется по формуле

$$P_{max} = AR\varphi. \qquad (11.15)$$

При решении проектной задачи, то есть задачи подбора сечения (при заданной его форме), расчет осложняется тем, что в условии (11.12) от неизвестных параметров сечения зависит не только площадь A, но и коэффициент φ, связанный с гибкостью, а значит и с радиусом инерции сечения. Поэтому подбор сечения по условию устойчивости организуется как процесс последовательных приближений, в каждом из которых проверяется устойчивость некоторым образом назначенного сечения. Так как интервал изменения площади A неограничен, а φ меняется в узких пределах от 0 до 1, то назначение очередного сечения производится путем принятия некоторого коэффициента φ. Последовательность действий в первой итерации принимается следующей:

а) назначение φ_1, обычно $\varphi_1 = 0{,}5$;

б) вычисление площади $A \geq P/(R\varphi_1)$, после чего определяются размеры сечения, номера прокатных профилей и прочие параметры сечения;

в) вычисление J_z, J_y, далее i_z, i_y и λ_z, λ_y;

г) по наибольшей из гибкостей с помощью таблицы определяется φ_1^{T}.

Если различие между φ_1^{T} и φ_1 значительно, то рассматриваемое сечение не подходит – оно создает избыточный запас устойчивости (при $\varphi_1^{\text{T}} > \varphi_1$) или наоборот не обеспечивает устойчивости (при $\varphi_1^{\text{T}} < \varphi_1$). Поэтому необходимо произвести следующую итерацию. Очевидно, что если $\varphi_1 > \varphi^0$ (где φ^0 – коэффициент, соответствующий искомому сечению), то $\varphi_1^{\text{T}} < \varphi^0$ и наоборот: при $\varphi_1 < \varphi^0$ получим $\varphi_1^{\text{T}} > \varphi^0$. В связи с этим, второе приближение начинается с задания $\varphi_2 = (\varphi_1 + \varphi_1^{\text{T}})/2$ и дальнейшие действия выполняются как и на первой итерации до получения φ_2^{T}. Последующие итерации производятся в аналогичном порядке.

Если размеры сечения изменяются непрерывно, то $\left|\varphi_n - \varphi_n^{\text{T}}\right| < \left|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-1}^{\text{T}}\right|$ и описанный процесс последовательных приближений достаточно быстро сходится и заканчивается тогда, когда нормальное напряжение, вычисленное на очередном этапе по формуле (11.12) отличается от $R\varphi_n^{\text{T}}$ менее чем на 5 %. Если в сечение входит подлежащий определению прокатный профиль, то сходимость обычно имеет место лишь на первых итерациях. На заключительной стадии подбора сечения необходимо осуществить проверку устойчивости для некоторых ближайших прокатных профилей.

11.5. Продольно-поперечный изгиб

Рассмотрим стержень, загруженный поперечной нагрузкой и сжимающей силой P (рис. 11.8, *а*). В произвольном сечении стержня при этом возникают внутренние усилия:

продольная сила

$$N = -P \ , \tag{11.16, а}$$

и изгибающий момент

$$M(x) = M_0(x) - Pv, \tag{11.16, б}$$

где $M_0(x)$ – изгибающий момент от поперечной нагрузки; $(-Pv)$ – момент, образованный сжимающей силой относительно центра тяжести сечения, смещенного на величину прогиба v (на рис. 11.8, *а* моментная точка отмечена крестиком). Знак минус объясняется противоположностью знаков прогиба v и изгибающего момента от силы P.

На рис. 11.8,*б-г* показаны, соответственно, эпюры моментов от поперечной нагрузки, от сжимающей силы и суммарная эпюра $M(x)$. Рассмотренный здесь изгиб стержня называется *продольно-поперечным*, так как изгибающий момент M создается как поперечной, так и продольной сжимающей нагрузкой.

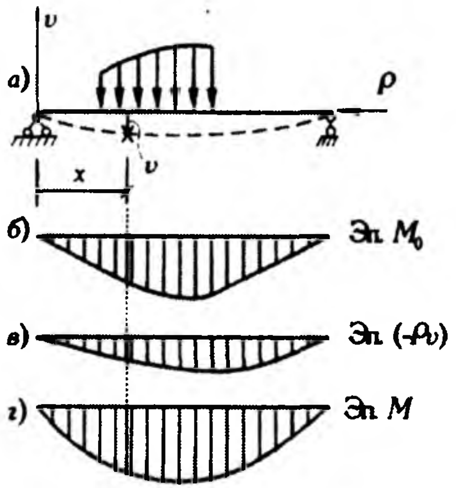


Рис. 11.8

Заметим, что во множестве простых и сложных видов деформаций стержня продольно-поперечный изгиб занимает особое место. Дело в том, что при продольно-поперечном изгибе *нарушается принцип независимости действия сил (принцип наложения или суперпозиции)*, утверждающий, что эффект совместного действия системы нагрузок равен сумме эффектов от действия каждой нагрузки по отдельности. Действительно, при действии только сжимающей силы P возникает лишь продольная сила $N = -P$; при действии поперечной нагрузки – момент $M = M_0$. При действии *тех и других нагрузок одновременно* возникают внутренние усилия, определяемые формулами (11.16, *а*) и (11.16, *б*). Как видно, слагаемое "$-Pv$" отсутствует при действии нагрузок порознь и появляется лишь при их совместном, одновременном действии. Это и подтверждает нарушение принципа независимости действия сил.

Очевидно, что при действии внешних сил, вызывающих продольно-поперечный изгиб, стержень находится в условиях совместного действия сжатия с изгибом. Поэтому в произвольном сечении стержня возникает следующее максимальное (по модулю) напряжение:

$$|\sigma|_{max} = \frac{P}{A} + \frac{M}{W} = \frac{P}{A} + \frac{M_0}{W} - \frac{Pv}{W} \; . \qquad (11.17)$$

Для вычисления $|\sigma|_{max}$ необходимо знание величины v – прогиба данного сечения от действия как поперечных нагрузок, так и сжимающей силы P. В главе 7 рассмотрены методы определения прогибов только от поперечных нагрузок. Ниже обсуждаются пути учета влияния сжимающей силы P на величину полного прогиба v.

Точный метод определения прогиба состоит в решении дифференциального уравнения изогнутой оси

$$EJv'' = M(x) = M_0(x) - Pv, \qquad (11.18)$$

откуда, обозначая $P/EJ = n^2$, получим

$$v'' + n^2 v = \frac{M_0(x)}{EJ} \; .$$

Это линейное дифференциальное уравнение нужно решить, найдя две постоянные интегрирования с помощью граничных условий. Полученное уравнение $v(x)$ определяет искомый прогиб в любом сечении стержня. Задача усложняется, если поперечные нагрузки образуют в пределах стержня несколько участков с различными выражениями $M_0(x)$. В этом случае определение постоянных интегрирования производится в порядке, сходном с изложенным в главе 7 при использовании метода непосредственного интегрирования. Также существует разработанный специально для продольно-поперечного изгиба вариант метода начальных параметров. Однако рассмотрение этого варианта выходит за рамки данного учебника.

Рассмотрим приближенный способ определения прогибов при продольно поперечном изгибе. Пусть на балку (рис. 11.9) вначале действует заданная поперечная нагрузка, вызывающая в балке изгибающие моменты $M_0(x)$ и прогибы $v_0(x)$. Эти функции связаны соотношением

$$EJv_0'' = M_0 \, . \qquad (a)$$

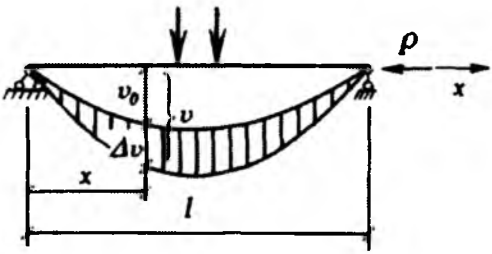


Рис. 11.9

Не снимая поперечной нагрузки, приложим к балке продольную силу P, которая вызовет дополнительные прогибы $\Delta v = v - v_0$. В этом состоянии дифференциальное уравнение изогнутой оси запишется в виде (11.18). Подставляя сюда $v = v_0 + \Delta v$, получим

$$EJv_0'' + EJ\Delta v'' = M_0(x) - Pv \, .$$

или, с учетом уравнения (a)

$$EJ\Delta v'' = -Pv \, . \qquad (б)$$

Суть приближенного способа заключается в том, что мы задаем вид кривой дополнительных прогибов Δv, согласованный с условиями закрепления на концах балки.

Для балки на двух опорах (рис. 11.9) примем

$$\Delta v = f \sin\frac{\pi x}{l} \, . \qquad (11.19)$$

При этом $\Delta v = 0$ при $x = 0$ и $x = l$, что и требуется.

Тогда $$\Delta v'' = -f\frac{\pi^2}{l^2}\cdot\sin\frac{\pi x}{l} = -\frac{\pi^2}{l^2}\Delta v \, . \qquad (в)$$

Но так как $\Delta v = v - v_0$, то из уравнений (б) и (в) получим

$$EJ\frac{\pi^2}{l^2}\left(v - v_0\right) = Pv \, . \qquad (c)$$

В нашем примере

$$\frac{\pi^2 EJ}{l^2} = P_{кр}$$

для стержня, шарнирно закрепленного по концам. Из (c) теперь найдем

$$v = \frac{v_0}{1 - \dfrac{P}{P_{кр}}} \, . \qquad (11.20)$$

Выражение (11.20) позволяет определить прогибы в любом сечении балки при продольно-поперечном изгибе и при других способах закрепления концов балки, если определять критическую силу при помощи выражения (11.7), которое здесь запишем в виде

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{н.о.}}{(\mu l)^2}. \tag{11.21}$$

Обратим внимание на то, что при вычислении критической силы в формулу (11.21) необходимо подставлять момент инерции относительно нейтральной оси при поперечном изгибе, это не всегда J_{min}.

Из выражения (11.20) следует, что если продольная сила приближается к критическому значению, то прогиб балки v стремится к бесконечности. Однако задача решалась с использованием линеаризированного уравнения изогнутой оси в виде (11.18), которое справедливо при малых прогибах и углах поворота. Расчеты показывают, что формула (11.20) дает достаточную для инженерных расчетов точность, если $P < 0{,}8\, P_{кр}$.

Так как прогибы балки при продольно-поперечном изгибе нелинейно зависят от силы P (см. выражение (11.20)), то напряжения в поперечном сечении (см. (11.17)) нелинейно зависят от нагрузки, если, например, все действующие на балку силы увеличить в k раз, то напряжения возрастут более, чем в k раз.

Отметим также необходимость проверки стержня на устойчивость в плоскости наименьшей жесткости, если поперечные нагрузки расположены в плоскости наибольшей жесткости.

ГЛАВА 12. ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК

12.1. Основные положения

В главе 1 отмечалось, что по характеру воздействия на сооружение внешние силы (нагрузки) подразделяются на две категории: *статические* и *динамические* (иногда говорят о статическом или динамическом действии нагрузок). Напомним, что под статическим понимается такое действие нагрузок, при котором величины, точки приложения и направления всех сил остаются неизменными или изменяются очень медленно. Нагружение, неудовлетворяющее хотя бы одному из указанных трех условий, считается динамическим.

Особенность динамического воздействия связана с наличием ускорений материальных точек сооружения, вызванных либо движением последнего как твердого тела, либо быстрым изменением деформаций, а следовательно и перемещений отдельных точек. Поэтому при динамическом действии нагрузок записываются уравнения движения, которые отличаются от уравнения равновесия тем, что в них дополнительно к действующим силам участвуют силы инерции, определяемые выражением

$$I_i = - m_i a_i \ , \qquad (12.1)$$

где m_i и a_i – масса и ускорение материальной точки. Принцип Даламбера утверждает, что если к системе активных сил, действующих на твердое тело или систему материальных точек, добавить силы инерции, выраженные по формуле (12.1), то полученную таким образом общую систему сил можно считать находящейся в равновесии. Это положение является обоснованием использования статических уравнений равновесия также и при решении динамических задач.

В зависимости от характера воздействия на сооружение динамические нагрузки подразделяются на несколько категорий. Укажем некоторые из них:

1) нагрузки, связанные с ускорениями точек (известными или определяемыми по правилам кинематики твердого тела);

2) кратковременные (импульсные) нагрузки, характеризуемые очень малым временем действия, и, как следствие, быстрым изменением скорости движения точек сооружений (взрывы, удары, внезапные остановки движущихся тел и т.п.);

3) неподвижные периодически изменяющиеся нагрузки, как правило, вызванные вращением нецентрированных масс и приводящие к вынужденным колебаниям сооружения;

4) нагрузки, связанные с быстрым перемещением масс по сооружению (например, прохождение поезда по пролетному строению моста);

5) сейсмические нагрузки, приводящие к резкому смещению фундаментов сооружения и вследствие этого воздействующие на само сооружение.

В курсе сопротивления материалов изучаются простейшие случаи действия динамических нагрузок, относящиеся к первому, второму и третьему пунктам приведенной выше классификации. Более сложные виды динамических воздействий рассматриваются в разделе строительной механики "Динамика сооружений", а также в других специальных курсах.

12.2. Расчеты элементов, движущихся с известными ускорениями

Рассмотрим определение динамических усилий и напряжений для следующих двух примеров.

А. Расчет троса при подъеме груза с заданным ускорением (рис. 12.1, *а*)

Пусть груз весом G поднимается тросом с ускорением a. Площадь сечения троса A и его объемный вес γ заданы. Требуется определить динамическую продольную силу $N_д$ и динамическое нормальное напряжение $\sigma_д$ в сечении троса на расстоянии x от груза.

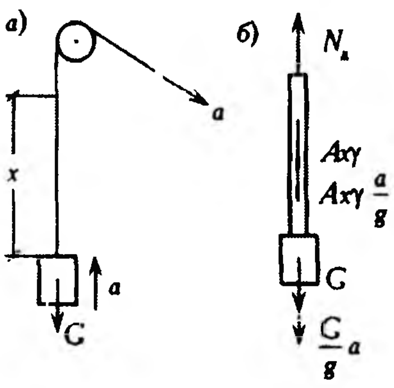


Рис. 12.1

Рассмотрим равновесие (в смысле Даламбера) отсеченной части троса с грузом (рис. 12.1, *б*). Эта часть троса, как видно, подвергается действию следующих сил:

1) вес груза и части троса $G+Ax\gamma$;

2) силы инерции груза и троса

$$\frac{G + Ax\gamma}{g} a,$$

где g – ускорение свободного падения;

3) продольная сила в тросе $N_д = \sigma_д A$.

По правилу определения продольной силы получим

$$N_д = G + Ax\gamma + \frac{G + Ax\gamma}{g} a = (G + Ax\gamma)\left(1 + \frac{a}{g}\right) .$$

В состоянии статического равновесия, то есть в покое или при подъеме груза с постоянной скоростью, $a = 0$. Тогда $N_{ст} = G + Ax\gamma$ и выражение для $N_д$ принимает вид:

$$N_д = N_{ст}\left(1 + \frac{a}{g}\right) ,$$

или, обозначая

$$k_д = 1 + \frac{a}{g} , \tag{12.2}$$

где $k_д$ – динамический коэффициент, окончательно получим

$$N_д = N_{ст} k_д . \tag{12.3}$$

Разделив обе части равенства на площадь A, выразим динамическое напряжение $\sigma_д$

$$\sigma_д = \sigma_{ст}\, k_д . \tag{13.4}$$

Обратим внимание, что формулы (12.3) и (12.4), решающие поставленную задачу, показывают одинаково простой путь получения параметров динамического воздействия ($N_д$, $\sigma_д$) через соответствующие им параметры статического воздействия ($N_{ст}$, $\sigma_{ст}$). Это касается не только продольной силы и напряжения, но и других эффектов силового воздействия. Например, связь между $\Delta l_д$ и $\Delta l_{ст}$, будет выражена сходной зависимостью.

Б. Расчет стержня постоянного сечения, вращающегося с постоянной угловой скоростью θ вокруг некоторой оси (рис. 12.2, *а*)

Известны длина стержня l, площадь поперечного сечения A, объемный вес материала γ. Требуется определить для произвольного сечения стержня динамическую продольную силу $N_д(x)$, вызванную внешними центробежными силами, распределенными непрерывно по длине стержня.

Приложим к элементу стержня длиной dx, который движется по дуге окружности радиуса x (рис. 12.2, *б*), центробежную силу

$$\frac{A\gamma dx}{g}\,\theta^2 x = q_N(x)\,dx,$$

где $q_N(x)$ – интенсивность распределенной центробежной нагрузки на расстоянии x от оси вращения.

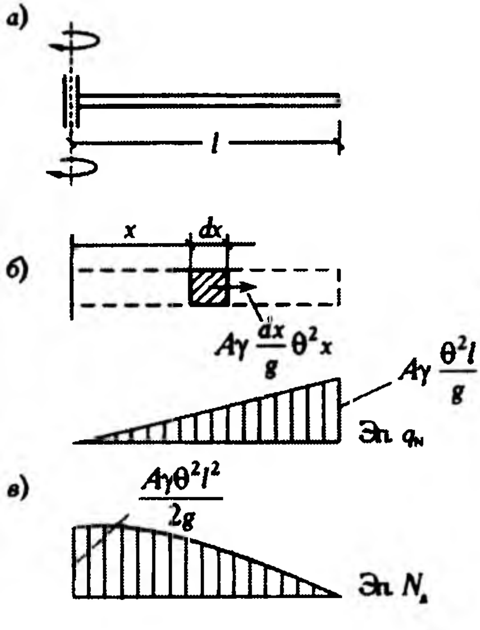


Рис. 12.2

Тогда, учитывая внешние силы по одну сторону от сечения x, получим

$$N_д(x) = \int_x^l q_N(x)\,dx =$$

$$= \frac{A\gamma\theta^2}{g}\int_x^l x\,dx = \frac{A\gamma\theta^2}{2g}\left(l^2 - x^2\right),$$

что решает поставленную задачу. Эпюры $q_N(x)$ и $N_д(x)$ показаны на рис. 12.2, *в*.

Отметим, что полученное выражение $N_д(x)$ не может быть приведено к виду формулы (12.3). Это объясняется тем, что в неподвижном стержне центробежные силы отсутствуют, а следовательно и $N_{ст}(x) = 0$.

12.3. Ударные нагрузки

Ударом называется механический процесс соприкосновения двух тел, протекающий в течение очень короткого промежутка времени. Именно кратковременность определяет специфику явления удара, затрудняя, в общем случае, непосредственное измерение приборами таких параметров как скорости, ускорения, силы взаимодействия между телами и др. Строгое теоретическое решение задачи об ударе твердых деформируемых тел также не может быть простым, так как, в частности, потребует учета волновых процессов распространения усилий, деформаций, напряжений в ударяющихся телах.

Для инженерных расчетов оказывается вполне приемлемой техническая теория удара, построенная с учетом некоторых упрощающих допущений. Ниже рассмотрены основные положения технической теории удара.

На рис. 12.3, 12.5 и 12.6 изображены три возможных случая удара двух тел: удар в результате падения с высоты H тяжелого ударяющего тела на деформируемое ударяемое тело (см. рис. 12.3, *а*); удар на трос при внезапном торможении опускаемого со скоростью v груза (см. рис. 12.5 – место торможения показано знаком "*"); удар в результате столкновения массивного тела, движущегося по горизонтали с деформируемым препятствием (см. рис. 12.6).

Во всех трех отмеченных случаях удара целью расчета является оценка напряженно-деформированного состояния ударяемого тела. Так как в процессе удара взаимное расположение ударяющего и ударяемого тел изменяется, представляет интерес состояние ударяемого тела, соответствующее

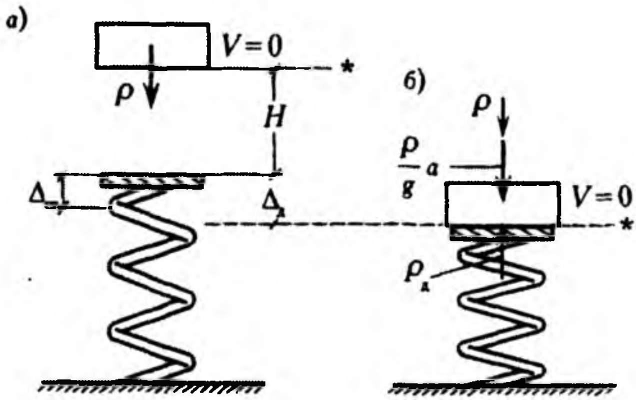


Рис. 12.3

наибольшим деформациям, при котором сила взаимодействия между телами $P_д$ достигает максимального значения.

Далее рассмотрим *первый случай удара* – падение ударяющего тела на ударяемое (см. рис. 12.3, *а*). Будем решать задачу об ударе в рамках следующих допущений:

1. Ударяющее тело с массой $m = P/g$ полностью лишено деформативных свойств.

2. Ударяемое тело, представленное как пружина, обладает свойством линейной деформируемости и для упрощения расчетов считается лишенным массы.

3. Предполагается, что начиная с момента соприкосновения ударяющего и ударяемого тел проявляется эффект "прилипания", то есть при дальнейшем движении ударяющее тело находится в постоянном контакте с ударяемым.

4. Жесткость ударяемого тела считается постоянной независимо от способа нагружения. Другими словами, имеет место следующее равенство

$$P_д / \Delta_д = P / \Delta_{ст} , \tag{12.5}$$

где $P_д$ и $\Delta_д$ – представляющая интерес для расчета максимальная динамическая сила взаимодействия между ударяющим и ударяемым телами в момент наибольшей деформации ударяемого тела и соответствующее перемещение точки соприкосновения тел, отсчитываемое от положения этой точки при отсутствии нагрузки; P и $\Delta_{ст}$ – вес ударяющего тела и перемещение точки соприкосновения тел при статическом приложении груза P.

На рис. 12.3, *б* показано положение ударяющего тела в тот момент, когда ударяемое тело деформировано в наибольшей степени: скорость движения тел равна нулю и в следующий момент начнется движение тел в обратном направлении, сопровождаемое уменьшением силы взаимодействия между телами. В этом положении к ударяющему телу приложим три силы: вес P, сила инерции Pa/g, где a –ускорение движения, направленное вверх, и сила противодействия $P_д$ со стороны деформированного ударяемого тела, которые в соответствии с принципом Даламбера образуют уравновешенную систему сил.

Поэтому

$$P_д = P + \frac{P}{g}\, a = P\,(1 + \frac{a}{g})$$

или, обозначая как и ранее

$$k_д = 1 + \frac{a}{g} ,$$

будем иметь

$$P_д = P k_д . \tag{12.6}$$

Обратим внимание на сходство полученных выражений с формулами (12.2) и (12.3). Однако в данном случае ускорение a неизвестно, поэтому найдем динамический коэффициент $k_д$ другим путем, воспользовавшись законом сохранения энергии в изолированной системе ударяющего и ударяемого тел и считая, что при ударе отсутствует рассеивание энергии.

Составим уравнение баланса полной энергии системы, рассматривая два следующих состояния, обозначенные на рис. 12.3 звездочками:

1) ударяющее тело поднято на высоту H над ударяемым и начинает падение, ударяемое тело находится в недеформированном состоянии; полная энергия равна потенциальной энергии положения ударяющего тела $P(H + \Delta_д)$, исходный уровень при этом отсчитывается от самого нижнего уровня положения тел;

2) ударяющее тело в нижнем положении; полная энергия равна потенциальной энергии упругих деформаций ударяемого тела, то есть работе изменяющейся от нуля до $P_д$ внешней силы на пути $\Delta_д$: $\frac{1}{2}P_д\Delta_д$.

В обоих состояниях кинетическая энергия отсутствует так как скорость движения ударяющего тела равна нулю. Уравнение баланса энергии имеет вид

$$P\left(H+\Delta_д\right)=\frac{1}{2}P_д\Delta_д.$$

В этом уравнении два неизвестных: $P_д$ и $\Delta_д$. Поэтому, используя формулу (12.5), выразим

$$P_д=P\frac{\Delta_д}{\Delta_{ст}}$$

и, подставляя $P_д$ в уравнение баланса энергии, получим следующее уравнение относительно неизвестной $\Delta_д$:

$$\Delta_д^2-2\Delta_{ст}\Delta_д-2H\Delta_{ст}=0.$$

Решая это квадратное уравнение, найдем:

$$\Delta_д=\Delta_{ст}\left(1+\sqrt{1+\frac{2H}{\Delta_{ст}}}\right)=\Delta_{ст}k_д\ . \qquad (12.7)$$

При записи (12.7) второй корень уравнения отброшен, т.к. $k_д$ должен быть положительным. Следовательно

$$k_д=1+\sqrt{1+\frac{2H}{\Delta_{ст}}}\ . \qquad (12.8)$$

Используя выражения $k_д$ по формуле (12.8), получим значение максимальной силы удара, необходимое для расчета ударяемого тела:

$$P_д = Pk_д \ . \qquad (12.9)$$

Очевидно, что все параметры напряженно-деформированного состояния ударяемого тела $(\sigma_д, \ \tau_д, \ \varepsilon_д)$ выражаются через соответствующие статические параметры по формулам, аналогичным (12.7) и (12.9).

Формула (12.8) показывает, что динамический эффект при ударе тем больше, чем менее податливо (т.е. более жестко) ударяемое тело. Наоборот, для снижения динамического коэффициента следует увеличить $\Delta_{ст}$ путем установки дополнительных пружин, рессор, прокладок и т.п. Например, для двух случаев удара, изображенных на рис. 12.4, при одинаковой податливости балок и $H' = H''$, благодаря наличию дополнительной пружины, имеем $\Delta''_{ст} > \Delta'_{ст}$ и $k''_д < k'_д$. Поэтому во втором случае все динамические эффекты меньше, чем в первом: $P''_д < P'_д$, $\sigma''_{max,д} < \sigma'_{max,д}$ и т.п. При этом нужно иметь в виду, что независимо от числа элементов, образующих ударяемое тело, последнее представляет собой единое целое с динамическим коэффициентом, общим для всех элементов. Так, например, для второго случая, изображенного на рис. 12.4, напряженно-деформированное состояние при ударе и для пружины и для балки должно определяться с учетом единого коэффициента $k''_д$.

Подчеркнем еще раз, что $\Delta_{ст}$ в формуле (12.8) всегда есть статическое перемещение точки, по которой наносится удар. В формуле $\Delta_д = \Delta_{ст} k_д$ множитель $\Delta_{ст}$ – это перемещение той точки, для которой определяется $\Delta_д$. Таким образом, в формуле (12.7) значения $\Delta_{ст}$ перед скобкой и под корнем совпадает лишь тогда, когда отыскивается $\delta_д$ именно для точки соприкосновения ударяющего и ударяемого тел. В остальных случаях значения $\Delta_{ст}$ различны.

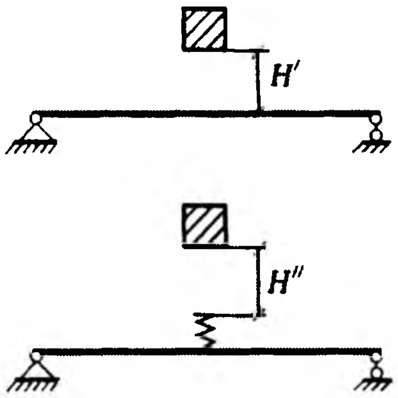


Рис. 12.4

Обратим внимание на то, что наименьшее значение $k_д$ соответствует падению ударяющего тела с высоты $H = 0$. При этом получаем $k_д = 2$. Такое нагружение называется *внезапным приложением нагрузки*. В отличие от статического нагружения при внезапном приложении вес ударяющего тела передается на ударяемое не постепенно, а сразу. Это и понимается как падение с высоты $H = 0$. Таким образом, при внезапном приложении груза все характеристики напряженно-деформированного состояния в два раза превышают соответствующие значения при статическом нагружении.

Итак, для первого случая удара $2 \le k_д < \infty$.

Представим формулу (12.8) в другом виде. Так как падение с высоты H производится без начальной скорости, то $V^2 = 2gH$, где V – скорость падения ударяющего тела в момент соприкосновения с ударяемым.

Тогда $2H = V^2/g$, и формула для $k_д$ преобразуется:

$$k_д = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{g\Delta_{ст}}}. \tag{12.10}$$

Рассмотрим *второй случай удара* – внезапное торможение троса, опускающего груз весом P со скоростью V (рис. 12.5). В этом случае роль ударяющего тела играет груз, ударяемого – трос. Задачу будем решать при допущениях, принятых ранее для первого случая удара (третье допущение в данном случае выполняется автоматически). Составим уравнение баланса энергии, рассматривая два следующих состояния, обозначенных на рис. 12.5 звездочками:

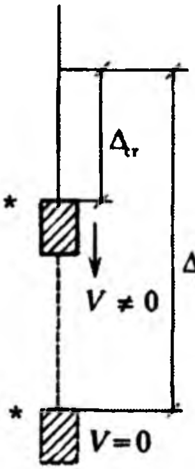


Рис. 12.5

1) груз и трос движутся вниз с постоянной скоростью V, в этот момент происходит внезапное торможение барабана лебедки, либо заклинивание троса на некотором расстоянии от места крепления груза; общий запас энергии складывается из кинетической энергии груза $\frac{mV^2}{2}$, потенциальной энергии положения груза $P\left(\Delta_д - \Delta_{ст}\right)$ (от нижнего уровня, достигаемого грузом в результате дополнительного растяжения троса) и потенциальной энергии упругих деформаций троса при растяжении его грузом $\frac{1}{2}P\Delta_{ст}$, здесь $\Delta_{ст}$ определяется для части длины троса от места присоединения груза

до сечения, где трос был внезапно остановлен;

2) груз неподвижен и находится в самом нижнем положении, достигнутом натяжением троса силой $P_д$; полная энергия системы это потенциальная энергия упругих деформаций $\frac{1}{2}P_д\Delta_д$.

Уравнение баланса энергии имеет вид

$$\frac{P}{g}\frac{V^2}{2}+P\left(\Delta_д-\Delta_{ст}\right)+\frac{1}{2}P\Delta_{ст}=\frac{1}{2}P_д\Delta_д .$$

Решая эти уравнения совместно с уравнением (12.5), получим

$$\Delta_д=\Delta_{ст}\left(1+\sqrt{\frac{V^2}{g\Delta_{ст}}}\right),$$

то есть динамический коэффициент для этого случая удара

$$k_д=1+\sqrt{\frac{V^2}{g\Delta_{ст}}} . \qquad (12.11)$$

Как видно, $\min k_д=1$, то есть для второго случая удара $1\le k_д<\infty$.

Третий случай – удар по упругому препятствию телом, движущимся со скорость V по горизонтали (рис. 12.6). Здесь также составим уравнение баланса энергии, рассматривая два состояния системы, показанные на рис. 12.6 звездочками:

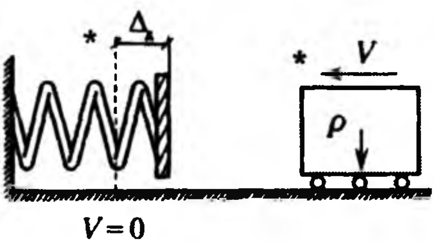


Рис. 12.6

1) состояние системы до начала удара, при котором ударяемое тело не деформировано, а ударяющее обладает запасом кинетической энергии $mV^2/2$;

2) в результате удара ударяемое тело деформировано до максимального уровня, а ударяющее – остановлено и в следующий момент начнется его обратное движение; потенциальная энергия упругих деформаций $\frac{1}{2}P_д\Delta_д$.

Так как движение ударяющего тела совершается по горизонтали, потенциальная энергия положения не изменяется и уравнение баланса энергии имеет вид

$$\frac{PV^2}{2g}=\frac{P_д\Delta_д}{2} .$$

Решая это уравнение совместно с (12.5), получим

$$\Delta_д = \Delta_{ст}\sqrt{\frac{V^2}{g\Delta_{ст}}} \quad ,$$

то есть

$$k_д = \sqrt{\frac{V^2}{g\Delta_{ст}}} \ . \qquad (12.12)$$

Как видно, $\min k_д = 0$, то есть для третьего случая удара $0 \le k_д < \infty$. Заметим, что в данном случае $\Delta_{ст}$ есть перемещение точки ударяемого тела от силы веса P, но приложенной горизонтально.

В заключении еще раз отметим, что при действии ударной нагрузки ударяемое тело испытывает качественно те же деформации, что и при статическом воздействии силой P, но величина их в $k_д$ раз больше. Можно также показать, что учет массы ударяемого тела приводит к снижению динамического коэффициента.

12.4. Нагрузки при вынужденных колебаниях

Рассмотрим линейно деформируемую систему с закрепленной на ней одной массой, находящуюся под действием периодически изменяющейся нагрузки – *возмущающей силы*. Например, изображенная на рис. 12.7, *а* невесомая балка с установленным на ней двигателем весом G подвергается действию возмущающей силы $P(t)$, вызванной вращением некоторой массы, центр которой не совпадает с осью вращающегося вала двигателя. На рис. 12.7, *б* показано разложение центробежной силы P_0 на две переменные во времени составляющие $P_0 \sin\varphi$ и $P_0 \cos\varphi$. Первая из этих сил вызывает *вынужденные колебания* массы в вертикальном направлении, связанные с изгибными деформациями балки, вторая – в горизонтальном направлении и сопровождается деформацией растяжения и сжатия. Обозначим $\Delta_в$ и $\Delta_г$ – перемещения массы в вертикальном и горизонтальном направлениях, вызванные силой P_0, приложенной статически вдоль соответствующего направления (т.е. при $\sin\varphi = 1$ и $\cos\varphi = 1$). Для данной расчетной схемы имеем

$$\Delta_в = \frac{P_0 l^3}{3EJ}, \qquad \Delta_г = \frac{P_0 l}{EA}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta_г}{\Delta_в} = \frac{3J}{l^2 A} = \frac{3i^2}{l^2} = \frac{3}{\lambda^2},$$

где λ – гибкость балки. Обычно в балках $\lambda > 25 \div 30$, поэтому $\Delta_г << \Delta_в$ и влиянием горизонтальной составляющей центробежной силы можно пренебречь. Итак, считаем, что рассматриваемая балка находится под действием только вертикальной возмущающей силы

$$P(t) = P_0 \sin\varphi = P_0 \sin\theta t \ ,$$

где θ – угловая скорость вращения вала двигателя.

На рис. 12.7, *а* изображена ось балки в различных положениях: до нагружения весом двигателя G – (*1*), после статического нагружения весом G – (*2*), а также крайнее верхнее (*3'*) и крайнее нижнее (*3"*) в процессе вынужденных колебаний – *амплитудные очертания изогнутых осей*. Заметим, что две амплитудные кривые располагаются на равных расстояниях по обе стороны от оси балки в положении статического равновесия (*2*). Наибольшее удаление A называется *амплитудой колебаний*.

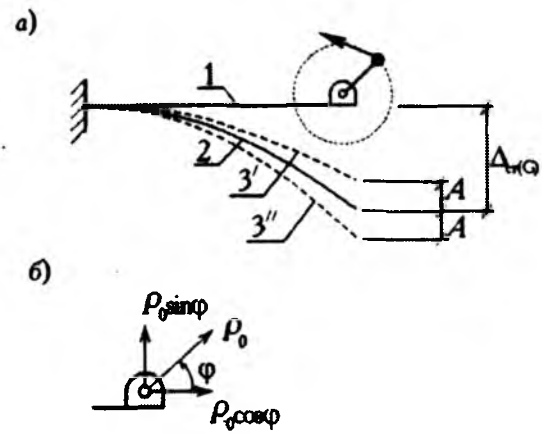


Рис. 12.7

Очевидно, что в процессе вынужденных колебаний напряженно-деформированное состояние балки изменяется. Так как рассматриваются линейно деформируемые системы, наибольшие напряжения и усилия в балке возникают тогда, когда ось балки наиболее удалена от исходного прямолинейного ее очертания, то есть когда ось совпадает с линией *3"*. Тогда полное динамическое перемещение массы

$$\Delta_д = \Delta_{ст(G)} + A = \Delta_{ст(G)}\left(1 + \frac{A}{\Delta_{ст(G)}}\right), \qquad (12.13)$$

где $\Delta_{ст(G)}$ – статический прогиб сечения балки, где находится сосредоточенная масса, от веса G.

Из (12.13) следует, что динамический коэффициент при вынужденных колебаниях конструкции равен

$$k_д = 1 + \frac{A}{\Delta_{ст(G)}} \,. \qquad (12.14)$$

Как и в предыдущих случаях, он указывает во сколько раз наибольшие напряжения, деформации, усилия в колеблющейся конструкции превышают соответствующие величины при статическом нагружении конструкции грузом G.

Таким образом, расчет конструкции при вынужденных колебаниях сводится к ее расчету при статическом нагружении и учету динамики с помощью динамического коэффициента, вычисляемого по формуле (12.14).

Прежде чем перейти к решению задачи определения амплитуды A вынужденных колебаний, обратимся к рассмотрению более простых *свободных колебаний*.

Свободные колебания возникают в том случае, когда масса, закрепленная на линейно деформируемом теле, выводится дополнительной нагрузкой из положения статического равновесия (ПСР) на величину A, после чего система предоставляется самой себе. Деформируемое тело, как пружина, стремиться вернуть смещенную массу в исходное ПСР. Масса начинает ускоренно двигаться в сторону ПСР, но, при достижении этого положения под влиянием накопленной кинетической энергии проскакивает его, удаляясь в противоположную сторону также на величину амплитуды A. Затем движение происходит в обратном направлении. Такое периодически повторяемое движение массы вокруг ПСР и называется свободными колебаниями. При наличии сил сопротивления движению колеблющейся массы (сопротивление среды, внутреннее трение и т.д.) происходит так называемая *диссипация* энергии, то есть переход механической энергии в другие формы. Вследствие этого амплитуда колебаний постепенно уменьшается – идет процесс затухающих колебаний. Если, условно, считать сопротивления полностью отсутствующими, то свободные колебания будут происходить с постоянной амплитудой.

Следует обратить внимание на существенное различие амплитуд свободных и вынужденных колебаний. Первая из них может назначаться любой величины в начале процесса свободных колебаний, вторая – заранее неизвестна и должна быть определена.

Определим закон движения точечной массы, закрепленной на пружине, в процессе свободных колебаний. На рис. 12.8 показано положение точечной массы в момент t. К массе приложим две силы: сила инерции $I(t) = -m\dfrac{d^2y}{dt^2}$ (знак минус учитывает, что $I(t) > 0$ при $\dfrac{d^2y}{dt^2} < 0$ и наоборот); сила упругого сопротивления пружины $S(t)$, пропорциональная удлинению пружины y (начало y взято в ПСР). Тогда $S(t) = cy$, где c – жесткость пружины, моделирующей любое линейно деформируемое тело; c это сила, необходимая для создания единичного удлинения пружины.

Кроме указанных, на массу действуют еще две силы: собственный вес mg и равная ему дополнительная сила натяжения пружины. Эти силы действуют в разные стороны и взаимно уравновешиваются. Поэтому на рис. 12.8 они не показаны и в расчетах не учитываются.

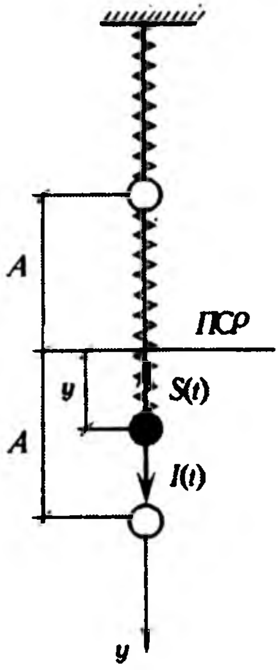


Рис. 12.8

Используя принцип Даламбера, запишем уравнение

$$I(t) - S(t) = -m\frac{d^2y}{dt^2} - cy = 0,$$

или, обозначая $\omega^2 = c / m$:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0. \qquad (12.15)$$

Это линейное дифференциальное уравнение имеет решение

$$y = A\sin\omega t + B\cos\omega t.$$

Если считать, что при $t = 0$ $y = 0$, то получим $B = 0$ и, окончательно:

$$y = A\sin\omega t. \qquad (12.16)$$

Когда $\sin\omega t = \pm 1$, $y = \pm A$, то есть постоянная A представляет собой известную амплитуду свободных колебаний. Так как $\sin\omega t$ – периодическая функция, то существует такой период T, что для произвольного момента времени t, справедливо равенство

$$A\sin\omega t_1 = A\sin\omega(t_1 + T),$$

откуда следует, что $\omega T = 2\pi$ и $T = 2\pi / \omega$.

Записывая равенство обратных величин, получим

$$\frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Так как период T измеряется в единицах времени (например, в секундах), то $1/T$ есть число колебаний в 1 секунду. Значит $\omega/2\pi$ также есть число колебаний, откуда следует, что ω – число колебаний за 2π секунд. Эта величина называется *круговой* или *циклической частотой* и измеряется в единицах *рад/с*, в отличие от технической частоты (число колебаний в 1 секунду), измеряемой в *герцах*. Таким образом, величина $\omega^2 = c/m$, введенная в качестве обозначения при записи дифференциального уравнения (12.15), приобретает явный физический смысл.

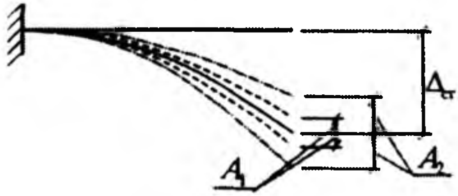


Рис. 12.9

Учитывая, что $mg = G$ и $G/c = \Delta_{ст(G)}$, преобразуем формулу круговой частоты свободных колебаний:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст(G)}}} \ . \tag{12.17}$$

Как видно, частота свободных колебаний тем больше, чем больше жесткость пружины и меньше колеблющаяся масса. Обратим внимание на интересное обстоятельство – частота не зависит от величины амплитуды свободных колебаний. Эта мысль проиллюстрирована на рис. 12.9: частота определяется прогибом $\Delta_{ст(G)}$ и будет одинаковой при свободных колебаниях с амплитудами A_1 и A_2.

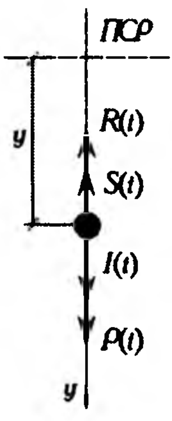


Рис. 12.10

Далее перейдем к рассмотрению вынужденных колебаний. На рис. 12.10 показаны все приложеные в общем случае к массе силы: кроме $I(t)$ и $S(t)$ появились сила сопротивления $R(t)$ и возмущающая сила $P(t)$. Уравнение равновесия имеет вид:

$$I(t) - S(t) - R(t) + P(t) = 0 .$$

По-прежнему $I(t) = -m\dfrac{d^2y}{dt^2}$ и $S(t) = cy$. Сила $R(t)$ обычно принимается пропорциональной скорости движения массы (гипотеза Фойгта), то есть $R(t) = \alpha\dfrac{dy}{dt}$, где α – коэффициент пропорциональности. Как было показано выше, возмущающая сила $P(t) = P_0\sin\theta t$.

После подстановки выражений для сил, уравнение равновесия примет вид:

$$m\frac{d^2y}{dt^2}+\alpha\frac{dy}{dt}+cy=P_0\sin\theta t,$$

или, обозначая $\alpha/m=2n$; $c/m=\omega^2$, получим

$$\frac{d^2y}{dt^2}+2n\frac{dy}{dt}+\omega^2y=\frac{P_0}{m}\sin\theta t, \qquad (12.18)$$

где n – коэффициент затухания колебаний.

Так как (12.18) – линейная дифференциальное уравнение с правой частью, решение его состоит из двух частей

$$y(t)=y_1(t)+y_2(t),$$

где $y_1(t)$ – общее решение уравнения без правой части, т. е. при $P_0=0$; $y_2(t)$ – частное решение уравнения (12.18), зависящее от вида правой части. Таким образом, $y_1(t)$ – закон движения точечной массы при наличии сил сопротивления и отсутствии возмущающей силы (т.к. $P_0=0$). Следовательно, $y_1(t)$ выражает собой затухающие колебания, график которых показан на рис. 12.11, *а*. Поскольку амплитуда затухающих колебаний уменьшается и со временем становится сколь угодно малой, можно пренебречь первым слагаемым функции $y(t)$, то есть принять $y(t)\approx y_2(t)$.

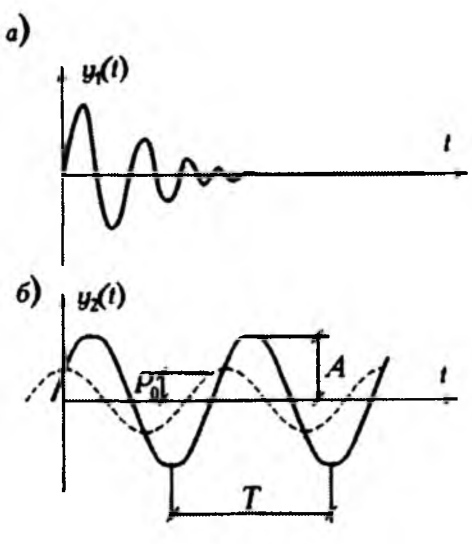


Рис. 12.11

Частное решение $y_2(t)$ уравнения вынужденных колебаний (12.18) представляется в виде:

$$y(t)\approx y_2(t)=A\sin(\theta t+\varphi), \qquad (12.19)$$

где A – искомая амплитуда вынужденных колебаний (рис. 12.11, *б*); θ – частота вынужденных колебаний.

Обратим внимание на то, что гармонический процесс вынужденных колебаний конструкции (12.19) происходит с той же частотой θ, что и процесс изменения возмущающей силы. Такие процессы называются *синхронными*. Нужно также учитывать, что круговая частота возмущающей силы, измеряемая в *рад/с*, численно равна угловой скорости вращения вала, измеряемой в тех же единицах. В данном случае колебания происходят с отставанием от синхронного изменения возмущающей силы $P(t)$ на величину *фазовой сдвижки или фазового угла* φ. Это показано на рис. 12.11, *б* где график силы $P(t)$ изображен штриховой линией, а график $y_2(t)$ - сплошной линией.

Для определения амплитуды вынужденных колебаний необходимо подставить выражение (12.19) в уравнение (12.18). После выполнения преобразований получим

$$A=\frac{P_0}{m}\;\frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2-\theta^2\right)^2+4n^2\theta^2}}=\frac{P_0}{m\omega^2}\beta,$$

где *коэффициент нарастания колебаний* β определяется по формуле

$$\beta=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2+\frac{4n^2\theta^2}{\omega^4}}} \tag{12.20}$$

или, при отсутствии сил сопротивления ($n=0$),

$$\mu=\frac{1}{\left|1-\frac{\theta^2}{\omega^2}\right|}\,. \tag{12.21}$$

Так как $\omega^2=c/m$, то

$$\frac{P_0}{m\omega^2}=\frac{P_0}{c}=\Delta_{ст(P_0)},$$

где $\Delta_{ст(P_0)}$ - перемещение точечной массы при статическом приложении амплитудного значения возмущающей силы P_0.

Таким образом, амплитуда вынужденных колебаний

$$A=\Delta_{ст(P_0)}\beta.$$

Подставляя это выражение в формулу (12.14), получим

$$k_д=1+\frac{\Delta_{ст(P_0)}}{\Delta_{ст(G)}}\beta=1+\frac{P_0}{G}\beta. \tag{12.23}$$

Последнее равенство справедливо для линейно деформируемых систем при действии сил P_0 и G, приложенных в одной точке и направленных вдоль одной линии.

Как видно из формулы (12.23), при заданных значениях сил P_0 и G динамический коэффициент зависит от коэффициента нарастания колебаний β. Проанализируем влияние на величину β параметров колебательного процесса:

1) при отсутствии сил сопротивления β зависит лишь от соотношения частот θ/ω (см. формулу (12.21)). Эта зависимость графически представлена верхней кривой на рис. 12.12. Как видно, при $\theta / \omega \to 1$ имеет место *явление резонанса*, связанное с ростом амплитуды колебаний, динамического коэффициента $k_д$ и, как следствие, с возможным нарушением целостности конструкции;

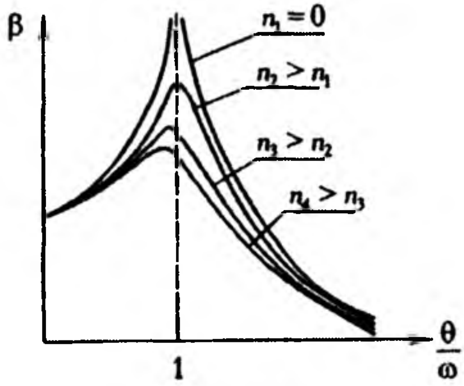


Рис. 12.12

2) при наличии сил сопротивления зависимость (12.20) графически выражается на рис. 12.12 семейством кривых для различных коэффициентов n. В этом случае при $\theta = \omega$ $\beta = \omega / 2n$, то есть при резонансе величины β, A и $k_д$ хотя и не возрастают до бесконечности, но могут достигать больших значений.

Из сказанного следует, что для обеспечения прочности конструкции, подверженной действию возмущающей силы, необходимо добиваться достаточного различия частоты возмущающей силы θ и частоты свободных колебаний ω. Частота θ обычно задается заранее, поэтому для выполнения указанного требования стремятся запроектировать конструкцию так, чтобы ее частота свободных колебаний, определяемая по формуле (12.17), отличилась бы от θ не менее чем на 25 %.

ГЛАВА 13. ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИ МЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ

13.1. Понятие об усталости металлов

Многие элементы конструкций, машин и технических устройств испытывают воздействие напряжений, циклически меняющихся во времени. Например, элементы пролетного строения железнодорожного моста периодически воспринимают поездную нагрузку. Ось колесной пары при своем качении также испытывает воздействие циклически изменяющихся напряжений, хотя внешние силы могут оставаться неизменными (рис. 13.1, *а*). Происходит это вследствии того, что продольные волокна вращающейся оси попеременно оказываются то в растянутой, то в сжатой зоне. Действительно, ось колесной пары работает как балка на двух опорах, которыми служат колеса. Нагрузка P на эту ось передается от вагона через буксы. Эпюра изгибающих моментов показана на рис. 13.1, *б*. В нарисованном положении верхние волокна оси растянуты, а нижние – сжаты. Но если колесо сделает половину оборота, то эти волокна поменяются местами, а напряжения в них соответственно изменятся. На рис. 13.2 показано поперечное сечение оси. Напряжение в точке M будет равно

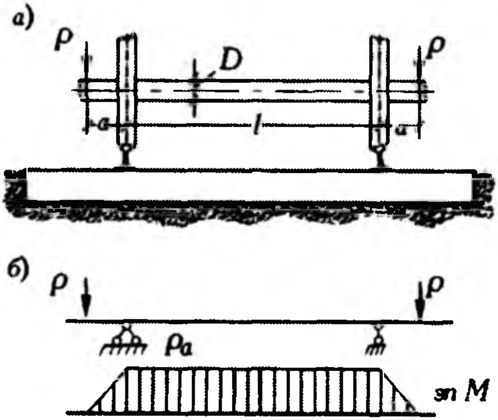


Рис. 13.1

$$\sigma_x = \frac{M}{J_{н.о.}} y = \frac{Pa}{J_{н.о.}} \frac{D}{2} \sin\varphi.$$

При движении поезда с постоянной скоростью угол $\varphi = \omega t$ (ω – угловая скорость вращения колеса), следовательно

$$\sigma_x = \frac{Pa}{J_{н.о.}} \frac{D}{2} \sin\omega t.$$

Таким образом, нормальные напряжения в поперечном сечении вагон-

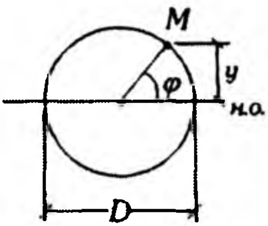


Рис. 13.2

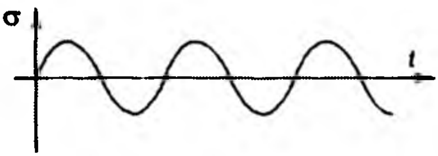


Рис. 13.3

ной оси меняются с течением времени по закону синусоиды, (рис. 13.3) с амплитудой, равной $\frac{PaD}{2J_{н.о.}}$.

Таких примеров можно привести очень много: почти все объекты транспорта (самолеты, поезда, вагоны, автомобили, суда, трубопроводы, двигатели, краны, железнодорожные рельсы и т.д.) испытывают воздействие переменных во времени напряжений.

Под воздействием повторно-переменных или циклически меняющихся напряжений в опасных зонах конструкций, машин развиваются так называемые усталостные трещины, которые могут вызвать разрушение этих объектов. Это разрушение часто происходит без заметных пластических деформаций, при этом максимальные напряжения цикла оказываются меньше предела прочности материала, который характеризует прочностные свойства при однократном нагружении. Ранее высказывались предположения, что под воздействием переменных напряжений материал снижает свои прочностные характеристики, т.е. как бы "устает". *Процесс разрушения материала под воздействием переменных напряжений, максимальная величина которых существенно ниже предела прочности, получил название усталостного. Свойство материала противостоять усталостным разрушениям называется выносливостью.*

Наиболее изучен механизм усталостного разрушения металлов. Оказалось, что механические прочностные характеристики материала (пределы текучести и прочности) под воздействием переменных напряжений практически не меняются. Если, например, вырезать из новой вагонной оси образцы для испытаний на растяжение (см. гл. 2) и определить механические характеристики этой стали, а затем провести испытания образцов, вырезанных около зоны излома такой же оси, испытанной на усталостное разрушение, то механические характеристики второй партии образцов не будут заметно отличаться от характеристик первой партии. Поэтому термин "усталость" не отражает существа явления и в настоящее время применяется лишь в условном смысле.

Что же происходит в металле под воздействием переменных напряжений? Как известно, все металлы имеет зернистое строение, каждое зерно представляет кристаллит со случайно расположенной в пространстве системой кристаллографических осей. Размеры этих зерен могут быть достаточно малыми, так что зернистое строение металла можно обнаружить с помощью микроскопа на специально приготовленных шлифах. Определяемые по формулам сопротивления материалов напряжения и деформации принято называть макронапряжениями и макродеформациями, поскольку они относятся к объемам, содержащим достаточно большое число зерен, которое в совокупности и определяет механические характеристики материалов. Однако каждое зерно имеет свои, отличные от общего ансамбля, характеристики. Поэтому, если при помощи специальных методов, например, при помощи очень тонких фотоупругих покрытий (см. гл. 14), исследовать распределение деформаций в зернах металлов, особенно по их границам, то обнаружится, что это распределение весьма неоднородно, даже при макрооднородном деформировании образца. На границах наиболее неблагоприятно ориентированных зерен наблюдается резкое местное повышение уровня микродеформаций, в этих зонах после нескольких циклов нагружения могут появиться микротрещины. Такие трещины могут существовать на границах зерен и до нагружения материала. Процесс накопления микротрещин начинается сразу в нескольких зонах. При повторно-переменных нагружениях эти трещины развиваются под воздействием повышенных напряжений, которые возникают у острия трещины; при развитии некоторые из них сливаются, образуя макротрещину. Эта макротрещина также начинает расти, ее берега при повторно-переменных напряжениях притираются

Рис. 13.4

друг к другу; трещина захватывает все большую часть поперечного сечения, а затем, когда площадь сечения заметно уменьшится, происходит хрупкое разрушение. Поверхность усталостного излома содержит две заметно отличающиеся друг от друга зоны: одна – зона постепенного развития трещины – имеет гладкую поверхность, а вторая – зона хрупкого излома – имеет крупнозернистое строение. На рис. 13.4 показан усталостный излом рельса. Здесь трещина начала развиваться из-под поверхностного слоя на глубине около 10 *мм*.

13.2. Характеристики циклов напряжений

Во многих случаях напряжения в исследуемой зоне конструкции меняются попеременно от максимального к минимальному, величины которых остаются постоянными во времени. В этих случаях говорят о циклическом (или повторно-переменном) нагружении. Графики такого изменения напряжений во времени представлены на рис. 13.5; здесь под ρ понимается нормальное или касательное напряжения.

Время одного цикла, в течении которого происходит однократная смена напряжений, называют периодом T. Как показывают исследования, закон изменения напряжений внутри цикла не влияет на усталостную долговечность элемента. Поэтому два цикла, изображенные на рис. 13.5, имеющие

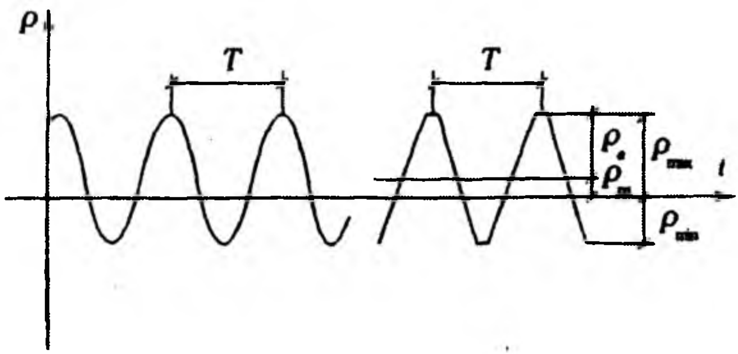


Рис. 13.5

одинаковые максимальные и минимальные напряжения и одинаковый период, считаются равноценными. Усталостная долговечность элемента определяется числом циклов, которые он выдерживает (при заданных P_{max} и P_{min}) до разрушения.

Циклу напряжений можно поставить в соответствие два параметра – амплитуду P_a и средние напряжения P_m.

При этом

$$P_a = \frac{P_{max} - P_{min}}{2} \quad \text{и} \quad P_m = \frac{P_{max} + P_{min}}{2}. \tag{13.1}$$

Коэффициентом асимметрии цикла называют величину

$$r = \frac{P_{min}}{P_{max}}. \tag{13.2}$$

Циклы, имеющие одинаковые значения коэффициентов асимметрии, называют подобными.

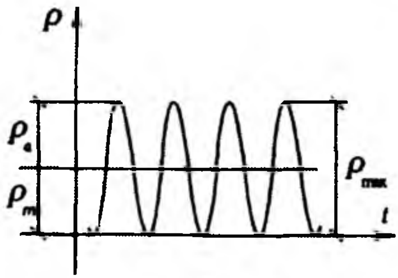


Рис. 13.6

Если $P_{min} = -P_{max}$, то $r = -1$. Такой цикл называют симметричным: его испытывает, например, точка, лежащая на контуре поперечного сечения вагонной оси (см. рис. 13.3). При симметричном цикле $P_m = 0$, а $P_a = P_{max}$.

Если $P_{min} = 0$, то $r = 0$; такой цикл называют пульсирующим (рис. 13.6). В этом случае

$$P_m = P_a = \frac{P_{max}}{2}. \tag{13.3}$$

Если $r < 0$, то цикл называют знакопеременным, при $r > 0$ – знакопостоянным.

13.3. Кривая усталости. Предел выносливости

Для оценки сопротивляемости материала действию переменных напряжений проводят специальные испытания образцов на выносливость. Образцы изготовляются в соответствии с требованиями ГОСТ, который определяет их размеры и чистоту обработки.

Существуют специальные машины для испытаний на усталость. Чаще всего испытания проводятся при симметричном цикле (рис. 13.7). Образец *1* устанавливается во вращающихся цангах *2*, а в сечениях *3* к нему через подшипники прикладывается нагрузка P от груза, подвешенного на траверсе 5 и стержнях 4. Таким образом, рабочая часть образца находится в зоне чистого изгиба. Образец после загружения приводится во вращение мотором 7. Счетчик 6 фиксирует число оборотов N, т.е. число циклов, которое выдерживает образец при данной нагрузке P до разрушения.

Результат опыта оформляется в виде точек на диаграмме $\sigma_{max} - N$ (рис. 13.8). Здесь по вертикальной оси в выбранном масштабе откладывается максимальное напряжение цикла σ_{max}, подсчитанное в данном случае

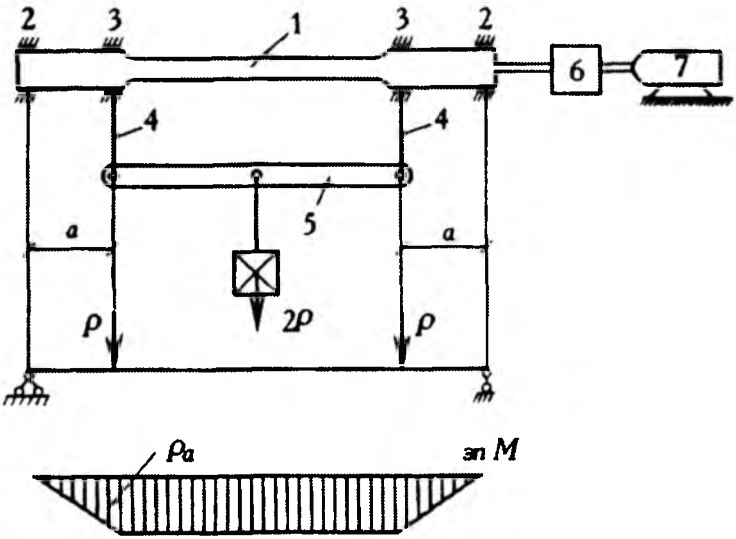


Рис. 13.7

по формуле

$$\sigma_{max} = \frac{Pa}{W_{н.о.}}. \tag{13.4}$$

Для проведения стандартных испытаний на усталость необходимо иметь не менее десятка одинаковых образцов. Обычно испытания начинают при $\sigma_{max} \approx 0{,}7\sigma_в$ ($\sigma_в$ – предел прочности). При таких значительных напряжениях число N_1 обычно невелико. Следующие образцы испытываются при постепенно уменьшающихся значениях силы P (определяющей максимальное напряжение цикла). Эти образцы после разрушения дают на диаграмме точки 2, 3, 4 и т.д.. Полученные точки соединяют плавной кривой, которая называется кривой Вёлера по имени немецкого ученого, впервые исследовавшего усталостное разрушение.

Опыты по испытанию стальных образцов при нормальной температуре показывают, что если образец не разрушился до 10 млн циклов, то он не разрушается и при более длительном испытании. Поэтому кривая Вёлера приближается к асимптоте при $N_0 \approx 10^7 \div 10^8$ циклов. Эта асимптота отсекает на оси максимальных напряжений цикла величину, которую называют пределом выносливости. Таким образом, *пределом выносливости называют то наибольшее значение максимального напряжения цикла, которое выдерживает образец при неограниченном числе циклов.*

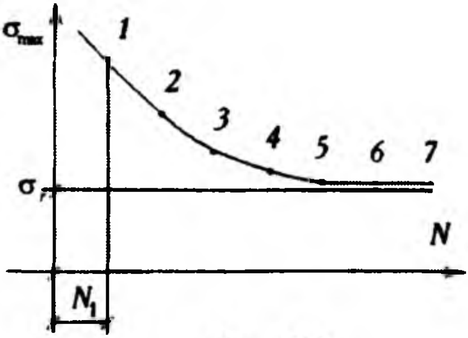


Рис. 13.8

Кривые Вёлера, построенные по результатам испытаний образцов из цветных металлов, а также из некоторых типов сталей, не имеют такой ассимптоты. Поэтому предел выносливости определяется на некоторой базе испытаний, равной, например, 10^8 циклов. В этом случае *под пределом выносливости понимается наименьшее значение максимального напряжения цикла, при котором происходит разрушение образца при базовом числе циклов.*

Предел выносливости обозначается σ_r, где индекс r равен коэффициенту асимметрии цикла. Так, например, σ_{-1} обозначает предел выносливости при симметричном цикле, σ_0 – при пульсирующем.

Необходимо отметить, что для испытаний на усталость характерен большой разброс экспериментально полученных данных, что связано со случайным характером развития усталостных трещин. Поэтому достоверные данные могут быть получены при испытаниях большого числа образцов с последующей статистической обработкой результатов испытаний.

Для сталей предел выносливости при изгибе равен примерно половине предела прочности,т.е.

$$\sigma_{-1} = (0.4 \div 0.5)\sigma_в .$$

Для цветных металлов предел выносливости изменяется в более широких пределах

$$\sigma_{-1} = (0{,}25 \div 0{,}5)\sigma_в .$$

Приведенные соотношения являются весьма примерными: на величину предела выносливости влияют многие факторы (см. раздел 13.5). Например, предел выносливости, полученный при испытаниях образцов в условиях циклического растяжения и сжатия, оказывается на 10–20% ниже предела выносливости, полученного при циклическом изгибе. Объясняется это явление следующим образом. При изгибе наибольшие макронапряжения возникают только в поверхностных слоях образца, а в средней его части напряжения малы, поэтому "слабые" места этой зоны не участвуют в процессе накопления усталостных повреждений. При растяжении образца макронапряжения во всем поперечном сечении одинаковы, и здесь, все "слабые" места участвуют в накоплении повреждений. Следовательно вероятность появления зон с пониженной прочностью в растянутом образце больше, чем в изгибаемом.

13.4. Диаграмма предельных амплитуд

Предел выносливости зависит от коэффициента асимметрии цикла. Наименьшее значение предел выносливости имеет при симметричном цикле. Поэтому для того, чтобы иметь возможность проводить расчеты на усталостную прочность (или долговечность) при любых видах циклов для каждого материала строится *диаграмма предельных амплитуд, которая является механической характеристикой усталостной прочности стандартных образцов*, изготовленных из данного материала. Эта диаграмма строится в координатах σ_m (среднее напряжение цикла) и σ_a (амплитуда цикла) (рис. 13.9).

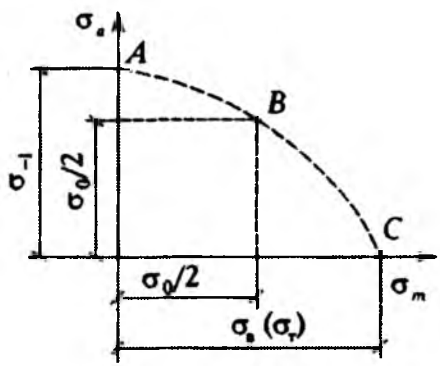


Рис. 13.9

Точка A на этой диаграмме получена по результатам испытаний образцов на выносливость с построением кривой Вёлера при симметричном цикле. На основании этих испытаний определяется предел выносливости σ_{-1} при симметричном цикле. Но в этом случае $\sigma_a = \sigma_{max} = \sigma_{-1}$, $\sigma_m = (\sigma_{max} + \sigma_{min})/2 = 0$. Следовательно, точка A лежит на оси σ_a и имеет ординату $\sigma_a = \sigma_{-1}$. Аналогичным образом, проведя испытания при пульсирующем цикле с построением своей кривой Вёлера (для этого потребуется вторая партия образцов), определим предел выносливости σ_0. Но при пульсирующем цикле (см. рис. 13.6) $\sigma_a = \sigma_m = \sigma_{max}/2 = \sigma_0/2$. Такому циклу на диаграмме соответствует точка B. Для этого же материала проведем статические испытания на однократное растяжение и определим предел прочности $\sigma_в$. При статических испытаниях напряжение $\sigma_в$ постоянно и не зависит от времени (рис. 13.10). Для такого "цикла" $\sigma_{max} = \sigma_{min}$; $r = 1$ и, следовательно, $\sigma_m = \sigma_{max} = \sigma_в$, а $\sigma_a = 0$. Соответствующая точка C лежит на оси σ_m и имеет абсциссу, равную пределу прочности (для хрупких материалов) или пределу текучести (для пластичных). Если провести испытания при других значениях r, то можно получить еще несколько точек, которые позволяют уточнить положение кривой ABC. Однако такие испытания весьма трудоемки, а расчеты на усталость носят достаточно приближенный характер. Поэтому часто ограничиваются построением диаграммы предельных амплитуд по этим трем точкам A, B, C. При этом через точки A и B проводят прямую (рис. 13.11), а из точки C – луч под углом 45^0 к оси σ_m до его пересечения с продолжением прямой AB в точке D. Прямая AD имеет уравнение

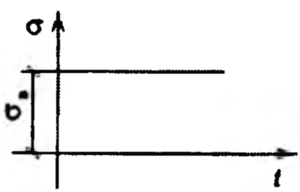


Рис. 13.10

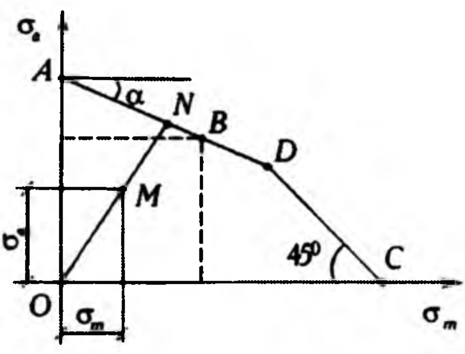


Рис. 13.11

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \operatorname{tg}\alpha \cdot \sigma_m \quad \left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}\right), \tag{13.5}$$

а прямая CD описывается зависимостью $\sigma_m + \sigma_a = \sigma_в$. Так как $\sigma_m + \sigma_a = \sigma_{max}$, то прямая CD ограничивает максимальное напряжение цикла пределом прочности (или текучести).

Предположим теперь, что в некотором образце реализуется циклические нагружение со значениями напряжений σ_{max} и σ_{min}. По ним подсчитаем амплитуду и среднее напряжение цикла:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad \text{и} \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \ .$$

Эти два числа есть координаты точки M на диаграмме предельных амплитуд (см. рис. 13.11). Если точка M окажется ниже ломаной ADC, то рассматриваемый образец способен выдержать неограниченное число циклов. Более того, в этом случае диаграмма позволит определить коэффициент запаса по усталостной прочности. Для этого из начала координат (точка O) проводят луч через точку M до его пересечения с прямой AD в точке N. Продолжение луча на участке MN означает пропорциональное увеличение амплитуды и среднего напряжения цикла в образце. Точка N соответствует предельным значениям σ_m и σ_a для этого цикла. Поэтому коэффициент запаса n можно определить через отношение отрезков ON и OM, т.е.

$$n = \frac{ON}{OM} > 1 \ . \tag{13.6}$$

13.5. Влияние различных факторов на усталостную прочность

Концентрация напряжений. В местах изменения размеров поперечных сечений, около отверстий, выкружек, канавок наблюдается концентрация напряжений, под которой понимается местное повышение уровня напряжений. Так, например, в растягиваемой полосе с центральным отверстием распределение нормальных напряжений в ослабленном сечении имеет вид, показанный на рис. 13.12. Это решение задачи получено методом теории упругости в предположении идеально упругой работы материала полосы.

Отношение пиковых напряжений $\sigma_{пик}$ около отверстия к средним нормальным напряжениям в поперечном сечении MM называют *теоретическим коэффициентом концентрации напряжений*

$$K_т = \frac{\sigma_{пик}}{\sigma_н} \quad . \tag{13.7}$$

Здесь $\sigma_н = \dfrac{N}{A_н}$, где $A_н = t(b-d)$; t – толщина пластины.

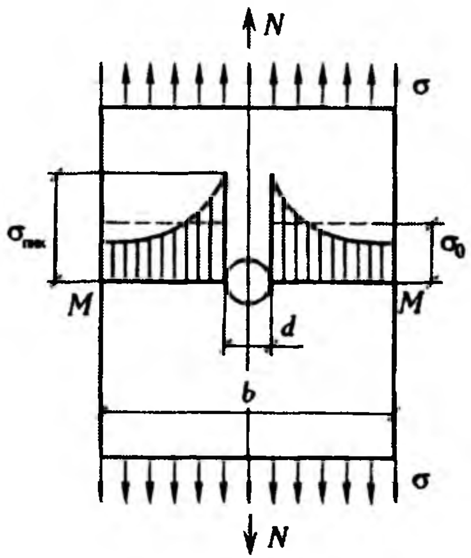


Рис. 13.12

Напряжения в ослабленном сечении $\sigma_н$, определяемые по формулам сопротивления материалов, без учета концентрации напряжений, называют *номинальными*.

По мере удаления от отверстия напряжения постепенно выравниваются. На расстоянии, примерно равным диаметру отверстия нормальные напряжения в поперечном сечении распределены практически равномерно.

Иногда теоретический коэффициент концентрации напряжений определяется отношением пикового напряжения к тому, которое было бы в элементе без концентратора напряжений, т.е. $\sigma = \dfrac{N}{A_{бр}}$ и $K_т^* = \dfrac{\sigma_{пик}}{\sigma}$. Так как $\sigma_н > \sigma$, то

$$K_т^* > K_т .$$

Коэффициент концентрации $K_т$ в нашем примере зависит от параметра $d\,/\,b$, и если этот параметр мал (менее 0,1), то $K_т \approx K_т^* \approx 3$, т.е. в этом случае пиковые напряжения в 3 раза превышают средние в сечении.

Естественно, возникает вопрос: почему эффект концентрации напряжений не учитывался ранее при изложении расчетов на статическую прочность? Дело в том, что большинство конструкционных металлов, из которых изготавливаются несущие нагрузку элементы, обладают достаточной пластичностью для того, чтобы в предельном состоянии практически полностью *снять* эффект *концентрации напряжений*. При этом происходит следующее. В начале нагружения, когда напряжения во всех точках сечения ниже предела упругости, коэффициент концентрации напряжений не меняется, т.е. не зависит от уровня нагружения. Однако при некотором значении нагрузки пиковые напряжения около отверстия станут равными пределу текучести; при дальнейшем нагружении эти напряжения меняются мало, а напряжения в сечении MM возрастают на некотором удалении от отверстия. При этом зона пластических деформаций распространяется от края отверстия к боковой грани полосы. Поэтому напряжения в сечении MM постепенно выравниваются, и предельное усилие оказывается равным $N_{пред} = \sigma_т A_н$ (где $\sigma_т$ – предел текучести). Таким образом при определении напряжений в ослабленном сечении без учета концентрации напряжений, учитывается, по существу, не упругая стадия работы элемента при статическом однократном нагружении, а предельная – с учетом перераспределения напряжений за счет пластических свойств материала.

Иначе обстоит дело при усталостных разрушениях, которые происходят без заметных пластических деформаций. Если провести испытания на уста-

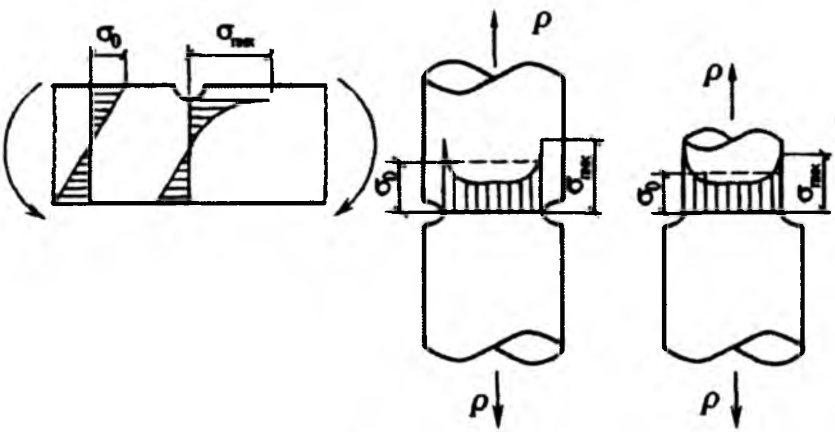


Рис. 13.13

лостную прочность двух партий образцов, одна из которых не имеет концентраторов напряжений, а другая – выполнена с концентраторами, то отношение предела выносливости σ_r первой партии к пределу выносливости образцов с концентраторами σ_r^k определит *эффективный коэффициент концентрации напряжений*

$$K_э = \frac{\sigma_r}{\sigma_r^k}. \tag{13.8}$$

Эффективный коэффициент концентрации напряжений $K_э$ обычно несколько ниже теоретического коэффициента $K_т$. Это объясняется влиянием микропластических деформаций в зоне развития усталостной трещины. Так как испытания на усталостную прочность требуют больших затрат, то часто эффективный коэффициент концентрации напряжений определяется при помощи выражения

$$K_э = 1 + q(K_т - 1) \ . \tag{13.9}$$

Здесь q – коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений, который считается не зависящим от вида концентратора. Для высокопрочных сталей значений q приближается к единице, и тогда $K_э \approx K_т$, что не всегда оправдывает применение высокопрочных материалов при переменных напряжениях. Для обычных сталей $q = 0{,}6 \div 0{,}8$. Конкретные значения коэффициента чувствительности даются в справочниках. Интересно отметить, что такие материалы как чугун, бетон имеют q = 0, и, следовательно, $K_э$ = 1, т.е. они не чувствительны к концентрации напряжений. Это объясняется тем, что структура этих материалов неоднородна и вызывает внутреннюю, на уровне структурных составляющих, концентрацию напряжений, во много раз превышающую ту, которая создается геометрическими концентраторами типа отверстий.

Несколько других примеров концентрации напряжений приведены на рис. 13.13. Концентраторы напряжений являются местом зарождения усталостных трещин, они сильно снижают усталостную прочность элементов, поэтому конструкторы используют различные приемы для снижения коэффициента концентрации напряжений и повышения усталостной прочности материала в этих локальных зонах.

Чистота обработки поверхности. Следы обработки поверхности в виде царапин, надрезов и т.п. являются своебразными концентраторами напряжений и могут служить очагами, из которых начинают расти усталостные трещины. Поэтому, например, предел выносливости полированных образцов выше предела выносливости образцов со шлифованной поверхностью, а σ_r последних выше, чем образцов, обработанных просто резцом.

Качество обработки поверхности учитывается коэффициентом $\gamma_п$

$$\gamma_п = \frac{\sigma_r^п}{\sigma_r} . \qquad (13.10)$$

Здесь σ_r – предел выносливости образцов, обработанных по требованиям ГОСТа "Испытания на выносливость"; $\sigma_r^п$ – предел выносливости таких же образцов, но обработанных по классу чистоты рассчитываемого элемента.

Масштабный фактор. Экспериментальными исследованиями установлено, что предел выносливости образцов с большим поперечным сечением оказывается ниже, предела выносливости образцов, изготовленных по стандарту на усталостные испытания.

Объясняется это явление тем, что в большом объеме увеличивается вероятность появления дефектов структуры материала, перенапряженности отдельных микрозон, что приводит к снижению усталостной прочности элемента в целом. С увеличением размеров деталей также растет вероятность появления различного рода технологических дефектов, которые могут стать концентратратором напряжений.

В расчете масштабный фактор оценивается коэффициентом $\gamma_м$

$$\gamma_м = \frac{\sigma_r^м}{\sigma_r} . \qquad (13.11)$$

Здесь $\sigma_r^м$ – предел выносливости образцов, диаметр которого отличается от стандартного и соответствует диаметру рассчитываемой детали; σ_r – предел выносливости для стандартных образцов.

Другие факторы. Сильное влияние на усталостную прочность оказывает *коррозия*. Поэтому если рассчитываемый элемент предназначен для работы в коррозионной среде, то и усталостные испытания необходимо проводить в соответствующих условиях.

Исследованиями последних лет установлено влияние *градиента напряжений*. Если скорость убывания местных пиковых напряжений большая, т.е. они имеют высокий градиент, то зона, в которой действуют эти высокие напряжения, невелика и поэтому уменьшается вероятность зарождения трещины. Таким образом, влияние градиента по своему характеру аналогично влиянию масштабного фактора.

Поверхностное упрочнение деталей, которое может проводится химико-термическими способами (азотирование, цементация), закалкой токами высокой частоты или наклепом (дробеструйной обработкой) повышают усталостную прочность за счет создания в поверхностном слое остаточных сжимающих напряжений.

13.6. Расчеты на выносливость при циклическом нагружении

Расчеты на выносливость обычно сводятся к нахождению коэффициента запаса по циклической прочности и сравнения его с нормативным значением для соответствующей детали или элемента конструкции. Выше показано, как определить коэффициент запаса по диаграмме предельных амплитуд. Но эта диаграмма была построена по результатам испытаний образцов, изготовленных в соответствии с требованиями ГОСТа на усталостные испытания. К тому же известно, что на усталостную прочность влияет ряд факторов, которые необходимо учесть. Обычно учитываются три фактора – концентрация напряжений, чистота обработки поверхности и масштабный фактор – с помощью коэффициента K, равного

$$K = \frac{K_\sigma}{\gamma_п \gamma_м}. \qquad (13.12)$$

Каждый из входящих сюда коэффициентов определяется выражениями (13.8) –(13.11). Так как рассматриваемые факторы оказывают влияние на переменную часть цикла напряжений, характеризуемую амплитудой цикла и практически не сказываются на постоянных напряжениях, связанных со средним напряжением цикла, то при корректировки диаграммы предельных амплитуд изменения вносятся только по оси амплитуд (рис. 13.14). Для этого на оси σ_a откладывают величину σ_{-1}/K и проводят прямую, параллельную прямой AD

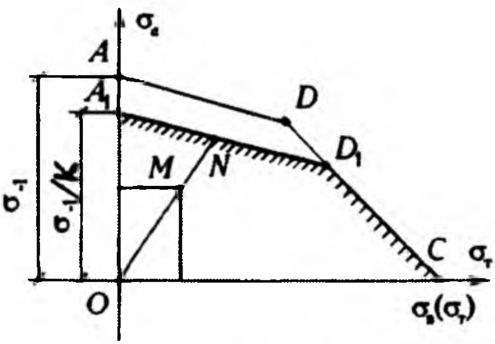


Рис. 13.14

(сравни с рис. 13.11). Тогда уравнения прямой A_1D_1 запишется в виде

$$\sigma_a = \frac{1}{K}\left(\sigma_{-1} - \sigma_m \operatorname{tg}\alpha\right). \qquad (13.13)$$

Ограничения по пределу прочности (или текучести) эта корректировка не затрагивает, поэтому диаграмма предельных амплитуд для детали состонт из прямых A_1D_1 и D_1C. Для нахождения коэффициента запаса по усталостной прочности отложим на этой диаграмме номинальные значения среднего напряжения $\sigma_{m,ном}$ и амплитуды цикла $\sigma_{a,ном}$ (точка M). Если эта точка находится ниже предельной прямой, то коэффициент запаса определяется отношением отрезков

$$n = \frac{ON}{OM} .$$

Рассматривая координаты точки N как точки пересечения луча OM и прямой A_1D_1, получим

$$n = \frac{\sigma_{-1}}{K\sigma_{a,ном} + \sigma_{m,ном}\operatorname{tg}\alpha} . \tag{13.14}$$

Если луч OM при его продолжении пересечет прямую CD_1, ограничивающую область по статической прочности детали, то в этом случае проводится обычный расчет детали на статическую прочность.

До сих пор речь шла об анализе усталостной прочности при линейном напряженном состоянии. Если провести испытания на кручение круглых образцов, то можно получить предел выносливости при чистом сдвиге τ_r. Для сталей

$$\tau_{-1} \approx 0.6\sigma_{-1} .$$

По результатам испытаний на кручение также можно построить диаграмму предельных амплитуд, которая будет иметь точно такой же вид; поэтому коэффициент запаса при чистом сдвиге определится из подобного (13.14) выражения

$$n = \frac{\tau_{-1}}{K\tau_{a,ном} + \tau_{m,ном}\operatorname{tg}\alpha_\tau} . \tag{13.15}$$

Если опасная точка детали находится в условиях плоского или даже пространственного напряженного состояния, то для расчета усталостной долговечности приходится обращаться к соответствующим теориям усталостного разрушения, которые, как правило, обобщают рассмотренные ранее теории предельных состояний применительно к статическим нагружениям. Для наиболее часто встречающегося на практике случая плоского напряженного состояния, когда одно из нормальных напряжений отсутствует (например, точка на контуре вала, испытывающего изгиб с кручением), можно воспользоваться общепринятой в настоящее время эмпирической формулой

$$n = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} . \tag{13.16}$$

Здесь n – искомый коэффициент запаса прочности, n_σ – коэффициент запаса, найденный в предположении отсутствия касательных напряжений; n_τ – то же при $\sigma = 0$.

Если в процессе работы детали или конструктивного элемента основные характеристики цикла с течением времени меняются, то в таких случаях говорят о нестационарном нагружении. Основное влияние при этом оказывают изменения максимальных и минимальных напряжений цикла. В этих случаях весь процесс нагружения разбивается на блоки, в пределах которых эти характеристики цикла считаются постоянными. Определяется число циклов в каждом блоке. Для расчетов используется гипотеза о линейном суммировании усталостных повреждений, предложенная в 1924 г. Пальмгреном. Поясним смысл этой гипотезы на простом примере. Предположим, что для заданного коэффициента асимметрии цикла построена кривая Вёлера (рис. 13.15). Пусть процесс нагружения состоит из двух блоков с максимальными напряжениями $\sigma_{max.1}$ и $\sigma_{max.2}$.

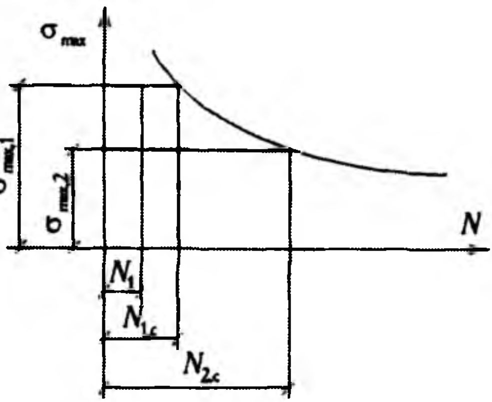


Рис. 13.15

При напряжении $\sigma_{max.1}$ образец проработал N_1 циклов. Требуется определить, какое число циклов до разрушения выдержит образец, работая оставшееся время при напряжении $\sigma_{max.2}$. Относительное усталостное повреждение, которое получил образец на первом блоке нагружения, очевидно равно

$$\eta_1 = \frac{N_1}{N_{1c}} .$$

Здесь N_{1c}– ресурс – число циклов до разрушения при $\sigma_{max.1}$.

Аналогичным образом определим

$$\eta_2 = \frac{N_2}{N_{2c}} .$$

По теории линейного суммирования повреждений

$$\sum \eta_i = 1 .$$

Следовательно, в нашем случае

$$\eta_1 + \eta_2 = 1 \quad \text{или} \quad \frac{N_1}{N_{1c}} + \frac{N_2}{N_{2c}} = 1 .$$

Из последнего выражения можно определить N_2 – число циклов, которое выдержит деталь при напряжении $\sigma_{max.2}$, после отработки N_1 циклов при напряжении $\sigma_{max.1}$.

ГЛАВА 14. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ

14.1. Общие сведения

Экспериментальное исследование напряженно-деформированного состояния нагруженных элементов конструкций или деталей машин проводится в следующих случаях.

1. На этапе перехода от реальной конструкции к ее расчетной схеме проводится идеализация геометрических свойств объекта, его опорных закреплений, механических свойств материала конструкции, расположения и характера действия внешних нагрузок, а в ходе расчета принимаются гипотезы о распределении напряжений или деформаций и вводятся некоторые другие упрощающие расчет предположения. Все это в конечном итоге приводит к тому, что полученное расчетом напряженно-деформированное состояние будет несколько отличаться от того, которое на самом деле реализуется в натурном объекте. Оценить степень этого отличия можно путем сопоставления результатов расчета с данными, полученными при экспериментальном исследовании натурных объектов с использованием различных средств для нахождения деформаций и напряжений.

2. При решении многих, как правило нелинейных задач механики деформируемого твердого тела возникают серьезные математические трудности, которые не удается преодолеть даже с использованием современных вычислительных процедур и программных комплексов, ориентированных на современные ЭВМ. В этих случаях расчет может заменить экспериментальное исследование, которое часто проводится методами физического моделирования поставленной задачи с использованием соответствующих моделей и методов исследования. При этом, если при решении проблем первого типа иногда достаточно сопоставить напряжения (деформации, перемещения) в отдельных характерных точках конструкции, то во втором случае желательно иметь возможность получения этих данных по всему полю исследуемого объекта, так как заранее неизвестны ни положение опасных точек, ни особенности развития пластических зон и трещин. Поэтому используемые экспериментальные методы для решения этих двух проблем могут быть различными.

3. В некоторых случаях не удается даже сформулировать, т.е. поставить математически, задачу. Например, трудно записать исходные уравне-

ния для нахождения остаточных напряжений в стальных изделиях после их термообработки, прокатки или после других термомеханических операций. В этих случаях только экспериментальные методы могут дать возможность исследования такого рода проблем.

Рассмотрим основные экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений.

14.2. Тензометрия

Если в исследуемой точке на поверхности конструкции замерить деформации с помощью каких-либо приборов, то по этим деформациям можно определить напряжения на основе уравнений, связывающих последние с деформациями. Чаще всего приходится определять напряжения, когда материал конструкции подчиняется закону Гука, т.е. деформируется линейно упруго, а на поверхности конструкции возникает линейное или плоское напряженное состояние.

Предположим, экспериментально определена продольная деформация ε_x в растянутом стержне. Тогда легко подсчитать нормальное напряжение в поперечном сечении

$$\sigma_x = E\varepsilon_x. \tag{14.1}$$

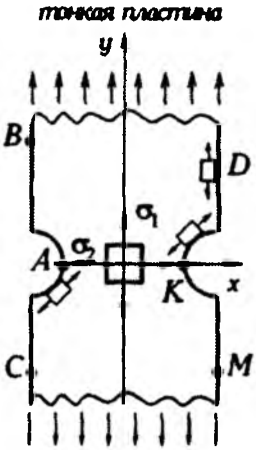


Рис. 14.1

Аналогичная зависимость используется для нахождения напряжений на участках свободного контура в тонких пластинах. На рис. 14.1 показана тонкая пластина с выкружками, растягиваемая в направлении оси y. В среднем сечении A–K во всех точках (кроме точек A и K) возникает плоское напряженное состояние, а на участках свободного от нагрузок контура BAC и DKM – линейное напряженное состояние. Главные напряжения на участке свободного контура всегда по направлению совпадают с касательной к контуру. И если на контуре замерить деформацию по этому направлению, то эта деформация будет главной: ε_1 или ε_3 (при сжатии вдоль контура). Тогда главное напряжение на свободном контуре будет определяться выражением (14.1), где вместо индекса "x" надо поставить индекс "1" (или "3").

Если направления главных деформаций во внутренних точках пластины заранее найдены (или известны), то необходимо замерить деформации по этим главным направлениям. В центре пластины, а также на осях x и y главные напряжения и деформации совпадают с направлениями осей координат, которые являются осями симметрии тела и нагрузок. По замеренным в этих точках деформациям ε_1 и ε_2 можно с помощью закона Гука для плоского напряженного состояния (при $\sigma_3 = 0$) определить σ_1 и σ_2 из уравнений, приведенных в главе 3:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \nu\sigma_2); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \nu\sigma_1). \end{aligned} \tag{14.2}$$

Разрешая эти уравнения относительно главных напряжений, получим

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2); \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1). \tag{14.3}$$

Если направления главных деформаций в исследуемой точке конструкции заранее не определены, то в этом случае приходится замерять линейные деформации в трех направлениях, например, вдоль осей x, y и под углом $\alpha = 45°$ к этим осям $\varepsilon_{45°}$. Тогда для нахождения главных деформаций используется формула

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_{45°}\right)^2 + \left(\varepsilon_y - \varepsilon_{45°}\right)^2}. \tag{14.4}$$

Рассмотрим основные типы тензометров – устройств для измерения деформаций.

1. ***Механический тензометр.*** На рис. 14.2 приведена схема тензометра Гутенбергера. Этот тензометр двумя острыми призмами с помощью струбцин прижимается к поверхности исследуемого образца или конструкции (объекта). При деформировании объекта *8* расстояние $l_т$, называемое базой тензометра, меняется, поэтому подвижная призма *1* поворачивается вокруг точки *3*; перемещение Δl острия подвижной призмы через систему рычагов *2*, *5* передается на стрелку *6* прибора. Изменение отсчета ΔA по шкале *7* прибора представляет увеличенное в K раз перемещение Δl, т.е.

$$\Delta A = K\Delta l. \tag{14.5}$$

Коэффициент увеличения определяется соотношением плеч рычагов тензометра и обычно находится в пределах от 500 до 1000.

Знная Δl, определим линейную деформацию

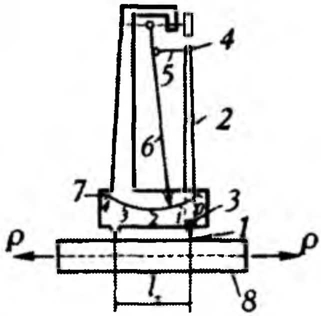


Рис. 14.2

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_т} = \frac{\Delta A}{K l_т}. \qquad (14.6)$$

База тензометра $l_т$ обычно $20 \div 50$ *мм*. Если деформации в исследуемом объекте меняются от точки к точке, то определяемая при помощи (14.6) деформация является средней на этой базе, которая при больших градиентах деформаций может значительно отличаться от наибольшей на этой базе. Поэтому механические тензометры обычно используют в лабораторных условиях для определения деформаций образцов с однородным напряженным состоянием. Эти образцы специально изготавляются для изучения механических свойств материала и нахождения его упругих постоянных. Так, например, если образец подвергается простому растяжению, то по приложенной нагрузке легко подсчитать нормальное напряжение в поперечном сечении, а затем по замеренной с помощью тензометра продольной деформации образца определить из выражения (14.1) модуль продольной упругости материала.

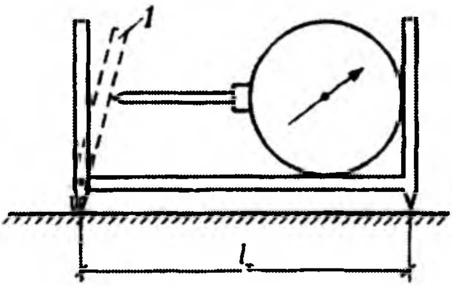


Рис. 14.3

При исследовании крупногабаритных конструкций типа пролетного строения моста могут использоваться тензометры с индикатором часового типа (рис. 14.3). Здесь изменение расстояния между ножками тензометра вызывает поворот рычага *1*, который в свою очередь перемещает наконечник индикатора. Это перемещение регистрируется по шкале прибора, а затем при помощи выражения (14.6) подсчитывается деформация ε.

2. ***Электрический тензометр-тензорезистор.***

На рис. 14.4 показано устройство тензорезистора-датчика омического сопротивления. Несколько петель тонкой проволоки *1* закрепляются клеем на тонкой бумаге *2* (или пленке), которая в свою очередь приклеивается на поверхность исследуемой конструкции. Омическое сопротивление датчика *R* зависит от общей длины его петель l, сечения A проволоки и удельного сопротивления ρ:

$$R = \rho \frac{l}{A}. \qquad (14.7)$$

Датчик деформируется вместе с конструкцией, что приводит к изменению параметров l и A, т.е. к изменению его омического сопротивления. Оказывается, что относительное изменение омического сопротивления $\Delta R/R$ при малых деформациях пропорционально средней деформации ε на базе $l_т$ датчика, т.е.

$$\frac{\Delta R}{R} = \beta\varepsilon. \qquad (14.8)$$

Для изготовления датчиков чаще всего используют проволоку диаметром $0{,}02 \div 0{,}03$ *мм* из константана (сплав 60% Cu и 40% Ni), у которого коэффициент тензочувствительности $\beta = 2 \div 2{,}1$.

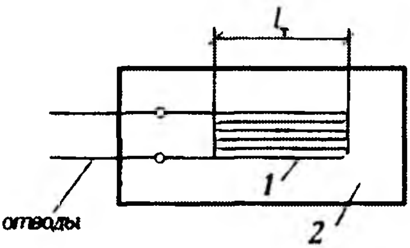


Рис. 14.4

База такого датчика может меняться в широких пределах: от 50 до 2–3 *мм*. Чаще всего используют датчики с базой 10–20 *мм*. При малых базах на результат измерения влияют деформации в поперечном направлении, что связано с деформациями проволоки на участках закругления. Чем меньше база, тем ближе средняя измеренная деформация к ее локальному значению в исследуемой точке. Помимо проволочных датчиков в последнее время используют фольговые датчики, изготовленные из тонколистового металла (медно-никелевая или золото-серебряная фольга) в виде такой же решетки, состоящей из нескольких петель. В этом случае чувствительный элемент имеет не круглое, а прямоугольное сечение при малой толщине. Это позволяет увеличить площадь контакта с исследуемой поверхностью и улучшить передачу деформаций. База этих датчиков может доходить до 0,5 *мм*.

Полупроводниковые тензодатчики в качестве чувствительного элемента используют пленки толщиной 20–50 *мкм* из германия и кремния. Их коэффициент тензочувствительности на два порядка, т.е. в 100 раз больше, чем у проволочных датчиков, что упрощает методику измерений.

Наряду с одиночными датчиками применяют розетки из датчиков, расположенных на общей основе и предназначенных для исследования в условиях плоского напряженного состояния (рис. 14.5).

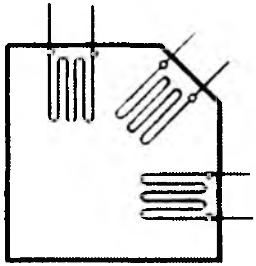


Рис. 14.5

Измеряемые деформации – это малые величины порядка $10^{-3} \div 10^{-5}$, поэтому относительное изменение омического сопротивления представляет собой также малую величину, что требует использования для измерений чувствительной аппаратуры. Чаще всего датчик входит в качестве сопротивления R_1 в так называемый мостик Уитстона, схема которого показана на рис. 14.6. Перед загружением конструкции сопротивления R_3 и R_4 подбираются такими, чтобы выполнялось соотношение

$$R_1 \cdot R_3 = R_2 \cdot R_4. \tag{14.9}$$

При этом ток в цепи гальванометра будет отсутствовать. При нагружении конструкции сопротивление датчика R_1 изменится, и в цепи гальванометра появится ток, по которому можно в конечном итоге, определить деформацию в исследуемой точке. Сопротивление R_2 представляет собой такой же датчик, который наклеивается на пластину из материала исследуемой конструкции. Эта пластина помещается рядом с исследуемой точкой и находится, таким образом, в одинаковых температурных условиях с рабочим датчиком. На изменение температуры окружающей среды датчики R_1 и R_2 реагируют одинаково, что не изменяет балансировки мостика Уитстона. Датчик R_2 называют термокомпенсационным.

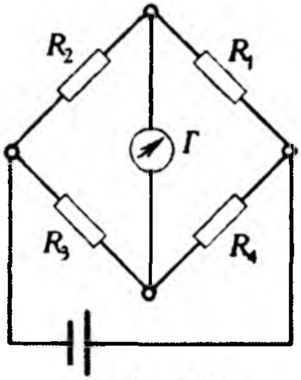


Рис. 14.6

При испытаниях таких сложных конструкций как самолет, автомобиль, мост и т.п. могут устанавливаться одновременно несколько тысяч таких датчиков. Снятие показаний с этих датчиков осуществляется с помощью автоматизированных измерительных комплексов, в состав которых входит ЭВМ.

Помимо датчиков омического сопротивления используются датчики, работа которых основана на использовании иных физических закономерностей (емкостные датчики, пьезодатчики, индуктивные, магнито-упругие, пневмоконтактные преобразователи и др.). Однако наибольшее применение имеют датчики омического сопротивления. К их преимуществам относится простота, малогабаритность, достаточно высокая точность, возможность регистрации динамических процессов, причем одновременно и в достаточно большом числе точек.

14.3. Метод хрупких покрытий

Этот метод позволяет достаточно просто, без использования специальной аппаратуры, получить данные о деформированном состоянии поверхности исследуемой детали, покрытой специально подобранным составом. Способ нанесения покрытия зависит от его состава. Если это жидкий лак, то его наносят распылением или просто кистью, а затем просушивают. Покрытие из канифоли создается распылением порошка тонким слоем на поверхности, а затем деталь нагревается до его расплавления. После остывания на поверхности образуется тонкий прозрачный слой канифоли. Можно использовать газопламенное напыление покрытий канифольного типа. В этом случае мелкодисперсный порошок пропускают через пламя газовой горелки, расплавляют в нем и подают струей воздуха на поверхность детали, где материал затвердевает, образуя покрытие. Наиболее просто наносятся покрытия с использованием компонент в аэрозольной упаковке. Для исследований при высоких температурах (до 400°C) используются эмалевые покрытия, которые оплавляются на поверхности детали. Так называемые оксидные покрытия в виде тонких листов наклеиваются на поверхность детали при помощи эпоксидных клеев.

Все эти покрытия, обладая малой жесткостью, не оказывают заметного влияния на собственное деформированное состояние детали. Деформации покрытия и детали в плоскости, совпадающей с касательной плоскостью к исследуемой поверхности, до образования трещины одинаковы.

При нагружении детали, т.е. при постепенном возрастании нагрузок, следят за появлением трещин в покрытии и фиксируют момент их образования и положение трещины на поверхности детали.

Опытные наблюдения показывают:

1) трещина в покрытии образуется тогда, когда максимальная растягивающаяся деформация достигает значения ε_0, которое называется тензочувствительной постоянной покрытия;

2) направления трещины совпадает с направлением нормали к наибольшей главной деформации ε_1 покрытия, т.е. с направлением второй (или третьей) главной деформации ε_2 (или ε_3).

Если исследуемая деталь деформируется упруго, то направления главных деформаций покрытия (равных соответствующим деформациям поверхности детали) будут совпадать с направлениями главных напряжений в детали. Поэтому, получив трещины по всей поверхности детали, можно вначале построить траектории второго главного напряжения, а затем, проведя к ним ортогональные линии, получить траектории первого главного напряжения. Напомним, что траекториями главных напряжений называют линии, касательные к которым в каждой точке поля совпадают с направлениями главных напряжений.

Для получения сразу траекторий первого главного напряжения, можно нанести хрупкое покрытие на уже загруженную деталь, тогда при разгрузке получим трещины, касательные к которым совпадают с направлениями первых главных напряжений, возникших бы при активном нагружении детали. Отметим, что в процессе пропорционального увеличения всех внешних нагрузок направления главных напряжений в каждой точке детали линейно упругого тела остаются неизменными, что и позволяет получить траектории главных напряжений по трещинам, которые образуются на поверхности детали на разных стадиях процесса нагружения.

Если каждый раз фиксировать нагрузку, при которой образуются трещины, то можно получить поле главной деформации ε_1. При этом используется пропорциональный пересчет деформаций, справедливый при линейно-упругом деформировании детали. Так, например, если в какой-либо точке на поверхности детали образовалась трещина при нагрузке P, то первая главная деформация в этой точке при воздействии на деталь заданной нагрузки P^* будет равна

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 \frac{P^*}{P}. \qquad (14.7)$$

Как правило, процесс нагружения разбивается на этапы: фиксируются трещины, а по кончикам трещин проводятся линии равных значений главной растягивающей деформации ε_1 – *изоэнтаты*. На каждом этапе эта линия $\varepsilon_1 = \varepsilon_0 = \text{const}$, а затем значения деформаций пересчитываются по формуле (14.7). В некоторых случаях, с использованием разгрузки таким же образом удается получить поле ε_2, а затем подсчитать напряжения σ_1 и σ_2 на поверхности детали при помощи закона Гука в форме (14.3).

Точность метода хрупких покрытий в значительной мере зависит от стабильности тензочувствительной постоянной ε_0 и условий проведения эксперимента. Обычно погрешность составляет 15–20%. Чаще всего метод хрупких покрытий сочетают с тензометрированием, используя для установки тензодатчиков информацию о направлениях главных деформаций в исследуемой точке.

14.4. Поляризационно-оптический метод исследования напряжений (фотоупругость)

В классической схеме поляризационно-оптического метода исследования проводят на моделях, которые изготавливают геометрически подобными натурной детали или конструкции из специальных прозрачных материалов. Эта модель помещается в поле поляризационно-оптической установки и просвечивается поляризованным светом. При нагружении модели ее изображение на экране установки покрывается системой интерференционных полос, по которым можно исследовать напряженное состояние модели.

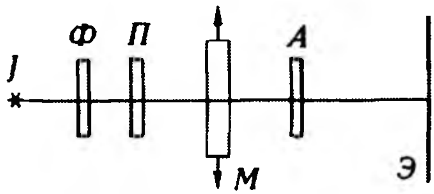


Рис. 14.7

Принципиальная схема установки показана на рис. 14.7. Свет от источника J (лампа накаливания, ртутная лампа и т.п.) проходит через светофильтр $Ф$ и становится монохроматичным, т.е. светом с определенной длиной волны λ.

Далее этот свет пропускается через поляризатор $П$, в результате чего он становится плоскополяризованным. Поперечные колебания вектора электрической напряженности (электромагнитная теория света) совершаются в этом случае в плоскости пропускания поляризатора и описываются выражением

$$E = E_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi_0\right). \tag{14.8}$$

Здесь E_0 – амплитуда волны; ω – круговая частота; t – время; φ_0 – начальная фаза; x – текущая координата; выражение, заключенное в скобки, называют фазой колебания.

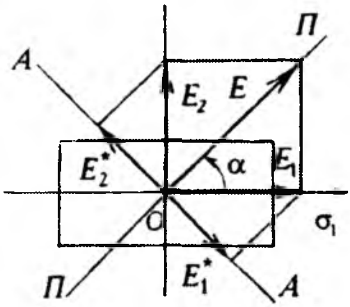


Рис. 14.8

Рассмотрим прохождение электромагнитной волны, характеризуемой вектором E через модель M, которую будем считать находящейся в плоском напряженном состоянии. При этом напряжения на пути просвечивания, т.е. по толщине модели, будут оставаться неизменными. Примем, что в точке вхождения луча в модель $x = 0$ и $\varphi_0 = 0$, тогда (см. (14.8))

$$E = E_0 \sin\omega t. \tag{14.9}$$

Пусть направление вектора E составляет угол α с направлением главного напряжения σ_1 в точке входа луча в модель (рис. 14.8).

Большинство прозрачных материалов обладает эффектом временного двойного лучепреломления, т.е. при нагружении они становятся оптически анизотропными. Такие материалы как стекло, целлулоид, органическое стекло, пластмассы на основе эпоксидных, фенол-формальдегидных и других смол в обычном состоянии оптически изотропны, т.е. обладают одинаковыми коэффициентами преломления и скоростями прохождения колебаний во всех направлениях. При нагружении скорость прохождения световых колебаний уже зависит от направления плоскости, в которой совершаются поперечные колебания вектора E.

Разложим вектор E на составляющие по направлениям главных напряжений. В точке входа луча в модель (см. рис. 14.8) получим

$$E_1 = E_0 \sin\omega t \cos\alpha; \quad E_2 = E_0 \sin\omega t \sin\alpha. \tag{14.10}$$

Колебания E_1 и E_2 пройдут через нагруженную модель с разной скоростью, следовательно, за разное время. Эти колебания, после выхода из модели, можно записать в виде

$$E_1' = E_0 \sin\omega(t - t_1)\cos\alpha; \quad E_2' = E_0 \sin\omega(t - t_2)\sin\alpha. \tag{14.11}$$

Здесь t_1 и t_2 – время прохождения соответствующих колебаний через модель. Разность фаз этих двух колебаний

$$\Phi = \omega(t_2 - t_1). \tag{14.12}$$

Колебания (14.11) являются когерентными, т.е. они способны интерферировать. Но картина интерференции сразу за моделью еще не видна, так как эти колебания совершаются во взаимно-перпендикулярных направлениях. Для получения интерференционной картины в схему установки (рис. 14.7) вводится анализатор A – такой же прибор, как и поляризатор, но его плоскость пропускания колебаний (плоскость A–A на рис. 14.8) обычно устанавливается перпендикулярно плоскости пропускания поляризатора ($П$–$П$). После анализатора получим два колебания E_1^* и E_2^*, которые равны проекциям векторов $E_1^{'}$ и $E_2^{'}$ на направление A–A:

$$\begin{aligned} E_1^* &= E_1^{'}\sin\alpha = \frac{1}{2}E_0\sin2\alpha\sin\omega(t-t_1); \\ E_2^* &= E_2^{'}\cos\alpha = \frac{1}{2}E_0\sin2\alpha\sin\omega(t-t_2)\ . \end{aligned} \tag{14.13}$$

Разность этих колебаний определится вектором $E^* = E_1^* - E_2^*$, т.е.

$$E^* = \frac{1}{2}E_0\sin2\alpha\left[\sin\omega(t-t_1)-\sin\omega(t-t_2)\right]. \tag{14.14}$$

Используя тригонометрические формулы для разности синусов, получим выражение, описывающее гармоническое колебание

$$E^* = \left[E_0\sin2\alpha\sin\frac{\omega}{2}(t_2-t_1)\right]\cos\omega\left(t-\frac{t_1+t_2}{2}\right).$$

Уравнение для амплитуды этого колебания заключено в квадратные скобки. Используя (14.12), запишем выражение для амплитуды A в виде

$$A = E_0\sin2\alpha\sin\frac{\Phi}{2}. \tag{14.16}$$

Интенсивность света J пропорциональна квадрату амплитуды, т.е.

$$J = kA^2 = kE_0^2\sin^2 2\alpha\sin^2\frac{\Phi}{2}. \tag{14.17}$$

Здесь k – коэффициент пропорциональности, учитывающий общие потери при прохождении света через установку.

Проанализировать интерференционную картину на экране установки позволяет выражение (14.17). Из него следует, что $J = 0$ при $\alpha = 0$ или $\alpha = 90^\circ$, т.е. темная полоса проходит через те точки модели, в которых направления одного из главных напряжений совпадает с направлением плоскости поляризации. Эта полоса называется изоклиной (линией равного наклона). Поворачивая синхронно поляризатор и анализатор, получаем изоклины разных параметров. Параметр изоклины – угол, который составляет направление одного из главных напряжений с некоторым фиксированным направлением, например, с горизонталью.

Рассматривая второй множитель в уравнении (14.17), видим, что интенсивность света $J = 0$ тогда, когда разность фаз кратна 2π, т.е.

$$\Phi = 0,\ 2\pi,\ 4\pi,\ \ldots,\ 2n\pi. \tag{14.18}$$

где n – целое число.

Это второе семейство темных (в монохроматическом свете) или цветных (в белом свете) полос обычно называют изохромами (линиями равного цвета).

При упругом деформировании плоско напряженной модели разность фаз Ф пропорциональна разности главных напряжений и толщине модели (закон Вертгейма):

$$\Phi = C_\lambda(\sigma_1 - \sigma_2)d. \tag{14.19}$$

Здесь C_λ – коэффициент оптической чувствительности материала, зависящий от длины волны используемого света; d – толщина модели. Из закона Вертгейма следует, что в модели постоянной толщины d эти полосы являются геометрическим местом точек, имеющим одинаковые разности главных напряжений. Каждой полосе соответствует свое целое число n (см. (14.18)), которое называют порядком полосы. До нагружения модели ее изображение – темное, т.е. имеем полосу нулевого порядка, а затем полосы по мере увеличения нагрузки появляются в точках, где возникают наибольшие разности главных напряжений, и двигаются в сторону менее напряженных точек. Проследив за картиной образования полос по мере нагружения модели, нетрудно определить порядок каждой полосы. На рис. 14.9, *а* показана интерференционная картина, полученная при просвечивании балки на двух опорах, загруженной силой посредине пролета. Здесь наблюдаем семейство полос и изоклину параметра $\alpha = 15^0$ (отмечена пунктиром). Одновременное присутствие двух семейств интерференционных полос затрудняет наблюдение, поэтому для устранения изоклин используют так называемый круговой полярископ, создающий круговую поляризацию света. Для этого в схему полярископа на рис. 14.7 перед и сразу же после модели вводятся специальные пластины, создающие разность хода лучей, равную четверти длины волны используемого света. Разность хода δ и разность фаз Ф связаны соотношением

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta.$$

На рис. 14.9, *б* показана картина полос без изоклины, полученная в круговом полярископе. Для фиксации изоклин обычно используют белый свет, тогда изоклины – черные полосы – хорошо видны на цветном фоне изохром.

а)

б)

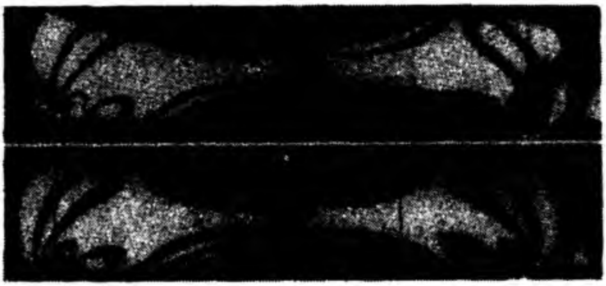


Рис. 14.9

Установив порядок каждой полосы "n", можно в точках, где они проходят, определить разность главных напряжений из уравнения (14.19) при $\Phi = 2n\pi$:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2n\pi}{C_\lambda d} = \frac{\sigma^{1.0} \cdot n}{d} \quad . \qquad (14.20)$$

Величина $\sigma^{1.0} = \dfrac{2\pi}{C_\lambda}$ называется ценой полосы материала модели и определяется тарировкой в опыте, когда разность главных напряжений легко подсчитать, например, при простом растяжении полосок прямоугольного поперечного сечения. В этом случае на удалении от захватов – мест приложения нагрузки – поле модели на экране установки будет однородным ($\sigma_1 - \sigma_2 = \text{const}$) и число n определяется подсчетом числа затемнений, прошедших через поле в процессе возрастания нагрузки. При чистом изгибе (рис. 14.10) все полосы – от нулевой на уровне продольной оси до полос с максимальным порядком на крайних волокнах балки – присутствуют на картине, и порядок полосы устанавливается простым счетом, начиная от нулевой. При исследовании моделей конструкций, разность фаз Φ определяется более точно методами компенсации.

Таким образом, по результатам поляризационно-оптического исследования модели можно получить поле разностей главных напряжений ($\sigma_1 - \sigma_2$) и направления главных напряжений α в каждой точке этого поля.

На участке свободного контура плосконапряженной модели одно из главных напряжений отсутствует. Там реализуется линейное напряженное

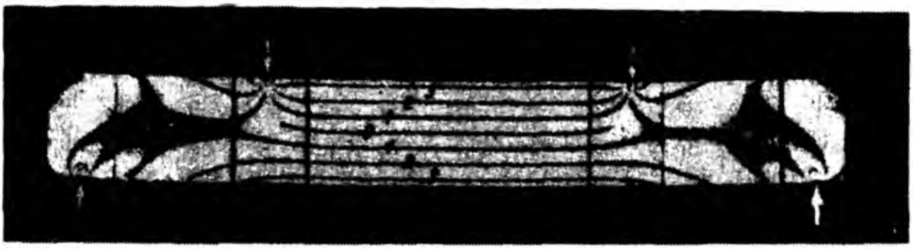


Рис. 14.10

состояние, и по числу полос в точке свободного контура сразу же определяется главное напряжение σ_1 (растяжение) или σ_3 (сжатие). Во всех остальных точках поля желательно иметь раздельные значения главных напряжений, а не только их разность. Для нахождения этих раздельных значений, т.е. для разделения напряжений, используются численные и экспериментальные методы. Наиболее просто можно определить раздельные значения главных напряжений σ_1 и σ_2, если дополнительно получить поле сумм главных напряжений $\sigma_1 + \sigma_2$. Имея в каждой точке разность $\sigma_1 - \sigma_2$ и сумму $\sigma_1 + \sigma_2$ легко подсчитать раздельные значения главных напряжений. Из закона Гука (3.31) для плоского напряженного состояния при $\sigma_3 = 0$ получим, что

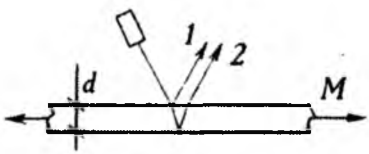


Рис. 14.11

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2),$$

т.е. поперечная деформация плосконапряженной модели, связанная с изменением толщины модели при деформировании, пропорциональна сумме главных напряжений. Для измерения этих поперечных деформаций целесообразно использовать интерференцию лучей, отраженных от двух поверхностей модели (рис. 14.11). Между лучами *1* и *2* возникает оптическая разность хода, пропорциональная толщине модели *d*, однако интерференционная картина в виде линий равных толщин модели будет наблюдаться только в том случае, когда в качестве источника света используется газовый лазер, излучение которого обладает большой когерентностью. Интерференционная картина фиксируется дважды: до и после нагружения модели. Наложением этих двух систем интерференционных полос можно получить новое семейство полос: изопахики – линии равных сумм главных напряжений. Определив цену изопахики Σ^0 и установив номер каждой ее полосы m, можно по картине изопахик подсчитать

$$\sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\Sigma^0 \cdot m}{d}. \tag{14.21}$$

Численные способы разделения напряжений основаны чаще всего, на рассмотрении уравнений равновесия малого элемента модели. Пусть, например, левая грань элемента $ABCD$ совпадает с контуром модели и здесь известно напряжение $\sigma_{x,0}$ (рис. 14.12). Напряжение $\sigma_{x,1}$ на грани CD определим из условия равновесия элемента в виде $\Sigma F_x = 0$. Будем считать, что напряжения в пределах каждой грани распределены равномерно (в виду малости элемента $ABCD$); тогда получим соответствующие усилия на гранях, умножив напряжения на площадь грани. Толщину модели (элемента) примем равной 1. Получим

$$-\sigma_{x,0} \cdot \Delta y + \sigma_{x,1} \cdot \Delta y - \tau_{xy,0} \cdot \Delta x + \tau_{xy,1} \cdot \Delta x = 0,$$

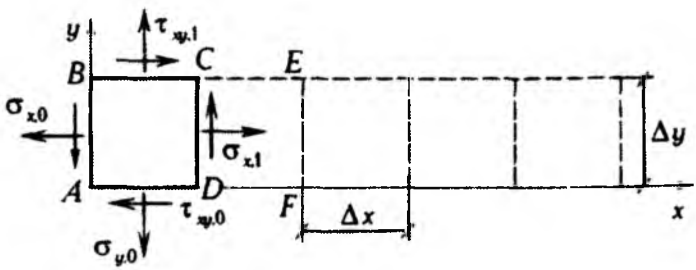


Рис. 14.12

откуда найдем

$$\sigma_{x,1} = \sigma_{x,0} - \frac{\tau_{xy,1} - \tau_{xy,0}}{\Delta y} \Delta x.$$

Касательные напряжения в точках на линии $y = 0$ и $y = \Delta y$ подсчитаем при помощи формулы

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha,$$

где разность главных напряжений будет найдена из картины полос, а угол их наклона α – из картины изоклин. Определив $\sigma_{x,1}$ на площадке CD, примем ее за исходную и найдем напряжение σ_x на площадке EF и так далее по всему выбранному сечению модели. Изложенная процедура разделения носит название метода разности касательных напряжений.

После нахождения напряжений в модели $\sigma_м$ подсчитываются напряжения в натурной детали или конструкции $\sigma_н$ с использованием формул теории подобия

$$\sigma_н = \sigma_м \frac{m_p}{m_l^2}.$$

Здесь $m_p = \dfrac{p_н}{p_м}$ – масштаб силового подобия; $m_l = \dfrac{l_н}{l_м}$ – масштаб геометрического подобия; индекс "н" относится к натуре, "м" – к модели.

Поляризационно-оптический метод позволяет проводить исследование не только упругих задач, но и задач теории пластичности, ползучести, нелинейной упругости. При этом подбираются соответствующие материалы для моделей.

Главное достоинство данного метода заключается в том, что он позволяет определять напряжения во внутренних точках модели, в том числе и в тех случаях, когда модель находится в пространственном напряженном состоянии. Для этого используется несколько схем исследования. Рассмотрим их на примере изучения напряженного состояния шара, сжатого двумя силами по диаметру (рис. 14.13). Если поместить модель шара в поле поляризационно-оптической установки (см. рис. 14.7), то на экране при сквозном просвечивании шара можно получить интерференционную картину. Шар размещается в иммерсионной ванне, которая представляет собой ящик с прозрачными параллельными стенками. В ванну-ящик наливается иммерсионная жидкость с показателем преломления, равным показателю преломления материала модели.

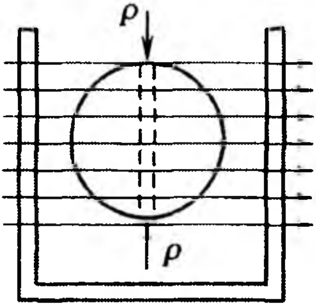


Рис. 14.13

В этом случае плоскопараллельный пучок света пройдет, не преломляясь на границе модели. Но расшифровать эту картину и определить распределение напряжений на пути просвечивания модели не всегда удается.

Обычно при исследовании пространственнонапряженных моделей стремятся выделить из модели тонкий слой и исследовать его отдельно. Достигается это несколькими способами. Наиболее распространен метод *замораживания* моделей. В этом случае модель изготовляется из пространственно сшитых полимеров типа материала на основе эпоксидных смол. Такие материалы при комнатной температуре находятся в стеклообразном (достаточно жестком) состоянии: если материал нагреть до температуры порядка 60÷80 °С, то он переходит в высокоэластичное состояние, т.е. становится подобным мягкой резине. В этом состоянии модель загружается заданными нагрузками, а затем медленно охлаждается до комнатной температуры. После разгрузки модели при комнатной температуре ее деформации, полученные в высокоэластичном состоянии, не исчезают, они как бы замораживаются. Вместе с ними "замораживается" временное двойное лучепреломление, соответствующее напряженному состоянию загруженной при повышенной температуре модели. Теперь модель можно аккуратно, не допуская нагрева, разрезать на отдельные тонкие пластины и исследовать каждую из них по отдельности на поляризационно-оптической установке. Для шара достаточно вырезать одну пластину. Линии выреза показаны пунктиром на рис. 14.13.

В *методе составных моделей* основной блок модели изготавливается из прозрачного материала с практически нулевой оптической чувствительности ($C_\lambda = 0$). Затем в интересующее исследователя сечение вклеивается тонкая пластина из материала с высокой оптической чувствительностью, который подбирается так, чтобы его упругие постоянные не отличались от упругих постоянных первого материала. Такую пластину можно вклеить в меридиональное сечение шара. Просвечивая составную модель в поляризационно-оптической установке, будем наблюдать оптическую интерференционную картину, зависящую только от напряженного состояния вклеенной тонкой пластины.

14.5. Метод фотоупругих покрытий

Этот метод позволяет проводить исследования натурных деталей, элементов конструкций или их моделей, изготовленных из материала натуры. Здесь на поверхность исследуемого, как правило, непрозрачного объекта наносится тонким слоем покрытие из оптически чувствительного материала, которое должно обладать хорошим сцеплением с поверхностью и не нарушать его при деформировании объекта, а также иметь малую жесткость с тем, чтобы не оказывать заметного влияния на работу исследуемого элемента.

При нагружении элемента покрытие повторяет деформации его поверхности, и в нем возникает напряженное состояние, близкое к плоско напряженному. Эффект временного двойного лучепреломления фиксируется с помощью поляризационно-оптических установок для работы в отраженном свете, две схемы которых показаны на рис. 14.14.

В первой схеме (рис. 14.14, *а*) луч от источника света *1* проходит через поляризатор *П*, отражается полупрозрачным зеркалом *4*, и, пройдя через фотоупругое покрытие *2*, падает на поверхность элемента по нормали к ней. На элементе перед нанесением покрытия создается отражающий слой (часто для этого достаточно зачистить шкуркой исследуемую металлическую поверхность). Луч отражается от поверхности, снова проходит через фотоупругое покрытие, а затем через полупрозрачное зеркало и анализатор

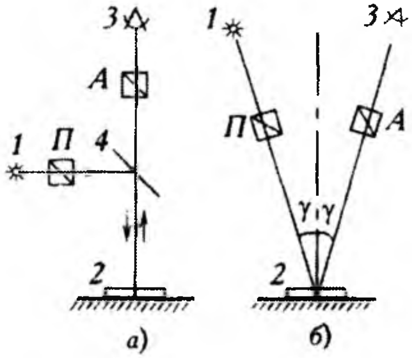


Рис. 14.14

A, за которым располагается либо фотоаппарат, либо наблюдатель 3 или измерительная аппаратура для регистрации интенсивности света. Во второй схеме, на рис. 14.14, б (V–образный полярископ), свет проходит под некоторым углом к нормали к поверхности, и поэтому падающий и отраженные лучи проходят через разные точки покрытия, что приводит к осреднению измерений на базе, равной расстоянию между точками входа и выхода лучей из покрытия. Однако этот прибор проще в работе, поэтому чаще используется V–образная схема.

Если считать, что деформации и напряжения по толщине покрытия распределены равномерно, что обычно обеспечивается выбором толщины покрытия, то разность главных напряжений в покрытии будет связана с разностью фаз по-прежнему законом Вертгейма с тем лишь отличием, что свет проходит через покрытие дважды

$$\Phi = C_\lambda\left(\sigma_{1.n} - \sigma_{2.n}\right)\cdot 2d. \tag{14.24}$$

Наблюдаемые полосы будут как и в классической схеме линиями равных разностей главных напряжений в покрытии, а изоклины – линиями одинакового их наклона. Материал для фотоупругого покрытия подбирается таким, чтобы он деформировался упруго независимо от характера (упругого, неупругого) деформирования исследуемой конструкции. Тогда по закону Гука для материала покрытия можно определить разность главных деформаций в плоскости покрытия

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1+\nu_n}{E_n}\left(\sigma_{1.n} - \sigma_{2.n}\right) \tag{14.25}$$

или

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{1+\nu_n}{E_n}\cdot\frac{\Phi}{C_\lambda\cdot 2d}. \tag{14.26}$$

Если $\Phi = 2n\pi$ (n – порядок полосы), то разность главных деформаций в точках, где проходят полосы целого порядка, будет равна

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon^{1,0} \cdot n}{2d}, \qquad (14.27)$$

где $\varepsilon^{1,0} = \dfrac{2\pi(1+\nu_n)}{E_n C_\lambda}$ – цена полосы по деформациям материала покрытия.

Так как деформации покрытия и поверхности конструкции в силу их прочного сцепления одинаковы, то наблюдаемые полосы интерференции будут линиями равных значений разностей главных деформаций на поверхности конструкции, а изоклины будут определять направления этих главных деформаций по всему исследуемому полю. Таким образом, метод фотоупругих покрытий представляет собой разновидность метода тензометрии, позволяющего одновременно измерять деформации по поверхности конструкции, ограниченной покрытием.

Здесь также возникает необходимость в раздельном определении главных деформаций. Для этой цели можно использовать замер поперечных деформаций покрытия, которые пропорциональны сумме главных деформаций. Действительно, из закона Гука для плоского напряженного состояния следует, что

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2). \qquad (14.28)$$

Для определения поперечных деформаций можно использовать изложенную в разделе 14.4 схему замера толщин моделей с помощью лазерной интерферометрии.

Если нанести на исследуемую поверхность фотоупругое покрытие в виде набора узких полосок, ширина которых не больше толщины покрытия, то такие полоски воспримут лишь линейные деформации на поверхности конструкции в направлении этих полосок. Это обстоятельство также можно использовать для разделения деформаций, если сочетать исследования на сплошном покрытии и покрытии в виде набора узких полосок.

По найденным на поверхности конструкции деформациям можно определить напряженное состояние поверхности конструкции. Для этого используется связь деформаций с напряжениями для материала конструкции.

14.6. Метод муаровых полос

В этом методе используются так называемые *растры*, которые наносятся на исследуемую поверхность элемента. Растр представляет собой чередование темных и светлых линий различной геометрической структуры с регулярным или нерегулярным строением. Наиболее часто используют линейный растр с постоянным шагом (рис. 14.15), который образован прямыми линиями, расположенными на одинаковом расстоянии друг от друга. Это расстояние называют шагом растра a, он связан с линиатурой или частотой растра N соотношением $N = 1/a$, т.е. частота растра определяется числом линий на единицу длины (обычно на 1 *мм*). Используются растры с частотой от 1 до 1000 *линий* на *мм*. Растры с частотой до 20–40 *линий/мм* изготавливаются оптико-механическим способом, растры с частотой более 100 *линий/мм* изготавливаются методами лазерной интерферометрии.

а)

б)

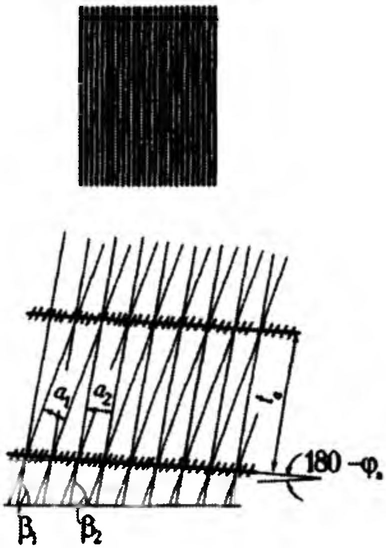


Рис. 14.15

Растр тем или иным способом наносится на исследуемую поверхность и *деформируется вместе с ней*. При исследовании изгибаемых поверхностей растр просто проецируется на исследуемую поверхность и наблюдается картина в отраженном свете. Эта вторая разновидность метода муаровых полос здесь не рассматривается.

Деформированный растр оптическим или механическим способом совмещается с эталонным растром, точной копией первого, но который не подвергался деформированию. В результате деформации рабочего растра расстояния между соседними линиями изменяются; кроме того, рабочий растр может повернуться по отношению к эталонному. Поэтому при совмещении рабочего и эталонного растров наблюдаются муаровые полосы, при этом малые, невидимые на глаз, перемещения точек исследуемой поверхности конструкции вызывают заметное перемещение муаровых полос, что и используется в данном методе.

Для объяснения муарового эффекта рассмотрим результат наложения двух линейных растров с шагом a_1 и a_2 и углами их наклона β_1 и β_2 соответственно (рис. 14.15, *б*).

Записав уравнения семейства линий первого и второго растров и учитывая, что муаровые полосы (на рис. 14.15, *б* они заштрихованы) являются геометрическим местом точек пересечения линий растров, можно получить расстояние между муаровыми полосами

$$l_a = \frac{a_1 a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos(\beta_1 - \beta_2)}} \qquad (14.29)$$

и угол наклона

$$\operatorname{tg}\varphi_a = \frac{a_1 \sin\beta_2 - a_2 \sin\beta_1}{a_1 \cos\beta_2 - a_2 \cos\beta_1}. \qquad (14.30)$$

Обычно используют параллельные растры, когда $\beta_1 = \beta_2$. Тогда из уравнения (14.30) следует, что $\varphi_a = \beta$, т.е. муаровые полосы располагаются параллельно линиям растра. Расстояние между полосами в этом случае

$$l_a = \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2}. \qquad (14.31)$$

Предположим, что растр с шагом a нанесен на поверхность, деформации которой не меняются от точки к точке. Тогда его шаг после деформации ε в направлении, перпендикулярном линиям растра, станет равным

$$a_1 = a + \Delta a = a(1 + \varepsilon).$$

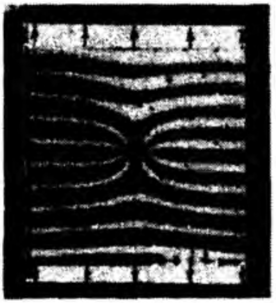


Рис. 14.16

Шаг эталонного растра останется равным a, тогда из (14.31) следует, что

$$l_a = \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} a. \qquad (14.32)$$

Выражение (14.32) позволяет определить деформации ε, если замерить расстояние между муаровыми полосами l_a:

$$\varepsilon = \frac{a}{l_a - a}. \qquad (14.33)$$

Так как обычно l_a существенно больше a, то

$$\varepsilon = \frac{a}{l_a}. \qquad (14.34)$$

При однородной деформации на базе l_a перемещение в направлении, перпендикулярном линиям растра, будет равно $u = \varepsilon l_a$, следовательно, муаровая полоса при параллельных растрах образуется тогда, когда перемещение линий рабочего растра относительно контрольного будет равно шагу растра a. Таким образом, в рассмотренном случае муаровые полосы представляют собой линии равных значений перемещений в направлении, перпендикулярном линиям растра, причем перемещения точек, лежащих на соседних муаровых полосах, отличаются на шаг растра a, т.е. "цена муаровых полос" равна шагу растра. Это обстоятельство позволяет определить поле перемещений заданного направления, если предварительно пронумеровать муаровые полосы. Изложенное сохраняет силу и при неоднородном деформировании, но здесь определяется средняя деформация на участке между двумя соседними муаровыми полосами.

Для получения деформаций в другом, ортогональном первому, направлении используется второй рабочий растр

На рис. 14.16 показана картина муаровых полос, полученная при растяжении пластинки с круглым отверстием в центре. Линии растра частотой 40 *линий/мм* перпендикулярны продольной оси пластинки. Видно, что муаровые полосы сгущаются около отверстия, что свидетельствует о нарастании (концентрации) деформаций в этой зоне.

14.7. Голографическая интерферометрия

Если в обычной фотографии регистрируется только интенсивность рассеянной предметом световой волны, то в голографии удается одновременно записать информацию как об интенсивности (амплитудная информация), так и о фазе световой волны (фазовая информация). Для получения голографического, т.е. полного, изображения предмета на первой стадии процесса регистрируется голограмма. Для этого луч *1* (рис. 14.17, *а*) высококогерентного и монохроматического света, в качестве источника которого обычно используется лазер, расщепляется на два луча, один из которых падает непосредственно на фотоноситель *3*, *после отражения* от зеркала *2*, образуя эталонный или опорный луч. Вторая часть пучка (предметная волна) освещает исследуемый объект *M* и, рассеявшись от этого предмета также падает на фотоноситель. Предметный и опорный луч интерферируют, и, благодаря, этому происходит преобразование фазовой информации в амплитудную структуру интерференционной картины. Однако внешний вид интерференционного узора ничем не напоминает изображение объекта. Записанная на фотопленке информация – голограмма – кодируется в виде дифракционной решетки с высокой пространственной частотой (до нескольких тысяч линий на *мм*). Для получения изображения предмета необходимо осветить голограмму опорным пучком света (рис. 14.17, *б*). При этом получаются мнимое *5* и действительное *4* изображения предмета. В отличие от фотографии изображение получается не плоским, а объемным. Не вдаваясь в описание

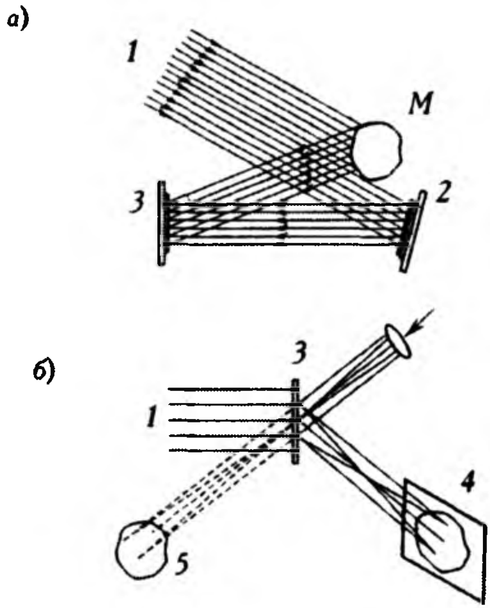


Рис. 14.17

этого явления, отметим лишь, что процесс восстановления волнового фронта при прохождении опорного луча через дифракционную решетку (голограмму) является обратным по отношению к процессу получения голограммы.

Голография позволяет произвести интерференционное сравнение световых волн, рассеянных объектом в различные моменты времени (например, до нагружения объекта и после). Это свойство голографии используется в методе голографической интерферометрии.

Сравнивать световые волны можно двумя способами. В первом, который называется методом реального времени, голограмму после экспонирования и проявления помещают точно в том же месте, где она была при записи. При восстановлении изображения объект не убирается. В этом случае за голограммой будет распространяться две волны: одна – рассеянная объектом, вторая – рассеянная голограммой. Эти волны когерентны и могут интерферировать. Если объект деформируется, то появится видимая интерференционная картина в виде полос, форма которых зависит от перемещений поверхности объекта.

Во втором методе, который получил название метода двух экспозиций, последовательно регистрируют две голограммы, соответствующие двум состояниям объекта на одну фотопластинку. При восстановлении полученной таким образом голограммы наблюдается интерференционная картина, полосы которой характеризуют произошедшие с объектом изменения между двумя экспозициями. Эта картина полос локализуется, т.е. наиболее четко видна, в плоскости, расположенной между голограммой и изображением объекта. Положение этой плоскости зависит от характера перемещений точек поверхности объекта.

Порядок интерференционных полос, наблюдаемых на восстановленном изображении объекта, зависит не только от перемещений точек поверхности объекта, но и от направлений освещения и наблюдения. Оказывается, что интерферограмма определяет проекцию полного перемещения соответствующей точки на направление биссектрисы угла между направлениями освещения и наблюдения. В общем случае, когда направление вектора перемещений заранее неизвестно, необходимо, как минимум, произвести замеры при трех, не лежащих в одной плоскости, положениях биссектрисы. По этим трем составляющим перемещения можно подсчитать полное перемещение соответствующей точки и определить его направление. Для изменения положения биссектрисы в пространстве можно вести наблюдение с трех различных направлений через одну голограмму или записать одновременно три голограммы.

Наиболее часто и эффективно голографическая интерференция используется для определения перемещений, нормальных к поверхности объекта. В этом случае направления освещения и наблюдения также стараются расположить как можно ближе к нормали, тогда величина искомого перемещения будет пропорциональна порядку полосы. Для установления порядка полосы проводят их счет от нулевой, соответствующей неподвижным точкам поверхности объекта. Если такие точки заранее неизвестны, то объект соединяют эластичной связкой с заведомо неподвижной точкой.

Изложенный метод позволяет определять перемещения с высокой точностью, при этом не требуется устанавливать на поверхность никаких приборов или датчиков. Однако он требует надежной виброизоляции объектов, поэтому исследования ведутся, в основном, на моделях, размещаемых вместе с деталями оптической установки на специальных голографических столах.

Если разместить фотопленку для записи голограммы непосредственно на исследуемой поверхности с помощью прозрачного клея, то записанная методом двух экспозиций во встречных пучках интерферограмма будет также характеризовать переме-

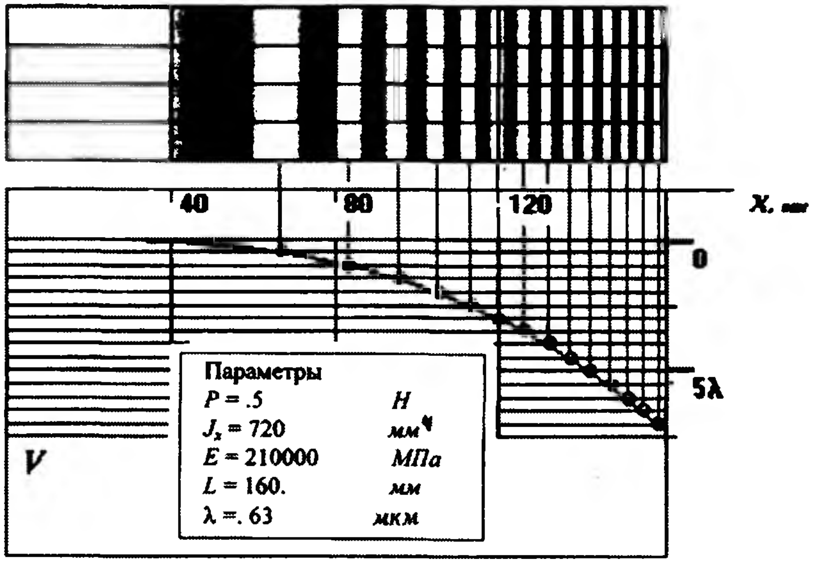


Рис. 14.18

щения точек исследуемой поверхности. При такой записи требования к виброизоляции объекта значительно ослабляются.

На рис. 14.18 показана интерферограмма, полученная при изгибе консольной балки прямоугольного поперечного сечения. Полосы на этой интерферограмме характеризуют прогибы балки. Прогиб в любой ее точке равен произведению порядка полосы на половину длины волны λ. На левом конце балки светлая полоса имеет нулевой порядок, на правом – он равен ~15, что соответствует прогибу на конце балки $\upsilon = 15 \cdot \frac{\lambda}{2} = 4{,}7$ мкм (Теоретическое значение равно 4,5мкм).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, мы рассмотрели основные виды деформаций стержня и получили расчетные и экспериментальные способы определения его напряженно-деформированного состояния. Эти данные могут быть использованы для оценки прочности, жесткости и устойчивости отдельных стержневых элементов конструкций, машин и агрегатов.

Достаточно ли этих знаний для прочностного расчета реальной инженерной конструкции?

К сожалению, нет. В курсе сопротивления материалов не рассматривается один из важных этапов расчета – переход от реальной конструкции к ее расчетной схеме. На этом этапе производится выбор модели механического поведения материала (упругая, упруго-пластическая, с учетом и без учета деформаций ползучести, анизотропии и т.д.), определение нормативных и расчетных нагрузок, типов опорных устройств и соединений элементов, идеализация геометрических свойств объекта и др. Эти вопросы рассматриваются в специальных курсах, посвященных расчету и проектированию различных категорий инженерных объектов: промышленные и гражданские сооружения, мосты, метрополитены, железнодорожный путь, вагоны и локомотивы, самолеты, речные и морские суда, краны и различные механизмы, машины и многое другое. В этих же курсах применительно к конкретным объектам уточняются модели разрушения в зависимости от длительности и характера нагрузок (постоянные, повторно-переменные, случайные и др.) и механических свойств материала. Часто проектирование инженерных объектов начинается на стадии создания материала под конкретную конструкцию. Речь идет о железобетоне, о композитах типа стеклопластиков, углепластиков, боропластиков и др. Эти вопросы рассматриваются в механике композитов – еще одной ветви МДТТ.

В составе многих инженерных конструкций и машин могут быть элементы типа пластин, оболочек и массивных тел. В этих случаях оценка напряженно-деформированного состояния выполняется более общими и строгими методами теории упругости, пластичности и ползучести с использованием, как правило, современных расчетных комплексов и быстродействующих ЭВМ.

Таким образом, сопротивление материалов представляет лишь начальный этап изучения проблем прочностной надежности инженерных объектов, но здесь закладывается фундамент инженерно-технической подготовки специалистов.

Перечень и аннотации некоторых вузовских учебников и учебных материалов по курсу сопротивления материалов

А. Учебники

Курс сопротивления материалов / Под ред. *М.М. Филоненко-Бородича*. Изд. 4-е, перераб. М.: Госиздат техн.-теор. лит-ры. В 2-х ч.
Часть I. 1955. 644 с.
Часть II. 1956. 539 с.

Один из наиболее полных курсов сопротивления материалов в отечественной учебной литературе. Первая часть включает материал, соответствующий общей программе вузовского курса сопротивления материалов. Во второй части приводится более глубокое изложение некоторых вопросов сопротивления материалов и механики твердого деформируемого тела (дополнения к теории изгиба и кручения, исследования устойчивости упругого равновесия стержней, экспериментальные методы, концентрация напряжений). Здесь же даны основные положения теории упругости и пластичности с приложением к решению плоских задач, а также задач изгиба и кручения тонкостенных конструкций.

Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. В двух томах. М.: Наука, 1965.
Том I. Элементарная теория и задачи. 363 с.
Том II. Более сложные вопросы теории и задачи. 480 с.

Как следует из заглавия томов, первый том содержит главным образом материал, изучаемый в технических вузах различного профиля. Второй том включает разделы, выходящие за рамки обычных курсов и представляющие интерес для отдельных специальностей, а также при углубленном изучении материала: расчет балок на упругом основании, особые случаи изгиба балок, расчет тонких пластин и оболочек, устойчивость балок, пластин и оболочек, продольно-поперечный изгиб, вопросы концентрации напряжений и др.

Сопротивление материалов / Под ред. *А.Ф. Смирнова*. Изд. 3-е. М.: Высшая школа. 1975. 480 с.

Учебник построен так, что при прохождении курса по программам различных специальностей отдельные главы и параграфы могут быть опущены. При этом учтена специфика расчета на прочность, устойчивость и колебания, с которыми приходится встречаться инженеру-строителю. Кроме традиционных разделов курса приведены расчеты балок на упругом основании (длинных и коротких), расчет кривых стержней, тонкостенных стержней открытого профиля, основы ползучести материалов и расчет тонкостенных сосудов.

Беляев Н.М. Сопротивление материалов. Изд. 15-е. М.: Наука, 1976. 607 с.

Один из самых распространенных учебников — переиздавался в течении 44 лет. В последнем издании исключен ряд разделов, уменьшено число примеров. Учебник предназначен для студентов различных инженерных специальностей, но изложение ведется с применением методики допускаемых напряжений. Даются краткие понятия о расчете по предельным состояниям и разрушающим нагрузкам. Вопросы потенциальной энергии рассматриваются в связи с определением перемещений в стержневых системах и расчетом статически неопределимых систем. Приводятся расчеты на ползучесть, кривых стержней, толстостенных и тонкостенных сосудов.

Тимошенко С.П., Гере Дж. Механика материалов. М.: Мир, 1976. 669 с.

Книга является энциклопедически полным курсом сопротивления материалов, представляя собой введение в основы механики твердого деформируемого тела в рамках стержневой модели. Изложение сопровождается большим количеством примеров, наглядным иллюстративным материалом, историческими комментариями.

Книга может быть использована как учебное пособие для первоначального изучения курса и как справочник для аспирантов, преподавателей и инженеров.

Гастев В.А. Краткий курс сопротивления материалов. Изд. 2-е. М.: Наука, 1977. 456 с.

В учебнике изложены все вопросы, обычно включаемые в курс сопротивления материалов. Также излагаются ряд специальных вопросов: теории криволинейных и тонкостенных стержней, основные модели неупругих тел (линейные упруго-вязкие и вязкопластические тела, нелинейные упруго-вязкие тела, ползучесть). В разделе динамических нагрузок рассматриваются ударные нагрузки и общие понятия о нагрузках при вынужденных колебаниях.

Терегулов И.Г. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. М.: Высшая школа, 1984. 472 с.

В отличие от традиционной формы изложения, в учебнике сначала рассматриваются основы механики твердого деформируемого тела (общие уравнения равновесия и совместности деформаций, анализ напряженно-деформированного состояния с использованием векторов и тензоров, механические свойства материалов на основе положений физики твердого тела, общие теоремы). Полученные результаты применяются при изложении изгиба, кручения, сложного сопротивления стержня, устойчивости, а также изгиба тонких пластин и оболочек, работы пластин в условиях плоской задачи и некоторых пространственных задач.

Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. Изд. 9-е. М.: Наука, 1986. 512 с.

Учебник соответствует программе для машиностроительных специальностей. Излагаются следующие разделы курса: растяжение, кручение (стержни круглого и некруглого сечений), изгиб, статически неопределимые системы, теория напряженного состояния, геометрические характеристики сечений, теории прочности, толстостенные трубы и тонкостенные оболочки, прочность при переменных напряжения, расчеты при пластических деформациях, сведения по композиционным материалам, устойчивость, методы испытаний материалов.

Степин П.А. Сопротивление материалов. Изд. 8-е. М.: Высшая школа, 1988. 367 с.

Учебник предназначен для студентов, изучающих курс сопротивления материалов по сокращенной программе (горно-металлургические, инженерно-экономические, электромашиностроительные, химико-технологические и др. специальности). Излагаются виды простых деформаций и сложное сопротивление стержня, устойчивость сжатых стержней, динамическое действие нагрузок и сопротивление материалов циклическим нагрузкам, пластическое деформирование, общие понятия о предельных состояниях.

Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. Изд. 5-е. М.: Высшая школа, 1989. 624 с.

Кроме разделов, традиционно входящих во все учебники сопротивления материалов рассматриваются расчет кривых стержней, общие теоремы о перемещениях в упругих системах и расчет статически неопределимых стержневых систем методом сил, некоторые тонкостенные оболочки и толстостенные цилиндры, понятие о расчетах на несущую способность.

В каждой главе даны задачи для самостоятельного решения и вопросы для самопроверки.

Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. М.: Изд. МАИ, 1994. 511 с.

Курс сопротивления материалов, изложенный применительно к программам машиностроительных и авиационных специальностей, дополнен элементами теорий упругости, пластичности и ползучести, а также механики разрушения. Представлены методы расчета элементов конструкций на прочность и долговечность с учетом пластичности, ползучести, усталости, малоцикловой и длительной прочности. Рассмотрены вариационные методы и основы метода конечных элементов.

Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Под ред. *Г.С. Варданяна*. М.: АСВ, 1995. 572 с.

В учебнике изложен курс сопротивления материалов (части I и II) с основами теорий упругости, пластичности, ползучести на основе механики деформируемого твердого тела (часть III). Даны основные зависимости МДТТ, затем с использованием их рассматриваются вопросы напряженно-деформированного состояния и оценки прочности при различных видах деформирования стержней. Из типов динамического воздействия рассмотрены движения тел с ускорениями и удар.

Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1995. 560 с.

Один из наиболее насыщенных информацией современных учебников создан на базе издававшегося ранее учебника под ред. А.Ф. Смирнова. Добавлены: расчет конструкций из композитных и неоднородных материалов, практические вопросы расчетов на ползучесть, основы механики разрушения, основы теории тонкостенных стержней замкнутого профиля и другие вопросы.

Для лучшего усвоения материала после каждой главы приводятся контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения (с ответами).

Б. Сборники задач

Сборник задач по сопротивлению материалов / Под ред. *В.К. Качурина*. Изд. 2-е. М.: Наука, 1972. 430 с.

Сборник содержит около 900 задач.

Сборник задач по сопротивлению материалов / *А.Я. Александров, В.Б.Геронимус, И.Б. Лазарев* и др. Новосибирск: НИИЖТ, 1981. 71 с.

Сборник включает 115 задач.

Сборник задач по сопротивлению материалов / Под ред. *А.С. Вольмира*. М.: Наука, 1984. 407 с.

Сборник содержит около 1000 задач.

Сборник олимпиадных задач по сопротивлению материалов / *М.Х. Ахметзянов, В.Б. Геронимус, П.В. Грес* и др. Новосибирск: СГАПС, 1995. 78 с.

Сборник включает около 400 оригинальных задач с ответами.

В. Руководства к решению задач

Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / *И.Н. Миролюбов, С.А. Енгалычев, Н.Д. Сергиевский* и др. Изд. 4-е. М.: Высшая школа, 1974. 392 с.

Буланов Э.А. Решение задач по сопротивлению материалов. М.: Высшая школа, 1994. 206 с.

Сложное сопротивление бруса и расчет стержневых систем. Задания по сопротивлению материалов с элементами строительной механики и методические указания по выполнению домашних задач / Сост. *Л.А. Краснов*. Новосибирск: СГАПС, 1996. 60 с.

Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. Методические указания для студентов II курса дневных факультетов / Сост. *П.В. Грес*. Новосибирск: СГАПС, 1996. 32 с.

Для заметок

Список обнаруженных опечаток

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
39	6 сверху	приходит	происходит
174	9 сверху	продольной силы	продольной оси
210	8 снизу	изображенные	изображенное
251	7 сверху	линейная	линейное
264	15 сверху	равным	равном

Учебное издание

Ахметзянов Марат Халикович
Лазарев Илья Борисович

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебник

Формат 60×90 $^{1}/_{16}$.
Гарнитура «Petersburg». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 18,75. Тираж 1000 экз. Заказ № 1809.

ООО «Издательство Юрайт»
140004, Московская обл., г. Люберцы, 1-й Панковский проезд, д. 1.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru

Отпечатано с электронных носителей издательства.
ОАО "Тверской полиграфический комбинат". 170024, г. Тверь, пр-т Ленина, 5.
Телефон: (4822) 44-52-03, 44-50-34, Телефон/факс: (4822)44-42-15
Home page - www.tverpk.ru Электронная почта (E-mail) - sales@tverpk.ru

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН
Учебное пособие для вузов. 2-е издание

Гриф УМО

***Тимофеев Г. А.**, доктор технических наук, профессор, заместитель заведующего кафедрой ТММ Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана.*

Изложены основы теории механизмов и машин (ТММ), изучены свойства отдельных типов механизмов, широко применяемых в самых разных машинах, приборах и устройствах; рассмотрены задачи совершенствования современной техники, создания новых высокопроизводительных машин и систем, освобождающих человека от трудоемких процессов.

*М. : Издательство Юрайт, 2011 г., 351 с., 84*108/32, код 347594, ISBN 978-5-9916-1137-4*

ФИЗИКА. МОДУЛЬНЫЙ КУРС (ДЛЯ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ)
Учебное пособие для вузов

Гриф УМО

***Оселедчик Ю. С.**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики ЗГИА; **Самойленко П. И.**, доктор педагогических наук, профессор кафедры физики МГУТУ; **Точилина Т. Н.**, кандидат педагогических наук, доцент кафедры физики ЗГИА.*

Модульный курс по физике разработан в соответствии с проектом программы по физике для студентов технических вузов России, подготовленной Ассоциацией кафедр физики технических вузов России. Основное отличие модульного курса для технических вузов по сравнению со стандартным учебником для вузов — следование Болонской системе: курс разбит на 12 модулей (каждый модуль соответствует одному зачетному кредиту или 432 часам по учебному плану). Предусмотрена методическая завершенность каждого модуля, который включает, кроме теоретического материала, типовые задачи, основные понятия, вынесенные для изучения, и примеры тестов.

Для студентов и преподавателей технических вузов.

*М. : Издательство Юрайт, 2010 г., 526 с., 84*108/32, код 320331, ISBN 978-5-9916-0243-3*

МАШИНОСТРОИТЕЛЬНОЕ ЧЕРЧЕНИЕ И АВТОМАТИЗАЦИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЧЕРТЕЖЕЙ
Учебник для вузов. 8-е издание

Гриф МО

Левицкий В. С., доктор технических наук, профессор.

Учебник соответствует программе курса «Инженерная графика» и современной тенденции глобальной компьютеризации учебного процесса. Особенность книги заключается в том, что все основные разделы курса машиностроительного черчения поддерживаются прикладными программами ЭВМ.

Для студентов высших технических учебных заведений.

*М. : Издательство Юрайт, 2011 г., 435 с., 60*90/16, код 335437, ISBN 978-5-9916-0783-4*

ОБЩАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА
Учебное пособие для вузов

Гриф УМО

Данилов И. А., кандидат технических наук, профессор МГУКИ.

В книге изложены основы теории электрического и магнитного полей, цепей постоянного и переменного токов, электрических машин, аппаратов и приборов. Основное внимание уделено выявлению физической сущности явлений, происходящих в электрических цепях, принципов работы электротехнических устройств.

Для студентов неэлектротехнических специальностей.

*М. : Издательство Юрайт, 2010 г., 673 с., 84*108/32, код 331043, ISBN 978-5-9916-0701-8*